

*Milanesi, Gastón*

## TEORÍA DE OPCIONES: MODELOS ESPECÍFICOS Y APLICACIONES PARA VALORAR ESTRATEGIAS, ACTIVOS REALES E INSTRUMENTOS FINANCIEROS

---

Milanesi, G. (2013). Teoría de opciones : modelos específicos y aplicaciones para valorar estrategias, activos reales e instrumentos financieros. Bahía Blanca: Editorial de la Universidad Nacional del Sur. Ediuns (Extensión) En RIDCA. Disponible en:  
<http://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/4234>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons  
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Argentina  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/ar/>

**GASTÓN MILANESI** **TEORÍA DE OPCIONES**  
MODELOS ESPECÍFICOS Y APLICACIONES  
PARA VALORAR ESTRATEGIAS, ACTIVOS  
REALES E INSTRUMENTOS FINANCIEROS



Milanesi, Gastón

Teoría de opciones : modelos específicos y aplicaciones para valorar estrategias, activos reales e instrumentos financieros. - 1a ed. - Bahía Blanca : Editorial de la Universidad Nacional del Sur. Ediuns, 2014. E-Book.

ISBN 978-987-1907-23-6

1. Finanzas. 2. Educación Universitaria. I. Título  
CDD 332

Fecha de catalogación: 21/02/2013



**Editorial de la Universidad Nacional del Sur**

ediuns@uns.edu.ar  
www.ediuns.uns.edu.ar



**REUN**

**Red de Editoriales  
de Universidades nacionales**

No se permite la reproducción parcial o total, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, sin el permiso previo y escrito del editor. Su infracción está penada por las leyes 11.723 y 25.446.

LIBRO UNIVERSITARIO ARGENTINO

Queda hecho el depósito que establece la ley 11.723.

Bahía Blanca, Argentina, Abril 2013.

© 2013 EdiUNS

## INDICE

5	INTRODUCCIÓN
17	MÉTODOS DE VALORACIÓN DE EMPRESAS Y MODELOS DE OPCIONES REALES
47	ÁRBOLES DE DECISIÓN, OPCIONES REALES Y MODELO INTEGRADO EN MERCADOS INCOMPLETOS
85	MODELOS BINOMIALES Y TRINOMIALES CON VOLATILIDAD VARIABLE PARA VALUAR OPCIONES REALES EN EBT
111	VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: PROBABILIDADES OBJETIVAS, NEUTRALES AL RIESGO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
131	VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: OPCIONES ARCO IRIS PARA MÚLTIPLES FUENTES DE INCERTIDUMBRE
163	VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE OPCIONES REALES A LA DETERMINACIÓN DEL MOMENTO ÓPTIMO DE COSECHA FORESTAL CON OPCIONES BARRERAS
181	VALUACIÓN DE OPCIONES REALES. MODELO BINOMIAL PARA LA VALORACIÓN DE EMPRESAS Y LOS EFECTOS DE LA DEUDA: ESCUDO FISCAL Y LIQUIDACIÓN DE LA FIRMA
199	VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: ASIMETRÍA Y CURTOSIS EN EL MODELO BINOMIAL
223	VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS: PROBABILIDADES, VOLATILIDAD Y ÁRBOLES BINOMIALES IMPLÍCITOS (IBT)
245	VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS. MOMENTOS DE ORDEN SUPERIOR Y ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD IMPLÍCITA. LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH Y EL MODELO BLACK-SCHOLES



## INTRODUCCIÓN

El valor de un activo financiero o real presenta dos componentes, a saber: (a) la corriente esperada de beneficios y (b) la tasa de actualización, siendo el valor actual la medida financiera empleada para cuantificar el valor intrínseco aludido. Por lo tanto, el valor de un activo (financiero o real) es equivalente a la sumatoria de las corrientes de beneficios esperados, homogeneizados por un factor de actualización que considera el valor tiempo del dinero y el riesgo asociado a la inversión. Ahora bien, de la noción de valor indicado se derivan dos enfoques extremos y complementarios de valuación: *valuación absoluta* y *valuación relativa* (Cochrane, J. 2005).

a. La *valuación absoluta* consiste en valorar los activos tomando como referencia la particular exposición del bien a factores fundamentales, los cuales reconocen sus orígenes en riesgos macroeconómicos. Típicos ejemplos de esta aproximación son los modelos basados en las decisiones de consumo-inversión del agente, de los cuales se derivan los modelos generales de equilibrio en la Teoría Financiera. El enfoque de valuación en cuestión es ampliamente utilizado en el campo académico. El fin es brindar una explicación económica del comportamiento actual o potencial de los precios de los activos objeto del proceso de valoración.

b. La *valoración relativa* enseña cuánto se puede aprender del comportamiento de un activo a partir del precio de otro u otros activos. En este enfoque se utiliza poca información sobre los factores fundamentales que intervienen en la formación del precio del o los activos que sirven de referencia en la valuación del bien. El fundamento de carteras réplicas contenido en el clásico modelo de valoración de opciones de Black-Scholes-Merton es un claro ejemplo de valoración relativa.

La ecuación básica de valor de un activo es sintetizada en dos expresiones:

$$p_t = E(m_{t+1}, x_{t+1})$$

Ecuación 1

$$m_{t+1} = f(\text{datos}, \text{parámetros})$$

## Ecuación 2

Donde  $p_t$  es el precio del activo,  $x_{t+1}$  es el flujo de fondos, y  $m_{t+1}$  es el factor estocástico de descuento. El método de valoración es conocido como valor actual o descontado de los flujos de fondos del activo (financiero o real). Este reconoce sus orígenes en el trabajo del político y mercader florentino Francesco Balducci Pegolotti, en el año 1340, en un manuscrito denominado *Practica della Mercatura* publicado en 1766 (Parker, R. 1968). Las primeras aplicaciones del concepto de valor actual correspondieron al campo de valuación de préstamos y seguros, luego su uso se extendió a lo que en la actualidad conocemos como Finanzas Corporativas. Las bases académicas para el modelo fueron brindadas por Marshall (1903) y Bohm-Bawerk (1903). La difusión y los principios fundamentales de lo que hoy se conoce como valuación de activos fueron enunciados años después por Fisher (1907, 1930), quien formuló cuatro criterios de elección alternativos para evaluar decisiones de inversión:

- a. La inversión que genere el mayor valor actual neto, descontando sus flujos de fondos esperados a la tasa de interés del mercado.
- b. La inversión en la cual el valor actual de sus beneficios exceda el valor actual de sus costos.
- c. La inversión que devenga una “tasa de retorno de sacrificio” por sobre la tasa de mercado.
- d. La inversión que comparada con la mejor alternativa de inversión marginal genere la mayor tasa de rendimiento por sobre la de mercado.

Los dos primeros criterios hacen referencia a la regla de decisión comandada por el criterio valor actual neto; la tercera es una variante del concepto de tasa interna de retorno (Boulding, K. 1935). Finalmente, la cuarta propuesta de evaluación hace referencia a la tasa marginal de rendimiento. Keynes (1936) sostenía que el rendimiento marginal del capital era la tasa de actualización aplicada a la corriente de beneficios que transforma el valor

actual de un activo en equivalente a su precio. Esta idea de valor presenta cierta similitud con el cuarto criterio de Fisher. Por su parte, Samuelson (1937) examinó las diferencias entre la tasa interna de retorno y el valor actual neto, llegando a la conclusión de que los inversores maximizan la segunda medida en lugar de la primera.

A partir de las bases enumeradas, el concepto de valor actual neto se ha expandido en los últimos años en la práctica de valuación de activos tanto financieros como reales. En la actualidad es común utilizar en los procesos de valuación cuatro métodos generales para estimar el valor intrínseco:

- a. La actualización de la corriente de dividendos (flujos de fondos) generados por el activo, a una tasa ajustada por riesgo, conocido como “modelo de descuento de dividendos” o “modelo de descuento de flujo de fondos” (DFF).
- b. Conversión de los dividendos (flujos de fondos) esperados a su equivalente a certeza actualizado al tipo libre de riesgo.
- c. Estimación del valor actual de la inversión sin apalancamiento financiero para luego agregar los beneficios y costos marginales de la deuda, método denominado “valor actual ajustado”.
- d. El valor de un activo es una función de su inversión inicial más el valor actual de la corriente futura de beneficios extraordinarios por encima del costo del capital, llamado “ganancias residuales”.

En el campo de la valoración de activos financieros, empresas, proyectos de inversión o estrategias, los tres primeros métodos son los de mayor difusión y uso. Genéricamente se agrupan bajo la denominación “Descuento de Flujos de Fondos” (*DFF*). Este método aplica la idiosincrasia del valor actual para estimar el valor intrínseco de la inversión, ya que sobre la corriente esperada de beneficios actualizados, empleando una tasa ajustada por el riesgo correspondiente a un activo equivalente a la inversión evaluada.

Una de las principales debilidades de estos métodos reside en suponer la irreversibilidad de la inversión, asumiendo la inexistencia de cursos de acción (estrategias) alternativos a los proyectados y cuantificados en la medida financiera de beneficio conocida como flujo de fondos. Por ello, la flexibilidad estratégica y táctica producto del dinámico

gerenciamiento de la decisión de inversión no es capturada por el tradicional enfoque de descuento de flujos de fondos (Dixit, A.- Pindyck, R. 1994; Trigeorgis, L. 1997; Mun, J. 2004).

Para subsanar las debilidades de método de DFF surge la Teoría de Opciones Reales (OR) como alternativa para comprender y cuantificar la flexibilidad estratégica de los activos objeto de valuación. El enfoque de OR reconoce sus raíces en el modelo de valoración de opciones financieras de Black, F. y Scholes, M. (1973), y Merton, R. (1973). El primer trabajo sobre opciones es desarrollado por Myers, S. (1977) para el supuesto de la estrategia (opción) de crecimiento. En la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas analíticas para el tratamiento de categorías específicas de opciones, entre ellas: (a) Opción de Diferimiento ((Mc Donal, R. - Siegel, J. 1986); (Paddock, J.-Siegel, D.-Smith, J. 1988); (Ingersoll, J.- Ross, S. 1992)); (b) Opción de Crecimiento ((Myers, S. 1977); (Trigeorgis, L. 1988); (Smit, J. 1996)); (c) Opción de Abandono (Myers, S.- Majd, S. 1990); (d) Opciones de expandir-contrair o extensión de la vida útil ((Trigeorgis, L.-Mason, S. 1987); (Keema, A. 1988)); (e) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennam, M.- Schwartz, E. 1985); (f) Opción de intercambio ((Margrabe, W. 1978); (Kulatilaka, N. 1988); (Kulatilaka, N. 1995)); Opciones financieras de insolvencia ((Mason, S.- Merton, R. 1985); (Trigeorgis, L. 1993)).

La resolución analítica de las opciones de una inversión se instrumenta mediante ecuaciones diferenciales estocásticas (tiempo continuo) o discretamente, a través del uso de árboles o grillas binomiales (Cox, J. -Ross, S. 1976; Luherman, T. 1998; Hull, J. 2005). Paralelamente, el enfoque de opciones reales se complementa con el análisis de decisiones incorporando tópicos como: riesgos de mercado y riesgos privados (sistemáticos y asistemáticos; Smith, J -Nau, R. 1995); inexistencia completa de activos financieros replicantes y el enfoque para proyectos sin activos financieros que revelen precios del riesgo (MAD *Marketed Asset Disclaimer*; Copeland, T. -Antikarov, V. 2001; Copeland, T. -Tuffano, T. 2004); y Opciones Reales y Teoría de Juegos (OR [-1]y *Games Theory*; Smit, H.- Trigeorgis, L. 2004).

El presente libro abarca diferentes tópicos específicos vinculados con la aplicación de la Teoría de Opciones sobre activos reales o financieros. Los mismos se presentan en diferentes capítulos donde se exponen el desarrollo teórico y el caso de aplicación del

modelo propuesto. A continuación se presentan cada uno de los temas con su respectivo resumen:

### **CAPÍTULO 1: MÉTODOS DE VALORACIÓN DE EMPRESAS Y MODELOS DE OPCIONES REALES.**

**Resumen:** empleando un caso sobre un contrato de concesión de explotación de petróleo se aplican los métodos de valuación contable, múltiples, descuento de flujos de fondos y opciones reales. Se exponen los pasos para aplicar el enfoque de descuento de flujo de fondos y la valoración de la flexibilidad estratégica (vender o expandir). Se emplean rejillas binomiales y el enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) para estimar la volatilidad. Finalmente, se compara el valor intrínseco obtenido con los distintos modelos, concluyendo respecto de las ventajas del análisis con opciones reales.

### **CAPÍTULO 2: ÁRBOLES DE DECISIÓN, OPCIONES REALES Y MODELO INTEGRADO PARA MERCADOS INCOMPLETOS**

**Resumen:** se realiza un análisis comparativo sobre las técnicas de valuación árboles de decisión y opciones reales en mercados financieros completos. Luego se extiende el análisis a los mercados incompletos, donde se propone un tratamiento alternativo de los riesgos privados (aquellos que no pueden replicarse mediante carteras de cobertura). En mercados completos, el análisis de opciones reales captura la flexibilidad estratégica del proyecto, pero los árboles de decisión presentan el inconveniente del factor estocástico de actualización empleado. En mercados incompletos, se propone un enfoque integrado entre opciones reales y funciones de utilidad del agente, para la estimación del precio de incertidumbres privadas de la inversión.

### **CAPÍTULO 3: MODELOS BINOMIALES Y TRINOMIALES CON VOLATILIDAD VARIABLE PARA VALUAR OPCIONES REALES EN EBT**

**Resumen:** el presente capítulo tiene una naturaleza pedagógica porque expone los supuestos y las diferencias entre distintos modelos de rejillas binomiales y trinomiales empleados en la valoración de opciones reales: Rendleman-Bartter (RB); Cox, Ross y Rubinstein (CRR); Jabbour, Kramin y Young (ABMC); Boyle (Trinomial) y Haatela

(volatilidad cambiante). Se emplea como unidad de análisis la valoración de una empresa de base tecnológica (EBT) dedicada a la generación de células madres para tratamientos medicinales y aplicaciones académicas. Las estrategias a valorar son: inversión-expansión o venta del proyecto. Se comparan los resultados de los diferentes modelos y las ventajas derivadas de aplicar rejillas trinomiales con volatilidad cambiante en la valoración de opciones reales.

#### **CAPÍTULO 4: VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: PROBABILIDADES OBJETIVAS, NEUTRALES AL RIESGO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD**

**Resumen:** las empresas de base tecnológica presentan valor por las flexibilidades estratégicas e intangibles. Las Opciones Reales capturan el valor estratégico. El trabajo compara el método binomial (CRR) y el método de Arnold y Crack (AC). El segundo trabaja con las probabilidades objetivas o “del mundo real”. Si bien arriban al mismo resultado, el segundo tiene mayor poder explicativo. Se presenta el análisis de sensibilidad del valor actual neto expandido sobre la tasa de interés y volatilidad para estudiar la anatomía del riesgo.

#### **CAPÍTULO 5: VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: OPCIONES ARCO IRIS PARA MÚLTIPLES FUENTES DE INCERTIDUMBRE**

**Resumen:** las opciones reales cuantifican el valor de la flexibilidad estratégica de una inversión. En tiempo discreto, emplean la distribución de probabilidad binomial para estimar los posibles valores de la inversión (activo subyacente). Para estimar el valor de la flexibilidad estratégica se utilizan los métodos de carteras réplicas o probabilidades neutras al riesgo. En el caso de varias fuentes de incertidumbre se debe trabajar con distribuciones de probabilidad multinomiales. Se propone un método operativo para estimar el valor de la flexibilidad estratégica con múltiples fuentes de incertidumbre, su estructura es la siguiente: primero se introduce el enfoque de opciones reales y las ventajas de trabajar con grillas binomiales o multinomiales, en lugar de trabajar con árboles binomiales. Se presentan los insumos para el tratamiento de la incertidumbre: probabilidades condicionales (Teorema de Bayes) y movimiento Browniano. Luego, la conveniencia de trabajar con el método de equivalentes ciertos, para incertidumbres tanto correlacionadas como

independientes. Finalmente, se presenta un marco instrumental provisto de cinco pasos para la valuación. En este se valúa una opción de abandono sobre un proyecto de inversión en investigación y desarrollo (R&D), suponiendo correlación e independencia entre las fuentes de incertidumbre.

## **CAPÍTULO 6:** VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE OPCIONES REALES A LA DETERMINACIÓN DEL MOMENTO ÓPTIMO DE COSECHA FORESTAL CON OPCIONES BARRERAS

**Resumen:** se propone el enfoque de Opciones Reales como herramienta económico financiera para la toma de decisiones estratégicas en el sector forestal. En términos de instrumentos financieros, consideraremos en particular una opción exótica conocida como *barrier option* del tipo *knock-in*. Suponemos que la proyección del precio de venta promedio de los subproductos sigue un proceso estocástico del tipo Geométrico Browniano, mientras que la producción se determina mediante la simulación de un turno forestal. La decisión de talar la masa forestal surge de comparar en cada periodo, el valor de flujo de fondos en cada nodo ( $FF_{ij(t)}$ ) de una rejilla binomial con el valor esperado en el próximo año ( $X_{t+1} \times e^{-r\Delta t}$ ). En un ejemplo analizado, el criterio tradicional del VAN indica que el mayor valor actual se produce en el instante  $t=0$  (año 10), mientras que el enfoque de Opciones Reales arroja que el máximo valor de ejercicio se da en el periodo  $t=8$  (año 18).

## **CAPÍTULO 7:** VALUACIÓN DE OPCIONES REALES. MODELO BINOMIAL PARA LA VALORACIÓN DE EMPRESAS Y LOS EFECTOS DE LA DEUDA: ESCUDO FISCAL Y LIQUIDACIÓN DE LA FIRMA

**Resumen:** el trabajo propone un modelo binomial para valorar empresas proyectando escenarios de continuidad o liquidación de la firma, a diferencia del método de descuento de flujos de fondos. Se utiliza la Teoría de Opciones Reales para estimar el valor de la firma, que resulta de un balance explícito de las ventajas y los riesgos de tomar deuda. El trabajo se estructura de la siguiente manera: se introduce y desarrolla el modelo teórico, y luego se ilustra mediante un caso de aplicación comparando los resultados obtenidos con el modelo de descuento de flujos de fondos. Se sensibilizan variables como: endeudamiento, tasa de impuesto y volatilidad, para analizar el impacto en el valor de la empresa. Finalmente, se concluye sobre las ventajas del modelo propuesto.

## **CAPÍTULO 8: VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: ASIMETRÍA Y CURTOSIS EN EL MODELO BINOMIAL**

**Resumen:** algunos activos reales, como en el caso de las empresas de base tecnológica (EBT), no cumplen con los supuestos requeridos por los clásicos modelos de la Teoría de Opciones Reales, a saber: (a) mercados incompletos y falta de activos financieros réplicas; (b) proceso estocástico no normal del subyacente (valor del proyecto). En tal sentido, se propone un modelo para valorar la flexibilidad estratégica de las EBT, sin perder la simplicidad del modelo binomial e incorporando momentos estocásticos de orden superior, utilizando la transformación de Edgeworth (Rubinstein, M. 1998). Con ello se provee de una herramienta para sensibilizar los probables valores de la asimetría y curtosis en el proceso estocástico del subyacente y el impacto en el valor de las estrategias analizadas.

## **CAPÍTULO 9: VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS: PROBABILIDADES, VOLATILIDAD Y ÁRBOLES BINOMIALES IMPLÍCITOS (IBT)**

**Resumen:** los Árboles Binomiales Implícitos permiten inferir, empleando precios de mercado, las probabilidades asociadas a los valores nodales finales proyectados del subyacente. A diferencia del modelo binomial, esta propuesta incorpora momentos de orden superior (asimetría y curtosis). Tomando el caso de valuación de una opción financiera americana de compra sin dividendos, negociada en el mercado local y siguiendo el método de Rubinstein (1994) y Arnold, Crack y Schwartz (2004): a) se exponen los pasos necesarios para la construcción de la rejilla binomial implícita; b) se comparan los resultados con el clásico modelo binomial; y c) se presentan el método recursivo y los coeficientes equivalentes ciertos variables.

## **CAPÍTULO 10: VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS. MOMENTOS DE ORDEN SUPERIOR Y ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD IMPLÍCITA. LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH Y EL MODELO BLACK-SCHOLES**

**Resumen:** una explicación acerca de la forma de la curva de volatilidad implícita en los contratos de opciones deriva de no considerar momentos estocásticos de orden superior

(Wilmott, 2009). En base al trabajo de Baliero Filho y Rosenfeld (2004), se propone un modelo iterativo para estimar la volatilidad implícita con la expansión de Edgeworth sobre el modelo Black-Scholes. En la primera sección se introduce el modelo. Posteriormente, se aborda un caso de valoración de un contrato de opción del mercado de capitales argentino, aplicando el modelo B-S con la expansión Edgeworth. Finalmente, se aportan las conclusiones relativas a la forma plana de la volatilidad obtenida del modelo transformado y el impacto de la curtosis sobre los contratos fuera del dinero.

## BIBLIOGRAFÍA

Black, F. - Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economics*, n° 81, pp. 637-654.

Bohm-Bawerk, A. (1903). *Recent Literature on Interest*, London, McMillan.

Brennan, M. - Schwartz, E. (1985) "Evaluating Natural Resources Investment", *Journal of Business*, n° 58, pp. 135-157.

Brennan, M. - Schwartz, E. (1985). "A New Approach to Evaluating Natural Resources Investment", *Midland Corporate Financial Journal*, n° 3, pp. 37-47.

Cochrane, J. (2005). *Asset Pricing*, Princeton, University Press 2 edition.

Copeland, T. - Antikarov, V. (2001). *Real Options*, New York, Texere LLC.

Copeland, T. - Tufano, P. (2004). "A real World to Manage Real Options", *Harvard Business Review*, n° 82 pp. 90-99.

Cox, J. - Ross, S. (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process", *Journal of Financial Economics* 7, n° 3, pp. 145-166.

Cox, J. - Ross, S. - Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach" *Journal of Financial Economics*, n° 3, pp. 229-263.

Dixit, A. - Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty*, New Jersey, Princeton University Press.

Fisher, I. (1930). *The Theory of Interest*, New York, McMillan.

Hull, J. (2005). *Options, Futures and Others Derivatives*, New Jersey, Prentice Hall.

Keynes, J. (1936) *The Theory General of Employment*, London, McMillan.

Kemma, A. (1988). "Options in Real and Financial Markets", Erasmus University, WP. Ph.Ddiss.

Kulatilaka, N. (1988) "Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Engineering Management*, n° 22, pp. 250-257.

Kulatilaka, N. (1995) *Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementary in Real Options. Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*, Westport Connecticut, Praeger.

Luherman, T. (1988). "Investment opportunities as real options: Get starting with the numbers", *Harvard Business Review*, n° 4 pp. 51-67.

Luherman, T. (1998). *Investment Science*, New York, Oxford University Press.

Margrabe, W. (1978). "The Value of an Option to Exchange one Asset for Another", *Journal of Finance*, n° 33 pp. 177-186.

Marshall, A. (1903). *Principles of Economist*, London, McMillan.

Mason, S. - Merton R. (1985). "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance", en Altman, E. - Subrahmanyam, M. (ed.), *Recent Advances in Corporate Finance*, Richard Irwin,.

McDonald, R. - Siegel, J. (1986). "Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down", *International Economic Review*, n° 26 pp. 321-349.

Merton, R. (1973). "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, pp. 141-183.

Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*, New York, Wiley.

Myers, S. (1977). "Determinants of Corporate Borrowing", *Journal of Financial Economics* 5, n° 2, pp. 147-176.

Myers, S. - Majd, S. (1990) "Abandonment Value and Project Life", *Advances in Futures and Options Research*, pp 1-21.

Paddock, J.- Siegel, D. - Smith, J. (1988). "Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease", *Quarterly Journal of Economics*, n° 103, pp. 479-508.

Parker, R. (1968). "Discounted Cash Flow in Historical Perspective", *Journal of Accounting Research*, n° 46, pp.58-71.

Pindyck, R. (1988). “Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm”, *American Economics Review*, nº 78, pp. 969-985.

Samuelson, P. (1937). “Some Aspect of the Pure Theory of Capital”, *Quarterly Journal of Economics*, 51, 469-496.

Smit, H. (1996). “The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands”, *Financial Management*, nº 26, pp. 5-17.

Smit, H. - Trigeorgis, L. (2004). *Real Options and Game Theory*, Princenton University Press; Princeton and Oxford, Praeger.

Smith, J. - Nau, R. (1995). “Valuing Risky Projects: Options Pricing Theory and Decision Analysis”, *Management Science*, nº 41, pp. 795-896.

Trigeorgis, L. (1988). “A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting”, *Advances in Futures and Options Research*, pp. 145-167.

Trigeorgis, L. (1993). “Real Options and Interactions with Financial Flexibility”, *Financial Management*, nº 22, pp. 202-224.

Trigeorgis, L. (1995). *Real options in capital investments: models, strategies and applications*, London, Praeger.

Trigeorgis, L. (1997) *Real options: managerial flexibility and strategy in resource allocation*, Cambridge, MIT Press.

Trigeorgis, L. - Mason, S. (1987). “Valuing Managerial Flexibility” *Midland Corporate Finance*, nº 5, pp. 14-21



# MÉTODOS DE VALORACIÓN DE EMPRESAS Y MODELOS DE OPCIONES REALES

## *Resumen*

Empleando un caso sobre un contrato de concesión de explotación de petróleo, se aplican los métodos de valuación contable, múltiplos, descuento de flujos de fondos y opciones reales. Se exponen los pasos para aplicar el enfoque de descuento de flujo de fondos y la valuación de la flexibilidad estratégica (vender o expandir). Se emplean rejillas binomiales y el enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) para estimar la volatilidad. Finalmente, se compara el valor intrínseco obtenido con los distintos modelos, concluyendo respecto de las ventajas del análisis con opciones reales.

**Palabras clave:** Descuento Flujo de Fondos, Rejillas Binomiales, MAD, Opciones Reales.

## 1 EL CONCEPTO DE VALUACIÓN DE EMPRESAS Y LA FLEXIBILIDAD ESTRATÉGICA

La valuación de empresas, proyectos o estrategias es un proceso intelectual y subjetivo donde las previsiones realizadas sobre el comportamiento de las empresas se transforman en una medida de valor. En otras palabras, es el camino a transitar para reducir, en un grupo de parámetros, la proyección de variables cualitativas y cuantitativas relacionadas con el valor de la inversión. Es una actividad integradora donde:

- a. Se identifican las fuentes del valor (atributos).
- b. Se cuantifican y proyectan los fundamentos del valor (proyecciones).
- c. Se establecen los parámetros necesarios para tomar la decisión de inversión (rendimiento y riesgo).

El resultado implica transformar el conocimiento actual y las proyecciones del activo real en valor. El valor intrínseco de un activo real, obtenido en el proceso de

valuación, consiste en la suma de los valores actualizados representativos de la ganancia futura de la firma a la fecha de la valoración. Este valor proviene de los fundamentos de ganancia y riesgo del activo, es decir, de las características tangibles, intrínsecas y descriptivas, propias de la capacidad de generar futuros beneficios. Por lo tanto, un método de valuación de activos reales debe integrar los elementos indicados, sin perjuicio de que algunas de las propuestas tengan una visión parcial del valor a raíz de su restringido alcance.

Se puede ensayar una primera aproximación a los métodos de valuación dividiéndolos en enfoques estáticos y dinámicos<sup>1</sup>:

- a) *Estáticos*: se caracterizan por estimar el valor de la firma sin considerar las flexibilidades propias de las potenciales alternativas, tanto estratégicas como tácticas, producto del comportamiento futuro de la organización. La valuación que considera solamente los cursos de acción actualmente proyectados es estática, su finalidad es la de establecer un valor general de la empresa en marcha. Este enfoque es
- b) complementario con la segunda aproximación, la de los modelos *dinámicos*. En este grupo se encuentran:
  - ***Valores Históricos***: basados en el criterio de costos y en los cuales se engloban los métodos contables.
  - ***Múltiplos y Comparables***: siendo los de mayor difusión los ratios: Precio-Ganancia (PER); Valor de Mercado-Valor de Libros, *Enterprise Value*; *Q-Tobin* y demás múltiplos de acuerdo a las características de la inversión.

---

<sup>1</sup> Los modelos estáticos y dinámicos no se enfrentan, por el contrario, ambos tratan de capturar dos caras del valor: los primeros el valor actual derivado de las estrategias de la empresa, sin considerar las potenciales flexibilidades, las cuales son valuadas por el segundo grupo. Los modelos estáticos son generales, ya que pueden ser utilizados a partir de la información pública y disponible para los agentes en el mercado de capitales. Los segundos implican un conocimiento más profundo de la organización, donde necesariamente se debe trabajar con información privada. Por ello, los modelos estáticos son el comienzo en el proceso de valuación, complementando sus resultados con los enfoques dinámicos como estimación del valor en un segundo nivel de análisis.

- **Valores Intrínsecos:** donde el valor se estima a partir de la corriente estática de beneficios esperados. Los clásicos modelos de valoración están dados por el Descuento de Flujos de Fondos (DFF) en sus diferentes variantes (Descuento de Flujos de Fondos con Costo Promedio Ponderado de Capital, Flujos a Capital, Valor Presente Ajustado) y los métodos basados en el criterio del Beneficio Económico (Ganancias Residuales y Valor Económico Añadido).
- c) **Dinámicos:** su principal atributo reside en el hecho de que dentro de este grupo se captura no solamente el valor actual de los flujos de fondos propios de las estrategias y tácticas vigentes al momento de valuación, sino que también se incorpora el valor de la flexibilidad estratégica de la empresa (abandonar, diferir, expandirse, contraerse, cierre-apertura, inversiones escalonadas, diversificación financiero-tecnológica-mercados y opciones múltiples). Dentro de este grupo se encuentra el enfoque de Opciones Reales (*Real Option Analysis*, ROA).

En la siguiente ilustración se presenta una matriz donde se relacionan el valor capturado por el modelo (histórico-intrínseco o teórico) y el grado de flexibilidad estratégica incorporado en el valor (estáticos-dinámicos).

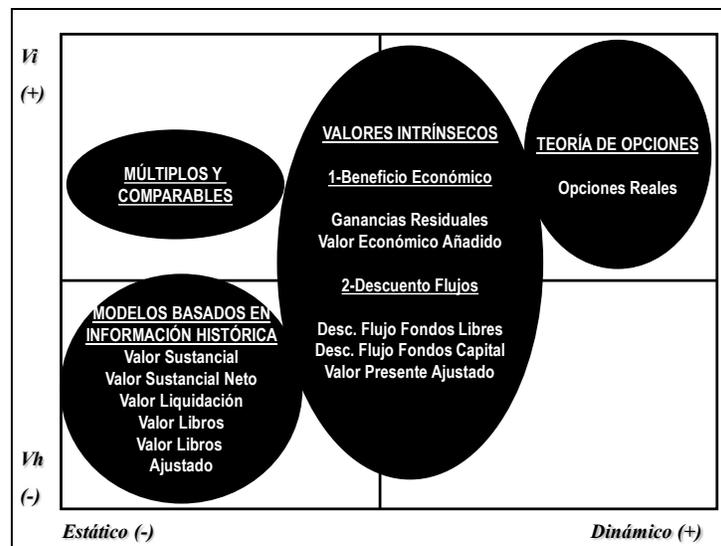


Ilustración 1: matriz métodos de valuación valores y flexibilidad

Uno de los métodos de valuación de activos reales de mayor difusión y uso, destinado a cuantificar el valor intrínseco de la inversión, es conocido como Descuento de Flujos de Fondos (*DFF*). Bajo esta metodología de valuación los beneficios y costos asociados a un proyecto son actualizados empleando una tasa ajustada por el riesgo representativo de la inversión evaluada. El valor actual de los flujos de fondos se adiciona y a posteriori se sustrae el costo de la inversión, con el objeto de determinar la contribución marginal a la riqueza de la firma y del propietario de los fondos. Sin dejar de reconocer el importante uso de esta herramienta a la hora de estimar el valor de un activo real, cabe señalar que una de las principales debilidades que posee consiste en que supone la irreversibilidad de la inversión. Es decir, no considera la flexibilidad estratégica o táctica propia de los diferentes cursos de acción que pueden tomar el activo real objeto de valoración. Por ello, el método de descuento de flujos de fondos es considerado dentro del grupo de modelos estáticos.

La Teoría de Opciones Reales (OR) ofrece un complemento al DFF, ya que considera la variabilidad vinculada al dinamismo derivado de la ejecución y concreción de las metas y objetivos propios de la inversión, por ello es considerada dentro del grupo de modelos dinámicos.

Las raíces del enfoque nacen en los trabajos de Black y Scholes (1973) y Merton, (1973); para opciones financieras; y en el campo de los activos reales en el trabajo de Myers, (1977) sobre la opción de crecimiento. A partir de estos trabajos, el campo de opciones ha observado un significativo desarrollo que va desde la valuación de simples opciones (abandono, diferimiento, expansión, contracción) hasta el tratamiento de flexibilidades de mayor complejidad (intercambio de tecnología, opciones compuestas, varias fuentes de incertidumbre). Además, el presente enfoque se complementa con el tratamiento analítico del comportamiento correspondiente a los agentes en el contexto, a través de la Teoría de Juegos.

En la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas analíticas para el tratamiento de categorías específicas de opciones, entre ellos, los principales trabajos para cada tipología:

- Opción de Diferimiento ((Mc Donal, R. - Siegel, J. 1986); (Paddock, J.-Siegel, D.-Smith, J. 1988); (Ingersoll, J.- Ross, S. 1992))

- Opción de Crecimiento ((Myers, S. 1977); (Pindyck, R. 1988); (Trigeorgis, L. 1988); (Smit, J. 1996))
- Opción de Abandono ((Myers, S.- Majd, S. 1990));
- Opciones de expandir-contrair o extensión de la vida útil ((Trigeorgis, L.- Mason, S. 1987); (Keema, A. 1988));
- Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo ((Brennam, M.- Schwartz, E. 1985); (Brennan, M.- Schwartz, E. 1985));
- Opción de intercambio ((Margrabe, W. 1978); (Kulatilaka, N. 1988); (Kulatilaka, N.- Trigeorgis, L. 1994); (Kulatilaka, N. 1995);
- Opciones financieras de insolvencia ((Mason, S.- Merton, R.1985); (Trigeorgis, L. 1993).

Paralelamente, el enfoque de opciones reales se complementa con el análisis de decisiones, incorporando tópicos como:

- riesgos de mercado y riesgos privados (Smith, J.-Nau, R.1995);
- inexistencia completa de activos financieros replicantes y el enfoque *MAD* (*Marketed Asset Disclaimer*, ((Copeland, T.- Antikarov, V. 2001) );(Copeland, T.- Tufano, P.; 2004));
- Opciones Reales y Teoría de Juegos (*RO y Games Theory*, (Smit, H.-Trigeorgis, L. 2004).

Asimismo, los métodos de resolución en tiempo continuo exigen utilizar los siguientes sistemas:

- ecuaciones diferenciales estocásticas en tiempo continuo (Dixit, A.- Pindyck, R. 1994);
- ecuaciones diferenciales estocásticas en tiempo discreto, utilizando árboles o grillas binomiales ((Cox, J.- Ross, S.-Rubinstein, M. 1979); (Hull, J. 2006)).

El presente capítulo no tiene por objeto realizar un estudio pormenorizado de los métodos de valuación de inversiones, sino, apelando a un estudio de caso, presentar los

diferentes valores obtenidos aplicando métodos estáticos y dinámicos. Respecto de estos últimos se enfatiza el uso de las Opciones Reales como medio para capturar el valor añadido de la flexibilidad estratégica del negocio.

## **2 EL PROCESO DE VALUACIÓN: EL CASO DE APLICACIÓN Y EL EMPLEO DE MÉTODOS ESTÁTICOS**

Con el objeto de ilustrar el uso de enfoques dinámicos y estáticos se utilizará el caso planteado por Brandao, L. Dyer, J y Hahn, W.(2005). Se pretende determinar el valor, para un inversor privado, relativo a la concesión y explotación de un yacimiento de petróleo bajo la forma jurídica de consorcio con el sector público. La participación privada representa el setenta y cinco por ciento (75%) de la inversión, el saldo restante representa la propiedad estatal. Las reservas totales se estiman en noventa y nueve millones (99 millones) de barriles; previéndose una extracción inicial de nueve millones (9 millones) de barriles. La duración nominal del contrato de concesión es de diez años. Adicionalmente se espera:

- el decrecimiento de la producción a razón de una tasa anual del 15%;
- el crecimiento del precio del crudo a razón de un 3% anual;
- el crecimiento de costos de explotación a razón del 2% anual;
- costos fijos estables (no hay cambio de estructura).

Para la proyección inicial, la estimación de flujos de fondos y la determinación del valor presente estático del proyecto se tienen los siguientes valores:

- precio del crudo por barril de sesenta y cinco dólares (u\$ 65); costos de producción de cincuenta dólares (u\$ 50);
- costos fijos de cinco millones de dólares anuales (u\$ 5 millones);
- amortización inversión fija de diez años (u\$ 300 millones /10 años);
- no se toma deuda.

La estimación de la tasa de actualización ajustada por riesgo emplea los siguientes insumos:

- El tipo sin riesgo supuesto del cinco por ciento anual (5%); rendimiento de mercado del 10,33%;
- La tasa ajustada por riesgo supuesta<sub>t-1</sub> se estima empleando el clásico modelo CAPM. Al ser una firma cerrada, se estima el coeficiente beta por comparables. Para ello, los datos adicionales son los siguientes: PER (Price-Earnings Ratio) empresa comparable 5; Beta apalancado empresa comparable 1,5; estructura de capital empresa comparable (B/E) =1.

Las opciones contenidas en el contrato se pueden ejercitar en el quinto año de vigencia de la concesión. Contractualmente se permite continuar, abandonar o expandir:

- continuar la explotación hasta el décimo año sin variación alguna (continuar);
- vender la explotación con valor fijado en cien millones de dólares (u\$100 millones), (abandonar);
- comprar participación estatal con un costo de cuarenta millones de dólares (u\$ 40 millones) y un incremento de 130% de los ingresos (4/3), (expandir).

<b>Opciones disponibles (t=5)</b>		
1: Comprar participación socios (25%)	\$ -40,00	1,33
2: Desinvertir (abandonar)		\$ 100,00
3: Continuar	\$ -	\$ -

*Cuadro 1: opciones disponibles en el año 5*

Finalmente, se supone que las fuentes de incertidumbre provenientes del comportamiento de costos operativos y el precio del petróleo siguen un proceso GBM (*Geometric Brownian Motion*).

**Método Contable:** a partir de los siguientes datos se comienza a estimar el valor según los diferentes métodos. En primer término el método contable, donde los ítems principales son listados en el siguiente cuadro.

<b>VALOR CONTABLE</b>	
Valor contable activos operativos (millones)	\$ 300,00
Valor contable activos redundantes (no operativos) (millones)	\$ -
Valor Deuda	\$ -
<b>Capital</b>	<b>\$ 300,00</b>
Ingresos por venta (millones)	\$ 585,00
Costos operativos (millones)	\$ -450,00
Costos fijos (millones)	\$ -5,00
Amortización del capital	\$ -30,00
<b>Resultado operativo después de impuestos ( @ =35%)</b>	<b>\$ 75,00</b>
Costo financiero (r=5%)	\$ -
<b>Resultado neto</b>	<b>\$ 75,00</b>
Partes sociales (división capital)	10
Resultado neto por acción	\$ 7,50
Tenencia en el proyecto (75%)	7,5
<b>Valor contable parte social individual</b>	<b>\$ 30,00</b>
<b>Valuación contable participación</b>	<b>\$ 225,00</b>

*Cuadro 2: estados patrimoniales y de resultados para estimar el valor contable*

El valor por parte social individual asciende a \$ 30 millones, siendo el valor total de \$225 millones. La estimación del valor no considera los futuros ingresos a generar por la explotación ni el contenido intangible del proyecto. Solamente son considerados los componentes patrimoniales tangibles (Estado de Situación Patrimonial) y los resultados realizados (Estado Resultados).

**Método por Múltiplos o Comparables:** el proyecto de inversión es cerrado en tanto y en cuanto no hace oferta pública del capital, por lo tanto, no tiene activo financiero representativo de sus derechos de propiedad que se negocie en el mercado de capitales. Para aplicar la valoración por múltiplos a partir del ratio PER (*Price-Earnings Ratio*) es menester buscar un activo financiero perteneciente a una empresa comparable en el

mercado y aplicar la ecuación 1, donde  $P_t$  y  $Ra_t$  representan el precio de mercado y el resultado por acción para la firma comparable.

$$PER = P_t / Ra_t$$

*Ecuación 1*

El ratio arroja múltiplo (PER) de 5, para determinar el valor del proyecto y de la parte social se aplica la ecuación 2, en este caso empleando el resultado por parte social de la empresa objeto de valuación.

$$V_t = PER \times Ra_t$$

*Ecuación 2*

En el siguiente cuadro se presentan los valores obtenidos de aplicar múltiplos:

<b>MÚLTIPLOS</b>	
PER empresa comparable en t0	5
<b>Valuación PER observado parte social individual</b>	<b>\$ 37,50</b>
<b>Valuación PER observado firma</b>	<b>\$ 281,25</b>

*Cuadro 3: valuación mediante múltiplos*

En este caso el valor obtenido para cada parte social asciende a \$37,50 y el valor total del proyecto es de \$281,25. A diferencia del método contable, este incorpora las expectativas actuales del mercado respecto de la inversión, debido al uso de precios de mercado. No obstante, parte de la debilidad de suponer que los mercados son perfectos, completos y eficientes. Supone que el precio refleja toda la información relevante en relación a la inversión. Es sabido que el precio observado en el mercado es producto de una transacción realizada que refleja expectativas pretéritas pero no futuras sobre beneficios del activo. Otro inconveniente reside en el hecho de que no todos los proyectos de inversión cuentan con activos financieros representativos de derechos de propiedad transables en el

mercado de capitales. Para subsanar ese defecto se seleccionan firmas comparables, las cuales pueden asemejarse en algunas características pero no replicar la totalidad de particularidades del proyecto en cuestión.

**Método por Descuento de Flujos de Fondos (DFF):** en este caso se proyecta la corriente de ingresos y costos futuros esperados, para luego actualizarlos empleando una tasa ajustada por riesgo equivalente a la inversión bajo estudio. La corriente de flujos de fondos proyectada del contrato de explotación se presenta en el siguiente cuadro:

DESCUENTO FLUJO DE FONDOS		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reservas de petróleo (millones)		99,00	90,00	81,00	73,35	66,85	61,32	56,62	52,63	49,23	46,35	43,90
Nivel de producción (millones)		9,00	9,00	7,65	6,50	5,53	4,70	3,99	3,39	2,89	2,45	2,08
Tasa de costo variable operativo (millones) por millón		\$ 50,00	\$ 51,00	\$ 52,02	\$ 53,06	\$ 54,12	\$ 55,20	\$ 56,31	\$ 57,43	\$ 58,58	\$ 59,75	\$ 60,95
Precio de crudo (por barril)		\$ 65,00	\$ 66,95	\$ 68,96	\$ 71,03	\$ 73,16	\$ 75,35	\$ 77,61	\$ 79,94	\$ 82,34	\$ 84,81	\$ 87,35
Ingresos por ventas (millones)		\$ 602,55	\$ 527,53	\$ 461,85	\$ 404,35	\$ 354,01	\$ 309,94	\$ 271,35	\$ 237,57	\$ 207,99	\$ 182,10	
Costos de producción (millones)		\$ -459,00	\$ -397,95	\$ -345,03	\$ -299,14	\$ -259,35	\$ -224,86	\$ -194,95	\$ -169,02	\$ -146,54	\$ -127,05	
Costo Fijo (millones)		\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00
Flujo de fondos después de impuestos (millones)		\$ 138,55	\$ 124,58	\$ 111,83	\$ 100,22	\$ 89,66	\$ 80,08	\$ 71,40	\$ 63,54	\$ 56,45	\$ 50,04	
Participación minoritaria (millones)		\$ -34,64	\$ -31,14	\$ -27,96	\$ -25,05	\$ -22,42	\$ -20,02	\$ -17,85	\$ -15,89	\$ -14,11	\$ -12,51	
<b>Flujo de fondos netos (millones)</b>		<b>\$ -</b>	<b>\$ 103,91</b>	<b>\$ 93,43</b>	<b>\$ 83,87</b>	<b>\$ 75,16</b>	<b>\$ 67,25</b>	<b>\$ 60,06</b>	<b>\$ 53,55</b>	<b>\$ 47,66</b>	<b>\$ 42,34</b>	<b>\$ 37,53</b>

Cuadro 4: flujo de fondos proyectados del contrato de concesión

El otro elemento a ser estimado es la tasa de actualización ajustada por riesgo de mercado de inversiones equivalentes a la considerada. El costo del capital se determina utilizando la siguiente expresión:

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \beta_i$$

Ecuación 3

En la ecuación anterior se plantea la clásica estructura correspondiente al modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), para estimar la tasa ajustada por riesgo. En la ecuación existen dos elementos provistos por el mercado para cualquier activo:  $r_f$  (tasa libre de riesgo) y  $E(r_m)$  (rendimiento de mercado). El coeficiente  $\beta_i$  (beta) es el atributo propio

de la inversión, el cual debe estimarse a partir de la información suministrada en el mercado de capitales, dada por el sistema de precios. Al ser un proyecto de capital cerrado, este coeficiente no puede ser estimado mediante la observación de los precios correspondientes a los activos financieros propios de la empresa objeto de valuación; por lo tanto, se deben emplear la técnicas de comparables y apalancamientos de coeficientes betas para su estimación (Damodaran, 2002). Las ecuaciones empleadas para ajustar la incidencia de la estructura de capital, a los efectos de estimar el coeficiente beta correspondiente, son las siguientes:

$$\beta_u = \frac{\beta_l}{1 + (1 - T) \frac{W_d}{W_e}}$$

*Ecuación 4*

$$\beta_l = \beta_u \left[ 1 + (1 - T) \frac{W_d}{W_e} \right]$$

*Ecuación 5*

En las ecuaciones precedentes,  $T$  representa la alícuota marginal de impuesto a la renta societaria y  $W_d$ ,  $W_e$  los valores del pasivo financiero ( $d$ ) y capital propio ( $e$ ). En el siguiente cuadro se explicitan las variables utilizadas para estimar la tasa de actualización:

<b>Tasa ajustada por riesgo</b>	<b>10%</b>
Tasa libre de riesgo	5%
Deuda ( $W_d$ )	0%
Capital propio ( $W_e$ )	100%
Tasa de impuesto	35%
Costo de la deuda $K_d$	5%
<b><math>\beta</math> deuda</b>	<b>0</b>
$\beta$ apalancado observado comparable	1,5
Estructura de capital empresa comparable ( $W_d/W_e$ )	1
<b><math>\beta</math> no apalancado</b>	<b>0,90909091</b>
<b><math>\beta</math> apalancado firma</b>	<b>0,90909091</b>
Rendimiento esperado de mercado	<b>10,50%</b>

*Cuadro 5: variables para estimar la tasa ajustada por riesgo*

Finalmente, el valor intrínseco del proyecto es obtenido de actualizar la corriente de beneficios y el flujo actual. Al flujo de fondos actual ( $FCF_0$ ) se le adiciona el valor actual de los flujos de fondos esperados ( $FCF_t$ ), actualizados por la tasa ajustada por riesgo ( $E(r_i)$ ):

$$NPV = \sum_{t=1}^n FCF_t (1 + E(r_i))^{-t} + FCF_0$$

*Ecuación 6*

DESCUENTO FLUJO DE FONDOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reservas de petróleo (millones)	99,00	90,00	81,00	73,35	66,85	61,32	56,62	52,63	49,23	46,35	43,90
Nivel de producción (millones)	9,00	9,00	7,65	6,50	5,53	4,70	3,99	3,39	2,89	2,45	2,08
Tasa de costo variable operativo (millones)	\$ 50,00	\$ 51,00	\$ 52,02	\$ 53,06	\$ 54,12	\$ 55,20	\$ 56,31	\$ 57,43	\$ 58,58	\$ 59,75	\$ 60,95
Precio de crudo (por barril)	\$ 65,00	\$ 66,95	\$ 68,96	\$ 71,03	\$ 73,16	\$ 75,35	\$ 77,61	\$ 79,94	\$ 82,34	\$ 84,81	\$ 87,35
Ingresos por ventas (millones)		\$ 602,55	\$ 527,53	\$ 461,85	\$ 404,35	\$ 354,01	\$ 309,94	\$ 271,35	\$ 237,57	\$ 207,99	\$ 182,10
Costos de producción (millones)		\$ -459,00	\$ -397,95	\$ -345,03	\$ -299,14	\$ -259,35	\$ -224,86	\$ -194,95	\$ -169,02	\$ -146,54	\$ -127,05
Costo Fijo (millones)		\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00
Flujo de fondos después de impuestos (millones)		\$ 138,55	\$ 124,58	\$ 111,83	\$ 100,22	\$ 89,66	\$ 80,08	\$ 71,40	\$ 63,54	\$ 56,45	\$ 50,04
Participación minoritaria (millones)		\$ -34,64	\$ -31,14	\$ -27,96	\$ -25,05	\$ -22,42	\$ -20,02	\$ -17,85	\$ -15,89	\$ -14,11	\$ -12,51
<b>Flujo de fondos netos (millones)</b>	<b>\$ -</b>	<b>\$ 103,91</b>	<b>\$ 93,43</b>	<b>\$ 83,87</b>	<b>\$ 75,16</b>	<b>\$ 67,25</b>	<b>\$ 60,06</b>	<b>\$ 53,55</b>	<b>\$ 47,66</b>	<b>\$ 42,34</b>	<b>\$ 37,53</b>
<b>NPV Flujo de fondos (millones)</b>	<b>\$ 443,83</b>	<b>\$ 488,21</b>	<b>\$ 422,73</b>	<b>\$ 362,22</b>	<b>\$ 306,19</b>	<b>\$ 254,13</b>	<b>\$ 205,57</b>	<b>\$ 160,06</b>	<b>\$ 117,16</b>	<b>\$ 76,45</b>	<b>\$ 37,53</b>
<b>Flujos de Fondos/NPV</b>	<b>0,00%</b>	<b>21,28%</b>	<b>22,10%</b>	<b>23,15%</b>	<b>24,55%</b>	<b>26,46%</b>	<b>29,22%</b>	<b>33,46%</b>	<b>40,68%</b>	<b>55,37%</b>	<b>100,00%</b>

*Cuadro 6: Flujos de Fondos, Valor Actual y Ratio Flujos de Fondos sobre Valor Actual*

Por cada año se estima el flujo de fondos neto, el valor actual para cada periodo correspondiente al flujo de fondos producto de aplicar la ecuación 6. Adicionalmente, se estima el ratio que representa el flujo de fondos del periodo sobre el valor actual del proyecto. El valor actual neto correspondiente al momento inicial es de \$443,83 millones. Este valor se acerca bastante al valor intrínseco o teórico de la inversión, pero no considera el valor añadido de la flexibilidad estratégica: vender o expandir participación del capital; solamente se valora la posibilidad de continuar en similares condiciones a las iniciales.

### 3 EL EMPLEO DE MÉTODOS DINÁMICOS: LAS OPCIONES REALES

Continuando con el ejemplo analizado, se valorará la flexibilidad estratégica del proyecto. Esta consiste en:

- continuar la explotación hasta el décimo año sin variación alguna (continuar);
- vender la explotación con valor fijado en cien millones de dólares (u\$100 millones), (abandonar);
- comprar participación estatal con un costo de cuarenta millones de dólares (u\$40 millones) y un incremento de 1,33 de los ingresos (4/3), (expandir).

Antes de continuar con los pasos necesarios para aplicar el método binomial de valoración de opciones, en el siguiente apartado se presentarán las ventajas computacionales de las rejillas binomiales sobre los árboles de decisión.

#### 3.1 Las rejillas como vehículo para diagramar el futuro (proceso estocástico del subyacente)

Por lo general, las fuentes de incertidumbres que gobiernan y explican los valores esperados de los activos reales son múltiples. En estos casos, al ser empleado el enfoque OR, se está frente a una tipología de opciones denominada arco iris (*“rainbow options”*). En las situaciones donde la incertidumbre es singular y suponiendo que el proceso estocástico del activo responde a un movimiento Browniano, la resolución analítica del valor de la inversión en tiempo discreto requiere simplemente del empleo de grillas binomiales. En caso contrario, se debe apelar a un enfoque multinomial, condicionado de que exista o no correlación entre las variables estocásticas.

Las grillas y los árboles de decisión devengan el mismo resultado, no obstante, las grillas son operativamente más sencillas de trabajar, sobre todo a medida que se incrementa el número de periodos. Smith, (2005) sostiene que las grillas binomiales, a diferencia de los árboles, son más simples computacionalmente e intuitivas. Estas, al representar el problema de manera compacta, son más simples de interpretar, ya que el árbol tiene mayor

información redundante en su recorrido (la misma probabilidad y estados equivalentes son representados en varios lugares).

Para recombinar los árboles se deben identificar estados de la naturaleza (en este caso, distintos valores del proyecto sin opciones) donde las futuras probabilidades y flujos se condicionan al estado actual, pero no al camino tomado para llegar a dicho estado. Las grillas ofrecen una capacidad de recombinación compacta. De hecho, si se comparan la cantidad de puntos finales y nodos entre una grilla binomial y un árbol se tiene:

1. *Puntos finales grilla binomial*: el número de puntos finales es igual al número de periodos (en un proyecto con  $n=10$ , sus puntos finales ascienden a  $n=11$ , debido a que se comienza contando desde el periodo 0, al ser este último considerado un periodo más).
2. *Nodos de decisión grilla binomial*: el número total de nodos decisorios es igual a  $(n+1)/2$  (para el caso de 10 periodos se tienen, adicionando el inicial,  $11*(11+1)/2=66$ ).
3. *Puntos finales árbol binomial*: tiene un número de puntos finales igual a  $2^{n-1}$  (para el caso de 10 periodos, contando desde el inicial, se tienen  $2^{11-1}=1024$ ).
4. *Nodos de decisión árbol binomial*: tiene un número de nodos igual a  $2^n-1$  (para el caso de 10 periodos, se tiene un total de  $2^{11}-1=2047$ ).

Claramente, se puede apreciar que el empleo de grillas es computacionalmente factible, mientras que los árboles requieren algoritmos de resolución más complejos. De hecho, este inconveniente de los árboles guarda directa relación con el número de periodos en consideración (ya sea por un incremento en los años o una disminución de la amplitud del intervalo). Se argumenta que, cuando se valúan opciones financieras, los practicantes trabajan con no más de 30 intervalos, ya que una grilla tiene 465 nodos y el árbol de decisión contiene dos mil millones de nodos:  $(2^{n-1})2^{31}-1=2.147.483.647$  (Hull, J. 2005:206).

Generalización del planteo para grillas binomiales. El Triángulo de Pascal: en un esquema binomial, el valor del subyacente será una sucesión de estados buenos ( $u$ ) y malos ( $d$ ), a partir de su valor inicial ( $S_0$ ). Para dos periodos, esa misma sucesión se observará en las

probabilidades del estado bueno ( $q$ ) y malo ( $1-q$ ), tal que: (borde superior; 1)  $S_{0x}u^2xd^0 \Rightarrow (q^2x1-q^0)$ ; (recombinación; 2)  $S_{0x}u^1*d^1 \Rightarrow (q^1x1-q^1)$ ; (borde inferior; 1)  $S_{0x}u^0xd^2 \Rightarrow (q^0*1-q^2)1$ . No obstante, en los estados intermedios cabe más de una posibilidad de arribar al estado final. En estos casos, en una grilla, a diferencia de un árbol, es fácil advertir más de un camino o trayectoria para arribar a estados intermedios. En un ejemplo de dos períodos, existirían dos formas de arribar al estado final  $S_{0x}u^1xd^1$ : un camino sería el estado malo en el primer período, seguido del estado bueno en el segundo y viceversa. Por ello, la probabilidad asociada al estado intermedio es la suma de las probabilidades de estas dos trayectorias. Por lo tanto, en el modelo de dos períodos, al estado intermedio  $S_{0x}u^1xd^1$  le corresponde una probabilidad  $(q^1x1-q^1) \times 2^2$ .

En un problema con mayor número de períodos, la dificultad residiría en determinar la cantidad de veces que se repite la probabilidad; o dicho en otros términos, la cantidad de caminos o trayectorias para arribar a los estados intermedios (también llamados estados recombinantes). Una primera forma de resolver esta dificultad sería reproducir la grilla y contar el número de trayectorias para arribar a cada estado final. Existe una herramienta matemática que facilita dicha tarea: el triángulo de Pascal<sup>3</sup>. Para definir los valores en cada elemento que compone el triángulo se sigue la siguiente regla:

1. Los valores extremos son iguales a uno;
2. Los valores intermedios en cada columna se definen como la suma de los valores en los extremos de la columna precedente.

---

<sup>2</sup> Cabe tener en cuenta que para la resolución del problema, en este caso se asume que resulta indistinto al decidir el modo en que se arriba a un cierto estado final y esto puede no ser un supuesto aceptable en la práctica. De cualquier modo, si ese fuera el caso, se podría considerar cada camino como un estado independiente con su correspondiente probabilidad y a partir de esta definición, llegar a la solución con el mismo procedimiento. Esta situación refleja la gran flexibilidad de las rejillas para adaptar la formulación del problema a distintos contextos.

<sup>3</sup> El Triángulo de Pascal o Tartaglia. Se tienen referencias que datan del siglo XII en China. De hecho, algunas de sus propiedades ya fueron estudiadas por el matemático chino Yang Hui (siglo XIII), así como por el poeta persa Omar Khayyam (siglo XII). El hecho de que se asocie el nombre del triángulo al filósofo y matemático Blas (*Blaisé*) Pascal (1623-1662) se debe a que el francés escribió el primer tratado sobre el triángulo. El matemático italiano Niccolo Fontana Tartaglia (1500-1557) fue uno de los primeros que publicó y difundió en la Europa de la Edad Moderna la herramienta matemática en cuestión.

La cantidad de combinaciones se obtiene de la siguiente manera: en la ilustración 1, si se toma como ejemplo el cuarto período, surgen cinco estados finales ( $T+1$ ), los cuales se reconocen por los cinco elementos de la columna correspondiente al cuarto período. El tercer estado del gráfico refleja las seis trayectorias que arriban a ese nodo. Dicho valor surge de sumar los valores indicados en la tabla correspondiente a la columna anterior ( $3 + 3 = 6$ ).

Los números del triángulo de Pascal coinciden con los números combinatorios. El número combinatorio  $C_n^m$  se encuentra en el triángulo en la fila  $n+1$ , en el lugar  $m+1$ . A la fórmula de los números combinatorios se le puede dar el carácter de fórmula general del triángulo, para saber, sin necesidad de construir todas las filas anteriores, cuál es el número que ocupa un lugar determinado:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ecuación 7

Periodos	0	1	2	3	4	5	6
						1	1
					1	5	6
			1	4	10	15	20
<b>Grilla Binomial</b>	1	1	2	<b>3</b>	<b>6</b>	10	15
		1	3	6	10	15	20
			1	4	10	15	20
				1	5	10	15
					1	6	15
						1	6
							1
<b>Estados recombinantes</b>		<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>32</b>	<b>64</b>
<b>Estados finales</b>		<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

Cuadro 7: Triángulo de Pascal

Con el recurso del triángulo de Pascal se puede retornar al intento de generalizar el planteo. El cuadro 8 ejemplifica los diversos estados de una grilla binomial para una opción de tres intervalos de tiempo.

Cantidad de periodos	0	1	2	3
Grilla con proceso estocástico binomial				$1(q^3 1 - q^0)$
			$1(q^2 1 - q^0)$	$3(q^2 1 - q^1)$
		$1(q^1 1 - q^0)$	$2(q^1 1 - q^1)$	$3(q^1 1 - q^2)$
	$1(q^0 1 - q^0)$	$1(q^0 1 - q^1)$	$1(q^0 1 - q^1)$	$1(q^0 1 - q^3)$
Estados Finales	1	2	3	4
Estados Recombinantes	1	2	4	8

Cuadro 8: rejilla con proceso estocástico binomial

La forma general que corresponde a cada elemento de la grilla precedente está representada por la siguiente expresión:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [q^m \times (1-q)^{n-m}]$$

Ecuación 8

En este caso,  $n$  son los períodos y  $m$  los movimientos ascendentes. El primer término del producto representa nuevamente la cantidad de trayectorias para arribar a cada estado intermedio (elemento del triángulo de Pascal).

Suponiendo que la opción sólo se ejerce en el período final (opción europea) y que su precio de ejercicio es representado por  $X$ , el valor actual de la opción  $OR_0$  es igual al valor actual del valor esperado de los valores intrínsecos ( $VA [VE(VI(S_T))]$ ). La forma general de la ecuación de valoración de opciones es:

$$OR_0 = e^{-rf(\delta t)T} \times \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [q^m \times (1-q)^{n-m}] \times \text{Max} [S_0 \times u^m \times d^{n-m}; X] \right\}$$

Ecuación 9

### 3.2 El método binomial, el enfoque MAD y la valoración de un proyecto de inversión.

#### Pasos para su aplicación

A continuación se presentan de manera secuencial las etapas de aplicación del método binomial para valorar el proyecto en cuestión.

**Paso 1: identificación de las variables relevantes:** los *inputs* necesarios para aplicar el modelo son los siguientes:

Intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ): para el proyecto bajo análisis se consideran diez periodos de un año cada uno. El intervalo de tiempo es igual a 1.

Valor del activo Subyacente ( $V$ ): Copeland y Antirnikov (2001) proponen el enfoque MAD para proyectos que no tienen activo financiero réplica. Se supone que el mercado financiero es completo y que el valor del activo réplica del proyecto es representado por el valor actual neto estimado a partir de la proyección de sus flujos de fondos sin flexibilidad, actualizados por una tasa que refleje el riesgo de inversiones equivalentes al objetivo de valuación. En el caso de estudio, el valor del subyacente  $V_0$  asciende a cuatrocientos cuatro c/5/100 millones (\$443,83 millones).

Volatilidad de los rendimientos del proyecto ( $\sigma$ ): se supone que el proceso estocástico que sigue el activo subyacente (bajo este enfoque, el valor actual del proyecto) es del tipo GBM y consecuentemente, distribución normal de los rendimientos. En este caso, la volatilidad es estimada aplicando la técnica de simulación discreta del rendimiento del proyecto en el periodo 1. Para ello, se calcula el logaritmo del cociente entre el valor actual neto del proyecto en el momento 1 y el momento inicial (0). La ecuación empleada es la siguiente:

$$Z = \text{Ln} \left( \frac{VAN_1}{VAN_0} - 1 \right)$$

Ecuación 10

Se utilizó el aplicativo Crystal Ball ®, donde se plantearon 10.000 iteraciones y distribución normal. La simulación arrojó un valor de  $\sigma$  igual a un cuarenta y seis por ciento (46,6%). Una de las principales debilidades de este enfoque reside en que la volatilidad se supone constante durante la vida del proyecto.

Coeficientes de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ): se supone que los movimientos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) siguen un proceso estocástico GBM, con distribución de probabilidad lognormal, empleando la transformación para la estimación de los parámetros (Cox, J.- Ross, S. - Rubinstein, M. 1979):

$$u = e^{\sigma t}$$

Ecuación 11

$$d = e^{-\sigma t} = \frac{1}{u}$$

Ecuación 12

Para las fuentes de incertidumbre, las probabilidades neutrales al riesgo  $p$  y  $1-p$  se estiman con los  $u$ ,  $d$  y  $r$  (tipo sin riesgo), correspondientes a cada una de ellas,

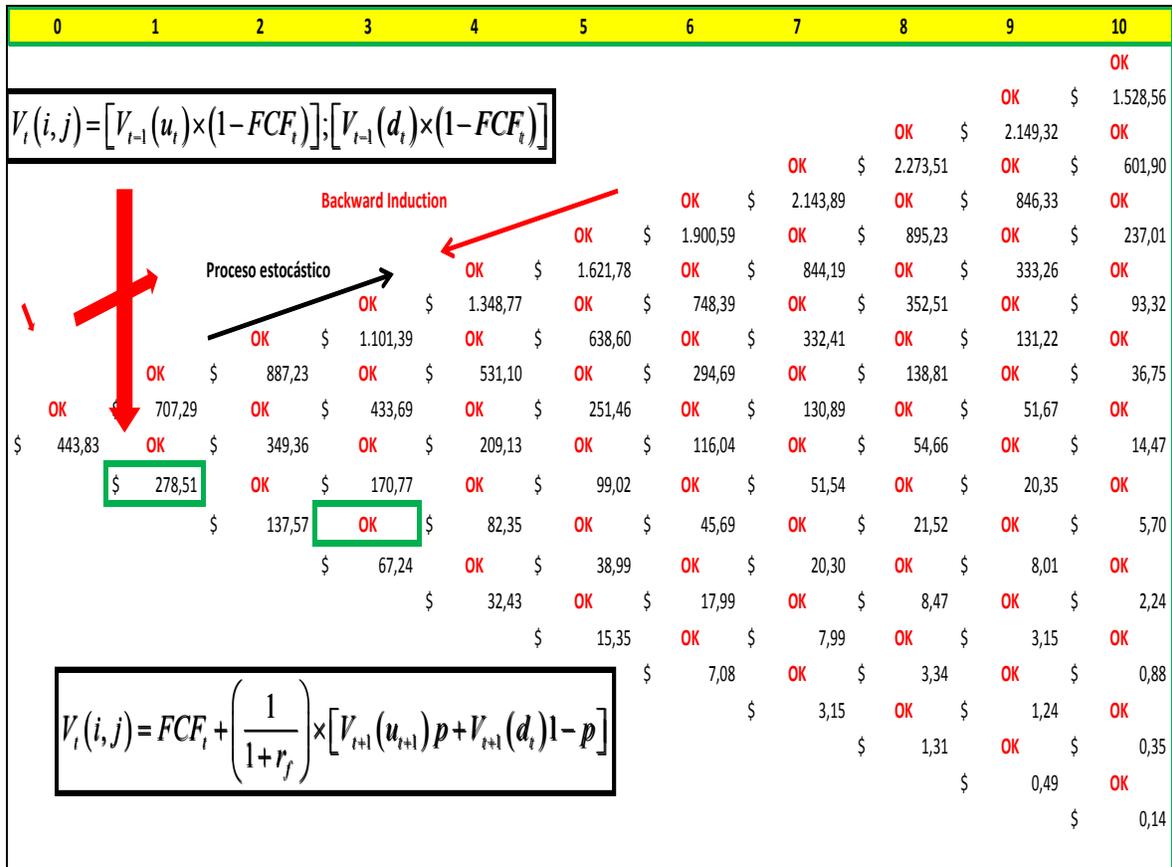
$$p = \frac{(1+r_t) - d}{u - d}$$

Ecuación 13

Parámetros			
<b>VAN (V0)</b>	\$ 443,83	<b>u =</b>	1,594
<b><math>\delta</math></b>	46,60%	<b>d=</b>	0,628
<b><math>\Delta t</math></b>	1	<b>r<math>\Delta t</math>=</b>	5,00%
<b>r</b>	5,00%	<b>p=</b>	0,437
		<b>1-p=</b>	0,563

Cuadro 9: parámetros VAN (Valor actual neto del proyecto);  $\sigma$  (volatilidad de los rendimientos estimada con simulación discreta del logaritmo del rendimiento);  $\Delta t$  (intervalo de tiempo);  $r$  (tipo sin riesgo);  $u$  (coeficiente de ascenso);  $d$  (coeficiente de descenso);  $p$  (probabilidad neutral al riesgo);  $1-p$  (complemento).

