



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

**UTILIZACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS PARA LA
RESOLUCIÓN ECONÓMICA DE ELÁSTICAS, FRECUENCIAS
Y TEORÍA DE SEGUNDO ORDEN DE ENTRAMADOS DE
BARRAS, EN EL CONTEXTO DE LA INGENIERÍA
ESTRUCTURAL.**

HÉCTOR DANIEL MARTÍN

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2017

PREFACIO

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería durante el período comprendido entre el 30 de noviembre de 2009 y el 20 de agosto de 2016, bajo la dirección del Dr. Carlos Filipich y el Ing. Mario Maurizi.

.....

Héctor Daniel Martín

***UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR******Secretaría General de Posgrado y Educación Continua***

La presente tesis ha sido aprobada el/..../....., mereciendo la calificación de (.....)

Dedicado

A mis hijos Eluney, Nicolás y Erwin.

Agradecimientos

A toda mi familia.

Al Dr. Carlos Filipich, quien me aportó las ideas principales y en particular por su dedicación experta en la dirección de la tesis.

Al Ing. Mario Maurizi.

Al Departamento de Ingeniería de la UNS.

Al Consejo Directivo, Departamento de Ciencias Básicas, docentes y alumnos de la Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional, quienes me incentivaron y apoyaron permanentemente.

A los compañeros del grupo GRUDIM.

Al Gremio Docente de la UTN, FAGDUT Reconquista.

Resumen

Las investigaciones realizadas para la elaboración de la presente tesis involucran desarrollos con series de potencias enteras para abordar el estudio del comportamiento mecánico-estructural de pórticos planos abiertos y cerrados. Los estudios de la tesis se organizan en tres partes: una que contempla la búsqueda de las frecuencias naturales de los pórticos, otra que resuelve el comportamiento estático bajo diferentes condiciones de sollicitación/vínculo y finalmente la ampliación de los estudios de estática y determinación indirecta de cargas críticas empleando formulaciones de segundo orden.

La resolución de las ecuaciones gobernantes de los problemas estructurales se halla dentro del encuadre adoptado por la Teoría Clásica de Resistencia de Materiales. La metodología básica consiste en hallar la respuesta para cualquiera de los problemas propuestos, mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales gobernantes utilizando series de potencias enteras para describir los corrimientos axiales y transversales. Se evalúan las condiciones esenciales o geométricas para todas las barras que concurren a un nodo, así como el equilibrio del mismo y las condiciones de vinculación a tierra del entramado.

Bajo este marco de referencia, se han resuelto todos los problemas planteados con un muy reducido número de incógnitas en comparación a las utilizadas en el método de elementos finitos con la misma formulación unidimensional.

Se ha elaborado un código de cálculo basado en la metodología de esta tesis. Se comparan los resultados de esta investigación con los que brindan los programas comerciales de elementos finitos, lográndose, en algunos casos, sustanciales reducciones en el tiempo computacional para la misma calidad de respuesta. Este tipo de enfoques es de importancia gravitante para encarar estudios que requieran tiempo de cálculo masivo, como por ejemplo optimización estructural.

Abstract

The research performed to elaborate the present thesis involves the development of integer power-series in order to address the study of the structural mechanics behavior of open and closed frames. The studies of this thesis contemplate three parts: on one hand the search of natural frequencies in the dynamics of frames, on other hand the solution of the static behavior under different load/boundary conditions and finally, the extension of the studies about statics and the indirect determination of buckling loads employing second order formulations.

The resolution of the governing equations of the structural problems is enclosed in the context of the Classic Strength of Materials Theory. The basic methodology consist in the calculation of the response for all the proposed problems by solving the governing differential equations by using integer power series to describe the axial and transverse displacements. The essential or geometric conditions of all bars concurring to a given node are evaluated as well as the equilibrium at the node and the remaining boundary conditions of the whole frame.

Under this reference context, all the proposed problems have been solved employing a rather reduced number of unknowns in comparison to the ones used in the finite element method (FEM) with the same unidimensional formulation.

A calculation code based in the methodology of this thesis has been elaborated. A comparison of the results of the present investigation with the ones obtained by commercial programs based in the FEM has also been carried out. In some cases, a substantial reduction of calculation time has been achieved for the same response quality. This type of approaches is of crucial importance in order to carry out studies that require massive computational time as, for example, the structural optimization.

Índice general

| | |
|--------------------------------|------|
| Prefacio | i |
| Dedicado a | ii |
| Agradecimientos | ii |
| Resumen | iii |
| Abstract | iv |
| Índice general | v |
| Índice de figuras | x |
| Índice de tablas | xiii |

Capítulo 1: Objetivos y alcance de la tesis

| | |
|---|----|
| Introducción..... | 1 |
| Antecedentes..... | 2 |
| Objetivos generales..... | 8 |
| Relevancia y objetivos específicos del problema..... | 8 |
| Metodología..... | 10 |
| Justificación general de la metodología de trabajo..... | 11 |
| Resultados logrados..... | 11 |
| Organización de la tesis..... | 11 |

Capítulo 2: Vibraciones naturales de pórticos utilizando series de potencias

| | |
|--|----|
| Introducción..... | 13 |
| Planteo del problema..... | 14 |
| Estudio energético..... | 16 |
| Desarrollo en series de potencias..... | 21 |
| Condiciones de compatibilidad geométrica esenciales o primarias..... | 22 |
| Ecuaciones de compatibilidad geométrica, esenciales o primarias..... | 24 |

| | |
|--|----|
| Condiciones estáticas de equilibrio, naturales o secundarias en los nodos..... | 25 |
| Ecuaciones de equilibrio, naturales o secundarias en nodos | 33 |
| Condiciones de borde..... | 30 |
| Articulación doble..... | 34 |
| Articulación simple (o apoyo móvil) | 35 |
| Empotramiento | 36 |
| Cuasi – empotramiento | 36 |
| Ménsula | 37 |
| Vínculos elásticos | 38 |
| Vínculos simples inclinados | 42 |

Capítulo 3: Desarrollo y descripción del programa de cálculo de vibraciones

| | |
|--|----|
| Introducción..... | 45 |
| Cargado de datos del entramado..... | 45 |
| Cálculos iniciales | 46 |
| Análisis de las incógnitas | 48 |
| Casos especiales..... | 50 |
| Gráfico del entramado..... | 54 |
| Funciones..... | 54 |
| Programa. | 58 |
| Análisis de las condiciones de Equilibrio, Naturales o Secundarias | 59 |
| Cálculo de autovalores. | 59 |
| Método de bisección | 60 |
| Gráficos de las formas modales..... | 60 |

Capítulo 4: Ejemplos de cálculo de vibraciones naturales de entramados

| | |
|--------------------------------------|----|
| Introducción..... | 62 |
| Ejemplo 1 | 62 |
| Caso 1: Biarticulado | 64 |
| Caso 2: Articulado - empotrado | 65 |
| Caso 3: Empotrado-libre | 65 |

| | |
|---|----|
| Caso 4: Empotrado- empotrado | 66 |
| Caso 5: Empotrado en el nodo 6, con dos articulaciones inclinadas | 67 |
| Ejemplo 2 | 68 |
| Ejemplo 3 | 70 |
| Conclusiones..... | 73 |

Capítulo 5: Resolución de estática en entramados con series de potencias

| | |
|---|-----|
| Introducción:..... | 74 |
| Planteo del problema..... | 74 |
| Desarrollo en series de potencias..... | 78 |
| Condiciones de compatibilidad geométrica | 79 |
| Ecuaciones de compatibilidad geométrica | 80 |
| Condiciones estáticas de equilibrio en los nodos | 81 |
| Ecuaciones estáticas de equilibrio en los nodos | 82 |
| Análisis detallado de las ecuaciones de equilibrio cuando existen cargas puntuales aplicadas en los nodos | 83 |
| Condiciones de borde..... | 91 |
| Cedimiento de Vínculos | 91 |
| Vínculos con Carga..... | 92 |
| Otros elementos para la elaboración del programa..... | 93 |
| Cambio en el sentido de orientación de las barras..... | 93 |
| Signo de las cargas distribuidas en las barras..... | 95 |
| Proyección de cargas distribuidas en barras inclinadas | 95 |
| Articulaciones interiores al entramado | 97 |
| Programa de cálculo..... | 97 |
| Carga de datos | 98 |
| Cálculos iniciales: | 98 |
| Funciones de Cálculo: | 99 |
| Resultados finales: | 102 |
| Conclusiones y ventaja del método | 102 |

Capítulo 6: Ejemplos de estática de entramados utilizando series de potencias

| | |
|-------------------|-----|
| Introducción..... | 104 |
| Ejemplo 6.1..... | 104 |
| Ejemplo 6.2..... | 106 |
| Ejemplo 6.3..... | 109 |
| Ejemplo 6.4..... | 111 |
| Ejemplo 6.5..... | 113 |
| Ejemplo 6.6..... | 115 |
| Conclusiones..... | 118 |

Capítulo 7: Teoría de segundo orden en entramados

| | |
|---|-----|
| Introducción..... | 120 |
| Ecuaciones gobernantes del problema | 121 |
| Condiciones y ecuaciones estáticas de equilibrio en los nodos..... | 125 |
| Condiciones de borde | 127 |
| Programa de cálculo donde se considera la teoría de segundo orden..... | 127 |
| Búsqueda indirecta del estado crítico para algunos casos especiales | 128 |
| Caso 1..... | 128 |
| Ejemplo 7.1..... | 131 |
| Caso 2..... | 135 |
| Ejemplo 7.2..... | 135 |
| Caso 3..... | 137 |
| Ejemplo 7.3..... | 138 |
| Caso 4..... | 139 |
| Ejemplo 7.4..... | 140 |
| Solución elástica utilizando la teoría de segundo orden | 141 |
| Ejemplo 7.5..... | 141 |
| Conclusiones..... | 144 |

Capítulo 8: Comentarios finales

Conclusiones146
Producción científica.....147
Perspectivas futuras148

Apéndice

Diagramas de flujo149
Programa A.....149
Programa B.....150
Programa C.....150
Programa D.....151
Programa E.....152
Programa F.....153
Programa G.....154

Referencias155

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 2.1: Esquema general de un pórtico en estudio. | 15 |
| Figura 2.2: Ubicación de los ángulos en las barras..... | 15 |
| Figura 2.3: Desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j | 16 |
| Figura 2.4: Esquema de desplazamientos entre dos barras consecutivas..... | 23 |
| Figura 2.5: Esquema de 4 barras, dos ingresando (1 y 2) y dos saliendo del nodo (3 y 4), para el análisis de las expresiones de equilibrio en el nodo. | 26 |
| Figura 2.6: Esquema de las direcciones de 4 barras que concurren a un nodo, con las proyecciones de los esfuerzos Q y N para el análisis del equilibrio. | 30 |
| Figura 2.7: Esquema de esfuerzos positivos en una barra para el análisis del equilibrio. | 33 |
| Figura 2.8: Esquema de un Cuasi - empotramiento en barra. | 37 |
| Figura 2.9: Representación de un vínculo elástico | 38 |
| Figura 2.10: Representación de un vínculo simple inclinado un ángulo β | 42 |
| Figura 2.11: Representación de los esfuerzos y desplazamientos en el extremo de la barra j que posee un vínculo simple inclinado | 43 |
| Figura 3.1: Pórtico analizado con 6 barras y 6 nodos. Con vínculos a tierra ubicados en los nodos 1 y 6..... | 52 |
| Figura 4.1: Entramado analizado con 6 barras y 6 nodos. Los vínculos a tierra se encuentran ubicados en los nodos 1 y 6. Las coordenadas de los nodos en el sistema global en metros..... | 63 |
| Figura 4.2: Entramado analizado con 6 barras y 6 nodos. Gráfico que muestra el programa, para el caso doblemente articulado | 64 |
| Figura 4.3: Primeras dos formas modales del pórtico empotrado-libre, obtenidas utilizando series de potencias | 66 |
| Figura 4.4 Primeras 3 formas modales del pórtico empotrado - empotrado, obtenidas con series de potencias comparadas con gráficos del Software Algor [4]. | 67 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.5: Pórtico analizado con 18 barras y 12 nodos. Los vínculos a tierra se encuentran ubicados en los nodos 1 y 11 (articulaciones), los extremos 2 y 10 son libres. Las coordenadas de los nodos en el sistema global en metros..... | 69 |
| Figura 4.6: Entamado de 11 barras con dos articulaciones internas en la barra 10 en el nodo 2 y la barra 11 en el nodo 6. Con articulaciones a tierra en los nodos 1 y 9 | 71 |
| Figura 4.7: Entamado de 11 barras, dibujo que muestra el programa | 72 |
| Figura 5.1: Esquema general de un entramado con cargas concentradas en el nodo 5, transversales distribuidas en la barra 10 y axiales distribuidas en la barra 11. | 76 |
| Figura 5.2: Esquema de barras y esfuerzos en los nodos. | 86 |
| Figura 5.3: Esquema del cedimiento de vínculo en una articulación de la barra j | 91 |
| Figura 5.4: a) Extremo libre con esfuerzos aplicados, b) articulación doble con momento aplicado y c) Cuasi-empotramiento con fuerzas aplicadas. | 93 |
| Figura 5.5: Signo en las cargas distribuidas en forma transversal y axial. | 95 |
| Figura 5.6: Proyección de una carga distribuida sobre una barra. | 96 |
| Figura 5.7: Esquema de una barra con articulación interna al pórtico..... | 97 |
| Figura 6.1: Esquema de dos barras biarticuladas con una carga P en el nodo B | 105 |
| Figura 6.2: Diagramas de momentos que se han obtenidos con el presente método, con flecha $f = 0.5$ m y respectivamente con valores de área: a) 1.2 m ² , b) 0.05 m ² | 106 |
| Figura 6.3: Pórtico de 5 barras y 6 nodos, con articulaciones dobles en los nodos 1 y 6. Posee carga puntual en el nodo libre 3. a) Esquema con datos, b) grafico del pórtico resultante del programa..... | 107 |
| Figura 6.4: Gráficos de esfuerzo de corte y normal..... | 108 |
| Figura 6.5: Gráficos de momentos y deformaciones, obtenidos con series de potencias. ... | 109 |
| Figura 6.6: Diagramas obtenidos con series de potencias de: a) momentos, b) esfuerzo de corte, c) esfuerzo normal. | 110 |
| Figura 6.7: Entramado de 11 barras doblemente empotrado en los nodos 1 y 9, con las barras 9, 10 y 11 articuladas internamente al pórtico. | 111 |
| Figura 6.8: Gráficos de momentos, comparación con: a) los obtenidos utilizando el presente método y b) calculados con Método de Elementos Finitos, Algor [4]. | 112 |
| Figura 6.9: Gráficos obtenidos con el programa de esfuerzos de a) corte y b) normal. | 112 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.10: Marco cerrado biarticulado con carga uniformemente repartida $q(x)$ en la barra inferior, la número 4. | 114 |
| Figura 6.11: Diagramas de momentos obtenidos a) con el programa y b) con MEF [4]. .. | 115 |
| Figura 6.12: Diagramas de esfuerzo a) de corte y b) normal obtenidos con el programa. . | 115 |
| Figura 6.13: Pórtico abierto biarticulado con carga triangular distribuida en la barra 2. .. | 116 |
| Figura 6.14: Diagramas de a) momento flector, b) esfuerzo de corte y c) normal. | 117 |
| Figura 7.1: Barra empotrada libre para análisis del caso 1. | 129 |
| Figura 7.2: Columna empotrada con carga en voladizo..... | 131 |
| Figura 7.3 Gráficos de esfuerzos: momento, corte y normal, resuelto con series de potencia para $P = 4.8756 \times 10^7$ N [1]..... | 133 |
| Figura 7.4 Desplazamiento horizontal del nodo superior para valor de carga P: a) menor a la carga crítica, b) superada la carga crítica [1]..... | 134 |
| Figura 7.5 Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica [1]..... | 134 |
| Figura 7.6 Pórtico biempotrado con cargas puntuales. | 136 |
| Figura 7.7 Diagramas de momento, corte y normal [1]. | 136 |
| Figura 7.8 Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica. | 137 |
| Figura 7.9 Pórtico biarticulado con cargas puntuales en la viga superior. | 138 |
| Figura 7.10 Marco cerrado. | 139 |
| Figura 7.11 Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica en el marco cerrado [1]. | 140 |
| Figura 7.12 – Entramado de 10 barras con cargas puntuales y repartidas. | 141 |
| Figura 7.13 – Diagrama de momentos para el caso 2 con $f = 100$ [1]..... | 144 |

Índice tablas

| | |
|--|-----|
| Tabla 3.1: Relaciones entre los coeficientes de los desarrollos en series de Potencias y las correspondientes derivadas de v y u para una barra k . | 49 |
| Tabla 3.2: Coeficientes de la serie de Potencia marcados como incógnita en la barra k en caso de poseer vinculación a tierra. | 50 |
| Tabla 4.1: Resultados de frecuencias naturales en hertz, obtenidos al analizar el pórtico biarticulado con series de potencias de grados 10, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4] y en el programa de elementos finitos desarrollado por De Rosa [44]. | 64 |
| Tabla 4.2: Resultados obtenidos al analizar el pórtico articulado - empotrado con series de potencias de grados 10, 15, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4]. | 65 |
| Tabla 4.3: Resultados obtenidos al analizar el pórtico empotrado - libre con series de potencias de grados 10, 15, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4]. | 65 |
| Tabla 4.4: Resultados obtenidos al analizar el pórtico empotrado - empotrado con series de potencias de grados 10, 15 y 20, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4]. | 66 |
| Tabla 4.5: Resultados obtenidos al analizar el pórtico con un empotramiento en el nodo 6 y dos articulaciones inclinadas en los nodos 1 y 4, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4]. | 68 |
| Tabla 4.6: Resultados obtenidos al analizar el entramado de 18 barras y 12 nodos, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en Algor [4]. | 69 |
| Tabla 4.7: Resultados obtenidos al analizar el pórtico con articulaciones internas, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en Algor [4]. | 72 |
| Tabla 6.1: Valores de momentos (Nm) para diferentes secciones transversales de las barras y distintos valores de la flecha f . | 106 |
| Tabla 6.2: Resultados de esfuerzo de corte y normal obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con los obtenidos en Leontovich [56]. | 108 |
| Tabla 6.3: Resultados de esfuerzo de corte y normal obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con los obtenidos en [56]. | 111 |

| | |
|---|-----|
| Tabla 6.4: Valores de momentos, esfuerzo de corte y normal obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con los obtenidos en con MEF, Algor [4]..... | 113 |
| Tabla 6.5: Valores de momentos (Nm) en los nodos y máximo momento en la barra 4, obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con MEF, Algor [4]..... | 114 |
| Tabla 6.6: Valores de momentos (Nm) en los nodos, esfuerzos de corte (N) y normal (N) en la barras, obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con la bibliografía [56]. | 118 |
| Tabla 7.1 – Resultados obtenidos de tiempo de cálculo, desplazamientos y momentos en el nodo 3, para el Caso 1 de cargas..... | 142 |
| Tabla 7.2 – Resultados obtenidos de tiempo de cálculo, desplazamientos y momentos en el nodo 3, para el Caso 2 de cargas..... | 143 |

Capítulo 1

OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA TESIS

Introducción

Motiva al autor de la presente tesis encauzar una investigación exhaustiva destinada a obtener desarrollos intrínsecos de sistemas cerrados aporricados planos, aplicando series de potencias enteras. En los mismos, se impone la automaticidad de las condiciones geométricas de continuidad y de equilibrio de esfuerzos característicos en los nodos, en los cuales acceden dos o más barras.

Es bien conocida la problemática de las ingenierías que utilizan los denominados entramados de barras -tanto de comportamiento plano como espacial- y que emplean desde hace varias décadas los programas del método de rigidez, que dividen el dominio en pequeños elementos, y que implican la adopción de incógnitas cinemáticas en la unión nodal de dos o más barras.

Sin embargo estos programas - por ejemplo MEF- deben subdividir cada tramo recto, frente a soluciones no algebraicas como son las de vibraciones naturales y teoría de segundo orden. Esto conlleva, en general, un importante aumento de las incógnitas del problema.

La tesis aborda el estudio del comportamiento mecánico-estructural de los pórticos abiertos y cerrados, identificando las variables que influyen en las respuestas ante las acciones estáticas y dinámicas y el planteo y resolución de las ecuaciones gobernantes del problema, siempre dentro del encuadre adoptado por la Resistencia de Materiales clásica y orientado principalmente a la automatización de la herramienta, como se verá con un reducidísimo número de incógnitas.

Se adiciona además, la resolución de los problemas hiperestáticos por medio de la teoría de segundo orden -las cargas de punta debido a la deformación transversal modifican la acción flexional- problemática que no está, en general, incorporada en los programas comerciales tradicionales. Se sistematiza para entramados arbitrarios por medio de series de

potencias. Cabe añadir que, con esta teoría de segundo orden, fijando la relación de las cargas de punta con una carga de comparación, es posible entonces, indirectamente y cuando las deformaciones crezcan indefinidamente, hallar la denominada carga crítica.

En el tratamiento del programa que se desarrolla y en los estudios analíticos realizados se utilizó el programa de Matemática Simbólica Mathematica [1].

Antecedentes

Se pretende expresar en esta sección una breve reseña de los antecedentes históricos, alentado por la frase del gran filósofo, científico e historiador alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), “el conocimiento de la Historia resulta beneficioso, desde que no solo otorga su justa dimensión a los hombres del pasado, sino que además provee a los hombres del presente, una guía para orientar su esfuerzo” [2, 100].

En la actualidad, es práctica usual la aplicación de métodos aproximados de análisis superior, como el método de variaciones, método de las mallas y el uso de series. Lógicamente, el Método de Elementos Finitos (MEF), indiscutiblemente, es uno de los más extendidos y exitosos utilizados [3-5].

Las series de potencias abarcan un contexto más general, porque no es única su aplicación a entramados, se utilizan desde hace mucho tiempo en la resolución de ecuaciones diferenciales. A continuación se realiza una breve recopilación de algunos trabajos, analizados por el tesista, referentes a la utilización de esta solución en problemas especiales de la ingeniería estructural.

Las series de potencia han sido empleada para problemas de borde y de condiciones iniciales, aun fuertemente no lineales [6-11], con resultados altamente satisfactorios.

Los autores proponen en [6] las series de potencias enteras, como alternativa para encontrar las frecuencias naturales de vibración y las formas modales en pórticos planos, poligonales abiertos. Concluyendo en que el número de incógnitas es solamente tres, para cualquier tipo de vinculación del pórtico.

En [7] se utilizan las series de potencias enteras para abordar el problema del pandeo de pórticos planos, llegando a conocer las cargas críticas para las cuales se inestabiliza el sistema, o bien cuando el equilibrio estable se transforma en inestable.

En [8] se hallan las ecuaciones de movimiento para una barra gruesa homogénea de directriz circunferencial y sección transversal constante con al menos un plano de simetría que contiene al arco. Los valores de las frecuencias naturales surgen de solucionar un sistema diferencial en los tres corrimientos básicos que se abordan por medio de series algebraicas.

En [9] se estudian las barras compuestas empesilladas determinando sus frecuencias naturales. Se aborda la simulación de las formas modales por medio de las series de potencias.

En [10] se hallan las frecuencias naturales de arcos de diversas formas, secciones y vinculaciones, resolviendo por medio de recurrencias los coeficientes de la solución en forma de series de potencias de la ecuación diferencial que gobierna el problema. Se anula un determinante de 3×3 que proviene de las ecuaciones de borde en uno de los extremos, se muestran también las formas modales.

En noviembre de 2004, en el Congreso de Mecánica computacional se presentan tres trabajos [11, 12, 66].

Las vigas Vierendeel son de uso divulgado en la ingeniería estructural, en [11] los autores han estudiado el comportamiento de dichas vigas utilizando las series de potencias enteras.

Se presenta una solución en serie de potencias por medio de un algoritmo sistemático de recurrencia en [12], que permite analizar la inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados. Se muestra la ventaja de simular con precisión arbitraria la forma modal trascendente de cada tramo, aún con variación continua de sección.

En [66] los autores utilizan las series de potencias para el estudio de la inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos.

En el 2005 [13], los autores extienden el uso de las series de potencias en una dimensión, a través de un método variacional directo, con la utilización de series de potencias en 2 dimensiones. Se resuelven problemas planos de inestabilidad del equilibrio (abolladura), donde a los dominios planos rectangulares cargados, se les agrega refuerzos parciales arbitrarios que incrementan la carga crítica.

En el trabajo [14] se analizan algunos problemas no lineales de mecánica utilizando soluciones analíticas, utilizando series algebraicas. Manipulando previamente las ecuaciones logran convenientes algoritmos de recurrencia.

En los últimos 10 años se han presentado varias investigaciones en el cálculo de pórticos utilizando diversos métodos. Se realiza continuación una breve recopilación de los mismos.

En el trabajo [101] se aborda el problema de las vibraciones de los pórticos a dos aguas, calculando las frecuencias naturales, aplicando el método de transformada diferencial (DTM). En el mismo, se presta especial atención a la derivación de las ecuaciones diferenciales gobernantes junto con las condiciones de borde y compatibilidad del problema.

En [102] basándose en la solución general para la ecuación homogénea gobernante para el análisis lineal de pandeo de la viga de Euler, se construyen nuevas funciones de forma y se presenta un nuevo elemento finito. Se logra demostrar que el elemento finito convencional es una aproximación del elemento propuesto.

En el artículo [103] se analizan las características de vibración de un pórtico formado por viga y columna, ejemplos típicos de los cuales se encuentran a menudo en muchas estructuras arquitectónicas. En el análisis dinámico se tienen en cuenta los desplazamientos axial y longitudinal de las vigas. Como resultado se obtienen, a partir de expresiones matemáticas, las frecuencias naturales y las formas modales.

En el trabajo [104] se da una solución analítica para el estudio de las vibraciones en el plano de entramados utilizando ondas. Las vibraciones se describen como ondas que se propagan a lo largo de un elemento estructural uniforme y se reflejan y transmiten a las discontinuidades, como ser las articulaciones estructurales.

En el artículo [105] los autores extienden un estudio anterior, sobre soluciones exactas de problemas de vibración axial de barras elásticas, a análisis dinámicos de estructuras aporticadas elásticas. Logran encontrar soluciones exactas para la vibración libre y los análisis armónicos para casos no triviales. Se construyen nuevas funciones de forma para el campo de desplazamiento transversal utilizando las ecuaciones gobernantes homogéneas, luego formulan un nuevo elemento viga. El estudio ilustra que el rendimiento del elemento en el análisis dinámico puede ser mejorado incluyendo el efecto de la fuerza de inercia del elemento sobre las funciones de la forma.

Los autores en [106] proponen que, en el análisis dinámico exacto de los entramados planos, debe considerarse el efecto de la distribución de la masa en los elementos viga, esto se logra utilizando el método de rigidez dinámica.

En [107] se desarrolla un programa de elementos finitos para el análisis no lineal de pandeo y vibración de estructuras elásticas delgadas con conexiones semirrígidas. Los autores prestan especial atención a la influencia de la precarga estática en las frecuencias

naturales y formas modales, relaciones no lineales de frecuencia-amplitud y curvas de resonancia. Analizan tres sistemas estructurales con importantes aplicaciones prácticas: un pórtico en L, un arco poco profundo y un entramado con techo inclinado. Los resultados ponen de manifiesto la importancia de la precarga estática y la rigidez de las conexiones semirrígidas en las características de pandeo y vibración en este tipo de estructuras.

En el artículo [108] los autores analizan las vibraciones en entramados planos. Se optimizan las matrices estructurales de rigidez y de masa para obtener mejor rendimiento en el estudio de vibraciones naturales del pórtico. Las matrices obtenidas se parametrizan fácilmente debido a su estructura simple. En este estudio se implementan ambos elementos vigas: Bernoulli-Euler y Timoshenko.

El estudio presentado en [109] los autores utilizan la matriz de rigidez dinámica, para vigas Timoshenko, considerando la inercia rotatoria y la deformación por corte, para obtener la solución exacta del problema de vibración libre de pórticos planos. Obtienen las frecuencias naturales y las formas modales de vibración para diferentes combinaciones de condiciones de contorno y distintas disposiciones de las barras.

El autor en [110] realiza el análisis de vibración libre de marcos planos adosados de una sola planta. Obtiene una solución analítica exacta. Las vibraciones se describen como ondas que se propagan a lo largo de elementos estructurales uniformes y se reflejan y transmiten en discontinuidades estructurales. Tiene en cuenta los efectos de acoplamiento entre la flexión y las vibraciones longitudinales. En los ejemplos presentados se obtienen las frecuencias naturales y las formas modales.

En el trabajo [111] se estudia el fenómeno de pandeo utilizando el método de elementos de cuadratura en entramados planos. Este método comienza con la aproximación de los integrandos en la formulación variacional de un problema. No se fijan ni los nodos ni el número de nodos en un elemento en cuadratura, se ajustan de acuerdo a la necesidad de convergencia. Se muestra que el método propuesto es adecuado para el análisis de pandeo de estructuras planas con secciones transversales variables o constantes.

En el estudio [112] se presenta el análisis de post pandeo en un pórtico espacial semi-rígido elasto-plástico con rotación finita. Los elementos son de secciones transversales simétricas y con uniones semirrígidas. Se considera el efecto de las fuerzas axiales sobre el momento flector y el pandeo lateral. Se tienen en cuenta las ecuaciones eulerianas para una

viga-columna con rotación finita. Los efectos de inclinación, se adoptan para un sistema elástico y luego son extendidos a un sistema inelástico con el concepto de bisagra de plástico. Se realizan análisis de pandeo no lineal y pandeo elasto-plástico para el pórtico espacial, a los fines de demostrar el potencial del método desarrollado en términos de precisión y eficiencia.

Los autores del trabajo [113] analizan el pandeo de pórticos de acero con miembros cónicos y conexiones flexibles. El método se basa en encontrar las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales gobernantes para la estabilidad de un pórtico con elementos de sección doble T. Para varios casos particulares, comúnmente utilizados, se estudian las influencias de diferentes variables. Entre ellas: el factor de forma, la relación de conicidad, la relación de luz, la flexibilidad de las conexiones, las restricciones elásticas de rotación y traslación en la carga crítica, además del correspondiente coeficiente de longitud efectiva equivalente.

La aproximación al pandeo utilizada en [114] es aquella en la que se incrementa la carga y se controla el determinante de la matriz del sistema. En este trabajo se analizan con elementos finitos el pandeo de pórticos y vigas. Las ecuaciones de equilibrio no lineal se resuelven usando el método de Newton-Raphson y se presenta un buen número de ejemplos.

En el artículo [115] se estudia un modelo analítico para la respuesta dinámica de pórticos formados por viga y columna, solicitados por excitaciones impulsivas del terreno. Se propone un modelo simplificado que incorpora un elemento viga-columna con adición de masa concentrada y resortes en los extremos de los miembros para facilitar la interacción entre las respuestas dinámicas globales y locales. Para tener en cuenta la deformación por corte y la inercia rotativa, el modelo se formula utilizando la teoría de viga de Timoshenko.

En el trabajo [116] se presenta el análisis dinámico de los entramados planos de Timoshenko utilizando masa distribuida. El método de rigidez dinámica es el método exacto para el análisis dinámico de pórticos planos usando el sistema de coordenadas continuas para considerar el efecto de masas distribuidas en elementos viga. El método de rigidez dinámica puede crear algunos modos nulos donde las uniones del elemento viga tienen deformación nula. Los autores proponen el esquema de nodo interior flotante para eliminar los modos nulos de vibración flexional en los pórticos de Timoshenko.

Los autores del artículo [117] utilizan un enfoque variacional en los problemas de valores de contorno en el comportamiento dinámico de pórticos. Se analizan pórticos de dos y tres barras, con miembros inclinados y con puntos extremos e intermedios elásticamente restringidos. Determinan las frecuencias propias exactas y las formas modales en el caso de vibraciones libres.

En [118] se estudia el problema del cálculo de las frecuencias naturales de vigas con múltiples grietas y pórticos con vigas agrietadas. Las frecuencias naturales se obtienen utilizando un nuevo método en el que se utiliza un modelo de resorte rotacional que representará las grietas. Para las vigas, las matrices de rigidez dinámica de cuarto orden se obtienen de manera recursiva, de acuerdo al número de fisuras, aplicando la eliminación Gaussiana. Luego se ensambla la matriz de rigidez dinámica global de un pórtico con múltiples elementos agrietados.

Se desarrolla en [119] un modelo de elementos finitos para el análisis de pandeo en entramados. El modelo está basado en elementos de cáscara que agrega imperfecciones geométricas y el comportamiento semi-rígido de las uniones. Las imperfecciones geométricas se incorporan desplazando los nodos del modelo según las formas modales de pandeo. Los resultados se validan con cuatro ensayos a escala real y se obtienen las estadísticas de incertidumbre del modelo.

En [120] se investiga la resistencia al colapso sísmico de los pórticos de acero equipados con amortiguadores viscosos superelásticos a través del análisis dinámico incremental. Estos amortiguadores viscosos superelásticos son dispositivos de control pasivo híbrido que combinan estratégicamente un dispositivo viscoelástico y cables en paralelo, fabricados de aleación con memoria de forma.

En el artículo [121] los autores presentan un procedimiento numérico preciso y eficiente para evaluar la fiabilidad de las estructuras de pórticos de acero con uniones semirrígidas. La resistencia y el comportamiento final del pórtico se predicen usando un modelo de bisagra de plástico refinado, debido a su eficiencia computacional. El comportamiento no lineal de las conexiones semirrígidas fue capturado utilizando un modelo de potencia de tres parámetros.

En el diseño de pórticos de acero, el efecto de segundo orden normalmente se tiene en cuenta por el empleo del análisis elástico de segundo orden, para calcular las deformaciones

y las acciones internas en el pórtico. Los pórticos compuestos por elementos con delgadas secciones transversales pueden pandear en forma local o distorsionar previamente antes de llegar al estado límite. En el artículo [122], se estudian los efectos secundarios adicionales causados por el desarrollo del pandeo local. Se emplean elementos de viga unidimensionales independientemente de si las secciones transversales de miembros son esbeltas o no lo son.

Objetivos generales

Atento a lo expresado anteriormente, los objetivos generales de esta tesis son:

- 1- Abordar el estudio del comportamiento mecánico-estructural de los pórticos abiertos y cerrados, identificando las variables que influyen en las respuestas ante las acciones estáticas y dinámicas. Luego, el planteo y resolución de las ecuaciones gobernantes del problema, siempre dentro del encuadre adoptado por la Resistencia de Materiales clásica, orientado principalmente a la disminución de incógnitas del problema y a la automatización de la herramienta que motiva esta tesis.
- 2- Recurrir a distintas estrategias para la obtención de las soluciones a través de enfoques numéricos por medio de las correspondientes simulaciones computacionales.
- 3- Ampliar las soluciones y algoritmos conocidos para pórticos abiertos a entramados generales, entendiéndose como tales aquellos donde un número arbitrario de barras concurren a un mismo nodo.
- 4- Desarrollar propuestas automatizadas enfocadas hacia una economía computacional, sin pérdida de precisión, comparándolas con los programas comerciales de rigidez o elementos finitos utilizados actualmente.
- 5- Propender a que los cuatro ítems previos puedan incorporarse como recomendaciones para todos aquellos profesionales que desarrollan su actividad en dichas ramas de la Ingeniería Estructural.

Relevancia y objetivos específicos del problema

Los nuevos conocimientos y las tecnologías se transforman incesantemente, siendo motivo de correlativas profundizaciones de las investigaciones teóricas. Por su parte el cálculo, también sujeto a evolución continua, se ve influenciado por el auxilio de las computadoras, que ha comportado la obsolescencia de muchos procedimientos de análisis numérico y el

florecer de un gran número de estudios sobre métodos más generales e idóneos para la concreción de los programas y de sus sucesivas elaboraciones. Pero a propósito, ocurre sustraerse a la fácil sugestión de atribuir a las computadoras una capacidad que éstas no poseen. Más aún, es oportuno no perder de vista la importancia que el cálculo directo y su ejercicio significan en los problemas de las ingenierías, que entre otros es aquello que la mayor parte de los ingenieros deben entender: en la formación de la sensibilidad hacia los tamaños y magnitudes de las sollicitaciones y dimensiones, en las mediciones de máxima para la elección de las soluciones más oportunas, en el afinamiento del espíritu crítico, indispensable, porque finalmente espera al ingeniero fijar los datos de partida, recoger y evaluar los resultados de las elaboraciones numéricas, analizándolos en una obra de síntesis y revisión general, siempre necesaria antes de pasar a la fase de ejecución.

Ahora bien, dentro del abordaje específico del problema, y como colofón del párrafo previo, al afrontar la estática, estabilidad, dinámica y teoría de segundo orden para la resolución de entramados generales de barras, como se dijo, se recurrirá a la aplicación sistemática de soluciones numéricas dentro de una propuesta en series de potencias enteras. Estas alternativas no demasiado difundidas tienen la virtud de un análisis más ingenieril que la fría utilización de los programas enlatados. En cualquiera de las dos, aplicando lo que suele conocerse como condiciones de transferencia, es decir, la continuidad geométrica y el simultáneo equilibrio de los nudos, se consigue una particularidad muy destacable que es la reducción sustantiva del número de incógnitas a manejar. En efecto, al aplicar las condiciones precitadas, de alguna manera, se van resolviendo las distintas barras en un circuito seleccionado. Entonces se produce una economía de manipulación algebraica y correspondientemente una economía de tiempo computacional. Éste es como se dijo, junto con la automatización del proceso, el objetivo principal de la propuesta aquí presentada.

Por otra parte, y para fijar ideas, en el problema de la búsqueda de frecuencias naturales de un entramado, la ecuación corresponderá a la nulidad de un determinante característico que es función no lineal de las mismas. Sin embargo, el orden de dicho determinante será siempre relativamente muy pequeño respecto del hallado por métodos tradicionales, por ejemplo MEF [3-5], donde la ecuación característica corresponde al problema lineal clásico de autovalores, pero el orden de la matriz es, en general, notablemente superior al que nos ocupa.

En el desarrollo de la tesis se recopila la aplicación de las series de potencias en el estudio de pórticos planos poligonales abiertos [6], con un número arbitrario de tramos para partir de una base conocida y numéricamente comprobada. Se amplía a la misma tipología estructural al problema de compresión excéntrica de segundo orden.

Logrado esto, se propone entonces automatizar el cálculo en pórticos cerrados y entramados cualesquiera, con las mismas herramientas analíticas.

Metodología

La metodología básica consiste en, conocidas las formas de los corrimientos axiales y flexionales, hallar la respuesta para cualquiera de los problemas previamente consignados, mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales gobernantes por una propuesta en series de potencias enteras. Con este fin, se plantean las condiciones esenciales o geométricas para todas las barras que concurren a un nodo, el equilibrio del mismo y las condiciones de vinculación a tierra del entramado.

El artificio que simplifica la metodología desarrollada es que cada barra tiene una respuesta en función de constantes arbitrarias de integración que permite, evidentemente, determinarlas bajo condiciones arbitrarias de vinculación y que van surgiendo consecutivamente al movernos en alguna secuencia sobre los nodos que conforman el entramado que nos ocupa. Esto conduce a que solamente se tendrán incógnitas desconocidas en un número relativamente bajo, sea el problema homogéneo o no. Este número de incógnitas depende, por un lado de los grados de vinculación a tierra que nuestro pórtico bajo estudio contiene y por otro lado de la cantidad de barras que concurren a cada nodo, esto es, si son solo dos barras concurrentes, la cantidad de incógnitas no aumenta, si son más de dos se adicionan tres incógnitas por cada barra que se agrega al nodo.

Lo dicho está totalmente perfeccionado desde hace tiempo, para entramados abiertos de forma arbitraria. En el presente desarrollo se ha buscado, optimizar el tiempo computacional, y a la vez, concretar y extender la misma metodología a entramados generales.

Justificación general de la metodología de trabajo.

La motivación consiste en suministrar al diseñador estructural, tanto de las Ingenierías Aeronáuticas, Civil como Mecánica, un procedimiento accesible, económico y directo que facilite la búsqueda de esfuerzos, frecuencias y deformaciones en entramados estructurales de uso difundido en dichas especialidades. No es misión de este desarrollo “competir” con la marcada potencialidad de Elementos Finitos, método enormemente difundido y optimizado durante las últimas décadas y que continúa, sino presentar una alternativa más económica y más intuitiva para los ingenieros estructuralistas y con utilidad aceptable entre los profesionales que utilizan a diario estas herramientas y que por supuesto, las novedades no podrían nacer dentro de un gabinete de ingeniería sino a través de una tarea de investigación como la que realiza un tesista. Ciertas comparaciones de tiempo computacional serán incluidas y se inferirá la ventaja de la metodología presentada.

Resultados logrados

- 1- Se concreta un programa que automatiza la resolución de entramados generales, por medio de alternativas de solución no utilizadas en los programas comerciales de uso cotidiano.
- 2- Respuesta estática, con teorías de primero y segundo orden, y frecuencias naturales.
- 3- Comparación de resultados con métodos reportados en la bibliografía o por programas comerciales.

Organización de la tesis

En lo que respecta a la redacción y ordenamiento de la presente tesis, ha sido de gran ayuda los consejos de Godoy [15].

El orden lógico para el cálculo completo de un entramado plano, debería ser, en primer lugar la estática, y luego indistintamente pasar a la dinámica o al equilibrio con teoría de segundo orden.

En la presente tesis, la organización no es la mencionada, sino que, por lo que se justifica luego, es la siguiente: primero se realiza el estudio de la dinámica, hallando las frecuencias naturales de vibración del pórtico, luego se pasa a la estática de primer orden, calculando los esfuerzos en las barras y finalmente al estudio del equilibrio, con el estudio de segundo orden, obteniendo las cargas que conducen a la inestabilidad del entramado.

Este reordenamiento responde a la sencilla razón de que el programa central que recorre el entramado, lo realiza en una sola pasada para el cálculo de las vibraciones naturales, mientras que lo debe realizar 3 veces para el cálculo estático y entra en un proceso iterativo en el cálculo del equilibrio. De allí la justificación del ordenamiento en los capítulos, el mismo que se adopta al realizar los estudios para la elaboración de los programas.

Capítulo 1: Introducción

Capítulos 2, 3 y 4: Vibraciones en entramados cerrados: desarrollo de la teoría, programa elaborado utilizando series de potencias, ejemplos y conclusiones.

Capítulos 5 y 6: Estudio estático de entramados cerrados: desarrollo de la teoría, ejemplos y conclusiones.

Capítulo 7: Estudio del equilibrio con teoría de segundo orden en entramados cerrados, teoría, ejemplos y conclusiones.

Capítulo 8: Comentario finales sobre la tesis, conclusiones, presentaciones en eventos científicos de los resultados y perspectivas futuras de investigación.

Capítulo 2

VIBRACIONES NATURALES DE PÓRTICOS UTILIZANDO SERIES DE POTENCIAS

Introducción

En el presente capítulo se muestra de que manera, utilizando desarrollos de series de potencias, se simulan las formas modales trascendentes de los tramos de un pórtico y se calculan las frecuencias naturales de vibración [16], con la aproximación deseada al elegir la potencia máxima de la serie.

Este método tiene la ventaja que solamente es necesaria plantear la continuidad geométrica y estática en cada nodo. El número total de incógnitas es muy bajo y, en general, depende de la cantidad de vínculos a tierra y del número de barras que llegan a los nodos [6-10].

Imponiendo el cumplimiento de los sistemas diferenciales, se sistematizan los algoritmos de recurrencia al utilizar los desarrollos en series de potencias, en la resolución de las ecuaciones diferenciales.

