



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

ESTÁTICA, ESTABILIDAD Y DINÁMICA DE MÁSTILES RETICULADOS
CON APLICACIÓN A ESTRUCTURAS ARRIOSTRADAS

ALBERTO MARCELO GUZMÁN

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2014

PREFACIO

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería durante el período comprendido entre el 19 de mayo de 2009 y el 11 de octubre de 2013, bajo la dirección de la Dra. Ing. Marta Rosales y la co-dirección del Dr. Ing. Carlos Filipich.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el/...../..... , mereciendo la calificación de(.....)

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como propósito estudiar el comportamiento de mástiles reticulados con aplicación a estructuras arriostradas, tales como las utilizadas para soportar antenas de comunicaciones. Estos sistemas constan de dos contribuciones estructurales fundamentales, las riostras y el mástil. En lo que a las riostras se refiere, se estudian distintas formulaciones analíticas para su modelación, considerando las características de inextensibilidad y extensibilidad. Se analiza además, cómo incide en la respuesta de la riostra la variación de la pretensión inicial, así como también, los distintos grados de inclinación que pudiera presentar la misma. De las evaluaciones numéricas realizadas, se observa que estando la riostra suficientemente tensa, el modelo parabólico extensible es capaz de representar adecuadamente la respuesta, y al mismo tiempo, esta pretensión permite admitir un análisis linealizado, pudiéndose obtener la rigidez axial, así como también, las expresiones conducentes a las frecuencias naturales en y fuera del plano de la riostra. Seguidamente, a partir de un estudio paramétrico vía elementos finitos, se evalúa la respuesta dinámica de un mástil reticulado arriostrado sujeto a la acción de distintos registros sísmicos seleccionados. De las historias temporales para las respuestas consideradas, se puede establecer, como es de esperar, que a mayor amortiguamiento estructural del sistema, las respuestas disminuyen, y que modificaciones en la rigidez flexional del mástil y en los niveles de pretensión de las riostras, pueden conducir a fuertes demandas en dichas respuestas debido a una posible amplificación dinámica, en donde las características propias de cada registro sísmico tendrían una marcada influencia. Ante ello, en zonas con elevado riesgo sísmico la continuidad operativa de las comunicaciones podría afectarse debido a la sensibilidad sísmica del sistema mástil-riostras. Mediante un planteo energético se desarrolla un modelo continuo para la representación de un mástil reticulado en zig-zag, de sección transversal triangular y equilátera, constituida por tres largueros continuos unidos entre sí mediante diagonales articuladas en sus extremos. Como resultado de ello, se encuentran las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde que gobiernan el movimiento del reticulado, quedando incorporadas en las mismas, la flexibilidad por corte debido al alma reticulada,

efectos de 2^{do} orden debido a las cargas de punta, y aportes inerciales y de rigidez de los largueros. Basado en este último desarrollo, se fundamenta física y matemáticamente la obtención de un nuevo modelo continuo pero simplificado, en el que los corrimientos de cada larguero son referidos al eje baricéntrico de la sección transversal, permitiendo así abordar de manera más simple la solución del sistema diferencial. Al mismo tiempo y avanzando hacia una mayor simplificación, a partir de la formulación desarrollada se determinan las propiedades equivalentes necesarias para la representación del mástil como viga-columna, así como también, expresiones prácticas para la obtención directa de las cargas críticas de pandeo. Por último, se aborda la solución de la elástica, vibraciones naturales y estabilidad de un mástil reticulado arriostrado, en donde las riostras son consideradas como resortes elásticos, quedando incorporado el aporte de las mismas en las condiciones de borde del problema. Los resultados numéricos obtenidos implementando los modelos continuos y expresiones prácticas desarrolladas, indicaron un excelente desempeño.

ABSTRACT

This present work has the aim of studying the behaviour of lattice towers being applied to braced structures as the ones used to support antennas of communications. These systems are made up of two main structural contributions such as the tensors and the tower or mast. As regards tensors are concerned, different analytic formulations are being studied for its modeling considering the features of inextensibility and extensibility. Its also being analyzed the way in which the tensors answer to the variation of the initial pretense, and also the different degrees of inclination that it can show. From the results of testing figures its been observed that if the tensor is tensed enough, the parabolic extensible model is able to represent the answer accurately, and at the same time, this pretension allows to admit a lineal analysis so that an axial rigidity can be obtained, and also the expressions leading to the natural frequencies inside and outside of the plan of the tensors. Afterwards, from a parametric studio through finite elements, its evaluated the dynamic answer of a cross-linked braced mast associated to the action of different selected seismic records. From the temporary stories for the considered answers, it can be deduced-as it is expected-that with the major structural buffet of the system the answers are fewer, and that the modifications in the flexional rigidity of the mast and in the levels of pretension of the tensors can led to strong demands in those answers due to a possible dynamic amplification, where the own characteristics of each seismic record would have a marked influence. In this way, in areas with a high level of seismic risks, the operative continuity of the communications could be affected due to the seismic sensitivity of the system mast-tensors. Through an energetic question, a continuous model is been developed for the representation of a truss mast in zig-zag, with a transversal triangular and equilateral section made up of 3 continuous chords joined through diagonals articulated in their endings. As a result of this, the differential equations and the conditions of edge that rule the movement of the truss are found leaving them incorporated inside them, the flexibility by shear-due to the lattice soul-second order effects due to the point loads and the inertial input and the rigidity of the chords. With this last development, it is based physically and mathematically the attainment of a new

continuous but simplified model, in which the shifts of each chord are referred to the axis barycentric of the transversal section, allowing in this way to arrive in a simple way to the solution of the differential system. At the same time and leading to a greater simplification-starting from the developed formulation-it is determined the equivalent properties needed for the representation of the mast as a beam-column, and also as practical expressions to obtain directly critical buckling loads. At last, the solution to the elastic, natural frequencies and stability of a lattice mast braced is been tackled, where the tensors are considered as stretched springs being incorporated the input of them in the conditions at the edge of the problem. The numeric results obtained through the continuous models and practical developed expressions showed an excellent performance.

Dedicado a Ariadna, Alvaro y Amparo, a mis Padres, y en especial, a la memoria de aquellos que aún siguen y seguirán siendo los mismos...

Índice General

Listado de Figuras	ix
Listado de Tablas	xiii
Listado de Símbolos	xvii
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Importancia del tema	4
1.3 Alcance de esta tesis	6
1.4 Objetivos	7
1.5 Metodología	8
1.6 Originalidad de la tesis	9
1.7 Estructura de la tesis	10
2 Revisión de la literatura	13
2.1 Introducción	13
2.2 Mástiles reticulados	13
2.3 Riostras	15
2.4 Mástiles reticulados arriostrados	20
2.5 Conclusiones	29
3 Análisis de una riostra suspendida	31
3.1 Introducción	31
3.2 Análisis estático	32
3.2.1 Perfil <i>catenaria</i> para la riostra inextensible	33
3.2.2 Perfil parabólico para la riostra inextensible	40

3.2.3	Perfil <i>catenaria</i> para la riostra extensible	43
3.2.4	Perfil parabólico para la riostra extensible	46
3.2.5	Análisis de una riostra tensa con un extremo desplazable	47
3.2.6	Simulación numérica	57
3.2.7	Solución para una riostra suspendida	58
3.3	Análisis dinámico	68
3.3.1	Ecuaciones del movimiento en el plano de una riostra inclinada . . .	68
3.3.2	Ecuación del movimiento fuera del plano de una riostra inclinada . .	69
3.3.3	Vibración libre de una riostra tensa	70
3.3.4	Simulación numérica	76
3.3.5	Frecuencias naturales para una riostra suspendida	77
3.4	Conclusiones	79
3.4.1	Respuesta estática	79
3.4.2	Respuesta dinámica	80
4	Respuesta sísmica de un mástil reticulado arriostrado	81
4.1	Introducción	81
4.2	Mástil arriostrado	83
4.3	Registros sísmicos	86
4.4	Parámetros de diseño	88
4.5	Respuesta sísmica	90
4.6	Conclusiones	109
5	Modelo continuo para la representación de un mástil reticulado	111
5.1	Introducción	111
5.2	Mástil reticulado analizado	112
5.3	Planteo del problema	114
5.3.1	Energía potencial	114
5.3.2	Energía cinética	124
5.3.3	Función lagrangiana del sistema	129
5.4	Ecuaciones diferenciales	129
5.5	Condiciones de borde	131
5.6	Solución general al problema de vibraciones naturales	133
5.7	Solución particular del sistema diferencial para el caso del mástil simplemente apoyado	139

5.7.1	Vibraciones naturales	141
5.7.2	Estabilidad	152
5.8	Conclusiones	156
6	Modelo continuo para la representación simplificada del mástil reticulado	159
6.1	Introducción	159
6.2	Planteo del problema	161
6.3	Ecuaciones diferenciales	164
6.4	Condiciones de borde	166
6.5	Propiedades equivalentes	168
6.5.1	Propiedades elásticas equivalentes	169
6.5.2	Propiedades inerciales equivalentes	171
6.6	Solución general del sistema de ecuaciones diferenciales	173
6.6.1	Elásticas	173
6.6.2	Vibraciones naturales	177
6.6.3	Estabilidad	180
6.7	Implementación del modelo simplificado desarrollado	184
6.7.1	Elásticas	184
6.7.2	Vibraciones naturales	187
6.7.3	Estabilidad	190
6.7.4	Resultados numéricos	193
6.8	Propuesta práctica para la determinación de la carga crítica de pandeo	199
6.8.1	Expresiones explícitas de cargas críticas para el caso A-A	199
6.8.2	Dependencia entre la carga crítica de Euler y las C.B. de una barra	200
6.8.3	Propuesta práctica para las cargas críticas del mástil reticulado	201
6.8.4	Resultados numéricos	201
6.9	Conclusiones	203
7	Modelo continuo para la representación de un mástil arriostrado	205
7.1	Mástil arriostrado	205
7.1.1	Energía interna de deformación elástica de un resorte	206
7.1.2	Energía cinética aportada por las riostras	212
7.2	Ecuaciones diferenciales y condiciones de borde	213
7.3	Rigidez del nudo arriostrado en las direcciones principales	217
7.4	Implementación del modelo continuo	221

7.4.1	Elástica del mástil	221
7.4.2	Vibraciones naturales del mástil	226
7.4.3	Estabilidad del mástil	230
7.4.4	Estado tensional en las riostras	232
7.4.5	Vibraciones naturales de las riostras	232
7.5	Resultados numéricos	233
7.5.1	Corrimiento transversal de la cima del mástil y tensión en riostras	235
7.5.2	Frecuencias naturales del mástil y de las riostras	236
7.5.3	Carga crítica de pandeo flexional del mástil	239
7.6	Conclusiones	239
8	Síntesis, discusión de resultados, conclusiones y futuros trabajos	243
8.1	Síntesis	243
8.2	Discusión de los resultados	245
8.3	Conclusiones	250
8.4	Futuros Trabajos	254
	Bibliografía	257
A	Solución particular del sistema diferencial 6ED para el caso del mástil simplemente apoyado	265
A.1	Vibraciones naturales	265
A.2	Estabilidad	270
B	Solución general del sistema diferencial 6ED para el caso del mástil con distintas C.B.	271
B.1	Implementación del modelo simplificado desarrollado	271
B.1.1	Elásticas	271
B.1.2	Vibraciones naturales	279
B.1.3	Estabilidad	287
C	Modelo simplificado 6ED* prescindiendo del aporte local de largueros	295
C.1	Solución general del sistema de ecuaciones diferenciales	296
C.1.1	Elásticas	296
C.1.2	Vibraciones naturales	298
C.1.3	Estabilidad	299
C.2	Implementación del modelo simplificado prescindiendo de aportes locales	301

C.2.1	Elásticas	301
C.2.2	Vibraciones naturales	306
C.2.3	Estabilidad	312
C.2.4	Resultados numéricos	316
C.3	Solución particular del sistema diferencial para el caso del mástil simplemente apoyado	319

Listado de Figuras

1.1	Típico mástil reticulado y arriostrado	2
3.1	Perfil <i>catenaria</i>	33
3.2	Segmento catenario inextensible	34
3.3	Flecha de la riostra	37
3.4	Segmento parabólico inextensible	40
3.5	Geometría de la riostra tensa con un extremo desplazable	48
3.6	Segmento diferencial. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada	49
3.7	Extremo móvil desplazado	54
3.8	Modelo parabólico. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada	55
3.9	Perfil catenaria vs. Perfil parabólico para ejemplos E1-00, E1-20 y E1-40	62
3.10	Perfil catenaria vs. Perfil parabólico para ejemplos E2-00, E2-20 y E2-40	62
3.11	Simulación numérica con SAP2000 para E1-00, E1-20 y E1-40	63
3.12	Simulación numérica con SAP2000 para E2-00, E2-20 y E2-40	63
3.13	Evolución del error en la respuesta T_A para el modelo parabólico extensible	64
3.14	Riostras coplanares. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada	65
3.15	Evolución del esfuerzo de tracción en las riostras debido al desplazamiento δ	66
3.16	Evolución de la rigidez axial en las riostras debido al desplazamiento δ	67
3.17	Vibración de la riostra. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada	69
3.18	Formas modales antisimétricas	71
3.19	Formas modales simétricas	71
4.1	Mástil reticulado arriostrado	82
4.2	Mástil arriostrado analizado. a) Perfil. b) Planta	84
4.3	Mástil arriostrado modelado vía elementos finitos	84
4.4	Formas modales del mástil arriostrado analizado	86

4.5	Componente horizontal principal de los terremotos de SJ y M.	87
4.6	Componente horizontal principal de los terremotos de T, V, N y K.	88
4.7	Desplazamientos de la cima máximos para el registro de SJ	94
4.8	Desplazamientos de la cima máximos para el registro de M	94
4.9	Desplazamientos de la cima máximos para el registro de T	95
4.10	Desplazamientos de la cima máximos para el registro de V	95
4.11	Desplazamientos de la cima máximos para el registro de N	96
4.12	Desplazamientos de la cima máximos para el registro de K	96
4.13	Corte basal máximos para el registro de SJ	97
4.14	Corte basal máximos para el registro de M	97
4.15	Corte basal máximos para el registro de T	98
4.16	Corte basal máximos para el registro de V	98
4.17	Corte basal máximos para el registro de N	99
4.18	Corte basal máximos para el registro de K	99
4.19	Desplazamiento de la cima para un amortiguamiento del 1 %	100
4.20	Desplazamiento de la cima para un amortiguamiento del 2 %	100
4.21	Desplazamiento de la cima para un amortiguamiento del 3 %	101
4.22	Corte basal para un amortiguamiento del 1 %	101
4.23	Corte basal para un amortiguamiento del 2 %	102
4.24	Corte basal para un amortiguamiento del 3 %	102
4.25	Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de SJ	103
4.26	Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de SJ	103
4.27	Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de M	104
4.28	Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de M	104
4.29	Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de T	105
4.30	Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de T	105
4.31	Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de V	106
4.32	Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de V	106
4.33	Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de N	107
4.34	Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de N	107
4.35	Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de K	108
4.36	Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de K	108
5.1	Mástil reticulado en zig-zag	112
5.2	Mástil reticulado analizado. a) Vista. b) Sección transversal	113

5.3	Módulo considerado. a) Sección de referencia. b) Diagonal analizada	115
5.4	Sección transversal genérica del mástil reticulado	118
5.5	Acortamiento δ en una pieza recta por efecto de 2^{do} orden	123
5.6	Mástil reticulado analizado	140
5.7	Modelación discreta del mástil reticulado	141
5.8	Formas modales de los largueros asociadas a ω_1	147
5.9	Formas modales de los largueros asociadas a ω_2	148
5.10	Formas modales de los largueros asociadas a ω_3	149
5.11	Formas modales de los largueros asociadas a ω_4	150
5.12	Carga crítica sobre los largueros del mástil reticulado	152
6.1	Eje baricéntrico del mástil reticulado. a) Punto genérico. b) Convención de signos	161
6.2	Propiedades equivalentes. a) Reticulado espacial. b) Viga-columna	168
6.3	Carga crítica actuante en el mástil reticulado	181
6.4	Condiciones de vínculo del mástil reticulado	184
6.5	Mástil reticulado analizado	185
6.6	Modelación discreta del mástil reticulado. a) RE-EF. b) VC-EF	194
6.7	Coeficiente de cambio de la longitud (extraído de V. Feodosiev, 1980)	201
7.1	Mástil reticulado arriostrado. a) Vista. b) Planta	206
7.2	Representación de la riostra como resorte elástico	207
7.3	Riostra tensa. a) Configuración de referencia. b) Configuración desplazada	208
7.4	Modelo de representación. a) Sistema mástil-riostras. b) Modelo equivalente	214
7.5	Mástil arriostrado analizado. a) Geometría espacial. b) Planta	234
7.6	Modelos vía elementos finitos del mástil arriostrado	235
C.1	Condiciones de vínculo del mástil reticulado prescindiendo de aportes locales	302

Listado de Tablas

3.1	Propiedades de la riostra utilizadas para los ejemplos E1 y E2	58
3.2	Parámetros de respuesta para el ejemplo E1-00	59
3.3	Parámetros de respuesta para el ejemplo E1-20	59
3.4	Parámetros de respuesta para el ejemplo E1-40	60
3.5	Parámetros de respuesta para el ejemplo E2-00	60
3.6	Parámetros de respuesta para el ejemplo E2-20	61
3.7	Parámetros de respuesta para el ejemplo E2-40	61
3.8	Propiedades de las riostras con extremo desplazable	65
3.9	Frecuencias naturales para el ejemplo E4-00	77
3.10	Frecuencias naturales para el ejemplo E4-20	78
3.11	Frecuencias naturales para el ejemplo E4-40	78
4.1	Frecuencias naturales en [rad/seg] del mástil arriostrado para el caso "estándar"	85
4.2	Modelos considerados en el análisis	92
4.3	Modelos considerados en el análisis (continuación de Tabla 4.2)	93
5.1	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]	146
5.2	Efecto de la carga axial sobre cada larguero en las frecuencias naturales	151
5.3	Carga crítica de flexión y torsión sobre cada larguero en [N]. Modelo 9ED	156
6.1	Corrimiento transversal $v_{o(max)}$ en [mm] del mástil reticulado	195
6.2	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-A	195
6.3	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso F-F	195
6.4	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso E-E	196
6.5	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso L-F	196
6.6	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso L-E	196

6.7	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-F	197
6.8	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-E	197
6.9	Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia flexional ω_1^f .	197
6.10	Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia torsional ω_1^t .	198
6.11	Carga crítica de flexión P_{cro}^f en [N] sobre cada larguero	198
6.12	Carga crítica de torsión P_{cro}^t en [N] sobre cada larguero	198
6.13	Cargas críticas de flexión y torsión en cada larguero en [N] para distintas C.B.	202
6.14	Carga crítica de flexión P_{cro}^f en [N] sobre cada larguero	202
6.15	Carga crítica de torsión P_{cro}^t en [N] sobre cada larguero	202
7.1	Corrimiento del mástil reticulado en [mm] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N	235
7.2	Corrimiento del mástil reticulado en [mm] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N	235
7.3	Tracción en riostras en [N] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N	236
7.4	Tracción en riostras en [N] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N	236
7.5	Frecuencias del mástil reticulado en [rad/seg] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N . .	237
7.6	Frecuencias del mástil reticulado en [rad/seg] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N . .	237
7.7	Frecuencias de las riostras en [rad/seg] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N	238
7.8	Frecuencias de las riostras en [rad/seg] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N	238
7.9	Frecuencias flexionales del mástil reticulado con $L_l = 48$ m en [rad/seg] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N	238
7.10	Frecuencias flexionales del mástil reticulado con $L_l = 48$ m en [rad/seg] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N	239
7.11	Carga crítica de flexión P_{cro}^f sobre cada larguero en [N] y para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N	239
7.12	Carga crítica de flexión P_{cro}^f sobre cada larguero en [N] y para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N	239
A.1	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Modelos 6ED y 9ED	269
A.2	Efecto de la carga axial de compresión en las frecuencias naturales en [rad/seg]	269
A.3	Carga crítica de flexión y torsión en cada larguero en [N]. Modelos 6ED y 9ED	270
C.1	Corrimiento transversal $v_{o(max)}^*$ en [mm] del mástil reticulado	316
C.2	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-A	317
C.3	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso F-F	317
C.4	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso L-F	317

C.5	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-F	318
C.6	Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia flexional ω_1^f .	318
C.7	Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia torsional ω_1^t .	318
C.8	Carga crítica de flexión P_{cro}^{*f} en [N] sobre cada larguero	318
C.9	Carga crítica de torsión P_{cro}^{*t} en [N] sobre cada larguero	319
C.10	Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg] para los modelos 6ED*, 6ED y 9ED	321
C.11	Efecto de la carga axial de compresión en las frecuencias naturales en [rad/seg]	321
C.12	Carga crítica de flexión y torsión en [N] para los modelos 6ED*, 6ED y 9ED	323
C.13	Carga crítica de flexión sobre cada larguero en [N] para distintas C.B. . . .	324
C.14	Carga crítica de torsión sobre cada larguero en [N] para distintas C.B. . . .	324

Listado de Símbolos

A_d	Sección transversal de la diagonal
A_i	Coefficiente algebraico
A_l	Sección transversal del larguero
A_r	Sección transversal de la riostra
B_i	Coefficiente algebraico
C_i	Constante de integración
E_d	Módulo de elasticidad de la diagonal
E_l	Módulo de elasticidad del larguero
E_r	Módulo de elasticidad de la riostra
H	Componente horizontal de tracción actuante en la riostra
H_A	Componente horizontal de tracción en apoyo A actuante en la riostra
H^*	Componente de tracción actuante en la riostra proyectada sobre x^*
J_l	Momento de inercia local del larguero
J_r	Momento de inercia de la riostra
K	Coefficiente de definición
K_{est}	Rigidez axial de la riostra
L	Longitud del vano de la riostra
	Función lagrangiana del sistema
L_c	Longitud de la cuerda de la riostra
L_d	Longitud de la diagonal

L_e	Longitud efectiva o virtual de la riostra
L_l	Longitud del larguero
M	Momento flexional
N	Función de forma
P	Carga concentrada
Q	Carga transversal total sobre la riostra
R_i	Identificación de las riostras
S	Longitud total de la riostra en la configuración deformada Coeficiente de definición
S_o	Longitud total de la riostra en la configuración no deformada
T	Fuerza de tracción actuante tangente a la riostra Energía cinética
T_A	Fuerza de tracción actuante tangente a la riostra en apoyo A
U	Energía de deformación elástica. Constante
V	Componente vertical de tracción actuante en la riostra Energía potencial Constante
V_A	Componente vertical de tracción en apoyo A actuante en la riostra
\vec{V}	Velocidad nodal
W	Trabajo externo de deformación Constante
$(EA)_o$	Rigidez axial equivalente
$(EJ)_o$	Rigidez flexional equivalente
$(GA)_o$	Rigidez transversal equivalente
$(GJ)_o$	Rigidez torsional equivalente
$(\rho A)_o$	Inercia traslacional equivalente
$(\rho J)_o$	Inercia flexional y/o torsional equivalente
$C.B.$	Condiciones de borde

$9ED$	Modelo continuo para el mástil reticulado
$6ED$	Modelo continuo simplificado para el mástil reticulado
$RE-EF$	Modelo en elementos finitos del mástil reticulado
$VC-EF$	Modelo en elementos finitos del mástil reticulado como viga-columna
\mathcal{G}	Variación cinemáticamente admisible del giro θ
\mathcal{U}	Variación cinemáticamente admisible del corrimiento u
\mathcal{V}	Variación cinemáticamente admisible del corrimiento v
\mathcal{W}	Variación cinemáticamente admisible del corrimiento w
d	Diferencia de nivel entre los extremos de la riostra Coeficiente de definición
d_1	Distancia vertical entre la riostra y su cuerda
$d_{()}$	Designación de la diagonal analizada
$\vec{d}_{()}$	Vector posición de la diagonal analizada en la configuración de referencia
$\vec{d}_{()^*}$	Vector posición de la diagonal analizada en la configuración deformada
e	Longitud de cada lado del reticulado número de euler
f	Relación de flecha de la riostra
g	Aceleración de la gravedad
h^*	Componente adicional de tracción por vibración, proyectado sobre x^*
i	Radio de giro flexional del larguero Número imaginario Índice
j	Índice
k	Coeficiente de definición Índice
m	Masa por unidad de longitud Número de módulos del reticulado
p	Carga uniformemente distribuida sobre la proyección horizontal de la cuerda de la riostra

	Peso propio de largueros
q	Carga uniformemente distribuida sobre la longitud de arco de la riostra Carga distribuida sobre largueros Constante
r_d	Aporte inercial de diagonales
s	Longitud de la riostra desde el apoyo A hasta un punto cualquiera en la configuración deformada Dominio de la diagonal
s_o	Longitud de la riostra desde el apoyo A hasta un punto cualquiera en la configuración no deformada
t	Variable tiempo
u	Corrimiento en la dirección de x Variable auxiliar
v	Corrimiento en la dirección de y Variable auxiliar
w	Corrimiento en la dirección de z
u^*	Corrimiento en la dirección de x^*
w^*	Corrimiento en la dirección de z^*
x	Coordenada cartesiana en el sistema global
y	Coordenada cartesiana en el sistema global
z	Coordenada cartesiana en el sistema global
x^*	Coordenada cartesiana en el sistema local
z^*	Coordenada cartesiana en el sistema local
Δ	Separación o paso entre diagonales
Θ	Constante Incremento de una función Acortamiento axial
α	Pendiente de la riostra en cada punto Inclinación de la diagonal

β	Constante adimensional Ángulo interior de la sección transversal del reticulado
γ	Constante adimensional Ángulo entre el plano de la riostra y el plano vertical
δ	Acortamiento axial por efecto de 2 ^{do} orden Coeficiente de definición
ε	Deformación elástica
ζ	Dominio parametrizado de la diagonal
η	Coeficiente de definición
θ	Giro angular
κ	Coeficiente de definición
λ	Constante
ξ	Coeficiente de definición
ρ_d	densidad del material de la diagonal
ρ_l	densidad del material del larguero
ρ_r	densidad del material de la riostra
σ	Tensión elástica
σ_r	Tensión de rotura de la riostra
τ	Tracción dinámica adicional en la riostra
ϕ	Ángulo de inclinación de la riostra
ψ	Coeficiente de definición Constante
ω	Frecuencia natural de vibración

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos:

A la Dra. Ing. Graciela Maldonado, quien me impulsó a afrontar este desafío personal y colaboró permanentemente para la concreción del mismo.

Al apoyo brindado por la Facultad Regional Mendoza, especialmente por el CeRe-DeTeC, por el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, así como también, por FAGDUT Seccional Mendoza.

Al Programa de Becas para Docentes de la Universidad Tecnológica Nacional - Convocatoria 2008, cuyo financiamiento de este trabajo de investigación estuvo a su cargo.

Y de manera muy especial a mis Directores de Tesis, Marta y Carlos, quienes inicialmente sin haberme conocido personalmente, depositaron su confianza aceptando dirigir este proyecto. Agradezco sus conocimientos impartidos y la predisposición brindada, fruto de este presente, pero fundamentalmente, por la generosidad y calidez humana que pusieron de manifiesto en cada momento. Como siempre y por siempre, gracias, gracias por todo...

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

En Argentina, la extensión territorial obliga a la instalación de una gran cantidad de antenas a fin de mantener conectadas a través de las comunicaciones a las distintas comunidades que forman parte del territorio nacional. Estas antenas pueden ser sustentadas por mástiles auto-soportados los cuales suelen llamarse torres, o bien por mástiles arriostrados.

Debido a que existe una creciente oposición pública por cuestiones ambientales (eventual perjuicio a corta distancia de las señales emitidas) y también, dificultades de disponibilidad de espacio en los centros urbanos, el uso de los mástiles arriostrados se ha popularizado en las zonas suburbanas o rurales dado que se requiere de mayor espacio de terreno para el emplazamiento de los mismos. Al mismo tiempo, los mástiles arriostrados resultan ser más livianos que los auto-soportados, permitiendo también alcanzar mayores alturas y con ello una mejor calidad en las comunicaciones.

Por ello, los mástiles reticulados y arriostrados (ver Figura 1.1) son uno de los sistemas estructurales más usados en la comunicación inalámbrica, ya sea para soportar elementos de transmisión instantánea de la voz y comunicación de datos por teléfono especialmente telefonía móvil, así como también en la industria de la radio y televisión, y en los sistemas de emergencia que utilizan comunicaciones por radio y teléfono.



Figura 1.1: Típico mástil reticulado y arriostrado

Resulta necesario e innegable que los sistemas de comunicaciones tengan que ser cada vez más confiables y precisos, garantizando así la calidad y continuidad operativa de las comunicaciones. Esto último requiere, entre otras cosas, de modelos numéricos adecuados que permitan representar convenientemente al sistema mástil-riostros, y con ello, poder evaluar la respuesta estructural frente a las acciones de diseño.

Los mástiles arriostrados son conocidos en inglés como *guyed towers*, y constan de dos contribuciones fundamentales, un mástil usualmente reticulado y los cables o riostras vinculados al mismo a distintas alturas. Estos sistemas se caracterizan por ser estructuras muy altas, esbeltas, y esencialmente flexibles, lo cual las torna sensibles frente a excitaciones dinámicas, resultando ser matemáticamente fuerte e inherentemente no-lineal debido principalmente a la configuración geométrica de las riostras. Esto último hace complejo el análisis de la respuesta estructural, requiriendo de estudios detallados en donde se pierde el poderoso principio de superposición (válido para comportamientos lineales) y en donde se dejan de lado las aproximaciones usuales.

En la etapa de montaje del mástil arriostrado, a las riostras se les suministra de suficiente pretensión a fin de estabilizar al mástil, lo cual hace que su flecha sea pequeña resultando así válido utilizar la aproximación parabólica para modelarlas, en donde la extensibilidad de las riostras no puede ser despreciada. En la práctica profesional es habitual, al momento del diseño de los mástiles arriostrados, considerar a las riostras como vínculos elásticos con comportamiento lineal (sobre los que se apoya el mástil). Esta última consideración evidentemente no representa el comportamiento geoméricamente no-lineal de la riostra, y consecuentemente, la determinación de la respuesta estructural del sistema mástil-riostra puede resultar inapropiada. Por ello, resulta necesario la determinación de la rigidez axial de la riostra y su evolución no-lineal frente a cambios en el estado tensional imperante en la misma, como consecuencia del desplazamiento del extremo vinculado al mástil, pudiendo así representarse adecuadamente la riostra como un resorte elástico no-lineal.

En lo que a modelos de representación del mástil reticulado se refiere, es ampliamente utilizado el modelo discreto viga-columna equivalente debido a su bajo costo computacional. No obstante y para una correcta modelación dinámica, no sólo deben ser representadas de manera adecuada las propiedades elásticas equivalentes del mástil, sino que también, deben ser correctamente representadas sus propiedades inerciales. Al respecto, estas últimas no se encuentran reportadas en la literatura actual. En cuanto a modelos continuos que permitan la representación del mástil reticulado y con ello la determinación del comportamiento mecánico en cualquier punto del dominio, la literatura presenta escasos desarrollos al respecto, y por ende su implementación numérica no ha sido tomada en cuenta.

Por otro lado, y a pesar del gran potencial de impacto adverso, las cargas sísmicas no suelen ser consideradas como acciones dominantes en la etapa del diseño de los mástiles arriostrados, y muy pocos investigadores a nivel mundial han focalizado su estudio en la respuesta sísmica de estas estructuras, aunque de estudios recientes se ha observado que la demanda impuesta al sistema por algunos registros sísmicos puede resultar determinante para la continuidad operativa de las comunicaciones. Esto último haría necesario una detallada evaluación de estas tipologías estructurales cuando las mismas sean emplazadas en zonas con elevado riesgo sísmico.

1.2 Importancia del tema

En situaciones de accidentes, catástrofes naturales, entre otras posibles emergencias, las comunicaciones son esenciales en la estrategia de defensa civil. Por ello, la seguridad estructural y la confiabilidad de las señales transmitidas por las antenas pasan a ser temas de singular relevancia.

En este tipo de situaciones las comunicaciones cumplen un rol esencial a la hora de facilitar la coordinación de los distintos elementos afectados por una situación catastrófica (población, equipos de emergencia, organismos públicos, etc.). La cooperación en estos casos puede incluso reducir la magnitud de la propia catástrofe. Como ha afirmado Yoshio Utsumi, ex-Secretario General de la Unión Internacional de Telecomunicaciones: "en situaciones de emergencia, las telecomunicaciones salvan vidas" [69].

Las estadísticas destacan que cada vez son más las personas afectadas por desastres hidrometeorológicos en el mundo. El 90 % de los fallecimientos atribuibles a catástrofes naturales en los años 90 se produjeron como consecuencia de desastres relacionados con el clima, el tiempo o el agua [54].

En lo que a la prevención de catástrofes se refiere, la mejor forma de reducir los daños y sus consecuencias es diseñar sistemas de alerta temprana, lo cual implica la monitorización de parámetros ambientales y el análisis de los mismos, con el fin último de detectar los posibles incidentes medioambientales y alertar a la población para que pueda tomar las precauciones mínimas necesarias.

Por lo tanto, las telecomunicaciones juegan un papel fundamental en estas iniciativas, en cuanto permiten el seguimiento de variables que puedan dar señales de la aproximación de un fenómeno natural extremo inminente, así como la transmisión de información relevante hacia los organismos necesarios y sobre todo, a la población afectada. En particular, el uso de las tecnologías móviles puede ser especialmente útil para transmitir información de señales de alarma recogidas por sensores ubicados en zonas de difícil acceso o donde no es posible establecer una comunicación por cable [15].

Huracanes, inundaciones, terremotos, etc. son ejemplos de desastres naturales

que suelen aniquilar con violencia las zonas en donde se producen. Los servicios básicos de telecomunicaciones, basados en infraestructuras terrestres, suelen ser también "víctimas" de estos desastres, dejando a las áreas afectadas aisladas. Esto afecta a la población y complica las actividades de los trabajadores que participan en las tareas de socorro, resultando difícil establecer las necesidades de las zonas afectadas, su localización, y la coordinación de la ayuda. Por ello, la creación de redes de telecomunicaciones resistentes a las catástrofes ha sido desde hace tiempo objetivo de este sector. Entre las prioridades definidas en la Conferencia Mundial sobre Reducción de Desastres celebrada en Japón en enero de 2005, se establece la necesidad de proteger y fortalecer las instalaciones consideradas como críticas, entre las que se encuentran las infraestructuras de comunicaciones, de tal modo que sean resistentes a daños [72].

En lo que a la Argentina se refiere, su amplitud territorial hace que la misma presente regiones geográficas expuestas a distintas peligrosidades naturales, así como también, a eventuales accidentes ocasionados por la acción del hombre. Ejemplo de ello es la región del centro-oeste y nor-oeste Argentino en donde la peligrosidad sísmica es latente, o bien la región del centro-este expuesta la misma a fuertes tormentas de lluvia y viento.

Por lo tanto, los mástiles arriostrados deben ser analizados y diseñados adecuadamente para soportar vientos y sismos, además de las cargas de servicio, no sólo por la importancia económica de la estructura en sí misma, sino que también, desde el punto de vista estratégico por lo que significa mantener operativamente las comunicaciones. Esto implica poder conocer y comprender el comportamiento de estos sistemas estructurales, y a partir de ello, desarrollar modelos de representación que permitan obtener una respuesta mecánica confiable al momento del diseño estructural.

Todo avance y aporte que surja a partir de la presente investigación, siendo ello el propósito de la misma, indudablemente contribuirá al conocimiento científico y redundará en una mayor eficiencia del comportamiento estructural de los mástiles reticulados arriostrados, garantizando así la continuidad y calidad de las comunicaciones.

1.3 Alcance de esta tesis

En esta investigación se considera el comportamiento geométrico no-lineal de riostras suspendidas sujetas a cargas transversales, utilizando para ello distintos modelos de representación. En cuanto a la determinación de frecuencias naturales, las mismas se evalúan mediante la implementación de expresiones obtenidas a partir de un modelo dinámico previamente linealizado.

El estudio de sensibilidad sísmica de un mástil arriostrado sujeto a distintos registros sísmicos, se lleva adelante mediante simulaciones numéricas utilizando una herramienta computacional de uso comercial. En dicho estudio se considera un análisis dinámico no-lineal, evaluando la historia en el tiempo de la respuesta estructural del sistema.

Por otra parte, se investiga un mástil reticulado de sección transversal triangular con diagonales dispuestas en un patrón del tipo zig-zag, determinando la respuesta estática, dinámica y de estabilidad mediante la implementación numérica de modelos continuos desarrollados en el presente estudio. Estos modelos consideran un comportamiento elástico lineal, la flexibilidad por corte propia del alma reticulada, y el efecto de 2^{do} orden. En tanto que los modelos no contemplan el amortiguamiento estructural.

En cuanto al mástil reticulado y arriostrado, se investiga un mástil espacial arriostrado por un nivel de riostras dispuestas entre sí 120° . Elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas de pandeo, se determinan mediante la implementación numérica de un modelo continuo en el cual las riostras quedan incorporadas en el mismo al ser consideradas como resortes elásticos.

Por último, el enfoque de esta tesis es esencialmente teórico-numérico, en donde para verificar los resultados obtenidos a partir de los modelos y expresiones desarrolladas, se llevan a cabo simulaciones numéricas vía elementos finitos, utilizando para ello un *software* de uso comercial.

1.4 Objetivos

El objetivo general de la presente investigación resulta ser el de:

1. Formular un modelo continuo de representación que permita evaluar la respuesta mecánica de un mástil reticulado de sección transversal triangular, extendiendo luego su aplicación a un sistema estructural mástil arriostrado.

En tanto que como objetivos específicos, se pretende:

1. Desarrollar analíticamente distintas estrategias para la modelación del perfil geométrico adquirido por una riostra suspendida sujeta a cargas transversales, así como también, las expresiones que permiten evaluar las frecuencias naturales de la misma.
2. Obtener la expresión que permita determinar la evolución de la rigidez axial de una riostra cuando la misma presenta corrimientos en uno de sus extremos.
3. Evaluar la sensibilidad sísmica de un mástil arriostrado mediante simulaciones numéricas, y observar cómo influye en la respuesta dinámica la variación de ciertos parámetros mecánicos del sistema estructural.
4. Desarrollar modelos continuos para la representación de un mástil reticulado, y abordar el comportamiento estructural mediante la implementación numérica de dichos modelos.
5. Determinar las propiedades equivalentes necesarias para la modelación del mástil reticulado como viga-columna, y aplicar posteriormente las mismas a simulaciones vía elementos finitos.
6. Proponer expresiones de uso práctico y que de manera directa permitan determinar las cargas críticas de pandeo flexional y torsional del mástil reticulado.
7. Formular un modelo continuo para la representación de un sistema espacial mástil-riostras, y aplicar numéricamente el mismo para determinar elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas de pandeo.

1.5 Metodología

A continuación se hace una breve descripción de la metodología empleada en la presente investigación:

1. La solución numérica de las ecuaciones no-lineales que gobiernan el comportamiento estático de una riostra, se aborda mediante la aplicación del método de Newton-Raphson.
2. Para el estudio de sensibilidad sísmica del mástil arriostrado, se utiliza la herramienta computacional para simulación de eventos mecánicos SAP2000, en donde el mástil se modela con elementos finitos tipo viga de dos nodos, y las riostras mediante elementos finitos tipo cable con formulación *catenaria*.
3. Los funcionales de energía desarrollados por el mástil reticulado evaluado, al pasar de la configuración de referencia a una configuración deformada, se determinan mediante un planteo algebraico. Posteriormente y mediante la aplicación del cálculo variacional, se obtienen las variaciones energéticas de dichos funcionales.
4. Mediante la aplicación del Principio de Ostrogradski-Hamilton se obtienen, de manera directa, el sistema de ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde (C.B.) que gobiernan el comportamiento mecánico del mástil reticulado.
5. Para la implementación numérica del modelo continuo desarrollado para el mástil reticulado, se hace un pasaje del sistema diferencial gobernante a derivadas parciales, a un sistema de ecuaciones algebraicas y lineales. Para ello se aplica el método de separación de variables.
6. Para determinar la elástica del mástil arriostrado mediante la implementación del modelo continuo desarrollado, se aplica un proceso iterativo a fin de actualizar la rigidez axial de las riostras (evolución no-lineal) como consecuencia del desplazamiento que experimenta el extremo arriostrado debido a las cargas actuantes en el mástil.

1.6 Originalidad de la tesis

Fundamentado en los objetivos planteados oportunamente, y consecuentemente, motivado en la búsqueda de nuevos aportes que contribuyan al conocimiento de la temática abordada, se considera que los aspectos más relevantes que hacen a la originalidad del presente trabajo de investigación pueden ser sintetizados como sigue:

Revisión de distintos modelos de representación de riostras, incluyendo el desarrollo de los planteos matemáticos conducentes a las expresiones finales, los cuales en la literatura suelen darse por sobrentendidos. Esto último no sólo permite justificar las hipótesis asumidas, sino que también, comprender el comportamiento de la riostra y con ello la adecuada elección del modelo que pueda representar apropiadamente la respuesta mecánica de la misma.

Estudio paramétrico de sensibilidad sísmica de un mástil arriostrado utilizando registros sísmicos locales e internacionales. Al respecto, en el presente trabajo se han utilizado seis registros sísmicos, superando así los dos o tres registros que suelen ser considerados en la literatura internacional, y destacando también que a nivel nacional no se reporta de un estudio de respuesta sísmica llevado adelante con registros locales. Al mismo tiempo, no se encontró en la literatura consultada un estudio de sensibilidad considerando el efecto combinado de la modificación de tres parámetros fundamentales a la hora de la modelación dinámica del problema, como lo son la pretensión en riostras, el amortiguamiento estructural y la rigidez flexional del mástil.

El desarrollo del sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un mástil reticulado preservando su configuración espacial y abordado mediante un planteo energético, es también un aspecto original de esta tesis, y por ende, no reportado en la literatura actual. Dicha formulación, la cual da lugar a un modelo continuo, contempla aportes dados por rigideces e inercias locales de cada uno de los elementos del reticulado, así como también, efectos tales como la flexibilidad por corte propia de los sistemas reticulados, y efectos de 2^{do} orden propios de sistemas esbeltos. Este modelo continuo permite representar el movimiento de cada uno de los largueros que conforman al mástil reticulado.

En lo que hace a la búsqueda de modelos reducidos de representación del mástil reticulado, y fundamentado en el modelo espacial citado en el párrafo anterior, se desarrolla un modelo continuo simplificado en el que los corrimientos de los largueros han sido referidos al eje baricéntrico de la sección transversal. Dicho modelo preserva los aportes y efectos del modelo espacial, permitiendo abordar numéricamente y con un excelente desempeño, la respuesta estática, dinámica y de estabilidad del reticulado, sin encontrar limitaciones de aplicación en cuanto a diferentes C.B. posibles del problema. Al mismo tiempo, el desarrollo de este nuevo modelo continuo, permitió obtener las propiedades equivalentes necesarias para la representación discreta del reticulado como viga-columna, así como también, la obtención de expresiones explícitas para la determinación de las cargas críticas de pandeo flexional y torsional, que de manera práctica y simple, permiten evaluar la estabilidad del mástil. Esto último oportunamente será puesto a consideración de las autoridades de CIRSOC a fin de que evalúen si resulta pertinente incluir dichas expresiones en la reglamentación vigente, pudiendo resultar ello en un aporte valioso para la práctica profesional.

Por último y referido al sistema estructural mástil-riostros, se incorpora a los funcionales de energía obtenidos para el modelo continuo simplificado del mástil arriostrado, los funcionales de energía obtenidos para las riostras consideradas éstas como resortes elásticos. Con ello se formaliza un modelo continuo capaz de representar el movimiento de un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras. Dicho modelo es aplicado a la determinación de elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas de pandeo del mástil arriostrado.

1.7 Estructura de la tesis

Los restantes capítulos de esta tesis son organizados como a continuación se detalla:

El Capítulo 2 presenta una revisión de la literatura considerada más relevante desarrollada en los últimos años, referida al estudio de: i) mástiles reticulados (modelo continuo, viga-columna, propiedades equivalentes, etc.); ii) riostras (modelos de representación, análisis estático, vibraciones naturales, etc.); iii) mástiles reticulados arriostrados (modelación, análisis estático y dinámico, cargas de viento y sismo, etc.).

El Capítulo 3 incorpora los distintos modelos de representación de una riostra (modelo *catenaria* y parabólico, inextensible y extensible), incluyendo los correspondientes desarrollos. Se analiza la respuesta estática de una riostra sujeta a su propio peso a partir de las distintas estrategias de modelación. Se presenta también el desarrollo de la ecuación conducente a la determinación de la rigidez axial estática, así como también, de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de una riostra tensa, obteniéndose luego las frecuencias naturales para los distintos modos de vibración. Por último, se llevan adelante simulaciones numéricas, vía elementos finitos, a fin de comparar los resultados obtenidos con aquéllos hallados mediante la aplicación de las formulaciones analíticas.

En el Capítulo 4 se muestra el estudio paramétrico realizado a un mástil reticulado de sección transversal triangular, de 120 m de altura, arriostrado por cuatro niveles de riostras, y sujeta a una serie de registros sísmicos correspondientes a terremotos locales e internacionales. Las respuestas dinámicas evaluadas corresponden al desplazamiento de la cima del mástil y al corte basal del mismo. Se evalúa cómo inciden en dichas respuestas la modificación de los parámetros de diseño: i) nivel de pretensión inicial en las riostras, ii) amortiguamiento equivalente (Rayleigh) de la estructura y iii) rigidez flexional del mástil. Los resultados de las respuestas evaluadas son mostrados mediante gráficos.

El Capítulo 5 aborda el desarrollo, mediante un planteo energético, de las ecuaciones diferenciales y de las C.B. que gobiernan el comportamiento estructural de un reticulado espacial, el cual es ampliamente utilizado en la práctica para materializar el mástil arriostrado. Dicho desarrollo conduce a la obtención de un modelo continuo de representación. El capítulo incluye las principales hipótesis asumidas en el desarrollo, así como también, los procedimientos analíticos necesarios para la obtención de los funcionales de energía potencial y cinética del problema considerado, obteniéndose un modelo continuo 9ED. La implementación numérica del modelo se lleva adelante para un caso particular.

En el Capítulo 6 se desarrolla un modelo continuo 6ED capaz de representar de manera más simple al reticulado espacial tratado en el capítulo anterior, obteniéndose las respectivas ecuaciones diferenciales y sus correspondientes C.B. A partir de dicho modelo, se obtienen las propiedades equivalentes necesarias para la representación del reticulado

como viga-columna, así como también, la obtención de expresiones prácticas para la determinación directa de las cargas críticas de pandeo. La implementación del modelo continuo desarrollado queda incorporada en el presente capítulo, obteniéndose resultados numéricos de elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas, para distintas condiciones de borde. Al mismo tiempo se modela de manera discreta al reticulado espacial, vía elementos finitos, a fin de comparar resultados con aquéllos obtenidos a partir del modelo continuo simplificado.

El Capítulo 7 aborda el estudio de un mástil reticulado el que se encuentra arriostrado por un nivel de riostras. Dichas riostras han sido tratadas como resortes elásticos ubicados en los puntos de amarre con los largueros, en donde la energía de deformación desarrollada por estos resortes ha sido incorporada al modelo 6ED del mástil reticulado. Elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas del sistema han sido determinadas numéricamente mediante la implementación del modelo continuo, y comparadas luego con resultados de modelaciones vía elementos finitos.

Finalmente en el Capítulo 8 se realiza una breve síntesis de los procedimientos y resultados obtenidos, presentando una discusión de dichos resultados. Se señalan también las principales conclusiones que pueden extraerse de la presente investigación, indicando al mismo tiempo, las posibles líneas de trabajo a ser abordadas en el futuro.

En el Apéndice A se aborda, mediante la implementación del modelo continuo que fuera desarrollado en el Capítulo 6, la solución numérica para un caso particular del mástil arriostrado, mientras que el Apéndice B, presenta la implementación de dicho modelo continuo simplificado para condiciones de borde diferentes a la analizada en el Capítulo 6. En tanto que en el Apéndice C se desarrolla nuevamente el modelo continuo simplificado obtenido en el Capítulo 6, pero con la particularidad de que se prescinde del aporte local de los largueros, en términos de inercia y rigidez, haciendo aún más fácil su implementación numérica.

Capítulo 2

Revisión de la literatura

2.1 Introducción

Este tipo estructural, mástil arriostrado, está siendo estudiado por los principales centros de investigación mundial, con aportes individuales que contribuyen al conocimiento de su comportamiento y a mejoras que conducen a la optimización en diseño, seguridad y economía. Una gran mayoría de los trabajos están orientados al uso del método de elementos finitos para encontrar la respuesta de los sistemas que nos ocupa. Las cargas usuales de diseño son principalmente el viento y el hielo, aunque últimamente el efecto del sismo e indicadores de sensibilidad sísmica han sido objeto de estudio dada la relevancia estratégica de estas estructuras de comunicaciones frente a siniestros naturales.

En este capítulo, se presenta una revisión de la literatura surgida a partir de las investigaciones más relevantes desarrolladas en los últimos años, referidas a mástiles reticulados, a riostras, y al sistema en su conjunto, mástil arriostrado.

2.2 Mástiles reticulados

En la industria de las telecomunicaciones las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados arriostrados. Estos mástiles reticulados presentan una importante

cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual a la hora del diseño utilizar modelos equivalentes de representación, resultando ello en un menor costo computacional de análisis [46], [70]. Sólo muy pocos autores se han abocado a la determinación de las propiedades equivalentes necesarias para la modelación discreta del reticulado como viga-columna, y menos aún, al desarrollo de modelos continuos de representación a partir de un planteo energético, permitiendo con ello una evaluación más precisa de la respuesta estática, dinámica y de estabilidad del reticulado.

El Reglamento CIRSOC 302 [7] establece los fundamentos de cálculo para los problemas de estabilidad del equilibrio en estructuras de acero. Para el caso de reticulados planos con distintos patrones de reticulación, indica expresiones para determinar una esbeltez local considerando la flexibilidad por corte propia del alma reticulada. Esta esbeltez local junto a la esbeltez correspondiente a la barra compuesta, permiten determinar una esbeltez ideal y a partir de ello obtener mediante tablas el coeficiente de pandeo (método ω), para luego comprobar que las tensiones de compresión no superen las admisibles. En el análisis se prescinde del aporte de rigidez local de los largueros.

En tanto la Recomendación CIRSOC 303 [9], la cual aborda el tratamiento de estructuras livianas de acero, establece expresiones para la determinación de las deformaciones máximas de un reticulado espacial. Estas expresiones sólo son válidas para las condiciones de borde del reticulado apoyado-apoyado y empotrado-libre, y para cierto tipo de cargas. Nuevamente en el análisis se prescinde del aporte de rigidez local de los largueros.

Ben Kahla [38] basado en el método de la flexibilidad, determinó las propiedades elásticas equivalentes para cinco patrones distintos de reticulados espaciales. Para ello aplicó acciones unitarias (esfuerzo axial, transversal, flector y torsor) sobre el eje baricéntrico de los reticulados espaciales obteniendo los desplazamientos del mismo, y luego los comparó con aquellos desplazamientos obtenidos por las mismas acciones pero actuando en una viga-columna, obteniendo a través de esta comparación las propiedades elásticas equivalentes.

Otros autores [46], [71] para la modelación como viga-columna de un mástil reticulado arriostrado, obtuvieron las propiedades elásticas equivalentes a partir de modelar vía elementos finitos un tramo del reticulado espacial fijado a su base. Sobre el extremo libre

de dicho reticulado se aplicaron distintas cargas a fin de obtener corrimientos y giros, y con ello, obtener rigideces flexionales, transversales y torsionales, las cuales luego le fueron asignadas al elemento viga-columna. Este proceso se debe repetir cada vez que las propiedades geométricas del reticulado o bien las propiedades mecánicas de los elementos del reticulado cambian, resultando entonces en un método poco expeditivo.

Por otro lado, Salehian [61] desarrolló un modelo continuo 1-D para la representación de un reticulado espacial con uniones flexibles utilizado para soportar pantallas solares que abastecen de energía a satélites en órbita. Asumiendo una variación lineal del campo de desplazamientos de la sección transversal del reticulado, pudo expresar los corrimientos y giros del mismo respecto al eje baricéntrico de la sección. Luego, a través de un planteo energético, determinó la energía mecánica del sistema (referida al eje baricéntrico), y aplicando el principio de Hamilton halló las ecuaciones diferenciales del modelo de orden reducido que representa el movimiento del reticulado. En cuanto a la implementación del modelo, se presentan resultados numéricos sólo en términos de frecuencias, y para las condiciones de borde libre-libre del reticulado. Resultados de frecuencias experimentales obtenidas de un reticulado plano, mostraron correspondencia con los resultados analíticos del modelo desarrollado.

2.3 Riostras

Al igual que Irvine [37], un amplio tratamiento del análisis estático y dinámico de los cables es desarrollado por Leonard [44] en su libro *Tension Structures*. En primer lugar analiza el comportamiento del equilibrio estático del cable considerando tanto la configuración adquirida de perfil parabólico como de perfil catenario, sujeto a cargas concentradas, distribuidas, y combinación de estas últimas. Se muestra que para el caso del cable con flecha reducida, el análisis considerando una carga uniformemente distribuida sobre la luz horizontal del cable, la cual conduce a una configuración parabólica (si no se considera el peso propio), permite encontrar resultados muy similares a los hallados considerando a la carga actuando sobre la longitud de arco del cable (configuración *catenaria*), permitiendo entonces un tratamiento más simple del problema. También se presenta el tratamiento aproximado

a la respuesta estática mediante elementos finitos, desarrollándose la formulación tanto para un elemento recto, de dos nodos y con comportamiento lineal, como también, para un elemento con comportamiento no-lineal. Seguidamente comienza tratando la dinámica de un cable sin peso, de material elástico lineal, con una masa concentrada a la mitad de su luz, y sujeto a una carga puntual variable en el tiempo. La ecuación del movimiento hallada resulta ser no-lineal, linealizándola al desprestigiar los términos de segundo orden de la flecha dinámica $(\Delta e_t)^2$, y observándose que la rigidez es dependiente de la magnitud de la flecha inicial e de pretensado (flecha estática). El análisis de la vibración libre no amortiguada conduce a que la frecuencia de vibración ω es de naturaleza no-lineal, y dependiente de la magnitud de e , tendiendo a ser lineal con el aumento de esta última. Para el caso de vibración libre amortiguada, debido al bajo amortiguamiento de los cables (0.5 a 3 %), la frecuencia natural amortiguada ω_D no difiere significativamente de ω . Frente a una acción dinámica y cerca de la condición de resonancia, dado que Δe_t se amplifica, no resulta válido considerar nulos los términos $(\Delta e_t)^2$, siendo necesario un análisis no-lineal. Para la vibración libre de un cable continuo, se establece que la vibración fuera del plano del cable (balanceo) está desacoplada respecto de la vibración en el plano, y que los modos antisimétricos en el plano no generan tensión adicional en el cable, mientras sí lo hacen los modos simétricos. También se analizó sistemas de múltiples grados de libertad, planteando la ecuación del movimiento para la vibración libre lineal no amortiguada, presentando tres métodos iterativos (el del vector, el de transformación y el polinomial) para hallar las frecuencias naturales. Para el caso de vibración lineal forzada amortiguada (amortiguamiento de Rayleigh), se presenta como método de solución el de superposición modal, permitiendo así desacoplar las ecuaciones del movimiento. Posteriormente y partiendo del principio de Hamilton evaluado incrementalmente, se llega a la formulación de un elemento finito recto que permite encontrar la respuesta linealizada del cable. Se plantea la matriz de masa como consistente y como *lumped*, notándose que la matriz consistente conduce a resultados más adecuados, aunque con un mayor costo computacional. Seguidamente se evalúa la dinámica no-lineal del cable, en donde las ecuaciones del movimiento son abordadas mediante el método de integración directa en el tiempo en su forma explícita e implícita (Newmark), destacando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Por último se desarrolla la

formulación de un elemento finito isoparamétrico no-lineal capaz de representar de manera más adecuada la geometría curva del cable.

La dinámica no-lineal de un cable inicialmente tenso (recto, sin flecha), así como también la de uno no tenso (con flecha) sujeto a la acción del viento fue estudiada por Ben Kahla [39]. Estas condiciones intentan simular la geometría que adquirirían los tensores ubicados a barlovento y sotavento, respectivamente, de un mástil arriestrado sometido a la acción del viento. Se realizó el análisis en el dominio del tiempo utilizando integración directa. Para el cable tenso, la tensión crece al incrementarse la velocidad media del viento, mientras que para el cable no tenso, la tensión decrece con el aumento de la velocidad del viento hasta alcanzar una posición llamada de equilibrio neutro, a partir de la cual comienza a crecer la tensión. El análisis dinámico del cable tenso permitió observar que éste vibra casi lineal alrededor de su posición no deformada (recta), por lo que un análisis modal puede ser aplicado. Para el cable no tenso, la oscilación no ocurre alrededor de su posición neutra (alcanzada para una cierta velocidad media del viento), por lo que no se puede aplicar un análisis modal. La modificación de la frecuencia de la componente fluctuante del viento, permitió estudiar la respuesta en resonancia, observándose un bajo factor de amplificación dinámica pero grandes valores de tensiones en el cable tenso, mientras que para el cable no tenso, los factores fueron elevados, pero dado que el cable continuó flojo, los valores de las tensiones fueron bajos.

Militano [52] desarrolló un *software* para el tratamiento de las vibraciones libres mediante elementos finitos. El modelo para los cables tuvo en cuenta la no-linealidad geométrica, la inclinación, y la posibilidad de adoptar un perfil tipo *catenaria* o parabólico. La matriz de masa fue tratada como matriz *lumped* y como matriz consistente. Sólo se consideró rigidez axial y variación de las tensiones a lo largo del eje de la cuerda. Se encontró que la frecuencia natural del cable tenso depende de la pretensión inicial del mismo y de su rigidez, y que para una rigidez dada, la frecuencia aumenta con la pretensión, mientras que para una tensión constante, la frecuencia decae con la longitud del cable. Ambos tratamientos para la masa del cable convergieron de manera similar a la solución. Se presentó también la modelación del cable mediante el método del módulo elástico equivalente, encontrándose

sólo resultados aceptables para las frecuencias fuera del plano del cable.