**Paso 2: planteo de la rejilla binomial:** esta etapa comprende la construcción de una rejilla en tiempo discreto, que aproxima el proceso GBM correspondiente al valor del activo subyacente mediante una distribución binomial. La primera rejilla corresponde al valor del subyacente; para ello se parte del valor actual inicial ( $V_0$ ) y a cada nodo se le aplican los correspondientes coeficientes de ascenso y descenso (ecuaciones 11 y 12), a saber:



Cuadro 10: rejilla binomial proceso estocástico del valor del proyecto

En el cuadro se expande el proceso estocástico que sigue el valor del subyacente. Este presenta dos direcciones:

- a. Hacia adelante, donde el valor para cada nodo se estima aplicando la siguiente ecuación:

$$V_t(i, j) = [V_{t-1}(u_t) \times (1 - FCF_t)]; [V_{t-1}(d_t) \times (1 - FCF_t)]$$

Ecuación 14

Para cada instante de tiempo ( $i$ ) y para cada nodo ( $j$ ) se presentan las diferentes combinaciones ascendentes ( $u$ ) y descendentes ( $d$ ). Del valor intrínseco total se ajusta el valor cierto del flujo de fondos correspondiente a cada periodo ( $FCF_t$ ).

- b. Hacia atrás, con el objeto de controlar la equivalencia de resultados. La ecuación 12 es igualada con la siguiente ecuación:

$$V_t(i, j) = FCF_t + \left( \frac{1}{1 + r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1 - p]$$

Ecuación 15

En este caso, el valor para cada nodo es igual al flujo de fondos correspondiente al periodo más el valor actual del nodo de ascenso  $V_{t+1}(u_{t+1})$  y descenso  $V_{t+1}(d_t)$  del periodo siguiente, ajustado por el equivalente cierto y su complemento ( $p, 1-p$ )<sup>4</sup>. Un dato adicional que se requiere para estimar el valor del subyacente es el desarrollo del proceso estocástico de los flujos de fondos. Primero se debe estimar el ratio flujo de fondos a valor actual de cada periodo  $\bar{R}_t = \frac{FCF_t}{NPV_t}$ , dando una serie:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,000	0,213	0,221	0,232	0,245	0,265	0,292	0,335	0,407	0,554	1,000

Cuadro 11: ratios flujo de fondos a valor actual neto

<sup>4</sup> La función lógica empleada en la planilla de cálculo Microsoft Excel ® es la siguiente: =SI((J\$69\*J88+(K87\*\$D\$64+K89\*\$D\$65)\*(1/(1+\$D\$63)))=J88;"OK";"ERROR"). En este caso, J69 representa el ratio de flujos de fondos a valor actual neto del nodo; J88 es el valor actual neto del nodo obtenido mediante la ecuación 14; K87 y K89 representan el valor actual para el ascenso y descenso del periodo inmediato siguiente; D64 y D65 representan el equivalente cierto y su complemento; y D63 el tipo sin riesgo.

Para estimar el flujo de cada nodo se aplica la ecuación 16, donde el flujo es producto del ratio por el valor actual en ascenso y descenso respectivamente:

$$FCF_t(i, j) = \bar{R}_t \times V_t(u_t, t); \bar{R}_t \times V_t(d_t, t)$$

Ecuación 16

El cuadro 16 presenta el valor del proceso estocástico de los flujos de fondos correspondiente al proyecto. Los flujos de caja del proyecto reciben el sentido aleatorio del valor estimado en el cuadro 10, en consonancia con el enfoque MAD. Se asume que el mercado es completo sobre la base de que el valor intrínseco del proyecto es igual al precio al cual este se negociaría. Luego, se estima el proceso estocástico del mismo utilizando los coeficientes determinados con el parámetro volatilidad calculada, mediante la simulación de los rendimientos esperados en el primer año.

Cabe destacar que la ecuación 14 no genera referencia circular con la ecuación 16, debido a que el ratio de flujo de fondos a valor actual neto es estimado con antelación al planteo de la rejilla, conforme surge del cuadro 6.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										\$ 1.528,56
								\$ 924,79	\$ 1.190,14	\$ 601,90
						\$ 717,25	\$ 468,64			
					\$ 555,28	\$ 364,15	\$ 237,01			
				\$ 429,14	\$ 282,43	\$ 184,53	\$ 93,32			
			\$ 331,10	\$ 218,65	\$ 143,39	\$ 72,66				
		\$ 255,03	\$ 168,98	\$ 111,21	\$ 72,66					
	\$ 196,10	\$ 130,37	\$ 86,10	\$ 56,46	\$ 36,75					
	\$ 150,54	\$ 100,42	\$ 66,54	\$ 43,79	\$ 28,61					
\$ -	\$ 77,22	\$ 51,34	\$ 33,90	\$ 22,23	\$ 14,47					
\$ 59,28	\$ 39,54	\$ 26,20	\$ 17,24	\$ 11,27						
	30,41	\$ 20,21	\$ 13,35	\$ 8,75	\$ 5,70					
	\$ 15,57	\$ 10,32	\$ 6,79	\$ 4,44						
		\$ 7,96	\$ 5,26	\$ 3,45	\$ 2,24					
			\$ 4,06	\$ 2,67	\$ 1,75					
				\$ 2,07	\$ 1,36	\$ 0,88				
					\$ 1,05	\$ 0,69				
						\$ 0,53	\$ 0,35			
							\$ 0,27			
								\$ 0,14		

Cuadro 12: rejilla correspondiente al flujo de fondos

**Paso 3: valoración de opciones reales:** en esta fase se debe estimar el valor de las opciones contenidas en el proyecto. En este caso, son ejercidas en el periodo 5 y se presenta la posibilidad de continuar, abandonar (mediante la venta) o expandir (adquiriendo la parte de capital estatal). La elección óptima descansa en estimar el mayor valor de las opciones contenidas. Para ello, en el quinto año se emplea la siguiente ecuación:

$$V_t(i, j) = \text{MAX} \left\{ FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]; FCF_t + FFOp + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p] \right\}$$

*Ecuación 17*

La ecuación anterior estima el máximo valor entre:

- El valor sin opciones:  $FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$
- El valor con opciones:  $FCF_t + FFOp + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$

Donde *FFOp* representa el flujo derivado de las opciones. Este valor se descompone de la siguiente manera:

- Continuar:  $FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$
- Expandir:  $FCF_t - Inv_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times \left( \frac{4}{3} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$
- Abandonar:  $FCF_t + V$

La expresión expandida es la siguiente<sup>5</sup>:

$$V_t(i, j) = \text{MAX} \left\{ FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]; FCF_t - Inv_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times \left( \frac{4}{3} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]; FCF_t + V_t \right\}$$

<sup>5</sup>La función de Microsoft Excel ® empleada es la siguiente: =MAX((J102+(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64)));(J102+H\$61+(I\$61\*(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64)));(J102+I\$62)). En este caso se tiene: continuar: J102+(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64); expandir: ));(J102-H\$61+(I\$61\*(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64)) y vender: (J102+I\$62)).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										\$ 1.528,56
								\$ 2.149,32	\$ 1.528,56	\$ 1.528,56
							\$ 2.273,51	\$ 2.149,32	\$ 601,90	\$ 601,90
						\$ 1.900,59	\$ 2.143,89	\$ 895,23	\$ 846,33	\$ 237,01
				\$ 1.560,14	\$ 1.621,78	\$ 1.900,59	\$ 844,19	\$ 895,23	\$ 333,26	\$ 237,01
			\$ 1.221,65	\$ 1.348,77	\$ 755,14	\$ 748,39	\$ 844,19	\$ 352,51	\$ 333,26	\$ 93,32
	\$ 957,51	\$ 1.101,39	\$ 471,37	\$ 531,10	\$ 638,60	\$ 294,69	\$ 332,41	\$ 352,51	\$ 131,22	\$ 93,32
\$ 485,62	\$ 707,29	\$ 384,55	\$ 433,69	\$ 232,71	\$ 251,46	\$ 116,04	\$ 130,89	\$ 138,81	\$ 51,67	\$ 36,75
\$ 443,83	\$ 319,09	\$ 349,36	\$ 207,14	\$ 209,13	\$ 126,20	\$ 116,04	\$ 51,54	\$ 54,66	\$ 20,35	\$ 14,47
	\$ 278,51	\$ 185,96	\$ 170,77	\$ 131,89	\$ 99,02	\$ 45,69	\$ 51,54	\$ 21,52	\$ 20,35	\$ 5,70
		\$ 137,57	\$ 129,28	\$ 82,35	\$ 110,32	\$ 45,69	\$ 20,30	\$ 21,52	\$ 8,01	\$ 5,70
			\$ 67,24	\$ 109,67	\$ 38,99	\$ 17,99	\$ 20,30	\$ 8,47	\$ 8,01	\$ 2,24
				\$ 32,43	\$ 104,06	\$ 17,99	\$ 7,99	\$ 8,47	\$ 3,15	\$ 2,24
					\$ 15,35	\$ 7,08	\$ 7,99	\$ 3,34	\$ 3,15	\$ 0,88
						\$ 7,08	\$ 3,15	\$ 3,34	\$ 1,24	\$ 0,88
							\$ 3,15	\$ 1,31	\$ 1,24	\$ 0,35
								\$ 1,31	\$ 0,49	\$ 0,35
									\$ 0,49	\$ 0,14
										\$ 0,14

Cuadro 13: rejilla con opciones

En el cuadro anterior se presenta la grilla correspondiente al valor con opciones (en la parte superior de cada nodo) y al valor sin opciones (en la parte inferior). En el periodo 5 se presenta el máximo valor para cada nodo en un recuadro. El procedimiento aplicado es la inducción recursiva, la diferencia entre el valor con opciones y sin opciones se presenta desde el periodo 5. Resume por cada nodo los valores esperados desde el periodo 6 al 10. Conforme se expresa en la ecuación 14, el valor sin opciones en el periodo 5, que integra los valores probables del periodo 6 al 10, está dado por la expresión

$$FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$$

El valor de la opción (continuar, expandir o abandonar) es el correspondiente a  $FFOp_5$ . Se presenta para cada nodo del quinto periodo la decisión óptima producto de la maximización de valor:

<b>5*u</b>	<b>\$ 1.979,32 Expandir</b>
	\$ 529,14 Abandonar
	\$ 1.621,78 Continuar
<b>4*u+1*d</b> <b>1*d+4*u</b>	<b>\$ 755,14 Expandir</b>
	\$ 268,98 Abandonar
	\$ 638,60 Continuar
<b>3*u+2*d</b> <b>2*d+3u</b>	<b>\$ 273,10 Expandir</b>
	\$ 166,54 Abandonar
	\$ 251,46 Continuar
<b>3*d+2*u</b> <b>2*u+3*d</b>	\$ 83,29 Expandir
	<b>\$ 126,20 Abandonar</b>
	\$ 99,02 Continuar
<b>1*u+4*d</b> <b>4*d+1*u</b>	\$ 8,55 Expandir
	<b>\$ 110,32 Abandonar</b>
	\$ 38,99 Continuar
<b>5*d</b>	\$ -20,88 Expandir
	<b>\$ 104,06 Abandonar</b>
	\$ 15,35 Continuar

*Cuadro 1: decisiones y valores para cada nodo del quinto periodo*

Si se esperan cinco escenarios favorables ( $u$ ), la alternativa a seleccionar es expandir; si los escenarios esperados son cuatro ascensos ( $u$ ) seguidos por un descenso ( $d$ ) en el valor del proyecto o a la inversa, nuevamente se debe expandir. Si los escenarios previstos son tres escenarios favorables ( $u$ ) y dos desfavorables ( $d$ ) o la inversa, se debe, en el primer caso expandir y en el segundo abandonar. Esto depende del peso específico de cada escenario. Finalmente, para cuatro escenarios desfavorables y uno favorable, o para todos desfavorables, la opción de mayor valor consiste en el abandono y la venta de la inversión. En cada nodo las decisiones quedan expresadas de la siguiente manera:

0	1	2	3	4	5
					expandir
				expandir	
		expandir	expandir	expandir	expandir
expandir	expandir	expandir	expandir	expandir	
	abandonar		abandonar		abandonar
		abandonar		abandonar	
			abandonar		abandonar
				abandonar	
					abandonar

Cuadro 2: decisiones vinculadas a nodos de las grillas

Finalmente, el valor de las opciones contenidas en la inversión se determina por la diferencia entre el valor total menos el valor tradicional;  $VAN_{ex} = VAN + OR$  para el caso bajo análisis es de \$41,79 millones. Este surge de la diferencia entre el valor expandido de \$485,62 millones y el valor actual neto de \$443,83 millones.

En el siguiente gráfico se presenta el comportamiento del valor del proyecto, obtenido con los diferentes métodos empleados:

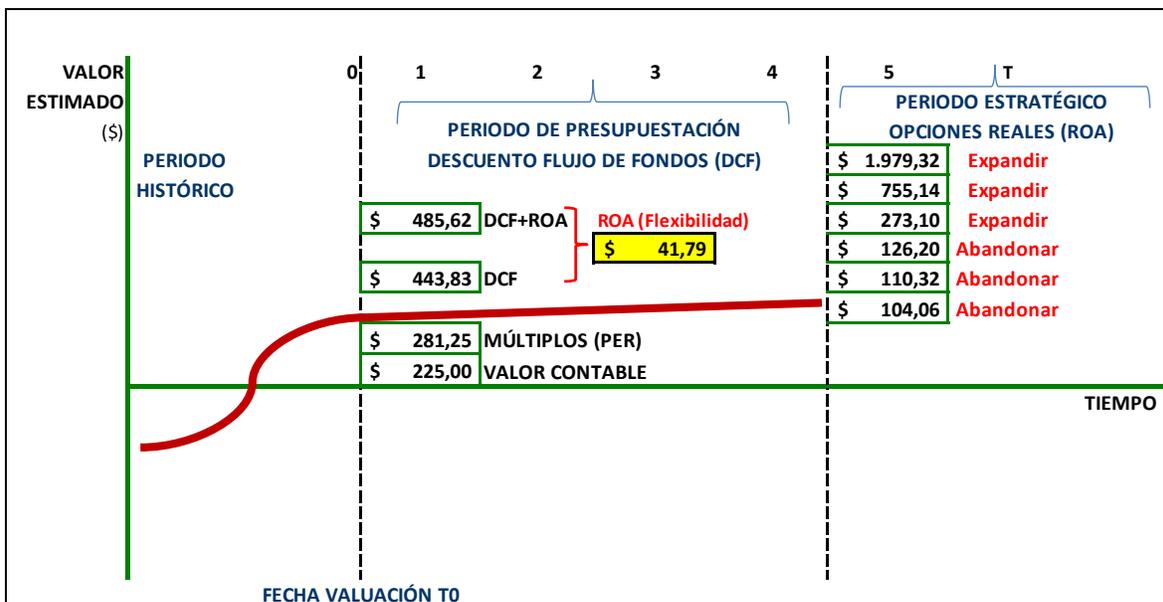


Ilustración 2: diferentes valores del proyecto en función de los métodos aplicados

## 4 CONCLUSIONES

Apelando a un ejemplo sobre un proyecto vinculado a una concesión de explotación, se analiza el comportamiento de los métodos de valoración más utilizados: estáticos (contables, múltiples y descuento de flujos de fondos) y dinámicos (opciones reales). Ambos se complementan, ya que los segundos añaden al valor estimado por el descuento de flujo de fondos el valor propio de las contingencias estratégicas.

Los aspectos de implementación y las ventajas del modelo binomial para la valoración de activos reales son:

- a. Las ventajas computacionales de las rejillas respecto de los árboles, dada la capacidad recombinante de las primeras.
- b. El enfoque MAD como un atajo interesante para suponer la volatilidad de proyectos o activos reales en mercados donde no existe activo financiero réplica.
- c. Los pasos del modelo binomial, la técnica recursiva y el uso de los coeficientes equivalentes ciertos.
- d. La capacidad del análisis de opciones de capturar la flexibilidad estratégica propia de caminos alternativos.

Valen las siguientes advertencias a raíz de las debilidades del enfoque:

- a. El árbol presenta estructuras menos compactas pero más detalladas para identificar estados futuros. A partir de los valores del proyecto sin opciones, mediante la aplicación de las probabilidades futuras, se obtienen los flujos de caja que dependen del estado actual, pudiendo observarse el camino que siguen para llegar a un estado futuro.
- b. El enfoque *Marketed Asset Disclaimer* supone que los mercados financieros son completos, esa es la razón por la cual el valor del proyecto determinado a partir de la actualización de los flujos de fondos futuros se supone equivalente al valor de negociación del activo, y consecuentemente, al valor que *debería* tener el activo réplica.

- c. El proceso estocástico supuesto es el geométrico browniano, basado en la distribución normal de probabilidad. En intervalos discretos la distribución apropiada es la binomial. No obstante, debe estudiarse y aplicarse el proceso estocástico correspondiente a las variables aleatorias del proyecto en cuestión. A su vez, se supone un comportamiento constante de la volatilidad a través del tiempo.

## Bibliografía

- Black, F.- Scholes, M. (Mayo-Junio de 1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Brandao, L.- Dyer, J.- Hahn, W. (2005). Using Binomial Decision Trees to Solve Real Options Valuations Problems. *Journal of Decision Analysis*(2), 69-88.
- Brennam, M.- Schwartz, E. (1985). Evaluating Natural Resources Investment. *Journal of Business*(58), 135-157.
- Brennan, M.- Schwartz, E. (1985). A New Approach to Evaluating Natural Resource Investment. *Midland Corporate Financial Journal*(3), 37-47.
- Copeland, T.- Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.). New York: Texere LLC.
- Copeland, T.- Tufano, P. (2004). A Real World to Manage Real Options. *Harvard Business School Review*(82), 90-99.
- Cox, J.- Ross, S.-Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Dixit, A.- Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.
- Hull, J. (2006). *Futures, Options and other Derivatives* (6 ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Ingersoll, J.- Ross, S. (1992). Waiting to Invest: Investment andr Uncertainty. *Journal of Business*(65), 1-29.
- Keema, A. (1988). *Options in Real and Financial Markets*. Working Paper Ph.D diss, Erasmus University, Finance, Erasmus.
- Kulatilaka, N.- Trigeorgis, L. (1994). The General Flexibility To Swicht: Real Options Revisited. *International Journal of Finance*(2), 123-145.
- Kulatilaka, N. (1988). Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems. *IEEE Transactions in Engineering Management*(22), 250-257.

- Kulatilaka, N. (1995). Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementary in Real Options. En L. Trigeorgis (Ed.), *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. Westport Conn.: Praeger.
- Margrabe, W. (1978). The Value of an Option to Exchange one Asset for Another. *Journal of Finance*(33), 177-186.
- Mason, S.- Merton, R. (1985). The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance. En Varios, *Recent Advances in Corporate Finance*. New York: Homewood Irwin.
- Mc Donal, R. - Siegel, J. (1986). Investment and the Valuation of Firms when here is an Option to Shut Down. *International Economic Review*(26), 321-349.
- Merton, R. (Primavera de 1973). The Theory of Rational Options Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- Myers, S.- Majd, S. (1990). Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options Research*(4), 1-21.
- Myers, S. (1977). Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics*(5), 147-176.
- Paddock, J.-Siegel, D.-Smith, J. (1988). Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease. *Quarterly Journal of Economics*(103), 479-508.
- Pindyck, R. (1988). Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm. *American Economic Review*(78), 969-985.
- Smit, H. (1996). The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands. *Financial Management*(26), 5-17.
- Smit, H.-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*(2), 89-102.
- Smith, J.-Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis . *Management Science*(5), 795-816.
- Trigeorgis, L.- Mason, S. (1987). Valuing Managerial Flexibiliy. *Midland Corporate Finance*, 5, 14-21.
- Trigeorgis, L. (1988). A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research*(4), 145-167.
- Trigeorgis, L. (1993). Real Options and Interactions with Financial Flexibility. *Financial Management*(22), 202-224.



# ÁRBOLES DE DECISIÓN, OPCIONES REALES Y MODELO INTEGRADO EN MERCADOS INCOMPLETOS

## *Resumen*

Se realiza un análisis comparativo sobre las técnicas de valuación árboles de decisión y opciones reales en mercados financieros completos. Luego se extiende dicho análisis a los mercados incompletos, donde se propone un tratamiento alternativo de los riesgos privados (aquellos que no pueden replicarse mediante carteras de cobertura). En mercados completos, el análisis de opciones reales captura la flexibilidad estratégica del proyecto, pero los árboles de decisión presentan el inconveniente del factor estocástico de actualización empleado. En mercados incompletos se propone un enfoque integrado entre opciones reales y funciones de utilidad del agente para la estimación del precio de las incertidumbres privadas de la inversión.

**Palabras clave:** árboles de decisión, opciones reales, mercados financieros completos, mercados financieros incompletos.

## 1 INTRODUCCIÓN

Cuando son evaluadas decisiones de inversión en el presupuesto de capital de una firma, el método empleado es el descuento de flujos de fondos (*DCF, Discounting Cash Flow*). La incertidumbre del proyecto es incorporada a través del empleo de una tasa de riesgo equivalente al activo objeto de la valuación. No obstante, el método reconoce sus limitaciones, ya que no captura la flexibilidad estratégica del proyecto (Mun, J. 2004).

Para solucionar el inconveniente del método anterior, se emplea el análisis mediante el enfoque de Opciones Reales (*Real Option Analysis*). El enfoque nace como una adaptación del modelo de valoración de opciones financieras de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), para capturar la flexibilidad estratégica de inversiones en activos reales. El primer planteo es desarrollado por Myers (1977), a partir de la opción de crecimiento. En la literatura existen diferentes propuestas analíticas para el tratamiento de categorías específicas de opciones, entre ellas: (a) Opción de Diferimiento ((Mc Donal, R. - Siegel, J. 1986); (Paddock, J.-Siegel, D.-Smith, J. 1988); (Ingersoll, J.- Ross, S. 1992)); (b) Opción

de Crecimiento ((Myers, S. 1977); (Trigeorgis, L. 1988); (Smit, J. 1996)); (c) Opción de Abandono (Myers, S.- Majd, S. 1990); (d) Opciones de expandir-contrair o extensión de la vida útil ((Trigeorgis, L.- Mason, S. 1987); (Keema, A. 1988)); (e) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennam, M.- Schwartz, E. 1985); (f) Opción de intercambio ((Margrabe, W. 1978); (Kulatilaka, N. 1988); (Kulatilaka, N. 1995)); Opciones financieras de insolvencia ((Mason, S.- Merton, R. 1985), (Trigeorgis, L. 1993)).

La resolución analítica de las opciones contenidas en un activo real se instrumenta mediante ecuaciones diferenciales estocásticas (tiempo continuo) o discretamente, mediante el uso de árboles o grillas binomiales ((Cox, J.- Ross, S. 1976); (Luherman, T. 1998); (Hull, J. 2005)). Paralelamente, el enfoque de opciones reales se complementa con el análisis de decisiones incorporando tópicos como: riesgos de mercado y riesgos privados (Smith, J.-Nau, R. 1995); inexistencia completa de activos financieros replicantes y el enfoque *MAD* (*Marketed Asset Disclaimer*, (Copeland, T.- Antikarov, V. 2001); (Copeland, T.- Tufano, P. 2004)); y Opciones Reales y Teoría de Juegos (*RO y Games Theory*, (Smit, H.-Trigeorgis, L. 2004).

En el presente trabajo se exponen las ventajas y limitaciones de los métodos de árboles de decisiones, opciones reales mediante carteras, probabilidades neutrales al riesgo y carteras equivalentes ciertas, en mercados completos e incompletos. Para ello se utiliza como ejemplo la clásica opción de diferir en tiempo discreto.

## 2 SUPUESTOS DEL MODELO

A continuación se explicitan los supuestos empleados en el análisis de los diferentes métodos del presente trabajo. El comportamiento de las variables aleatorias se determina en tiempo discreto, las probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza son asignadas por el “agente” que evalúa el proyecto. Las acciones del agente pueden ser terminales o intermedias (Hirshleifer, J.- Reiley, J. 1995).

En relación a la función de utilidad, se asume que las preferencias y creencias de la firma se originan en el propietario-gerente (agente). La figura del propietario se confunde con la del gerente. Este supuesto permite desarrollar “una función de utilidad corporativa, a partir de una declaración de la alta gerencia” (Spetzler, C. 1968).

Formalmente, las bases son las siguientes:

- Los horizontes temporales de decisión son notados como  $t=0,1,\dots,T$ .
- El conjunto finito de estados de la naturaleza está definido por  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .
- En cada punto de tiempo ( $t$ ) la firma posee información sobre el estado de la naturaleza representado por  $\omega_t$  (estado de información para el momento  $t$ ).
- A cada estado de la naturaleza se adjuntan probabilidades subjetivas. Dado un estado de información  $\omega_t$ , el valor esperado de la decisión evaluada se representa de la siguiente manera:  $E[-|\omega_t]$ .
- Los flujos de fondos riesgosos de los proyectos se designan  $\chi(t, \omega_t)$ . Se referencia el flujo de fondos al momento ( $t$ ) y al estado de la naturaleza ( $\omega_t$ ). A los efectos de abreviar la redacción se elimina la dependencia del estado de la naturaleza y simplemente se los escribe como  $\chi(t)$ .
- Las preferencias de la firma por la corriente de flujos de fondos son capturadas por la función de utilidad  $U(\chi(0)\dots\chi(T))$ . Se supone continua, cóncava y creciente para cada  $(0)\dots\chi(T)$ .
- Los proyectos generan corrientes de flujos de fondos  $c(t, \omega_t)$ . Un proyecto puede sintetizarse como un conjunto de estrategias, cada una de las cuales es notada con la letra  $\alpha$ . Los flujos de fondos condicionados a una estrategia particular se notan como  $c_\alpha$ . Se supone que las estrategias del proyecto son mutuamente excluyentes.
- Existen  $N+1$  títulos valores negociados en el mercado. Se supone, por razones de simplicidad, que los títulos no pagan dividendos en el marco temporal del modelo.
- Los precios de los títulos valores están dados por el vector  $s(t, \omega_t) = (s_0(t, \omega_t), \dots, s_N(t, \omega_t))$ .
- Para resaltar el papel de la movilidad de fondos en el mercado de capitales (invertir-prestar) se introduce un activo libre de riesgo, cuyo precio  $s_0(t, \omega_t)$  es  $(1+r_f)^t$  para todos los estados  $\omega_t$ .
- El mercado de capitales se encuentra libre de costos de transacción y restricciones. La firma puede comprar o vender la cantidad de acciones que estime conveniente.

- $\beta(t, \omega_t) = \beta_0(t, \omega_t), \beta_1(t, \omega_t), \dots, \beta_N(t, \omega_t)$  denota una estrategia de inversión en activos financieros que especifica una tenencia en carteras de acciones desde el momento  $t$  hasta  $t+1$  para cada estado  $\omega_t$ .

- El mercado de capitales es completo si todos los flujos derivados del proyecto pueden ser cubiertos perfectamente con una estrategia de cartera. Formalmente, el mercado de capitales es completo si para cada proyecto  $c$  existe una estrategia de cartera  $\beta$  replicante, que genere flujos de fondos correlacionados perfectamente con la corriente de beneficios esperados del proyecto. La estrategia replicante de cartera es definida:

$$[\beta_r(t-1, \omega_{t-1}) - \beta_r(t, \omega_t)] s(t, \omega_t) = c(t, \omega_t) \mathbf{1}$$

- Dado que el proyecto no genera flujos de fondos luego del momento  $T$ , la cartera replicante  $s$   $\beta_r(T, \omega_T) = 0$ . Para los intervalos precedentes, dado  $\beta_r(t, \omega_t)$  se puede encontrar la estrategia replicante precedente resolviendo  $\beta_r(t-1, \omega_{t-1}) s(t, \omega_t) = c(t, \omega_t) + \beta_r(t, \omega_t) s(t, \omega_t)$ .

- No existen oportunidades de arbitraje (p.e.: una oportunidad de arbitraje depende de una estrategia con inversión inicial  $\beta(0)s(0) \leq 0$ , que genera flujos de fondos positivos,  $[\beta_r(t-1, \omega_{t-1}) - \beta_r(t, \omega_t)] s(t, \omega_t) \geq 0$ ). Es una oportunidad de arbitraje ya que puede ser implementada sin inversión inicial, probabilidades de generar ganancias y ninguna probabilidad de generar pérdidas.

- Existe una distribución de probabilidad  $\pi$  para todo momento  $t$ :

$$s(0) = \sum_{\omega_t} \frac{\pi(\omega_t)}{(1+r_f)^t} s(t, \omega_t) = E_{\pi} \left[ \frac{s_t}{(1+r_f)^t} \right] \mathbf{2}$$

En donde  $E_{\pi}$  denota la expectativa respecto de  $\pi$ . La distribución es única si y solo si el mercado de capitales es completo y libre de arbitraje (Harrison & Kreps, 1979).

- Las probabilidades  $\pi(\omega_t)$  no son equivalentes a las probabilidades del proyecto bajo examen o a las de cualquier inversor. Se pueden suponer equivalentes a las empleadas por un hipotético inversor neutral al riesgo (Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M, 1979).

- Las probabilidades neutrales al riesgo pueden ser interpretadas como “precios de estados” debido a que  $\pi(\omega_t)/(1+r_f)^t$  es el precio actual de un derecho que paga una unidad monetaria solo si el estado  $\omega_t$  se cumple en  $t$ .

## 2.1 La opción de diferir

Para el desarrollo del trabajo se utilizará un caso de estudio de un proyecto de inversión de dos periodos con opción de diferir su inversión, siendo propietario del derecho y compartiéndolo (Smit, H.-Trigeorgis, L. 2004). La opción de diferir presenta tres estrategias alternativas:

Estrategia 1 (invertir ahora): oportunidad de invertir ahora \$104 y construir una planta que un año después tendrá un flujo de fondos dependiente del nivel de incertidumbre sobre “el comportamiento de la demanda”. En el estado de la naturaleza “bueno”, la planta devengará un flujo de beneficios de \$190. En el estado “malo”, se espera que la planta pague solamente \$70. La probabilidad de ocurrencia esperada, asociada a cada estado por la firma, es igual.

Estrategia 2 (diferir): la empresa puede obtener una licencia de explotación y exclusividad que le permite diferir la decisión de construcción por el periodo de un año. Si se elige la opción de diferimiento, al año se deben invertir \$112,32 (\$104 por el factor de capitalización al tipo sin riesgo que se supone del 8%) y se esperan flujos de fondos por \$190 o \$70 con igual probabilidad de ocurrencia, o en su defecto, se declina de invertir y se deja expirar la opción. Se supone que la licencia no presenta costo alguno.

Estrategia 3 (declinar): la empresa también puede rechazar la idea de llevar a cabo las estrategias precedentes, simplemente adoptando una actitud pasiva frente a la oportunidad de inversión.

En ambos casos se supone que la firma puede ser propietaria con exclusividad de la licencia de diferir o compartir el derecho entre los restantes participantes del mercado. En

el primer caso, no verá afectados los ingresos esperados asociados a cada escenario, teniendo exclusividad sobre el mercado; en el segundo, la participación se verá afectada por la acción de los competidores. Para el caso de compartir la opción, se asume *ad-hoc* que la reducción en los ingresos y costos de inversión producto de la menor porción de mercado es de un 50%. El comportamiento estratégico combinado con opciones es desarrollado por modelos comprendidos dentro de la Teoría de Juegos (Trigeorgis, L- Smit, H 2004; Milanesi, G. 2010).

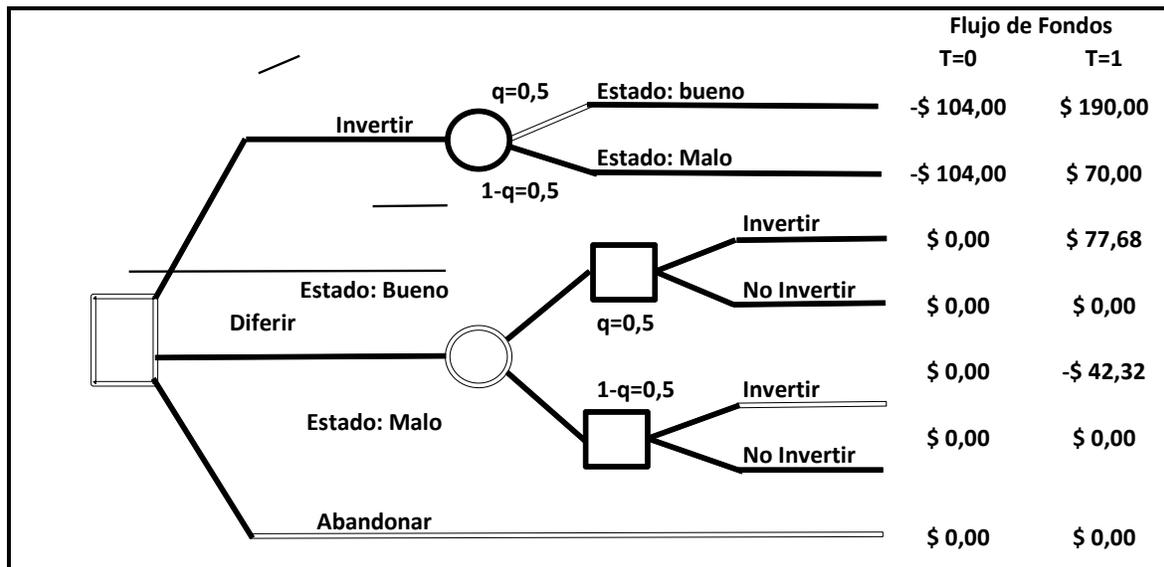


Gráfico 1: árbol de decisiones y estrategias invertir, diferir y abandonar

El comportamiento del activo réplica: se supone que existen dos activos financieros en el mercado de capitales; un libre de riesgo que permite a la firma tomar o prestar al 8% y una acción (*twin security*) cuyos valores futuros están perfectamente correlacionados con el nivel de demanda. En la figura 2 se expone el comportamiento del activo financiero: el valor actual de la acción réplica es de \$21,67 en el estado “bueno”, donde su valor será de \$38. En el estado “malo” la acción descenderá a \$14. Los activos financieros indicados son suficientes para completar el mercado, es decir: hay dos posibles estados en el mundo y existen dos activos financieros linealmente independientes. Los flujos de fondos riesgosos

del proyecto pueden ser representados e imitados por fondos provenientes de las carteras formadas por combinaciones lineales entre activos financieros riesgosos y el libre de riesgo.

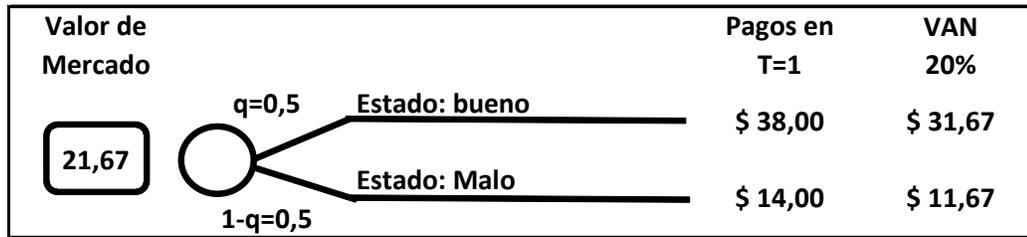


Gráfico 2: activo financiero "twin security"

## 2.2 Una nota técnica: grillas binomiales versus árboles y su empleo en opciones reales

Las grillas (*lattice*) y los árboles generan el mismo resultado, no obstante, existe un importante debate sobre el empleo de una u otra técnica para expandir y presentar un análisis de decisiones mediante la técnica de opciones reales. Una excelente explicación del uso de ambos métodos para describir el proceso estocástico en tiempo discreto del activo y su uso en el análisis mediante opciones reales, se encuentra en Luemberger (1998) y Hull (2005). El vehículo para estimar el valor intrínseco del proyecto utilizando el proceso recursivo se realiza a través del uso de rejillas binomiales dada la eficiencia operativa de las mismas (Smith, J. 2005), conforme fue indicado en el capítulo precedente. El ejemplo utilizado en el presente capítulo solamente contiene dos periodos, por lo tanto se desplegarán las secuencias en forma de rejillas en el cuerpo y bajo la forma de árboles en los cuadros anexos.

Mercados Completos	"Naive" Decision Tree Analysis	ROA ( <i>Real options</i> ) Carteras de Arbitrage	ROA ( <i>Real options</i> ) Equivalente Cierto
Mercados Incompletos	"Naive" Decision Tree Analysis	ROA ( <i>Real options</i> ) Límites Superiores Inferiores	Proceso Integrado de Decisión

Cuadro 1: métodos de valuación mercados completos e incompletos

### 3 MERCADOS COMPLETOS

A continuación se examinarán diferentes métodos de valuación y sus resultados, considerando mercados completos. Suponer mercados completos implica que todos los riesgos asociados a los flujos de fondos de los proyectos pueden ser cubiertos por una cartera replicante de activos financieros. Para este caso, los tres enfoques a emplear son:

#### 3.1 Árboles de Decisión (AD)

La idea básica del método de descuento de flujo de fondos consiste en que el valor se determina por los beneficios esperados actualizados a una tasa que refleje los riesgos de la corriente de flujos de fondos del proyecto. Las tasas empleadas en el proceso de actualización representan el rendimiento de equilibrio esperado, calculado a partir de los precios de activos financieros de riesgo equivalentes al proyecto. Resolviendo para  $r(t)$  se obtiene:

$$s_u(0) = E \left[ \frac{s_u(t)}{(1+r(t))^t} \right] \quad \mathbf{3}$$

Siguiendo la definición, el valor actual de la corriente futura de flujos de fondos se define de la siguiente manera:

$$v_u(0) = E \left[ \sum_{t=0}^T \frac{c_\alpha(t)}{(1+r(t))^t} \right] \quad \mathbf{4}$$

Ahora bien, la tasa ajustada por riesgo requerida  $r(t)$  variará dependiendo de la estrategia del proyecto (notada como  $\alpha$ ) y del paso del tiempo.

Si se aplica la técnica de valuación de árboles de decisión, en el ejemplo planteado, los valores correspondientes a los periodos finales de la acción réplica se encuentran perfectamente correlacionados con los flujos de fondos, representando 1/5 de los mismos.

La tasa ajustada por riesgo requerida por el proyecto para la estrategia 1, se obtiene resolviendo la siguiente expresión,  $\$21,67 = [0.5 \times (\$38) + 0.5 \times (\$14)] / (1+r)$ . La tasa asciende a  $r = 20\%$ , empleándola como factor de actualizando desde el periodo T hasta  $t=0$  se obtiene un valor actual del proyecto (invertir ahora) de \$4,33.

¿Qué tasa de actualización debe emplearse para la estrategia 2 (diferir)? La tasa del 20% refleja solamente los riesgos derivados de la estrategia 1 (invertir ahora), no así los correspondientes a la alternativa de diferir. Copeland y Antikarov (2003, pp. 350-351) sostienen: “El problema con el enfoque del árbol de decisión reside en no conocer la apropiada tasa de actualización. La tasa del 20% derivada del VAN del activo réplica es incorrecta, *para la estrategia 2*<sup>1</sup>, el comparable financiero no se encuentra correlacionado con los flujos de fondos de la estrategia de diferir”. Por ende, el árbol de decisión viola la ley del precio único, ya que no emplea la tasa ajustada por riesgo apropiada para cada alternativa en cuestión.

Aplicando la tasa del 20% se llega a un VAN de  $\$32,37 = [0.5 \times (\$64,73)]$  para la estrategia 2. Si este resultado es considerado válido y si el costo marginal de la licencia es menor a  $\$32,37$ , la alternativa indicada consiste en: comprar la licencia y diferir un año la decisión de construir la planta (a la espera de información). Si al cabo de ese periodo el estado revelado es “bueno”, invertir; de lo contrario, declinar.

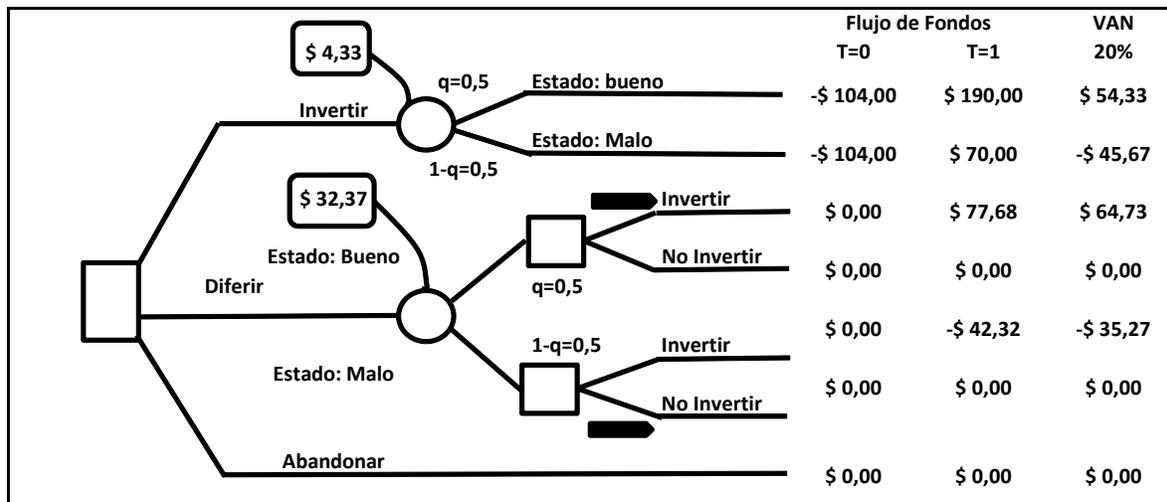


Gráfico 3: árbol de decisiones “naive decision tree analysis” en mercados completos. Propietario de la opción

<sup>1</sup> Las palabras en cursiva son agregadas.

En el caso donde no se tiene la licencia de la opción, el valor intrínseco de la estrategia 2 (diferir) asciende a \$16,18, producto de la reducción en la demanda por efecto del ingreso de competidores al mercado. <sup>[2]</sup> Este es superior al valor actual de \$4,33 correspondiente a la estrategia 1 (invertir ahora). En el anexo 1, la ilustración 1 presenta el árbol expandido, correspondiente al caso en el cual la licencia de la opción es compartida.

### 3.2 Opciones Reales (OR)

#### 3.2.1 Carteras Réplicas y probabilidades objetivas (CR)

A diferencia del caso anterior, en lugar de buscar en el mercado un activo financiero de riesgo equivalente al proyecto a valorar, se pretende construir una cartera que imite los flujos de fondos de la inversión en cuestión. Por la ley del precio único, valorar la cartera réplica de la estrategia implica valorar esta última. En equilibrio, ambas deben tener el mismo valor.

La cartera réplica consiste en  $\beta_s$  unidades de activo financiero (con correlación positiva con los flujos del proyecto) y  $\beta_f$  unidades de activo libre de riesgo.

$$V_0 = \beta_s S_0 - \beta_f \mathbf{5}$$

Suponiendo dos escenarios (estados  $u$  y  $d$ ),  $V_u$  y  $V_d$ , el valor de la cartera en cada estado (momentos  $t+1$ ) y  $S_u$   $S_d$ , se tiene:

$$\beta_s S_u + \beta_f (1+r) = V_u - [\beta_s S_d + \beta_f (1+r) = V_d] \mathbf{6}$$

Despejando en función de  $\beta_s$  se obtiene la cantidad de acciones a comprar para armar la cartera:

$$\beta_s = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} \mathbf{7}$$

La ecuación indica que el número de acciones a comprar depende del flujo incremental del proyecto (opción) sobre el cambio de valor del activo subyacente. La

cantidad de activo sin riesgo se obtiene reemplazando  $\beta_s$  en la expresión  $\beta_s S_d + \beta_f (1+r) = V_d$ :

$$\beta_s = \frac{V_d - \beta_f S_d}{(1+r)} \quad \mathbf{8}$$

En opciones reales, el valor de la estrategia es la suma de los flujos recibidos en el instante de valuación más el valor actual de la cartera réplica. Si  $\beta_r$  denota la estrategia replicante del proyecto  $c$ , su valor es definido como el valor corriente de la cartera más el valor en el momento 0 de los flujos de fondos del proyecto:

$$V_t = c_t + [\beta_s S_t - \beta_f] \quad \mathbf{9}$$

Según la ley del precio único, el valor del activo real caracterizado por sus condiciones de ilíquido y no divisible, en equilibrio es igual al valor de mercado si este fuere negociado. En caso contrario, si el proyecto tuviese un precio diferente al que surge de sumar el flujo al valor de la cartera ( $(0) + \beta_r(0) s(0)$ ), habría una oportunidad de arbitraje (p.e. invertir en el proyecto y vender en corto la cartera réplica). Continuando con el ejemplo, se puede construir fácilmente carteras réplicas, a saber:

Estrategia 1: se replica comprando exactamente 5 acciones perfectamente correlacionadas con los flujos ( $\$108,33 = [0.5 \times \$190 + 0,5 \times \$70]$ ). Por lo tanto, el valor actual (en  $t=0$ ) de los flujos de fondos esperados del proyecto, valuados a partir de la cartera  $\beta$ , ascienden a  $\$108,33$  (5 acciones  $\times$   $\$21,67$ ). Sustrayendo al valor actual de los flujos de caja el costo de la inversión, se obtiene un VAN de  $\$4,33$  ( $\$108,33 - \$104$ ).

Estrategia 2:  $\beta_f$  y  $\beta_s$  representan la cantidad de activo libre de riesgo y acción réplica para construir un portfolio que imite el flujo de caja de la estrategia en cuestión. Para los estados de la naturaleza (con probabilidad  $q$  y  $1-q$ ) el planteo es el siguiente:

$$\text{Estado "bueno": } \beta_s (\$38) - \beta_f(1.08) = \$77,68.$$

$$\text{Estado "malo": } \beta_s (\$14) - \beta_f(1.08) = \$0,00.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones de primer grado de dos incógnitas, el valor del activo libre de riesgo es  $\beta_f = \$41,96$ . El valor de la cartera de activos riesgosos (cartera

de acciones) es de  $\beta_s = 3,24$ . Para construir la cartera réplica de los flujos, el proyecto se debe vender en corto (pedir prestado) la suma de \$41,96 al tipo sin riesgo y comprar 3,24 unidades de la acción réplica. La estrategia 2 es valorada indirectamente a partir de valorar la cartera replicante construida en  $t=0$ :  $-\$41,96 + 3,24 (\$21,67) = \$28,17$ .

Valor opción de diferir: Propietario de la licencia. Carteras réplicas				
	0	1	$\beta_s$	$\beta_f$
		$C^+ = \max(V^+ - I, 0)$		
		\$ 77,68	$\beta_s = (C^+ - C^-) / (S^+ - S^-)$	
$C = \beta_s * S_0 - \beta_f$	\$ 28,17		3,24	
		$C^- = \max(V^- - I, 0)$		
		\$ 0,00		$\beta_f = (\beta_s * S^- - C^-) / (1 + r_f)$
				\$ 41,96

Gráfico 4: carteras réplicas, propietario de la opción y mercados completos

El valor es menor que el obtenido con el árbol de decisiones, el cual ascendía a \$32,37 con una tasa ajustada por riesgo del 20%. ¿Cuál es el valor correcto? Por la ley del precio único, si el mercado es eficiente, perfecto y completo, es absurdo pagar \$32,37 por el proyecto si se puede construir una cartera que replique los flujos de la alternativa mencionada, con una inversión levemente inferior, en este caso de \$28,17. Por lo tanto, la técnica del árbol de decisión arroja un valor incorrecto para la estrategia 2. La tasa de descuento empleada no refleja el riesgo asociado con el diferimiento y por ello no replica exactamente los flujos de fondos derivados de la estrategia. La tasa apropiada debe estimarse de la siguiente manera:

$$\beta_s (S_u x (q) + S_d x (1-q)) - \beta_f (1+r) = \beta_s (S_0) - \beta_f \quad 10$$

En la ecuación anterior, resolviendo en función de la tasa (despejando y calculando el cociente entre la cartera réplica en el momento  $t+1$  y  $t$ ), se obtiene la tasa ajustada por riesgo que imita el comportamiento de la estrategia<sup>2</sup>. Para el ejemplo, la misma asciende al 37,87% y aplicándola en el descuento de la estrategia 2 se llega a un valor de \$28,17. En el anexo, la ilustración 2 expande el árbol con las tasas diferenciales para cada estrategia.

<sup>2</sup> Para obtener la tasa ajustada por riesgo a la estrategia, necesariamente se debe calcular la cartera réplica, pero si esta es conocida, se conoce también el valor del proyecto y determinar la tasa de actualización tiene mera utilidad intelectual.

Por lo tanto, Opciones Reales (OR) y Árboles de Decisión (AD) arrojan resultados consistentes, pero los Árboles de Decisión requieren el empleo de tasas que reflejen los riesgos de las estrategias. En el ejemplo analizado, se debe utilizar la tasa del 20% para la estrategia 1 y la tasa del 37,87% para la estrategia 2. En el caso de las opciones, el riesgo es capturado por las carteras réplicas y la actualización solamente refleja el factor tiempo.

Si se compartiera la licencia de diferir, el retrasar la decisión de inversión supone un descenso en la demanda del 50%, debido a la intervención de los potenciales competidores en el mercado. En este caso, las proporciones de la cartera réplica son  $\beta_f = \$20,98$  y  $\beta_s = 1,62$ , tal que el valor del proyecto en  $t=0$ :  $-\$20,98 + 1,62 (\$21,67) = \$14,09$ . En el árbol, el valor ascendía a  $\$16,18$ , como consecuencia de una incorrecta valoración de los flujos, debida a la tasa de actualización empleada.

Valor opción de diferir: Comparte la licencia. Carteras réplicas				
	0	1		
		$C^+ = \max(V^+ - I(1+rf))$	$\beta_s$	$\beta_f$
		\$ 38,84	$\beta_s = (C^+ - C^-) / (S^+ - S^-)$	$\beta_f = (\beta_s S^- - C^-) / (1+rf)$
$C = \beta_s * S_0 - \beta_f$	$q=0,5$ \$ 14,09		1,62	\$ 20,98
	$1-q=0,5$	\$ -		
		$C^- = \max(V^- - I(1+rf))$		

Gráfico 5: carteras réplicas, comparte licencia y mercados completos

### 3.2.2 Probabilidades neutrales al riesgo y equivalentes ciertos (PNR)

Una alternativa al enfoque de opciones reales consiste en establecer el valor de las opciones contenidas en las estrategias, utilizando para la valoración probabilidades neutrales al Riesgo. Siempre que exista un activo financiero que imite los flujos de fondos del proyecto, se pueden obtener las probabilidades neutrales al riesgo. En este caso, el valor actual del activo financiero y del proyecto se obtiene a partir de: (1) probabilidades neutrales al riesgo y (2) actualizando por el tipo sin riesgo. La probabilidad neutral al riesgo es obtenida a partir de la siguiente ecuación:

$$p = \frac{(1+rf) - d}{u - d} \quad \mathbf{11}$$

Los estados de la naturaleza son representados por las letras  $u$  (*up*) y  $d$  (*down*),  $rf$  representa el tipo sin riesgo y  $p$  la probabilidad equivalente cierto. El valor de la estrategia se obtiene aplicando la siguiente ecuación:

$$V_0 = E_\pi \left[ \sum_{t=0}^T \frac{c(t)}{(1+r_f)^t} \right] \mathbf{12}$$

$E_\pi$  representa el operador de expectativas que indica la única distribución de probabilidades neutral al riesgo. Las probabilidades neutras al riesgo se encuentran contenidas en  $\pi$  ( $p$ ;  $1-p$ ). De forma extensiva, suponiendo un periodo ( $t+1$ ), el valor del proyecto es igual a:

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{p \times (c_{t-1} + V_t^u) + 1-p \times (c_{t-1} + V_t^d)}{(1+r_f)^t} \mathbf{13}$$

Para aplicar este enfoque se debe: (a) Estimar las probabilidades neutras al riesgo y (b) Utilizar las probabilidades neutras al riesgo en el proceso recursivo de estimación del valor actual del proyecto. Siguiendo con los datos del ejemplo, las probabilidades se estiman de la siguiente manera:  $\$21,67 = [p(\$38) + 1-p(\$14)]/1,08$ .

Resolviendo en función de  $p$  se obtiene un valor de  $p = 0,39166$  para el estado bueno y de  $0,60833$ , el de su complemento. El VAN de cada estrategia se obtiene ponderando flujos por equivalentes ciertos. El factor tiempo es reflejado por la tasa libre riesgo en el proceso de actualización. Corriendo hacia atrás en todas las ramas (*roll-back*) se obtienen los siguientes valores: estrategia 1  $\$4,33$  y estrategia 2  $\$28,17$ . Lo mismo vale para el caso en que se comparte la licencia, ambos consistentes con los valores obtenidos en el enfoque de opciones reales.

<b>Valor opción de diferir: Propietario de la licencia. Prob.Neutras al riesgo</b>		
	<b>0</b>	<b>1</b>
	$p=0,3916$	\$ 77,68
$C=p \cdot C(+)-1+p \cdot C(-)/1+rf$	\$ 28,17	
	$1-p=0,6083$	\$ 0,00
		$C+=\max(V(+)-I(1+rf))$
		$C-=\max(V(-)-I(1+rf))$

Gráfico 6: probabilidades neutras al riesgo, propietario de la opción y mercados completos

<b>Valor opción de diferir: Comparte licencia. Prob. Neutrales al riesgo</b>		
	0	1
		$C^+ = \max(V^+ - I(1+rf))$
	$p = 0,3916$	\$ 38,84
$C = p \cdot C^+ + (1-p) \cdot C^- / (1+rf)$	\$ 14,09	
	$1-p = 0,6083$	\$ 0,00
		$C^- = \max(V^- - I(1+rf))$

Gráfico 7: Probabilidades neutrales al riesgo, comparte licencia y mercados completos

En el anexo, la ilustración 3 presenta el árbol expandido con las probabilidades neutrales al riesgo.

### 3.2.3 Consistencias entre carteras réplicas y probabilidades neutrales al riesgo

A diferencia de lo que ocurre cuando se trabaja con probabilidades objetivas, las probabilidades neutrales al riesgo permanecen constantes, sin perjuicio de las variaciones de las carteras de cobertura y de la tasa de actualización. Esto es así debido a que son derivadas del valor actual calculado con equivalentes ciertos actualizados al tipo sin riesgo. Partiendo de la definición de valor:

$$V_0 = \frac{p_u V + (1-p)_d V}{1+rf} \quad \mathbf{14}$$

Despejando e igualando el sistema de ecuaciones:

$$V_0(1+rf) = p_u V + (1-p)_d V \quad \mathbf{15}$$

$$V_0(1+rf) = p_u V +_d V - p_d V \quad \mathbf{16}$$

Operando las ecuaciones anteriores se llega a la expresión:

$$p = \frac{(1+rf) - d}{u - d} \quad \mathbf{17}$$

Queda demostrado que las probabilidades neutrales al riesgo solo dependen de los incrementos  $u$ ,  $d$  y el tipo sin riesgo.

Los enfoques de cartera réplica con probabilidades objetivas y probabilidades neutrales al riesgo son equivalentes, siguiendo a Copeland y Antiranikov (2001, pp. 105) se concluye que la versión expandida para dos periodos es:

$$\beta_s u^2 S + \beta_f (1+r) - V_{uu} = \beta_s u d S + \beta_f (1+r) - V_{ud} \quad \mathbf{18}$$

Siendo igual a:

$$\beta_s u S (u - d) = V_{uu} - V_{ud} \quad \mathbf{19}$$

El valor de *delta* (cantidad de activo réplica) es:

$$\beta_s = \frac{V_{uu} - V_{ud}}{uS(u-d)} \quad \mathbf{20}$$

El monto del activo sin riesgo es:

$$\beta_f = \frac{V_{ud} - \beta_s u d S}{(1+r)} \quad \mathbf{21}$$

El valor de la cartera réplica es:

$$V_u = \beta_s u S - \beta_f \quad \mathbf{22}$$

A continuación se sustituirán los valores de  $\beta_s$  y  $\beta_f$  obteniendo;

$$\begin{aligned} V_u &= \beta_s u S - \beta_f = \frac{V_{uu} - V_{ud}}{uS(u-d)} uS - \frac{V_{ud} - \beta_s u d S}{(1+r)} = \\ &= \frac{V_{uu} - V_{ud}}{uS(u-d)} uS + \frac{V_{ud}}{(1+r)} - \frac{V_{uu} - V_{ud}}{uS(u-d)} \frac{u d S}{(1+r)} = \\ &= \frac{V_{uu} - V_{ud}}{(u-d)} \left[ 1 - \frac{d}{(1+r)} \right] + \frac{V_{ud}}{(1+r)} = \\ &= \frac{V_{uu} - V_{ud}}{(u-d)} \left[ \frac{1+r-d}{(1+r)} \right] + \frac{V_{ud}}{(1+r)} = \\ &= \left[ \frac{1+r-d}{u-d} \right] \frac{V_{uu}}{(1+r)} - \frac{V_{ud}}{u-d} \left[ \frac{1+r-d}{(1+r)} \right] + \frac{V_{ud}}{(1+r)} = \\ &= \left[ \left[ \frac{1+r-d}{u-d} \right] V_{uu} + \left[ \frac{u-1-r}{u-d} \right] V_{ud} \right] \div 1+r = \\ &= \frac{pV_{uu} + (1-p)V_{ud}}{1+r} \end{aligned}$$

Partiendo de la cartera réplica se llega a despejar las probabilidades neutrales al riesgo. Este último es el enfoque operativo empleado en opciones reales, sobre todo cuando es empleado el método MAD (*Marketed Asset Disclaimer*).

#### 4 MERCADOS PARCIALMENTE COMPLETOS

En los mercados parcialmente completos es necesario distinguir dos categorías de incertidumbre (riesgos): “de mercado” y “privadas”. Los riesgos de “mercado” que afectan los flujos de fondos del proyecto pueden replicarse mediante la construcción de carteras compuestas de activos financieros disponibles en el mercado. Contrariamente, la variabilidad de los flujos de fondos del proyecto que emerge de las incertidumbres “privadas” no pueden ser imitadas por una cartera de cobertura, ya que no existe activo financiero replicante.

Siguiendo a Smit y Nau (1995), la distinción entre incertidumbres de mercado e incertidumbres privadas supone que un estado futuro  $\gamma$  es representado como un vector resultante de la combinación lineal de estados de incertidumbre de mercado y privados; es decir,  $\gamma = (\gamma^m, \gamma^p)$ . El estado de conjuntos de información en el tiempo  $t$  se denota con la letra  $\omega$ , y el vector producto de los estados de información de las incertidumbres aludidas es una combinación  $\omega = (\omega^m, \omega^p)$ .

Las condiciones que se deben cumplir para que el mercado sea parcialmente completo son las siguientes:

1. Los precios de los activos financieros dependen solamente de los estados de la naturaleza vinculados a incertidumbre de mercado y se expresan como  $s(t, \omega^m)$ .
2. La calidad de completitud lo es respecto de las incertidumbres de mercado, por ende, el proceso estocástico de los activos financieros réplica se correlaciona perfectamente con los flujos de fondos esperados del proyecto, vinculados a incertidumbres de mercado.
3. Los eventos privados no condicionan los eventos de mercado, estos son independientes entre sí. Dado  $\omega^m_{t-1}$ ,  $\omega^m_t$  y  $\omega^p_t$ , son independientes.

Las dos primeras condiciones están implícitas en el cálculo de las probabilidades neutrales al riesgo. La tercera condición establece que las incertidumbres privadas son independientes de los futuros eventos de mercado. Sin perjuicio de ello, los eventos atados a incertidumbres concomitantes temporalmente en ambas categorías son dependientes entre sí.

#### **4.1 La opción de diferir y los mercados parcialmente completos**

Nuevamente será empleado el ejemplo utilizado en el análisis de los árboles de decisión y las opciones reales para mercados completos. Para los mercados parcialmente completos se introduce una modificación: el nivel de demanda es considerado una incertidumbre de mercado, y el grado de eficiencia con que se utiliza la planta se considera incertidumbre privada.

Además de existir incertidumbre respecto del nivel de demanda, esta existe también respecto del uso eficiente de la planta. La información vinculada al grado de eficiencia de la planta no se revela hasta que esta sea construida. Si la demanda reacciona favorablemente, existe una probabilidad del 50% de que la planta tenga un uso eficiente. Si la demanda reacciona negativamente, la probabilidad de que la planta sea eficiente en su funcionamiento es del 75%. Los flujos de fondos correspondientes al nuevo árbol de decisión son presentados en la siguiente figura. Como en el caso de los mercados completos, se supone que la firma puede invertir o pedir prestado al tipo sin riesgo y comprar o vender en corto acciones réplicas de los estados de la naturaleza vinculados al nivel de demanda (incertidumbre de mercado) pero no respecto de la eficiencia de la planta (incertidumbre privada).

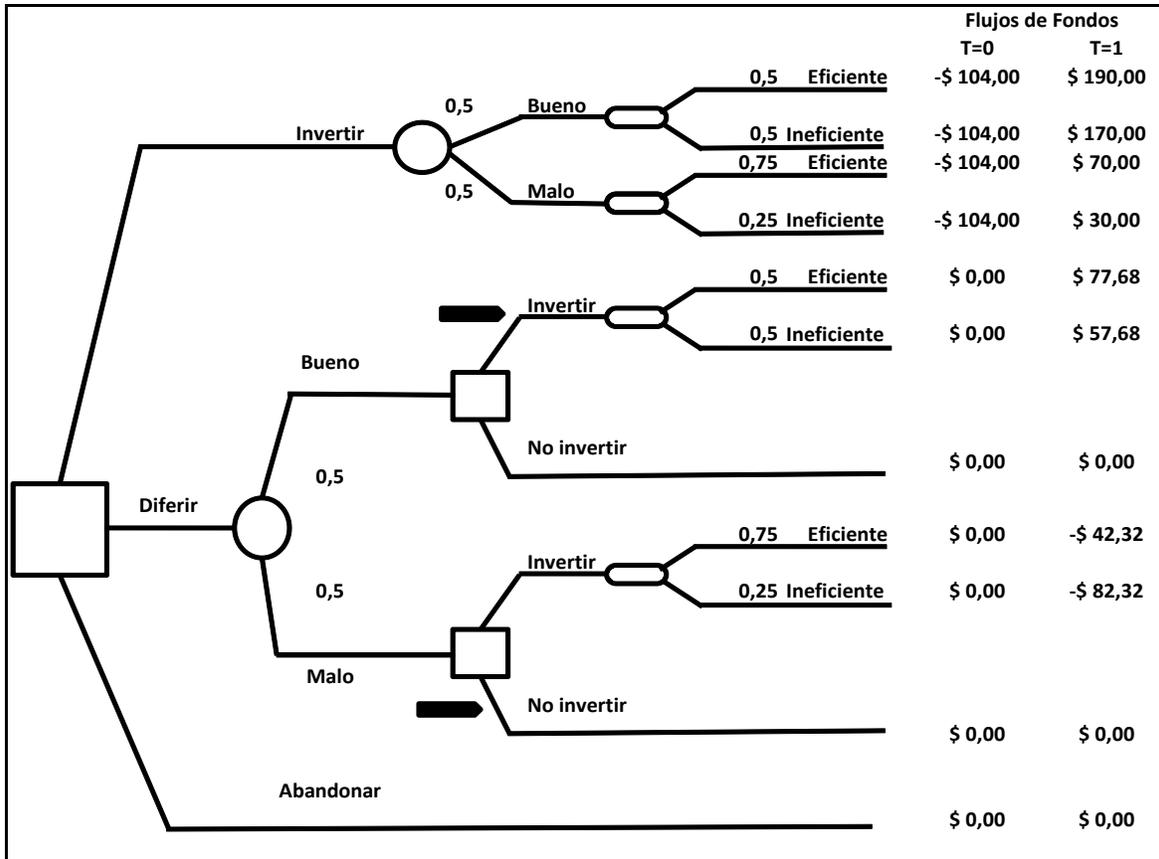


Gráfico 8: árbol de decisiones y mercados incompletos. Estrategias invertir, diferir y abandonar

A continuación se presentan las diferentes propuestas para tratar las incertidumbres vinculadas al proyecto. En el caso de las opciones, se presentan los casos para los cuales se es propietario y se comparte la licencia de diferimiento.

#### 4.2 Árbol de decisión y mercados incompletos (ADMI)

Tal como aconteció para los mercados completos, si se emplea una tasa ajustada por riesgo del 20% para valorar las estrategias 1 y 2, se llega nuevamente a resultados inconsistentes. Se debe emplear una tasa del 20% para la estrategia 1 y del 37,87 % para la estrategia 2. Como se expondrá, la corrección en la tasa no es suficiente para valorar todos los riesgos del proyecto, ya que estas incorporan solamente las incertidumbres de “mercado”, no así las “privadas”<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Un argumento a favor de no incorporar en la valuación incertidumbres “privadas” está dado por su especificidad, por se considera que no afecta la tasa de actualización. El hecho de que no sea capturada por la

Nuevamente, el problema que presenta el árbol de decisión consiste en el inapropiado uso de la tasa de actualización que refleje las incertidumbres indicadas. En el ejemplo, las tasas solamente compensan por las incertidumbres con cobertura de carteras réplicas. No es el caso de las incertidumbres donde el mercado no ofrece activos financieros correlacionados de manera perfecta y positiva con la variabilidad provocada por el riesgo en cuestión sobre los flujos de caja del proyecto.

En el anexo, la ilustración 5 presenta el árbol de decisión para mercados incompletos empleando tasas diferenciales para cada estrategia.

### 4.3 Opciones reales y mercados incompletos (ORMI)

Al tratarse de un mercado incompleto, no se pueden construir carteras de inversiones replicantes que brinden cobertura total sobre los posibles y alternativos flujos de fondos del proyecto. Como consecuencia de ello, tampoco se puede identificar la única distribución de probabilidad neutral al riesgo.

Para valuar incertidumbres de mercado y privadas, aplicando los conceptos de la teoría de opciones, una alternativa consiste en valuar los extremos de cada estrategia con el objetivo de construir un intervalo de valor. Para ello se debe determinar el valor de la flexibilidad estratégica del proyecto, comparando el máximo valor del límite inferior del proyecto con opción con el máximo valor del límite superior del proyecto sin opción. El procedimiento aplicable se describe a continuación.