El problema de vibraciones naturales de pórticos es de tipo lineal y para resolverlo, habitualmente, con elementos finitos, se divide cada tramo en elementos con aproximación algebraica [3-5]. Con el fin de obtener mayor precisión, normalmente se aumenta el número de elementos y consecuentemente el número de incógnitas. El uso de series de potencias para simular la forma modal de cada tramo sin aproximaciones, es decir, con precisión arbitraria, tiene la ventaja que sólo exige, en nodos de tramos consecutivos la continuidad estática y geométrica [6]. Se define precisión arbitraria o bignum (por big number, "número grande" en inglés) como "un método que permite la representación, en un programa de computación,

de números ya sean enteros o racionales con tantos dígitos de precisión como cuanto sea deseado y además posibilita la realización de operaciones aritméticas sobre dichos números”, (www.es.wikipedia.org/wiki/Precisi3n_arbitraria).

Planteo del problema

En la Figura 2.1 se muestra un pórtico plano cerrado, referido a un sistema de coordenadas de referencia X-Y. La nomenclatura utilizada es la siguiente:

nb es la cantidad total de barras.

nn es el número total de nodos.

j es el subíndice que denota la barra, $j = 1, 2, \dots, nb$.

n es el subíndice que denota el nodo, $n = 1, 2, \dots, nn$.

La numeración de las barras y los nodos puede realizarse arbitrariamente, ver Figura 2.1, ya que como parte de la investigación, se ha diseñado un algoritmo que las reenumera convenientemente. El mismo se explicará luego con detalles en un apartado especial.

Las características de cada barra son las siguientes:

E_j Módulo de Young de la barra j .

ρ_j Densidad uniforme de la barra j .

F_j Área de la barra j .

J_j Momento de Inercia de la barra j .

α_j Ángulo entre la barra j y el eje de abscisas.

$\alpha_{j,k}$ Ángulo relativo entre la barra j y la barra k (ver Figura 2.2).

a_j Longitud de la barra j .

X-Y Sistema de coordenadas globales.

x_j Coordenada local de la barra j .

Las unidades que se emplean son las que seleccione cada usuario, en los ejemplos que se muestran en la presente tesis, en los próximos capítulos, se ha utilizado el sistema MKS.

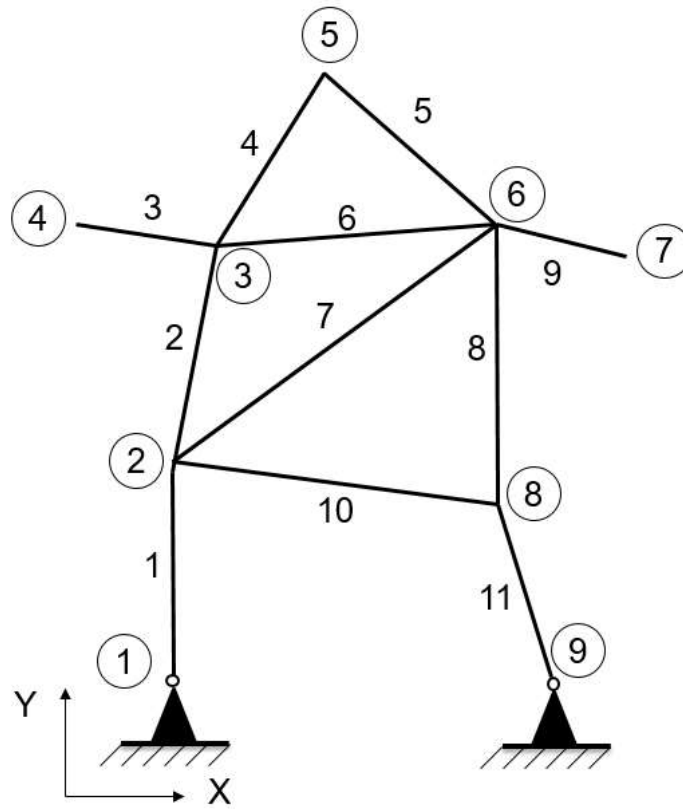


Figura 2.1: Esquema general de un pórtico en estudio.

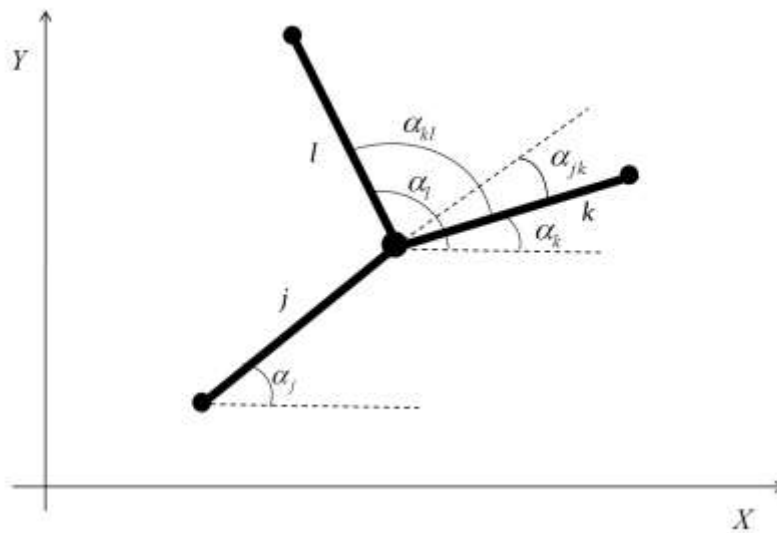


Figura 2.2: Ubicación de los ángulos en las barras.

Los datos necesarios para poder realizar el proceso son: las coordenadas globales de los nodos, el nodo inicial y final de cada barra, las características geométricas (área e inercia) y mecánicas (módulo de Young, densidad) de cada barra. Con las coordenadas globales final e inicial de los nodos de cada barra j se calculan los incrementos ΔX_j y ΔY_j . Luego se comienza calculando las constantes geométricas de las barras; longitud a_j y ángulos relativos $\alpha_{j,k}$:

$$a_j = \sqrt{\Delta X_j^2 + \Delta Y_j^2} \quad (2.1)$$

$$\cos \alpha_j = \frac{\Delta X_j}{a_j} \quad \text{sen} \alpha_j = \frac{\Delta Y_j}{a_j} \quad (2.2a, b)$$

$$C_{j,k} = \cos(\alpha_{j,k}) = \cos(\alpha_j - \alpha_k) = \cos \alpha_j \cos \alpha_k + \text{sen} \alpha_j \text{sen} \alpha_k \quad (2.3a)$$

$$S_{j,k} = \text{sen}(\alpha_{j,k}) = \text{sen}(\alpha_j - \alpha_k) = \text{sen} \alpha_j \cos \alpha_k - \cos \alpha_j \text{sen} \alpha_k \quad (2.3b)$$

Estudio energético

Para el estudio energético se considera en cada barra j un sistema de coordenadas local x_j en donde cada punto, al vibrar, tendrá un desplazamiento transversal $v_j(x_j)$ y un desplazamiento axial $u_j(x_j)$, como se muestra en la Figura 2.3.

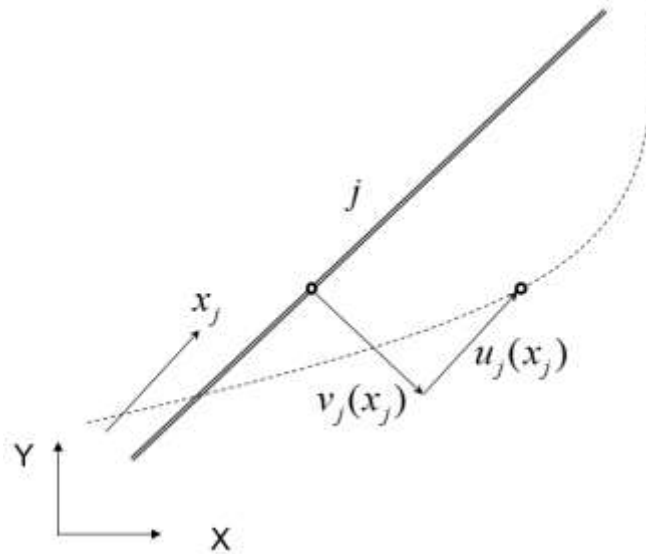


Figura 2.3: Desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j .

Las energías potencial de deformación U y cinética K del pórtico serán la sumatoria de las propias de cada barra, todas éstas en función de los desplazamientos:

$$U = \sum_{j=1}^{nb} U_j \quad K = \sum_{j=1}^{nb} K_j \quad (2.4a, b)$$

En la cual la energía potencial (2.5) estará dependiendo de momentos y de los esfuerzos normales:

$$U_j = \frac{1}{2} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \quad (2.5)$$

La Energía Cinética (2.6), aceptando modos normales de vibración, se expresa en función de ω (frecuencia circular de vibración de todo el pórtico), además de los desplazamientos transversales y axiales.

$$K_j = \frac{1}{2} \rho_j F_j \omega^2 \int_0^{a_j} [v^2(x_j) + u^2(x_j)] dx_j \quad (2.6)$$

A continuación se indican las expresiones correspondientes a los momentos flectores M y a los esfuerzos normales N :

$$M(x_j) = -E_j J_j v_j''(x_j) \quad (2.7)$$

$$N(x_j) = E_j F_j u_j'(x_j) \quad (2.8)$$

donde

$$(\otimes)' = \frac{\partial(\otimes)}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

Planteando el Teorema de Hamilton [17-25]:

$$\delta(U - K) = 0 \quad (2.10)$$

Reemplazando las expresiones (2.4a, b) en (2.10)

$$\delta \left(\sum_{j=1}^{nb} U_j - \sum_{j=1}^{nb} K_j \right) = 0 \quad (2.11)$$

y teniendo en cuenta las expresiones (2.5) y (2.6) en la (2.11), resulta:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nb} \rho_j F_j \omega^2 \int_0^{a_j} [v^2(x_j) + u^2(x_j)] dx_j \right) = 0 \quad (2.12)$$

Sustituyendo ahora las (2.7) y (2.8) en la expresión (2.12):

$$\delta \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nb} \left\{ \int_0^{a_j} \frac{(E_j J_j v_j''(x_j))^2}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{(E_j F_j u_j'(x_j))^2}{E_j F_j} dx_j - \rho_j F_j \omega^2 \int_0^{a_j} [v_j^2(x_j) + u_j^2(x_j)] dx_j \right\} \right) = 0 \quad (2.13)$$

que explicitado da lugar a:

$$\sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j J_j \int_0^{a_j} v_j''(x_j) \delta v_j''(x_j) dx_j + E_j F_j \int_0^{a_j} u_j'(x_j) \delta u_j'(x_j) dx_j - \rho_j F_j \omega^2 \int_0^{a_j} [v_j(x_j) \delta v_j(x_j) + u_j(x_j) \delta u_j(x_j)] dx_j \right\} = 0 \quad (2.14)$$

$$\sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j J_j v_j''(x_j) \delta v_j'(x_j) \Big|_0^{a_j} - E_j J_j v_j'''(x_j) \delta v_j(x_j) \Big|_0^{a_j} + E_j J_j \int_0^{a_j} v_j'''(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j + E_j F_j u_j'(x_j) \delta u_j(x_j) \Big|_0^{a_j} - E_j F_j \int_0^{a_j} u_j''(x_j) \delta u_j(x_j) dx_j - \rho_j F_j \omega^2 \int_0^{a_j} [v_j(x_j) \delta v_j(x_j) + u_j(x_j) \delta u_j(x_j)] dx_j \right\} = 0 \quad (2.15)$$

Reagrupando convenientemente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j J_j v_j''(x_j) \delta v_j'(x_j) \Big|_0^{a_j} - E_j J_j v_j'''(x_j) \delta v_j(x_j) \Big|_0^{a_j} + E_j F_j u_j'(x_j) \delta u_j(x_j) \Big|_0^{a_j} + \right. \\ \left. + \int_0^{a_j} [E_j J_j v_j'''(x_j) - \rho_j F_j \omega^2 v_j(x_j)] \delta v_j(x_j) dx_j - \right. \\ \left. - \int_0^{a_j} [E_j F_j u_j''(x_j) + \rho_j F_j \omega^2 u_j(x_j)] \delta u_j(x_j) dx_j \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para variaciones arbitrarias δu_j y δv_j , en todas las barra ($j = 1, 2, \dots, nb$) se desprende de la última expresión que:

$$E_j J_j v_j'''(x_j) - \rho_j F_j \omega^2 v_j(x_j) = 0 \quad (2.17a)$$

$$E_j F_j u_j''(x_j) + \rho_j F_j \omega^2 u_j(x_j) = 0 \quad (2.17b)$$

Se pasa ahora a coordenadas adimensionales utilizando el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_j \leq a_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1 \\ \xi_j = \frac{x_j}{a_j} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Desde aquí en adelante la comilla, indicada en (2.9), se refiere a la derivada respecto de la nueva variable:

$$(\otimes)' = \frac{\partial(\otimes)}{\partial \xi_j}$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales (2.17a y b) resultan:

$$\frac{E_j J_j}{a_j^4} v_j''''(\xi_j) - \rho_j F_j \omega^2 v_j(\xi_j) = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{E_j F_j}{a_j^2} u_j''(\xi_j) + \rho_j F_j \omega^2 u_j(\xi_j) = 0 \quad (2.20)$$

puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\boxed{v_j''''(\xi_j) - \Omega_j^2 v_j(\xi_j) = 0} \quad (2.21)$$

donde:

$$\Omega_j^2 = \frac{\rho_j F_j}{E_j J_j} \omega^2 a_j^4 \quad (2.22)$$

Luego la (2.20) queda expresada de la siguiente forma:

$$u_j''(\xi_j) + \frac{\rho_j}{E_j} \omega^2 a_j^2 u_j(\xi_j) = 0 \quad (2.23)$$

Definiendo a λ_j como

$$\lambda_j^2 = \frac{F_j a_j^2}{J_j} \Rightarrow \lambda_j = \frac{a_j}{\sqrt{J_j/F_j}} \quad (2.24)$$

Queda finalmente la ecuación (2.23) de la siguiente manera:

$$\boxed{u_j''(\xi_j) + \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j}\right)^2 u_j(\xi_j) = 0} \quad (2.25)$$

introduciendo ahora:

$$J_{2,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^2} \quad (2.26)$$

$$J_{3,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^3} \quad (2.27)$$

$$F_{1,j} = \frac{E_j F_j}{a_j} \quad (2.28)$$

se llega a

$$\sum_{j=1}^{nb} J_{2,j} v_j''(\xi_j) \delta v_j'(\xi_j) \Big|_0^l - J_{3,j} v_j'''(\xi_j) \delta v_j(\xi_j) \Big|_0^l + F_{1,j} u_j'(\xi_j) \delta u_j(\xi_j) \Big|_0^l = 0 \quad (2.29)$$

Desarrollo en series de potencias

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales (2.21) y (2.25), un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, [6-11, 26-43, 55] con las siguientes expresiones:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (2.30a, b)$$

en donde, sus correspondientes derivadas de orden superior, se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_j'(\xi_j) &= \sum_{i=1}^m i A_{j,i} \xi_j^{i-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) A_{j,i+1} \xi_j^i = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} \xi_j^i \\ v_j''(\xi_j) &= \sum_{i=2}^m i(i-1) A_{j,i} \xi_j^{i-2} = \sum_{i=0}^{m-2} (i+2)(i+1) A_{j,i+2} \xi_j^i = \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2} \xi_j^i \\ v_j'''(\xi_j) &= \sum_{i=4}^m i(i-1)(i-2)(i-3) A_{j,i} \xi_j^{i-4} = \sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i \end{aligned}$$

Donde:

$$\varphi_{k,j} = (i+1)(i+2)(i+3) \dots (i+k) = \frac{(i+k)!}{k!} \quad (2.31)$$

Retomando las ecuaciones diferenciales que gobiernan nuestro problema (2.21) y (2.25), y utilizando las soluciones propuestas en serie de potencias escribimos:

$$\sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i - \Omega_j^2 \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i = 0 \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} B_{j,i+2} \zeta_j^i + \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 \sum_{i=0}^m B_{j,i} \zeta_j^i = 0 \quad (2.33)$$

Igualando los coeficientes de igual potencia en ambos desarrollos, para la barra j , obtenemos las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$\varphi_{4,i} A_{j,i+4} - \Omega_j^2 A_{j,i} = 0 \Rightarrow A_{j,i+4} = \frac{\Omega_j^2 A_{j,i}}{\varphi_{4,i}} \quad (i = 0, 1, \dots, m-4) \quad (2.34)$$

$$\varphi_{2,i} B_{j,i+2} + \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 B_{j,i} = 0 \Rightarrow B_{j,i+2} = - \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 \frac{B_{j,i}}{\varphi_{2,i}} \quad (i = 0, 1, \dots, m-2) \quad (2.35)$$

Como puede apreciarse en la ecuación (2.34), se vinculan los coeficientes $A_{j,i+4}$ con los $A_{j,i}$, y en la ecuación (2.35), los $B_{j,i+2}$ con los $B_{j,i}$ lo que resulta, en principio, cada barra con un total de 6 incógnitas, a saber: $A_{j,0}$, $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, $A_{j,3}$, $B_{j,0}$ y $B_{j,1}$.

Condiciones de compatibilidad geométrica, esenciales o primarias

En cada nodo donde concurren m barras, se deben plantear $m-1$ condiciones de continuidad geométrica, esenciales o primarias.

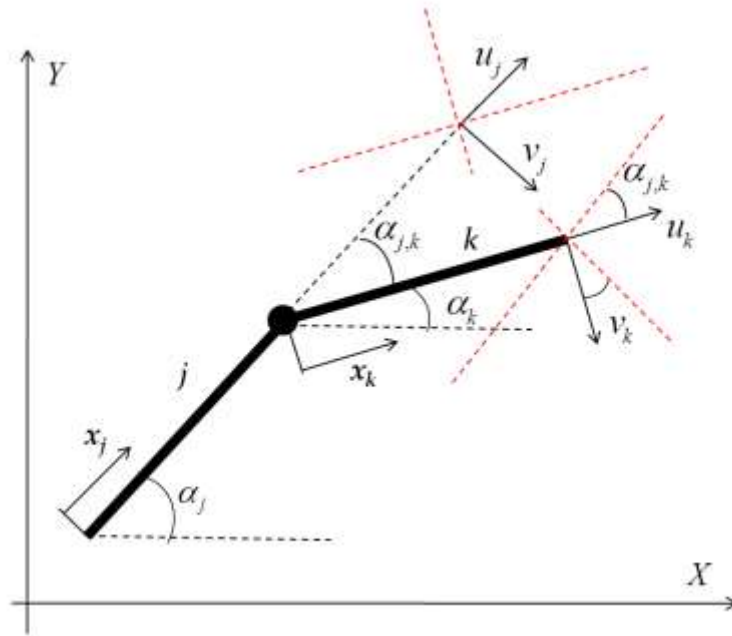


Figura 2.4: Esquema de desplazamientos entre dos barras consecutivas.

Como se muestra en la Figura 2.4, las relaciones entre desplazamientos de una barra k cualquiera que parte del nodo, con otra barra j que llega al mismo nodo, son las siguientes:

$$u_k(0) = u_j(1) \cos \alpha_{j,k} + v_j(1) \sin \alpha_{j,k} \quad (2.36a)$$

$$v_k(0) = v_j(1) \cos \alpha_{j,k} - u_j(1) \sin \alpha_{j,k} \quad (2.36b)$$

$$\frac{v'_k(0)}{a_k} = \frac{v'_j(1)}{a_j} \quad (2.36c)$$

siendo la barra j la que llega al nodo, según el sentido de circulación (y se la evalúa en su extremo final, $\xi_j = 1$) y k una de las barras que sale del nodo (siendo evaluada en su comienzo, $\xi_k = 0$). Las longitudes de las barras j y k son a_j y a_k respectivamente, dadas por la expresión (2.1). El ángulo $\alpha_{j,k}$ es el relativo entre la barra j y la k . A los fines de simplificar la escritura, se llaman a las relaciones trigonométricas seno y coseno entre las barras k, j de la siguiente manera:

$$C_{j,k} = \cos \alpha_{j,k} \quad S_{j,k} = \sin \alpha_{j,k}$$

Reemplazando las funciones de desplazamiento transversal y axial, por su correspondiente desarrollo en series de potencias, y teniendo en cuenta que, por ejemplo para la barra j es:

$$v_j(0) = A_{j,0}, \quad v_j(1) = \sum_{i=0}^m A_{j,i}, \quad u_j(0) = B_{j,0} \quad \text{y} \quad u_j(1) = \sum_{i=0}^m B_{j,i}$$

Las condiciones geométricas quedan expresadas de la siguiente manera:

$$B_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} \quad (2.37a)$$

$$A_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} \quad (2.37b)$$

$$\frac{A_{k,1}}{a_k} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1}}{a_j} \Rightarrow A_{k,1} = \frac{a_k}{a_j} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} \quad (2.37c)$$

Con ellas se obtienen los coeficientes $A_{k,0}$, $A_{k,1}$ y $B_{k,0}$ de la barra k en función de la barra j . Teniendo en cuenta el orden en que se realiza el proceso de cálculo, la barra j es analizada con anterioridad a la barra k .

Ecuaciones de compatibilidad geométrica, esenciales o primarias

Hay situaciones donde se arriba a un nodo en donde hay más de una barra conocida. Observando la Figura 2.1, se ilustra lo dicho con el caso del nodo 8, donde las barras 8, 10 y 11 ya han sido calculadas si el recorrido ha comenzado por la barra 1. En este escenario se deben plantear las *ecuaciones* de compatibilidad geométricas, con las barras que se conocen sus coeficientes en el desarrollo en series. Esta situación adiciona 3 ecuaciones más por cada barra en el contexto antes descrito. Este proceder resulta ser uno de los principales adelantos producto de la presente investigación ya que, con esta metodología, se logra pasar de pórticos abiertos (en los cuales concurren solamente dos barras a cada nodo), previamente estudiados por otros autores [6, 8, 10, 32], a entramados cerrados (en los cuales arriban más de dos barras a los nodos).

Las ecuaciones de compatibilidad geométricas quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\sum_{i=0}^m B_{k,i} - \left(C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} \right) = 0 \quad (2.38a)$$

$$\sum_{i=0}^m A_{k,i} - \left(C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} \right) = 0 \quad (2.38b)$$

$$a_j \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{k,i+1} - a_k \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} = 0 \quad (2.38c)$$

$$a_j A_{k,1} - a_k A_{j,1} = 0 \quad (2.38d)$$

Se debe recalcar que, en estas ecuaciones, la barra k es evaluada en su extremo, o sea en $\zeta_k = 1$, por lo que resulta una sumatoria de los coeficientes de la serie de potencias en las expresiones (2.38 a-c). El caso especial de la (2.38d) es cuando ambas barras son evaluadas en su origen, o sea en $\zeta_k = 0$.

Resumiendo lo visto hasta aquí, con las **condiciones** de compatibilidad geométricas, esenciales o primarias, se logran calcular coeficientes de una determinada barra a partir de los coeficientes de barras que preceden en el desarrollo y que concurren al mismo nodo. Con las **ecuaciones** de compatibilidad geométrica, esenciales o primarias, se relacionan dos barras que concurren a un nodo y ya tienen sus coeficientes calculados, transformando las expresiones en ecuaciones, las que serán resueltas al completar la circulación por todas las barras del entramado en estudio.

Condiciones estáticas de equilibrio, naturales o secundarias en los nodos

En cada nodo, en el cual concurre más de una barra, se deben plantear las correspondientes tres condiciones estáticas de equilibrio, o sea dos sumatorias de esfuerzos y una de momentos.

Se desarrolla a continuación la expresión (2.29) para el caso particular de un nodo en el cual concurren solamente 4 barras, dos de ellas con coordenadas iniciales en el nodo, la barra 3 y la 4 ($\zeta_j = 0$), las otras dos con sus coordenadas finales en el nodo, las barras 1 y 2 ($\zeta_j = 1$);

dicho de otra manera, dos barras salen del nodo y las otras dos que ingresan al nodo. Esto se puede ver en la Figura 2.5.

Reescribiendo la ecuación (2.29):

$$\sum_{i=1}^{nb} \left[J_{2,j} v_j''(\xi_j) \delta v_j'(\xi_j) \Big|_0^1 - J_{3,j} v_j'''(\xi_j) \delta v_j(\xi_j) \Big|_0^1 + F_{1,j} u_j'(\xi_j) \delta u_j'(\xi_j) \Big|_0^1 \right] = 0 \quad (2.39)$$

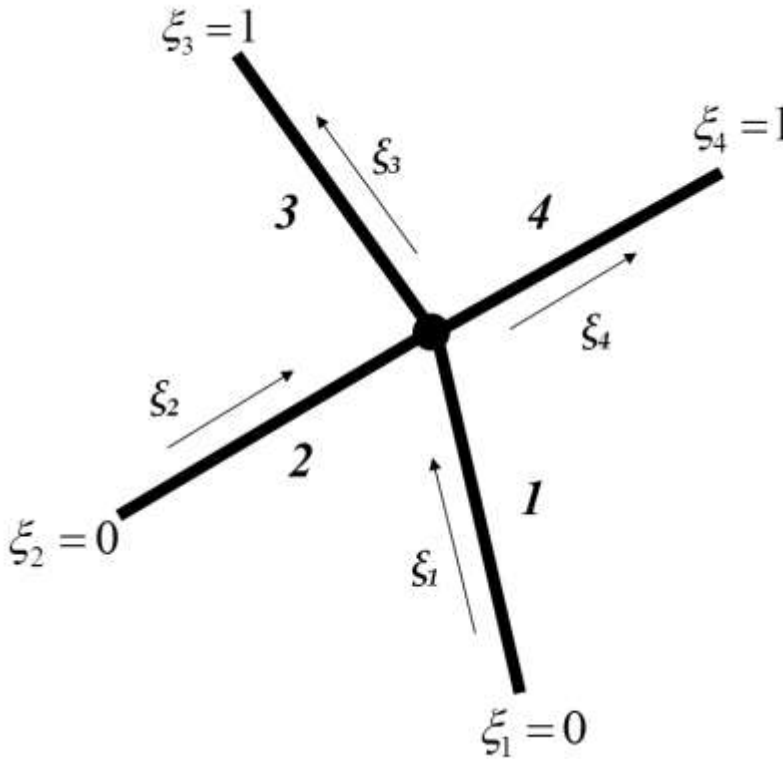


Figura 2.5: Esquema de 4 barras, dos ingresando (1 y 2) y dos saliendo del nodo (3 y 4), para el análisis de las expresiones de equilibrio en el nodo.

Desarrollando para las cuatro barras la expresión (2.39):

$$\begin{aligned} & J_{21} v_1''(1) \delta v_1'(1) - J_{21} v_1''(0) \delta v_1'(0) + J_{22} v_2''(1) \delta v_2'(1) - J_{22} v_2''(0) \delta v_2'(0) + \\ & + J_{23} v_3''(1) \delta v_3'(1) - J_{23} v_3''(0) \delta v_3'(0) + J_{24} v_4''(1) \delta v_4'(1) - J_{24} v_4''(0) \delta v_4'(0) - \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[J_{31} v_1'''(1) \delta v_1(1) - J_{31} v_1'''(0) \delta v_1(0) + J_{32} v_2'''(1) \delta v_2(1) - J_{32} v_2'''(0) \delta v_2(0) + \right. \\
& \left. + J_{33} v_3'''(1) \delta v_3(1) - J_{33} v_3'''(0) \delta v_3(0) + J_{34} v_4'''(1) \delta v_4(1) - J_{34} v_4'''(0) \delta v_4(0) \right] \\
& + F_{11} u_1'(1) \delta u_1(1) - F_{11} u_1'(0) \delta u_1(0) + F_{12} u_2'(1) \delta u_2(1) - F_{12} u_2'(0) \delta u_2(0) + \\
& + F_{13} u_3'(1) \delta u_3(1) - F_{13} u_3'(0) \delta u_3(0) + F_{14} u_4'(1) \delta u_4(1) - F_{14} u_4'(0) \delta u_4(0) = 0
\end{aligned}$$

Poniendo a todas las barras en función de la primera barra que sale del nodo, en este caso la 3:

$$\delta u_1(1) = \delta u_3(0) C_{31} + \delta v_3(0) S_{31} \quad (2.41a)$$

$$\delta v_1(1) = -\delta u_3(0) S_{31} + \delta v_3(0) C_{31} \quad (2.41b)$$

$$\delta u_2(1) = \delta u_3(0) C_{32} + \delta v_3(0) S_{32} \quad (2.41c)$$

$$\delta v_2(1) = -\delta u_3(0) S_{32} + \delta v_3(0) C_{32} \quad (2.41d)$$

$$\delta u_4(0) = \delta u_3(0) C_{34} + \delta v_3(0) S_{34} \quad (2.41e)$$

$$\delta v_4(0) = -\delta u_3(0) S_{34} + \delta v_3(0) C_{34} \quad (2.41f)$$

La expresión (2.40) debe ser válida para cualquier valor de variación (δu_j y δv_j) para valores $i = 1, 2, 3$ y 4 , quedando entonces, la parte de dicha expresión correspondiente a estas variaciones [18-20]:

$$\begin{aligned}
& -J_{31} v_1'''(1) \left(-S_{31} \delta u_3(0) + C_{31} \delta v_3(0) \right) - J_{32} v_2'''(1) \left(-S_{32} \delta u_3(0) + C_{32} \delta v_3(0) \right) + \\
& \quad + J_{33} v_3'''(0) \delta v_3(0) + J_{34} v_4'''(0) \left(-S_{34} \delta u_3(0) + C_{34} \delta v_3(0) \right) + \\
& + F_{11} u_1'(1) \left(\delta u_3(0) C_{31} + \delta v_3(0) S_{31} \right) + F_{12} u_2'(1) \left(\delta u_3(0) C_{32} + \delta v_3(0) S_{32} \right) \\
& \quad - F_{13} u_3'(0) \delta u_3(0) - F_{14} u_4'(0) \left(\delta u_3(0) C_{34} + \delta v_3(0) S_{34} \right) = 0
\end{aligned} \quad (2.42)$$

Extrayendo de la (2.42) los términos cuyo factor común es $\delta v_3(0)$:

$$\begin{aligned} \delta v_3(0) \left[-J_{31} v_1'''(1) C_{31} - J_{32} v_2'''(1) C_{32} + J_{33} v_3'''(0) + J_{34} v_4'''(0) C_{34} + \right. \\ \left. + F_{11} u_1'(1) S_{31} + F_{12} u_2'(1) S_{32} - F_{14} u_4'(0) S_{34} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

en donde se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} -J_{31} v_1'''(1) C_{31} - J_{32} v_2'''(1) C_{32} + J_{33} v_3'''(0) + J_{34} v_4'''(0) C_{34} + \\ + F_{11} u_1'(1) S_{31} + F_{12} u_2'(1) S_{32} - F_{14} u_4'(0) S_{34} = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$Q_1(1) C_{31} + Q_2(1) C_{32} - Q_3(0) - Q_4(0) C_{34} + N_1(1) S_{31} + N_2(1) S_{32} - N_4(0) S_{34} = 0 \quad (2.45)$$

de la cual se deduce que:

$$Q_3(0) = Q_1(1) C_{31} + Q_2(1) C_{32} - Q_4(0) C_{34} + N_1(1) S_{31} + N_2(1) S_{32} - N_4(0) S_{34} \quad (2.46)$$

NOTA 1: Esta expresión es posible sintetizarla, para una cantidad n de barras que concurran al nodo, de la siguiente manera: “la primera barra que sale del nodo (la 3 en este caso), tiene un valor de esfuerzo de corte en el inicio de la barra que es igual a la suma de los esfuerzos de corte en las barras que llegan al nodo (1 y 2 en este caso) menos las que salen del nodo (la 4 aquí) multiplicados por los respectivos cosenos de los ángulos relativos; todo esto más los esfuerzos normales de las barras que llegan al nodo (1 y 2 aquí) menos las que salen del nodo (4) multiplicadas por sus respectivos senos de los ángulos relativos”

De igual forma los términos cuyo factor común $\delta u_3(0)$:

$$\begin{aligned} \delta u_3(0) \left[J_{31} v_1'''(1) S_{31} + J_{32} v_2'''(1) S_{32} - J_{34} v_4'''(0) S_{34} + \right. \\ \left. + F_{11} u_1'(1) C_{31} + F_{12} u_2'(1) C_{32} - F_{13} u_3'(0) - F_{14} u_4'(0) C_{34} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

de la cual se deduce que:

$$\begin{aligned}
 & -Q_1(1)S_{31} - Q_2(1)S_{32} + Q_4(0)S_{34} + \\
 & + N_1(1)C_{31} + N_2(1)C_{32} - N_3(0) - N_4(0)C_{34} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

en donde:

$$\begin{aligned}
 N_3(0) = & -Q_1(1)S_{31} - Q_2(1)S_{32} + Q_4(0)S_{34} + \\
 & + N_1(1)C_{31} + N_2(1)C_{32} - N_4(0)C_{34}
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

NOTA 2: Esta expresión también es posible sintetizarla, para una cantidad n de barras que concurran al nodo, de la siguiente manera: “la primera barra que sale del nodo (la 3 en este caso), tiene un esfuerzo normal que es igual a la suma de los esfuerzos de corte de las barras que salen del nodo (solo la 4 en este caso) menos las que llegan al nodo (1 y 2 aquí) cada uno por sus respectivos senos de los ángulos relativos; todo esto más los esfuerzos normales de las barras que arriban al nodo menos las que salen del nodo, todas estas por sus correspondientes cosenos de los ángulos relativos”

En la Figura 2.6 se representa un esquema de las direcciones de las barras con las proyecciones de los esfuerzos Q y N en cada una de las cuatro barras que concurren al nodo.

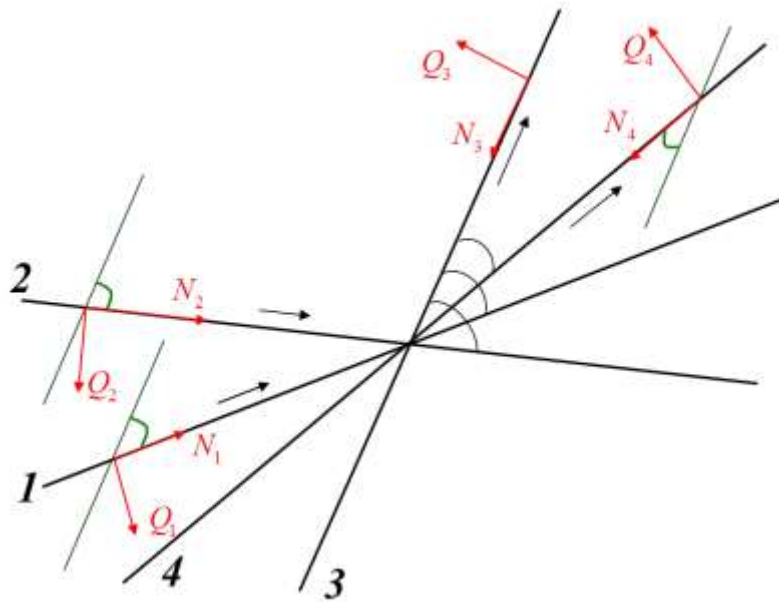


Figura 2.6: Esquema de las direcciones de 4 barras que concurren a un nodo, con las proyecciones de los esfuerzos Q y N para el análisis del equilibrio.

Retomando la expresión (2.40), la misma debe ser válida para cualquier valor de la derivada de la variación $\delta v_i'$ para valores $i=1, 2, 3$ y 4 , que representan los giros, extrayendo los términos marcados resulta:

$$J_{21}v_1''(1)\delta v_1'(1) + J_{22}v_2''(1)\delta v_2'(1) - J_{23}v_3''(0)\delta v_3'(0) - J_{24}v_4''(0)\delta v_4'(0) = 0 \quad (2.50)$$

En el nodo se debe cumplir que todos los giros sean iguales, por lo que:

$$\delta v_1'(1) = \delta v_2'(1) = \delta v_3'(0) = \delta v_4'(0) \quad (2.51)$$

Por lo cual se arriba a que:

$$M_1(1) + M_2(1) - M_3(0) - M_4(0) = 0 \quad (2.52)$$

$$M_3(0) = M_1(1) + M_2(1) - M_4(0) \quad (2.53)$$

NOTA 3: Esta expresión también es posible sintetizarla, para una cantidad n de barras que concurren al nodo, de la siguiente manera: “la primera barra que sale del nodo (la 3 en este caso) tiene un valor del momento flector que es igual a la suma de los momentos flectores de las barras que arriban al nodo, menos las que salen del nodo”

Con las expresiones (2.46), (2.49) y (2.53) se verifica el equilibrio en el nodo planteado, considerando en cada barra el esquema de esfuerzos, todos ellos con signo positivo, bosquejado en la Figura 2.7.

Teniendo en cuenta que:

$$N_j = F_{1,j} u_j'(\xi_j) \quad Q_j = -J_{3,j} v_j'''(\xi_j) \quad M_j = -J_{2,j} v_j''(\xi_j) \quad (2.54a, b, c)$$

Reemplazadas en las ecuaciones (2.46), (2.49) y (2.53):

$$\begin{aligned}
-J_{3,3} v_3'''(0) &= -J_{3,1} v_1'''(1) C_{31} - J_{3,2} v_2'''(1) C_{32} + J_{3,4} v_4'''(0) C_{34} + \\
&+ F_{1,1} u_1'(1) S_{31} + F_{1,2} u_2'(1) S_{32} - F_{1,4} u_4'(0) S_{34}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,3} u_3'(0) &= J_{3,1} v_1'''(1) S_{31} + J_{3,2} v_2'''(1) S_{32} - J_{3,4} v_4'''(0) S_{34} + \\
&+ F_{1,1} u_1'(1) C_{31} + F_{1,2} u_2'(1) C_{32} - F_{1,4} u_4'(0) C_{34}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$-J_{2,3} v_3''(0) = -J_{2,1} v_1''(1) - J_{2,2} v_2''(1) + J_{2,4} v_4''(0) \tag{2.57}$$

Sustituyendo las funciones de desplazamiento transversal y axial, por su correspondiente desarrollo en series de potencias, y teniendo en cuenta que, tanto para una barra j que llega al nodo, como para la barra k que tiene su origen en el nodo se cumplen:

$$v_k''(0) = \varphi_{2,0} A_{k,2} \quad v_j''(1) = \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2} \tag{2.58a, b}$$

$$v_k'''(0) = \varphi_{3,0} A_{k,3} \quad v_j'''(1) = \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{j,i+3} \tag{2.58c, d}$$

$$u_k'(0) = \varphi_{1,0} B_{k,1} \quad u_j'(1) = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{j,i+1} \tag{2.58e, f}$$

Las expresiones (2.55), (2.56) y (2.57) resultan:

$$\begin{aligned}
-J_{3,3} \varphi_{3,0} A_{3,3} &= -J_{3,1} C_{31} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{1,i+3} - J_{3,2} C_{32} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{2,i+3} + J_{3,4} C_{34} \varphi_{3,0} A_{4,3} + \\
&+ F_{1,1} S_{31} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{1,i+1} + F_{1,2} S_{32} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{2,i+1} - F_{1,4} S_{34} \varphi_{1,0} B_{4,1}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,3} \varphi_{1,0} B_{3,1} &= J_{3,1} S_{31} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{1,i+3} + J_{3,2} S_{32} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{2,i+3} - J_{3,4} S_{34} \varphi_{3,0} A_{4,3} + \\
&+ F_{1,1} C_{31} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{1,i+1} + F_{1,2} C_{32} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{2,i+1} - F_{1,4} C_{34} \varphi_{1,0} B_{4,1}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$-J_{2,3} \varphi_{2,0} A_{3,2} = -J_{2,1} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{1,i+2} - J_{2,2} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{2,i+2} + J_{2,4} \varphi_{2,0} A_{4,2} \tag{2.61}$$

De estas últimas expresiones, es posible despejar algunos coeficientes de los desarrollos en series en función de otros.

Siendo ahora, nbe y nbs el número total de barras entrantes y salientes, respectivamente al nodo en estudio, y sea k la barra de la cual se despejan los coeficientes, las expresiones generales quedan de la siguiente forma:

$$A_{k,3} = \frac{-1}{J_{3,k} \varphi_{3,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(J_{3,b} C_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} S_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) \right] \quad (2.62)$$

$$B_{k,1} = \frac{1}{F_{1,k} \varphi_{1,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(-J_{3,b} S_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} C_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) \right] \quad (2.63)$$

$$A_{k,2} = \frac{-1}{J_{2,k} \varphi_{2,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} J_{2,b} \varphi_{2,0} A_{b,2} \right] \quad (2.64)$$

Con estas tres expresiones, es posible realizar la programación para una cantidad m de barras que concurran o salgan de un nodo.

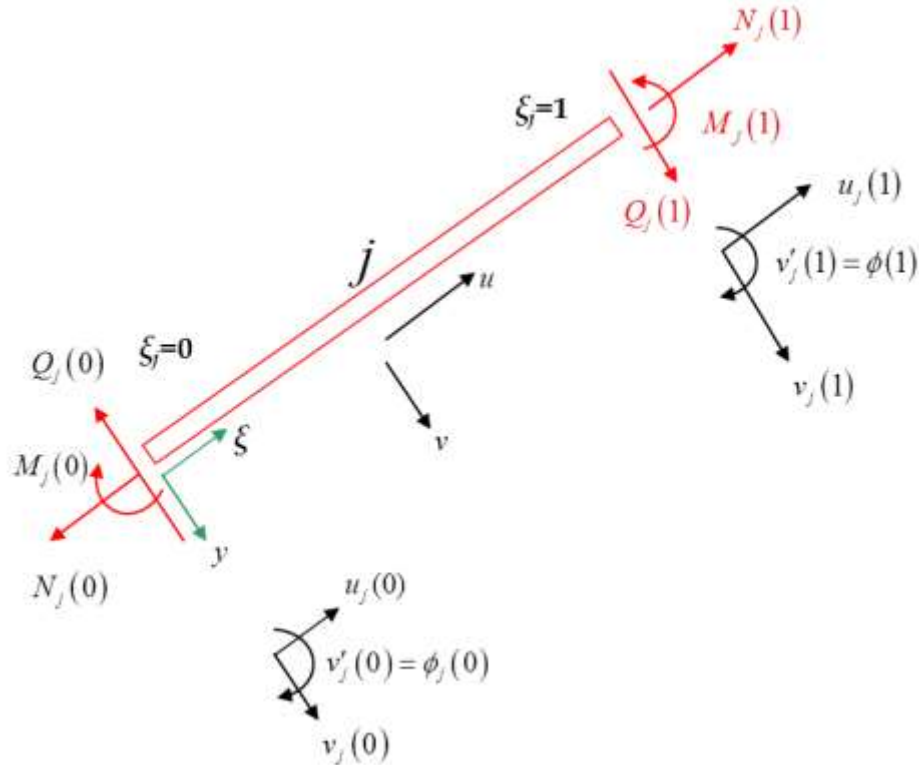


Figura 2.7: Esquema de esfuerzos positivos en una barra para el análisis del equilibrio.

Ecuaciones de equilibrio, naturales o secundarias en los nodos

En caso de arribar a un nodo en donde todas las barras ya han sido estudiadas, de la observación directa de la Figura 2.1, se ilustra lo dicho en el caso del nodo 8, donde las barras 8, 10 y 11 ya han sido calculadas. En este escenario, con el mismo criterio adoptado anteriormente al plantear las ecuaciones de compatibilidad geométricas, se deben utilizar ahora las ecuaciones de equilibrio con todas las barras que se conocen. Esta situación adiciona 3 ecuaciones más. Lo dicho anteriormente resulta ser otro de los principales adelantos producto de la presente investigación ya que, con esta metodología, se logra pasar de pórticos abiertos (dos barras por nodo) previamente estudiados por otros autores [6, 10, 11], a entramados cerrados (más de dos barras por nodo).