Kewaisy [42] trató la dinámica del cable sujeto a una acción forzadora mediante separación de variables. La variable espacial fue discretizada mediante diferencias finitas, mientras que para la discretización de la variable temporal se utilizó el método de integración directa en el tiempo (Newmark β). El modelo incorporó resortes y amortiguadores en puntos intermedios. Se observó que cables con alta tensión inicial (pequeña flecha) exhiben un comportamiento rígido que lleva a bajos desplazamientos y tensiones, y que dado el poco peso de los cables, las fuerzas y desplazamientos inerciales debido a su masa resultan despreciables. Se consideró al cable con perfil de *catenaria*, y solo se tuvo en cuenta rigidez axial y variación de las tensiones a lo largo del eje de la cuerda.

Un modelo simple de nueve grados de libertad fue propuesto por Desai y Punde [11] para representar la dinámica de un cable y con ello la de una estructura soportada por éstos. El modelo presenta tres grados de libertad traslacionales en cada extremo y tres coordenadas generalizadas en un punto intermedio del cable para representar el movimiento de este punto. El modelo considera la posibilidad de desplazamiento de los extremos del cable, y es capaz de representar con este solo elemento al cable completo sin necesitar su discretización. Los desplazamientos en cada una de las direcciones del cable son re-presentados mediante una combinación lineal entre coeficientes función del tiempo, y funciones bases función del espacio. Las funciones bases son las formas modales determinadas analíticamente por Irvine. La formulación fue validada tanto para vibración libre como forzada, obteniéndose resultados adecuados, pero solo aplicables a condiciones en donde la carga en el plano del cable sea la dominante.

Una modificación a las expresiones obtenidas por Irvine [37] para la determinación de las frecuencias naturales y las formas modales de vibración del cable en su plano, fue presentada por Wu *et al.* [73]. Irvine determinó las expresiones para el caso de un cable horizontal y las hizo extensivas para el caso del cable inclinado. Partiendo de la configuración de equilibrio estático definida por Irvine para un cable inclinado y de pequeña flecha, y considerando la influencia del ángulo de inclinación en las frecuencias de vibración en el plano, Wu *et al.* obtuvieron las ecuaciones de Irvine modificadas, las cuales permiten

considerar las propiedades adicionales de vibración debido a la influencia de la inclinación del cable. Estas expresiones fueron obtenidas a partir de considerar la dinámica lineal, resultando válidas para cables con relaciones de flecha menores a $1/8$ (cable poco flechado) y relación entre el peso del cable y la componente horizontal de pretensión menor que uno (cable tenso).

Filipich y Rosales [17] analizaron la dinámica de una cadena de eslabones rígidos, sujeta a su propio peso y a movimientos impuestos en un extremo. Se trató de un análisis plano, donde las ecuaciones del movimiento resultaron fuertemente no-lineales (no-linealidad geométrica) las cuales fueron tratadas mediante series de potencia temporales, dando lugar a una linealización del problema. Se presentaron ejemplos numéricos de una cadena inextensible con un extremo fijo y el otro con movimientos armónicos impuestos de distinta frecuencia, los resultados fueron comparados con los hallados al aplicar un *software* de elementos finitos, encontrándose aceptable concordancia. Tomando un gran número de eslabones para la cadena, esto da lugar a un modelo de cable inextensible.

El análisis dinámico no-lineal de cables extensibles poco tensos bajo su propio peso y el de movimientos impuestos en sus extremos fue tratado por Escalante *et al.* [13] aplicando el método de descomposición ortogonal propia o descomposición de Karhunen-Loève (KLD). Se partió de conocer la respuesta de un problema de similares características, cadena de eslabones rígidos [17], permitiendo ello aplicar la KLD para encontrar los modos ortogonales propios (POM o bases de KL). Las ecuaciones no-lineales que gobiernan el movimiento del cable son resueltas mediante la aproximación de Galerkin utilizando como bases los POM. De los ejemplos numéricos analizados se observó que conocida la respuesta de un problema ordinario (cadenas inextensibles), se pudo analizar un problema dinámico más complejo (cables extensibles), logrando una muy buena representación de la respuesta sólo con el uso de unas pocas bases de KL.

2.4 Mástiles reticulados arriostrados

El Reglamento CIRSOC 306 [8], establece los principios fundamentales para el cálculo y dimensionamiento de las estructuras de acero para antenas. Se establece como modelo de cálculo representativo para el mástil, el de la viga continua sobre apoyos elásticos, y cuyas constantes de resorte dependen del módulo de elasticidad del cable. Se admite un comportamiento elástico lineal para los cables siempre que se asegure un pretensado mínimo. Para mástiles atensorados con altura menor de 60 m y de uso temporario se admite el modelo de viga continua sobre apoyos fijos. Para considerar la acción sísmica se dispone entre los apoyos elásticos y a la mitad del vano, de una masa concentrada correspondiente al aporte de masa activa por parte del vano del mástil. Frente a la acción del viento se establece que la deformación horizontal máxima no podrá ser mayor al 0.5 % de la altura del mástil, y que sólo es necesario considerar los efectos de ráfaga sobre el tramo del mástil que se encuentra por encima del último nivel de tensores. Debido a la acción del hielo, se presentan distintos espesores para la capa de ésta a considerar sobre los elementos, de acuerdo a la zona de emplazamiento.

Un modelo híbrido para el análisis no-lineal de mástiles atensorados fue propuesto por Kewaisy [42]. Los cables fueron discretizados mediante diferencias finitas, mientras que para los miembros del mástil reticulado se utilizó el método de elementos finitos. Se analizaron separadamente los cables y el mástil, y luego forzando la compatibilidad de desplazamientos entre el mástil y los puntos de amarre de los cables, se llegó al estado de equilibrio del sistema. Los elementos cables y barras (para el mástil) sólo presentaron rigidez axial. La respuesta dinámica no-lineal frente a la acción del viento fue analizada. Se observó que la interacción no-lineal cable-mástil se debe a la variación de la rigidez en el cable. La acción del viento hace que algunos de los miembros del mástil se encuentren sujetos a tensiones reversibles pudiendo presentarse fallas por fatiga, aún para cargas de servicio.

La respuesta frente a severas cargas estáticas capaces de producir grandes deformaciones y tensiones fue abordada por Shi [63]. Para el análisis y modelación utilizó elementos finitos no-lineales, cuyos resultados obtenidos fueron luego comparados con los determina-

dos mediante el uso de modelos de análisis lineal simplificado. Para la modelación no-lineal, se utilizó la formulación de Pai [55] la cual contempla la no-linealidad geométrica y material. El estudio paramétrico fue realizado sobre un mástil atensorado de baja altura (cables tensos) y sobre uno de gran altura (cables flechados). El comportamiento fue analizado solo en términos del desplazamiento de la cima del mástil. En cuanto a la no-linealidad material, se observó que el modelo isotrópico es el más adecuado para estas cargas. Cuando el mástil presenta grandes deformaciones pero con pequeñas tensiones, es suficiente considerar solo no-linealidad geométrica. Mientras que si las deformaciones son pequeñas, un análisis lineal resulta adecuado. También evaluó la respuesta frente a una carga sísmica considerando solo la componente principal horizontal del terremoto de El Centro, en donde ésta fue aplicada en forma alternada en las dos direcciones ortogonales. La respuesta dinámica frente a cargas impulsivas (explosiones) también fue estudiada.

Oliveira *et al.* [53] llevaron adelante un análisis sobre tres mástiles atensorados (50, 70 y 90 m). Cada uno de los elementos del mástil reticulado fue modelado vía elementos finitos, para lo cual se utilizaron tres estrategias distintas de modelación (I, II, III). En la I se utilizaron elementos tipo barras de dos nodos con capacidad sólo a esfuerzos normales. Para la II se consideraron elementos tipo viga de dos nodos con capacidad a esfuerzos normales, de flexión, y torsión, mientras que para la estrategia III se adoptó una combinación de la I y de la II para modelar cada miembro del mástil. En los tres casos los tensores fueron modelados con elementos tipo cable de dos nodos y con capacidad solo a tracción. Para el análisis numérico se utilizó el *software* ANSYS. Del análisis estático se observó una buena concordancia entre los resultados de tensiones y desplazamientos obtenidos de las estrategias II y III, mientras que hubo marcadas diferencias con la I dado que ésta subestimó los valores de las tensiones. La estrategia III resultó más eficiente computacionalmente que la I, y representó de mejor modo que la II el caso en el que las barras secundarias se encontraban articuladas (diagonales, montantes horizontales). En cuanto a las frecuencias en vibración libre, las diferencias numéricas encontradas entre las tres estrategias de modelación utilizadas, resultaron ser pequeñas. Todos los análisis llevados a cabo fueron lineales.

Un método simplificado para el análisis dinámico fue propuesto por Gerstoft y Davenport [20], en el que la respuesta dinámica es separada en una respuesta base (baja frecuencia) y en una respuesta de resonancia (alta frecuencia). El momento de respuesta base se estima mediante la aplicación del método del *pacth load* (Cohen, 1960), pero con diferente magnitud de carga y diferente camino en la aplicación de los *pacth load*. Esta respuesta se determina como la raíz de la suma de los cuadrados de cada momento (*r.s.s.*) obtenidos para cada *pacth load*. Dado que se encontró formas similares entre la respuesta base (cuasi-estática) y la respuesta resonante (dinámica), la respuesta dinámica se obtiene multiplicando a la respuesta base por un factor de amplificación dinámica que depende de las propiedades estructurales del mástil. El método resulta adecuado cuando la respuesta resonante es pequeña.

El efecto de la carga de hielo sobre las vibraciones libres fue tratado por Wahba *et al.* [70] utilizando el *software* multipropósito de elementos finitos ABAQUS. Se evaluaron seis mástiles atensorados existentes utilizando dos modelaciones distintas para el mástil, una en donde se modeló cada uno de los miembros con elementos tipo barra, y la otra, en donde se modeló al mástil como viga-columna equivalente utilizando elementos tipo viga. En ambos casos los tensores fueron modelados con elementos tipo cable y fue considerada la no-linealidad geométrica. Ambos modelos numéricos fueron validados comparando sus resultados con los de un ensayo experimental sobre un mástil arriestrado a escala. Como carga de hielo se utilizaron tres clases posibles de acumulación sobre los elementos. Se observó que ambos modelos numéricos tuvieron adecuada concordancia con el modelo experimental, que la acumulación de hielo en los elementos reduce significativamente la frecuencia natural respecto a la condición de carga de hielo nula, presentándose además un mayor acoplamiento entre los movimientos de los cables y del mástil, y resultando ser el sistema más vulnerable a los efectos dinámicos del viento. Los mismos autores en un trabajo posterior [71], compararon los resultados obtenidos de las modelaciones mencionadas, con los obtenidos al modelar los seis mástiles atensorados utilizando el modelo de viga continua apoyada en soportes elásticos no-lineales, siendo ampliamente utilizado en el diseño. Se encontraron resultados similares, solo que el modelo de viga continua sobrestima las rotaciones torsionales. El modelo que utilizó elementos finitos tipo viga, presentó el menor costo computacional.

Madugula *et al.* [46], basados en los trabajos de Wahba *et al.* [70] y [71], validaron los modelos de elementos finitos utilizados en ese estudio, mediante la comparación con los resultados experimentales obtenidos de mástiles atensorados modelados a escala (1:20) y ensayados en una mesa vibratoria, encontrando buena concordancia en los valores de las frecuencias naturales entre los modelos numéricos y experimentales. Luego, seis mástiles atensorados existentes fueron representados con los modelos de elementos finitos, encontrándose que la frecuencia natural del sistema disminuye cuando se produce un aumento de la carga de hielo, que la frecuencia aumenta al aumentar la pretensión inicial en los tensores, y que los dispositivos antirotoras no influyen significativamente (<5 %) en el comportamiento dinámico del sistema.

Un *software* basado en el método de elementos finitos para el tratamiento de las vibraciones libres fue abordado por Militano [52]. El modelo contempló los cables, el mástil y las estrellas antirotoras. Se utilizaron elementos tipo cable tridimensional con perfil de *catenaria* y parabólico. Para modelar el mástil se utilizaron elementos viga-columna con las propiedades equivalentes determinadas en [38]. Las soluciones obtenidas tuvieron buena concordancia con soluciones existentes. Se observó que la interacción mástil-riostros no tiene efecto sobre las frecuencias del cable fuera de su plano, mientras que para las frecuencias en el plano, se presenta un acoplamiento entre el mástil y los cables. El peso propio del mástil afecta las primeras frecuencias flexionales de este. El estudio paramétrico realizado indicó que el adoptar alguno de los cinco patrones de reticulados establecidos en [38] tiene poco efecto sobre las frecuencias del sistema, y que este efecto decae aún más cuando se incrementan los niveles de cables.

Simulaciones numéricas sobre un mástil arriostrado con un solo nivel de riostras constituido por dos riendas coplanares, fueron llevados adelante por Preidikman *et al.* [58] para evaluar las vibraciones libres mediante análisis dinámico lineal y no-lineal. El mástil fue modelado como una viga-columna soportada por apoyos elásticos no-lineales (los tensores). Para los tensores se consideró el modelo de perfil parabólico. Se observó que la pérdida de pretensión en los tensores produce un aumento del período de la estructura debido a la disminución de rigidez del tensor, y una disminución del período debido a la disminución

de la carga de compresión en el mástil. Para el caso de mástiles atensorados con tensores con elevada pretensión, el modelo de viga continua sobre apoyos rígidos es válido, no así cuando se trata de mástiles con muchos niveles de tensores y con baja pretensión en éstos. Se trató de un análisis en el plano y no amortiguado.

La respuesta dinámica de un mástil arriostrado de 50 m de altura bajo la acción de una carga de viento normal, fue experimental y analíticamente investigada por Harikrishna *et al.* [30]. Mediciones de campo se llevaron adelante para obtener resultados experimentales, mientras que para la simulación numérica se utilizó el método del *pacth load* (Davenport y Sparling, 1992). Los coeficientes de rugosidad α (ley de potencia) y z_o (ley logarítmica) estimados experimentalmente, se correspondieron con las características del terreno. Se observó del espectro de aceleraciones medidas sobre el mástil, la presencia de excitaciones multimodales muy próximas entre sí. La raíz de la media de los cuadrados (*r.m.s.*) de los desplazamientos estimados sobre el mástil, se incrementan de forma no-lineal con el incremento del cuadrado de la velocidad media del viento, indicando la contribución de la respuesta dinámica resonante y no-lineal. Los valores *r.m.s.* del desplazamiento medido para vientos leves, coincidieron con los valores obtenidos al aplicar el método del *pacth load*.

Por otra parte Zhu [74] llevó adelante ensayos experimentales en túnel de viento para determinar la respuesta dinámica, frente a esta carga, de un prototipo a escala representando un mástil atensorado de 300 m de altura. La escala geométrica utilizada para el prototipo fue de 1:100. También fueron escalados otros parámetros tales como la velocidad del viento, masa, rigidez y superficie de exposición tanto para el mástil como para los tensores. Los resultados de los ensayos fueron comparados con los resultados encontrados sobre un modelo numérico analizado en el dominio de la frecuencia. En dicho modelo numérico se consideró para los tensores el modelo propuesto por Sparling (1995), mientras que para el mástil, el modelo de viga-columna utilizando las equivalencias halladas en [38]. Las características del mástil arriostrado fueron obtenidas de las consideraciones de diseño establecidas en la *Canadian Design Standard CSA-S37-01* [5] y de un estudio paramétrico sobre 41 mástiles atensorados existentes. En general, se encontró buena concordancia entre

los resultados de los ensayos y los del modelo numérico. Además, se observó que el desplazamiento del mástil es dependiente de la dirección relativa del viento frente al mástil y del grado de exposición de la estructura, y que pareciera ser que cuando el tensor a sotavento comienza a relajarse, los desplazamientos dinámicos cercanos a la cima del mástil se reducen. Se vio también que el método pseudo-dinámico del factor de ráfaga, utilizado por la CSA-S37-01 para encontrar una carga de viento estática equivalente a la dinámica, subestima la respuesta frente a la acción del viento.

Materazzi y Venanzi [50], basados en la revisión del método del factor de ráfaga (Davenport, 1967), propusieron un nuevo método de análisis estático equivalente para evaluar de manera simplificada la respuesta dinámica frente al viento. Este consistió en la definición de una función de ráfaga variable con la altura y dependiente de la cantidad de modos considerados y de la intensidad de la carga dinámica. Se realizó un estudio paramétrico sobre un mástil arriostrado de 150 m de altura, en donde la evaluación dinámica en el dominio de la frecuencia, permitió establecer que se necesita de un mayor número de modos para representar adecuadamente el corte basal que para representar los desplazamientos. También se realizó un análisis estático equivalente utilizando el método del *patch load* (Davenport y Sparling, 1992), un análisis dinámico lineal, y un análisis dinámico considerando no-linealidad geométrica, estos últimos, en el dominio del tiempo. Se observó que para encontrar resultados adecuados con el método propuesto, se necesita de la contribución de varios modos para la definición de la función de ráfaga. Los resultados indicaron una mejor aproximación al análisis dinámico no-lineal con el método de la función de ráfaga que con el método del *patch load*.

Un análisis dinámico no-lineal en el dominio del tiempo fue realizado por Amiri [1] sobre ocho mástiles arriostrados existentes (entre 150 y 607 m de altura), para determinar indicadores de la sensibilidad sísmica mediante simulaciones numéricas. Los miembros del mástil fueron modelados con elementos finitos tipo barra de dos nodos, mientras que los tensores, con elementos tipo cable considerando la no-linealidad geométrica. Se adoptó un amortiguamiento estructural equivalente del 2 % del crítico. Como *input* se utilizaron los acelerogramas de la componente horizontal de los terremotos de El Centro, de Parkfield, y

de Taft. El acelerograma de la componente vertical se generó artificialmente considerando un 75 % del acelerograma horizontal. Se observó como tendencia y comportamiento, que los sistemas con altura entre los 150 y 350 m resultaron ser sensibles sísmicamente si su frecuencia fundamental se encuentra entre los 0.5 y 3 Hz. Además, si los efectos sísmicos verticales son considerados, las mástiles arriostrados con cables poco tensos (<5 % de la tensión última) resultan sensibles a la combinación de movimientos sísmicos horizontales y verticales. El estudio mostró que un comportamiento discontinuo puede presentarse a lo alto del mástil debido a las diferencias de rigidez lateral entre los distintos niveles de los tensores, y que los efectos inerciales debido a la masa de los tensores contribuyen poco a la respuesta sísmica lateral sobre el mástil, pudiendo no ser tenidos en cuenta en el análisis.

Utilizando el *software* multipropósito de elementos finitos ABAQUS, Hensley [31] analizó el comportamiento de un mástil atensorado sujeto a eventos sísmicos, para lo cual utilizó las tres componentes de los registros de los terremotos de Northridge y de El Centro. Se consideró a los tensores constituidos por cuerdas de fibra sintética y fueron tratados en el modelo como resortes con rigidez no-lineal. El mástil se consideró articulado en su base, no se tuvieron en cuenta efectos torsionales sobre el mismo, y fue considerado amortiguamiento estructural de Rayleigh. La respuesta en el tiempo se obtuvo mediante un análisis dinámico implícito. El estudio paramétrico permitió observar que la componente dinámica del esfuerzo axial sobre el mástil es muy significativa, que cuando el tensor se relaja (pérdida de tensión) y rápidamente se vuelve a tensar, el sistema experimenta marcados cambios en su respuesta, y que la componente dinámica de tensión en el tensor resulta mucho mayor que la pretensión inicial. Asimismo se vio que el corte basal resultó ser del orden del 20 % del peso del mástil, que los desplazamientos horizontales del mástil decrecen con un aumento en la pretensión inicial de los tensores, mientras que el desplazamiento vertical crece casi lineal con este aumento. La modificación de la dirección de los *input* analizados, frente a la posición del mástil, casi no altera la respuesta del sistema.

La respuesta dinámica no-lineal debido a la rotura repentina de una riostra fue tratada por Ben Kahla [40]. Un mástil arriostrado por tres niveles de cables fue modelado numéricamente considerando sus cables íntegros, para luego comparar resultados con los

obtenidos de tres modelos que tuvieron en cuenta la rotura de un tensor por vez en cada nivel. Para los miembros del mástil se utilizaron elementos finitos tipo barra, y no se tuvo en cuenta amortiguamiento. Para los tensores se utilizaron elementos tipo cables (con perfil de *catenaria*) teniendo en cuenta el comportamiento no-lineal geométrico, así como amortiguamiento mecánico, estructural y aerodinámico. Se consideró (para los tres casos) la rotura del tensor a barlovento, bajo la acción de una carga estática de viento actuando en el plano de éste. La rotura del tensor fue simulada mediante la aplicación en el punto de anclaje con el mástil, de una fuerza externa equivalente a la tensión de la riostra antes de la rotura, luego esa fuerza fue removida instantáneamente originando aceleraciones. Se observó que la mayor amplificación dinámica sobre los tensores inicialmente a barlovento, se dio para el tensor del nivel central cuando se consideró la rotura del tensor superior. El colapso de la estructura ocurre después de que un grupo de montantes verticales fallan en compresión. Continuando con esta investigación, Ben Kahla [41] utilizando los mismos modelos anteriores, analizó los efectos de la rotura de un tensor pero sin la presencia de presión de viento. El estudio mostró pequeños desplazamientos del mástil pero con muy poco amortiguamiento, debido a que la ausencia del viento no permite amortiguamiento aerodinámico. Ningún montante vertical falló, siendo los cordones horizontales los que fallaron a compresión. Se observó que el colapso de la estructura puede provenir al fallar por lo menos un elemento de la parte más baja del mástil.

La respuesta dinámica no-lineal debido a dos excitaciones armónicas ($\omega = 1$ rad/seg y $\omega = 10$ rad/seg) sobre un mástil arriostrado por un nivel de cables ubicados coplanarmente, y modelado con elementos finitos tipo barra, fue estudiada por Rosales *et al.* [60]. Conocida la respuesta (desplazamientos axiales y transversales) se aplicó la descomposición de Karhunen-Loève (KLD), encontrándose los modos (POM o bases de KL) y los valores (POV o contribución de energía de KL) ortogonales propios, los cuales muestran la influencia de las no-linealidades y el contenido dinámico de la carga. Se observó que para la frecuencia menor no hay cambios evidentes en los modos de KL, mientras que para la frecuencia mayor el primer modo se vio modificado, transfiriéndose energía de éste al segundo modo de KL. Además del análisis de la distribución de energía (POV), el estudio pretende aplicar los POM como bases en la aproximación de Galerkin, logrando modelos simplifica-

dos de baja dimensión dado que muy pocos modos de KL contienen gran información de la dinámica del problema.

Guzmán *et al.* [21] llevaron adelante una revisión de la literatura en donde se investigaron los trabajos considerados más relevantes publicados en los últimos años, en los cuales se presentan distintas estrategias de análisis y modelación para el sistema estructural mástil arriostrado, frente a diversos tipos de solicitaciones. Se observó entre otros temas, que el análisis mediante el método de elementos finitos es ampliamente utilizado, que la modelación del mástil como viga-columna equivalente entrega resultados satisfactorios, y que cuando los desplazamientos del mástil son importantes, o bien, cuando la frecuencia de la excitación es cercana a la fundamental, se requiere de un análisis no-lineal.

Por otro lado, el cálculo de un mástil reticulado arriostrado presentando el mismo imperfecciones geométricas de su eje, fue abordado por Matuszkiewicz [51] de acuerdo a los establecido en el Eurocódigo 3 [14]. El estudio ha permitido establecer que aún estando dentro de los límites admisibles para las imperfecciones geométricas del eje establecidas por el código, dichas imperfecciones pueden tener una influencia significativa en los valores de los esfuerzos internos del mástil, pareciendo ser conveniente tener en cuenta al comienzo del cálculo estructural las posibles imperfecciones presentadas.

La no-linealidad geométrica mediante el uso del *software* SAP2000 fue evaluada por Parnás y Lorenzo [56] cuando el sistema mástil-riostros es solicitado por cargas de viento extremo. Se evaluaron las variaciones en los esfuerzos internos obtenidos en los elementos del mástil considerando la no-linealidad geométrica y sin considerarla. Los resultados numéricos obtenidos reflejaron incrementos significativos en los esfuerzo internos, confirmando la necesidad de un análisis no-lineal bajo carga de viento extrema.

En un estudio reciente, Travanca *et al.* [68] evaluaron el análisis y diseño de estructuras de telecomunicaciones construidas en Portugal en los últimos 20 años, presentando también los principales problemas observados en las mismas. Se destaca que dentro de las estructuras utilizadas para las telecomunicaciones, el mayor número de colapsos encontrados se ha dado para la tipología mástil arriostrado, requiendo estas últimas una mayor atención a la hora del diseño de los anclajes y de la definición de la carga de viento.

2.5 Conclusiones

De la revisión de la literatura abordada se puede establecer que no se reporta de un estudio que haya permitido obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un mástil reticulado espacial, y con ello, el desarrollo de un modelo continuo de representación. Sí se reportan desarrollos conducentes a modelos continuos simplificados de representación 1-D, los cuales son referidos al eje baricéntrico de la sección del reticulado. A partir de dichos modelos se pueden obtener las propiedades equivalentes necesarias para la representación discreta del mástil como viga-columna. Algunos de estos desarrollos sólo permiten obtener las propiedades elásticas del sistema, no así las dinámicas, mientras que aquellos desarrollos que sí lo permiten, han prescindido de las propiedades locales tales como la rigidez e inercia flexional de los largueros, y que para algunos casos, puede resultar importante su consideración. El efecto de 2^{do} orden debido a las cargas de punta tampoco ha sido tenido en cuenta en dichos desarrollos, y consecuentemente, no pudiéndose obtener las correspondientes cargas críticas que conducen a la inestabilidad del mástil reticulado.

En cuanto al análisis de la riostra, los estudios son diversos y profundos, no obstante los distintos modelos que permiten la representación de su comportamiento en muchos casos no presentan un desarrollo analítico detallado que permita su comprensión. Respecto a los estudios paramétricos, se reportan pocos resultados de cómo influye en la respuesta de la riostra la combinación de dos parámetros fundamentales como lo son, la relación de flecha d (asociado a la pretensión), y la diferencia de altura h entre los extremos de ésta (asociado a la inclinación), así como tampoco, una comparación de resultados entre las distintas estrategias posibles para la modelación de la riostra (perfil *catenaria* y parabólico, inextensible y extensible).

En lo que al sistema estructural mástil-riostras se refiere, el análisis vía elementos finitos es ampliamente utilizado. Debido a la geometría del mástil, la representación de cada uno de sus miembros mediante elementos finitos implica un elevado esfuerzo en la modelación y un alto costo computacional. Ante ello, la modelación del mástil como viga-columna entrega resultados muy satisfactorios, siempre y cuando las propiedades equivalentes representen adecuadamente las características del mástil. Por ello, el modelo viga-columna

equivalente sobre apoyos elásticos (las riostras) es una representación muy utilizada en el diseño estructural, aunque algunos *software* ya incorporan en su biblioteca un elemento finito cable con formulación del tipo *catenaria* extensible, permitiendo así considerar la no-linealidad geométrica que impone la riostra al sistema estructural.

A pesar del gran potencial de impacto adverso, las cargas sísmicas suelen no ser consideradas como acciones dominantes en la etapa del diseño, destacando que a nivel mundial sólo unos pocos investigadores han focalizado su estudio en la respuesta sísmica de estos sistemas. Quizás este poco interés esté suscitado porque la literatura no reporta, de manera oficial, ningún caso específico de fallas en torres de telecomunicaciones debido a los recientes terremotos. Es un hecho que las cuestiones legales por lo general se oponen a la publicación de esa información, sin embargo, algunos miembros de comisiones de trabajo han reportado de manera no oficial daños ocasionados durante el terremoto de Northridge en 1994 y durante el terremoto de Kobe en 1995, así como también, desplazamientos excesivos en los sistemas de comunicaciones durante el terremoto de Chile en 2010 ocasionando la pérdida de conectividad en las señales.

Al mismo tiempo y sumado a que al momento del diseño o refuerzo de estas tipologías estructurales, suelen aparecer ciertas incertidumbres asociadas a la modelación dinámica del problema, tales como: i) nivel de pretensión inicial al cual estarán o están sujetas las riostras, ii) amortiguamiento equivalente (Rayleigh) de la estructura y iii) rigidez flexional del mástil, resulta necesario un estudio dinámico detallado que permita evaluar la respuesta y sensibilidad sísmica de estos sistemas frente a la modificación de dichos parámetros.

Capítulo 3

Análisis de una riostra suspendida

3.1 Introducción

Las riostras o cables estructurales son ampliamente utilizados en puentes, mástiles arriostrados, estructuras flotantes, y cubiertas de grandes estadios, entre otras estructuras, para proveer de soporte y estabilidad al sistema, y suelen ser llamadas "estructuras de tensión" dado que las cargas transferidas a los cables por otros elementos son conducidas a las fundaciones o a otras estructuras de soporte directamente por tensiones de tracción, sin flexión o compresión. Esto último, debido a que la sección transversal y el método de fabricación de la riostra hacen que su rigidez a flexión y a corte, así como su resistencia al curvado, sean despreciables [44].

Su análisis puede resultar complejo debido al comportamiento geoméricamente no-lineal que las riostras exhiben, aunque éstas sean generalmente de naturaleza elástica [43]. Esto hace que la respuesta de la riostra frente a las cargas de pretensado (peso propio, cargas en los extremos) y frente a las cargas de servicio, sea no-lineal, no pudiendo por ello superponer efectos.

En este capítulo se determina la respuesta estática y dinámica de una riostra sujeta a su propio peso, evaluando además, cómo incide en dicha respuesta la variación de los parámetros componente horizontal de pretensión aplicada en los extremos de la

riostra, así como también, los distintos niveles de inclinación que pudieren presentarse entre los extremos de ésta. Por último, se llevan adelante simulaciones numéricas mediante la aplicación de la herramienta computacional de elementos finitos SAP2000 [62], para de este modo poder comparar los resultados obtenidos con aquéllos hallados mediante la aplicación de las formulaciones analíticas.

3.2 Análisis estático

La riostra responde de una manera no-lineal frente a las cargas de pretensado (peso propio, cargas en los extremos). Estas fuerzas de pretensado, son las fuerzas que existen en la configuración de equilibrio estático de la riostra y permiten estabilizar a la estructura y proveerle de rigidez frente a las futuras cargas de servicio.

Dentro de las cargas de pretensado, hay dos tipos de cargas transversalmente distribuidas en la riostra que son comunes: las distribuidas uniformemente a lo largo de la longitud de arco, y las distribuidas uniformemente a lo largo de la proyección horizontal de la cuerda de la riostra. El primer tipo de carga distribuida conduce a la solución clásica de la *catenaria* (*catenaria* en latín: cadena), mientras que el segundo tipo de carga conduce a la solución parabólica, siendo esta última más simple en su formulación.

El peso propio es una carga distribuida a lo largo de la longitud de arco, que origina en éste una fuerza interna de tensión denominada fuerza de pretensado, dado que tensa a la riostra antes que cualquier otra carga adicional.

Cuando la relación de flecha es pequeña, es decir cuando la riostra presenta suficiente pretensión, la solución parabólica se aproxima a la solución de la *catenaria* [37] y [44], por lo que en el diseño es habitual modelar a las riostras mediante la aproximación parabólica, siendo esta última más simple en su formulación.

En esta sección, las soluciones analíticas para la riostra inextensible y extensible serán desarrolladas. Estas soluciones pueden también ser encontradas en [37], [44] y [66].

3.2.1 Perfil *catenaria* para la riostra inextensible

Cuando una riostra perfectamente flexible se encuentra colgando de sus extremos y está sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre la longitud de arco, la misma adquiere una configuración de equilibrio estático, describiendo un perfil o curva denominada *catenaria*.

En 1690, Jacob Bernoulli publicó un artículo en las *Actas Eruditorum* de Leibniz, en el que se utiliza por primera vez el término Integral. Al final del artículo y para demostrar la potencia del nuevo cálculo, Jacob lanza un reto a la comunidad matemática de la época: descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cadena de peso uniforme (ver Fig. 3.1). Es así como la ecuación de la *catenaria* fue primeramente obtenida por Leibniz, Huygens (a quien se debe su nombre) y Johann Bernoulli en 1691.



Figura 3.1: Perfil *catenaria*

Para poder obtener la ecuación de la *catenaria* inextensible se deben aceptar ciertas asunciones respecto a las propiedades de la riostra. Esto es, considerar que la misma es perfectamente flexible, lo que implica aceptar que la rigidez flexional es nula ($E_r J_r = 0$), de característica inextensible, es decir con rigidez axial infinita ($E_r A_r \rightarrow \infty$), y con capacidad solo para resistir fuerzas de tracción. Estas consideraciones hacen que la fuerza actuante en la riostra sea tangente a ésta en cada punto de la misma.

Respuesta de la riostra en función de la coordenada espacial x

Los ejes cartesianos x y z definen el plano en el cual queda contenida la riostra. El eje horizontal queda definido por x y es considerado como la variable independiente, mientras que el eje vertical queda definido por z y resulta ser dependiente de x ($z = z(x)$). Con igual planteo al utilizado en [44], en la Figura 3.2 se observa un segmento inextensible de riostra el que se tomará como referencia para el desarrollo del problema.

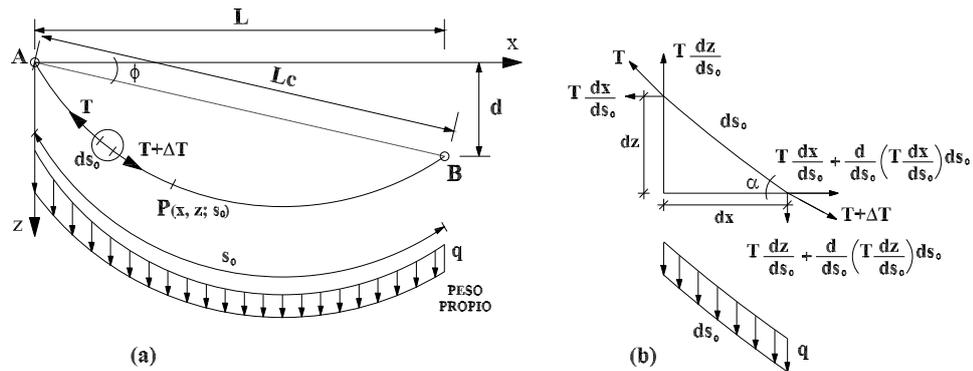


Figura 3.2: Segmento catenario inextensible

De acuerdo a la Figura 3.2, por equilibrio de las fuerzas horizontales actuantes en el segmento de riostra, resulta:

$$T \frac{dx}{ds_0} + \frac{d}{ds_0} \left(T \frac{dx}{ds_0} \right) ds_0 - T \frac{dx}{ds_0} = 0 \quad (3.1)$$

y con ello se tiene:

$$\frac{d}{ds_0} \left(T \frac{dx}{ds_0} \right) = 0 \quad (3.2)$$

por lo que la componente horizontal de la fuerza de tracción resulta invariable en cada punto de la riostra, dado que la misma no está sujeta a cargas horizontales externas.

En cuanto al equilibrio de las fuerzas verticales, resulta:

$$T \frac{dz}{ds_0} + \frac{d}{ds_0} \left(T \frac{dz}{ds_0} \right) ds_0 - T \frac{dz}{ds_0} + q ds_0 = 0 \quad (3.3)$$

con lo cual:

$$\frac{d}{ds_0} \left(T \frac{dz}{ds_0} \right) = -q \quad (3.4)$$

en donde se observa que la componente vertical de la fuerza de tracción es variable en cada punto de la riostra.

Por relaciones trigonométricas resulta:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds_o} \rightarrow T \frac{dx}{ds_o} = T \cos\alpha = H \quad (3.5)$$

$$\sin\alpha = \frac{dz}{ds_o} \rightarrow T \frac{dz}{ds_o} = T \sin\alpha = V \quad (3.6)$$

$$\tan\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{V}{H} \quad (3.7)$$

con lo que se tiene que al reemplazar en (3.2 y 3.4):

$$\frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dx}{ds_o} \right) = \frac{dH}{ds_o} = 0 \rightarrow H = H_A \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dz}{ds_o} \right) = \frac{dV}{ds_o} = -q \quad (3.9)$$

y en donde

$$\tan\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{V}{H_A} \quad (3.10)$$

Despejando ahora dV de (3.9) y V de (3.10) y derivando respectivamente respecto de x , resulta la siguiente igualdad:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \left(H_A \frac{dz}{dx} \right) = -q \frac{ds_o}{dx} \quad (3.11)$$

Derivando a esta última ecuación respecto de x , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$H_A \frac{d^2z}{dx^2} = -q \frac{ds_o}{dx} \quad (3.12)$$

Por relación pitagórica resulta:

$$\left(\frac{dx}{ds_o} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_o} \right)^2 = 1 \quad (3.13)$$

De (3.12 y 3.13), se obtiene la ecuación diferencial conocida como ecuación de la *catenaria*:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{q}{H_A} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

y luego integrando se obtiene la solución de la *catenaria* inextensible, permitiendo definir la configuración geométrica adquirida por una riostra inextensible sujeta a su propio peso.

A fin de facilitar el proceso de integración de la ecuación (3.14), se introduce ahora una variable auxiliar u :

$$u = \frac{dz}{dx} \quad (3.15)$$

resulta entonces que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} \quad (3.16)$$

y haciendo un cambio de variables en (3.14), se obtiene:

$$-\frac{H_A}{q} \frac{du}{(1+u^2)^{1/2}} = dx \quad (3.17)$$

con lo que integrando ahora a (3.17):

$$-\frac{H_A}{q} \int_0^u \frac{du}{(1+u^2)^{1/2}} = \int_0^x dx = -\frac{H_A}{q} \operatorname{argsinh}(u) + C_1 = x \quad (3.18)$$

$$\operatorname{argsinh}(u) = -\frac{q}{H_A}(x - C_1) \quad (3.19)$$

$$u = \sinh\left[\frac{q}{H_A}(C_1 - x)\right] = \frac{dz}{dx} \quad (3.20)$$

de (3.20):

$$dz = u dx = \sinh\left[\frac{q}{H_A}(C_1 - x)\right] dx \quad (3.21)$$

e integrando a esta última se tiene:

$$\int_0^z dz = \int_0^x \sinh\left[\frac{q}{H_A}(C_1 - x)\right] dx \quad (3.22)$$

$$z = -\frac{H_A}{q} \cosh\left[\frac{q}{H_A}(C_1 - x)\right] + C_2 \quad (3.23)$$

en donde las constantes C_1 y C_2 del proceso de integración, son determinadas a partir de las condiciones de borde del problema.

Para el caso general de una riostra colgando de sus extremos y ubicados a distinto nivel (ver Fig. 3.2), en sus bordes se tiene que en $x = 0$, $z = 0$ y en $x = L$, $z = d$, con lo cual la solución de (3.23) es:

$$z_{(x)} = \frac{H_A}{q} \left\{ \cosh(\gamma + \beta) - \cosh\left[\gamma + \beta\left(1 - \frac{2x}{L}\right)\right] \right\} \quad (3.24)$$

donde se ha definido como:

$$\beta = \frac{qL}{2H_A} \quad (3.25)$$

$$\gamma = \sinh^{-1} \left(\tan\phi \frac{\beta}{\sinh\beta} \right) \quad (3.26)$$

La ecuación (3.24) resulta ser la ecuación de la *catenaria* para el caso de una riostra inextensible. Se observa que el perfil que adquiere la misma depende del peso propio de ésta, de la componente horizontal de tracción, y del grado de inclinación ϕ de la cuerda L_c .

La flecha de la riostra (ver Fig. 3.3) a la que definimos como z , está constituida por una distancia vertical d_1 que va desde la longitud de arco hasta la cuerda, y por una distancia vertical $x \tan\phi$ que va desde la cuerda a la proyección de ésta sobre la horizontal:

$$z(x) = x \tan\phi + d_1 \quad (3.27)$$

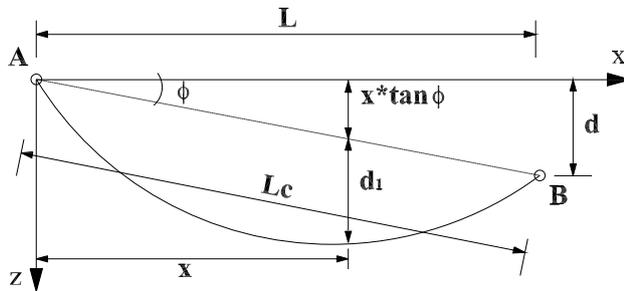


Figura 3.3: Flecha de la riostra

Se define a la relación de flecha f , como la relación existente entre d_1 y L evaluada a la mitad de la luz del vano, es decir en $x = \frac{L}{2}$. Este parámetro permite establecer que tan tensa o floja se encuentra la riostra. Por lo tanto:

$$f = \frac{d_1}{L} = \frac{z(\frac{L}{2}) - \frac{L}{2} \tan\phi}{L} = \frac{1}{2\beta} \left[\cosh(\gamma + \beta) - \cosh\gamma \right] - \frac{1}{2} \tan\phi \quad (3.28)$$

mientras que la pendiente de la riostra en cada punto, $u = \frac{dz}{dx}$, se expresa como:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{H_A}{q} \left(-\frac{2\beta}{L} \right) \left\{ -\sinh \left[\gamma + \beta \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right] \right\} = \sinh \left[\gamma + \beta \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right] \quad (3.29)$$

pudiéndose determinar la fuerza de tracción T actuante en cualquier punto de la riostra, así como también, a su componente vertical V :

$$V_{(x)} = H_A \frac{dz}{dx} = H_A \sinh \left[\gamma + \beta \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right] \quad (3.30)$$

$$T_{(x)} = \left(H_A^2 + V^2 \right)^{1/2} = H_A \left\{ 1 + \sinh^2 \left[\gamma + \beta \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (3.31)$$

y en donde por una conocida identidad trigonométrica (3.31) puede se expresada como:

$$T_{(x)} = H_A \cosh \left[\gamma + \beta \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right] \quad (3.32)$$

La longitud de arco de este perfil *catenario* resulta de integrar a (3.9) entre los límites dados por el apoyo A y un punto cualquiera de la riostra:

$$\int_{V_A}^V dV = -q \int_0^{s_o} ds_o = V - V_A = -qs_o \quad (3.33)$$

$$s_o = \frac{V_A - V}{q} \quad (3.34)$$

La longitud de arco total se da cuando el punto arbitrario se encuentra en el apoyo B , es decir en $x = L$, en donde $V = V_B$:

$$S_o = \frac{V_A - V_B}{q} \quad (3.35)$$

$$V_B = H_A \sinh \left[\gamma + \beta \left(1 - \frac{2L}{L} \right) \right] = H_A \sinh(\gamma - \beta) \quad (3.36)$$

con lo cual para el caso general de una riostra inclinada e inextensible, la longitud de arco total resulta:

$$S_o = \frac{H_A}{q} \left[\sinh(\gamma + \beta) - \sinh(\gamma - \beta) \right] \quad (3.37)$$

La solución de esta ecuación trascendental (no-lineal), conociendo la longitud inextensible de la riostra S_o , nos permite encontrar numéricamente los valores de H_A . Para la resolución numérica de esta ecuación no-lineal, se puede recurrir al esquema dado por el método de Newton-Raphson, siendo este uno de los más ampliamente utilizados [6]. Con dicho método se halla el valor solución de H_A , y por sustitución de este valor, obtener la configuración geométrica de equilibrio y la respuesta estructural en términos de tracción, para una riostra inextensible sujeta a su propio peso.

Respuesta de la riostra en función de la coordenada material s_o

Otra forma de hallar la respuesta de la riostra es en función de la coordenada material s_o . En un punto cualquiera de ésta, se tiene que el valor de la componente vertical de tracción se puede deducir a partir de (3.34), resultando:

$$V(s_o) = V_A - qs_o \quad (3.38)$$

y por (3.31) la fuerza de tracción en un punto tangente cualquiera, resulta entonces:

$$T(s_o) = \left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2} \quad (3.39)$$

Sabemos que:

$$\frac{dx}{ds_o} = \frac{H_A}{T(s_o)} = \frac{H_A}{\left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.40)$$

$$\frac{dz}{ds_o} = \frac{V}{T(s_o)} = \frac{V_A - qs_o}{\left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.41)$$

Integrando a (3.40 y 3.41):

$$\int_o^x dx = \int_o^{s_o} \frac{H_A}{\left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2}} ds_o \quad (3.42)$$

$$\int_o^z dz = \int_o^{s_o} \frac{V_A - qs_o}{\left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2}} ds_o \quad (3.43)$$

con lo que las coordenadas espaciales en función de la coordenada material, resultan:

$$x(s_o) = \frac{H_A}{q} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V_A}{H_A} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V_A - qs_o}{H_A} \right) \right] \quad (3.44)$$

$$z(s_o) = \frac{H_A}{q} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V_A}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V_A - qs_o}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.45)$$

siendo éste, un sistema de dos ecuaciones no-lineales, una trascendental y otra algebraica, cuya solución permite encontrar las coordenadas cartesianas de cada punto, las que definen la configuración geométrica de equilibrio alcanzada por la riostra inextensible cuando se encuentra sujeta a su propio peso. De igual manera al caso anterior, la solución numérica a este sistema de ecuaciones puede hallarse mediante la aplicación del método de Newton-Raphson, encontrando así los valores de H_A y V_A , y con ello la respuesta de la riostra.

3.2.2 Perfil parabólico para la riostra inextensible

Cuando una riostra perfectamente flexible se encuentra colgando de sus extremos, de la cual se ignora su peso propio y está sujeta a una carga uniformemente distribuida a lo largo de la proyección horizontal de la cuerda, la misma adquiere una configuración de equilibrio estático, describiendo así un perfil o curva parabólica. Nuevamente para el análisis, se asume que la riostra presenta $E_r J_r = 0$, $E_r A_r \rightarrow \infty$, y capacidad solo para resistir fuerzas de tracción.

En la Figura 3.4 se observa un segmento inextensible de riostra el que se tomará como referencia para el desarrollo del problema.

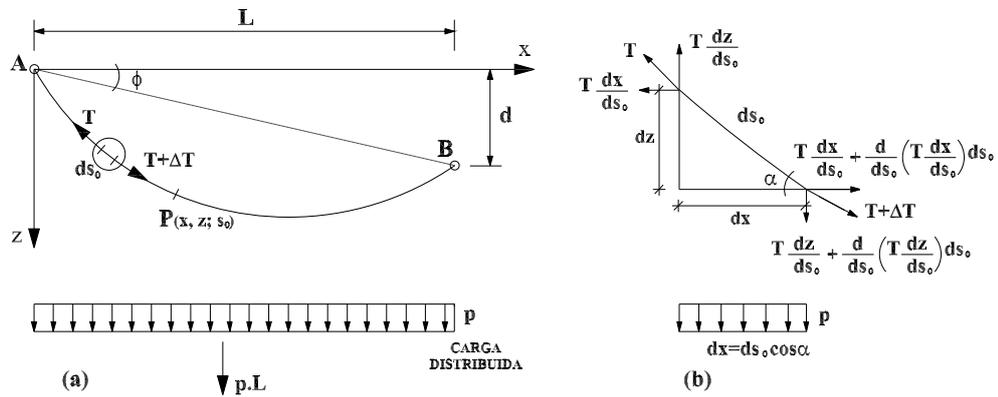


Figura 3.4: Segmento parabólico inextensible

A partir del equilibrio entre las fuerzas horizontales, se tiene:

$$T \frac{dx}{ds_o} + \frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dx}{ds_o} \right) ds_o - T \frac{dx}{ds_o} = 0 \quad (3.46)$$

resultando:

$$\frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dx}{ds_o} \right) = 0 \quad (3.47)$$

mientras que del equilibrio de las fuerzas verticales, se tiene:

$$T \frac{dz}{ds_o} + \frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dz}{ds_o} \right) ds_o - T \frac{dz}{ds_o} + p ds_o \cos \alpha = 0 \quad (3.48)$$

y con ello:

$$\frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dz}{ds_o} \right) = -p \cos \alpha \quad (3.49)$$

A partir de las relaciones trigonométricas indicadas en (3.5, 3.6 y 3.7) y reemplazando en (3.47 y 3.49), resulta que:

$$\frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dx}{ds_o} \right) = \frac{dH}{ds_o} = 0 \rightarrow H = H_A \quad (3.50)$$

$$\frac{d}{ds_o} \left(T \frac{dz}{ds_o} \right) = \frac{dV}{ds_o} = -p \frac{dx}{ds_o} \rightarrow \frac{dV}{dx} = -p \quad (3.51)$$

Integrando ahora a (3.51), se determina la componente vertical de tracción en un punto cualquiera de la riostra:

$$\int_{V_A}^V dV = \int_0^x -p dx = V - V_A = -px \quad (3.52)$$

$$V(x) = V_A - px \quad (3.53)$$

y luego reemplazando en la relación trigonométrica dada en (3.10), resulta:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{V_A - px}{H_A} \quad (3.54)$$

siendo esta ecuación conocida como la ecuación diferencial de la parábola. Al integrarla, resulta:

$$z(x) = \frac{x}{H_A} \left(V_A - \frac{px}{2} \right) + C_1 \quad (3.55)$$

y en donde su solución permite hallar la coordenada z (variación parabólica), la cual describe la posición de cada punto de la riostra en la configuración de equilibrio, cuando ésta se encuentra sujeta a una carga distribuida sobre la proyección horizontal de la cuerda. La constante C_1 que resulta del proceso de integración, es determinada a partir de las condiciones de borde del problema.

Para el caso general de una riostra libre de peso propio, colgando de sus extremos y ubicados estos a distinto nivel (ver Fig. 3.4), y siendo en sus bordes que en $x = 0$, $z = 0$ y que en $x = L$, $z = d = L \tan \phi$, resulta que:

$$\tan \phi = \frac{1}{H_A} \left(V_A - \frac{pL}{2} \right) \quad (3.56)$$

de donde se obtiene que la componente vertical de tracción en el apoyo A vale:

$$V_A = H_A \tan \phi + \frac{pL}{2} \quad (3.57)$$

De este modo, para una coordenada cualquiera x , el valor de V resulta:

$$V(x) = H_A \tan\phi + \frac{pL}{2} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \quad (3.58)$$

en tanto que la variación de la flecha z (variación parabólica) para una coordenada cualquiera x , resulta:

$$z(x) = x \tan\phi + \frac{px}{2H_A}(L - x) = x \tan\phi + d_1 \quad (3.59)$$

Nuevamente se observa que la flecha z está constituida por dos distancias verticales, una desde la horizontal a la cuerda, $x \tan\phi$, y la otra desde la cuerda a la riostra, llamada d_1 . La relación de flecha f , la cual es definida en $x = \frac{L}{2}$, resulta:

$$f_{(\frac{L}{2})} = \frac{d_1}{L} = \frac{pL}{8H_A} \quad (3.60)$$

Por lo tanto la fuerza de tracción actuante en un punto tangente cualquiera vale:

$$T(x) = \left(H_A^2 + V^2(x)\right)^{1/2} = H_A \left\{1 + \left[\tan\phi + \frac{pL}{2H_A} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)\right]^2\right\}^{1/2} \quad (3.61)$$

En cuanto a la longitud de arco total de este perfil parabólico que describe la riostra, resulta de relación pitagórica:

$$ds_o^2 = dx^2 + dz^2 \quad (3.62)$$

$$ds_o = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx \quad (3.63)$$

Derivando a (3.64):

$$\frac{dz}{dx} = \tan\phi + \frac{pL}{2H_A} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \quad (3.64)$$

y haciendo un cambio de variable para facilitar el proceso de integración:

$$\frac{dz}{dx} = u \quad (3.65)$$

se tiene que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{p}{H_A} \quad (3.66)$$

Integrando ahora a (3.68) con el cambio de variable propuesto, resulta:

$$\int_o^{s_o} ds_o = -\frac{H_A}{p} \int_{u_A}^{u_o} (1 + u^2)^{1/2} du \quad (3.67)$$

$$s_o = \frac{H_A}{2p} \left\{ u_A(1 + u_A^2)^{1/2} - u_o(1 + u_o^2)^{1/2} + \ln \left[\frac{u_A + (1 + u_A^2)^{1/2}}{u_o + (1 + u_o^2)^{1/2}} \right] \right\} \quad (3.68)$$

obteniendo así la longitud inextensible de un segmento de riostra que va desde el extremo A hasta un punto cualquiera x de la misma. En el extremo inicial A de la riostra, en donde $x = 0$, la pendiente vale:

$$u_A = \tan\phi + \frac{pL}{2H_A} \quad (3.69)$$

mientras que en un punto cualquiera resulta:

$$u_o = \tan\phi + \frac{pL}{2H_A} \left(1 - 2\frac{x}{L} \right) \quad (3.70)$$

La longitud de arco total adoptada por la riostra en su configuración parabólica de equilibrio se da cuando $x = L$, es decir cuando se ha alcanzado el extremo final B . En este caso la pendiente vale:

$$u_B = \tan\phi - \frac{pL}{2H_A} \quad (3.71)$$

Por lo tanto la longitud inextensible total resulta:

$$S_o = \frac{H_A}{2p} \left\{ u_A(1 + u_A^2)^{1/2} - u_B(1 + u_B^2)^{1/2} + \ln \left[\frac{u_A + (1 + u_A^2)^{1/2}}{u_B + (1 + u_B^2)^{1/2}} \right] \right\} \quad (3.72)$$

siendo esta última, una ecuación trascendental (no-lineal), la cual conociendo la longitud inextensible total de la riostra S_o , nos permite encontrar numéricamente los valores de H_A . Para la resolución numérica de ésta ecuación no-lineal, se puede recurrir al método de Newton-Raphson, y a partir del mismo hallar el valor solución de H_A , y por sustitución de éste valor, obtener la configuración geométrica de equilibrio y la respuesta estructural en términos de tracción, para una riostra inclinada sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre la proyección horizontal de la cuerda.

3.2.3 Perfil *catenaria* para la riostra extensible

En la realidad, una riostra no presenta una rigidez axial infinita, es decir que ésta resulta extensible cuando se la somete a un esfuerzo interno de tracción. Por lo tanto en el presente desarrollo se asume que la rigidez axial $E_r A_r$ tiene un valor finito.

Al mismo tiempo, asumiendo que el material que conforma la riostra satisface la Ley de Hooke, se tiene la relación entre la fuerza de tracción y la deformación axial específica:

$$T = E_r A_r \left(\frac{ds}{ds_o} - 1 \right) \quad (3.73)$$

y despejando la relación entre el elemento de arco extendido, ds (longitud diferencial de la riostra deformada), y el elemento de arco inicial, ds_o (longitud diferencial de la riostra no deformada), resulta lo que comúnmente se conoce como *stretching*:

$$\frac{ds}{ds_o} = 1 + \frac{T}{E_r A_r} \quad (3.74)$$

Debido a la conservación de la masa, el peso total del segmento de riostra extensible, qs_o , no es afectado por el alargamiento de ésta, resultando ahora que:

$$T \frac{dx}{ds} = H_A \quad (3.75)$$

$$T \frac{dz}{ds} = V_A - qs_o \quad (3.76)$$

Trabajando con (3.74, 3.75 y 3.76), se tiene que:

$$\frac{dx}{ds_o} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{ds_o} = \frac{H_A}{T} \left(1 + \frac{T}{E_r A_r} \right) \quad (3.77)$$

$$\frac{dz}{ds_o} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{ds_o} = \frac{V_A - qs_o}{T} \left(1 + \frac{T}{E_r A_r} \right) \quad (3.78)$$

Luego integrando a (3.77 y 3.78), se determinan las coordenadas cartesianas $x(s_o)$ y $z(s_o)$ en función de la longitud de arco s_o , correspondiente a la configuración de equilibrio alcanzada por la riostra en su condición inicial o no deformada. Por lo tanto:

$$\int_0^x dx = \int_0^{s_o} \frac{H_A}{E_r A_r} ds_o + \int_0^{s_o} \frac{H_A}{\left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2}} ds_o \quad (3.79)$$

en donde el segundo integrando de la derecha es igual a (3.42), por lo que la integración resulta:

$$x(s_o) = \frac{H_A}{E_r A_r} s_o + \frac{H_A}{q} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V_A}{H_A} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V_A - qs_o}{H_A} \right) \right] \quad (3.80)$$

Con un análisis equivalente para la determinación de $z(s_o)$, se tiene:

$$\int_o^z dz = \int_o^{s_o} \frac{V_A - qs_o}{E_r A_r} ds_o + \int_o^{s_o} \frac{(V_A - qs_o)}{\left[H_A^2 + (V_A - qs_o)^2 \right]^{1/2}} ds_o \quad (3.81)$$

en donde nuevamente el segundo integrando de la derecha ahora es igual a (3.43), por lo que la integración resulta:

$$z(s_o) = \frac{V_A}{E_r A_r} s_o \left(1 - \frac{qs_o}{2V_A} \right) + \frac{H_A}{q} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V_A}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V_A - qs_o}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.82)$$

El primer término ubicado a la derecha de (3.80 y 3.82) está asociado a la extensibilidad de la riostra (elasticidad), mientras que el segundo término es la solución correspondiente a la riostra bajo la condición de inextensible, por lo tanto, la solución está formada por una solución particular y una general. Nuevamente resulta en un sistema de dos ecuaciones no-lineales, una trascendental y otra algebraica, cuya solución permite encontrar las coordenadas cartesianas de cada punto, las cuales definen la configuración geométrica de equilibrio alcanzada por la riostra extensible cuando se encuentra sujeta a su propio peso. La solución numérica a este sistema de ecuaciones, al igual que en casos anteriores, puede hallarse mediante la aplicación del método de Newton-Raphson, encontrando así los valores de H_A y V_A y con ello la respuesta de la riostra.