Para calcular los extremos se trabaja con el concepto de estrategias dominantes y estrategias dominadas: por ejemplo, dado el proyecto  $c$ , una estrategia alternativa  $\beta$  (p.e. diferir) domina a la estrategia base del proyecto (p.e. invertir sin flexibilidad) si para todo estado de la naturaleza los flujos de fondos de la primer estrategia son superiores a los de la segunda. En otras palabras, si la estrategia base (dominada) se negocia en un mercado sin posibilidades de arbitraje, su valor debe ser menor o igual al valor actual de los flujos de carteras replicantes de la estrategia alternativa (dominante) y viceversa. Formalmente:

---

tasa es producto de trabajar en mercados de capitales incompletos, en donde no se encuentran representados todos los riesgos. La imposibilidad aludida consecuencia de la estructura de precios incompleta en el mercado no debe erigirse como razón válida para justificar la no determinación e incorporación como factor de riesgo en la tasa de actualización. Esta debe comprender y compensar por la asunción de todos los riesgos sistémicos generados por el proyecto.

$$\bar{v} = [\beta_{t-1} - \beta_t]s(t) \geq c(t) \text{ cartera dominante (límite superior);}$$

$$\underline{v} = [\beta_{t-1} - \beta_t]s(t) \leq c(t) \text{ cartera dominada (límite inferior).}$$

El enfoque de las carteras dominantes-dominadas puede ser reemplazado utilizando el conjunto de probabilidades neutrales al riesgo proveniente de la información de mercado, vinculadas a incertidumbres de “mercado” respecto de las cuales existen activos financieros replicantes. En este caso los valores extremos son determinados empleando las siguientes expresiones:

$$\bar{v} = \sup_{\pi \in \Pi} E_{\Pi} \left[ \sum_{t=0}^T \frac{c(t)}{(1+r_f)^t} \right] \text{ valor límite superior;}$$

$$\underline{v} = \sup_{\pi \in \Pi} E_{\Pi} \left[ \sum_{t=0}^T \frac{c(t)}{(1+r_f)^t} \right] \text{ valor límite inferior.}$$

El símbolo  $\Pi$  denota el conjunto de probabilidades neutrales al riesgo. Existe una relación positiva entre la posibilidad de emplear probabilidades neutrales al riesgo y las incertidumbres de mercado vinculadas con el proyecto. Se pueden presentar dos situaciones extremas: (a) mercados completos donde todas las incertidumbres se cubren y replican con los títulos disponibles; y (b) mercados totalmente incompletos, donde todas las incertidumbres son privadas y no pueden ser cubiertas con estrategias de cartera. Operacionalmente, se presentan casos intermedios, como el ejemplo analizado en el presente trabajo, en el cuál los extremos de los riesgos vinculados a la demanda son representados por el activo financiero réplica. Los riesgos privados se suponen comprendidos en los extremos de valor correspondientes a cada estrategia, bajo un nivel cierto de ocurrencia.

En el ejemplo analizado, las probabilidades neutrales al riesgo para el nivel de demanda son del 39,16% para el estado bueno y del 60,83% para el estado malo. No se puede aplicar ningún límite para los riesgos vinculados con los niveles de eficiencia de la planta (incertidumbre privada). Dado el conjunto de información disponible, se supone que la eficiencia de la planta tiene un nivel *cierto* para cada extremo. En cada estrategia se

asume que la planta es *ciertamente* eficiente en el extremo superior de la demanda y *ciertamente* ineficiente en los inferiores. A partir de los supuestos precedentes, los extremos de cada estrategia son valuados empleando el enfoque de probabilidades neutrales al riesgo para los niveles de demanda. En el ejemplo se tiene:

Estrategia 1: en el extremo superior se obtiene un valor de  $\$4,35 = [0,3916 \times (\$190)/1,08 + 0,6083 \times (\$70)/1,08] - \$104$  y el inferior, de  $-\$25,43 = [0,3916 \times (\$170)/1,08 + 0,6083 \times (\$30)/1,08] - \$104$ .

Estrategia 2: el extremo superior tiene un valor de  $\$28,18 = [0,3916 \times (\$71,96)]$  y el valor máximo del extremo inferior es de  $\$20,93 = [0,3916 \times (\$53,44)]$ .

La elección se determina comparando el costo de la opción (prima) con el resultado producto de restar el extremo mínimo del valor de la cartera dominante con flexibilidad y el extremo máximo de la cartera dominante sin opción.

En el ejemplo, si el valor de la licencia para diferir cuesta menos de  $\$16,58 = [\$20,93$  (extremo mínimo estrategia 2) -  $\$4,35$  (extremo máximo estrategia 1)], la estrategia óptima consiste en diferir. En el caso de compartir la propiedad de la opción, el valor de la licencia es de  $\$8,29 = [\$10,46$  (extremo mínimo estrategia 2) -  $\$2,18$  (extremo máximo estrategia 1)].

La limitación que presenta el enfoque radica en que se asume un comportamiento cierto respecto de los niveles de eficiencia para cada rama del árbol de estrategias. El valor puede ser determinado en intervalos. A continuación se presenta la grilla para el caso de ser propietario de la opción y compartir el derecho de diferimiento.

Límites (t0)		VAN 8%		
$E(u1*p+l1*(1-p))$	\$ 4,35	\$ 68,93	Superior	Alta demanda
		\$ 61,67	Inferior	
$E(u2*p+l2*(1-p))$	-\$ 25,43	\$ 39,42	Superior	Baja demanda
		\$ 16,89	Inferior	
Límites (t0)		VAN 8%		
$Max(upp1;upp2)$ <b>Max superior</b>	\$ 28,18	\$ 28,18	Superior 1	Alta demanda
		\$ 20,93	Inferior1	
		\$ 0,00	n	
$Max(low1;low2)$ <b>Max inferior</b>	\$ 20,93	-\$ 23,83	Superior 2	Baja Demanda
		-\$ 46,36	Inferior 2	
		\$ 0,00	n	

Gráfico 9: opciones reales y bordes en mercados incompletos. Propietarios de la opción

Límites (t0)		VAN 8%		
$E(u1*p+l1*(1-p))$	\$ 2,18	\$ 34,47	Superior	Alta demanda
		\$ 30,84	Inferior	
$E(u2*p+l2*(1-p))$	-\$ 12,72	\$ 19,71	Superior	Baja demanda
		\$ 8,45	Inferior	
Límites (t0)		VAN 8%		
$Max(upp1;upp2)$ <b>Max superior</b>	\$ 14,09	\$ 14,09	Superior 1	Alta demanda
		\$ 10,46	Inferior1	
		\$ 0,00	n	
$Max(low1;low2)$ <b>Max inferior</b>	\$ 10,46	-\$ 11,92	Superior 2	Baja Demanda
		-\$ 23,18	Inferior 2	
		\$ 0,00	n	

Gráfico 10: opciones reales y bordes en mercados incompletos. Comparte la licencia de la opción

En el anexo, las ilustraciones 6 y 7 presentan los árboles valorados mediante opciones reales con sus correspondientes límites.

#### 4.4 Proceso integrado de valuación (PIV)

#### 4.4 Proceso integrado de valuación (PIV)

Bajo este enfoque, el valor del proyecto incorpora las incertidumbres de mercado y las privadas. Las primeras son valoradas en base a la información de mercado; las segundas a través de las preferencias subjetivas de quien toma la decisión representada por una función de utilidad gerencial. Esta función necesariamente trabaja con el concepto de equivalente cierto efectivo.

La clave del enfoque integrado es la siguiente: los flujos de fondos vinculados a incertidumbres privadas son valuados computando Equivalentes Ciertos Efectivos (ECE); las incertidumbres de mercado son valuadas a través de dos enfoques: Carteras Equivalentes Ciertas (CEC) y Probabilidades Neutrales al Riesgo (PNR). A continuación se procederá a explicitar algunos conceptos necesarios para aplicar la metodología bajo examen.

##### 4.4.1 Equivalente Cierto Efectivo (ECE)

Siguiendo a Keeney y Raiffa (1976) se consideran los siguientes conceptos:

*Aditividad e independencia:* las preferencias de las empresas por la corriente de flujos de fondos riesgosos  $(x(0), x(1), \dots, x(t))$  depende solamente de las distribuciones marginales de los flujos de fondos del periodo y no del conjunto de la distribución.

*Propiedad- $\Delta$ :* si a la empresa le resulta indiferente recibir un pago riesgoso  $x(t)$  y un monto equivalente cierto  $CE_t[x(t)]$ , entonces dada cualquier constante  $\Delta$ , la empresa es indiferente entre:  $x(t) + \Delta$  y  $CE_t[x(t)] + \Delta$ .

La función de utilidad, con los ponderadores  $k_t$ , se escribe de la siguiente manera:

$$U_t = (x(0), x(1), \dots, x(T)) = \sum_{t=0}^T k_t u_t [x(t)] \quad \mathbf{23}$$

La propiedad de indiferencia de  $\Delta$  indica que los flujos de fondos presentan una aversión absoluta constante al riesgo ( $\Delta$  no varía y los niveles incrementales de riesgo son constantes);  $u_t$  se escribe de la siguiente manera:

$$u_t(x(t)) = -\exp\left[-\frac{x(t)}{\rho_t}\right] \quad \mathbf{24}$$

Aquí,  $x(t)$  representa el flujo de fondos en el instante de evaluación y  $\rho_t$  las preferencias subjetivas temporales (tolerancias al riesgo). La función de utilidad es cóncava, continua e incremental, con forma logarítmica (inversa de la forma funcional

exponencial). Los ponderadores  $k_t$  y las tolerancias al riesgo  $\rho_t$  son positivas. El equivalente cierto del flujo riesgoso se escribe:

$$CE(x(t)) = -\rho_t \ln \left( E \left[ \frac{-x(t)}{\rho_t} \right] \right) \quad 25$$

Para dos periodos, la función de utilidad empleada es la siguiente:

$$U(x_0, x_1) = -\exp \left( \frac{-x_0}{\rho_0} \right) - \exp \left( \frac{-x_1}{\rho_1} \right) \quad 26$$

Suponiendo pesos equivalentes  $k_0 = k_1 = 1$  y tolerancias al riesgo de  $\rho_0 = \$200$  y  $\rho_1 = \$220$ , reemplazando en la ecuación anterior, la función queda expresada de la siguiente manera:  $U(x_0, x_1) = -\exp(-x_0/\$200) - \exp(-x_1/\$220)$ . En cada flujo de fondos la firma es indiferente ante la opción de recibir el flujo riesgoso y el flujo cierto en  $t=0$ , por lo tanto, el equivalente cierto efectivo en el instante inicial es igual a:

$$ECE_0(x(0)) = -R_0 \ln \left( E \left[ \frac{-x(0)}{\rho_0} \right] \right) \quad 27$$

Donde  $R_t$  es un factor de descuento a partir de la tolerancia al riesgo:

$$R_0 = \sum_{t=0}^T \frac{\rho_t}{(1+r)^t} \quad 28$$

Por lo tanto, el flujo de fondos incierto incremental  $x(0)$  es valuado a partir de una función de utilidad exponencial con efectiva tolerancia al riesgo, en donde  $R_0$  es igual al valor actual de la tolerancia al riesgo del periodo  $\rho_t$ . Finalmente,  $ECE_0[x(0)]$  representa el equivalente cierto efectivo.

#### 4.4.2 Las etapas del proceso

Los pasos son los siguientes:

a. Calcular el VAN para todos los puntos finales de las ramas de la grilla, empleando el tipo sin riesgo.

b. Los nodos representativos de incertidumbres privadas son reemplazados por sus equivalentes ciertos (EC). Para ello se emplean probabilidades subjetivas del decisor y su función exponencial de utilidad. La tolerancia al riesgo es igual al valor actual de la misma para el periodo de tiempo del nodo, según la siguiente magnitud  $R_t/(1+r)^t$

- c. Resueltas las incertidumbres privadas, las incertidumbres de mercado son resueltas con el enfoque de carteras réplicas o probabilidades neutrales al riesgo.
- d. Finalmente, el criterio de elección de los nodos representativos de puntos decisorios (selección de estrategias) sigue la regla de maximización del valor esperado.

A continuación se explica el ejemplo con carteras equivalentes y probabilidades neutrales al riesgo.

#### 4.4.3 Cartera Equivalente Cierta (CEC): valuación de incertidumbres de mercado y privadas

Al igual que para los mercados completos, se define el valor del proyecto como el valor corriente de la cartera equivalente cierta replicante más el flujo de fondos del proyecto en el momento  $t$  ( $0$ ):  $c(0) + \beta_r(0)s(0)$ .

Esta definición del valor no nace de un argumento objetivo, sino que depende de las preferencias del decisor respecto de los riesgos, no sin cobertura en activos financieros. Finalmente, definidos estos, se determinan las carteras equivalentes ciertas para valuar las estrategias. Para su construcción se debe:

- a. Encontrar los equivalentes ciertos (EC) en el último periodo, correspondientes a las distintas ramas de la estrategia.
- b. Construir las carteras equivalentes ciertas.
- c. Valuar en el momento  $t=0$ . La estrategia seleccionada es la de mayor valor marginal, comparando beneficios y costos incrementales.

Tomando como ejemplo la estrategia 2, el equivalente cierto efectivo ECE en el momento 1 (el último periodo del modelo), se obtiene que : la tolerancia efectiva al riesgo en dicho horizonte es de \$220. En el estado “bueno”, el equivalente cierto para el momento 1 es  $\$67,45 = -\$220 \ln [0,5 \times \exp(-\$71,93/\$220) + 0,5 \times \exp(-\$53,41/\$220)]$ . En el estado “malo”, el equivalente cierto es de \$0,00. La cartera equivalente cierta CEC, obtenido el ECE, incorpora a  $\beta_0$  y  $\beta_1$  la cantidad de activo libre de riesgo y acciones réplicas de las incertidumbres de mercado, respectivamente. Su cálculo sigue el siguiente proceso:

$$\text{estado bueno: } \beta_0(1,08) + \beta_1(\$38) = \$67,45;$$

estado malo:  $\beta_0(1,08) + \beta_1(\$14) = \$0,00$ .

Nuevamente, resolviendo el sistema de ecuaciones de dos incógnitas se obtiene:  $\beta_0 = \$36,43$  y  $\beta_1 = 2,81$ . La cartera réplica consiste en pedir prestado  $\$36,43$  y comprar 2,81 acciones réplicas.

El valor actual de la cartera equivalente cierta (CEC) replicante de la estrategia 2 y por ende, del proyecto, es de  $2,81 \times (\$21,67) - \$36,43 = \$24,47$ .

Si la licencia de diferir es compartida, entonces:

Estado bueno:  $\beta_0(1,08) + \beta_1(\$38) = \$33,78$ ;

Estado malo:  $\beta_0(1,08) + \beta_1(\$14) = \$0,00$ .

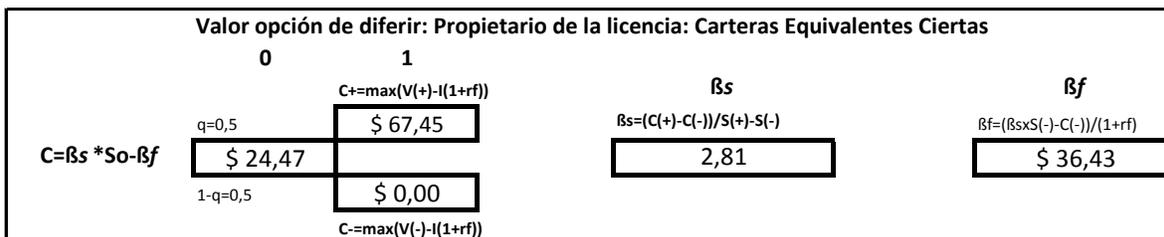


Gráfico 11: cartera equivalente cierta y propiedad de la opción

Nuevamente, resolviendo el sistema de ecuaciones de dos incógnitas se obtiene:  $\beta_0 = \$18,25$  y  $\beta_1 = 1,41$ . La cartera réplica consiste en pedir prestado  $\$18,25$  y comprar 1,41 acciones réplicas.

El valor actual de la cartera equivalente cierta (CEC) replicante de la estrategia 2 y por ende, del proyecto, es de  $1,41 \times (\$21,67) - \$18,25 = \$12,26$ .

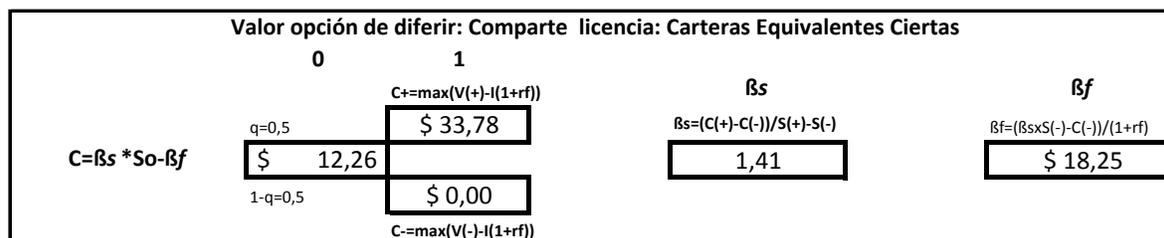


Gráfico 12: cartera equivalente cierta y licencia de la opción

#### 4.4.4 Probabilidades Neutrales al Riesgo (PNR): *Roll-back* para valorar incertidumbres de mercado y privadas

En primer lugar se resuelven las incertidumbres privadas, con sus equivalentes ciertos efectivos ECE. Luego se aplican las probabilidades neutrales al riesgo, para determinar el valor de las estrategias.

Estrategia 1: en el caso de la alternativa de inversión ahora, se encuentra un equivalente cierto de  $\$62,46 = -(\$220/1,08) \times \ln [0,5 \times \exp. (-\$71,93/(\$220/1,08)) + 0,5 \times \exp. (-\$53,41/(\$220/1,08))]$  para el estado “bueno”, y en el estado “malo”  $-\$49,09 = -(\$220/1,08) \times \ln [0,5 \times \exp. (-\$39,19/(\$220/1,08)) + 0,5 \times \exp. (-\$76,22/(\$220/1,08))]$ . El valor esperado equivalente es de  $-\$4,47 = (0,3916 \times (\$62,46) + 0,6083 \times (-\$49,09))$ .

Estrategia 2: aplicando el proceso integral de *roll-back* se obtiene:  $\$62,46 = -(\$220/1,08) \times \ln [0,5 \times \exp (-\$71,93 / (\$220/1,08)) + 0,5 \times \exp (-\$53,41/(\$220/1,08))]$  para el estado “bueno” (ramas A y B), y de  $\$0,00$  para el estado “malo” (rama C). El valor esperado equivalente es de  $\$24,47 = (0,3916 \times (\$62,46) + 0,6083 \times (\$0,00))$ . En este caso,  $0,3916 \times (\$62,46)$  corresponde al máximo valor obtenido en la estrategia de diferir en el estado “bueno” y  $0,6083 \times (\$0,00)$  al máximo valor en la estrategia de diferir con estado “malo”.

Invertir		ECE	VAN 8%	
-\$ 5,39		\$ 62,46	\$ 71,93	A
			\$ 53,41	B
		-\$ 49,09	-\$ 39,19	C
			-\$ 76,22	D
Diferir		ECE	VAN 8%	
		\$ 62,46	\$ 71,93	A
			\$ 53,41	B
\$ 24,47			\$ 0,00	C
			-\$ 39,19	D
		\$ 0,00	-\$ 76,22	E
			\$ 0,00	F

Gráfico 13: probabilidades neutrales al riesgo, equivalentes ciertos efectivos y propiedad de la opción

En el caso en que se comparte<sup>[3]</sup> la licencia, el valor de la estrategia 2 asciende a  $\$12,26 = (0,3916 \times (\$31,28) + 0,6083 \times (\$0,00))$ . A continuación se presentan las correspondientes grillas:

<b>Invertir</b>		<b>ECE</b>	<b>VAN 8%</b>	
		\$ 62,46	\$ 71,93	A
			\$ 53,41	B
	<b>-\$ 5,39</b>		-\$ 39,19	C
		-\$ 49,09	-\$ 76,22	D
<b>Diferir</b>				
			\$ 35,96	A
		\$ 31,28	\$ 26,70	B
	<b>\$ 12,26</b>		\$ 0,00	C
			-\$ 19,59	D
		\$ 0,00	-\$ 38,11	E
			\$ 0,00	F

Gráfico 14: probabilidades neutrales al riesgo, equivalentes ciertos efectivos y licencia de la opción

En el extremo, si el mercado es completo, las probabilidades subjetivas del decisor no aparecen en el proceso de valoración. Por el contrario, si el único activo existente es libre de riesgo, las probabilidades subjetivas del decisor y la tolerancia al riesgo son aplicadas a todos los nodos. En el anexo, las ilustraciones 8 y 9 presentan el árbol valuado con el enfoque integrado precedentemente desarrollado.

## 5 CONCLUSIÓN

Cuando los mercados son completos, la técnica de árboles de decisiones no es suficiente para capturar y valorar la flexibilidad estratégica contenida en el proyecto. Esto es así debido a que dicha técnica no emplea la tasa ajustada por riesgo adecuada a cada rama (estrategia). Por el contrario, la técnica utiliza la tasa ajustada por riesgo derivada de aplicar el tradicional método de valor actual neto sin flexibilidad. El inconveniente presentado por la medida de valor es solucionado por el enfoque de opciones reales a través de carteras réplicas o probabilidades neutrales al riesgo. No obstante, en el caso de los mercados incompletos, las opciones reales no son capaces de valorar riesgos privados, al no existir activos replicantes de los mismos.

Se presentaron dos alternativas. La primera es suponer certidumbre respecto de cada estado y el acaecimiento de las incertidumbres privadas, y emplear bordes de valor a través de carteras dominantes para cada rama del árbol o grilla. La segunda consiste en desarrollar una función de decisión del agente para valuar riesgos privados, donde se involucran preferencias temporales y aversión al riesgo derivando equivalentes ciertos. Los mismos son complementados con un enfoque de carteras réplicas o probabilidades neutrales al riesgo. Un párrafo aparte merece el uso de grillas en lugar de árboles, presentando como ventajas su simplicidad en la lectura y su facilidad computacional al resolver el problema de la programación dinámica.

### **Bibliografía**

- Black, F.- Scholes, M. (Mayo-Junio de 1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Brennam, M.- Schwartz, E. (1985). Evaluating Natural Resources Investment. *Journal of Business*(58), 135-157.
- Brennan, M.- Schwartz, E. (1985). A New Approach to Evaluating Natural Resource Investment. *Midland Corporate Financial Journal*(3), 37-47.
- Copeland, T.- Tufano, P. (2004). A Real World to Manage Real Options. *Harvard Business School Review*(82), 90-99.
- Copeland, T.- Weston, F.- Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.
- Copeland, T.-Weston, F. (1982). A Note on the Evaluation of Cancelable Operating Leases. *Financial Management*, 11, 60-67.
- Cox, J.- Ross, S.-Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Cox, J.- Ross, S. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*(3), 145-166.
- Hirshleifer, J.- Reiley, J. (1995). *The Analytics of Uncertainty and Information* (4 ed.). Cambridge: Cambridge Surveys of Economics Literature Cambridge Press.
- Hull, J. (2006). *Futures, Options and other Derivatives* (6 ed.). New Jersey: Prentice Hall.

- Ingersoll, J.- Ross, S. (1992). Waiting to Invest: Investment and Uncertainty. *Journal of Business*(65), 1-29.
- Keema, A. (1988). *Options in Real and Financial Markets*. Working Paper Ph.D diss, Erasmus University, Finance, Erasmus.
- Keeney, R.- Raiffa, H. (1976). *Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Trade Off* (1 ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Kulatilaka, N.- Trigeorgis, L. (1994). The General Flexibility To Switch: Real Options Revisited. *International Journal of Finance*(2), 123-145.
- Kulatilaka, N. (1988). Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems. *IEEE Transactions in Engineering Management*(22), 250-257.
- Kulatilaka, N. (1995). Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementary in Real Options. En L. Trigeorgis (Ed.), *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. Westport Conn.: Praeger.
- Luherman, T. (1998). *Investment Science* (1 ed.). New York: Oxford University Press.
- Luherman, T. (1998). Investment Opportunities as Real Options: Get started with the numbers. *Harvard Business Review*(4), 51-67.
- Margrabe, W. (1978). The Value of an Option to Exchange one Asset for Another. *Journal of Finance*(33), 177-186.
- Mason, S.- Merton, R. (1985). The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance. En Varios, *Recent Advances in Corporate Finance*. New York: Homewood Irwin.
- Mc Donal, R. - Siegel, J. (1986). Investment and the Valuation of Firms when there is an Option to Shut Down. *International Economic Review*(26), 321-349.
- Merton, R. (Primavera de 1973). The Theory of Rational Options Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions* (1 ed.). New York: Wiley.
- Myers, S.- Majd, S. (1990). Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options Research*(4), 1-21.
- Myers, S. (1977). Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics*(5), 147-176.

- Paddock, J.-Siegel, D.-Smith, J. (1988). Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease. *Quarterly Journal of Economics*(103), 479-508.
- Pindyck, R. (1988). Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm. *American Economic Review*(78), 969-985.
- Smit, H. (1996). The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands. *Financial Management*(26), 5-17.
- Smit, H.-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*(2), 89-102.
- Smith, J.-Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis . *Management Science*(5), 795-816.
- Spetzler, C. (1968). The Development of a Corporate Risk Policy for Capital Investment Decisions. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*(2), 279-300.
- Trigeorgis, L.- Mason, S. (1987). Valuing Managerial Flexibiliy. *Midland Corporate Finance*, 5, 14-21.
- Trigeorgis, L. (1988). A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research*(4), 145-167.
- Trigeorgis, L. (1991). A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3), 309-326.
- Trigeorgis, L. (1993). Real Options and Interactions with Financial Flexibility. *Financial Management*(22), 202-224.
- Trigeorgis, L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications* (1 ed.). London, United Kindgon: Praeger.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.

### ANEXO

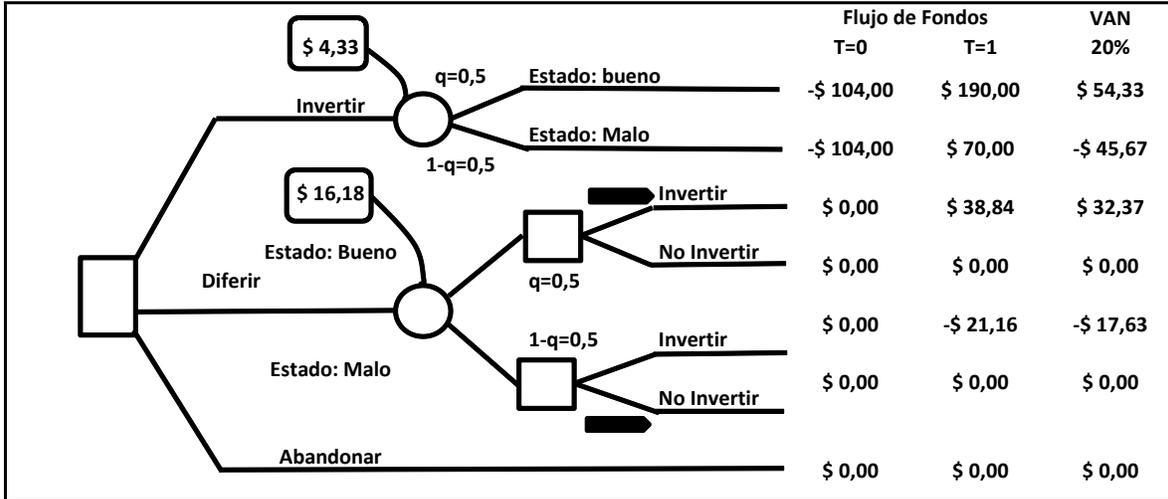


Ilustración 1: árbol de decisión, mercados completos y comparte la licencia de opción

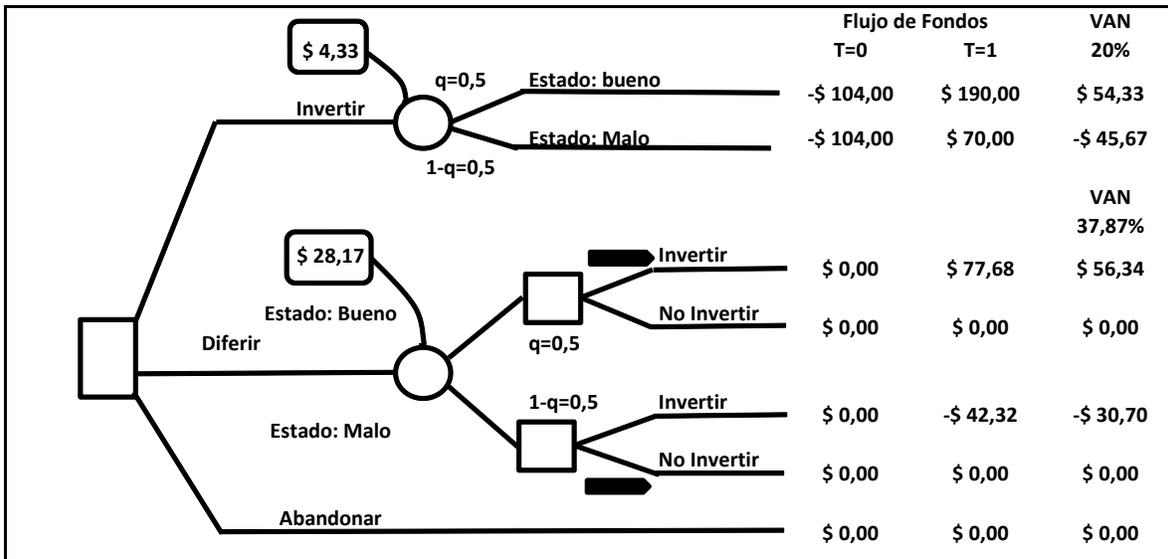


Ilustración 2: árbol de decisiones, mercados completos con tasas diferenciadas

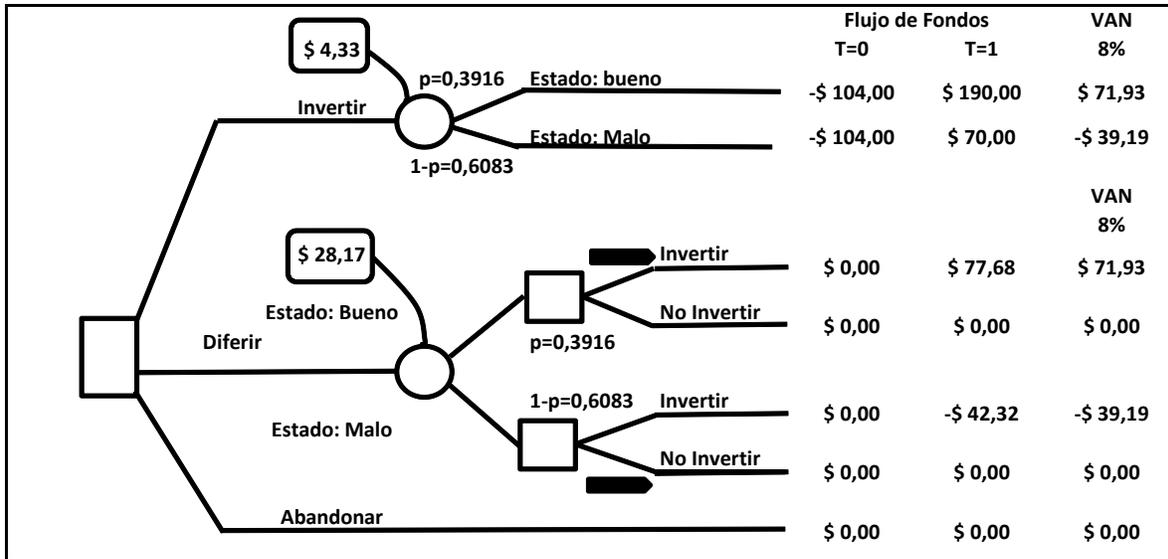


Ilustración 3: probabilidades neutrales al riesgo y propiedad de la opción

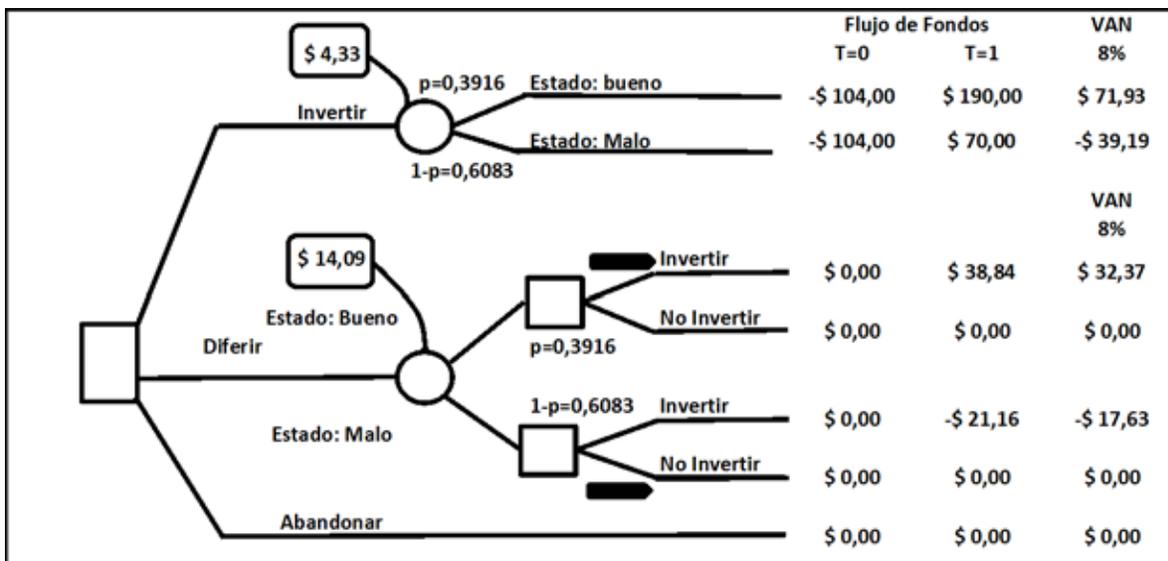


Ilustración 4: probabilidades neutrales al riesgo y comparte la licencia de la opción

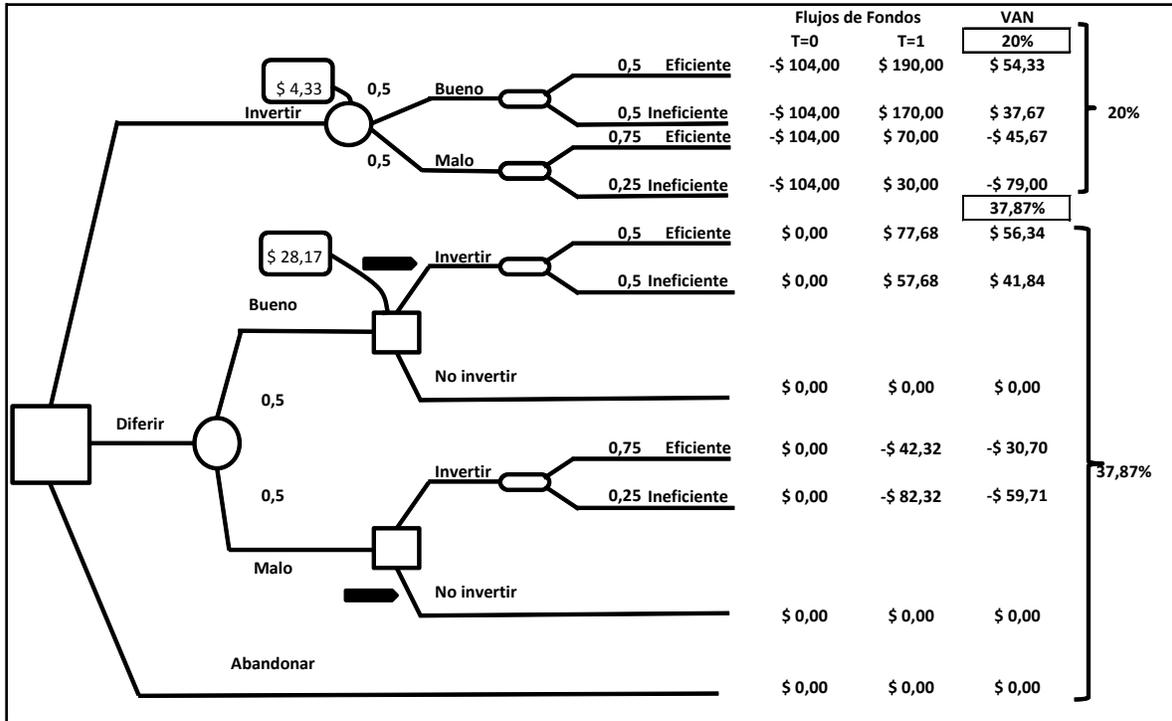


Ilustración 5: árbol de decisión, mercados incompletos y tasas diferenciales

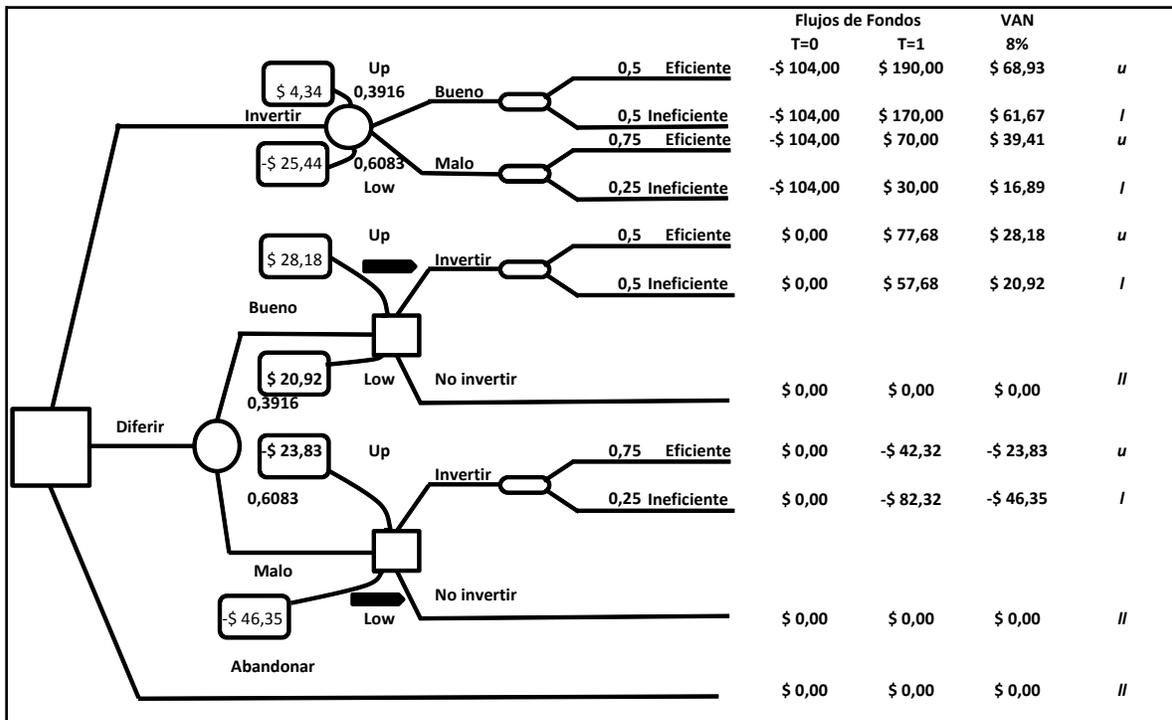


Ilustración 6: opciones reales, bordes, mercados incompletos y propiedad de la opción

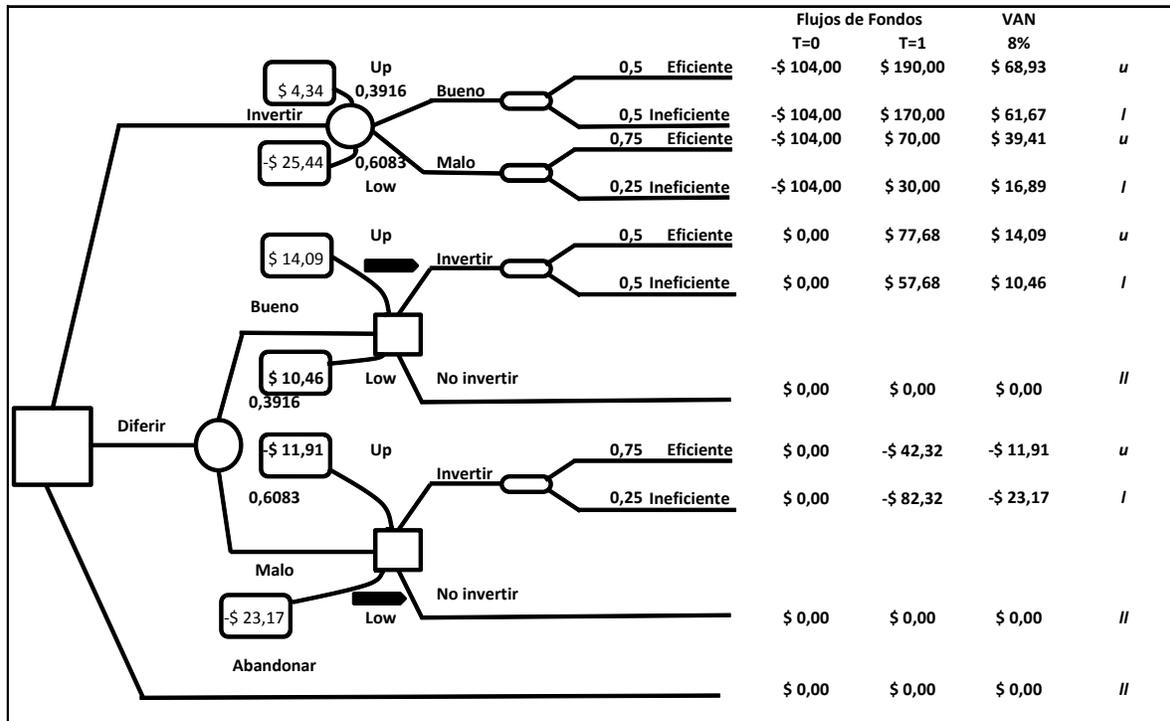


Ilustración 7: opciones reales, bordes, mercados incompletos y comparte la licencia de la opción

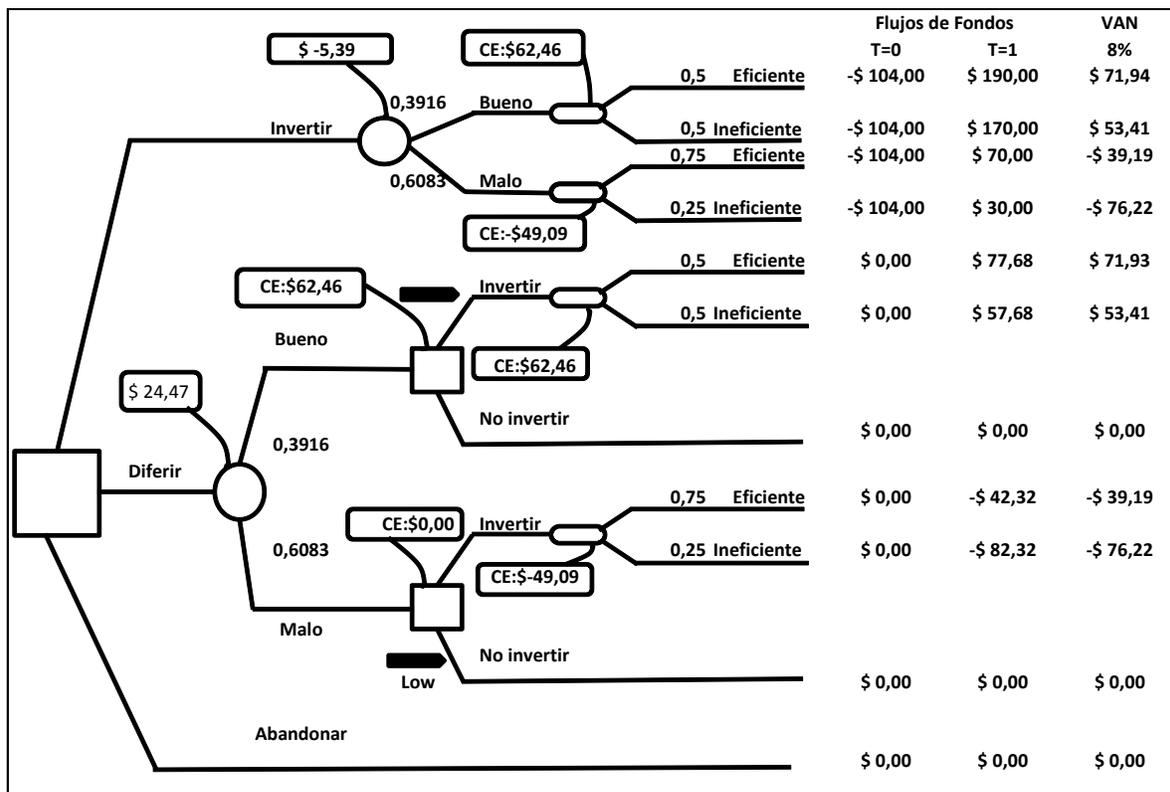


Ilustración 8: enfoque integrado propietario de la opción

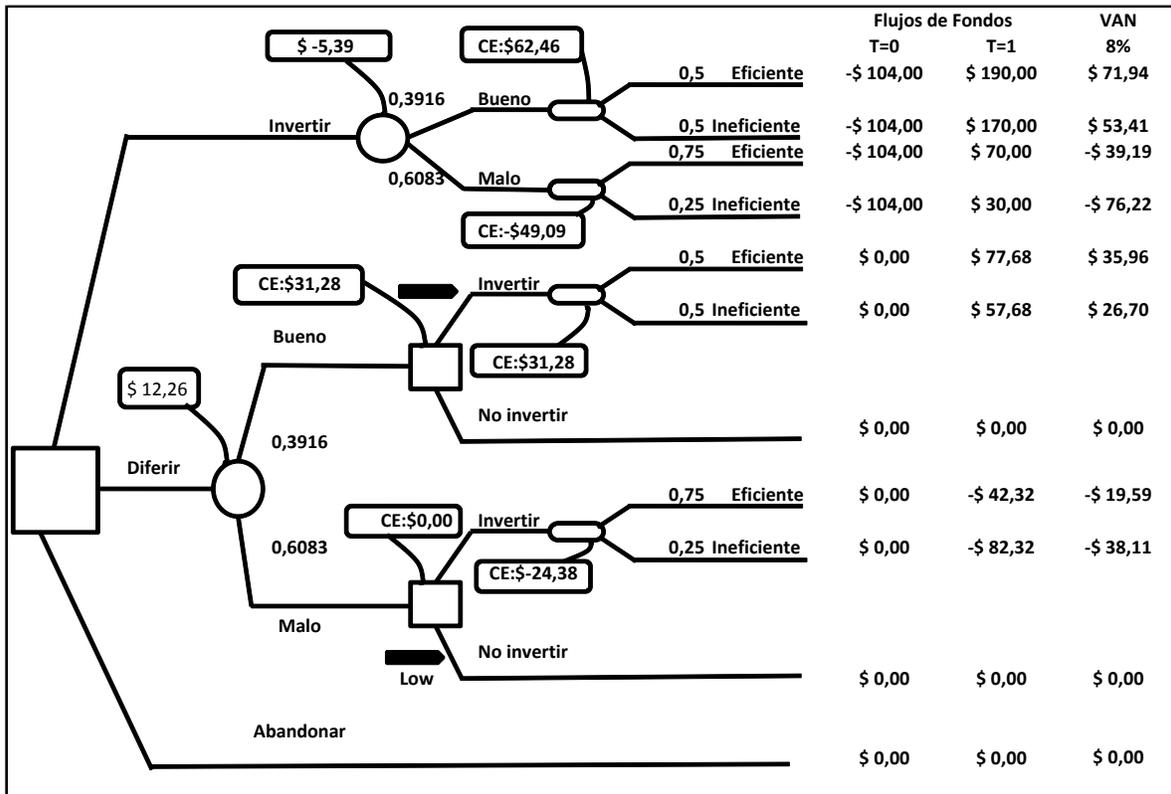


Ilustración 9: enfoque integrado comparte licencia



# MODELOS BINOMIALES Y TRINOMIALES CON VOLATILIDAD VARIABLE PARA VALUAR OPCIONES REALES EN EBT

## *Resumen*

El presente capítulo tiene una naturaleza pedagógica, dado que expone los supuestos y las diferencias de distintos modelos de rejillas binomiales y trinomiales empleadas en la valoración de opciones reales: Rendleman-Bartter (RB); Cox, Ross y Rubinstein (CRR); Jabbour, Kramin y Young (ABMC); Boyle (Trinomial) y Haatela (volatilidad cambiante). Se emplea como unidad de análisis la valoración de una empresa de base tecnológica (EBT) dedicada a la generación de células madres para tratamientos medicinales y aplicación académica. Las estrategias a valorar son: inversión-expansión y venta del proyecto. Se comparan los resultados de los diferentes modelos y las ventajas derivadas de aplicar rejillas trinomiales con volatilidad cambiante en la valoración de opciones reales.

**Palabras clave:** Rejillas, Binomial, Trinomial, Opciones Reales.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las opciones reales constituyen una de las principales herramientas para cuantificar el valor asociado de las potenciales estrategias de una empresa en marcha o proyecto de inversión (Smit, H. - Trigeorgis, L. 2004). Debido a su simplicidad, a menudo los modelos de valoración de opciones en tiempo discreto son utilizados en el análisis y la comprensión de la flexibilidad estratégica empresarial. Los trabajos de Cox, Ross y Rubinstein (CRR; Cox, J.- Ross, S. – Rubinstein, M. 1979) y Rendleman y Bartter (RB; Rendleman, R - Bartter, B. 1979) constituyen la piedra basal sobre la cual se fundamentan los modelos binomiales. Estos constituyen un poderoso instrumento de valuación para estimar el valor de una amplia variedad de pagos contingentes. La técnica se basa en la formación de carteras libres de riesgo producto de combinar una acción y una opción sobre la acción, con un rendimiento igual al tipo sin riesgo. Los modelos en tiempo discreto tienen su génesis en el modelo desarrollado por Black y Scholes (BS; Black, F. - Scholes, M. 1973). CRR y RB

demuestran que los valores de sus modelos convergen en los valores arrojados por el modelo BS.

La principal contribución de este trabajo es de naturaleza pedagógica, dado que su objetivo consiste en reseñar los supuestos correspondientes a diferentes variantes de rejillas binomiales y trinomiales, trazando las diferencias, similitudes y resultados que estos arrojan al momento de valorar la flexibilidad estratégica de un proyecto. En el trabajo se emplea como caso de aplicación la valoración de las estrategias de expansión-venta correspondientes a un emprendimiento de base tecnológica (EBT) para la generación de tratamiento de células madres aplicado a la salud y a la investigación básica. La elección de esta tipología de empresa reside en que constituye un desafío para la valoración. Algunas de sus características son: altamente innovadoras, generadoras de nuevos mercados; importante participación del capital intelectual, carentes de liquidez y por ende de activos financieros réplicas (gemelos) para estimar el precio del riesgo, importante y cambiante grado de incertidumbre asociada al ciclo de vida del producto y significativas oportunidades de crecimiento.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: (a) se describe el procesos estocástico geométrico browniano y su vinculación con el proceso binomial; (b) se reseñan los diferentes modelos de rejillas binomiales y trinomiales con volatilidad; (c) se presenta el caso de una EBT y la valoración de sus proyecto de inversión con sus estrategias de expansión-venta de licencia, mediante los modelos descritos en (b); (d) Finalmente se resumen los resultados obtenidos de aplicar los modelos expuestos y conclusiones.

## **2 LA CONEXIÓN ENTRE EL MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO (GBM) Y LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

El valor del activo  $V$  puede describirse suponiendo un proceso estocástico GBM en descrito por la siguiente ecuación:

$$dV = rVdt + \sigma Vdz(1)$$

Donde  $r$  es la tasa libre de riesgo instantánea,  $\sigma$  es la volatilidad instantánea del precio del activo,  $dt$  es el diferencial del tiempo y  $dz$  es un proceso de Weiner. Aplicando la

transformación contenida en el lemma de Ito (Jabbour, G- Kramin, M - Young, S. 2001) se obtienen las ecuaciones 2 y 3:

$$d\ln(V) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz(2)$$

O

$$dX = \alpha dt + \sigma dz(3)$$

Donde  $X = \ln(V)$  y  $\alpha = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ . Como resultado,  $\ln(V)$  sigue un proceso de Weiner por el periodo de tiempo  $(0, t)$ . La variable  $\hat{X} = X_t - X_0 = \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$  está normalmente distribuida con media  $\alpha \cdot t$  y varianza  $\sigma^2 \cdot t$ . La tasa compuesta de rendimiento para el periodo de tiempo  $(0, t)$  se puede definir como

$$V_t = V_0 e^{Rt}(4)$$

De la ecuación 4 se deriva la tasa de rendimiento (ecuaciones 5 y 6)

$$R = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right) = \frac{1}{t} \hat{X}(5)$$

0

$$t \cdot R = \hat{X}(6)$$

$R$  sigue una distribución normal con media  $\alpha = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{t}$ . Aplicando el operador de expectativas en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$E(t \cdot R) = t \cdot \alpha = E(\hat{X}) = E\left[\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right](2)$$

Para llevar las expresiones anteriores al lenguaje binomial, es menester definir los movimientos discretos ascendentes y descendentes del precio del activo ( $u \cdot S_u, d \cdot S_d$ ). Los parámetros  $u$  y  $d$  reflejan la magnitud de los movimientos, requiriendo que  $u$  tenga valor mayor a 1 y  $d$  menor a 1. En consecuencia, la variable  $\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$  sigue la distribución  $u$  con probabilidad neutral al riesgo  $p$ , y  $d$  con probabilidad neutral al riesgo  $1-p$ . El valor para la rejilla surge en la siguiente ecuación:

$$E\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p \ln(u) + (1-p) \ln(d)(8)$$

La varianza de la rejilla para la variable  $\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$  es:

$$\text{var}\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p(1-p) \left[\ln\frac{u}{d}\right]^2 \quad (9)$$

### 3 REJILLAS BINOMIALES Y TRINOMIALES

Las rejillas son herramientas empleadas para proyectar el valor del activo subyacente y consecuentemente valorar opciones. Estas presentan ventajas computacionales sobre los árboles de decisión, debido a sus propiedades recombinantes de nodos intermedios (Smith, J. 2005). [1] Se caracterizan por modelar en tiempo discreto el proceso estocástico continuo de la variable y utilizar el supuesto de valuación neutral al riesgo (Wilmott, P. 2009)<sup>1</sup>.

Los parámetros del modelo son:

- a. Precio del subyacente  $S_0$  con movimientos  $(S_u, S_d)$  para intervalos de tiempo  $\Delta t$ .
- b. Probabilidades de transición para movimiento ascendente  $p$ , y descendentes es  $1-p$ .
- c. Probabilidades objetivas para movimientos ascendentes  $q$  y descendentes  $1-q$ .

Los parámetros  $p$ ,  $u$ ,  $q$  y  $d$  no pueden fijarse arbitrariamente, estos deben tener una correspondencia con los dos primeros momentos estocásticos del movimiento GBM. Es por

---

<sup>1</sup> La valuación neutral al riesgo en derivados se basa en la perfecta correlación entre los cambios en el valor de la opción y en el del activo subyacente. Al ser el subyacente el único elemento aleatorio, una cartera compuesta por una posición larga (corta) en una opción, y corta (larga) en el subyacente, hace que el subyacente cubra las posibles fluctuaciones en el precio del derivado. Como consecuencia de ello, el valor de la cartera crece al tipo sin riesgo. El número exacto de subyacente a vender (comprar) se conoce como "delta". En un mundo del tipo "Black-Scholes", si se compran "delta" acciones empleando el modelo, se cubre correctamente el riesgo eliminándolo por completo. En consecuencia, se debe esperar compensación por haberlo asumido, y se supone que los activos crecen a la tasa libre de riesgo.

Uno de los efectos más importantes de la valuación neutral al riesgo es que los derivados pueden ser valorados simulando los diferentes caminos neutrales al riesgo que sigue el subyacente mediante rejillas. Con ello se calcula el valor terminal, es decir, los flujos de fondos del derivado. Los valores finales ponderados por las correspondientes probabilidades neutrales al riesgo son actualizados al presente y luego promediados. El valor promedio obtenido es el valor teórico de la opción.

En la práctica existen ciertas imperfecciones para aplicar el modelo: (a) rebalanceo continuo de la cartera (compra-venta) para mantener la cobertura; (b) el subyacente debe mantener un proceso estocástico geométrico browniano y volatilidad conocida; (c) inexistencia de costos de transacción y mercados completos.

eso que en el límite el modelo binomial converge con el [2] modelo BS, en la medida en que se cumpla con el Teorema Central del Límite<sup>2</sup>, dadas [3] las siguientes condiciones:

- a. Los saltos son independientes del nivel de precio de la acción.
- b. Media y varianza de la distribución binomial son iguales a media y varianza de la distribución lognormal.
- c. Las probabilidades  $p_u$  y  $p_d$  son positivas en el límite entre 0 y 1 pero no iguales a 0 y 1. La suma de estas debe ser igual a 1.

Las restricciones que deben cumplir las rejillas (sistema de ecuaciones) para incorporar los dos primeros momentos estocásticos (media y varianza) del GBM son:

$$E\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p\ln(u) + (1-p)\ln(d) = u \cdot \Delta t = e^{r\Delta t} \quad (10)$$

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p(1-p)\left[\ln\frac{u}{d}\right]^2 = \sigma^2 \cdot \Delta t = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \quad (11)$$

$$p_u + p_u = 1; 0 < p < 1 \quad (12)$$

Donde  $\Delta t$  es igual a  $T/n$ ,  $T$  es el tiempo hasta el horizonte final de proyección y  $n$  es el número de pasos.

Por lo tanto, existen tres ecuaciones y cuatro incógnitas ( $p$ ,  $u$ ,  $d$  y  $q$ ). La condición recombinante  $u \cdot d = d \cdot u = m^2$  es la restricción impuesta (Wilmott, P. 2009), estando aquí el atractivo del asunto, ya que la posibilidad de diferentes variantes de rejillas binomiales se incrementa en función de cómo es definida la última ecuación.

### 3.1 Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

El clásico modelo CRR (Cox, J- Ross, S - Rubinstein, M. 1979) define los parámetros del sistema de ecuaciones general de la siguiente manera:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (13)$$

<sup>2</sup> En términos sencillos, el teorema sostiene que la distribución del promedio de un conjunto de números aleatorios será normal e inclusiva cuando los números considerados individualmente no se encuentren normalmente distribuidos. Las condiciones que se deben cumplir son las siguientes: (a) los números aleatorios deben provenir de la misma distribución, (b) deben ser independientes y (c) la distribución debe tener media y varianza finita.

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (14)$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (15)$$

Los valores para  $u$ ,  $d$  y  $p$  son una solución exacta para el primer momento (ecuación 10). La condición  $u \cdot d = d \cdot u = m^2$  se define como  $u \cdot d = 1$ . Una de las características del modelo es su propiedad de centralidad, ya que el valor del activo subyacente en el nodo central, en la etapa  $2 \cdot dt$ , es igual a su valor inicial.

Sustituyendo los valores de  $u$ ,  $d$  y  $p$  en la parte izquierda de la ecuación de la varianza (ecuación 11) se obtiene:

$$\sigma^2 \Delta t \cdot \left( 1 - \frac{\mu^2 \Delta t}{\sigma^2} \right) \quad (16)$$

Para valores pequeños de  $\Delta t$  la segunda ecuación del modelo aproxima a la segunda ecuación del sistema. Los problemas se presentan cuando  $\left( 1 - \frac{\mu^2 \Delta t}{\sigma^2} \right) < 0$  o  $\Delta t > \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ , es decir, para grandes intervalos de tiempo la ecuación de la varianza de la rejilla presenta sesgo negativo (Trigeorgis, L. 1991).

La manera tradicional de presentar la ecuación de las probabilidades de transición (ecuación 15) está dada por la siguiente expresión (Whaley, R. 2006; p. 313):

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (17)$$

Si  $\Delta t > \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ , el modelo da probabilidades negativas, porque<sup>3</sup>:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} > 1 \quad (18)$$

Este modelo tiene la misma media que el proceso lognormal del subyacente, pero independientemente del tamaño de  $\Delta t$ . Para la varianza solamente, existe coincidencia entre ambos en el límite.

<sup>3</sup> En el caso de probabilidades negativas pueden presentarse los siguientes cursos de acción: (a) Considerarlas no aceptables, con lo cual colapsa el modelo; (b) Calibrar el modelo con los valores de mercado estimando probabilidades implícitas a través de precios de mercado (Derman, E-Kani, I-Chriss, N. 1996); (c) Considerar que el valor futuro está por fuera del espacio actual definido para el árbol, no cubierto por la asignación subóptima de nodos para la rejilla proyectada (Haug Gaarder, E. 2007).

### 3.2 Rendleman-Bartter (RB) y Jarrow-Rudd (JR)

Rendleman y Bartter (1979) sostienen que el sistema de ecuaciones se mantiene estable si se cumple que  $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ , por lo tanto, las probabilidades neutrales al riesgo tienen valor  $p_u = p_d = 1/2^4$ . RB establecen los parámetros para resolver el sistema de ecuaciones:

$$u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (19)$$

$$d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (20)$$

$$u \cdot d = e^{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t} \quad (21)$$

A diferencia del modelo CRR,  $u$  y  $d$  se obtienen de una solución para el sistema de ecuaciones, debido a que  $p = 1/2$  y  $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ . Los parámetros del modelo RB tienen la misma media; la varianza correspondiente al proceso lognormal que sigue el subyacente, independientemente del tamaño que posea el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Por lo tanto la rejilla es estable y converge de forma más rápida a la solución analítica de BS si se lo comparara con el modelo CRR (Jarrow, R- Rudd, A. 1982).

### 3.3 Jabbour-Kramin-Young (ABMC)

El modelo es un híbrido de los modelos CRR y RB. Estos proponen una modificación sobre la desviación estándar para derivar el conjunto de parámetros. Para un mundo neutral al riesgo, la media y el desvío estándar se definen de la siguiente manera:

$$E(S_{t+\Delta t}) = S_t e^{r\Delta t} \quad (22)$$

$$\sigma(S_{t+\Delta t}) = S_t e^{r\Delta t} \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} \quad (23)$$

Para la distribución binomial media, queda definida como:

$$E(S_{t+\Delta t}) = pu + (1 - p)d \quad (24)$$

Con las ecuaciones anteriores se llega a la siguiente expresión:

$$pu + (1 - p)d = e^{r\Delta t} \quad (25)$$

<sup>4</sup> La propiedad de que las probabilidades neutrales al riesgo debe ser  $1/2$  se atribuye a Jarrow y Rudd (1982).

El momento de orden  $n$  acorde con la distribución binomial es:

$$M_n = p(u - m)^n + (1 - p)(d - m)^n \quad (26)$$

Siendo  $m = \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$ ; tal que  $m = pu + (1 - p)d$ , reemplazando en la ecuación anterior el segundo momento estocástico, queda planteado de la siguiente manera:

$$M_2 = p(1 - p)(u - d)^2 \quad (27)$$

Al igualar la varianza de la rejilla (ecuación 27) con el valor del subyacente  $V.m$  se obtiene:

$$M_2 = p(1 - p)(u - d)^2 = V\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \quad (28)$$

Aplicando la raíz cuadrada se obtiene:

$$\sqrt{p(1 - p)}(u - d) = \sigma \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = e^{r\Delta t} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} \quad (29)$$

El modelo ABMC coincide con CRR cuando los intervalos de tiempo son pequeños. Esto se debe a que la desviación estándar de las variaciones en el precio del subyacente para pequeños intervalos de tiempo  $\Delta t$  es aproximadamente  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ . Los problemas se presentan cuando las rejillas binomiales son empleadas para la valuación de activos reales. Los intervalos de tiempo en los cuales se extiende la vida del proyecto son largos (Mun, J. 2004). Si los términos de orden superior son ignorados, la volatilidad propuesta para intervalos de tiempo largos es:

$$\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} \approx \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (30)$$

En este caso, el crecimiento de la rejilla está dado por  $u.d = e^{2r\Delta t}$ , los parámetros  $u$ ,  $d$  y  $p$  son planteados de la siguiente manera:

$$u = e^{\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} + r\Delta t} \quad (31)$$

$$d = e^{-\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} + r\Delta t} \quad (32)$$

$$p = \frac{(e^{r\Delta t} - d)}{(u - d)} \quad (33)$$

El modelo cumple con el sistema de ecuaciones (10, 11 y 12) y con el requisito de centralidad (el subyacente crece al tipo sin riesgo, CRR); además de mantener la estabilidad de la rejilla (evita probabilidades negativas, RB), independientemente del tamaño del intervalo temporal  $\Delta t$ .

### 3.4 Boyle

Las rejillas trinomiales proveen una representación alternativa pero análoga al método binomial. Estas tienen tres parámetros de movimientos  $u$ ,  $m$ ,  $d$ , y tres probabilidades de transición, asociadas  $p_u$ ,  $p_m$  y  $p_d$  a los movimientos indicados. Las rejillas trinomiales pueden construirse respetando las premisas utilizadas para su par binomial: (a) las probabilidades de transición son positivas en el límite entre 0 y 1, debiendo ser su suma equivalente a la unidad, (b) la media y varianza de la distribución trinomial debe ser igual a los dos primeros momentos estocásticos de la distribución lognormal. La contraparte de la rejilla binomial para el valor de la media se expresa a continuación:

$$p_u u + p_d d = e^{r\Delta t} \quad (34)$$

En la ecuación anterior se supone igual magnitud para los movimientos ascendentes y descendentes, es decir, la misma simetría que el modelo CRR. La contraparte de la rejilla binomial para el valor de la varianza se expone a continuación:

$$u^2(p_u + p_d) = \sigma^2 \Delta t \quad (3)$$

Hasta aquí se poseen tres incógnitas ( $p_u$ ,  $p_d$  y  $u$ ) y solo dos ecuaciones, por lo tanto, la tercer restricción propuesta por Boyle (1988) y Kamrad y Ritchken (1991) es suponer que el coeficiente de ascenso tiene la forma funcional  $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$  donde  $\lambda \geq 1$ . Sustituyendo en la ecuación 35 la suma de las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes se obtiene:

$$p_u + p_d = 1/\lambda^2 \quad (4)$$

La probabilidad de transición intermedia es igual a:

$$p_m = 1 - 1/\lambda^2 \quad (5)$$

Despejando en función de la probabilidad de un movimiento descendente en la ecuación 36 y reemplazando en la ecuación 34, se obtiene la probabilidad de transición ascendente:

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{u\Delta t}{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (38)$$

La probabilidad de transición del movimiento descendente es igual a:

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{u\Delta t}{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (39)$$

Si el coeficiente  $\lambda$  es igual a 1, el modelo colapsa al modelo CRR, debido a que la probabilidad de transición del nodo intermedio es igual a 0. Esto provoca la eliminación de los nodos del medio, el coeficiente de ascenso se resume a  $u=e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  y las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes quedan iguales a CRR. El valor del coeficiente  $\lambda$  es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, cuanto mayor sea el valor del coeficiente, mayor será la probabilidad de movimientos laterales.