Las ecuaciones de equilibrio quedan expresadas de la siguiente manera, si consideramos que son todas barras entrantes al nodo, o sea que ya se han calculado sus coeficientes o son incógnitas del problema.

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) = 0 \quad (2.66)$$

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) = 0 \quad (2.67)$$

Se debe recalcar que, en estas ecuaciones, todas las barras son evaluadas en $\xi_j = 1$, por tal motivo resulta una sumatoria de los coeficientes de la serie de potencias.

En el caso especial de un extremo de barra k con una articulación al resto de la estructura, es necesario plantear que el momento flector en el extremo final de dicha barra es nulo. De esta forma la (2.67) queda expresada como:

$$J_{2,k} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{k,i+2} = 0 \quad (2.67a)$$

Condiciones de borde

En cada nodo en el cual se encuentra un vínculo se deben plantear las condiciones de borde correspondientes a cada tipo de vinculación. Estas deberán ser evaluadas en cero si se trata de un origen de barra ($\xi_j = 0$), o en 1 si se trata de un extremo de barra ($\xi_j = 1$). Se debe aclarar que, aunque se presentan las condiciones de borde en ambos extremos, a los fines de la programación se realiza siempre en los orígenes de las barras con vínculos. Dicho de otra manera, las barras que concurren a un vínculo tienen su sentido desde el vínculo hacia el otro extremo de la misma.

Articulación doble:

Las condiciones de borde correspondientes a una articulación en un origen de barra son:

$$u_k(0) = v_k(0) = M_k(0) = 0 \quad (2.68)$$

Este momento nulo corresponde a

$$v_k''(0) = 0 \quad (2.69)$$

Con estas condiciones es posible determinar que para la barra k que posea una articulación en su origen, respectivamente las constantes:

$$A_{k,0} = B_{k,0} = A_{k,2} = 0 \quad (2.70)$$

En el caso que la barra k posea una articulación en su extremo final se tendrá que:

$$u_k(1) = v_k(1) = M_k(1) = 0 \quad (2.71)$$

de donde se deduce que:

$$\sum_i A_{k,i} = \sum_i B_{k,i} = \sum_i \varphi_{2,i} A_{k,i+2} = 0 \quad (2.72)$$

Articulación simple (o apoyo móvil):

Las condiciones de borde correspondientes a una articulación simple en un origen de barra son:

$$u_k'(0) = v_k(0) = v_k''(0) = 0 \quad (2.73)$$

Con ellos se determina que para la barra k que posea una articulación en su origen, respectivamente las constantes:

$$A_{k,0} = B_{k,1} = A_{k,2} = 0 \quad (2.74)$$

En el caso que la barra k posea una articulación en su extremo se tendrá que:

$$u_k'(1) = v_k(1) = M_k(1) = 0 \quad (2.75)$$

De donde se deduce que:

$$\sum_i A_{k,i} = \sum_i \varphi_{1,i} B_{k,i+1} = \sum_i \varphi_{2,i} A_{k,i+2} = 0 \quad (2.76)$$

Empotramiento

Las condiciones de borde correspondientes a un empotramiento en un origen de barra son:

$$v_k(0) = u_k(0) = \theta_k(0) = 0 \quad (2.77)$$

Este giro nulo corresponde a evaluar

$$v'_k(0) = 0 \quad (2.78)$$

con ellos se determina que para la barra k , que posea un empotramiento en su origen, las constantes resultan:

$$A_{k,0} = B_{k,0} = A_{k,1} = 0 \quad (2.79)$$

Cuando la barra k posee un empotramiento en su extremo final se tiene que:

$$u_k(1) = v_k(1) = \theta_k(1) = 0 \quad (2.80)$$

de donde:

$$\sum_i A_{k,i} = \sum_i B_{k,i} = \sum_i \varphi_{1,i} A_{k,i+1} = 0 \quad (2.81)$$

Cuasi - empotramiento

Se agrega en esta parte, además de las condiciones de borde ya estudiadas, el Cuasi empotramiento. Se trata de un vínculo en la dirección de la barra que impide el giro y desplazamiento transversal, pero permite el desplazamiento axial de la barra, como se muestra en la Figura 2.8.

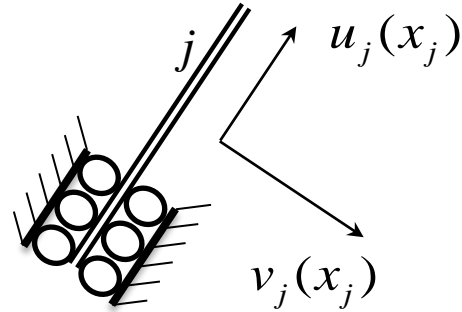


Figura 2.8: Esquema de un Cuasi - empotramiento en barra.

Las condiciones de borde correspondientes a este tipo de vínculo en un origen de barra son:

$$v_j(0) = \theta_j(0) = N_j(0) = 0 \quad (2.82)$$

Este giro nulo corresponde a evaluar

$$v'_j(0) = 0 \quad (2.83)$$

y el esfuerzo normal nulo es

$$u'_j(0) = 0 \quad (2.84)$$

Con ellos se determina que para la barra j posea un Cuasi-empotramiento en su origen, las constantes

$$A_{j,0} = B_{j,1} = A_{j,1} = 0 \quad (2.85)$$

Ménsula

En el caso de un extremo libre, si corresponde a un origen de barra, se cumple:

$$Q_k(0) = M_k(0) = N_k(0) = 0 \quad (2.86)$$

Esto es debido a que se evalúa

$$v_k'''(0) = v_k''(0) = u_k'(0) = 0 \quad (2.87)$$

con ellos se determina para la barra k que posea un origen libre, que sean nulas las siguientes constantes:

$$A_{k,3} = A_{k,2} = B_{k,1} = 0 \quad (2.88)$$

Cuando la barra k posee una ménsula en su extremo final se tiene que

$$v_k'''(1) = v_k''(1) = u_k'(1) = 0 \quad (2.89)$$

de donde se deduce que:

$$\sum_i \varphi_{3,i} A_{k,i+3} = \sum_i \varphi_{2,i} A_{k,i+2} = \sum_i \varphi_{1,i} B_{k,i+1} = 0 \quad (2.90)$$

Vínculos elásticos

Es posible contar en los extremos de barra con vínculos elásticos, como lo muestra la Figura 2.9. En la misma, los valores $k_{1,j}$, $k_{2,j}$ y $k_{3,j}$ corresponden a las constantes elásticas en el extremo de la barra j , siendo los primeros subíndices 1, 2 y 3 correspondientes a direcciones normal a la barra, axial y giro.

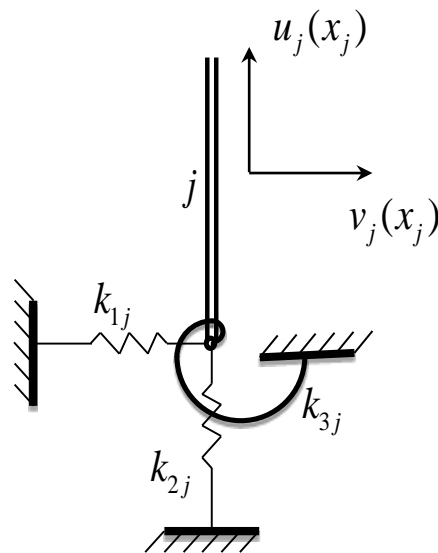


Figura 2.9: Representación de un vínculo elástico

Haciendo un análisis energético se plantea lo siguiente:

$$2U = EJ_j \int_0^l (v_j'')^2 dx + EF_j \int_0^l (u_j')^2 dx + k_{1j} \cdot v_j(0)^2 + k_{2j} \cdot u_j(0)^2 + k_{3j} \cdot v_j'(0)^2 \quad (2.91)$$

Aplicando los principios del análisis variacional y la integración por partes:

$$\delta U = EJ_j \int_0^l v_j'' \cdot \delta v_j'' dx + EF_j \int_0^l u_j' \cdot \delta u_j' dx + \quad (2.92)$$

$$+ k_{1j} \cdot v_j(0) \cdot \delta v_j(0) + k_{2j} \cdot u_j(0) \cdot \delta u_j(0) + k_{3j} \cdot v_j'(0) \cdot \delta v_j'(0)$$

$$\delta U = EJ_j \left[v_j'' \cdot \delta v_j' \Big|_0^l - \int_0^l v_j''' \cdot \delta v_j' dx \right] + EF_j \left[u_j' \cdot \delta u_j \Big|_0^l - \int_0^l u_j'' \cdot \delta u_j dx \right] + \quad (2.93)$$

$$+ k_{1j} \cdot v_j(0) \cdot \delta v_j(0) + k_{2j} \cdot u_j(0) \cdot \delta u_j(0) + k_{3j} \cdot v_j'(0) \cdot \delta v_j'(0)$$

$$\delta U = EJ_j \left[v_j'' \cdot \delta v_j' \Big|_0^l - \left(v_j''' \cdot \delta v_j \Big|_0^l - \int_0^l v_j'''' \cdot \delta v_j dx \right) \right] + \quad (2.94)$$

$$+ EF_j \left[\left(u_j'(l) \cdot \delta u_j - u_j'(0) \cdot \delta u_j \right) - \int_0^l u_j'' \cdot \delta u_j dx \right] +$$

$$+ k_{1j} \cdot v_j(0) \cdot \delta v_j(0) + k_{2j} \cdot u_j(0) \cdot \delta u_j(0) + k_{3j} \cdot v_j'(0) \cdot \delta v_j'(0)$$

$$\delta U = EJ_j \left[v_j''(l) \cdot \delta v_j' - v_j''(0) \cdot \delta v_j' - v_j'''(l) \cdot \delta v_j + v_j'''(0) \cdot \delta v_j + \int_0^l v_j'''' \cdot \delta v_j dx \right] + \quad (2.95)$$

$$+ EF_j \left[u_j'(l) \cdot \delta u_j - u_j'(0) \cdot \delta u_j - \int_0^l u_j'' \cdot \delta u_j dx \right] +$$

$$+ k_{1j} \cdot v_j(0) \cdot \delta v_j(0) + k_{2j} \cdot u_j(0) \cdot \delta u_j(0) + k_{3j} \cdot v_j'(0) \cdot \delta v_j'(0)$$

Reagrupando convenientemente en la última expresión se llega a:

$$\begin{cases} \left[+EJ_j v_j'''(0) + k_{1j} \cdot v_j(0) \right] \delta v_j(0) = 0 \\ \left[-EF_j u_j'(0) + k_{2j} \cdot u_j(0) \right] \delta u_j(0) = 0 \\ \left[-EJ_j v_j''(0) + k_{3j} \cdot v_j'(0) \right] \delta v_j'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

Pasando a coordenadas adimensionales con el cambio de variables ya realizado anteriormente:

$$0 \leq x_j \leq a_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1 \quad \xi_j = \frac{x_j}{a_j}$$

Reacomodando la expresión para el esfuerzo transversal o de Corte:

$$k_{1j} v_j(0) + EJ_j \frac{v_j'''(0)}{a_j^3} = 0 \quad (2.97)$$

$$v_j(0) + K_1 v_j'''(0) = 0 \quad (2.98)$$

donde

$$K_{1j} = \frac{EJ_j}{k_{1j} a_j^3} \quad (2.99)$$

Para valores de k_{1j} suficientemente grandes,

$$K_{1j} \rightarrow 0 \Rightarrow v_j \rightarrow 0$$

se obtiene desplazamiento transversal impedido

En el caso del Esfuerzo Normal:

$$-EF_j \frac{u_j'(0)}{a_j} + k_{2j} \cdot u_j(0) = 0 \quad (2.100)$$

$$-K_{2j} u_j'(0) + u_j(0) = 0 \quad (2.101)$$

donde

$$K_{2j} = \frac{EF_j}{k_{2j} a_j} \quad (2.102)$$

Para valores de k_{2j} suficientemente grandes,

$$K_{2j} \rightarrow 0 \Rightarrow u_j \rightarrow 0$$

se obtiene el caso de desplazamiento axial impedido.

Analizando ahora el Momento Flector:

$$-EJ_j \frac{v_j''(0)}{a_j^2} + k_{3j} \cdot \frac{v_j'(0)}{a_j} = 0 \quad (2.103)$$

$$v_j'(0) - K_{3j} v_j''(0) = 0 \quad (2.104)$$

$$K_{3j} = \frac{EJ_j}{k_3 a_j^2} \quad (2.105)$$

Para valores de k_{2j} tendiendo a infinito,

$$K_{3j} \rightarrow 0 \Rightarrow v_j' = \theta_j \rightarrow 0$$

se obtiene el caso del giro impedido.

Sintetizando todo el análisis previo y aplicando los desarrollos en serie de potencia es posible arribar a las ecuaciones en los vínculos como sigue:

$$\begin{cases} v_j(0) + K_{1j} v_j'''(0) = 0 \\ u_j(0) - K_{2j} u_j'(0) = 0 \\ v_j'(0) - K_{3j} v_j''(0) = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

$$\begin{cases} A_{j,0} + K_{1j} \varphi_{3,0} A_{j,3} = 0 \\ B_{j,0} - K_{2j} \varphi_{1,0} B_{j,1} = 0 \\ \varphi_{1,0} A_{j,1} - K_{3j} \varphi_{2,0} A_{j,2} = 0 \end{cases} \quad (2.107)$$

De donde se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned} A_{j,0} &= -K_{1j} \varphi_{3,0} A_{j,3} \\ B_{j,0} &= K_{2j} \varphi_{1,0} B_{j,1} \\ A_{j,1} &= K_{3j} \frac{\varphi_{2,0}}{\varphi_{1,0}} A_{j,2} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Vínculos simples inclinados

En el caso de articulaciones simples (apoyos móviles), las cuales restringen un solo grado de libertad, es posible colocarlas en el extremo de una barra j con un ángulo de inclinación β que forma la vertical del vínculo con respecto al eje vertical global Y , tal como se muestra en la Figura 2.10.

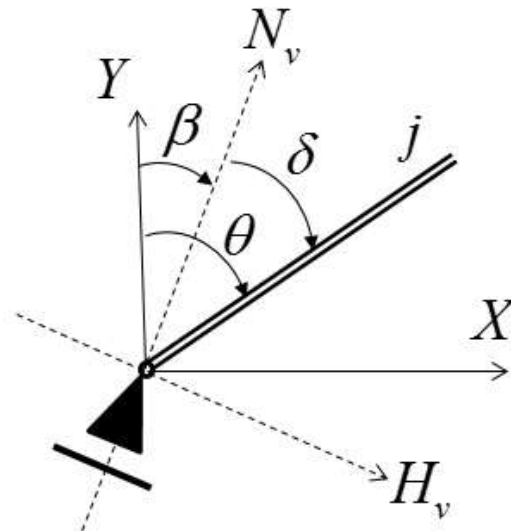


Figura 2.10: Representación de un vínculo simple inclinado un ángulo β

En el análisis de este tipo de vinculación se plantea que el desplazamiento en la dirección normal al vínculo N_v (ver Figura 2.11) debe ser nulo:

$$u_j \cos \delta - v_j \operatorname{sen} \delta = 0 \quad (2.109)$$

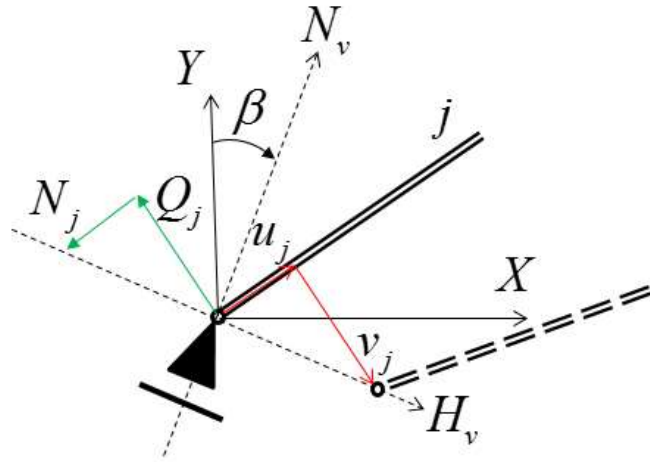


Figura 2.11: Representación de los esfuerzos y desplazamientos en el extremo de la barra j que posee un vínculo simple inclinado.

Observando la Figura 2.11, también debe anularse el esfuerzo en la dirección H_v . Esto significa plantear que:

$$Q_j \cos \delta + N_j \operatorname{sen} \delta = 0 \quad (2.110)$$

Continuando con el análisis de los desplazamientos, teniendo en cuenta que

$$\delta = \theta - \beta \quad \Rightarrow \quad u_j \cos(\theta - \beta) - v_j \operatorname{sen}(\theta - \beta) = 0$$

En el origen de la barra j , o sea en $\xi_j = 0$, y conociendo el desarrollo en series de potencias, es posible escribir:

$$B_{j,0} \cos(\theta - \beta) - A_{j,0} \sin(\theta - \beta) = 0$$

donde

$$B_{j,0} = A_{j,0} \frac{\cos \beta \sin \theta - \sin \beta \cos \theta}{\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta} \quad (2.111)$$

Retomando la expresión (2.87) y reemplazando los esfuerzos por lo visto en (2.54 a, b):

$$\begin{aligned} N_j &= F_{1,j} u'_j(\xi_j) & Q_j &= -J_{3,j} v'''_j(\xi_j) \\ -J_{3,j} v'''_j(\xi_j) \cos(\theta - \beta) + F_{1,j} u'_j(\xi_j) \sin(\theta - \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

De la misma manera que en el estudio de los desplazamientos, considerando que el vínculo se encuentra en el origen de la barra j ($\xi_j = 0$) y teniendo en cuenta el desarrollo en serie de potencias:

$$J_{3,j} A_{j,3} \varphi_{3,0} (\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta) = F_{1,j} B_{j,1} \varphi_{1,0} (\sin \theta \cos \beta - \sin \beta \cos \theta) \quad (2.113)$$

En la cual se puede obtener uno de los coeficientes de la serie de potencias en función del otro:

$$B_{j,1} = A_{j,3} \frac{J_{3,j} \varphi_{3,0} (\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta)}{F_{1,j} \varphi_{1,0} (\sin \theta \cos \beta - \sin \beta \cos \theta)} \quad (2.114)$$

El coeficiente correspondiente al momento nulo en el comienzo de la barra es otro de los datos en este tipo de vínculos, por lo que $M_j(0) = 0$ corresponde a $v_j''(0) = 0$, lo que implica que el coeficiente $A_{j,2} = 0$.

Resumiendo lo desarrollado para vínculos inclinados, es posible indicar que las incógnitas son los coeficientes $A_{j,0}$, $A_{j,1}$ y $A_{j,3}$, ya que al coeficiente $B_{j,0}$ se lo calcula con la expresión (2.87); al $B_{j,1}$ con la expresión (2.91) y además $A_{j,2} = 0$ debido al momento nulo en el extremo de la barra j .

Capítulo 3

DESARROLLO Y DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE CÁLCULO DE VIBRACIONES

Introducción:

En este capítulo se analiza con un grado importante de detalle el programa completo que realiza el cálculo de las frecuencias naturales de un pórtico mediante la utilización de las series de potencias. Dicho programa se ha realizado íntegramente con el software de Matemática Simbólica Mathematica [1] en diferentes versiones, que fueron desde 8.0 a 10.0.

Se indica, en principio, como se deben ingresar los datos del pórtico en estudio, luego los primeros cálculos que organizan al pórtico para ser recorrido por el programa. Se detallan las funciones empleadas y su correspondencia con las expresiones que se obtuvieron en el Capítulo 2. Es importante destacar, que gran parte del programa es luego utilizado para los estudios de la estática y estabilidad del entramado.

Cargado de datos del entramado:

En el programa se deben ingresar primeramente una serie de datos particulares de cada entramado. Los mismos son los siguientes:

Nodos: Se debe colocar las coordenadas de los nodos, considerando un sistema de coordenadas globales, sin interesar el orden en que se anoten. Esto significa una matriz de tres columnas y tantas filas como nodos tenga la estructura. La primera columna corresponde al número del nodo, la segunda el valor de la abscisa y la tercera la ordenada correspondiente.

Barras: Se ingresa la matriz topológica de las barras, que posee 9 columnas y tantas filas como barras tenga el entramado. La primera columna indica el número de la barra, en la segunda y tercera columna correspondientemente, el nodo inicial y final de cada barra, sin importar que nodo se coloca primero, luego el programa se encargará de ordenarlo. Las columnas 4 y 5 son las que indican si la barra se encuentra articulada en su extremo (se coloca

un número 1) o empotrada al entramado (con un cero). A continuación en las columnas 6 a 9 se ingresan los valores de área, inercia, módulo de Young y densidad de cada barra respectivamente.

Vínculos: A continuación se ingresa una nueva matriz de dos columnas, y tantas filas como vínculos a tierra posea el entramado. En la primera columna se indica el número del nodo que posee la vinculación, en la segunda columna se debe indicar el tipo de vinculación: Empotram, CuasEmpotram, ArtDoble, ArtSimpl o Libre. Es posible también indicar vínculos elásticos, en este caso se deben colocar las tres constantes elásticas correspondientes a los desplazamientos horizontal, vertical y giro: k_{1j} , k_{2j} y k_{3j} .

Vínculos inclinados: es una nueva matriz en la que se indican las articulaciones simples o apoyos móviles que se encuentran inclinadas, si es que éstos existen en el entramado. Consta de 2 columnas y tantas filas como vínculos inclinados posea la estructura. En la primera columna se indica el número del nodo donde se encuentra el vínculo inclinado, en la segunda columna los ángulos en radianes que forma la vertical del vínculo con respecto a la vertical de referencia global, siendo un ángulo positivo generado en sentido horario, desde la vertical de referencia hacia la vertical del vínculo, los ángulos estarán en el intervalo abierto $(-\pi/2, +\pi/2)$.

Grado del polinomio para el desarrollo en series de potencias: aunque por defecto se elige de grado 30, es posible adoptar otro valor. Como se observará en los ejemplos del capítulo siguiente, en caso de necesitar conocer las primeras frecuencias naturales, la precisión es muy buena con solo utilizar grado 10, en caso de buscar frecuencias superiores, se debe aumentar el grado de la serie.

Cálculos iniciales

Previo a los desarrollos con series de potencias es necesario realizar una serie de procesos con el fin de determinar constantes propias del entramado.

Vínculo en un nodo con más de una barra: Para resolver el caso en que un vínculo se encuentra en un nodo al cual acceden más de una barra, se adiciona una nueva barra cuya longitud es la milésima parte de la barra más corta de la estructura. El extremo de esta nueva barrita genera el nuevo nodo donde se coloca el vínculo. Este artilugio matemático en el modelo asegura que a cada vínculo siempre acceda una y solo una barra. Existe una rutina

que agrega, al final de la matriz indicadora de nodos, los nuevos nodos, de la misma manera las nuevas barras, con constantes geométricas y mecánicas que resultan ser el promedio de las constantes ingresadas en las demás barras del entramado. También hay una rutina en donde se reubican los nuevos nodos vinculados y los vínculos inclinados.

Ordenamiento de las barras y de los nodos: Como parte de la investigación se ha desarrollado un algoritmo que reenumera las barras y los nodos en un proceso que va recorriendo un camino elegido en forma aleatoria, realizando esta tarea en forma iterativa, hasta lograr un camino óptimo para el cálculo

El programa que realiza esta tarea se describe a continuación:

Se eligen primero las barras que, saliendo de un vínculo, tienen en su otro extremo un nodo simple, en el cual acceden solo dos barras. En caso que esto no ocurra en la estructura, se elige al azar un nodo vinculado, luego detecta la barra que llega a ese nodo y el número de nodo al final de dicha barra, enumerando en forma correlativa la barra y el nodo, y comenzando ambas con el número 1. Luego elige aleatoriamente una de las barras que concurren a este último nodo, la que será parte del **camino** utilizado para recorrer el entramado, marcando las demás barras como **fuera del camino**. Continúa con este criterio hasta llegar a un nodo en que todas las barras estén marcadas (ya sea que tengan la marca de *camino* o *fuera del camino*); si en ese instante no quedan barras sin marcar en ningún lugar de la estructura, será éste el recorrido final, caso contrario retoma el ciclo seleccionando nuevamente un vínculo aleatoriamente. Se ha realizado un diagrama de flujo, ver Programa A en el Apéndice.

Con el nuevo camino marcado, se genera una matriz de correspondencia con dos columnas, la primera indica el número nuevo de la barra y la segunda el número indicado por el usuario al ingresar los datos, o sea el número que la barra poseía en su comienzo. De la misma manera hay otra matriz correspondencia de nodos. Luego un algoritmo que se encarga de reenumerar barras, con las características geométricas y mecánicas de cada una en la numeración indicada al comienzo, y de reenumerar los nodos, reubicando los vínculos con sus correspondientes características: empotramiento, cuasi empotramiento, articulación doble o simple, libre, vínculos inclinados y constantes elásticas.

Barras por nodo: Es necesario el reconocimiento de la cantidad de barras que concurren a cada nodo. Para ello se arma un vector correspondiente a cada nodo, cuyas componentes son

los números de las barras que arriban a ese nodo, de manera que estos vectores pueden tener una o más componentes, según la cantidad de barras que concurren a dicho nodo. Esto ayuda en la programación, especialmente en nodos a los cuales concurren más de una barra.

Ubicación de los nodos: se determinan las coordenadas de los nodos a los que concurren más de dos barras y el listado de las barras que concurren a dicho nodo.

Nodos con ecuaciones: significa la detección de los nodos en los que se plantearán las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones de equilibrio. Estos nodos están caracterizados por barras que tienen allí su extremo final.

Ubicación de los vínculos: esto significa detectar cuales barras poseen vínculos y reordenar su direccionamiento de forma tal que la barra tenga su origen local en el vínculo.

Cálculo de las constantes geométricas del pórtico: se refiere a la determinación de la longitud y esbeltez de las barras, ángulos relativos de las barras que concurren a un nodo, expresadas en las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3).

Cálculo de las constantes de cada barra: son las necesarias para el programa, ecuaciones (2.26 a 2.28) y guardan en su interior valores del módulo de elasticidad, inercia, área y longitud de cada barra. Se transcriben a continuación:

$$J_{2,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^2} \quad J_{3,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^3} \quad F_{1,j} = \frac{E_j F_j}{a_j}$$

Análisis de las incógnitas:

Cada barra posee como incógnitas a los 6 coeficientes del desarrollo en series: A_0, A_1, A_2, A_3, B_0 y B_1 , ya que los demás están vinculados a éstos por medio de las expresiones de recurrencia (2.34) y (2.35):

$$A_{j,i+4} = \frac{\Omega_j^2 A_{j,i}}{\varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 \frac{B_{j,i}}{\varphi_{2,i}}$$

La cantidad total de incógnitas es igual a seis veces la cantidad de barras:

número de incógnitas = 6 x número de barras

Se arma una matriz de 6 columnas (cada columna representa un coeficiente: A_0, A_1, A_2, A_3, B_0 y B_1) y una fila por cada barra (un total de nb filas). En principio con todos los elementos iguales a cero.

Nota importante: es necesario remarcar, para una mejor comprensión del desarrollo de la tesis, la estrecha vinculación que tienen los seis coeficientes A_0, A_1, A_2, A_3, B_0 y B_1 , en el origen de la barra, con: el desplazamiento transversal v , el giro (en función de v'), el momento flector (en función de v''), el esfuerzo de corte (en función de v'''), el desplazamiento axial u y el esfuerzo normal (en función de u'). De la misma forma en los extremos de las barras con las sumatorias correspondientes. Lo dicho en el párrafo anterior lo sintetizamos en la Tabla 3.1 para la barra k y un desarrollo en series de potencias hasta el grado m :

| | Relación | En $\xi_k = 0$ | En $\xi_k = 1$ |
|----------------------------|----------|----------------|--|
| Desplazamiento transversal | v_k | $A_{k,0}$ | $\sum_{i=0}^m A_{k,i}$ |
| Giro | v'_k | $A_{k,1}$ | $\sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} A_{k,i+1}$ |
| Momento | v''_k | $A_{k,2}$ | $\sum_{i=0}^m \varphi_{2,i} A_{k,i+2}$ |
| Esfuerzo de Corte | v'''_k | $A_{k,3}$ | $\sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{k,i+3}$ |
| Desplazamiento axial | u_k | $B_{k,0}$ | $\sum_{i=0}^m B_{k,i}$ |
| Esfuerzo Normal | u'_k | $B_{k,1}$ | $\sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{k,i+1}$ |

Tabla 3.1: Relaciones entre los coeficientes de los desarrollos en series de potencias y las correspondientes derivadas de v y u para una barra k .

Continuando ahora con el análisis de las incógnitas, se debe recorrer todo el pórtico, nodo por nodo siguiendo el **camino** y se resuelven las barras que poseen vínculos. Esto significa que se marcan, en la fila correspondiente a esta barra k , los coeficientes del desarrollo en series de potencias de la barra que resulten ser incógnitas para cada vínculo.

En la Tabla 3.2 se enumeran los casos de vinculación estudiada.

| Vínculo | Coefficientes marcados |
|-----------------------|-----------------------------------|
| Empotramiento | $A_{k,2}$, $A_{k,3}$ y $B_{k,1}$ |
| Articulación doble | $A_{k,1}$, $A_{k,3}$ y $B_{k,1}$ |
| Articulación simple | $A_{k,1}$, $A_{k,3}$ y $B_{k,0}$ |
| Libre | $A_{k,0}$, $A_{k,1}$ y $B_{k,0}$ |
| Cuasi - empotramiento | $A_{k,2}$, $A_{k,3}$ y $B_{k,0}$ |

Tabla 3.2: Coeficientes de la serie de potencias marcados como incógnita en la barra k en caso de poseer vinculación a tierra.

Casos especiales:

En el caso de una barra que posea en su origen una articulación interna a la estructura y no se encuentre en el camino elegido para recorrer el entramado, se colocan como incógnitas a los coeficientes $A_{k,1}$, $A_{k,3}$ y $B_{k,1}$. Notar que en este caso es conocido el valor del momento flector nulo en el origen de la barra (correspondiente a la segunda derivada de v , o sea $A_{k,2}$) pero se desconoce el valor del giro en dicho punto, o sea la primera derivada de v .

Si la barra posee articulación a la estructura en su origen y además se encuentre en el **camino**, aquí se debe agregar a la barra una nueva incógnita libre. Será solamente la correspondiente al giro en su comienzo, $A_{k,1}$.

Si una barra, que se encuentra en el **camino**, está articulada a la estructura en su extremo final (esto significa que no transmite momento flector ni giro) y desde ese nodo salen más de una barra que NO se encuentran articuladas entre sí, se debe crear una nueva incógnita $A_{k,1}$

en una de ellas. Esto agregará una nueva ecuación de compatibilidad geométrica (giro) entre la barra a la cual se le adicionó la incógnita y cada una de las demás barras salientes del nodo.

Luego se vuelve a recorrer todo el pórtico nodo a nodo, saltando las barras marcadas anteriormente con los vínculos y agregando nuevas incógnitas libres en las barras que **no** se encuentren en el **camino** marcado anteriormente, o sea las que están marcadas con la bandera **fuera del camino**. Esto significa que se marca, en la fila correspondiente a esta barra k , los coeficientes $A_{k,2}$, $A_{k,3}$ y $B_{k,1}$. Estas barras también llevan una bandera de marcación con el fin de no agregar nuevas incógnitas en el otro extremo de la misma barra ya marcada, o sea evitar que la misma barra se analice en dos oportunidades, una en cada extremo de la misma. Programa B en el Apéndice.

El cálculo del total de incógnitas libres *nil* que posee el entramado simplemente se realiza contando el total de marcas que se colocaron en los ítems anteriores.

A continuación se le asigna un número 1 a la primera incógnita y ceros a todas las demás; se recorre el programa obteniéndose la primera columna de ecuaciones, luego se realiza este proceso asignándole un 1 a cada incógnita y ceros a las demás. Esto nos conduce a un proceso en que se recorre el programa tantas veces como incógnitas libres posea el entramado (*nil* veces). Para realizar esta tarea, en el programa se le asigna a cada coeficiente del desarrollo en series de potencias 3 subíndices, $A_{j,i,p}$. El primer subíndice j , indica que el coeficiente pertenece a la barra j , numerados de 1 a la cantidad de barras del entramado nb ($j = 1, 2, \dots, nb$). El segundo subíndice i es el grado de la potencia en el desarrollo en series de potencias, ($i = 1, 2, \dots, m$), por defecto el programa toma desarrollos hasta el grado $m = 30$, pero este valor es posible cambiarlo. El tercer subíndice p es el orden en que se recorren los coeficientes dentro del programa, con valores desde 1 a *nil* ($p = 1, 2, \dots, nil$). Programa C en el Apéndice.

El párrafo anterior introduce un algoritmo que recorre la matriz generada con las marcas de las incógnitas libres, asignándole un número 1 a los lugares marcados, e incrementando el valor de p (desde 1 a *nil*, cantidad de incógnitas libres) y dándole el valor ceros a las demás incógnitas para cada valor de p .

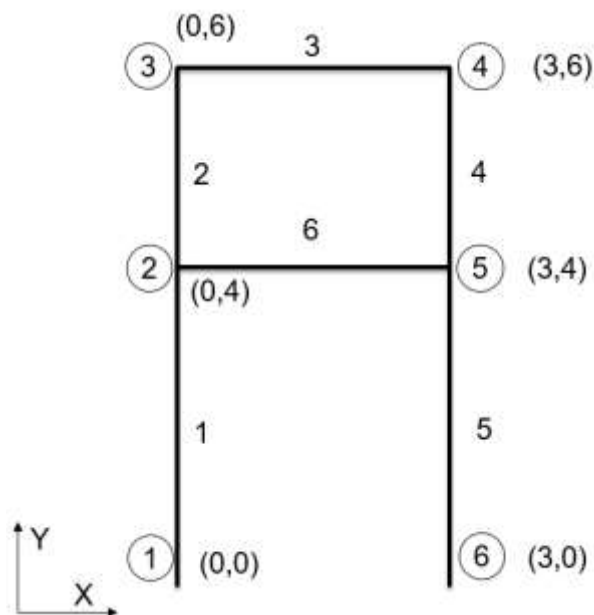


Figura 3.1: Pórtico analizado con 6 barras y 6 nodos. Con vínculos a tierra ubicados en los nodos 1 y 6.

Con fines de aclarar mejor este algoritmo explicado en el último párrafo, se analiza el ejemplo de la Figura 3.1. Se trata de un entramado de 6 nodos con 6 barras, que posee vínculos a tierra en los nodos 1 y 6. Para este ejemplo se tomarán ambos extremos articulados. Se supone que ya ha aplicado el algoritmo que determina el camino que recorre el programa. El mismo estaría formado por las barras 1, 2, 3, 4. Las incógnitas son los coeficientes de las articulaciones correspondientes a las barras vinculadas, 1 y 5: $A_{1,1,p}$, $A_{1,3,p}$ y $B_{1,1,p}$, (de la barra 1) $A_{5,1,p}$, $A_{5,3,p}$ y $B_{5,1,p}$, (de la barra 5) además de los que se adicionan en el nodo 2, ya que el camino sigue al pasar de la barra 1 a la 2. La barra 6 queda fuera del camino, en tal caso se agregan las incógnitas: $A_{6,1,p}$, $A_{6,3,p}$ y $B_{6,1,p}$. En este ejemplo hay un total de 9 incógnitas, o sea que $nil = 9$. Se forma entonces la matriz siguiente:

$$mat = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz contiene 6 filas, correspondiendo la 1° fila a la barra 1, la 2° a la barra 2 y así hasta la barra 6. Las columnas corresponden a los 6 coeficientes de cada barra: $A_{k,0,p}$, $A_{k,1,p}$, $A_{k,2,p}$, $A_{k,3,p}$, $B_{k,0,p}$ y $B_{k,1,p}$. Los elementos indicados con un 1 en la matriz son los que llevan las incógnitas libres.

Para este ejemplo concretamente y para fijar ideas, al variar el subíndice p desde 1 al total de incógnitas nil , y recorriendo la matriz antes mencionada, el algoritmo realiza lo siguiente:

En la barra 1:

$p=1 \rightarrow A_{1,1,1}=1$, y los demás nulos: $A_{j,i,1}=0$ (para $j \neq 1$, $i \neq 1$), $B_{j,i,1}=0$ ($\forall i, \forall j$).

$p=2 \rightarrow A_{1,3,2}=1$ y los demás nulos: $A_{j,i,2}=0$ (para $j \neq 1$, $i \neq 3$), $B_{j,i,2}=0$ ($\forall i, \forall j$).

$p=3 \rightarrow B_{1,1,3}=1$ y los otros nulos: $A_{j,i,3}=0$ ($\forall i, \forall j$), $B_{j,i,3}=0$, (para $j \neq 1$, $i \neq 1$).

En la barra 5:

$p=4 \rightarrow A_{5,1,4}=1$, y los demás nulos: $A_{j,i,4}=0$ (para $j \neq 5$, $i \neq 1$), $B_{j,i,4}=0$ ($\forall i, \forall j$).

$p=5 \rightarrow A_{5,3,5}=1$ y los demás nulos: $A_{j,i,5}=0$ (para $j \neq 5$, $i \neq 3$), $B_{j,i,5}=0$ ($\forall i, \forall j$).

$p=6 \rightarrow B_{5,1,6}=1$ y los otros nulos: $A_{j,i,6}=0$ ($\forall i, \forall j$), $B_{j,i,6}=0$, (para $j \neq 5$, $i \neq 1$).

En la barra 6:

$p=7 \rightarrow A_{6,1,7}=1$, y los demás nulos: $A_{j,i,7}=0$ (para $j \neq 6$, $i \neq 1$), $B_{j,i,7}=0$ ($\forall i, \forall j$).

$p=8 \rightarrow A_{6,3,8}=1$ y los demás nulos: $A_{j,i,8}=0$ (para $j \neq 6$, $i \neq 3$), $B_{j,i,8}=0$ ($\forall i, \forall j$).

$p=9 \rightarrow B_{6,1,9}=1$ y los otros nulos: $A_{j,i,9}=0$ ($\forall i, \forall j$), $B_{j,i,9}=0$, (para $j \neq 6$, $i \neq 1$).

Nota: a continuación se obviará colocar el tercer subíndice con fines de simplificar la escritura de las fórmulas.

Gráfico del entramado.

Dado que Mathematica no es precisamente un programa para realizar gráficos sino que se trata de un programa orientado al cálculo, de allí que la tarea de visualizar el entramado requiere de una porción de programa. Se ha desarrollado una subrutina que toma los datos necesarios para realizar un dibujo del pórtico que se está estudiando, indicando donde se encuentran los extremos de barras vinculadas. Esto simplemente ayuda a verificar visualmente que los datos ingresados coincida con el pórtico que se quiere analizar, sobre todo en lo que respecta a la matriz topológica que indica el nodo origen y final de cada barra. Si existe algún error en el ingreso de estos datos, los mismos se detectan al observar la gráfica.

Funciones.

En la siguiente etapa, se ingresan una serie de funciones que luego serán llamadas por el programa, cuando éste vaya recorriendo el **camino** antes elaborado, con fines de calcular el entramado. En cada una de estas, se requiere una serie de datos para ser evaluadas, que el mismo programa proveerá cuando necesite convocarlas.

Se indican a continuación cuáles son dichas funciones y específicamente con que fórmula de las desarrolladas en el Capítulo 2, están vinculadas. En la mayoría de los casos se ha transcritto la expresión a la que se refiere. El nombre que poseen es el mismo con que se las denominó dentro del programa. Observar que no hay tildes en dichos nombres y en algunos de ellos se trata de una combinación de palabras con letras mayúsculas en su expresión escrita.

recurrencia está en función de la barra j , y es la encargada de vincular a los coeficientes de los desarrollos en series de potencias (2.34) y (2.35). Los mayores o iguales a 4 en el desarrollo de la función desplazamiento transversal (correspondientes a los coeficientes $A_{j,i}$) y mayores o iguales a 2 en la función de desplazamiento axial (correspondientes a los coeficientes $B_{j,i}$). De esta manera, en cada barra, independientemente del grado de potencia máxima requerida, quedan solo 6 coeficientes que, en principio, son las incógnitas. Ellos son los cuatro primeros del desplazamiento transversal y los dos primeros del desplazamiento axial:

$$A_{j,i+4} = \frac{\Omega_j^2 A_{j,i}}{\varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 \frac{B_{j,i}}{\varphi_{2,i}}$$

geométricas se refiere a las tres condiciones de compatibilidad geométricas dadas por las expresiones (2.37a, b, c), las mismas están en función de dos barras que concurren a un nodo, una de ellas conocida (la barra j) y la otra desconocida (la barra k), que toma los valores ya calculados de la barra j :

$$B_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i}$$

$$A_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i}$$

$$A_{k,1} = \frac{a_k}{a_j} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1}$$

giro es una sola ecuación de compatibilidad geométrica (2.38d) donde intervienen los giros de dos barras que concurren a un nodo y ambas tienen su origen local en el mismo:

$$0 = a_j A_{k,1} - a_k A_{j,1}$$

geométricasEsp son solamente dos condiciones de compatibilidad geométricas especiales (2.37a, b) y se utilizan en el inicio de una barra donde hay una articulación en la barra desconocida, por lo tanto aparecen solo los desplazamientos y NO el giro, ya que en esta situación este giro es desconocido.

ecuacomp son las ecuaciones de compatibilidad geométricas (2.38a, b, c). Se las utiliza para vincular dos barras, la j y la k que concurren a un nodo y ambas ya han sido evaluadas anteriormente:

$$\sum_{i=0}^m B_{k,i} - \left(C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} \right) = 0$$

$$\sum_{i=0}^m A_{k,i} - \left(C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} \right) = 0$$

$$a_j \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{k,i+1} - a_k \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} = 0$$

ecuacompactEspeciales son solamente dos ecuaciones de compatibilidad geométricas (2.38a, b), que se realizan en el extremo final de una barra, en donde se encuentra una barra articulada al entramado. Por lo tanto aparecen solo los desplazamientos y NO el giro, ya que en esta situación el giro es desconocido.

equi son las tres condiciones de equilibrio en un nodo, (2.62), (2.63) y (2.64). Están en función del nodo y de las barras que concurren al mismo. Aquí la barra k toma valores del total de las barras entrantes al nodo (nbe) y del total de las barras salientes del nodo (nbs).

$$A_{k,3} = \frac{-1}{J_{3,k} \varphi_{3,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(J_{3,b} C_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} S_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) \right]$$

$$B_{k,1} = \frac{1}{F_{1,k} \varphi_{1,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(-J_{3,b} S_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} C_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) \right]$$

$$A_{k,2} = \frac{-1}{J_{2,k} \varphi_{2,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} J_{2,b} \varphi_{2,0} A_{b,2} \right]$$

CondEquiEsp son solamente dos condiciones de equilibrio (2.62) y (2.63), que se utilizan donde hay una articulación, por lo que no se transmite momento en el nodo ($A_{k,2} = 0$), solo esfuerzos normales y transversales. Están en función del nodo y las barras que a él concurren.

ecuequi son las tres ecuaciones de equilibrio en un nodo, (2.65), (2.66) y (2.67). Están en función del número del nodo y de las barras que concurren a dicho nodo.