En cuanto a la longitud de arco total de la riostra en la configuración deformada, S , la misma resulta del siguiente análisis:

$$ds = ds_o + \frac{T}{E_r A_r} ds_o \quad (3.83)$$

e integrando entre los límites dados por el extremo inicial A de la riostra y un punto cualquiera sobre ésta, habiendo reemplazando a $T(s_o)$ por (3.39), resulta:

$$\int_o^s ds = \int_o^{s_o} ds_o + \frac{H_A}{E_r A_r} \int_o^{s_o} \left[1 + \left(\frac{V_A - qs_o}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} ds_o \quad (3.84)$$

Haciendo un cambio de variable para facilitar el proceso de integración, se tiene:

$$u = \frac{V_A - qs_o}{H_A} \quad (3.85)$$

de donde al derivar:

$$\frac{du}{ds_o} = -\frac{q}{H_A} \quad (3.86)$$

Integrando ahora a (3.84) con el cambio de variable propuesto, resulta:

$$\int_o^s ds = \int_o^{s_o} ds_o - \frac{H_A}{q} \int_{u_A}^{u_o} (1 + u^2)^{1/2} du \quad (3.87)$$

$$s = s_o + \frac{H_A}{2q} \left\{ u_A(1 + u_A^2)^{1/2} - u_o(1 + u_o^2)^{1/2} + \ln \left[\frac{u_A + (1 + u_A^2)^{1/2}}{u_o + (1 + u_o^2)^{1/2}} \right] \right\} \quad (3.88)$$

siendo esta última ecuación la que define la longitud deformada de un segmento de riostra extensible, que va desde el extremo A hasta un punto cualquiera x de la misma. En el extremo inicial A de la riostra, $x = 0$, con lo cual la pendiente vale:

$$u_A = \frac{V_A}{H_A} \quad (3.89)$$

mientras que en un punto cualquiera de ésta resulta:

$$u_o = \frac{V_A - qs_o}{H_A} \quad (3.90)$$

Para el extremo final B de la riostra, la longitud inicial de la misma resulta $s_o = S_o$, y en este caso $u_o = u_B$ y vale:

$$u_B = \frac{V_A - qS_o}{H_A} \quad (3.91)$$

Por lo tanto la longitud de arco total adoptada por el perfil *catenaria* de la riostra, en su configuración deformada de equilibrio, queda definida como:

$$S = S_o + \frac{H_A}{2q} \left\{ u_A(1 + u_A^2)^{1/2} - u_B(1 + u_B^2)^{1/2} + \ln \left[\frac{u_A + (1 + u_A^2)^{1/2}}{u_B + (1 + u_B^2)^{1/2}} \right] \right\} \quad (3.92)$$

resultando ser (3.92) una ecuación trascendental (no-lineal), en donde conociendo la longitud inicial de la riostra S_o , y los valores numéricamente determinados de H_A y V_A , nos permite hallar la longitud extendida o deformada S de la misma.

3.2.4 Perfil parabólico para la riostra extensible

Bajo las mismas consideraciones de extensibilidad mencionadas en el punto anterior, se aborda el tratamiento de la riostra extensible sujeta a una carga uniforme distribuida sobre la proyección horizontal de su cuerda. Siendo entonces:

$$T = E_r A_r \left(\frac{ds}{ds_o} - 1 \right) \quad (3.93)$$

despejando y diferenciando respecto de x , resulta:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds_o}{dx} \left(1 + \frac{T}{E_r A_r} \right) = \frac{T}{H_A} \quad (3.94)$$

y debido a que $\frac{T}{E_r A_o} \ll 1$, se puede aceptar la siguiente aproximación al escribir que:

$$\frac{ds_o}{dx} \approx \left(1 - \frac{T}{E_r A_r} \right) \frac{T}{H_A} \quad (3.95)$$

Reemplazando a T por (3.66) e integrando, se tiene:

$$S_o = \frac{H_A}{2p} \left\{ u_A(1 + u_A^2)^{1/2} - u_B(1 + u_B^2)^{1/2} + \ln \left[\frac{u_A + (1 + u_A^2)^{1/2}}{u_B + (1 + u_B^2)^{1/2}} \right] \right\} + \frac{2H_A}{E_r A_r} \left[(u_B - u_A) + \frac{1}{3}(u_B^3 - u_A^3) \right] \quad (3.96)$$

resultando ser (3.96) una ecuación trascendental (no-lineal), de la cual conociendo la longitud total inicial S_o de la riostra extensible, permite encontrar numéricamente los valores de H_A . Nuevamente y al igual que para los casos anteriores, se puede recurrir al método de Newton-Raphson para hallar la solución de dicha ecuación.

3.2.5 Análisis de una riostra tensa con un extremo desplazable

En los sistemas estructurales mástil-riostras, las riostras se encuentran con una pretensión dada en el montaje tal que hace que las mismas presenten una flecha pequeña. Estas riostras tienen un extremo fijo anclado a la estructura de fundación, mientras que el extremo vinculado al mástil tiene la posibilidad de desplazarse. Por ello se analiza, mediante un desarrollo original, el comportamiento de una riostra suspendida de sus extremos pero con la posibilidad de desplazamiento de uno de ellos, determinándose el esfuerzo adicional de tracción generado en la misma frente a un desplazamiento de dicho extremo, así como también, determinándose su rigidez axial estática. Cabe destacar que mediante desarrollos distintos a los llevados a cabo en esta sección, también ha sido obtenida con anterioridad tanto por Irvine [37] como por Ren *et al* [59] la expresión que define la rigidez estática de la riostra, en tanto que Preidikman *et al* [58] sólo indican la expresión correspondiente pero sin abordarse los desarrollos conducentes a la misma.

En el presente desarrollo se considera una riostra inclinada (ver Fig. 3.5) de sección transversal A_r y densidad del material ρ_r ($m = \rho_r A_r$), que cuelga de sus extremos, uno de ellos desplazable, los cuales se encuentran a diferentes alturas haciendo que la cuerda presente una cierta inclinación ϕ respecto de la horizontal. Se define a x como el eje horizontal, y a z como el eje vertical en el sistema de coordenadas globales, mientras que se define a x^* y a z^* como los ejes en el sistema de coordenadas locales, el cual dada su conveniencia será utilizado para la obtención de las ecuaciones de equilibrio estático. Para el presente análisis se acepta que la riostra presenta una flecha pequeña, tal que la relación de flecha resulta menor a $1/8$, lo que permite la representación del perfil de la misma mediante la aproximación dada por el modelo parabólico.

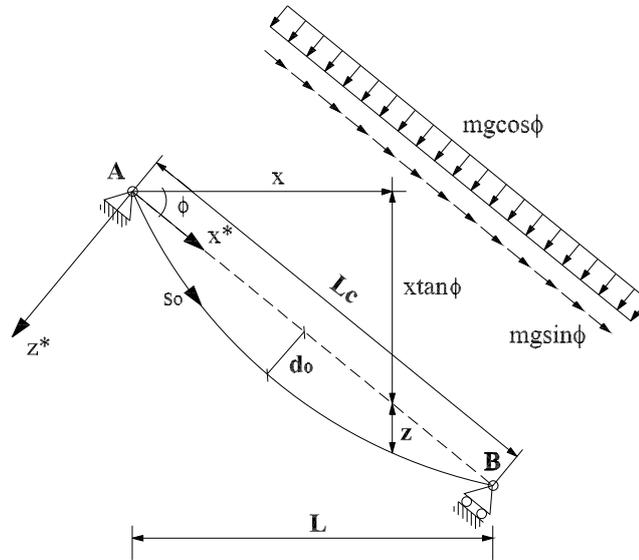


Figura 3.5: Geometría de la riostra tensa con un extremo desplazable

En la Figura 3.6 se presenta un segmento diferencial de riostra tanto en la configuración inicial (previo al desplazamiento del extremo), como en la configuración desplazada. Del equilibrio de fuerzas actuantes en la configuración inicial, resulta:

$$\frac{d}{ds_o} \left(T_o \frac{dx^*}{ds_o} \right) = -mg \sin \phi \quad (3.97)$$

$$\frac{d}{ds_o} \left(T_o \frac{dz^*}{ds_o} \right) = -mg \cos \phi \quad (3.98)$$

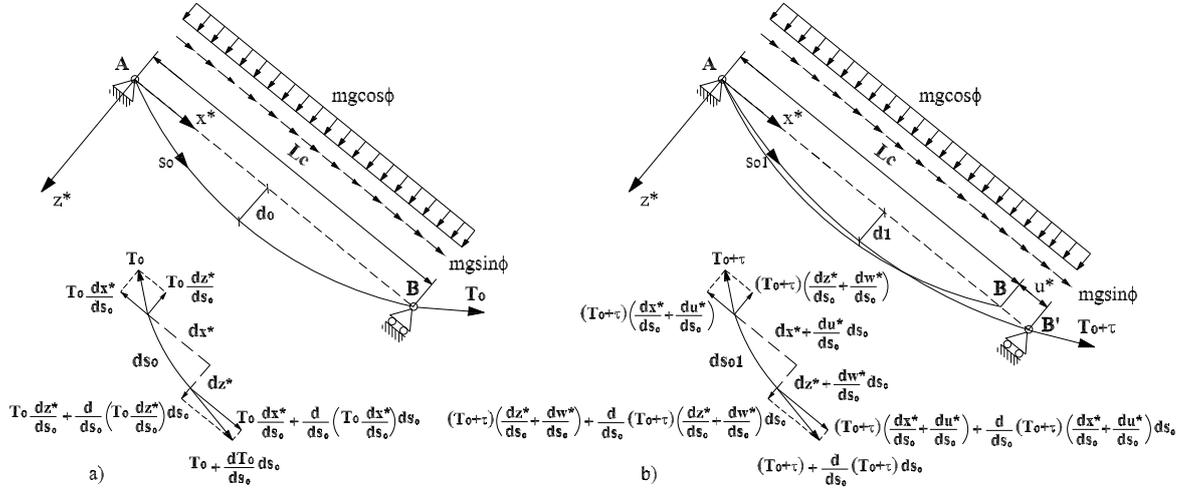


Figura 3.6: Segmento diferencial. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada

mientras que una vez desplazado el extremo móvil de la riostra, del equilibrio de fuerzas en dicha configuración se obtiene:

$$\frac{d}{ds_0} \left[(T_0 + \tau) \left(\frac{dx^*}{ds_0} + \frac{\partial u^*}{\partial s_0} \right) \right] = -mg \sin \phi \quad (3.99)$$

$$\frac{d}{ds_0} \left[(T_0 + \tau) \left(\frac{dz^*}{ds_0} + \frac{\partial w^*}{\partial s_0} \right) \right] = -mg \cos \phi \quad (3.100)$$

siendo τ la variación del esfuerzo de tracción en la riostra debido al desplazamiento del extremo móvil de la misma. Reemplazando ahora (3.97 y 3.98) en (3.99 y 3.100), resulta:

$$\frac{d}{ds_0} \left[\tau \frac{dx^*}{ds_0} + (T_0 + \tau) \frac{\partial u^*}{\partial s_0} \right] = 0 \quad (3.101)$$

$$\frac{d}{ds_0} \left[\tau \frac{dz^*}{ds_0} + (T_0 + \tau) \frac{\partial w^*}{\partial s_0} \right] = 0 \quad (3.102)$$

siendo estas últimas ecuaciones diferenciales las que gobiernan el equilibrio estático, referido a los ejes locales, de una riostra sujeta a un desplazamiento en su extremo móvil.

La proyección de la fuerza tangente a la riostra respecto al eje local x^* , resulta:

$$H_o^* = T_0 \frac{dx^*}{ds_0} \quad (3.103)$$

$$h^* = \tau \frac{dx^*}{ds_o} \quad (3.104)$$

y reemplazando estas últimas ecuaciones en (3.101 y 3.102), se obtienen las ecuaciones gobernantes del equilibrio con respecto a la fuerza de tracción proyectada sobre el eje x^* .

$$\frac{d}{ds_o} \left[h^* + (H_o^* + h^*) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right] = 0 \quad (3.105)$$

$$\frac{d}{ds_o} \left[h^* \frac{dz^*}{dx^*} + (H_o^* + h^*) \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right] = 0 \quad (3.106)$$

En cuanto a la longitud del segmento diferencial de riostra en la configuración inicial, resulta:

$$ds_o^2 = (dx^*)^2 + (dz^*)^2 \quad (3.107)$$

mientras que una vez desplazado el extremo móvil de la riostra, la longitud del segmento diferencial en dicha configuración resulta:

$$ds_{o1}^2 = (dx^* + du^*)^2 + (dz^* + dw^*)^2 \quad (3.108)$$

La deformación unitaria experimentada por el segmento diferencial de riostra al pasar de una configuración a la otra, resulta:

$$\varepsilon = \frac{ds_{o1} - ds_o}{ds_o} \quad (3.109)$$

de donde se tiene que:

$$ds_{o1} = ds_o(1 + \varepsilon) \quad (3.110)$$

Relacionando ahora ds_{o1} con ds_o del siguiente modo [48] y reemplazando por (3.107, 3.108 y 3.110):

$$\frac{ds_{o1}^2 - ds_o^2}{ds_o^2} = 2\varepsilon + \varepsilon^2 = 2 \left(\frac{dx^*}{ds_o} \frac{\partial u^*}{\partial s_o} + \frac{dz^*}{ds_o} \frac{\partial w^*}{\partial s_o} \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial s_o} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial s_o} \right)^2 \quad (3.111)$$

y asumiendo como hipótesis que se está en el campo de las pequeñas deformaciones, se puede prescindir de los términos cuadráticos. La deformación específica queda así expresada en función de las componentes de la longitud del segmento de riostra respecto a los ejes locales x^* y z^* :

$$\varepsilon = \frac{dx^*}{ds_o} \frac{\partial u^*}{\partial s_o} + \frac{dz^*}{ds_o} \frac{\partial w^*}{\partial s_o} \quad (3.112)$$

Aplicando la ley de Hooke, se determina que:

$$\tau = \varepsilon E_r A_r = E_r A_r \left(\frac{dx^*}{ds_o} \frac{\partial u^*}{\partial s_o} + \frac{dz^*}{ds_o} \frac{\partial w^*}{\partial s_o} \right) \quad (3.113)$$

en donde esta ecuación define la relación linealizada entre la variación del esfuerzo de tracción y la deformación experimentada por el segmento de riostra.

Reemplazando ahora a τ por su proyección sobre el eje local x^* y desarrollando, se obtiene:

$$\frac{h^*}{E_r A_r} \left(\frac{ds_o}{dx^*} \right)^3 = \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{dz^*}{dx^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \quad (3.114)$$

la cual representa la extensibilidad experimentada por el segmento de riostra al cambiar de configuración, en tanto que al integrar en el dominio de la cuerda, se obtiene la extensibilidad total experimentada ahora por la riostra. Dado que h^* y $E_r A_r$ permanecen invariables a lo largo de la misma, resulta:

$$\frac{h^*}{E_r A_r} \int_0^{L_c} \left(\frac{ds_o}{dx^*} \right)^3 dx^* = \int_0^{L_c} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} dx^* + \int_0^{L_c} \frac{dz^*}{dx^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} dx^* \quad (3.115)$$

El integrando ubicado a la izquierda de la ecuación resulta ser la longitud efectiva de la riostra (llamada también S_o), y que para el caso de riostras tensas se demuestra que vale:

$$L_e = \int_0^{L_c} \left(\frac{ds_o}{dx^*} \right)^3 dx^* \approx L_c \left[1 + 8 \left(\frac{mg \cos \phi L_c}{H^*} \right)^2 \right] \quad (3.116)$$

en tanto que la integración del primer integrando ubicado a la derecha de (3.115), resulta:

$$\int_0^{L_c} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} dx^* = \int_{u(0)^*}^{u(L_c)^*} \partial u^* = u(L_c)^* - u(0)^* \quad (3.117)$$

el cual representa los desplazamientos de los extremos de la riostra en la dirección de x^* .

De la integración por partes del segundo integrando ubicado a la derecha de (3.115), se tiene:

$$\int_0^{L_c} \frac{dz^*}{dx^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} dx^* = - \int_0^{L_c} \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} w^* dx^* + \frac{dz^*}{dx^*(L_c)} w(L_c)^* - \frac{dz^*}{dx^*(0)} w(0)^* \quad (3.118)$$

donde los dos últimos términos, resultan ser términos en el contorno que naturalmente quedan incorporados debidos al proceso de integración. Del análisis del perfil parabólico para la riostra (sección 3.2.2) surge que:

$$\frac{dz^*}{dx^*} = \frac{V^*(x^*)}{H_o^*} \quad (3.119)$$

$$\frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} = -\frac{mg \cos \phi}{H_o^*} \quad (3.120)$$

y dado que:

$$V^*(x^*) = \frac{mg \cos \phi L_c}{2} \left(1 - 2\frac{x^*}{L_c}\right) \quad (3.121)$$

resulta que en $x^* = 0$ y en $x^* = L_c$ se tiene:

$$V^*(0) = \frac{mg \cos \phi L_c}{2} \quad (3.122)$$

$$V^*(L_c) = -\frac{mg \cos \phi L_c}{2} \quad (3.123)$$

Por lo tanto reemplazando (3.119, 3.120, 3.122 y 3.123) en (3.118):

$$\int_0^{L_c} \frac{dz^*}{dx^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} dx^* = \frac{mg \cos \phi}{H_o^*} \int_0^{L_c} w^* dx^* - \frac{mg \cos \phi L_c}{2H_o^*} (w(L_c)^* - w(0)^*) \quad (3.124)$$

con lo cual al reemplazar las ecuaciones (3.116, 3.117 y 3.124) en (3.115), se obtiene:

$$\frac{h^*}{E_r A_r} L_e = u(L_c)^* - u(0)^* + \frac{mg \cos \phi}{H_o^*} \int_0^{L_c} w^* dx^* - \frac{mg \cos \phi L_c}{2H_o^*} (w(L_c)^* - w(0)^*) \quad (3.125)$$

quedando por determinar la integral de w^* la cual representa la variación total del corrimiento transversal experimentado por la riostra. Para la resolución de dicha integral, se sigue un procedimiento distinto al abordado por Irvine [37].

Dada la condición de riostra tensa, resulta que $d_{s_o} \approx dx^*$, por lo que la ecuación (3.111) puede ser expresada como:

$$h^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + (H_o^* + h^*) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (3.126)$$

Prescindiendo del término de orden superior, $h^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}$ (producto de variaciones), se tiene:

$$h^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + H_o^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (3.127)$$

y reemplazando por (3.125):

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = h^* \frac{mg \cos \phi}{H_o^{*2}} \quad (3.128)$$

Escribiendo ahora la ecuación diferencial homogénea asociada, resulta:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (3.129)$$

y proponiendo la solución exponencial clásica para el corrimiento w^* incógnita:

$$w^{*c}(x^*) = We^{\lambda x^*} \quad (3.130)$$

en donde al reemplazar esta propuesta de solución en la ecuación (3.129), se tiene que:

$$\lambda^2 = 0 \quad ; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (3.131)$$

De este modo, la solución complementaria para el corrimiento w^* de la riostra resulta:

$$w^{*c}(x^*) = W_1 + W_2 x^* \quad (3.132)$$

y en donde las constantes W_1 y W_2 se determinan a partir de las condiciones de borde.

Como solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, se propone a:

$$w^{*p}(x^*) = \frac{mg \cos \phi}{2H_o^{*2}} h^* x^{*2} \quad (3.133)$$

con lo cual la solución general, suma de la complementaria más la particular, resulta:

$$w^*(x^*) = W_1 + W_2 x^* + \frac{mg \cos \phi}{2H_o^{*2}} h^* x^{*2} \quad (3.134)$$

De acuerdo a la Figura 3.7, las condiciones de borde resultan:

$$u^*(0) = 0 \quad ; \quad u^*(L_c) = u^* \quad (3.135)$$

$$w^*(0) = 0 \quad ; \quad w^*(L_c) = 0 \quad (3.136)$$

Por lo tanto:

$$w^*(0) = W_1 = 0 \quad ; \quad W_1 = 0 \quad (3.137)$$

$$w^*(L_c) = \frac{mg \cos \phi}{2H_o^{*2}} h^* L_c^2 + W_2 L_c = 0 \quad ; \quad W_2 = -\frac{mg \cos \phi}{2H_o^{*2}} h^* L_c \quad (3.138)$$

con lo que reemplazando (3.138 y 3.139) en (3.135) se obtiene como varía en el dominio de la riostra la variación del corrimiento transversal:

$$w^*(x^*) = \frac{mg \cos \phi}{2H_o^{*2}} h^* (x^{*2} - x^* L_c) \quad (3.139)$$

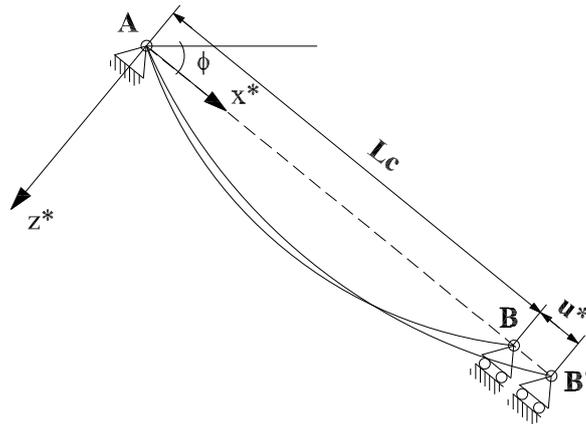


Figura 3.7: Extremo móvil desplazado

Integrando ahora a w^* a lo largo de la longitud de la cuerda de la riostra, se tiene:

$$\int_0^{L_c} w^*(x^*) dx^* = -\frac{mg \cos \phi}{12 H_o^{*2}} h^* L_c^3 \quad (3.140)$$

Reemplazando ahora esta última integración y las condiciones de borde (3.136 y 3.137) en la ecuación (3.125), y desarrollando, resulta:

$$h^* = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{12}} u^* \quad (3.141)$$

en donde se ha definido a:

$$\kappa^2 = \left(\frac{mg \cos \phi L_c}{H_o^*} \right)^2 \frac{E_r A_r L_c}{H_o^* L_e} \quad (3.142)$$

De este modo, se ha obtenido la variación del esfuerzo horizontal de tracción, h^* , debido al desplazamiento u^* del extremo móvil de la riostra. En cuanto a la rigidez estática de la riostra, ésta resulta de la relación entre el esfuerzo adicional de tracción y el desplazamiento del extremo móvil:

$$K_{est} = \frac{h^*}{u^*} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{12}} \quad (3.143)$$

Tanto el esfuerzo de tracción adicional, como la rigidez estática, dependen del comportamiento geoméricamente no-lineal de la riostra, dado a través del coeficiente κ^2 . El término $\frac{E_r A_r}{L_e}$, representa la rigidez elástica y lineal de la riostra, es decir, como si ésta se tratara de una biela trabajando en tracción.

Relación implícita carga-desplazamiento

En el presente análisis se aborda el desarrollo de los planteos matemáticos conducentes a la determinación de la relación carga-desplazamiento, destacando que dicha relación aparece citada en [45] y [58] pero sin indicarse los desarrollos para la obtención de la misma.

Como se ha dicho, para el caso de riostras tensas (relación de $f < 1/8$), el modelo parabólico resulta adecuado para la representación del comportamiento mecánico de la misma. En la Figura 3.8 se muestran los parámetros que definen a la riostra en sus dos configuraciones, la inicial y la desplazada, en tanto que la definición de estos parámetros en ambas configuraciones, a partir del modelo parabólico de representación, resultan:

$$f_o = \frac{d_o}{L_c} = \frac{Q_o}{8H_o^*} \quad (3.144)$$

$$S_o = L_e = L_c + \frac{8}{3}L_c \left(\frac{d_o}{L_c} \right)^2 \quad (3.145)$$

$$f_1 = \frac{d_1}{L_c + u^*} = \frac{Q_1}{8(H_o^* + h^*)} = \frac{Q_1}{8H_1^*} \quad (3.146)$$

$$S_{o1} = L_{e1} = (L_c + u^*) + \frac{8}{3}(L_c + u^*) \left[\frac{d_1}{(L_c + u^*)} \right]^2 \quad (3.147)$$

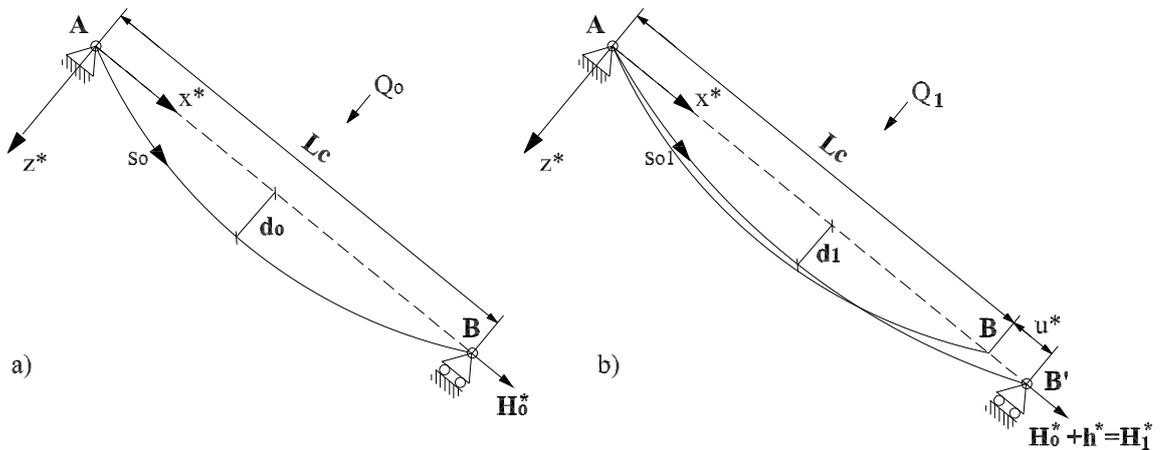


Figura 3.8: Modelo parabólico. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada

Q_o y Q_1 (respectivamente $p_o L_c$ y $p_1 L_c$) son las fuerzas totales y transversales a la riostra, actuando en cada una de las configuraciones. La relación de flecha f_o (o bien f_1) fue establecida en (3.60), en tanto que la expresión de la longitud efectiva o total de la riostra S_o (o bien S_{o1}) surge de resolver la ecuación (3.67) como a continuación se desarrolla: Dado que se han considerado como ejes de referencias a los ejes locales x^* y z^* , la inclinación de la riostra respecto a este sistema de referencia es $\phi = 0^\circ$, y siendo además que para este caso resulta que $pL = Q_o$ y que $H_A = H_o^*$, con lo que reemplazando (3.144) en (3.72):

$$\frac{S_o}{L_c} = \frac{1}{16f_o} \left\{ 8f_o [1 + (4f_o)^2]^{1/2} + \ln \frac{[1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 4f_o}{[1 + (4f_o)^2]^{1/2} - 4f_o} \right\} \quad (3.148)$$

El logaritmo natural del cociente puede ser también expresado como:

$$\ln \frac{[1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 4f_o}{[1 + (4f_o)^2]^{1/2} - 4f_o} = \ln \left\{ [1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 4f_o \right\}^2 \quad (3.149)$$

Desarrollando el argumento del logaritmo, resulta:

$$\ln \left\{ [1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 4f_o \right\}^2 = \ln \left\{ 1 + 2(4f_o) [1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 2(4f_o)^2 \right\} \quad (3.150)$$

La raíz del argumento del logaritmo puede ser expresada mediante expansión binomial, y dado que se aceptó que la relación de flecha es pequeña ($< 1/8$), resulta entonces:

$$[1 + (4f_o)^2]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(4f_o)^2 - \frac{1}{8}(4f_o)^4 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2}(4f_o)^2 \quad (3.151)$$

en donde reemplazando en (3.150), se obtiene:

$$\ln \left\{ [1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 4f_o \right\}^2 \approx \ln \left\{ 1 + 2(4f_o) + 2(4f_o)^2 + (4f_o)^3 \right\} \quad (3.152)$$

Incorporando la variable auxiliar $v = 2(4f_o) + 2(4f_o)^2 + (4f_o)^3$ y desarrollando el argumento del logaritmo mediante serie de Taylor, resulta:

$$\ln(1 + v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \dots \quad (3.153)$$

De este modo, reemplazando a v en (3.153) y reteniendo sólo hasta los términos cúbicos (por aceptar $f < 1/8$), se obtiene que:

$$\ln \frac{[1 + (4f_o)^2]^{1/2} + 4f_o}{[1 + (4f_o)^2]^{1/2} - 4f_o} \approx 2(4f_o) - \frac{1}{3}(4f_o)^3 \quad (3.154)$$

Reemplazando ahora (3.151 y 3.154) en (3.148) y desarrollando, resulta:

$$S_o = L_c \left(1 + \frac{8}{3} f_o^2 \right) \quad (3.155)$$

con lo cual se ha obtenido la relación dada por (3.116 y 3.145).

Continuando con la determinación de la relación carga-desplazamiento, al pasar la riostra desde la configuración inicial a la desplazada, se produce en la misma una deformación específica la cual está dada por:

$$\varepsilon = \frac{S_{o1} - S_o}{S_o} = \frac{\left(1 + \frac{u^*}{L_c}\right) \left(1 + \frac{Q_1^2}{24H_1^{*2}}\right)}{\left(1 + \frac{Q_o^2}{24H_o^{*2}}\right)} - 1 \quad (3.156)$$

en tanto que el desplazamiento producido en el extremo móvil da lugar a un esfuerzo adicional de tracción $h^* = H_1^* - H_o^*$, por lo que la tensión resulta:

$$\sigma = \frac{H_1^* - H_o^*}{A_r} = \varepsilon E_r \quad (3.157)$$

Reemplazando (3.156) en (3.157) y desarrollando, se obtiene:

$$H_1^{*3} \left(1 + \frac{Q_o^2}{24H_o^{*2}} \right) + H_1^{*2} \left[\frac{Q_o^2 E_r A_r}{24H_o^{*2}} - H_o^* \left(1 + \frac{Q_o^2}{24H_o^{*2}} \right) - \frac{E_r A_r}{L_c} u^* \right] - \frac{Q_1^2 E_r A_r}{24} \left(1 + \frac{u^*}{L_c} \right) = 0 \quad (3.158)$$

siendo esta última ecuación algebraica y de tercer orden en H_1^* , la que define la relación no-lineal entre la carga (H_1^*) y el desplazamiento (u^*) de la riostra para el modelo parabólico. Conociendo las condiciones iniciales sobre la riostra (H_o^*) y conociendo el desplazamiento producido (u^*), se determinan las raíces de la ecuación cúbica, siendo aquella real y positiva la que define el valor del esfuerzo H_1^* . Este último esfuerzo resulta ser el que da lugar a un nuevo estado tensional imperante en la riostra como consecuencia del desplazamiento experimentado por su extremo, y a partir del mismo, poder actualizar el valor de la rigidez estática de la riostra la cual resulta estar asociada a este nuevo estado tensional.

3.2.6 Simulación numérica

SAP2000 [62] presenta en su biblioteca un elemento finito tipo cable, siendo éste, un elemento altamente no-lineal usado para modelar el comportamiento *catenaria* de una

riostra esbelta sujeta a su propio peso. La formulación trae incorporada la rigidización axial debido a la pretensión actuante, así como también, los efectos causados por la presencia de grandes deflexiones. Ambos comportamientos resultan ser geoméricamente no-lineales, con lo que para la evaluación de la respuesta debe llevarse adelante un análisis del tipo no-lineal [62]. La formulación del elemento finito cable corresponde a la de la *catenaria* elástica (extensible). En cuanto a la discretización de la riostra para los ejemplos precedentes, se utilizaron 5 elementos finitos para la representación de la misma.

3.2.7 Solución para una riostra suspendida

Comparación de modelos

Se desarrollan dos ejemplos de una riostra suspendida de sus extremos, y sujeta a una carga distribuida (peso propio) sobre la longitud de arco, evaluándose la respuesta estática. Se comparan las respuestas analíticas obtenidas de las distintas alternativas de modelación desarrolladas, con las respuestas obtenidas de la simulación numérica mediante el uso de SAP2000. Para la solución numérica de las formulaciones, se aplicó el esquema de Newton-Raphson. Las diferencias entre los ejemplos presentados radica en que para el ejemplo 1 (E1) la riostra presenta una flecha importante ($f > \frac{1}{8}$), mientras que para el ejemplo 2 (E2) la riostra presenta una pequeña flecha ($f < \frac{1}{8}$) [37]. A su vez para cada ejemplo se consideraron apoyos a distinto nivel, $d = 0$ m (00), $d = 20$ m (20) y $d = 40$ m (40). Las características geométricas y mecánicas de la riostra se indican en Tabla 3.1.

Propiedad	E1-00	E1-20	E1-40	E2-00	E2-20	E2-40
A_r [m ²]	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
E_r [MPa]	150000	150000	150000	150000	150000	150000
S_o [m]	59.832	61.474	67.077	41.046	45.479	56.944
ρ_r [kg/m ³]	7850	7850	7850	7850	7850	7850
q [N/m]	100	100	100	100	100	100
L [m]	40	40	40	40	40	40
d [m]	0	20	40	0	20	40

Tabla 3.1: Propiedades de la riostra utilizadas para los ejemplos E1 y E2

Relación adimensional $s_o \setminus S_o$	<i>catenaria</i> inextensible z [m]	parábola inextensible z [m]	<i>catenaria</i> extensible z [m]	parábola extensible z [m]	simulación SAP2000 z [m]
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	5.432	5.296	5.432	5.296	5.432
0.2	10.572	10.366	10.573	10.366	10.573
0.3	15.160	15.025	15.160	15.025	15.162
0.4	18.629	18.796	18.629	18.796	18.631
0.5	19.999	20.444	20.000	20.444	20.002
0.6	18.629	18.796	18.629	18.796	18.631
0.7	15.160	15.025	15.160	15.025	15.162
0.8	10.572	10.366	10.573	10.366	10.573
0.9	5.432	5.296	5.432	5.296	5.432
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
T_A [N]	3241	2229	3241	2229	3240
$f_{(L \setminus 2)}$	0.500	0.511	0.500	0.511	0.500

Tabla 3.2: Parámetros de respuesta para el ejemplo E1-00

Relación adimensional $s_o \setminus S_o$	<i>catenaria</i> inextensible z [m]	parábola inextensible z [m]	<i>catenaria</i> extensible z [m]	parábola extensible z [m]	simulación SAP2000 z [m]
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	5.830	5.671	5.830	5.671	5.830
0.2	11.541	11.239	11.541	11.239	11.542
0.3	17.056	16.653	17.056	16.654	17.058
0.4	22.224	21.814	22.224	21.815	22.227
0.5	26.723	26.500	26.723	26.501	26.727
0.6	29.879	30.123	29.879	30.124	29.883
0.7	30.669	31.246	30.670	31.246	30.673
0.8	28.714	29.015	28.714	29.014	28.716
0.9	24.851	24.898	24.852	24.897	24.851
1.0	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000
T_A [N]	4367	3011	4367	3011	4365
$f_{(L \setminus 2)}$	0.500	0.501	0.500	0.501	0.500

Tabla 3.3: Parámetros de respuesta para el ejemplo E1-20

En Tablas 3.2 a 3.7 se muestran los resultados de los parámetros de respuesta, z y T_A , hallados para los dos ejemplos analizados (E1 y E2) y para las distintas modelaciones.

Relación adimensional $s_o \setminus S_o$	<i>catenaria</i> inextensible z [m]	parábola inextensible z [m]	<i>catenaria</i> extensible z [m]	parábola extensible z [m]	simulación SAP2000 z [m]
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	6.467	6.322	6.467	6.321	6.467
0.2	12.864	15.580	12.864	12.580	12.864
0.3	19.156	18.751	19.156	18.751	19.156
0.4	25.283	24.796	25.283	24.796	25.283
0.5	31.132	30.645	31.133	30.645	31.132
0.6	36.478	36.153	36.479	36.154	36.478
0.7	40.846	40.968	40.847	40.969	40.846
0.8	43.342	44.085	43.342	44.086	43.342
0.9	43.008	43.642	43.008	43.641	43.008
1.0	40.000	40.000	40.000	40.000	40.000
T_A [N]	5819	4552	5819	4552	5817
$f_{(L \setminus 2)}$	0.500	0.480	0.500	0.480	0.500

Tabla 3.4: Parámetros de respuesta para el ejemplo E1-40

Relación adimensional $s_o \setminus S_o$	<i>catenaria</i> inextensible z [m]	parábola inextensible z [m]	<i>catenaria</i> extensible z [m]	parábola extensible z [m]	simulación SAP2000 z [m]
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	1.405	1.398	1.405	1.398	1.405
0.2	2.523	2.519	2.525	2.519	2.523
0.3	3.337	3.339	3.339	3.340	3.337
0.4	3.832	3.840	3.834	3.841	3.832
0.5	3.998	4.008	4.000	4.010	3.998
0.6	3.832	3.840	3.834	3.841	3.832
0.7	3.337	3.339	3.339	3.340	3.337
0.8	2.523	2.519	2.525	2.519	2.523
0.9	1.405	1.398	1.405	1.398	1.405
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
T_A [N]	5474	5382	5471	5380	5469
$f_{(L \setminus 2)}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Tabla 3.5: Parámetros de respuesta para el ejemplo E2-00

Relación adimensional $s_o \setminus S_o$	<i>catenaria</i> inextensible z [m]	parábola inextensible z [m]	<i>catenaria</i> extensible z [m]	parábola extensible z [m]	simulación SAP2000 z [m]
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	3.012	2.985	3.013	2.977	3.012
0.2	5.860	5.822	5.861	5.808	5.859
0.3	8.523	8.489	8.525	8.473	8.522
0.4	10.979	10.961	10.982	10.945	10.978
0.5	13.204	13.211	13.207	13.198	13.203
0.6	15.173	15.208	15.175	15.198	15.171
0.7	16.860	16.919	16.862	16.913	16.859
0.8	18.241	18.308	18.243	18.306	18.241
0.9	19.293	19.345	19.295	19.345	19.294
1.0	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000
T_A [N]	7.678	7547	7672	7542	7671
$f_{(L \setminus 2)}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Tabla 3.6: Parámetros de respuesta para el ejemplo E2-20

Relación adimensional $s_o \setminus S_o$	<i>catenaria</i> inextensible z [m]	parábola inextensible z [m]	<i>catenaria</i> extensible z [m]	parábola extensible z [m]	simulación SAP2000 z [m]
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	4.620	4.665	4.621	4.612	4.618
0.2	9.143	9.229	9.145	9.136	9.139
0.3	13.557	13.680	13.560	13.558	13.551
0.4	17.848	18.001	17.852	17.866	17.842
0.5	22.002	22.177	22.006	22.040	21.995
0.6	25.999	26.186	26.004	26.060	25.993
0.7	29.822	30.005	29.827	29.900	29.813
0.8	33.446	33.604	33.450	33.530	33.439
0.9	36.848	36.949	36.851	36.911	36.851
1.0	40.000	40.000	40.000	40.000	40.000
T_A [N]	12372	12291	12351	12252	12365
$f_{(L \setminus 2)}$	0.100	0.099	0.100	0.099	0.100

Tabla 3.7: Parámetros de respuesta para el ejemplo E2-40

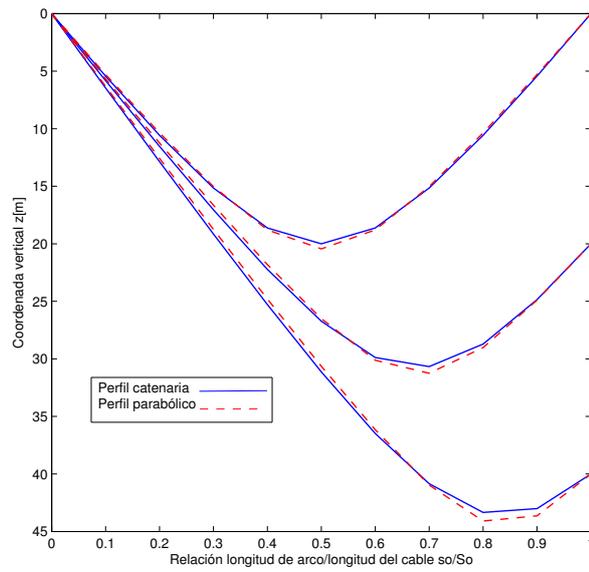


Figura 3.9: Perfil catenaria vs. Perfil parabólico para ejemplos E1-00, E1-20 y E1-40

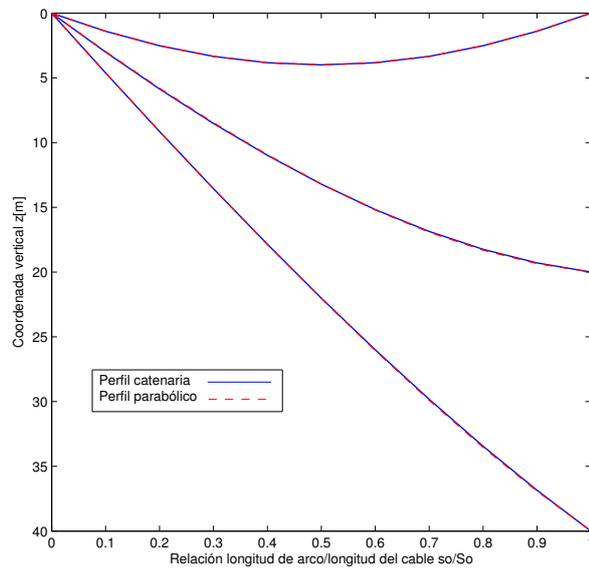


Figura 3.10: Perfil catenaria vs. Perfil parabólico para ejemplos E2-00, E2-20 y E2-40

En las Figuras 3.9 y 3.10 se comparan los perfiles obtenidos para la riostra extensible correspondientes a los ejemplos E1 y E2.

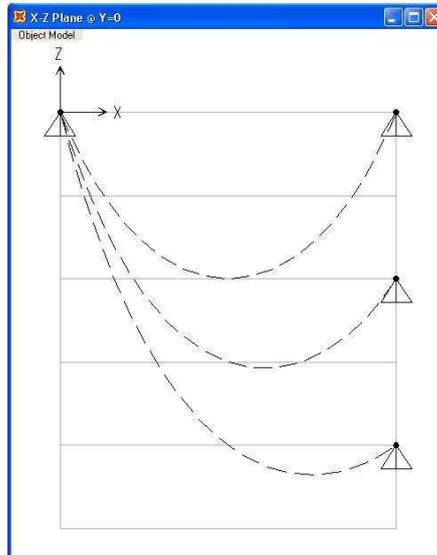


Figura 3.11: Simulación numérica con SAP2000 para E1-00, E1-20 y E1-40

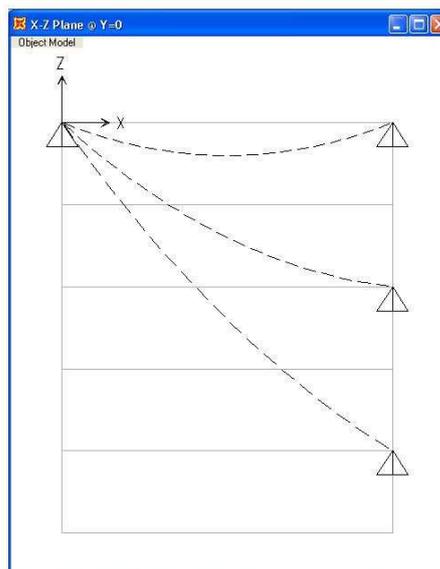


Figura 3.12: Simulación numérica con SAP2000 para E2-00, E2-20 y E2-40

En las Figuras 3.11 y 3.12 se presenta el perfil *catenaria* representado con SAP2000.

Efecto de f y d en la modelación

Se desarrolla el estudio paramétrico de una riostra elástica sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre la longitud de arco, referenciado como ejemplo 3 (E3), cuya configuración de equilibrio corresponde a la de una *catenaria* extensible. Se evalúa la respuesta en términos de T_A para la modelación como *catenaria* y como parábola, ambos modelos extensibles. Se considera para la riostra, distintas relaciones de flecha f (de 0.05 a 0.50, con un paso de 0.05) y tres diferencias de nivel d entre sus apoyos (de 0, 20 y 40 m). Se analiza el efecto de f y d sobre la magnitud del error cometido al utilizar el modelo parábola extensible. Las características de la riostra son las mismas a las indicadas en Tabla 3.1, mientras que en Figura 3.13 se presentan los efectos de f y d en la evolución del error cometido al modelar la riostra, de perfil *catenaria* extensible, como parábola extensible.

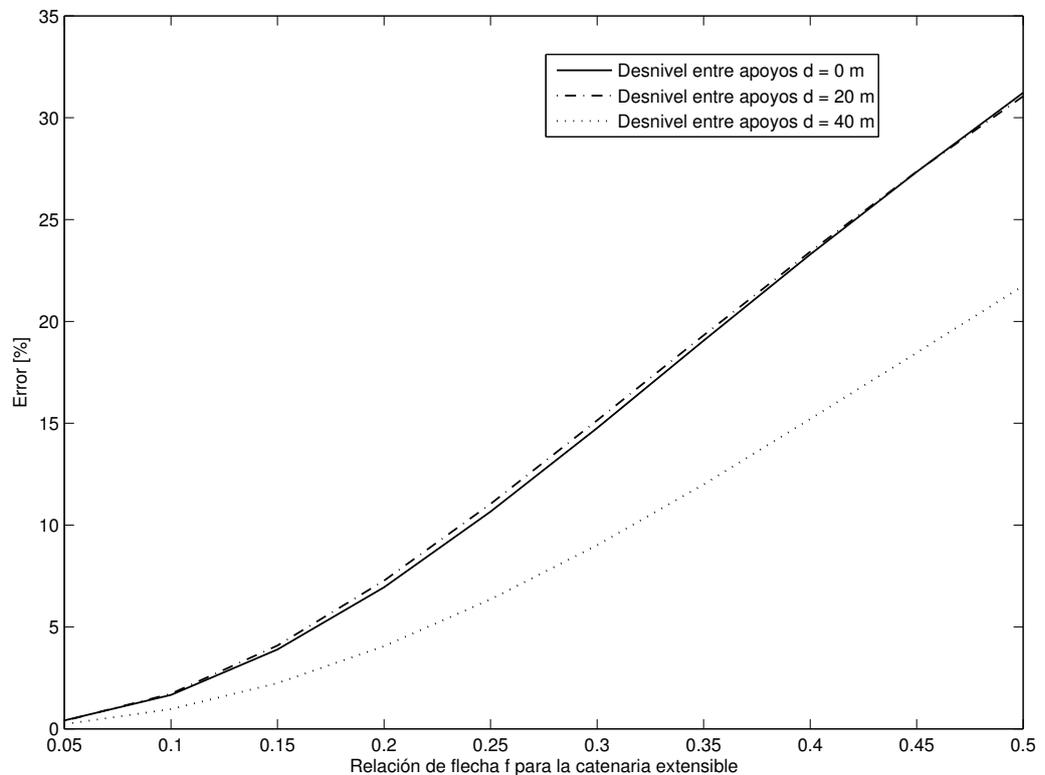


Figura 3.13: Evolución del error en la respuesta T_A para el modelo parabólico extensible

Respuesta de la riostra tensa con extremo desplazable

Se analiza el caso de dos riostras iguales y coplanarmente dispuestas, unidas entre sí mediante un vínculo móvil (ver Fig. 3.14) el cual será sujeto a desplazamientos. Las características geométricas y mecánicas de las riostras se indican en Tabla 3.8.

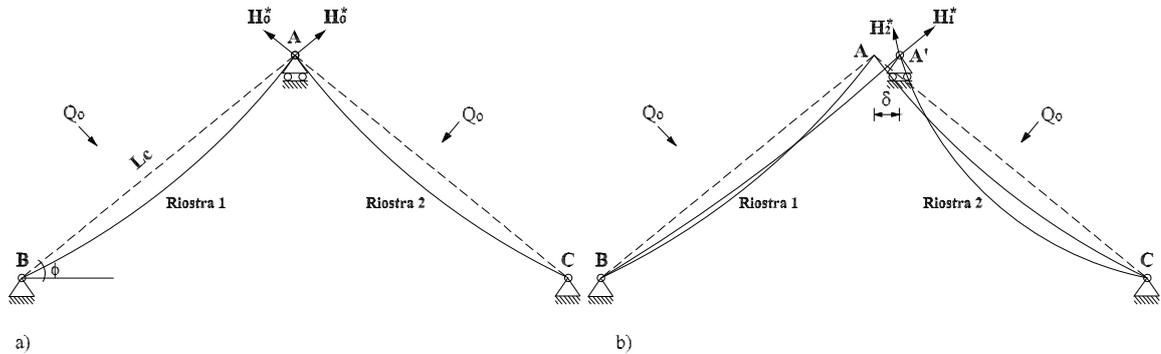


Figura 3.14: Riostras coplanares. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada

Propiedad	Riostra
A_r [m ²]	0.0002
E_r [MPa]	150000
ρ_r [kg/m ³]	7850
L_c [m]	40
ϕ [°]	45

Tabla 3.8: Propiedades de las riostras con extremo desplazable

Debido a desplazamientos horizontales δ en el extremo móvil que une a las riostras, por como éstas están dispuestas, la riostra 1 experimenta un alargamiento en la longitud de su cuerda, mientras que la riostra 2, un acortamiento de dicha longitud. Esto último hará que la riostra que se "estira" aumente su tensión respecto de la inicial, en tanto que la riostra que se "afloja" disminuya su tensión respecto de la inicial. Los esfuerzos de tracción actuantes en las riostras y dependientes del desplazamiento impartido al apoyo móvil, han

sido determinados mediante la aplicación de la ecuación (3.159), teniendo presente que $Q_o = Q_1 = mg\cos\phi L_c$ y que $u_1^* = \delta\cos\phi$ y $u_2^* = -\delta\cos\phi$.

En la Figura 3.15 se muestra la evolución del esfuerzo de tracción en cada una de las riostras a medida que se incrementa el desplazamiento horizontal del apoyo móvil.

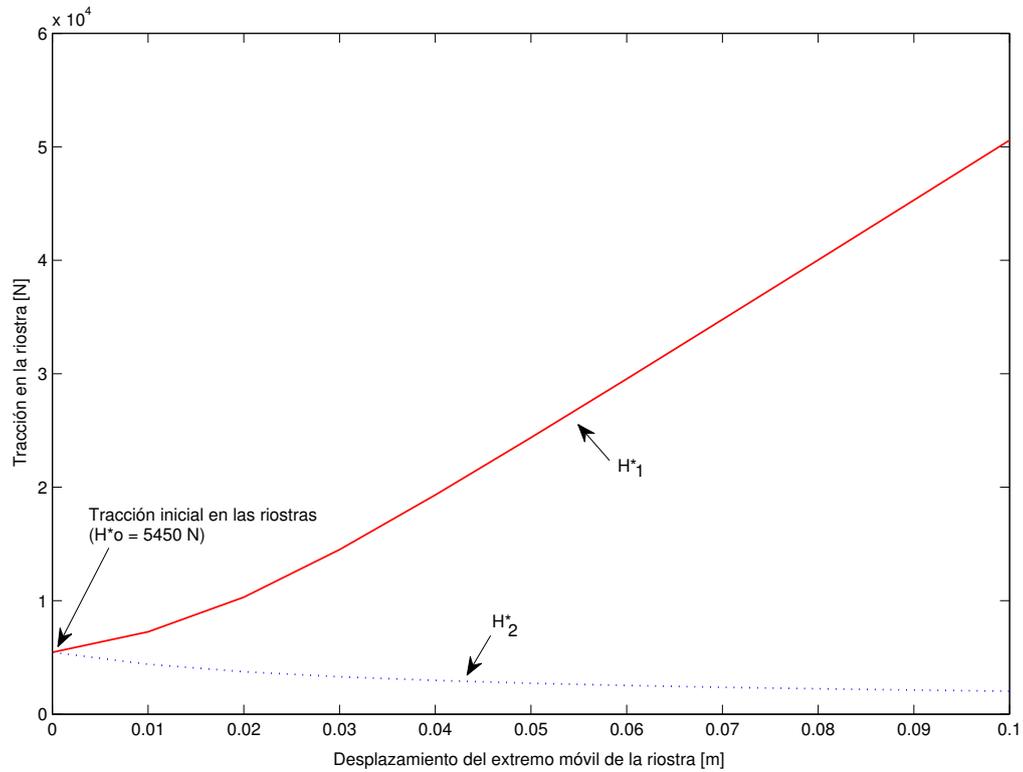


Figura 3.15: Evolución del esfuerzo de tracción en las riostras debido al desplazamiento δ

Para hallar la variación de la rigidez estática de la riostra debido al desplazamiento δ , se requiere determinar en primer lugar la variación del esfuerzo de tracción actuante en la misma como consecuencia del desplazamiento del extremo móvil (ver Fig. 3.15), y con ello, determinar el coeficiente κ^2 a partir del cual y aplicando la ecuación (3.144) se obtiene la correspondiente variación de la rigidez. En el ejemplo analizado, se observa que la riostra 1 al estirarse va incrementando su rigidez respecto de la inicial, es decir que experimenta una suerte de "endurecimiento" o rigidización por tensión, tendiendo a acercarse a lo que se definió como rigidez elástica de la riostra. En tanto que la riostra 2 al aflojarse, pierde rigidez respecto de la inicial experimentando así una suerte de "ablandamiento". Este comportamiento indicado para las riostras también fue observado por Preidikman *et al* [58].

En Figura 3.16 se muestra como evoluciona la rigidez estática en cada riostra a medida que se incrementa el desplazamiento horizontal del apoyo móvil.

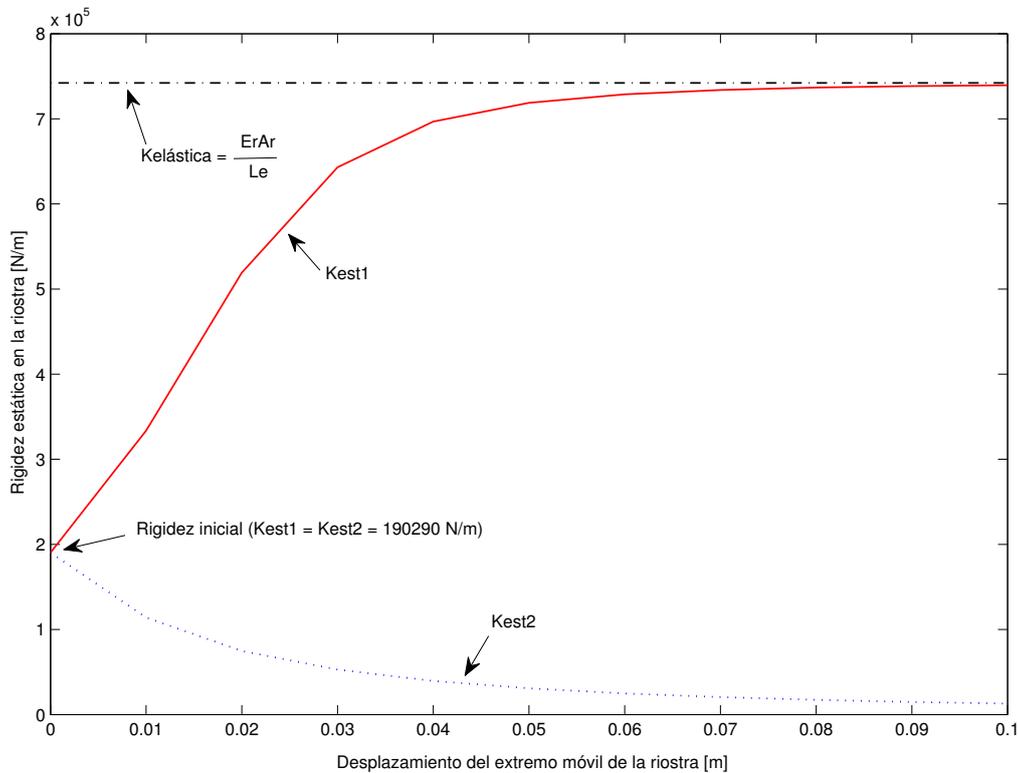


Figura 3.16: Evolución de la rigidez axial en las riostras debido al desplazamiento δ

3.3 Análisis dinámico

Los parámetros modales de una riostra, tales como las frecuencias naturales, representan características dinámicas muy importantes en la construcción, control de vibraciones y en la evaluación del estado de las riostras que soportan estructuras.

En esta sección se desarrollan, de manera analítica, las expresiones conducentes a la determinación de las frecuencias naturales de vibración en y fuera del plano de una riostra inclinada y soportada en sus extremos, las cuales pueden también ser encontradas en [37] y [73].

Como suele suceder en los mástiles arriostrados, los cables o riostras se encuentran suficientemente tensos a fin de estabilizar al sistema. Esta consideración permite abordar un estudio linealizado de la dinámica de la riostra.

Al mismo tiempo, la inclusión del efecto de la elasticidad (extensibilidad) de la riostra resulta indispensable para obtener expresiones capaces de modelar con suficiente precisión el fenómeno físico.

3.3.1 Ecuaciones del movimiento en el plano de una riostra inclinada

Al igual que para el análisis estático de una riostra con extremo desplazable y que lo planteado por Wu *et al* [73], se considera una riostra inclinada de sección transversal A_r y densidad del material ρ_r ($m = \rho_r A_r$), la cual cuelga de sus extremos los cuales se encuentran a diferentes alturas, haciendo que la cuerda presente una cierta inclinación ϕ respecto de la horizontal (ver Fig. 3.5).

Del análisis del equilibrio de fuerzas horizontales y verticales (ver Fig. 3.17) y de manera equivalente a lo hecho para el comportamiento estático, debido al desplazamiento dinámico de un segmento diferencial de riostra se obtienen las ecuaciones del movimiento de la misma en su plano, siendo τ la tracción adicional generada en la riostra debido a la vibración, siendo q_{x^*} y q_{z^*} las cargas dinámicas en las direcciones de x^* y z^* , y siendo t el tiempo. Dichas ecuaciones que gobiernan el movimiento de la riostra debida a la vibración en el plano, son las mismas a las obtenidas en (3.105 y 3.106) con la particularidad de que

se incorpora la masa vibrante de la riostra y la carga dinámica que eventualmente pudiere actuar sobre ésta:

$$\frac{d}{ds} \left[h^* + (H_o^* + h^*) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right] = m \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - q_{x^*} \quad (3.159)$$

$$\frac{d}{ds} \left[h^* \frac{dz^*}{dx^*} + (H_o^* + h^*) \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right] = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - q_{z^*} \quad (3.160)$$

Estas últimas resultan ser las ecuaciones del movimiento en el plano de la riostra, en la dirección de x^* (longitudinal) y de z^* (transversal), en función del esfuerzo de tracción H_o^* actuante en la configuración inicial, y del esfuerzo adicional de tracción h^* que se presenta debido al cambio de configuración como consecuencia de la vibración.