### 3.5 Haahtela

El autor propone rejillas trinomiales con probabilidades cambiantes. En primer lugar es necesario definir la condición de recombinación de los nodos intermedios, para lo cual es necesario que se cumpla con la siguiente ecuación:

$$u \cdot d = m^2 \quad (40)$$

Siendo  $m=e^{r\Delta t}$ , el conjunto de ecuaciones para estimar las probabilidades de transición correspondientes a los periodos de mayor volatilidad (Haahtela, T. 2010) es el siguiente:

$$p_u = \frac{m^2(e^{\sigma^2\Delta t}-1)}{u^2+md-um-ud} \quad (6)$$

$$p_d = p_u \left( \frac{m-u}{d-m} \right) \quad (42)$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \quad (43)$$

$$u = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2\Delta t} - 1}} \quad (44)$$

$$d = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2 \Delta t} - 1}} \quad (45)$$

Los movimientos ascendentes y descendentes que determinan el espacio donde estarán los posibles valores del subyacente son calculados de acuerdo al máximo periodo de volatilidad, tal que  $\sigma = \max \sigma_i$ . Los valores obtenidos ( $u, d$ ) son empleados en todo el espacio, independientemente de las variaciones proyectadas en la volatilidad del subyacente. Las ecuaciones correspondientes a las probabilidades de transición se utilizan solamente para los periodos de mayor volatilidad. Las probabilidades intermedias de transición son derivadas a partir de la ecuaciones 41-43, de la siguiente manera:

$$p_u^i = p_u \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^2 \quad (46)$$

$$p_d^i = p_d \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^2 \quad (47)$$

$$p_m^i = 1 - p_u^i - p_d^i \quad (48)$$

La mecánica para la construcción de la rejilla es similar a las ya tratadas en el trabajo: en primer lugar se proyecta el proceso estocástico del subyacente, para luego introducir los flujos de pagos de la opción en el modelo. Se comienza desde el valor terminal para una opción de compra  $V_t = (\text{Max } S_t - X; 0)$  o venta  $V_t = (\text{Max } X - S_t; 0)$ , valuando recursivamente, aplicando probabilidades neutrales al riesgo. El valor actual esperado se obtiene de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$V_{t-1} = \frac{p_u V_{t,u} + p_m V_{t,m} + p_d V_{t,d}}{e^{r\Delta t}} \quad (49)$$

## 4 VALUACIÓN DE LA OPCIÓN DE EXPANSIÓN-VENTA SOBRE UNA EMPRESA DE BASE TECNOLÓGICA (EBT)

### 4.1. Descripción del caso y valuación mediante el método de descuento de flujos de fondos

Se presenta el caso de valoración de la flexibilidad estratégica contenida en una EBT del tipo *spin-off* universitario, cuyo objeto consiste en el desarrollo y la fabricación de un biorreactor de células madres. El biorreactor se caracteriza por ser de uso único con

destino a la proliferación de *stemcells hematopoyéticas*<sup>5</sup> para transfusiones e implantes de médula ósea, terapia celular e investigación básica y aplicada. El emprendimiento se sitúa en la ciudad de Bahía Blanca (sudoeste de la Provincia de Buenos Aires, Argentina), en donde se encuentran importantes centros de estudio, investigación y actividad médica del país.

Las estrategias en juego consisten en desarrollar, patentar, obtener la licencia y fabricar a baja escala un biorreactor de células madres. El plazo de duración de los derechos de exclusividad en Argentina se estima en cinco años. Luego, se analizará la posibilidad de incrementar la producción (expansión) del *spin-off* o, alternativamente, transferir la licencia de fabricación (venta) a competidores.

Las ventajas competitivas del proyecto son: (a) barreras de entrada temporales generadas por la obtención de la validación del biorreactor por parte de los organismos de control de la salud en Argentina<sup>6</sup>, y (b) su correspondiente registro de propiedad. Las desventajas competitivas residen en: (a) la existencia de competidores potenciales, ya que la tecnología en cuestión se encuentra disponible en otros mercados<sup>7</sup> y (b) las barreras de salida producto de la especificidad e irreversibilidad de la inversión en activos fijos.

---

<sup>5</sup>El biorreactor de *stemcells hematopoyéticas* se usa para terapia celular e investigación básica y aplicada. Este cumple las funciones de un útero artificial como soporte ambiental para la multiplicación de células. Se encuentra compuesto por un agitador junto a una fuente térmica en un recipiente donde las unidades de sangre con *stemcells hematopoyéticas* (SCH) estarán con atmósfera estéril controlada (humedad, pH, O<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> y aire medicinal); cuenta con bocas de conexión externas vinculando las bolsas para obtener muestras control. Este biorreactor da soporte al aumento de las SCH contenidas en la sangre. La atmósfera es controlada en humedad, temperatura y concentración de dióxido de carbono, oxígeno, nitrógeno y/o aire medicinal; las bolsas de colecta de sangre de cordón umbilical fabricadas en cloruro de polivinilo (PVC) tienen buenas propiedades de permeabilidad al agua y los gases anteriormente nombrados en el rango deseado. Mediante el uso de la informática se controlan los programas de movimientos, inyección de gases y alarmas por irregularidades ocurridas (sonora, vía mail, llamado de teléfono y mensaje de texto hacia telefonía celular). Hasta ahora, la combinación del artefacto y la técnica propuesta, aunque sin atmósfera controlada, se ha probado con sangre de cordón umbilical (SCU) en el Banco de SCU de la Universidad Estatal de Campinas (Unicamp, Campinas, Brasil) con resultados excelentes. Se espera su mejoría al controlar la atmósfera. En aplicación clínica, a mayor número de SCH trasplantadas mejor es el pronóstico para el paciente. Se han realizado diversos ensayos para estimular la expansión “ex vivo” de estas células, probando sistemas de cultivo en larga escala en biorreactores utilizando, o no, agentes promotores. Aunque los resultados son alentadores, el alto costo y/o las técnicas utilizadas no permiten el trasplante de estas células.

<sup>6</sup>Avales y autorizaciones del Ministerio de Salud de la Nación, Agencia Nacional de Medicamentos, Alimentos y Tecnología Médica (ANMAT).

<sup>7</sup> Los actuales competidores son General Electric Healthcare (Wave BioreactorSystem 2-10, precio u\$45.000 sin software); Sartorium-Stedim (BiostatCultibag, precio u\$25.000 sin software); Infors (Multifors u\$65.000), fuente de datos: Biólogo Pedrueza, Jorge, elaboración de trabajo final especialización en gestión tecnológica (GETEC), Universidad Nacional del Sur.

Los estudios de factibilidad (técnicos y económicos) arrojan un valor, en concepto de inversiones en infraestructura, puesta en marcha y validación del prototipo, de u\$286.425. Se estima que el capital de trabajo necesario para la elaboración y comercialización del biorreactor representa un 35% del nivel de ingresos por ventas (operaciones), siendo su valor inicial de u\$227.066,40. La inversión inicial ( $I$ ) total asciende a u\$513.491,40. El costo total de la licencia para obtener los derechos de explotación por el periodo de 5 años (incluidos tasas, derechos y honorarios profesionales en las actuaciones ante los organismos pertinentes) es de u\$65.000.

Producto de los estudios de mercado en Argentina, Brasil, Chile y Uruguay existen 244 clientes<sup>8</sup>. Como punto de partida para la proyección de ingresos, se estima una participación inicial en el mercado del 7 % en el primer año; del 10% en el segundo; del 15% en el tercero y cuarto hasta llegar al 20% en el quinto periodo. Producto de la estrategia de comercialización, se define un precio de venta de u\$32.000. Los costos variables de fabricación se estiman en un 60% del precio de venta (u\$19.200) y los costos de estructura ascienden u\$30.000. Otros datos necesarios para la valoración son: (a) la tasa marginal del impuesto a las ganancias en Argentina (lugar de radicación de la EBT) es del 35% y, (b) la tasa de rendimiento requerida ( $k$ ) se estima en 24,49%. Cabe aclarar que el objetivo del presente trabajo no es enfocarse en las diferentes alternativas que los practicantes emplean para determinar la tasa ajustada por riesgo en el método del descuento de flujo de fondos, para mercados emergentes y empresas cerradas. A modo de ejemplo, se emplea como modelo una variante del *build-up model* (Pratt, S - Grabowski, R. 2008). En este caso, al rendimiento de mercado se incorporan ajustes *ad-hoc*, debido a las falencias y características del mercado de capitales argentino para reflejar precios de riesgos sistémicos mediante los modelos de equilibrio tradicionales<sup>9</sup>. La tasa surge de ajustar el rendimiento de mercado por la volatilidad total (suponiendo  $\beta=1$ ), en este caso, dada por el desvío estimado para el mercado doméstico:

---

<sup>8</sup> Centros de colecta y transplante de médula ósea (29), Bancos Públicos de sangre de cordón umbilical (5); Empresas colectoras de células madres por cordón (6); Universidades Estatales especializadas en el área (38); Universidades Privadas e Institutos de Investigación del área (40); Empresas Biotecnológicas y Farmacéuticas (126), fuente de datos: Ib.

<sup>9</sup> Emergente, poco diversificado y segmentado, no siendo propicia la estimación de coeficientes betas para la implementación de los tradicionales modelos como CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), APT (*Arbitrage Price Theory*). Uno de los problemas de las EBT, específicamente en mercados emergentes, está dado por no existir empresas comparables para obtener precios de mercado del riesgo. Esta es otra de las limitaciones que presentan los modelos clásicos de valuación frente a las opciones reales.

$$k = rf + (rm - rf)x\beta + PC(50)$$

Donde el tipo sin riesgo  $rf$  es del (9,75%),  $rm$  (17,28%) es el rendimiento de mercado histórico<sup>10</sup>,  $\beta=1$  y la prima *ad-hoc* por falta de liquidez  $PC$  se estima en (7,21%). El valor actual neto del proyecto en su primera etapa (5 años) es:

Ventas unidades	0	17	24	37	37	49
	0	1	2	3	4	5
Ventas		\$ 546.560,00	\$ 780.800,00	\$ 1.171.200,00	\$ 1.171.200,00	\$ 1.561.600,00
Costos Variables		\$ 218.624,00	\$ 312.320,00	\$ 468.480,00	\$ 468.480,00	\$ 624.640,00
Costos Fijos		\$ 30.000,00	\$ 40.000,00	\$ 50.000,00	\$ 60.000,00	\$ 70.000,00
<b>Flujos operativos después de T</b>		<b>\$ 199.617,12</b>	<b>\$ 287.081,60</b>	<b>\$ 437.322,40</b>	<b>\$ 430.622,40</b>	<b>\$ 580.863,20</b>
Inversión Inicial	\$ 286.425,00					
Capital de trabajo	\$ 257.664,00	\$ -77.299,20	\$ 334.963,20	\$ 51.532,80	\$ 334.963,20	\$ 180.364,80
<b>Flujos Libres</b>	<b>\$ -544.089,00</b>	<b>\$ 276.916,32</b>	<b>\$ -47.881,60</b>	<b>\$ 385.789,60</b>	<b>\$ 95.659,20</b>	<b>\$ 400.498,40</b>
K	24,49%					
VAN	<b>\$ 21.242,34</b>					

Tabla 1: descuento de flujos de fondos proyecto. Elaboración propia.

El resultado arrojado por el método de descuento de flujo de fondos es de u\$21.242,34, sin considerar la flexibilidad estratégica. Si se descuenta el costo de la licencia, el valor del proyecto es negativo (u\$43.757,66). Por lo tanto, el método no brinda suficiente información para la toma de decisiones respecto del potencial valor del proyecto en función de sus alternativas estratégicas, debido a que solamente estima el valor estático o tradicional, y no todo el valor (Trigeorgis, L. 1997)<sup>11</sup>. Es aquí donde cobra importancia el uso de los modelos de valoración de opciones reales. Las estrategias a valorar son:

- a. Expansión: a partir del quinto periodo realizar inversiones adicionales para producir unidades mejoradas, que estén en condiciones de competir con los rivales actuales y potenciales del mercado. Se estima que la opción de expansión demandará una inversión adicional de u\$270.000.

<sup>10</sup> El tipo sin riesgo corresponde a la tasa BAIBOR efectiva anual al 31/12/2011. El rendimiento de mercado se calcula tomando la media aritmética de rendimientos correspondientes al índice Merval periodo 1992-2011. (<http://www.iamc.sba.com.ar/Imgs/Dyn/ArchivosLenguajes/7398-2012-1-9T16-38-0.pdf>). Las series son de elaboración propia.

<sup>11</sup> El valor total del proyecto se integra por el valor tradicional o estático y el valor expandido fruto de las oportunidades estratégicas del proyecto.

b. Venta: si el valor marginal del proyecto en el quinto periodo es negativo, se prevé una estrategia alternativa de venta de la licencia para fabricar el biorreactor. Se proyecta un valor de venta u\$90.000. Por lo tanto, se posee adicionalmente la flexibilidad estratégica de venta o abandono del proyecto.

En términos de opciones financieras, el emprendimiento posee dos opciones: una opción de compra europea para producir y comercializar el producto a escala comercial, expandiendo la inversión al periodo quinto; y una opción de venta europea, ejercible al vencimiento de la licencia, que permite la enajenación del proyecto a un precio acordado, si los escenarios no son propicios para su producción a escala industrial. Cuando se contrata un *call* y *put* sobre el mismo subyacente, precio de ejercicio y vencimiento, la estrategia se denomina *straddle*. La estrategia de opciones aludida tiene por objetivo brindar cobertura contra valores extremos, siendo empleada sobre activos con un alto grado de volatilidad, típico de los proyectos de base tecnológica.

Para permitir la aplicación de la Teoría de Opciones se supone que el mercado financiero debe ser completo, en el sentido de que cualquier flujo de fondos y riesgo pueda ser replicado por diferentes combinaciones de activos (carteras de arbitraje; Wang, A - Halal, W. 2010). La consecuencia inmediata de ello reside en que todo activo real tiene un activo financiero gemelo (acción), cuyos movimientos se encuentran correlacionados perfectamente con los flujos del proyecto. A partir del activo financiero se infiere la volatilidad del proyecto de inversión ( $\sigma$ ), esta última es el insumo para estimar los movimientos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) del proceso estocástico discreto (binomial o trinomial) de los flujos de fondos del proyecto. Dado que los mercados son imperfectos e incompletos, no todas las inversiones en activos reales poseen una acción gemela. Esta situación se profundiza para emprendimientos tecnológicos donde el capital en juego no hace oferta pública en el mercado financiero, hecho que cobra relevancia en economías emergentes. Por ello se utiliza el método MAD (*Marketed Asset Disclaimer*; Copeland, T - Antikarov, V. 2001), con el fin de calcular la volatilidad del proyecto. En primer lugar se calcula el valor actual de los flujos de fondos, asumiéndolo como el verdadero valor de mercado o precio de transferencia en el caso de venta del proyecto en marcha. Luego, el VAN obtenido es simulado aplicando el método Monte Carlo, suponiéndose distribución normal de probabilidad de los valores del VAN. De la simulación se obtienen los

parámetros de la distribución de frecuencia, entre ellos, la volatilidad del VAN ( $\sigma$ ). Como resultado: la volatilidad inicial asociada ( $\sigma$ ) es del 60%; el proceso estocástico del valor actual del proyecto sin costos de registro (u\$21.242,34) se supone geométrico browniano (GMB); el intervalo de tiempo es  $\Delta t=1$  y el tipo sin riesgo ( $r_f$ ) es del 5%. No obstante, se prevé que los niveles de volatilidad disminuirán con el avance del tiempo (como consecuencia de la mayor información y conocimiento). En los años sucesivos se estiman volatilidades de:  $\sigma_1=60\%$ ;  $\sigma_2=40\%$ ;  $\sigma_3=30\%$  y  $\sigma_4=20\%$ .

#### 4.2. Valuación mediante diferentes modelos de rejillas binomiales y trinomiales

A continuación se expondrán los resultados derivados de aplicar los modelos de valoración de opciones reales presentados en la sección anterior. Para cada uno de los modelos se presenta la rejilla con la evolución del subyacente (VAN del proyecto); el valor intrínseco en cada nodo de la opción (en *itálicas*); los nodos finales con sus posibles decisiones (expansión-venta); el valor del proyecto con flexibilidad en  $t=0$  y el valor neto del proyecto (valor actual neto expandido, menos el costo de la opción de u\$65.000).

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,59</b>	\$ 21,24	\$ 38,71	\$ 70,53	\$ 128,51	\$ 234,16	\$ 426,66	
<b>inversión</b>	<b>\$ 70,59</b>	<b>\$ 75,01</b>	<b>\$ 80,99</b>	<b>\$ 90,83</b>	<b>\$ 110,63</b>	<b>\$ 156,66</b>	<b>expansión</b>
		\$ 11,66	\$ 21,24	\$ 38,71	\$ 70,53	\$ 128,51	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 6,40	\$ 11,66	\$ 21,24	\$ 38,71	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
	<b>u</b>	1,8221		\$ 3,51	\$ 6,40	\$ 11,66	
	<b>d</b>	0,5488		<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
	<b>p</b>	0,3946			\$ 1,93	\$ 3,51	
	<b>1-p</b>	0,6054			<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
						\$ 1,06	
						<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

Tabla 2: valor de las opciones expansión-venta Modelo binomial Cox-Ross-Rubinstein. Elaboración propia.

La tabla 2 muestra el valor del proyecto obtenido a través del clásico modelo binomial de CRR. A diferencia del criterio de descuento de flujo de fondos, en el cual la flexibilidad estratégica no tiene valor, el valor actual neto expandido del proyecto asciende a u\$70.590 (VAN estático u\$21.242,34 + VAN expandido u\$49.350). Por lo tanto, el valor

neto del proyecto, considerando el costo de la licencia, es de u\$5.590. De cumplirse el proceso estocástico estimado para el valor del proyecto, un único escenario esperado revela la conveniencia de la expansión; el resto de los nodos proyecta la venta de la licencia. El mayor y probable valor agregado estratégico proviene de la venta de la licencia.

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,09</b>	\$ 21,24	\$ 33,99	\$ 54,38	\$ 87,01	\$ 139,21	\$ 222,74	
inversión	<b>\$ 70,09</b>	<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
		\$ 10,24	\$ 16,38	\$ 26,21	\$ 41,93	\$ 67,09	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 4,93	\$ 7,89	\$ 12,63	\$ 20,21	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
	<b>u</b>	1,6000		\$ 2,38	\$ 3,80	\$ 6,09	
	<b>d</b>	0,4819		<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
	<b>p</b>	0,5000			\$ 1,15	\$ 1,83	
	<b>1-p</b>	0,5000			<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
						\$ 0,55	
						<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

Tabla 3: valor de las opciones expansión-venta Modelo binomial Rendleman-Bartter. Elaboración propia.

La tabla 3 muestra el valor del proyecto obtenido a través del modelo binomial RB. En este caso, el valor agregado debido a las opciones estratégicas contenidas en el proyecto (expansión-venta) es de u\$48.850. La estrategia recomendada en todos los escenarios es la venta. Las diferencias con el modelo anterior se encuentran en: (a) la definición de la volatilidad, (b) movimientos de ascenso–descenso y (c) las probabilidades neutrales al riesgo ( $p = 1-p = 0,5$ ). El producto de los coeficientes ( $u.d$ ) es de  $0,7710$ .

	0	1	2	3	4	5	Decisión
\$ <b>6,43</b>	\$ 21,24	\$ 43,13	\$ 87,58	\$ 177,83	\$ 361,08	\$ 733,18	
inversión	\$ <b>71,43</b>	\$ <b>77,82</b>	\$ <b>90,21</b>	\$ <b>120,73</b>	\$ <b>206,70</b>	\$ <b>463,18</b>	<b>expansión</b>
		\$ 11,56	\$ 23,48	\$ 47,67	\$ 96,79	\$ 196,53	
		\$ <b>73,69</b>	\$ <b>77,46</b>	\$ <b>81,44</b>	\$ <b>85,61</b>	\$ <b>90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 6,29	\$ 12,78	\$ 25,95	\$ 52,68	
			\$ <b>77,46</b>	\$ <b>81,44</b>	\$ <b>85,61</b>	\$ <b>90,00</b>	<b>venta</b>
				\$ 3,43	\$ 6,95	\$ 14,12	
				\$ <b>81,44</b>	\$ <b>85,61</b>	\$ <b>90,00</b>	<b>venta</b>
					\$ 1,86	\$ 3,79	
					\$ <b>85,61</b>	\$ <b>90,00</b>	<b>venta</b>
						\$ 1,01	
						\$ <b>90,00</b>	<b>venta</b>

u	2,0305						
d	0,5443						
p	0,3411						
1-p	0,6589						

Tabla 4: valor de las opciones expansión-venta Modelo binomial ABMC. Elaboración propia.

En la versión del modelo ABMC, el valor agregado de las opciones estratégicas del proyecto (expansión-venta) es de u\$50.190. Al igual que en el modelo CRR, se proyecta un único escenario de expansión y el resto, de venta de licencia. En este caso, el crecimiento de la rejilla está dado por  $u.d=e^{2r\Delta t}=1.1051$ . A los efectos ilustrativos, en la siguiente tabla se exponen la evolución de la magnitud de la volatilidad para el modelo CRR y la presente modalidad de rejilla:

$\Delta t$	CRR $\sigma$	ABMC $\sigma$	$\Delta t/n$	CRR $\sigma$	ABMC $\sigma$
1	60,00%	65,83%	1	60,00%	65,83%
5	134,16%	224,71%	5	18,97%	19,15%
10	189,74%	596,64%	10	8,49%	8,50%

Tabla 5: evolución de la volatilidad modelos CRR-ABMC. Elaboración propia.

Las tres primeras columnas muestran el incremento de la volatilidad a medida que los periodos de tiempo aumentan ( $\Delta t$ ), cuanto mayor es el año, el crecimiento proyectado por el modelo ABMC es superior al CRR. Para un intervalo anual la diferencia es significativa (65,83% ABMC; 60% CRR). Las tres columnas finales presentan el comportamiento de la volatilidad a medida que el número de pasos para un periodo ( $\Delta t/n$ ) aumenta. A medida que los pasos intermedios aumentan, el valor de la volatilidad en ambos modelos converge.

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,97</b>	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95	\$ 604,26	\$ 1.844,56	\$ 5.630,74	
<b>inversión</b>	<b>\$ 70,97</b>	<b>\$ 80,76</b>	<b>\$ 129,12</b>	<b>\$ 401,18</b>	<b>\$ 1.569,28</b>	<b>\$ 5.360,74</b>	<b>expansión</b>
	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95	\$ 604,26	\$ 1.844,56		
	<b>\$ 74,12</b>	<b>\$ 81,62</b>	<b>\$ 118,55</b>	<b>\$ 372,64</b>	<b>\$ 1.574,56</b>		<b>expansión</b>
	\$ 6,96	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95	\$ 604,26		
	<b>\$ 73,70</b>	<b>\$ 77,60</b>	<b>\$ 83,08</b>	<b>\$ 105,66</b>	<b>\$ 334,26</b>		<b>expansión</b>
		\$ 6,96	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95		
		<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
		\$ 2,28	\$ 6,96	\$ 21,24	\$ 64,84		
		<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 2,28	\$ 6,96	\$ 21,24		
			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 0,75	\$ 2,28	\$ 6,96		
			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
				\$ 0,75	\$ 2,28		
				<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
				\$ 0,24	\$ 0,75		
				<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
					\$ 0,24		
					<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
					\$ 0,08		
					<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>

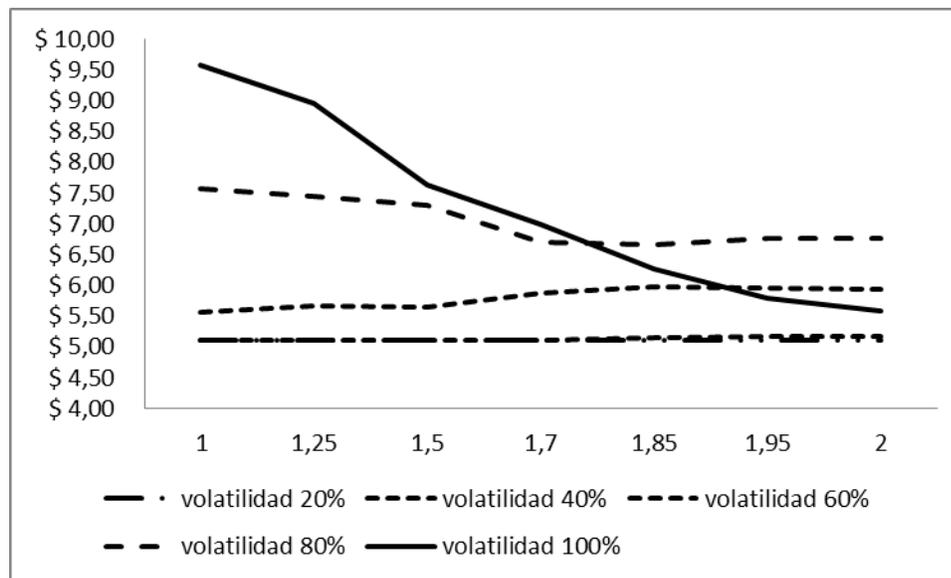
  

$\lambda$	1,860
$u$	3,053
$m$	1,000
$d$	0,328
$p_u$	0,086
$p_m$	0,711
$p_d$	0,203

Tabla 6: valor de las opciones expansión-venta. Modelo trinomial Boyle. Elaboración propia.

Las rejillas trinomiales tienen la capacidad de generar mayor cantidad de nodos, ganando en riqueza los posibles escenarios y los resultados proyectados. El valor actual neto expandido del proyecto asciende a u\$70.970 (VAN estático u\$21.242,34 + VAN expandido u\$49.730), y el valor neto del proyecto considerando el costo de la licencia es de u\$5.970. La probabilidad neutral al riesgo para el nodo intermedio surge de las siguientes igualdades:  $p_u + p_m = 1/\lambda^2 = 0,2890$  y  $p_m = 1 - 1/\lambda^2 = 0,711$ . No debe perderse de vista que el valor de  $\lambda$  es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, cuanto mayor sea el valor del coeficiente, mayor será la probabilidad de los movimientos laterales. A continuación se simulan diferentes valores de  $\lambda$  y volatilidad para determinar los posibles valores de la opción.

En la tabla<sup>12</sup> se puede apreciar la evolución del valor de la opción (valor expandido menos costo de licencia). Si el coeficiente es  $\lambda = 1$ , el modelo converge con el clásico CRR, conforme surge para el par (1; 60%, valor u\$5,57). En el modelo se plantea un equilibrio entre volatilidad y  $\lambda$ , en donde a mayores valores de las variables indicadas el impacto en el precio se torna negativo.



*Ilustración 1: volatilidad,  $\lambda$  y valor. Elaboración propia.*

En la siguiente tabla se exponen los resultados correspondientes a la rejilla trinomial con volatilidad cambiante (Haahtela, T. 2010).

<sup>12</sup> La tabla fue elaborada con la función “tabla de datos” del aplicativo Microsoft Excel ®.

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,42</b>	\$ 21,24	\$ 107,67	\$ 545,73	\$ 2.766,06	\$ 14.019,97	\$ 71.061,30	
<b>inversión</b>	<b>\$ 70,42</b>	<b>\$ 83,40</b>	<b>\$ 331,61</b>	<b>\$ 2.521,83</b>	<b>\$ 13.763,14</b>	<b>\$ 70.791,30</b>	<b>expansión</b>
		\$ 22,33	\$ 113,19	\$ 573,71	\$ 2.907,87	\$ 14.738,79	
		<b>\$ 73,82</b>	<b>\$ 82,09</b>	<b>\$ 338,17</b>	<b>\$ 2.651,04</b>	<b>\$ 14.468,79</b>	<b>expansión</b>
		\$ 4,63	\$ 23,48	\$ 118,99	\$ 603,12	\$ 3.056,96	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,49</b>	<b>\$ 83,63</b>	<b>\$ 349,15</b>	<b>\$ 2.786,96</b>	<b>expansión</b>
			\$ 4,87	\$ 24,68	\$ 125,09	\$ 634,04	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 86,32</b>	<b>\$ 364,04</b>	<b>expansión</b>
			\$ 1,01	\$ 5,12	\$ 25,95	\$ 131,51	
<b>λ</b>	1,860		<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>u</b>	5,069			\$ 1,06	\$ 5,38	\$ 27,28	
<b>m</b>	1,051			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>d</b>	0,218			\$ 0,22	\$ 1,12	\$ 5,66	
				<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
					\$ 0,23	\$ 1,17	
					<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
		<b>pu</b>	<b>pm</b>	<b>pd</b>	\$ 0,05	\$ 0,24	
<b>σ1 y 2</b>	60,00%	0,0246	0,8569	0,1185	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>σ3</b>	40,00%	0,0109	0,9364	0,0527		\$ 0,05	
<b>σ4</b>	30,00%	0,0061	0,9642	0,0296		\$ 0,05	
<b>σ5</b>	20,00%	0,0027	0,9841	0,0132		<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
						\$ 0,01	
						<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

Tabla 7: valor de las opciones expansión-venta Modelo trinomial Haahtela. Elaboración propia.

Se supone que la mayor volatilidad estará en los dos primeros años ( $\sigma_1, \sigma_2=60\%$ ), disminuyendo en los años subsiguientes ( $\sigma_3=40\%; \sigma_4=40\%; \sigma_5=40\%$ )<sup>13</sup>. Las empresas de base tecnológica se caracterizan por ser innovadoras, por el alto valor de las oportunidades de crecimiento, y por crear mercados nuevos. En términos de matriz de negocios, nacen como incógnitas que transitarán su ciclo de vida producto–sector, pasando por negocios con crecimiento potencial en mercados establecidos; para luego transformarse en negocios maduros en mercados estables, o directamente en fracasos empresariales. El ciclo de vida anterior tiene correlación con la volatilidad del emprendimiento, siendo cambiante en los primeros años y tendiendo a estabilizarse con la madurez del negocio (Smit, H - Trigeorgis, L. 2004). Los coeficientes de ascenso y descenso ( $u, m$  y  $d$ ) son empleados en la proyección

<sup>13</sup> Se puede suponer que la volatilidad disminuye por el mayor conocimiento adquirido en el gerenciamiento del emprendimiento y el flujo de nueva información sobre el comportamiento del mercado.

del valor del subyacente. El ajuste en función de la volatilidad se realiza sobre las probabilidades de transición (ecuaciones 46-48).

Esta versión de rejilla permite abandonar el supuesto de volatilidad constante, permitiendo sensibilizar y plantear diferentes escenarios. Es de utilidad, por ejemplo, en el caso de empresas o proyectos novedosos donde no existen frecuencias de datos históricos con el objeto de proyectar el comportamiento esperado de la volatilidad. En la siguiente tabla se presenta el resultado de la opción ante diferentes niveles de volatilidad.

$\sigma$	60;40;30;20	40;80;80;40	20;30;40;60	80;40;40;80	90;40;40;20
Escenario	Base	A	B	C	D
Valor	\$ 5,42	\$ 6,46	\$ 5,68	\$ 6,19	\$ 6,04

Tabla 8: escenarios, valor de la opción y volatilidad. Elaboración propia.

Se sensibilizó  $\lambda$  y la volatilidad correspondiente a los dos primeros años. Nuevamente, para un valor de  $\lambda=1$  la relación valor–volatilidad es positiva, y para valores superiores a 1,7 existe un balanceo entre valor de la opción, volatilidad y  $\lambda$ .

ROV		$\sigma$				
	\$ 5,42	20%	40%	60%	80%	100%
$\lambda$	1	\$ 5,09	\$ 5,09	\$ 5,13	\$ 5,78	\$ 6,82
	1,25	\$ 5,09	\$ 5,09	\$ 5,16	\$ 5,58	\$ 6,96
	1,5	\$ 5,10	\$ 5,10	\$ 5,24	\$ 5,89	\$ 6,57
	1,7	\$ 5,10	\$ 5,10	\$ 5,31	\$ 5,43	\$ 6,16
	1,85	\$ 5,10	\$ 5,10	\$ 5,43	\$ 5,79	\$ 5,43
	1,95	\$ 5,12	\$ 5,12	\$ 5,40	\$ 6,01	\$ 5,20
	2	\$ 5,13	\$ 5,13	\$ 5,37	\$ 5,97	\$ 5,15

Tabla 9: sensibilidad del valor en función a  $\lambda$  y  $\sigma$ . Elaboración propia.

A modo de resumen, se exponen los resultados del valor expandido y valor de la opción (para el periodo inicia  $t=0$ , y para el horizonte de planeamiento  $t=5$ ) arrojados por los diferentes modelos analizados.

Modelo	Valor VAN exp-Costo	Decisión t=0	Escenarios en t=5		ROV (VAN exp-VAN)
			Expansión	Venta	
Cox-Ross-Rubinstein	\$ 5,58	inversión	1	5	\$ 49,39
Rendleman-Barter	\$ 5,09	inversión	0	6	\$ 48,90
ABMC	\$ 6,43	inversión	1	5	\$ 50,24
Boyle	\$ 5,96	inversión	3	8	\$ 49,77
Haathela	\$ 5,42	inversión	4	7	\$ 49,23

Tabla 10: resultados arrojados por los diferentes modelos. Elaboración propia.

## 5 CONCLUSIONES

Es importante conocer las diferencias, ventajas y debilidades que presentan los modelos de rejillas binomiales y trinomiales, a la hora de utilizarlos en la valoración de la flexibilidad estratégica contenida en una empresa o proyecto.

La elección del modelo es crucial, debido a que condiciona la restricción de su sistema de ecuaciones para definir la relación variabilidad-intervalo de tiempo, y como consecuencia de ello, los movimientos de ascenso y descenso. Respecto de las rejillas binomiales, se presentaron los modelos CRR, RB y ABMC. Si bien el modelo CRR se encuentra ampliamente difundido, presenta dificultades relativas a su estabilidad para intervalos grandes, es decir, cuando  $\Delta t > \sigma^2/r^2$ . El modelo RB pierde centralidad, ya que  $u.d \neq 1$ , pero gana estabilidad frente a su par CRR. De las propuestas anteriores surge el modelo ABMC. Este considera la cuarta restricción de forma más apropiada a los problemas de decisión en el marco de opciones reales, donde los intervalos temporales son mayores y existe una menor cantidad de pasos intermedios en comparación con las opciones financieras.

Las rejillas trinomiales presentan mayor precisión en el valor que su par binomial, producto de la mayor densidad de nodos. Un atractivo adicional radica en que estas permiten sensibilizar el parámetro  $\lambda$  (Boyle, P. 1988) y obtener posibles valores del proyecto de manera sencilla. Las rejillas trinomiales con volatilidad cambiante (Haathela, T. 2010) permiten, de manera simple, construir escenarios esperados con diferentes volatilidades, transformándose en una herramienta alternativa para la simulación y sensibilización de escenarios y parámetros.

Los modelos presentados fueron aplicados en la valoración de las estrategias de expansión-venta en un emprendimiento de base tecnológica. Este tipo particular de empresa se caracteriza por su carácter innovador, por el peso significativo que cobra el capital intelectual en el valor, y por contener oportunidades de crecimiento para crear nuevos mercados. Un inconveniente para aplicar el enfoque de opciones reales en este tipo de empresas está dado por el hecho de que a menudo, no existe frecuencia de datos propios de un activo financiero réplica o activos comparables para estimar la cifra correspondiente a la volatilidad. Para subsanar esto, es común aplicar modelos de simulación financieros basados en el enfoque MAD (Copeland, T -Antikarov, V. 2001). Finalmente, en este tipo de empresas, es importante abandonar el supuesto de volatilidad constante y vincularlo con los diferentes estadios proyectados de la matriz de ciclo de vida del negocio. Por las cualidades del modelo y las características de las empresas de base tecnológicas, la rejilla trinomial con volatilidad cambiante se constituyen en un modelo satisfactorio para estimar posibles valores de estrategias contenidas en la novedosa y compleja tipología organizacional.

## BIBLIOGRAFÍA

- Black, F.- Scholes, M, (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Mayo-Junio.pp. 637-659.
- Boyle, P. (1988). A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, Volumen 23, pp. 1-12.
- Copeland, T.- Antikarov, V. (2001). *Real Options*. 1 ed. New York: Texere LLC.
- Cox, J.- Ross, S.-Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Septiembre.pp. 229-263.
- Derman, E.-Kani, I.-Chriss, N. (1996). Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile. *Quantitative strategies research notes*,, February.
- Haahtela, T. (2010). Recombining Trinomial Tree for Real Option Valuation with Changing Volatility. *SSRN-Social Science Research Network*.
- Haug Gaarder, E. (2007). *Derivatives: Models and Models*. 1 ed. Chichester : John Wiley & Sons.

Hull, J. (2006). *Futures, Options and other Derivatives*. 6 ed. New Jersey: Prentice Hall.

Jabbour, G.-Kramin, M.-Young, S. (2001). Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited. *Journal of Futures Markets*, Noviembre, Volumen 21, pp. 987-1001.

Jarrow, R.-Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, Volumen 10, pp. 347-369.

Kamrad, B.-Ritchken, P. (1991). Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. *Management Science*, 37(12), pp. 1640-1653.

Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. 1 ed. New York: Wiley.

Pratt, S.-Grabowski, R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples*. 3 ed. New Jersey: John Wiley & Sons.

Rendleman, R.-Bartter, B. (1979). Two-state Option Pricing. *Journal of Finance*, Issue 34, pp. 1092-1110.

Smit, H.-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games*. 1 ed. New Jersey(Estados Unidos): Princeton University Press.

Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*, Issue 2, pp. 89-102.

Trigeorgis, L. (1991). A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3), pp. 309-326.

Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations*. 2 ed. Cambridge: MIT Press.

Wang, A-Halal, W. (2010). Comparison of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*, Issue 5, pp. 14-24.

Whaley, R. (2006). *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.



# VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: PROBABILIDADES OBJETIVAS, NEUTRALES AL RIESGO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

## *Resumen*

Las Empresas de Base Tecnológica presentan valor por sus flexibilidades estratégicas e intangibles. Las Opciones Reales capturan el valor estratégico. Este trabajo compara el método binomial (CRR) y el método de Arnold y Crack (AC). El segundo trabaja con las probabilidades objetivas o “del mundo real”. Si bien arriban al mismo resultado, el segundo tiene mayor poder explicativo. Se presenta el análisis de sensibilidad del valor actual neto expandido sobre la tasa de interés y volatilidad, para estudiar la anatomía del riesgo.

**Palabras clave:** Empresas de Base Tecnológica (EBT), Opciones Reales, probabilidades neutras al riesgo, probabilidades objetivas, sensibilidad.

## 1 INTRODUCCIÓN: EBT Y VALORACIÓN DE LA FLEXIBILIDAD ESTRATÉGICA

Las Empresas de Base Tecnológica (EBT) se caracterizan por su carácter innovador, su alta participación de intangibles, su capital humano, su significativo grado de incertidumbre y por sus múltiples fuentes de flexibilidad estratégica. En general, la irreversibilidad de la inversión en este tipo de emprendimientos es atenuada por una mayor flexibilidad estratégica, generando importantes barreras de entrada y disminuyendo las barreras de salida (Smit, H. -Trigeorgis, L. 2004). Las barreras de entrada son creadas a partir de licencias y patentes que brindan exclusividad sobre el producto y tiempo para diferir el momento de inversión, a la espera de nueva información que disminuya los niveles de incertidumbre. La proyección de la venta de la licencia de explotación ante escenarios adversos, es una alternativa estratégica que contribuye a disminuir las barreras de salida. La flexibilidad estratégica aludida es capturada y valorada por los métodos

propios de la Teoría de Opciones Reales (OR; Dixit, A -Pindyck, R. 1994; Trigeorgis, L. 1997; Mun, J. 2004). El valor total o expandido (VANE) está compuesto por su valor estático o tradicional (VAN) sumado al valor de la flexibilidad estratégica (VANFE) capturado por la teoría de opciones reales.

La combinación de una opción de compra y de venta con igual precio de ejercicio y fecha de vencimiento se conoce como *straddle*. Es una estrategia defensiva para subyacentes con altos niveles de volatilidad. En las EBT, las barreras de entrada y salida constituyen opciones de diferimiento y de abandono o venta, respectivamente. La combinación de estas acciones estratégicas añade valor y brinda protección, en particular cuando la incertidumbre es alta y difícil de cuantificar.

El trabajo propone un marco para valorar EBT, donde se conjuga el modelo binomial de valoración con el análisis de sensibilidad del riesgo y la tasa de interés, para estimar el valor de las EBT. Para la valoración mediante opciones se presenta el modelo de “probabilidades objetivas o del mundo real” (Arnold, T.- Crack, T. 2003; en adelante AC), como alternativa al método binomial (Cox, J.- Ross, S.- Rubinstein, M. 1979; en adelante CRR). Ambos enfoques son consistentes en cuanto a resultados, pero el uso de probabilidades “del mundo real” tiene una mayor eficacia comunicacional e interpretativa de la anatomía del riesgo contenida en los nodos finales de la rejilla. El trabajo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar se deriva el modelo binomial con probabilidades objetivas; en segundo lugar se estima el valor a través de un ejemplo de EBT con flexibilidad de diferir-venta; en tercer lugar se presentan los resultados en los modelos propios de sensibilizar la volatilidad y la tasa de interés; y finalmente son expuestas las conclusiones.

## 2 MODELO CON PROBABILIDADES OBJETIVAS Y NEUTRALES AL RIESGO

El valor actual de un activo es expresado por las siguientes variables:  $V_t$ , valor del bien al momento  $t$ ,  $K_s$ , el rendimiento<sup>1</sup> (o crecimiento) compuesto del valor del subyacente desde el instante 0 a  $T$ ,  $R_f$ , factor actualización (capitalización) sin riesgo  $(1+r_f)$  y  $E(.)$

---

<sup>1</sup>La tasa ajustada por riesgo ( $K_s$ ) se estima empleando modelos de equilibrio (*Capital Assets Pricing Model*, CAPM; *Arbitrage Price Theory*, APT; *Multifactor Pricing Model*, MFPM); incorporando momentos estocásticos superiores (*Downside*, CAPM; *Conditional Moment*, CAPM), o sencillamente estimaciones *ad-hoc* de la evolución del subyacente.

operador de expectativa. A partir del valor esperado del activo (Ec.1) se deriva el valor actual del mismo (Ec.2 y Ec.3).

$$V_0 E(K_s) = E(V_T) \text{ (Ec. 1)}$$

$$\Rightarrow V_0 [R_f + (E(K_s) - R_f)] = E(V_T) \text{ (Ec. 2)}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{E(V_T) - V_0 [E(R_v) - R_f]}{R_f} \text{ (Ec. 3)}$$

Para valuar la flexibilidad estratégica del proyecto es menester aplicar la Teoría de Opciones Financieras. El ratio delta ( $\Delta$ ) para una opción de compra<sup>2</sup> está definido por la siguiente ecuación:

$$\Delta = \frac{\Delta S}{C} = \frac{S_0 (V_u - V_d)}{V_0 (u - d) S_0} = \frac{(V_u - V_d)}{V_0 (u - d)} \text{ (Ec. 4)}$$

Donde  $\Delta = \frac{(V_u - V_d)}{S_0 (u - d)}$  expresa movimientos multiplicativos de ascenso ( $u$ ) y

descenso ( $d$ ) de ( $S$ ), y la elasticidad del valor del subyacente en relación al derivado. Incorporando la ecuación 4 en la ecuación 3 se obtiene la expresión correspondiente al valor actual de un activo real:

$$V_0 = \frac{E(V_T) - V_0 \Delta [E(R_v) - R_f]}{R_f} \text{ (Ec. 5)}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{E(V_T) - V_0 \frac{(V_u - V_d)}{(u - d) V_0} [E(R_v) - R_f]}{R_f} \text{ (Ec. 6)}$$

Los movimientos de ascenso  $u = \ell^{\sigma\sqrt{T}}$  y descenso  $d = \ell^{-\sigma\sqrt{T}}$  son derivados mediante el modelo CRR, donde  $\sigma$  representa la volatilidad del subyacente. Reordenando la expresión anterior, la valuación de un nodo específico correspondiente a la rejilla binomial es la siguiente:

$$\ell^{-r_f T} \left[ E(V_i) - \frac{V_u - V_d}{\ell^{\sigma\sqrt{T}} - \ell^{-\sigma\sqrt{T}}} (\ell^{kT} - \ell^{r_f T}) \right] \text{ (Ec. 7)}$$

<sup>2</sup> En una opción de venta el ratio se plantea como  $\Delta S/P$ , siendo similar a la opción de compra.

Los tradicionales coeficientes equivalentes ciertos (modelo CRR) son obtenidos suponiendo que la tasa de crecimiento del subyacente es el tipo sin riesgo:

$$p_n \equiv \left( \frac{\ell^{r_f T} - d}{u - d} \right) \text{ (Ec. 8)}$$

El enfoque propuesto emplea probabilidades objetivas o “del mundo real”. Estas son obtenidas sustituyendo el tipo sin riesgo de la ecuación anterior, por la tasa ajustada por riesgo o tasa de evolución del subyacente ( $K_t$ ):

$$p \equiv \left( \frac{\ell^{kT} - d}{u - d} \right) \text{ (Ec. 9)}$$

Finalmente, el valor del activo es calculado resolviendo recursivamente la rejilla binomial. El valor de la opción  $V_{ij}$  para  $n$  nodos, aplicando coeficientes equivalentes ciertos (modelo CRR), es:

$$V(i, j) = \ell^{-r_f T} \left[ p_n V_{(i+1, j)} + (1 - p_n) V_{(i, j+1)} \right] \text{ (Ec. 10)}$$

Siendo  $i$  el número de movimientos ascendentes y  $j$  el número de movimientos descendentes para el estadio “ $i+j$ ” (donde  $i+j$  es menor al estadio terminal). Utilizando las probabilidades objetivas (Ec. 9) y la valoración de un nodo (Ec. 7), la expresión general es:

$$V(i, j) = \ell^{-r_f T} \left\{ \left[ p V_{(i+1, j)} + (1 - p) V_{(i, j+1)} \right] - \left( \frac{V_{(i+1, j)} - V_{(i, j+1)}}{\ell^{\sigma \sqrt{T}} - \ell^{-\sigma \sqrt{T}}} \right) (\ell^{kT} - \ell^{r_f T}) \right\} \text{ (Ec. 11)}$$

### 3 ANÁLISIS DE UN CASO: FLEXIBILIDAD ESTRATÉGICA EN UN PROYECTO DE INVERSIÓN DE BASE TECNOLÓGICA. LA OPCIÓN DE DIFERIR Y ABANDONAR

Se supone que un grupo de investigadores especializados en nanotecnología de minicomponentes electrónicos destinados a la medicina evalúa la estrategia de fabricar a escala prototipos de microcomponentes para prótesis. La financiación, por partes iguales, será provista por un consorcio integrado por inversores privados (*venture capital*), y como contraparte, las horas trabajo derivadas del equipo de investigadores (costo de oportunidad). Los estudios de mercado, técnicos y económicos, arrojan un valor para la inversión inicial en activos fijos y capital de trabajo (I) de \$300 millones de pesos. El valor actual de los flujos derivado de los fondos operativos del proyecto VA (FF) es de 200

millones. El VAN del proyecto conduce a su rechazo (-100 millones); no obstante, el proyecto posee las siguientes estrategias alternativas:

a. *Patente y licencia de explotación*: se logra diferir la inversión, producción y comercialización del producto, con el objetivo de recolectar mayor información del potencial mercado y aminorar la incertidumbre inicial. En términos estratégicos, se crea una barrera temporal de entrada (licencia para diferir la producción y reserva de derechos de exclusividad). Se reserva la opción de esperar (diferir) la inversión, aguardando nueva información sobre la evolución del mercado. El costo de la licencia (incluidos tasas, derechos y honorarios profesionales en las actuaciones ante los organismos pertinentes) es de 10 millones, con un plazo de cuatro periodos. La inversión se concretará al final del cuarto periodo, si el valor actual de los flujos de fondos operativos es mayor a la inversión requerida para la producción a escala comercial, siendo este de \$600 millones.

b. *Venta de la licencia de explotación*: si en el quinto periodo no es económicamente viable la inversión para la producción comercial del producto, se proyecta la venta de su licencia a los competidores. El valor de transferencia se estima en \$400 millones.

Para permitir la aplicación de la Teoría de Opciones se supone que el mercado financiero debe ser completo, en el sentido de que cualquier flujo de fondos y riesgo pueda ser replicado por diferentes combinaciones de activos (carteras de arbitraje). La consecuencia inmediata de ello reside en que todo activo real tiene un activo financiero gemelo (acción) cuyos movimientos se encuentran perfectamente correlacionados con los flujos del proyecto. A partir del activo financiero se infiere la volatilidad del proyecto de inversión ( $\sigma$ ), esta última es el insumo para estimar movimientos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) del proceso estocástico discreto (binomial) de los flujos de fondos del proyecto. Dado que los mercados son imperfectos e incompletos, no todas las inversiones en activos reales poseen una acción gemela (Wang, A. - Halal, W. 2010). Esta situación se profundiza para emprendimientos tecnológicos en los cuales el capital en juego no hace oferta pública en el mercado financiero, hecho que cobra relevancia en economías emergentes. En estos casos, la solución viene de la mano del método *MAD* (*Marketed Asset Disclaimer*; Copeland, T. -

Antikarov, V. 2001). De acuerdo con este, la volatilidad se estima suponiendo que el valor de mercado del proyecto es el VAN estático. Luego, se calcula el VAN para el periodo  $t+1$ ; con los valores obtenidos se estima el rendimiento esperado para el primer año, el cual es sometido a un modelo de simulación financiera con el método Monte Carlo. De la simulación se obtienen los parámetros de la distribución de frecuencia, entre ellos, la volatilidad del VAN ( $\sigma$ ). En el presente trabajo se propone realizar un análisis de sensibilidad de la volatilidad, a la postre el parámetro que define los movimientos en el valor del subyacente. Adicionalmente, se sensibilizan el valor de la tasa de interés, el tipo sin riesgo en el modelo CRR y la tasa ajustada por riesgo en el modelo AC.

Se toma como volatilidad base ( $\sigma$ ) el 60%, y el proceso estocástico del subyacente (flujos de fondos operativos) se supone geométrico browniano (GMB). La tasa de crecimiento esperada ( $K_s$ ) de los flujos de fondos es del 18%, y el intervalo de tiempo es de  $\Delta t=1$ . El tipo sin riesgo ( $rf$ ) es del 5%. Los movimientos de ascenso ( $u=e^{\sigma\sqrt{t}}$ ) y descenso ( $d=e^{-\sigma\sqrt{t}}$ ) son de 1,82 y 0,58, respectivamente.

En el cuadro 1 se presenta el proceso estocástico del flujo de fondos operativo para una rejilla de cuatro periodos. Se exponen las probabilidades objetivas ( $Q(AC)$ ) y las probabilidades neutrales al riesgo ( $Q(CRR)$ ) calculadas mediante la siguiente expresión:

$$Q_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j (1-p)^{n-j}] \quad (\text{E.12})$$

0	1	2	3	4	Nodos	Q(AC)	Q(CRR)
\$ 200,00	\$ 364,42	\$ 664,02	\$ 1.209,93	\$ 2.204,64	4	6,72%	2,42%
	\$ 109,76	\$ 200,00	\$ 364,42	\$ 664,02	3	25,92%	14,88%
		\$ 60,24	\$ 109,76	\$ 200,00	2	37,47%	34,24%
			\$ 33,06	\$ 60,24	1	24,08%	35,02%
				\$ 18,14	0	5,80%	13,43%
						100,00%	100,00%

Cuadro 1: proceso estocástico flujo de fondos del proyecto, probabilidades objetivas y neutrales al riesgo. Fuente: elaboración propia.

### 3.1. Valuación con Probabilidades neutrales al riesgo (CRR)

El tradicional enfoque CRR requiere determinar los coeficientes equivalentes ciertos. Para ello, se aplica la ecuación 8. Los valores obtenidos son  $p_n = 0,394$  y su

complemento de  $(1-p_n)=0,6053$ . La determinación del valor terminal de la opción en el cuarto periodo se realiza mediante la expresión  $V=Max[VA(FF)_4- I_a ; 0]$ . Aplicando resolución recursiva a través de la ecuación 10 se obtiene el valor actual de los flujos de fondos en el momento inicial ( $t=0$ ). En el siguiente cuadro se expone la rejilla.

0	1	2	3	4	Nodos	Q(CRR)
\$ 351,41	\$ 407,99	\$ 531,67	\$ 832,67	\$ 1.604,64	4	2,4248%
	\$ 344,28	\$ 361,93	\$ 380,49	\$ 400,00	3	14,8799%
		\$ 361,93	\$ 380,49	\$ 400,00	2	34,2419%
			\$ 380,49	\$ 400,00	1	35,0214%
				\$ 400,00	0	13,4320%
				Probabilidad invertir		2,4247746%
				Probabilidad vender		97,575225%

Cuadro 2: valuación mediante el modelo CRR (Cox-Ross-Rubinstein). Fuente: elaboración propia.

El valor actual del proyecto en  $t=0$  es de \$351,41. Claramente, conviene llevar adelante la estrategia de desarrollo del prototipo y compra de la licencia, diferir la inversión y ejecutarla en  $t=4$ . Revelada la incertidumbre en el último periodo, si el escenario es adverso, no se invierte y se ejecuta la alternativa estratégica de venta. El valor actual neto de diferir, como elemento condicionante de la ejecución del proyecto, o su venta, es de \$341,41 (millones) [ $\$351,41 - \$10$ ]. El valor expandido (EVAN) es la suma del valor tradicional estático (VAN) y el valor estratégico de las opciones (VANFE), de modo que se tiene un VAN expandido de \$341,41 millones. Este surge de sumar el VAN (-\$100 millones) y el VAN de las opciones reales del proyecto (\$441,41). Las probabilidades de inversión (2,42%) y venta (97,57%) no deben tomarse en forma literal, son probabilidades propias de un mundo neutrales al riesgo (Wilmott, P. 2009).

### 3.2 Probabilidades objetivas (AC)

A diferencia del caso anterior, aquí se propone aplicar probabilidades objetivas que se presentan en la ecuación 9 y cuyos valores son de  $p= 0,509$  y  $(1-p)=0,4907$ . Nuevamente, la determinación del valor terminal de la opción ( $t=4$ ) se realiza mediante la

expresión  $V = \text{Max}[VA(FV)_4 - I_a ; 0]$ . Resolviendo recursivamente y aplicando la ecuación 11 se obtiene la rejilla del Cuadro 3.

	0	1	2	3	4	Nodos	Q(AC)
\$	351,41	\$ 407,99	\$ 531,67	\$ 832,67	\$ 1.604,64	4	6,724417%
		\$ 344,28	\$ 361,93	\$ 380,49	\$ 400,00	3	25,922645%
			\$ 361,93	\$ 380,49	\$ 400,00	2	37,474449%
				\$ 380,49	\$ 400,00	1	24,077349%
					\$ 400,00	0	5,801140%
					Probabilidad invertir		6,7244170%
					Probabilidad vender		93,275583%

Cuadro 3: valuación mediante el modelo de AC (Arnold-Crack). Fuente: elaboración propia.

El resultado del presente enfoque es consistente con el tradicional enfoque binomial CRR. A los fines comunicacionales, es más eficiente trabajar con probabilidades “del mundo real”. Estas logran una mejor interpretación de la anatomía del riesgo del proyecto y de las probabilidades de suceso asociadas a los nodos finales. Además, incorporan las tasas estimadas de evolución del valor del subyacente, en base a tradicionales modelos de equilibrio, modelos que incorporan momentos estocásticos de orden superior o estimaciones *ad-hoc* de la evolución del subyacente.

En el ejemplo, las probabilidades de éxito en  $t=4$  de la estrategia de invertir, producir y comercializar el prototipo (ejercicio del *call*) son del 6,72%. La estrategia de venta tiene una probabilidad de ocurrencia del 93,27%.

### 3.1 Nota: diferencias entre probabilidades objetivas y probabilidades neutrales al riesgo

En el enfoque de probabilidades neutrales al riesgo ( $p_n$ ) los valores de la probabilidad final son inferiores a los arrojados por las probabilidades objetivas ( $p$ ). En el ejemplo, la probabilidad objetiva de continuar con la inversión en  $t=4$  es del 6,72%, versus el 2,42% de probabilidad neutral al riesgo. Para escenarios adversos, la probabilidad objetiva de abandono asciende a 93,27%, contra 97,57% de probabilidad neutral al riesgo. En el enfoque de probabilidades neutrales al riesgo, la tasa de crecimiento es el tipo sin riesgo ( $rf$ ). Con probabilidades objetivas se utiliza la tasa ajustada por riesgo ( $k$ ). La

explicación intuitiva reside en que las probabilidades neutrales al riesgo incorporan el ajuste en los flujos, mientras que las probabilidades objetivas introducen el castigo por riesgo en el factor de descuento. Por lo tanto, las probabilidades objetivas en estadios positivos son mayores que los coeficientes equivalentes ciertos [ $p > p_n$ ], en el ejemplo [ $0,509 > 0,394$ ]. Para estados adversos al éxito, los valores correspondientes a probabilidades objetivas son inferiores que los coeficientes equivalentes ciertos [ $(1-p) < (1-p_n)$ ], [ $0,4907 < 0,653$ ]. Por lo tanto, los flujos de fondos equivalentes ciertos  $ec(ff)$  son menores que los flujos de fondos esperados  $E(ff)$ . Para los primeros, la tasa de actualización es el tipo sin riesgo, y para los segundos, es la tasa ajustada por riesgo.

#### 4 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: VOLATILIDAD, TASA DE INTERÉS Y VALOR DE LAS OPCIONES REALES

A continuación se propone una alternativa para entender la anatomía del riesgo, mediante la sensibilidad de las variables críticas en el valor del proyecto. En el modelo binomial para la valoración de opciones reales (CRR) fueron seleccionadas la tasa libre de riesgo y la volatilidad de los flujos. A continuación se presentan los distintos valores actuales netos expandidos, para distintas combinaciones de tasa libre de riesgo y volatilidad del proyecto.

VANE \$	351,41	$\sigma$					
		10%	20%	40%	60%	80%	100%
<b>Rf</b>	1,50%	\$ 376,71	\$ 376,71	\$ 376,71	\$ 397,11	\$ 414,58	\$ 457,66
	2,50%	\$ 361,93	\$ 361,93	\$ 361,93	\$ 383,31	\$ 401,02	\$ 444,14
	5,00%	\$ 327,49	\$ 327,49	\$ 327,49	\$ 351,41	\$ 369,68	\$ 412,81
	7,50%	\$ 296,33	\$ 296,33	\$ 296,33	\$ 322,93	\$ 341,71	\$ 384,76
	10,00%	\$ 268,13	\$ 268,13	\$ 268,13	\$ 297,56	\$ 316,80	\$ 359,65
	12,00%	\$ 247,51	\$ 247,51	\$ 247,51	\$ 279,31	\$ 298,88	\$ 341,50

Cuadro 4: sensibilidad valor actual neto expandido al tipo sin riesgo y volatilidad.  
Fuente: elaboración propia.

La tabla contiene 36 posibles resultados que surgen de combinar el tipo sin riesgo y la volatilidad, estos constituyen el rango de valoración aplicando opciones reales del proyecto. El par tipo sin riesgo-volatilidad (5%; 60%) arroja un valor de \$351,41. El

máximo valor está dado por el par (1,5%; 100%) de \$457,66 contra el mínimo valor dado por los pares (12%; (10%; 20%; 40%)) de \$247,51. Si se inspeccionan las filas del cuadro, se observa que para cada nivel de tasa libre de riesgo, a medida que aumenta la volatilidad, el valor expandido se incrementa. Si se analizan las columnas, se observa que para cada nivel de volatilidad la relación es inversa, es decir, a mayor tasa menor valor expandido.

<i>rf</i>	$\sigma$ (100%-10%)	$\sigma$	<i>rf</i> (12%-1,5%)
1,50%	\$ 80,95	10%	\$ -129,19
2,50%	\$ 82,20	20%	\$ -129,19
5,00%	\$ 85,32	40%	\$ -129,19
7,50%	\$ 88,43	60%	\$ -117,80
10,00%	\$ 91,52	80%	\$ -115,70
12,00%	\$ 93,98	100%	\$ -116,16

Cuadro 5: sensibilidad valor actual neto expandido al tipo sin riesgo y volatilidad.

Fuente: elaboración propia.

En el cuadro se aprecia, para este caso, la mayor sensibilidad de la relación0 valor expandido-tasa libre de riesgo en relación a la sensibilidad valor expandido-volatilidad. Finalmente, las medidas de posición y dispersión estadísticas, correspondientes a la serie de valores expandidos obtenidos del análisis de sensibilidad, son presentadas en el siguiente cuadro:

Media	\$ 339,14	
Desvío	\$ 55,71	16,43%
Máximo Valor	\$ 457,66	
Mínimo Valor	\$ 247,51	
Rango Valor	\$ 210,14	
Cof.Variación	\$ 0,16	

Cuadro 6: descriptores estadísticos del valor actual neto expandido. Fuente: elaboración propia.

De esta manera, se expuso el funcionamiento de un sencillo método como la sensibilidad de variables, para analizar la anatomía del riesgo de los posibles valores obtenidos aplicando la teoría de opciones reales.

## 5 CONCLUSIONES

En el trabajo se demuestra la consistencia y convergencia de resultados entre equivalentes ciertos y probabilidades objetivas o “del mundo real”. Ambas arriban al mismo resultado, no obstante, el segundo enfoque permite una interpretación más intuitiva de las probabilidades de suceso asociadas a los escenarios proyectados, vinculados a la flexibilidad estratégica de la inversión en cuestión. Sobre todo cuando los agentes vinculados con la toma de decisiones no se encuentran familiarizados con los modelos de valoración mediante opciones reales. Además, se presenta una sencilla pero eficaz alternativa para analizar la anatomía del riesgo propio de los posibles valores actuales netos expandidos del proyecto. En este caso, la sensibilidad recayó sobre el tipo sin riesgo y la volatilidad de los flujos. Sensibilizar la volatilidad es de suma utilidad en EBT y tipologías de proyectos análogos, debido a la simplicidad del método, a la inexistencia de activos financieros gemelos que repliquen los flujos de fondos del proyecto, y a la riqueza de valores posibles que pueden obtenerse.

### **ANEXO: PROBLEMAS QUE PRESENTAN EL ENFOQUE DEL VALOR ACTUAL NETO Y LA VALUACIÓN DE LA FLEXIBILIDAD ESTRATÉGICA**

Los problemas que presenta el enfoque del valor actual neto serán ilustrados con el siguiente ejemplo: se supone que un grupo de investigadores académicos especializados en nanotecnología de minicomponentes electrónicos destinados a la medicina, evalúa la estrategia de fabricar a escala prototipos de microcomponentes para prótesis. Estos poseen notables mejoras tecnológicas respecto de sus rivales y son elaborados en el mercado local. La financiación, por partes iguales, será provista por un consorcio integrado por inversores privados (*venture capital*) y como contraparte, las horas de trabajo derivado del equipo de investigadores (costo de oportunidad). El proyecto tiene desventajas competitivas dadas por sus bajas barreras de entrada, ya que introducido el producto, la tecnología puede ser imitada en el corto plazo por potenciales y actuales competidores. Adicionalmente, tiene altas barreras de salida, es decir, realizada la inversión en planta y equipo, la misma es irreversible y presenta la dificultad de enajenación de los activos fijos, habida cuenta de la especificidad del producto.

Considerando las bajas y altas barreras de entrada y salida, los estudios de mercado, técnicos y económicos, arrojan un valor para la inversión inicial en activos fijos y capital de trabajo (I) de 300 millones de pesos. El valor actual de los flujos derivados de los fondos operativos del proyecto VA (FF) es de 150 millones. El resultado obtenido aplicando el tradicional criterio de elección conduce al rechazo del proyecto, ya que su valor actual neto (VAN) es de -150 millones  $[VA(FF) - I]$ . En términos estratégicos, el resultado se genera debido a las escasas barreras de ingreso en el mercado (no se adquiere la exclusividad de fabricación, atentando contra la viabilidad económica del proyecto).

Una estrategia alternativa consiste en diferir la inversión, producción y comercialización del producto, con el objetivo de recolectar mayor información del potencial mercado y aminorar la incertidumbre inicial. En términos estratégicos, se crea una barrera temporal de entrada (licencia para diferir la producción y reserva de derechos de exclusividad).

Concretar el curso de acción precedente requiere patentar el prototipo y adquirir una licencia de exclusividad en la explotación. Con esto se reserva la opción de esperar (diferir) la inversión, aguardando nueva información sobre la evolución del mercado. El costo total de los gastos de desarrollo y la licencia (incluidos tasas, derechos y honorarios profesionales en las actuaciones ante los organismos pertinentes) es de 10 millones. El plazo de exclusividad y diferimiento de la inversión (Ia) se extiende hasta el cuarto periodo. La inversión se concretará si el valor actual de los flujos de fondos operativos supera los desembolsos requeridos para su producción a escala comercial. El valor de la inversión para el quinto periodo se incrementa respecto de la original (como consecuencia de un incremento esperado de los costos de producción), ascendiendo su valor a 600 millones de pesos. En términos de opciones financieras, el emprendimiento posee una opción de compra europea para producir y comercializar el producto a escala comercial, difiriendo la inversión al periodo quinto.

.Para valorar el emprendimiento tecnológico se aplica el método MAD (*Marketed Asset Disclaimer*; Copeland, T.- Antikarov, V. 2001). En primer lugar se calcula el valor actual de los flujos de fondos, asumiéndolo como el verdadero valor de mercado o precio de transferencia en el caso de venta del proyecto en marcha. Luego, el VAN obtenido es simulado aplicando el método Monte Carlo, suponiéndose distribución normal de

probabilidad de los valores del VAN. De la simulación se obtienen los parámetros de la distribución de frecuencia, entre ellos, la volatilidad del VAN ( $\sigma$ ).

En el ejemplo propuesto se aplica el método MAD sobre el valor actual de los flujos positivos, cuyo valor en  $t=0$  es de \$150. Como resultado, la volatilidad asociada ( $\sigma$ ) es del 60%, y el proceso estocástico del subyacente (flujos de fondos operativos) se supone geométrico browniano (GMB). La tasa de crecimiento esperada ( $Ks$ ) de los flujos de fondos es del 18%, y el intervalo de tiempo es de  $\Delta t=1$ . El tipo sin riesgo ( $rf$ ) es del 5%. Los movimientos de ascenso ( $u=e^{\sigma\sqrt{t}}$ ) y descenso ( $d=e^{-\sigma\sqrt{t}}$ ) son de 1,82 y 0,58, respectivamente.

En el cuadro 1.A se presenta el proceso estocástico del flujo de fondos operativo, para una rejilla de cinco periodos. Se exponen las probabilidades del “mundo real” ( $p$ ) y los coeficientes equivalentes ciertos ( $pn$ ).

0	1	2	3	4	5	$p$	$pn$
\$ 150,00	\$ 273,32	\$ 498,02	\$ 907,45	\$ 1.653,48	\$ 3.012,83	3,42%	0,96%
	\$ 82,32	\$ 150,00	\$ 273,32	\$ 498,02	\$ 907,45	16,50%	7,34%
		\$ 45,18	\$ 82,32	\$ 150,00	\$ 273,32	31,81%	22,52%
			\$ 24,79	\$ 45,18	\$ 82,32	30,65%	34,55%
				\$ 13,61	\$ 24,79	14,77%	26,50%
					\$ 7,47	2,85%	8,13%

Cuadro 1.A: proceso estocástico flujo de fondos del proyecto

El tradicional enfoque CRR requiere determinar los coeficientes equivalentes ciertos. Para ello se aplica la ecuación 8. Los valores obtenidos son  $pn = 0,394$  y su complemento de  $(1-pn)=0,6053$ . La determinación del valor terminal de la opción en el quinto periodo se realiza mediante la expresión  $V=Max [VA(FF)_t- I_a ; 0]$ . Si el valor de los flujos de fondos operativos es inferior a la inversión requerida, no se ejerce la opción de producir a escala comercial y el único costo que se asume es el pago inicial de gastos de desarrollo y licencia (10 millones). En el caso de que el valor de los flujos exceda la inversión requerida, se ejerce la opción de producción. Aplicando resolución recursiva a través de la ecuación 10, se obtiene el valor actual de los flujos de fondos en el momento inicial ( $t=0$ ). En el siguiente cuadro se expone la rejilla.