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) = 0$$

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) = 0$$

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) = 0$$

ecuequiEsp son dos ecuaciones de equilibrio especiales (2.65) y (2.66), que se realizan en un nodo en el cual concurren solamente dos barras y las mismas están articuladas entre ellas. En este caso el momento flector es nulo, o no se transmite momento de una a otra barra.

ecuaMomNulo es la ecuación que se plantea en el extremo final de una barra conocida, en donde hay una articulación a la estructura (no a tierra). Se debe exigir que el momento sea nulo (2.67).

$$J_{2,k} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{k,i+2} = 0$$

vinculo está en función de la barra j que lo posee en su extremo inicial (2.108):

$$A_{j,0} = -K_{1j} \varphi_{3,0} A_{j,3}$$

$$B_{j,0} = K_{2j} \varphi_{1,0} B_{j,1}$$

$$A_{j,1} = K_{3j} \frac{\varphi_{2,0}}{\varphi_{1,0}} A_{j,2}$$

vinculoinclinado está en función de la barra j que posee un vínculo inclinado en su extremo inicial (2.111) y (2.114):

$$A_{j,2} = 0$$

$$B_{j,0} = A_{j,0} \frac{\cos \beta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \beta \cos \theta}{\cos \beta \cos \theta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta}$$

$$B_{j,1} = A_{j,3} \frac{J_{3,j} \varphi_{3,0} (\cos \theta \cos \beta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta)}{F_{1,j} \varphi_{1,0} (\operatorname{sen} \theta \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \theta)}$$

Programa.

Con los datos calculados anteriormente y las definiciones de las funciones, se ingresa a la parte del programa propiamente dicho, que recorre la estructura siguiendo el **camino** indicado en el ítem **cálculos iniciales**. Ver diagrama de flujo en Apéndice, Programa D.

Comienza recorriendo todos los nodos resolviendo los vínculos que encuentre, utilizando las funciones **vinculo** o **vinculoinclinado**, según corresponda, en la barra j que concurre al nodo vinculado. Luego le realiza la **recurrencia** a dicha barra j , que queda marcada (con intención de no repetir la recurrencia, e indicar que dicha barra está *solucionada* en lo que respecta a los coeficientes del desarrollo en series de potencias). Para marcar la barra, se agrega una séptima columna de ceros a la matriz **mat** en la cual se coloca una bandera cada vez que una barra pase por recurrencia. En esta instancia, todas las barras que contienen un vínculo en uno de sus extremos, se las considera *resueltas*, ya que han pasado por la recurrencia de los coeficientes.

Luego se recorre nuevamente el entramado, siguiendo el **camino**, evitando los nodos con vínculos. Esto asegura que siempre encontrará al menos dos barras en cada nodo, y una de ellas seguro que ya estará *resuelta*. Se realizan las siguientes acciones:

Análisis de las condiciones geométricas, esenciales o primarias

- En cada nodo, ya es conocido el vector que contiene el número de las barras que concurren al mismo, de manera que selecciona la barra que se encuentra en el **camino**, y ya ha sido *resuelta*. Las demás barras obtendrán sus coeficientes en función de esta barra.
- Se verifica si la barra se encuentra articulada a la estructura en su extremo final y si en ese extremo existen otras barras NO articuladas entre sí, y que tengan allí su origen; en tal caso se plantea la ecuación de **giro** entre ellas.

- Se comprueba si alguna de las otras barras que concurre al nodo ya ha pasado por **recurrencia**, en tal caso se realizan las ecuaciones de compatibilidad geométricas, **ecuacomp**.
- En caso que haya articulaciones al entramado en alguna de las barras se realizan las dos ecuaciones de Compatibilidad, llamando a **ecuacompEspeciales**.
- Si se trata de un nodo en donde concurren barras que NO han sido evaluadas aun, se realizan las condiciones de compatibilidad geométricas, **geometricas**, entre cada una de las barras del nodo y la que ya trae los datos; luego se las marca a todas como evaluadas realizándole también la **recurrencia**.

Análisis de las condiciones de Equilibrio, Naturales o Secundarias

- En el caso de que las barras del nodo estén marcadas con la **recurrencia**, o sea que ya han sido evaluadas, se les realizan las tres ecuaciones de equilibrio, **ecuequi**, caso contrario son las tres condiciones de equilibrio, **equi**.
- Si la barra tiene en su extremo una articulación al entramado, se plantea la ecuación de momento nulo, **ecuaMomNulo**. En el caso que la articulación se encuentre en el origen local de la barra j , se anulan los coeficientes $A_{j,2}$.
- En la situación particular de un nodo al cual acceden solamente dos barras, y existe una articulación entre ellas, se realizan las dos condiciones de equilibrio, **CondEquiEsp**, y la ecuación de momento nulo, **ecuaMomNulo**.

Cálculo de autovalores.

Luego de haber recorrido todo el camino, todas las barras han pasado por la **recurrencia**, o sea que han sido evaluados sus coeficientes. Luego se procede a armar la matriz con las ecuaciones, a la cual se calculará su determinante. Programa C del Apéndice.

En cada oportunidad que el programa, descripto anteriormente, realiza una ecuación, ésta es almacenada como un elemento $ec_{i,p}$ en donde $i = 1, \dots, nil$ y $p = 1, \dots, nil$. Esta matriz cuadrada de orden nil es a la cual se le calculan los valores de ω que anulen el determinante. Dichos valores, o autovalores, son las frecuencias naturales del entramado.

Al utilizar el programa Mathematica [1], existe la posibilidad de que realice el cálculo simbólico del determinante, generando un polinomio de alto orden en la variable ω , ya que

cada elemento de la matriz es un polinomio en variable ω . Luego se puede solicitar al mismo programa que calcule las raíces de dicho polinomio. Este proceso demora una gran cantidad de tiempo, de manera que se ha optado por realizar dicho cálculo empleando un método numérico como lo es el método de bisección. Programa E en el Apéndice.

Método de bisección

Se utiliza este método en el programa para analizar el determinante de la matriz comentada en el párrafo anterior hasta encontrar los valores de ω que anulen el determinante, seccionando los intervalos de búsqueda.

Se comienza con un valor inicial de ω muy pequeño ($\omega_0 = 0.01$, y es posible cambiarlo); se calcula el valor del determinante y se incrementa en un valor $\Delta\omega$ (ejemplo $\Delta\omega = 4$ con posibilidad de ser cambiado), y se vuelve a calcular el determinante. En caso que los dos valores calculados de los determinantes posean el mismo signo, se sigue incrementando ω , caso de tener signos opuestos, el incremento cambia el signo y pasa a valer la mitad del anterior (bisección). Se continúa de esta manera hasta que dos valores consecutivos de ω estén tan próximos como se quiera, para esto se debe ingresar un valor del error permitido ε (por defecto es $\varepsilon = 0.0001$). El valor de ω encontrado es la primera frecuencia ω_1 . Se continúa a partir de la frecuencia hallada con el incremento original $\Delta\omega$, con fines de buscar la siguiente frecuencia, hasta un total de 5 (valor que también es posible de cambiar). Finalmente imprime los valores de las 5 frecuencias naturales del entramado.

Gráficos de las formas modales.

Luego de obtenidas las frecuencias naturales del entramado, se deben mostrar las formas modales correspondientes a cada una de estas frecuencias. Como se ha aclarado antes, el programa que se ha utilizado Mathematica [1] es un programa de matemática simbólica, donde realizar gráficos es mucho más complejo que en programas gráficos, haciendo más lenta esta parte del cálculo.

Se explica a continuación el método que se ha utilizado para conducir la búsqueda de autovectores de un problema no lineal, a un problema lineal equivalente.

El programa Mathematica [1] contienen el algoritmo optimizado para resolver el problema de valores propios aplicados a una matriz para los denominados problemas lineales,

utilizando los comandos Eigenvalues, para los valores propios, Eigenvectors, para los vectores propios o Eigensystem para obtener ambos.

Hasta el momento se tiene la matriz en donde sus elementos son polinomios en variable ω . Se han calculado las frecuencias naturales ω_j resultante de anular el determinante de esa matriz. Al reemplazar cada uno de estas ω_j en la matriz, generan una matriz cuadrada numérica singular para cada frecuencia natural. Uno de los autovalores de esta matriz es nulo. Identificando la posición de este autovector nulo, se selecciona el autovector correspondiente. Las componentes de este autovector se reemplazan en las incógnitas de nuestro problema para luego recorrer el pórtico y encontrar todos los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de cada uno de los tramos del pórtico.

Conociendo ahora, para cada frecuencia natural, las funciones polinómicas correspondientes a los desplazamientos axiales y transversales, se ingresa a un subprograma que realiza el gráfico del pórtico.

Capítulo 4

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE VIBRACIONES NATURALES DE ENTRAMADOS

Introducción:

Con el fin de ilustrar lo propuesto en los dos capítulos anteriores, se presentan aquí un grupo de ejemplos de entramados, a los que se les calculan las primeras frecuencias naturales de vibración las formas modales.

Los resultados obtenidos con el programa elaborado con Mathematica [1], se comparan con los calculados mediante el Software comercial de elementos finitos Algor [4]. En este programa se ha utilizado el análisis de tipo LINEAL, calculando las frecuencias naturales SIN incluir esfuerzos en las barras -tracción o compresión- ni cargas adicionales en los nodos. Debe notarse también que los valores de frecuencias obtenidos en Algor, que figuran en las imágenes que se han colocado correspondientes a las formas modales, están afectados por 2π en el pasaje de unidades, de radianes por segundo a hertz. Algunos resultados son también comparados con los obtenidos mediante la utilización de un programa de elementos finitos realizado por De Rosa [44].

Es posible elegir barras con diferentes características geométricas y físicas, pero para simplificar la carga de datos en los programas utilizados, se adoptan todas las barras iguales, de sección uniforme $F = 0.12 \text{ m}^2$, con módulo de elasticidad $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, las longitudes de las barras se toman en metros, el momento de inercia $J = 0,0036 \text{ m}^4$ y peso específico $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$.

Ejemplo 1

En primer lugar, se resuelve un pórtico cerrado simple, como se muestra en la Figura 4.1, formado por 6 barras y 6 nodos.

Se evalúa este primer ejemplo utilizando diferentes tipos de vinculación a tierra que se detallan a continuación:

Biarticulado: se muestran los valores de las frecuencias naturales en la Tabla 4.1 en hertz, en donde se usa el programa desarrollado con Mathematica [1] con series de potencias de grados 10, 20 y 25, respectivamente. Se comparan además con los resultados obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4] y con el programa de elementos finitos desarrollado por De Rosa [44]. Se muestra en la Figura 4.2, el gráfico que produce el programa luego de cargar los datos del entramado, o sea las coordenadas de los nodos del pórtico, las barras y la ubicación de los vínculos, a los fines de verificar visualmente el pórtico a calcular previo a realizar el recorrido para obtener las frecuencias naturales.

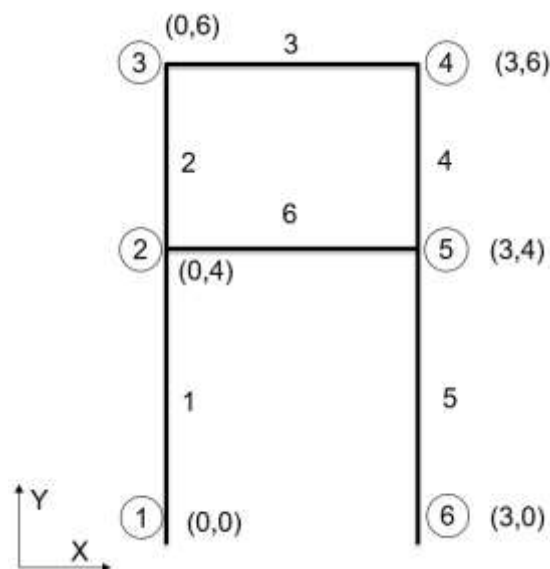


Figura 4.1: Entramado analizado con 6 barras y 6 nodos. Los vínculos a tierra se encuentran ubicados en los nodos 1 y 6. Las coordenadas de los nodos en el sistema global en metros.

Articulado - empotrado, se observan los resultados obtenidos en la Tabla 4.2.

Empotrado-libre, con los resultados en la Tabla 4.3, y en la Figura 4.3 los gráficos de las dos primeras formas modales obtenidos con el programa.

Empotrado- empotrado, con los valores obtenidos en la Tabla 4.4 y en la Figura 4.4 se comparan las formas modales obtenidas con series con los gráficos de Algor [4].

Empotrado y con articulaciones simples inclinadas, se muestran los resultados de las frecuencias naturales de este último caso para este entramado en la Tabla 4.5.

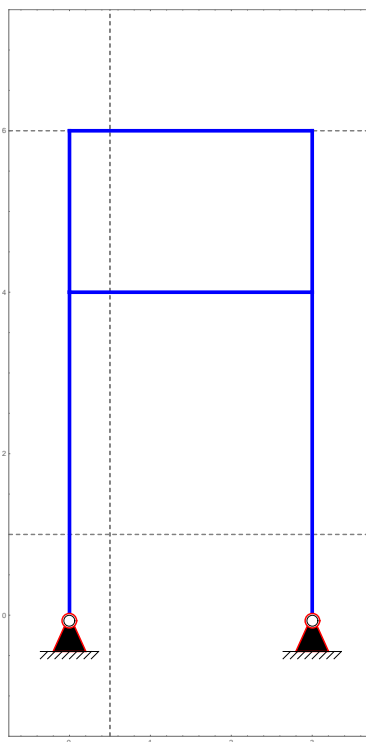


Figura 4.2: Entramado analizado con 6 barras y 6 nodos. Gráfico que muestra el programa, para el caso doblemente articulado.

Caso 1: Biarticulado

| Modo | Series de potencias | | | MEF [4] Algor | MEF [44] De Rosa |
|------|---------------------|----------|----------|------------------|---------------------|
| | 10 | 20 | 25 | | |
| 1 | 61.750 | 61.751 | 61.751 | 61.750 | 61.751 |
| 2 | 506.204 | 510.830 | 510.830 | 510.556 | 510.932 |
| 3 | 675.240 | 708.221 | 708.221 | 708.241 | 708.511 |
| 4 | 896.686 | 913.613 | 913.613 | 914.015 | 913.972 |
| 5 | 1041.070 | 1040.360 | 1040.360 | 1039.960 | 1041.220 |
| 6 | 1243.670 | 1240.330 | 1240.330 | 1239.920 | 1241.590 |

Tabla 4.1: Resultados de frecuencias naturales en hertz, obtenidos al analizar el pórtico biarticulado con series de potencias de grados 10, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4] y en el programa de elementos finitos desarrollado por De Rosa [44].

Caso 2: Articulado - empotrado

| Modo | Series de potencias | | | | Algor [4] |
|------|---------------------|----------|----------|----------|-----------|
| | 10 | 15 | 20 | 25 | |
| 1 | 98.220 | 98.222 | 98.222 | 98.222 | 98.2056 |
| 2 | 535.896 | 541.856 | 541.853 | 541.853 | 541.806 |
| 3 | 809.509 | 825.341 | 825.339 | 825.339 | 825.409 |
| 4 | 900.034 | 915.496 | 915.482 | 915.482 | 915.655 |
| 5 | 1172.650 | 1206.310 | 1206.940 | 1206.940 | 1206.108 |
| 6 | 1252.660 | 1247.460 | 1248.000 | 1248.000 | |

Tabla 4.2: Resultados obtenidos al analizar el pórtico articulado - empotrado con series de potencias de grados 10, 15, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4].

Caso 3: Empotrado-libre

| Modo | Series de potencias | | | | Algor [4] |
|------|---------------------|----------|----------|----------|-----------|
| | 10 | 15 | 20 | 25 | |
| 1 | 32.267 | 32.268 | 32.268 | 32.268 | 32.243 |
| 2 | 97.806 | 97.820 | 97.820 | 97.820 | 97.722 |
| 3 | 216.312 | 216.699 | 216.699 | 216.699 | 216.099 |
| 4 | 620.842 | 628.331 | 628.356 | 628.356 | 627.431 |
| 5 | 1014.100 | 993.772 | 994.186 | 994.187 | 989.187 |
| 6 | 1092.050 | 1063.660 | 1063.730 | 1063.730 | |

Tabla 4.3: Resultados obtenidos al analizar el pórtico empotrado - libre con series de potencias de grados 10, 15, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4].

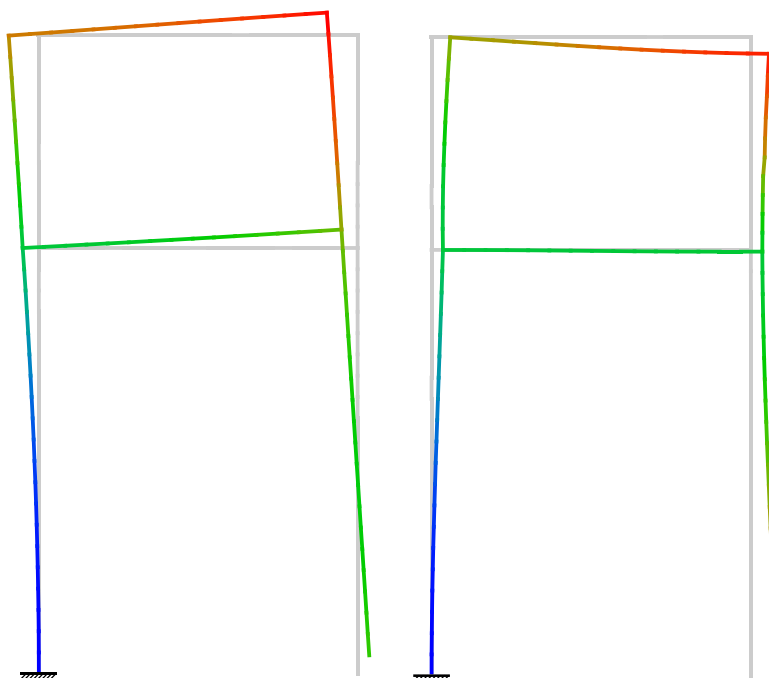


Figura 4.3: Primeras dos formas modales del pórtico empotrado-libre, obtenidas utilizando series de potencias.

Caso 4: Empotrado- empotrado

| Modo | Series de potencias | | | Algor [4] |
|------|---------------------|----------|----------|-----------|
| | 10 | 15 | 20 | |
| 1 | 124.015 | 124.030 | 124.030 | 124.002 |
| 2 | 592.200 | 603.611 | 603.609 | 603.581 |
| 3 | 879.876 | 906.325 | 906.305 | 906.620 |
| 4 | 920.177 | 1006.790 | 1006.700 | 1006.810 |
| 5 | 1225.700 | 1234.400 | 1234.580 | 1233.550 |
| 6 | 2377.430 | 1339.590 | 1340.720 | 1340.712 |

Tabla 4.4: Resultados obtenidos al analizar el pórtico empotrado - empotrado con series de potencias de grados 10, 15, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4].

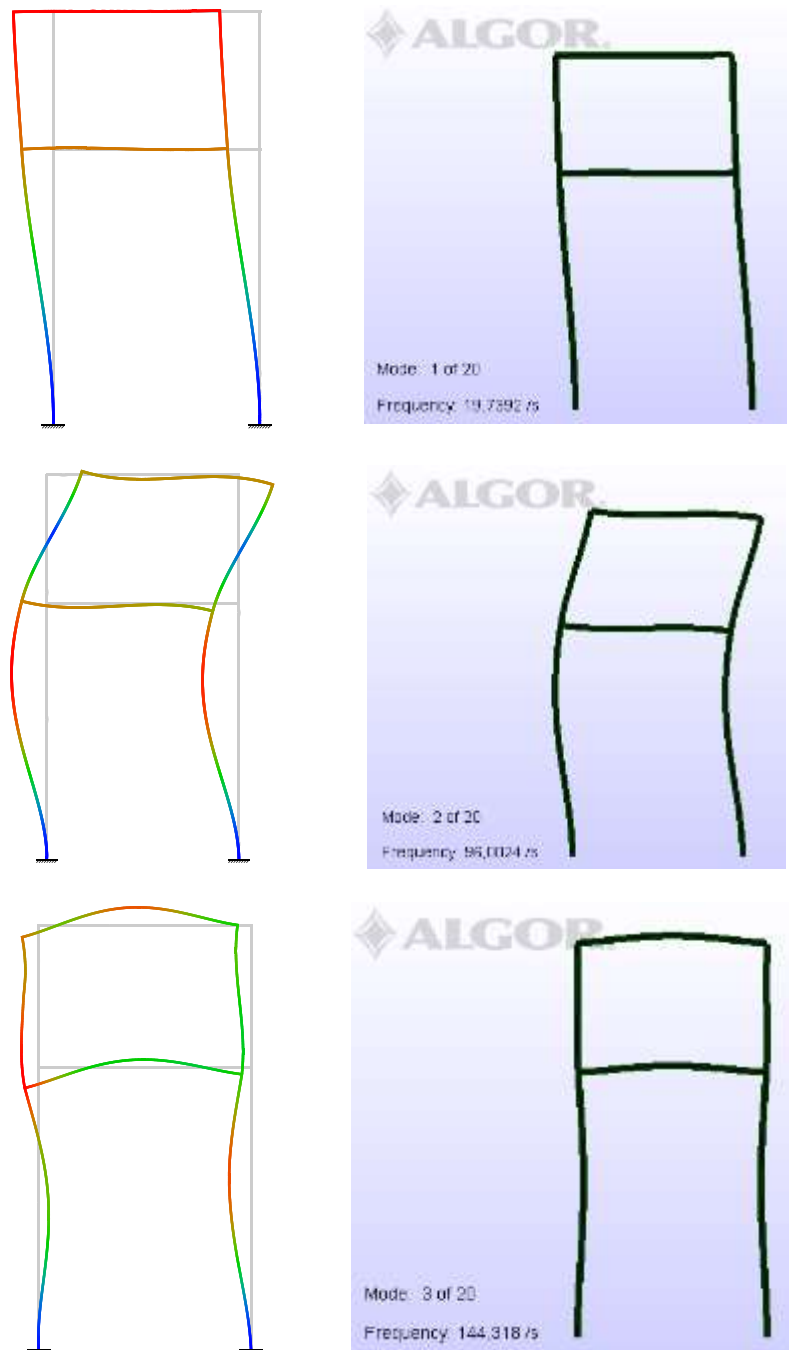


Figura 4.4 Primeras 3 formas modales del pórtico empotrado - empotrado, obtenidas con series de potencias comparadas con gráficos del Software Algor [4].

Caso 5: Empotrado en el nodo 6, con dos articulaciones inclinadas: en el nodo 1 con un ángulo de $-\pi/3$ respecto a la vertical del vínculo, y en el nodo 4 con $+\pi/6$.

| Modo | Serie de potencias, grado 30 | Algor [4] |
|------|------------------------------|-----------|
| 1 | 175.539 | 175.465 |
| 2 | 331.901 | 331.958 |
| 3 | 596.744 | 596.705 |
| 4 | 842.242 | 842.148 |
| 5 | 1206.397 | 1205.970 |

Tabla 4.5: Resultados obtenidos al analizar el pórtico con un empotramiento en el nodo 6 y dos articulaciones inclinadas en los nodos 1 y 4, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4].

NOTA: Utilizando la metodología propuesta en esta tesis, la resolución de este entramado, en todos los casos, requiere resolver un sistema con solo **9 incógnitas**. En las resoluciones con el método de elementos finitos [3-5], se han utilizado elementos viga, dividiendo a cada barra en 10 elementos, lo que conduce a un total de **180 incógnitas**.

Ejemplo 2

A los fines de mostrar un entramado más complejo, se presenta el pórtico de la Figura 4.5, que posee 12 nodos y un total de 18 barras. Utilizando los desarrollos en series de potencias, este pórtico se resuelve con **33 incógnitas**. Con el método de los elementos finitos [3-5], a 10 elementos por barra, suman unas **540 incógnitas**. Se muestran los resultados de las primeras frecuencias naturales en la Tabla 4.6.

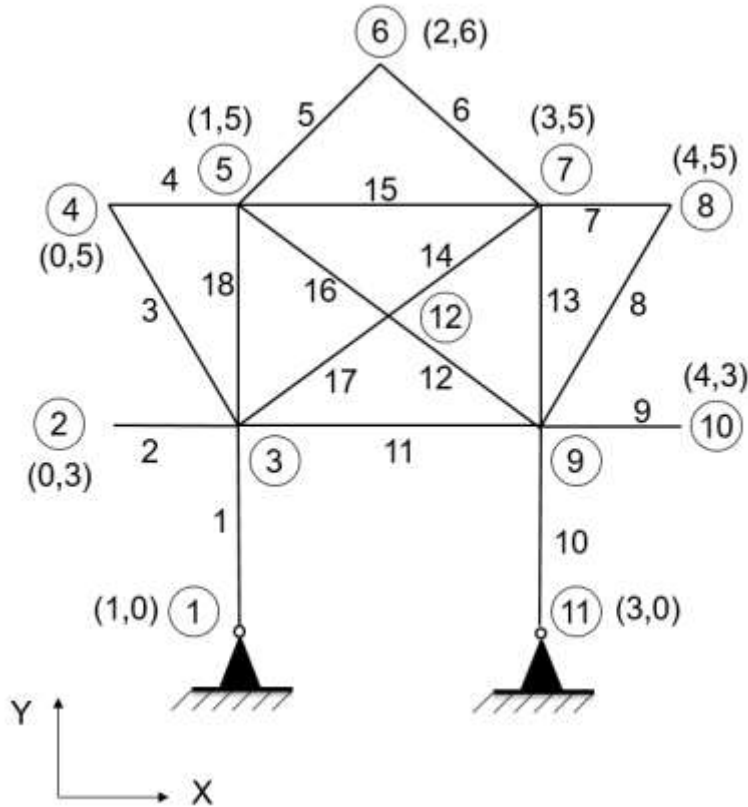


Figura 4.5: Pórtico analizado con 18 barras y 12 nodos. Los vínculos a tierra se encuentran ubicados en los nodos 1 y 11 (articulaciones), los extremos 2 y 10 son libres. Las coordenadas de los nodos en el sistema global en metros.

| Modo | Series de Potencias | | | | | | Algor [4] |
|------|---------------------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| | 10 | Error (%) | 30 | Error (%) | 50 | Error (%) | |
| 1 | 69.803 | +0.0017 | 69.803 | +0.002 | 69.803 | +0.002 | 69.802 |
| 2 | 551.361 | -0.0190 | 551.961 | +0.089 | 551.961 | +0.089 | 551.469 |
| 3 | 768.218 | -0.0068 | 768.349 | +0.0103 | 768.349 | +0.0103 | 768.27 |
| 4 | 1259.472 | -3.731 | 1308.517 | +0.0173 | 1308.517 | +0.0173 | 1308.291 |
| 5 | 1478.636 | -1.811 | 1506.147 | +0.015 | 1506.147 | +0.0149 | 1505.922 |

Tabla 4.6: Resultados obtenidos al analizar el entramado de 18 barras y 12 nodos, con series de potencias de grados 10, 30 y 50, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4].

En la Tabla 4.6 se mencionan los errores relativos, calculados como indica la expresión (4.1), entre los valores obtenidos al utilizar el método propuesto y los que se consiguen con el método de los elementos finitos Algor [4], con las condiciones planteadas (grado de los polinomios en series y cantidad de elementos en MEF).

$$\text{Error} = \frac{(\text{frec.Algor}) - (\text{frec.Series})}{(\text{frec.Algor})} \quad (4.1)$$

Es importante destacar, que el valor exacto no se conoce. Elementos finitos realiza una aproximación, que se mejora al aumentar la cantidad de elementos por barras, incrementando considerablemente el número de incógnitas. Con series, al aumentar el grado no crece la cantidad de incógnitas. Es posible concluir que si la serie tiende a infinito, se resolvería con la misma cantidad de incógnitas y se estaría obteniendo el valor exacto teórico de la frecuencia natural buscada.

Ejemplo 3

El siguiente entramado plano está formado por 11 barras, se encuentra vinculado a tierra por dos articulaciones, en los nodos 1 y 9, con dos vínculos libres: 4 y 7. Tiene la particularidad de que algunas barras están internamente articuladas al pórtico, tal es el caso de la barra 10 que se articula en el nodo 2 y la barra 11 que lo hace en el nodo 6. Se observa el entramado propuesto en las Figura 4.6, y en la Figura 4.7 se muestra el gráfico que produce el programa desarrollado.

Se encuentran las frecuencias naturales utilizando polinomios de grado 30 y comparados con el método de los elementos finitos Algor [4], los valores se muestran en la Tabla 4.7. En esta oportunidad, se emplean 24 incógnitas para resolver el pórtico con la metodología propuesta, siendo 330 las necesarias para MEF.

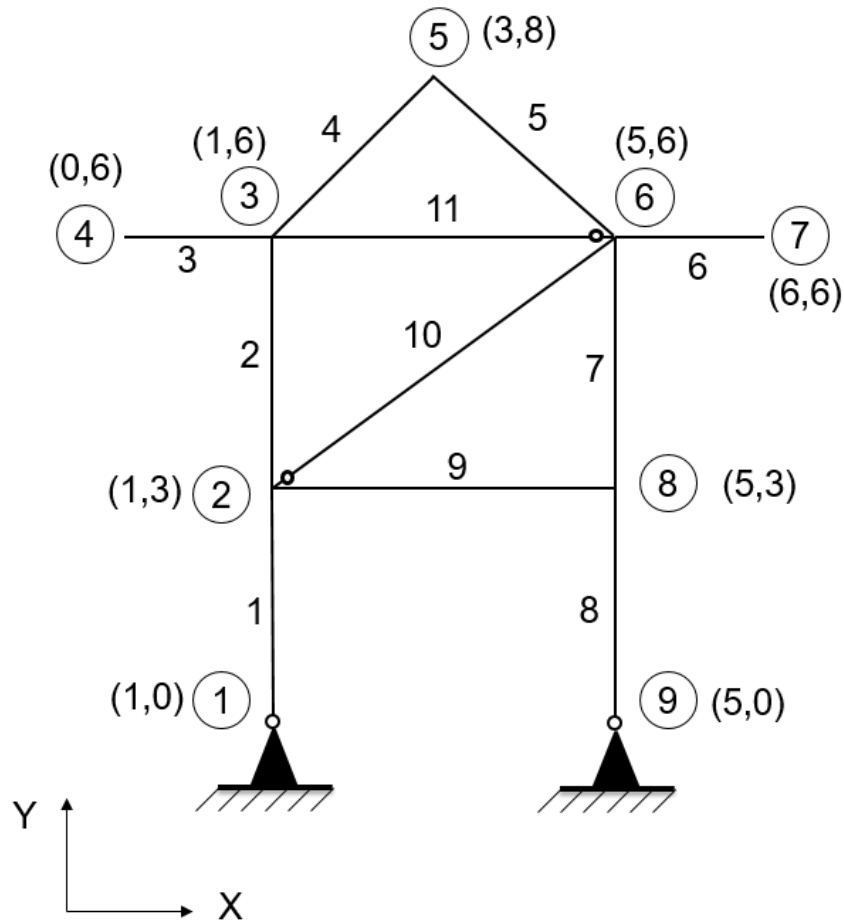


Figura 4.6: Entamado de 11 barras con dos articulaciones internas en la barra 10 en el nodo 2 y la barra 11 en el nodo 6. Con articulaciones a tierra en los nodos 1 y 9.

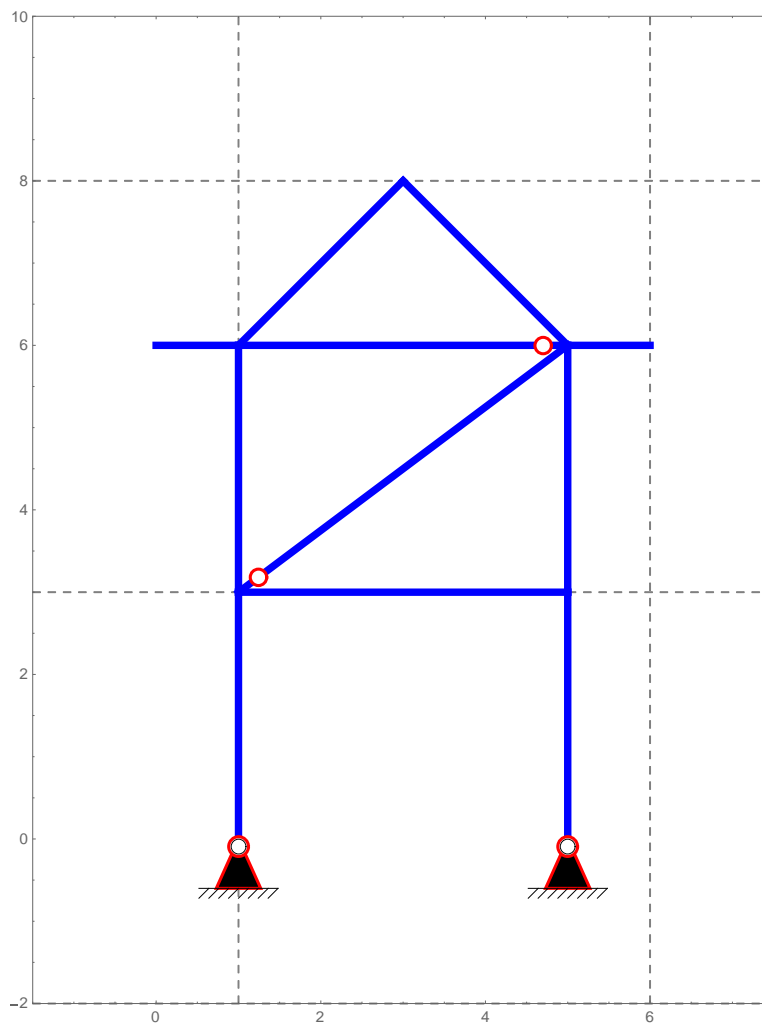


Figura 4.7: Entamado de 11 barras, dibujo que muestra el programa.

| Modo | Series de potencias grado 30 | Algor [4] |
|------|------------------------------|-----------|
| 1 | 62.813 | 62.813 |
| 2 | 463.083 | 463.170 |
| 3 | 498.215 | 497.875 |
| 4 | 630.807 | 630.580 |
| 5 | 766.089 | 765.851 |

Tabla 4.7: Resultados obtenidos al analizar el pórtico con articulaciones internas, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [4].

Conclusiones

La característica de mayor importancia a destacar de la solución por series al detectar las frecuencias naturales de un entramado es el número de incógnitas. Es siempre muy pequeña la cantidad de incógnitas que resuelve el conjunto estructural, cualquiera sea el número de barras del pórtico. Como contrapartida, otros métodos, tal como el conocido de los elementos finitos [3, 5], deben plantear forzosamente tres incógnitas por cada nodo. Por lo general, es necesaria la subdivisión de cada barra en pequeños elementos para garantizar un mejor resultado, lo que obliga a la proliferación de nodos, y por ende, aumenta la cantidad de incógnitas del problema a resolver.

Al utilizar series, las primeras frecuencias naturales requieren bajo grado en la potencia, con potencias hasta orden 10 hay muy buena aproximación, como se lo observa en los ejemplos. Para frecuencias mayores, es necesario aumentar este grado en los polinomios. Se debe tener muy en cuenta que también es necesario el aumento en la cantidad de elementos al utilizar MEF, **incrementando ampliamente la cantidad de incógnitas**, no sucediendo lo mismo al utilizar series de potencias, ya que la cantidad de incógnitas es independiente del orden del polinomio utilizado. Se lograría también, con este último método, una solución exacta en caso de poder considerar polinomios en donde, en el límite, el grado tienda a infinito.

Capítulo 5

RESOLUCIÓN DE ESTÁTICA EN ENTRAMADOS CON SERIES DE POTENCIAS

Introducción:

En el presente capítulo se muestra de que manera, utilizando desarrollos de series de potencias, se resuelven los entramados cuando los mismos se encuentran sometidos a esfuerzos y momentos. Estos esfuerzos pueden ser cargas verticales u horizontales en los nodos, momentos aplicados en los nodos, o bien cargas distribuidas transversales y/o axiales aplicadas a lo largo de las barras. Se obtienen los diagramas de los desplazamientos axiales y transversales, los esfuerzos de corte y normales, además de los diagramas de momentos [49].

De la misma forma que lo desarrollado en capítulos anteriores para el cálculo de las frecuencias naturales de vibración, el método tiene la ventaja que solo es necesaria la continuidad geométrica y estática en cada nodo. El número total de incógnitas es muy bajo y, en general, depende de la cantidad de vínculos a tierra y del número de barras que llegan a los nodos.

Planteo del problema

En principio, lo desarrollado para el cálculo dinámico en lo que respecta a las características geométricas y mecánicas del entramado, son similares. El pórtico se encuentra en un sistema de coordenadas de referencia X-Y. Con la siguiente nomenclatura:

nb es la cantidad total de barras.

nn es el número total de nodos.

j es el subíndice que denota la barra, $j = 1, 2, \dots, nb$.

n es el subíndice que denota el nodo, $n = 1, 2, \dots, nm$.

Las características de cada barra son las siguientes:

E_j Módulo de Young de la barra j .

ρ_j Densidad de la barra j .

F_j Área de la barra j .

J_j Momento de Inercia de la barra j .

α_j Ángulo entre la barra j y el eje de abscisas.

$\alpha_{j,k}$ Ángulo entre la barra j y la barra k .

a_j Longitud de la barra j .

X-Y Sistema de coordenadas globales.

x_j Coordenada local de la barra j .

Las unidades que se utilizan son las que seleccione cada usuario, en los ejemplos que se muestran en la presente tesis se ha empleado el sistema MKS.

Para esta instancia de cálculo es necesario conocer también los valores de los esfuerzos en los nodos y en las barras, que son datos en el problema a tratar.

En los lugares donde existen esfuerzos concentrados es necesario crear un nodo. Estos esfuerzos son, para el nodo i : H_i (horizontal), V_i (vertical) y μ_i (momento aplicado), considerándolos positivos cuando el sentido es el indicado en la Figura 5.1.

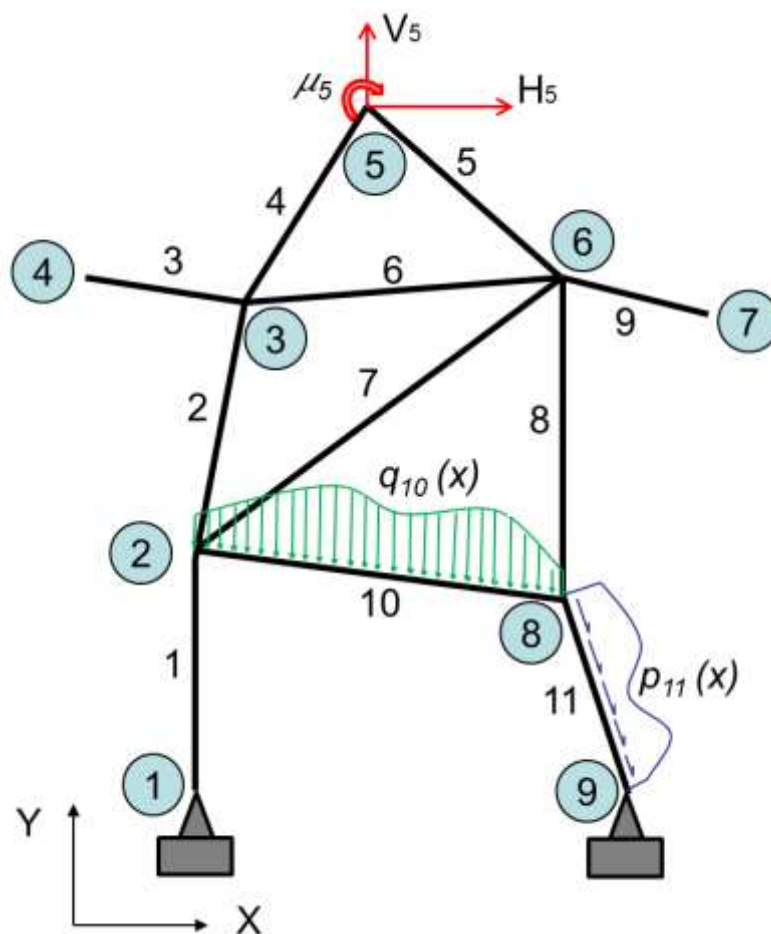


Figura 5.1: Esquema general de un entramado con cargas concentradas en el nodo 5, transversales distribuidas en la barra 10 y axiales distribuidas en la barra 11.

En lo que respecta a las cargas distribuidas axiales $p_j(x)$ y transversales $q_j(x)$ que se encuentran en la barra j , las mismas deben estar expresadas en su desarrollo con series de potencias, como se indica en la (5.1 a y b):

$$p_j(x_j) = \sum_{i=0}^{mp} p_{j,i} x_j^i \quad q_j(x_j) = \sum_{i=0}^{mq} q_{j,i} x_j^i \quad (5.1a, b)$$

Siendo mp y mq los máximos grados en los desarrollos en series de potencias de cada una de las cargas axiales y transversales respectivamente. Los valores de los coeficientes $p_{j,i}$ y $q_{j,i}$ son datos para cada barra j que posea cargas distribuidas. Si la carga es una función

trascendental, es posible hacer previamente el desarrollo en series de Taylor (o Mc Laurin como caso especial) de la expresión y expresarla como series de potencias. En el caso de existir cargas parciales en un tramo de una barra, es necesario colocar un nuevo nodo de modo de dividirla en barras para cada una de las cargas parciales, de forma que cada tramo tenga carga distribuida en toda su extensión. De la misma manera que si hay cargas concentrados en el medio de un tramo se debe crear un nodo donde se ubica el mismo.

Las ecuaciones gobernantes del problema estático son las siguientes

$$E_j J_j v_j'''(x_j) - q_j(x_j) = 0 \quad (5.2a)$$

$$E_j F_j u_j''(x_j) + p_j(x_j) = 0 \quad (5.2b)$$

Pasando las expresiones anteriores a coordenadas adimensionales, utilizando el mismo cambio de variables que se usó en el estudio dinámico:

$$0 \leq x_j \leq a_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1$$

$$\xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad (5.3)$$

Las ecuaciones (5.2a) y (5.2b) resultan:

$$E_j J_j v_j'''(\xi_j) - a_j^4 q_j(\xi_j) = 0 \quad (5.4a)$$

$$E_j F_j u_j''(\xi_j) + a_j^2 p_j(\xi_j) = 0 \quad (5.4b)$$

De la misma forma que en el Capítulo 2, la comilla, de ahora en más se refiere a la derivada respecto de la nueva variable. Siendo las expresiones de las cargas distribuidas axiales y transversales las que se muestran en las (5.1a, b).