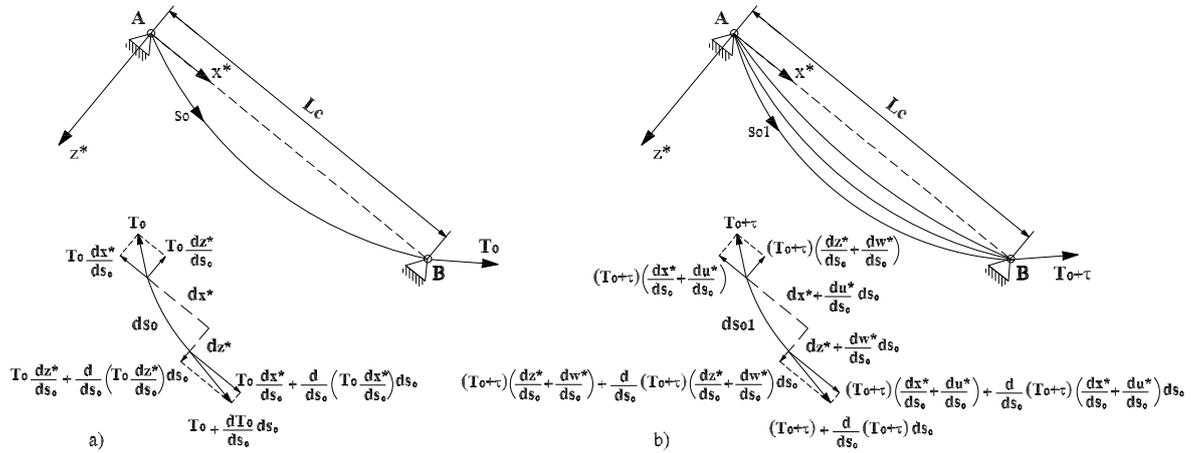


Figura 3.17: Vibración de la riostra. a) Configuración inicial. b) Configuración desplazada

3.3.2 Ecuación del movimiento fuera del plano de una riostra inclinada

Este movimiento, también conocido como balanceo, actúa desacopladamente respecto del movimiento de la riostra en su plano. Se define a y como el eje perpendicular al sistema de ejes cartesianos contenidos en el plano de la riostra, y a v como el desplazamiento en la dirección de y debido a un balanceo de la riostra originado por una perturbación dinámica. Del equilibrio de fuerzas perpendiculares al plano de la riostra en la configuración desplazada debido al balanceo, resulta:

$$\frac{d}{ds} \left[(T_o + \tau) \frac{\partial v}{\partial s} \right] = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.161)$$

siendo ésta, la ecuación que gobierna el movimiento fuera de su plano de una riostra inclinada, la que también puede ser expresada como:

$$\frac{d}{ds} \left[(H_o^* + h^*) \frac{\partial v}{\partial x^*} \right] = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.162)$$

3.3.3 Vibración libre de una riostra tensa

Considerando una riostra inicialmente tensa, lo que hace que la misma presente pequeña flecha, se puede asumir entonces que $ds \simeq dx^*$. La pretensión inicial hace también que la riostra tensa presente corrimientos axiales despreciables, y con ello, poder prescindir de las vibraciones longitudinales (dirección de x^*) en el plano de la misma. Por lo tanto, la ecuación que gobierna la vibración transversal en el plano de una riostra tensa resulta:

$$\frac{d}{dx^*} \left[h^* \frac{dz^*}{dx^*} + (H_o^* + h^*) \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right] = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \quad (3.163)$$

y dado que h^* solo es función del tiempo:

$$h^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + (H_o^* + h^*) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \quad (3.164)$$

con lo que considerando solo los términos lineales, se tiene que:

$$h^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + H_o^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \quad (3.165)$$

siendo esta última ecuación la que gobierna la dinámica lineal en vibración transversal libre sobre el plano de la riostra inclinada y tensa.

Asumiendo que los extremos de la riostras son indesplazables, las condiciones de borde resultan:

$$u^*(0) = 0 \quad ; \quad u^*(L_c) = 0 \quad (3.166)$$

$$w^*(0) = 0 \quad ; \quad w^*(L_c) = 0 \quad (3.167)$$

con lo cual el esfuerzo adicional de tracción debido a la vibración sobre el plano de la riostra, puede ser obtenido de (3.125), resultando:

$$h^* = \frac{mg \cos \phi}{H_o^*} \frac{E_r A_r}{L_e} \int_0^{L_c} w^* dx^* \quad (3.168)$$

Esta componente adicional de tracción resultará nula cuando se cumpla la condición:

$$\int_0^{L_c} w^* dx^* = 0 \quad (3.169)$$

es decir, cuando la sumatoria de los desplazamientos verticales en la dirección de z^* a lo largo de todo el dominio de la riostra sea nula. Los modos de vibración de la riostra que cumplan esta condición, y como consecuencia no introducen tracción adicional, se denominan modos antisimétricos de vibración transversal en el plano de la misma (ver Fig. 3.18). Los modos para los cuales no se cumple esta condición, y por ende introducen tracción adicional, se los denomina modos simétricos (ver Fig. 3.19).

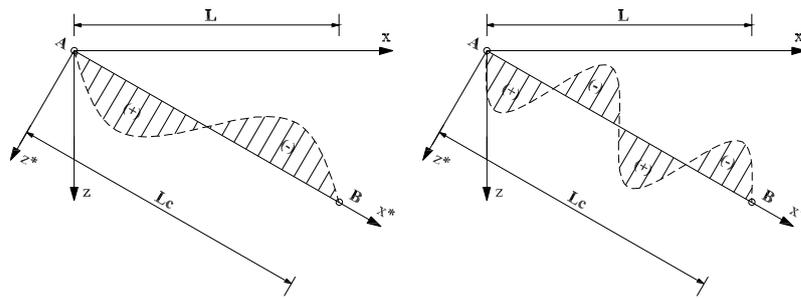


Figura 3.18: Formas modales antisimétricas

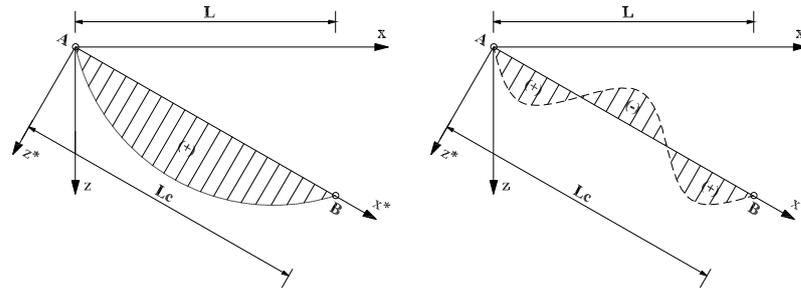


Figura 3.19: Formas modales simétricas

Modos antisimétricos en vibración transversal

Como se dijo anteriormente, cuando la vibración transversal en el plano de la riostra no introduce tracción adicional, los modos asociados a dicha vibración se los denomina

antisimétricos. Siendo entonces $h^* = 0$, la ecuación del movimiento (3.166) resulta ahora:

$$H_o^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \quad (3.170)$$

Aceptando modos armónicos de vibración para la riostra, resulta:

$$\{w^*\}(x^*, t) = \{w^*\}(x^*)e^{i\omega t} \quad (3.171)$$

siendo ω la frecuencia circular e $i \equiv \sqrt{-1}$. Reemplazando esta propuesta de separar variables en (3.170), se obtiene:

$$H_o^* \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}} + mw^*\omega^2 = 0 \quad (3.172)$$

siendo esta última, una ecuación diferencial lineal, ordinaria en la variable espacial x^* y homogénea, a coeficientes constantes, que da lugar a un típico problema de autovalores. Los autovalores son las frecuencias naturales circulares ω_n ($n = 1, 2, \dots$). Dichas frecuencias se hallan proponiendo la solución exponencial clásica para la función espacial incógnita:

$$w^*(x^*) = We^{\lambda x^*} \quad (3.173)$$

donde en general λ es una constante compleja. Reemplazando esta propuesta de solución en (3.173), se obtiene:

$$H_o^* \lambda^2 + m\omega^2 = 0 \quad (3.174)$$

siendo una ecuación algebraica, lineal y homogénea, de donde resulta:

$$\lambda^2 = -\frac{m\omega^2}{H_o^*} \quad (3.175)$$

Las dos raíces λ_1 y λ_2 , que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de la forma modal en función de dos constantes W_1 y W_2 a determinar a partir de las condiciones de borde, y con ello de las infinitas (contables) frecuencias circulares ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Correspondientemente a cada frecuencia n -ésima se tiene el autovector o forma modal n -ésima:

$$w^{*(n)}(x^*) = W_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x^*} \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.176)$$

De las formas modales antisimétricas (ver Fig. 3.18), se observa que en $x^* = 0$, $w^* = 0$, y que en $x^* = L_c/2$, $w^* = 0$. Por lo tanto reemplazando por la solución exponencial clásica

propuesta, se tiene:

$$w^{*(n)}(0) = W_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.177)$$

$$w^{*(n)}(L_c/2) = W_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_c/2} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.178)$$

Expresando matricialmente a este sistema de dos ecuaciones algebraicas y homogéneas, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda_1^{(n)} L_c/2} & e^{\lambda_2^{(n)} L_c/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^{(n)} \\ W_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.179)$$

en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo, con lo que:

$$e^{\lambda_2^{(n)} L_c/2} - e^{\lambda_1^{(n)} L_c/2} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.180)$$

De (3.181) se determina que las raíces resultan:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega \left(\frac{m}{H_o^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.181)$$

y que por identidad trigonométrica la (3.181) puede ser expresada como:

$$\sin \left[\omega \frac{L_c}{2} \left(\frac{m}{H_o^*} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (3.182)$$

siendo esta última, la ecuación de la frecuencia para los modos antisimétricos de vibración en el plano de la riostra. El cumplimiento de esta ecuación exige que:

$$\omega_{(n)} \frac{L_c}{2} \left(\frac{m}{H_o^*} \right)^{\frac{1}{2}} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.183)$$

de donde se obtiene que la frecuencia natural de vibración de los modos antisimétricos vale:

$$\omega_{(n)}^{ant} = \frac{2n\pi}{L_c} \left(\frac{H_o^*}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.184)$$

Modos simétricos en vibración transversal

Cuando la vibración transversal en el plano de la riostra introduce tracción adicional, los modos asociados a dicha vibración se los denomina simétricos. En este caso $h^* \neq 0$, y la ecuación del movimiento (3.166) resulta ahora:

$$h^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + H_o^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \quad (3.185)$$

Nuevamente aceptando modos armónicos de vibración para la riostra, resulta:

$$\{w^*, h^*\}(x^*, t) = \{w^*, h^*\}(x^*) e^{i\omega t} \quad (3.186)$$

y reemplazando en (3.186), se tiene:

$$h^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + H_o^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + mw^* \omega^2 = 0 \quad (3.187)$$

La solución para la ecuación diferencial (3.188), resulta de la suma de una solución homogénea o complementaria (w^{*c}) y de una solución particular (w^{*p}):

$$w^*(x^*) = w^{*c}(x^*) + w^{*p}(x^*) \quad (3.188)$$

Al igual que para los modos antisimétricos, la solución complementaria resulta:

$$w^{*c}(x^*) = W_1 e^{\lambda_1 x^*} + W_2 e^{\lambda_2 x^*} \quad (3.189)$$

y en donde las raíces fueron obtenidas en (3.182).

Como solución particular se propone a:

$$w^{*p}(x^*) = \frac{mg \cos \phi L_c^2}{\bar{\omega}^2} \frac{h^*}{H_o^{*2}} \quad (3.190)$$

siendo:

$$\bar{\omega} = \omega L_c \left(\frac{m}{H_o^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.191)$$

con lo cual la solución general, suma de la complementaria y la particular, resulta:

$$w^*(x^*) = W_1 e^{\lambda_1 x^*} + W_2 e^{\lambda_2 x^*} + \frac{mg \cos \phi L_c^2}{\bar{\omega}^2} \frac{h^*}{H_o^{*2}} \quad (3.192)$$

y que por identidad trigonométrica puede ser expresada como:

$$w^*(x^*) = C_1 \cos\left(\bar{\omega} \frac{x^*}{L_c}\right) + C_2 \sin\left(\bar{\omega} \frac{x^*}{L_c}\right) + \frac{mg \cos \phi L_c^2}{\bar{\omega}^2} \frac{h^*}{H_o^{*2}} \quad (3.193)$$

Las constantes $C_1 = (W_1 + W_2)$ y $C_2 = i(W_1 - W_2)$ se determinan a partir de las condiciones de borde del problema. Para los modos simétricos dichas condiciones de borde resultan que en $x^* = 0$, $w^* = 0$, y que en $x^* = L_c$, $w^* = 0$, con lo que:

$$C_1 = -\frac{mg\cos\phi L_c^2}{\bar{\omega}^2} \frac{h^*}{H_o^{*2}} \quad (3.194)$$

$$C_2 = -\frac{mg\cos\phi L_c^2}{\bar{\omega}^2} \frac{h^*}{H_o^{*2}} \tan\frac{\bar{\omega}}{2} \quad (3.195)$$

y de este modo se tiene que:

$$w^*(x^*) = \frac{mg\cos\phi L_c^2}{\bar{\omega}^2} \frac{h^*}{H_o^{*2}} \left[1 - \tan\frac{\bar{\omega}}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega} x^*}{L_c}\right) - \cos\left(\frac{\bar{\omega} x^*}{L_c}\right) \right] \quad (3.196)$$

Reemplazando en (3.169) e integrando, resulta:

$$1 = \kappa^2 \frac{1}{\bar{\omega}^2} \left[1 - \frac{2}{\bar{\omega}} \frac{\sin\bar{\omega}}{(1 + \cos\bar{\omega})} \right] \quad (3.197)$$

en donde κ^2 fue definido en (3.143).

Haciendo ahora uso de identidades trigonométricas, la ecuación trascendental (3.198) puede ser expresada a través de la siguiente igualdad:

$$\tan\frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{4}{\kappa^2} \left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)^3 \quad (3.198)$$

A partir de esta última ecuación se obtienen las frecuencias ω_{sim} de los modos simétricos de vibración en el plano de la riostra. Se observa que para cuando se trata de una riostra inextensible ($E_r A_r \rightarrow \infty$), el coeficiente $\kappa^2 \rightarrow \infty$, con lo cual (3.199) puede expresarse como:

$$\tan\frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\bar{\omega}}{2} \quad (3.199)$$

y donde una solución aproximada [65] resulta:

$$\bar{\omega}_{(n)} \approx (2n + 1)\pi - \frac{4}{(2n + 1)\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.200)$$

Si se trata ahora de una riostra extensible y muy tensa, $\kappa^2 \rightarrow 0$, con lo que:

$$\tan\frac{\bar{\omega}}{2} = \pm\infty \quad (3.201)$$

y donde nuevamente una solución aproximada [65] resulta:

$$\bar{\omega}_{(n)} \approx (2n - 1)\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.202)$$

De este modo la frecuencia natural de vibración, para los modos simétricos, resulta:

$$\omega_{(n)}^{sim} = \bar{\omega}_{(n)} \frac{1}{L_c} \left(\frac{H_o^*}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.203)$$

en donde si se trata de una riostra inextensible (rigidez infinita), $\bar{\omega}_{(n)}$ se determina con la ecuación (3.201), en tanto que si se trata de una riostra extensible y tensa (rigidez tendiendo a la elástica), $\bar{\omega}_{(n)}$ se determina con la ecuación (3.203).

Modos en vibración fuera del plano o modos de balanceo

Dado de que se trata de una riostra tensa y de que h^* solo es función del tiempo, la (3.163) se expresa ahora como:

$$H_o^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.204)$$

En este caso la coordenada perpendicular al plano de la riostra resulta $v = v^*$. Nuevamente aceptando modos armónicos de vibración para la riostra, se tiene:

$$\{v\}(x^*, t) = \{v\}(x^*)e^{i\omega t} \quad (3.205)$$

y reemplazando en (3.210), resulta:

$$H_o^* \frac{d^2 v}{dx^{*2}} + mv\omega^2 = 0 \quad (3.206)$$

Para los modos de balanceo se tiene que en $x^* = 0$, $v = 0$, y que en $x^* = L_c$, $v = 0$. Por lo tanto y con un análisis equivalente al desarrollado para los modos de vibración antisimétricos, la frecuencia natural de vibración resulta:

$$\omega_{(n)}^{bal} = \frac{n\pi}{L_c} \left(\frac{H_o^*}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.207)$$

3.3.4 Simulación numérica

Para la simulación numérica, y al igual que para el análisis estático, se utiliza la herramienta computacional SAP2000 [62]. En cuanto a la discretización de la riostra, se utilizaron 20 elementos finitos tipo cable para la representación de la misma.

3.3.5 Frecuencias naturales para una riostra suspendida

Comparación de modelos

Se desarrolla un ejemplo (E4) de una riostra suspendida desde sus extremos, determinándose así las frecuencias naturales de vibración. Se compararon las frecuencias obtenidas mediante las formulaciones analíticas desarrolladas, con aquellas obtenidas de la simulación numérica mediante el uso de SAP2000. El ejemplo abordado se trató de una riostra "tensa" ($f = 0.1 < \frac{1}{8}$), considerando a su vez tres diferencias de nivel entre sus apoyos, $d = 0$ m (00), $d = 20$ m (20) y $d = 40$ m (40). Las características geométricas y mecánicas de la riostra son las mismas a las del ejemplo E2, indicadas estas en Tabla 3.1.

En Tablas 3.9 a 3.11 se muestran los resultados de frecuencias naturales halladas mediante la aplicación de las formulaciones analíticas y de la simulación numérica.

Frecuencia natural ω	Formulación analítica [rad/seg.]	simulación Sap2000 [rad/seg.]	Diferencia %
ω_1^{bal}	1.751	1.740	0.62
ω_1^{ant}	3.502	3.325	5.04
ω_2^{bal}	3.502	3.449	1.50
ω_1^{sim}	5.016	4.882	2.67
ω_3^{bal}	5.252	5.141	2.12
ω_2^{ant}	7.003	6.746	3.67
ω_2^{sim}	8.612	8.278	3.88
ω_3^{ant}	10.505	9.957	5.21
ω_3^{sim}	12.154	11.403	6.18
d [m]	0		
$f_{(L\setminus 2)}$	0.100		

Tabla 3.9: Frecuencias naturales para el ejemplo E4-00

Frecuencia natural ω	Formulación analítica [rad/seg.]	simulación Sap2000 [rad/seg.]	Diferencia %
ω_1^{bal}	1.745	1.739	0.34
ω_1^{ant}	3.490	3.348	4.07
ω_2^{bal}	3.490	3.454	1.03
ω_1^{sim}	4.999	4.890	2.18
ω_3^{bal}	5.235	5.151	1.60
ω_2^{ant}	6.980	6.768	3.04
ω_2^{sim}	8.583	8.294	3.37
ω_3^{ant}	10.470	9.982	4.66
ω_3^{sim}	12.114	11.424	5.69
d [m]	20		
$f_{(L\setminus 2)}$	0.100		

Tabla 3.10: Frecuencias naturales para el ejemplo E4-20

Frecuencia natural ω	Formulación analítica [rad/seg.]	simulación Sap2000 [rad/seg.]	Diferencia %
ω_1^{bal}	1.740	1.739	0.04
ω_1^{ant}	3.479	3.389	2.60
ω_2^{bal}	3.479	3.463	0.47
ω_1^{sim}	4.984	4.903	1.63
ω_3^{bal}	5.221	5.166	1.06
ω_2^{ant}	6.959	6.802	2.25
ω_2^{sim}	8.557	8.313	2.86
ω_3^{ant}	10.438	10.020	4.01
ω_3^{sim}	12.077	11.448	5.21
d [m]	40		
$f_{(L\setminus 2)}$	0.100		

Tabla 3.11: Frecuencias naturales para el ejemplo E4-40

3.4 Conclusiones

3.4.1 Respuesta estática

De la evaluación de la respuesta estática para los ejemplos de riostras presentados, se puede establecer que dado que la solución parabólica surge de analizar el comportamiento de una riostra sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre la proyección horizontal de la cuerda, su aplicación para el caso de una carga ahora distribuida sobre la longitud de arco, conduce solo a una aproximación a la solución de la *catenaria* extensible. El error máximo cometido en la determinación de la flecha d (a la mitad de la luz del vano) utilizando el modelo parabólico extensible y para los ejemplos considerados, resultó ser del orden del 3 %. Para el caso de la riostra horizontal y "tensa" ($f = 0.10$), el error resultó del orden del 0.5 %, el cual podría considerarse como poco significativo.

En cuanto al error cometido en la evaluación de T_A utilizando el modelo parabólico extensible, este resultó significativo en tanto la relación de flecha f aumentó, es decir a medida que la riostra estaba menos tensa, alcanzando un valor máximo del orden del 30 % para $f = 0.50$. Mientras que para una relación de flecha $f = 0.10$, es decir para una riostra tensa, el error cometido fue del orden del 2 %, lo cual indicó que el modelo parabólico extensible resultó adecuado para la representación de la riostra tensa. En cuanto a la diferencia de nivel entre apoyos d , y a partir de los ejemplos analizados, se observó que ésta no influye tan significativamente como si lo hace f .

Por otro lado, el análisis de una riostra con un extremo desplazable permitió establecer la relación no-lineal entre el desplazamiento producido en el extremo de la riostra y la fuerza de tracción actuante en la misma, así como también, la determinación de la rigidez axial, función ésta de la variación del esfuerzo de tracción actuante sobre la misma. A partir del ejemplo evaluado, se observó que cuando la riostra se "estira" se produce una rigidización de ésta o bien una suerte de "endurecimiento", tendiendo de este modo al valor de la rigidez elástica a medida que aumenta el estiramiento, es decir, como si la riostra se tratase de una biela trabajando en tracción. Este comportamiento de la riostra se conoce como rigidización por tensión. En tanto que cuando la riostra se "afloja", la misma pierde

rigidez respecto de la inicial, produciéndose así una suerte de "ablandamiento" de la riostra. Este análisis permitirá luego, para el sistema mástil-riostras, establecer la rigidez horizontal instantánea del nudo del mástil al que se toman las riostras y con ello, formalizar un modelo del tipo viga (mástil) sobre apoyos elásticos (nudos arriostrados).

En cuanto a la simulación numérica mediante la utilización de SAP2000, se obtuvieron resultados muy precisos tanto en la determinación de z como de T_A , resultando entonces esta herramienta computacional, apropiada para la modelación de la riostra sujeta a una carga distribuida sobre la longitud de arco.

3.4.2 Respuesta dinámica

La evaluación de las vibraciones naturales mediante las formulaciones analíticas desarrolladas, surgen de considerar una riostra "tensa", de ahí la posibilidad de linealización en el desarrollo de dichas ecuaciones. Las frecuencias naturales para los modos de balanceo (fuera del plano de la riostra) y para los modos antisimétricos (en el plano de la riostra) son fuertemente dependientes del grado de pretensión de la riostra. En tanto que las frecuencias naturales para los modos simétricos (en el plano de la riostra) son fuertemente dependientes no solo del grado de pretensión, sino que también, de la rigidez axial de la riostra. Los modos antisimétricos no introducen una componente adicional de tracción debido a la acción dinámica, en tanto los simétricos sí.

En cuanto al grado de inclinación de la riostra, ésta no afecta de manera significativa el valor de las frecuencias, siendo la máxima diferencia encontrada del orden del 4 % para las antisimétricas, y menor al 1 % para las restantes. Estos últimos valores surgen de comparar los casos cuyas diferencias de nivel fueron de $d = 0$ m y de $d = 40$ m.

La simulación numérica mediante la utilización de SAP2000, se obtuvieron resultados adecuados en la determinación de ω . La máxima diferencia encontrada respecto a la hallada analíticamente, fue del orden del 6 %. De este modo, la herramienta computacional utilizada resultó apropiada para la modelación dinámica de la riostra.

Capítulo 4

Respuesta sísmica de un mástil reticulado arriostrado

4.1 Introducción

Los mástiles reticulados arriostrados (ver Fig. 4.1) se caracterizan por ser estructuras muy altas, esbeltas, y esencialmente flexibles, lo cual hace que resulten muy sensibles frente a excitaciones dinámicas. Estos sistemas estructurales constan de dos contribuciones fundamentales, un mástil usualmente reticulado y las riostras o tensores vinculados al mismo en distintas alturas, resultando ser un sistema inherentemente no-lineal aún bajo condiciones de servicio, debido principalmente a la configuración geométrica que adquieren las riostras [46], [60], [70], [71].

Esta tipología estructural es la más frecuentemente utilizada para soportar elementos de transmisión instantánea de la voz y comunicación de datos por teléfono, en la industria de la radio y televisión, y en los sistemas de emergencia que utilizan comunicaciones por radio y teléfono, proveyendo una solución más económica y eficiente, para torres altas, respecto de las torres auto-sustentadas [1].

A pesar del gran potencial de impacto adverso, las cargas sísmicas suelen no ser consideradas como acciones dominantes en la etapa de diseño, aunque de estudios recientes

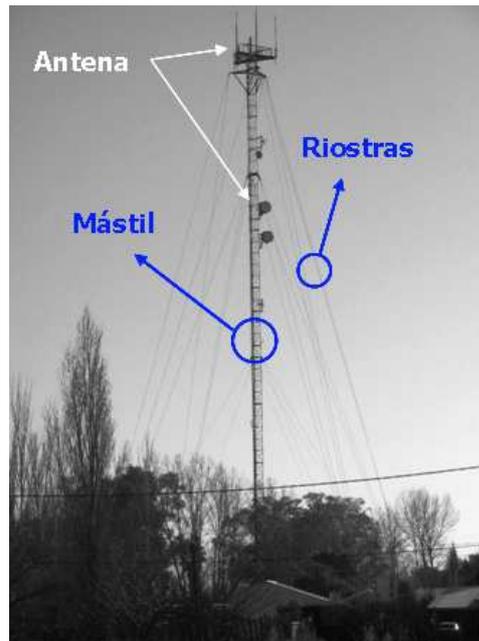


Figura 4.1: Mástil reticulado arriostrado

se ha observado que la demanda impuesta al sistema por algunos registros sísmicos puede resultar determinante para la continuidad operativa de las comunicaciones [23]. También es de destacar que a nivel mundial sólo unos pocos investigadores han focalizado su estudio en la respuesta sísmica de estos sistemas [1], [31], [63].

Quizás este poco interés esté suscitado porque la literatura no reporta ningún caso específico de fallas en torres de telecomunicaciones debido a los recientes terremotos. Es un hecho que las cuestiones legales por lo general se oponen a la publicación de esa información. Sin embargo, algunos miembros de comisiones de trabajo han reportado de manera no oficial daños ocasionados en torres durante el terremoto de Northridge en 1994 y durante el terremoto de Kobe en 1995 [47]. Por ello, en zonas con elevada actividad sísmica y cuando la estructura soporta cargas importantes como pueden ser los dispositivos de comunicaciones, la posibilidad de daño debido a un posible terremoto debe ser considerada en el análisis [64].

Por lo anterior y sumado a que al momento del diseño o refuerzo de estas tipologías estructurales, suelen aparecer ciertas incertidumbres asociadas a la modelación dinámica del

problema, tales como: i) nivel de pretensión inicial al que estarán o están sujetas las riostras, ii) amortiguamiento equivalente (Rayleigh) de la estructura y iii) rigidez flexional del mástil, resulta necesario un estudio dinámico detallado.

En el presente capítulo se evalúa la respuesta dinámica, corte basal del mástil y desplazamiento de la cima, de un mástil reticulado de sección transversal triangular, de 120 m de altura, arriostrado por cuatro niveles de tensores, y sujeto a una serie de registros sísmicos correspondientes a terremotos locales e internacionales, y que por sus características, son considerados como relevantes.

En las secciones siguientes se presenta un estudio detallado de la respuesta estructural cuando el sistema está sujeto a los registros sísmicos considerados, indicándose los parámetros de diseño adoptados como variables al momento de la modelación, así como también, los valores considerados para los mismos. Los resultados de las respuestas dinámicas evaluadas son mostrados mediante gráficos.

4.2 Mástil arriostrado

El sistema estructural considerado es el mismo al analizado por Desai y Punde en su trabajo [11], y también tomado como estructura de referencia por Hensley y Plaut [31] para la verificación de un modelo posterior de análisis. En la Figura 4.2 se muestra el perfil y la planta del mástil, el cual posee una altura de 120 m y se encuentra estabilizado por cuatro niveles de riostras separadas 30 m entre sí, con tres de ellas por nivel.

El mástil está articulado en su base y es modelado como viga-columna equivalente usando 16 elementos tipo viga, mientras que cada riostra es modelada con 5 elementos tipo cable capaz de representar el comportamiento de una *catenaria* extensible, y admitiendo sólo capacidad a esfuerzos de tracción. El *software* de elementos finitos utilizado para el análisis de la respuesta sísmica no-lineal es SAP2000 [62] (ver Fig. 4.3), el cual permite considerar la no-linealidad geométrica tanto para el mástil como para las riostras, así como también, el efecto $P-\Delta$ y el de grandes desplazamientos.

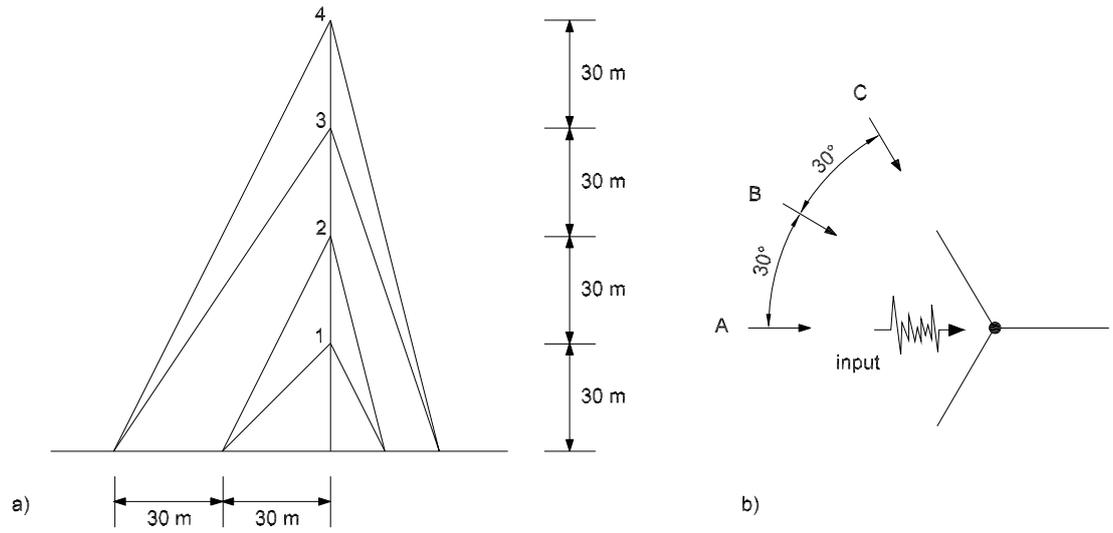


Figura 4.2: Mástil arriostrado analizado. a) Perfil. b) Planta

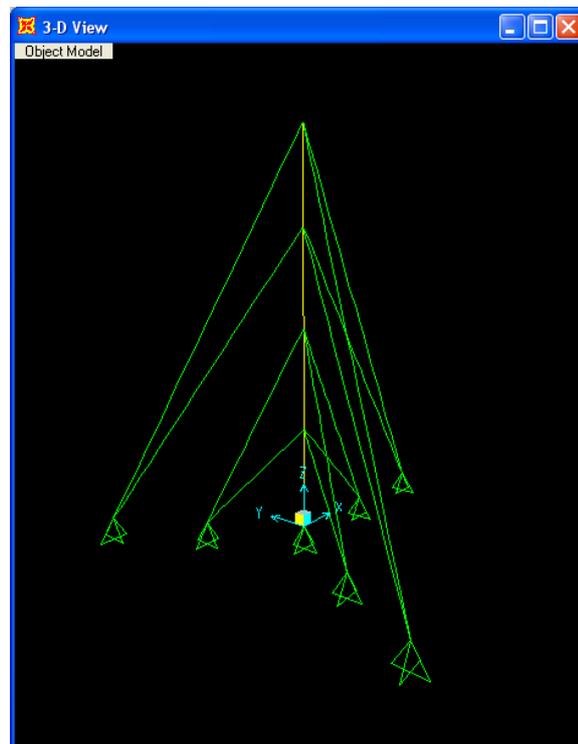


Figura 4.3: Mástil arriostrado modelado vía elementos finitos

El mástil presenta un módulo de elasticidad de 209 GPa, una sección transversal de $1.98 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, un momento de inercia flexional en ambas direcciones transversales que tomará tres posibles valores según se indicará posteriormente, y una masa por unidad de longitud de 61.00 kg/m. En tanto que las riostras presentan un módulo de elasticidad de 150 GPa, una sección transversal de $2.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, una pretensión inicial que tomará valores según se indicará también posteriormente, y una masa por unidad de longitud de 2.55 kg/m.

A efectos de verificar preliminarmente el modelo desarrollado con SAP2000 en el presente capítulo, el sistema estructural fue sujeto a vibración libre. De este modo se obtuvieron las propiedades dinámicas del mismo y se compararon con las obtenidas por Hensley y Plaut [31] para el caso denominado "estándar", en el cual el mástil presenta una masa por unidad de longitud de 61.00 kg/m y un momento de inercia de $1.80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$, las riostras una pretensión inicial de 25 kN, en tanto que el amortiguamiento estructural del sistema es del 2 % del crítico.

En Tabla 4.1 se presentan, para el caso "estándar", las frecuencias obtenidas para los primeros cinco modos flexionales del mástil en la dirección de análisis referenciada como A (ver Fig. 4.2), mientras que en Figura 4.4 se muestran las tres primeras formas modales.

Modo	Hensley y Plaut	simulación Sap 2000	Diferencia [%]
1	8.37	8.24	1.55
2	10.50	10.12	3.62
3	16.10	15.67	2.67
4	20.30	20.08	1.08
5	29.30	28.90	1.37

Tabla 4.1: Frecuencias naturales en [rad/seg] del mástil arriostrado para el caso "estándar"

Las pequeñas diferencias encontradas entre ambas modelaciones pueden justificarse debido a que en el presente análisis se utilizó un modelo de riostra y un *software* distinto al utilizado por Hensley y Plaut. Dichos autores modelaron las riostras mediante resortes considerando una variación no-lineal de su rigidez y sin capacidad para resistir esfuerzos de compresión, mientras que el *software* utilizado en el análisis correspondió a ABAQUS.

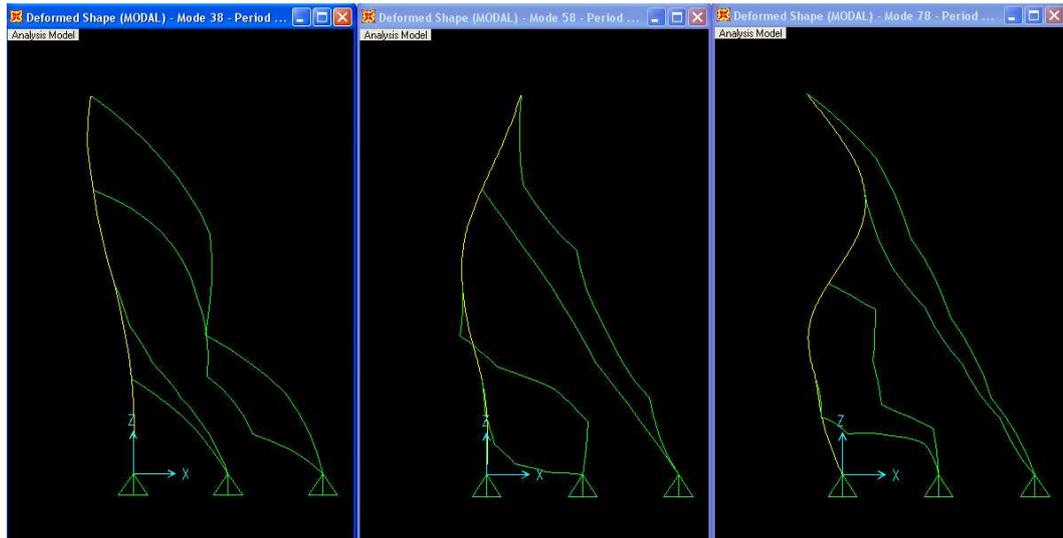


Figura 4.4: Formas modales del mástil arriostrado analizado

4.3 Registros sísmicos

Registros locales

El terremoto de San Juan (en adelante SJ), del 23 de noviembre de 1977, presentó una magnitud en la escala de Richter de 7.4, con una profundidad del foco de 40 km y con una duración de aproximadamente 55 seg. [34]. La componente Este-Oeste (ver Fig. 4.5), registrada en la estación ubicada en la Sede Central del Instituto Nacional de Prevención Sísmica (INPRES) ha sido utilizada en este análisis, presentando la misma un pico de aceleración del terreno, PGA (*peak ground acceleration*), de 0.193 g.

El terremoto de Mendoza (en adelante M), del 26 de enero 1985, presentó una magnitud en la escala de Richter de 5.9, con una profundidad del foco de 12 km y con una duración de la fase intensa de aproximadamente 3 seg. [35]. Se utilizó la componente Norte-Sur (ver Fig. 4.5), registrada en la estación Municipalidad de Las Heras, presentando un PGA de 0.408 g. Los datos de los registros SJ y M fueron obtenidos de Frau [19].

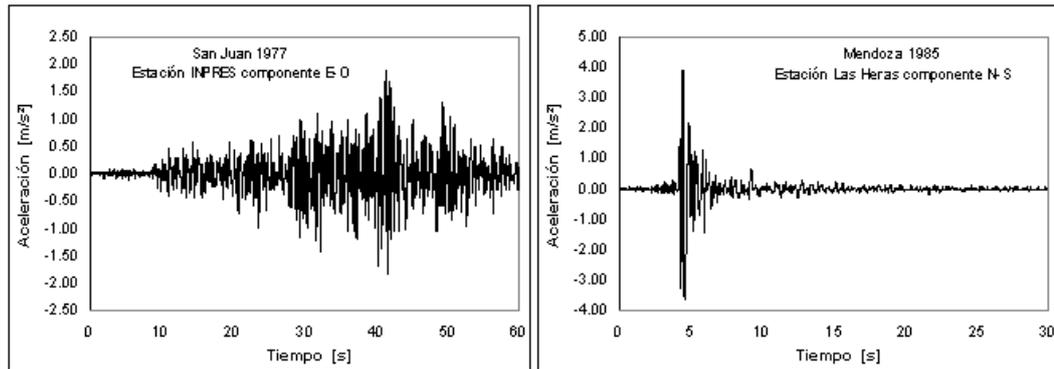


Figura 4.5: Componente horizontal principal de los terremotos de SJ y M.

Registros internacionales

El terremoto de Tabas (en adelante T), Irán, ocurrido el 16 de septiembre de 1978, presentó una magnitud en la escala de Richter de 7.8, con una profundidad del foco de 33 km y con una duración de la fase intensa de aproximadamente 12 seg. Se utilizó la componente horizontal TR registrada en la estación Tabas (ver Fig. 4.6), presentando la misma un PGA de 0.850 g. Los datos del registro fueron obtenidos de PEER [57].

El terremoto de Valparaíso (en adelante V), Chile, ocurrido el 3 de marzo de 1985, presentó una magnitud en la escala de Richter de 7.8, con epicentro en el mar a unos 20 km de la costa y con una profundidad del foco de 33 km. Se utilizó la componente horizontal 10 registrada en la estación Llolleo (ver Fig. 4.6), presentando la misma un PGA de 0.669 g. Los datos del registro fueron obtenidos de COSMOS [10].

El terremoto de Northridge (en adelante N), E.E.U.U., del 17 de enero de 1994, presentó una magnitud en la escala de Richter de 6.7, con una profundidad del foco de 19 km. Se utilizó la componente horizontal Syl360 registrada en la estación 24514 Sylmar - Olive View Med FF (ver Fig. 4.6), presentando la misma un PGA de 0.843 g. Los datos del registro fueron obtenidos de PEER [57].

El terremoto de Kobe (en adelante K), Japón, del 17 de enero de 1995, presentó una magnitud en la escala de Richter de 7.2, con una profundidad del foco de 16 km por debajo de la isla de Awaji-shima. Se utilizó la componente horizontal 0 registrada en la

estación 0 KJMA (ver Fig. 4.6), presentando la misma un PGA de 0.821 g. Los datos del registro fueron obtenidos de PEER [57].

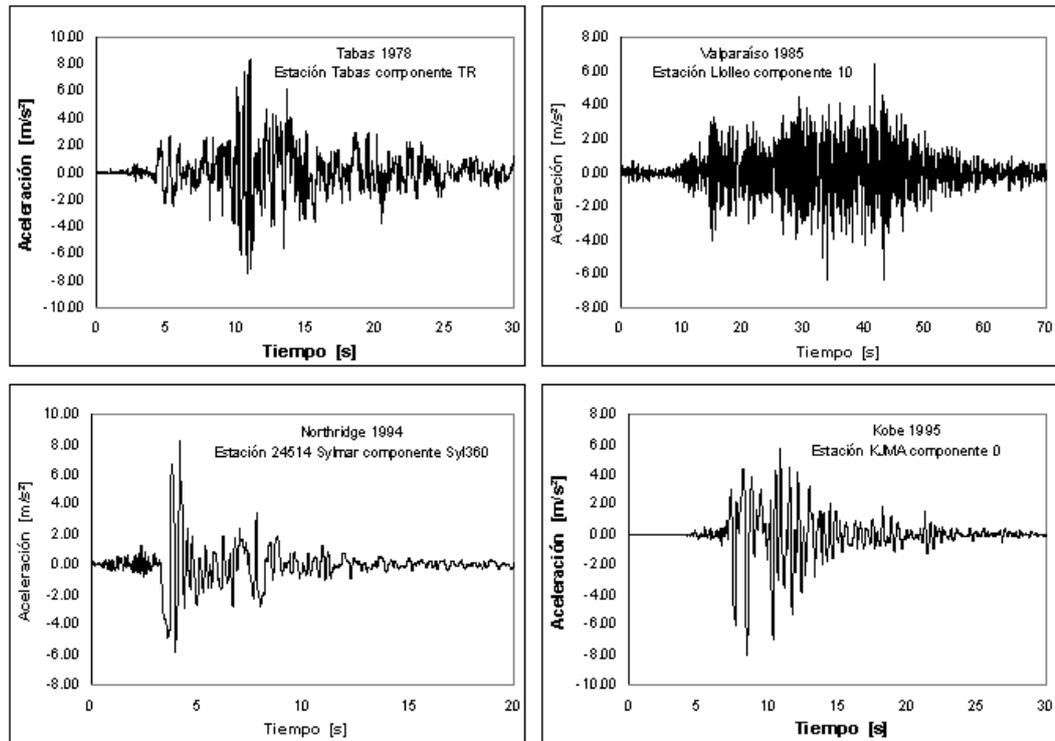


Figura 4.6: Componente horizontal principal de los terremotos de T, V, N y K.

4.4 Parámetros de diseño

Al momento del diseño o refuerzo de estas tipologías estructurales, suelen aparecer ciertas incertidumbres asociadas a la modelación dinámica del problema, tales como: i) nivel de pretensión al que estarán o están sujetas las riostras, ii) amortiguamiento equivalente (Rayleigh) de la estructura y iii) rigidez flexional del mástil. Es por ello que a fin de evaluar la respuesta del sistema frente a posibles cambios en sus parámetros de diseño, se llevan adelante simulaciones con distintas combinaciones posibles de los parámetros considerados variables.

Nivel de pretensión en riostras

El nivel de pretensión inicial, representa la fuerza de tracción necesaria que se les da a las riostras a efectos de suministrarle estabilidad al sistema estructural. Esta pretensión es usualmente expresada como un porcentaje de la resistencia última o de rotura de la riostra.

En la práctica, esta pretensión varía en muchos casos entre el 8 al 12 % de la tensión última, en tanto la ANSI/TIA/EIA-222-F [2] fija a fines de diseño, un valor comprendido entre el 8 y el 15 %. Muchas veces suele suceder que por no disponer de dispositivos adecuados para medir la pretensión inicial a suministrar a las riostras, éstas presenten un valor no precisado, pudiendo incluso estar fuera del rango recomendado. La variación de la pretensión no puede ser arbitraria ya que, por otras razones como la acción del viento, las riostras pueden estar sujetas a *flutter* para altas tensiones o *galloping* para tensiones bajas.

En el presente análisis a fin de cubrir el rango establecido para los valores indicados de pretensión, y de acuerdo a la sección y tipo de material utilizado para las riostras, se consideran los siguientes valores de pretensión inicial dadas a las mismas: 15.0, 20.0, 25.0, 27.5, 30.0, 32.5 y 35.0 kN.

Amortiguamiento estructural equivalente

Este amortiguamiento resulta ser matemáticamente proporcional a la matriz de masa y de rigidez del sistema, y su consideración permite el desacoplamiento de la matriz de amortiguamiento [67]. Dado que el amortiguamiento contribuye a reducir las vibraciones originadas tanto por terremotos como por viento, es necesario adoptar un valor adecuado para el mismo al momento de la modelación.

De mediciones experimentales realizadas por Harikrishna [30] sobre un mástil reticulado y arriostrado, de 50 m de altura, se determinó que el amortiguamiento equivalente variaba aproximadamente entre el 1 y el 3 % del crítico, obteniendo un amortiguamiento promedio del 1.6 %. Por otro lado, la IASS [32] recomienda un valor del 3 % para uniones abulonadas, el Proyecto INPRES-CIRSOC-103-Parte 1 [36] adopta un valor del 2 %, en tanto la ANSI/TIA/EIA-222-F [2] fija un valor del 5 % cuando se realiza un análisis sísmico

temporal. La literatura reporta que diversos autores utilizan en sus estudios amortiguamientos que varían entre el 1 y el 5 % del crítico.

En el presente estudio, y a fin de cubrir los valores habitualmente utilizados en el análisis dinámico de mástiles arriostrados, se consideran tres casos de amortiguamiento equivalente correspondientes al 1, 2 y 3 % del crítico. Los coeficientes de proporcionalidad a la matriz de masa y a la matriz de rigidez resultaron ser, respectivamente y para cada nivel de amortiguamiento, de 0.118 y 0.00070, 0.237 y 0.00144, y 0.356 y 0.00209.

Rigidez flexional del mástil

La rigidez flexional del mástil puede resultar fehacientemente determinada al momento del diseño. No obstante suele suceder que debido a la incorporación de nuevos elementos de comunicaciones a ser sustentados por un mástil arriostrado existente, o bien por una necesidad de incrementar la altura del mismo por razones de mejorar las señales, resulta necesario el refuerzo estructural del mástil. Estos refuerzos modifican la rigidez flexional, y con ello, puede verse afectada la respuesta dinámica del sistema.

En este estudio se consideran tres valores de momentos de segundo orden a asignar al mástil reticulado, a fin de evaluar la respuesta del sistema, siendo los mismos: $1.80 \cdot 10^{-3}$, $2.25 \cdot 10^{-3}$ y $2.70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$.

4.5 Respuesta sísmica

La dirección de análisis para la evaluación de la respuesta sísmica del sistema fue la definida como A (ver Fig. 4.2), coincidente con la dirección del *input*. Los modelos de análisis (63 en total) surgen de las distintas combinaciones posibles de los parámetros de diseño considerados como variables. En Tablas 4.2 y 4.3 se indica la designación de cada uno de los modelos, y el valor de los parámetros de diseño asignados a los mismos.

Como respuesta dinámica no-lineal, fueron obtenidos los desplazamientos en la cima del mástil (desplazamientos relativos a los del terreno) en valor absoluto y el corte basal en la base de este. En las Figuras 4.7 a 4.18 se muestran las respuestas para los

modelos analizados y para cada uno de los registros considerados, de las cuales se puede observar que para casi todos los registros utilizados, y cuando los valores adoptados de amortiguamiento y rigidez flexional del mástil fueron los mayores (3 % y $2.70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ respectivamente), las respuestas evaluadas del sistema se vieron poco afectadas por los distintos valores adoptados de pretensión inicial en riostras. Los desplazamientos en la cima del mástil cuando se consideraron como *input* los registros de Tabas, Valparaíso y Kobe estuvieron en el orden de los 0.40 m, y en donde el valor máximo alcanzado fue de 0.62 m y correspondió al modelo 15.0-1-1.80 con el registro de Kobe. La variación en los valores máximos del corte basal hallados para cada registro utilizado, se correspondió con la variación del PGA en cada uno de éstos, es decir a mayor PGA, mayor corte basal en el sistema.

El peso del mástil resultó aproximadamente de 71.80 kN, mientras que el corte basal máximo para los modelos analizados y los registros considerados, resultó entre el 4 y el 30 % de dicho peso. El máximo corte basal encontrado fue de 23.0 kN, y correspondió al modelo 15.0-1-1.80 sujeto al registro de Kobe. Se observó que cuando se modificó la pretensión inicial de las riostras y/o la rigidez flexional del mástil, la respuesta estructural del sistema se vio modificada fuertemente, siendo esto último más notorio para los modelos con valores mínimos de amortiguamiento y rigidez flexional.

En las Figuras 4.19 a 4.24 se comparan las respuestas máximas en valores absolutos obtenidos para todos los registros sísmicos y para los modelos a los cuales se les varió la pretensión inicial de riostras y la rigidez flexional del mástil, pero manteniendo el amortiguamiento en cada caso en el 1, 2 y 3 % del crítico. De estas figuras se observa que la respuesta es fuertemente dependiente de las características particulares de cada registro, y que para algunos registros, esta respuesta varía al verse modificada la pretensión dada a las riostras.

En las Figuras 4.25 a 4.36 se muestran las historias en el tiempo (en la fase más intensa del registro) de las respuestas evaluadas correspondientes a los modelos 15.0-1-1.80, 27.5-1-1.80 y 35.0-1-1.80, sujetos a los registros considerados en el estudio, e indicándose los valores máximos absolutos obtenidos.