0	1	2	3	4	5	prn
\$ 35,55	\$ 85,36	\$ 202,45	\$ 472,88	\$ 1.082,74	\$ 2.412,83	0,96%
	\$ 6,10	\$ 16,26	\$ 43,32	\$ 115,40	\$ 307,45	7,34%
		\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	22,52%
			\$ -	\$ -	\$ -	34,55%
				\$ -	\$ -	26,50%
					\$ -	8,13%

Cuadro 2.A: valuación mediante el modelo CRR (Cox-Ross-Rubinstein)

El valor actual del proyecto en  $t=0$  es de \$35,55. Claramente, conviene llevar adelante la estrategia de desarrollo del prototipo y compra de la licencia, diferir la inversión y ejecutarla en  $t=4$ . Revelada la incertidumbre en el último periodo, si el escenario es adverso, no se ejerce el *call* y solamente se asume el costo de la licencia de diferir. Al ser el costo de la licencia inferior a los valores obtenidos por ambas estrategias (diferir e invertir), el valor actual neto de diferir como elemento condicionante de la ejecución del proyecto o de su venta es de \$25,55 (millones) [ $\$35,55 - \$10$ ]. Si no se hubiese analizado la posibilidad de diferir, el proyecto no se hubiese concretado, en función de su valor actual neto negativo; ni, eventualmente, la venta del prototipo, si los escenarios en los nodos finales no fueran favorables. En síntesis, si se sostiene que el valor expandido es la suma del valor tradicional estático (VAN) y el valor estratégico de las opciones (VAN estratégico) tenemos un VAN expandido de \$25,55 millones, que surge de sumar el VAN (-\$150 millones) y el VAN de las opciones reales del proyecto (\$175,55).

A diferencia del caso anterior, aquí se propone aplicar probabilidades correspondientes al “mundo real”. Sus valores son de  $p=0,509$  y  $(1-p)=0,4907$ . Nuevamente, la determinación del valor terminal de la opción ( $t=5$ ) se realiza mediante la expresión  $V = \text{Max}[VA(FF)_4 - I_a ; 0]$ . Resolviendo recursivamente se tiene la rejilla del Cuadro 3.A.

	0	1	2	3	4	5	p
\$	35,55	\$ 85,36	\$ 202,45	\$ 472,88	\$ 1.082,74	\$ 2.412,83	3,42%
		\$ 6,10	\$ 16,26	\$ 43,32	\$ 115,40	\$ 307,45	16,50%
			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	31,81%
				\$ -	\$ -	\$ -	30,65%
					\$ -	\$ -	14,77%
						\$ -	2,85%
							<b>Probabilidad éxito</b>
							<b>19,92%</b>

Cuadro 3.A: valuación mediante el modelo de AC (Arnold-Crack)

El resultado del presente enfoque es consistente con el tradicional enfoque binomial de Cox, Ross & Rubinstein. Sin embargo, las probabilidades “del mundo real” logran una mejor interpretación de la anatomía del riesgo del proyecto y de las probabilidades de suceso asociadas a los nodos finales. Además, se incorporan las tasas estimadas de evolución del valor del subyacente, en base a tradicionales modelos de equilibrio que incorporan momentos estocásticos de orden superior, o estimaciones *ad-hoc* de la evolución del subyacente.

En el ejemplo analizado, las probabilidades acumuladas de invertir, producir y comercializar el prototipo (ejercicio del *call*) es de 19,92% en  $t=5$ . El valor surge de sumar las probabilidades de ocurrencia correspondientes a los escenarios donde el proyecto toma valor positivo. En los estadios  $p^5$  (cinco escenarios positivos) y  $(1-p)xp^4$  (un escenario negativo y cuatro positivos) el valor del proyecto es positivo. En el resto de los nodos terminales no se ejerce la opción con probabilidad acumulada del 80,08%.

Para determinar los rendimientos periódicos correspondientes a cada estadio se aplica la siguiente expresión:

$$IRR = LN \left[ \frac{V_{i+1}(u)p + V_{i+1}(d)1-p}{V_i} \right] \text{ (Ec. 1.A)}$$

0	1	2	3	4
26,76%	26,34%	25,81%	25,13%	24,23%
	30,50%	30,50%	30,50%	30,50%

Cuadro 4.A: tasa de actualización por nodos

Se puede apreciar que las tasas de actualización por periodo varían replicando la flexibilidad estratégica del proyecto. El cuadro pone de manifiesto el clásico error en el que se incurre cuando se evalúa una decisión de inversión empleando una tasa ajustada por riesgo estática para toda la vida del proyecto.

En el cuadro 5.A se presenta el valor actual neto de las opciones del proyecto, desagregando dentro de la rejilla binomial los caminos que no conducen a un valor de cero. Un único camino conduce al nodo de mayor valor (\$2.412,83), pero cinco caminos diferentes arriban al segundo nodo de valor (\$307,45). En el análisis tradicional del Valor Actual Neto, simplemente se deben actualizar los flujos de fondos empleando las tasas de descuento adecuadas y multiplicándolas por las probabilidades objetivas. Se debe ser cuidadoso al estimar la tasa ajustada por riesgo, ya que esta no es simplemente aquella otra para proyectos por riesgo equivalente, que no tiene en cuenta la flexibilidad estratégica (Copeland, T.-Tufano, P. 2004). El factor de actualización surge de estimar las diferentes tasas (ecuación 12) según los diferentes flujos, en relación a los caminos alternativos que conducen a l nodo final.

FV	Descuento por recorrido	Descuento	PV
\$ 2.412,83	$\exp(- (26,76\% + 26,34\% + 25,81\% + 25,13\% + 24,23\%))$	27,731%	\$ 669,09
\$ 307,45	$\exp(- (26,76\% + 26,34\% + 25,81\% + 25,13\% + 24,23\%))$	27,731%	\$ 85,26
\$ 307,45	$\exp(- (26,76\% + 30,50\% + 30,50\% + 30,50\% + 30,50\%))$	22,592%	\$ 69,46
\$ 307,45	$\exp(- (26,76\% + 26,34\% + 30,50\% + 30,50\% + 30,50\%))$	23,553%	\$ 72,41
\$ 307,45	$\exp(- (26,76\% + 26,34\% + 25,81 + 30,50\% + 30,50\%))$	24,684%	\$ 75,89
\$ 307,45	$\exp(- (26,76\% + 26,34\% + 25,81 + 25,13\% + 30,50\%))$	26,045%	\$ 80,07

*Cuadro 5.A: FV (Valor Final). Descuento desagregado por recorrido, factor de descuento y PV (Valor Presente)*

Para los dos nodos finales donde se ejerce la opción, se procede a estimar las tasas de actualización. En el nodo superior solamente existe un único factor de actualización asociado al único recorrido (27,31%). En el nodo inferior se presentan cinco caminos posibles, por lo tanto, se deben estimar cinco tasas diferentes de actualización (27,31%; 22,59%; 23,55%; 24,68%; 26,04%).

	PV	P(x)	Q	PV*Q
\$	669,09	3,42%	3,42%	\$ 22,91
\$	85,26	16,50%	3,30%	\$ 2,81
\$	69,46	16,50%	3,30%	\$ 2,29
\$	72,41	16,50%	3,30%	\$ 2,39
\$	75,89	16,50%	3,30%	\$ 2,50
\$	80,07	16,50%	3,30%	\$ 2,64
	<b>VAN</b>			<b>\$ 35,55</b>

Cuadro 6.A: PV (Valor Presente), P(X) (Probabilidades Objetivas), Q (Probabilidades objetivas sobre los caminos), PV x Q (Valor Actual ponderado por la probabilidad)

En el cuadro 6.A se presenta el valor presente ajustado por las probabilidades Q. Estas son obtenidas aplicando la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{P}{n!} \frac{1}{j!(n-j)!} \text{ (Ec. 2.A)}$$

En este caso,  $p$  representa las probabilidades objetivas (3,42% para el nodo superior y 16,50% para el nodo siguiente),  $n$  la cantidad de pasos y  $j$  la cantidad de sucesos. El Valor Actual Neto es de \$25,55 millones (\$35,55-\$10).

De lo expuesto, los problemas presentados por el VAN están relacionados con: A) la tasa de actualización y B) los problemas computacionales:

A) Tasas de actualización: aplicar el enfoque del valor actual neto implica conocer las tasas de actualización vinculadas a los caminos que conducen a nodos finales. Para ello se debe aplicar el enfoque de opciones reales, ya sea trabajando con probabilidades neutrales al riesgo o probabilidades objetivas. Por lo tanto, aplicar la técnica del Valor Actual Neto resulta redundante, puesto que primero se deben estimar las tasas (ecuación 1.A, cuadro 4.A) mediante la técnica de opciones reales.

B) Problemas computacionales: en el caso del ejemplo analizado, el árbol de decisión tiene cinco caminos diferentes que forman el valor del segundo nodo final:

$\binom{5}{4} = 5$ . En el caso de que todos los nodos tuviesen valor, la cantidad de

combinaciones serían  $\sum_{h=1}^5 \binom{5}{h} = 2^5 = 32$ . Si se emplea una rejilla binomial con 10 pasos, tendríamos  $\sum_{h=1}^{10} \binom{10}{h} = 2^{10} = 1024$ .

Desagregar cada uno de los caminos y estimar la tasa correspondiente no es práctico. Un atajo consiste en resolver el dilema del factor de descuento, estimando una única tasa ajustada por riesgo, que iguala el valor presente (obtenido mediante la técnica de opciones) con el valor final en cada nodo. Aquí el factor de descuento se transforma en un promedio que sobre descuenta la opción en el dinero y sub descuenta la opción fuera del dinero.

## BIBLIOGRAFÍA

Arnold; T. y Crack, T. (2003): *Option Pricing in the Real World: A Generalized Binomial Model with Applications to Real Options*, SSRN: Social Science Research Network SSRN.

Copeland, T.- Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.). New York: Texere LLC.

Copeland, T.- Tufano, P. (2004). A Real World to Manage Real Options. *Harvard Business School Review*(82), 90-99.

Cox, J.- Ross, S. - Rubinstein, M.(1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Septiembre.pp. 229-263.

Dixit, A. - Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty*. 1 ed. New Jersey: Princeton University Press.

Milanesi, G.- Vigier, H. (2010). Árboles de Decisión, Opciones Reales y Enfoque Integrado en Mercados Completos e Incompletos. En A. A. Política (Ed.), *Anales Asociación Argentina de Economía Política* (págs. 1-30). Buenos Aires: AAEP.

Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. 1 ed. New York: Wiley.

Smit, H.-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games*. 1 ed. New Jersey, United State: Princeton University Press.

Trigeorgis, L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. 1 ed. London(United Kindgon): Praeger.

Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations*. 2 ed. Cambridge: MIT Press.

Wang, A. - Halal, W. (2010). Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*, Issue 5, pp. 14-24.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.



# VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: OPCIONES ARCO IRIS PARA MÚLTIPLES FUENTES DE INCERTIDUMBRE

## *Resumen*

Las opciones reales cuantifican el valor de la flexibilidad estratégica de una inversión. En tiempo discreto, emplean la distribución de la probabilidad binomial para estimar los posibles valores de la inversión (activo subyacente). Para estimar el valor de la flexibilidad estratégica se utilizan los métodos de carteras réplicas o probabilidades neutras al riesgo. En el caso de contar con varias fuentes de incertidumbre, se debe trabajar con distribuciones de probabilidad multinomiales. Es propuesto un método operativo para estimar el valor de la flexibilidad estratégica con múltiples fuentes de incertidumbre. Su estructura es la siguiente: en primer lugar se introduce el enfoque de opciones reales y las ventajas de trabajar con grillas binomiales o multinomiales, relativas a las propiedades matemáticas del triángulo de Pascal. Seguidamente, se presentan los insumos para el tratamiento de la incertidumbre: probabilidades condicionales (Teorema de Bayes) y movimiento Browniano. Luego la conveniencia de trabajar con el método de equivalentes ciertos, para incertidumbres tanto correlacionadas como independientes. Finalmente, se presenta un marco instrumental provisto de cinco pasos para la valuación. En este se valúa una opción de abandono sobre un proyecto de inversión en investigación y desarrollo (R&D), suponiendo correlación e independencia entre las fuentes de incertidumbre.

**Palabras clave:** Opciones reales, triángulo de Pascal, grillas multinomiales, movimiento Browniano, probabilidades condicionales.

## 1 VALUACIÓN DE ACTIVOS Y ENFOQUE DE OPCIONES REALES

Uno de los métodos de valuación de activos reales de mayor difusión y uso, destinado a cuantificar el valor intrínseco de la inversión, es el descuento de flujos de

fondos (*DFF*) y sus diferentes variantes<sup>1</sup>. Bajo esta metodología de valuación, los beneficios y costos asociados a un proyecto son actualizados empleando una tasa ajustada por el riesgo representativo de la inversión evaluada. El valor actual de los flujos de fondos se adiciona y a posteriori se sustrae el costo de la inversión, con el objeto de determinar la contribución marginal a la riqueza de la firma y del propietario de los fondos. Sin dejar de conocer el importante uso de esta herramienta a la hora de estimar el valor de un activo real, cabe reconocer que una de sus principales debilidades consiste en que el método supone la irreversibilidad de la inversión. Esto implica que la flexibilidad estratégica y táctica producto del dinámico gerenciamiento de la decisión de inversión no es capturada por el tradicional enfoque de descuento de flujos de fondos (Dixit, D-Pindyck, R. 1994; Trigeorgis, L. 1997; Mun, J. 2004).

La Teoría de Opciones Reales (OR) ofrece un complemento al DFF, ya que considera la variabilidad vinculada al dinamismo derivado de la ejecución y concreción de las metas y objetivos propios de la inversión.

Una complejidad adicional emerge cuando las fuentes de incertidumbre son varias, en cuyo caso no basta con construir una única cartera que replique la volatilidad del proyecto empleando un activo financiero “gemelo” o replicante (*twin security*). Es condición necesaria estimar la volatilidad de las fuentes de incertidumbre y a posteriori, desarrollar métodos analíticos para resolver los sistemas de ecuaciones destinados a valuar los riesgos de la inversión.

En base a lo expuesto, el objetivo del presente trabajo consiste en proponer un marco operativo e instrumental consistente de cinco pasos para resolver la valuación de la flexibilidad estratégica contenida en el valor del proyecto. Para ello se propone trabajar con el enfoque de OR a través de grillas multinomiales y el método de equivalentes ciertos. Este modelo fue propuesto originalmente por Boyle, Evine y Gibbs (1989); Copeland y Antikarov (2001) y Brandao y Dyer (2009). La metodología propuesta es aplicable tanto para los casos de independencia como para los de correlación entre las fuentes de

---

<sup>1</sup> Se pueden diferenciar cuatro grupos de métodos de valuación de activos reales: (a) Valores Históricos (basados en el criterio de costos y en los cuales se engloban los métodos contables); (b) Múltiplos y Comparables (los ratios más difundidos: Precio-Ganancia (PER); Valor de Mercado-Valor de Libros, *Enterprise Value*; *Q-Tobin* y demás múltiplos de acuerdo a las características de la inversión); (c) Valores Intrínsecos (Descuento de Flujos de Fondos en sus diferentes variantes; Ganancias Residuales y Valor Económico Añadido); (d) Enfoque de Opciones Reales (Milanesi, G. 2009).

incertidumbres vinculadas al activo real, siendo apropiada cuando las variables aleatorias siguen un proceso estocástico geométrico browniano. El marco teórico se complementa con la aplicación del método a un caso sobre un proyecto de investigación y desarrollo de productos (*R&D*), con opción de abandono (venta del proyecto a competidores) durante el estadio de desarrollo.

## 2 GRILLAS BINOMIALES Y MULTINOMIALES

Por lo general, las fuentes de incertidumbres que gobiernan y explican los valores esperados de los activos reales son múltiples. En estos casos, al ser empleado el enfoque OR se está frente a una tipología de opciones denominada arco iris (“rainbow options”). En las situaciones donde la incertidumbre es singular y suponiendo que el proceso estocástico del activo responde a un movimiento Browniano, la resolución analítica del valor de la inversión en tiempo discreto requiere simplemente del empleo de grillas binomiales. En caso contrario se debe apelar a un enfoque multinomial, condicionado a si existe o no correlación entre las variables estocásticas.

### 2.1 Generalización para rejillas binomiales. El Triángulo de Pascal

En un esquema binomial, el valor del subyacente será una sucesión de estados buenos ( $u$ ) y malos ( $d$ ) a partir de su valor inicial ( $S_0$ ). Para dos periodos, esa misma sucesión se observará en las probabilidades del estado bueno ( $q$ ) y malo ( $1-q$ ), de modo tal que: (borde superior; 1)  $S_0 x u^2 x d^0 \Rightarrow (q^2 x 1 - q^0)$ ; (recombinación; 2)  $S_0 x u^1 * d^1 \Rightarrow (q^1 x 1 - q^1)$ ; (borde inferior; 1)  $S_0 x u^0 x d^2 \Rightarrow (q^0 * 1 - q^2)$  (Milanesi, G. –Vigier, H. 2010).

No obstante, en los estados intermedios cabe más de una posibilidad de arribar al estado final. En una grilla, a diferencia de un árbol, es fácil advertir en estos casos más de un camino o trayectoria para arribar a estados intermedios. En un ejemplo de dos periodos existen dos formas de arribar al estado final  $S_0 x u^1 x d^1$ . Un camino sería el estado malo en el primer período, seguido del estado bueno en el segundo y viceversa. Por ello, la probabilidad asociada al estado intermedio es la suma de las probabilidades de estas dos trayectorias. Por lo tanto, en el modelo de dos periodos, al estado intermedio  $S_0 x u^1 x d^1$  le corresponde una probabilidad  $(q^1 x 1 - q^1) x 2^2$ .

<sup>2</sup> Cabe tener en cuenta que para la resolución del problema, en este caso, se asume que resulta indistinto al decidir el modo en que se arriba a un cierto estado final y esto puede no ser un supuesto aceptable en la práctica. De cualquier modo, si ese fuera el caso, se podría considerar cada camino como un estado

En un problema con un mayor número de períodos, la dificultad residiría en determinar la cantidad de veces que se repite la probabilidad; o dicho en otros términos, la cantidad de caminos o trayectorias para arribar a los estados intermedios (también llamados estados recombinantes). Una primera forma de resolver esta dificultad sería reproducir la grilla y contar el número de trayectorias para arribar a cada estado final. Existe una herramienta matemática que facilita dicha tarea: el triángulo de Pascal<sup>3</sup><sub>[1-1]</sub>. Para definir los valores en cada elemento que compone el triángulo se sigue la siguiente regla:

1. Los valores extremos son iguales a uno.
2. Los valores intermedios en cada columna se definen como la suma de los valores en los extremos de la columna precedente.

La cantidad de combinaciones se obtiene de la siguiente manera: en la ilustración 1, si se toma como ejemplo el cuarto período, surgen cinco estados finales ( $T+1$ ), los cuales se reconocen por los cinco elementos de la columna correspondiente al cuarto período. El tercer estado del gráfico refleja las seis trayectorias que arriban a ese nodo. Dicho valor surge de sumar los valores indicados en la tabla, correspondiente a la columna anterior; o sea ( $3 + 3 = 6$ ).

Los números del triángulo de Pascal coinciden con los números combinatorios. El número combinatorio  $C_n^m$  se encuentra en el triángulo en la fila  $n+1$ , en el lugar  $m+1$ . A la fórmula de los números combinatorios se le puede dar el carácter de fórmula general del triángulo para saber, sin necesidad de construir todas las filas anteriores, cuál es el número que ocupa un lugar determinado:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{Ecuación 1}$$

---

independiente con su correspondiente probabilidad y a partir de esta definición, llegar a la solución con el mismo procedimiento. Esta situación refleja la gran flexibilidad de las rejillas para adaptar la formulación del problema a distintos contextos.

<sup>3</sup> El Triángulo de Pascal o Tartaglia. Se tienen referencias que datan del siglo XII en China. De hecho, algunas de sus propiedades ya fueron estudiadas por el matemático chino Yang Hui (siglo XIII), así como por el poeta persa Omar Khayyam (siglo XII). El hecho de que se asocie el nombre del triángulo al filósofo y matemático Blas (*Blaisé*) Pascal (1623-1662) se debe a que el francés escribió el primer tratado sobre el triángulo. El matemático italiano Niccolo Fontana Tartaglia (1500-1557) fue uno de los primeros que publicó y difundió en la Europa de la Edad Moderna la herramienta matemática en cuestión.

Periodos	0	1	2	3	4	5	6
						1	1
					1	5	6
			1	4	10	15	
<b>Grilla Binomial</b>	1	1	2	<b>+</b>	6	20	
		1	3	10	15		
			1	4	5	6	
				1	1	1	
							1
<b>Estados recombinantes</b>		2	4	8	16	32	64
<b>Estados finales</b>		2	3	4	5	6	7

Ilustración 1: Triángulo de Pascal. Fuente: elaboración propia.

Con el recurso del triángulo de Pascal se puede retornar al intento de generalizar el enfoque. La ilustración 2 ejemplifica los diversos estados de una grilla binomial para una opción de tres intervalos de tiempo.

Cantidad de periodos	0	1	2	3
				$1(q^3 1 - q^0)$
			$1(q^2 1 - q^0)$	$3(q^2 1 - q^1)$
<b>Grilla con proceso estocástico binomial</b>	$1(q^0 1 - q^0)$	$1(q^1 1 - q^0)$	$2(q^1 1 - q^1)$	$3(q^1 1 - q^2)$
		$1(q^0 1 - q^1)$	$1(q^0 1 - q^1)$	$1(q^0 1 - q^3)$
<b>Estados Finales</b>	1	2	3	4
<b>Estados Recombinantes</b>	1	2	4	8

Ilustración 2: Rejilla con proceso estocástico binomial. Fuente elaboración propia.

La forma general que corresponde a cada elemento de la grilla precedente está representada por la siguiente expresión:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [q^m \times (1-q)^{n-m}] \text{ Ecuación 2}$$

En este caso,  $n$  son los períodos y  $m$  los movimientos ascendentes. El primer término del producto representa nuevamente la cantidad de trayectorias para arribar a cada estado intermedio (elemento del triángulo de Pascal).

Suponiendo que la opción sólo se ejerce en el período final (opción europea) y que su precio de ejercicio es representado por  $X$ , el valor actual de la opción  $OR_0$  es igual al valor actual del valor esperado de los valores intrínsecos ( $VA [VE(VI(S_T))]$ ). La forma general de la ecuación de valoración de opciones es:

$$OR_0 = e^{-rf(\delta)t} \times \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [q^m \times (1-q)^{n-m}] \times \text{Max} [S_0 \times u^m \times d^{n-m}; X] \right\} \text{ Ecuación 3}$$

## 2.2 El enfoque multinomial (polinomial)

Cuando existen más de dos resultados posibles según el estado de la naturaleza, la distribución de probabilidad recibe el nombre de multinomial. Se trata de un caso general de la distribución binomial, con la particularidad de que en lugar de tener dos posibles resultados, existen  $n$  posibles resultados (Mood, A- Graybill, H. 1978). Supóngase que existen  $k$  resultados posibles de un suceso aleatorio. Si fuesen dos resultados (binomial), la suma de las probabilidades sería igual a  $q + (1-q)=1$ . Al ser multinomial, se debe verificar que  $\sum_{i=1}^k q_i = 1$ . Si el suceso se repite  $n$  veces y  $x_1$  representa la cantidad de oportunidades que se generan  $q_1$ ;  $x_2$ , la cantidad de veces que se verifican  $q_2$  y así sucesivamente, la función es planteada de la siguiente manera:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k x_i!} \prod_{i=1}^k q_i^{x_i} \text{ Ecuación 4}$$

Se trata de una distribución multivariante con  $k$  parámetros:  $n, q_1; q_2; q_3, \dots, q_{k-1}$ . La otra variable que consiste en el complemento ( $q$ ) se determina por diferencia:  $q_k = 1 - q_1; q_2; q_3, \dots, q_{k-1}$ . En el caso de que existieran dos fuentes de incertidumbre con: movimientos ascendentes ( $u$ ); descendentes ( $d$ ); precio de ejercicio  $X$  y valor inicial  $V_0$ ; el gráfico correspondiente a un nodo de una grilla con distribución multinomial sería el siguiente:

Momento T=0	Momento T=1	Momento T=0	Momento T=1
	$u1, u2 V(0)$		$Cu1, u2 = \text{Max}[u1, u2 V(0) - X; 0]$
	$u1, d2 V(0)$		$Cu1, d2 = \text{Max}[u1, d2 V(0) - X; 0]$
$V(o)$		$C(o)$	
	$d1, u2 V(0)$		$Cd1, u2 = \text{Max}[d1, u2 V(0) - X; 0]$
	$d1, d2 V(0)$		$Cd1, d2 = \text{Max}[d1, d2 V(0) - X; 0]$

Ilustración 3: nodo multinomial. Comportamiento del activo subyacente ( $V_o$ ) y del pago contingente ( $C_o$ ).

Fuente: elaboración propia.

Previo al tratamiento específico de la técnica de valuación de opciones reales con varios riesgos, es requisito enunciar brevemente los conceptos vinculados a la correlación entre eventos (fuentes de incertidumbre) y probabilidades condicionales. Estos son los insumos empleados en la estimación de los coeficientes correspondientes a los equivalentes ciertos.

### 3 DETERMINACIÓN DE PROBABILIDADES NEUTRALES AL RIESGO: EVENTOS DEPENDIENTES, INDEPENDIENTES Y PROBABILIDADES CONDICIONALES

Se dice que dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro. Por el contrario, dos eventos son dependientes cuando la ocurrencia de uno afecta a la del otro. Cuando los eventos son dependientes se emplea el concepto de probabilidad condicional. La expresión  $P(X|Y)$  indica la probabilidad de ocurrencia del evento  $X$  dado que aconteció el evento  $Y$ .

En el caso de eventos independientes no se requieren expresiones de probabilidad condicional. Por lo tanto, la probabilidad condicional  $P(X|Y)$  siempre es igual a la probabilidad no condicional  $P(X)$ . Si se conoce la probabilidad no condicional de  $P(Y)$  y la probabilidad conjunta de los eventos  $X$  e  $Y$ , se puede determinar la probabilidad condicional  $P(X|Y)$  de la siguiente manera<sup>4</sup>:

<sup>4</sup> Por lo general se confunden los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes con dependencia e independencia. La condición de mutua exclusividad implica que dos eventos no pueden

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \text{Ecuación 5}$$

### 3.1 Reglas de adición:

La regla de la adición para eventos mutuamente excluyentes es:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) = P(X \cup Y) \text{Ecuación 6}$$

En este caso, es simplemente la suma de las probabilidades simples correspondientes a los eventos. Para eventos que no son mutuamente excluyentes:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \text{Ecuación 7}$$

A la suma de las probabilidades simples de dos eventos se le resta la probabilidad de ocurrencia conjunta de eventos (intersección).

### 3.2 Reglas de multiplicación:

Para eventos independientes se tiene que la probabilidad de la intersección entre los mismos es simplemente el producto de las probabilidades de ocurrencia individuales:

$$P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y) \text{Ecuación 8}$$

Para eventos dependientes, la probabilidad de ocurrencia conjunta de  $X$  e  $Y$  es igual a la probabilidad de ocurrencia de  $X$  multiplicada por la probabilidad de condicional de  $Y$  dado  $X$ . Se obtiene un valor equivalente si se invierten los dos eventos. Por lo tanto, la regla de la multiplicación es:

$$P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y|X) = P(Y \cap X) = P(Y) \times P(X|Y) \text{Ecuación 9}$$

Si no existe correlación entre los eventos, la probabilidad condicional  $P(X|Y)$  siempre es igual a la probabilidad no condicional  $P(X)$ , por lo tanto, la ecuación queda reducida a la expresión para eventos independientes.

### 3.3 Teorema de Bayes:

Expresado en su forma algebraica más simple, se refiere al cálculo de la probabilidad de ocurrencia condicional del evento  $X$  dado que ha ocurrido  $Y$ . La importancia especial del teorema de Bayes radica en que se aplica en el contexto de eventos secuenciales. Además, la fórmula proporciona la base para determinar la probabilidad condicional de un evento que ha ocurrido en la primera posición secuencial, al observarse un evento específico en la segunda posición secuencial. Su expresión general es la siguiente:

$$P(X | Y) = \frac{P(X_1) \times P(Y | X_1)}{P(X_1) \times P(Y | X_1) + P(X_2) \times P(Y | X_2)} \quad \text{Ecuación 10}$$

El denominador de la expresión es la probabilidad global del evento en la segunda posición secuencial. En el caso de que haya independencia entre las fuentes de incertidumbre, las probabilidades condicionales de  $X$  e  $Y$  son equivalentes a sus probabilidades no condicionales, es decir:  $P(Y_u | X_u) = p_{uY}$  y  $P(X_u | Y_u) = p_{uX}$ . En este caso, se pueden encontrar las probabilidades para cada una de las cuatro posibles combinaciones  $[X_u, X_d]$  e  $[Y_u, Y_d]$ , simplemente calculando su producto (multiplicando sus respectivas probabilidades).

## 4 EQUIVALENTES CIERTOS VERSUS EL MÉTODO DE CARTERAS RÉPLICAS EN LA VALUACIÓN DE OPCIONES REALES CON DISTRIBUCIONES MULTINOMIALES

En este caso, el enfoque de carteras réplicas requiere plantear un sistema de cuatro ecuaciones con dos incógnitas. Al igual que en la distribución binomial, las incógnitas son  $m$  (cantidad de activo subyacente) y  $B$  (posición en activo libre de riesgo). Queda planteado un sistema con las siguientes ecuaciones:

$$m_{u_1 u_2} V_0 (1+r) B = C_{u_1 u_2} \quad \text{Ecuación 11}$$

$$m_{u_1 d_2} V_0 (1+r) B = C_{u_1 d_2} \quad \text{Ecuación 12}$$

$$m_{d_1 u_2} V_0 (1+r) B = C_{d_1 u_2} \quad \text{Ecuación 13}$$

$$m_{d_1 d_2} V_0 (1+r) B = C_{d_1 d_2} \quad \text{Ecuación 14}$$

La resolución del sistema requiere de la existencia de tres activos, uno libre de riesgo y dos riesgosos perfectamente correlacionados con las fuentes de incertidumbres. En un sentido estrictamente teórico, cuando se utiliza el enfoque de grillas polinomiales y existen solamente dos activos financieros<sup>5</sup>, resulta compleja la aplicación del método de carteras réplicas. Operativamente, se debe trabajar con un enfoque de probabilidades neutrales al riesgo, estimando los correspondientes ascensos y descensos vinculados a diferentes escenarios (Luherman, T. 1998: 366).

Si se emplean probabilidades neutrales al riesgo para un activo contingente (opción) con dos fuentes de incertidumbre correlacionadas o independientes, su valor es función de la suma de los cuatro valores correspondientes al nodo bajo examen, ponderados por el equivalente cierto asociado al estado de la naturaleza y actualizado por el tipo sin riesgo. La ecuación queda expresada de la siguiente manera:

$$C_0 = \frac{P_{u1u2}C_{u1u2} + P_{u1d2}C_{u1d2} + P_{d1u2}C_{d1u2} + P_{d1d2}C_{d1d2}}{(1+r)} \quad \text{Ecuación 15}$$

Este método presenta como ventaja el hecho de que resume el problema a la determinación de las probabilidades neutrales al riesgo asociadas a cada estado de la naturaleza, en función de los movimientos ascendentes, descendentes y la correlación entre las fuentes de incertidumbre.

## 5 OPCIONES REALES Y RIESGOS NO CORRELACIONADOS. EQUIVALENTES CIERTOS E INCERTIDUMBRES INDEPENDIENTES

Presentados sintéticamente los conceptos básicos correspondientes a probabilidades condicionales y dependencia de eventos, se está en condiciones de avanzar sobre la determinación del equivalente cierto para fuentes de incertidumbre no correlacionadas entre sí. En el siguiente gráfico se ilustra un nodo para el próximo periodo con eventos

<sup>5</sup> En el caso de que existan dos activos, si se pretende construir carteras réplicas para valuar el riesgo de precio y el riesgo de cantidades producidas, por ejemplo, en una explotación agropecuaria, puede tomarse el precio *spot* para replicar riesgo precio, mas no existe activo financiero réplica o “gemelo” para construir una cartera de cobertura contra el riesgo de cantidades.

independientes. Suponiendo un valor inicial del activo de  $V_0$  y fuentes de incertidumbre  $X$  e  $Y$ , se presentan los siguientes valores esperados:  $X_t \in [X_u, X_d]$  con probabilidades  $p_{ux}$  y  $1 - p_{ux}$ , e  $Y_t \in [Y_u, Y_d]$  con probabilidades  $p_{uy}$  y  $1 - p_{uy}$ . A su vez, los movimientos multiplicativos para la primera y la segunda fuente de incertidumbre se denotan como  $(u_1, d_1)$  y  $(u_2, d_2)$ . La grilla está compuesta por cuatro ramas vinculadas a un nodo, donde se debe estimar el desvío estándar correspondiente a los cambios en el precio del subyacente.

Momento T=0	Momento T=1
	$pu_1xu_2 \quad V(0) = V(0)pu_1u_2$
	$pu_1xd_2 \quad V(0) = V(0)pu_1d_2$
$V(0)$	
	$pd_1xu_2 \quad V(0) = V(0)pd_1u_2$
	$pd_1xd_2 \quad V(0) = V(0)pd_1d_2$

Ilustración 4: nodo grilla multinomial con eventos independientes. Fuente: elaboración propia.

Las variaciones en el valor son comandadas por ambas fuentes de incertidumbre en función de las volatilidades  $\sigma_1, \sigma_2$  y su correlación  $\rho_{1,2}$ . Al ser independientes las fuentes de incertidumbre, las probabilidades neutras al riesgo para cada rama surgen de aplicar las reglas de multiplicación para eventos independientes. El conjunto de ecuaciones resultantes es el siguiente:

$$p_{u_1u_2} = p_{u_1}p_{u_2} \quad \text{Ecuación 16}$$

$$p_{u_1d_2} = p_{u_1}p_{d_2} \quad \text{Ecuación 17}$$

$$p_{d_1u_2} = p_{d_1}p_{u_2} \quad \text{Ecuación 18}$$

$$p_{d_1d_2} = p_{d_1}p_{d_2} \quad \text{Ecuación 19}$$

En este caso, los estados de la naturaleza son independientes y excluyentes de su par. Por las reglas de multiplicación, el coeficiente de probabilidad equivalente cierta es el producto de los equivalentes ciertos individuales para cada estado.

## 6 OPCIONES REALES Y RIESGOS CORRELACIONADOS. EQUIVALENTES CIERTOS E INCERTIDUMBRES CORRELACIONADAS

Para derivar los equivalentes ciertos correspondientes a eventos dependientes, es necesario introducir conceptos básicos sobre los procesos estocásticos supuestos para las fuentes de incertidumbre. Se supone que estas siguen un proceso estocástico Geométrico Browniano.

### 6.1 Conceptos sobre proceso estocástico Geométrico Browniano (GBM) y Aritmético Browniano (ABM):

Un movimiento Geométrico Browniano<sup>6</sup> (de ahora en adelante GBM) unidimensional de parámetro  $\sigma^2$  es un proceso estocástico  $\{B_t; t \geq 0\}$  con valores en el conjunto de números reales que cumple con las siguientes propiedades:

1. Las trayectorias de la variable aleatoria  $t \rightarrow B_t$  son continuas.
2. El proceso tiene incrementos independientes.
3. Las variables aleatorias  $B_t ; B_s$  tienen distribución normal  $N(0, \sigma^2 (t-s))$  para cualquier intervalo de tiempo  $0 \leq s < t$ .
4. El movimiento Browniano es un proceso de Markov. Se trata de modelos en los cuales, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia sobre los estados futuros. Se puede expresar como  $P(X_{n+1}|X_n)$ ; es decir, la probabilidad del evento futuro  $X_{n+1}$  solo depende del evento actual  $X_n$  y no de los eventos pasados  $X_{n-1}; X_{n-2}; X_{n-t}$ .
5. El movimiento Browniano es una martingala continua. Es un proceso donde el estado promedio a tiempo futuro del proceso  $n+1$  es equivalente al valor del proceso en su último momento observado ( $n$ ). Se trata de una ley de movimiento

---

<sup>6</sup> El movimiento Browniano reconoce sus orígenes en el año 1828, cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que los granos de polen suspendidos en una cierta sustancia y vistos a través de un microscopio realizaban un movimiento irregular e inexplicable. Luego de años de experimentación y debate este movimiento fue entendido y explicado a través de las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Llegar a tal aseveración tomó años, pues debió aceptarse la teoría cinética molecular de la materia, y el seminal trabajo de Albert Einstein de 1905 sobre este fenómeno contribuyó decididamente a tal tarea (Rincón, L. 2008; 191).

aleatoria equilibrada, pues el estado no se mueve del último movimiento observado<sup>7</sup>.

Las condiciones que aparecen en la definición son consecuencia directa de las observaciones del fenómeno físico, pero no garantizan que tal objeto matemático exista. En 1923 el matemático Norbert Weiner demostró la existencia y unicidad de un proceso de tales condiciones. Es por ello que a menudo este proceso es conocido como proceso de Weiner: en sentido estricto, el movimiento Browniano es el fenómeno físico, el modelo matemático es el proceso de Weiner, aunque es común que ambas cosas lleven el mismo nombre: movimiento Browniano.

Si el valor de un activo sigue un proceso estocástico del tipo GBM, el rendimiento del activo es representado por un proceso Aritmético Browniano (de ahora en adelante ABM). En el caso de GBM, la distribución de probabilidad sigue un proceso lognormal. Al tomar valores positivos y negativos, los rendimientos se vinculan con la distribución de probabilidad normal.

Para proyectar el comportamiento de las fuentes de incertidumbre en un enfoque multinomial, el proceso estocástico empleado es el ABM. En este caso, las magnitudes de los movimientos ascendentes y descendentes cumplen con las propiedades de simetría y aditividad (Copeland, T- Antikarov, A. 2001), y adicionalmente, posibilitan la combinación de los respectivos nodos. La ecuación que describe un proceso GBM es la siguiente:

$$dV = \mu V dt + \sigma V dz \text{ Ecuación 20}$$

Para su derivación se debe utilizar una de las principales herramientas empleadas en la teoría de opciones para resolver la ecuación diferencial parcial que propone el modelo de Black-Merton-Scholes. Esta es conocida como la fórmula de Itô<sup>8</sup>. Sean  $b(t,x)$  y  $\sigma(t,x)$ , una ecuación estocástica será:

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \text{ Ecuación 21}$$

<sup>7</sup> A estos procesos se los conoce como “de juegos justos”, pues si se considera una serie infinita de apuestas sucesivas y si el capital de un jugador se denota como  $X_n$ , al tiempo  $n$ , la propiedad de martingala establece que el juego es justo, ya que en promedio, el jugador no pierde ni gana en cada apuesta.

<sup>8</sup> El nombre del proceso hace honor a su padre, el matemático Kiyosi Itô. En “On stochastic processes (infinitely divisible laws of probability)”, *Japanese Journal of Mathematics*, Fornero, 2008.

Definida para valores de  $t$  en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ , para una variable aleatoria  $X_0$ , la ecuación anterior corresponde a una integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad \text{Ecuación 22}$$

En este caso, el primer término representa una integral de Riemann, mientras que el segundo es una integral estocástica de Itô. El proceso  $X_t$  es conocido como proceso de Itô. (Rincón, 2008; 193). Los elementos conocidos de la ecuación son  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$ , y la variable aleatoria inicial  $X_0$ . La incógnita del proceso es  $X_t$ . A la función  $b(t, x)$  se la conoce como coeficiente de tendencia (*drift*), y a la función  $\sigma(t, x)$  se la conoce como coeficiente de difusión. El comportamiento del sistema puede interpretarse de la siguiente manera: un proceso que evoluciona de manera determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación (tendencia), pero alterado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica (difusión). Para que una ecuación estocástica tenga solución se deben imponer condiciones de borde. Estas se presentan en los teoremas de existencia y unicidad para las ecuaciones estocásticas, que establecen condiciones de regularidad para los coeficientes  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$ , bajo los cuales la ecuación tiene solución única.

Aplicada a opciones financieras y reales, la fórmula de Itô permite modelar los cambios en el valor de un activo contingente (por ejemplo, una opción de compra) cuyo valor depende de otro (subyacente, activo financiero), en un periodo corto de tiempo. Si el pago contingente ( $C$ ) es una función del tiempo ( $t$ ) y el valor del subyacente ( $V$ ), aplicando la fórmula de Itô se tiene la siguiente expresión:

$$dC = \left( \frac{\partial C}{\partial V} \mu V + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial V} \sigma V dz \quad \text{Ecuación 23}$$

Si el valor de la opción es igual a  $C = \ln(S)$ , las relaciones que se plantean son las siguientes:

$$\frac{\partial C}{\partial V} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} = -\frac{1}{S^2}; \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación 24}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación de Itô se obtiene la explicación detallada del cambio en el valor del pago contingente, como función de la tendencia y el proceso de difusión:

$$dC = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad \text{Ecuación 25}$$

La ecuación describe el cambio en el valor del pago contingente a partir de la tasa de crecimiento en el valor del activo subyacente. En otras palabras, se procede a descomponer la expresión  $\partial C = \partial C/V$ , la cual representa el cambio en el flujo contingente provocado por un cambio en el valor del subyacente. De lo expuesto se sigue que la tasa de crecimiento de  $\ln(V)$  se encuentra normalmente distribuida con media  $(\mu + \sigma^2/2)$  y desvío estándar de  $\sigma\sqrt{t}$ .

A los efectos de ilustrar la explicación anterior, supóngase que las incertidumbres del proyecto de inversión están representadas por el precio de venta ( $P$ ) y las cantidades demandadas ( $Q$ ) de un producto en la etapa de desarrollo. Con el fin de estimar el movimiento ABM y aplicar el enfoque multinomial, se deben estimar pares de tasas de crecimiento y desviaciones estándares. Estas son notadas como  $g_1$ ,  $g_2$ , y  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  respectivamente.

En el enfoque de probabilidades neutrales al riesgo, las tasas de crecimiento correspondientes a las fuentes de incertidumbre se resumen en la magnitud presentada por la tasa de interés libre de riesgo. La derivada del cambio en el precio y la cantidad queda expresada de la siguiente manera:

*Precio*

$$d \ln(P) = \left( r_f + \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 dz \quad \text{Ecuación 26}$$

$$g_1 = \left( r_f + \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt \quad \text{Ecuación 27}$$

*Cantidad*

$$d \ln(Q) = \left( r_f + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \sigma_2 dz \quad \text{Ecuación 28}$$

$$g_2 = \left( r_f + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt \text{ Ecuación 29}$$

En este caso,  $(g_1, g_2)$  siguen un proceso estocástico ABM con ascensos y descensos constantes de signos opuestos ( $u=-d$ ). Las combinaciones de los valores que pueden asumir las variables se detallan a continuación:

Momento T=0	Momento T=1
	$\Delta \ln(P_0) + u_1, \Delta \ln(Q_0) + u_2$
	$\Delta \ln(P_0) + u_1, \Delta \ln(Q_0) - d_2$
$\Delta \ln(P_0); \Delta \ln(Q_0)$	
	$\Delta \ln(P_0) - d_1, \Delta \ln(Q_0) + u_2$
	$\Delta \ln(P_0) - d_1, \Delta \ln(Q_0) - d_2$

Ilustración 5: nodo multinomial y fuentes de incertidumbre correlacionadas ( $P_0$ ) precio; ( $Q_0$ ) cantidades.

Fuente: elaboración propia.

### 6.2 Determinación de los coeficientes de equivalencia a certidumbre:

Para determinar los coeficientes correspondientes a probabilidades neutrales al riesgo, previamente es necesario calcular los siguientes insumos de cada fuente de incertidumbre:

1. Tasa de crecimiento  $g$ ;
2. Volatilidad  $\sigma$  y
3. Correlación  $\rho$ .

Suponiendo que las variables aleatorias siguen un proceso ABM, se aplican las reglas de multiplicación, el Teorema de Bayes para probabilidades condicionales y se plantea un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas agrupadas de la siguiente manera:

El primer grupo determina la tasa esperada de crecimiento para las fuentes de incertidumbre:

$$E(g_1) \Delta t = \left( r_f + \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta t = (p_{u_1 u_2} + p_{u_1 d_2}) u_1 - (p_{d_1 u_2} + p_{d_1 d_2}) u_1 \text{ Ecuación 30}$$

$$E(g_2)\Delta t = \left(r_f + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t = (p_{u_1u_2} + p_{d_1u_2})u_1 - (p_{u_1d_2} + p_{d_1d_2})u_2 \quad \text{Ecuación 31}$$

El segundo grupo modela la volatilidad del crecimiento para ambas variables aleatorias:

$$\sigma_1^2\Delta t = (p_{u_1u_2} + p_{u_1d_2})u_1^2 - (p_{d_1u_2} + p_{d_1d_2})u_1^2 \quad \text{Ecuación 32}$$

$$\sigma_2^2\Delta t = (p_{u_1u_2} + p_{d_1u_2})u_2^2 - (p_{u_1d_2} + p_{d_1d_2})u_2^2 \quad \text{Ecuación 33}$$

Esta ecuación refleja el término de correlación (si las fuentes son independientes, supone un valor cero):

$$\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t = (p_{u_1u_2} - p_{d_1u_2} - p_{u_1d_2} - p_{d_1d_2})u_1u_2 \quad \text{Ecuación 34}$$

La ecuación de control, que sirve para asegurar el cumplimiento de la restricción impuesta por el hecho de que la suma de las probabilidades sea igual a 1:

$$p_{u_1u_2} + p_{d_1u_2} + p_{u_1d_2} + p_{d_1d_2} = 1 \quad \text{Ecuación 35}$$

Resolviendo el sistema de seis ecuaciones planteado, se obtienen las probabilidades neutrales al riesgo correspondiente a cada estado:

$$p_{u_1u_2} = \frac{u_1u_2 + u_2g_1\Delta t + u_1g_2\Delta t + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t}{4u_1u_2} \quad \text{Ecuación 36}$$

$$p_{u_1d_2} = \frac{u_1u_2 + u_2g_1\Delta t + d_1g_2\Delta t + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t}{4u_1u_2} \quad \text{Ecuación 37}$$

$$p_{d_1u_2} = \frac{u_1u_2 + d_2g_1\Delta t + u_1g_2\Delta t + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t}{4u_1u_2} \quad \text{Ecuación 38}$$

$$p_{d_1d_2} = \frac{u_1u_2 + d_2g_1\Delta t + d_1g_2\Delta t + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t}{4u_1u_2} \quad \text{Ecuación 39}$$

Las otras dos incógnitas que resultan del sistema son los movimientos ascendentes y descendentes:

$$u_1 = \sigma_1 \sqrt{t} \quad \text{Ecuación 40}$$

$$u_2 = \sigma_2 \sqrt{t} \quad \text{Ecuación 41}$$

## 7 UN CASO DE APLICACIÓN. LA OPCIÓN DE ABANDONO Y EL ENFOQUE MULTINOMIAL

Con el fin de ilustrar el desarrollo precedente, se adapta el ejemplo desarrollado por Copeland y Antikarov (2001) sobre el tratamiento de una opción de abandono incorporada a un proyecto de desarrollo de producto. Para ello, supóngase un proyecto de inversión que consista en el desarrollo de un producto donde se presentan dos fuentes de incertidumbre: el precio ( $P$ ) a ser comercializado y las cantidades ( $Q$ ) demandadas. El periodo de tiempo que dura el desarrollo es de seis meses y la corriente de flujo de fondos es igual a  $PxQ$  menos los costos fijos ( $CF$ ) de \$4.000. Al final del segundo periodo los flujos de fondos se transforman en una perpetuidad constante equivalente a un múltiplo de seis. El proyecto puede ser vendido a un competidor (abandono) en cualquier momento de su fase de desarrollo por un valor de \$50.000. La tasa continua anual libre de riesgo es del 5%.

El procedimiento consta de cinco pasos que se desarrollan a continuación:

**Paso 1. Identificación de las variables relevantes:** en el cuadro 1 y 2 se exponen los datos del problema y las variables correspondientes a los supuestos sobre el comportamiento de cada fuente de incertidumbre, precio y cantidad demandada.

Datos Generales	
Fase 1 (t)	3
Fase 2 (t)	6
Fase 3 (t)	perpetuidad
Costos Fijos	\$ 4.000,00
Múltiplo CF	6
k (1/M)	16,67%
Valor Venta	\$ 50.000,00
rf (anual)	5,00%

Cuadro 1: parámetros correspondientes al proyecto R&D. Fuente: elaboración propia.

Datos fuente incertidumbre cantidades (Q)				Datos fuente de incertidumbre precios (P)			
Q (0)	1000	p (u)	0,5363	P (0)	\$ 10,00	p (u)	0,5872
$\sigma$ (anual)	20,0%	1-p (d)	0,4637	$\sigma$ (anual)	12%	1-p (d)	0,4128
número fases	2			número fases	2		
fases por año	4			fases por año	4		
$\sigma$ (periodo)	10%			$\sigma$ (periodo)	6%		
u (periodo)	1,1052			u (periodo)	1,0618		
d(periodo)	0,9048			d(periodo)	0,9418		
rf (periodo)	1,23%			rf (periodo)	1,23%		

Cuadro 2: parámetros correspondientes a las fuentes de incertidumbre (Q), cantidades y (P) precios.

Fuente: elaboración propia.

En el ejemplo, la volatilidad para el precio y las cantidades son un dato dado<sup>9</sup> expresado en términos anuales. A partir de allí se estima la volatilidad periódica aplicando la siguiente ecuación<sup>10</sup>:

$$\sigma_{trimestral} = \sigma_{anual} \sqrt{\frac{3}{12}} \quad \text{Ecuación 42}$$

**Paso 2. Determinación de los movimientos de ascenso y descenso correspondientes a las variables aleatorias:** se supone que los movimientos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) siguen un proceso estocástico GBM, con distribución de probabilidad lognormal, empleando la transformación para la estimación de los parámetros (Cox, J.- Ross, S - Rubinstein, M. 1979):

$$u = e^{\sigma t} \quad \text{Ecuación 43}$$

$$d = e^{-\sigma t} = \frac{1}{u} \quad \text{Ecuación 44}$$

<sup>9</sup> Por lo general, se trabaja observando series de datos correspondientes a las variables aleatorias o en su defecto, simulando el comportamiento de las mismas y como producto de la simulación, empleando los parámetros media y desvío de cada variable.

<sup>10</sup>La ecuación 42 es correcta en la medida en que las volatilidades mensuales puedan considerarse variables aleatorias independientes.

Para las fuentes de incertidumbre, las probabilidades neutrales al riesgo  $p$  y  $1-p$  se estiman con los  $u$  y  $d$  correspondientes a cada una:

$$p = \frac{(1+r_t) - d}{u - d} \quad \text{Ecuación 45}$$

El comportamiento de la variable aleatoria  $Q$  (cantidades demandadas) se ilustra:

Cantidades demandadas de activo			Tasas de crecimiento		
0	1	2	0	1	2
		1221,40			10,52%
	1105,17			10,52%	-9,52%
1000		1000	0		
	904,84			-9,52%	10,52%
		818,73			-9,52%

*Ilustración 6: proceso estocástico y tasas de crecimiento correspondiente a cantidades demandadas del producto en desarrollo. Fuente: elaboración propia.*

El gráfico 6 presenta los valores probables, para un horizonte temporal de dos periodos, correspondientes a las cantidades demandadas del producto. Para ello se aplicaron los respectivos coeficientes de ascenso y descenso [ $Q_{i,j} \times u$ ;  $Q_{i,j} \times d$ ].

Las tasas de crecimiento para los diferentes estados surgen de los cocientes; primer periodo: [ $r_{u1} = Q_{1,u} / Q_0$ ;  $r_{d1} = Q_{1,d} / Q_0$ ] segundo periodo: [ $r_{u1xu2} = Q_{u2,u1} / Q_{1,u}$ ;  $r_{u1xd2} = Q_{u1,d2} / Q_{1u}$ ;  $r_{d1xu2} = Q_{d1,u2} / Q_{d1}$  y  $r_{d1xd2} = Q_{d1,d2} / Q_{d1}$ ].

Precio de venta del activo			Tasas de crecimiento		
0	1	2	0	1	2
		\$ 11,27			6,18%
	\$ 10,62			6,18%	-5,82%
\$ 10,00		\$ 10,00	0		
	\$ 9,42			-5,82%	6,18%
		\$ 8,87			-5,82%

*Ilustración 7: proceso estocástico y tasas de crecimiento correspondiente a precios del producto en desarrollo. Fuente: elaboración propia.*

De igual manera, se estima el recorrido de la variable aleatoria  $P$  (precio del producto), y se expone el recorrido proyectado para los dos periodos de tiempo; ( $P_{i,j} \times d$ ;  $P_{i,j} \times u$ ) y las tasas de crecimiento durante el primer periodo: [ $r_{u1} = \frac{P_{1,u}}{P_0}$ ,  $r_{d1} = \frac{P_{1,d}}{P_0}$ ]; segundo periodo: [ $r_{u1xu2} = \frac{P_{u2,u1}}{P_{1,u}}$ ;  $r_{u1xd2} = \frac{P_{d2,u1}}{P_{1,u}}$ ;  $r_{d1xu2} = \frac{P_{d1,u2}}{P_{1,d}}$  y  $r_{d1xd2} = \frac{P_{d2,d1}}{P_{1,d}}$ ].

**Paso 3. Construcción de la grilla, los flujos de fondos asociados a cada estado y el valor contingente al vencimiento:** a continuación se presenta la grilla correspondiente a las fuentes de incertidumbre, el precio y las cantidades. Es el paso previo y necesario a la determinación del flujo de caja para cada estado de la naturaleza. Conforme se anticipó, los flujos de fondos son el resultado de la suma algebraica [ $FF = P \times Q - CF$ ] para los diferentes casilleros de la grilla. En la ilustración 8, columnas 1, 2 y 3, se desarrollan los flujos de fondos correspondientes a cada periodo. Formalmente se los plantea como:

$$FF_{ij} = P_{ij} \times Q_{ij} - CF \quad \text{Ecuación 46}$$

En la columna 4 se expone el cálculo del valor terminal, suponiendo como representativo de la medida indicada el resultado del producto entre un múltiplo ( $M$ ) equivalente a seis veces el flujo y el flujo del último periodo para cada estado:

$$VT_{ij} = M \times FF_{Tj} \quad \text{Ecuación 47}$$



independientes y probabilidades no condicionales, con el objetivo de calcular las probabilidades neutras al riesgo. Estas son expuestas en el siguiente cuadro.

INDEPENDIENTES, $\rho(1,2)=0$	
$P_{uu}=u_1u_2$	0,31
$P_{ud}=u_1d_2$	0,22
$P_{du}=d_1u_2$	0,27
$P_{dd}=d_1d_2$	0,19
prob total=	1,00

Cuadro 3: coeficientes de probabilidades neutras al riesgo con  $\rho(1,2)=0$ . Fuente: elaboración propia.

A título de ejemplo, se desarrolla el cálculo de las probabilidades combinadas correspondientes a los nodos ascendentes  $u_1$ ,  $u_2$ . Para ello, se toman los coeficientes de probabilidades neutras al riesgo individuales de cada incertidumbre (paso 2) y se los multiplica; en este caso, se tiene:  $p_{u_1u_2} = p_{u_1} \times p_{u_2} = 0.5362 \times 0.5872 = 0.31$ .

Con los coeficientes de probabilidades neutras al riesgo se está en condiciones de calcular los valores equivalentes ciertos y actualizarlos al tipo sin riesgo, método a explicar en el quinto y último paso. A continuación se expone la grilla con los respectivos valores.

**Paso 5. Determinación del valor de la opción para eventos independientes:** en este caso se calcula el valor sin opciones ( $VAN$ ), el valor con opciones o valor expandido ( $ExpVAN$ ) y por diferencia, el valor de las opciones ( $VOR$ ; Trigeorgis, 1995; Mun, 2004) conforme surge de la ilustración 9. En el gráfico se individualiza cada estado con una letra. Se emplea el procedimiento de resolución recursiva (desde atrás hacia el principio) y por estado se expone el valor con opción y sin opción. Para estimar el valor en los nodos del primer periodo se emplea el método de equivalente cierto, conforme se expone en la siguiente ecuación:

		cj+suma(pij)*VT		
		T=0	T=1	T=2
				\$ 68.398,94 <b>F</b>
				\$ 68.398,94
	<b>F,G,I,J</b>	\$ 64.741,22		
	<b>B</b>	\$ 63.228,44	\$ 57.498,19	<b>G</b>
			\$ 57.498,19	
	<b>G,H,J,K</b>	\$ 58.134,56	\$ 50.000,00	<b>H</b>
	<b>C</b>	\$ 52.498,43	\$ 47.830,09	
			\$ 50.924,78	<b>I</b>
			\$ 50.924,78	
<b>Valores</b>	<b>A</b>			
<b>Exp VAN</b>	\$ 63.921,84		\$ 50.000,00	<b>J</b>
<b>VAN</b>	\$ 56.574,67		\$ 42.000,00	
<b>VOR</b>	\$ 7.347,17		\$ 50.000,00	<b>K</b>
			\$ 34.084,43	
	<b>I,J,L,LL</b>	\$ 55.289,41	\$ 50.000,00	<b>L</b>
	<b>D</b>	\$ 46.027,98	\$ 36.618,14	
			\$ 50.000,00	<b>LL</b>
	<b>J,K,LL,M</b>	\$ 53.915,27	\$ 29.311,15	
	<b>E</b>	\$ 37.243,00		
			\$ 50.000,00	<b>M</b>
			\$ 22.830,43	

Ilustración 9: valoración de la inversión sin opciones e incorporación de la flexibilidad estratégica para fuentes de incertidumbre independientes. Fuente: elaboración propia.

$$V_{ij} = C_{ij} + \left[ \frac{p_{u1u2}V_{u1u2} + p_{u1d2}V_{u1d2} + p_{d1u2}V_{d1u2} + p_{d1d2}V_{d1d2}}{(1+r)} \right] \text{Ecuación 49}$$

Tomando a título de ejemplo el nodo B; previamente se debe sumar el flujo de fondos en el periodo 1 para dicho nodo y el valor actual con opción y sin opción correspondiente a los estados F, G, I, J. La ecuación queda planteada de la siguiente manera:

Nodo B con opciones:

$$\$64741,22 = \$7735,11 + \left[ \frac{0,31 \times \$68398,94 + 0,22 \times 57498,19 + 0,27 \times 50924,78 + 0,19 \times 50000}{(1 + 0,012)} \right]$$

Nodo B sin opciones:

$$\$63228,44 = \$7735,11 + \left[ \frac{0,31 \times \$68398,94 + 0,22 \times 57498,19 + 0,27 \times 50924,78 + 0,19 \times 42000}{(1 + 0,012)} \right]$$

De idéntica manera se resuelven los restantes nodos hasta llegar al valor en el nodo A (principio temporal de la grilla). La diferencia entre el valor expandido (*ExpVAN*) y el valor sin opciones (*VAN*) es igual al valor adicional generado por la flexibilidad estratégica de poder vender (abandonar) el proyecto en manos de un competidor (*VOR*), o sea  $VOR = ExpVAN - VAN = \$63921,84 - \$56574,67 = \$7347,17$ .

**Paso 4. Determinación de los coeficientes de probabilidades neutrales al riesgo para incertidumbres correlacionadas:** en el siguiente cuadro se explicitan las variables que oficiaran de insumos:

DEPENDIENTES, $\rho(1,2)$			
$u_1 = \sigma_1 \sqrt{\Delta t}$	0,1	$g_1 = (r_f + \sigma_1^2/2) \Delta t$	0,0175
$u_2 = \sigma_2 \sqrt{\Delta t}$	0,06	$g_2 = (r_f + \sigma_2^2/2) \Delta t$	0,0143
$d_1 = -u_1$	-0,1		
$d_2 = -u_2$	-0,06		
$P_{uu} = u_1 u_2 = u_1 u_2 + u_2 g_1 \Delta t + u_1 g_2 \Delta t + \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta t / 4 u_1 u_2$			0,2533
$P_{ud} = u_1 d_2 = u_1 u_2 + u_2 g_1 \Delta t + d_1 g_2 \Delta t - \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta t / 4 u_1 u_2$			0,3342
$P_{du} = d_1 u_2 = u_1 u_2 + d_2 g_1 \Delta t + u_1 g_2 \Delta t - \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta t / 4 u_1 u_2$			0,3658
$P_{dd} = d_1 d_2 = u_1 u_2 + d_2 g_1 \Delta t + d_1 g_2 \Delta t + \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta t / 4 u_1 u_2$			0,0467
$r_f$ anual	5%		prob total= 1
$\rho(1,2) =$	-0,4		

Cuadro 4: variables y coeficientes de probabilidades neutrales al riesgo para con  $\rho(1,2) = -0,4$ .

Para este caso se supone una correlación de -0,4 entre las variables aleatorias, precio y cantidades demandadas del producto en desarrollo. Nuevamente, la clave del proceso de valuación reside en la estimación de las probabilidades neutrales al riesgo. Suponiendo que las fuentes de incertidumbre siguen un proceso ABM, se deben estimar los siguientes parámetros:

$$\text{Cantidades: } u_1 = \sigma_1 \sqrt{t} = 0,2 \times \sqrt{\frac{3}{12}} = 0,1 \quad d_1 = -u_1 = -0,1$$

$$\text{Precios: } u_2 = \sigma_2 \sqrt{t} = 0,12 \times \sqrt{\frac{3}{12}} = 0,06 \quad d_2 = -u_2 = -0,06$$

$$\text{Cantidades tasa de crecimiento: } g_1 = \left( r_f + \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt = \left( 0,05 + \frac{0,2^2}{2} \right) \times \left( \frac{3}{12} \right) = 0,0175$$

$$\text{Precio tasa de crecimiento: } g_2 = \left( r_f + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt = \left( 0,05 + \frac{0,12^2}{2} \right) \times \left( \frac{3}{12} \right) = 0,0107$$

El valor correspondiente al conjunto de coeficientes de probabilidades neutrales al riesgo se obtiene aplicando el siguiente grupo de ecuaciones:

$$P_{u_1 u_2} = \frac{u_1 u_2 + u_2 g_1 \Delta t + u_1 g_2 \Delta t + \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}{4 u_1 u_2} = \frac{0,1 \times 0,06 + 0,06 \times 0,0175 + 0,1 \times 0,0107 + (-0,4 \times 0,2 \times 0,12 \times 0,25)}{4 \times 0,1 \times 0,06} = 0,2533$$

$$P_{u_1 d_2} = \frac{u_1 u_2 + u_2 g_1 \Delta t + d_1 g_2 \Delta t + \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}{4 u_1 u_2} = \frac{0,1 \times 0,06 + 0,06 \times 0,0175 - 0,1 \times 0,0107 + (-0,4 \times 0,2 \times 0,12 \times 0,25)}{4 \times 0,1 \times 0,06} = 0,3342$$

$$p_{d1u2} = \frac{u_1u_2 + d_2g_1\Delta t + u_1g_2\Delta t + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t}{4u_1u_2} = \frac{0,1 \times 0,06 - 0,06 \times 0,0175 + 0,1 \times 0,0107 + (-0,4 \times 0,2 \times 0,12 \times 0,25)}{4 \times 0,1 \times 0,06} = 0,3658$$

$$p_{d1d2} = \frac{u_1u_2 + d_2g_1\Delta t + d_1g_2\Delta t + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\Delta t}{4u_1u_2} = \frac{0,1 \times 0,06 - 0,06 \times 0,0175 - 0,1 \times 0,0107 + (-0,4 \times 0,2 \times 0,12 \times 0,25)}{4 \times 0,1 \times 0,06} = 0,0467$$

$\rho(1,2)=$	-0,4	T=0	T=1	T=2	
				\$ 68.398,94	F
				\$ 68.398,94	F
		<b>F,G,I,J</b>	\$ 64.542,98		
		<b>B</b>	\$ 64.174,17	\$ 57.498,19	G
				\$ 57.498,19	G
		<b>G,H,J,K</b>	\$ 57.678,45	\$ 50.000,00	H
		<b>C</b>	\$ 53.337,22	\$ 47.830,09	H
				\$ 50.924,78	I
				\$ 50.924,78	I
				\$ 50.000,00	J
				\$ 42.000,00	J
				\$ 50.000,00	K
				\$ 34.084,43	K
		<b>I,J,L,LL</b>	\$ 55.233,16	\$ 50.000,00	L
		<b>D</b>	\$ 46.802,28	\$ 36.618,14	L
				\$ 50.000,00	LL
		<b>J,K,LL,M</b>	\$ 53.915,27	\$ 29.311,15	LL
		<b>E</b>	\$ 37.929,74		
				\$ 50.000,00	M
				\$ 22.830,43	M

Valores	A
Exp VAN	\$ 63.639,91
VAN	\$ 58.330,65
VOR	\$ 5.309,25

Ilustración 10: valoración de la inversión sin opciones e incorporación de la flexibilidad estratégica para fuentes de incertidumbre correlacionadas. Fuente: elaboración propia.

**Paso 5.2. Determinación del valor de la opción eventos dependientes:** finalmente, el procedimiento de resolución es equivalente al de las variables aleatorias independientes (paso 5.1). El desarrollo gráfico del proceso recursivo se expone en la ilustración 10. A título de ejemplo, se explicita el cálculo del nodo B:

Nodo B con opciones:

$$\$64542,98 = \$7735,11 + \left[ \frac{0,25 \times \$68398,94 + 0,33 \times 57498,19 + 0,36 \times 50924,78 + 0,04 \times 50000}{(1+0,012)} \right]$$

Nodo B sin opciones:

$$\$64174,17 = \$7735,11 + \left[ \frac{0,25 \times \$68398,94 + 0,33 \times 57498,19 + 0,36 \times 50924,78 + 0,04 \times 42000}{(1+0,012)} \right]$$

Al igual que en el caso de independencia, se resuelven los restantes nodos hasta llegar al valor en el nodo A. La diferencia entre el valor expandido (*ExpVAN*) y el valor sin opciones (*VAN*) es el valor adicional generado por la flexibilidad estratégica de poder vender (abandonar) el proyecto en manos de un competidor, en este caso con correlación;  $VOR = ExpVAN - VAN = \$63639,91 - \$58330,65 = \$5309,25$ .

## 8 CONCLUSIONES

Es común que los problemas de inversión tratados bajo el enfoque de opciones reales reduzcan la complejidad del proceso estocástico a una fuente de incertidumbre. La resolución en tiempo discreto se limita a modelar el proceso estocástico con la distribución de probabilidad binomial, y al empleo de carteras réplicas o probabilidades neutrales al riesgo, para la valuación de la flexibilidad estratégica contenida en la decisión de inversión.

La pluralidad de incertidumbres torna indispensable trabajar con un enfoque general como el de la distribución de probabilidad multinomiales. Esta constituye el marco general para el caso particular de la distribución binomial.

Aplicando los principios básicos sobre probabilidades condicionales y el movimiento Browniano, se derivan los coeficientes que reflejan las probabilidades

neutrales al riesgo para la grilla multinomial. Paralelamente, se fundamenta la conveniencia de trabajar con grillas binomiales o multinomiales.

En síntesis, para lograr la implementación del método en un entorno amigable y operativo se requiere transitar cinco etapas:

1. Identificar de las variables relevantes del problema y flexibilidad estratégica de la inversión.
2. Definir el proceso estocástico correspondiente a las variables aleatorias: asumir un proceso estocástico con movimiento Browniano derivando movimientos, tendencias y difusión.
3. Estimar la independencia o correlación de las variables aleatorias. Paralelamente, emplear de grillas multinomiales para el diagrama del recorrido aleatorio correspondiente a la combinación de fuentes de incertidumbre.
4. Determinar los coeficientes de probabilidades neutrales al riesgo de eventos dependientes e independientes. Emplear del método de equivalentes ciertos.
5. Calcular recursivamente el valor actual neto tradicional (*VAN*), el valor con opciones (*ExpVAN*) y por diferencia, el valor de las opciones reales (*VOR*).

## BIBLIOGRAFÍA

Black, F. - Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" *Journal of Political Economics*, nº 81, pp. 637-654

Boyle, P. - Evine, J. - Gibbs, S. (1989). "Numerical evaluating of multivariate contingent claims" *Review of Financial Studies*, nº 2, pp. 241-252

Brandao, L. - Dyer, J. (2009). "Projectos de opcoes reais com incertezas correlacionadas" *BASE-Revista de Administracao e Contabilidade de Unsinos*, enero/abril, pp. 19-28.