Desarrollo en series de potencias

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales, de la misma forma que en el estudio de vibraciones, un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra [54, 55], con las siguientes expresiones:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (5.5a, b)$$

En donde, sus correspondientes derivadas de orden superior, se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_j'(\xi_j) &= \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} \xi_j^i \\ v_j''(\xi_j) &= \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2} \xi_j^i \\ v_j'''(\xi_j) &= \sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i \end{aligned} \quad (5.6a, b, c)$$

donde:

$$\varphi_{k,i} = \frac{(i+k)!}{k!} \quad (5.7)$$

Retomando las ecuaciones diferenciales que gobiernan nuestro problema (5.4a, b):

$$v_j'''(\xi_j) - \frac{q_j(\xi_j)}{J_{4,j}} = 0 \quad (5.8a)$$

$$u_j''(\xi_j) + \frac{p_j(\xi_j)}{F_{2,j}} = 0 \quad (5.8b)$$

Siendo:

$$J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^4} \quad F_{2,j} = \frac{E_j F_j}{a_j^2} \quad (5.9a, b)$$

Utilizando ahora las soluciones propuestas en serie de potencias en (5.1), (5.5) y (5.6):

$$\sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i - \frac{1}{J_{4,j}} \sum_{i=0}^m q_{j,i} \xi_j^i = 0 \quad (5.10a)$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} B_{j,i+2} \xi_j^i + \frac{1}{F_{2,j}} \sum_{i=0}^m p_{j,i} \xi_j^i = 0 \quad (5.10b)$$

Igualando los coeficientes de igual potencia en ambos desarrollos, las expresiones para la recurrencia resultan ser:

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad (5.11a)$$

$$B_{j,i+2} = - \frac{p_{j,i}}{F_{2,j} \varphi_{2,i}} \quad (5.11b)$$

Como puede apreciarse en la ecuación (5.11a), se vinculan los coeficientes $A_{j,i+4}$ con los coeficientes de las cargas $q_{j,i}$, y en la ecuación (5.11b), los $B_{j,i+2}$ con los $p_{j,i}$ lo que resulta en cada barra j un total de 6 incógnitas, a saber: $A_{j,0}$, $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, $A_{j,3}$, $B_{j,0}$ y $B_{j,1}$.

Condiciones de Compatibilidad Geométrica

De la misma forma que lo desarrollado en capítulos anteriores, para el caso de vibraciones, en cada nodo donde concurren m barras, se deben plantear $m-1$ condiciones de continuidad geométricas cuyas expresiones son:

$$B_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} \quad (5.12a)$$

$$A_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} \quad (5.12b)$$

$$A_{k,1} = \frac{a_k}{a_j} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} \quad (5.12c)$$

Con ellas se obtienen los coeficientes $A_{k,0}$, $A_{k,1}$ y $B_{k,0}$, de la barra k en función de la barra j , que considerando el orden del cálculo, debe ser previa a la barra k . En otras palabras, la barra j trae los valores de los coeficientes ya calculados, y la o las otras barras que salen de ese nodo, lo toman en función de los coeficientes de ésta. Es importante recordar que las barras que salen de un nodo, son evaluadas en cero ($\zeta_j = 0$), de manera que solo queda el primer coeficiente en el desarrollo en series. La barra j es evaluada en su extremo final ($\zeta_j = 1$). Esto significa que existe sumatoria de sus coeficientes.

Ecuaciones de compatibilidad geométrica

Hay situaciones donde se arriba a un nodo en donde hay más de una barra conocida. En este escenario se deben plantear las ecuaciones de compatibilidad geométricas con las barras de las cuales se conocen sus coeficientes en el desarrollo en series de potencias. En este caso, las barras son evaluadas en su extremo final, resultando sumatorias de coeficientes. Esta situación adiciona 3 ecuaciones más por cada barra en el contexto antes descrito. Lo antes dicho resulta ser uno de los principales adelantos producto de la presente investigación ya que, con esta metodología, se logra pasar de pórticos abiertos, previamente estudiados por otros autores [6-12], a entramados cerrados. Se ha denominado pórtico abierto a aquellos en los cuales en cada nodo solo concurren dos barras o bien existe un vínculo, y pórticos cerrados (o entramados) a aquellos en donde pueden arribar más de dos barras a un nodo y hasta pueden existir vínculos en nodos a los que concurren más de una barra, caso de los marcos cerrados (ejemplo 6.5, Figura 6.10).

Las Ecuaciones de Compatibilidad Geométricas quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\sum_{i=0}^m B_{k,i} - \left(C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} \right) = 0 \quad (5.13a)$$

$$\sum_{i=0}^m A_{k,i} - \left(C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} \right) = 0 \quad (5.13b)$$

$$a_j \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{k,i+1} - a_k \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} = 0 \quad (5.13c)$$

$$a_j A_{k,1} - a_k A_{j,1} = 0 \quad (5.13d)$$

Se debe recalcar que en estas ecuaciones, la barra k es evaluada en su extremo, o sea en $\zeta_k = 1$, por lo que resulta una sumatoria de los coeficientes de las series de potencias en las ecuaciones (5.13 a-c). El caso especial de la (5.13 d) es cuando ambas barras son evaluadas en el origen de las mismas.

Condiciones estáticas de equilibrio en los nodos

En los nodos en los que concurre más de una barra, se deben plantear las correspondientes condiciones estáticas de equilibrio, o sea dos sumatorias de esfuerzos y una de momentos, de la misma forma que se realizó en el Capítulo 2 para el caso de vibraciones naturales. Con un análisis similar, que se muestra luego en este mismo capítulo bajo el título “Análisis detallado de las ecuaciones de equilibrio cuando existen cargas puntuales aplicadas en los nodos”, se llega a las siguientes expresiones para dichas condiciones de equilibrio:

$$A_{k,3} = \frac{1}{J_{3,k} \varphi_{3,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} S_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) + H_n S_k - V_n C_k \right] \quad (5.14a)$$

$$B_{k,1} = \frac{1}{F_{1,k} \varphi_{1,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(J_{3,b} S_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} C_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) - H_n C_k - V_n S_k \right] \quad (5.14b)$$

$$A_{k,2} = \frac{1}{J_{2,k} \varphi_{2,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) - \sum_{b=1}^{nbs} J_{2,b} \varphi_{2,0} A_{b,2} - \mu_n \right] \quad (5.14c)$$

Siendo, nbe y nbs el número total de barras entrantes y salientes respectivamente al nodo en estudio, y k la barra de la cual se despejan los coeficientes.

El subíndice n es el que corresponde al nodo en el cual se está planteando el equilibrio y actúan las cargas horizontal, vertical y momento. Los senos y cosenos con un solo subíndice son los correspondientes a la barra respecto al sistema de coordenadas global, debido a que surgen de la proyección de las cargas sobre la dirección de la barra en estudio.

Con estas tres expresiones, es posible realizar la programación para el total de barras que concurren o salgan de un nodo.

Ecuaciones estáticas de equilibrio en los nodos

En nodos en los cuales todas las barras concurren, esto es decir que en el mismo todas llegan con coordenada $\zeta_k = 1$, se plantean las ecuaciones de equilibrio, con un análisis similar al realizado en vibraciones. Así se obtienen las ecuaciones que se expresan a continuación:

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) - \mu_h = 0 \quad (5.15a)$$

$$\sum_k \left[-J_{3,k} C_{k,3} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{k,i+3} - F_{1,k} S_{k,3} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{k,i+1} \right] - H_h S_k + V_h C_k = 0 \quad (5.15b)$$

$$\sum_k \left[-J_{3,k} S_{k,3} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{k,i+3} + F_{1,k} C_{k,3} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{k,i+1} \right] - H_h C_k - V_h S_k = 0 \quad (5.15c)$$

Análisis detallado de las ecuaciones de equilibrio cuando existen cargas puntuales aplicadas en los nodos

A continuación se realiza un análisis cuidadoso de las expresiones que se utilizan en equilibrio de nodos para los casos en que hay esfuerzos aplicados en los mismos. Se parte del análisis de variaciones [18-25, 50-54] correspondiente a un entramado en el que se aplican esfuerzos en nodos y cargas en barras. Se llega también a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema estático (5.26 a, b), mostradas anteriormente en (5.8 a, b).

Considerando todas las energías que intervienen en un entramado sometido al estudio, la energía de deformación U , considerando los aportes flexional y axial para cada barra j , la energía S debido a los esfuerzos aplicados en los nodos, son las siguientes:

$$U = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \right) \quad (5.16)$$

$$S = \sum_{i=1}^{nm} \left\{ H_i \left[C_\alpha u_j(x_j) + S_\alpha v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha u_j(x_j) - C_\alpha v_j(x_j) \right] + \mu_i v'_j(x_j) \right\} \quad (5.17)$$

En esta última expresión, el subíndice j se refiere a la barra j sobre la cual se proyecta el esfuerzo, siendo α el ángulo entre la barra y el sistema global de coordenadas, C y S los correspondientes valores de coseno y seno.

La energía T (5.18) debida a las cargas repartidas a lo largo de cada una de las barras j , ya sean transversales q o axiales p :

$$T = \sum_{j=1}^{nb} \left(\int_0^{a_j} q_j(x_j) v_j(x_j) dx_j + \int_0^{a_j} p_j(x_j) u_j(x_j) dx_j \right) \quad (5.18)$$

La energía total W del conjunto estructural (5.19):

$$W = U - S - T \quad (5.19)$$

Debiéndose cumplir que

$$\delta(U - S - T) = 0 \quad (5.20)$$

Reemplazando en (5.20) las (5.16) a (5.18)

$$\begin{aligned} & \delta \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \right) - \\ & - \delta \sum_{i=1}^m \left\{ H_i \left[C_\alpha u_j(x_j) + S_\alpha v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha u_j(x_j) - C_\alpha v_j(x_j) \right] + \right. \\ & \left. + \mu_i v_j'(x_j) \right\} - \delta \int_0^{a_j} q_j(x_j) v_j(x_j) dx_j - \delta \int_0^{a_j} p_j(x_j) u_j(x_j) dx_j = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Donde nb es el número de barras y nn el número de nodos. A continuación se reemplazan las expresiones del momento flector y esfuerzo normal.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[E_j J_j \int_0^{a_j} v_j''(x_j) \cdot \delta v_j''(x_j) dx_j + E_j F_j \int_0^{a_j} u_j'(x_j) \cdot \delta u_j'(x_j) dx_j \right] \right) - \\ & - \sum_{i=1}^m \left\{ H_i \left[C_\alpha \delta u_j(x_j) + S_\alpha \delta v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha \delta u_j(x_j) - C_\alpha \delta v_j(x_j) \right] + \right. \\ & \left. + \mu_i \delta v_j'(x_j) \right\} - \int_0^{a_j} q_j(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j - \int_0^{a_j} p_j(x_j) \delta u_j(x_j) dx_j = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Resolviendo las integrales por partes:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j J_j \left[v_j''(x_j) \delta v_j'(x_j) \Big|_0^{a_j} - v_j'''(x_j) \delta v_j(x_j) \Big|_0^{a_j} + \int_0^{a_j} v_j''''(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j \right] \right\} + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j F_j \left[u_j'(x_j) \delta u_j(x_j) \Big|_0^{a_j} - \int_0^{a_j} u_j''(x_j) \delta u_j(x_j) dx_j \right] \right\} - \\
& \quad \sum_{i=1}^m \left\{ H_i \left[C_\alpha \delta u_j(x_j) + S_\alpha \delta v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha \delta u_j(x_j) - C_\alpha \delta v_j(x_j) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \mu_i \delta v_j'(x_j) \right\} - \int_0^{a_j} q_j(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j - \int_0^{a_j} p_j(x_j) \delta u_j(x_j) dx_j = 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Agrupando convenientemente, de los términos que contienen integrales se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema:

$$\int_0^{a_j} \left[E_j J_j v_j''''(x_j) - q_j(x_j) \right] \delta v_j(x_j) dx_j = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{E_j J_j v_j''''(x_j) - q_j(x_j) = 0} \tag{5.24}$$

$$\int_0^{a_j} \left[-E_j F_j u_j''(x_j) - p_j(x_j) \right] \delta u_j(x_j) dx_j = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-E_j F_j u_j''(x_j) - p_j(x_j) = 0} \tag{5.25}$$

Las que quedan finalmente, en coordenadas normalizadas:

$$\boxed{v_j''''(\xi_j) - \frac{q_j(\xi_j)}{J_{4,j}} = 0} \quad \boxed{-u_j''(\xi_j) - \frac{p_j(\xi_j)}{F_{2,j}} = 0} \tag{5.26a, b}$$

siendo

$$\xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^4} \quad F_{2,j} = \frac{E_j F_j}{a_j^2} \tag{5.27a, b, c}$$

Se considera a continuación, para simplificar el análisis, la Figura 5.2 correspondiente a 5 barras que se encuentran en dos nodos. Las coordenadas locales de las barras 2 y 3 se inician en el nodo 3, la barra 1 tiene su extremo final en el nodo 3, las barras 3, 4 y 5 tienen su final en el nodo 4. En el nodo 3 se aplican los esfuerzos H_3 , V_3 y μ_3 horizontal, vertical y momento; en el nodo 4 H_4 , V_4 y μ_4 . Estos esfuerzos se los considera, a los fines analíticos, aplicados todos sobre la barra 3. En esta barra, además, actúan las cargas transversales y axiales $q_3(x)$ y $p_3(x)$, respectivamente.

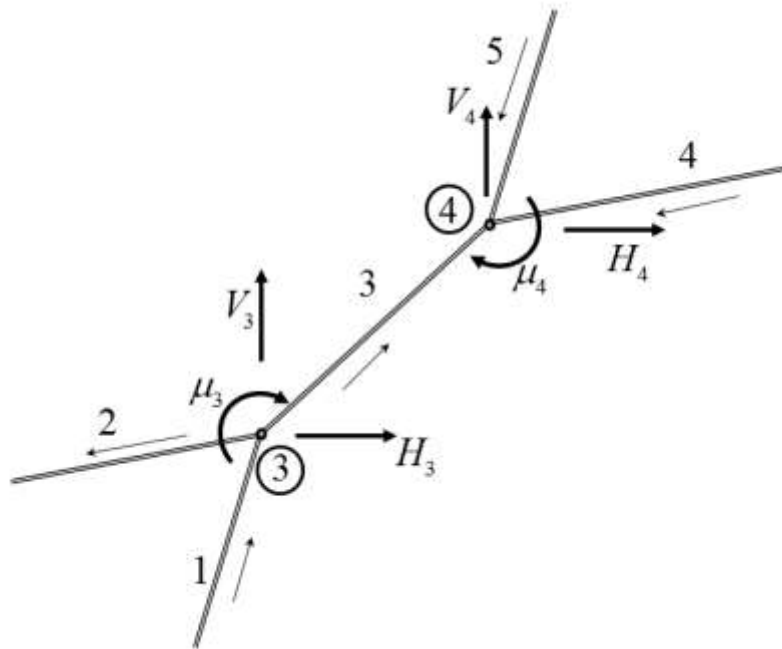


Figura 5.2: Esquema de barras y esfuerzos en los nodos.

Desarrollando para el caso especial de 5 barras, Figura 5.2, los términos de la (5.23) que no contienen integrales:

$$\begin{aligned}
& E_1 J_1 v_1''(x_1) \delta v_1'(x_1) \Big|_0^{a_1} + E_2 J_2 v_2''(x_2) \delta v_2'(x_2) \Big|_0^{a_2} + \dots + E_5 J_5 v_5''(x_5) \delta v_5'(x_5) \Big|_0^{a_5} - \\
& - \left[E_1 J_1 v_1'''(x_1) \delta v_1(x_1) \Big|_0^{a_1} + E_2 J_2 v_2'''(x_2) \delta v_2(x_2) \Big|_0^{a_2} + \dots + E_5 J_5 v_5'''(x_5) \delta v_5(x_5) \Big|_0^{a_5} \right] + \\
& + E_1 F_1 u_1'(x_1) \delta u_1(x_1) \Big|_0^{a_1} + E_2 F_2 u_2'(x_2) \delta u_2(x_2) \Big|_0^{a_2} + \dots + E_5 F_5 u_5'(x_5) \delta u_5(x_5) \Big|_0^{a_5} - \\
& - H_3 \left[C_3 \delta u_3(x_3) + S_3 \delta v_3(x_3) \right] - H_4 \left[C_3 \delta u_3(x_3) + S_3 \delta v_3(x_3) \right] - \\
& - V_3 \left[S_3 \delta u_3(x_3) - C_3 \delta v_3(x_3) \right] - V_4 \left[S_3 \delta u_3(x_3) - C_3 \delta v_3(x_3) \right] - \\
& - \mu_3 \delta v_3'(x_3) - \mu_4 \delta v_3'(x_3) = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Realizando ahora el cambio de coordenadas, para normalizar cada una de las barras del entramado, y tomando solamente los términos en los que intervienen los desplazamientos angulares, que son iguales para todas las barras en cada nodo, significa tener en cuenta que, por ejemplo en el nodo 3:

$$\delta v_3'(0) = \delta v_1'(1) = \delta v_2'(0)$$

y en el nodo 4:

$$\delta v_3'(1) = \delta v_4'(1) = \delta v_5'(1)$$

Agrupando:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_1 J_1}{a_1^2} \left[v_1''(1) \delta v_3'(0) - v_1''(0) \delta v_1'(0) \right] + \frac{E_2 J_2}{a_2^2} \left[v_2''(1) \delta v_2'(1) - v_2''(0) \delta v_3'(0) \right] + \\
& + \frac{E_3 J_3}{a_3^2} \left[v_3''(1) \delta v_3'(1) - v_3''(0) \delta v_3'(0) \right] + \frac{E_4 J_4}{a_4^2} \left[v_4''(1) \delta v_3'(1) - v_4''(0) \delta v_4'(0) \right] + \\
& + \frac{E_5 J_5}{a_5^2} \left[v_5''(1) \delta v_3'(1) - v_5''(0) \delta v_5'(0) \right] - \mu_3 \delta v_3'(0) - \mu_4 \delta v_3'(1) = 0
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Se consideran las siguientes constantes:

$$J_{2,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^2} \quad J_{3,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^3} \quad F_{1,j} = \frac{E_j F_j}{a_j} \quad (5.30a, b, c)$$

Reagrupando los términos convenientemente se llega a:

$$\delta v_3'(0) [J_{2,1} v_1''(1) - J_{2,2} v_2''(0) - J_{2,3} v_3''(0) - \mu_3] = 0 \quad (5.31a)$$

$$\delta v_3'(1) [J_{2,3} v_3''(1) + J_{2,4} v_4''(1) + J_{2,5} v_5''(1) - \mu_4] = 0 \quad (5.31b)$$

Reemplazando las correspondientes expresiones dadas en (5.5) y (5.6a, b, c) de las series de potencias en estas dos últimas expresiones, surgen las condiciones de equilibrio (5.32a) y la ecuación de equilibrio (5.32 b) para momentos:

$$J_{2,3} A_{3,2} \varphi_{2,0} = J_{2,1} \sum_{i=0}^m \varphi_{2,i} A_{1,i+2} - J_{2,2} A_{2,2} \varphi_{2,0} - \mu_3 \Rightarrow$$

$$A_{3,2} = \frac{J_{2,1} \sum_{i=0}^m \varphi_{2,i} A_{1,i+2} - J_{2,2} A_{2,2} \varphi_{2,0} - \mu_3}{J_{2,3} \varphi_{2,0}} \quad (5.32a)$$

$$J_{2,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{2,i} A_{3,i+2} + J_{2,4} \sum_{i=0}^m \varphi_{2,i} A_{4,i+2} + J_{2,5} \sum_{i=0}^m \varphi_{2,i} A_{5,i+2} - \mu_4 = 0 \quad (5.32b)$$

Nota: En las condiciones de equilibrio, se suman las barras entrantes al nodo (solo la barra 1 en el caso del nodo 3) y se restan las salientes al nodo (la barra 2 en este nodo). En las ecuaciones de equilibrio, se suman las barras entrantes al nodo. Evidentemente, si se están planteando este tipo de ecuaciones es para los casos en que NO hay barras salientes del nodo, en cuyo caso, si las hubiera, se plantearían las condiciones de equilibrio.

A continuación, retomando los demás términos de la (5.28), se proyectan todos los desplazamientos sobre la barra 3:

$$\begin{aligned}
& -\{J_{3,1}v_1'''(1)[S_{1,3}\delta u_3(0) + C_{1,3}\delta v_3(0)] - J_{3,1}v_1'''(0)\delta v_1(0) + \\
& + J_{3,2}v_2'''(1)\delta v_2(1) - J_{3,2}v_2'''(0)[S_{2,3}\delta u_3(0) + C_{2,3}\delta v_3(0)] + \\
& \quad + J_{3,3}v_3'''(1)\delta v_3(1) - J_{3,3}v_3'''(0)\delta v_3(0) + \\
& + J_{3,4}v_4'''(1)[S_{4,3}\delta u_3(1) + C_{4,3}\delta v_3(1)] - J_{3,4}v_4'''(0)\delta v_4(0) + \\
& + J_{3,5}v_5'''(1)[S_{5,3}\delta u_3(1) + C_{5,3}\delta v_3(1)] - J_{3,5}v_5'''(0)\delta v_5(0)\} + \\
& + F_{1,1}u_1'(1)[C_{1,3}\delta u_3(0) - S_{1,3}\delta v_3(0)] - F_{1,1}u_1'(0)\delta u_1(0) + \\
& + F_{1,2}u_2'(1)\delta u_2(1) - F_{1,2}u_2'(0)[C_{2,3}\delta u_3(0) - S_{2,3}\delta v_3(0)] + \\
& \quad + F_{1,3}u_3'(1)\delta u_3(1) - F_{1,3}u_3'(0)\delta u_3(0) + \\
& + F_{1,4}u_4'(1)[C_{4,3}\delta u_3(1) - S_{4,3}\delta v_3(1)] - F_{1,4}u_4'(0)\delta u_4(0) + \\
& + F_{1,5}u_5'(1)[C_{5,3}\delta u_3(1) - S_{5,3}\delta v_3(1)] - F_{1,5}u_5'(0)\delta u_5(0) - \\
& - H_3[C_3\delta u_3(0) + S_3\delta v_3(0)] - H_4[C_3\delta u_3(1) + S_3\delta v_3(1)] - \\
& - V_3[S_3\delta u_3(0) - C_3\delta v_3(0)] - V_4[S_3\delta u_3(1) - C_3\delta v_3(1)] = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Reagrupando convenientemente, se obtienen las expresiones que nos conducen a las condiciones de equilibrio y las ecuaciones de equilibrio faltantes:

$$\begin{aligned}
& \delta v_3(0) \left[-J_{3,1}C_{1,3}v_1'''(1) + J_{3,2}C_{2,3}v_2'''(0) + J_{3,3}v_3'''(0) - \right. \\
& \quad \left. - F_{1,1}S_{1,3}u_1'(1) + F_{1,2}S_{2,3}u_2'(0) - H_3S_3 + V_3C_3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.34a}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u_3(0) \left[-J_{3,1}S_{1,3}v_1'''(1) + J_{3,2}S_{2,3}v_2'''(0) + F_{1,1}C_{1,3}u_1'(1) - \right. \\
& \quad \left. - F_{1,2}C_{2,3}u_2'(0) - F_{1,3}u_3'(0) - H_3C_3 - V_3S_3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.34b}$$

$$\begin{aligned}
& \delta v_3(1) \left[-J_{3,3}v_3'''(1) - J_{3,4}C_{4,3}v_4'''(1) - J_{3,5}C_{5,3}v_5'''(1) - \right. \\
& \quad \left. - F_{1,4}S_{4,3}u_4'(1) - F_{1,5}S_{5,3}u_5'(1) - H_4S_3 + V_4C_3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.34c}$$

$$\begin{aligned} \delta u_3(1) \left[-J_{3,4} S_{4,3} v_4'''(1) - J_{3,5} S_{5,3} v_5'''(1) + F_{1,3} u_3'(1) + \right. \\ \left. + F_{1,4} C_{4,3} u_4'(1) + F_{1,5} u_5'(1) - H_4 C_3 - V_4 S_3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.34d)$$

Reemplazando las expresiones de las derivadas superiores por sus correspondientes en desarrollo en series de potencias (5.5) y (5.6a, b, c), resultan:

$$\begin{aligned} J_{3,3} A_{3,3} \varphi_{3,0} &= J_{3,1} C_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{1,i+3} - J_{3,2} C_{2,3} \varphi_{3,0} A_{2,3} + \\ &+ F_{1,1} S_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{1,i+1} - F_{1,2} S_{2,3} \varphi_{1,0} B_{2,1} + H_3 S_3 - V_3 C_3 \Rightarrow \\ A_{3,3} &= \frac{1}{J_{3,3} \varphi_{3,0}} \left[J_{3,1} C_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{1,i+3} - J_{3,2} C_{2,3} \varphi_{3,0} A_{2,3} + \right. \\ &\left. + F_{1,1} S_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{1,i+1} - F_{1,2} S_{2,3} \varphi_{1,0} B_{2,1} + H_3 S_3 - V_3 C_3 \right] \end{aligned} \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} F_{1,3} \varphi_{1,0} B_{3,1} &= -J_{3,1} S_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{1,i+3} + J_{3,2} S_{2,3} \varphi_{3,0} A_{2,3} + \\ &+ F_{1,1} C_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{1,i+1} - F_{1,2} C_{2,3} \varphi_{1,0} B_{2,1} - H_3 C_3 - V_3 S_3 \Rightarrow \\ B_{3,1} &= \frac{1}{F_{1,3} \varphi_{1,0}} \left[-J_{3,1} S_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{1,i+3} + J_{3,2} S_{2,3} \varphi_{3,0} A_{2,3} + \right. \\ &\left. + F_{1,1} C_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{1,i+1} - F_{1,2} C_{2,3} \varphi_{1,0} B_{2,1} - H_3 C_3 - V_3 S_3 \right] \end{aligned} \quad (5.35b)$$

$$\begin{aligned} -J_{3,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{1,i+3} - J_{3,4} C_{4,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{4,i+3} - J_{3,5} C_{5,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{5,i+3} - \\ -F_{1,4} S_{4,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{4,i+1} - F_{1,5} S_{5,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{5,i+1} - H_4 S_3 + V_4 C_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.35c)$$

$$\begin{aligned}
 & -J_{3,4}S_{4,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{4,i+3} - J_{3,5}S_{5,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{3,i} A_{5,i+3} + F_{1,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{3,i+1} + \\
 & + F_{1,4}C_{4,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{4,i+1} + F_{1,5}C_{5,3} \sum_{i=0}^m \varphi_{1,i} B_{5,i+1} - H_4C_3 - V_4S_3 = 0
 \end{aligned} \tag{5.35d}$$

Nota: En el caso de la condición de equilibrio (5.35a), para obtener el coeficiente $A_{3,3}$ se suman las barras entrantes al nodo (solo la barra 1 en el caso del nodo 3) y se restan las salientes al nodo (la barra 2 en este nodo). En el caso de la (5.35b), para obtener el coeficiente $B_{3,1}$, en el caso de barras salientes se suman los coeficientes correspondientes al corte y se restan los de esfuerzos normales. En barras entrantes se suman los normales y restan los del corte.

En las ecuaciones de equilibrio, son todas las barras entrantes al nodo. Llevan todas el mismo signo en el caso de la (5.35c) y signos contrarios en la (5.35 d).

Condiciones de borde

Cedimiento de Vínculos

En el caso de que los vínculos sufran algún desplazamiento, es posible también calcular los esfuerzos en las barras del entramado utilizando los desarrollos de series de potencias, ya que indirectamente estos desplazamientos se los vincula con los coeficientes de la serie.

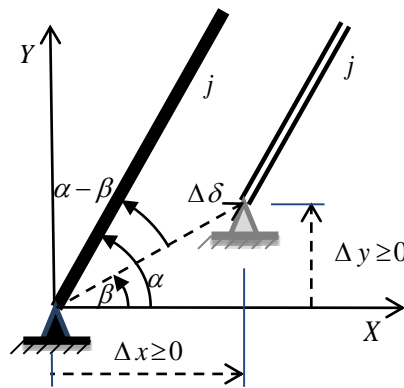


Figura 5.3: Esquema del cedimiento de vínculo en una articulación de la barra j .

Como se muestra en la Figura 5.3, en el extremo inicial de la barra j existe un desplazamiento axial y otro transversal que se encuentran vinculados a los primeros coeficientes del desarrollo en series como se indica a continuación:

$$\Delta \delta_j = +\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} \quad (5.36)$$

$$\operatorname{sen} \beta_j = s \beta_j = \Delta y_j / \Delta \delta_j \quad \cos \beta_j = c \beta_j = \Delta x_j / \Delta \delta_j \quad (5.37a, b)$$

$$v_j(0) = A_{j,0} = -\Delta \delta_j (\cos \beta_j \operatorname{sen} \alpha_j + \operatorname{sen} \beta_j \cos \alpha_j) \quad (5.38a)$$

$$u_j(0) = B_{j,0} = \Delta \delta_j (\cos \beta_j \cos \alpha_j - \operatorname{sen} \beta_j \operatorname{sen} \alpha_j) \quad (5.38b)$$

Vínculos con Carga

En el caso que posea aplicada una carga en cualquiera de los vínculos a tierra, es posible estudiar independientemente cada uno de los casos, como se muestra a continuación.

Considerando los esfuerzos aplicados en el nodo j del origen de la barra k (Figura 5.4 a-c): Fuerza horizontal H_j , fuerza vertical V_j , y momento μ_j . Los coeficientes en de la barra k correspondientes toman los valores dados en las expresiones que se muestran a continuación para cada tipo de vínculo:

Vínculo Libre con Momento, Corte y Normal aplicado en el nodo, Figura 5.4 a:

$$A_{k,2} = \frac{\mu_j}{2J_{2,k}} \quad A_{k,3} = \frac{V_j c_k - H_j s_k}{6J_{3,k}} \quad B_{k,1} = \frac{V_j s_k + H_j c_k}{F_{1,k}} \quad (5.39a, b, c)$$

Articulación simple con Momento y Normal:

$$A_{k,2} = \frac{\mu_j}{2J_{2,k}} \quad B_{k,1} = \frac{V_j s_k + H_j c_k}{F_{1,k}} \quad (5.40a, b)$$

Articulación doble con momento aplicado, Figura 5.4 b:

$$A_{k,2} = \frac{\mu_j}{2J_{2,k}} \quad (5.41)$$

Cuasi-empotramiento con esfuerzo normal aplicado, Figura 5.4 c:

$$B_{k,1} = \frac{V_j s_k + H_j c_k}{F_{1,k}} \quad (5.42)$$

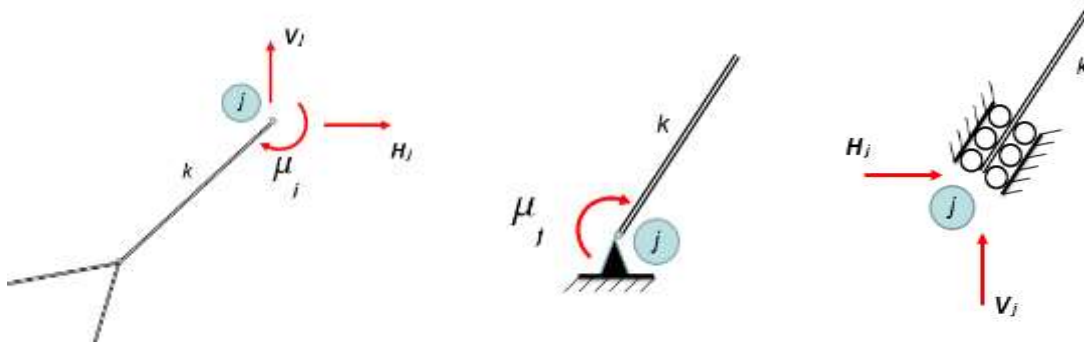


Figura 5.4: a) Extremo libre con esfuerzos aplicados, b) articulación doble con momento aplicado y c) Cuasi-empotramiento con fuerzas aplicadas.

Otros elementos para la elaboración del programa

Cambio en el sentido de orientación de las barras

Es necesario, en la parte final del programa, llevar todas las barras a su numeración original, o sea la que ha colocado el usuario al cargar los datos del entramado. Este proceso no es complicado; lo que si lleva un análisis adicional es en los casos en que el sentido de la barra se cambia. Para ello, hay una sección del programa, antes de mostrar los resultados finales que se encarga de esto, teniendo en cuenta lo siguiente:

Si la expresión del desplazamiento transversal en el sentido inicial es

$$v_i(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \xi^k \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (5.43)$$

Y luego del desarrollo ha sido cambiada al sentido contrario

$$v_f(\zeta) = \sum_{k=0}^m A_k \zeta^k \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (5.44)$$

Se debe cumplir también la siguiente relación: $\xi = 1 - \zeta$, además $v_i(\xi) = -v_f(\zeta)$, por lo que es posible escribir:

$$v_i(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \xi^k = -v_f(1-\xi) = -\sum_{k=0}^m A_k (1-\xi)^k \quad (5.45)$$

Se puede realizar el siguiente análisis que relaciona los coeficientes:

$$v_f(1) = A_0 = -\sum_{k=0}^m a_k \quad (5.46a)$$

$$v_f'(1) = A_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{1,i} a_{k+1} \quad (5.46b)$$

$$v_f''(1) = 2A_2 = -\sum_{k=0}^{m-2} \varphi_{2,i} a_{k+2} \quad (5.46c)$$

Continuando con el mismo criterio se llega a la expresión final para los coeficientes en el cambio de sentido en las barras:

$$A_h = \frac{(-1)^{h+1}}{\varphi_{h,0}} \sum_{k=0}^{m-h} \varphi_{h,k} a_{k+h} \quad (5.47)$$

De igual manera se procede para los coeficientes en el desarrollo en series de potencias para los desplazamientos axiales.

Signo de las cargas distribuidas en las barras

Al ingresar las cargas distribuidas es necesario tener en cuenta que el signo está relacionado con las coordenadas locales. Por lo tanto, el usuario del programa deberá tener muy en cuenta la dirección que le ha indicado a una determinada barra.

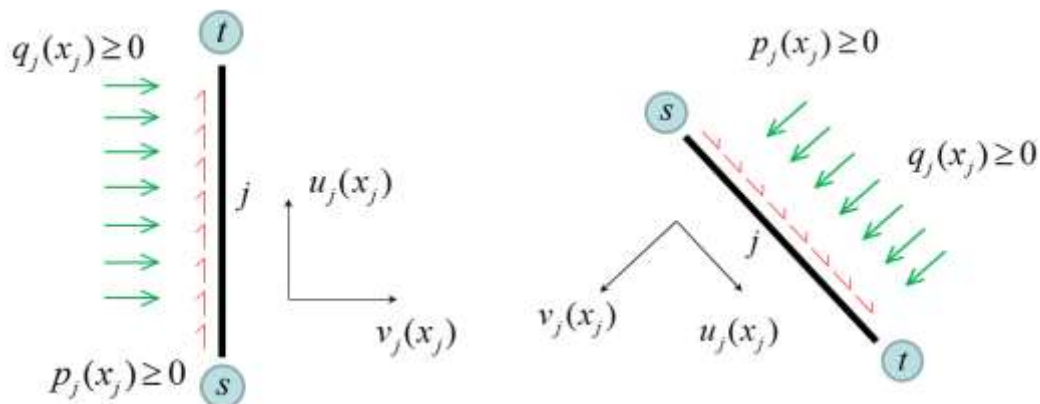


Figura 5.5: Signo en las cargas distribuidas en forma transversal y axial.

Para aclarar mejor este tema, se supone en principio que la barra j tiene origen en el nodo s y extremo final en el nodo t . La carga $p(x)$ es positiva si tiene esa misma dirección, y la carga $q(x)$ es positiva si al recorrer la barra, la misma tiene dirección perpendicular y hacia la derecha. En la Figura 5.5 se esquematizan dos ejemplos de barras con diferentes orientaciones y signos positivos en ambas cargas.

Proyección de cargas distribuidas en barras inclinadas

El ingreso de las cargas distribuidas sobre las barras se realiza teniendo en cuenta sus proyecciones, normales y axiales, a la barra. Se analiza a continuación el caso de una carga vertical sobre una barra inclinada, como se indica en la Figura 5.6.

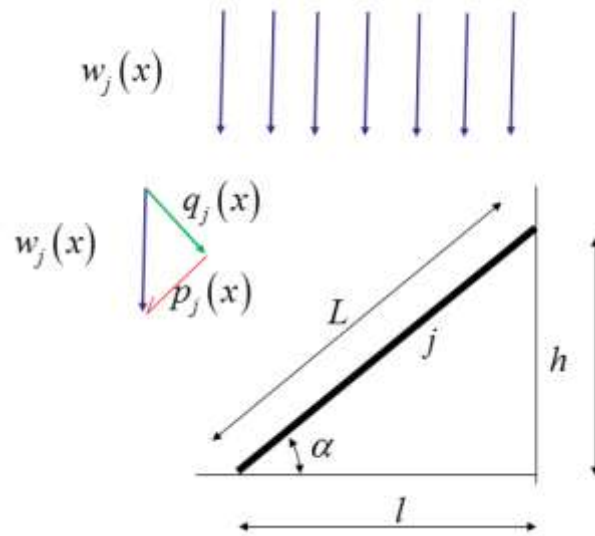


Figura 5.6: Proyección de una carga distribuida sobre una barra.

Teniendo en cuenta que:

$$L^2 = l^2 + h^2 \quad (5.48)$$

$$\cos \alpha = l/L \quad \text{y} \quad \sin \alpha = h/L \quad (5.49a, b)$$

Se deduce al proyectar las fuerzas que:

$$\begin{cases} q(x)L = w(x)l \cos \alpha \\ p(x)L = -w(x)l \sin \alpha \end{cases} \quad (5.50a, b)$$

El signo negativo (-) para $p(x)$ obedece al convenio acordado previamente, ver Figura 5.5, quedando finalmente:

$$\begin{cases} q(x) = w(x) \cos^2 \alpha \\ p(x) = -w(x) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (5.51a, b)$$

Para cargas horizontales aplicadas a barras inclinadas, el análisis es similar, quedando en este caso las dos positivas:

$$\begin{cases} p(x) = w(x) \cos^2 \alpha \\ q(x) = w(x) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (5.52a, b)$$

Articulaciones interiores al entramado

Es posible la resolución de pórticos en los que existan barras articuladas a la estructura. Las barras que estén en el camino de cálculo y posean articulaciones interiores al entramado en su extremo final, no transmiten momento ni giro al resto del entramado en ese nodo. En esas condiciones, se debe tener en cuenta lo siguiente: Una de las barras que salen de ese nodo, y no tienen articulaciones en ese nodo, llevará la incógnita A_1 , las demás estarán relacionadas con esta barra. De esta manera se incrementa en uno el número de incógnitas en el cálculo del entramado. Por ejemplo, en la Figura 5.7 se muestra un esquema en donde la barra 5 llega al nodo 7 con datos, a partir de allí, una de las restantes (barra 6, 7 u 11) deberá tener como incógnita al coeficiente A_1 , pudiendo ser la barra 6 ($A_{1,6}$) las demás estarán relacionadas con este en las ecuaciones correspondientes.

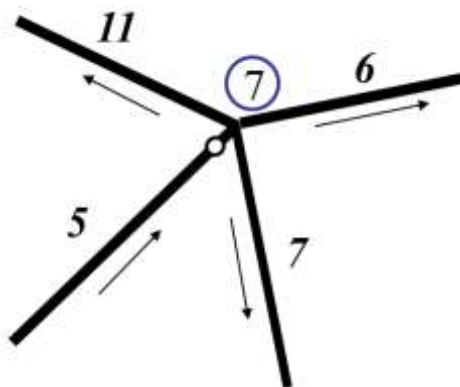


Figura 5.7: Esquema de una barra con articulación interna al pórtico.

Programa de cálculo

El programa elaborado para los cálculos estáticos de un entramado cerrado tiene aspectos similares al desarrollado para el estudio de las frecuencias naturales. Al respecto, también

aquí se ha utilizado el software Mathematica [1]. Se detallarán a continuación los tramos del programa que revisten diferencias.

Carga de datos

En su comienzo, la carga de datos del entramado es la misma: coordenadas de nodos, matriz topológica de barras, ubicación de los vínculos a tierra en los nodos.

Se agregan las siguientes matrices:

- La matriz *cedimientos de vínculos*, que posee cuatro columnas y tantas filas como vínculos con cedimientos posea el entramado; en la primera columna aparece el número del nodo que contiene el vínculo que cede, en la segunda el cedimiento horizontal Δx (en [m] con signo positivo hacia la derecha), luego cedimiento vertical Δy (en [m] positivo hacia arriba), y en la cuarta columna el giro $\Delta\phi$ (en [rad] horario positivo).
- La matriz *cargas* de 4 columnas y tantas filas como nodos con cargas haya en la estructura. En la primera columna se indica el número del nodo en que se encuentra la carga, en la segunda la magnitud de la carga horizontal H (hacia la derecha positivo en [N]), luego la vertical V (hacia arriba positivo en [N]) y finalmente, en la cuarta columna, el momento μ (horario positivo en [Nm]).
- La matriz *cargas distribuidas transversalmente* tiene dos columnas; en la primera se coloca el número de la barra y en la segunda el polinomio correspondiente a la carga en variable x , $q(x)$, por ejemplo: $x^2 - 3x + 1$ o bien puede ingresarse con factores: $(x - 2)^2(x + 1)$ la unidad en este caso es [N/m]. Cuando se trata de una función no polinómica, ya sea trascendente u otra, se debe escribir su desarrollo en series de potencias en este lugar.
- La matriz *cargas distribuidas axialmente*, de la misma forma que la anterior, donde se agrega $p(x)$.

Cálculos iniciales

En la primera parte del programa, se deben realizar acciones similares a lo descrito para vibraciones naturales. Se efectúa una nueva numeración de barras y nodos, luego se determina el camino a seguir en el cálculo – Programa A en el Apéndice. Se debe agregar la localización de las cargas puntuales y los cedimientos de vínculos en la nueva numeración

de nodos. También reubicar las cargas distribuidas, transversales y axiales, en la nueva numeración de barras.

Se recorre el entramado analizando cuales son las incógnitas libres y si hay articulaciones internas en el entramado. Programa B del Apéndice.

A continuación se realiza un gráfico esquemático para poder chequear visualmente los datos ingresados antes de proceder al programa de cálculo propiamente dicho.

Funciones de Cálculo

El programa se ejecuta llamando, en diferentes oportunidades, una gran cantidad de funciones que se listan e identifican a continuación.

Como se ha explicado en el programa que resuelve las vibraciones naturales, se indican a continuación cuales son dichas funciones y específicamente con que fórmula de las desarrolladas en este capítulo están vinculadas. Esto está indicado en el número que acompaña a cada expresión. El nombre que poseen es el mismo con que se las denominó dentro del programa de vibraciones; recordar que no hay tildes en dichos nombres y algunos de ellos se trata de combinación de palabras.

recurrencia esta función tiene como argumento el número de la barra j . Se observa que la (5.11a) es la encargada de vincular a los coeficientes de los desarrollos en series de potencias, mayores o iguales a 4 en el desarrollo de la función desplazamiento transversal (correspondientes a los coeficientes $A_{j,i}$), con los coeficientes de las cargas transversales en dicha barra $q(x)$. En el caso de la (5.11b), vincula a los coeficientes mayores o iguales a 2 en la función de desplazamiento axial (correspondientes a los coeficientes $B_{j,i}$) con los coeficientes del polinomio que define la carga axial $p(x)$. Se transcriben a continuación las expresiones (5.11a, b).