Modelo	Pretensión [kN]	Amortiguamiento [%]	Rigidez [m ⁴]
15.0-1-1.80	15.0	1	0.00180
15.0-1-2.25	15.0	1	0.00225
15.0-1-2.70	15.0	1	0.00270
15.0-2-1.80	15.0	2	0.00180
15.0-2-2.25	15.0	2	0.00225
15.0-2-2.70	15.0	2	0.00270
15.0-3-1.80	15.0	3	0.00180
15.0-3-2.25	15.0	3	0.00225
15.0-3-2.70	15.0	3	0.00270
20.0-1-1.80	20.0	1	0.00180
20.0-1-2.25	20.0	1	0.00225
20.0-1-2.70	20.0	1	0.00270
20.0-2-1.80	20.0	2	0.00180
20.0-2-2.25	20.0	2	0.00225
20.0-2-2.70	20.0	2	0.00270
20.0-3-1.80	20.0	3	0.00180
20.0-3-2.25	20.0	3	0.00225
20.0-3-2.70	20.0	3	0.00270
25.0-1-1.80	25.0	1	0.00180
25.0-1-2.25	25.0	1	0.00225
25.0-1-2.70	25.0	1	0.00270
25.0-2-1.80	25.0	2	0.00180
25.0-2-2.25	25.0	2	0.00225
25.0-2-2.70	25.0	2	0.00270
25.0-3-1.80	25.0	3	0.00180
25.0-3-2.25	25.0	3	0.00225
25.0-3-2.70	25.0	3	0.00270
27.5-1-1.80	27.5	1	0.00180
27.5-1-2.25	27.5	1	0.00225
27.5-1-2.70	27.5	1	0.00270
27.5-2-1.80	27.5	2	0.00180
27.5-2-2.25	27.5	2	0.00225
27.5-2-2.70	27.5	2	0.00270
27.5-3-1.80	27.5	3	0.00180
27.5-3-2.25	27.5	3	0.00225
27.5-3-2.70	27.5	3	0.00270

Tabla 4.2: Modelos considerados en el análisis

Modelo	Pretensión [kN]	Amortiguamiento [%]	Rigidez [m ⁴]
30.0-1-1.80	30.0	1	0.00180
30.0-1-2.25	30.0	1	0.00225
30.0-1-2.70	30.0	1	0.00270
30.0-2-1.80	30.0	2	0.00180
30.0-2-2.25	30.0	2	0.00225
30.0-2-2.70	30.0	2	0.00270
30.0-3-1.80	30.0	3	0.00180
30.0-3-2.25	30.0	3	0.00225
30.0-3-2.70	30.0	3	0.00270
32.5-1-1.80	32.5	1	0.00180
32.5-1-2.25	32.5	1	0.00225
32.5-1-2.70	32.5	1	0.00270
32.5-2-1.80	32.5	2	0.00180
32.5-2-2.25	32.5	2	0.00225
32.5-2-2.70	32.5	2	0.00270
32.5-3-1.80	32.5	3	0.00180
32.5-3-2.25	32.5	3	0.00225
32.5-3-2.70	32.5	3	0.00270
35.0-1-1.80	35.0	1	0.00180
35.0-1-2.25	35.0	1	0.00225
35.0-1-2.70	35.0	1	0.00270
35.0-2-1.80	35.0	2	0.00180
35.0-2-2.25	35.0	2	0.00225
35.0-2-2.70	35.0	2	0.00270
35.0-3-1.80	35.0	3	0.00180
35.0-3-2.25	35.0	3	0.00225
35.0-3-2.70	35.0	3	0.00270

Tabla 4.3: Modelos considerados en el análisis (continuación de Tabla 4.2)

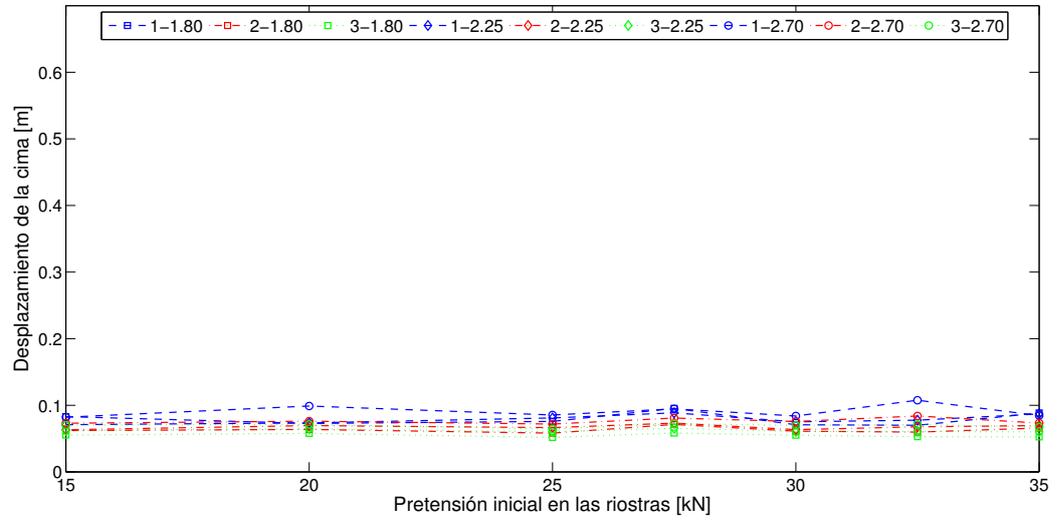


Figura 4.7: Desplazamientos de la cima máximos para el registro de SJ

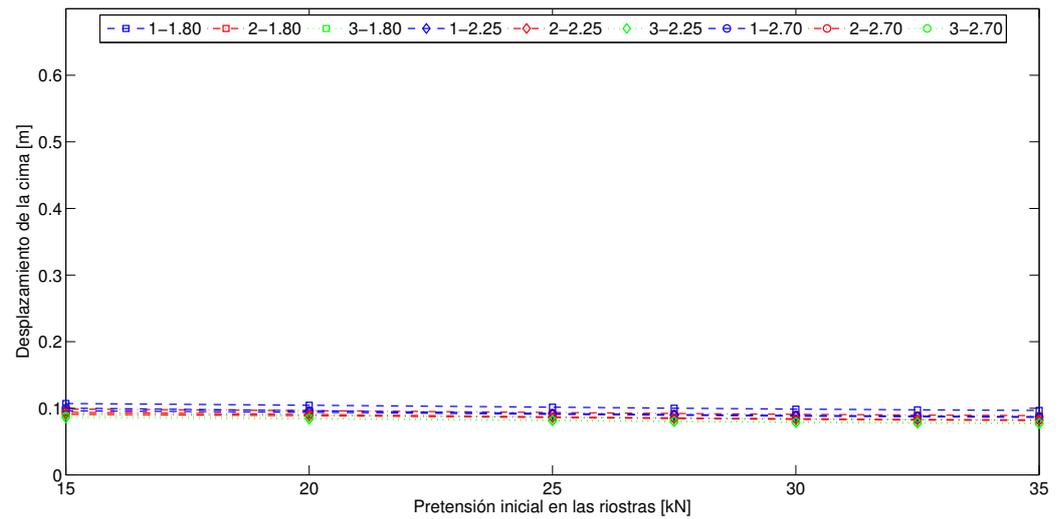


Figura 4.8: Desplazamientos de la cima máximos para el registro de M

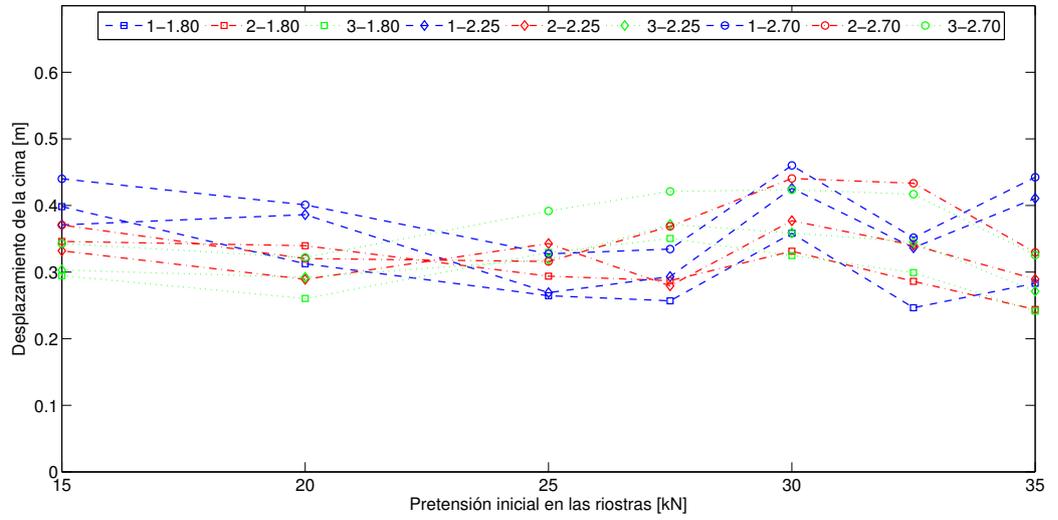


Figura 4.9: Desplazamientos de la cima máximos para el registro de T

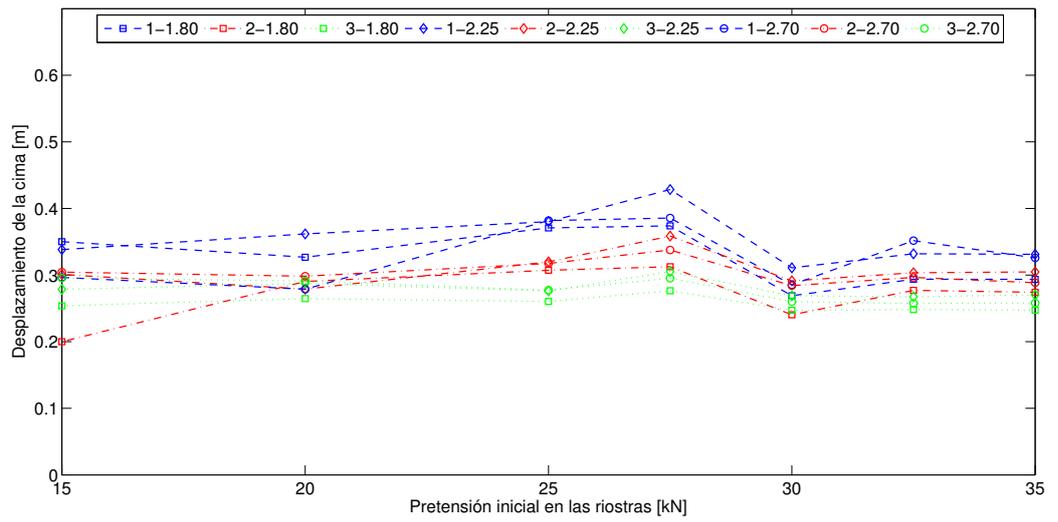


Figura 4.10: Desplazamientos de la cima máximos para el registro de V

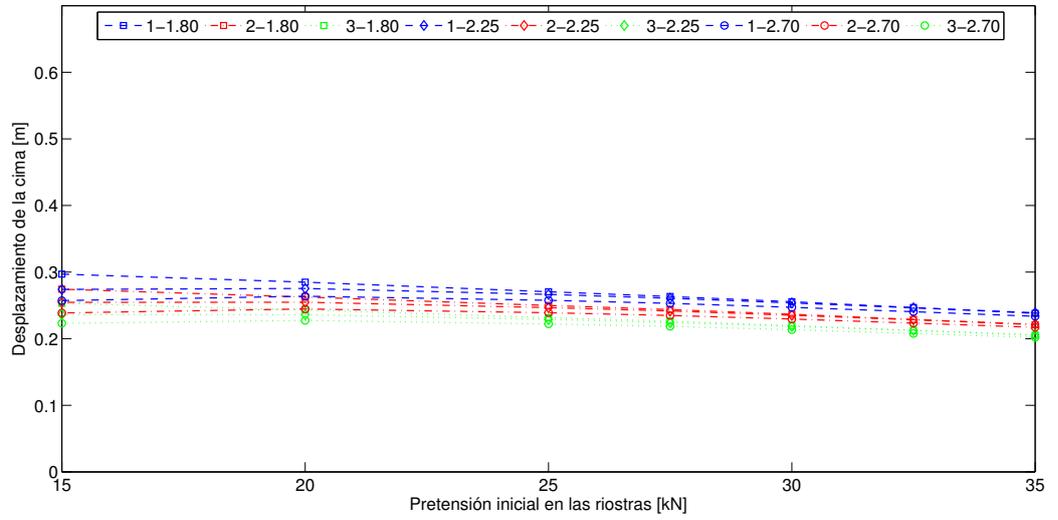


Figura 4.11: Desplazamientos de la cima máximos para el registro de N

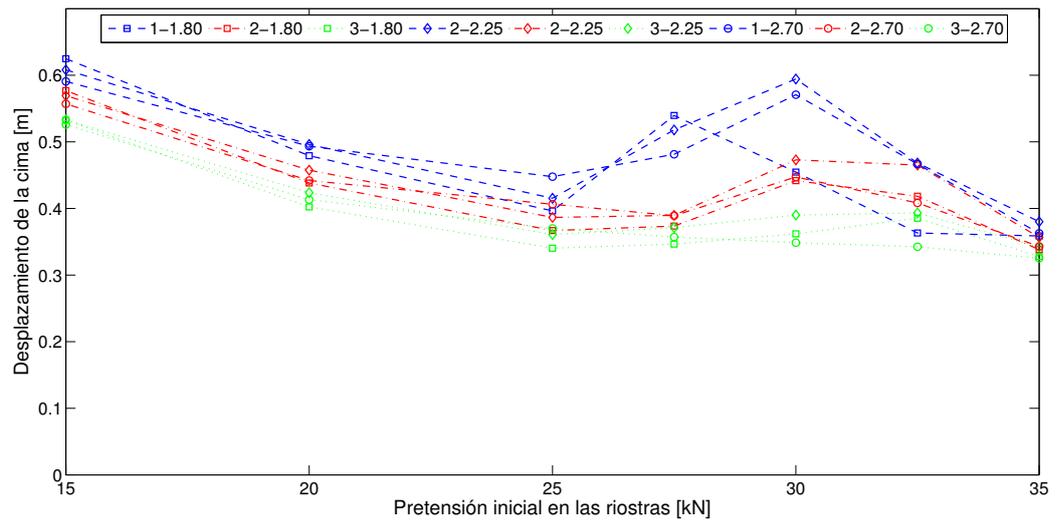


Figura 4.12: Desplazamientos de la cima máximos para el registro de K

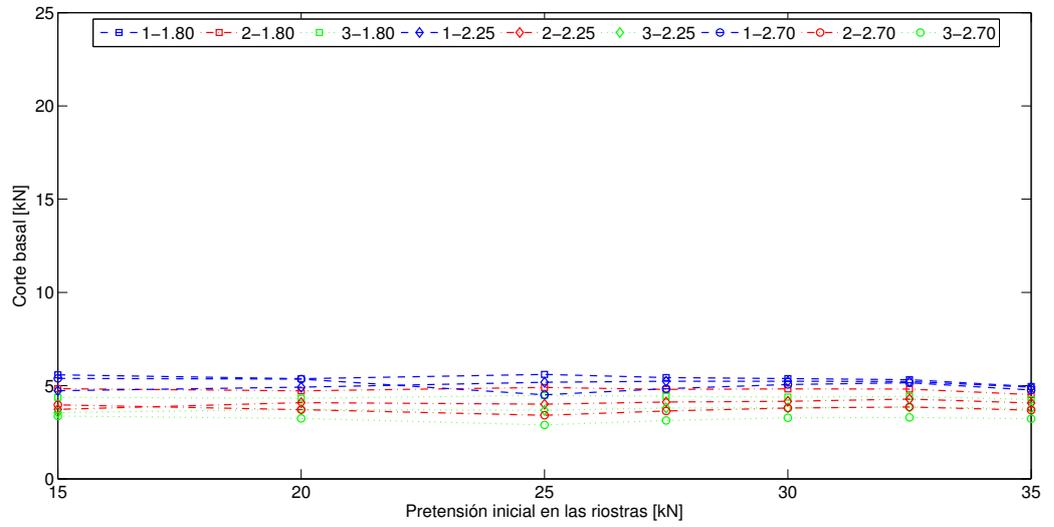


Figura 4.13: Corte basal máximos para el registro de SJ

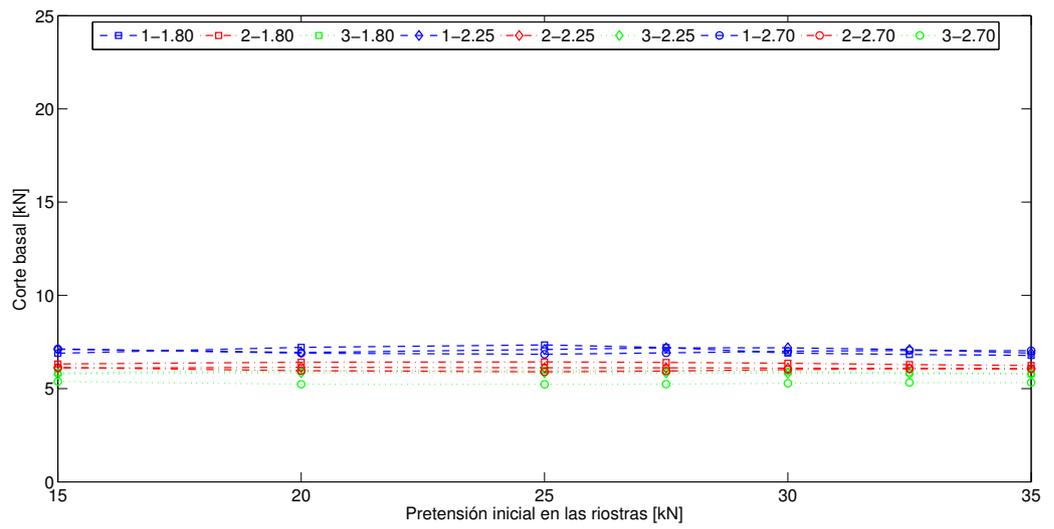


Figura 4.14: Corte basal máximos para el registro de M

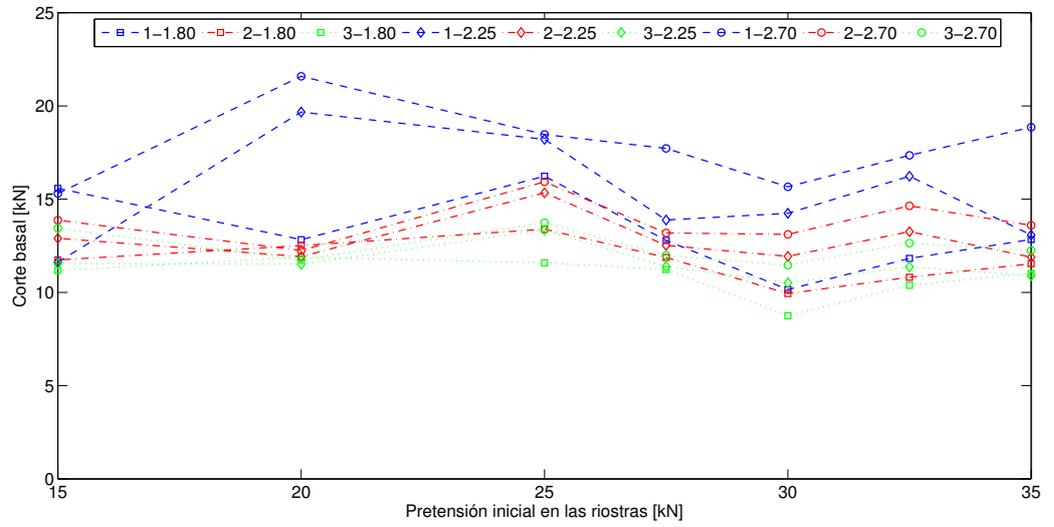


Figura 4.15: Corte basal máximos para el registro de T

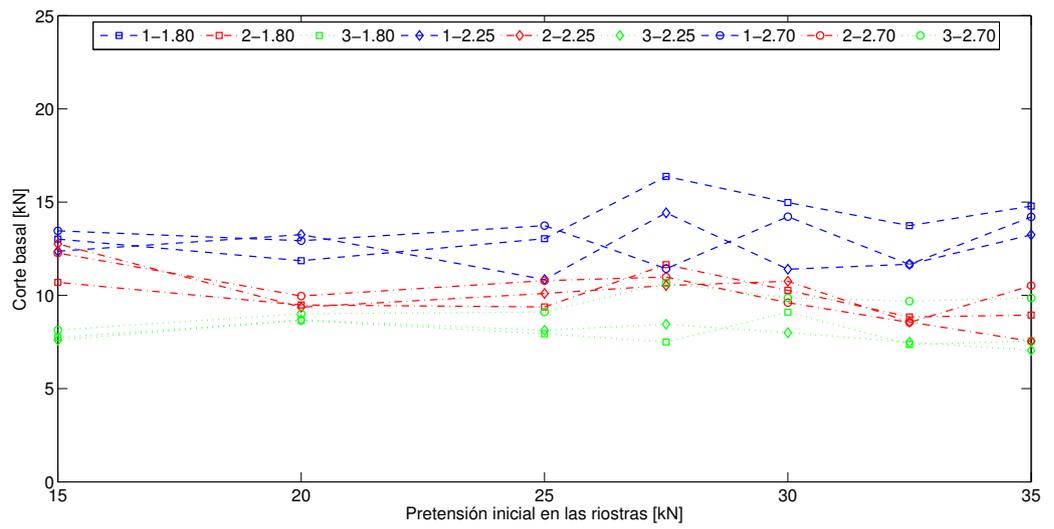


Figura 4.16: Corte basal máximos para el registro de V

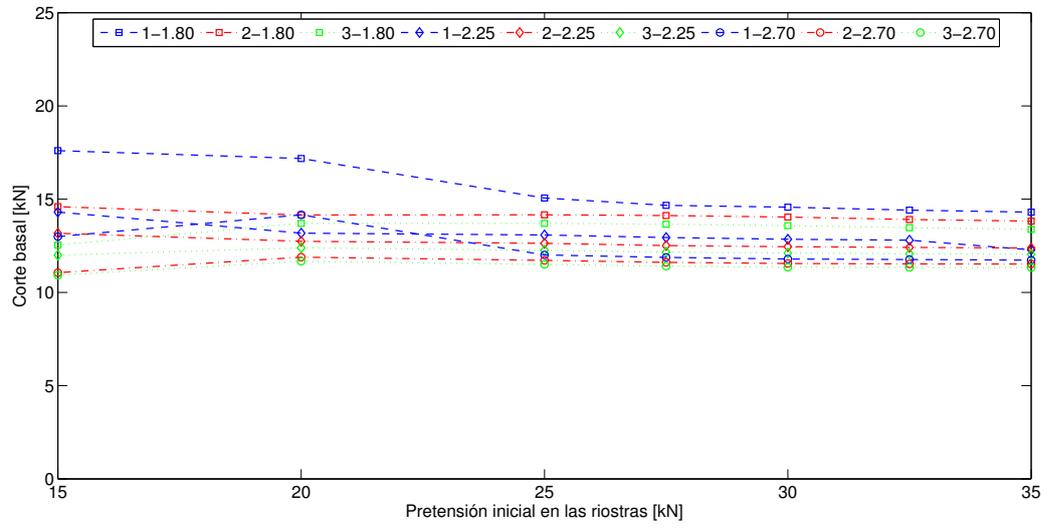


Figura 4.17: Corte basal máximos para el registro de N

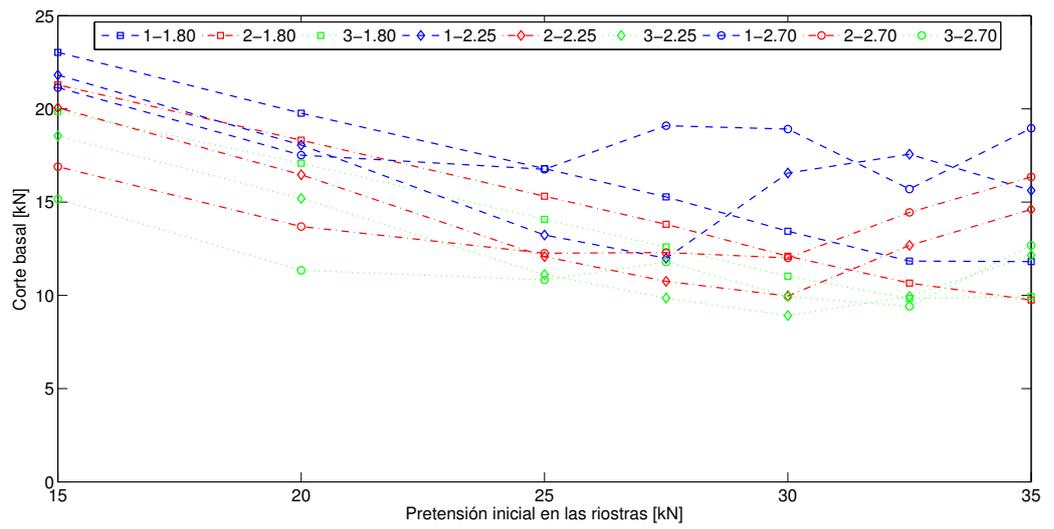


Figura 4.18: Corte basal máximos para el registro de K

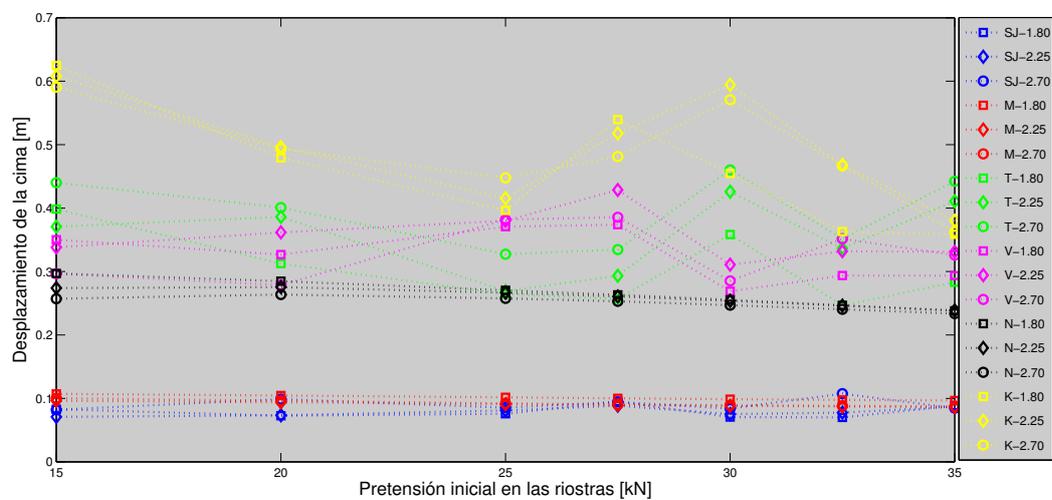


Figura 4.19: Desplazamiento de la cima para un amortiguamiento del 1 %

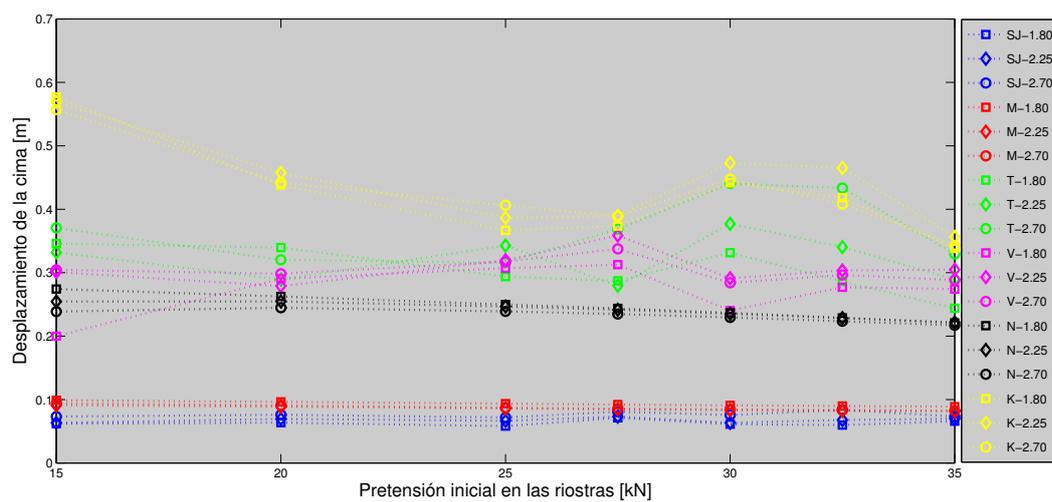


Figura 4.20: Desplazamiento de la cima para un amortiguamiento del 2 %

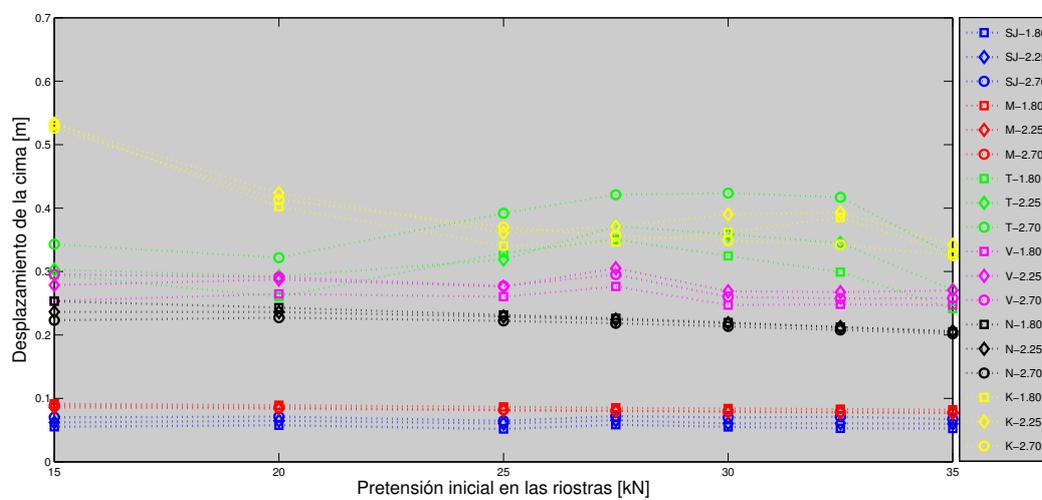


Figura 4.21: Desplazamiento de la cima para un amortiguamiento del 3 %

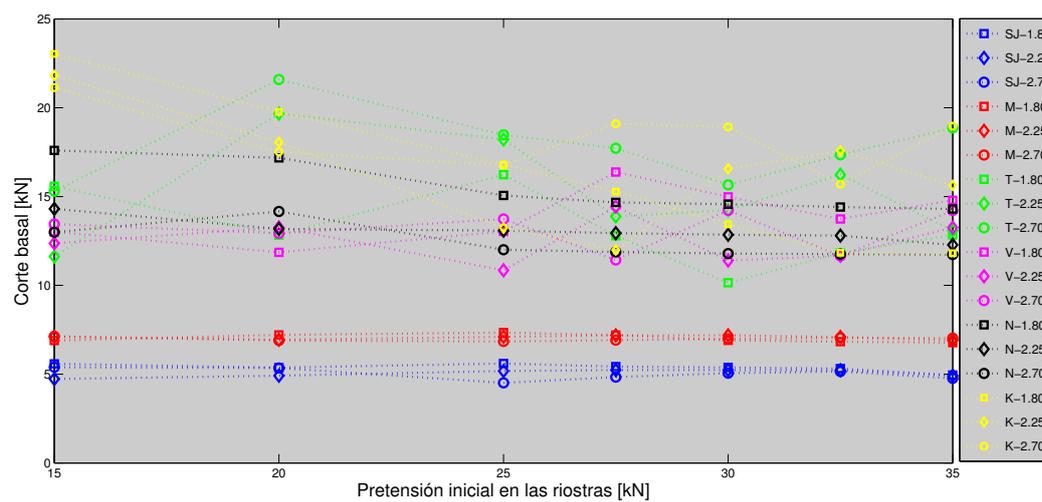


Figura 4.22: Corte basal para un amortiguamiento del 1 %

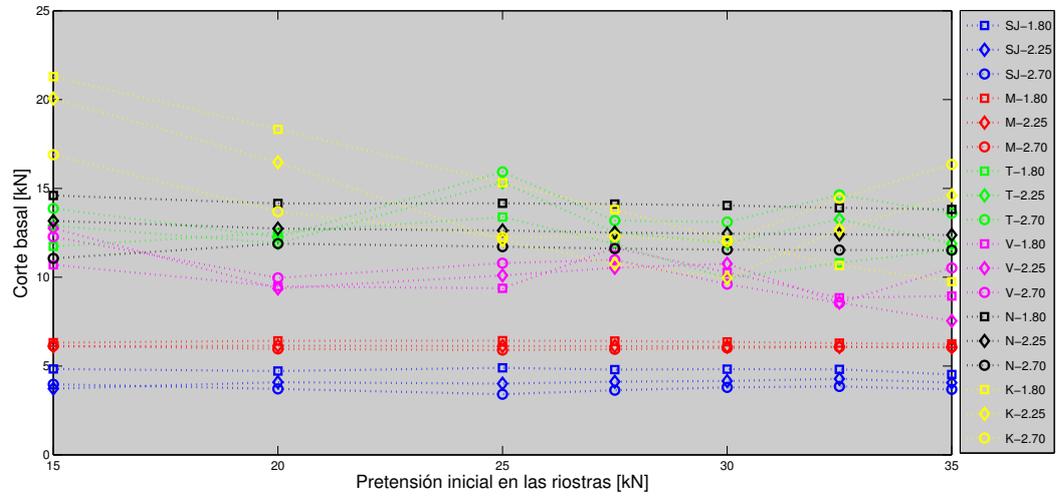


Figura 4.23: Corte basal para un amortiguamiento del 2 %

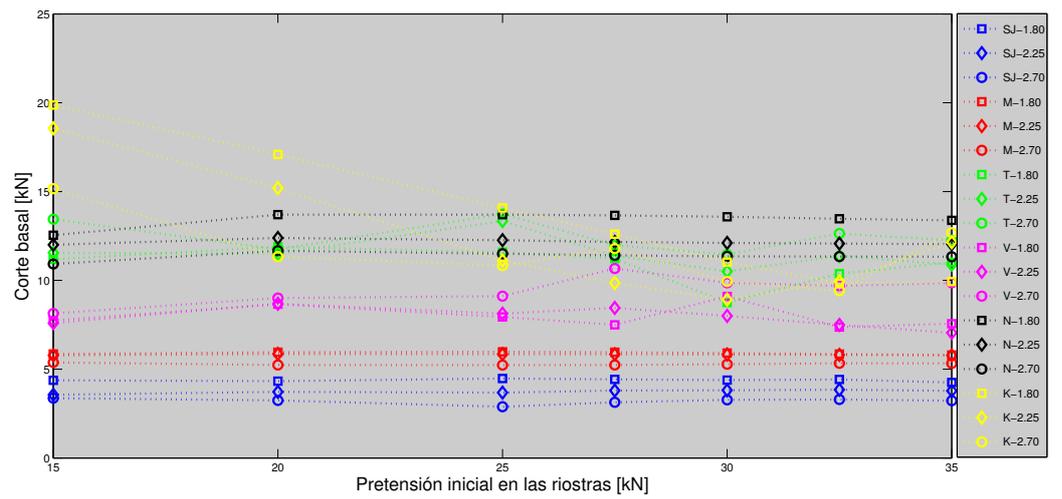


Figura 4.24: Corte basal para un amortiguamiento del 3 %

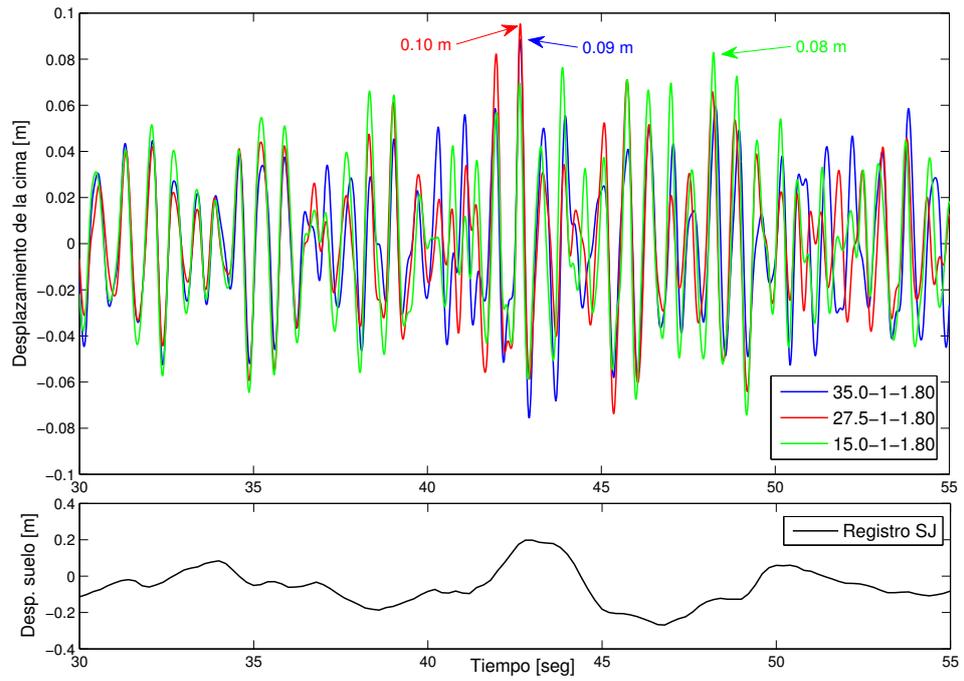


Figura 4.25: Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de SJ

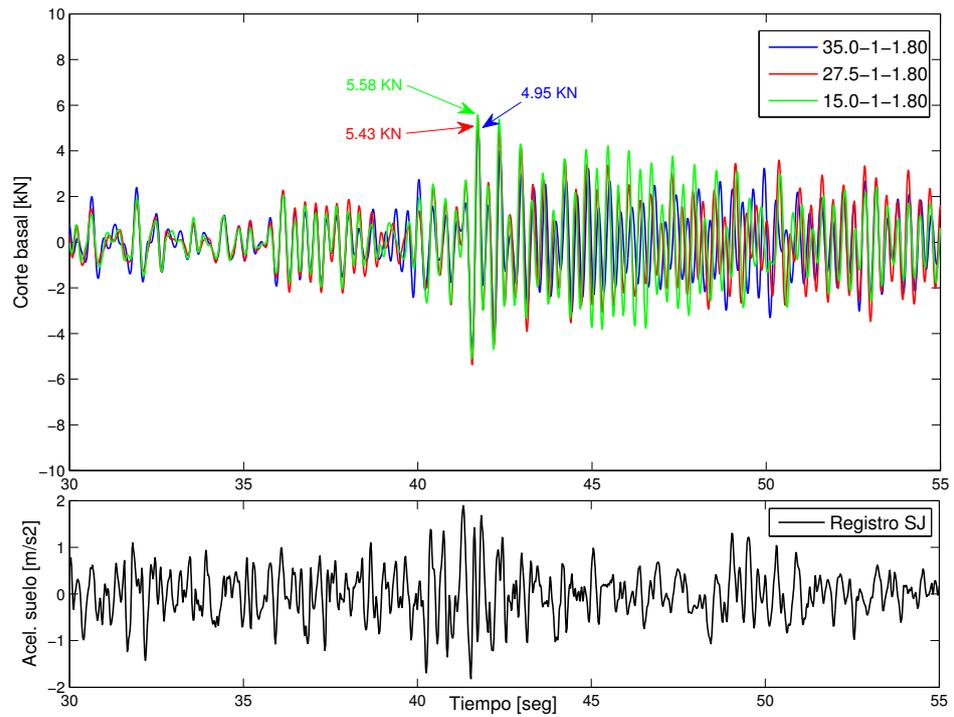


Figura 4.26: Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de SJ

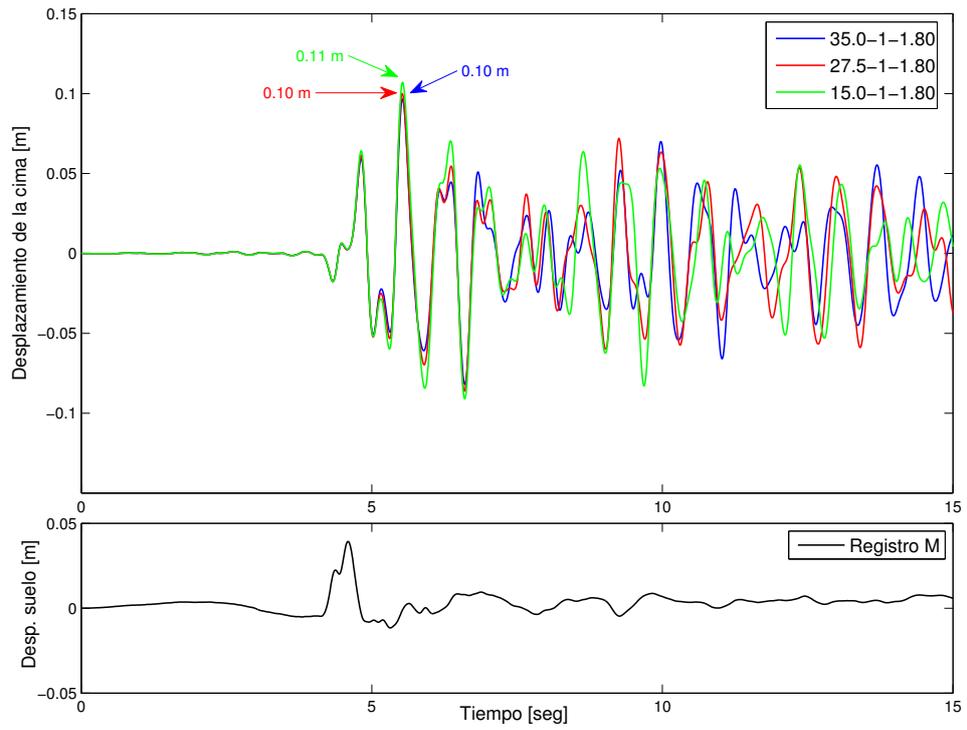


Figura 4.27: Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de M

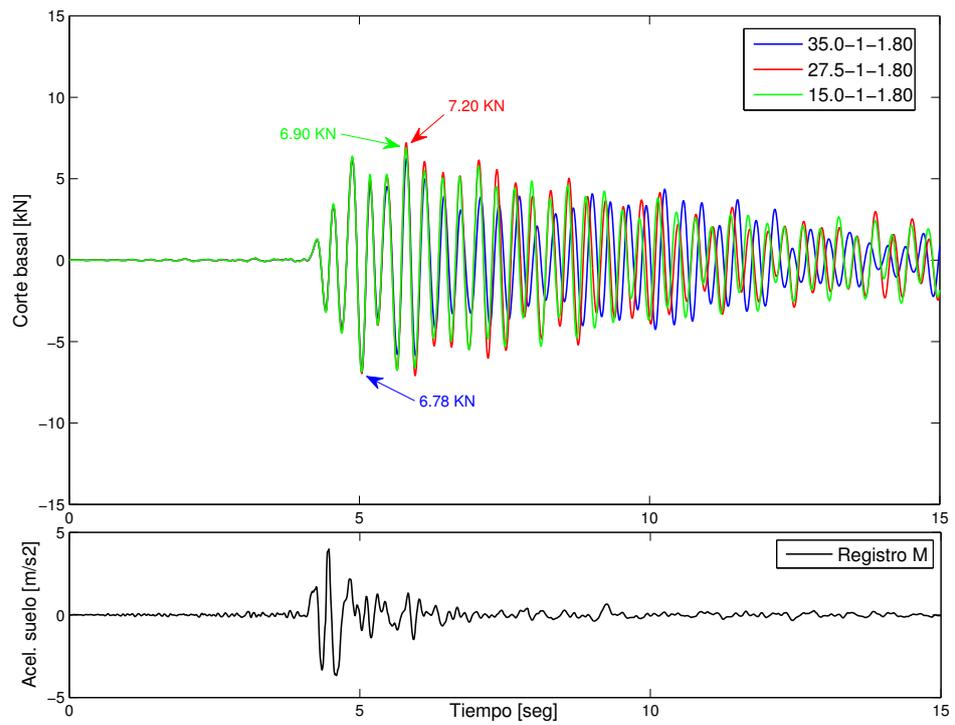


Figura 4.28: Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de M

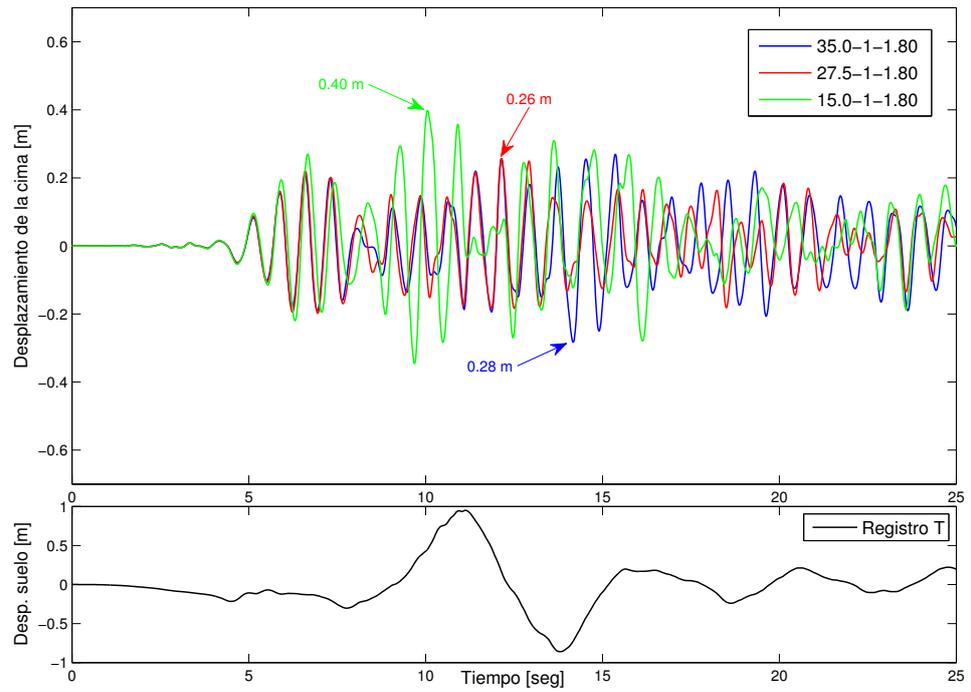


Figura 4.29: Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de T

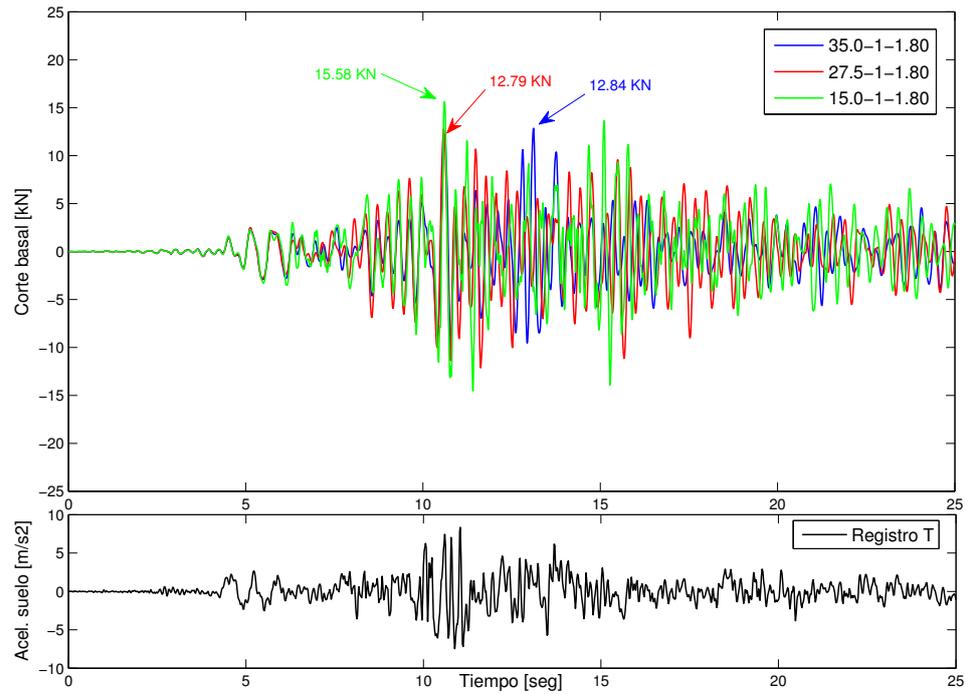


Figura 4.30: Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de T

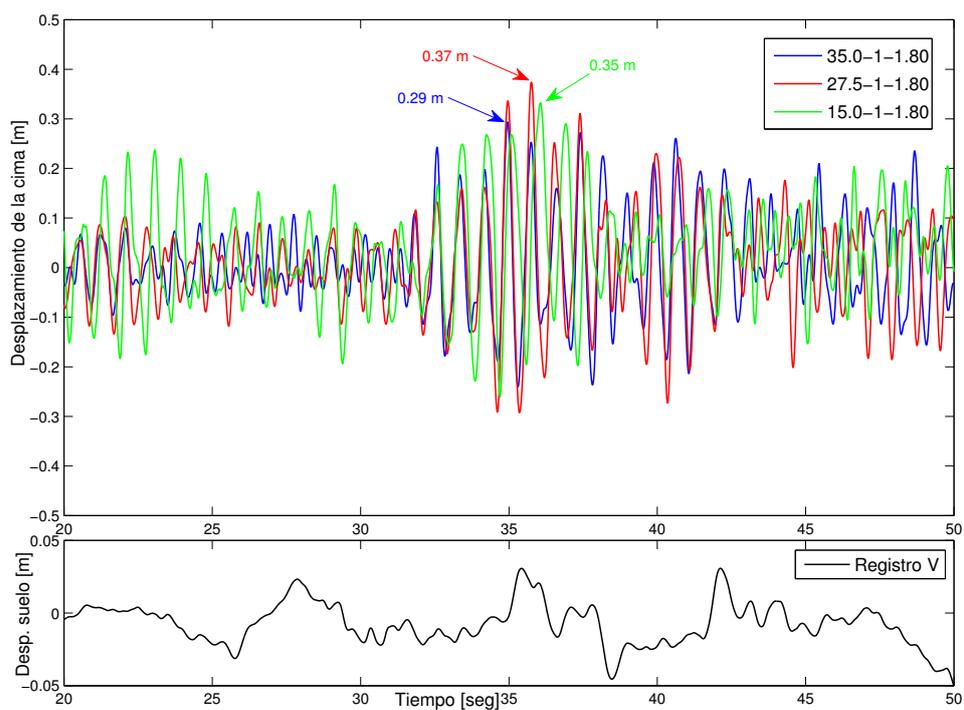


Figura 4.31: Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de V

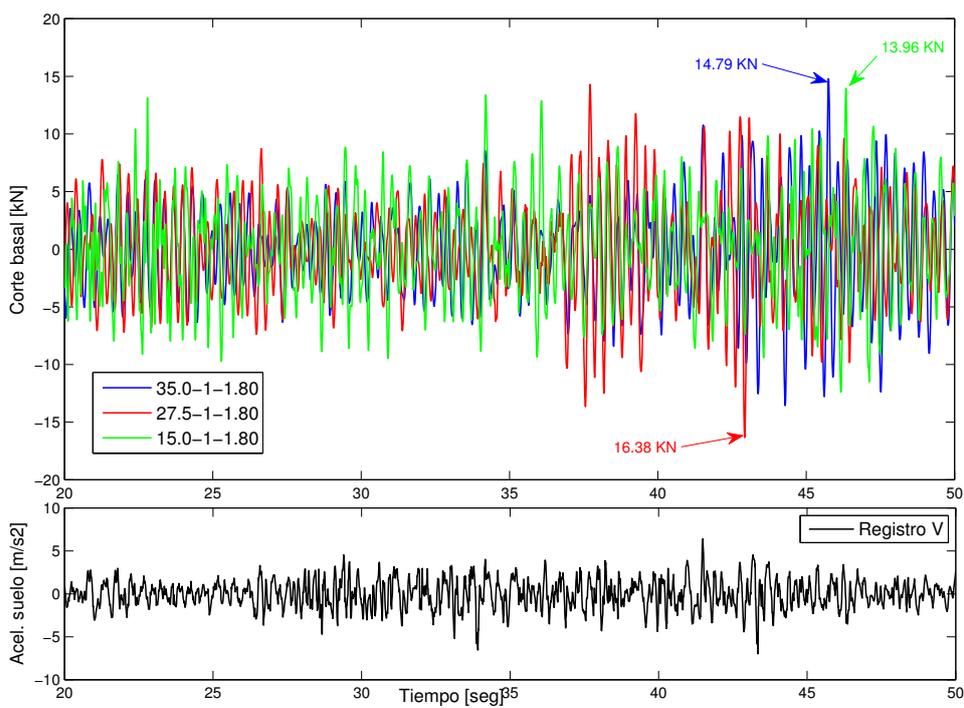


Figura 4.32: Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de V

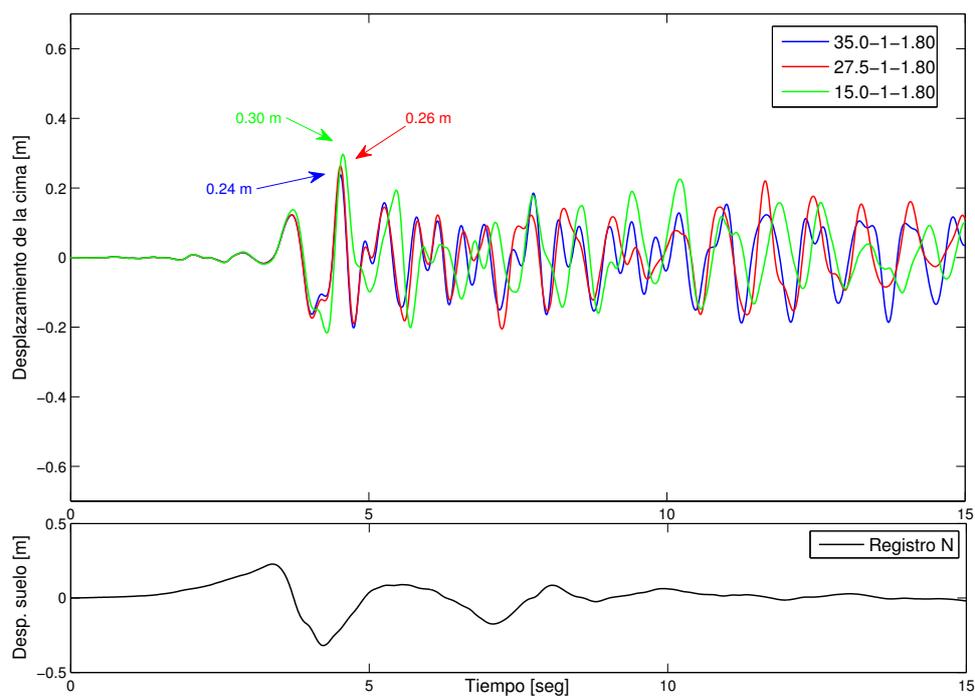


Figura 4.33: Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de N

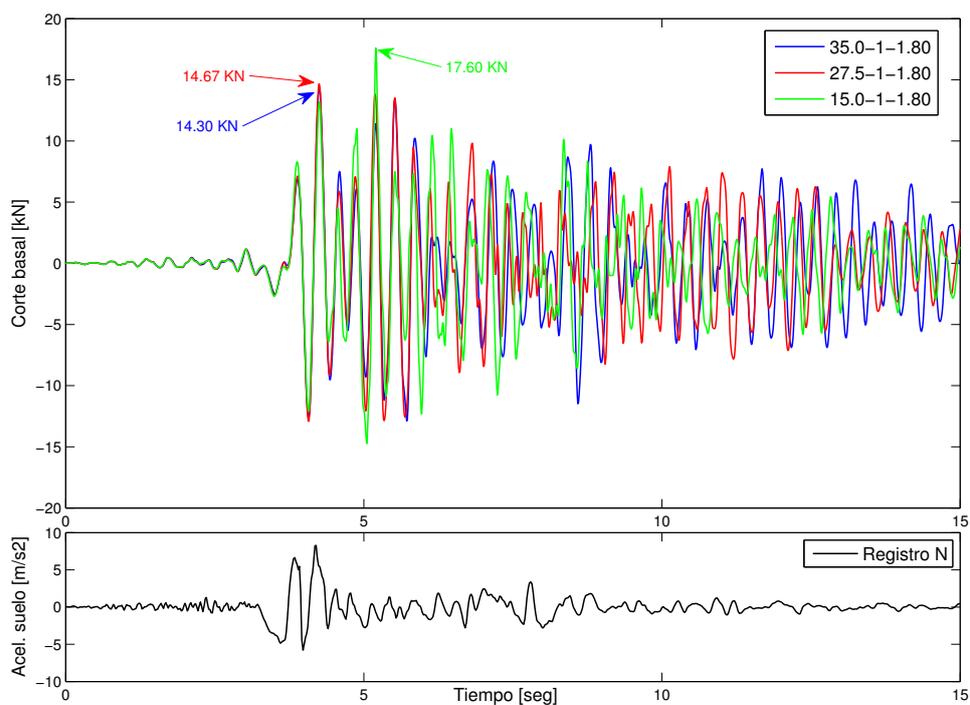


Figura 4.34: Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de N

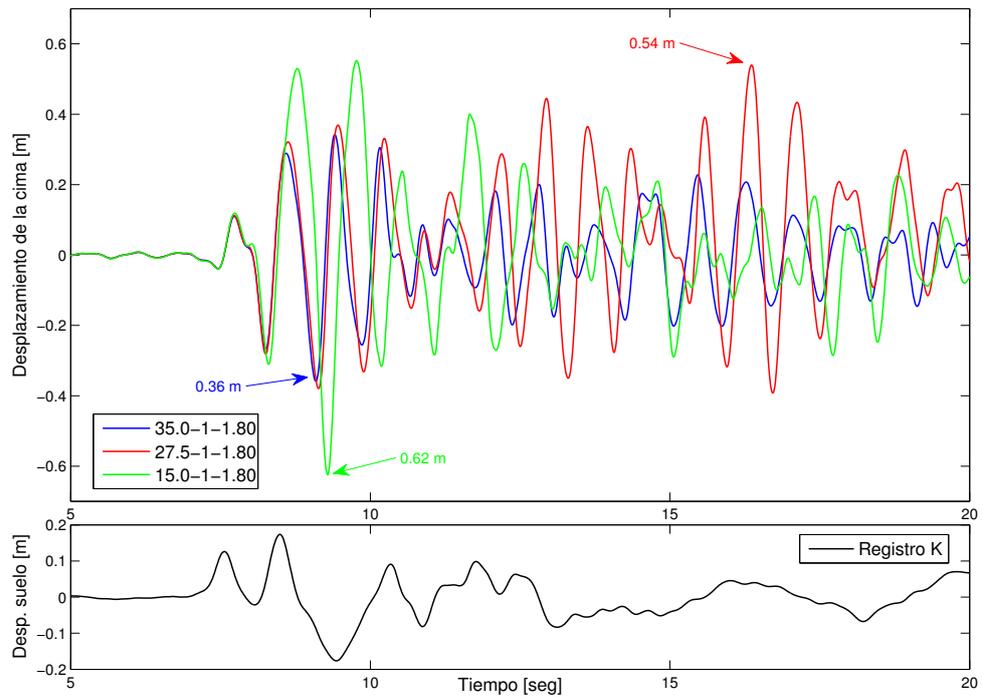


Figura 4.35: Respuesta en el tiempo del desplazamiento de la cima para el registro de K

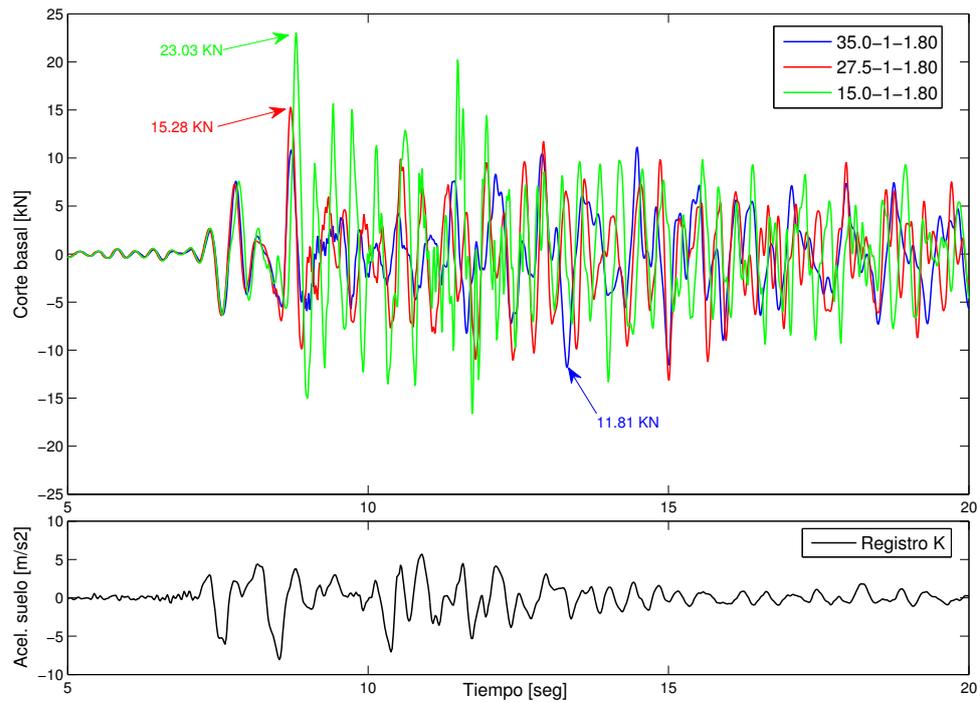


Figura 4.36: Respuesta en el tiempo del corte basal para el registro de K

4.6 Conclusiones

Un análisis dinámico no-lineal vía elementos finitos fue tratado detalladamente en el presente capítulo para evaluar la respuesta sísmica de un mástil arriostrado. A partir de los distintos niveles previstos para los parámetros de diseño (pretensión-amortiguamiento-rigidez) considerados como variables, las posibles combinaciones de los mismos hicieron necesaria la simulación numérica de 63 modelos, los cuales fueron evaluados ante los seis registros sísmicos (SJ, M, T, V, N y K) seleccionados como *inputs*.

Primeramente, se evaluó la vibración libre o natural del denominado caso "estándar" (25-2-1.80), lo que permitió la verificación preliminar del modelo con respecto a lo hecho por otros autores a partir de la determinación de las propiedades dinámicas del sistema y su posterior comparación. La modelación con el *software* SAP2000 entregó resultados muy satisfactorios.

Seguidamente se procedió al análisis de los distintos modelos sujetos a los *inputs* considerados. Se observó que a medida que el amortiguamiento estructural aumentó del 1 al 3 %, las respuestas evaluadas en casi todos los casos disminuyeron entre el 5 y el 40 %, dependiendo esto último del nivel de pretensión dado a las riostras, de la rigidez del mástil y del registro sísmico considerado como *input*. Para casi todos los casos y cuando los valores adoptados de amortiguamiento y rigidez fueron los mayores, las respuestas del sistema se vieron poco afectadas por los distintos valores de pretensión en las riostras que fueron considerados en el análisis. Se observaron demandas relativamente importantes en las respuestas evaluadas frente al nivel de sensibilidad requerido por estos sistemas de comunicaciones. Los valores máximos encontrados fueron de 0.62 m de desplazamiento en la cima del mástil (0.52 % de su altura) y de 23.0 kN de corte basal en la base de este (32 % de su peso), correspondientes al modelo 15.0-1-1.80 y sujeto al registro de Kobe. En general, para los modelos analizados y registros considerados, el corte basal estuvo en el orden del 4 al 30 % del peso del mástil. Al variar la pretensión inicial de las riostras y/o la rigidez flexional del mástil, las propiedades dinámicas del sistema cambian, encontrándose que para ciertos registros sísmicos pareciera producirse un posible efecto de amplificación dinámica en la respuesta del sistema. Esto último resultó más notorio para los modelos con valores

mínimos de amortiguamiento y rigidez flexional. Por ello la modificación de la rigidez del mástil, así como también, de los niveles de pretensión en las riostras, podría conducir a fuertes demandas en la respuesta del sistema frente a ciertos tipos de registros sísmicos. Por último y como se mencionó anteriormente, pareciera ser que las características propias de cada registro sísmico (PGA, contenido de frecuencias, duración de la fase intensa, etc.) tendrían una fuerte y marcada influencia en la respuesta estructural del sistema.

Capítulo 5

Modelo continuo para la representación de un mástil reticulado

5.1 Introducción

Dentro de las construcciones metálicas tienen un uso muy difundido las piezas compuestas constituidas por perfiles paralelos denominados montantes o largueros, conectados entre sí por diagonales. En lo que hace fundamentalmente a la industria de las telecomunicaciones, las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados y arriostrados. Dentro de las tipologías de reticulado para materializar al mástil, es ampliamente utilizada aquella en la cual la traza de los largueros determina una sección transversal triangular con un mallado de unión en cada uno de los tres planos laterales que conforman los largueros dos a dos, conocido comúnmente como mástil reticulado en zig-zag (ver Fig. 5.1).

En el presente capítulo se aborda el desarrollo de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde que gobiernan el movimiento del reticulado espacial descripto. Para obtener esta formulación continua, se parte de un modelo discreto sobre el cual se determinan las sumatorias de la energía potencial y cinética almacenada en cada elemento

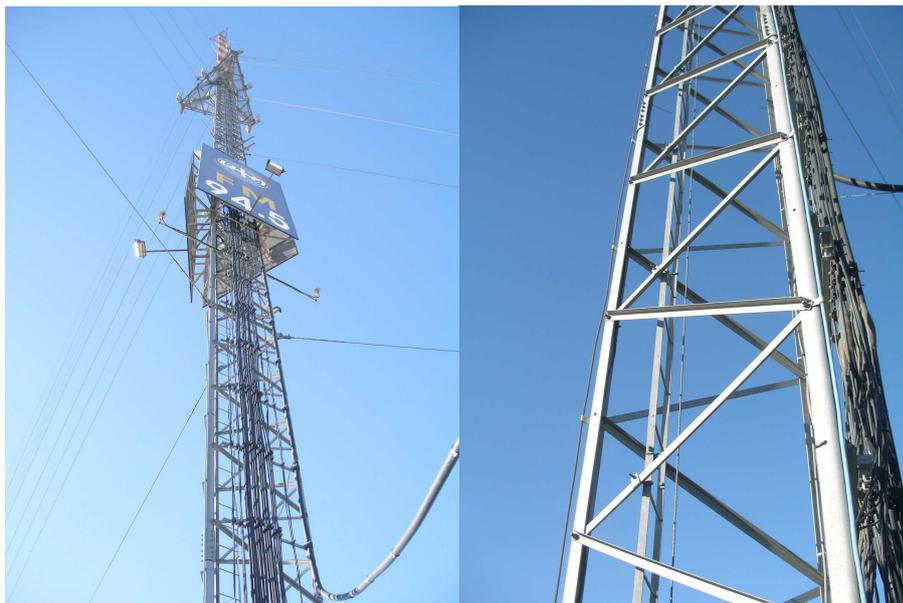


Figura 5.1: Mástil reticulado en zig-zag

del reticulado, y luego aceptando como hipótesis que las diagonales son suficientemente numerosas, dichas sumatorias son aproximadas por integrales clásicas de Cauchy-Riemann logrando así un pasaje del dominio discreto al continuo en términos energéticos. Se dispone así de funcionales de energía que permiten obtener la función lagrangiana correspondiente al sistema en movimiento, y luego con la aplicación de un principio variacional fundamental de la mecánica, Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, se obtiene el sistema diferencial que gobierna el movimiento del problema analizado [12].