Brennan, M. - Schwartz, E. (1985). "Evaluating Natural Resources Investment" *Journal of Business*, nº 58, pp. 135-157

Brennan, M. - Schwartz, E. (1985). "A New Approach to Evaluating Natural Resources Investment" *Midland Corporate Financial Journal*, nº 3, pp. 37-47.

Copeland, T. - Antikarov, V. (2001). *Real Options*. Texere LLC, New York.

Copeland, T. - Tufano, P. (2004). "A real World to Manage Real Options" *Harvard Business Review*, n° 82, pp. 90-99

Cox, J. - Ross, S. (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastics Process" *Journal of Financial Economics* 7, n° 3, pp. 145-166

Cox, J. - Ross, S. - Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach" *Journal of Financial Economics*, n° 3, pp. 229-263

Dixit, A. - Pindyck, R. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton University Press, New Jersey.

Hull, J. (2005). *Options, Futures and Others Derivatives*. Prentice Hall, New Jersey.

Kemma, A. (1988). "Options in Real and Financial Markets" WP. Ph.D diss, Erasmus University.

Kulatilaka, N. (1988). "Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems" *IEEE Transactions on Engineering Management*, n° 22, pp. 250-257.

Kulatilaka, N. (1995). *Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementary in Real Options. Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*, Praeger, Westport Connecticut.

Luherman, T. (1998). "Investment opportunities as real options: Get starting with the numbers" *Harvard Business Review*, n° 4, pp. 51-67.

Luherman, T. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press, New York.

Margrabe, W. (1978). "The Value of an Option to Exchange one Asset for Another" *Journal of Finance*, n° 33, pp. 177-186

Mason, S. - Merton R. (1985). "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance" en E. Altman y M. Subrahmanyam (ed.) *Recent Advances in Corporate Finance*, Richard Irwin

Mc Donal, R. - Siegel, J. (1986). "Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down" *International Economic Review*, n° 26, pp. 321-349

Merton, R. (1973). "The Theory of Rational Option Pricing" *Bell Journal of Economics and Management Science*, pp. 141-183

Milanesi, G. (2009). *Administración Financiera: Teoría y Valuación*. Induvio, Buenos Aires, 1° edición.

Milanesi, G. - Vigier, H. (2010). *Árboles de decisiones, opciones reales y enfoque integrado en mercados completos e incompletos* XLV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política, AAEP, 15 y 19 de Noviembre Universidad Nacional de Buenos Aires <http://www.aaep.org.ar/anales/buscador.php?anales=2010-CABA>, ISSN 1852-0022, ISBN 978-987-99570-8-0

Mood, A. - Graybill, F. (1978). *Introducción a la Teoría de la Estadística*. Aguilar, Madrid, 2º edición.

Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. Wiley, New York.

Myers, S. (1977). "Determinants of Corporate Borrowing" *Journal of Financial Economics* 5, nº 2, pp. 147-176

Myers, S - Majd S. (1990). "Abandonment Value and Project Life" *Advances in Futures and Options Research*, pp 1-21

Paddock, J.- Siegel, D. - Smith, J. (1988). "Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease" *Quarterly Journal of Economics*, nº 103, pp. 479-508

Pindyck, R. (1988). "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm" *American Economics Review*, nº 78, pp. 969-985.

Rincón, L. (2008). *Introducción a los Procesos Estocásticos*. Papeles de Trabajo Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias (UNAM) Circuito Exterior.

Smit, H. (1996). "The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands" *Financial Management*, nº 26, pp. 5-17

Smith, J. - Nau, R. (1995). "Valuing Risky Projects: Options Pricing Theory and Decision Analysis" *Management Science*, nº 41, pp. 795-896

Trigeorgis, L. (1988). "A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting" *Advances in Futures and Options Research*, pp. 145-167.

Trigeorgis, L. (1993). "Real Options and Interactions with Financial Flexibility" *Financial Management*, nº 22, pp. 202-224

Trigeorgis, L. (1995). *Real options in capital investments: models, strategies and applications*. Praeger, London.

Trigeorgis, L. (1997). *Real options: managerial flexibility and strategy in resource allocation*. MIT Press, Cambridge, 2º edición.

Trigeorgis, L. - Mason, S. (1987). "Valuing Managerial Flexibility" *Midland Corporate Finance*, nº 5, pp. 14-21

Trigeorgis, L. - Smit, H. (2006). *Real Options and Game Theory*. Preager, Princeton University Press; Princeton and Oxford

# VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE OPCIONES REALES A LA DETERMINACIÓN DEL MOMENTO ÓPTIMO DE COSECHA FORESTAL CON OPCIONES BARRERAS

## Resumen

Se propone el enfoque de Opciones Reales como herramienta económico financiera para la toma de decisiones estratégicas en el sector forestal. En términos de instrumentos financieros, consideraremos en particular una opción exótica conocida como *barrier option* del tipo *knock-in*.

Suponemos que la proyección del precio de venta promedio de los subproductos sigue un proceso estocástico del tipo Geométrico Browniano, mientras que la producción se determina mediante la simulación de un turno forestal.

La decisión de talar la masa forestal surge de comparar, en cada periodo, el valor del flujo de fondos en cada nodo ( $FF_{ij(t)}$ ) de una rejilla binomial con el valor esperado en el próximo año ( $X_{t+1} \times e^{-r\Delta t}$ ). En un ejemplo analizado, el criterio tradicional del VAN indica que el mayor valor actual se produce en el instante  $t=0$  (año 10), mientras que el enfoque de Opciones Reales arroja que el máximo valor de ejercicio se da en el periodo  $t=8$  (año 18).

**Palabras clave:** Opciones Reales, flujo de fondos, rejilla binomial, momento óptimo.

## 1-INTRODUCCIÓN

Los pioneros en la aplicación de componentes estocásticos en cosecha fueron Malliaris y Brockll (1982) y Miller y Voltaire (1983), entre otros. Thomson (1992) y Trigeorgis (1997) estudiaron el turno óptimo de cosecha asumiendo que los precios siguen un Movimiento Geométrico Browniano, este último autor menciona que los enfoques tradicionales como Faustmann se limitan a un mundo determinista.

Se propone aplicar un enfoque de opciones reales para determinar, desde el punto de vista económico financiero, el momento más conveniente para realizar la tala. Se propone, para la toma de la decisión en cuestión, comparar en cada año, desde el 10 hasta el 20, el valor económico asociado al presente y el valor actual esperado de talar en el próximo año. Si el valor en el presente es mayor que el valor esperado actual, se toma la decisión de talar. De lo contrario, se difiere al año próximo. La valuación de la flexibilidad estratégica de una inversión se logra adaptando la Teoría de Opciones para instrumentos financieros (Black, F. - Scholes, M. 1973). En función de estos se considerará una opción exótica conocida como *barrier option* del tipo *knock-in* (Hull, J. 2005). La opción se ejerce (tala) cuando el valor del subyacente (beneficio obtenido) supera al precio de ejercicio (valor actual esperado de la tala en el próximo ejercicio). La comparación período a período es relevante porque estos valores se caracterizan por ser cambiantes en función del tiempo y riesgo de las variables.

## 2-EL MODELO<sup>[2]</sup>

Las variables aleatorias relevantes son dos: la tasa de crecimiento de la masa forestal  $E(g)$  y el precio de los productos obtenidos  $P$ . La evolución de la masa forestal es obtenida mediante simulación, utilizando el software Simulador Forestal (Crechi, E.- Fassola, H.- Friedl A. 2005). Obtenido el dato del crecimiento esperado, el volumen de la masa forestal es proyectado con la siguiente expresión:

$$vol_t = vol_{t-1} \times [1 + E(g)] \quad (\text{Ec. 1})$$

Para calcular el precio promedio y la variabilidad de la mezcla de subproductos obtenidos, se aplican los conceptos de la Teoría Moderna de la Cartera (Markowitz, H. 1991)<sup>1</sup>. Se emplean las ecuaciones para estimar el precio esperado (medio) y el riesgo de precio (desvío estándar), en una combinación de activos financieros. El precio medio se estima de la siguiente manera:

$$\bar{P}_0 = \sum_i^n x_i \bar{P}_i \quad (\text{Ec. 2})$$

<sup>1</sup>La Teoría de la Cartera (*Modern Portfolio Theory*) es aplicable a todo tipo de carteras de activos. En este caso, el precio promedio de la masa forestal es el promedio ponderado del promedio observado de cada subproducto. La volatilidad es representada por la suma ponderada de los desvíos observados, ajustados por la covarianza (correlación) precio correspondiente a la familia de subproductos.

En este caso  $\bar{P}_i$  representa el precio promedio de cada subproducto,  $x_i$  la participación en el total producido y  $\bar{P}_0$  el precio promedio. El riesgo del precio es determinado por la siguiente expresión:

$$\sigma_c = \sum_{i=1; j=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + x_j^2 \sigma_j^2 + 2(x_i x_j) \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (\text{Ec. 3})$$

En donde  $\sigma_c$  es el riesgo del precio de la cartera de productos,  $x_i$  y  $x_j$  representan las participaciones de cada subproducto;  $\sigma_i^2$  y  $\sigma_j^2$  representan las varianzas de los precios de los subproductos;  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  los desvíos de los precios y  $\rho_{ij}$  el coeficiente de correlación de precios. Usando el precio promedio (Ec.2) se calculan los flujos de fondos libres:

$$FF_t = [\bar{P}_0 \times vol_t] \times (1 - c_t) \times (1 - I) \quad (\text{Ec. 4})$$

Donde  $vol_t$  es la producción esperada (Ec.1) y  $c_t$  es el porcentaje que representan los costos de producción (variables y de estructura) sobre los ingresos por ventas:

$$c_t = \frac{C_t}{[\bar{P}_0 \times vol_t]} \quad (\text{Ec. 5})$$

La tasa marginal de impuesto a las ganancias ( $I$ ) es del 35%. El valor intrínseco de la explotación sin flexibilidad estratégica se estima con la siguiente expresión:

$$VAN_t = FF_t \times e^{-kt} \quad (\text{Ec. 6})$$

La ecuación 6 expresa el valor actual de los flujos de fondos derivados de la tala en cada uno de los años, descontados a la tasa ajustada por riesgo sobre inversiones equivalentes<sup>2</sup>. La estructura de la tasa *ad hoc*, para mercado emergente, poco diversificado y segmentado (Damodaran, A. 2002), surge de ajustar el rendimiento de mercado por la volatilidad total, en este caso, dada por el desvío del precio:

$$k = (1 + rm) \times (1 + \sigma \sqrt{\Delta t}) \quad (\text{Ec. 7})$$

<sup>2</sup>La tasa por riesgo equivalente se calcula aplicando los clásicos modelos como el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*); APM (*Arbitrage Pricing Model*); MPM (*Multifactor Pricing Model*) y sus adecuaciones a mercados emergentes.

La única variable aleatoria está dada por el crecimiento de la masa forestal, suponiéndose constantes el precio promedio y los costos. La ecuación 7 muestra la formulación de la tasa ajustada por riesgo, donde  $rm$  es el adicional por riesgo de mercado,  $\sigma$  es la variación del precio y  $\Delta t$  es la relación entre  $T/n$ , siendo esta la longitud de cada paso del modelo, siendo  $k$  una relación porcentual.

La proyección del precio de venta promedio de los subproductos sigue un proceso estocástico del tipo Geométrico Browniano. Se trabaja en tiempo discreto y para la elaboración de una rejilla binomial<sup>3</sup> se utilizan los parámetros del modelo CRR (Cox, J.-Ross, S.-Rubinstein, M. 1979). Estos son:

$$u = e^{\sigma_c \sqrt{\Delta t}} \text{ (Ec. 8); } d = e^{-\sigma_c \sqrt{\Delta t}} \text{ (Ec. 9)}$$

Los movimientos de ascenso  $u$  y descenso  $d$  son calculados utilizando el desvío de la cartera de precios (Ec.4). El precio de cada nodo padre  $(i,j)$ <sup>4</sup> de la rejilla genera los precios ascendentes  $i$  y descendentes  $j$  de la siguiente manera:

$$P_{ij(t)} = [P_{i(t-1)} \times u; P_{j(t-1)} \times d] \text{ (Ec. 10)}$$

Una vez proyectado el proceso estocástico del precio (Ec.8 y 9), se calcula nuevamente el flujo de fondos para cada periodo ( $t$ ) y cada nodo ( $i,j$ ):

$$FF_{ij(t)} = [P_{ij(t)} \times vol_t] \times (1 - c_t) \text{ (Ec. 11)}$$

Con los flujos de fondos para cada nodo de la rejilla se está en condiciones de construir la opción real. Para ello es menester definir el precio de ejercicio de la opción. La decisión a la que se enfrenta el agente es seleccionar el momento de la tala. Para ello debe seguir un criterio de maximización de beneficios, conjugando el factor tiempo y el riesgo que emerge de las variables precio del producto y crecimiento de la masa forestal. Los

<sup>3</sup>Las rejillas binomiales son empleadas debido a su capacidad de recombinar nodos e incorporar las propiedades del triángulo de Pascal. Los árboles binomiales explicitan gráficamente el problema de manera más eficiente. No obstante, no permiten recombinar, lo que torna su cálculo computacionalmente más complejo que las rejillas. Si  $n$  representa los periodos o intervalos de tiempo, la cantidad de nodos finales de una rejilla es de  $n+1$  y de nodos intermedios  $n(n+1)/2$ . En los árboles binomiales, en cambio, estos valores son  $2^{n-1}$  y  $2^n - 1$  respectivamente (Smith, J. 2005).

<sup>4</sup> Los nodos pueden interpretarse como posibles escenarios futuros, a mayor intervalo de tiempo mayor cantidad de nodos, debido a la mayor incertidumbre. Así, para el periodo  $t=1$  la cantidad de nodos de la rejilla es de 2 (dos escenarios) mientras que para  $t=10$  la cantidad es 11.

flujos de fondos proyectados en cada escenario de la rejilla son comparados con el valor esperado del próximo año, según la siguiente expresión:

$$X_{t+1} = \sum_{i=1; j=1}^n FF_{ij(t+1)} \times q_{(t+1)} \quad (\text{Ec. 12})$$

El valor es el promedio de los flujos de fondos en cada nodo del próximo periodo ( $FF_{ij(t+1)}$ ) ponderado por la probabilidad asociada ( $q_{i,j(t+1)}$ ). Las probabilidades asociadas a cada nodo están dadas por:

$$q_{i,j(t+1)} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [p^m \times (1-p^{n-m})] \quad (\text{Ec. 13})$$

En este caso, los éxitos ( $m$ ) están dados por los movimientos de ascenso (subas) del precio sobre el total de observaciones ( $n$ ). Estas están condicionadas por los coeficientes equivalente-ciertos ( $p$ ), estimados con la siguiente ecuación:

$$p = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{u - d} \quad (\text{Ec. 14})$$

Donde  $r$  representa la tasa libre de riesgo, los movimientos ( $u; d$ ) surgen de las ecuaciones 8 y 9, y  $\Delta t$  tiene el mismo origen que en 8 y 9. La decisión de talar la masa forestal surge de comparar en cada periodo el valor correspondiente a cada nodo ( $FF_{ij(t)}$ ) con el valor esperado en el próximo año ( $X_{t+1} \times e^{-r\Delta t}$ ). Matemáticamente, el problema se resume en encontrar:

$$V_{ij(t)} = \begin{cases} FF_{ij(t)}, & \text{si } FF_{ij(t)} > X_{t+1} \times e^{-r\Delta t} \\ 0, & \text{si no} \end{cases} \quad (\text{Ec. 15})$$

Si el valor de los flujos de fondos libres ( $FF_{ij(t)}$ ) supera al valor actual esperado del próximo año ( $X_{t+1} \times e^{-r\Delta t}$ ) se ejerce la tala, siendo su valor de  $V_{ij} = FF_{ij(t)}$ . En caso contrario, si el valor esperado para el próximo año supera los flujos de fondos libres del nodo, el resultado es de  $V_{ij} = 0$  difiriendo la tala al año próximo. El valor de la opción en el momento inicial ( $t=0$ ) requiere utilizar el procedimiento recursivo sobre la rejilla (Milanesi, G – Vigier, H. 2010) y (Milanesi, G. 2011):

$$V_{0t} = \sum_{i=1; j=1; t}^n \{V_{ij(t)} \times q_{i,j(t)}\} \times e^{-r\Delta t} \text{ (Ec. 16)}$$

Siendo  $V_{0t}$  el valor actual de la opción de talar en el momento ( $t$ ). El ejercicio de la opción en cada nodo (escenario) en ( $t$ ) se expresa por  $V_{ij(t)}$ . La probabilidad de alcanzar el nodo asociado es  $q_{i,j(t)}$ . El factor de actualización desde el momento ( $t$ ) hasta el inicio ( $t=0$ ) es  $e^{-r\Delta t}$ . Finalmente, el periodo seleccionado para la tala corresponde al de mayor valor actual de beneficios futuros<sup>5</sup>.

### 3-CASO DE APLICACIÓN<sup>[3]</sup>

Se propone determinar el turno óptimo de cosecha mediante la aplicación de opciones reales a un predio forestal de 40 hectáreas de *Pinus taeda* L. La producción se estima mediante la simulación del crecimiento de la masa boscosa. La franja etaria de interés se inicia en el año 10 ( $t=0$ ), tomando un horizonte de 10 años. Los objetivos del cultivo y manejo de este rodal están alineados con aquellos tendientes a obtener subproductos de alto valor. Para ello, los destinos son la industria de laminado y la industria de aserrío de grandes dimensiones ( $\varnothing > 30\text{cm}$ ). El resto de los subproductos son para aserrío de menores dimensiones ( $\varnothing < 30\text{cm}$ ) y rollos con destino para pulpa celulósica.

En la simulación del manejo de la masa forestal se previó el inicio del ciclo con 1600 plantas por hectárea, 3 intervenciones de raleos con una intensidad de 50% a 55% y periodicidad de 2 años entre intervención, lo que nos permite obtener madera de alto valor favoreciendo el volumen individual (Crechi, E.- Fernández, R.- Friedl, A.-Falher, J. 2005). Se planifica la ejecución de podas, que serán realizadas de acuerdo a la obtención de un cilindro defectuoso menor a 12 cm, eliminándose el 30% de la copa verde; siendo esta intensidad la ideal, ya que la repercusión en el crecimiento es mínima (Keller, A.- Fassola, H. - Pachas, N. 2007). La altura total de poda es de 6,5 metros.

La simulación se lleva a cabo con el software *Simulador Forestal* (Crechi, E.- Fassola, H. - Friedl, A. 2005). Se considera un índice de sitio de 22 metros (edad índice 15) y una densidad final de 190 árboles por hectárea. Los parámetros iniciales (*año 10*) del

<sup>5</sup> Se recomienda profundizar temática con Borison, A. (2003). ; Brandao, L; Dyer, J; Hahn, W. (2005); Copeland, T; Antikarov, V. (2001); Pratt, S; Grabowski, R. (2008) y Trigeorgis, L. (1997).

bosque son: altura media 16,4 metros, diámetro medio 29,9 cm, área basal 13,5 m<sup>2</sup>/ha, un volumen de 108,7 m<sup>3</sup>/ha y un IDR de 256 (Prodan, M.- Peters, R.- Cox, F- Real, P. 1997).

## 4-RESULTADOS

### 4.1-Estimación de los flujos de fondos

*Precio promedio inicial:* este surge de aplicar la ecuación 2, arrojando un valor de \$189,15 por tonelada para el periodo t=0.

*Riesgo de precio:* para su estimación se emplea la ecuación 3. El riesgo de precio de la cartera de subproductos ( $\sigma_c$ ) es de 13,57%.

*Flujo de fondos:* surge de aplicar la ecuación 4. Para determinar el valor del flujo es menester estimar la participación de los costos sobre ventas. A continuación se expone el flujo de fondos libres después de impuestos.

Flujo de Fondos para superficie total (40 ha) de la parcela forestal							
T	Vol Total (m3/ha)	Ventas	Costos operativos			% Costos sobre ventas	Flujo de Fondos
			Elaboración y carga	Transporte	Total		
0	4344	\$ 821.672,00	\$ 166.809,60	\$ 72.979,20	\$ 239.788,80	29%	\$ 378.224,08
1	5320	\$ 1.074.528,00	\$ 204.288,00	\$ 89.376,00	\$ 293.664,00	27%	\$ 507.561,60
2	6304	\$ 1.327.048,00	\$ 242.073,60	\$ 105.907,20	\$ 347.980,80	26%	\$ 636.393,68
3	7272	\$ 1.569.920,00	\$ 279.244,80	\$ 122.169,60	\$ 401.414,40	26%	\$ 759.528,64
4	8220	\$ 1.811.020,00	\$ 315.648,00	\$ 138.096,00	\$ 453.744,00	25%	\$ 882.229,40
5	9144	\$ 2.042.256,00	\$ 351.129,60	\$ 153.619,20	\$ 504.748,80	25%	\$ 999.379,68
6	10032	\$	\$	\$	\$	24%	\$

		2.262.072,0	385.228,80	168.537,6	553.766,4		1.110.398,6
		0		0	0		4
		\$	\$	\$	\$		\$
7	10892	2.477.536,0	418.252,80	182.985,6	601.238,4	24%	1.219.593,4
		0		0	0		4
		\$	\$	\$	\$		\$
8	11716	2.681.616,0	449.894,40	196.828,8	646.723,2	24%	1.322.680,3
		0		0	0		2
		\$	\$	\$	\$		\$
9	12508	2.877.112,0	480.307,20	210.134,4	690.441,6	24%	1.421.335,7
		0		0	0		6
		\$	\$	\$	\$		\$
10	13264	3.064.852,0	509.337,60	222.835,2	732.172,8	24%	1.516.241,4
		0		0	0		8

Tabla 1: flujo de fondos estático de la explotación

#### 4.2-Descuento de flujos de fondos

Empleando los flujos de fondos de la tabla 1 se determina el valor actual de las potenciales talas (Ec.6). La tasa ajustada por riesgo (Ec.7) es del 28,39%<sup>6</sup> (Tabla 2).

Periodos	Flujos Fondos	VAN (FF)
0	\$ 378.224,08	\$ 378.224,08
1	\$ 507.561,60	\$ 382.105,60
2	\$ 636.393,68	\$ 360.674,27
3	\$ 759.528,64	\$ 324.062,00
4	\$ 882.229,40	\$ 283.374,08
5	\$ 999.379,68	\$ 241.659,44
6	\$ 1.110.398,64	\$ 202.137,47
7	\$ 1.219.593,44	\$ 167.138,93
8	\$ 1.322.680,32	\$ 136.462,11
9	\$ 1.421.335,76	\$ 110.394,78
10	\$ 1.516.241,48	\$ 88.657,37

Tabla 2: flujos de fondos y valor actual flujos de fondos

<sup>6</sup> Para ello se supone un rendimiento de mercado del 25% (suponiendo nivel esperado de inflación) y volatilidad precio del 13,71%.

Debido al crecimiento de la masa forestal, los mayores flujos de fondos se obtienen en el último periodo. Por la sensibilidad de los beneficios al factor de actualización, el criterio del descuento de flujos de fondos indica que el mayor valor actual se produce en el instante  $t=0$ . El resultado sugiere que la tala se realice de manera inminente.

### 4.3-Opciones Reales

*Construcción del proceso estocástico de la variable de riesgo:* a los flujos de fondos se incorpora el riesgo de precio. Conforme fue expresado, este asciende al 13,75%. El movimiento de ascenso y descenso (Ec.8; Ec.9) es de  $u=1,1453$  y  $d=0,8731$ . Para la construcción de la rejilla se aplica la ecuación 10 (Tabla 3).

*Construcción del flujo de fondos para la rejilla:* proyectado el precio para los escenarios posibles, se está en condiciones de estimar los flujos de fondos por nodo (Ec.11 y Tabla 4).

*Determinación de las probabilidades de ocurrencia y el precio de ejercicio:* las probabilidades binomiales para cada nodo surgen de aplicar la ecuación 13. El precio de ejercicio es determinado aplicando la ecuación 12. El valor del precio de ejercicio está dado por el precio promedio de los posibles resultados en cada instante de tiempo, ver Tabla 5.

*Determinación del momento de la tala:* los coeficientes equivalentes ciertos (Ec.14) ascienden a  $p=0,6545$  y  $1-p=0,3455$ . Conforme fue expuesto, se acepta la tala en el nodo proyectado si los flujos de fondos (Ec.11 y Tabla 4) superan al valor actual esperado en el próximo ejercicio (Ec.12 y Tabla 5). Para estimar el valor actual, el precio de ejercicio es actualizado por un periodo al tipo sin riesgo, suponiéndose una tasa  $r=5\%$ . En la tabla 6 se expone la rejilla de valores, aplicando la ecuación 15.

Para estimar el periodo conveniente para la tala desde el punto de vista financiero, la información de la rejilla precedente se resume en una medida de valor esperado (Ec.16), Tabla 7. Los diferentes resultados obtenidos en cada nodo, deben ponderarse por sus probabilidades de ocurrencia (Ec. 13). Con los cálculos precedentes se obtiene el valor del ejercicio (tala). Para llevarlos al mismo horizonte temporal se actualiza por el factor libre de riesgo.

La Tabla 8 expone en cada nodo de la rejilla la decisión de: ejercicio (tala), diferimiento (postergar al próximo año) o no explotación (último nodo en  $t=10$ ). La

decisión en juego en el último periodo se balancea entre talar o abandonar, puesto que se supone que no existe camino estratégico alternativo (venta o diferimiento).

A diferencia del criterio tradicional, el enfoque de opciones reales incorpora variables estocásticas (riesgo de precio) y la flexibilidad estratégica del ejercicio de talar. El mayor valor actual se obtiene en el periodo  $t=10$  (año 20). Entre los periodos  $t=0$  y  $t=9$ , el máximo valor de ejercicio de la tala surge en el periodo  $t=8$  (año 18). Estos resultados difieren del criterio tradicional de descuento de flujo de fondos, donde el riesgo es incorporado íntegramente en el factor de actualización, los periodos de tiempo son tratados sin flexibilidad alguna (solamente tala) y el resultado se encuentra, en parte, influenciado por el impacto de la tasa ajustada por riesgo en el flujo de fondos esperado estático. En la Figura 1 se expone el perfil de beneficios en ambos enfoques.

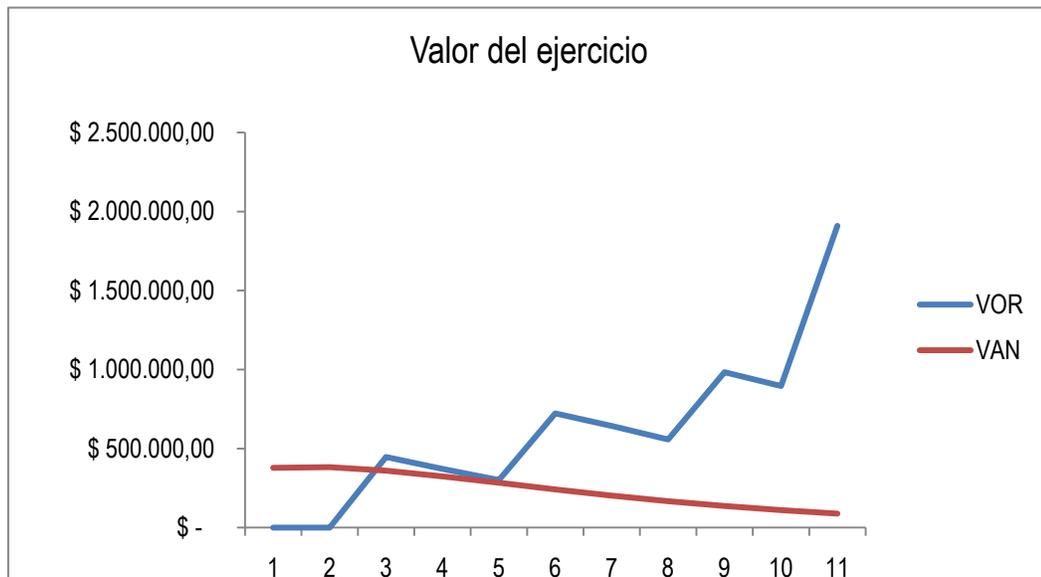


Figura 1: perfil de beneficios actuales esperados VAN-VOR.

*Tabla 3: rejilla proceso estocástico del precio (ecuación 10)*

\$ 189,15	\$ 216,64	\$ 248,12	\$ 284,18	\$ 325,47	\$ 372,77	\$ 426,94	\$ 488,99	\$ 560,05	\$ 641,43	\$ 734,65
\$ 165,15	\$ 189,15	\$ 216,64	\$ 248,12	\$ 284,18	\$ 325,47	\$ 372,77	\$ 426,94	\$ 488,99	\$ 560,05	\$ 641,43
	\$ 144,20	\$ 165,15	\$ 189,15	\$ 216,64	\$ 248,12	\$ 284,18	\$ 325,47	\$ 372,77	\$ 426,94	\$ 488,99
		\$ 125,90	\$ 144,20	\$ 165,15	\$ 189,15	\$ 216,64	\$ 248,12	\$ 284,18	\$ 325,47	\$ 372,77
			\$ 109,93	\$ 125,90	\$ 144,20	\$ 165,15	\$ 189,15	\$ 216,64	\$ 248,12	\$ 284,18
				\$ 95,98	\$ 109,93	\$ 125,90	\$ 144,20	\$ 165,15	\$ 189,15	\$ 216,64
					\$ 83,80	\$ 95,98	\$ 109,93	\$ 125,90	\$ 144,20	\$ 165,15
						\$ 73,17	\$ 83,80	\$ 95,98	\$ 109,93	\$ 125,90
							\$ 63,88	\$ 73,17	\$ 83,80	\$ 95,98
								\$ 55,78	\$ 63,88	\$ 73,17
									\$ 48,70	\$ 55,78

\$ 581.883,20	\$ 837.538,71	\$ 1.153.996,76	\$ 1.538.142,5	\$ 2.005.086,43	\$ 2.566.176,20	\$ 3.234.572,30	\$ 4.033.541,25	\$ 4.979.071,38	\$ 6.097.690,74	\$ 7.416.481,33
	\$ 638.485,51	\$ 879.732,72	\$ 1.172.580,69	\$ 1.528.548,61	\$ 1.956.287,28	\$ 2.465.829,37	\$ 3.074.911,78	\$ 3.795.722,98	\$ 4.648.486,26	\$ 5.653.847,17
		\$ 670.651,50	\$ 893.899,91	\$ 1.165.266,90	\$ 1.491.347,28	\$ 1.879.789,32	\$ 2.344.114,48	\$ 2.893.614,47	\$ 3.543.706,20	\$ 4.310.128,54
			\$ 681.451,66	\$ 888.324,36	\$ 1.136.907,01	\$ 1.433.030,17	\$ 1.787.001,74	\$ 2.205.905,10	\$ 2.701.493,12	\$ 3.285.764,09
				\$ 677.201,21	\$ 866.704,60	\$ 1.092.449,81	\$ 1.362.294,90	\$ 1.681.639,81	\$ 2.059.444,17	\$ 2.504.854,69
					\$ 660.719,71	\$ 832.813,30	\$ 1.038.525,80	\$ 1.281.973,77	\$ 1.569.987,45	\$ 1.909.539,71
						\$ 634.883,16	\$ 791.705,11	\$ 977.294,14	\$ 1.196.857,20	\$ 1.455.709,95
							\$ 603.544,93	\$ 745.026,04	\$ 912.406,76	\$ 1.109.739,41
								\$ 567.959,82	\$ 695.560,08	\$ 845.993,77
									\$ 530.250,16	\$ 644.931,10
										\$ 491.653,89

*Tabla 4: rejilla proceso estocástico flujo de fondos (Ec. 11)*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\$	581.883,20	768.763,39	972.255,02	1.189.487,79	1.423.260,21	1.671.958,47	1.934.388,40	2.214.119,83	2.508.711,81	2.820.042,27	3.148.298,73

Tabla 5: precio de ejercicio para cada periodo (Ec. 12)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10								
\$	-	\$	1.153.996,76	\$	1.538.142,53	\$	2.005.086,43	\$	2.566.176,20	\$	3.234.572,30	\$	4.033.541,25	\$	4.979.071,38	\$	6.097.690,74	\$	7.416.481,33
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	1.956.287,28	\$	2.465.829,37	\$	3.074.911,78	\$	3.795.722,98	\$	4.648.486,26	\$	5.653.847,17
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	2.893.614,47	\$	3.543.706,20	\$	4.310.128,54
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	3.285.764,09
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	2.504.854,69
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	1.909.539,71
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	1.455.709,95
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	1.109.739,41
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	845.993,77
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	644.931,10
\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-

Tabla 6: ejercicio de la opción, máximo valor entre el flujo de fondos del nodo (Ec. 11; Cuadro 4) y el valor actual del precio de ejercicio (Ec. 12; Cuadro 5); ecuación 15.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Difiere	Difiere	Ejerce								
	Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Ejerce	Ejerce	Ejerce	Ejerce	Ejerce	Ejerce
		Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Ejerce	Ejerce	Ejerce
			Difiere	Ejerce						
				Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Ejerce
					Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Ejerce
						Difiere	Difiere	Difiere	Difiere	Ejerce
							Difiere	Difiere	Difiere	Ejerce
								Difiere	Difiere	Ejerce
									Difiere	Ejerce
										No explota

*Tabla 8: ejercicio de la opción*

#### **4.4-DISCUSIÓN SOBRE LOS RESULTADOS ALCANZADOS POR LOS DIFERENTES MÉTODOS**

Se expuso un modelo alternativo al clásico método de descuento de flujos de fondos, para estimar la conveniencia financiera-temporal de ejercer la opción de talar una masa forestal hipotética. Las falencias del método tradicional consisten en no considerar la flexibilidad estratégica (diferir por un periodo) y tener en cuenta solamente el riesgo en la tasa. En este trabajo proponemos aplicar la teoría de opciones reales para incorporar en el marco de decisión la posibilidad de diferir la tala y tomar en cuenta el proceso aleatorio del

precio. La decisión consiste en comparar cada escenario proyectado con el valor actual promedio de los escenarios del próximo ejercicio. En términos de opción financiera, la decisión se asemeja a una *barrier option* del tipo *knock-in*.

El método de descuento de flujos de fondos sugiere talar en el primer periodo. Esto es una consecuencia de la alta sensibilidad negativa de los flujos al factor de descuento, además de que la variable precio se supone constante en todo el periodo de proyección. La aplicación del método de opciones reales, por el contrario, sugiere que el máximo valor se obtiene en el último periodo. Descartada esta opción, que no posee flexibilidad, el segundo momento óptimo se encuentra en  $t=8$  (año 18). Esto se determina en base a un proceso estocástico binomial para el precio, incorporando volatilidad en la estimación de los flujos de la rejilla tanto para cada nodo como para el precio de ejercicio estimado. Se puede ver que en  $t=5$  (año 15) hay un ingreso de \$ 722.951, en el cual el decisor deberá optar a través del análisis de riesgo la conveniencia de esperar 3 años por un incremento del ingreso a \$ 983.730 (año 18).

## 5-CONCLUSIONES

La teoría de opciones reales presenta una alternativa más apropiada a la hora de utilizar una herramienta para la toma de decisiones, ya que incorpora la volatilidad de precios además de las tasas de descuento. El VAN tradicional y otras variantes no consideran estas cuestiones y por ende, tal simplificación conlleva decisiones menos convenientes.

Es importante seguir investigando en distintas instituciones relacionadas con esta temática y hacer extensiva su aplicación práctica en las empresas forestales del país.

## BIBLIOGRAFÍA

- Black, F. -Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(3): 637-659.
- Borison, A. (2003). Real Option Analysis: Where are the Emperor's Clothes. Real Options Conference.

- Brandao, L. -Dyer, J.-Hahn, W. (2005). Using Binomial Decision Trees to Solve Real Options Valuations Problems. *Journal of Decision Analysis*(2), 69-88.
- Copeland, T.- Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.). New York: Texere LLC.
- Copeland, T. - Koller, T.-Murrin, J. (2000). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (3 ed.). New York: Wiley.
- Copeland, T.- Weston, F.- Shastri, K. (2005). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.
- Cox, J.- Ross, S.- Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Crechi, E. -Fernández, R.- Friedl, A. - Falher, J. (2005). Efectos de raleo en Pinus taeda, Norte Misionero. Estación Experimental INTA Montecarlo. IDIA XXI N° 8.
- Crechi, E. - Fassola, H. -Friedl, A. (2005). Simulador Forestal. IDIA XXI N° 8.
- Damodaran, A. (2002). *Investment Valuation* (2 ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives* (5 ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Keller, A. -Fassola, H. - Pachas, N. (2007). Efecto de la poda y raleo en el crecimiento de Pinus taeda L a los 11 años de edad en el Departamento de Iguazú, Misiones. XI Jornadas Técnicas Forestales y Ambientales. Eldorado: FCF, UNaM - EEA Montecarlo, INTA.
- Markowitz, H. (1991). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (2 ed.). Cambridge, Massachusetts: Blackwell Publishers.
- Milanesi, G. - Vigier, H. (2010). Árboles de Decisión, Opciones Reales y Enfoque Integrado en Mercados Completos e Incompletos. In A. A. Política (Ed.), *Anales Asociación Argentina de Economía Política* (pp. 1-30). Buenos Aires: AAEP.

- Milanesi, G. (2011). *Opciones Reales: Teoria y Casos Prácticos* (1 ed.). Buenos Aires: Induvio Editora.
- Malliaris, A. - G.; Brockll, W. A. (1982). *Stochastic methods in economics and finance*. North-Holland, Amsterdam, pp. 303.
- Miller, R. - Voltaire, K. (1983). A stochastic analysis of the tree paradigm. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 6, n 1, p 371-386.
- Pratt; S.- Grabowski; R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples* (3 ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.
- Prodan, M.- Peters, R.- Cox, F.- Real, P. (1997). *Mensura Forestal*. Costa Rica: Instituto Interamericano para la Agricultura - Gesellschaft für Zusammenarbeit (IICA-GTZ).
- Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*(2), 89-102.
- Thomson, T. (1992). Optimal forest rotation when stumpage prices follow a difusion process. *Land Economics*, New York, v 68, n 3, p 329-342.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.
- Yin, R.- Newman, D. (1997). When to cut a stand of trees? *National Resour. Model*, v 10, n 3, p 251-261.



# **VALUACIÓN DE OPCIONES REALES. MODELO BINOMIAL PARA LA VALORACIÓN DE EMPRESAS Y LOS EFECTOS DE LA DEUDA: ESCUDO FISCAL Y LIQUIDACIÓN DE LA FIRMA**

## **Resumen**

El trabajo propone un modelo binomial para valorar empresas proyectando escenarios de continuidad o liquidación de la firma, a diferencia del método de descuento de flujos de fondos. Se utiliza la Teoría de Opciones Reales para estimar el valor de la firma, que resulta de un balance explícito de las ventajas y riesgos de tomar deuda. El trabajo se estructura de la siguiente manera: se introduce y desarrolla el modelo teórico, luego se ilustra mediante un caso de aplicación, comparando los resultados obtenidos con el modelo de descuento de flujos de fondos. Se sensibilizan variables como: endeudamiento, tasa de impuesto y volatilidad, para analizar el impacto en el valor de la empresa. Finalmente, se concluye sobre las ventajas del modelo propuesto.

**Palabras clave:** Opciones Reales, Binomial, Deuda, Valuación.

## **1 INTRODUCCIÓN**

Dentro del marco de la Teoría de Opciones Reales se desarrolla un modelo alternativo al clásico descuento de flujos de fondos para la valoración de empresas, donde son explicitados posibles escenarios de insuficiencia de flujos de fondos libres para atender los pagos de deuda. El modelo numérico propuesto se caracteriza por ser dinámico en tiempo discreto, siendo su principal aplicación la valoración de empresas, analizando los probables impactos derivados de las decisiones de financiamiento. Este condiciona el valor estimado de los activos de la firma y el capital propio de la generación estocástica de flujo de fondos libres, para atender los pagos originados por la deuda de la firma. En tal sentido, no se abandona la clásica concepción de considerar el valor del patrimonio neto como una opción de compra (Black, F.- Scholes, M. 1973) suponiendo dos escenarios<sup>1</sup>: (a) flujos de fondos libres superiores a los pagos de deuda, cuya consecuencia es la continuidad de la

---

<sup>1</sup> Existen otros trabajos como los de Broadie y Kaya (2007) donde se analiza y brinda una solución numérica a las diferentes etapas en los procesos de negociación de deuda, liquidación y quiebra de la firma.

firma, (b) insuficiencia de flujos de fondos libres, que deriva en la liquidación automática de la empresa y la cancelación de los pasivos con los activos disponibles. Las variables aleatorias siguen un proceso estocástico Geométrico Browniano (GBM) en tiempo discreto, basando sus fundamentos en el clásico modelo binomial CRR (Cox, J.- Ross, S.- Rubinstein, M. 1979) y en el desarrollo propuesto por Broadie, M. y Kaya, O. (Broadie, M.-Kaya, O. 2007). Desde el punto de vista instrumental, el trabajo utiliza rejillas binomiales en lugar de árboles binomiales, en virtud de las ventajas que las primeras presentan (Smith, J. 2005). Se asume la existencia de dos imperfecciones de mercado vinculadas a las decisiones de financiamiento con impacto en el valor de la empresa: impuestos corporativos a la renta y costos de liquidación. Si bien existe una rica literatura<sup>2</sup> que aborda los efectos de las decisiones de estructura de capital sobre el valor de la firma, estas escapan al objetivo del presente trabajo, donde simplemente se expone el funcionamiento de un modelo numérico binomial que incorpora y explicita en el proceso de valoración los probables impactos de las decisiones de financiamiento en el valor de la firma, a la luz de la Teoría de Opciones Reales.

---

<sup>2</sup> Desde los trabajos seminales (Modigliani, F.-Miller, M. 1958) (Modigliani, F.-Miller M, 1963) se han desarrollado un conjunto de investigaciones tendientes a explicar los efectos de las decisiones de estructura de capital sobre el valor de la firma. Los trabajos avanzaron sobre la compatibilidad de los postulados y el enfoque del modelo CAPM (*Capital Assets Pricing Model*) (Rubinstein, M. 1973); la existencia de impuestos a la renta personal de los tenedores de bonos (Miller, M. 1977). Estos no afectaron las clásicas proposiciones sobre el comportamiento de la estructura de capital y el valor de la firma. No obstante, los estudios sobre la existencia de asimetría de información revisan los clásicos postulados. Estos se pueden clasificar entre aquellos que estudian la existencia de asimetría de información antes y después del contrato. Antes del contrato constitutivo se tiene: (1) señalización: (a) rol de señalización de la deuda (Ross, S. 1977), (b) jerarquía financiera (Leland, H.-Pyle D. 1977) (Myers, S. 1984) (Myers, S.-Majluf, N. 1984) y (2) detección (Stiglitz, J. -Weiss, A. 1981). Después del contrato: (1) Problemas de Agencia; algunos de sus modelos: (a) costos de agencia de las acciones y las deudas (Jensen, M.-Meckling, W. 1976); (b) costos de agencia de los flujos de fondos libres (Jensen, M. 1986); (c) teoría de conversión de los *stakeholders* (Titman, S. 1984) y (2) enfoque del ciclo de vida de la firma (Berger, A.-Udell, G. 1998). Paralelamente, se pueden citar los estudios sobre la teoría de la estrategia corporativa y sus efectos en las decisiones de financiamiento de la firma (Brander, J. -Lewis T. 1986). Existen trabajos que resumen las diferentes teorías sobre la estructura de capital, asimetría de información y costos de agencia, (Copeland, T.- Weston, F.- Shastri, K. 2004).

## 2-MODELO NUMÉRICO BINOMIAL PARA EL ANÁLISIS DE LA DEUDA Y LAS PROBABILIDADES DE LIQUIDACIÓN

A partir del modelo CRR, los coeficientes de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) para proyectar el recorrido de las variables aleatorias (valor de la firma y flujo de fondos operativos) se estiman de la siguiente manera<sup>3</sup>:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}(1)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}(2)$$

La tasa de crecimiento del valor de la empresa ( $a$ ) surge de la diferencia entre la tasa libre de riesgo ( $r$ ) y la tasa de pago de flujos de fondos ( $q$ ):

$$a = e^{(r-q)\Delta t}(3)$$

El factor de actualización utilizado en el procedimiento recursivo del árbol es al tipo sin riesgo:

$$e^{-r\Delta t}(5)$$

Finalmente, los coeficientes neutrales al riesgo ( $p$ ) son obtenidos mediante la siguiente expresión:

$$p = \frac{a-d}{u-d}(6)$$

Definidos los parámetros básicos del modelo binomial (Jabbour, G.-Kramin, M.-Young, S. 2001), se procede al planteo del modelo numérico. El primer paso consiste en calcular el valor de los activos de la firma sin apalancamiento ( $V_u$ )<sup>4</sup> y la correspondiente generación de flujos de fondos libres ( $\delta$ ) en cada nodo de la rejilla. Los posibles valores en nodos en la rejilla del activo de la firma sin apalancamiento están dados por:

$$V_{ui(t+1)} \times u; V_{uj(t+1)} \times d(7)$$

<sup>3</sup> El enfoque de opciones requiere la existencia de activos financieros que repliquen los movimientos y permitan estimar el desvío esperado del flujo de fondos libres correspondientes al activo real objeto de la valoración, suponiendo distribución lognormal de las variables aleatorias. En caso contrario se deben incorporar momentos estocásticos de orden superior (Milanesi, 2012). Los mercados no son perfectamente completos, constituyendo esta situación una importante debilidad del enfoque de opciones reales (Smith, J-Nau, R, 1995);(Wang, A-Halal, W, 2010). En particular para empresas de capital cerrado, proyectos de inversión en nuevas tecnologías y empresas de base tecnológica. En estos casos, el segundo momento estocástico requerido por las ecuaciones anteriores, se supone calculado a través del método MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) (Copeland, T.- Antikarov, V. 2001).

<sup>4</sup> Un valor de los activos operativos totales de la empresa independientemente de su estructura de capital.

Los flujos de fondos libres son el resultado del producto entre el valor de la firma para un nodo y la tasa de pago de flujos de fondos,  $V_i \times q$ , también se pueden plantear como:

$$\delta_t = V_i e^{q\Delta t} - V_i (8)$$

En segundo término, se debe calcular el flujo correspondiente a la deuda, para ello se supone que la empresa emite un bono con pagos periódicos ( $C$ ) compuesto por intereses y cancelación del principal al final de la vida del bono:

$$C = i \times P (9)$$

Nuevamente, si se introducen impuestos, el flujo de la deuda es  $(1 - \tau)C$  siendo  $\tau$  la tasa de impuesto a las ganancias, y  $\Delta\tau = i \times \tau$  el valor del ahorro fiscal. El flujo de fondos residual ( $\delta - C$ ) es la magnitud a favor de los propietarios. En caso de resultar insuficiente, se cancelan los intereses de la deuda y se procede a la liquidación del patrimonio neto.

En tercer lugar, se determinan las magnitudes del capital propio ( $E$ ); deuda ( $D$ ) y valor total de los activos operativos ( $F$ ). El valor del capital propio ( $E_T$ ) para el último periodo, surge de la suma del valor final de la firma sin deuda (ec.7) y el valor de los flujos de fondos libres (ec.8), menos el valor del flujo de fondos de la deuda. Las ecuaciones empleadas son las siguientes:

$$E = e^{-r\Delta t} (pE_u + 1 - pE_d) (10)$$

$$D = e^{-r\Delta t} (pD_u + 1 - pD_d) (11)$$

$$F = e^{-r\Delta t} (pF_u + 1 - pF_d) (12)$$

Estas son utilizadas recursivamente para obtener los valores en el instante  $t=0$ . El capital propio y el valor de los activos operativos no son condicionados por los posibles estados de suficiencia de los flujos de fondos ( $\delta \geq C$ ) o estados de liquidación de la firma producto del fracaso financiero ( $\delta < C$ ).

Finalmente, a partir del conjunto de ecuaciones precedentes, se procede a estimar el valor total de los activos apalancados, deuda y capital de los propietarios al inicio ( $t=0$ ), condicionado a la generación de flujos de fondos en cada escenario proyectado. Existen tres momentos de estimación de los posibles valores de la firma y el patrimonio neto: en el horizonte final de proyección de la rejilla ( $T$ ), en los nodos intermedios ( $0 < t < T$ ) y en el momento inicial ( $t=0$ ). Los nodos condicionan a los precedentes en función de dos escenarios posibles: la suficiencia de fondos para el pago de la deuda (la empresa continúa),

y la insuficiencia de fondos para el pago de la deuda (la empresa se liquida). El conjunto de ecuaciones para cada el horizonte final ( $T$ ) es:

a) *Continuidad de la empresa ( $T$ ):* el valor de la firma más el flujo de fondos libres es superior o igual al pago de la deuda (interés más capital):  $V_T + \delta_T \geq (1 - \tau)C_t + P$  El conjunto de ecuaciones es el siguiente:

$$E_T = V_T + \delta_T - (1 - \tau)C_t - P(13)$$

$$D_T = C_t + P(14)$$

$$F_T = V_T + \delta_T + \Delta t(15)$$

b) *Liquidación ( $T$ ):* el valor de la firma más el flujo de fondos libres es insuficiente para el pago de la deuda (interés más capital):  $V_T + \delta_T < (1 - \tau)C\Delta t + P$ . Si se produce la liquidación de la firma, los costos de transacción son representados por  $\alpha$ . El conjunto de ecuaciones es el siguiente:

$$E_T = 0(16)$$

$$D_T = (1 - \alpha)(V_T + \delta_T)(17)$$

$$F_T = (1 - \alpha)(V_T + \delta_T)(18)$$

Para los nodos intermedios ( $t < T$ ;  $t > 0$ ) se emplea el clásico método recursivo, para ello se determina en primer lugar el valor del patrimonio neto no condicionado a eventos de insuficiencia o solvencia en la generación de fondos (ec. 9), que se notará como  $\tilde{E} = e^{-r\Delta t}(pE_u + 1 - pE_d)$ . Los escenarios posibles son:

a) *Continuidad de la empresa ( $t < T$ ;  $t \geq 1$ ):* no existe riesgo de liquidación de la firma si la suma del flujo de fondos y el valor presente del patrimonio neto es suficiente para atender los servicios corrientes de la deuda:  $\tilde{E}_t + \delta_t \geq (1 - \tau)C\Delta t$ . El conjunto de ecuaciones es el siguiente:

$$E_t = \tilde{E}_t + \delta_t - (1 - \tau)C_t(19)$$

$$D_t = C_t + e^{-r\Delta t}(pD_u + 1 - pD_d)(20)$$

$$F_t = \delta_t + \Delta t + e^{r\Delta t}(pF_u + 1 - pF_d)(21)$$

b) *Liquidación ( $t < T$ ;  $t > 0$ ):* se produce la liquidación de la firma si la suma del flujo de fondos y el valor presente del patrimonio neto es suficiente para atender los servicios corrientes de la deuda:  $\tilde{E}_t + \delta_t < (1 - \tau)C\Delta t$ . Las ecuaciones son:

$$E_t = 0(22)$$

$$D_t = (1 - \alpha)(V_t + \delta_t)(23)$$

$$F_t = (1 - \alpha)(V_t + \delta_t)(24)$$

Finalmente, el valor en  $t=0$ , una vez computados los valores finales e iniciales condicionados por los escenarios (continuación-liquidación) para cada nodo, se estiman recursivamente los valores iniciales, desde el periodo de tiempo  $t=1$  hasta el presente ( $t=1 \rightarrow 0$ ):

$$E_0 = e^{-rt}(p(E_u + \delta_{tu} - (1 - \tau)C_t) + 1 - p(E_d + \delta_{td} - (1 - \tau)C_t))(25)$$

$$D_0 = e^{-r\Delta t}(pD_u + 1 - pD_d) - \Delta t(26)$$

$$F_0 = e^{-r\Delta t}(p(F_u + \delta_{tu}) + 1 - p(F_d + \delta_{td}))(27)$$

### 3-APLICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO BINOMIAL, POSIBILIDAD DE INSOLVENCIA Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE VARIABLES

A continuación, se presentan las variables correspondientes a un caso hipotético para un emprendimiento con las siguientes características: valor inicial del proyecto sin deuda ( $V$ ) \$100, el proyecto se encuentra íntegramente financiado con deuda. El valor nominal del principal ( $D$ ) asciende a \$70, el cupón es del 5% y la estructura de pago es del tipo americano, pago de intereses periódicos y rescate del principal al final de la vida de la deuda. La duración nominal es de tres años. Seguidamente, se desarrollaran las diferentes etapas requeridas para la aplicación del modelo binomial:

$V_0$ (firma sin deuda)	\$ 100,00
$\sigma$ (desvío flujos)	30%
$q$ (tasa pago flujos)	8%
$r$ (tasa libre de riesgo)	6%
$P$ (principal deuda)	\$ 70,00
$i$ (tasa cupón deuda)	5%
$C$ (pagos cupón)	\$ 3,50
$t$ (tasa marginal impuestos)	35%
$\alpha$ (costos de liquidación)	1%

Cuadro 1: variables del ejemplo. Elaboración propia.

Los valores correspondientes a los coeficientes de ascenso, descenso, equivalentes ciertos y factor de capitalización (ec. 1 a 6) son:

$u$ (movimiento ascenso)	1,35
$d$ (movimiento descenso)	0,74
$a$ (factor capitalización)	0,98
$e$ (factor de actualización)	0,94
$p$ (equivalente cierto)	0,39
$1-p$ (equivalente cierto)	0,61

Cuadro 2: parámetros del modelo binomial. Elaboración propia.

A partir de los cuadros anteriores se está en condiciones de proyectar la rejilla binomial para estimar el valor de la firma sin deuda, los flujos de fondos libres correspondientes a cada nodo y el comportamiento de la deuda (ec. 7 a 9). En el primer renglón de cada nodo se expresa el valor de firma ( $V_u$ ); en el segundo, el flujo de fondos libres netos de impuestos ( $\delta$ ); y en el último renglón, los pagos de deuda sin considerar los escudos fiscales ( $C$ ).

	0	1	2	3	
\$	100,00	\$ 134,99	\$ 182,21	\$ 245,96	$V$
\$	-	\$ 11,24	\$ 15,18	\$ 20,49	$\delta$
\$	-	\$ 3,50	\$ 3,50	\$ 73,50	$C$
		\$ 74,08	\$ 100,00	\$ 134,99	$V$
		\$ 6,17	\$ 8,33	\$ 11,24	$\delta$
		\$ 3,50	\$ 3,50	\$ 73,50	$C$
			\$ 54,88	\$ 74,08	$V$
			\$ 4,57	\$ 6,17	$\delta$
			\$ 3,50	\$ 73,50	$C$
				\$ 40,66	$V$
				\$ 3,39	$\delta$
				\$ 73,50	$C$

Cuadro 3: rejilla binomial valores  $V$  (valor de la firma sin deuda);  $\delta$  (flujos de fondos libres después de impuestos);  $C$  (flujo de la deuda antes de impuestos). Elaboración propia

Los valores del capital propio ( $E$ ); deuda ( $D$ ) y valor total de los activos operativos ( $F$ ) no condicionados por la probabilidad de insolvencia de la firma en los nodos intermedios, son estimados aplicando las ecuaciones 10 a 12.

	0	1	2	3	
\$	30,12	\$ 60,51	\$ 114,15	\$ 194,17	$E$
\$	55,81	\$ 65,19	\$ 69,22	\$ 73,50	$D$
\$	85,93	\$ 125,69	\$ 183,37	\$ 267,67	$F$
		\$ 13,51	\$ 31,93	\$ 73,95	$E$
		\$ 55,42	\$ 69,22	\$ 73,50	$D$
		\$ 68,93	\$ 101,15	\$ 147,45	$F$
			\$ 2,95	\$ 7,98	$E$
			\$ 52,13	\$ 73,50	$D$
			\$ 55,08	\$ 81,48	$F$
				\$ -	$E$
				\$ 43,60	$D$
				\$ 43,60	$F$

*Cuadro 4: rejilla binomial sin condicionar valores en nodos intermedios  $E$  (valor patrimonio neto);  $D$  (valor de la deuda);  $F$  (valor de la firma apalancada). Elaboración propia.*

Solamente los nodos finales consideran la liquidación de la firma en la medida en que el valor de la deuda sea superior al valor de la firma en su totalidad. Se supone que la variable de ajuste es el patrimonio de la empresa ( $E$ ), variando con el valor de la firma. Seguidamente, se presentan los valores que adopta el proyecto considerando continuidad o liquidación: (a) nodos finales (ecuaciones 13 a 18); (b) nodos intermedios (ecuaciones 19 a 24); (c) nodo inicial valor actual (ecuaciones 25 a 27).

	$t=0$	$1 < t < T$		$T$	
	0	1	2	3	
	\$ 41,21	\$ 69,47	\$ 127,05	\$ 194,17	<i>E</i>
	\$ 61,18	\$ 68,69	\$ 72,72	\$ 73,50	<i>D</i>
	\$ 102,46	\$ 138,16	\$ 199,77	\$ 267,67	<i>F</i>
		\$ 17,40	\$ 37,99	\$ 73,95	<i>E</i>
		\$ 58,92	\$ 72,72	\$ 73,50	<i>D</i>
		\$ 76,32	\$ 110,71	\$ 147,45	<i>F</i>
			\$ 5,25	\$ 7,98	<i>E</i>
			\$ 55,63	\$ 73,50	<i>D</i>
			\$ 60,88	\$ 81,48	<i>F</i>
				\$ -	<i>E</i>
				\$ 43,60	<i>D</i>
				\$ 43,60	<i>F</i>

Cuadro 5: rejilla binomial condicionando valores en nodos intermedios *E* (valor patrimonio neto); *D* (valor de la deuda); *F* (valor de la firma apalancada). Elaboración propia

En la rejilla se observa el valor actual de la firma apalancada en el momento inicial (*F*) \$102,46; el valor actual de la deuda (*D*) \$ 61,18 y el valor actual del patrimonio de la firma (*E*) \$41,21. El último es el resumen de los valores esperados en los nodos siguientes ajustados por los coeficientes equivalentes ciertos. Los valores esperados se encuentran condicionados a la suficiente generación de flujos de fondos libres para atender los pagos de deuda y evitar la liquidación de la firma. A diferencia del descuento de flujos de fondos o valor actual ajustado, el modelo captura el impacto negativo en el valor de la firma propio de la probabilidad de liquidación, producto de la insuficiencia de los flujos de fondos libres para atender los pagos de la deuda.

Según el modelo de descuento de flujos de fondos, el valor de la firma apalancada es igual a  $V_u = V_u + \Delta T$ ; <sup>5</sup>en este caso, arrojando un valor de \$124,50. El resultado obedece a la consideración de un valor actual de la empresa sin deuda más el efecto del ahorro fiscal (Fernández, 2012), donde no se explicitan los posibles escenarios de insolvencia ni el efecto de la deuda en tal evento. De hecho, la diferencia [-1]de valor de \$22,04 entre el clásico descuento de flujos de fondos y el numérico binomial, representa el ajuste negativo propio del valor actual de la probabilidad de liquidación de la empresa.

<sup>5</sup>El valor de la empresa con deuda es igual a  $E+D=V_u+VTS$ , en este caso  $\$100+0,35*\$70=\$124,50$ .

Sin perjuicio de la gran variedad de métodos disponibles para la estimación del costo del capital (Pratt; S.-Grabowski; R. 2008); el método de descuento de flujos de fondos debe utilizar una tasa de actualización que refleje todos los riesgos sistemáticos inherentes a la empresa objeto de valuación. Es común en los procesos de valuación emplear como tasa de costo de capital la tasa de rendimiento requerido para un activo en marcha, sin considerar los riesgos derivados de la posibilidad de liquidación o quiebra de la firma por insuficiencia de fondos (Copeland, T.- Koller, T.- Murrin, J. 2000). La tasa aludida es utilizada cualquiera sea el escenario proyectado, suponiendo que esta representa todos los estados contingentes en la vida del proyecto. Lo dicho constituye una de las principales falencias metodológicas de los métodos tradicionales de valuación y de los árboles de decisión. Estos últimos, utilizan la misma tasa ajustada por riesgo para valorar diferentes estrategias proyectadas ((Smith, J.-Nau, R. 1995); (Trigeorgis, L. 1997))

En los siguientes cuadros y gráfico se expone el valor sensibilizado de la firma mediante el modelo numérico binomial y el descuento de flujos de fondos, sensibilizando dos variables:(a) nivel de endeudamiento y (b) alícuota de impuesto.

Modelo Binomial		Valor Nominal deuda									
	\$ 102,46	\$ -	\$ 15,00	\$ 30,00	\$ 45,00	\$ 60,00	\$ 75,00	\$ 90,00	\$ 100,00		
	0%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,22	\$ 100,22		
Impuesto	5%	\$ 100,59	\$ 100,66	\$ 100,72	\$ 100,69	\$ 100,75	\$ 100,81	\$ 100,49	\$ 100,52		
	15%	\$ 100,59	\$ 100,79	\$ 100,99	\$ 101,05	\$ 101,22	\$ 101,40	\$ 101,05	\$ 101,14		
	35%	\$ 100,59	\$ 101,06	\$ 101,52	\$ 101,76	\$ 102,18	\$ 102,60	\$ 102,15	\$ 102,37		

Cuadro 6: tabla de sensibilidad modelo binomial: valor de la firma-nivel de deuda-tasa de impuesto.

Elaboración propia.

Valor Presente Ajustado		Valor Nominal deuda									
	\$ 124,50	\$ -	\$ 15,00	\$ 30,00	\$ 45,00	\$ 60,00	\$ 75,00	\$ 90,00	\$ 100,00		
	0%	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 100,00		
Impuesto	5%	\$ 100,00	\$ 100,75	\$ 101,50	\$ 102,25	\$ 103,00	\$ 103,75	\$ 104,50	\$ 105,00		
	15%	\$ 100,00	\$ 102,25	\$ 104,50	\$ 106,75	\$ 109,00	\$ 111,25	\$ 113,50	\$ 115,00		
	35%	\$ 100,00	\$ 105,25	\$ 110,50	\$ 115,75	\$ 121,00	\$ 126,25	\$ 131,50	\$ 135,00		

Cuadro 7: tabla de sensibilidad descuento de flujos de fondos: valor de la firma-nivel de deuda-tasa de

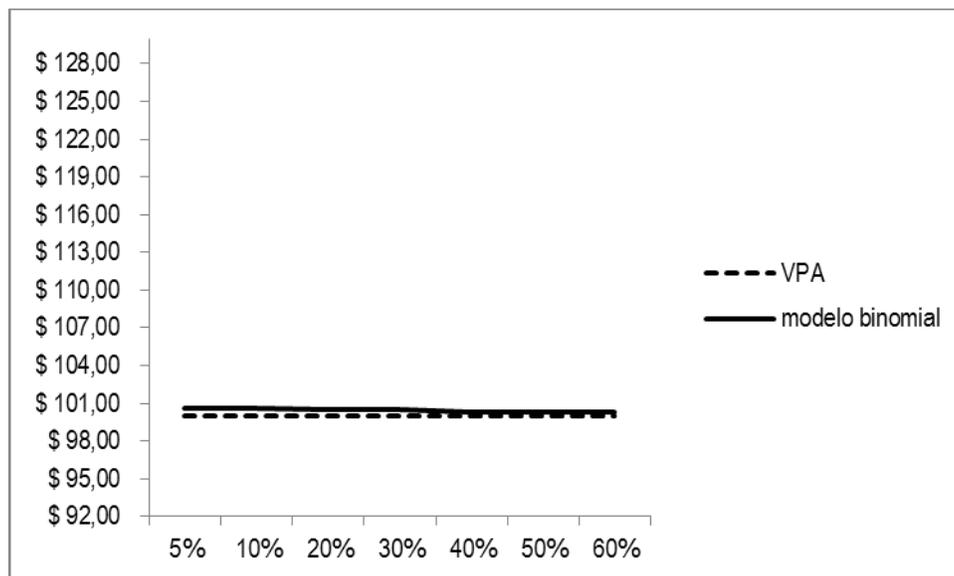
impuesto. Elaboración propia.

En un mundo sin impuestos, los valores de ambos métodos convergen según se expone en la rejilla.

	$t=0$	$1 < t < T$		$T$	
	0	1	2	3	
\$	38,11	\$ 67,16	\$ 124,67	\$ 192,95	<i>E</i>
\$	62,40	\$ 68,69	\$ 72,72	\$ 73,50	<i>D</i>
\$	100,51	\$ 135,85	\$ 197,39	\$ 266,45	<i>F</i>
		\$ 15,49	\$ 35,61	\$ 72,73	<i>E</i>
		\$ 58,92	\$ 72,72	\$ 73,50	<i>D</i>
		\$ 74,41	\$ 108,33	\$ 146,23	<i>F</i>
			\$ 3,57	\$ 6,75	<i>E</i>
			\$ 55,63	\$ 73,50	<i>D</i>
			\$ 59,20	\$ 80,25	<i>F</i>
				\$ -	<i>E</i>
				\$ 43,60	<i>D</i>
				\$ 43,60	<i>F</i>

Cuadro 8: rejilla binomial tasa de impuesto 0%. Elaboración propia.

En el gráfico se puede apreciar la convergencia de ambas medidas cuando no existen impuestos, para diferentes niveles de volatilidad, manteniendo el endeudamiento constante. El método de descuento de flujos de fondos permanece constante con un valor de \$100.



*Ilustración 1: evolución del valor intrínseco de la firma y niveles de volatilidad para tasa de impuesto 0%.*

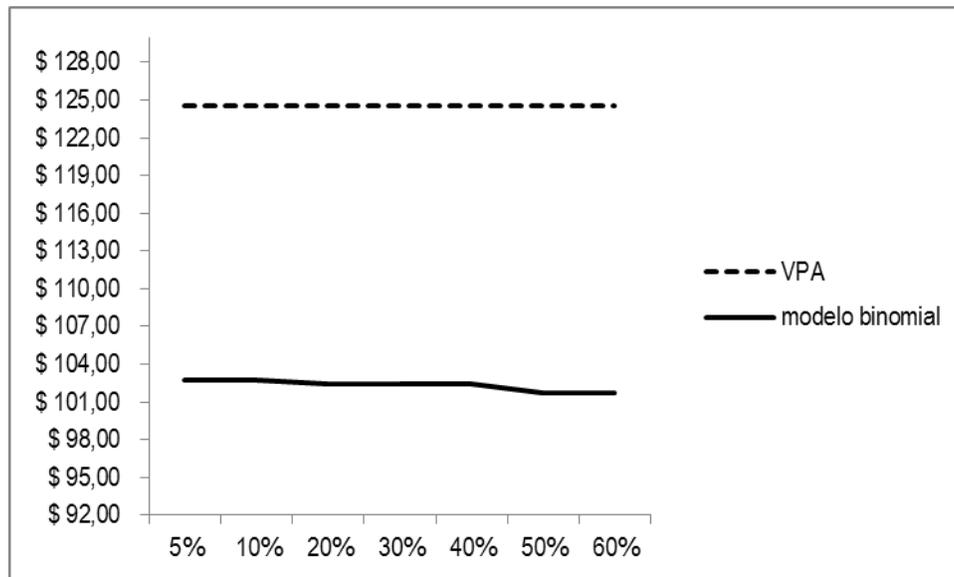
*Elaboración propia.*

El valor estimado, suponiendo una tasa impuesto del 0%, es levemente decreciente, producto de considerar la varianza total del valor de la firma y las posibilidades de liquidación, a diferencia del modelo tradicional.