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \frac{P_{j,i}}{F_{2,j} \varphi_{2,i}}$$

Las funciones para las condiciones y ecuaciones de compatibilidad geométrica son las mismas que en el caso de vibraciones naturales. De manera que ya se analizaron en los Capítulos 2 y 3. De allí las expresiones (5.12 a, b y c)

Las funciones para las condiciones de equilibrio varían un poco, ya que aquí aparecen las cargas nodales. El nombre es el mismo que el presentado en el Capítulo 3, **equi**, pero las expresiones son las (5.14a, b, c), transcritas a continuación:

$$A_{k,3} = \frac{1}{J_{3,k} \varphi_{3,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} S_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) + H_n S_k - V_n C_k \right]$$

$$B_{k,1} = \frac{1}{F_{1,k} \varphi_{1,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} \right) + \sum_{b=1}^{nbs} \left(J_{3,b} S_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} C_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} \right) - H_n C_k - V_n S_k \right]$$

$$A_{k,2} = \frac{1}{J_{2,k} \varphi_{2,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) - \sum_{b=1}^{nbs} J_{2,b} \varphi_{2,0} A_{b,2} - \mu_n \right]$$

En el caso de las ecuaciones de equilibrio (5.15a, b, c), como en el Capítulo 3, se las denomina **ecuequi**:

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) - \mu_h = 0$$

$$\sum_k^{nbe} \left[-J_{3,k} C_{k,3} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{k,i+3} - F_{1,k} S_{k,3} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{k,i+1} \right] - H_h S_k + V_h C_k = 0$$

$$\sum_k^{nbe} \left[-J_{3,k} S_{k,3} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{k,i+3} + F_{1,k} C_{k,3} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{k,i+1} \right] - H_h C_k - V_h S_k = 0$$

Básicamente, el programa núcleo del cálculo se recorre, para este caso de cálculo de estática, en 3 oportunidades (Ver diagrama de flujo del Programa F en el Apéndice) y con las siguientes características:

En la *primera pasada* se corre el programa completo, el que se encarga de pasar por la estructura tantas veces como incógnitas tenga el entramado (nil), generando una *matriz* cuadrada en ese orden. En esta parte los coeficientes de los desarrollos en series que resultaron ser incógnita de problema, tomarán el valor 1 en una pasada y 0 en las otras pasadas, como se ha explicado en el Capítulo 3. En esta primera parte, no se tienen en cuenta las cargas aplicadas en los nodos al evaluar el equilibrio en ellos, ni las distribuidas en las barras al realizar la recurrencia de las mismas. Salvando la diferencia con lo estudiado en vibraciones solamente en la evaluación de las ecuaciones diferenciales que se realiza con las funciones de recurrencias.

En la *segunda pasada* se corre el programa una sola vez, generando un *vector*. En este caso si se tienen en cuenta las cargas aplicadas en los nodos y las distribuidas en las barras. Se resuelven también en este paso los vínculos que tienen cargas aplicadas.

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales obteniendo los valores reales de los coeficientes desconocidos

$$\mathbf{matriz} \cdot \mathbf{incógnitas} + \mathbf{vector} = 0$$

En la *tercera pasada* se lo recorre por última vez para asignarle los valores reales a todos los coeficientes de todas las barras del entramado; esta vez con las cargas en los nodos pero sin las recurrencias en las barras.

En esta etapa del cálculo son conocidos todos los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de todas las barras, pero en la nueva numeración. De manera que es necesario ahora llevarlos a la numeración original de barras y nodos, o sea la que ha ingresado el usuario del programa. Existe una rutina que realiza este procedimiento que utiliza la expresión (5.47) en las barras que han cambiado el sentido.

Resultados finales:

Conociendo todos los coeficientes, es posible escribir las funciones de desplazamiento transversal y axial dadas por la (5.5), pero referidas finalmente a las coordenadas locales x_j de cada barra, sin normalizar:

$$v_j(x_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} x_j^i \quad u_j(x_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} x_j^i$$

Luego se pueden encontrar los valores de los esfuerzos en cada una de las barras con las siguientes expresiones, correspondientes al Momento, Esfuerzo de Corte y Normal respectivamente:

$$M_j(x_j) = -J_{2,j} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2} x_j^i \quad (5.53)$$

$$Q_j(x_j) = -J_{3,j} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{j,i+3} x_j^i \quad (5.54)$$

$$N_j(x_j) = F_{1,j} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{j,i+1} x_j^i \quad (5.55)$$

Finalmente se presentan los gráficos correspondientes a estos esfuerzos en el entramado completo siguiendo la numeración original que ha ingresado el usuario. Se pueden visualizar las funciones correspondientes a cada esfuerzo, de manera que se conocen punto a punto sus valores. Esto último aprovechando algunas herramientas que posee el programa para desplazarse dentro de las funciones [1].

Conclusiones y ventajas del método

Una de las grandes ventajas del presente método es que las cargas de forma polinómica, de grados mayores a uno, se toman en forma exacta, en toda su longitud, sin la necesidad de dividir la barra en pequeños segmentos con cargas uniformes o trapezoidales para lograr la

aproximación, cosa que sí realizan los otros métodos. En caso de necesitar que en la barra exista una carga de forma trigonométrica, u otra función no polinómica, es posible realizar un desarrollo en series de esa función y expresarla como polinomio.

Otra de las grandes ventajas es, que se ha mencionado varias veces en el desarrollo de la presente investigación, la gran reducción en la cantidad de incógnitas para resolver el problema, como se muestra en los ejercicios resueltos.

Es posible agregar también que la solución a la que se arriba es exacta, en la medida que es viable tomar un desarrollo en series de potencias con grado infinito.

Capítulo 6

EJEMPLOS DE ESTÁTICA DE ENTRAMADOS UTILIZANDO SERIES DE POTENCIAS

Introducción

En el presente capítulo, se resuelve la estática de algunos entramados con diferentes características a modo de ejemplos numéricos pretendiendo mostrar la eficacia del método planteado en la tesis. En algunos casos, se comparan los resultados obtenidos con la bibliografía [56] y en otros casos se resuelve el entramado utilizando el Método de los Elementos Finitos con el programa comercial Algor [4]. Para los casos de comparaciones con los resultados del libro [56], se debe recalcar que en el mismo las soluciones han sido derivadas aplicando la teoría del trabajo virtual. Sólo se considera la energía de deformación por flexión, despreciándose los efectos de las deformaciones por esfuerzo de corte y axial. Esto último sí se ha tenido en cuenta en los presentes desarrollos utilizando las series de potencias. Este proceder acarrea una pequeña diferencia en los resultados, lo que hace más exactos a los valores obtenidos con el método propuesto en esta tesis. En los resultados de las tablas, en todos los casos, en los esfuerzos de corte y normal, las unidades se encuentran expresadas en N (Newtons) y los momentos en Nm.

Ejemplo 6.1

Este primer ejemplo de dos barras, extremadamente simple en su resolución, solo pretende dar importancia al hecho de tener en cuenta en el método, los efectos de considerar la deformación axial. Esto queda de manifiesto en los desarrollos del capítulo 5 cuando no se desprecia el segundo término, que considera el aporte axial en la expresión de la energía U de deformación que se transcribe a continuación (6.1).

$$U = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \right) \quad (6.1)$$

Se trata del esquema dado en la Figura 6.1, de dos barras articuladas en los extremos, en la que se procederá a variar la flecha f y el área transversal de las barras, con fines de verificar lo enunciado. Se lo resuelve aplicando series de potencias, utilizando 3 barras, ya que es necesario crear un nodo en donde se encuentra la carga P . A los fines de encontrar valores numéricos, se toma una carga $P = 2500$ N, módulo de elasticidad de las barras $E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m² y momento de inercia $J = 0,0036$ m⁴. Se resuelve para dos tipos de estructura, ambas con $L = 20$ m una con flecha $f = 4$ m y otra con $f = 0.5$ m y las diferentes secciones transversales de las barras para las cuales se ha resuelto el problema se muestran en la Tabla 6.1. Se han utilizado series de grado 3.

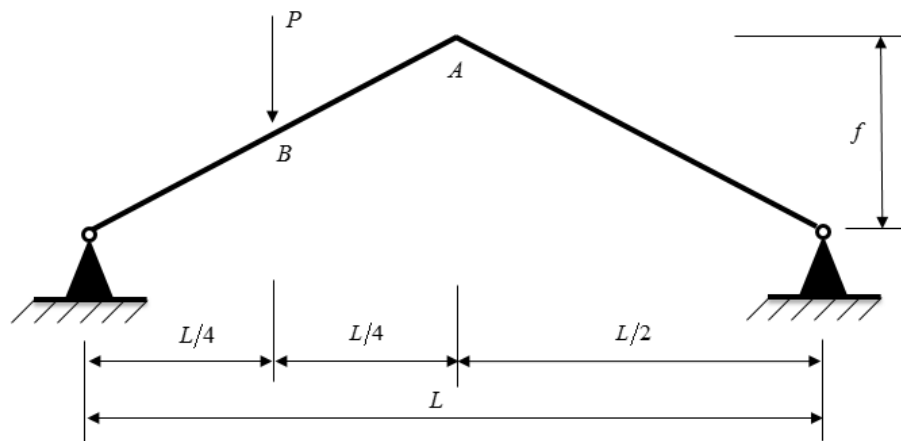


Figura 6.1: Esquema de dos barras biarticuladas con una carga P en el nodo B .

Se puede observar de la Tabla 6.1 que en general, los valores del momento en el punto B donde se ha aplicado la carga, son del mismo orden, no pasa lo mismo en el punto A , detectando un brusco cambio cuando la flecha es de 0.5 m, en secciones pequeñas (0.05 y 0.12 m²) y llegando incluso a cambiar de signo.

| Flecha f (m) | Área (m ²) | Momento en A | Momento en B |
|----------------|------------------------|--------------|--------------|
| 4 | 0.05 | - 2233.38 | + 5133.31 |
| | 0.12 | - 2297.45 | + 5101.27 |
| | 1.20 | - 2339.10 | + 5080.45 |
| | 12.0 | - 2343.28 | + 5078.36 |
| 0.5 | 0.05 | + 1641.52 | + 7070.76 |
| | 0.12 | - 68.98 | + 6215.51 |
| | 1.20 | - 2045.30 | + 5227.35 |
| | 12.0 | - 2312.94 | +5093.53 |

Tabla 6.1: Valores de momentos (Nm) para diferentes secciones transversales de las barras y distintos valores de la flecha f .

En la Figura 6.2 se muestran dos de los diagramas de momento, con flecha $f = 0.5$ m, obtenidos utilizando el presente método con el programa Mathematica [1] empleando series de potencias de grado 3.



Figura 6.2: Diagramas de momentos que se han obtenidos con el presente método, con flecha $f = 0.5$ m y respectivamente con valores de área: a) 1.2 m², b) 0.05 m².

Ejemplo 6.2

Se trata de un entramado presentado en el libro de Leontovich [56], en su Capítulo 2, enunciado como carga vertical aplicada a una ménsula, con las coordenadas de los nodos que se muestran en la Figura 6.3. Solamente en este ejemplo se agrega una flecha sobre el número de cada barra a los fines de indicar la dirección que se ha utilizado para cargar la barra. Esto indica que, la barra 1 tiene inicio en el nodo 1 y extremo final en el nodo 2, la barra 3 va del 2 al 4. Esto es importante al momento de interpretar los resultados, ya que las funciones

correspondientes a cada sollicitación tendrán estas mismas direcciones. En este entramado, que se explica con mayores detalles, solo posee una carga puntual en una ménsula, $P = 1000$ N, que en el programa es considerado como un nodo con vínculo a tierra del tipo libre, con carga aplicada en el vínculo. Los nodos 1 y 6 poseen vínculos a tierra del tipo articulaciones dobles.

Para simplificar se adoptan todas las barras iguales, de sección uniforme $F = 0.12$ m², con Módulo de Elasticidad $E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m² y momento de inercia $J = 0,0036$ m⁴, para todas las barras. Las longitudes de las barras se toman en metros, indicado en las coordenadas de los nodos en la Figura 6.3.

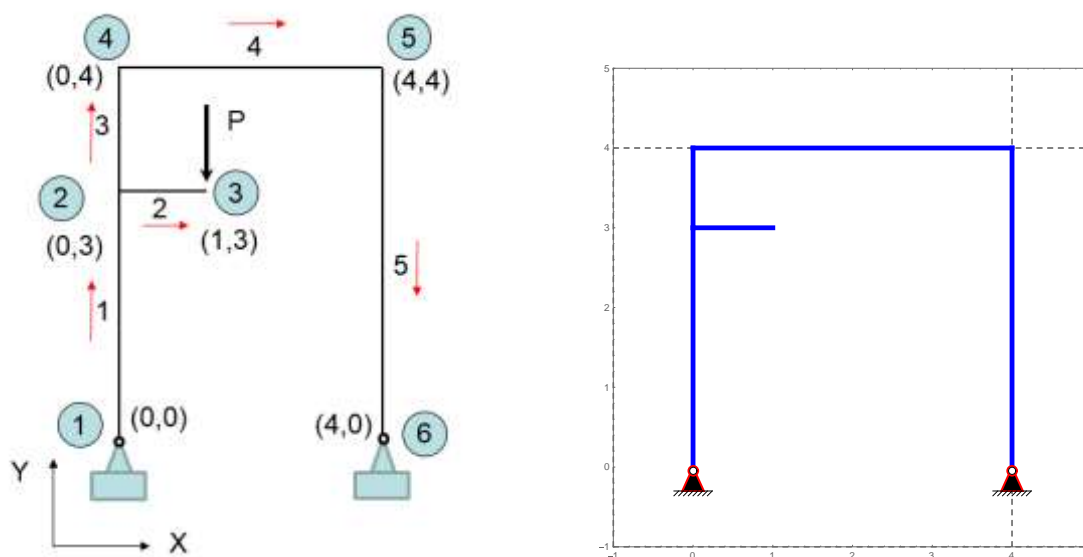


Figura 6.3: Pórtico de 5 barras y 6 nodos, con articulaciones dobles en los nodos 1 y 6.

Posee carga puntual en el nodo libre 3. a) Esquema con datos, b) gráfico del pórtico resultante del programa.

En la Figura 6.4, se muestran los gráficos de los esfuerzo de corte y normal obtenidos utilizando series de potencias con Mathematica [1]. Los valores son comparados con la bibliografía [56] en la Tabla 6.2.

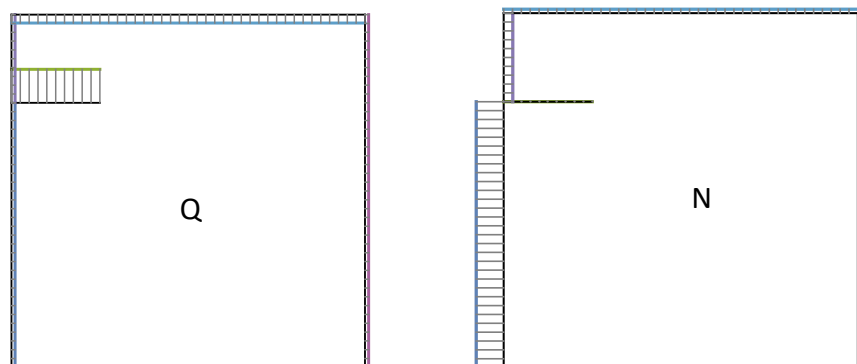


Figura 6.4: Gráficos de esfuerzo de corte y normal.

| Barra | Esfuerzo | Serie de potencias | Leontovich [56] |
|-------|----------|--------------------|-----------------|
| 1 | Corte | 107,69 | 107,81 |
| 2 | | 1000 | 1000 |
| 3 | | 107,69 | 107,81 |
| 4 | | 250 | 250 |
| 5 | | 107,69 | 107,81 |
| 1 | Normal | 750 | 750 |
| 2 | | 0 | 0 |
| 3 | | 250 | 250 |
| 4 | | 107,69 | 107,81 |
| 5 | | 250 | 250 |

Tabla 6.2: Resultados de esfuerzo de corte y normal, obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con los obtenidos en Leontovich [56].

A continuación, se dan las expresiones correspondientes a las funciones de momentos de cada una de las barras, obtenidos con desarrollo en series de potencias:

$$\text{Barra 1: } M_1(x) = 107.691347 x$$

$$\text{Barra 2: } M_2(x) = 1000 - 1000 x$$

$$\text{Barra 3: } M_3(x) = - 676.92596 + 107.691347 x$$

$$\text{Barra 4: } M_4(x) = - 569.23461 + 245 x$$

Barra 5: $M_5(x) = 430.76539 - 107.691347 x$

Utilizando las expresiones que sugiere [56], se llega a los siguientes valores para los momentos:

Nodo 2, barra 2: $M= 1000 \text{ Nm}$

Nodo 2, barra 3: $M= -676.563 \text{ Nm}$

Nodo 4: $M= -568.75 \text{ Nm}$

Nodo 5: $M= 431.25 \text{ Nm}$

En la Figura 6.5, se presenta el diagrama de momentos y el gráfico de deformaciones, ambos obtenidos mediante el desarrollo en series de potencias.

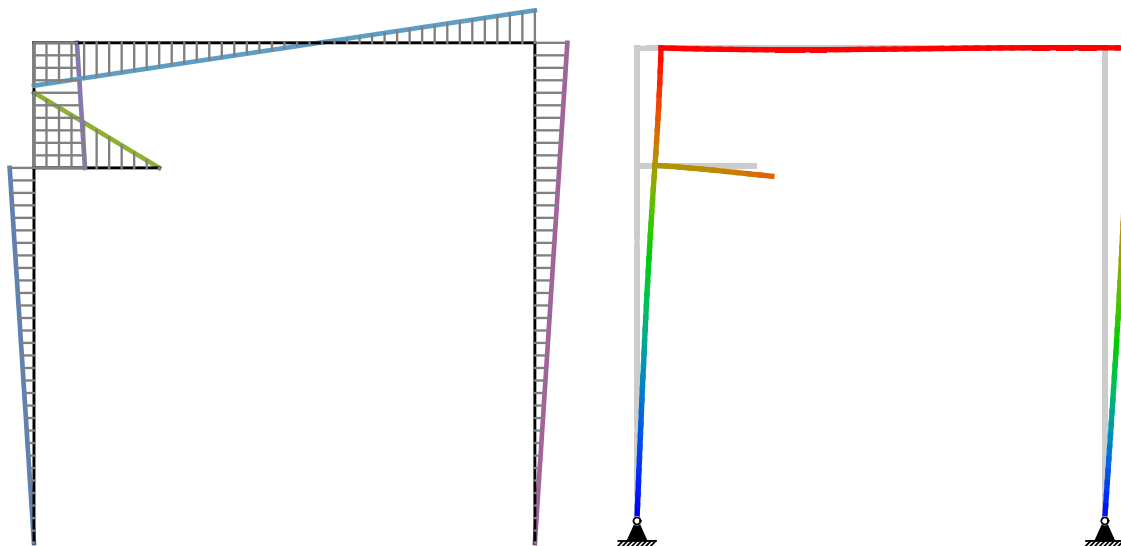


Figura 6.5: Gráficos de momentos y deformaciones, obtenidos con series de potencias.

Ejemplo 6.3:

En este caso es otro pórtico simple presentado en Leontovich [56], de tres barras. Se realiza este ejemplo con el fin de mostrar un cedimiento de vínculo, para este caso, es un desplazamiento horizontal del vínculo de la izquierda de magnitud 1 cm. Se trata de dos columnas de 3 m unidas por una viga de 4 m, empotradas a tierra las bases de las dos columnas. Los nodos se enumeran desde abajo a la izquierda siguiendo sentido horario, al igual que las barras. Las características propias de las barras son las mismas del ejemplo 6.2.

Se muestra en la Figura 6.6 los diagramas de momento, corte y esfuerzos normales obtenidos mediante series de potencias. En la Tabla 6.3 se comparan los valores de los esfuerzos de corte y normal.

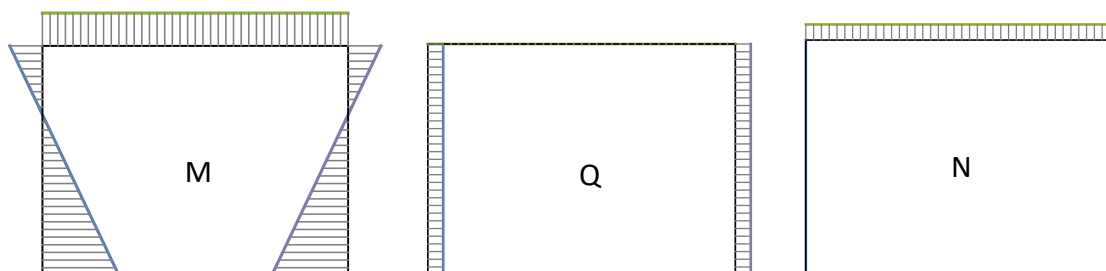


Figura 6.6: Diagramas obtenidos con series de potencias de: a) momentos, b) esfuerzo de corte, c) esfuerzo normal.

Las expresiones de las funciones de momento (Nm) para cada una de las barras obtenidas con el desarrollo en series son las siguientes:

$$\text{Barra 1: } M_1(x) = -1601694.91525 + 762711.8644 x$$

$$\text{Barra 2: } M_2(x) = 686440.6779 - 4.15437 \times 10^{-10} x$$

$$\text{Barra 3: } M_3(x) = 686440.6779 - 762711.8644 x$$

Los valores de momentos en los nodos (Nm), dados por la bibliografía [56], se detallan a continuación:

$$\text{Nodo 1 y 4: } M = 1.60364 \times 10^6$$

$$\text{Nodo 2 y 3: } M = -687273$$

En la Tabla 6.3 se comparan los valores obtenidos por desarrollos en series con lo que provee la bibliografía, para los esfuerzos de corte y normal.

| Barra | Esfuerzo | Serie de potencias | Leontovich [56] |
|-------|----------|-------------------------|-----------------|
| 1 | Corte | 72711.86 | 763636 |
| 2 | | 4.153×10^{-10} | 0 |
| 3 | | 72711.86 | 763636 |
| 1 | Normal | 4.153×10^{-10} | 0 |
| 2 | | 72711.86 | 763636 |
| 3 | | 4.153×10^{-10} | 0 |

Tabla 6.3: Resultados de esfuerzo de corte y normal obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con los obtenidos en [56].

Ejemplo 6.4

Se muestra un entramado cerrado de mayor complejidad, [53-55] en el cual existen vinculaciones internas al pórtico. Básicamente es una estructura de geometría simétrica con 3 tensores (barras 9, 10 y 11) con una carga puntual P de 10.000 N en el nodo 5, como se muestra en la Figura 6.7.

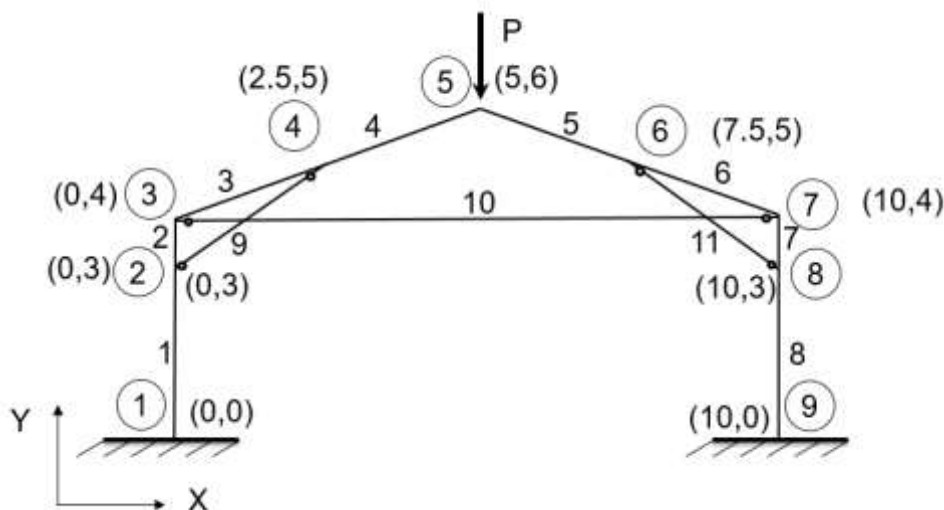


Figura 6.7: Entramado de 11 barras doblamente empotrado en los nodos 1 y 9, con las barras 9, 10 y 11 articuladas internamente al pórtico.

Se han adoptado los mismos valores que en el ejemplo 6.2 para los materiales y geometría de las barras. Por simplicidad en el ingreso de datos, se toman todas las barras con las mismas características, pudiendo ser distintas en caso de ser necesario. Los resultados para este entramado son comparados con los obtenidos al utilizar el programa de elementos finitos Algor [4].

En la Figura 6.8, se muestran los diagramas de momentos obtenidos mediante el desarrollo en Series de Potencias, comparado con los que produce el programa de Elementos Finitos Algor [4]. Los valores de los momentos en algunos de los nodos se presentan en la Tabla 6.4, donde también se muestran valores de esfuerzos de corte y normales en las diferentes barras, que se observan esquemáticamente en la Figura 6.9.

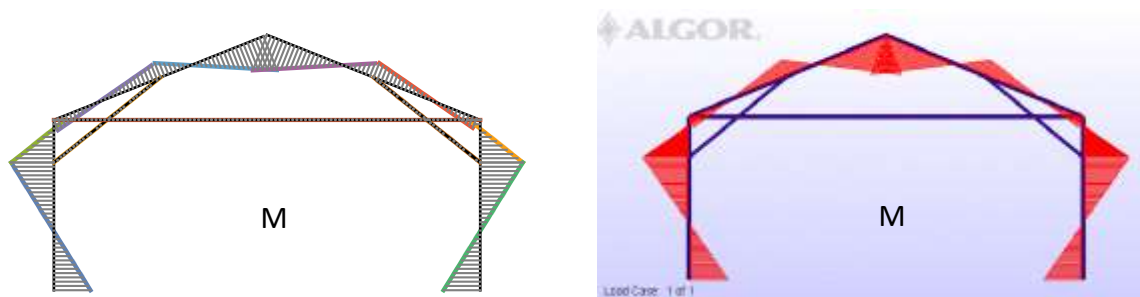


Figura 6.8: Gráficos de momentos, comparación con: a) los obtenidos utilizando el presente método y b) calculados con Método de Elementos Finitos, Algor [4].

Es importante destacar que este ejemplo se resuelve con **15 incógnitas** utilizando series. En caso de la verificación con MEF, con 10 elementos viga por barra, en cada nodo habrá 3 incógnitas, lo que resulta un total de **330 incógnitas**.

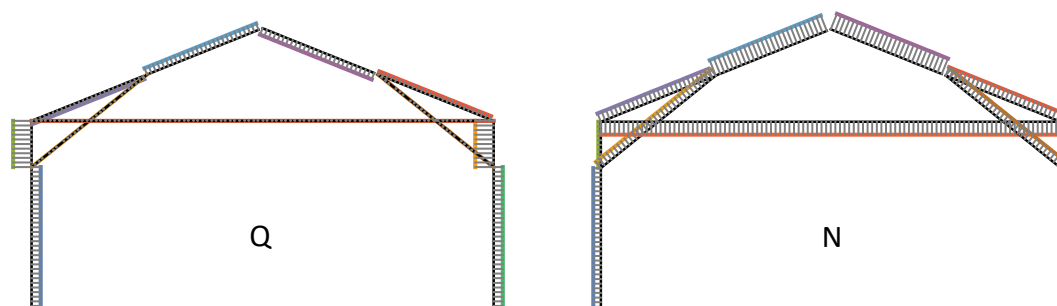


Figura 6.9: Gráficos obtenidos con el programa de esfuerzos de a) corte y b) normal.

| Nodo | Esfuerzo | Series de potencias | MEF Algor [4]. |
|------------|----------|---------------------|----------------|
| 1 y 9 | Momento | 1876.68 | 1876.67 |
| 2 y 8 | | 2183.83 | 2183.82 |
| 3 y 7 | | 565.37 | 565.37 |
| 5 | | 1957.62 | 1957.62 |
| <hr/> | | | |
| Barra | Esfuerzo | Series | MEF Algor [4]. |
| 9 y 11 | Normal | 5254.02 | 5254.02 |
| 10 | | 8399.02 | 8399.02 |
| 9, 10 y 11 | Corte | 0 | 0 |
| 1 y 8 | | 1353.5 | 1353.5 |
| 2 y 7 | | 2749.2 | 2749.2 |

Tabla 6.4: Valores de momento, esfuerzo de corte y normal obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con los obtenidos con MEF, Algor [4].

Ejemplo 6.5

Se trata de un marco cerrado con 5 barras, simplemente apoyado en dos nodos y con una carga uniforme $q(x)$ en la barra inferior de 1000 N/m [53-55]. Las características geométricas de las barras son iguales a los ejercicios anteriores. También se trata del mismo material. El esquema del entramado se observa en la Figura 6.10, en donde se indican las coordenadas de los nodos, en el sistema global y con unidades en metros.

Los resultados de los momentos en los nodos se muestran en la Tabla 6.5 comparándose con los obtenidos al utilizar el MEF. Luego en la Figura 6.11 se comparan los gráficos de momento. En la Figura 6.12 se muestran los gráficos de esfuerzos de corte y normal obtenidos con el programa.

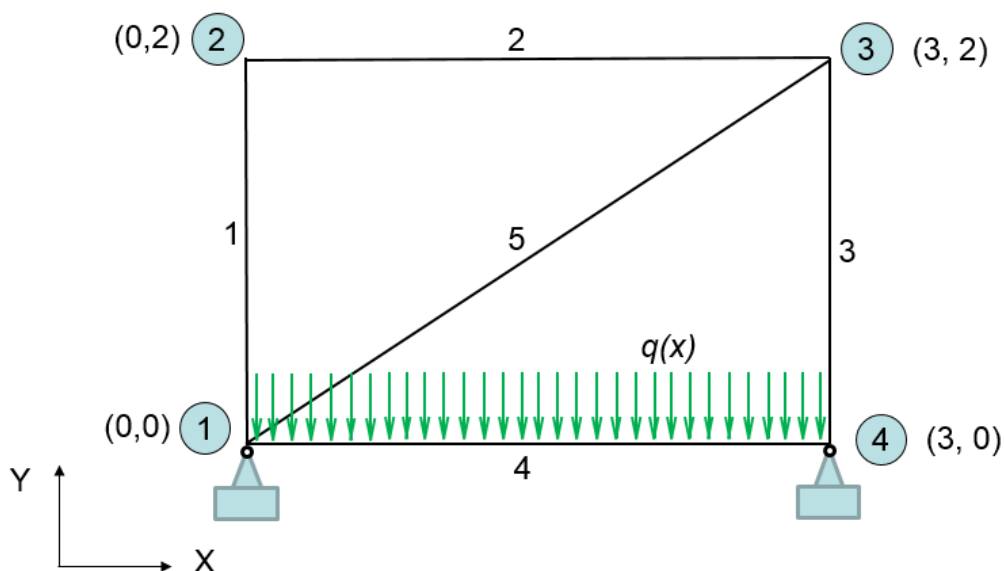


Figura 6.10: Marco cerrado biarticulado con carga uniformemente repartida $q(x)$ en la barra inferior, la número 4.

| Nodo | Serie de potencias | MEF [4]. |
|--------------|--------------------|----------|
| 1 (barra 1) | 364.168 | 364.164 |
| 1 (barra 4) | 640.487 | 640.484 |
| 1 (barra 5) | 276.319 | 276.32 |
| 2 | 66.819 | 66.817 |
| 3 (barra 3) | 185.858 | 185.873 |
| 3 (barra 2) | 10.306 | 10.306 |
| 3 (barra 5) | 175.552 | 175.559 |
| 4 | 517.387 | 517.399 |
| Max. Barra 4 | 546.063 | 546.059 |

Tabla 6.5: Valores de momentos (Nm) en los nodos y máximo momento en la barra 4, obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con MEF, Algor [4].

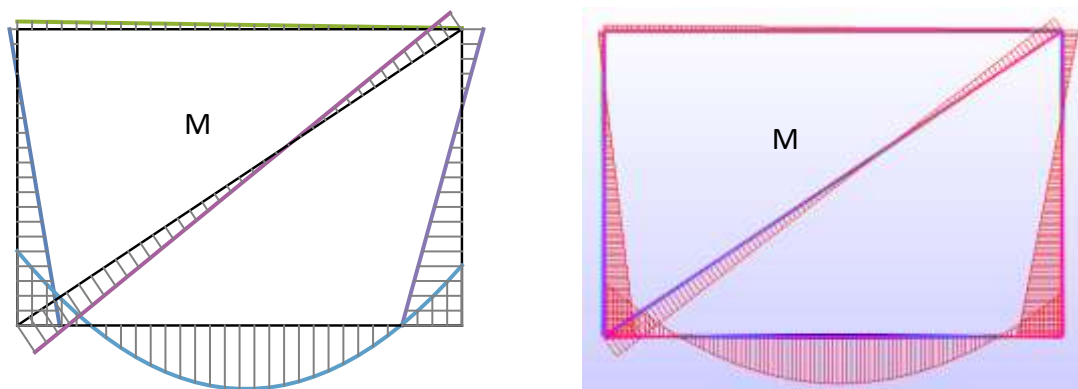


Figura 6.11: Diagramas de momentos obtenidos a) con el programa y b) con MEF [4].

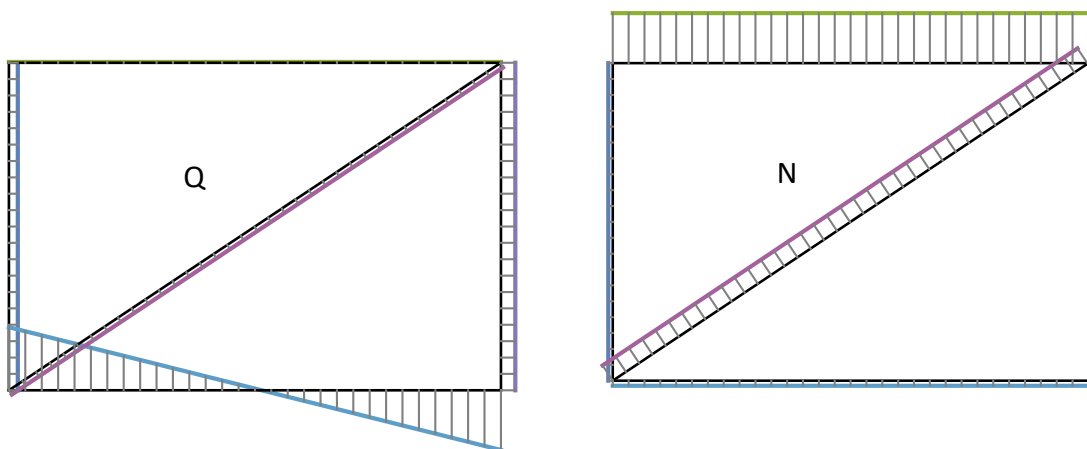


Figura 6.12: Diagramas de esfuerzos obtenidos con el programa: a) corte y b) normal.

Ejemplo 6.6

Con fines de mostrar otro tipo de carga, se resuelve el pórtico presentado en Leontovich [56]. Se trata de un pórtico de 4 barras con una carga triangular vertical en una de las barras, como lo muestra la Figura 6.13. La carga es perpendicular al suelo, por lo que es necesario descomponerla en una carga axial a la barra y otra transversal. Ambas se expresan como polinomios de primer grado.

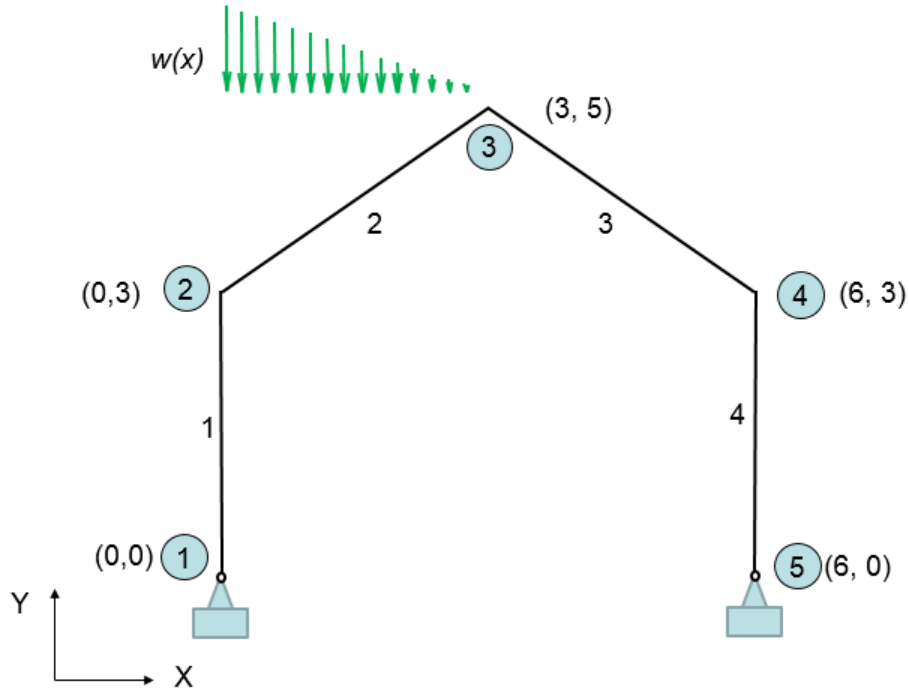


Figura 6.13: Pórtico abierto biarticulado con carga triangular distribuida en la barra 2.

En la Figura 6.14 a) se muestra el diagrama de momentos obtenido con el programa que utiliza series de potencias. Las expresiones de los momentos correspondientes a cada barra son las siguientes:

$$\text{Barra 1: } M_1(x) = 125.146246 x$$

$$\text{Barra 2: } M_2(x) = 375.43873 - 970.64422 x + 346.15384 x^2 - 32.00193 x^3$$

$$\text{Barra 3: } M_3(x) = -124.268768 + 138.593926 x$$

$$\text{Barra 4: } M_4(x) = 375.43873 - 125.1462463 x$$

Los resultados de los momentos en los nodos, obtenidos con las expresiones dadas en la bibliografía [56]:

$$\text{Nodo 2 y 4: } M = 376.404$$

$$\text{Nodo 3: } M = 122.659$$

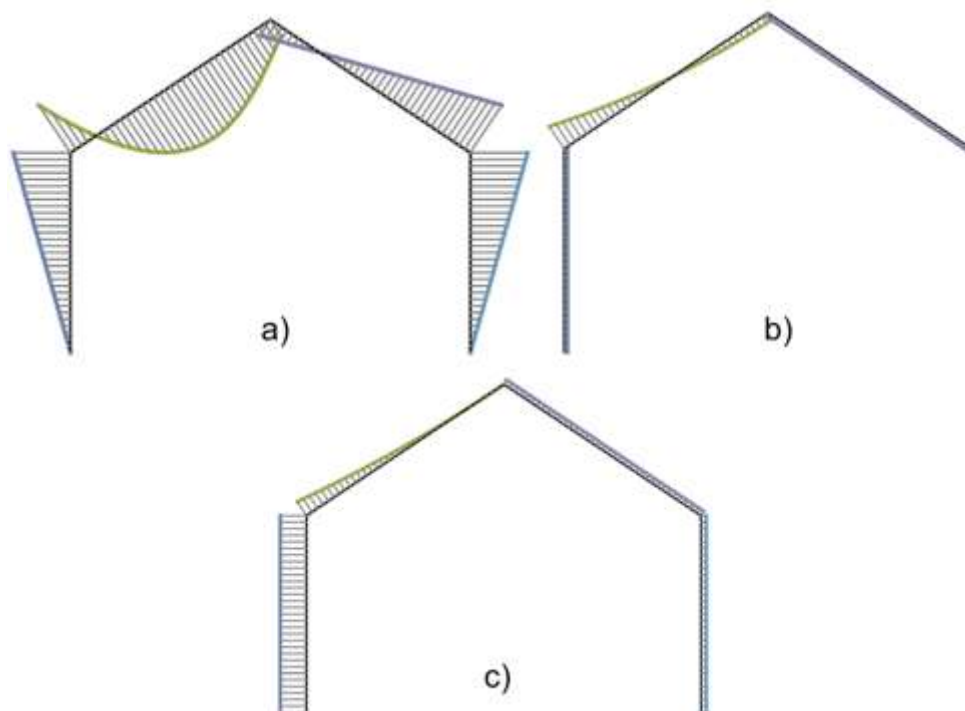


Figura 6.14: Diagramas de a) momento flector, b) esfuerzo de corte y c) normal.

El diagrama de esfuerzos cortantes se muestra en la Figura 6.14 b). A continuación las expresiones de las funciones correspondientes a cada barra obtenidas con el programa, en Newtons:

$$\text{Barra 1: } Q_1(x) = 125.146246$$

$$\text{Barra 2: } Q_2(x) = -970.64422 + 692.30769 x - 96.0058 x^2.$$

$$\text{Barra 3: } Q_3(x) = 138.593926$$

$$\text{Barra 4: } Q_4(x) = -125.146246$$

La bibliografía [56] muestra expresiones que permiten calcular las reacciones horizontales H y verticales V en los apoyos:

$$H_1 = H_5 = 125.468 \text{ N} \quad V_1 = 1250 \text{ N.} \quad V_5 = 250 \text{ N.}$$

El diagrama de esfuerzo normal se muestra en la Figura 6.14 c). A continuación las expresiones de las funciones correspondientes a cada barra, en N:

Barra 1: $N_1(x) = 1249.9999$.

Barra 2: $N_2(x) = 797.503216 - 461.53846x + 64.003869x^2$.

Barra 3: $N_3(x) = 242.80302$.

Barra 4: $N_4(x) = 249.9999$.

En la Tabla 6.6 se muestran algunos valores de esfuerzos obtenidos con series y comparados con los que provee la bibliografía [56].

| Nodo | Esfuerzo | Series de potencias | Leontovich [56] |
|-------|--------------|---------------------|-----------------|
| 2 y 4 | Momento (Nm) | 375.43 | 376.40 |
| 3 | | 124.26 | 122.66 |
| Barra | Esfuerzo | Series de potencias | Leontovich [56] |
| 1 | Normal (N) | 1249.99 | 1250 |
| 4 | | 249.99 | 250 |
| 1 y 5 | Corte (N) | 125.14 | 125.46 |

Tabla 6.6: Valores de momentos (Nm) en los nodos, esfuerzos de corte (N) y normal (N) en la barras, obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con la bibliografía [56].

Conclusiones

En este capítulo, se han resuelto varios pórticos en diferentes situaciones, tratando de utilizar ejercicios provistos en la literatura [56] para comparar los resultados, en varios casos, o que se corroboraron los valores utilizando el método de elementos finitos con el programa Algor [4]. Es de destacar que, con el método aquí desarrollado, es posible también colocar en las barras, cargas de mayor complejidad, polinomios de mayor grado, o trigonométricas, ya que esta última se la expresaría en su desarrollo en series de potencias. Este tipo de carga podría resultar de mucha complejidad para el ingreso de datos en caso de utilizar algunos programas de elementos finitos, ya que es necesario dividir en muchos elementos la barra y

cada elemento con una aproximación trapezoidal de carga, con fines de aproximar en toda la barra una carga trigonométrica, por ejemplo. Algunos programas contemplan el ingreso de este tipo de cargas por barra y luego realizan la aproximación internamente. En la resolución con series, no sería una aproximación de la carga sino la función exacta de la forma en que varía la carga. Esta ventaja aquí descripta se suma a la reducción en la cantidad de incógnitas para resolver el entramado, respecto al método de los elementos finitos.

Capítulo 7

TEORÍA DE SEGUNDO ORDEN EN ENTRAMADOS

Introducción

Cuando una estructura con esfuerzos axiales es analizada con teoría de segundo orden, significa que se plantea el equilibrio en su posición deformada. El problema es **no lineal**. Las restantes hipótesis del análisis lineal se mantienen: linealidad mecánica y cinemática.

Se aborda el problema de segundo orden de entramados planos, atendiendo que dentro de la ingeniería estructural puede resultar de significativa importancia en las cubiertas aporticadas planas. En la construcción metálica, especialmente para el dimensionado final, es determinante conocer la seguridad frente a la inestabilidad del sistema en estudio, potencialidad que con esta teoría puede aproximarse [58-60, 66].