5.2 Mástil reticulado analizado

Se analiza un mástil reticulado en zig-zag, de sección transversal triangular y equilátera. Los largueros y diagonales son de directriz recta y sección transversal constante. La pieza presenta una longitud L_l (ver Fig. 5.2), y está constituida por tres largueros continuos unidos entre sí por tres planos de diagonales iguales y articuladas en sus extremos. La sección transversal de cada larguero es A_l y la de cada diagonal A_d . El momento de inercia de los largueros respecto a cada una de las direcciones principales es J_{ly} y J_{lz} . La

longitud de cada diagonal es L_d . El material que constituye a los largueros y diagonales es elástico y lineal, siendo respectivamente el módulo E_l y E_d , y la densidad ρ_l y ρ_d . Genéricamente se designa como módulo n de la pieza, al tramo en el cual quedan contenidas dos diagonales por cada plano de unión.

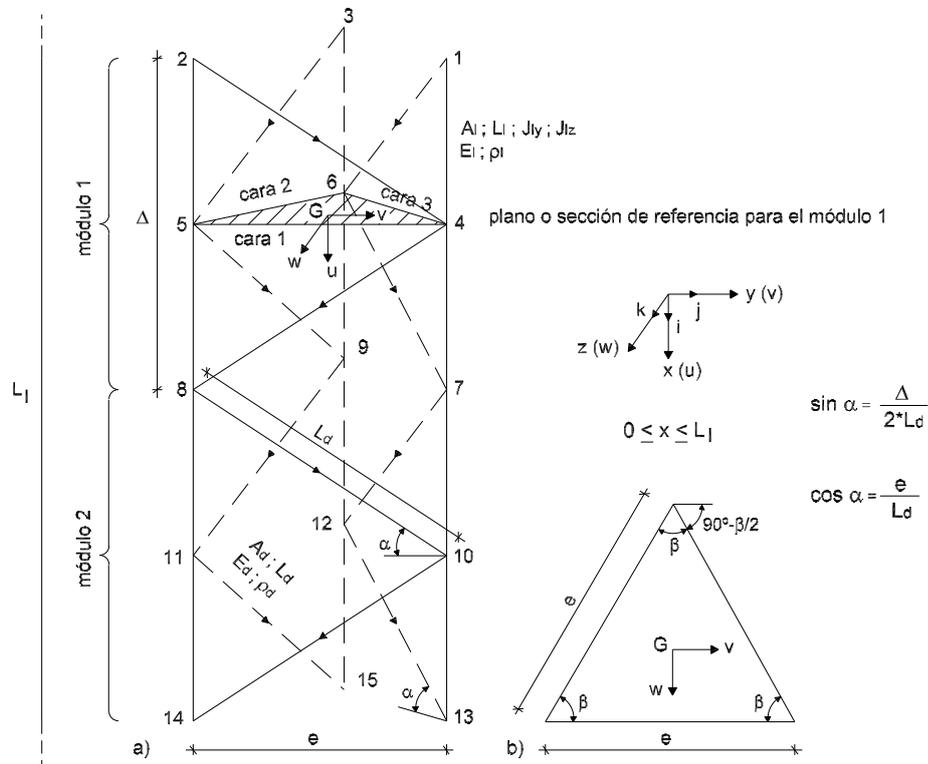


Figura 5.2: Mástil reticulado analizado. a) Vista. b) Sección transversal

Dado que en realidad no se trata de un sistema continuo, puesto que el número de diagonales es finito, pero aceptando que la separación o paso Δ entre diagonales es relativamente pequeño respecto a la longitud L_l de la pieza (lo que equivale a que el número de diagonales es suficientemente grande), se puede admitir que la suma de las energías desarrolladas en las diagonales sea expresada como una integral clásica.

Las hipótesis aceptadas para el presente desarrollo, resultan ser las siguientes:

1. Los corrimientos u , v y w , presentes respectivamente en las direcciones principales x , y y z , son pequeños

2. Los corrimientos ubicados fuera de la sección de referencia son aproximados mediante el desarrollo lineal de la serie de Taylor
3. Δ es relativamente pequeño frente al desarrollo L_l de la pieza
4. Las diagonales presentan articulaciones en sus extremos, y se prescinde de su rigidez flexional, transversal e inercia rotatoria
5. Los largueros son continuos en todo su desarrollo, y se prescinde de su rigidez al corte y a la torsión, y de sus correspondientes efectos inerciales
6. El campo de velocidades tiene variación lineal dentro del dominio de las diagonales

5.3 Planteo del problema

En la Figura 5.2 se muestra al mástil reticulado en su configuración inicial o de referencia, la que frente a una acción externa, hará que adquiera una nueva posición de equilibrio denominada configuración deformada. Frente a este cambio en la configuración, los nodos del reticulado (1, 2, 3, ...) experimentan corrimientos en cada una de las direcciones principales (x, y, z), siendo estas las funciones corrimientos básicos $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$ de nuestro problema, referidas al baricentro de cada larguero. Estos corrimientos hacen que los elementos del reticulado almacenen energía potencial y cinética. A la mitad de altura de cada módulo n del reticulado, es decir en $\Delta/2$, se considera una sección transversal plana de referencia, y de este modo, los corrimientos de los nodos ubicados fuera de esta sección son expresados mediante serie de Taylor a partir de los corrimientos que experimentan los nodos contenidos en la sección definida como de referencia.

5.3.1 Energía potencial

Energía interna de deformación elástica en diagonales

Considerando el módulo 1 (ver Fig. 5.2), y a partir de corrimientos cinemáticamente admisibles experimentados en sus nodos, se determina la energía interna de deformación

elástica almacenada en cada diagonal del mismo.

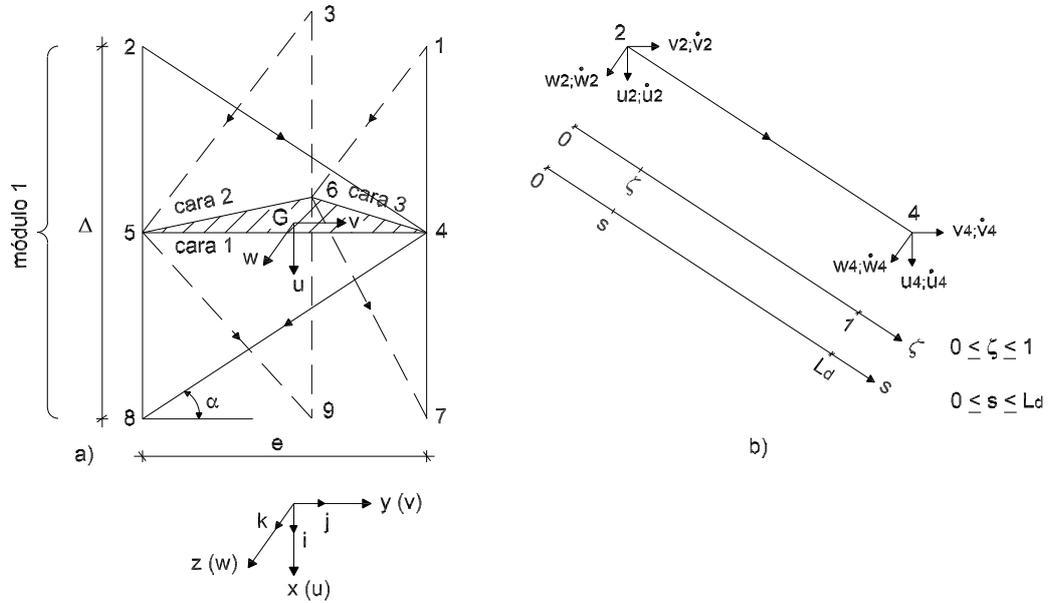


Figura 5.3: Módulo considerado. a) Sección de referencia. b) Diagonal analizada

Analizando la diagonal $d_{(24)}$ ubicada sobre la cara 1 y que va desde el nodo 2 al nodo 4 (ver Fig. 5.3), y expresando los corrimientos del nodo 2 a partir de la información conocida en el nodo 5, resulta:

$$u_2 = u_5 - u'_5 \frac{\Delta}{2} \quad (5.1)$$

$$v_2 = v_5 - v'_5 \frac{\Delta}{2} \quad (5.2)$$

$$w_2 = w_5 - w'_5 \frac{\Delta}{2} \quad (5.3)$$

siendo $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}$

Designando a $\vec{d}_{(24)}$ como el vector posición de la diagonal en la configuración de referencia, se tiene que:

$$\vec{d}_{(24)} = \check{i}dx + \check{j}dy = L_d(\check{i}\sin\alpha + \check{j}\cos\alpha) \quad (5.4)$$

siendo su módulo:

$$|\vec{d}_{(24)}| = L_d \quad (5.5)$$

Designando ahora a $\vec{d}_{(24)}^*$ como el vector posición en la configuración deformada:

$$\vec{d}_{(24)}^* = \vec{d}_{(24)} + \check{i}(u_4 - u_2) + \check{j}(v_4 - v_2) + \check{k}(w_4 - w_2) \quad (5.6)$$

y reemplazando a $\vec{d}_{(24)}$ por sus componentes, desarrollando la raíz por expansión binomial, y aceptando como prescindibles los términos de orden superior (ver hipótesis asumida), el módulo del vector $\vec{d}_{(24)}^*$ puede ser expresado como:

$$|\vec{d}_{(24)}^*| \approx L_d \left[1 + \frac{(u_4 - u_2)}{L_d} \sin\alpha + \frac{(v_4 - v_2)}{L_d} \cos\alpha \right] \quad (5.7)$$

con lo que podemos ahora determinar el corrimiento experimentado por la diagonal al pasar de una configuración a la otra, dado que resulta ser la diferencia entre los módulos analizados, y a partir de ello, determinar la deformación experimentada por ésta:

$$\varepsilon_{d(24)} \approx \frac{|\vec{d}_{(24)}^*| - |\vec{d}_{(24)}|}{L_d} = \frac{(u_4 - u_2)}{L_d} \sin\alpha + \frac{(v_4 - v_2)}{L_d} \cos\alpha \quad (5.8)$$

Con ello, la energía de deformación elástica almacenada en dicha diagonal vale:

$$U_{d(24)} = \frac{1}{2} \int_{vol} \sigma_{d(24)} \varepsilon_{d(24)} dvol \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} \left[(u_4 - u_2) \sin\alpha + (v_4 - v_2) \cos\alpha \right]^2 \quad (5.9)$$

Con un desarrollo equivalente, se obtienen las energías almacenadas en las restantes diagonales contenidas en el módulo 1:

$$U_{d(48)} \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} \left[(u_8 - u_4) \sin\alpha - (v_8 - v_4) \cos\alpha \right]^2 \quad (5.10)$$

$$U_{d(35)} \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} \left[(u_5 - u_3) \sin\alpha - (v_5 - v_3) \cos\alpha \cos\beta + (w_5 - w_3) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (5.11)$$

$$U_{d(59)} \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} \left[(u_9 - u_5) \sin\alpha + (v_9 - v_5) \cos\alpha \cos\beta - (w_9 - w_5) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (5.12)$$

$$U_{d(16)} \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} \left[(u_6 - u_1) \sin\alpha - (v_6 - v_1) \cos\alpha \cos\beta - (w_6 - w_1) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (5.13)$$

$$U_{d(67)} \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} \left[(u_7 - u_6) \sin\alpha + (v_7 - v_6) \cos\alpha \cos\beta + (w_7 - w_6) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (5.14)$$

Llamando a U_{d1} como la suma de las energías almacenadas en las diagonales del módulo 1 se obtiene, en el dominio discreto, el aporte energético de dichas diagonales a la energía potencial del sistema:

$$U_{d1} = U_{d(24)} + U_{d(48)} + U_{d(35)} + U_{d(59)} + U_{d(16)} + U_{d(67)} \quad (5.15)$$

Expresando los corrimientos de los nodos ubicados fuera de la sección de referencia, vía serie de Taylor, mediante los corrimientos experimentados por los nodos ubicados sobre dicha sección, y luego desarrollando algebraicamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} U_{d1} \approx \frac{E_d A_d}{2L_d} & \left(2 \left[(u_4 - u_5)^2 + (u_5 - u_6)^2 + (u_6 - u_4)^2 + (u_4'^2 + u_5'^2 + u_6'^2) \frac{\Delta^2}{4} \right] \sin^2 \alpha + \right. \\ & + 2 \left\{ (v_4 - v_5)^2 + \left[(v_5 - v_6)^2 + (v_6 - v_4)^2 \right] \cos^2 \beta + \left[(w_5 - w_6)^2 + (w_6 - w_4)^2 \right] \sin^2 \beta + \right. \\ & \quad \left. + \left[v_5'^2 + (v_4'^2 + v_6'^2) \cos^2 \beta + (w_4'^2 + w_6'^2) \sin^2 \beta \right] \frac{\Delta^2}{4} - \right. \\ & - 2 \left[(v_5 - v_6)(w_5 - w_6) - (v_6 - v_4)(w_6 - w_4) - (v_4'w_4' - v_6'w_6') \frac{\Delta^2}{4} \right] \sin \beta \cos \beta \left. \right\} \cos^2 \alpha + \\ & \quad + 2\Delta \left\{ (u_4 - u_5)v_5' + (v_4 - v_5)u_5' - \right. \\ & \quad \left. - \left[(u_5 - u_6)v_6' + (v_5 - v_6)u_6' + (u_6 - u_4)v_4' + (v_6 - v_4)u_4' \right] \cos \beta + \right. \\ & \quad \left. + \left[(u_5 - u_6)w_6' + (w_5 - w_6)u_6' - (u_6 - u_4)w_4' - (w_6 - w_4)u_4' \right] \sin \beta \right\} \sin \alpha \cos \alpha \left. \right) \quad (5.16) \end{aligned}$$

De igual forma se obtiene la energía interna de deformación elástica almacenada en las diagonales contenidas en los restantes módulos del reticulado. Siendo m el número total de módulos, la suma discreta de las energías aportadas por todas las diagonales del reticulado resulta:

$$U_d = \sum_{n=1}^m U_{dn} \quad (5.17)$$

De esta forma se ha obtenido en el discreto, la energía interna de deformación elástica total desarrollada por cada una de las diagonales que forman el mástil reticulado en zig-zag.

Asumiendo que el paso Δ entre diagonales es relativamente pequeño con respecto al desarrollo L_l del reticulado, lo que equivale a aceptar un número de diagonales suficientemente grande, entonces se puede representar de manera aproximada a la suma discreta de

las energías de deformación como una integral clásica de Cauchy-Riemann, esto es, como si se tratase de un dominio continuo. Por lo tanto:

$$U_d = \lim_{(m \rightarrow \infty; \Delta \rightarrow 0)} \sum_{n=1}^m U_{dn} \tag{5.18}$$

Multiplicando y dividiendo por Δ a la sumatoria, en el límite se tiene que:

$$U_d = \frac{E_d A_d}{2L_d \Delta} \int_0^{L_l} (A_1 \sin^2 \alpha + A_2 \cos^2 \alpha + A_3 \sin \alpha \cos \alpha) dx \tag{5.19}$$

lo que representa el pasaje, en términos energéticos, del dominio discreto al continuo para la energía interna de deformación elástica desarrollada por las diagonales. Considerando ahora a una sección transversal genérica del reticulado, ubicada a una altura x (ver Fig. 5.4), las funciones $A_j(x, t)$ ($j = 1, 2, 3$) resultan:

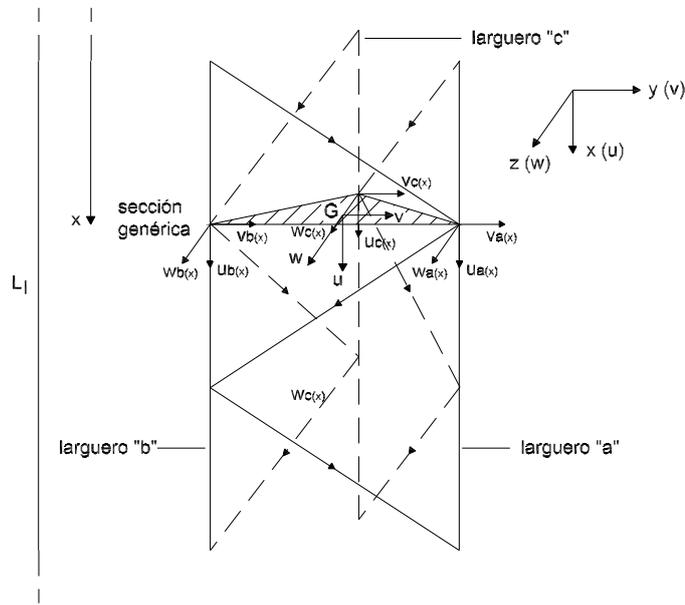


Figura 5.4: Sección transversal genérica del mástil reticulado

$$A_1 = 2 \left[\left(u_a(x, t) - u_b(x, t) \right)^2 + \left(u_b(x, t) - u_c(x, t) \right)^2 + \left(u_c(x, t) - u_a(x, t) \right)^2 + \left(u'_a(x, t) + u'_b(x, t) + u'_c(x, t) \right) \frac{\Delta^2}{4} \right] \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = 2 \left\{ & \left(v_a(x, t) - v_b(x, t) \right)^2 + \left[\left(v_b(x, t) - v_c(x, t) \right)^2 + \left(v_c(x, t) - v_a(x, t) \right)^2 \right] \cos^2 \beta + \\
& + \left[\left(w_b(x, t) - w_c(x, t) \right)^2 + \left(w_c(x, t) - w_a(x, t) \right)^2 \right] \sin^2 \beta + \\
& + \left[v_b'^2(x, t) + \left(v_a'^2(x, t) + v_c'^2(x, t) \right) \cos^2 \beta + \left(w_a'^2(x, t) + w_c'^2(x, t) \right) \sin^2 \beta \right] \frac{\Delta^2}{4} - \\
-2 \left[& \left(v_b(x, t) - v_c(x, t) \right) \left(w_b(x, t) - w_c(x, t) \right) - \left(v_c(x, t) - v_a(x, t) \right) \left(w_c(x, t) - w_a(x, t) \right) - \right. \\
& \left. - \left(v_a'(x, t) w_a'(x, t) - v_c'(x, t) w_c'(x, t) \right) \frac{\Delta^2}{4} \right] \sin \beta \cos \beta \left. \right\} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = 2 \left\{ & \left(u_a(x, t) - u_b(x, t) \right) v_b'(x, t) + \left(v_a(x, t) - v_b(x, t) \right) u_b'(x, t) - \right. \\
& - \left[\left(u_b(x, t) - u_c(x, t) \right) v_c'(x, t) + \left(v_b(x, t) - v_c(x, t) \right) u_c'(x, t) + \right. \\
& + \left. \left(u_c(x, t) - u_a(x, t) \right) v_a'(x, t) + \left(v_c(x, t) - v_a(x, t) \right) u_a'(x, t) \right] \cos \beta + \\
& + \left[\left(u_b(x, t) - u_c(x, t) \right) w_c'(x, t) + \left(w_b(x, t) - w_c(x, t) \right) u_c'(x, t) - \right. \\
& \left. - \left(u_c(x, t) - u_a(x, t) \right) w_a'(x, t) - \left(w_c(x, t) - w_a(x, t) \right) u_a'(x, t) \right] \sin \beta \left. \right\} \Delta \quad (5.22)
\end{aligned}$$

siendo en lo sucesivo $(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$; $(\bullet)'' \equiv \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}$; etc.

Energía interna de deformación elástica en largueros

En cuanto a los largueros o montantes, éstos son considerados continuos en toda su desarrollo L_l . Frente a corrimientos axiales cinemáticamente admisibles que experimenta el mástil, la energía interna de deformación elástica desarrollada en los largueros vale:

$$U_{l(u)} = \frac{1}{2} \int_{vol} \sigma_{lj(u)} \varepsilon_{lj(u)} dvol = \frac{E_l A_l}{2} \int_0^{L_l} \varepsilon_{lj(u)} \varepsilon_{lj(u)} dx \quad j = a, b, c \quad (5.23)$$

siendo:

$$\varepsilon_{lj(u)} = u_j'(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.24)$$

con lo cual reemplazando, se tiene que:

$$U_{l(u)} = \frac{E_l A_l}{2} \int_0^{L_l} A_4 dx \quad (5.25)$$

siendo la función A_4 :

$$A_4 = u'_j(x, t)u'_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.26)$$

Asimismo, frente a un giro flexional cinemáticamente admisible que experimenta el mástil alrededor del eje z , la energía interna de deformación elástica desarrollada en los largueros resulta entonces:

$$U_{l(v)} = \frac{1}{2} \int_{vol} \sigma_{lj(v)} \varepsilon_{lj(v)} dvol = \frac{E_l}{2} \int_{A_l} dA_l \int_0^{L_l} \varepsilon_{lj(v)} \varepsilon_{lj(v)} dx \quad j = a, b, c \quad (5.27)$$

siendo:

$$\varepsilon_{lj(v)} = v''_j(x, t)y \quad j = a, b, c \quad (5.28)$$

con lo que reemplazando, se tiene que:

$$U_{l(v)} = \frac{E_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} A_5 dx \quad (5.29)$$

siendo la función A_5 :

$$A_5 = v''_j(x, t)v''_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.30)$$

Haciendo un análisis equivalente para la energía interna desarrollada en los largueros frente a un giro flexional alrededor del eje y , la misma vale:

$$U_{l(w)} = \frac{E_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} A_6 dx \quad (5.31)$$

siendo la función A_6 :

$$A_6 = w''_j(x, t)w''_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.32)$$

De esta manera, la energía interna de deformación elástica total desarrollada en los largueros se expresa como:

$$U_l = \frac{E_l A_l}{2} \int_0^{L_l} A_4 dx + \frac{E_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} A_5 dx + \frac{E_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} A_6 dx \quad (5.33)$$

Trabajo externo por efecto del peso propio

En cuanto al peso propio por unidad de longitud de cada larguero, y en el cual está considerado el aporte del peso propio de las diagonales, resulta ser:

$$p_j = \left(\rho_l g A_l + \rho_d g \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) \quad j = a, b, c \quad (5.34)$$

Frente a corrimientos axiales cinemáticamente admisibles, dicho peso propio dará lugar al desarrollo del siguiente trabajo externo de deformación:

$$W_p = p_j \int_0^{L_l} u_j(x, t) dx \quad j = a, b, c \quad (5.35)$$

Trabajo externo de cargas y pares

Debido a los esfuerzos que las riostras pueden imponer sobre el mástil, se consideran las cargas concentradas P_u , P_v y P_w aplicadas en cada una de las direcciones principales y actuando respectivamente sobre cada uno de los largueros a , b y c . Frente a corrimientos axiales y transversales cinemáticamente admisibles, estas cargas darán lugar al desarrollo del siguiente trabajo externo:

$$W_P = P_{uj}(t)u_j(x, t) + P_{vj}(t)v_j(x, t) + P_{wj}(t)w_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.36)$$

Al mismo tiempo la acción del viento o del hielo, por ejemplo, pueden dar lugar al desarrollo de cierta carga distribuida sobre el mástil. Por ello se consideran las cargas distribuidas q_u , q_v y q_w aplicadas en cada una de las direcciones principales y actuando respectivamente sobre cada uno de los largueros a , b y c , y que frente a corrimientos axiales y transversales cinemáticamente admisibles, estas cargas darán lugar al siguiente trabajo externo:

$$W_q = \int_0^{L_l} \left(q_{uj}(x, t)u_j(x, t) + q_{vj}(x, t)v_j(x, t) + q_{wj}(x, t)w_j(x, t) \right) dx \quad j = a, b, c \quad (5.37)$$

La presencia de alguna carga excéntrica, por ejemplo, actuando en alguna sección del mástil puede dar lugar al desarrollo de pares seccionales M_v y M_w alrededor de los ejes y y z respectivamente, y de M_u alrededor del eje x . Frente a giros flexionales y torsionales cinemáticamente admisibles, el trabajo externo producido por estos pares resulta:

$$W_M = M_u(t)\theta_u(x, t) + M_v(t)\theta_v(x, t) + M_w(t)\theta_w(x, t) \quad (5.38)$$

Considerando pequeños giros seccionales, se acepta trigonométricamente que dichos giros pueden expresarse como:

$$\theta_u(x, t) \approx \frac{v_c(x, t)}{z_c} \quad ; \quad \theta_v(x, t) \approx \frac{u_j(x, t)}{z_j} \quad ; \quad \theta_w(x, t) \approx \frac{u_j(x, t)}{y_j} \quad j = a, b, c \quad (5.39)$$

La presencia de algún par flexional M_{vj} y M_{wj} localmente actuando sobre los largueros, y frente a giros flexionales cinemáticamente admisibles, dichos pares darán lugar al desarrollo del siguiente trabajo externo:

$$W_m = M_{vj}(t)\theta_{vj}(x, t) + M_{wj}(t)\theta_{wj}(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.40)$$

Prescindiendo de la deformación por corte local en los largueros (ver hipótesis asumida), y a partir de relaciones cinemáticas, el giro flexional de cada larguero resulta:

$$\theta_{vj}(x, t) = w'_j(x, t) \quad ; \quad \theta_{wj}(x, t) = v'_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.41)$$

Trabajo externo por efecto de 2^{do} orden

En el caso de estructuras esbeltas, como lo son los mástiles arriostrados, frente a un desplazamiento lateral de la misma, puede resultar significativo el corrimiento axial asociado a dicho desplazamiento y con ello, significativo el trabajo desarrollado por las cargas de compresión actuantes. Esto puede suceder, por ejemplo, cuando frente a la acción del viento el mástil experimenta un corrimiento lateral, y a su vez éste se encuentra sujeto a cargas axiales impuestas por las riostras en los distintos niveles de sujeción, así como también, a las cargas axiales debido al peso propio de la estructura y sus componentes.

En primer lugar se desarrolla la forma en cómo se determina el acortamiento axial δ asociado a un corrimiento lateral en la dirección de y en una pieza recta (ver Fig. 5.5), y que dará lugar al efecto de 2^{do} orden indicado.

Sea la pieza recta AB sujeta a la carga axial de compresión P , la cual da lugar a un acortamiento AA' (llamado también Δ). Si sobre la pieza acortada $A'B$ actúa ahora una acción secundaria independiente de P y que da lugar a un corrimiento lateral, la pieza se flectará y describirá una longitud de arco $A''B$. El cambio de longitud experimentado al

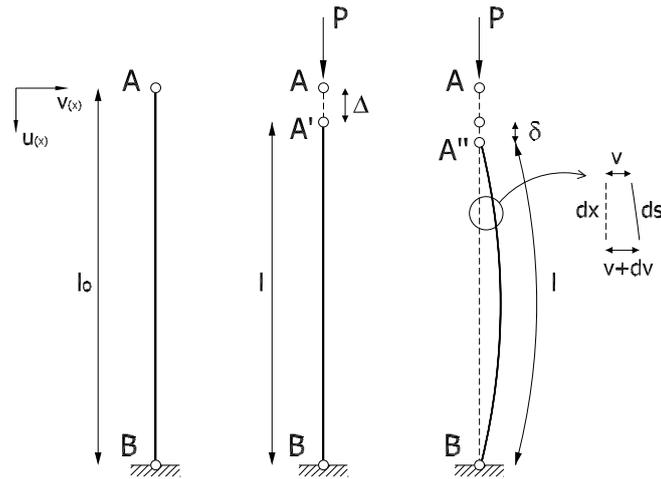


Figura 5.5: Acortamiento δ en una pieza recta por efecto de 2^{do} orden

pasar de la pieza recta acortada $A'B$ a la pieza flexada $A''B$, es definido como δ . Tomando un segmento diferencial de pieza recta y de pieza flexada, se tiene que:

$$\delta = \int_0^l ds - \int_0^l dx = \int_0^l (ds - dx) \quad (5.42)$$

pero siendo:

$$ds^2 = dx^2 + dv^2 \quad (5.43)$$

al reemplazar:

$$\delta = \int_0^l \left[\sqrt{1 + (v'(x))^2} - 1 \right] dx \quad (5.44)$$

Desarrollando ahora la raíz por expansión binomial y reteniendo solo hasta los términos cuadráticos:

$$\delta \approx \frac{1}{2} \int_0^l (v'(x))^2 dx \quad (5.45)$$

Por lo tanto el trabajo externo desarrollado por la carga P debido al efecto de 2^o orden queda expresado como:

$$P\delta \approx \frac{P}{2} \int_0^l (v'(x))^2 dx \quad (5.46)$$

De manera equivalente corresponde el análisis para la dirección z .

Se analiza ahora al mástil reticulado sujeto a la acción del peso propio y de cargas de punta actuantes en cada uno de los largueros. El trabajo desarrollado en los largueros, tanto por el peso propio como por la carga de punta, debido al efecto de 2^{do} orden, resulta:

$$W_{2^{do}} = \int_{vol} \sigma_{j(2^{do})} \varepsilon_{j(2^{do})} dvol = \int_0^{Ll} \sigma_{j(2^{do})} \varepsilon_{j(2^{do})} A_l dx \quad j = a, b, c \quad (5.47)$$

siendo:

$$\varepsilon_{j(2^{do})} = \frac{1}{2} \left[\left(v'_j(x, t) \right)^2 + \left(w'_j(x, t) \right)^2 \right] \quad j = a, b, c \quad (5.48)$$

$$\sigma_{j(2^{do})} = \frac{P_{uj}(t)}{A_l} + \frac{p_j x}{A_l} \quad j = a, b, c \quad (5.49)$$

Por lo tanto reemplazando se tiene que:

$$W_{2^{do}} = \frac{P_{uj}(t)}{2} \int_0^{Ll} \left[\left(v'_j(x, t) \right)^2 + \left(w'_j(x, t) \right)^2 \right] dx + \frac{p_{uj}}{2} \int_0^{Ll} \left[\left(v'_j(x, t) \right)^2 + \left(w'_j(x, t) \right)^2 \right] x dx \quad (5.50)$$

5.3.2 Energía cinética

Energía cinética en diagonales

Se analiza la energía cinética desarrollada en la misma diagonal ($d_{(24)}$) considerada en la evaluación de la energía de deformación elástica (ver Fig. 5.3). El movimiento dinámico del mástil da lugar al desarrollo de velocidades nodales, haciendo que la diagonal también adquiera velocidad. Aceptando que en el dominio s ($0 \leq s \leq L_d$) de la diagonal evaluada la velocidad presenta una variación lineal, el campo de velocidades puede ser expresado como:

$$\vec{V}_{d(24)}(s, t) = N_2 \vec{V}_2(s, t) + N_4 \vec{V}_4(s, t) \quad (5.51)$$

Habiendo parametrizado el dominio s de la diagonal tal que $s = \zeta L_d$, siendo el dominio parametrizado $0 \leq \zeta \leq 1$, las funciones que representan la variación lineal resultan:

$$N_2(\zeta) = 1 - \zeta \quad (5.52)$$

$$N_4(\zeta) = \zeta \quad (5.53)$$

mientras que los vectores velocidad en cada uno de los nodos valen:

$$\vec{V}_2(s, t) = \dot{u}_2(s, t)\check{i} + \dot{v}_2(s, t)\check{j} + \dot{w}_2(s, t)\check{k} \quad (5.54)$$

$$\vec{V}_4(s, t) = \dot{u}_4(s, t)\check{i} + \dot{v}_4(s, t)\check{j} + \dot{w}_4(s, t)\check{k} \quad (5.55)$$

siendo en lo sucesivo $(\dot{\bullet}) \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$; $(\ddot{\bullet}) \equiv \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial t^2}$; etc.

Por lo tanto la energía cinética desarrollada en la diagonal analizada, debido a los corrimientos dinámicos, resulta:

$$T_{d(24)} = \frac{\rho_d}{2} \int_{vol} \vec{V}_{d(24)}(s, t) \vec{V}_{d(24)}(s, t) \, dvol = \frac{\rho_d A_d}{2} \int_0^{L_d} \vec{V}_{d(24)}(s, t) \vec{V}_{d(24)}(s, t) \, ds \quad (5.56)$$

y al reemplazar los vectores velocidad por sus componentes y considerar el dominio parametrizado, la energía cinética se expresa como:

$$T_{d(24)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left[\left(\dot{u}_2(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_2(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_2(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_4(\zeta, t) \right)^2 + \dot{u}_2(\zeta, t) \dot{u}_4(\zeta, t) + \dot{v}_2(\zeta, t) \dot{v}_4(\zeta, t) + \dot{w}_2(\zeta, t) \dot{w}_4(\zeta, t) \right] \quad (5.57)$$

Con un desarrollo equivalente, se obtienen las energías cinéticas desarrolladas en las restantes diagonales contenidas en el módulo 1:

$$T_{d(48)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left[\left(\dot{u}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_8(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_8(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_8(\zeta, t) \right)^2 + \dot{u}_4(\zeta, t) \dot{u}_8(\zeta, t) + \dot{v}_4(\zeta, t) \dot{v}_8(\zeta, t) + \dot{w}_4(\zeta, t) \dot{w}_8(\zeta, t) \right] \quad (5.58)$$

$$T_{d(35)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left[\left(\dot{u}_3(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_3(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_3(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_5(\zeta, t) \right)^2 + \dot{u}_3(\zeta, t) \dot{u}_5(\zeta, t) + \dot{v}_3(\zeta, t) \dot{v}_5(\zeta, t) + \dot{w}_3(\zeta, t) \dot{w}_5(\zeta, t) \right] \quad (5.59)$$

$$T_{d(59)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left[\left(\dot{u}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_9(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_9(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_9(\zeta, t) \right)^2 + \dot{u}_5(\zeta, t) \dot{u}_9(\zeta, t) + \dot{v}_5(\zeta, t) \dot{v}_9(\zeta, t) + \dot{w}_5(\zeta, t) \dot{w}_9(\zeta, t) \right] \quad (5.60)$$

$$T_{d(16)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left[\left(\dot{u}_1(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_1(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_1(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_6(\zeta, t) \right)^2 + \dot{u}_1(\zeta, t) \dot{u}_6(\zeta, t) + \dot{v}_1(\zeta, t) \dot{v}_6(\zeta, t) + \dot{w}_1(\zeta, t) \dot{w}_6(\zeta, t) \right] \quad (5.61)$$

$$T_{d(67)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left[\left(\dot{u}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_7(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_7(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_7(\zeta, t) \right)^2 + \dot{u}_6(\zeta, t) \dot{u}_7(\zeta, t) + \dot{v}_6(\zeta, t) \dot{v}_7(\zeta, t) + \dot{w}_6(\zeta, t) \dot{w}_7(\zeta, t) \right] \quad (5.62)$$

Llamando a T_{d1} como la suma de las energías desarrolladas por las diagonales del módulo 1 se obtiene, en el dominio discreto, el aporte energético de dichas diagonales a la energía cinética del sistema:

$$T_{d1} = T_{d(24)} + T_{d(48)} + T_{d(35)} + T_{d(59)} + T_{d(16)} + T_{d(67)} \quad (5.63)$$

Expresando las velocidades de los nodos ubicados fuera de la sección de referencia, vía serie de Taylor, a partir de las velocidades experimentadas por los nodos ubicados sobre dicha sección, y luego desarrollando algebraicamente, se tiene que:

$$T_{d1} = \frac{\rho_d A_d L_d}{3} \left\{ 2 \left[\left(\dot{u}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_6(\zeta, t) \right)^2 \right] + \left(\dot{u}_4(\zeta, t) \dot{u}_5(\zeta, t) + \dot{v}_4(\zeta, t) \dot{v}_5(\zeta, t) + \dot{w}_4(\zeta, t) \dot{w}_5(\zeta, t) + \dot{u}_5(\zeta, t) \dot{u}_6(\zeta, t) + \dot{v}_5(\zeta, t) \dot{v}_6(\zeta, t) + \dot{w}_5(\zeta, t) \dot{w}_6(\zeta, t) + \dot{u}_6(\zeta, t) \dot{u}_4(\zeta, t) + \dot{v}_6(\zeta, t) \dot{v}_4(\zeta, t) + \dot{w}_6(\zeta, t) \dot{w}_4(\zeta, t) \right) + \left[\left(\dot{u}'_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}'_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}'_4(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}'_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}'_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}'_5(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{u}'_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{v}'_6(\zeta, t) \right)^2 + \left(\dot{w}'_6(\zeta, t) \right)^2 \right] \frac{\Delta^2}{4} \right\} \quad (5.64)$$

De igual forma se obtiene la energía cinética desarrollada por las diagonales contenidas en los restantes módulos del reticulado. Siendo m el número total de módulos, la suma discreta de las energías cinéticas aportadas por todas las diagonales del reticulado, resulta:

$$T_d = \sum_{n=1}^m T_{dn} \quad (5.65)$$

De esta forma se ha obtenido en el dominio discreto, la energía cinética total desarrollada por las diagonales que forman parte del mástil reticulado en zig-zag. Al igual que lo asumido en el desarrollo de la energía interna de deformación elástica en diagonales, dado que el paso Δ es pequeño, la energía cinética de los largueros puede ser expresada como:

$$T_d = \lim_{(m \rightarrow \infty; \Delta \rightarrow 0)} \sum_{n=1}^m T_{dn} \quad (5.66)$$

Multiplicando y dividiendo por Δ a la sumatoria, en el límite se tiene que:

$$T_d = \frac{\rho_d A_d L_d}{3\Delta} \int_0^{L_l} (B_1 + B_2) dx \quad (5.67)$$

lo cual representa el pasaje, en términos energéticos, del dominio discreto al continuo para la energía cinética desarrollada por las diagonales. Considerando una sección transversal genérica del reticulado, ubicada a una altura x (ver Fig. 5.4), las funciones B_1 y B_2 , resultan:

$$B_1 = \frac{3}{2} \left(\dot{u}_j(x, t) \dot{u}_j(x, t) + \dot{v}_j(x, t) \dot{v}_j(x, t) + \dot{w}_j(x, t) \dot{w}_j(x, t) \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{u}_j(x, t) \dot{u}_k(x, t) + \dot{v}_j(x, t) \dot{v}_k(x, t) + \dot{w}_j(x, t) \dot{w}_k(x, t) \right) \quad j = k = a, b, c \quad (5.68)$$

$$B_2 = \left(\dot{u}'_j(x, t) \dot{u}'_j(x, t) + \dot{v}'_j(x, t) \dot{v}'_j(x, t) + \dot{w}'_j(x, t) \dot{w}'_j(x, t) \right) \frac{\Delta^2}{4} \quad j = a, b, c \quad (5.69)$$

Energía cinética en largueros

Frente a movimientos dinámicos cinemáticamente admisibles del mástil en las direcciones principales x , y y z , la energía cinética desarrollada en los largueros vale:

$$T_{l(u,v,w)} = \frac{\rho_l}{2} \int_{vol} \vec{V}_{j(u,v,w)} \vec{V}_{j(u,v,w)} dvol = \frac{\rho_l A_l}{2} \int_0^{L_l} \vec{V}_{j(u,v,w)} \vec{V}_{j(u,v,w)} dx \quad j = a, b, c \quad (5.70)$$

siendo $\vec{V}_{j(u,v,w)}$ el vector velocidad nodal:

$$\vec{V}_{j(u,v,w)} = \dot{u}_j(x, t) \check{i} + \dot{v}_j(x, t) \check{j} + \dot{w}_j(x, t) \check{k} \quad j = a, b, c \quad (5.71)$$

con lo que reemplazando:

$$T_{l(u,v,w)} = \frac{\rho_l A_l}{2} \int_0^{L_l} B_3 dx \quad (5.72)$$

siendo la función B_3 :

$$B_3 = \dot{u}_j(x, t) \dot{u}_j(x, t) + \dot{v}_j(x, t) \dot{v}_j(x, t) + \dot{w}_j(x, t) \dot{w}_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.73)$$

Frente a giros dinámicos cinemáticamente admisibles del mástil alrededor de los ejes principales y y z , la energía cinética desarrollada en los largueros resulta:

$$T_{l(\theta_v, \theta_w)} = \frac{\rho_l}{2} \int_{vol} \vec{V}_{j(\theta_v, \theta_w)} \vec{V}_{j(\theta_v, \theta_w)} dvol \quad j = a, b, c \quad (5.74)$$

siendo $\vec{V}_{(\theta v, \theta w)}$ el vector velocidad lineal tangencial, al que lo expresamos mediante sus componentes:

$$\vec{V}_{j(\theta v, \theta w)} = \dot{\omega}_{wj}(x, t)\check{j} + \dot{\omega}_{vj}(x, t)\check{k} \quad j = a, b, c \quad (5.75)$$

Los corrimientos tangenciales $\omega_{wj}(x, t)$ y $\omega_{vj}(x, t)$ alrededor de los ejes principales z e y respectivamente, dependen del giro θ de la masa del larguero alrededor de dichos ejes, y de su radio de giro i :

$$\omega_{wj}(x, t) = i_y \theta_{wj}(x, t) \quad ; \quad \omega_{vj}(x, t) = i_z \theta_{vj}(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.76)$$

con lo que reemplazando, resulta:

$$T_{l(\theta v, \theta w)} = \frac{\rho_l}{2} \int_{vol} \left(i_y^2 \theta_{wj}^2(x, t) + i_z^2 \theta_{vj}^2(x, t) \right) dvol \quad j = a, b, c \quad (5.77)$$

$$T_{l(\theta v, \theta w)} = \frac{\rho_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} \left(\dot{\theta}_{wj}(x, t) \right)^2 dx + \frac{\rho_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} \left(\dot{\theta}_{vj}(x, t) \right)^2 dx \quad j = a, b, c \quad (5.78)$$

y en donde por haber prescindido de las deformaciones por corte en los largueros, el giro de éstos queda expresado como:

$$\theta_{vj}(x, t) = w'_j(x, t) \quad ; \quad \theta_{wj}(x, t) = v'_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.79)$$

con lo cual reemplazando, se tiene:

$$T_{l(\theta v, \theta w)} = \frac{\rho_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} B_4 dx + \frac{\rho_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} B_5 dx \quad (5.80)$$

siendo las funciones B_4 y B_5 :

$$B_4 = \dot{v}'_j(x, t) \dot{v}'_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.81)$$

$$B_5 = \dot{w}'_j(x, t) \dot{w}'_j(x, t) \quad j = a, b, c \quad (5.82)$$

Por lo tanto la energía cinética total desarrollada por los largueros vale:

$$T_l = \frac{\rho_l A_l}{2} \int_0^{L_l} B_3 dx + \frac{\rho_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} B_4 dx + \frac{\rho_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} B_5 dx \quad (5.83)$$

5.3.3 Función lagrangiana del sistema

Habiendo obtenido en el continuo la energía potencial y cinética desarrollada por diagonales y largueros, queda entonces completado el planteo energético. Por lo tanto la función lagrangiana del sistema resulta:

$$L = V - T \quad (5.84)$$

siendo V la energía potencial ($V = U - W$) y T la energía cinética.

5.4 Ecuaciones diferenciales

La aplicación de un principio variacional fundamental de la mecánica, Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, a la función lagrangiana del sistema, conduce directamente a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del problema analizado [12].

Las ecuaciones diferenciales resultan en un sistema lineal de 9x9 en las nueve incógnitas, a derivadas parciales en la variable espacial x y temporal t :

$$E_l u_a''(x, t) + E_d K_u \left(\delta_1(x, t) - \delta_3(x, t) + \frac{\Delta}{2} \eta_3'(x, t) \right) - \rho_l \ddot{u}_a(x, t) - \frac{\rho_d k_u}{3} \left(\ddot{\xi}_{1a}(x, t) + \ddot{\xi}_{3a}(t) - \ddot{u}_a''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \frac{1}{A_l} \left(p_a + q_{ua}(x, t) \right) = 0 \quad (5.85)$$

$$E_l u_b''(x, t) + E_d K_u \left(\delta_2(x, t) - \delta_1(x, t) + \frac{\Delta}{2} \eta_1'(x, t) \right) - \rho_l \ddot{u}_b(x, t) - \frac{\rho_d k_u}{3} \left(\ddot{\xi}_{1b}(x, t) + \ddot{\xi}_{2b}(t) - \ddot{u}_b''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \frac{1}{A_l} \left(p_b + q_{ub}(x, t) \right) = 0 \quad (5.86)$$

$$E_l u_c''(x, t) + E_d K_u \left(\delta_3(x, t) - \delta_2(x, t) + \frac{\Delta}{2} \eta_2'(x, t) \right) - \rho_l \ddot{u}_c(x, t) - \frac{\rho_d k_u}{3} \left(\ddot{\xi}_{2c}(x, t) + \ddot{\xi}_{3c}(t) - \ddot{u}_c''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \frac{1}{A_l} \left(p_c + q_{uc}(x, t) \right) = 0 \quad (5.87)$$

$$E_l v_a''''(x, t) + E_d K_v \left[\eta_1(x, t) + \left(\eta_3(x, t) - \frac{\Delta}{2} \delta_3'(x, t) \right) \cos \beta \right] + \rho_l \left(S_v \ddot{v}_a(x, t) - \ddot{v}_a''(x, t) \right) + \frac{\rho_d k_v}{3} \left(\ddot{\psi}_{1a}(x, t) + \ddot{\psi}_{3a}(x, t) - \ddot{v}_a''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) + \frac{1}{J_{ly}} \left[P_{ua}(t) v_a''(x, t) + p_a \left(v_a'(x, t) + x v_a''(x, t) \right) - q_{va}(x, t) \right] = 0 \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned}
& E_l v_b''''(x, t) - E_d K_v \left(\eta_2(x, t) \cos \beta + \eta_1(x, t) - \frac{\Delta}{2} \delta_1'(x, t) \right) + \\
& + \rho_l \left(S_v \ddot{v}_b(x, t) - \ddot{v}_b''(x, t) \right) + \frac{\rho_d k_v}{3} \left(\ddot{\psi}_{1b}(x, t) + \ddot{\psi}_{2b}(x, t) - \ddot{v}_b''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{J_{ly}} \left[P_{ub}(t) v_b''(x, t) + p_b \left(v_b'(x, t) + x v_b''(x, t) \right) - q_{vb}(x, t) \right] = 0 \quad (5.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_l v_c''''(x, t) - E_d K_v \left(\eta_3(x, t) - \eta_2(x, t) + \frac{\Delta}{2} \delta_2'(x, t) \right) \cos \beta + \\
& + \rho_l \left(S_v \ddot{v}_c(x, t) - \ddot{v}_c''(x, t) \right) + \frac{\rho_d k_v}{3} \left(\ddot{\psi}_{2c}(x, t) + \ddot{\psi}_{3c}(x, t) - \ddot{v}_c''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{J_{ly}} \left[P_{uc}(t) v_c''(x, t) + p_c \left(v_c'(x, t) + x v_c''(x, t) \right) - q_{vc}(x, t) \right] = 0 \quad (5.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_l w_a''''(x, t) + E_d K_w \left(\eta_3(x, t) - \frac{\Delta}{2} \delta_3'(x, t) \right) \sin \beta + \\
& + \rho_l \left(S_w \ddot{w}_a(x, t) - \ddot{w}_a''(x, t) \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\varphi}_{1a}(x, t) + \ddot{\varphi}_{3a}(x, t) - \ddot{w}_a''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{J_{lz}} \left[P_{ua}(t) w_a''(x, t) + p_a \left(w_a'(x, t) + x w_a''(x, t) \right) - q_{wa}(x, t) \right] = 0 \quad (5.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_l w_b''''(x, t) + E_d K_w \eta_2(x, t) \sin \beta + \\
& + \rho_l \left(S_w \ddot{w}_b(x, t) - \ddot{w}_b''(x, t) \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\varphi}_{1b}(x, t) + \ddot{\varphi}_{2b}(x, t) - \ddot{w}_b''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{J_{lz}} \left[P_{ub}(t) w_b''(x, t) + p_b \left(w_b'(x, t) + x w_b''(x, t) \right) - q_{wb}(x, t) \right] = 0 \quad (5.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_l w_c''''(x, t) - E_d K_w \left(\eta_3(x, t) + \eta_2(x, t) - \frac{\Delta}{2} \delta_2'(x, t) \right) \sin \beta + \\
& + \rho_l \left(S_w \ddot{w}_c(x, t) - \ddot{w}_c''(x, t) \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\varphi}_{2c}(x, t) + \ddot{\varphi}_{3c}(x, t) - \ddot{w}_c''(x, t) \frac{L_d \Delta}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{J_{lz}} \left[P_{uc}(t) w_c''(x, t) + p_c \left(w_c'(x, t) + x w_c''(x, t) \right) - q_{wc}(x, t) \right] = 0 \quad (5.93)
\end{aligned}$$

en donde se ha compactado la notación con coeficientes definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
K_u &= \frac{A_d}{2A_l L_d^2} & K_v &= \frac{A_d e}{J_{ly} \Delta L_d^2} & K_w &= \frac{A_d e}{J_{lz} \Delta L_d^2} \\
k_u &= \frac{A_d}{A_l} & k_v &= \frac{A_d}{J_{ly}} & k_w &= \frac{A_d}{J_{lz}} \\
S_v &= \frac{A_l}{J_{ly}} & S_w &= \frac{A_l}{J_{lz}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1(x, t) &= \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_b(x, t) + \frac{2e}{L_d} (v_a(x, t) - v_b(x, t)) \\
\eta_2(x, t) &= \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_c(x, t) - \frac{2e}{L_d} (v_b(x, t) - v_c(x, t)) \cos\beta + \frac{2e}{L_d} (w_b(x, t) - w_c(x, t)) \sin\beta \\
\eta_3(x, t) &= \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_a(x, t) - \frac{2e}{L_d} (v_c(x, t) - v_a(x, t)) \cos\beta - \frac{2e}{L_d} (w_c(x, t) - w_a(x, t)) \sin\beta \\
\delta_1(x, t) &= \frac{\Delta}{L_d} (u_b(x, t) - u_a(x, t)) - \frac{\Delta e}{L_d} v'_b(x, t) \\
\delta_2(x, t) &= \frac{\Delta}{L_d} (u_c(x, t) - u_b(x, t)) + \frac{\Delta e}{L_d} v'_c(x, t) \cos\beta - \frac{\Delta e}{L_d} w'_c(x, t) \sin\beta \\
\delta_3(x, t) &= \frac{\Delta}{L_d} (u_a(x, t) - u_c(x, t)) + \frac{\Delta e}{L_d} v'_a(x, t) \cos\beta + \frac{\Delta e}{L_d} w'_a(x, t) \sin\beta \\
\xi_{1a}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2u_a(x, t) + u_b(x, t)) & \xi_{3a}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2u_a(x, t) + u_c(x, t)) \\
\xi_{1b}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2u_b(x, t) + u_a(x, t)) & \xi_{2b}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2u_b(x, t) + u_c(x, t)) \\
\xi_{2c}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2u_c(x, t) + u_b(x, t)) & \xi_{3c}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2u_c(x, t) + u_a(x, t)) \\
\psi_{1a}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2v_a(x, t) + v_b(x, t)) & \psi_{3a}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2v_a(x, t) + v_c(x, t)) \\
\psi_{1b}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2v_b(x, t) + v_a(x, t)) & \psi_{2b}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2v_b(x, t) + v_c(x, t)) \\
\psi_{2c}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2v_c(x, t) + v_b(x, t)) & \psi_{3c}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2v_c(x, t) + v_a(x, t)) \\
\varphi_{1a}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2w_a(x, t) + w_b(x, t)) & \varphi_{3a}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2w_a(x, t) + w_c(x, t)) \\
\varphi_{1b}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2w_b(x, t) + w_a(x, t)) & \varphi_{2b}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2w_b(x, t) + w_c(x, t)) \\
\varphi_{2c}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2w_c(x, t) + w_b(x, t)) & \varphi_{3c}(x, t) &= \frac{L_d}{\Delta} (2w_c(x, t) + w_a(x, t)) \quad (5.94)
\end{aligned}$$

De este modo queda así planteado el sistema de ecuaciones diferenciales, las que junto con las condiciones de borde, permiten evaluar el movimiento del mástil reticulado analizado.

5.5 Condiciones de borde

En cuanto a las condiciones de borde (C.B.) del problema, éstas resultan:

$$\begin{aligned}
& \left[E_l u'_a(x, t) + E_d K_u \eta_3(x, t) \frac{\Delta}{2} + \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \ddot{u}'_a(x, t) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{A_l} \left(P_{ua}(t) + M_v(t) \frac{2\sqrt{3}}{e} \right) \mathcal{U}_a(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.95)
\end{aligned}$$

$$\left| \left[E_l u'_b(x, t) + E_d K_u \eta_1(x, t) \frac{\Delta}{2} + \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \ddot{u}'_b(x, t) - \frac{1}{A_l} \left(P_{ub}(t) + M_w(t) \frac{2}{e} \right) \right] \mathcal{U}_b(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.96)$$

$$\left| \left(E_l u'_c(x, t) + E_d K_u \eta_2(x, t) \frac{\Delta}{2} + \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \ddot{u}'_c(x, t) - \frac{1}{A_l} P_{uc}(t) \right) \mathcal{U}_c(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.97)$$

$$\left\{ E_l v_a'''(x, t) - E_d K_v \delta_3(x, t) \frac{\Delta}{2} \cos \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{v}'_a(x, t) - \frac{1}{J_{ly}} \left[P_{va}(t) + \left(P_{ua}(t) + p_a x \right) v'_a(x, t) \right] \right\} \mathcal{V}_a(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.98)$$

$$\left\{ E_l v_b'''(x, t) + E_d K_v \delta_1(x, t) \frac{\Delta}{2} - \left(\rho_l + \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{v}'_b(x, t) - \frac{1}{J_{ly}} \left[P_{vb}(t) + \left(P_{ub}(t) + p_b x \right) v'_b(x, t) \right] \right\} \mathcal{V}_b(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.99)$$

$$\left\{ E_l v_c'''(x, t) - E_d K_v \delta_2(x, t) \frac{\Delta}{2} \cos \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{v}'_c(x, t) - \frac{1}{J_{ly}} \left[M_u(t) \frac{1}{\sqrt{3}e} + P_{vc}(t) + \left(P_{uc}(t) + p_c x \right) v'_c(x, t) \right] \right\} \mathcal{V}_c(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.100)$$

$$\left\{ E_l w_a'''(x, t) - E_d K_w \delta_3(x, t) \frac{\Delta}{2} \sin \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{w}'_a(x, t) - \frac{1}{J_{lz}} \left[P_{wa}(t) + \left(P_{ua}(t) + p_a x \right) w'_a(x, t) \right] \right\} \mathcal{W}_a(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.101)$$

$$\left\{ E_l w_b'''(x, t) - \left(\rho_l + \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{w}'_b(x, t) - \frac{1}{J_{lz}} \left[P_{wb}(t) + \left(P_{ub}(t) + p_b x \right) w'_b(x, t) \right] \right\} \mathcal{W}_b(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.102)$$

$$\left\{ E_l w_c'''(x, t) + E_d K_w \delta_2(x, t) \frac{\Delta}{2} \sin \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{w}'_c(x, t) - \frac{1}{J_{lz}} \left[P_{wc}(t) + \left(P_{uc}(t) + p_c x \right) w'_c(x, t) \right] \right\} \mathcal{W}_c(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.103)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_a''(x, t) - M_{wa}(t) \right) \mathcal{V}'_a(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.104)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_b''(x, t) - M_{wb}(t) \right) \mathcal{V}'_b(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.105)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_c''(x, t) - M_{wc}(t) \right) \mathcal{V}'_c(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.106)$$

$$\left| \left(E_l J_{lz} w_a''(x, t) - M_{va}(t) \right) \mathcal{W}'_a(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.107)$$

$$\left| \left(E_l J_{lz} w_b''(x, t) - M_{vb}(t) \right) \mathcal{W}'_b(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.108)$$

$$\left| \left(E_l J_{lz} w_c''(x, t) - M_{vc}(t) \right) \mathcal{W}'_c(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (5.109)$$

Se han obtenido así las treinta (30) C.B. del problema (15 por extremo), necesarias para resolver el sistema diferencial de 9x9. Los términos \mathcal{U}_j , \mathcal{V}_j , \mathcal{W}_j , \mathcal{V}'_j y \mathcal{W}'_j ($j = a, b, c$) representan las variaciones de los corrimientos cinemáticamente admisibles (compatibles con las condiciones de vínculo) en cada larguero y en cada dirección principal.