Modelo Binomial	Valor Nominal deuda									
	\$ 100,51	\$ -	\$ 15,00	\$ 30,00	\$ 45,00	\$ 60,00	\$ 70,00	\$ 90,00	\$ 100,00	
5%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,31	\$ 99,93	
10%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,43	\$ 100,07	
20%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,48	\$ 100,48	\$ 100,16	\$ 100,16	
30%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,22	\$ 100,22	
40%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,53	\$ 100,53	\$ 100,26	\$ 100,26	\$ 100,26	
50%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,54	\$ 100,54	\$ 100,54	\$ 100,29	\$ 100,29	\$ 100,29	
60%	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,59	\$ 100,55	\$ 100,55	\$ 100,33	\$ 100,33	\$ 100,33	\$ 100,33	

*Cuadro 9: tabla de sensibilidad modelo binomial: valor de la firma-nivel de deuda-volatilidad tasa de impuesto 0%. Elaboración propia.*

En el siguiente cuadro e ilustración se procede a estimar la sensibilidad valor de la firma-volatilidad, para tasa de impuesto del 35%.



*Ilustración 2: evolución del valor intrínseco de la firma y niveles de volatilidad para tasa de impuesto 35%.*

*Elaboración propia.*

El valor estimado según el modelo numérico, suponiendo una tasa impuesto del 35%, es levemente decreciente producto de considerar la varianza total del valor de la firma, conforme se expone en el siguiente cuadro.

Modelo Binomial	Valor Nominal deuda																	
\$	102,46	\$	-	\$	15,00	\$	30,00	\$	45,00	\$	60,00	\$	70,00	\$	90,00	\$	100,00	
5%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,52	\$	101,99	\$	102,46	\$	102,77	\$	103,39	\$	101,88		
10%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,52	\$	101,99	\$	102,46	\$	102,77	\$	102,91	\$	102,18		
20%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,52	\$	101,99	\$	102,16	\$	102,44	\$	102,11	\$	102,33		
Volatilidad 30%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,52	\$	101,76	\$	102,18	\$	102,46	\$	102,15	\$	102,37		
40%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,52	\$	101,77	\$	102,18	\$	102,45	\$	102,16	\$	102,37		
50%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,36	\$	101,76	\$	102,17	\$	101,75	\$	102,16	\$	102,37		
60%	\$	100,59	\$	101,06	\$	101,35	\$	101,76	\$	101,55	\$	101,75	\$	102,16	\$	102,36		

Cuadro 10: tabla de sensibilidad modelo binomial: valor de la firma-nivel de deuda-volatilidad tasa de impuesto 35 %. Elaboración propia.

Para diferentes alícuotas tributarias, el valor estimado de la firma mediante el método de descuento de flujo de fondos se incrementa, producto del impacto positivo propio del ahorro fiscal derivado de la deuda. Esto se debe a que no se computan escenarios de insolvencia que afecten el valor intrínseco de la empresa. La diferencia de comportamientos se expone en el siguiente gráfico.

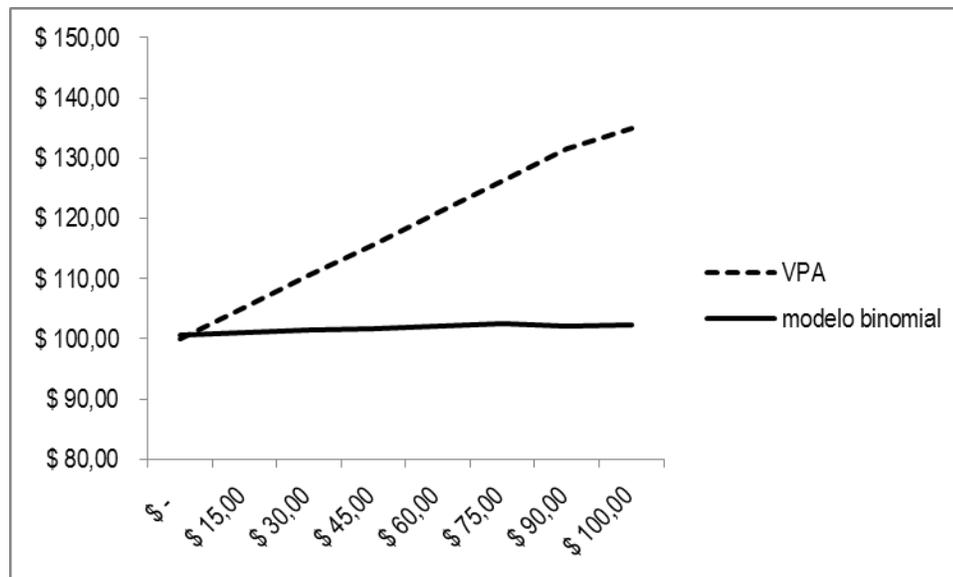


Ilustración 3: Evolución del valor intrínseco de la firma y niveles de endeudamiento tasa de impuesto 35%.

Elaboración propia.

En el cuadro 11 se exponen los diferentes valores de la firma sensibilizando la alícuota impositiva y el interés por deuda, manteniendo constante el nivel de endeudamiento.

Modelo Binomial	Impuestos									
	\$	102,46	0%	5%	10%	15%	20%	30%	35%	40%
		\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51	\$ 100,51
Costo deuda	0%	\$ 100,51	\$ 100,65	\$ 100,79	\$ 100,93	\$ 101,07	\$ 101,34	\$ 101,48	\$ 101,62	\$ 101,85
	2,5%	\$ 100,51	\$ 100,79	\$ 101,07	\$ 101,34	\$ 101,62	\$ 102,18	\$ 102,46	\$ 102,74	\$ 103,02
	5%	\$ 100,51	\$ 100,93	\$ 101,34	\$ 101,76	\$ 102,18	\$ 103,01	\$ 103,43	\$ 103,85	\$ 104,27
	7,5%	\$ 100,51	\$ 101,07	\$ 101,62	\$ 102,18	\$ 102,74	\$ 103,85	\$ 104,41	\$ 104,96	\$ 105,52
	10%	\$ 100,51	\$ 101,62	\$ 102,18	\$ 102,74	\$ 103,85	\$ 104,41	\$ 104,96	\$ 105,52	\$ 106,08

Cuadro 11: tabla de sensibilidad modelo binomial: valor de la firma-tasa de impuesto-costo de la deuda. Elaboración propia.

Las relaciones entre el valor y la alícuota impositiva para un mismo nivel de tasa de interés son directas *ceteris paribus* restantes variables. Si se deja constante la tasa de impuesto y se sensibiliza el interés de la deuda, también se obtiene una relación con el valor de la firma positiva. Nuevamente, el modelo no presenta un crecimiento indefinido del valor de la firma, por el contrario, este se ve compensado por la creciente probabilidad de disolución de la firma ante incrementos en los niveles de deuda.

#### 4-CONCLUSIÓN

En el marco de la Teoría de Opciones Reales, se propuso un modelo numérico binomial para el estudio del impacto de las decisiones de financiamiento sobre el valor, la continuidad o la liquidación de la firma. El valor de la empresa, pasivo y patrimonio neto, resume el conjunto de probables valores proyectados, considerando situaciones de continuidad de la firma o su liquidación.

El método de descuento de flujos de fondos presenta el inconveniente de que los riesgos deben expresarse en la tasa de costo de capital. A menudo, el riesgo de insolvencia y liquidación de la firma no es contemplado, ya que se utilizan tasas de costo de capital que suponen comportamientos de empresas en marcha. Conforme se indicó, las tasas utilizadas no son de utilidad en la valoración de estrategias alternativas (expansión, liquidación, abandono, diferimiento, etc.), siendo capturadas por la Teoría de Opciones Reales.

El modelo mantiene el clásico concepto de equiparar el patrimonio de la empresa a una opción de compra cuyo precio de ejercicio está representado por los pasivos de la

empresa y el subyacente por el valor de los activos operativo. La idea es adaptada a un modelo numérico dinámico en tiempo discreto, mediante el uso de rejillas binomiales. Estas permiten proyectar los diferentes nodos (estados), condicionando la continuidad o liquidación de la firma en la generación de flujos de fondos después de impuestos, para atender pagos de deuda.

El modelo numérico considera, en la estimación del valor de la firma y el patrimonio neto, los posibles escenarios de liquidación asociados a sus respectivos valores. Por lo tanto, los efectos positivos en el valor, derivados del ahorro fiscal generados por los intereses de la deuda, son compensados por el impacto negativo en el valor producto de considerar las probabilidades de insolvencia y posterior liquidación de la firma. Estas aseveraciones son corroboradas en el análisis de sensibilidad presentado. Los posibles valores de la empresa y el patrimonio neto se mantienen dentro de un rango, a través de un equilibrio entre el efecto positivo del ahorro fiscal y el impacto negativo de la liquidación de la firma.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Berger, A.-Udell, G. (1998). The economics of small business finance: the roles of private equity and debt market in financial growth cycles. *Journal of Banking and Finance*, 22, 613-673.

Black, F.- Scholes, M. (Mayo-Junio de 1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.

Brander, J.-Lewis T. (1986). Oligopoly and financial structure: The limited liability effect. *American Economics Review*, 76, 956-970.

Broadie, M.-Kaya, O. (2007). A Binomial Lattice Method for Pricing Corporate Debt and Modelling Chapter 11 Proceedings. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 42(2), 279-312.

Copeland, T.- Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.). New York: Texere LLC.

Copeland, T.- Koller, T.- Murrin, J. (2000). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (3 ed.). New York: Wiley.

Copeland, T.- Weston, F.- Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.

Cox, J.- Ross, S.-Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.

Fernández, P. (27 de junio de 2012). *Valoración de empresas por descuento de flujos de fondos: lo fundamental y las complicaciones innecesarias*. Obtenido de Social Science Research Network (SSRN): <http://ssrn.com/abstract=2089397>

Jabbour, G.-Kramin, M.-Young, S. (Noviembre de 2001). Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited. *Journal of Futures Markets*, 21, 987-1001.

Jensen, M. (1986). Agency Costs of the Free Cash Flow, Corporate Finance and Takeover. *American Economic Review Paper and Proceedings*, 76(2), 323-329.

Jensen, M.-Meckling, W. (Octubre de 1976). Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure. *Journal of Financial Economics*, 305-360.

Leland, H.-Pyle, D. (Mayo de 1977). Informational Asymmetries, Financial Structure and Financial Intermediation. *Journal of Finance*, 371-388.

Milanesi. (2012). Valuación de Empresas de Base Tecnológica aplicando la Teoría de Opciones Reales: El modelo binomial y los momentos estocásticos de orden superior. *Revista Española de Capital de Riesgo*(2 (junio)), 41-55.

Milanesi, G.- Vigier, H. (2010). Árboles de Decisión, Opciones Reales y Enfoque Integrado en Mercados Completos e Incompletos. En A. A. Política (Ed.), *Anales Asociación Argentina de Economía Política* (págs. 1-30). Buenos Aires: AAEP.

Milanesi, G.-Briozzo A. (2004). La Estructura de Capital y el Estado del Arte. Una revisión. En S. A. Financiera (Ed.), *XXIV Jornadas de la Sociedad Argentina de Docentes en Administración Financiera*, XXIV, págs. 87-125. Córdoba.

Miller, D. (Mayo de 1977). Debt and Taxes. *Journal of Finance*, 261-275.

Modigliani, F.-Miller M. (Junio de 1963). Corporate Taxes and Cost of Capital. *American Economic Review*, 433-443.

Modigliani, F.-Miller, M. (Junio de 1958). The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *American Economic Review*, 261-297.

Myers, S. (Julio de 1984). The Capital Structure Puzzle. *Journal of Finance*, 575-592.

Myers, S.-Majluf, N . (Junio de 1984). Corporate Financing and Investment Decisions when Firms have Informarion that Investors do not have . *Journal of Financial Economics*, 187-221.

Pratt; S.-Grabowski; R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples* (3 ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.

Ross, S. (1977). The Determination of Financial Structure: The Incentive of Signalling Approach. *Bell Journal of Economics*, 8, 23-40.

Rubinstein, M. (Marzo de 1973). A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory. *Journal of Finance*, 167-181.

Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*(2), 89-102.

Smith, J.-Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis . *Management Science*(5), 795-816.

Stiglitz, J.-Weiss, A. (1981). Credit Rationing in Markets with Imperfect Information. *American Economics Review*, 71(3), 393-409.

Titman, S. (Marzo de 1984). The Effects of Capital Structure on a Firm's Liquidation Decisions. *Journal of Financial Economics*, 137-151.

Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.

Wang, A.-Halal, W. (2010). Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*(5), 14-24.



# VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: ASIMETRÍA Y CURTOSIS EN EL MODELO BINOMIAL

## Resumen

Algunos activos reales, como en el caso de las Empresas de Base Tecnológica (EBT), no cumplen con los supuestos requeridos por los clásicos modelos de la Teoría de Opciones Reales, a saber: (a) mercados incompletos y falta de activos financieros réplicas; (b) proceso estocástico no normal del subyacente (valor del proyecto). En tal sentido, se propone un modelo para valorar la flexibilidad estratégica de las EBT, sin perder la simplicidad del modelo binomial e incorporando momentos estocásticos de orden superior, utilizando la transformación de Edgeworth (Rubinstein, M., 1998). Con ello se provee de una herramienta para sensibilizar los probables valores de la asimetría y curtosis en el proceso estocástico del subyacente y el impacto en el valor de las estrategias analizadas.

**Palabras clave:** tecnológica, binomial, asimetría, curtosis, Edgeworth.

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los modelos de valoración de opciones han dejado de ser un conjunto de complejos métodos, convirtiéndose en una herramienta indispensable para valorar activos financieros y reales<sup>1</sup> (Wilmott, P. 2009). En el caso de los activos reales, la Teoría de las Opciones Reales permite valorar la flexibilidad estratégica contenida en las decisiones de inversión y en la valuación de empresas (Smit, H -Trigeorgis, L. 2004). El éxito de su implementación reside en la existencia de mercados perfectos, eficientes y completos, donde se pueden concebir carteras de riesgo equivalentes a las estrategias objeto de valoración, y asumir el supuesto de normalidad en el comportamiento estocástico de las

---

<sup>1</sup> En relación a la difusión y complejidad de los modelos (Wilmott, P. 2009, p. 9) sostiene: “La ecuación de Black-Scholes fue derivada empleando cálculo estocástico en ecuaciones diferenciales. Esto no era atractivo para la mayoría de los estudiantes interesados en una carrera en finanzas. En esos tiempos los estudiantes típicos eran de MBA, no físicos ni matemáticos como los que hoy en día existen en Wall Street. Afortunadamente Cox, Ross y Rubinstein fueron capaces de destilar los conceptos fundamentales en la valoración de opciones en un simple algoritmo para el cual solo se necesita adición, sustracción, multiplicación y (dos veces) división...”.

variables aleatorias. No obstante, las condiciones señaladas también constituyen debilidades en ciertos activos reales (Smith, J- Nau, R. 1995; Wang, A A-Halal, W. 2010).

Específicamente, los inconvenientes emergen en el caso de empresas o proyectos de base tecnológica (EBT). Estas se caracterizan por el desarrollo de nuevas tecnologías generadas sobre la base del conocimiento y su valor constituido principalmente en activos intangibles. Para su valoración, se requiere aplicar la teoría de opciones reales, para capturar e incorporar la flexibilidad estratégica del emprendimiento (por ejemplo: la posibilidad de expansión o transferencias de licencias, derechos y/o patentes). Valorar EBT con los clásicos modelos (tiempo continuo Black-Scholes; discreto Método Binomial) presenta los siguientes inconvenientes: (a) por lo general, no existen en el mercado activos financieros que permitan replicar los riesgos del proyecto ni activos reales comparables, dada la significativa participación del capital humano; (b) los procesos estocásticos involucrados se pueden alejar del clásico paradigma de distribución de probabilidad normal. De allí la necesidad de concebir herramientas que modelen la situación particular de este grupo de activos reales, a partir de las limitaciones indicadas para su valoración.

Motivado en las limitaciones indicadas para las EBT, el trabajo propone un modelo que se basa en el clásico método binomial de valuación de opciones financieras (Cox, J.- Ross, S -Rubinstein, M. 1979) extendido para el caso de activos reales (proyectos de inversión, estrategias, firmas en marcha, etc.; Amram, M. -Kulatilaka, A. 1998; Brandao, L.- Dyer, J. - Hahn, W. 2005; Mun, J. 2004; Trigeorgis, L. 1995, 1997a). Se incorporan momentos estocásticos de orden superior (asimetría y curtosis) a través de coeficientes equivalentes ciertos no constantes, para proyectar eventuales escenarios futuros en donde el proceso estocástico del subyacente (valor del proyecto) se aparte del comportamiento normal (Rubinstein, M. 1994, 1998 a). El objetivo del modelo propuesto es incorporar en el valor estimado los posibles valores propios de sensibilizar asimetría y curtosis en el proceso estocástico del subyacente, sin perder de vista la simplicidad e intuición del clásico modelo binomial para valorar opciones reales. A continuación se resumen los pilares en los cuales se cimienta el modelo propuesto:

- a) Definiciones subjetivas de probabilidad (Landro, A. 2010) característica sobresaliente en las EBT, dado el carácter innovador de la firma, importante participación del capital intelectual e inexistencia de activos financieros réplica en el

mercado de capitales. Como consecuencia de lo expuesto, a menudo no se dispone de observaciones o frecuencias relacionadas con los movimientos estocásticos correspondientes a la función de beneficios<sup>2</sup>, imposibilitándose el uso de probabilidades objetivas o en base a observaciones.

b) Utilización del enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*; Copeland, T. - Antikarov, V. 2001) para determinar el valor del riesgo del proyecto y demás parámetros del proceso binomial, dada la inexistencia de activos financieros réplicas.

c) Incorporar momentos de orden superior transformando la función binomial, estimando probabilidades implícitas y aplicando coeficientes equivalentes ciertos no constantes que permitan incorporar asimetría y curtosis.

El trabajo se ordena de la siguiente manera: primero se expone teóricamente la transformación en la función binomial, la proyección del valor incorporando momentos superiores y la estimación de las probabilidades implícitas. Seguidamente, se ilustra el funcionamiento del modelo aplicándolo a un caso de valuación de una EBT con opción de inversión y/o venta de licencia, en donde se sensibilizan diferentes valores para los momentos de orden superior y se presenta el impacto en el valor de las decisiones estratégicas en juego.

## **2 LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH, PROYECCIÓN DEL VALOR DEL SUBYACENTE Y PROBABILIDADES IMPLÍCITAS**

En este apartado se presentará la transformación de Edgeworth como insumo para estimar probabilidades corregidas que permiten calcular el valor proyectado del subyacente y finalmente, los coeficientes equivalentes ciertos variables utilizados en el proceso de estimación recursiva en opciones reales.

La distribución binomial y la transformación de Edgeworth: en el diseño del proceso estocástico a proyectar para el subyacente (valor del proyecto) se emplea la función de probabilidad binomial  $b(x)$ . Siendo  $n+1$  nodos finales y  $j=0, 1, 2, \dots, n$  las posiciones que

---

<sup>2</sup> Implica abandonar la definición de probabilidad objetiva, basada en observaciones y frecuencias del evento y avanzar sobre las “creencias” o juicios del agente.

la variable ocupa cada nodo. La cantidad de recorridos posibles se obtiene con la siguiente expresión:

$$r_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} \text{ (Ec. 1)}$$

En cada posición el valor de la variable aleatoria  $x$ :

$$\left[ \frac{(2j) - n}{\sqrt{n}} \right] \text{ (Ec. 2)}$$

La función de probabilidad binomial  $b(x)$  para cada nodo:

$$\left[ \frac{n!}{j!(n-j)!} \right] q^j \times (1-q)^j \text{ (Ec. 1)}$$

La ecuación anterior determina las probabilidades binomiales para los nodos resultantes de la proyección del subyacente. Se emplea el método binomial para valuar opciones (Cox, J.-Ross, S.-Rubinstein, M. 1979). Supone la inexistencia de asimetría y curtosis (momentos estocásticos de orden superior). No obstante, muchos fenómenos no presentan distribuciones que se ajusten a las leyes de la normalidad. En esos casos, es necesario incorporar momentos estocásticos de orden superior, con el objeto de aproximar mejor el valor de la inversión objeto de valuación.

Para incorporar la asimetría ( $E$ ) y curtosis ( $K$ ) al proceso estocástico en el método binomial se requiere transformar la función  $b(x)$  (ecuación 3). Esto se logra concibiendo una función nueva  $f(x)$ , conocida como “función de densidad de Edgeworth” (Rubinstein, 1998). En la función binomial  $b(x)$  los valores correspondientes a los cuatro momentos (media, varianza, asimetría y curtosis) son:  $E(x) = 0$ ;  $E(x^2) = 1$ ;  $E(x^3) = 0$ ,  $E(x^4) = 3$ . Suponer un valor distinto de 0 y 3, para los momentos de orden superior, implica apartarse del supuesto de normalidad y requiere aplicar la transformación de Edgeworth sobre la función original. El resultado es una nueva función  $f(x)$ , donde se capturan los siguientes momentos:  $E(x) = 0$ ;  $E(x^2) = 1$ ;  $E(x^3) = E$ ,  $E(x^4) = K$ . Los pasos son los siguientes:

En primer lugar se debe calcular la función de transformación  $W(x)$  con la siguiente expresión<sup>3</sup>:

$$W(x) = \left[ 1 + \frac{1}{6} E(x^3 - 3x) + \frac{1}{24} (K - 3)(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{1}{72} E^2(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \right] \text{ (Ec. 4)}$$

<sup>3</sup> Con asimetría  $E=0$  y curtosis  $K=3$  la transformación se anula y la función vuelve al estado binomial normal.

La función transformada es el producto de la ecuaciones 3 y 4 en cada nodo  $f(x) = b(x) W(x)$ . La expansión es solo una aproximación, siendo  $\sum_j f(x_j) \neq 1$ . Se deben escalar las probabilidades para que sumen 1, reemplazando  $f(x_j)$  con el cociente  $f(x_j) / \sum_j f(x_j)$ .

En segundo lugar, obtenida la función de densidad ajustada se procede a estimar la media ( $M$ ) y su varianza ( $v^2$ ):

$$M \equiv \sum_j f(x_j) x_j \quad (\text{Ec. 5}) \quad ; \quad v^2 \equiv \sum_j f(x_j) (x_j - M)^2 \quad (\text{Ec. 6})$$

Con las ecuaciones 5 y 6 surgen los parámetros necesarios para la estandarización de la variable aleatoria (ingresos proyectados o valor intrínseco).

En tercer lugar, los momentos estocásticos de orden superior son incorporados en el valor de la media y varianza. La función de transformación  $W(x)$  es aplicada sobre la función binomial  $b(x)$ , originando la función transformada  $f(x)$ . Paralelamente, las variables aleatorias  $x_j$  son reemplazadas por las nuevas estandarizadas con la siguiente expresión:

$$x_j^{f(x)} = \frac{(x_j - M)}{V} \quad (\text{Ec. 7})$$

Con la nueva función  $f(x)$  y la incorporación en la media y varianza de los momentos de orden superior, se procede a proyectar el valor del subyacente.

Valor esperado del subyacente y los momentos de orden superior: el valor del proyecto (variable aleatoria) en cada nodo es notado como  $V_j$ . Para ello, se emplea la ecuación 8 para proyectar el valor del subyacente en cada nodo, empleando la función corregida  $f(x)$ . Los insumos son la tasa de crecimiento ( $\mu$ ); probabilidades obtenidas de la función corregida  $f(x)$  notadas como  $P_j = f(x_j)$ , y el desvío estándar  $\sigma$ .

$$V_j = V e^{\mu + \sigma \sqrt{t} x_j} \quad (\text{Ec. 8})$$

Previo a su estimación, es necesario operar sobre la ecuación 9 para obtener la expresión de la tasa de crecimiento ( $u$ ):

$$(r/d)^t = \sum_j P_j (V_j / V) \quad (\text{Ec. 9})$$

Las variables involucradas en la ecuación son:  $V$ = valor intrínseco del proyecto en el momento inicial;  $r$ = factor libre de riesgo ( $1+r$ );  $d$ =factor de rendimiento generado por el

activo;  $t$ = tiempo hasta el horizonte de decisión;  $\mu$ = incremento neutral al riesgo esperado del logaritmo de  $V_j/V$  y  $\sigma$ = volatilidad del logaritmo de  $V_j/V$ .

Al sustituir la ecuación 8 en la expresión 9, aplicando logaritmos y despejando en función del incremento neutral al riesgo ( $\mu$ ) (ecuaciones 10 y 11) se obtiene la siguiente ecuación para proyectar la tasa de incremento incorporando los momentos de orden superior, insumo necesario de la ecuación 8.

$$(r/d)^t = \sum_j P_j e^{\mu + \sigma \sqrt{t x_j}} = \left( \sum_j P_j e^{\sigma \sqrt{t x_j}} \right) e^{\mu t} \quad (\text{Ec. 10})$$

$$\log \left[ (r/d)^t \right] = \log \left[ \left( \sum_j P_j e^{\sigma \sqrt{t x_j}} \right) + \mu t \right] \quad (\text{Ec. 11})$$

$$\mu = \log \left[ (r/d) \right] - \log \left[ \left( \sum_j P_j e^{\sigma \sqrt{t x_j}} \right) \right] / t \quad (\text{Ec. 12})$$

La tasa de variación  $\mu$ , conceptualmente es similar a la empleada para estimar valores neutrales al riesgo, suponiendo distribución lognormal:  $\mu = [\log(r/d) - 1/2\sigma^2]$  (Rubinstein, M. 1998). Al incorporar los momentos de orden superior, se abandona el supuesto de distribución lognormal. Con estos elementos se está en condiciones de proyectar el valor para los diferentes nodos. La siguiente ecuación sintetiza el valor actual correspondiente a la sucesión de valores proyectados:

$$V = \left\{ \sum_j P_j [V_j] \right\} \times (\rho)^{-t} \quad (\text{Ec. 13})$$

En este caso  $V_j$  se estima con la ecuación 8,  $P_j = f(x_j)$  ecuaciones 4 y 7 y  $\rho$  el factor de actualización sin riesgo.

Cálculo de probabilidades implícitas (Implied Binomial Tree): las probabilidades derivadas implícitas para ser empleadas en las rejillas binomiales implícitas, son resueltas mediante el procedimiento recursivo (Rubinstein, M. 1994), a saber:

Paso 1: el proceso comienza en los últimos nodos de la rejilla, estimando las probabilidades con la siguiente expresión:

$$Q = \frac{Q'_j}{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \quad (\text{Ec. 14})$$

Definido  $S$  como el valor del activo subyacente, los dos nodos adyacentes son  $(Q_t^+, S_t^+; Q_t^-, S_t^-)$ . Estas son probabilidades condicionadas por el nodo precedente  $(Q_{t-1}; S_{t-1})$ .

Paso 2: la probabilidad de la rama asociada al nodo ( $Q_{t-1}$ ) es igual a la suma de las ramas de nodos adyacentes posteriores  $Q_{t-1} = Q_t^+ + Q_t^-$ . El nodo precedente resume los movimientos y probabilidades del subyacente ( $Q_t^+ S_t^+$ ;  $Q_t^- S_t^-$ ).

Paso 3: en cada nodo los coeficientes equivalentes ciertos se obtienen aplicando probabilidad condicional. Las ecuaciones son:

$$p_{ij} = Q_t^+ / Q_{t-1} \quad (\text{Ec. 15}) \quad ; \quad 1 - p_{ij} = Q_t^- / Q_{t-1} \quad (\text{Ec. 16})$$

Paso 4:  $S_{t-1}$  surge del producto entre el valor de las ramas adyacentes posteriores ( $S_t^+$ ;  $S_t^-$ ) y los coeficientes equivalentes ciertos ( $p_{jt}$ ;  $1-p_{jt}$ ), actualizado al tipo sin riesgo correspondiente al intervalo de tiempo.

Paso 5: se aplica el método recursivo para valorar el activo subyacente (ecuación 17) y la opción (ecuación 18).

$$S_{j-1t-1} = [p_{jt} \times S_{jt}^+ + (1 - p_{jt}) \times S_{jt}^-] \times e^{-r/t} \quad (\text{Ec. 3})$$

$$c_{j-1t-1} = [p_{jt} \times c_{jt}^+ + (1 - p_{jt}) \times c_{jt}^-] \times e^{-r/t} \quad (\text{Ec. 18})$$

### 3 VALUACIÓN MEDIANTE OPCIONES REALES, REJILLAS BINOMIALES IMPLÍCITAS Y MOMENTOS SUPERIORES. UN CASO DE APLICACIÓN

Será tomado como ejemplo un proyecto en I&D sobre nueva tecnología para ilustrar el comportamiento de las opciones reales, rejillas binomiales e incorporación de momentos superiores.

Datos del proyecto: se analizará una empresa de base tecnológica (EBT) integrada por un grupo de investigadores universitarios y capital de riesgo privado. El emprendimiento tiene por objeto fabricar sistemas de monitoreo y radar para puntos ciegos en la conducción de rodados de carga en las explotaciones mineras a cielo abierto. Las características del proyecto son: altas barreras intangibles de entrada generadas por el conocimiento del grupo encargado del desarrollo del prototipo y el modelo industrial; altas barreras de salida debido a la gran especificidad del proceso requerido para su elaboración; e inexistencia de un mercado secundario y líquido que refleje los precios de los cuales se

pueda inferir una cartera replicante para valorar la inversión. Del total de explotaciones mineras existentes (262), se estima que el 70% son a cielo abierto (192). Las explotaciones utilizan en promedio 30 unidades destinadas al transporte de productos, objeto de instalación del dispositivo a producir. El estudio de prospectiva tecnológica supone que los dispositivos tienen una vida útil de 4 años y 4 años adicionales, incorporando nuevas funcionalidades. Esto demandará inversiones incrementales en activos fijos e intangibles a ser concretadas a partir del final del cuarto periodo de vida. La participación inicial en el mercado del producto es del 10% total de la demanda. De mantenerse constante la participación de mercado, se proyecta vender durante todo el periodo 456 unidades, a razón de 57 equipos anuales. El precio de venta proyectado es de u\$ 3.500 por unidad, los costos variables ascienden al 50% del precio de venta y los costos de estructura iniciales (fijos los primeros cuatro años) representan el 12% del total de los ingresos iniciales. La tasa marginal de impuestos a las ganancias es de 35% y las otras cargas tributarias directas e indirectas son del 4%. Al ser un *spin off* Universitario, se pactan regalías a favor de los organismos públicos a los cuales pertenecen los investigadores. Estas ascienden al 3% sobre el monto nominal de ingresos por ventas. No existe apalancamiento financiero, el capital se distribuye entre el aporte intangible del grupo de investigadores y el aporte tangible del capital de riesgo.

El flujo de fondos libres inicial asciende a u\$40.354,86. Se supone una volatilidad del 20% ( $\sigma$ ) anual, parámetro estadístico obtenido mediante simulación Monte Carlo<sup>4</sup>. Adicionalmente, se supone que la distribución de probabilidad de los flujos de fondos del proyecto no sigue un comportamiento lognormal. Transcurridos los primeros cuatro años, la firma se enfrenta a las siguientes alternativas estratégicas:

- a. La posibilidad de continuar en el mercado incorporando mejoras al producto.

El estudio de prospectiva tecnológica indica que la inversión en activos fijos e intangibles en el periodo 4 asciende a u\$47.880.

- b. La estrategia alternativa consiste en vender la licencia del producto por un valor estimado en u\$170.000.

---

<sup>4</sup>Al no existir activo gemelo que replique los flujos de fondos del proyecto, el desvío debe estimarse con métodos alternativos como la simulación. En materia de opciones implica utilizar el enfoque MAD (Copeland, T.- Antikarov, V. 2001).

La inversión en activos fijos se asimila a una opción financiera de compra (*call*) y la venta se puede representar como una opción financiera de venta (*put*). La combinación de ambos instrumentos es conocida como *straddle*.<sup>5</sup>

Descuento de Flujos de Fondos tradicional: al no existir títulos transables en el mercado de capitales que representen el riesgo de la firma ni activos replicantes, la tasa de actualización es estimada aplicando un procedimiento *ad hoc*, suponiendo no diversificación (Pratt, S - Grabowski, R. 2008):

$$k = rm \times (1 + \sigma) \text{ (Ec.19)}$$

El tipo sin riesgo asciende al 5% y el rendimiento de mercado (*rm*) es del 12%. De la ecuación 19 se obtiene el valor del factor de actualización, igual a 1.1440.

El valor intrínseco total del proyecto se estima aplicando la siguiente ecuación:

$$V = VP + VT \text{ (Ec. 20)}$$

El Valor Actual Proyectado (VAP) representa el valor actual estático estimado en los primeros cuatro años. El Valor Terminal (VT) resume el valor terminal por los cuatro años subsiguientes (Copelan, T.- Koller, T.- Murrin, J. 2000), donde el flujo de fondos libres se estabiliza en el nivel estimado para el cuarto periodo. Suponiendo una participación de mercado constante durante la vida total del proyecto, el valor de los flujos de fondos descontados se expresa en el siguiente cuadro:

Periodo	0	1	2	3	4
Flujo de Fondos Proyectados	\$ 40.354,86	\$ 40.354,86	\$ 40.354,86	\$ 40.354,86	\$ 40.354,86
Tasa ajustada por riesgo	14,40%				
VAN Valor Proyectado	\$ 156.979,63	5	6	7	8
Valor Terminal T=4	-\$ 21.747,51	\$ -7.525,14	\$ -7.525,14	\$ -7.525,14	\$ -7.525,14
VAN Valor Terminal	-\$ 12.224,53				
VAN Proyectado + VAN Continuidad	\$ 144.755,11				
		5	6	7	8
Valor Actual Costos Incrementales	\$ 69.186,14	\$ 23.940,00	\$ 23.940,00	\$ 23.940,00	\$ 23.940,00

Tabla 1: valor actual del proyecto sin considerar flexibilidad estratégica y suponiendo estabilidad en ventas

<sup>5</sup> Al combinar la opción de compra y de venta, el perfil de beneficios de la estrategia (combinación de opciones) apunta a cubrir la inversión en los extremos de volatilidad (si el valor del subyacente sube por encima de las inversiones, precio de ejercicio, se ejerce el *call*; si el valor descende por debajo del nivel de inversiones en activos fijos para concretar la expansión se ejerce el *put* (venta)).

El valor actual total asciende a u\$144.755,11, cifra integrada por un VP de u\$156.979,63 y un VT actual -u\$12.224,53 (u\$21.747,53 para el periodo  $t=4$  actualizado al periodo inicial). El valor actual en el periodo 4 de los costos fijos de operación asciende a u\$69.186,14. De las cifras surge la conveniencia de licenciar el proyecto y no realizar inversiones adicionales para mantenerse en el mercado. La debilidad del análisis estático del descuento de flujos de fondos reside en que el riesgo es resumido e incorporado en el factor de actualización. No se consideran posibles escenarios con probabilidades de ocurrencia asociadas, ni flexibilidad estratégica de continuar o licenciar la tecnología. Se asume un comportamiento exponencial en el tiempo y normal de la métrica que explica el riesgo ( $\sigma$ ), donde no se incorporan momentos de orden superior ni se abandona el supuesto de comportamiento estadístico normal.

Opciones Reales. Método Binomial y Transformación de Edgeworth: el proyecto será valorado aplicando el modelo binomial de opciones reales, transformando la ecuación para sensibilizar momentos de orden superior (asimetría y curtosis) y analizando el impacto en el valor. Al no existir un mercado líquido, para determinar la volatilidad de los flujos de fondos se emplea el enfoque MAD como sustituto de carteras réplicas o activos gemelos. El valor actual estimado para el periodo de proyección (u\$156.979,63) representa el valor intrínseco al cual se negociaría el proyecto (Copeland, T.- Antikarov, V. 2001). El valor terminal no se incorpora en el análisis debido a que se supone flexibilidad estratégica (expansión e inversión o venta de la licencia, en función del escenario al final del periodo 4).

Los valores de los momentos de orden superior con proceso estocástico normal son: asimetría  $E=0$  y curtosis  $K=3$ , comparativamente, en el ejemplo se asigna arbitrariamente una asimetría ( $E$ ) de -0.23 y curtosis de ( $K$ ) 3.5. Conforme será expuesto, los momentos de orden superior pueden ser modificados y sensibilizados para analizar el abanico de posibles valores que presentan las opciones.

Aplicando la ecuación 1 y asignando valor  $x_0=1$ , en el siguiente cuadro se presenta la cantidad de nodos intermedios y posiciones ( $j$ ) que ocupa la variable aleatoria. La cantidad de nodos finales asciende a 5 ( $n+1$ ).

<b>Nodos Intermedios</b>					<b>Posiciones variable <math>x_j</math></b>				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				1					0
			1	4			0	1	1
	1		3	6	0	0	1	2	2
1	1		3	4		1	2	3	3
		1	4	1			2	3	4
			1	1					4

Tabla 2: Triángulo de Pascal (Tartaglia), combinaciones, nodos finales y posiciones de la variable aleatoria (ecuación 1)

Asignando una probabilidad de éxito ( $q$ ) de 0,5 y proyectando cuatro periodos de tiempo, la tabla 3 presenta la probabilidad binomial asociada a cada nodo.

<b>Variable aleatoria <math>x_j</math></b>			
1	2	3	4
			-2
		-1,732050808	
	-1,414213562		-1
-1		-0,577350269	
	0		0
1		0,577350269	
	1,414213562		1
		1,732050808	
			2

Tabla 3: valor de la variable  $x_j$  en cada nodo (ecuación 2)

La tabla 4 presenta la probabilidad correspondiente a cada nodo empleando la función de densidad binomial  $b(x)$ .

Probabilidad asociada $b(x)$			
1	2	3	4
			0,0625
		0,125	
	0,25		0,25
0,5		0,375	
	0,5		0,375
0,5		0,375	
	0,25		0,25
		0,125	
			0,0625

Tabla 4: probabilidad  $b(x)$  asociada a cada punto (ecuación 3)

Se presentan los resultados de la expansión sin y con momentos de orden superior, incorporando asimetría ( $E=-0.23$ ) y curtosis (3.5) (ecuación 4). En el primer caso, la transformación es neutral, por ende, la función  $f(x) = b(x)$ ; en el segundo, la función  $f(x)$  ajusta valores incorporando el tercer y cuarto momento estocástico.

Expansión Edgeworth $W(x)$					Expansión Edgeworth $W(x)$ $E=-0,23$ ; $K=3,5$				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				1					1,051
			1					1,051	
		1		1			1,051		1,047
	1		1			1,051		1,047	
1		1		1	1,051		1,047		0,811
	1		1			1,047		0,811	
		1		1			0,811		0,864
			1					0,864	
				1					3,109

Tabla 5: expansión  $W(x)$  con  $E=0$ ;  $K=3$  y  $E=-0.23$  y  $K=3.5$  (ecuación 4)

Para incorporar los momentos de orden superior en la distribución binomial, se requiere calcular la transformación de Edgeworth (tabla 6). La nueva función surge del producto entre la función binomial  $b(x)$  y la expansión  $W(x)$ , tal que  $f(x) = b(x) \cdot W(x)$ .

$f(x)=b(x).W(x)$					$f(x)=b(x).W(x); E=-0,23; K=3,5$				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				0,063					0,066
			0,125					0,131	
		0,25		0,25			0,263		0,262
	0,5		0,375		0,526		0,393		
		0,5		0,375		0,523		0,304	
	0,5		0,375		0,523		0,304		
		0,25		0,25		0,203		0,216	
			0,125				0,108		
				0,063					0,194
$\sum f(x_j)=$	1	1	1	1	$\sum f(x_j)=$	1,049	0,989	0,936	1,042

Tabla 6: función  $f(x)$ : producto entre función binomial  $b(x)$  y transformación  $W(x)$

La función  $f(x)$  debe ser ajustada por el factor de ponderación, a los efectos de escalar las probabilidades de cada nodo y que su sumatoria sea igual a 1 (Tabla 7).

Corregidas: $f(x_j)/\sum f(x_j)$					Corregidas: $f(x_j)/\sum f(x_j) E=-0,23, K=3,5$				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				0,063					0,063
			0,125					0,14	
		0,25		0,25			0,266		0,251
	0,5		0,375		0,501		0,419		
		0,5		0,375		0,529		0,292	
	0,5		0,375		0,499		0,325		
		0,25		0,25		0,205		0,207	
			0,125				0,115		
				0,063					0,186
$\sum f(x_j)=$	1	1	1	1	$\sum f(x_j)=$	1	1	1	1

Tabla 7: probabilidad corregidas  $f(x)$

Aplicando las ecuaciones 5 y 6 se obtienen los parámetros necesarios para la estandarización y corrección de los sesgos incorporados (media, varianza y desvío).

<b>Media=<math>\sum f(x_j) \cdot x_j</math></b>					<b>Media=<math>\sum f(x_j) \cdot x_j</math> E=-0,23, K=3,5</b>				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
			0	0					0,20304
			0					-0,0978	
		0					-0,0859		
	0					-0,0023			
<b>Varianza=<math>\sum f(x_j) \cdot (x_j - M)^2</math></b>					<b>Varianza=<math>\sum f(x_j) \cdot (x_j - M)^2</math> E=-0,23; K=3,5</b>				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				1					1,41546
			1					1,00596	
		1					0,93424		
	1					0,99999			
<b>desvío=<math>\text{raiz}(\sum f(x_j) \cdot (x_j - M)^2)</math></b>					<b>desvío=<math>\text{raiz}(\sum f(x_j) \cdot (x_j - M)^2)</math> E=-0,23, K=3,5</b>				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				1					1,18973
			1					1,00298	
		1					0,96656		
	1					1,000			

Tabla 8: Media, Varianza y Desvío Binomial  $b(x)$  y  $f(x)$  (ecuaciones 5 y 6)

Empleando la ecuación 7 se estandarizan las variables aleatorias ( $x_j$ ) y se logra incorporar la asimetría y curtosis, empleando la expansión  $W(x)$ .

<b>Variable <math>x_j</math> estandarizada: <math>(x_j - M)/v</math></b>					<b>Variable <math>x_j</math> estandarizada: <math>(x_j - M)/v</math> E=-0,23, K=3,5</b>				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				-2					-1,852
			-1,732					-1,629	
		-1,414		-1			-1,374		-1,011
	-1		-0,577			-0,998		-0,478	
		0		0			0,0889		-0,171
	1		0,5774			1,0023		0,6731	
		1,4142		1			1,5521		0,6699
			1,7321					1,8244	
				2					1,5104

Tabla 9: variables estandarizadas funciones  $b(x)$  y  $f(x)$  (ecuación 7)

La proyección del proceso estocástico del activo (el valor del proyecto de inversión) implica estimar la tasa de crecimiento ( $\mu$ ) para estimar los posibles valores en cada nodo. La tasa de crecimiento, paso previo para la estimación de los probables valores, se obtiene empleando la ecuación 12.

$\mu = \log(r/d) - (\log(\sum_j P_j e^{\sigma \sqrt{t} x_j})) / t$					$\mu = \log(r/d) - (\log(\sum_j P_j e^{\sigma \sqrt{t} x_j})) / t, E = -0,23, K = 3,5$				
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
				0,0213					0,0386
			0,0126					0,0124	
		0,0126					0,0125		
	0,0126					0,0126			
0,0000					0,0000				

Tabla 10: tasa de crecimiento comportamiento normal, con asimetría y curtosis (ecuación 12)

En la tabla anterior se presentan los valores de la tasa de crecimiento para distribución normal, asumiendo asimetría y curtosis. Conforme el periodo de tiempo avanza, los valores tienden a distanciarse. El valor proyectado en cada nodo surge de aplicar la ecuación 8.

$V_j = V_e(\mu t + \sigma \sqrt{t} x_j)$				
0	1	2	3	4
				\$ 76.798,66
			\$ 89.460,59	
		\$ 107.903,52		\$ 114.570,14
	\$ 130.148,59		\$ 133.459,51	
\$ 156.979,63		\$ 160.973,13		\$ 170.918,57
	\$ 194.158,87		\$ 199.098,20	
		\$ 240.143,69		\$ 254.980,54
			\$ 297.019,61	
				\$ 380.386,27

Tabla 11: proceso estocástico valor proyecto, E=0, K=3 (ecuación 8)

A continuación se expone la rejilla ajustada con asimetría y curtosis:

$V_j = Ve(\mu t + \sigma \sqrt{t} x_j)$				
0	1	2	3	4
				\$ 87.347,83
			\$ 92.657,11	\$ 122.254,94
		\$ 109.115,34	\$ 138.064,20	\$ 171.112,10
\$ 156.979,63	\$ 130.206,80	\$ 165.049,34	\$ 205.723,25	\$ 239.494,22
	\$ 194.245,91	\$ 249.655,88	\$ 306.538,97	\$ 335.204,12

Tabla 12: proceso estocástico valor proyecto,  $E=-0.23$ ,  $K=3.5$  (ecuación 8)

Seguidamente, se valoran las opciones estratégicas contenidas en el proyecto. En el periodo 4 se presenta el dilema de realizar inversiones incrementales para permanecer en el mercado o vender la licencia. La primer alternativa se asemeja a una opción de compra, cuyo precio de ejercicio ( $X$ ) está dado por el valor actual de los costos incrementales ( $VA(CI)$ ) de la inversión. Conforme fue indicado, este asciende a u\$69.186,14. Si la función de beneficio económico está por debajo del precio de transferencia de la licencia  $L$  (u\$170.000), se ejerce la opción de venta. El valor terminal de la opción queda planteado de la siguiente manera:

$$v_t = \max \left[ (V_t - VA(CI)); L \right] \text{ (Ec. 21)}$$

Para la valuación es menester calcular el valor de las probabilidades implícitas. En primer término se debe aplicar la ecuación 14 con el fin de estimar  $Q_t$ .

0	1	2	3	4	nodos
1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0
	0,5	0,25	0,125	0,0625	1
		0,25	0,125	0,0625	2
			0,125	0,0625	3
				0,0625	4

Tabla 13:  $Q_j$  para distribución  $E=0$ ,  $K=3$  (ecuación 14)

0	1	2	3	4	nodos
1	0,449239218	0,237296475	0,125858004	0,06307067	0
	0,550760782	0,211942743	0,111438471	0,062787334	1
		0,338818039	0,100504272	0,048651137	2
			0,238313767	0,051853135	3
				0,186460631	4

Tabla 14:  $Q_j$  para distribución  $E=-0,23$ ,  $K=3,5$  (ecuación 14)

Seguidamente, se deben calcular los coeficientes equivalentes ciertos ( $p$ ,  $1-p$ ) aplicando las ecuaciones 15 y 16. Al igual que en el caso anterior, se estimarán sin considerar momentos superiores e incorporándolos:

1	2	3	4	nodos
0,5	0,5	0,5	0,5	0
0,5	0,5	0,5	0,5	0
	0,5	0,5	0,5	1
	0,5	0,5	0,5	1
		0,5	0,5	2
		0,5	0,5	2
			0,5	3
			0,5	3

Tabla 15:  $p$ ,  $1-p$  para distribución  $E=0$ ,  $K=3$  (ecuaciones 15 y 16)

En el supuesto de normalidad, los coeficientes permanecen constantes (Cox et. al, 1979). Cuando se incorporan los momentos superiores mediante la transformación, estos varían en cada nodo (Rubinstein, M. 1994 y Arnold, T.- Crack, T -Schwartz, A. 2009).

1	2	3	4	nodos
0,449239218	0,52821852	0,530382948	0,501125616	0
0,550760782	0,47178148	0,469617052	0,498874384	0
	0,384818146	0,525795172	0,563426021	1
	0,615181854	0,474204828	0,436573979	1
		0,296631999	0,484070335	2
		0,703368001	0,515929665	2
			0,217583466	3
			0,782416534	3

Tabla 15:  $p$ ,  $1-p$  para distribución  $E=-0,23$ ,  $K=3,5$  (ecuaciones 15 y 16)

La ecuación 21 se aplica en  $t=4$  para estimar el valor al vencimiento de la opción. Luego se aplica el procedimiento recursivo indicado en la ecuación 18.

0	1	2	3	4	nodos	Q(E)	VE	Disc	
\$ 161.219	\$ 152.887,62	\$ 153.822,36	\$ 161.709,00	\$ 170.000,00	0	6,25%	\$ 10.625,00	5%	Venta
	\$ 186.081,61	\$ 167.630,30	\$ 161.709,00	\$ 170.000,00	1	25,00%	\$ 42.500,00	<b>VE x disc</b>	Venta
		\$ 223.614,14	\$ 190.740,78	\$ 170.000,00	2	37,50%	\$ 63.750,00	\$ 161.219	Venta
			\$ 279.417,37	\$ 231.040,54	3	25,00%	\$ 57.760,14		Invertir
				\$ 356.446,27	4	6,25%	\$ 22.277,89		Invertir
<b>VOR</b>	\$ 16.463,65					1	\$ 196.913,03		

Tabla 16: valoración de la opción  $E=0$ ,  $K=3$  (ecuaciones 18 y 21)

0	1	2	3	4	nodos	Q(E)	VE	Disc	
\$ 168.486	\$ 150.846,01	\$ 153.822,36	\$ 161.709,00	\$ 170.000,00	0	6,31%	\$ 10.722,01	5%	Venta
	\$ 198.558,15	\$ 163.906,89	\$ 161.709,00	\$ 170.000,00	1	25,11%	\$ 42.695,39	<b>VE x disc</b>	Venta
		\$ 236.782,18	\$ 184.065,53	\$ 170.000,00	2	29,19%	\$ 49.624,16	\$ 168.486	Venta
			\$ 276.274,34	\$ 215.554,22	3	20,74%	\$ 44.708,65		Invertir
				\$ 311.264,12	4	18,65%	\$ 58.038,50		Invertir
<b>VOR</b>	\$ 23.730,44					1	\$ 205.788,71		

Tabla 17: valoración de la opción  $E=-0.23$ ,  $K=3.5$  (ecuaciones 18 y 21)

Ambos cuadros exponen el proceso integral de valuación. La columna  $VE$  presenta el valor terminal de la opción en el periodo 4 (obtenida en cada nodo aplicando la ecuación 21), multiplicada por su probabilidad de ocurrencia  $Q(E)$ . La sumatoria del producto  $VE \times Q(E)$  arroja u\$196.913,03 y u\$205.788,71 respectivamente, sin y con momentos estocásticos superiores. El valor del proyecto con opciones en el momento inicial se obtiene aplicando la ecuación 18. Para ello, se empleó el tipo sin riesgo indicado en la tabla (5%) y los coeficientes de las tablas 15 y 16, respectivamente. El valor de la opción real ( $VOR$ ) se obtiene por diferencia entre el valor actual del proyecto con opciones  $V_t$  y el valor del proyecto sin opciones  $V$ . Conforme se puede apreciar, el método de descuento de flujos de fondos subvalúa el proyecto; dado que su valor sin flexibilidad fue estimado en u\$144.755,11 (tabla 1). Aplicando la teoría de opciones reales y suponiendo normalidad, el valor total es de u\$161.219 (tabla 17) y el de su flexibilidad estratégica asciende a u\$16.463,65. Si se supone la existencia de asimetría y curtosis, la tabla 18 presenta el valor del proyecto por u\$168.486 y el valor actual de la opciones reales por u\$23.730,44. En la tabla 19 se expone la distribución de probabilidad en  $t=4$ , correspondiente a los diferentes

escenarios. En este caso, si no se verifica un comportamiento normal  $Q(N)$ , las probabilidades  $Q(E)$  favorables al ejercicio de la opción de venta (venta licencia) decrecen, tornando más probable el ejercicio de la opción de compra (inversión).

Q(N)	Q(E)	Escenarios
6,25%	6,31%	Venta
25,00%	25,11%	Venta
37,50%	29,19%	Venta
25,00%	20,74%	Invertir
6,25%	18,65%	Invertir

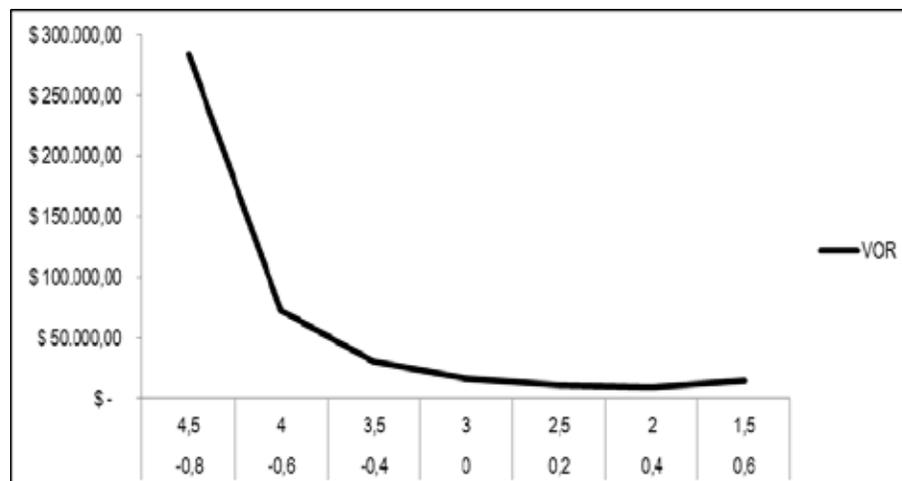
Tabla 18: probabilidades  $Q(N)$  sin corrección y  $Q(E)$  con corrección

En la tabla 20 se presentan los resultados derivados de sensibilizar los momentos superiores. Para ello se plantean intervalos de variación de 0,2 para la asimetría y 0,5 para la curtosis:

VOR	E	K	$\Delta$ VOR
\$ 283.735,63	-0,8	4,5	
\$ 73.011,70	-0,6	4	74%
\$ 30.770,46	-0,4	3,5	58%
\$ 16.463,65	0	3	46%
\$ 10.973,82	0,2	2,5	33%
\$ 8.969,12	0,4	2	18%
\$ 14.745,57	0,6	1,5	64%

Tabla 20: valor de la opción real para distintos momentos

Los resultados de la tabla anterior se exponen en el siguiente gráfico:



*Gráfico 1: comportamiento de la asimetría y curtosis como función del valor*

Sensibilizando los valores se observa una reducción del valor de las opciones reales, vinculado principalmente a una disminución del cuarto momento estocástico. Esto es consecuencia de una menor volatilidad propia de una curva más apuntalada (menor curtosis). La reducción de valor se aprecia desde el par ( $E=-0.8$ ;  $K=4.5$ ) hasta ( $E=0.4$ ;  $K=2$ ); a partir de una asimetría positiva superior a 0,4 el valor comienza a crecer, en este caso, el efecto del tercer momento supera a la menor curtosis ( $E=0,6$ ;  $K=1.5$ ). Es importante destacar cómo el valor del proyecto y sus opciones se ve afectado por el comportamiento de momentos estocásticos de orden superior, que a menudo no son considerados por suponer un comportamiento normal correspondiente al recorrido aleatorio del subyacente.

#### **4 CONCLUSIÓN**

Aquellos proyectos de inversión que se basan en el desarrollo de nuevas tecnologías y nuevos mercados de productos, contienen flexibilidades contractuales pactadas que impactan sobre su valor intrínseco y requieren el empleo de probabilidades subjetivas. Su valor y el de la flexibilidad estratégica contenida son capturados por el método de opciones reales. En esta línea de pensamiento, el modelo binomial se destaca por su elasticidad y simplicidad para explicar el complejo fenómeno de asignar valor a la flexibilidad estratégica contenida en proyectos de inversión. No obstante este supone un comportamiento normal del proceso estocástico correspondiente las variables generadoras de riesgo. Aquí es donde se presenta la limitación, puesto que si el comportamiento de la variable aleatoria que comanda la incertidumbre del riesgo no sigue un comportamiento normal, los momentos estocásticos de orden superior no son capturados y reflejados en el precio, derivando en situaciones de sobre o subvaluación del activo real.

El trabajo desarrolló un modelo de valoración de opciones reales, donde la distribución de probabilidad binomial se ajusta mediante la incorporación de la transformación de Edgeworth para capturar momentos estocásticos de orden superior (asimetría y curtosis), que permiten explicar el valor del proyecto y su flexibilidad estratégica.

En el trabajo, la unidad de análisis es una empresa de base tecnológica (EBT) de participación mixta (sector educativo público y capital privado de riesgo), con opción de expansión de la inversión (escenarios favorables) y venta de la licencia (escenarios desfavorables). Se selecciona este tipo de proyecto debido a que nace totalmente de la innovación, su principal valor es el conocimiento (intangibles) y no existe historia ni precios reflejos en el mercado. Por lo tanto, es incorrecto aplicar solamente el tradicional enfoque del descuento de flujo de fondos, asumir un comportamiento normal de las variables aleatorias y valorar opciones reales aplicando el método binomial, considerando dos momentos estocásticos. Para estos activos se propone como modelo:

- Emplear el enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) para estimar la volatilidad correspondiente al valor teórico del proyecto, calculado mediante el enfoque de descuento de flujos de fondos.
- Corregir la función binomial  $b(x)$  e incorporar la transformación de Edgeworth  $W(x)$  obteniendo una nueva función  $f(x)$ . Esta incorpora los momentos de orden superior. Proyectar el valor del subyacente, corrigiendo el primer y el segundo momento por los valores de la variable aleatoria correspondiente a la función  $f(x)$ .
- Calcular el valor de las probabilidades implícitas y los coeficientes equivalentes ciertos para cada nodo. Al incorporar momentos estocásticos de orden superior, los últimos son variables y son utilizados para aplicar el clásico método recursivo empleado en la valoración de opciones reales.
- Sensibilizar los posibles valores pertenecientes al tercer y cuarto momento estocástico, con el fin de calcular el abanico de posibles resultados.

Así se logra: balancear la simplicidad propia del enfoque binomial; suponer, proyectar y sensibilizar con flexibilidad distribuciones de probabilidades con presencia de sesgos y curtosis; e implementar una propuesta de valuación complementaria de los clásicos métodos. En particular, para emprendimientos innovadores, con nuevos mercados, carentes de valores históricos, observaciones o frecuencias de variables aleatorias, sin precios de mercados correspondientes a activos comparables y con alto contenido de valor intangible sustentado en el conocimiento.

## BIBLIOGRAFÍA

Amram, M. - Kulatilaka, N. (1998). *Real Options*. 1 ed. Harvard Business School Press Boston. Massachusetts.

Arnold, T. -Crack, T. -Schwartz, A. (2009). Implementing Risk-Averse Binomial Trees: Additional Theory, Empirics and Extensions, Copia electrónica disponible en <http://ssrn.com/abstract=749904>

Brandao, L.- Dyer, J. - Hahn, W. (2005). Using Binomial Decision Trees to Solve Real Options Valuations Problems. *Journal of Decision Analysis*, Issue 2, pp. 69-88.

Copeland, T. - Antikarov, V. (2001). *Real Options*. 1 ed. Texere LLC. New York

Copeland, T.- Koller, T. - Murrin, J. (2000). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*. 3 ed. Wiley. New York.

Cox, J.- Ross, S. - Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Septiembre, pp. 229-263.

Landro, A. (2010). *Acerca de la Probabilidad: La interpretación del concepto de azar y la definición de probabilidad*. Centro de Investigaciones en Econometría Facultad de Ciencias Económicas UBA. Buenos Aires.

Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. 1 ed. Wiley. New York.

Pratt, S. - Grabowski, R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples*. 3 ed. John Wiley & Sons. New Jersey.

Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 3, Volumen 49, pp. 771-818.

Rubinstein, M. (1998) (a). *Edgeworth Binomial Trees*, California: UC Berkeley.

Smit, H. - Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games*. 1 ed. Princeton University Press. New Jersey.

Smith, J. - Nau, R., (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis. *Management Science*, Issue 5, pp. 795-816.

Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*, Issue 2, pp. 89-102.

Trigeorgis, L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. 1 ed. Praeger. London.

Trigeorgis, L. (1997) (a). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations*. 2 ed. MIT Press. Cambridge.

Wang, A. - Halal, W. (2010). Comparison of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*, Issue 5, pp. 14-24.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. John Wiley & Sons. United Kingdom.



# VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS: PROBABILIDADES, VOLATILIDAD Y ÁRBOLES BINOMIALES IMPLÍCITOS (IBT)

## Resumen

Los Árboles Binomiales Implícitos permiten inferir, empleando precios de mercado, las probabilidades asociadas a los valores nodales finales proyectados del subyacente. A diferencia del modelo binomial, esta propuesta incorpora momentos de orden superior (asimetría y curtosis). Tomando el caso de valuación de una opción financiera americana de compra sin dividendos negociada en el mercado local y siguiendo el método de Rubinstein (1994) y Arnold, Crack y Schwartz (2004): a) se exponen los pasos necesarios para la construcción de la rejilla binomial implícita; b) se comparan los resultados con el clásico modelo binomial y c) se presenta el método recursivo y los coeficientes equivalentes ciertos variables.

**Palabras clave:** Rejillas Binomiales Implícitas, Momentos estocásticos de Orden Superior, Opciones Financieras.

## 1 EL MÉTODO BINOMIAL Y LAS PROBABILIDADES IMPLÍCITAS PARA VALUAR OPCIONES FINANCIERAS

Los tradicionales modelos empleados para la valoración de opciones suponen el comportamiento lognormal del proceso estocástico correspondiente al subyacente, considerando solamente momentos estocásticos de orden inferior (Black, F. -Scholes, M. 1972- 1973; Merton, R. 1973; Cox, J.- Ross, S. 1976; Cox, J.- Ross, S. -Rubinstein, M. 1979). Estos suponen un proceso estocástico del tipo geométrico browniano respecto de la evolución del valor correspondiente al subyacente. La distribución de probabilidad de los precios del activo es binomial en tiempo discreto y lognormal en comportamiento continuo. Si bien el supuesto de normalidad se encuentra ampliamente difundido, es sabido que muchos fenómenos, entre ellos el comportamiento de los activos financieros, no se ajustan a la pautas indicadas (Taleb, N. 2007). Esta situación conlleva errores en la estimación del valor, al omitir los momentos de orden superior impar y par. Una manera de

resolver estos problemas, sin sacrificar la elegancia y la simplicidad del método binomial, consiste en inferir la distribución de probabilidad y los momentos de orden superior a partir de los precios del mercado. Los primeros trabajos se remontan a las investigaciones iniciales relativas a la inferencia de las probabilidades que corresponde a preferencias neutrales al riesgo y precios de estados contingentes a partir de las opciones (Ross, S. 1976; Breeden, D. - Litzenberger, R. 1978). A partir de estas ideas, se propusieron métodos para estimar las probabilidades implícitas finales, correspondientes a neutralidad al riesgo de las rejillas estocásticas y el proceso estocástico implícito, a través del precio de las opciones (Shimko, D. 1993; Rubinstein, M 1994; 1998; Arnold, T.- Crack, T- Schwartz, A. 2004). El aporte del modelo conocido como Implied Binomial Tree (IBT) reside en que posibilita trabajar con los cuatro primeros momentos estocásticos, debido a que infiere las probabilidades de ocurrencia a partir de los precios correspondientes al derivado financiero. El objetivo es determinar probabilidades implícitas para un nodo terminal cualquiera de ahora en más  $Q_j^*$  para luego valorar el subyacente y consecuentemente, el derivado en cuestión. A diferencia del tradicional modelo binomial (CRR, Cox-Ross-Rubinstein) los parámetros  $p$ ,  $1-p$ ,  $u$  y  $d$  no permanecen constantes. La valoración basada en probabilidades implícitas, al trabajar con la información contenida en los precios de las opciones, recoge e incorpora las expectativas del mercado vinculadas al proceso estocástico supuesto por los agentes.

El trabajo sigue los lineamientos propuestos por Rubinstein (1998) y Arnold et.al. (2004) para la determinación de los árboles implícitos. Su estructura es la siguiente:

a) Se desarrollan los pasos para valorar con árboles binomiales implícitos una opción de compra financiera. A meros efectos didácticos, se emplea un caso de aplicación sobre un activo financiero (con su correspondiente opción) negociado en el mercado de capitales argentino. b) Se presenta y aplica la mecánica de cálculo de coeficientes equivalentes ciertos variables en los árboles binomiales obtenidos en el punto anterior. c) Los resultados obtenidos son comparados con los clásicos valores arrojados por el método binomial, con el fin de poner de manifiesto los alcances y las limitaciones de ambas propuestas.

## 2 PASOS PARA ESTIMAR UN ÁRBOL BINOMIAL IMPLÍCITO (IBT). VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE COMPRA FINANCIERA. UN CASO DE APLICACIÓN

A continuación se presentan los pasos a seguir para valorar una opción financiera aplicando la técnica de árboles binomiales implícitos (IBT). Para su desarrollo se valdrá de un contrato negociado en el mercado de capitales argentinos. Primero se aplicará el método binomial y sus resultados serán comparados con los derivados de estimar rejillas binomiales implícitas.

### 2.1 Variables del ejemplo

A modo de ejemplo, fue seleccionada una opción de compra americana que no paga dividendos<sup>1</sup> sobre la acción Tenaris (TSC110AGO). La fecha de valuación es al 10 de junio del 2011 y fue utilizada información suministrada por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC)<sup>2</sup> en su reporte diario correspondiente a la fecha de valuación. Los vencimientos de los contratos son el 19 de agosto del 2011, duración nominal a fecha de valuación 70 días, y los precios de ejercicio pactado son: \$102; \$106; \$110; \$118 y un valor contado (*spot*) de \$100. Como proxy del tipo sin riesgo es utilizada la tasa BAIBAR (9,33% efectivo anual). El periodo de tiempo total<sup>3</sup> ( $t$ ) se dividió en 10 intervalos ( $n=10$ ). En el siguiente cuadro se sintetizan precios de ejercicio, primas promedios y precios de compra-venta correspondientes a los derivados.

Ejercicio:	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Ask Price:	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price:	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
Call medio	\$ 3,35	\$ 2,43	\$ 1,40	\$ 0,65

*Cuadro 1: ejercicio, precio de venta-compra de la prima y opción de compra promedio.*

*Elaboración propia.*

<sup>1</sup> Por lo tanto, su tratamiento es similar al de una opción de compra europea en donde el subyacente no paga dividendos (Hull, 2005)

<sup>2</sup> [www.iamc.com.ar](http://www.iamc.com.ar): <http://www.iamc.sba.com.ar/Imgs/Dyn/ArchivosLenguajes/6944-2011-6-10T18-30-0.pdf>

<sup>3</sup> En este caso  $t$  equivale a 70 días, a los efectos de la sincronización de las unidades de medida (expresadas en términos anuales),  $t$  equivale a la proporción que esta representa sobre el año ( $t/yy$ ). La cantidad de pasos se refleja en  $n$ , en este caso 10.

## 2.2 Estimación de la volatilidad implícita

Valorar implica respetar la homogeneidad en las fuentes y métodos de obtención de variables de entrada. Si el fin del experimento consiste en trabajar con probabilidades implícitas, el riesgo debe ser estimado con similar coherencia. A menudo, la volatilidad implícita es utilizada como reemplazo de su par calculado con datos históricos, especialmente en aquellos casos donde se persigue controlar el riesgo vinculado a un activo subyacente específico (Hull, J. 2005). Lamentablemente, no es posible despejar  $\sigma$  (el resultado buscado) en función de las variables activo subyacente ( $S$ ), precio de ejercicio ( $X$ ), tipo sin riesgo ( $r$ ) y valor de la opción ( $c$ ). En este caso, se debe implementar un proceso iterativo donde la volatilidad surge de igualar el precio de mercado observado y el valor teórico obtenido por el modelo Black-Merton-Scholes (BMS). Los pasos involucrados son los siguientes:

- a. Calcular el valor teórico de una opción de compra europea que no paga dividendos empleando el modelo de BMS<sup>4</sup>.

$$c = [S_0 N(d_1)] - [X e^{-rt} N(d_2)] \quad \text{Ec. 1}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left[r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]t}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{Ec. 2} ; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad \text{Ec. 3}$$

En este caso,  $S$  es el precio del subyacente;  $X$  el precio de ejercicio;  $N(d_1)$  y  $N(d_2)$  los coeficientes de probabilidad en el dinero de la ecuación (Copeland, T.- Weston, F.- Shastri, K. 2005);  $r$  el tipo sin riesgo;  $t$  el horizonte temporal y  $\sigma$  la volatilidad.