Se recuerda que, y con el propósito de aclarar el desarrollo de este capítulo, la teoría de segundo orden constituye la búsqueda de esfuerzos, desplazamientos y deformaciones. En tanto el estudio lineal de la inestabilidad del equilibrio propiamente dicho consiste en un problema clásico de autovalores. Por lo tanto, la teoría de segundo orden debe considerarse como un estudio indirecto de la inestabilidad estructural. En efecto, cuando el estado de cargas, al menos teóricamente, se aproxima por debajo, al crítico, la presente teoría dará lugar a deformaciones más allá de las admisibles. Como es sabido, la pieza se flexiona (comúnmente, se *pandea* o se *comba*) mucho antes del estado crítico. Varios ejemplos al final del capítulo confirmarán lo expuesto [57].

En la resolución se parte de plantear las ecuaciones diferenciales en los desplazamientos axial y transversal, que rigen el equilibrio de cada elemento recto junto con las condiciones

de vinculación a tierra y de continuidad en cada nodo (3 de tipo geométrico y 3 de equilibrio local), donde los efectos flexo-axiales se acoplan.

Vale añadir una aclaración adicional. En lugar de trabajar con ecuaciones diferenciales no lineales, ya que el esfuerzo axial de cada barra depende de la derivada del desplazamiento axial y que multiplica a la derivada segunda del desplazamiento transversal, se efectúa un proceso iterativo, donde en cada paso se mantienen constantes los esfuerzos axiales que produce la linealización del proceso. Tras pocas iteraciones, los esfuerzos normales en pasos sucesivos no se modifican (el error aceptado se fija) y la solución se completa.

Cabe consignar que la consideración de los esfuerzos axiales, dentro de la ecuación diferencial del desplazamiento flexional, pueden dar lugar a que se tengan desplazamientos estructurales significativos, que una teoría de primer orden no detectaría.

Ecuaciones gobernantes del problema

Para dar generalidad al problema, se consideran todas las energías que intervienen en un entramado sometido al estudio. Entre ellas, la energía U de deformación, considerando los aportes flexional y axial para cada barra j :

$$U = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \right) \quad (7.1)$$

Admitimos para este desarrollo que la carga axial distribuida $p_j(x)$ es nula. Eventualmente, en el caso de necesitar considerarlas, es necesario subdividir el tramo y colocar cargas nodales equivalentes. Entonces la energía G aportada por el efecto de segundo orden, correspondiente a las cargas axiales N_j en las barras, que se suponen constantes en cada iteración, vale:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nb} N_j \int_0^{a_j} (v'_j(x_j))^2 dx_j \quad (7.2)$$

La energía S debido a los esfuerzos aplicados en los nodos i . En esta expresión, el subíndice j se refiere a la barra j sobre la cual se proyecta el esfuerzo, siendo α el ángulo entre la barra y el sistema global de coordenadas, C y S los correspondientes valores de coseno y seno.

$$S = \sum_{i=1}^{nm} \left\{ H_i \left[C_\alpha u_j(x_j) + S_\alpha v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha u_j(x_j) - C_\alpha v_j(x_j) \right] + \mu_i v'_j(x_j) \right\} \quad (7.3)$$

La energía T debida a las cargas repartidas a lo largo de cada una de las barras j , solamente las transversales $q_j(x)$, ya que las axiales son nulas como se ha explicado en párrafos anteriores:

$$T = \sum_{j=1}^{nb} \left(\int_0^{a_j} q_j(x_j) v_j(x_j) dx_j \right) \quad (7.4)$$

La energía total W del conjunto estructural, es debida a los aportes de todas las energías anteriores

$$W = U - G - S - T \quad (7.5)$$

Debiéndose cumplir que

$$\delta(U - G - S - T) = 0 \quad (7.6)$$

En forma general, la expresión correspondiente al análisis de variaciones en un entramado cerrado cuando se considera la teoría de segundo orden, es similar a la ya vista, con el agregado del término correspondiente a la carga N_j de compresión en la barra j . Es importante recordar también que el N_j de compresión es positivo.

Reemplazando las expresiones (7.1 a 7.4) en la (7.5), y luego aplicando (7.6), resulta lo que se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
& \delta \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \right) - \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nb} N_j \int_0^{a_j} (v'_j(x_j))^2 dx_j - \\
& \quad - \delta \sum_{i=1}^{mn} \left\{ H_i \left[C_\alpha u_j(x_j) + S_\alpha v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha u_j(x_j) - C_\alpha v_j(x_j) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \mu_i v'_j(x_j) \right\} - \delta \int_0^{a_j} q_j(x_j) v_j(x_j) dx_j = 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Donde nb es el número total de barras y mn el número de nodos del entramado. A continuación se resuelven las integrales por parte. Se reemplazan además las expresiones del Momento y esfuerzo Normal.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j J_j \left[v''_j(x_j) \delta v'_j(x_j) \Big|_0^{a_j} - v'''_j(x_j) \delta v_j(x_j) \Big|_0^{a_j} + \int_0^{a_j} v_j''''(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j \right] \right\} + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{nb} \left\{ E_j F_j \left[u'_j(x_j) \delta u_j(x_j) \Big|_0^{a_j} - \int_0^{a_j} u_j''(x_j) \delta u_j(x_j) dx_j \right] \right\} - \\
& \quad - \sum_{j=1}^{nb} \left\{ N_j v'_j(x_j) \delta v_j(x_j) \Big|_0^{a_j} - N_j \int_0^{a_j} v_j''(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j \right\} - \\
& \quad - \sum_{i=1}^{mn} \left\{ H_i \left[C_\alpha \delta u_j(x_j) + S_\alpha \delta v_j(x_j) \right] + V_i \left[S_\alpha \delta u_j(x_j) - C_\alpha \delta v_j(x_j) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \mu_i \delta v'_j(x_j) \right\} - \int_0^{a_j} q_j(x_j) \delta v_j(x_j) dx_j = 0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se obtienen agrupando convenientemente los términos que contienen integrales:

$$E_j J_j v_j'''(x_j) + N_j v_j''(x_j) = q_j(x_j) \tag{7.9}$$

donde $N_j = E_j F_j u_j'(x)$

$$E_j F_j u_j''(x_j) = 0 \tag{7.10}$$

Las que, en coordenadas normalizadas, resultan ser:

$$\boxed{v_j'''(\xi_j) - \frac{q_j(\xi_j)}{J_{4,j}} + \frac{N_j v_j''(\xi_j)}{a_j^2 J_{4,j}} = 0} \tag{7.11}$$

$$\boxed{u_j''(\xi_j) = 0} \tag{7.12}$$

Desde aquí en adelante la comilla, indicada en (7.11) y (7.12), se refiere a la derivada respecto de la nueva variable, además:

$$\xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^4} \quad F_{2,j} = \frac{E_j F_j}{a_j^2} \tag{7.13a,b,c}$$

Utilizando las series de potencias, de la forma en que se lo ha planteado en capítulos anteriores:

$$\sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i - \frac{1}{J_{4,j}} \sum_{i=0}^m q_{j,i} \xi_j^i + \frac{N_j}{a_j^2 J_{4,j}} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2} \xi_j^i = 0 \tag{7.14}$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} B_{j,i+2} \xi_j^i = 0 \tag{7.15}$$

Las expresiones para la recurrencia se obtienen de la misma forma que en los capítulos anteriores, igualando los coeficientes de igual potencia:

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i} - \frac{N_j}{a_j^2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad (7.16)$$

$$B_{j,i+2} = 0 \quad (7.17)$$

En la ecuación (7.16), se vinculan los coeficientes $A_{j,i+4}$ con los coeficientes de las funciones que representan las cargas $q_{j,i}$, con los esfuerzos de compresión en cada barra N_j y con los coeficientes anteriores en el desarrollo en series del desplazamiento transversal $A_{j,i+2}$. La (7.17) indica que la función del desplazamiento axial es lineal, ya que los coeficientes en el desarrollo en serie mayores o iguales a 2 son nulos.

Vale aclarar que tampoco han cambiado las condiciones y ecuaciones de compatibilidad geométricas, o de primer orden, que se plantean en cada nodo.

Condiciones y ecuaciones estáticas de equilibrio en los nodos

En los nodos a los que concurren más de una barra, se deben plantear las correspondientes condiciones de equilibrio, o sea dos sumatorias de esfuerzos y una de momentos, de la misma forma que se realizó en capítulos anteriores. Con un análisis similar, se llega a las siguientes expresiones para las condiciones de equilibrio:

$$A_{k,2} = \frac{1}{J_{2,k} \varphi_{2,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) - \sum_{b=1}^{nbs} J_{2,b} \varphi_{2,0} A_{b,2} - \mu_n \right] \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned}
A_{k,3} = & \frac{1}{J_{3,k} \varphi_{3,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{3,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{N_b}{a_b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{b,i+1} \right) + H_n S_k - V_n C_k + \frac{N_k}{a_k} A_{b,k} + \right. \\
& \left. + \sum_{b=1}^{nbs} \left(-J_{3,b} C_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} S_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} - \frac{N_b}{a_b} C_{k,b} A_{b,1} \right) \right] \quad (7.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{k,1} = & \frac{1}{F_{1,k} \varphi_{1,0}} \left[\sum_{b=1}^{nbe} \left(-J_{3,b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{b,i+3} + F_{1,b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{b,i+1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{N_b}{a_b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{b,i+1} \right) - H_n C_k - V_n S_k + \right. \\
& \left. + \sum_{b=1}^{nbs} \left(J_{3,b} S_{k,b} \varphi_{3,0} A_{b,3} - F_{1,b} C_{k,b} \varphi_{1,0} B_{b,1} + \frac{N_b}{a_b} S_{k,b} A_{b,1} \right) \right] \quad (7.20)
\end{aligned}$$

Siendo, nbe y nbs el número total de barras entrantes y salientes respectivamente al nodo n en estudio, k es la barra que toma valores de las anteriores en el camino de recorrido del entramado.

En el caso de nodos en los que todas las barras concurren, se plantean las ecuaciones de equilibrio, con un análisis similar al realizado anteriormente y se obtienen las ecuaciones que se expresan a continuación:

$$\sum_{b=1}^{nbe} \left(J_{2,b} \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{b,i+2} \right) - \mu_n = 0 \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned}
\sum_k \left[-J_{3,k} C_{k,3} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{k,i+3} - F_{1,k} S_{k,3} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{k,i+1} - \right. \\
\left. - \frac{N_b}{a_b} C_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{b,i+1} \right] - H_n S_k + V_n C_k = 0 \quad (7.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_k \left[-J_{3,k} S_{k,3} \sum_{i=0}^{m-3} \varphi_{3,i} A_{k,i+3} + F_{1,k} C_{k,3} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} B_{k,i+1} - \right. \\
\left. - \frac{N_b}{a_b} S_{k,b} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{b,i+1} \right] - H_h C_k - V_h S_k = 0 \quad (7.23)
\end{aligned}$$

Condiciones de borde

Para los casos en que existan esfuerzos aplicados en un nodo origen de barra, lo que significa que es evaluado en coordenada local con $\xi_j = 0$, las expresiones a las que se arriba utilizando el cálculo de variaciones, a la barra k en el nodo n , son las siguientes:

$$A_{k,2} = \frac{-\mu_n}{J_{2,k} \varphi_{2,0}} \quad (7.24)$$

$$A_{k,3} = \frac{1}{J_{3,k} \varphi_{3,0}} \left(H_n S_k - V_n C_k - \frac{N_k}{a_k} A_{b,k} \right) \quad (7.25)$$

$$B_{k,1} = \frac{-H_n C_k - V_n S_k}{F_{1,k}} \quad (7.26)$$

Programa de cálculo donde se considera la teoría de segundo orden

Para un estado de carga definido, como se ha dicho, se trata de un problema no lineal, llevado a una iteración de un problema lineal, considerando los esfuerzos axiales constantes en cada iteración.

El programa de cálculo básicamente es el mismo analizado en el Capítulo 5 correspondiente a la estática, ingresando una subrutina que almacena los valores de los esfuerzos normales obtenidos al calcular el entramado, ver diagrama de flujo Programa G en el Apéndice. Se inicia el proceso con valores arbitrarios de los esfuerzos axiales en las barras. Esto es lo que se utiliza como *semilla* del estado de carga fijado.

En cada iteración, se toman los esfuerzos normales de todas las barras hallados en la pasada anterior. Esos esfuerzos normales son los N_j con los que se vuelve a correr el programa, teniendo en cuenta las expresiones halladas para la recurrencia en (7.16) y (7.17). También intervienen en las expresiones de las condiciones y ecuaciones de equilibrio (7.18) a (7.23), y en los vínculos a tierra según las condiciones de borde dadas en (7.24) a (7.26).

Con un estado de cargas, se realiza la iteración hasta que se estabilizan los esfuerzos normales en las barras. En ese momento es posible concluir que se ha encontrado la solución

elástica utilizando la teoría de segundo orden con series de potencias para ese estado de cargas.

Si el propósito es acercarse a un estado más próximo al que provoca la inestabilidad del equilibrio o estado crítico, es necesario comenzar a incrementar el valor de todas las cargas externas al entramado multiplicándolas por algún factor previamente ingresado (fac) mayor a uno ($fac > 1$). Con fines de controlar lo que sucede con las elásticas, es necesario almacenar en un vector, el valor del desplazamiento en algún punto del entramado (denominado punto D), para cada cambio en los valores de las cargas.

Se continúa con este proceso, chequeando el **aumento** en el valor del desplazamiento en ese punto D del entramado. En el momento en que estos valores chequeados comienzan a aumentar superando ciertos valores preacordados, es señal que el proceso se está por terminar, ya que muy próximo se encuentran los valores críticos. Es posible continuar el acercamiento a este estado de inestabilidad, disminuyendo el factor que incrementa las cargas, y continuar con el proceso iterativo.

El proceso indicado puede o no ser convergente, en función de las características geométricas y mecánicas del pórtico, como así también de la magnitud del estado inicial de cargas escogidas o de los valores de incremento de carga elegidos. Cuando se superan las cargas críticas, el proceso es divergente.

Búsqueda indirecta del estado crítico para algunos casos

A continuación se muestran una serie de ejemplos simples a los cuales es posible arribar a su estado crítico mediante desarrollos teóricos. Se comparan los resultados con los que se obtienen al utilizar las series de potencias y empleando el programa Mathematica [1].

Caso 1

Se parte de una barra empotrada en un extremo y libre en el otro. En este último están aplicados una carga P y un momento M_0 , Figura 7.1. La barra tiene longitud L , un módulo de elasticidad es E y la inercia de su sección transversal es J .

La ecuación diferencial que resuelve este problema es la que se muestra a continuación:

$$EJ v''''(x) + P v''(x) = 0 \quad (7.27)$$

La solución analítica de la expresión del desplazamiento transversal que satisface la ecuación diferencial (7.27) es la siguiente:

$$v(x) = c_1 \operatorname{sen}(kx) + c_2 \operatorname{cos}(kx) + c_3 x + c_4 \quad (7.28)$$

en donde

$$k^2 = \frac{P}{EJ} \quad (7.29)$$

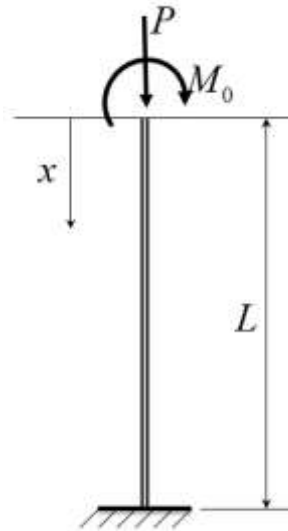


Figura 7.1: Barra empotrada libre para análisis del caso 1.

Se deben satisfacer las condiciones de borde que se indican en (7.30 a-d):

$$v''(0) = \frac{M_0}{EJ} = m \quad v''''(0) + k^2 v''(0) = 0 \quad (7.30a, b)$$

$$v(L) = 0 \quad v'(L) = 0 \quad (7.30c, d)$$

Las correspondientes tres primeras derivadas

$$v'(x) = c_1 k \cos(kx) - c_2 k \sin(kx) + c_3 \quad (7.31a)$$

$$v''(x) = -c_1 k^2 \sin(kx) - c_2 k^2 \cos(kx) \quad (7.31b)$$

$$v'''(x) = -c_1 k^3 \cos(kx) + c_2 k^3 \sin(kx) \quad (7.31c)$$

Esto conduce a un sistema de cuatro ecuaciones con 4 incógnitas que lleva a la siguiente solución para el corrimiento transversal.

$$v(x) = -\frac{m}{k^2} \operatorname{tg}(kL) \sin(kx) - \frac{m}{k^2} \cos(kx) + \frac{m}{k^2 \cos(kL)} \quad (7.32)$$

Cuando $kL \rightarrow \pi/2$ entonces $v(x) \rightarrow \infty$ de allí es posible encontrar el valor de la carga crítica:

$$P_{crit} = \frac{EJ \pi^2}{4L^2} \quad (7.33)$$

Conociendo que:

$$M(L) = -EJ v''(L) \quad (7.34)$$

$$M(L) = -EJ m \left[\frac{\sin^2(kL)}{\cos(kL)} + \cos(kL) \right] \quad (7.35)$$

Utilizando la (7.30a) y relaciones trigonométricas, resulta el valor del momento:

$$M(L) = -\frac{M_0}{\cos(kL)} \quad (7.36)$$

Ejemplo 7.1

Se considera la columna de la Figura 7.2, de longitud $L = 6$ m y en la parte superior un voladizo con largo $l = 0,5$ m, módulo de elasticidad de las dos barras $E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m² y momento de inercia $J = 0,0036$ m⁴. Con estos valores, la carga crítica resulta ser:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(2L)^2} = 5,18154 \times 10^7 \text{ N} \quad (7.37)$$

El correspondiente momento en la base aumenta considerablemente a medida que nos acercamos a este valor de carga

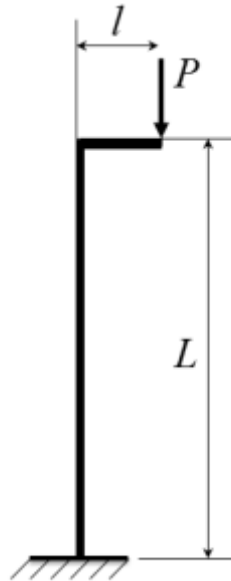


Figura 7.2: Columna empotrada con carga en voladizo.

Este mismo ejemplo ha sido resuelto con la metodología que se propone en el presente capítulo y cuyos resultados se explican a continuación.

En la Figuras 7.3 a-c se observan los diagramas de momento, corte y normal, obtenidos con cargas previas a superar los valores críticos, y para el caso que se muestra, corresponde a una carga $P = 4.8756 \times 10^7$ N.

En la Figura 7.4a, se muestra como aumenta considerablemente el desplazamiento horizontal en el nodo donde se encuentran las dos barras, a medida que la carga se aproxima a la crítica.

Cuando la carga crítica es superada, comienzan los errores numéricos y se observa en la Figura 7.4b lo que ocurre con el desplazamiento horizontal del mismo nodo mencionado en el párrafo anterior.

En la Figura 7.5 se observa una gráfica de salida en el programa, elaborado utilizando series de potencias, en donde es posible indirectamente encontrar el valor de la carga crítica. Como se ha dicho anteriormente, la aproximación con este procedimiento es siempre por debajo al valor dado por la expresión teórica (7.37).

$$P = 5.17942 \times 10^7 N < P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(2L)^2} = 5,18154 \times 10^7 N \quad (7.38)$$

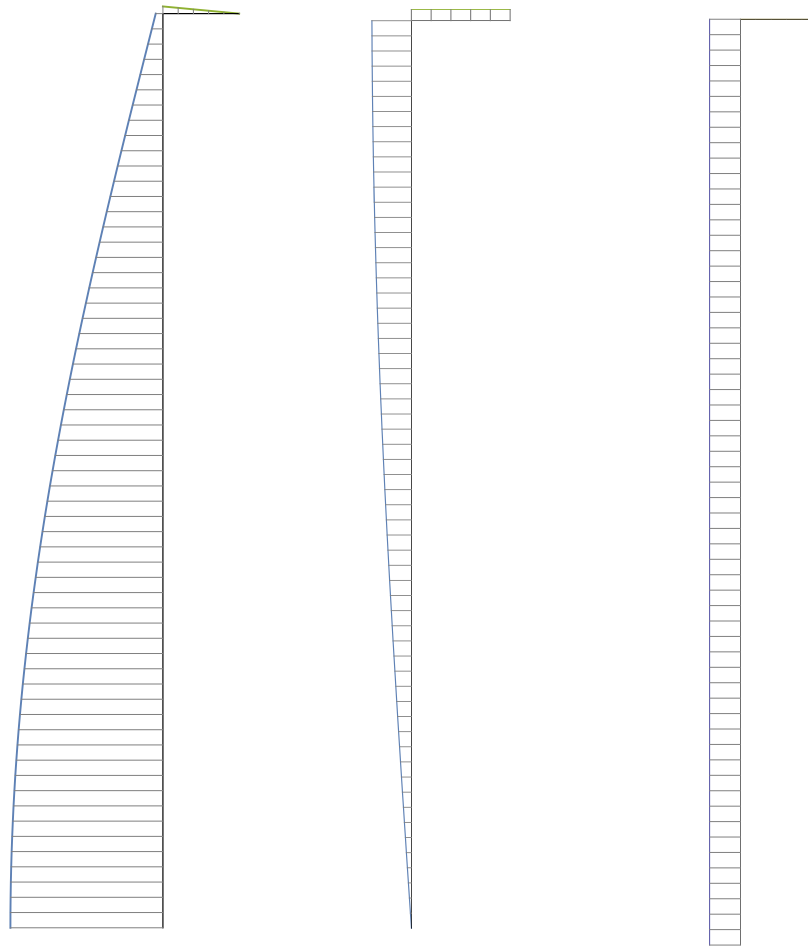


Figura 7.3 Gráficos de esfuerzos: momento, corte y normal, resuelto con series de potencias para $P = 4.8756 \times 10^7 \text{ N}$ [1].

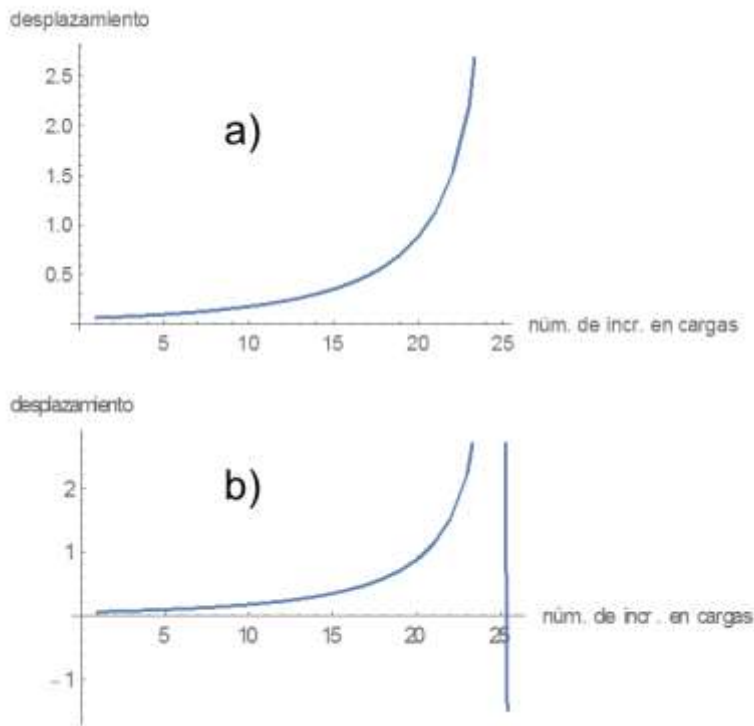


Figura 7.4 Desplazamiento horizontal del nodo superior para valor de carga P: a) menor a la carga crítica, b) superada la carga crítica [1].



Figura 7.5 Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica [1].

Caso 2

Se trata de un pórtico biempotrado con dos cargas puntuales, extraído de la bibliografía [61] que se observa en la Figura 7.6. La ecuación trascendente para deformada simétrica es la siguiente:

$$\frac{k L}{\operatorname{tg}(kL)} = -\frac{6 L I_1}{L_1 I} \quad (7.39)$$

En donde $k^2 = P/EI$

Conociendo los valores de las constantes geométricas y del material, es posible obtener la carga crítica de pandeo P_{crit} .

Ejemplo 7.2

Se realiza el cálculo para un pórtico como el de la Figura 7.6 con las siguientes características: $L = 3$ m, $L_1 = 4$ m, $I = I_1 = 0,0036$ m⁴, $E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m². Con estos valores, la ecuación característica (7.39) se satisface con $P_{cr} = 5.74478 \times 10^8$ N.

Al resolverlo con el cálculo iterativo utilizando series de potencias de grado 30, se le coloca una pequeña carga perturbadora horizontal en uno de los nodos superiores, de esta manera, pasados ciertos valores se llega a una carga $P = 5.69021 \times 10^8$ N, previa a provocar la divergencia, obteniéndose los diagramas de momento, corte y normal que se muestran en la Figura 7.7.

De la misma manera que en el ejercicio anterior, en la Figura 7.8 se puede observar los resultados que muestra el programa elaborado.

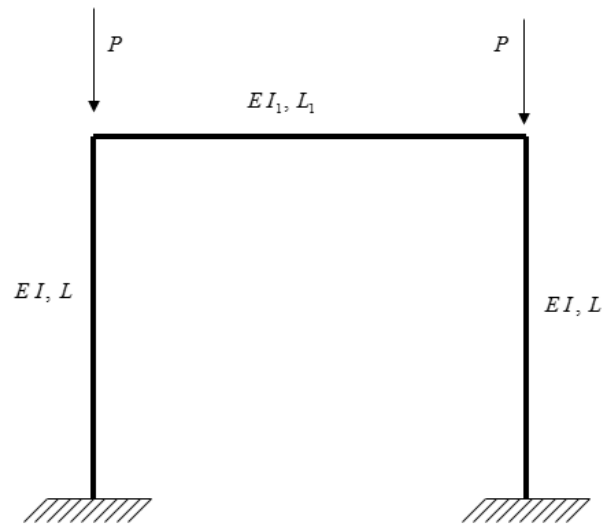


Figura 7.6 Pórtico biempotrado con cargas puntuales.

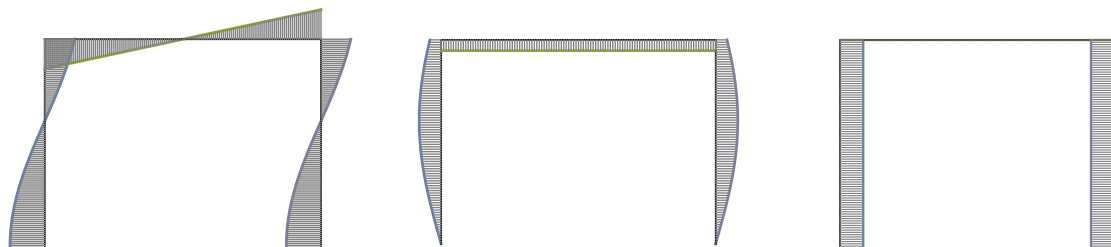


Figura 7.7 Diagramas de momento, corte y normal.

Se observa que el valor hallado es el que provoca la deformada no simétrica. Esto se debe a que se le ha agregado una perturbación horizontal.



Figura 7.8 Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica.

Caso 3

A continuación un pórtico biarticulado con dos cargas puntuales en el dintel superior, extraído de la bibliografía [61], como se indica en la Figura 7.9. La ecuación gobernante para la carga de pandeo es la de Bleich [62].

$$\frac{\pi L}{n L_1} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2n} \right) + \frac{H}{P} \left(1 - \frac{\pi}{m} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{m} \right) - \frac{P}{H} \left[\sec \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{L_1} \right) - 1 \right] = 0 \quad (7.40)$$

donde:

$$\frac{\pi}{m} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \frac{\pi}{n} = L_1 \sqrt{\frac{H}{EI_1}} \quad (7.41a, b)$$

La ecuación (7.40) es la ecuación general que relaciona la fuerza horizontal H con la carga transversal aplicada P . Como P se incrementa, H varía en forma no lineal. Además, es una ecuación altamente trascendente y compleja, y en consecuencia no es posible indicar, en general, los valores de P para los cuales el entramado pandea.

En el caso que $I = I_1$, $L = L_1$ y $a = L_1/3$, la (7.40) se reduce a:

$$\frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2n} \right) + \frac{m^2}{n^2} \left(1 - \frac{\pi}{m} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{m} \right) - \frac{n^2}{m^2} \left[\frac{1}{6} \sec \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{n} - 1 \right] = 0 \quad (7.42)$$

con

$$\frac{H}{P} = \frac{m^2}{n^2} \quad (7.43)$$

Ejemplo 7.3

Se realiza el cálculo para un pórtico como el de la Figura 7.9 con las siguientes características: $L = L_1 = 6 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $I = I_1 = 0,0036 \text{ m}^4$, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. Con estos valores, la ecuación se satisface con $P = 2.07262 \times 10^8 \text{ N}$.

Realizando el ejemplo con series, sin colocarle una carga perturbadora que lleve el análisis a deformación NO simétrica, el valor al que se arriba es $P = 1.987 \times 10^8 \text{ N}$. Luego del mismo las deformaciones son extremadamente no lineales.

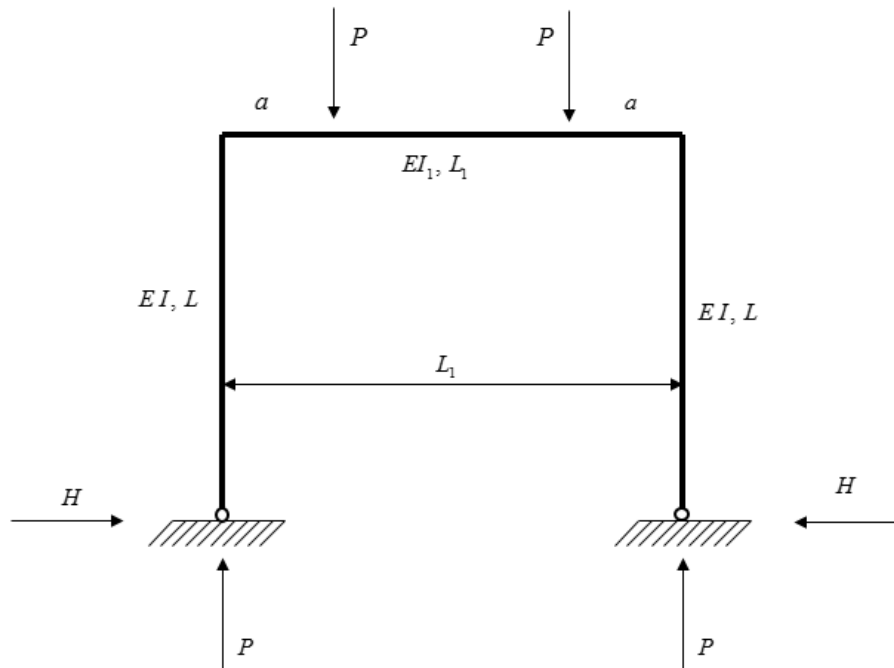


Figura 7.9 Pórtico biarticulado con cargas puntuales en la viga superior.

Caso 4

Con fines de realizar ejemplos distintos a los pórticos abiertos, se presenta a continuación un marco cerrado Figura 7.10, que también lo provee la literatura [61].

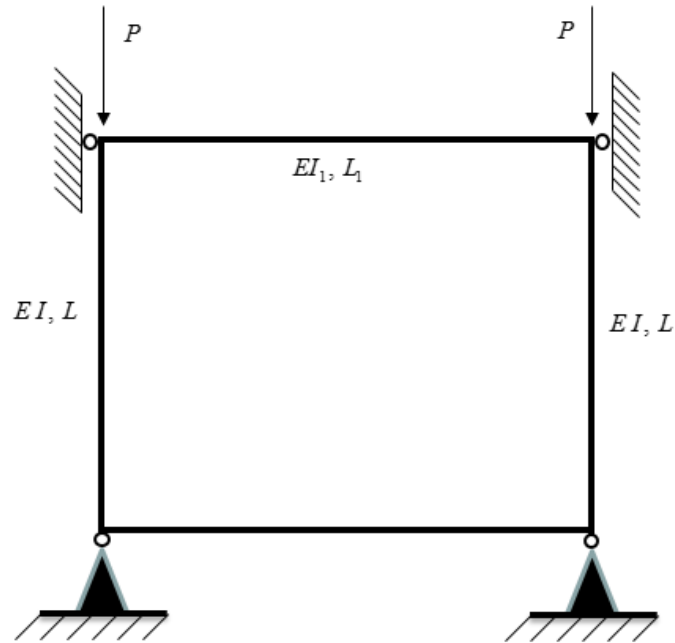


Figura 7.10 Marco cerrado.

La ecuación trascendental para la carga crítica P está dada por:

$$\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda} = -\frac{L_1 I}{I_1 L} \quad (7.44)$$

siendo:

$$\lambda = k \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (7.45)$$

Si las cuatro barras del entramado son idénticas, la anterior se convierte en

$$\operatorname{tg} \lambda = -\lambda \quad (7.46)$$

En este caso, la raíz mínima de la ecuación trascendental da la carga crítica:

$$P_{crit} = 16.47 EI/L^2 \quad (7.47)$$

Ejemplo 7.4

En el caso de un marco cerrado como el de la Figura 7.10 con las siguientes características geométricas y mecánicas: $L = 3$ m, $I = 0,0036$ m⁴, $E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m². Con estos valores, la ecuación (7.47) se satisface con $P_{cr} = 1.38348 \times 10^9$ N. Utilizando series se logra aproximarse hasta el valor: $P = 1.3862 \times 10^9$ N, como se puede observar en la Figura 7.11.

Para el caso que $L = 3$ m y $L_l = 4$ m, la carga crítica es $P_{cr} = 8.29047 \times 10^8$ N. Con series de potencias, colocando un pequeño momento en uno de los nodos superiores, como para provocar una deformada NO simétrica, se controla el desplazamiento transversal en el medio de una de las barras verticales y se llega a valores de $P = 8.166 \times 10^8$ N.



Figura 7.11 Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica en el marco cerrado [1].

Solución elástica utilizando la teoría de segundo orden

En esta última parte del capítulo se resuelve un entramado cerrado con un grado importante de complejidad, lo cual se considera uno de los principales aportes en esta tesis. Se buscan las soluciones elásticas considerando la teoría de segundo orden, utilizando series de potencias, comparando luego los resultados con los que se obtienen al utilizar un programa de elementos finitos [4].

Ejemplo 7.5

El entramado a resolver se muestra en la Figura 7.12 y consta de 10 barras, 9 nodos, empotrado en los nodos 1, 7 y 8. En el esquema se observan 2 cargas puntuales, P_3 y P_4 (en N) ubicadas en los nodos 3 y 4. Además hay 4 cargas uniformemente repartidas q_2 , q_3 , q_4 y q_{10} (en N/m) situadas en las barras 2, 3, 4 y 10 respectivamente. Las coordenadas de los nodos se indican en un sistema global, con unidades en m. Las barras poseen las siguientes características: $I = 0,0036 \text{ m}^4$, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

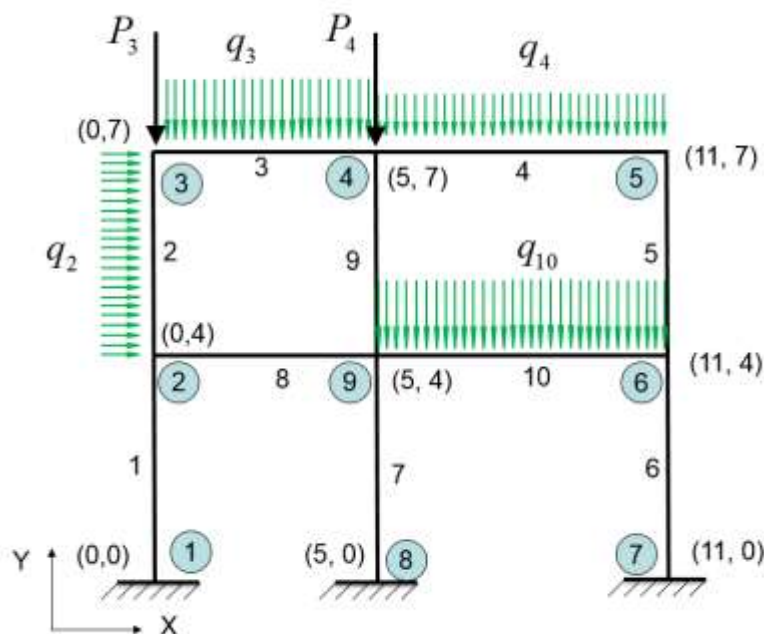


Figura 7.12 – Entramado de 10 barras con cargas puntuales y repartidas.

Se resuelven dos estados de cargas (caso 1 y caso 2) [57], en cada uno de ellos, incrementando todas las cargas con un factor f , que toma valores 1, 100 y 1000. Se busca la

solución elástica utilizando la teoría de segundo orden con series de potencias, utilizando el programa Mathematica [1], comparando los resultados con el método de los elementos finitos [4]. Algunos de los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 7.1 y 7.2. Se ha tabulado para el nodo 3, los desplazamientos horizontal v_3 y vertical u_3 , el giro θ_3 y el momento M_3 . También se indica el tiempo de cálculo para cada método empleado.

Caso 1: $P_3 = 2 \times 10^5$ N, $P_4 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 = 3 \times 10^4$ N/m y $q_{10} = 0$.

| | | Series de potencias | MEF [4] |
|----------|----------------|-------------------------|-------------------------|
| $f=1$ | tiempo (seg) | 8 | 32 |
| | v_3 (m) | 3.048×10^{-5} | 3.0×10^{-5} |
| | u_3 (m) | 5.38×10^{-5} | 5.4×10^{-5} |
| | θ_3 (°) | 1.159×10^{-3} | 1.157×10^{-3} |
| | M_3 (Nm) | 7846.35 | 7835.08 |
| $f=10^2$ | tiempo (seg) | 9 | 74 |
| | v_3 (m) | 3.038×10^{-3} | 2.84×10^{-3} |
| | u_3 (m) | 5.3798×10^{-3} | 5.3784×10^{-3} |
| | θ_3 (°) | 0.1175 | 0.1157 |
| | M_3 (Nm) | 776643 | 794408.6875 |
| $f=10^3$ | tiempo (seg) | 11 | 302 |
| | v_3 (m) | 2.4558×10^{-2} | 2.3061×10^{-2} |
| | u_3 (m) | 5.3804×10^{-2} | 5.4085×10^{-2} |
| | θ_3 (°) | 1.328 | 1.3508 |
| | M_3 (Nm) | 6.8356×10^6 | 6.94×10^6 |

Tabla 7.1 – Resultados obtenidos de tiempo de cálculo, desplazamientos y momentos en el nodo 3 para el **Caso 1** de cargas.

Caso 2: $P_3 = 0$ N, $P_4 = 5 \times 10^5$ N, $q_2 = 2 \times 10^3$ N/m, $q_3 = 4 \times 10^4$ N/m, $q_4 = 0$ N/m y $q_{10} = 5 \times 10^4$ N/m.

| | | Series de potencias | MEF [4] |
|----------|----------------|------------------------|------------------------|
| $f=1$ | tiempo (seg) | 9 | 22 |
| | v_3 (m) | 3.792×10^{-5} | 3.1×10^{-5} |
| | u_3 (m) | 2.88×10^{-5} | 2.9×10^{-5} |
| | θ_3 (°) | 5.459×10^{-3} | 5.531×10^{-3} |
| | M_3 (Nm) | 72695.8 | 73705.85 |
| $f=10^2$ | tiempo (seg) | 9 | 144 |
| | v_3 (m) | 7.016×10^{-3} | 7.418×10^{-3} |
| | u_3 (m) | 2.843×10^{-3} | 2.902×10^{-3} |
| | θ_3 (°) | 0.568 | 0.562 |
| | M_3 (Nm) | 7.07×10^6 | 7.402×10^6 |

Tabla 7.2 – Resultados obtenidos de tiempo de cálculo, desplazamientos y momentos en el nodo 3, para el **Caso 2** de cargas.

Se observa de las tablas que en general los valores son del mismo orden, teniendo en cuenta que los procesos son totalmente distintos para arribar a los mismos.

En este entramado, se han utilizado 20 elementos por barra en elementos finitos, lo que hace un total de **600 incógnitas**. Utilizando series de potencia, son solamente **15 incógnitas**. Se ha agregado también la información referida al tiempo de cálculo computacional, observándose una diferencia muy grande entre los dos métodos, sobre todo en presencia de cargas que provocan grandes deformaciones.

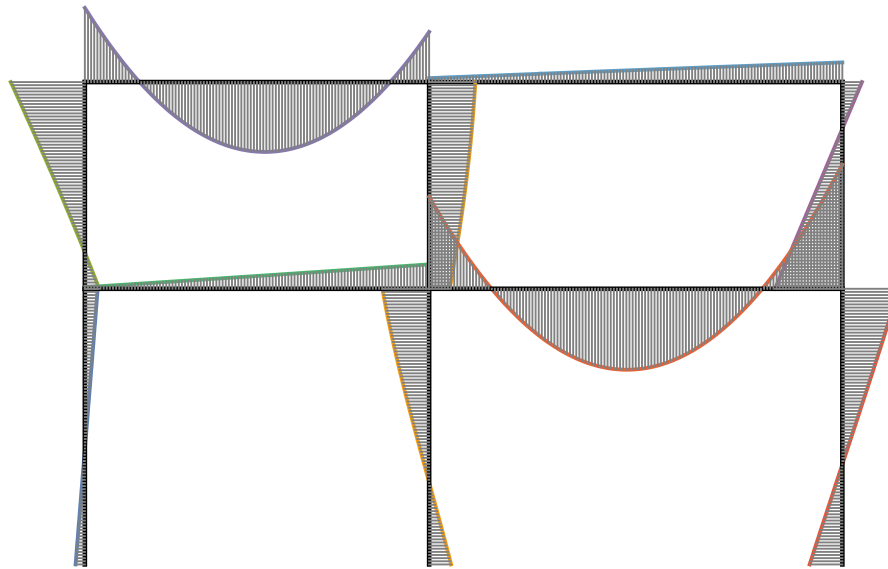


Figura 7.13 – Diagrama de momentos para el **Caso 2** con $f=100$ [1].

Conclusiones

Si bien es cierto que hoy en día existen potentes programas de elementos finitos, que permiten abordar el tema con seguridad y eficiencia, también es verdad que la manipulación de tales programas, requiere de un avezado conocimiento en el uso de los mismos. Por otro lado, el costo de dichos programas resulta demasiado oneroso para gran parte de los profesionales.

Por los motivos expuestos, es frecuente que los ingenieros procedan al análisis del problema, simplificando peligrosamente el modelo. Efectivamente, suele estudiarse cada miembro del entramado, como una columna con soportes elásticos en ambos extremos. El problema es que los miembros del pórtico no se comportan de este modo, precisamente porque la rigidez de los resortes, que equivalen a la reacción elástica que el resto del conjunto ejerce sobre el miembro considerado, no solo no es constante sino que depende de la carga crítica desconocida del conjunto.

Como aplicación específica dentro la ingeniería estructural, se ha presentado aquí una solución en serie de potencias por medio de un algoritmo sistemático de recurrencia. Esto permite analizar el comportamiento estructural de entramados planos, arribando a una solución elástica teniendo en cuenta la teoría de segundo orden.