5.6 Solución general al problema de vibraciones naturales

Para el análisis de las vibraciones naturales del reticulado espacial, se acepta que el mismo está liberado de cargas aplicadas, y que además, se presentan modos armónicos de vibración, por lo cual resulta:

$$\{u_j, v_j, w_j\}(x, t) = \{u_j, v_j, w_j\}(x) e^{i\omega t} \quad j = a, b, c \quad (5.110)$$

$$\{\mathcal{U}_j, \mathcal{V}_j, \mathcal{W}_j\}(x, t) = \{\mathcal{U}_j, \mathcal{V}_j, \mathcal{W}_j\}(x) e^{i\omega t} \quad j = a, b, c \quad (5.111)$$

siendo ω la frecuencia circular e $i \equiv \sqrt{-1}$. Reemplazando la propuesta de separar la variable espacial de la temporal, en las ecuaciones del sistema diferencial acoplado (5.85 a 5.93), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(E_l + E_d K_u \frac{\Delta^3}{4L_d} - \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 \right) u_a''(x) - \left(E_d K_u \frac{2\Delta}{L_d} - \rho_l \omega^2 - \rho_d k_u \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_a(x) + \\ & + \left(E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_b(x) + \left(E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_c(x) - \\ & - E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} v_b'(x) - E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \cos \beta v_c'(x) - E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \sin \beta w_c'(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} & \left(E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_a(x) + \left(E_l + E_d K_u \frac{\Delta^3}{4L_d} - \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 \right) u_b''(x) - \\ & - \left(E_d K_u \frac{2\Delta}{L_d} - \rho_l \omega^2 - \rho_d k_u \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_b(x) + \left(E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_c(x) + \\ & + E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} v_a'(x) + E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \cos \beta v_c'(x) - E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \sin \beta w_c'(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} & \left(E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_a(x) + \left(E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_b(x) + \\ & + \left(E_l + E_d K_u \frac{\Delta^3}{4L_d} - \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 \right) u_c''(x) - \left(E_d K_u \frac{2\Delta}{L_d} - \rho_l \omega^2 - \rho_d k_u \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) u_c(x) + \\ & + E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \cos \beta v_a'(x) - E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \cos \beta v_b'(x) + E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \sin \beta w_a'(x) + \\ & + E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \sin \beta w_b'(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$\begin{aligned} & E_d K_v \frac{\Delta^2}{2L_d} u_b'(x) + E_d K_v \frac{\Delta^2}{2L_d} \cos \beta u_c'(x) + E_l v_a''''(x) - \\ & - \left(E_d K_v \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \cos^2 \beta - \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 - \rho_l \omega^2 \right) v_a''(x) + \\ & + \left[E_d K_v \frac{2e}{L_d} (1 + \cos^2 \beta) - \rho_l S_v \omega^2 - \rho_d k_v \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right] v_a(x) - \\ & - \left(E_d K_v \frac{2e}{L_d} + \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_b(x) - \left(E_d K_v \frac{2e}{L_d} \cos^2 \beta + \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_c(x) - \\ & - E_d K_v \frac{\Delta^2 e}{L_d} \sin \beta \cos \beta w_a''(x) + E_d K_v \frac{2e}{L_d} \sin \beta \cos \beta w_a(x) - \\ & - E_d K_v \frac{2e}{L_d} \sin \beta \cos \beta w_c(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.115)$$

$$\begin{aligned}
& -E_dK_v \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_a(x) - E_dK_v \frac{\Delta^2}{2L_d} \cos\beta u'_c(x) - \left(E_dK_v \frac{2e}{L_d} + \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_a(x) + \\
& \quad + E_l v_b''''(x) - \left(E_dK_v \frac{\Delta^2 e}{2L_d} - \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 - \rho_l \omega^2 \right) v_b''(x) + \\
& \quad + \left[E_dK_v \frac{2e}{L_d} (1 + \cos^2\beta) - \rho_l S_v \omega^2 - \rho_d k_v \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right] v_b(x) - \\
& \quad - \left(E_dK_v \frac{2e}{L_d} \cos^2\beta + \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_c(x) - E_dK_v \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta w_b(x) + \\
& \quad + E_dK_v \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta w_c(x) = 0
\end{aligned} \tag{5.116}$$

$$\begin{aligned}
& -E_dK_v \frac{\Delta^2}{2L_d} \cos\beta u'_a(x) + E_dK_v \frac{\Delta^2}{2L_d} \cos\beta u'_b(x) - \\
& - \left(E_dK_v \frac{2e}{L_d} \cos^2\beta + \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_a(x) - \left(E_dK_v \frac{2e}{L_d} \cos^2\beta + \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_b(x) + \\
& \quad + E_l v_c''''(x) - \left(E_dK_v \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \cos^2\beta - \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 - \rho_l \omega^2 \right) v_c''(x) + \\
& \quad + \left(2E_dK_v \frac{2e}{L_d} \cos^2\beta - \rho_l S_v \omega^2 - \rho_d k_v \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) v_c(x) - E_dK_v \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta w_a(x) + \\
& \quad + E_dK_v \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta w_b(x) + E_dK_v \frac{\Delta^2 e}{L_d} \sin\beta \cos\beta w_c''(x) = 0
\end{aligned} \tag{5.117}$$

$$\begin{aligned}
& E_dK_w \frac{\Delta^2}{2L_d} \sin\beta u'_c(x) - E_dK_w \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \sin\beta \cos\beta v_a''(x) + \\
& \quad + E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta v_a(x) - E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta v_c(x) + \\
& \quad + E_l w_a''''(x) - \left(E_dK_w \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \sin^2\beta - \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 - \rho_l \omega^2 \right) w_a''(x) + \\
& \quad + \left(E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta - \rho_l S_w \omega^2 - \rho_d k_w \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_a(x) - \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 w_b(x) - \\
& \quad - \left(E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta + \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_c(x) = 0
\end{aligned} \tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}
& E_dK_w \frac{\Delta^2}{2L_d} \sin\beta u'_c(x) - E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta v_b(x) + E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta v_c(x) - \\
& \quad - \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 w_a(x) + E_l w_b''''(x) + \left(\rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 + \rho_l \omega^2 \right) w_b''(x) + \\
& \quad + \left(E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta - \rho_l S_w \omega^2 - \rho_d k_w \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_b(x) - \\
& \quad - \left(E_dK_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta + \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_c(x) = 0
\end{aligned} \tag{5.119}$$

$$\begin{aligned}
& -E_d K_w \frac{\Delta^2}{2L_d} \sin\beta u'_a(x) - E_d K_w \frac{\Delta^2}{2L_d} \sin\beta u'_b(x) - E_d K_w \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta v_a(x) + \\
& \quad + E_d K_w \frac{2e}{L_d} \sin\beta \cos\beta v_b(x) + E_d K_w \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \sin\beta \cos\beta v'_c(x) - \\
& - \left(E_d K_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta + \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_a(x) - \left(E_d K_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta + \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_b(x) + \\
& \quad + E_l w'_c(x) - \left(E_d K_w \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \sin^2\beta - \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \omega^2 - \rho_l \omega^2 \right) w''_c(x) + \\
& \quad + \left(2E_d K_w \frac{2e}{L_d} \sin^2\beta - \rho_l S_w \omega^2 - \rho_d k_w \frac{4L_d}{3\Delta} \omega^2 \right) w_c(x) = 0 \quad (5.120)
\end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones dan lugar a un sistema diferencial lineal, homogéneo, ordinario en la variable espacial x , a coeficientes constantes, que conduce a un típico problema de autovalores. Los autovalores son las frecuencias naturales circulares ω_n ($n = 1, 2, \dots$). Dichas frecuencias se hallan proponiendo la solución exponencial clásica para las funciones espaciales incógnitas:

$$u_j(x) = U_j e^{\lambda x} \quad j = a, b, c \quad (5.121)$$

$$v_j(x) = V_j e^{\lambda x} \quad j = a, b, c \quad (5.122)$$

$$w_j(x) = W_j e^{\lambda x} \quad j = a, b, c \quad (5.123)$$

donde en general λ es una constante compleja. Reemplazando estas propuestas de solución en las ecuaciones del sistema diferencial espacial (5.112 a 5.120), se obtiene:

$$d_1 U_a + d_2 U_b + d_2 U_c - d_3 V_b - d_3 \cos\beta V_c - d_3 \sin\beta W_c = 0 \quad (5.124)$$

$$d_2 U_a + d_1 U_b + d_2 U_c + d_3 V_a + d_3 \cos\beta V_c - d_3 \sin\beta W_c = 0 \quad (5.125)$$

$$d_2 U_a + d_2 U_b + d_1 U_c + d_3 \cos\beta V_a - d_3 \cos\beta V_b + d_3 \sin\beta W_a + d_3 \sin\beta W_b = 0 \quad (5.126)$$

$$\begin{aligned}
& d_4 U_b + d_4 \cos\beta U_c + \left[d_5 + d_6 + (d_6 - d_7) \cos^2\beta \right] V_a - (d_6 + d_8) V_b - \\
& - \left(d_6 \cos^2\beta + d_8 \right) V_c + (d_6 - d_7) \sin\beta \cos\beta W_a - d_6 \sin\beta \cos\beta W_c = 0 \quad (5.127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_4 U_a - d_4 \cos\beta U_c - (d_6 + d_8) V_a + \left[d_5 + (1 + \cos^2\beta) d_6 - d_7 \right] V_b - \\
& - \left(d_6 \cos^2\beta + d_8 \right) V_c - d_6 \sin\beta \cos\beta W_b + d_6 \sin\beta \cos\beta W_c = 0 \quad (5.128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_4 \cos \beta U_a + d_4 \cos \beta U_b - (d_6 \cos^2 \beta + d_8) V_a - (d_6 \cos^2 \beta + d_8) V_b + \\
& + [d_5 + (2d_6 - d_7) \cos^2 \beta] V_c - d_6 \sin \beta \cos \beta W_a + \\
& + d_6 \sin \beta \cos \beta W_b + d_7 \sin \beta \cos \beta W_c = 0
\end{aligned} \tag{5.129}$$

$$\begin{aligned}
& d_9 \sin \beta U_c + (d_{11} - d_{12}) \sin \beta \cos \beta V_a - d_{11} \sin \beta \cos \beta V_c + \\
& + [d_{10} + (d_{11} - d_{12}) \sin^2 \beta] W_a - d_{13} W_b - (d_{11} \sin^2 \beta + d_{13}) W_c = 0
\end{aligned} \tag{5.130}$$

$$\begin{aligned}
& d_9 \sin \beta U_c - d_{11} \sin \beta \cos \beta V_b + d_{11} \sin \beta \cos \beta V_c - d_{13} W_a + \\
& + (d_{10} + d_{11} \sin^2 \beta) W_b - (d_{11} \sin^2 \beta + d_{13}) W_c = 0
\end{aligned} \tag{5.131}$$

$$\begin{aligned}
& -d_9 \sin \beta U_a - d_9 \sin \beta U_b - d_{11} \sin \beta \cos \beta V_a + d_{11} \sin \beta \cos \beta V_b - \\
& -d_{12} \sin \beta \cos \beta V_c - (d_{11} \sin^2 \beta + d_{13}) W_a - (d_{11} \sin^2 \beta + d_{13}) W_b + \\
& + [d_{10} + (2d_{11} - d_{12}) \sin^2 \beta] W_c = 0
\end{aligned} \tag{5.132}$$

donde se ha definido a:

$$d_1 = E_l \lambda^2 - E_d K_u \frac{2\Delta}{L_d} \left(1 - \frac{\Delta^2 \lambda^2}{8}\right) + \left[\rho_l + \rho_d k_u \frac{4L_d}{3\Delta} \left(1 - \frac{\Delta^2 \lambda^2}{8}\right)\right] \omega^2 \tag{5.133}$$

$$d_2 = E_d K_u \frac{\Delta}{L_d} + \rho_d k_u \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \tag{5.134}$$

$$d_3 = E_d K_u \frac{\Delta e}{L_d} \lambda \tag{5.135}$$

$$d_4 = E_d K_v \frac{\Delta^2}{2L_d} \lambda \tag{5.136}$$

$$d_5 = E_l \lambda^4 - \left[\rho_l (S_v - \lambda^2) + \rho_d k_v \frac{4L_d}{3\Delta} \left(1 - \frac{\Delta^2 \lambda^2}{8}\right)\right] \omega^2 \tag{5.137}$$

$$d_6 = E_d K_v \frac{2e}{L_d} \tag{5.138}$$

$$d_7 = E_d K_v \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \lambda^2 \tag{5.139}$$

$$d_8 = \rho_d k_v \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \quad (5.140)$$

$$d_9 = E_d K_w \frac{\Delta^2}{2L_d} \lambda \quad (5.141)$$

$$d_{10} = E_l \lambda^4 - \left[\rho_l (S_w - \lambda^2) + \rho_d k_w \frac{4L_d}{3\Delta} \left(1 - \frac{\Delta^2 \lambda^2}{8} \right) \right] \omega^2 \quad (5.142)$$

$$d_{11} = E_d K_w \frac{2e}{L_d} \quad (5.143)$$

$$d_{12} = E_d K_w \frac{\Delta^2 e}{2L_d} \lambda^2 \quad (5.144)$$

$$d_{13} = \rho_d k_w \frac{L_d}{3\Delta} \omega^2 \quad (5.145)$$

Se ha obtenido así, un sistema algebraico de nueve ecuaciones lineales y homogéneas (5.124 a 5.132), las que expresadas matricialmente resultan:

$$[\mathbf{d}(\omega)] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_j \\ \mathbf{V}_j \\ \mathbf{W}_j \end{array} \right\} = \{ \mathbf{0} \} \quad j = a, b, c \quad (5.146)$$

y en donde una solución distinta de la trivial requiere que:

$$|\mathbf{d}(\omega)| = 0 \quad (5.147)$$

resultando en un polinomio o ecuación algebraica de orden treinta en λ . Las treinta raíces λ_j ($j = 1, \dots, 30$), que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de doscientos setenta (270) constantes a determinar (U_{kj} , V_{kj} y W_{kj} en donde $k = a, b, c$ y $j = 1, \dots, 30$) a partir de las C.B. del problema, y con ello las infinitas (contables) frecuencias circulares ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Por cada vez que se encuentra la solución al sistema algebraico, se están determinando nueve frecuencias naturales para el mástil reticulado. Para cada n-ésima frecuencia determinada, se tienen los autovectores o

formas modales n -ésima del sistema, las cuales resultan:

$$u_k^{(n)}(x) = U_{kj}^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 30 \quad ; \quad k = a, b, c \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.148)$$

$$v_k^{(n)}(x) = V_{kj}^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 30 \quad ; \quad k = a, b, c \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.149)$$

$$w_k^{(n)}(x) = W_{kj}^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 30 \quad ; \quad k = a, b, c \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.150)$$

A partir de las doscientas setenta constantes a determinar, debemos hacer que doscientas cuarenta de ellas queden en función de las treinta restantes, por ejemplo, conseguir que U_{bj} , U_{cj} , V_{aj} , V_{bj} , V_{cj} , W_{aj} , W_{bj} y W_{cj} dependan de U_{aj} ($j = 1, \dots, 30$), y con ello lograr reducir a treinta el número de constantes arbitrarias a determinar a partir de las C.B. del problema, dado que estas últimas resultan también ser treinta.

El acoplamiento existente entre los corrimientos axiales y transversales experimentados por cada uno de los largueros, hace que las nueve ecuaciones diferenciales estén también acopladas entre sí. A su vez, el hecho de considerar el aporte local de la inercia y rigidez flexional de los largueros, da lugar a un incremento en el orden del sistema diferencial, esto último, si se lo compara con el mismo sistema estructural pero habiendo prescindido de dichos aportes locales. Estas condiciones comentadas, hacen que el poder hallar la solución al sistema diferencial implique un esfuerzo y costo computacional significativo.

5.7 Solución particular del sistema diferencial para el caso del mástil simplemente apoyado

La solución particular del sistema diferencial 9ED desarrollado, es abordada para el caso del mástil simplemente apoyado (A-A) (ver Fig. 5.6), cuyos extremos tienen impedidos los corrimientos en las direcciones de y y z , pero liberados en la dirección de x .

Las características geométricas y mecánicas del mástil se indican a continuación: longitud de largueros $L_l = 24.0$ m, paso o separación entre diagonales $\Delta = 0.2$ m, lado de cada plano de diagonales $e = 0.3$ m, sección de largueros $A_l = 67.69 \times 10^{-5}$ m², inercia flexional de largueros $J_{ly} = J_{lz} = 17.51 \times 10^{-8}$ m⁴, sección de diagonales $A_d = 16.78 \times 10^{-5}$ m², módulo de elasticidad $E_l = E_d = 200000$ MPa, y densidad $\rho_l = \rho_d = 7850$ kg/m³.

Por otro parte y a efectos de comparar resultados de frecuencias naturales, se lleva adelante una modelación vía elementos finitos (modelo discreto) denominado en adelante RE-EF (ver Fig. 5.7) en el cual fueron modelados cada uno de los elementos del reticulado utilizando para los largueros elementos tipo viga de dos nodos (240 por cada larguero), y para las diagonales elementos tipo barra también de dos nodos (1 por cada diagonal).

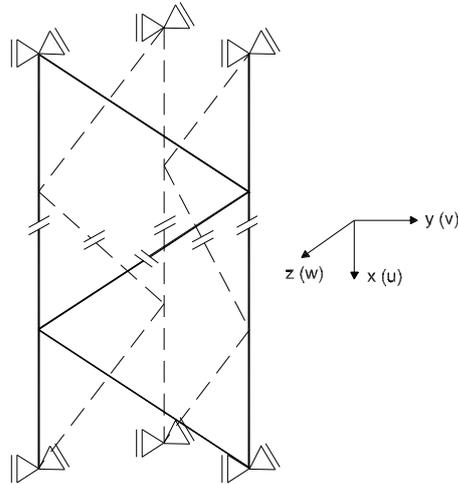


Figura 5.6: Mástil reticulado analizado

Para este caso particular y por presentar el mástil reticulado como C.B. las de apoyado-apoyado (A-A), se acepta adoptar como soluciones para las variables espaciales a las siguientes funciones trascendentes:

$$u_j(x) = q_k \cos\left(\frac{n\pi}{L_l} x\right) \quad j = a, b, c \quad k = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.151)$$

$$v_j(x) = q_k \sin\left(\frac{n\pi}{L_l} x\right) \quad j = a, b, c \quad k = 4, 5, 6 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.152)$$

$$w_j(x) = q_k \sin\left(\frac{n\pi}{L_l} x\right) \quad j = a, b, c \quad k = 7, 8, 9 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.153)$$

las cuales satisfacen las condiciones de borde del problema. El coeficiente n representa el número de semiondas de las funciones trascendentes.

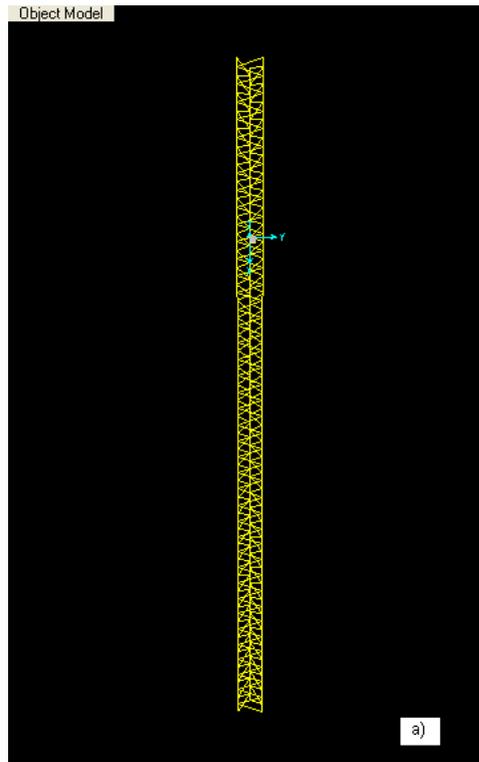


Figura 5.7: Modelación discreta del mástil reticulado

5.7.1 Vibraciones naturales

Para la determinación de la solución del sistema diferencial, y con ello las frecuencias naturales del problema, las funciones solución propuestas son reemplazadas en el sistema de ecuaciones diferenciales (5.112 a 5.120).

A fin de abordar la solución numérica del problema, se programó una rutina en Maple [49] la cual se detalla a continuación:

```
# Vibraciones naturales mástil reticulado apoyado-apoyado
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> b:=array(1..9,1..9):c:=array(1..9,1..9):
# Número de semiondas de las funciones trascendentes
> n:=1:    % n = de 1,...,∞
```

```

# Funciones trascendentes propuestas
> ua:=unapply(q[1]*cos(n*Pi*x),x);
> ub:=unapply(q[2]*cos(n*Pi*x),x);
> uc:=unapply(q[3]*cos(n*Pi*x),x);
> va:=unapply(q[4]*sin(n*Pi*x),x);
> vb:=unapply(q[5]*sin(n*Pi*x),x);
> vc:=unapply(q[6]*sin(n*Pi*x),x);
> wa:=unapply(q[7]*sin(n*Pi*x),x);
> wb:=unapply(q[8]*sin(n*Pi*x),x);
> wc:=unapply(q[9]*sin(n*Pi*x),x);
# Derivadas de las funciones trascendentes
> ua1:=unapply(diff(ua(x)/L1,x);
> ub1:=unapply(diff(ub(x)/L1,x);
> uc1:=unapply(diff(uc(x)/L1,x);
> va1:=unapply(diff(va(x)/L1,x);
> vb1:=unapply(diff(vb(x)/L1,x);
> vc1:=unapply(diff(vc(x)/L1,x);
> wa1:=unapply(diff(wa(x)/L1,x);
> wb1:=unapply(diff(wb(x)/L1,x);
> wc1:=unapply(diff(wc(x)/L1,x);
> ua2:=unapply(diff(ua1(x)/L1,x);
> ub2:=unapply(diff(ub1(x)/L1,x);
> uc2:=unapply(diff(uc1(x)/L1,x);
> va2:=unapply(diff(va1(x)/L1,x);
> vb2:=unapply(diff(vb1(x)/L1,x);
> vc2:=unapply(diff(vc1(x)/L1,x);
> wa2:=unapply(diff(wa1(x)/L1,x);
> wb2:=unapply(diff(wb1(x)/L1,x);
> wc2:=unapply(diff(wc1(x)/L1,x);
> va3:=unapply(diff(va2(x)/L1,x);
> vb3:=unapply(diff(vb2(x)/L1,x);
> vc3:=unapply(diff(vc2(x)/L1,x);
> wa3:=unapply(diff(wa2(x)/L1,x);

```

```

> wb3:=unapply(diff(wb2(x)/L1,x);
> wc3:=unapply(diff(wc2(x)/L1,x);
> va4:=unapply(diff(va3(x)/L1,x);
> vb4:=unapply(diff(vb3(x)/L1,x);
> vc4:=unapply(diff(vc3(x)/L1,x);
> wa4:=unapply(diff(wa3(x)/L1,x);
> wb4:=unapply(diff(wb3(x)/L1,x);
> wc4:=unapply(diff(wc3(x)/L1,x);
# Definición de coeficientes
> eta1:=unapply(((Delta^2/(2*Ld))*ub1(x)+(2*e/Ld)*(va(x)-vb(x))),x);
> eta2:=unapply(((Delta^2/(2*Ld))*uc1(x)-(2*e/Ld)*(vb(x)-vc(x))*cos(beta)...
+(2*e/Ld)*(wb(x)-wc(x))*sin(beta)),x);
> eta3:=unapply(((Delta^2/(2*Ld))*ua1(x)-(2*e/Ld)*(vc(x)-va(x))*cos(beta)...
-(2*e/Ld)*(wc(x)-wa(x))*sin(beta)),x);
> delta1:=unapply((Delta/Ld)*(ub(x)-ua(x))-(Delta*e/Ld)*vb1(x),x);
> delta2:=unapply((Delta/Ld)*(uc(x)-ub(x))+(Delta*e/Ld)*vc1(x)*cos(beta)...
-(Delta*e/Ld)*wc1(x)*sin(beta),x);
> delta3:=unapply((Delta/Ld)*(ua(x)-uc(x))+(Delta*e/Ld)*va1(x)*cos(beta)...
+(Delta*e/Ld)*wa1(x)*sin(beta),x);
# Derivada de los coeficientes
> eta11:=unapply(diff(eta1(x)/L1,x),x);
> eta21:=unapply(diff(eta2(x)/L1,x),x);
> eta31:=unapply(diff(eta3(x)/L1,x),x);
> delta11:=unapply(diff(delta1(x)/L1,x),x);
> delta21:=unapply(diff(delta2(x)/L1,x),x);
> delta31:=unapply(diff(delta3(x)/L1,x),x);
# Definición de ángulos internos de la sección transversal
> sin(beta):=sqrt(3)/2;cos(beta):=1/2;
# Sistema de ecuaciones diferenciales
> ec[1]:=simplify((ua2(x)+Ku*(delta1(x)-delta3(x)+(Delta/2)*eta31(x))...
+omega^2*rho*ua(x)/E+omega^2*rho*ku/3*(Ld/Delta*(4*ua(x)+ub(x)+uc(x))/E))*...
L1^2/cos(n*Pi*x));
> ec[2]:=simplify((va4(x)+Kv*(eta1(x)+(eta3(x)-Delta/2*delta31(x))*cos(beta))...
-omega^2*rho*Sv*va(x)/E-omega^2*rho*kv/3*(Ld/Delta*(4*va(x)+vb(x)+vc(x))/E))*...

```

```

L1^4/sin(n*Pi*x));
> ec[3]:=simplify((wa4(x)+Kw*(eta3(x)-Delta/2*delta31(x))*sin(beta)...
-omega^2*rho*Sw*wa(x)/E-omega^2*rho*kw/3*(Ld/Delta*(4*wa(x)+wb(x)+wc(x))/E))*...
L1^4/sin(n*Pi*x));
> ec[4]:=simplify((ub2(x)+Ku*(delta2(x)-delta1(x)+(Delta/2)*eta11(x))...
+omega^2*rho*ub(x)/E+omega^2*rho*ku/3*(Ld/Delta*(4*ub(x)+ua(x)+uc(x))/E))*...
L1^2/cos(n*Pi*x));
> ec[5]:=simplify((vb4(x)-Kv*(eta2(x)*cos(beta)+eta1(x)-Delta/2*delta11(x))...
-omega^2*rho*Sv*vb(x)/E-omega^2*rho*kv/3*(Ld/Delta*(4*vb(x)+va(x)+vc(x))/E))*...
L1^4/sin(n*Pi*x));
> ec[6]:=simplify((wb4(x)+Kw*eta2(x)*sin(beta)-omega^2*rho*Sw*wb(x)/E...
-omega^2*rho*kw/3*(Ld/Delta*(4*wb(x)+wa(x)+wc(x))/E))*L1^4/sin(n*Pi*x));
> ec[7]:=simplify((uc2(x)+Ku*(delta3(x)-delta2(x)+(Delta/2)*eta21(x))+...
omega^2*rho*uc(x)/E+omega^2*rho*ku/3*(Ld/Delta*(4*uc(x)+ua(x)+ub(x))/E))*...
L1^2/cos(n*Pi*x));
> ec[8]:=simplify((vc4(x)-Kv*(eta3(x)-eta2(x)+Delta/2*delta21(x))*cos(beta)...
-omega^2*rho*Sv*vc(x)/E-omega^2*rho*kv/3*(Ld/Delta*(4*vc(x)+va(x)+vb(x))/E))*...
L1^4/sin(n*Pi*x));
> ec[9]:=simplify((wc4(x)-Kw*(eta3(x))+eta2(x)-Delta/2*delta21(x))*sin(beta)...
-omega^2*rho*Sw*wc(x)/E-omega^2*rho*kw/3*(Ld/Delta*(4*wc(x)+wb(x)+wa(x))/E))*...
L1^4/sin(n*Pi*x));
# Ecuaciones inerciales
> for i from 1 to 9 do:EC[i]:=coeff(ec[i],omega,2):od;
# Ecuaciones elásticas
> for i from 1 to 9 do:eq[i]:=expand(ec[i]-omega^2*EC[i]):od;
> for i from 1 to 9 do:for j from 1 to 9 do:b[i,j]:=coeff(eq[i],q[j]):od:od;
> for i from 1 to 9 do:for j from 1 to 9 do:c[i,j]:=coeff(-EC[i],q[j]):od:od;
# Matriz elástica
> B:=convert(b,Matrix):
# Matriz inercial
> C:=convert(c,Matrix):
> print(B);print(C);
# Características geométricas y mecánicas del reticulado
> E:=2e11: rho:=7850: L1:=24: A1:=67.69e-5: Ad:=16.78e-5: Jly:=17.51e-8:...

```

```

Jlz:=17.51e-8: e:=0.3: Delta:=0.2: Ld:=sqrt(Delta^2/4+e^2):
> Ku:=Ad/(2*Al*Ld^2: Kv:=Ad*e/(Delta*Jly*Ld^2): Kw:=Ad*e/(Delta*Jlz*Ld^2):...
ku:=Ad/Al: kv:=Ad/Jly: kw:=Ad/Jlz: Sv:=Al/Jly: Sw:=Al/Jlz:
# Determinación de autovalores y autovectores
> (vv,ee) := Eigenvectors(evalf(B),C,output=['vectors','values']);
# Determinación de frecuencias circulares
> for i from 1 to 9 do:au[i]:=sqrt(Re(ee[i])):print(i,__,sqrt(Re(ee[i])))od:

```

En Tabla 5.1 se muestran resultados de frecuencias circulares obtenidos para la primera, segunda y tercera solución considerada, es decir, para cuando la semionda n vale 1, 2 y 3. También se muestran resultados obtenidos con el modelo RE-EF.

Las frecuencias ω_1 y ω_2 , están asociadas a corrimientos transversales de los largueros (v_j y w_j donde $j = a, b, c$) en vibración natural, los cuales dan lugar a formas modales del tipo flexional para el sistema. En las Figuras 5.7 y 5.8 se muestran dichas formas modales en la dirección de v y w respectivamente, para cuando n resulta igual a 1, 2 y 3.

La frecuencia ω_3 , está asociada a corrimientos transversales de los largueros (v_j y w_j donde $j = a, b, c$) en vibración natural, los cuales dan lugar a formas modales del tipo torsional para el sistema. En tanto la frecuencia ω_4 , que resulta asociada a corrimientos axiales de los largueros (u_j donde $j = a, b, c$), da lugar a modos del tipo axial para el sistema. En la Figura 5.9 se muestran las formas modales en la dirección de v y w asociadas a la frecuencia ω_3 , mientras que en la Figura 5.10 se muestran las formas modales en la dirección de u asociadas a la frecuencia ω_4 .

A partir de las Figuras, se puede ver que para lo que se refirió como forma modal tipo flexional para el sistema, los modos en corrimiento transversal de los largueros presentan casi una total coincidencia entre sí. Esto mismo se presenta para el caso de la forma modal tipo axial, en donde los modos en corrimiento axial de los largueros también coinciden entre sí. En tanto que para el modo tipo torsional, las formas modales de los largueros resultan distintas entre sí. En cuanto a los modos correspondientes a las frecuencias restantes, ω_5 a ω_9 , se podría establecer que responden a modos superiores de vibración local axial de los largueros, situación que se justificaría cuando en la sección siguiente se observe que la presencia de la carga axial no afecta a dichas frecuencias (ver Tabla 5.2).

n	Frecuencia	9ED	RE-EF
1	ω_1	7.969	7.969
	ω_2	7.969	7.969
	ω_3	74.383	65.450
	ω_4	494.688	494.739
	ω_5	6585.570	-
	ω_6	6585.570	-
	ω_7	13918.115	-
	ω_8	13918.115	-
	ω_9	19683.095	-
2	ω_1	31.528	31.529
	ω_2	31.528	31.531
	ω_3	148.813	130.954
	ω_4	989.368	989.478
	ω_5	6659.051	-
	ω_6	6659.051	-
	ω_7	13919.308	-
	ω_8	13919.308	-
	ω_9	19684.506	-
3	ω_1	69.689	69.697
	ω_2	69.689	69.697
	ω_3	223.336	196.534
	ω_4	1484.035	1485.387
	ω_5	6779.581	-
	ω_6	6779.581	-
	ω_7	13921.299	-
	ω_8	13921.299	-
	ω_9	19686.862	-

Tabla 5.1: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]

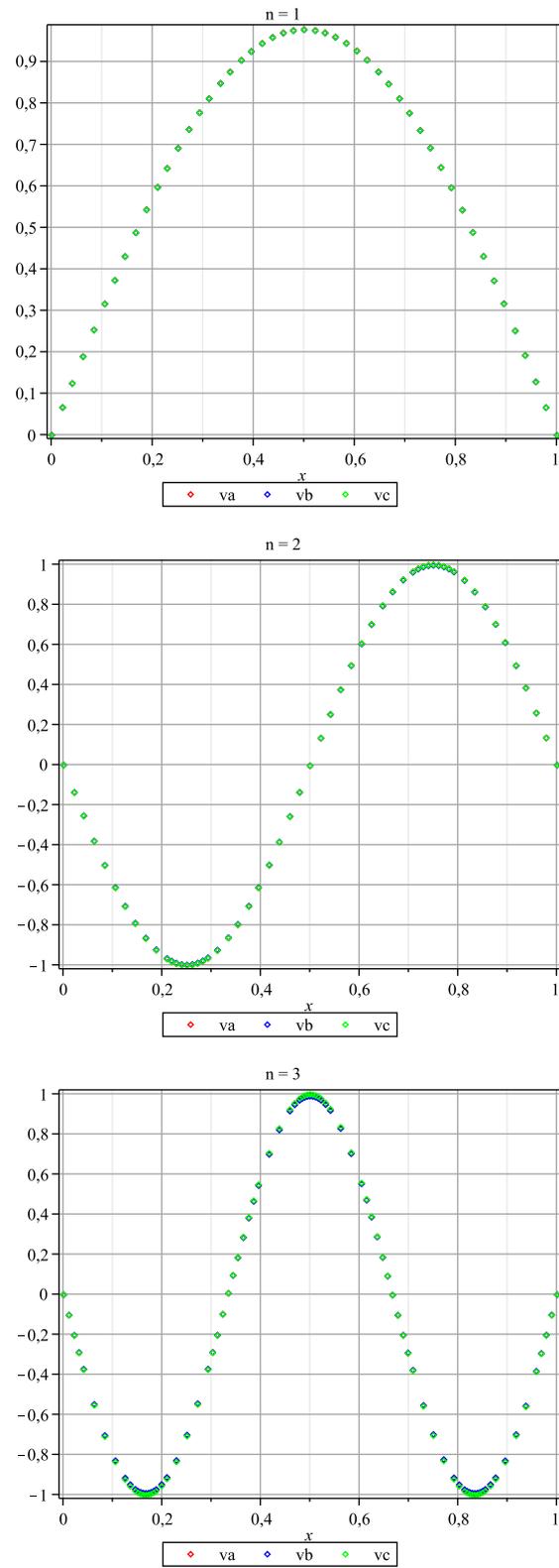


Figura 5.8: Formas modales de los largueros asociadas a ω_1

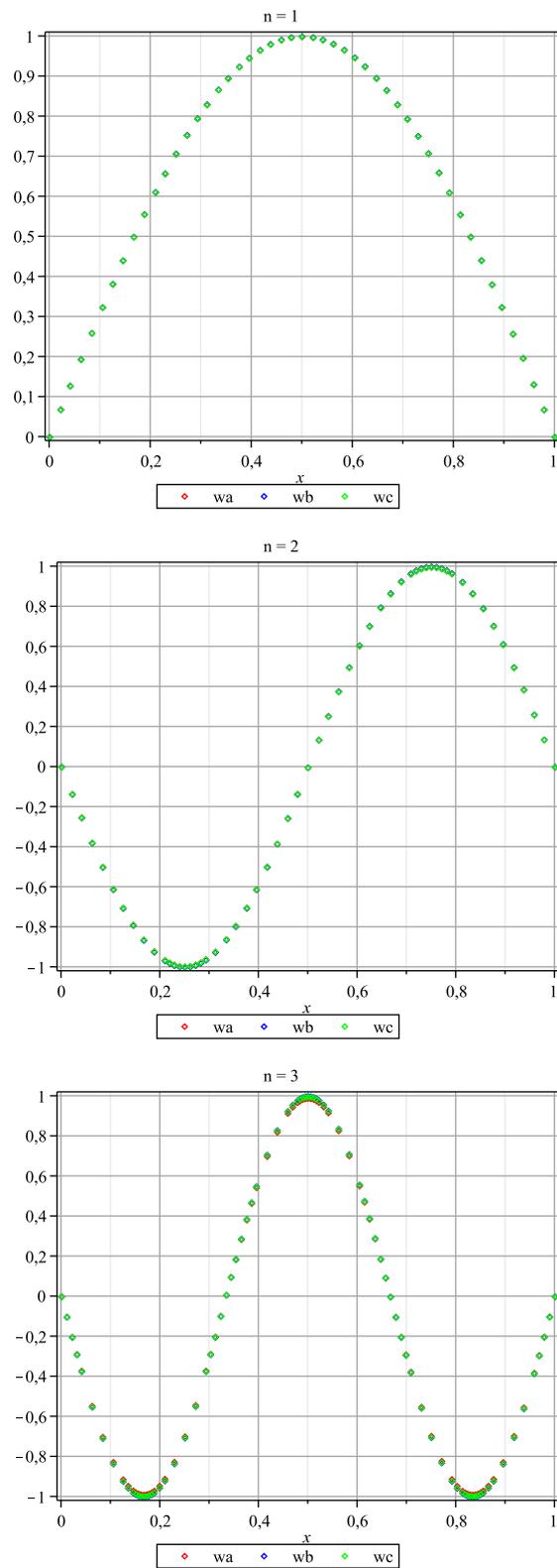


Figura 5.9: Formas modales de los largueros asociadas a ω_2

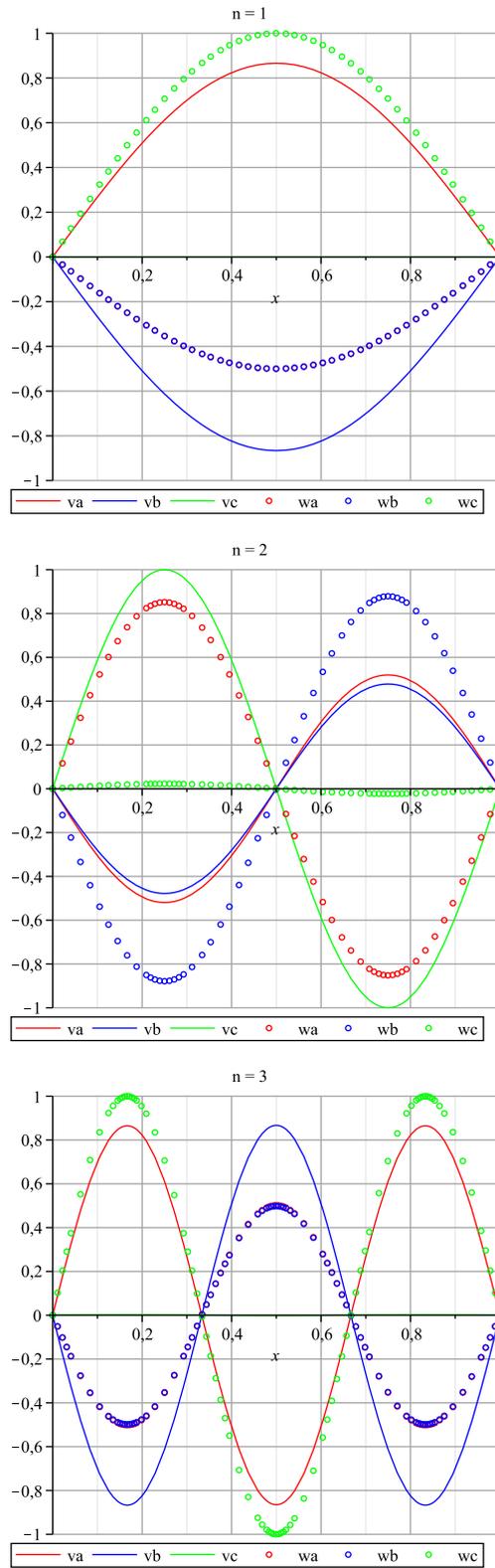


Figura 5.10: Formas modales de los largueros asociadas a ω_3

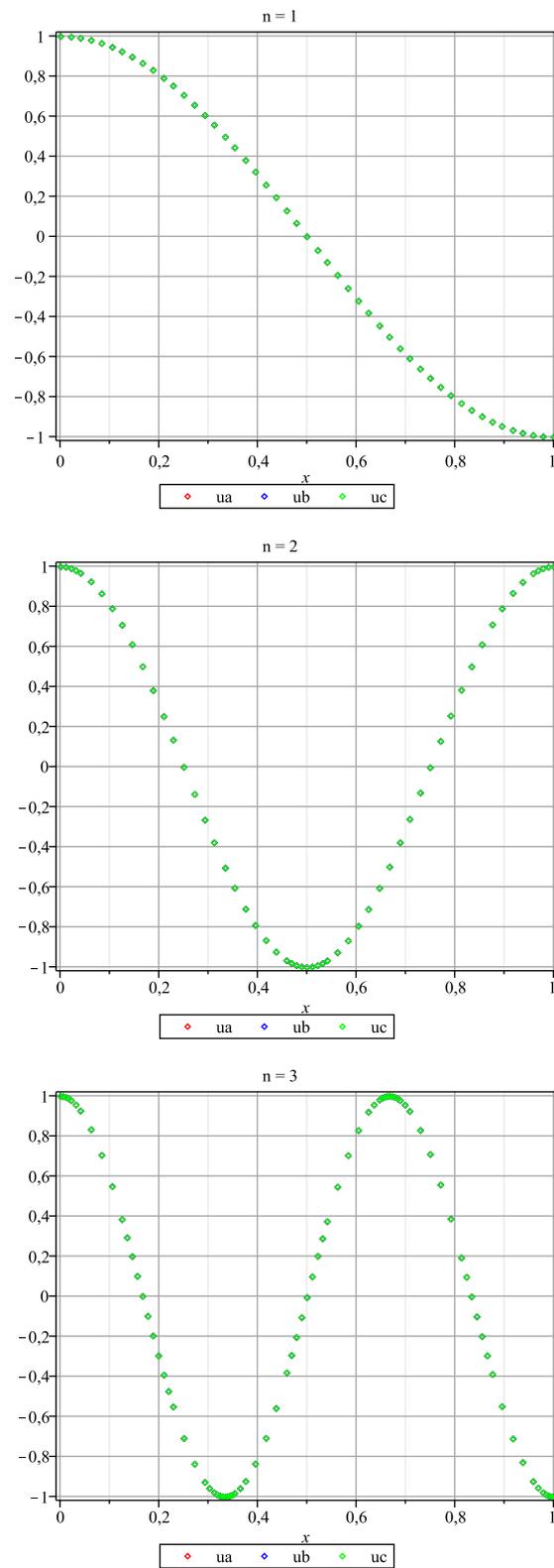


Figura 5.11: Formas modales de los largeros asociadas a ω_4

Efecto de la carga axial en las vibraciones naturales

Cuando actúan cargas axiales sobre los largueros, las frecuencias circulares se ven modificadas. Por ello, se analiza el caso en el cual sobre los extremos de cada uno de largueros del mástil reticulado simplemente apoyado, actúa una carga axial P_{uo} . En Tabla 5.2 se muestran y comparan resultados de frecuencias obtenidos para cuando actúa una carga axial $P_{uo(c)}$ de compresión de 1000 N sobre cada larguero, así como también, para cuando dicha carga es nula.

n	Frecuencia	$P_{uo} = 0$ N	$P_{uo(c)} = 1000$ N
1	ω_1	7.969	7.855
	ω_2	7.969	7.855
	ω_3	74.383	74.368
	ω_4	494.688	494.688
	ω_5	6585.570	6585.570
	ω_6	6585.570	6585.570
	ω_7	13918.115	13918.115
	ω_8	13918.115	13918.115
	ω_9	19683.095	19683.095
2	ω_1	31.528	31.413
	ω_2	31.528	31.413
	ω_3	148.813	148.782
	ω_4	989.368	989.368
	ω_5	6659.051	6659.051
	ω_6	6659.051	6659.051
	ω_7	13919.308	13919.308
	ω_8	13919.308	13919.308
	ω_9	19684.506	19684.506
3	ω_1	69.689	69.572
	ω_2	69.689	69.572
	ω_3	223.336	223.289
	ω_4	1484.035	1484.035
	ω_5	6779.581	6779.581
	ω_6	6779.581	6779.581
	ω_7	13921.299	13921.299
	ω_8	13921.299	13921.299
	ω_9	19686.862	19686.862

Tabla 5.2: Efecto de la carga axial sobre cada larguero en las frecuencias naturales

5.7.2 Estabilidad

Carga crítica

Para la determinación de la solución del sistema diferencial, y con ello las cargas críticas de flexión y torsión del problema, las funciones solución propuestas son reemplazadas en el sistema de ecuaciones diferenciales (5.85 a 5.93), en donde actúan como acciones externas en dicho sistema, solo cargas estáticas axiales de compresión en los extremos de los largueros (ver Fig. 5.11).

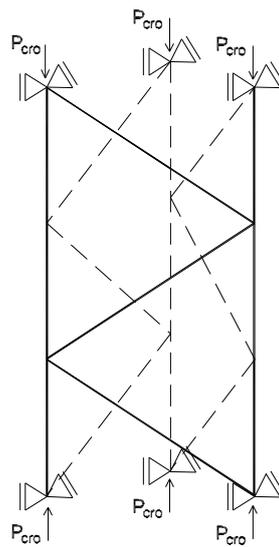


Figura 5.12: Carga crítica sobre los largueros del mástil reticulado

Nuevamente a fin de abordar la solución numérica del problema, se programó una rutina en Maple [49] la cual a continuación se detalla:

```
# Carga crítica mástil reticulado apoyado-apoyado
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> b:=array(1..9,1..9):c:=array(1..9,1..9):
# Funciones trascendentes propuestas
> ua:=unapply(q[1]*cos(Pi*x),x);
> ub:=unapply(q[2]*cos(Pi*x),x);
```

```

> uc:=unapply(q[3]*cos(Pi*x),x);
> va:=unapply(q[4]*sin(Pi*x),x);
> vb:=unapply(q[5]*sin(Pi*x),x);
> vc:=unapply(q[6]*sin(Pi*x),x);
> wa:=unapply(q[7]*sin(Pi*x),x);
> wb:=unapply(q[8]*sin(Pi*x),x);
> wc:=unapply(q[9]*sin(Pi*x),x);
# Derivadas de las funciones trascendentes
> ua1:=unapply(diff(ua(x)/L1,x);
> ub1:=unapply(diff(ub(x)/L1,x);
> uc1:=unapply(diff(uc(x)/L1,x);
> va1:=unapply(diff(va(x)/L1,x);
> vb1:=unapply(diff(vb(x)/L1,x);
> vc1:=unapply(diff(vc(x)/L1,x);
> wa1:=unapply(diff(wa(x)/L1,x);
> wb1:=unapply(diff(wb(x)/L1,x);
> wc1:=unapply(diff(wc(x)/L1,x);
> ua2:=unapply(diff(ua1(x)/L1,x);
> ub2:=unapply(diff(ub1(x)/L1,x);
> uc2:=unapply(diff(uc1(x)/L1,x);
> va2:=unapply(diff(va1(x)/L1,x);
> vb2:=unapply(diff(vb1(x)/L1,x);
> vc2:=unapply(diff(vc1(x)/L1,x);
> wa2:=unapply(diff(wa1(x)/L1,x);
> wb2:=unapply(diff(wb1(x)/L1,x);
> wc2:=unapply(diff(wc1(x)/L1,x);
> va3:=unapply(diff(va2(x)/L1,x);
> vb3:=unapply(diff(vb2(x)/L1,x);
> vc3:=unapply(diff(vc2(x)/L1,x);
> wa3:=unapply(diff(wa2(x)/L1,x);
> wb3:=unapply(diff(wb2(x)/L1,x);
> wc3:=unapply(diff(wc2(x)/L1,x);
> va4:=unapply(diff(va3(x)/L1,x);
> vb4:=unapply(diff(vb3(x)/L1,x);

```

```

> vc4:=unapply(diff(vc3(x)/L1,x);
> wa4:=unapply(diff(wa3(x)/L1,x);
> wb4:=unapply(diff(wb3(x)/L1,x);
> wc4:=unapply(diff(wc3(x)/L1,x);
# Definición de coeficientes
> eta1:=unapply(((Delta^2/(2*Ld))*ub1(x)+(2*e/Ld)*(va(x)-vb(x))),x);
> eta2:=unapply(((Delta^2/(2*Ld))*uc1(x)-(2*e/Ld)*(vb(x)-vc(x))*cos(beta)...
+(2*e/Ld)*(wb(x)-wc(x))*sin(beta)),x);
> eta3:=unapply(((Delta^2/(2*Ld))*ua1(x)-(2*e/Ld)*(vc(x)-va(x))*cos(beta)...
-(2*e/Ld)*(wc(x)-wa(x))*sin(beta)),x);
> delta1:=unapply((Delta/Ld)*(ub(x)-ua(x))-(Delta*e/Ld)*vb1(x),x);
> delta2:=unapply((Delta/Ld)*(uc(x)-ub(x))+(Delta*e/Ld)*vc1(x)*cos(beta)...
-(Delta*e/Ld)*wc1(x)*sin(beta),x);
> delta3:=unapply((Delta/Ld)*(ua(x)-uc(x))+(Delta*e/Ld)*va1(x)*cos(beta)...
+(Delta*e/Ld)*wa1(x)*sin(beta),x);
# Derivada de los coeficientes
> eta11:=unapply(diff(eta1(x)/L1,x),x);
> eta21:=unapply(diff(eta2(x)/L1,x),x);
> eta31:=unapply(diff(eta3(x)/L1,x),x);
> delta11:=unapply(diff(delta1(x)/L1,x),x);
> delta21:=unapply(diff(delta2(x)/L1,x),x);
> delta31:=unapply(diff(delta3(x)/L1,x),x);
# Definición de ángulos internos de la sección transversal
> sin(beta):=sqrt(3)/2;cos(beta):=1/2;
# Sistema de ecuaciones diferenciales
> ec[1]:=simplify((ua2(x)+Ku*(delta1(x)-delta3(x)+(Delta/2)*eta31(x))*...
L1^2/cos(Pi*x));
> ec[2]:=simplify((va4(x)+Kv*(eta1(x)+(eta3(x)-Delta/2*delta31(x))*cos(beta))+...
Pcr/Jly*va2(x))*L1^4/sin(Pi*x));
> ec[3]:=simplify((wa4(x)+Kw*(eta3(x)-Delta/2*delta31(x))*sin(beta))+...
Pcr/Jlz*wa2(x))*L1^4/sin(Pi*x));
> ec[4]:=simplify((ub2(x)+Ku*(delta2(x)-delta1(x)+(Delta/2)*eta11(x))*...
L1^2/cos(Pi*x));

```

```

> ec[5]:=simplify((vb4(x)-Kv*(eta2(x)*cos(beta)+eta1(x)-Delta/2*delta11(x))+...
Pcr/Jly*vb2(x))*Ll^4/sin(Pi*x));
> ec[6]:=simplify((wb4(x)+Kw*eta2(x)*sin(beta)+Pcr/Jlz*wb2(x))*Ll^4/sin(Pi*x));
> ec[7]:=simplify((uc2(x)+Ku*(delta3(x)-delta2(x)+(Delta/2)*eta21(x))*...
Ll^2/cos(Pi*x));
> ec[8]:=simplify((vc4(x)-Kv*(eta3(x)-eta2(x)+Delta/2*delta21(x))*cos(beta)+...
Pcr/Jly*vc2(x))*Ll^4/sin(Pi*x));
> ec[9]:=simplify((wc4(x)-Kw*(eta3(x))+eta2(x)-Delta/2*delta21(x))*sin(beta)+...
Pcr/Jlz*wc2(x))*Ll^4/sin(Pi*x));
# Ecuaciones elásticas
> for i from 1 to 9 do: eq[i]:=expand(ec[i]):od;
> for i from 1 to 9 do: for j from 1 to 9 do: b[i,j]:=coeff(eq[i],q[j]):od:od;
# Matriz elástica
> B:=convert(b,Matrix);
> print(B);
# Características geométricas y mecánicas del reticulado
> E:=2e11: rho:=7850: Ll:=24: Al:=67.69e-5: Ad:=16.78e-5: Jly:=17.51e-8:...
Jlz:=17.51e-8: e:=0.3: Delta:=0.2: Ld:=sqrt(Delta^2/4+e^2):
> Ku:=Ad/(2*Al*Ld^2): Kv:=Ad*e/(Delta*Jly*Ld^2): Kw:=Ad*e/(Delta*Jlz*Ld^2):...
ku:=Ad/Al: kv:=Ad/Jly: kw:=Ad/Jlz: Sv:=Al/Jly: Sw:=Al/Jlz:
# Determinante de los coeficientes. Condición de solución no trivial
> db:=simplify(collect(Determinant(B),Pcr));
# Raíces del polinomio característico
> ss:=solve(db);
# Ordenamiento de raíces obtenidas
> for i from 1 to 6 do: au[i]:=(Re(ss[i])):print(i,_,(Re(ss[i]))):od:
# Ubicación de la raíz buscada
> o:= asignar la ubicación que corresponda;
# Raíz seleccionada
> au[o];
# Determinación de la carga crítica sobre cada larguero en [N]
> Pcr:=au[o]*E;

```

En Tabla 5.3 se muestra el resultado obtenido para las cargas críticas de flexión y torsión sobre cada larguero, a partir de la implementación del modelo continuo 9ED.

Carga crítica	9ED
P_{cro}^f	35140
P_{cro}^t	2388333

Tabla 5.3: Carga crítica de flexión y torsión sobre cada larguero en [N]. Modelo 9ED

5.8 Conclusiones

En este capítulo se han presentado las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde (C.B.) que gobiernan el comportamiento de un mástil reticulado, y cuyo desarrollo para la obtención de las mismas, correspondió al de un planteo energético. La función lagrangiana del sistema fue obtenida a través de un desarrollo algebraico inicial en el dominio discreto, para posteriormente y admitiendo que el paso entre diagonales es pequeño frente al desarrollo del reticulado, pasar al dominio continuo en la variable espacial x . Luego, aplicando el cálculo variacional a la función lagrangiana determinada, y seguidamente el Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, se obtuvieron de manera directa y sin mayores complicaciones, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del mástil reticulado presentado, así como también, las C.B. del problema, abordando analíticamente el tratamiento de las vibraciones naturales. En lo que hace a vibraciones forzadas, se dispone de la vía clásica conocida como superposición modal para resolver el movimiento forzado del reticulado. En efecto, una vez halladas las frecuencias naturales y sus correspondientes formas modales, se propone para la solución del movimiento del sistema a combinaciones lineales en el tiempo que resultan ser la superposición de los modos naturales. El modelo continuo desarrollado, representa de manera precisa la respuesta del sistema, quedando incorporada en la formulación, la flexibilidad por corte debido al alma reticulada del mástil, el efecto de 2^{do} orden propio de las cargas de punta actuantes en los largueros, así como también, el aporte dado por la rigidez e inercia

local de los largueros. La implementación numérica del modelo fue llevada a cabo para el caso particular del reticulado bajo la C.B. simplemente apoyado, proponiendo para ello funciones trascendentes como solución para los corrimientos incógnitas. De la comparación de resultados con aquéllos obtenidos, a partir de una modelación vía elementos finitos, se pudo establecer un excelente desempeño numérico del modelo. Por otro lado, adoptar la solución exponencial clásica como solución para las funciones corrimientos incógnitas, permite abordar todos los posibles casos de C.B., no obstante cabe aclarar que evaluar de este modo la solución del sistema diferencial requiere de un significativo esfuerzo y costo computacional debido fundamentalmente a los acoplamientos que se presentan entre los corrimientos axiales y transversales de cada uno de los largueros. Por último, el desarrollo del presente modelo continuo permitirá fundamentar, física y matemáticamente, el planteo de un nuevo modelo continuo simplificado, tal como se verá en el capítulo siguiente, presentando el mismo una fácil implementación numérica, y logrando a su vez, un excelente desempeño en la determinación de las respuestas evaluadas.

Capítulo 6

Modelo continuo para la representación simplificada del mástil reticulado

6.1 Introducción

Como se comentó en el capítulo anterior, en la industria de las telecomunicaciones las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados y arriostrados. Estos sistemas estructurales presentan una importante cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual en el diseño utilizar modelos equivalentes de representación, resultando ello en un menor costo computacional a la hora del análisis [46], [71]. En ese sentido, Ben Kahla [38] basado en un planteo de flexibilidad, determinó las propiedades elásticas equivalentes para distintos patrones de reticulado de sección transversal triangular, a partir de obtener los desplazamientos del eje centroidal de un tramo del reticulado producidos por una carga unitaria, y luego, compararlos con aquellos desplazamientos obtenidos por la misma carga pero actuando en una viga-columna. En dicho análisis se prescindió del aporte de rigideces locales y del efecto de 2^{do} orden, tampoco fueron obtenidas propiedades inerciales equivalentes. Otros autores [46], [71] para la modelación como viga-columna de un

mástil reticulado arriostrado, obtuvieron las propiedades equivalentes a partir de modelar vía elementos finitos un tramo del reticulado espacial fijado a su base. Sobre el extremo libre de dicho reticulado modelado se aplicaron distintas cargas a fin de obtener corrimientos y giros, y con ello, obtener rigideces flexionales, transversales y torsionales, las cuales luego le fueron asignadas al elemento viga-columna. Este proceso lo debieron repetir cada vez que las propiedades geométricas del reticulado o bien las propiedades mecánicas de los elementos del reticulado cambiaban, resultando entonces en un proceso poco expeditivo. Tampoco fue considerado en el modelo viga-columna las propiedades inerciales equivalentes ni fueron evaluados efectos de 2^{do} orden. Por otro lado, Salehian [61] desarrolló un modelo continuo 1-D para la representación de un reticulado espacial con uniones flexibles utilizado para soportar pantallas solares que abastecen de energía a satélites en órbita. A través de un planteo energético determinó el modelo de orden reducido. El aporte local de los largueros en términos de rigidez e inercia flexional no fue considerado.

En el presente capítulo y a partir de un desarrollo energético, se obtienen las ecuaciones diferenciales que permiten la representación simplificada del reticulado espacial que fuera analizado en el capítulo anterior. En esta formulación queda incorporada, la flexibilidad por corte propia de los sistema reticulados, y efectos de 2^o orden debido al peso propio del mástil y a las cargas de punta actuante sobre los largueros, así como también, aportes locales en cuanto a rigideces e inercias de cada larguero.

La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del mástil analizado en el capítulo anterior, implica un importante esfuerzo (analítico) y costo (computacional), por ello, la implementación del modelo reducido desarrollado en el presente capítulo permite disminuir el esfuerzo y costo anteriormente citado, sin desmedro en los resultados numéricos obtenidos para las distintas respuestas evaluadas [25], aunque para el caso de cargas aplicadas y como se verá en los desarrollos, las mismas son tratadas con una distribución simétrica sobre el reticulado.