- b. La volatilidad implícita se determina iterando la variable objetivo (volatilidad) hasta lograr el máximo ajuste entre valor teórico y valor de mercado observado<sup>5</sup>. El

<sup>4</sup> La ecuación necesita como insumo la volatilidad, que es la incógnita a develar.

<sup>5</sup> Para la estimación de la volatilidad implícita primero se define la celda a calibrar (donde converge el precio); se define el precio objetivo a partir del promedio entre los precios *ask-bid*; se somete a un proceso de iteración la variable incógnita (desvío estándar). El proceso culmina cuando el valor obtenido en la ecuación BMS coincide con el promedio *ask-bid*. En el presente trabajo se utilizó el aplicativo Microsoft Excel®, menú de datos función buscar objetivo.

objetivo consiste en minimizar la diferencia entre el precio observado y el valor teórico, aproximando el cociente (*call* medio/*call* teórico)-1<sup>6</sup>.

En el ejemplo, la volatilidad para cada ejercicio es: (\$102; 20,1%); (\$106; 26,2%); (\$110; 30,6%) y (\$118; 43,4%).

Ejercicio:	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Ask Price:	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price:	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
Call medio	\$ 3,35	\$ 2,43	\$ 1,40	\$ 0,65
d1	0,2272993	0,1549843	0,1052842	0,0236604
d2	0,1391724	0,0401720	-0,0285885	-0,1664184
Call teórico	\$ 3,35	\$ 2,43	\$ 1,40	\$ 0,65
Ajuste	0,00	0,00	0,00	0,00
$\sigma$ implícito	20,1%	26,2%	30,6%	43,4%
Vto días	70,00	70,00	70,00	70,00
$\Delta T = (v \text{ to} / 365) 10 \text{ y y}$	0,02	0,02	0,02	0,02

Cuadro 2: Variables involucradas en la obtención de la volatilidad implícita. Elaboración propia.

### 2.3 Rejillas binomiales explícitas (CRR)

Con los datos disponibles se está en condición de obtener los parámetros para la construcción de la rejilla binomial (Cox, J.- Ross, S- Rubinstein, M. 1979):

$$u = \exp^{\sigma\sqrt{t/n}} \text{ Ec. 4}; \quad d = \exp^{-\sigma\sqrt{t/n}} \text{ Ec. 5}; \quad p = \frac{r-d}{u-d} \text{ Ec. 6}; \quad \text{Disc} = e^{-r \times (t/n)} \text{ Ec. 7}$$

Los coeficientes de ascenso ( $u$ ), descenso ( $d$ ) y las probabilidades equivalentes ciertas ( $p$ ,  $1-p$ ) fueron estimados a partir de la volatilidad implícita correspondiente al precio de ejercicio ( $X=\$110$ ), debido a que es el contrato objeto de valoración. El factor de actualización sin riesgo por la duración del contrato ( $\text{Disc}$ ) fue estimado empleando la tasa

<sup>6</sup> La volatilidad implícita puede ser estimada alternativamente empleando la herramienta Solver en la planilla de cálculo Microsoft Excel ®. En este caso, la función a optimizar es la diferencia entre el precio de mercado con el valor teórico, planteando como restricciones la igualdad entre las valoraciones indicadas y la necesidad de que el desvío asuma valores positivos.

BAIBAR<sup>7</sup>. Los valores correspondientes a los parámetros son:  $\sigma=30,6\%$ ;  $u=1,0432$ ;  $d=0,9585$ ;  $p=0,5106$ ;  $1-p=0,4894$ ;  $r=1,0018$  y  $\text{Disc}=0,9823$ .

La rejilla binomial es el resultado de proyectar los movimientos de ascenso y descenso sobre el valor del subyacente por cada paso en los que se alcanza el horizonte temporal, empleando la siguiente expresión:

$$S_{ijt} = [S_{ijt-1} \times u; S_{ijt-1} \times d] \text{ Ec. 8}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	\$ 123,57	\$ 128,92	\$ 134,49	\$ 140,31	\$ 146,38	\$ 152,71	10
	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	\$ 123,57	\$ 128,92	\$ 134,49	\$ 140,31	9
		\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	\$ 123,57	\$ 128,92	8
			\$ 88,07	\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	7
				\$ 84,42	\$ 88,07	\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	6
					\$ 80,92	\$ 84,42	\$ 88,07	\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	5
						\$ 77,57	\$ 80,92	\$ 84,42	\$ 88,07	\$ 91,88	4
							\$ 74,35	\$ 77,57	\$ 80,92	\$ 84,42	3
								\$ 71,27	\$ 74,35	\$ 77,57	2
									\$ 68,32	\$ 71,27	1
										\$ 65,49	0

Cuadro 3: rejilla binomial tradicional, 10 pasos sobre acción Tenaris TS (t=0 10-06-2011, fuente IAMC).

Elaboración propia.

El procedimiento de valuación de opciones puede sistematizarse en los siguientes pasos:

- a. Estimar el valor al vencimiento de la opción de compra ( $c_t$ ) aplicando la expresión ( $S$  precio del subyacente y  $X$  precio de ejercicio al vencimiento  $t=10$ ):

$$c_t = [Max(S_t - X); 0] \text{ Ec. 9}$$

- b. Calcular probabilidades asociadas a los nodos terminales ( $n$  cantidad total de pasos,  $j$  números correspondientes a cada combinación,  $p$  probabilidad equivalente cierta de éxito,  $1-p$  su complemento):

<sup>7</sup> Las variables de las ecuaciones 4 (sigma), 5 (sigma) y 7 (tipo sin riesgo) se deben sincronizar con el fin de aplicar el procedimiento recursivo por paso; para ello, el intervalo total de tiempo  $t$  es dividido por la cantidad de pasos del proceso,  $n$ . La tasa BAIBAR es la empleada por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC) para estimar el valor teórico de las opciones.

$$Q_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j (1-p)^{n-j}] \text{ Ec. 10}$$

- c. El valor actual del subyacente resulta de la sumatoria entre los productos de los valores terminales ajustados por su probabilidad de ocurrencia y actualizados por el factor de descuento ( $S_{t_j}$  valor que el subyacente asume en cada nodo final y  $Q_{t_j}$  probabilidad obtenida en el paso anterior)

$$S_0 = \left[ \sum_{j=0}^n S_{t_j} \times Q_{t_j} \right] \times Disc \text{ Ec. 11}$$

- d. El valor de la opción ( $c_0$ ) es la sumatoria de los productos entre el valor al vencimiento del derivado (ecuación 9) y la probabilidad correspondiente a cada nodo final  $Q_{t_j}$  (ecuación 10). Los valores son actualizados a la tasa de interés libre de riesgo o factor de descuento ( $Disc$ ) (ecuación 12):

$$c_0 = \left[ \sum_{j=0}^n c_{t_j} \times Q_{t_j} \right] \times Disc \text{ Ec. 12}$$

En el siguiente cuadro se presentan los valores terminales correspondientes al subyacente, obtenido mediante el método binomial con coeficientes de probabilidad equivalentes ciertos (ecuación 8). Adicionalmente, se exponen las probabilidades de ocurrencia para cada nodo (ecuación 10) y el valor ajustado actualizado. La sumatoria es igual al precio del subyacente (ecuación 11).

nodos	Q(CRR) (1) A	S(ij)n B	S(ij)n x Q C=A x B	Descuento D	Spot x disc E=CxD
10	0,12037%	\$ 152,71	\$ 0,1838	0,9823	\$ 0,1805
9	1,15384%	\$ 140,31	\$ 1,6189	0,9823	\$ 1,5902
8	4,97743%	\$ 128,92	\$ 6,4168	0,9823	\$ 6,3030
7	12,72388%	\$ 118,45	\$ 15,0717	0,9823	\$ 14,8044
6	21,34537%	\$ 108,84	\$ 23,2314	0,9823	\$ 22,8194
5	24,55450%	\$ 100,00	\$ 24,5545	0,9823	\$ 24,1190
4	19,61534%	\$ 91,88	\$ 18,0229	0,9823	\$ 17,7033
3	10,74494%	\$ 84,42	\$ 9,0711	0,9823	\$ 8,9103
2	3,86261%	\$ 77,57	\$ 2,9962	0,9823	\$ 2,9430
1	0,82284%	\$ 71,27	\$ 0,5864	0,9823	\$ 0,5760
0	0,07888%	\$ 65,49	\$ 0,0517	0,9823	\$ 0,0507
				<b>Σ</b>	<b>\$ 100,00</b>

Cuadro 4: valuación del subyacente por el método binomial (A: probabilidades equivalente cierto; B: valor para el nodo final del subyacente; C: valor por probabilidad; D: descuento y E: descuento por valor ajustado por riesgo). Elaboración propia.

A continuación se presentan los valores de las opciones de compras para cada uno de los precios de ejercicios aplicando el modelo CRR.

Ejercicio	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
10	\$ 0,0610	\$ 0,0562	\$ 0,0514	\$ 0,0418
9	\$ 0,4420	\$ 0,3959	\$ 0,3497	\$ 0,2574
8	\$ 1,3398	\$ 1,1407	\$ 0,9416	\$ 0,5434
7	\$ 2,0933	\$ 1,5844	\$ 1,0754	\$ 0,0575
6	\$ 1,4591	\$ 0,6053	\$ -	\$ -
5	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
1	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
0	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Ct (CRR)</b>	<b>\$ 5,30</b>	<b>\$ 3,72</b>	<b>\$ 2,38</b>	<b>\$ 0,88</b>

Cuadro 5: valor teórico de las opciones de compra con el método CRR. Elaboración propia.

En el siguiente cuadro se presenta el valor de compra (*ask*), venta (*bid*) y el valor teórico estimado por el método CRR. Las diferencias entre precios de mercados (bid-ask) y teóricos (CRR) surgen de:  $Dif Ask = call ask - C_{CRR}$ ;  $Dif Bid = C_{CRR} - call bid$ .

<b>Ejercicio</b>	<b>\$ 102,00</b>	<b>\$ 106,00</b>	<b>\$ 110,00</b>	<b>\$ 118,00</b>
Ask Price	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
<b>Ct (CRR)</b>	<b>\$ 5,30</b>	<b>\$ 3,72</b>	<b>\$ 2,38</b>	<b>\$ 0,88</b>
Dif Ask	\$ -1,7996	\$ -1,1154	\$ -0,8753	\$ -0,2341
Dif Bid	\$ 2,0996	\$ 1,4654	\$ 1,0753	\$ 0,2341

Cuadro 6: precios de compra-venta y valor teórico de la opción. Elaboración propia.

El valor teórico escapa al precio de compra-venta pactado en el mercado. Esto es así debido a que el método CRR supone normalidad en el comportamiento estocástico del activo. No obstante, existe suficiente evidencia contra el supuesto de normalidad en algunos fenómenos, específicamente en los mercados de capitales (Taleb, N. 2004). En ese sentido, el método de carteras réplicas binomiales no es suficiente, siendo necesario inferir los momentos a partir de la observación de los precios del mercado.

## 2.4 Rejillas binomiales implícitas (IBT)

El modelo supone que los parámetros  $p$ ,  $u$  y  $d$  no se mantienen constantes durante la proyección del proceso estocástico. Adicionalmente, permite incorporar el tercer (asimetría) y cuarto momento (curtosis) estocástico, en la medida en que estos se encuentren presentes en los precios de mercado que ofician de insumos del modelo. Esto es así por la sencilla razón de que las probabilidades de ocurrencia son inferidas a partir de los precios observados en el mercado del derivado financiero en cuestión. La valoración fundada en probabilidades implícitas es condicionada por las expectativas del mercado, relacionadas con el proceso estocástico esperado para el activo subyacente. Su instrumentación requiere aplicar una secuencia lógica de instancias partiendo de los precios observados en los activos financieros (Arnold, et. al.).

*Definir los datos de entrada:*

a) Contratos de opciones con diferentes precios de ejercicio sobre el mismo subyacente y similar vencimiento.

b) Volatilidad implícita<sup>8</sup>.

c) Proyección del valor del subyacente suponiendo proceso estocástico binomial.

Los insumos fueron estimados en el punto anterior.

*Conjunto de ecuaciones y restricciones*<sup>9</sup>: el objetivo del mismo consiste en establecer las probabilidades implícitas asociadas a los precios probables del activo subyacente en los nodos finales obtenidos en el proceso binomial. La probabilidad asociada a los nodos finales se denomina  $Q_j^*$ , y es obtenida con las siguientes restricciones.

**Restricción 1:** minimizar la diferencia entre probabilidades explícitas e implícitas. Donde  $Q_j$  es la probabilidad del nodo final obtenida con el método binomial y  $Q_j^*$  es la probabilidad implícita, correspondiente a un precio que experimenta  $j$  movimientos ascendentes,  $n-j$  descendentes.

$$error = \sum_{j=0}^N [Q_j - Q_j^*]^2 \text{ Ec. 13}$$

**Restricción 2:** la suma de las probabilidades implícitas debe ser igual a uno. Las probabilidades implícitas<sup>10</sup> siempre son una magnitud positiva para todos los nodos (desde  $j$  hasta  $n$ ).

$$\sum_{j=0}^N Q_j^* = 1 \text{ Ec. 14}$$

**Restricción 3:** la diferencia entre el precio observado en el mercado para el subyacente y el valor intrínseco debe ser cero ( $Spot\ implícito - Spot\ observado = 0$ ). El valor *spot* implícito se obtiene de la sumatoria de los precios finales nodales multiplicados por la probabilidad implícita de ocurrencia ( $Q_j^*$ ), actualizados por el factor de descuento.

<sup>8</sup> Se selecciona la opción que se encuentra más cercana al estado “en el dinero”.

<sup>9</sup> El conjunto de ecuaciones y restricciones forman parte de un algoritmo de iteración. Para ello se utilizó la función Solver de Microsoft Excel ®.

<sup>10</sup> Es incorrecto hacer referencias a probabilidades implícitas nodales debido a que estas corresponden a los arcos del árbol binomial y no a los nodos.

$$S_0 = \left[ \sum_{j=0}^n S_{t_j} \times Q_{*t_j} \right] \times Disc \text{ Ec. 15}$$

**Restricción 4:** la diferencia entre el valor de la opción estimado con probabilidades implícitas para cada precio de ejercicio y el precio de compra (*ask*);  $difask = cask - cIBT$  debe ser mayor o igual a cero. Similar restricción se aplica para el precio de venta (*bid*)  $difbid = cIBT - cask$ . El precio teórico del *call* (*cIBT*) es determinado empleando la siguiente ecuación:

$$c_0 = \left[ \sum_{j=0}^n c_{t_j} \times Q_{*t_j} \right] \times Disc \text{ Ec. 16}$$

En el siguiente cuadro se presentan los resultados correspondientes a las probabilidades nodales explícitas Q(CRRR), implícitas Q'(IBT) (el resultado del conjunto de celdas a cambiar, restricción 2) y el error (el resultado producto de minimizar las diferencias al cuadrado entre Q(CRR) y Q'(IBT) restricción 1).

nodos	Q(CRR)	Q'(IBT)	Error
10	0,12037%	1,6020%	0,000220
9	1,15384%	0,0001%	0,000133
8	4,97743%	0,7222%	0,001811
7	12,72388%	5,9474%	0,004592
6	21,34537%	23,0847%	0,000303
5	24,55450%	41,9203%	0,030157
4	19,61534%	23,8358%	0,001781
3	10,74494%	2,8872%	0,006174
2	3,86261%	0,0001%	0,001492
1	0,82284%	0,0001%	0,000068
0	0,07888%	0,0001%	0,000001
<b>Σ</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>4,67%</b>

Cuadro 7: probabilidades binomiales explícitas, implícitas y término de error. Elaboración propia.

*Valuación:* estimadas las probabilidades implícitas, el proceso de valuación sigue su curso tradicional conforme fue expuesto para el modelo CRR. La valuación de la opción de

compra emerge del valor actual de la sumatoria de los precios terminales, ajustados por las probabilidades de ocurrencia implícita, estimadas con el método IBT. En el cuadro se expone el cálculo del valor actual correspondiente al precio *spot*.

nodos	Q(IBT) (1) A	S(ij)n B	S(ij)n x Q C=A x B	Descuento D	Spot x disc E=CxD
10	1,6020%	\$ 152,71	\$ 2,45	0,9823	\$ 2,40
9	0,0001%	\$ 140,31	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
8	0,7222%	\$ 128,92	\$ 0,93	0,9823	\$ 0,91
7	5,9474%	\$ 118,45	\$ 7,04	0,9823	\$ 6,92
6	23,0847%	\$ 108,84	\$ 25,12	0,9823	\$ 24,68
5	41,9203%	\$ 100,00	\$ 41,92	0,9823	\$ 41,18
4	23,8358%	\$ 91,88	\$ 21,90	0,9823	\$ 21,51
3	2,8872%	\$ 84,42	\$ 2,44	0,9823	\$ 2,39
2	0,0001%	\$ 77,57	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
1	0,0001%	\$ 71,27	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
0	0,0001%	\$ 65,49	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
				<b>Σ</b>	<b>\$ 100,00</b>

Cuadro 8: valuación del subyacente con rejillas binomiales implícitas (A probabilidades implícitas, B valores correspondientes al subyacente por el método CRR, C valores ajustados por su probabilidad de ocurrencia, D factor de actualización y E valor actual ajustado). Elaboración propia.

En ambos métodos el valor inicial del subyacente y los valores finales coinciden. Las variaciones se producen en los nodos intermedios. Los siguientes cuadros presentan el valor de la prima con probabilidades implícitas y los diferenciales entre el precio teórico y los precios de compra venta en el mercado.

Ejercicio	\$	102,00	\$	106,00	\$	110,00	\$	118,00
10	\$	0,8123	\$	0,7482	\$	0,6841	\$	0,5560
9	\$	0,0000	\$	0,0000	\$	0,0000	\$	0,0000
8	\$	0,1944	\$	0,1655	\$	0,1366	\$	0,0788
7	\$	0,9785	\$	0,7406	\$	0,5027	\$	0,0269
6	\$	1,5780	\$	0,6546	\$	-	\$	-
5	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-
4	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-
3	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-
2	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-
1	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-
0	\$	-	\$	-	\$	-	\$	-
<b>IBT</b>	<b>\$</b>	<b>3,50</b>	<b>\$</b>	<b>2,27</b>	<b>\$</b>	<b>1,30</b>	<b>\$</b>	<b>0,65</b>

Cuadro 9: valor teórico de las opciones de compra con el método IBT. Elaboración propia.

Ejercicio	\$	102,00	\$	106,00	\$	110,00	\$	118,00
Ask Price	\$	3,50	\$	2,60	\$	1,50	\$	0,65
Bid Price	\$	3,20	\$	2,25	\$	1,30	\$	0,65
<b>Ct (IBT)</b>	<b>\$</b>	<b>3,50</b>	<b>\$</b>	<b>2,27</b>	<b>\$</b>	<b>1,30</b>	<b>\$</b>	<b>0,65</b>
Dif Ask	\$	-0,0000	\$	0,3320	\$	0,2000	\$	0,0000
Dif Bid	\$	0,3000	\$	0,0180	\$	-0,0000	\$	-0,0000

Cuadro 3: precios de compra-venta y valor teórico de la opción. Elaboración propia.

Trabajar con probabilidades implícitas limita el valor a los precios de compra-venta (*bid-ask*) capturando el tercer (asimetría) y cuarto (curtosis) momento estocástico. La no normalidad está reflejada en los precios, aunque los tradicionales modelos no contemplan dicha situación. Por lo tanto, sin perjuicio de su amplia difusión y evidente simplicidad, carecen de capacidad para explicar íntegramente el precio. De allí que a menudo se empleen ajustes *ad hoc* (Hatella, 2010) o transformaciones sobre la función binomial de probabilidad (Rubinstein, 1998).

En los siguientes gráficos se ilustran los diferentes valores obtenidos mediante el tradicional método binomial con probabilidades explícitas y el uso de probabilidades implícitas.

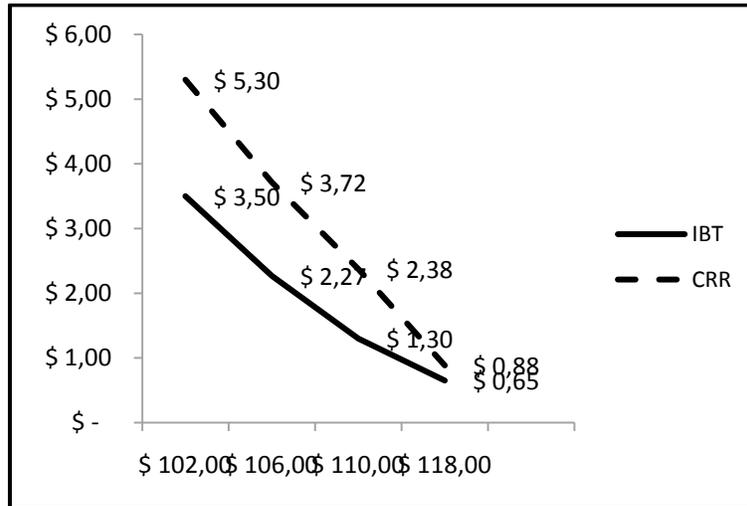


Ilustración 1: valor teórico opción de compra método binomial e IBT. Elaboración propia.

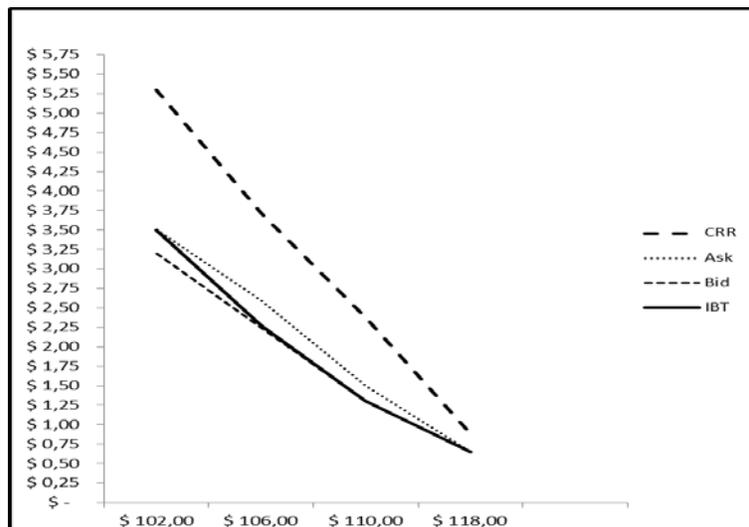


Ilustración 2: valor teórico opción de compra binomial e IBT precio de compra-venta. Elaboración propia.

Se aprecian las diferencias de valor entre ambos métodos y cómo el valor estimado mediante IBT queda cercado por los precios de compra-venta a los cuales se negocia la opción de compra. La línea punteada (CRR) tiene un comportamiento lineal con una relación decreciente entre el precio del derivado y el valor precio ejercicio, propio del supuesto de normalidad asumido. En cambio, el método IBT resume los cuatro momentos estocásticos manifestados por los agentes mediante los precios de compra (*ask*)-venta (*bid*).

### 3 DESAGREGANDO REJILLAS BINOMIALES IMPLÍCITAS: COEFICIENTES EQUIVALENTES CIERTOS NO CONSTANTES

En una rejilla CRR, las probabilidades asociadas a cada estado son estimadas empleando la siguiente ecuación:

$$P_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j (1-p)^{n-j}] \text{ Ec. 17}$$

Continuando con el ejemplo, las probabilidades correspondientes a cada nodo son las siguientes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	odos
100,00%											0
	48,94%										1
		23,95%									2
			11,72%								3
				5,74%							4
					2,81%						5
						1,37%					6
							0,67%				7
								0,33%			8
									0,16%		9
										0,08%	10

Cuadro 4: probabilidades binomiales opción de compra TSC110AGO. Elaboración propia.

Los coeficientes equivalentes ciertos se mantienen constantes a lo largo de todo el intervalo y se aplican directamente para la solución recursiva del problema del valor actual del subyacente con la expresión:

$$S_{j-t-1} = (p \times S_{jt}^+ + 1 - p \times S_{jt}^-) \times e^{-r/t} \text{ Ec. 18}$$

En el caso de la opción, la resolución recursiva implica utilizar la siguiente ecuación:

$$c_{j-t-1} = (p \times c_{jt}^+ + 1 - p \times c_{jt}^-) \times e^{-r/t} \text{ Ec. 19}$$

Para un precio de ejercicio de \$110 la rejilla queda planteada de la siguiente manera:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	odos
\$ 2,38	\$ 3,61	\$ 5,37	\$ 7,79	\$ 10,98	\$ 15,00	\$ 19,77	\$ 25,08	\$ 30,70	\$ 36,57	\$ 42,71	0
	\$ 1,10	\$ 1,79	\$ 2,86	\$ 4,48	\$ 6,83	\$ 10,08	\$ 14,30	\$ 19,31	\$ 24,69	\$ 30,31	1
		\$ 0,38	\$ 0,68	\$ 1,18	\$ 2,04	\$ 3,46	\$ 5,72	\$ 9,12	\$ 13,77	\$ 18,92	2
			\$ 0,08	\$ 0,15	\$ 0,29	\$ 0,57	\$ 1,12	\$ 2,20	\$ 4,31	\$ 8,45	3
				\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	4
					\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	5
						\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	6
							\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	7
								\$ -	\$ -	\$ -	8
									\$ -	\$ -	9
										\$ -	10

Cuadro 5: modelo binomial opción de compra TSC110AGO. Elaboración propia.

Las probabilidades derivadas de rejillas binomiales implícitas son resueltas utilizando el procedimiento recursivo Rubinstein (1994), que será sintetizado a continuación.

*Estimación de las probabilidades finales:* el proceso comienza en los últimos nodos de la rejilla, estimando las probabilidades con la siguiente expresión:

$$Q = \frac{Q'_j}{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \text{ Ec. 20}$$

*Estimación de probabilidades intermedias:* los nodos adyacentes ( $Q_t^+ S_t^+; Q_t^- S_t^-$ ) representan valores probables condicionados por el nodo anterior ( $Q_{t-1}; S_{t-1}$ ). La probabilidad de la rama asociada al nodo precedente ( $Q_{t-1}$ ) es igual a la suma de las ramas de nodos adyacentes posteriores  $Q_{t-1} = Q_t^+ + Q_t^-$ . O sea, el nodo precedente resume los movimientos ascendentes y descendentes del subyacente con probabilidades ( $Q_t^+ S_t^+; Q_t^- S_t^-$ ).

*Coefficientes equivalentes ciertos:* los coeficientes equivalentes son obtenidos aplicando probabilidades condicionales:

$$p = Q_t^+ / Q_{t-1} \text{ Ec. 21 ; } 1 - p = Q_t^- / Q_{t-1} \text{ Ec. 22}$$

*Valuación procedimiento recursivo:*  $S_{t-1}$  representa la expectativa neutral al riesgo de las ramas adyacentes del nodo posterior  $S_t^+$  y  $S_t^-$  con las probabilidades que arrojan los coeficientes equivalentes ciertos ( $p_{jt}$ ;  $1-p_{jt}$ ), actualizadas al tipo sin riesgo correspondiente al intervalo de tiempo. El valor actual del subyacente ( $S$ ) y de la opción ( $c$ ) es:

$$S_{j-t-1} = [p_{jt} \times S_{jt}^+ + (1 - p_{jt}) \times S_{jt}^-] \times e^{-r/t} \text{ Ec. 23}$$

$$c_{j-t-1} = [p_{jt} \times c_{jt}^+ + (1 - p_{jt}) \times c_{jt}^-] \times e^{-r/t} \text{ Ec. 24}$$

Los resultados correspondientes a los pasos primero (definición de la probabilidad en los nodos del último periodo) y segundo (probabilidades determinadas en el nodo) son expuestos en la siguiente rejilla:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
100,00%	48,45%	22,10%	9,13%	3,29%	0,97%	0,21%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0
	51,55%	26,35%	12,97%	5,84%	2,32%	0,76%	0,19%	0,02%	0,00%	0,00%	1
		25,21%	13,37%	7,14%	3,52%	1,55%	0,58%	0,16%	0,02%	0,00%	2
			11,83%	6,24%	3,62%	1,97%	0,97%	0,42%	0,14%	0,02%	3
				5,59%	2,62%	1,65%	0,99%	0,56%	0,28%	0,11%	4
					2,97%	0,97%	0,66%	0,44%	0,28%	0,17%	5
						2,01%	0,31%	0,23%	0,16%	0,11%	6
							1,70%	0,08%	0,07%	0,05%	7
								1,62%	0,02%	0,02%	8
									1,60%	0,00%	9
										1,60%	10

Cuadro 13: probabilidades IBT opción de compra TSC110AGO. Elaboración propia.

Los resultados correspondientes al paso 3 (coeficientes  $p_{jt}$ ;  $1-p_{jt}$ ) son:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
0,48445	0,45616	0,41302	0,36067	0,29607	0,21537	0,11530	0,00505	0,90000	0,90909	0
0,51555	0,54384	0,58698	0,63933	0,70393	0,78463	0,88470	0,99495	0,10000	0,09091	0
	0,51104	0,49235	0,44986	0,39712	0,33001	0,24284	0,12966	0,00051	0,81818	1
	0,48896	0,50765	0,55014	0,60288	0,66999	0,75716	0,87034	0,99949	0,18182	1
		0,53058	0,53356	0,49298	0,44132	0,37295	0,27913	0,14891	0,00009	2
		0,46942	0,46644	0,50702	0,55868	0,62705	0,72087	0,85109	0,99991	2
			0,52721	0,57997	0,54321	0,49533	0,42876	0,32956	0,17494	3
			0,47279	0,42003	0,45679	0,50467	0,57124	0,67044	0,82506	3
				0,46838	0,63073	0,60014	0,56067	0,50321	0,40556	4
				0,53162	0,36927	0,39986	0,43933	0,49679	0,59444	4
					0,32535	0,68297	0,65939	0,63401	0,60212	5
					0,67465	0,31703	0,34061	0,36599	0,39788	5
						0,15288	0,73378	0,70853	0,68924	6
						0,84712	0,26622	0,29147	0,31076	6
							0,04805	0,80339	0,75542	7
							0,95195	0,19661	0,24458	7
								0,00992	0,99938	8
								0,99008	0,00062	8
									0,00001	9
									0,99999	9

Cuadro 6: coeficientes IBT para cada nodo recursivo opción de compra TSC110AGO. Elaboración propia.

Los nodos correspondientes al periodo  $t$  ( $t=10$ ) son utilizados para obtener el valor en  $t-1$  ( $t=9$ ). Existen 10 debido a que el valor del nodo precedente es el resumen de los valores de los nodos adyacentes posteriores. Los coeficientes no son constantes y deben estimarse por nodo. Finalmente, el procedimiento recursivo para valorar el subyacente y la opción se detalla a continuación:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
\$ 100	\$ 95,41	\$ 91,12	\$ 86,96	\$ 82,89	\$ 78,90	\$ 74,98	\$ 71,18	\$ 73,62	\$ 70,62	\$ 65,49	0
	\$ 104,13	\$ 99,98	\$ 96,18	\$ 92,60	\$ 89,26	\$ 86,18	\$ 83,38	\$ 80,78	\$ 72,29	\$ 71,27	1
		\$ 108,46	\$ 103,94	\$ 99,97	\$ 96,24	\$ 92,79	\$ 89,64	\$ 86,85	\$ 84,27	\$ 77,57	2
			\$ 113,18	\$ 108,00	\$ 103,85	\$ 99,95	\$ 96,35	\$ 93,12	\$ 90,41	\$ 84,42	3
				\$ 118,66	\$ 112,19	\$ 107,82	\$ 103,70	\$ 99,88	\$ 96,53	\$ 91,88	4
					\$ 125,29	\$ 116,51	\$ 111,91	\$ 107,51	\$ 103,33	\$ 100,00	5
						\$ 132,59	\$ 121,02	\$ 116,26	\$ 111,62	\$ 108,84	6
							\$ 139,51	\$ 125,50	\$ 120,80	\$ 118,45	7
								\$ 146,00	\$ 128,69	\$ 128,92	8
									\$ 152,43	\$ 140,31	9
										\$ 152,71	10

Cuadro 15: valor actual subyacente IBT opción de compra TSC110AGO. Elaboración propia.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
\$	1,300	\$ 0,36	\$ 0,16	\$ 0,05	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	0
		\$ 2,19	\$ 0,53	\$ 0,25	\$ 0,07	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	1
			\$ 3,93	\$ 0,81	\$ 0,39	\$ 0,12	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	2
				\$ 7,47	\$ 1,29	\$ 0,66	\$ 0,21	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	3
					\$ 14,39	\$ 2,16	\$ 1,19	\$ 0,42	\$ -	\$ -	\$ -	4
						\$ 25,21	\$ 3,83	\$ 2,35	\$ 0,96	\$ -	\$ -	5
							\$ 35,58	\$ 7,03	\$ 5,05	\$ 2,62	\$ -	6
								\$ 40,81	\$ 12,52	\$ 10,99	\$ 8,45	7
									\$ 42,32	\$ 18,89	\$ 18,92	8
										\$ 42,63	\$ 30,31	9
											\$ 42,71	10

Cuadro 16: valor actual de la opción IBT opción de compra TSC110AGO. Elaboración propia.

Por este método se arriba al valor obtenido de manera directa en los cuadros 8 (subyacente) y 9 (opción con ejercicio \$110). La diferencia con el método binomial consiste en asumir la variabilidad de los parámetros de probabilidad. Esto permite ajustar el valor teórico de la opción a las expectativas que los agentes forman a través de los precios de mercado, capturando las desviaciones respecto del concepto de normalidad estadística.

#### 4 MOMENTOS SUPERIORES Y LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES IMPLÍCITAS

Trabajar con rejillas binomiales implícitas permite incorporar los momentos superiores no capturados por las rejillas binomiales tradicionales. Las últimas suponen simetría en la distribución de probabilidad, y además, los coeficientes equivalentes ciertos permanecen constantes en los diferentes pasos en que se desenvuelve la vida del derivado. En cambio, trabajar con probabilidades implícitas presupone inferir, a partir de la información disponible en el mercado en el momento de valuación, las expectativas de valor y las probabilidades asociadas, abandonando el supuesto de normalidad. En las siguientes ilustraciones se superponen las probabilidades y los valores actuales de las distribuciones binomial e implícita binomial.

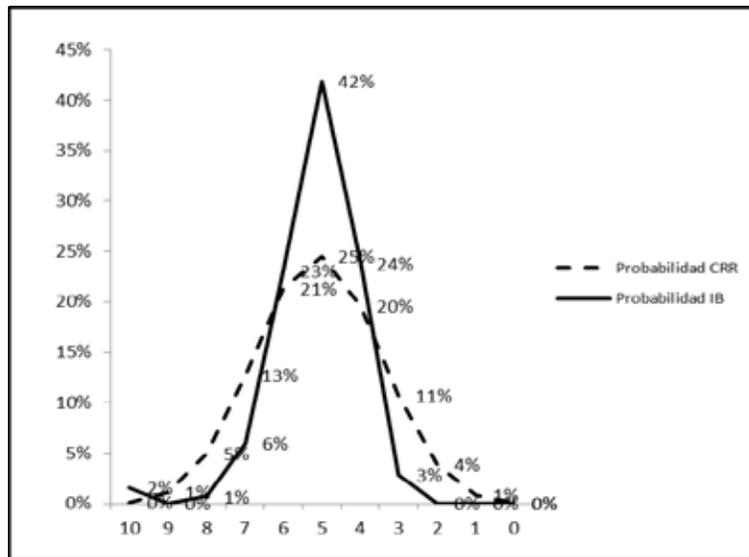


Ilustración 3: probabilidades CRR (binomial) e IBT. Elaboración propia.

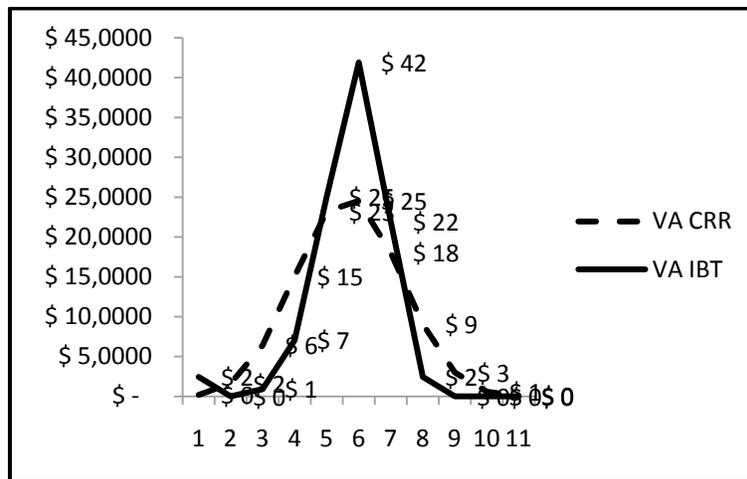


Ilustración 4: VA Subyacente Probabilidades CRR (binomial) e IBT. Elaboración propia.

La distribución de probabilidad (ilustración 4) y los valores actuales probables (ilustración 5) en el modelo binomial siguen la tendencia de simetría y forma mesocúrtica. Las probabilidades implícitas capturan el tercer y cuarto momento, leve asimetría positiva y leptocurtosis.

## 5 CONCLUSIÓN

Si bien el modelo binomial es una de las principales herramientas para valorar opciones financieras y reales, producto de su elasticidad y simplicidad, parte a menudo de un supuesto simplificador y bastante restrictivo: el de suponer un comportamiento lognormal en los precios del subyacente. En mercados altamente turbulentos, por lo general, la distribución de la probabilidad de los posibles valores de activos presenta sesgos y asimetrías. Si los momentos de orden superior no son considerados, la estimación del valor teórico es incorrecta e incompleta, puesto que solamente se está trabajando con los dos primeros momentos estocásticos (media-varianza).

Conforme fue desarrollado, trabajar con rejillas binomiales implícitas presenta la ventaja de brindar una explicación más completa del valor esperado de la opción financiera o real, ya que incorpora momentos estocásticos de orden superior. Una ventaja adicional del método presentado consiste en incorporar, a partir de los precios de mercado, las expectativas de los agentes que intervienen en el mercado donde se negocian los títulos objeto de la valuación. Las expectativas o creencias juegan un rol fundamental en la composición del precio, por ello no pueden ser sustraídas del proceso de estimación de valor o suponerse exógenamente. Las limitaciones del método presentado condicionan su éxito. Este depende del grado de precisión y disponibilidad de información (precios) para inferir las probabilidades implícitas.

## BIBLIOGRAFÍA

Arnold, T.- Crack, T. - Schwartz, A. (2004). Implied Binomial Trees in Excel whitout VBA. Disponible en <http://ssrn.com/abstrac=541744>

Black, F. -Scholes, M. (1972). The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance* Mayo: 399-418.

Black, F. -Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* Mayo-Junio: 637-659.

Breeden, D.-Litzenberger, R. (1978). Prices State-Contingent Claims Implicit in Options Price. *Journal of Business*(51), 621-651.

Copeland, T. - Antikarov, V. (2001). *Real Options*. 1 ed. Texere LLC. New York

Copeland, T.- Weston, F.- Shastri, K. (2005). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.

Cox, J. -Ross, S. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* (3): 145-166.

Cox, J.- Ross, S.- Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics* Septiembre: 229-263.

Haahtela, T. (2010). Displaced Diffusion Binomial Tree for Real Option Valuation. Disponible en <http://ssrn.com/abstract=1932408>

Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives* (5 ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Merton, R. (1973). The Theory of Rational Options Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* Primavera: 141-183.

Ross, S. (1976). Options and Efficiency. *Quarterly Journal of Economics* (90): 75-89.

Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance* (49): 771-818.

Rubinstein, M. (1998). Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives* (5): 20-27.

Shimko, D. (1993). Bounds on Probability. *RISK*(6), 33-37.

Taleb, N. (2004). *Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and Markets*. 1 ed New York: Random House.

Taleb, N. (2007). *The Black Swam*. 1 ed New York: Random House.

# VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS. MOMENTOS DE ORDEN SUPERIOR Y ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD IMPLÍCITA. LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH Y EL MODELO BLACK-SCHOLES

## *Resumen*

Una explicación acerca de la forma de la curva de volatilidad implícita en los contratos de opciones deriva de no considerar momentos estocásticos de orden superior (Wilmott, P. 2009). En base al trabajo de Baliero Filho y Rosenfeld (2004), se propone un modelo iterativo para estimar la volatilidad implícita con la expansión de Edgeworth sobre el modelo Black-Scholes. En la primera sección se introduce el modelo. Luego, un caso de valoración de un contrato de opción del mercado de capitales argentino, aplicando el modelo B-S, con la expansión Edgeworth. Finalmente, las conclusiones relativas a la forma plana de la volatilidad obtenida del modelo transformado y el impacto de la curtosis sobre los contratos fuera del dinero.

**Palabras clave:** Volatilidad implícita, Edgeworth, Asimetría, Curtosis.

## 1 INTRODUCCIÓN

La volatilidad de los retornos de un activo constituye uno de los parámetros fundamentales en la ecuación diferencial de Black-Scholes (B-S), que arroja la evolución en el tiempo y la forma en que es afectado el precio de una opción por el precio del subyacente. Para los fines del análisis de los resultados del modelo B-S, la noción de volatilidad puede ser estimada en formas diferentes: actual, histórica, implícita, proyectada o de cobertura<sup>1</sup>. La que se conoce como implícita es de particular interés, dado que permite

---

<sup>1</sup> La volatilidad actual está capturada por parámetros  $\sigma$  en la ecuación parcial diferencial de Black-Scholes. Es imposible medirla exactamente por lo cual lo mejor que se puede hacer es estimarla a partir de algún modelo estadístico. Así, la volatilidad histórica o realizada se obtiene de las observaciones históricas de precios, dando una medida estadística del riesgo del subyacente. La volatilidad implícita es el número en la fórmula de Black-Scholes que hace coincidir el valor teórico con el precio de mercado. En tanto que la volatilidad proyectada (a partir de la implícita) corresponde a un momento futuro del tiempo. La volatilidad de cobertura (hedging volatility) es el parámetro a introducir en la estimación de la letra griega delta para establecer la cantidad de subyacente a vender en corto con propósitos de cobertura. Si bien hay muchas formas de estimar

derivar la curva de volatilidad implícita y por lo tanto, comparar precios de opciones bajo diferentes ejercicios y expiraciones. Se ha constatado que, a pesar de que la solución a la ecuación B-S predice monotonidad creciente de la volatilidad, la curva obtenida en términos de los precios de mercado es decreciente o tiene forma de campana invertida (*volatility smile*). Una explicación para este comportamiento es que las opciones de compra y venta fuera del dinero presentan mayor volatilidad implícita en los extremos que sus pares en el dinero, debido a que la curva incorpora la asimetría y curtosis de la distribución de rendimientos del subyacente (Wilmott, P. 2009). Por otro lado, los rendimientos y precios no suelen tener un comportamiento normal y lognormal, respectivamente (Taleb, N. 2004).

Por lo tanto, la razón última de la aparición de la *volatility smile* se encontraría en la presencia de sesgos y colas importantes en las distribuciones de los resultados del subyacente. Si bien en teoría el valor de una opción es el valor presente de sus flujos esperados bajo una caminata aleatoria neutral al riesgo, los sesgos y extremos en la distribución de la probabilidad terminarían arrojando precios mayores que los predichos por el modelo de B-S, al menos para los ejercicios extremos (altos-bajos), dando lugar a altas volatilidades y por ende, a la forma de campana invertida (*smile*).

El propósito de este trabajo es combinar las virtudes del tradicional modelo para valorar opciones B-S con la hipótesis de no-normalidad. Se expondrá un modelo de solución cerrada incorporando el tercer y cuarto momento estocástico de la distribución. Para ello, se empleará como herramienta formal la transformación de Edgeworth, que permite expresar una distribución de probabilidad en términos de sus momentos. Esto, a su vez, permite estimar de manera implícita no sólo la volatilidad sino también la asimetría, la curtosis y la tasa libre de riesgo, siguiendo la propuesta de Baliero Filho y Rosenfeld (2004).

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

- a. El valor de mercado de una opción; a partir del valor correspondiente al modelo B-S, modificado mediante la aplicación de la expansión de Edgeworth.
- b. Los valores implícitos correspondientes a volatilidad, asimetría, curtosis y tasa libre de riesgo.

---

la volatilidad, una elegante solución surge de aplicar el concepto de incertidumbre. En este caso la volatilidad no está capturada en un solo valor sino en un rango o intervalo de posibles valores (Wilmott, P. 2009).

c. El impacto de los momentos de orden superior en el valor de mercado para los contratos fuera del dinero.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera: en primer lugar se introduce la expansión de Edgeworth y se presenta la ecuación de valoración B-S con la expansión. Luego, se describe el proceso de iteración que permite estimar implícitamente la curva de volatilidad, asimetría, curtosis y tipo sin riesgo, valorando un contrato de opción de compra negociada en el Mercado de Capitales Argentino. Para contrastar resultados se procede valorando opciones de compra y venta sobre el mismo subyacente y con similar vencimiento.

## 2 EL MODELO DE BLACK-SCHOLES Y LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH

### 2.1 LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH

La presencia de sesgos importantes es característica de distintos tipos de distribuciones probabilísticas no-gaussianas. Sin embargo, se puede ver que dichas distribuciones pueden obtenerse a partir de transformaciones de la distribución normal, mediante la expansión de Edgeworth, Jarrow y Rudd (1982).

Para ver cómo se procede suponemos una sucesión de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas (*iid*)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con media  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2$ . Se define una variable aleatoria:

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

El teorema central del límite asegura que cuando  $n \rightarrow \infty$  la variable aleatoria  $S_n = \sqrt{n} \frac{(X_n - \mu)}{\sigma}$  se aproxima a una distribución  $N(0,1)$ . Si el objetivo es determinar su distribución para un  $n$  finito, se procede buscando la función característica de la función que aproxima la distribución de la variable  $S_n$ , definiendo  $X_n(t) = E(e^{itS_n})$ , la cual, para el caso de que las observaciones surjan de una distribución normal, es igual a  $e^{-\frac{t^2}{2}}$ . La función puede ser expandida de la siguiente manera:

$$\chi_n(t) = \exp \left[ -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{n^{1/2}} \kappa_3 (it)^3 + \dots + \frac{1}{n^{(j-2)/2}} \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j + \dots \right] \quad (2)$$

Donde los valores  $\kappa$  indican los momentos de la distribución de  $S_n$ . La distribución de  $\chi_n$  puede aproximarse mediante la expansión de Edgeworth:

$$g(x) = \left( 1 + \frac{\varepsilon}{6} (x^3 - 3x) + \frac{\kappa - 3}{24} (x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{\varepsilon^2}{72} (x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \right) z(x) \quad (3)$$

La expresión es válida hasta el orden  $1/n$ , utilizando asimetría  $\xi = \kappa_3$  y curtosis  $\kappa = \kappa_4 + 3$ . La variable  $z(x)$  representa la distribución  $N(0,1)$ <sup>2</sup>.

## 2.2 EL MODELO B-S Y EL AJUSTE CON LA EXPANSIÓN DE EDGEWORTH

La distribución de los rendimientos de los activos financieros y reales, a menudo no se ajusta al clásico comportamiento normal, presentando asimetría y pesadez en los extremos. Los nuevos proyectos, desarrollos tecnológicos e innovaciones en el mercado, se caracterizan por la escasa disponibilidad de activos comparables y la nula frecuencia de observaciones de precios y rendimientos. Suponer un proceso estocástico del subyacente sobre la base de sólo dos momentos (media-desvío) puede generar errores en la valoración del activo real o el derivado financiero. Consecuentemente, es menester incorporar momentos estocásticos de orden superior, permitiendo una estimación ajustada del valor y la volatilidad del activo<sup>3</sup>.

Para derivar una forma cerrada de valoración a partir del clásico modelo Black-Scholes se parte de la tasa de crecimiento del activo definida por la siguiente expresión:

$$\mu T = rT - \log \left( 1 + \frac{\kappa - 3}{24} (\sigma\sqrt{T})^4 + \frac{\varepsilon}{6} (\sigma\sqrt{T})^3 + \frac{\varepsilon^2}{72} (\sigma\sqrt{T})^6 \right) \quad (4)$$

Cuando la distribución es normal,  $\xi=0$  y  $\kappa=3$  entonces  $\mu=r$  se recobra la solución del modelo de Black-Scholes.

<sup>2</sup> Cabe destacar que según los valores de los parámetros la distribución de Edgeworth puede tomar valores negativos (Rubinstein, M. 1998)

<sup>3</sup> En los derivados financieros los momentos estocásticos pueden inferirse a través de los precios de mercado. Esto permitiría obtener una medida ajustada de la volatilidad. En el caso de los modelos de valoración mediante opciones reales, los momentos pueden sensibilizarse presentando un rango de valor correspondiente a la flexibilidad estratégica valorada.

El valor esperado de la opción está dado para el caso general por la siguiente expresión:

$$C_0^{Edge} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} dxg(x) \text{Max} \left( S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K, 0 \right) \quad (5)$$

√

La integral puede transformarse en un modelo de solución cerrada para la valoración de opciones (Baliero –Filho, R. -Rosenfeld, R. 2004), donde al resultado del modelo de B-S se le adiciona la expansión de Edgeworth:

$$C_0^{Edge} = C_0^{BS} + \left( \frac{e^{u-rT-x_m^2/2+\sigma\sqrt{T}x_m}}{72\sqrt{2\pi}} V_0 \left( \begin{aligned} & \left( (\sigma\sqrt{T})^5 \varepsilon^2 + (\sigma\sqrt{T})^4 \varepsilon^2 x_m + (\sigma\sqrt{T})^3 (3(\kappa-3)) + \varepsilon^2 (x_m^2 - 1) \right) \\ & + (\sigma\sqrt{T})^2 (12\varepsilon - 3(\kappa-3)x_m + \varepsilon^2 x_m (x_m^2 - 3)) \\ & + (\sigma\sqrt{T}) (12\varepsilon x_m + 3(\kappa-3)(x_m^2 - 1) + \varepsilon^2 (x_m^4 - 6x_m^2 + 3)) \end{aligned} \right) \right) + \left( \frac{e^{-rT-x_m^2/2}}{72\sqrt{2\pi}} (e^{u+\sigma\sqrt{T}x_m} V_0 - K) (3(\kappa-3)x_m (x_m^2 - 3) + 12\varepsilon (x_m^2 - 1) + \varepsilon^2 x_m (x_m^4 - 10x_m^2 + 15)) \right) + \left( \frac{e^{u-rT-\sigma^2 T/2}}{72} V_0 N(d_1) \left( (\sigma\sqrt{T})^4 3(\kappa-3) + (\sigma\sqrt{T})^6 \varepsilon^2 + 12(\sigma\sqrt{T})^3 \varepsilon \right) \right) \quad (6)$$

Donde  $x_m = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$  es el valor mínimo que asegura que el integrando de la ecuación (5) sea no-negativo. El tradicional resultado B-S se recupera cuando la distribución es normal;  $\zeta=0$  y  $\kappa=3$ .

En el caso de una opción de venta se sigue igual criterio que en el caso anterior, a la ecuación de valoración  $P_0^{BS} = V_0 (N(d_1) - 1) - Ke^{-rT} (1 - N(d_2))$  se añade la expansión:

$$P_0^{edge} = P_0^{BS} + w(x) \quad (7)$$

El valor de la opción de venta obtenido de la paridad *Put-Call* es consistente con la ecuación anterior.

### 3 UN CASO DE APLICACIÓN. ESTIMANDO LA VOLATILIDAD IMPLÍCITA: EL MODELO TRADICIONAL VERSUS EL EXPANDIDO

En este apartado se deriva la curva de volatilidad implícita producto de aplicar el modelo tradicional de Black-Scholes y la transformación de Edgeworth (ecuación 6). Para ello se emplea un método iterativo<sup>4</sup> a partir de suponer que la solución a la ecuación es igual al precio de mercado ( $C_t$ ) observado<sup>5</sup>. Se iteran los valores correspondientes a desvío ( $\sigma$ ); asimetría ( $\xi$ ); curtosis ( $\kappa$ ) y tipo sin riesgo ( $rf$ ). Las restricciones del modelo son<sup>6</sup>:  $C_t \geq 0$ ;  $\sigma \geq 0$ ;  $-0,8 \leq \xi \leq 0,8$ ;  $3 \leq \kappa \leq 5,4$ ;  $rf \geq 0$ . Se itera el modelo con la transformación definiendo con valor cero los momentos de orden superior, la volatilidad y la tasa libre de riesgo con su valor histórico y valor de referencia, respectivamente<sup>7</sup>. Obtenidos los valores implícitos de los momentos, se procede a iterar el clásico modelo de Black-Scholes. Los momentos de orden superior son definidos con valor  $\xi=0$ ;  $\kappa=3$  mientras que la volatilidad histórica y la tasa libre de riesgo se suponen al valor implícito obtenido precedentemente.

Para la aplicación del modelo que se presenta a continuación se tomó un contrato de opción de compra americana que no paga dividendos sobre la acción Grupo Financiero Galicia (GFGC), con vencimiento el 15 de junio del 2006, con tasa libre de riesgo BAIBAR del 8,90% efectivo anual. Los valores corresponden a la información suministrada al 27 de abril del 2012 por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC). Los valores correspondientes a los diferentes precios de ejercicio para el contrato son:

---

<sup>4</sup> Cuando se trabaja con datos, es posible resolver el modelo mediante la herramienta Solver del aplicativo Microsoft Excel ®.

<sup>5</sup> En todos los modelos donde se estimen implícitamente las variables se supone que los valores arrojados por el mercado son correctos.

<sup>6</sup> Las restricciones correspondientes a la asimetría y curtosis se obtienen considerando la zona de posibles valores nulos para la función (Baliero Filho, R. -Rosenfeld, R. 2004)

<sup>7</sup> Se toma la volatilidad histórica sobre las últimas 40 ruedas y como tipo libre de riesgo la tasa BAIBOR. Ambos parámetros son estimados y empleados en la determinación y publicación de valores teóricos para opciones financieras en el mercado argentino por el Instituto Argentino de Mercado de Capitales (IAMC)

Tasa BAIBAR	8,90%	Subyacente	\$ 2,98
días	49	Vol.His	38,68%
Sticker	Prima	Ejercicio	Call Teórico
GFGC2,60JU	\$ 0,4400	\$ 2,60	\$ 0,4420
GFGC2,80JU	\$ 0,3000	\$ 2,80	\$ 0,2920
GFGC3,00JU	\$ 0,1730	\$ 3,00	\$ 0,1770
GFGC3,20JU	\$ 0,0950	\$ 3,20	\$ 0,0990
GFGC3,40JU	\$ 0,0500	\$ 3,40	\$ 0,0510
GFGC3,60JU	\$ 0,0250	\$ 3,60	\$ 0,0240
GFGC3,80JU	\$ 0,0140	\$ 3,80	\$ 0,0110
GFGC4,00JU	\$ 0,0050	\$ 4,00	\$ 0,0040
GFGC4,80JU	\$ 0,0070	\$ 4,80	\$ -
GFGC8,00JU	\$ 0,0030	\$ 5,60	\$ -

Tabla 1: datos publicados por el IAMC al 27-4-2012. Opción de compra GFGC vencimiento 15-6-2012. El IAMC calcula el call teórico con el modelo BS, volatilidad histórica y Tasa BAIBAR (elaboración propia).

A continuación se presentan los resultados de aplicar iterativamente la ecuación 6. En la primera columna del cuadro se encuentran los contratos evaluados. La segunda presenta el precio de mercado de la opción de compra. La tercera y cuarta columna muestran los valores teóricos correspondientes a la ecuación 6. La restricción de valor de mercado se descompone entre el modelo BS y la expansión de Edgeworth. La quinta, sexta y séptima columnas presentan los valores intrínsecos correspondientes a la volatilidad, asimetría y curtosis de la ecuación 6. La octava columna presenta la volatilidad implícita propia de aplicar el tradicional modelo B-S. Finalmente, la novena columna presenta el tipo sin riesgo implícito.

Sticker	Observado	BS	Edgeworth	$\sigma$	$\xi$	$\kappa$	$\sigma(\text{BS})$	$rf(\text{anual})$
GFGC2,60JU	\$ 0,4400	\$ 0,440004	\$ -0,000004	38,41%	-0,00057789	3,00000000	38,61%	8,8821%
GFGC2,80JU	\$ 0,3000	\$ 0,299912	\$ 0,000088	41,13%	-0,00632591	3,00000000	41,17%	8,9919%
GFGC3,00JU	\$ 0,1730	\$ 0,173001	\$ -0,000001	38,03%	-0,00024215	3,00000000	38,22%	8,8863%
GFGC3,20JU	\$ 0,0950	\$ 0,095038	\$ -0,000038	38,10%	-0,00178163	3,00000000	38,22%	8,8913%
GFGC3,40JU	\$ 0,0500	\$ 0,049994	\$ 0,000006	38,80%	0,00047216	3,00000000	38,61%	8,9026%
GFGC3,60JU	\$ 0,0250	\$ 0,024936	\$ 0,000064	39,40%	-0,00418152	3,00000000	39,00%	8,9086%
GFGC3,80JU	\$ 0,0140	\$ 0,012579	\$ 0,001421	40,40%	-0,03741202	3,00000000	41,58%	8,9165%
GFGC4,00JU	\$ 0,0050	\$ 0,004366	\$ 0,000634	38,92%	-0,0137758	3,00000000	38,61%	8,9024%
GFGC4,80JU	\$ 0,0070	\$ 0,000270	\$ 0,006730	43,01%	-0,25026395	3,15701274	62,75%	8,9061%
GFGC5,60JU	\$ 0,0030	\$ 0,000003	\$ 0,002997	41,06%	-0,8000000	3,78034209	69,38%	8,9066%

Tabla 2: valores implícitos obtenidos del proceso iterativo correspondiente a la ecuación 6 (elaboración propia).

Para los contratos en el dinero, los valores de la volatilidad implícita  $\sigma$  y  $\sigma(BS)$  se asemejan. En estos casos, la asimetría  $\zeta$  y curtosis  $\kappa$  no tienen peso significativo en la estimación del valor. En todos los contratos con precio de ejercicio (\$2,60 a \$4) se presenta una leve asimetría negativa (-0.0005778 a -0.01377) y la curtosis se mantiene constante en 3,000. En el caso de los precios de ejercicio \$4,80 y \$5,60, los momentos superiores tienen peso en el valor, conforme se expone en la siguiente tabla:

Sticker	Observado	BS	Edgeworth	Edg/Valor
GFGC2,60JU	\$ 0,4400	\$ 0,440004	\$ -0,000004	-0,000909%
GFGC2,80JU	\$ 0,3000	\$ 0,299912	\$ 0,000088	0,029333%
GFGC3,00JU	\$ 0,1730	\$ 0,173001	\$ -0,000001	-0,000578%
GFGC3,20JU	\$ 0,0950	\$ 0,095038	\$ -0,000038	-0,040000%
GFGC3,40JU	\$ 0,0500	\$ 0,049994	\$ 0,000006	0,012000%
GFGC3,60JU	\$ 0,0250	\$ 0,024936	\$ 0,000064	0,256000%
GFGC3,80JU	\$ 0,0140	\$ 0,012579	\$ 0,001421	10,150000%
GFGC4,00JU	\$ 0,0050	\$ 0,004366	\$ 0,000634	12,680000%
GFGC4,80JU	\$ 0,0070	\$ 0,000270	\$ 0,006730	96,142857%
GFGC5,60JU	\$ 0,0030	\$ 0,000003	\$ 0,002997	99,900000%

Tabla 3: precio observado, componentes de la ecuación 6 (BS-Edgeworth) y relación expansión sobre valor (Edg/Valor) (elaboración propia).

El valor teórico de las opciones fuera del dinero se encuentra explicado mayoritariamente por el efecto de los momentos superiores, específicamente la curtosis. Esto es así debido a que el valor de las opciones fuera del dinero surge de valores extremos para el subyacente analizado. En este caso, el precio *spot* de la acción es de \$2,98, debiendo superar ejercicios de casi el doble del valor (\$4,80 y \$5,60).

Siguiendo con los resultados de la tabla 2, la volatilidad según el modelo clásico asciende a 62,75% y 69,38%, respectivamente. La volatilidad implícita obtenida de aplicar la ecuación 6 solamente asciende al 43,01% y 41,06% para los dos últimos contratos. En este caso, la asimetría-curtosis es de -0.25; 3.1570 y -0.8; 3.78. En el siguiente gráfico se expone la forma de la curva correspondiente a la volatilidad implícita.

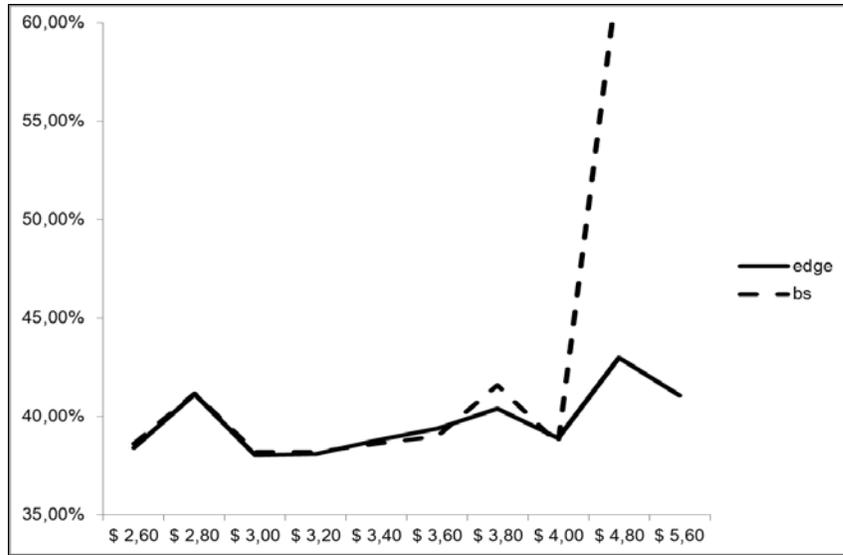


Ilustración 1: volatilidad implícita Black-Scholes (bs) y Edgeworth (edge) (elaboración propia).

En la ilustración se observa la mayor regularidad de la curva estimada con la transformación de Edgeworth, en relación con la curva del modelo tradicional. Esta situación es congruente con las afirmaciones que sostienen que la forma de sonrisa de la volatilidad implícita (extremos) es producto de la impureza del valor estimado. Este contiene los momentos de orden superior. La ecuación 6 depura asimetría y curtosis otorgando mayor estabilidad a la volatilidad. El tipo libre de riesgo estimado implícitamente se mantuvo en los rangos de la tasa publicada y observada en el mercado, independientemente del contrato.

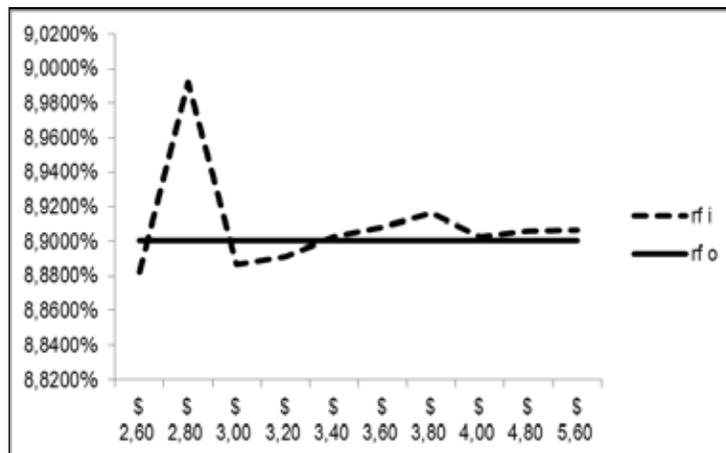


Ilustración 2: relación tasa libre de riesgo BAIBAR observada y tasa implícita (elaboración propia).

La siguiente tabla presenta el valor de los *put* equivalentes aplicando la paridad *put-call* a partir de la ecuación 6. Para las opciones de venta fuera del dinero a la fecha de la valoración (ejercicios \$2,60 y \$2,80), el valor estimado con el modelo es inferior al precio observado en el mercado, ajustando para las que se encuentran en el dinero (\$3,00 a \$3,40), mostrando un comportamiento que da la imagen especular a la opción de compra.

Sticker	Put (Paridad)	Observado	Diferencia	Dif/Obser
GFGP2,60JU	\$ 0,02918	\$ 0,06	\$ 0,03082	51,3635%
GFGP2,80JU	\$ 0,08640	\$ 0,10	\$ 0,01160	11,8332%
GFGP3,00JU	\$ 0,15742	\$ 0,17	\$ 0,01258	7,3977%
GFGP3,20JU	\$ 0,27703	\$ 0,28	\$ 0,00297	1,0604%
GFGP3,40JU	\$ 0,42961	\$ 0,45	\$ 0,02039	4,5318%

Tabla 4: valor opción de venta estimada aplicando la ecuación de paridad (ecuación 6); prima observada; diferencia observado-estimado; valor relativo diferencia sobre prima observada (elaboración propia).

#### 4 CONCLUSIONES

El modelo de solución cerrada es una alternativa para incorporar los momentos de orden superior a la ecuación de Black-Scholes. Los resultados obtenidos de su aplicación son los siguientes:

a. El valor de mercado se puede descomponer entre la valoración del modelo de BS y la participación en el valor de los momentos de orden superior capturados por la expansión de Edgeworth (ecuación 6). Para aquellos contratos en el dinero, el efecto de los sesgos y curtosis es mínimo. En cambio, para aquellos contratos en que el valor depende de eventos extremos (colas pesadas), la curtosis cobra relevancia en la estimación del valor (tabla 2 y 3).

b. La forma de la curva de volatilidad implícita en el modelo B-S sigue la clásica sonrisa, sobre todo porque en los contratos fuera del dinero el componente volatilidad es impuro, incorporando los momentos superiores. La curva de volatilidad implícita de la ecuación 6 indica que la volatilidad se mantiene en un rango estable; independiente del precio de ejercicio y vinculada con el comportamiento del subyacente (ilustración 1).

c. En las opciones con poca probabilidad de terminar en el dinero, el valor potencial se encuentra explicado mayoritariamente por los momentos de orden superior.

Estos resultados indican la necesidad de trabajar con modelos de valoración de opciones (financieros y reales) que incorporen los momentos de orden superior, sobre todo en aquellos casos de flujos de fondos esperados con valores positivos vinculados a eventos extremos o poco probables en términos de distribución normal. Esto puede darse en los casos de innovación tecnológica, de bienes intangibles de alto riesgo o para contratos de opciones con valor intrínseco negativo a la fecha de valuación.

## BIBLIOGRAFÍA

Baliero Filho; R.-Rosenfeld,R. (2004). Testing Option Pricing with Edgeworth Expansion. *Physica A: Statistical Mechanis an its Application*, Volumen 344, pp. 484-490.

Jarrow, R.-Rudd, A. (1982). Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, Volumen 10, pp. 347-369.

Rubinstein, M. (1998). Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives*, Issue 5, pp. 20-27.

Taleb, N. (2004). *Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and Markets*. New York: Random House.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.