Una característica a destacar de la solución por series del problema de segundo orden en pórticos planos, es el número de incógnitas. Cualquiera sea el número de barras, es siempre muy pequeña la cantidad de incógnitas que resuelve el conjunto estructural. Como contrapartida, otros métodos, tal como el conocido de los elementos finitos, deben plantear forzosamente tres incógnitas por cada nodo. Por lo general, es necesaria la subdivisión de cada barra en pequeños elementos para garantizar un mejor resultado, obligando a la proliferación de nodos, y por ende, aumentando la cantidad de incógnitas del problema a resolver. Eso trae aparejado un mayor tiempo computacional que queda de manifiesto en el último ejemplo en donde se ha indicado la demora en llegar a la solución con cada método (ver valores de tiempo empleado en Tablas 7.1 y 7.2).

Para finalizar, algo que se ve claramente reflejado en el último ejemplo, el tiempo computacional es siempre muy bajo utilizando series de potencias. Se ha resuelto cada situación en ambos programas utilizando la misma computadora y en las mismas condiciones. A medida que el estado de cargas se va incrementando, se aumentan también las grandes deformaciones y aumenta enormemente el tiempo computacional al utilizar elementos finitos, no ocurriendo lo mismo si se utilizan series de potencias. Esto concluye en otra de las grandes ventajas del método propuesto en la presente tesis.

Capítulo 8

COMENTARIOS FINALES

Conclusiones

Con esta tesis se aporta un programa que resuelve la estabilidad, estática y dinámica de entramados planos, dentro del encuadre adoptado por la Resistencia de Materiales clásica. Se adiciona además, la resolución de los problemas hiperestáticos por medio de la teoría de segundo orden, en la cual, al fijar la relación de las cargas de punta con una carga de comparación fue posible hallar la denominada carga crítica, esto se logra de manera indirecta cuando las deformaciones crecen indefinidamente.

Las soluciones están completamente basadas en el uso de series infinitas de potencias enteras. Esta forma de series infinitas, para ser aplicadas, deben ser truncadas. La exactitud de los resultados está supeditada al grado de la serie que se adopte, de manera que siempre está la posibilidad de mejorar los mismos, aumentando simplemente el número de términos de las series, y así lograr la precisión en dígitos requerida. En todos los ejemplos presentados en la tesis, la precisión de los resultados logrados ha sido muy buena. Los mismos se han obtenido con una cantidad de términos que no ha superado el grado 30 en los polinomios de las series.

La recurrencia que se plantea en todos los problemas abordados, logra una reducción notable en la cantidad de incógnitas al compararla con otros métodos como MEF.

En el caso de la búsqueda de las frecuencias naturales, para encontrar solo las primeras, se requiere bajo grado en la potencia (con orden 10 hay muy buena aproximación). Para frecuencias mayores, es necesario aumentarlo. Es importante recalcar que, al utilizar otros métodos como elementos finitos, es también necesario aumentar la cantidad de ellos, pero esto conduce al aumento de incógnitas, cosa que no ocurre al aplicar series, ya que la cantidad de incógnitas depende solamente de la geometría del entramado y no del orden del polinomio utilizado.

En el caso del cálculo de los hiperestáticos, otra de las ventajas es que las cargas de forma polinómica, se toman en forma exacta en todo el largo de la barra. Otros métodos necesitan dividir la misma en cargas trapezoidales para lograr la aproximación. Además, cuando en una barra hay una carga de forma no polinómica (trigonométrica, logarítmica, hiperbólica, etc...), es posible expresarla como polinomio haciendo su correspondiente desarrollo en series. Algunos programas contemplan el ingreso de este tipo de cargas por barra y luego realizan la aproximación internamente.

En el estudio utilizando teoría de segundo orden, además de las ventajas ya plateadas con otros métodos, se observa en los últimos ejemplos que el tiempo computacional se reduce considerablemente al utilizar series de potencias. Esto concluye en otra de las grandes ventajas del método propuesto en la presente tesis.

Producción científica

Durante el transcurso de la investigación presentada en la tesis, se ha participado en una serie de eventos científicos, en los cuales se fueron mostrando los avances. Se realiza a continuación una breve descripción de los mismos.

En el año 2010 el tesista ha sido invitado por la Doctora Anna De Rosa para dictar el seminario “*Una vantagiosa alternativa applicata alle vibrazioni libere di telai*” en el ámbito del curso “*Metodi Computazionali agli elementi finiti*” que dicta la Dra. Ing. Stefania Tomasiello, en la Università degli Studi della Basilicata, Dipartimento di Strutture, Geotecnica, Geologia Applicata, en la Ciudad de Potenza, Italia. En el mismo se indicaron las ventajas de la aplicación de series de potencias al estudio de vibraciones naturales en pórticos abiertos.

En el año 2012 se participó en dos eventos en la Universidad Tecnológica Facultad Regional Córdoba. Las jornadas de intercambio y difusión de los resultados de investigación de doctorandos en UTN [43] y las primeras jornadas del programa estructuras y construcciones civiles [55]. En ambos casos presentando avances en el estudio dinámico de pórticos aplicando series de potencias.

En el 2013 ya se habían analizado las articulaciones internas al entramado [42], por lo que se presenta un trabajo en una Conferencia en Blumenau, Brasil.

En el 2014 se realiza un resumen de todo lo investigado en lo relativo a vibraciones de entramados [41], en el CAIM realizado en Resistencia, Chaco. Además se comienza a mostrar los avances en hiperestáticos en las terceras jornadas de intercambio y difusión de los resultados de investigación de los doctorandos en ingeniería de la UTN [53], en Mendoza.

En el año 2015 se participa de la JIT [54] en la Facultad Regional Venado Tuerto de la UTN, resumiendo lo investigado en estática y dinámica de entramados utilizando series de potencias.

Finalmente en el año 2016 [57], se muestran los avances en teoría de segundo orden en entramados utilizando series en el V CAIM, realizado en Santiago del Estero.

Ha sido de gran satisfacción para el tesista mostrar los avances en cada evento, en donde se escucharon críticas que favorecieron a los desarrollos realizados con posterioridad.

Perspectivas futuras

Posiblemente, optimizando los algoritmos desarrollados se podrían lograr mejores rendimientos computacionales. Con las últimas versiones del programa Mathematica empleado en la programación, se han incorporado mejoras que, de ser utilizada en una nueva reprogramación de lo realizado, optimizarían aún más la eficiencia en los cálculos. Al optimizar la manipulación de los recursos computacionales a través de algoritmos más efectivos permitirían que, al truncar las series infinitas, se pudieran emplear una mayor cantidad de términos. Esto mejoraría la precisión y se obtendrían resultados en tiempos computacionales razonablemente prácticos.

Al ser un programa no encriptado, permite que un usuario pueda comenzar a incorporarle mejoras y hasta se podría lograr una aplicación para ser utilizada en los teléfonos móviles.

En cuanto a la utilización de las series de potencias, cabe la alternativa de incursionar en el estudio de entramados espaciales, a fin de lograr una sistematización y generalización del método en tres dimensiones.

Otro campo de aplicación es la optimización de estructuras entramadas, sobre todo en estudios utilizando teoría de segundo orden, aprovechando el ahorro de tiempo computacional que proporciona el método.

Apéndice

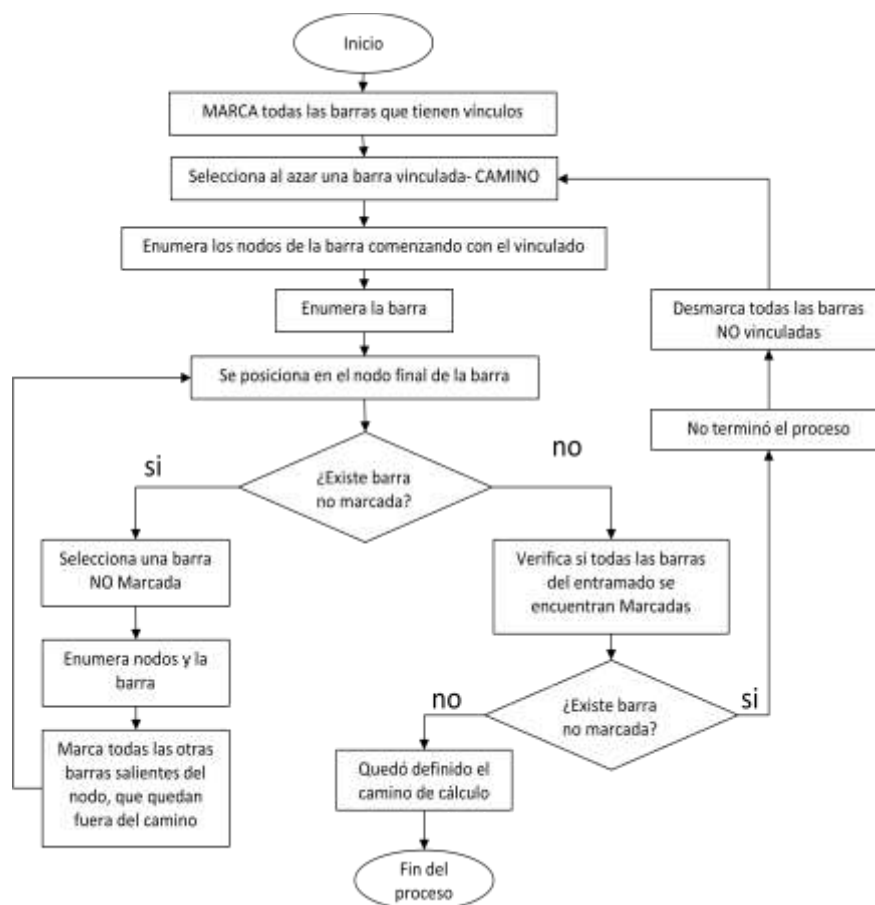
Diagramas de Flujo

Se muestra en esta sección los diagramas de flujo simplificados que guiaron a la construcción de las distintas partes de cada uno de los programas elaborados.

Se los ha nombrado con letras mayúsculas, para poder identificar cuando son ejecutados, o llamados, en los diferentes programas.

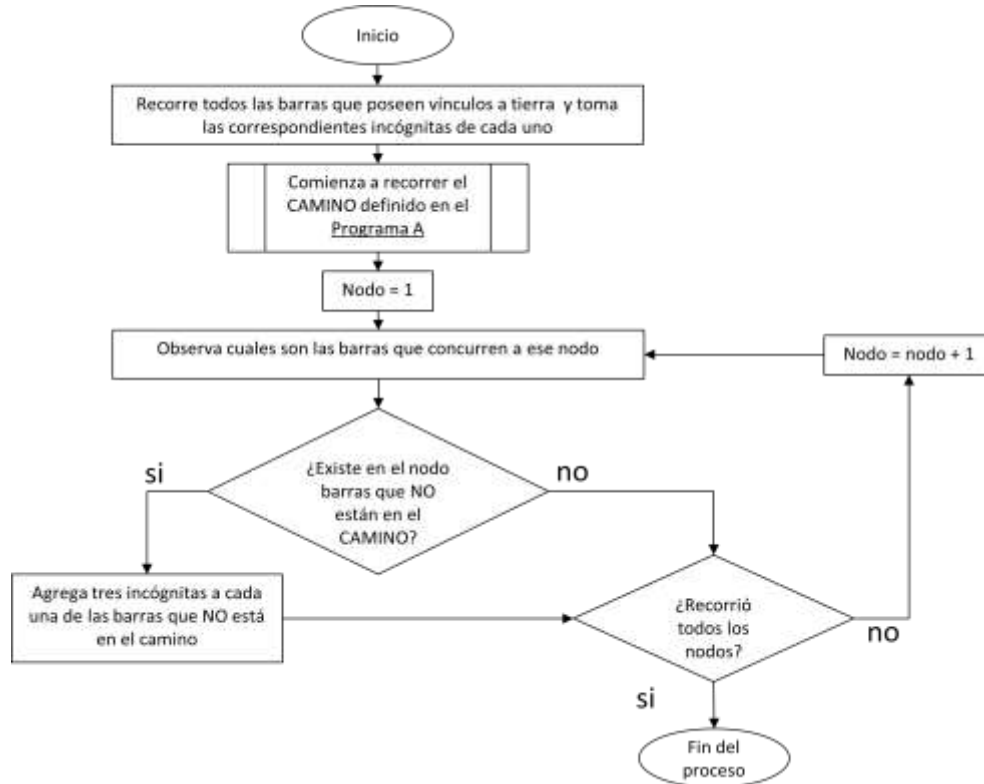
Programa A

Este programa es el que obtiene el **CAMINO** de cálculo, que luego es utilizado por los demás programas. Anteriormente a éste, es necesario ingresar todos los datos geométricos del entramado, características de las barras, tipo y ubicación de los vínculos.



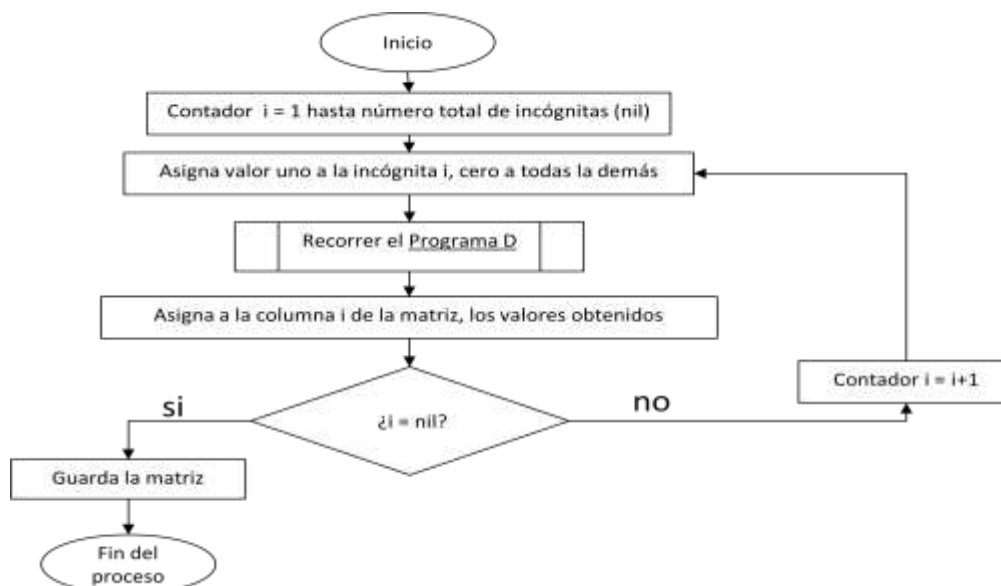
Programa B

Este programa es el que obtiene las incógnitas libres del entramado.



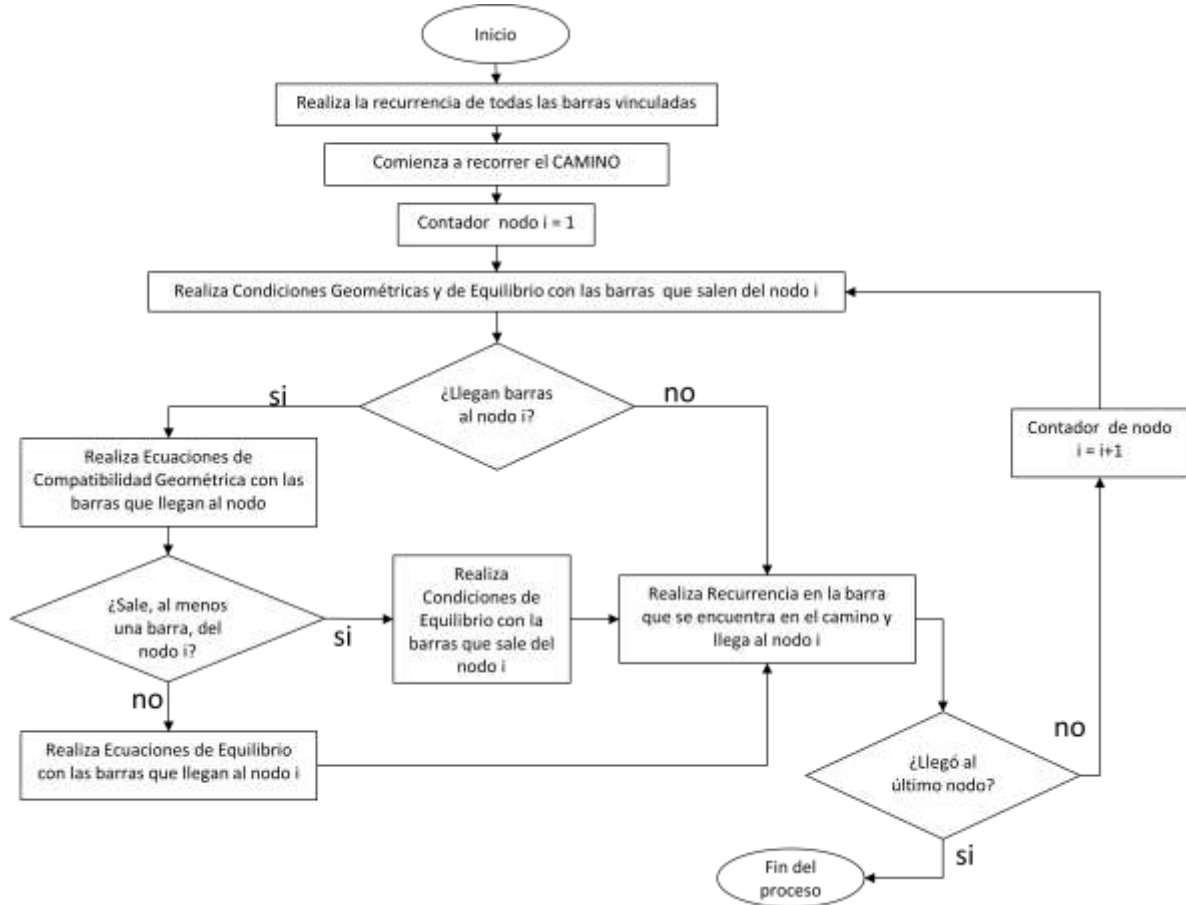
Programa C

Este programa es el que arma la matriz.



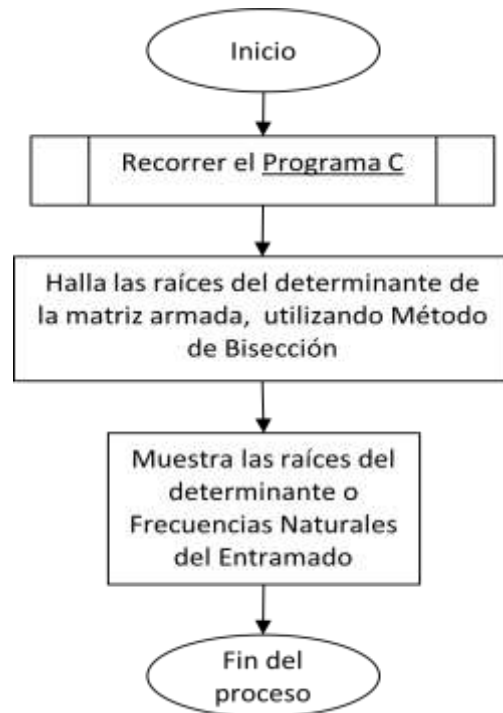
Programa D

Este programa es el encargado de recorrer el entramado.



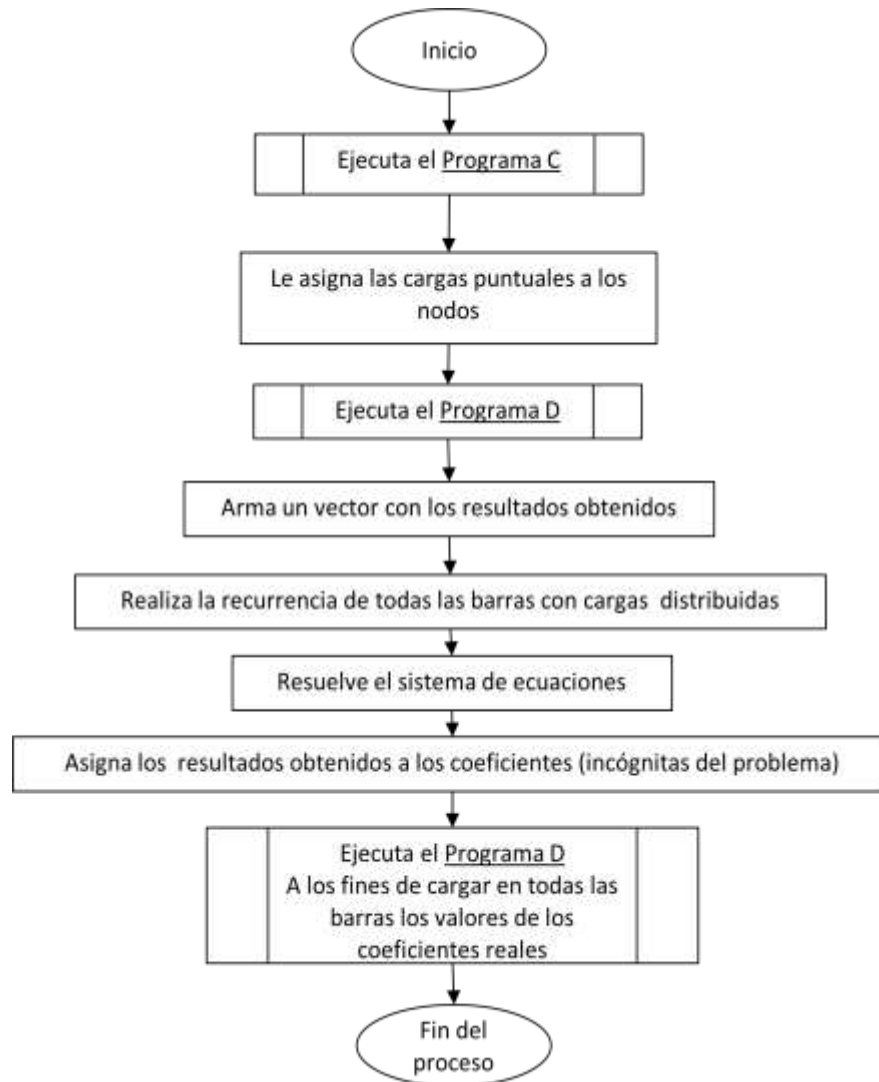
Programa E

En este programa se calculan las frecuencias naturales del entramado.



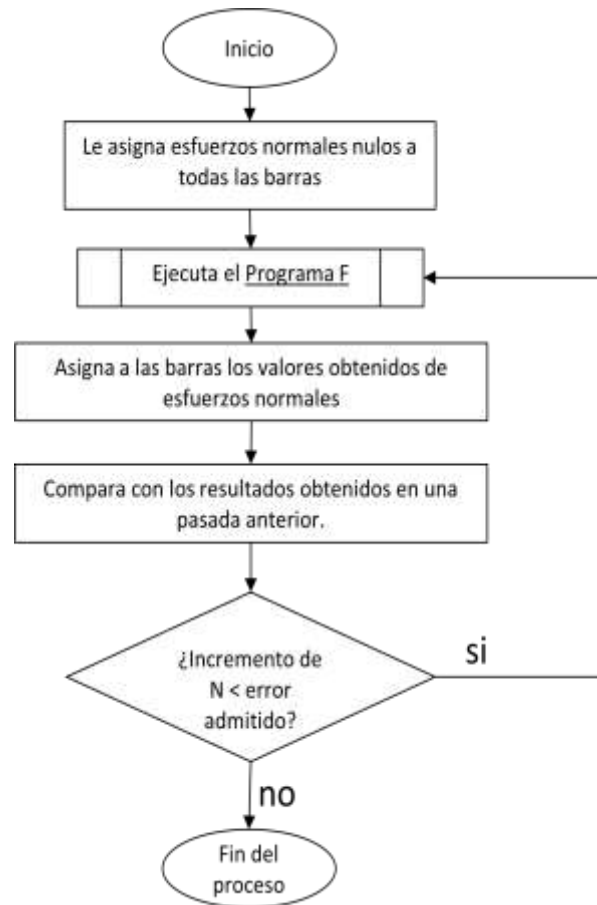
Programa F

En este programa se calculan los esfuerzos, estática del entramado.



Programa G

En este programa se utiliza la teoría de segundo orden en el entramado.



Referencias

- [1] Wolfram Mathematica © 1988-2016, Wolfram Research inc. Versiones 8 a 10.
- [2] Halbwachs, M. Leibniz, vida, doctrina y obras, México, 1945.
- [3] Celigüeta Lizarza, J. T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra. ISBN: 84-921970-2-1 (2008). Impreso en España. UNICOPIA C.B.
- [4] Algor FEMPRO, Copyright © 2009. Versión 23.1.
- [5] Logan, D. L. *A first course in the Finite Element Method using Algor*. Thomson Learning. (2001).
- [6] C. P. Filipich, M. R. Escalante, M. B. Rosales, *Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos*, ENIEF 2003, Mecánica Computacional, Vol. XXII, pág. 908-920. Bahía Blanca, noviembre de 2003.
- [7] C. P. Filipich, E. A. Bambill, M. B. Rosales, *Pandeo de pórticos planos. Uso sistemático de series de potencias*, ENIEF 2003, Mecánica computacional, Vol. XXII, pág. 454-468. Bahía Blanca, noviembre de 2003.
- [8] C. P. Filipich, P. M. Bellés, M. B. Rosales, *Dinámica de anillos y arcos circunferenciales gruesos*, ENIEF 2003, Mecánica computacional, Vol. XXII, pág. 863-876. Bahía Blanca, noviembre de 2003.
- [9] C. P. Filipich, E. A. Bambill, *Frecuencias naturales de piezas empresilladas via serie de potencias*, ENIEF 2003, Mecánica computacional, Vol. XXII, pág. 877-891. M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores). Bahía Blanca, nov. 2003.
- [10] C. P. Filipich, M. B. Rosales, F. S. Buezas, *Vibración libre de arcos simétricos de directriz arbitraria resueltos por medio de series de potencias*, ENIEF 2003, Mecánica computacional, Vol. XXII, pág. 892-907. M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores). Bahía Blanca, nov. 2003.

-
- [11] C. P. Filipich, E. A. Bambill, *Frecuencias naturales de vigas Vierendeel via series de potencias* Mecánica Computacional Vol. XXIII. G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Editores). Bariloche, Argentina, Noviembre 2004.
- [12] C. P. Filipich, E. A. Bambill, *Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados uso sistemático de series de potencias*. Mecánica Computacional Vol. XXIII. G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Editores) Bariloche, Argentina. Noviembre 2004.
- [13] C. P. Filipich, E. A. Bambill. *Estados planos de tensiones en dominios rectangulares con rigidizadores parciales utilizando series de potencias*. Mecánica Computacional Vol. XXIV A. Larreteguy (Editor.). Buenos Aires, Argentina, Noviembre de 2005.
- [14] C. P. Filipich, M. B. Rosales and F. Buezas. *Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions*. Latin American Applied Research. V.34, 101-109. (2004).
- [15] Luis A. Godoy Ph. D Orden y Argumento en una tesis. Universitas. Editorial Científica Universitaria. (2007).
- [16] Blevins, R.D. *Formulas for natural frequencies and modal shapes*; Van Nostrand, Reinhold Company N.Y. (1979).
- [17] Hildebrand F.B. *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. (1968).
- [18] Filipich, C.P. and Rosales, M. B. *A variational solution for an initial condition problem*. Applied Mechanics in the Americas 5, 232- 235. (1997).
- [19] Reddy J.N. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. Krieger Publishing Company. (1991).
- [20] E. Giusti, *Direct methods in the calculus of variations*. World Scientific Publishing, New York, (2003).
- [21] Courant, R. y Hilbert, D. *Methods of mathematical physics*. Vol. 1. Interscience Publishers, Inc. New York. (1953).
- [22] Meirovitch, L. *Methods of analytical dynamics*. McGraw-Hill. New York. (1970).
- [23] Mikhlin, S. *Variational methods in mathematical physics*. Pergamon Press. (1963).
- [24] Rektorys, K. *Variational methods in mathematical sciences and engineering*. D. Reidel Publ. Co., (1971).

-
- [25] Fung. Y.C. *Foundation of Solid Mechanics*. Edit. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [26] Gérard R. y H. Tahara, *Formal power series solutions of nonlinear first order partial differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 41 (1998).
- [27] Hubert E., Le Roux N., *Computing power series solutions of a nonlinear PDE system*; August 2003. Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and algebraic computation ISSAC '03. Publisher: Association for Computing Machinery Press.
- [28] Aroca F., Cano J., Jung F., *Power series solutions for non-linear PDE's*, August 2003. Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and algebraic computation ISSAC '03. Publisher: Association for Computing Machinery Press.
- [29] Spielberg K., *Representation of Power Series in Terms of Polynomials, Rational Approximations and Continued Fractions*, October 1981. Journal of the Association for Computing Machinery (J. Association for Computing Machinery), Volume 8 Issue 4. Publisher: Association for Computing Machinery Press.
- [30] Williamson C., *Taylor series solutions of explicit ODE's in a strongly typed algebra system*, (1984). Association for Computing Machinery SIGSAM Bulletin, Volume 18 Issue 1. Publisher: Association for Computing Machinery Press.
- [31] Fateman R. J., *Series solutions of algebraic and differential equations: a comparison of linear and quadratic algebraic convergence*. (1989). Proceedings of the Association for Computing Machinery-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and algebraic computation ISSAC '89. Publisher: Association for Computing Machinery Press.
- [32] Filipich, C.P. y Rosales, M.B. *Beams and arcs: exact frequencies via a generalizad solution*. Journal of Sound and Vibration. 170, 263-269. (1994).
- [33] Rosales M.B., Filipich C.P., Escalante M.R., *Dinámica de una estructura flotante amarrada: modelado de la no linealidad mediante recurrencias algebraicas*. ENIEF 2003. Mecánica Computacional, Vol. XXII. Bahía Blanca, noviembre de 2003.
- [34] Balser, W. *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*. Springer-Verlag. (2000).
- [35] Balser, W. *From divergent power series to analytic functions*. Springer Verlag. (1994).

-
- [36] Ruiz, Jesús. *The basic theory of power series*. Vieweg&Sohn. (1993).
- [37] Salomaa, Arto, Soittola, Matti. *Aut omota-theoretic aspects of formal power series*. Springer-Verlag. (1978).
- [38] Van der Poorten A.J. *Power series representing algebraic functions*. Macquarie University. (2005).
- [39] Brent, R. Kung, H.T., *Fast Algorithms for Manipulating Formal Power Series*. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol 25, No 4, 1978, pp 581-595.
- [40] Brent, R; Traub, J.F., *On the complexity of composition and generalized composition of power series*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 9, Nro. 1 (1980).
- [41] Martín, H. D, Filipich, C. P, De Rosa, M. A. y Maurizi, M. J., *Vibraciones naturales de entramados arbitrarios por medio de series de potencias*. Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica (IV CAIM 2014), Universidad Nacional del Nordeste.
- [42] Martín, H. D, Filipich, C. P, De Rosa, M. A. y Maurizi, M. J., *Study of natural vibrations in frames with internal articulated bars, using series of powers*. 16th International Conference of the Teaching of Mathematical Modelling and Applications ICTMA 16, Blumenau (SC), Brazil, 14-19 July 2013.
- [43] Martín, H. D. *Sistematización analítico-numérica para la resolución estática, dinámica y de estabilidad de entramados estructurales en el contexto de las ingenierías aeronáutica, mecánica y civil*. II Jornadas de intercambio y difusión de los resultados de investigación de los doctorandos en ingeniería de la UTN. Programa: Estructuras civiles. Facultad Regional Córdoba de la UTN. Agosto de 2012.
- [44] De Rosa, M. A. *Programa de Elementos Finitos de circulación interna*. Realizado en Faculty of Engineering, Department of Structural Engineering, (DiSGG). Potenza, Italy.
- [45] Piskunov, N. *Cálculo diferencial e integral*. Editorial MIR, Moscú. 1963.
- [46] Apostol, T. M. Calculus. Vol. 1. *One variable calculus*. John Wiley&Sons Inc. (1967).
- [47] Apostol, T. M. Calculus. Vol. 2. *Multi variable calculus and linear algebra*. John Wiley&Sons Inc. (1969).
- [48] Bender, C.M. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill. (1978).

-
- [49] Timoshenko, S.P. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill. New York. (1934).
- [50] Leibenzon, L.S. *Variational Method of solution of problems in theory of elasticity*. GTTI, Moscú. (1951).
- [51] Atanackovic, T.M. y Guran, A. *Theory of elasticity for scientists and engineers*. Birckhauser (2000).
- [52] Leonhardt, F., *Discussion on Strength and behaviour of deep beams in shear*, Journal of the Stuctural Division, ASCE, ST2. (1966).
- [53] Martín, H. D. *Resolución estática de entramados estructurales aplicando Series de Potencias*. III Jornadas de intercambio y difusión de los resultados de investigación de los doctorandos en ingeniería de la UTN. Programa: Estructuras civiles. Facultad Regional Mendoza de la UTN. Noviembre de 2014.
- [54] Martín, H. D, Filipich C. P y Maurizi M.J. *Estática y dinámica de entramados utilizando series de potencias*. Jornadas de jóvenes investigadores 2015 (JIT 2015). Declarado de interés por la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación de la provincia de Santa Fe, Res. 95/2015, Facultad Regional Venado Tuerto, 4 de noviembre 2015.
- [55] Martín, H. D y Filipich C. P. *Estudio Dinámico de Entramados Planos utilizando Series de Potencias*. Primeras Jornadas del Programa Estructuras y Construcciones Civiles. Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, 19 de octubre de 2012. ISBN: 978-987-1896-07-3.
- [56] Leontovich V., *Pórticos y Arcos, soluciones condensadas para el análisis estructural*. Compañía Editorial Continental, S.A. México-España. Tercera Edición en español, 1967.
- [57] Martín, H. D, Filipich C. P, Maurizi M.J. y De Rosa A. *Teoría de segundo orden en entramados utilizando series de potencias*. V CAIM 2016 – Quinto congreso argentino de ingeniería mecánica. Santiago del Estero, del 5 al 7 de octubre de 2016.
- [58] Filipich, C. P., *Inestabilidad del Equilibrio*. Libro del Curso 813. Secretaría Argentina para el Centro Internacional de Ciencias Mecánicas. Argentina. (1981).
- [59] Filipich, C.P., *Inestabilidad del Equilibrio – Pandeo*. Curso de Postgrado dictado en el año 1984. Dpto. de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.
- [60] Bazant, Z. P. y Cedolin, L. *Stability of structures*. Oxford University Press. (1991).

-
- [61] Iyengar, N. G. R., *Structural Stability of Columns and Plates*, Ellis Horwood Limited, Inglaterra, 1988.
- [62] Bleich, F. *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [63] CIRSOC 302 – *Fundamentos y métodos de cálculo para los problemas de Estabilidad del Equilibrio en estructuras de Acero*. (1980).
- [64] Filipich, C.P. y Perazzolli, L.R. *Cargas críticas para pórticos biarticulados con dintel quebrado*. Dpto. de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. (1983).
- [65] Filipich, C.P. y Jouglard, C.E., *Cargas críticas para pórticos biarticulados con dintel recto y curvo*. Dpto. de Ingeniería de la UNS. (1984).
- [66] Bambill, E.A., Filipich, C.P., *Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados: Uso sistemático de series de potencias*. ENIEF 2004. Mecánica Computacional. Bariloche. Nov. (2004).
- [67] Chajes, A. *Principles of Structural Stability Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [68] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2° edition, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [69] Gerard, G. *Introduction to Structural Stability Theory*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [70] Shanley, F. R., *Inelastic column theory*, J. Aero. Soc., 14, 261-267, 1947.
- [71] Hoff, N. J. *Buckling and stability*, J. Royal Aero. Soc., 58, 3-52, 1954.
- [72] Westergaard, H. M. *Theory of elasticity and plasticity*. Harvard University Press, Cambridge. (1952).
- [73] Southwell, R.V. *An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists*. Oxford Univ. Press, Oxford. (1936).
- [74] Fung, Y. *An introduction to the theory of elasticity*. John Wiley & Sons (1955).
- [75] Belluzi, O. *Ciencia de la Construcción. Vol. III. Elementos de la teoría de la elasticidad con aplicaciones*. Bologna. (1956).
- [76] Godoy, L.A; Prato, C.A. y Flores, F.G. *Introducción a la teoría de la elasticidad*. Asociación Argentina de Mecánica Computacional. Universitas. (2000).
- [77] Balsler, W. *Summability of power series that are formal solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Sovrem. Mat. Fundam. Napravl, 1 (2003), pp.5-17(electronic). Differential and functional differential equations. Part 1.

-
- [78] Balser, W. *Multisummability of formal power series solutions of partial differential equations with constant coefficients*, J. Differential Equations, 201 (2004).
- [79] Balser, W. *Asymptotic existence theorems for formal power series whose coefficients satisfy certain partial differential recursions*, J. Differential Equations, 209 (2005).
- [80] Balser W. y V. Kostov, *Formally well-posed Cauchy problems for linear partial differential equations with constant coefficients*, in Analyzable functions and applications, vol. 373 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).
- [81] Filipich, C.P. and Rosales, M. B. *Dynamic behavior of a uniform linear beam supported with non-linear rotational springs*. Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics (WCCM), Buenos Aires, Argentina. CD-ROM. (1999).
- [82] Rosales, M.B. y Filipich C.P., *Time integration of non-linear equations by means of a direct variational method*. Journal of Sound and Vibration 254 (4), 763-775 (2002).
- [83] Filipich, C.P.; Rosales, M.B. y Bellés, P.M. *Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids*. Journal of Sound and Vibration. (1998).
- [84] Bartle, R.G. *The elements of the real analysis*. John Wiley & Sons Inc. (1964).
- [85] Bartle, R.G. *Elements of the integration*. John Wiley & Sons Inc. (1966).
- [86] Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc. N.Y. (1973).
- [87] Luke, Yudell L., *Mathematical functions and their approximations*. Academic Press, Inc. (1975).
- [88] Copson, E. T. *Partial differential equations*. Cambridge University Press, 1975.
- [89] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis*, third edition. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [90] Guzmán, Miguel de. *Impactos del Análisis Armónico*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, (1983).
- [91] O'Neil, P.V. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Compañía Edit. Continental, México. (1994).
- [92] Rice, R. G. and Do Duong, D. *Applied mathematics and modeling for chemical engineers*. John Wiley&Sons, Inc. 1995.
- [93] Bagni, Giorgio T. *Infinite series from history to mathematics education*. University of Udine. Italia. (1997).

-
- [94] Wrede, R., Spiegel M. *Theory and problems of Advanced Calculus*. McGraw-Hill (2002).
- [95] Schmeling, J., *Analytic Functions*. Lund University. Suiza. (2002).
- [96] Mickens, Ronald E., *Mathematical methods for the natural and engineering sciences*. World Scientific Publishing Co. (2004).
- [97] Szekeres, Meter. *A course in modern mathematical physics*. Cambridge University Press. (2004).
- [98] Masujima, Michio, *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics*. WILEY-VCH Verlag GMBH. (2005).
- [99] Olver, P, J., y Shakiban Chehrzad, *Applied mathematics*. Prentice Hall. (2005).
- [100] Bambill, E.A., *Soluciones analíticas de estados planos rigidizados de tensiones, aplicadas a la ingeniería estructural*. Tesis Doctoral UNS.
- [101] Rezaiee-Pajand, M., Sani, A.A., Hozhabrossadati, S.M., *Application of Differential Transform Method to Free Vibration of Gabled Frames with Rotational Springs*. International Journal of Structural Stability and Dynamics (2017), 17 (1), 22 pag, art. n° 1750012.
- [102] Chen, T., Ma, H. *Exact finite element solutions of buckling analysis of frame structures*, (2009). Lixue Xuebao/Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 41 (6), 953-960. Doi: 10.6052/0459-1879-2009-6-2008-100.
- [103] Lee, K. T. *An analytical solution for dynamic behavior of a beam-column frame with a tip body*. Applied Mathematical Modelling (2013), 37 (22), 9086-9100.
- [104] Mei, C. *In-plane vibrations of classical planar frame structures-an exact wave-based analytical solution*. Journal of Vibration and Control (2010), 16 (9), 1265-1285. Doi: 10.1177/1077546309339422.
- [105] Ma H. *Exact solution of vibration problems of frame structures*. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering (2010), 26(5):587-596, 2010. Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com).
- [106] Tsai H.C. *A distributed-mass approach for dynamic analysis of Bernoulli–Euler plane frames*. Journal of Sound and Vibration (2010), 329(18), 3744-3758.

-
- [107] Galvao A. S., Silva A. R. D., Silveira R. A. M. and Gonçalves P. B., Nonlinear dynamic behavior and instability of slender frames with semi-rigid connections, *International Journal of Mechanical Sciences* (2010), 52(12), 1547-1562.
- [108] Rezaiee-Pajand M. and Khajavi R., *Vibration analysis of plane frames by customized stiffness and diagonal mass matrices*, *Journal of Mechanical Engineering Science* (2011), 225, 2848-2863. Doi: 10.1177/0954406211405435.
- [109] Dias C. A. N. and Alves M., *A method to solve the nonlinear eigenvalue problem of Timoshenko plane frames with rigid offsets and end releases*, *Journal of Sound and Vibration* (2013). 332 (5), 1372-1387.
- [110] Mei C., *Free vibration analysis of classical single-story multi-bay planar frames*. *Journal of Vibration and Control* (2013). 19 (13), 2022-2035.
- [111] Zhang H., Zhang R. and Yu H., *Buckling analysis of planar frameworks using the quadrature element method*, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* (2011). 11, 363-378.
- [112] Lee K. S. and Han S. E., *Semi-rigid elasto-plastic post buckling analysis of a space frame with finite rotation*, *Advanced Steel Construction* (2011), 7(3), 274-301.
- [113] Rezaiee-Pajand M., Shahabian F. and Bambaeechee M., *Buckling analysis of semi-rigid gabled frames*, *Structural Engineering and Mechanics* (2015), 55(3), 605-638.
- [114] Messaoud B. *Buckling Finite Element Analysis of Beams and Frames*. Proceedings of the World Congress on Engineering, July 4-6, 2012, London, U.K. Vol I. ISBN: 978-988-19251-3-8 ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online).
- [115] Yong Lu and Shunfeng Gong. *An analytical model for dynamic response of beam-column frames to impulsive ground excitations*. *International Journal of Solids and Structures* (2007), 44, (3-4), 779-798.
- [116] Hsiang-Chuan Tsai, *A distributed-mass approach for dynamic analysis of Timoshenko plane frames*. *Journal of Sound and Vibration* (2012), 331(21), 4754-4762.
- [117] Grossi, R. O. and Albarracín, C. M. *Variational approach to vibrations of frames with inclined members*. *Applied Acoustics* (2013). 74(3), 325-334.
- [118] Labib, A., Kennedy, D., Featherston, C.. *Free vibration analysis of beams and frames with multiple cracks for damage detection*. *Journal of Sound and Vibration* (2014), 333(29), 4991-5003.

- [119] Sena Cardoso F., Rasmussen K. J. R.. *Finite element (FE) modelling of storage rack frames*. Journal of Constructional Steel Research (2016). 126, 1-14.
- [120] Baikuntha Silwala, Osman E. Ozbuluta, *Seismic collapse evaluation of steel moment resisting frames with superelastic viscous damper*. Journal of Constructional Steel Research (2016). 126, 26-36.
- [121] Huu-Tai Thaia, Brian Uya, Won-Hee Kangb, Stephen Hicksc. *System reliability evaluation of steel frames with semi-rigid connections*. Journal of Constructional Steel Research (2016). 124, 29-39.
- [122] Xi Zhang, Kim J.R. Rasmussen Hao Zhang. *Second-order effects in locally and/or distortionally buckled frames and design based on beam element analysis*. Journal of Constructional Steel Research (2016). 122, 57-69.