6.2 Planteo del problema

El planteo del problema consiste en definir un campo de desplazamiento tal que cualquier corrimiento experimentado por un punto ubicado sobre la sección transversal del mástil reticulado (ver Fig. 6.1), pueda ser expresado en función de los corrimientos que presenta el eje baricéntrico del mismo. El campo de desplazamiento definido resulta:

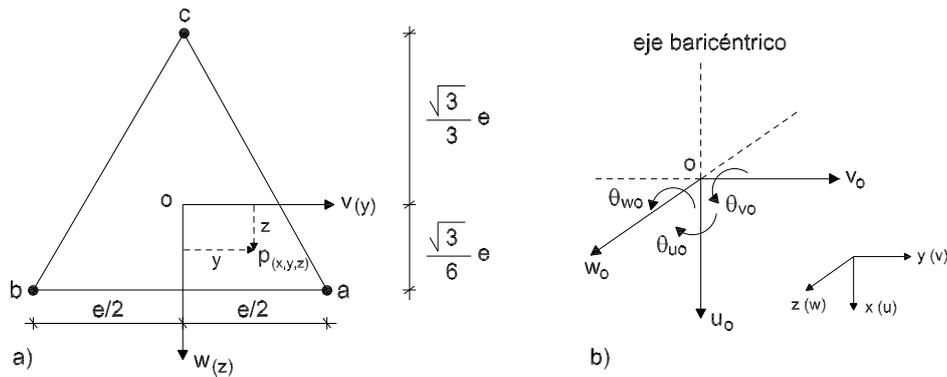


Figura 6.1: Eje baricéntrico del mástil reticulado. a) Punto genérico. b) Convención de signos

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_o(x, t) - \theta_{wo}(x, t)y + \theta_{vo}(x, t)z \\
 v(x, y, z, t) &= v_o(x, t) - \theta_{uo}(x, t)z \\
 w(x, y, z, t) &= w_o(x, t) + \theta_{uo}(x, t)y
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde se ha asumido como hipótesis:

1. Una variación lineal del campo de desplazamientos
2. Giro torsional, prescindiendo del alabeo de la sección transversal

Las seis funciones incógnitas representan, respecto del eje baricéntrico, a: u_o al corrimiento axial (en la dirección de x), v_o y w_o a los corrimientos transversales (en la dirección de y y z respectivamente), θ_{uo} al giro torsional (alrededor de x), y θ_{vo} y θ_{wo} a los giros flexionales (alrededor de y y z respectivamente) de la sección transversal del reticulado. La convención de signos utilizada es la que se muestra en Figura 6.1.

De este modo los corrimientos de cada uno de los tres largueros que conforman el mástil resticulado quedan expresados, con respecto al eje baricéntrico, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u_a(x, t) &= u_o(x, t) - \theta_{wo}(x, t) \frac{e}{2} + \theta_{vo}(x, t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
u_b(x, t) &= u_o(x, t) + \theta_{wo}(x, t) \frac{e}{2} + \theta_{vo}(x, t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
u_c(x, t) &= u_o(x, t) - \theta_{vo}(x, t) \frac{\sqrt{3}}{3} e \\
v_a(x, t) &= v_o(x, t) - \theta_{uo}(x, t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
v_b(x, t) &= v_o(x, t) - \theta_{uo}(x, t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
v_c(x, t) &= v_o(x, t) + \theta_{uo}(x, t) \frac{\sqrt{3}}{3} e \\
w_a(x, t) &= w_o(x, t) + \theta_{uo}(x, t) \frac{e}{2} \\
w_b(x, t) &= w_o(x, t) - \theta_{uo}(x, t) \frac{e}{2} \\
w_c(x, t) &= w_o(x, t)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Reemplazando estos corrimientos en las funciones A_i y B_i determinadas en la sección 5.3 del capítulo anterior:

$$\begin{aligned}
A_{1o} &= \frac{3}{2} \left(u'_o(x, t) \right)^2 \Delta^2 + 3 \left[\left(\theta_{wo}(x, t) \right)^2 + \left(\theta_{vo}(x, t) \right)^2 \right] e^2 + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[\left(\theta'_{wo}(x, t) \right)^2 + \left(\theta'_{vo}(x, t) \right)^2 \right] (e\Delta)^2
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$A_{2o} = \frac{3}{4} \left[\left(v'_o(x, t) \right)^2 + \left(w'_o(x, t) \right)^2 \right] \Delta^2 + \frac{1}{8} \left(\theta'_{uo}(x, t) \right)^2 (e\Delta)^2 \tag{6.4}$$

$$A_{3o} = -3 \left(v'_o(x, t) \theta_{wo}(x, t) - w'_o(x, t) \theta_{vo}(x, t) \right) e\Delta \tag{6.5}$$

$$A_{4o} = 3 \left(u'_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\theta'_{wo}(x, t) \right)^2 + \left(\theta'_{vo}(x, t) \right)^2 \right] e^2 \tag{6.6}$$

$$A_{5o} = 3 \left(v''_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\theta''_{uo}(x, t) \right)^2 e^2 \tag{6.7}$$

$$A_{6o} = 3 \left(w''_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\theta''_{uo}(x, t) \right)^2 e^2 \tag{6.8}$$

$$B_{1o} = 9 \left[\left(\dot{u}_o(x, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_o(x, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_o(x, t) \right)^2 \right] + \frac{3}{4} \left[2 \left(\dot{\theta}_{uo}(x, t) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_{vo}(x, t) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_{wo}(x, t) \right)^2 \right] e^2 \quad (6.9)$$

$$B_{2o} = \frac{3}{4} \left[\left(\dot{u}'_o(x, t) \right)^2 + \left(\dot{v}'_o(x, t) \right)^2 + \left(\dot{w}'_o(x, t) \right)^2 \right] \Delta^2 + \frac{1}{8} \left[2 \left(\dot{\theta}'_{uo}(x, t) \right)^2 + \left(\dot{\theta}'_{vo}(x, t) \right)^2 + \left(\dot{\theta}'_{wo}(x, t) \right)^2 \right] (e\Delta)^2 \quad (6.10)$$

$$B_{3o} = 3 \left[\left(\dot{u}_o(x, t) \right)^2 + \left(\dot{v}_o(x, t) \right)^2 + \left(\dot{w}_o(x, t) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[2 \left(\dot{\theta}_{uo}(x, t) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_{vo}(x, t) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_{wo}(x, t) \right)^2 \right] e^2 \quad (6.11)$$

$$B_{4o} = 3 \left(\dot{v}'_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}'_{uo}(x, t) \right)^2 e^2 \quad (6.12)$$

$$B_{5o} = 3 \left(\dot{w}'_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}'_{uo}(x, t) \right)^2 e^2 \quad (6.13)$$

en donde el subíndice o indica la dependencia con respecto al eje baricéntrico. Por lo tanto los funcionales correspondientes a la energía interna de deformación elástica y a la energía cinética resultan:

$$U_o = \frac{E_d A_d}{2L_d \Delta} \int_0^{L_l} \left(A_{1o} \sin^2 \alpha + A_{2o} \cos^2 \alpha + A_{3o} \sin \alpha \cos \alpha \right) dx + \frac{E_l A_l}{2} \int_0^{L_l} A_{4o} dx + \frac{E_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} A_{5o} dx + \frac{E_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} A_{6o} dx \quad (6.14)$$

$$T_o = \frac{\rho_d A_d L_d}{3\Delta} \int_0^{L_l} \left(B_{1o} + B_{2o} \right) dx + \frac{\rho_l A_l}{2} \int_0^{L_l} B_{3o} dx + \frac{\rho_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} B_{4o} dx + \frac{\rho_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} B_{5o} dx \quad (6.15)$$

En cuanto al trabajo externo debido al peso propio del mástil, este resulta:

$$W_{p_o} = 3p_o \int_0^{L_l} u_o(x) dx \quad (6.16)$$

Es importante destacar que si se acepta que las cargas y pares externos aplicados en los largueros presentan igual valor en cada uno de ellos, al definir los corrimientos de los

largueros con respecto al eje baricéntrico, los trabajos externos así como también el trabajo por efecto de 2^o orden, se expresan como:

$$W_{P_o} = 3 \left(P_{uo}(t)u_o(x, t) + P_{vo}(t)v_o(x, t) + P_{wo}(t)w_o(x, t) \right) \quad (6.17)$$

$$W_{q_o} = 3 \int_0^{L_i} \left(q_{uo}(x, t)u_o(x, t) + q_{vo}(x, t)v_o(x, t) + q_{wo}(x, t)w_o(x, t) \right) dx \quad (6.18)$$

$$W_{M_o} = M_u(t)\theta_{uo}(x, t) + M_v(t)\theta_{vo}(x, t) + M_w(t)\theta_{wo}(x, t) \quad (6.19)$$

$$W_{m_o} = 3 \left(M_{vo}(t)w'_o(x, t) + M_{wo}(t)v'_o(x, t) \right) \quad (6.20)$$

$$W_{2_o} = \frac{3}{2}P_{uo}(t) \int_0^{L_i} \left[\left(v'_o(x, t) \right)^2 + \left(w'_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\theta'_{uo}(x, t) \right)^2 e^2 \right] dx + \\ + \frac{3}{2}p_o \int_0^{L_i} \left[\left(v'_o(x, t) \right)^2 + \left(w'_o(x, t) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\theta'_{uo}(x, t) \right)^2 e^2 \right] x dx \quad (6.21)$$

Por lo tanto la función lagrangiana correspondiente al modelo reducido, y referida con respecto al eje baricéntrico de la sección transversal, vale:

$$L_o = V_o - T_o \quad (6.22)$$

6.3 Ecuaciones diferenciales

La aplicación del principio variacional que venimos utilizando, conduce directamente a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del problema analizado. Las ecuaciones diferenciales resultan en un sistema lineal de 6x6, a derivadas parciales en la variable espacial x y temporal t :

$$(EA)_o u''_o(x, t) - (\rho A)_o \ddot{u}_o(x, t) + r_d \ddot{u}_o(x, t) - 3(p_o + q_{uo}(x, t)) = 0 \quad (6.23)$$

$$3E_I J_{I_y} v''''_o(x, t) - (GA)_o \left(v''_o(x, t) - \theta'_{wo}(x, t) \right) + 3 \left(P_{uo}(t) + p_o x \right) v''_o(x, t) + 3p_o v'_o(x, t) + \\ + (\rho A)_o \ddot{v}_o(x, t) - \left(3\rho_l J_{I_y} + r_d \right) \ddot{v}_o(x, t) - 3q_{vo}(x, t) = 0 \quad (6.24)$$

$$3E_l J_{lz} w_o''''(x, t) - (GA)_o (w_o''(x, t) + \theta'_{vo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) w_o''(x, t) + 3p_o w_o'(x, t) + (\rho A)_o \ddot{w}_o(x, t) - (3\rho_l J_{lp} + r_d) \ddot{w}_o''(x, t) - 3q_{wo}(x, t) = 0 \quad (6.25)$$

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}''''(x, t) + \left[e^2 (P_{uo}(t) + p_o x) - (GJ_x)_o \right] \theta_{uo}''(x, t) + e^2 p_o \theta'_{uo}(x, t) + (\rho J_x)_o \ddot{\theta}_{uo}(x, t) - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \ddot{\theta}_{uo}''(x, t) = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{vo}''(x, t) - (GA)_o (w_o'(x, t) + \theta_{vo}(x, t)) - \frac{(\rho J_x)_o}{2} \ddot{\theta}_{vo}(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{vo}''(x, t) = 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{wo}''(x, t) + (GA)_o (v_o'(x, t) - \theta_{wo}(x, t)) - \frac{(\rho J_x)_o}{2} \ddot{\theta}_{wo}(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{wo}''(x, t) = 0 \quad (6.28)$$

en donde se ha definido como:

$$\begin{aligned} (EA)_o &= 3(E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \\ (GA)_o &= \frac{3}{2} E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ (GJ_x)_o &= \frac{1}{4} E_d A_d e^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ (\rho A)_o &= 3 \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) \\ (\rho J_x)_o &= \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2 \sin \alpha} \right) e^2 \end{aligned} \quad (6.29)$$

llamados respectivamente la "rigidez axial", la "rigidez transversal", la "rigidez torsional", la "inercia traslacional", y la "inercia torsional" global del sistema respecto a las direcciones principales de su eje baricéntrico. $J_{lp} = J_{ly} + J_{lz}$, resulta ser el momento de inercia polar de cada larguero respecto de sus ejes locales. Por otro lado, el término definido como:

$$r_d = \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \frac{\Delta^2}{4} \quad (6.30)$$

está relacionado con un aporte inercial de las diagonales debido a que las velocidades de los nodos que se encuentran por fuera de la sección de referencia, han sido aproximadas

vía serie de Taylor. Es decir, este aporte inercial está asociado al término aproximante de primer orden que aparece en la serie de Taylor. Por otro lado, trabajando con las ecuaciones (6.24 y 6.28) (o con 6.25 y 6.27) a fin de expresar $\theta_{wo}(x, t)$ en función de $v_o(x, t)$ (o $\theta_{vo}(x, t)$ en función de $w_o(x, t)$), se puede definir como:

$$\begin{aligned}
 (EJ_y)_o &= 3E_l J_{ly} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \\
 (EJ_z)_o &= 3E_l J_{lz} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \\
 (\rho J_y)_o &= 3\rho_l J_{ly} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} + r_d \\
 (\rho J_z)_o &= 3\rho_l J_{lz} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} + r_d
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

llamados respectivamente las "rigideces e inercias flexionales" globales del sistema respecto a las direcciones principales del eje baricéntrico.

Observando el sistema de ecuaciones diferenciales, se puede establecer que tanto el corrimiento axial como el giro torsional son movimientos que actúan desacopladamente, mientras que se presenta un acoplamiento entre los giros flexionales y los corrimientos transversales. Se ha obtenido así, la formulación general del modelo de orden reducido que permite la representación simplificada del mástil reticulado analizado. En dicha formulación quedan incorporadas rigideces e inercias locales de largueros y diagonales, así como también, la influencia del efecto de 2^{do} orden y de las deformaciones por corte.

6.4 Condiciones de borde

En cuanto a las condiciones de borde para este modelo de orden reducido, resultan:

$$\left[(EA)_o u'_o(x, t) + r_d \ddot{u}'_o(x, t) - 3P_{uo}(t) \right] \mathcal{U}_o(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[3E_l J_{ly} v_o'''(x, t) - (GA)_o (v'_o(x, t) - \theta_{wo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) v'_o(x, t) - \right. \\
 & \left. - (3\rho_l J_{ly} + r_d) \ddot{v}'_o(x, t) - 3P_{vo}(t) \right] \mathcal{V}_o(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\left[\left[3E_l J_{lz} w_o'''(x, t) - (GA)_o (w_o'(x, t) + \theta_{vo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) w_o'(x, t) - \right. \right. \\ \left. \left. - (3\rho_l J_{lp} + r_d) \ddot{w}_o'(x, t) - 3P_{wo}(t) \right] \mathcal{W}_o(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.34)$$

$$\left\{ \left[\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x, t) - \left[e^2 (P_{uo}(t) + p_o x) - (GJ_x)_o \right] \theta_{uo}'(x, t) - \right. \right. \\ \left. \left. - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \ddot{\theta}_{uo}'(x, t) - M_u(t) \right] \mathcal{G}_{uo}(x, t) \right\}_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.35)$$

$$\left[\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{vo}'(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{vo}'(x, t) - M_v(t) \right] \mathcal{G}_{vo}(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.36)$$

$$\left[\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{wo}'(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{wo}'(x, t) - M_w(t) \right] \mathcal{G}_{wo}(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.37)$$

$$\left[\left(E_l J_{ly} v_o''(x, t) - M_{wo}(t) \right) \mathcal{V}_o'(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.38)$$

$$\left[\left(E_l J_{lz} w_o''(x, t) - M_{vo}(t) \right) \mathcal{W}_o'(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.39)$$

$$\left[\left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}''(x, t) \right) \mathcal{G}'_{uo}(x, t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.40)$$

De este modo, se han obtenido las dieciocho (18) condiciones de borde (C.B.) del problema (9 por extremo), necesarias para resolver el sistema diferencial, y en donde los términos \mathcal{U}_o , \mathcal{V}_o , \mathcal{W}_o , \mathcal{G}_{uo} , \mathcal{G}_{vo} y \mathcal{G}_{wo} representan las variaciones de los corrimientos y giros cinemáticamente admisibles (compatibles con las condiciones de vínculo) del eje baricéntrico.

A fin de asignar de manera correcta las C.B. a cada caso particular del modelo reducido, se deben tener presentes las C.B. particulares de los extremos de los largueros que conforman el reticulado espacial. En este sentido, \mathcal{U}_o , \mathcal{V}_o y \mathcal{W}_o están asociadas a los

corrimientos de los largueros en cada uno de los ejes principales (respectivamente x, y, z); \mathcal{G}_{uo} , \mathcal{G}_{vo} y \mathcal{G}_{wo} están asociadas al giro de la sección transversal del reticulado alrededor de cada uno de los ejes principales (respectivamente x, y, z); \mathcal{V}'_o , \mathcal{W}'_o están asociadas al giro flexional local de los largueros alrededor de los ejes principales z e y respectivamente; en tanto que \mathcal{G}'_{uo} está asociado al giro flexional local de los largueros alrededor de los ejes principales y y z , esto último, debido a que el giro torsional de la sección transversal del reticulado alrededor del eje x , impone estos giros flexionales locales sobre los largueros.

6.5 Propiedades equivalentes

La representación del mástil reticulado como viga-columna (ver Fig. 6.2) a partir de una modelación vía elementos finitos, implica la necesidad de determinar las propiedades elásticas e inerciales equivalentes, las cuales son requeridas por dicho modelo discreto.

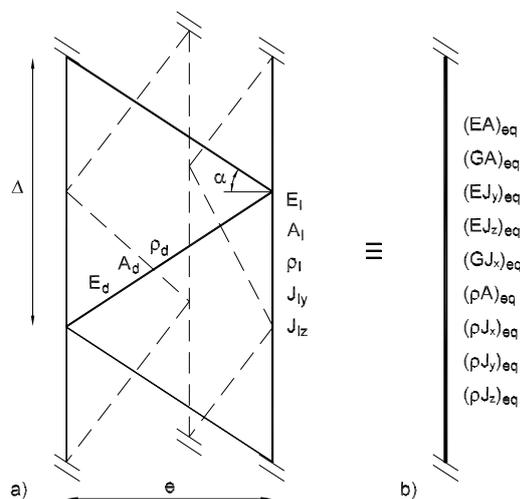


Figura 6.2: Propiedades equivalentes. a) Reticulado espacial. b) Viga-columna

La determinación de las propiedades equivalentes se ha llevado a cabo a partir de comparar los funcionales de energía interna de deformación elástica y de energía cinética, ecuaciones (6.14 y 6.15), obtenidos para el modelo continuo simplificado, con aquellos funcionales energéticos correspondientes al de una viga-columna equivalente.

6.5.1 Propiedades elásticas equivalentes

Rigidez axial equivalente

En corrimiento axial puro la hipótesis cinemática implica que $u_o \neq 0$ mientras que los demás corrimientos y giros son nulos, con lo cual, la energía de deformación elástica dada por la ecuación (6.14) y desarrollada por el modelo continuo simplificado, vale para este caso:

$$U_o = 3 \left(E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha \right) \frac{1}{2} \int_0^{L_l} u_o'^2 dx \quad (6.41)$$

en tanto que para una viga-columna equivalente, el funcional de energía vale:

$$U_{eq} = (EA)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} u_o'^2 dx \quad (6.42)$$

Comparando ambas ecuaciones, se tiene que la rigidez axial equivalente resulta:

$$(EA)_{eq} = 3 \left(E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha \right) = (EA)_o \quad (6.43)$$

Rigidez transversal equivalente

En corrimiento transversal puro en la dirección de y , la hipótesis cinemática implica que $v_o \neq 0$ mientras que los demás corrimientos y giros son nulos. Con un análisis equivalente al caso anterior, los funcionales de energía de deformación valen:

$$U_o = \frac{3}{2} \left(E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \right) \frac{1}{2} \int_0^{L_l} v_o'^2 dx \quad (6.44)$$

$$U_{eq} = (GA_y)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} v_o'^2 dx \quad (6.45)$$

y con idéntico planteo, para el corrimiento en la dirección de z se tiene que:

$$U_o = \frac{3}{2} \left(E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \right) \frac{1}{2} \int_0^{L_l} w_o'^2 dx \quad (6.46)$$

$$U_{eq} = (GA_z)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} w_o'^2 dx \quad (6.47)$$

con lo cual de la comparación correspondiente, se tiene que la rigidez transversal equivalente es la misma en cada una de las direcciones principales, resultando:

$$(GA)_{eq} = \frac{3}{2} \left(E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \right) = (GA)_o \quad (6.48)$$

Rigidez flexional equivalente

En giro flexional puro alrededor del eje z , la hipótesis cinemática implica que tanto la sección transversal como también cada larguero puedan girar alrededor del citado eje. El giro local de cada larguero acompaña al giro de la sección transversal, por ello $v'_o = \theta_{wo} \neq 0$, mientras que los demás corrimientos y giros son nulos. Con un análisis equivalente al caso anterior, los funcionales de energía de deformación valen:

$$U_o = \left[3E_l J_{ly} + (E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \frac{e^2}{2} \right] \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \theta_{wo}^2 dx \quad (6.49)$$

$$U_{eq} = (E J_y)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \theta_{wo}^2 dx \quad (6.50)$$

y con idéntico planteo, para el giro flexional alrededor del eje y se tiene que:

$$U_o = \left[3E_l J_{lz} + (E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \frac{e^2}{2} \right] \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \theta_{vo}^2 dx \quad (6.51)$$

$$U_{eq} = (E J_z)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \theta_{vo}^2 dx \quad (6.52)$$

con lo cual de la comparación correspondiente, se tiene que las rigideces flexionales equivalentes alrededor de cada uno de los ejes principales resulta:

$$(E J_y)_{eq} = 3E_l J_{ly} + (E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \frac{e^2}{2} = 3E_l J_{ly} + (EA)_o \frac{e^2}{6} = (E J_y)_o \quad (6.53)$$

$$(E J_z)_{eq} = 3E_l J_{lz} + (E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \frac{e^2}{2} = 3E_l J_{lz} + (EA)_o \frac{e^2}{6} = (E J_z)_o \quad (6.54)$$

Rigidez torsional equivalente

En giro torsional puro alrededor del eje x , la hipótesis cinemática implica que $\theta_{uo} \neq 0$, mientras que los demás corrimientos y giros son nulos. Con un análisis equivalente al caso anterior, los funcionales de energía de deformación valen:

$$U_o = \frac{1}{4} (E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha) e^2 \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \theta_{uo}^2 dx \quad (6.55)$$

$$U_{eq} = (GJ_x)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \theta_{uo}^{\prime 2} dx \quad (6.56)$$

con lo cual de la comparación correspondiente, se tiene que la rigidez torsional equivalente resulta:

$$(GJ_x)_{eq} = \frac{1}{4} \left(E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \right) e^2 = (GJ_x)_o \quad (6.57)$$

6.5.2 Propiedades inerciales equivalentes

Inercia traslacional equivalente

En movimiento traslacional puro en la dirección de x , el reticulado sólo se desplaza con velocidad $\dot{u}_o(x, t) \neq 0$, con lo cual, la energía cinética dada por la ecuación (6.15) y desarrollada por el modelo continuo simplificado, vale para este caso:

$$T_o = 3 \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{u}_o^2(x, t) dx \quad (6.58)$$

en tanto que para una viga-columna equivalente, el funcional de energía vale:

$$T_{eq} = (\rho A)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{u}_o^2(x, t) dx \quad (6.59)$$

y con idéntico planteo, para el movimiento en la dirección de y y de z , se tiene que:

$$T_o = 3 \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{v}_o^2(x, t) dx \quad (6.60)$$

$$T_{eq} = (\rho A)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{v}_o^2(x, t) dx \quad (6.61)$$

$$T_o = 3 \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{w}_o^2(x, t) dx \quad (6.62)$$

$$T_{eq} = (\rho A)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{w}_o^2(x, t) dx \quad (6.63)$$

con lo cual de la comparación correspondiente, se tiene que la inercia traslacional equivalente es la misma en cada una de las direcciones principales, resultando:

$$(\rho A)_{eq} = 3 \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) = (\rho A)_o \quad (6.64)$$

Inercia flexional equivalente

En movimiento flexional puro alrededor del eje z , la sección transversal del reticulado así como también cada larguero pueden girar alrededor del citado eje. Cada larguero localmente gira a la misma velocidad con que lo hace la sección transversal, es decir que $\dot{\theta}_{wo}(x, t) = \dot{v}'_o(x, t) \neq 0$. Con un análisis equivalente al caso anterior, los funcionales de energía cinética valen:

$$T_o = \left[3\rho_l J_{ly} + \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2\sin\alpha} \right) \frac{e^2}{2} + \rho_d \frac{A_d}{\sin\alpha} \frac{\Delta^2}{4} \right] \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{\theta}_{wo}^2(x, t) dx \quad (6.65)$$

$$T_{eq} = (\rho J_y)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{\theta}_{wo}^2(x, t) dx \quad (6.66)$$

y con idéntico planteo, para el movimiento alrededor del eje y , se tiene que:

$$T_o = \left[3\rho_l J_{lz} + \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2\sin\alpha} \right) \frac{e^2}{2} + \rho_d \frac{A_d}{\sin\alpha} \frac{\Delta^2}{4} \right] \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{\theta}_{vo}^2(x, t) dx \quad (6.67)$$

$$T_{eq} = (\rho J_z)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{\theta}_{vo}^2(x, t) dx \quad (6.68)$$

con lo cual de la comparación correspondiente, se tiene que las inercias flexionales equivalentes alrededor de cada uno de los ejes principales resultan:

$$(\rho J_y)_{eq} = 3\rho_l J_{ly} + \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2\sin\alpha} \right) \frac{e^2}{2} + \rho_d \frac{A_d}{\sin\alpha} \frac{\Delta^2}{4} = 3\rho_l J_{ly} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} + r_d = (\rho J_y)_o \quad (6.69)$$

$$(\rho J_z)_{eq} = 3\rho_l J_{lz} + \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2\sin\alpha} \right) \frac{e^2}{2} + \rho_d \frac{A_d}{\sin\alpha} \frac{\Delta^2}{4} = 3\rho_l J_{lz} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} + r_d = (\rho J_z)_o \quad (6.70)$$

Inercia torsional equivalente

En movimiento torsional puro alrededor del eje x , el reticulado sólo gira con velocidad $\dot{\theta}_{wo}(x, t) \neq 0$. Con un análisis equivalente al caso anterior, los funcionales de energía cinética valen:

$$T_o = \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2\sin\alpha} \right) e^2 \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{\theta}_{wo}^2(x, t) dx \quad (6.71)$$

$$T_{eq} = (\rho J_x)_{eq} \frac{1}{2} \int_0^{L_l} \dot{\theta}_{wo}^2(x, t) dx \quad (6.72)$$

con lo cual de la comparación correspondiente, se tiene que la inercia torsional equivalente resulta:

$$(\rho J_x)_{eq} = \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2 \sin \alpha} \right) e^2 = (\rho J_x)_o \quad (6.73)$$

Las ecuaciones (6.43, 6.48, 6.53, 6.54 y 6.57) resultan entonces ser las propiedades elásticas equivalentes, en tanto que las ecuaciones (6.64, 6.69, 6.70 y 6.73) resultan ser las propiedades inerciales equivalentes, necesarias éstas para la representación del reticulado a través del modelo viga-columna. Es de destacar que estas propiedades equivalentes determinadas, incorporan el aporte de rigidez y de inercia provisto localmente por los largueros, los cuales no suelen ser tenidos en cuenta en los modelos reportados por la literatura, literatura que tampoco reporta la obtención de propiedades inerciales equivalentes.

6.6 Solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

6.6.1 Elásticas

En el análisis de las elásticas se deja de lado el aporte temporal, tratándose entonces de cargas externas aplicadas estáticamente.

Corrimiento axial

El aporte axial se desacopla respecto de los demás. Aceptando una distribución uniforme de la carga q_{uo} , la ecuación diferencial correspondiente resulta:

$$(EA)_o u_o''(x) - 3(p_o + q_{uo}) = 0 \quad (6.74)$$

Escribiendo la ecuación diferencial homogénea asociada, se tiene:

$$(EA)_o u_o''(x) = 0 \quad (6.75)$$

Proponiendo para este caso particular la solución exponencial clásica para el corrimiento axial incógnita:

$$u_o^c(x) = U e^{\lambda x} \quad (6.76)$$

donde en general λ es una constante compleja, y luego reemplazando esta propuesta de solución en (6.75), resulta:

$$(EA)_o \lambda^2 = 0 \quad (6.77)$$

de donde se obtienen las siguientes dos raíces:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (6.78)$$

De este modo la solución complementaria para el corrimiento axial resulta lineal:

$$u_o^c(x) = U_1 + U_2x \quad (6.79)$$

en donde las constantes U_1 y U_2 se determinan a partir de las condiciones de borde del problema. Como solución particular de la ecuación no homogénea (6.74), se propone a:

$$u_o^p(x) = \frac{3(p_o + q_{uo})}{2(EA)_o} x^2 \quad (6.80)$$

Por lo tanto, la solución general resulta de la suma entre la solución particular y la complementaria, obteniendo así la solución para el corrimiento axial:

$$u_o(x) = \frac{3(p_o + q_{uo})}{2(EA)_o} x^2 + U_1 + U_2x \quad (6.81)$$

Corrimiento transversal y giro flexional

El corrimiento transversal se acopla al giro flexional. En este caso, analizamos el corrimiento en la dirección de y acoplado al giro alrededor del eje z . Aceptando una distribución uniforme de la carga q_{vo} y prescindiendo del efecto de 2º orden, las ecuaciones diferenciales correspondientes quedan expresadas ahora como:

$$3E_l J_{ly} v_o''''(x) - (GA)_o (v_o''(x) - \theta'_{wo}(x)) - 3q_{vo} = 0 \quad (6.82)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta''_{wo}(x) + (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) = 0 \quad (6.83)$$

en donde $3E_l J_{ly}$ representa la rigidez flexional local de los largueros.

Escribiendo el sistema diferencial homogéneo asociado, se tiene:

$$3E_l J_{ly} v_o''''(x) - (GA)_o (v_o''(x) - \theta'_{wo}(x)) = 0 \quad (6.84)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta''_{wo}(x) + (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) = 0 \quad (6.85)$$

y proponiendo la solución exponencial clásica para el corrimiento y giro incógnita:

$$v_o^c(x) = V e^{\lambda x} \quad (6.86)$$

$$\theta_{wo}^c(x) = \Psi e^{\lambda x} \quad (6.87)$$

luego reemplazando en el sistema diferencial homogéneo, resulta en un sistema algebraico:

$$\left[3E_l J_{ly} \lambda^4 - (GA)_o \lambda^2 \right] V + (GA)_o \lambda \Psi = 0 \quad (6.88)$$

$$(GA)_o \lambda V + \left[\frac{e^2(EA)_o}{6} \lambda^2 - (GA)_o \right] \Psi = 0 \quad (6.89)$$

Expresando ahora dicho sistema algebraico en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3E_l J_{ly} \lambda^4 - (GA)_o \lambda^2 & (GA)_o \lambda \\ (GA)_o \lambda & \frac{e^2(EA)_o}{6} \lambda^2 - (GA)_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.90)$$

en donde la condición de no trivialidad es una ecuación algebraica de sexto orden en λ :

$$E_l J_{ly} \frac{e^2(EA)_o}{2} \lambda^6 - (EJ_y)_o (GA)_o \lambda^4 = 0 \quad (6.91)$$

de donde se obtienen las siguientes seis raíces:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad (6.92)$$

$$\lambda_5 = -\lambda_6 = \left[\frac{2(EJ_y)_o (GA)_o}{E_l J_{ly} e^2(EA)_o} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.93)$$

De este modo las soluciones complementarias para el corrimiento y giro, son:

$$v_o^c(x) = V_1 + V_2 x + V_3 x^2 + V_4 x^3 + V_5 e^{\lambda_5 x} + V_6 e^{\lambda_6 x} \quad (6.94)$$

$$\theta_{wo}^c(x) = \Psi_1 + \Psi_2 x + \Psi_3 x^2 + \Psi_4 x^3 + \Psi_5 e^{\lambda_5 x} + \Psi_6 e^{\lambda_6 x} \quad (6.95)$$

en donde las constantes V_j y Ψ_j ($j = 1, \dots, 6$) se determinan a partir de las condiciones de borde del problema. Derivando estas soluciones complementarias y reemplazando en el

sistema diferencial homogéneo (6.84 y 6.85), se obtiene la relación entre V y Ψ , y de este modo solo son seis las constantes arbitrarias a determinar a partir de las C.B. Reescribiendo las soluciones complementarias, se tiene:

$$v_o^c(x) = V_1 + V_2x + V_3x^2 + V_4x^3 + V_5e^{\lambda_5x} + V_6e^{\lambda_6x} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}^c(x) = V_2 + 2V_3x + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3x^2 \right] + V_5e^{\lambda_5x} \left(\lambda_5 - \frac{3E_lJ_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right) + \\ + V_6e^{\lambda_6x} \left(\lambda_6 - \frac{3E_lJ_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right) \end{aligned} \quad (6.97)$$

donde las seis constantes arbitrarias V_j ($j = 1, \dots, 6$) son las que se determinan a partir de las C.B. del problema. Como solución particular del sistema diferencial no homogéneo (6.82 y 6.83), se propone a:

$$v_o^p(x) = \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{x^4}{24} \quad (6.98)$$

$$\theta_{wo}^p(x) = \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o x}{(GA)_o 6} \right] \quad (6.99)$$

Por lo tanto, la solución general para este corrimiento transversal y giro flexional, vale:

$$v_o(x) = \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{x^4}{24} + V_1 + V_2x + V_3x^2 + V_4x^3 + V_5e^{\lambda_5x} + V_6e^{\lambda_6x} \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(x) = \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o x}{(GA)_o 6} \right] + V_2 + 2V_3x + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3x^2 \right] + \\ + V_5e^{\lambda_5x} \left(\lambda_5 - \frac{3E_lJ_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right) + V_6e^{\lambda_6x} \left(\lambda_6 - \frac{3E_lJ_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right) \end{aligned} \quad (6.101)$$

Con un desarrollo equivalente, se obtienen las soluciones para el corrimiento transversal en la dirección de z y el giro flexional alrededor del eje y .

Si se prescinde de la rigidez flexional local de los largueros, por considerar que ésta presenta un valor mucho menor que la rigidez flexional seccional, la solución aproximada para el corrimiento transversal y el giro flexional, se simplifica notablemente. En el Apéndice C se muestra el desarrollo correspondiente.

Giro torsional

El giro torsional actúa desacopladamente respecto de los demás. La ecuación diferencial correspondiente, prescindiendo del efecto de 2º orden, resulta:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}''''(x) - (GJ_x)_o \theta_{uo}''(x) = 0 \quad (6.102)$$

la cual es una ecuación diferencial homogénea, por lo tanto, la solución general será igual a la solución complementaria. Proponiendo la solución exponencial clásica para el giro torsional incógnita:

$$\theta_{uo}^c(x) = \Theta e^{\lambda x} \quad (6.103)$$

y luego reemplazando en (6.69), resulta la siguiente ecuación algebraica:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda^4 - (GJ_x)_o \lambda^2 = 0 \quad (6.104)$$

de donde se obtienen las siguientes cuatro raíces:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (6.105)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \left[\frac{2(GJ_x)_o}{e^2 E_l J_{lp}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.106)$$

De este modo la solución complementaria, y por ende la solución general para el giro torsional, vale:

$$\theta_{uo}(x) = \theta_{uo}^c(x) = \Theta_1 + \Theta_2 x + \Theta_3 e^{\lambda_3 x} + \Theta_4 e^{\lambda_4 x} \quad (6.107)$$

en donde la constante Θ_j ($j = 1, \dots, 4$) se determinan a partir de las C.B. del problema.

Prescindiendo de la rigidez flexional local de los largueros, también se prescinde del momento de inercia polar local, con lo cual la solución aproximada para el giro torsional resulta más simple de obtener. En el Apéndice C se muestra el desarrollo correspondiente.

6.6.2 Vibraciones naturales

Se acepta que el sistema está liberado de cargas aplicadas, salvo la aplicación de la carga axial P_{uo} a efectos de evaluar su influencia en las vibraciones. Se prescinde del

peso propio del reticulado, y además se considera que el mismo presenta modos armónicos de vibración, por lo que resulta:

$$\left\{ u_o, v_o, w_o, \theta_{uo}, \theta_{vo}, \theta_{wo} \right\} (x, t) = \left\{ u_o, v_o, w_o, \theta_{uo}, \theta_{vo}, \theta_{wo} \right\} (x) e^{i\omega t} \quad (6.108)$$

$$\left\{ \mathcal{U}_o, \mathcal{V}_o, \mathcal{W}_o, \mathcal{G}_{uo}, \mathcal{G}_{vo}, \mathcal{G}_{wo} \right\} (x, t) = \left\{ \mathcal{U}_o, \mathcal{V}_o, \mathcal{W}_o, \mathcal{G}_{uo}, \mathcal{G}_{vo}, \mathcal{G}_{wo} \right\} (x) e^{i\omega t} \quad (6.109)$$

siendo ω la frecuencia circular e $i \equiv \sqrt{-1}$, y en donde para las variables espaciales, se acepta para las mismas la solución exponencial clásica.

Vibración axial

Reemplazando esta propuesta de separar la variable espacial de la temporal en la ecuación diferencial (6.23), se obtiene:

$$\left[(EA)_o - r_d \omega^2 \right] \lambda^2 + (\rho A)_o \omega^2 = 0 \quad (6.110)$$

y con ello resulta:

$$\lambda^2 = \frac{(\rho A)_o \omega^2}{r_d \omega^2 - (EA)_o} \quad (6.111)$$

Las dos raíces λ_1 y λ_2 , que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de dos constantes U_1 y U_2 a determinar a partir de las condiciones de borde, y con ello las infinitas (contables) frecuencias circulares ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Correspondientemente a cada frecuencia n-ésima se tiene el autovector o forma modal n-ésima:

$$u_o^{(n)}(x) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.112)$$

Vibración flexional

Reemplazando la propuesta de separar la variable espacial de la temporal en las ecuaciones diferenciales acopladas (6.24 y 6.28), se obtiene:

$$C_1 V + C_2 \Psi = 0 \quad (6.113)$$

$$C_2 V + C_3 \Psi = 0 \quad (6.114)$$

en donde se ha definido a:

$$C_1 = 3E_l J_{ly} \lambda^4 + \left[(3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 - (GA)_o + 3P_{uo} \right] \lambda^2 - (\rho A)_o \omega^2 \quad (6.115)$$

$$C_2 = (GA)_o \lambda \quad (6.116)$$

$$C_3 = \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} - \frac{e^2 r_d}{6} \omega^2 \right] \lambda^2 - (GA)_o + \frac{(\rho J_x)_o}{2} \omega^2 \quad (6.117)$$

Expresando el sistema algebraico de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.118)$$

donde la condición de no trivialidad es una ecuación algebraica de sexto orden en λ :

$$C_1 C_3 - C_2^2 = 0 \quad (6.119)$$

Las seis raíces λ_j ($j = 1, \dots, 6$), que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de doce constantes a determinar (V_j y Ψ_j donde $j = 1, \dots, 6$). Reemplazadas éstas, por ejemplo en (6.113), el número de constantes arbitrarias se reduce sólo a seis, en donde resulta:

$$\Psi_j = -\frac{C_{1j}}{C_{2j}} V_j \quad j = 1, \dots, 6 \quad (6.120)$$

De este modo y a partir de las condiciones de borde se determinan las constantes V_j y Ψ_j ($j = 1, \dots, 6$), y las n -ésimas frecuencias circulares ω_n . Correspondientemente a cada frecuencia n -ésima se tienen los autovectores o formas modales n -ésimas:

$$v_o^{(n)}(x) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.121)$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(x) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.122)$$

Con un desarrollo equivalente se obtienen las soluciones para la determinación de las formas modales y de las frecuencias circulares correspondientes al corrimiento transversal en la dirección de z y el giro flexional alrededor del eje y .

Nuevamente, si se prescinde de la rigidez e inercia flexional local de los largueros y del aporte de las diagonales a través de r_d , por ser términos que numéricamente tienen poco peso, la solución aproximada para la obtención de las formas modales y frecuencias circulares resulta más simple de obtener. En el Apéndice C se muestra el desarrollo correspondiente.

Vibración torsional

Reemplazando la propuesta de separar la variable espacial de la temporal en la ecuación diferencial (6.26), se obtiene:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda^4 + \left[e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - (G J_x)_o + e^2 P_{uo} \right] \lambda^2 - (\rho J_x)_o \omega^2 = 0 \quad (6.123)$$

Las cuatro raíces λ_j ($j = 1, \dots, 4$) que podemos obtener de esta ecuación algebraica, y que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de cuatro constantes (Θ_j donde $j = 1, \dots, 4$) a determinar a partir de las condiciones de borde, y con ello las infinitas (contables) frecuencias circulares ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Correspondientemente a cada frecuencia n-ésima se tiene el autovector o forma modal n-ésima:

$$\theta_{uo}^{(n)}(x) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.124)$$

Nuevamente, si se prescinde de la rigidez e inercia flexional local de los largueros y del aporte de las diagonales a través de r_d , la solución aproximada para la obtención de las formas modales y frecuencias circulares torsionales resulta más simple de obtener. En el Apéndice C se muestra el desarrollo correspondiente.

6.6.3 Estabilidad

Se entiende por estabilidad la propiedad del sistema de mantener su estado durante las acciones exteriores. Si el sistema no tiene esta propiedad se dice que es inestable [16]. El caso más simple corresponde a la pérdida de estabilidad de una barra comprimida axialmente. Cuando la fuerza es suficientemente grande, la barra no puede mantener la forma recta y obligatoriamente se flexiona. El estudio de la estabilidad de la barra comprimida fue planteado y resuelto por primera vez por Euler en el siglo XVIII.

Para la determinación de la solución del sistema diferencial, y con ello las cargas críticas de flexión y torsión del problema, las funciones solución propuestas son reemplazadas en el sistema diferencial, en donde actúan como acciones externas en el sistema solo cargas estáticas axiales de compresión en los extremos de los largueros (ver Fig. 6.3).

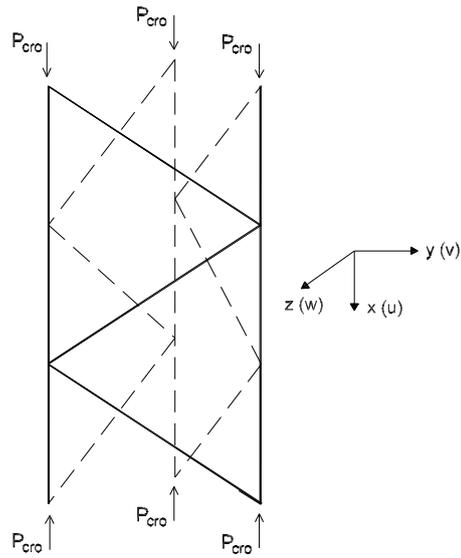


Figura 6.3: Carga crítica actuante en el mástil reticulado

Carga crítica de flexión

Proponiendo nuevamente la solución exponencial clásica tanto para el corrimiento transversal como para el giro flexional incógnita, se tiene:

$$v_o(x) = Ve^{\lambda x} \quad (6.125)$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi e^{\lambda x} \quad (6.126)$$

y luego reemplazando estas propuestas de solución en el sistema diferencial dado por las ecuaciones (6.24 y 6.28), en donde como se dijo, solo actúan las cargas estáticas axiales de compresión P_{cro} sobre los extremos de los largueros, resulta el siguiente sistema algebraico homogéneo:

$$\left[3E_l J_{ly} \lambda^4 - (GA)_o \lambda^2 + 3P_{cro} \lambda^2 \right] V + (GA)_o \lambda \Psi = 0 \quad (6.127)$$

$$(GA)_o \lambda V + \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \lambda^2 - (GA)_o \right] \Psi = 0 \quad (6.128)$$

el que expresado matricialmente resulta:

$$\begin{pmatrix} 3E_l J_{ly} \lambda^4 - (GA)_o \lambda^2 + 3P_{cro} \lambda^2 & (GA)_o \lambda \\ (GA)_o \lambda & \frac{e^2 (EA)_o}{6} \lambda^2 - (GA)_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.129)$$

en donde la condición de no trivialidad resulta en una ecuación algebraica de sexto orden en λ :

$$E_l J_{ly} \frac{e^2(EA)_o}{2} \lambda^6 - \left[(EJ_y)_o (GA)_o - P_{cro} \frac{e^2(EA)_o}{2} \right] \lambda^4 - 3P_{cro} (GA)_o \lambda^2 = 0 \quad (6.130)$$

de donde se obtienen las siguientes seis raíces, las cuales evidentemente dependen de la carga crítica P_{cro} :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (6.131)$$

$$\lambda_3 ; \lambda_4 ; \lambda_5 ; \lambda_6 \quad (6.132)$$

De este modo las soluciones complementarias, las que en este caso resultan ser iguales a las generales, debido a la carga crítica de flexión resultan:

$$v_o(x) = V_1 + V_2x + V_3e^{\lambda_3x} + V_4e^{\lambda_4x} + V_5e^{\lambda_5x} + V_6e^{\lambda_6x} \quad (6.133)$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi_1 + \Psi_2x + \Psi_3e^{\lambda_3x} + \Psi_4e^{\lambda_4x} + \Psi_5e^{\lambda_5x} + \Psi_6e^{\lambda_6x} \quad (6.134)$$

en donde las constantes V_j y Ψ_j ($j = 1, \dots, 6$) se determinan a partir de las condiciones de borde del problema. Derivando estas soluciones complementarias y reemplazando en el sistema diferencial homogéneo (6.24 y 6.28), se obtiene la relación entre V y Ψ , y de este modo solo son seis las constantes arbitrarias a determinar a partir de las C.B. Reescribiendo las soluciones, se tiene:

$$v_o(x) = V_1 + V_2x + V_3e^{\lambda_3x} + V_4e^{\lambda_4x} + V_5e^{\lambda_5x} + V_6e^{\lambda_6x} \quad (6.135)$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(x) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3x} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4x} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5x} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6x} \end{aligned} \quad (6.136)$$

donde las seis constantes arbitrarias V_j ($j = 1, \dots, 6$) son las que se determinan a partir de las C.B. del problema. Con un desarrollo equivalente, se obtienen las soluciones para el corrimiento transversal en la dirección de z y el giro flexional alrededor del eje y producido por la carga crítica.

Nuevamente se destaca que si se prescinde de la rigidez flexional local de los largueros, por considerar que esta presenta un valor mucho menor que la rigidez flexional seccional, la solución aproximada para el corrimiento transversal y el giro flexional resulta más simple de obtener. En el Apéndice C se muestra el desarrollo correspondiente.

Carga crítica de torsión

Proponiendo nuevamente la solución exponencial clásica para el giro torsional incógnita, se tiene:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta e^{\lambda x} \quad (6.137)$$

y luego reemplazando esta propuesta de solución en la ecuación diferencial dada en (6.26), resulta la siguiente ecuación algebraica y homogénea:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda^4 + \left[e^2 P_{cro} - (GJ_x)_o \right] \lambda^2 = 0 \quad (6.138)$$

de donde se obtienen las siguientes cuatro raíces, las cuales evidentemente dependen de la carga crítica P_{cro} :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (6.139)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \left[2 \frac{(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}}{e^2 E_l J_{lp}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.140)$$

De este modo la solución complementaria, y por ende la solución general para el giro torsional, resulta:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta_1 + \Theta_2 x + \Theta_3 e^{\lambda_3 x} + \Theta_4 e^{\lambda_4 x} \quad (6.141)$$

en donde la constante Θ_j ($j = 1, \dots, 4$) se determinan a partir de las C.B. del problema. Al igual que en el caso anterior, si se prescinde de la rigidez flexional local de los largueros, también se prescinde del momento de inercia polar local, con lo que la solución aproximada para el giro torsional resulta más simple de obtener. En el Apéndice C se muestra el desarrollo correspondiente.

6.7 Implementación del modelo simplificado desarrollado

A efectos de considerar la conveniencia en la implementación del modelo simplificado desarrollado para el análisis de un reticulado espacial, se procede a la evaluación de casos particulares con diferentes C.B. las cuales se muestran en la Figura 6.4. Cabe destacar que en esta sección se implementa el modelo para la C.B. apoyada-apoyada (A-A), en tanto que en el Apéndice B se muestra la implementación para las restantes C.B.

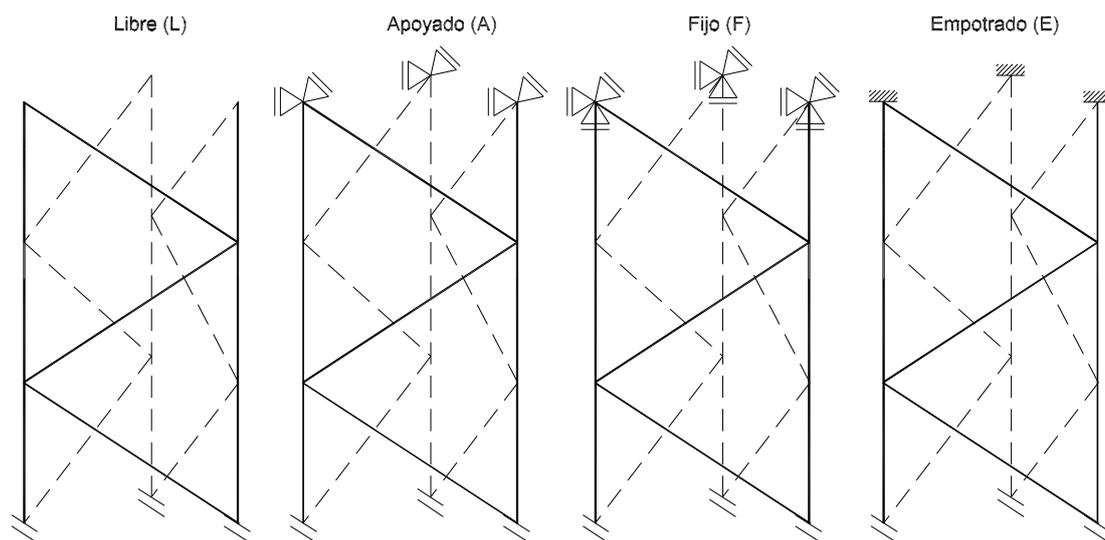


Figura 6.4: Condiciones de vínculo del mástil reticulado

6.7.1 Elásticas

Se analiza el corrimiento transversal de un mástil reticulado, prescindiendo de su peso propio, y sujeto el mismo a una carga transversal uniformemente distribuida, q_{vo} , actuante en la dirección principal y , y en cada uno de los largueros (ver Fig. 6.5). La evaluación frente a una carga q_{wo} en la dirección de z , resulta de un desarrollo equivalente.

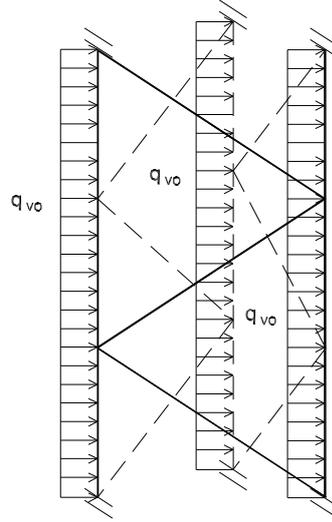


Figura 6.5: Mástil reticulado analizado

1º caso: apoyado-apoyado (A-A)

En este caso los extremos de los largueros sólo presentan restringidos los corrimientos en las direcciones de y y z , dando lugar también a una restricción del giro torsional de la sección. Las C.B. del reticulado referidas al eje baricéntrico, para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , resultan:

$$\left| \left[3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) \right] \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.142)$$

$$\left| \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x) \right] \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.143)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_o''(x) \right) \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.144)$$

Por lo tanto para este caso particular, se tiene que:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.145)$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.146)$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| v''_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.147)$$

Por lo tanto evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y/o sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$v_{o(0)} = V_1 + V_5 + V_6 = 0 \quad (6.148)$$

$$\theta'_{wo(0)} = 2V_3 + V_5 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] + V_6 \left[\lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \right] + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} = 0 \quad (6.149)$$

$$v''_{o(0)} = 2V_3 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (6.150)$$

$$v_{o(L_l)} = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (6.151)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo(L_l)} = 2V_3 + 6V_4 L_l + V_5 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \left[\lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \\ + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^2}{2} + \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.152)$$

$$v''_{o(L_l)} = 2V_3 + 6V_4 L_l + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^2}{2} = 0 \quad (6.153)$$

Por lo tanto, se tiene un sistema de seis ecuaciones algebraicas y lineales, las que expresadas matricialmente resultan:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \\ 0 & \dots & \lambda_6^2 \\ 1 & \dots & e^{\lambda_6 L_l} \\ 0 & \dots & \left[\lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \right] e^{\lambda_6 L_l} \\ 0 & \dots & \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \\ 0 \\ -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} \\ -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^2}{2} + \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \right] \\ -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^2}{2} \end{pmatrix} \quad (6.154)$$

Resolviendo dicho sistema, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j , y con ello, el corrimiento transversal y el giro flexional para el presente caso analizado.

6.7.2 Vibraciones naturales

En esta sección, se evalúan las vibraciones libres no amortiguadas (axial, flexional y torsional) del mástil reticulado, para lo cual se libera al mismo de cargas aplicadas y se prescinde de su peso propio. El caso analizado, en lo que a la C.B. se refiere, es el mismo al considerado en el análisis de la elástica.

1º caso: apoyado-apoyado (A-A)

Las C.B. del reticulado para el movimiento axial, habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left[\left[(EA)_o u'_o(x) - r_d \omega^2 u'_o(x) \right] \mathcal{U}_o(x) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.155)$$

donde para este caso particular se tiene que:

$$\left[\mathcal{U}_o(x) \right]_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left[u'_o(x) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.156)$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y/o sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$u'_{o(0)} = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.157)$$

$$u'_{o(L_l)} = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.158)$$

con lo que expresando matricialmente a este sistema de dos ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, resulta:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} \\ \lambda_1^{(n)} e^{\lambda_1^{(n)} L_l} & \lambda_2^{(n)} e^{\lambda_2^{(n)} L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(n)} \\ U_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.159)$$

en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo, con lo cual:

$$e^{\lambda_1^{(n)} L_l} - e^{\lambda_2^{(n)} L_l} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.160)$$

De este modo, asignando un valor inicial a ω en (6.111), se determinan las raíces λ_1 y λ_2 , y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición dada por (6.160).

Así a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^a , a la frecuencia siguiente ω_2^a , y así sucesivamente.

En cuanto a las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left| \left\{ 3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) + \left[3P_{uo} + (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 \right] v_o'(x) \right\} \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.161)$$

$$\left| \left\{ \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} - \frac{e^2 r_d}{6} \omega^2 \right] \theta'_{wo}(x) \right\} \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.162)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_o''(x) \right) \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.163)$$

Evaluando ahora en dichos bordes las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y/o sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_{o(0)}^{(n)} = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.164)$$

$$\theta'_{wo(0)}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.165)$$

$$v_{o(0)}''^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.166)$$

$$v_{o(L_l)}^{(n)} = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.167)$$

$$\theta'_{wo(L_l)}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.168)$$

$$v_{o(L_l)}''^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.169)$$

Resulta así en un sistema de seis ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, con doce constantes a determinar. De (6.120) podemos poner $\Psi_j^{(n)}$ en función de $V_j^{(n)}$, reduciendo a

seis las constantes a determinar. Luego expresando matricialmente al sistema, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(n)} \frac{C_{11}^{(n)}}{C_{21}^{(n)}} & \dots & \lambda_6^{(n)} \frac{C_{16}^{(n)}}{C_{26}^{(n)}} \\ \lambda_1^{2(n)} & \dots & \lambda_6^{2(n)} \\ e^{\lambda_1^{(n)} L_l} & \dots & e^{\lambda_6^{(n)} L_l} \\ \lambda_1^{(n)} \frac{C_{11}^{(n)}}{C_{21}^{(n)}} e^{\lambda_1^{(n)} L_l} & \dots & \lambda_6^{(n)} \frac{C_{16}^{(n)}}{C_{26}^{(n)}} e^{\lambda_6^{(n)} L_l} \\ \lambda_1^{2(n)} e^{\lambda_1^{(n)} L_l} & \dots & \lambda_6^{2(n)} e^{\lambda_6^{(n)} L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{(n)} \\ V_2^{(n)} \\ V_3^{(n)} \\ V_4^{(n)} \\ V_5^{(n)} \\ V_6^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.170)$$

La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (6.119) se determinan las seis raíces λ_j ($j = 1, \dots, 6$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo dada por (6.170). Así, a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^f , a la frecuencia siguiente ω_2^f , y así sucesivamente. Con un desarrollo equivalente se determinan las frecuencias para el movimiento transversal en z acoplado al giro flexional alrededor del eje y .

En cuanto a las C.B. del eje baricéntrico para el giro torsional alrededor del eje x , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left| \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x) - \left[e^2 P_{uo} - (GJ_x)_o - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \right] \theta_{uo}'(x) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.171)$$

$$\left| \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}''(x) \right) \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.172)$$

Para este caso particular, se tiene que:

$$\left| \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.173)$$

$$\left| \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{uo}''(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (6.174)$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración torsional (y/o sus derivadas según corresponda), resulta:

$$\theta_{uo(0)}^{(n)} = \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.175)$$

$$\theta_{uo(0)}^{\prime(n)} = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.176)$$

$$\theta_{uo(L_i)}^{(n)} = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_i} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.177)$$

$$\theta_{uo(L_i)}^{\prime(n)} = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_i} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.178)$$

Resulta así en un sistema de cuatro ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, las que expresadas matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{2(n)} & \dots & \lambda_4^{2(n)} \\ e^{\lambda_1^{(n)} L_i} & \dots & e^{\lambda_4^{(n)} L_i} \\ \lambda_1^{2(n)} e^{\lambda_1^{(n)} L_i} & \dots & \lambda_4^{2(n)} e^{\lambda_4^{(n)} L_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1^{(n)} \\ \Theta_2^{(n)} \\ \Theta_3^{(n)} \\ \Theta_4^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.179)$$

Nuevamente, la condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (6.123), se determinan las cuatro raíces λ_j ($j = 1, \dots, 4$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo dada por (6.179). Así, a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^t , a la frecuencia siguiente ω_2^t , y así sucesivamente.

6.7.3 Estabilidad

En esta sección, se evalúan las cargas críticas de flexión y torsión capaces de producir la inestabilidad del mástil reticulado, para lo cual solo se considera como acciones externas a cargas estáticas axiales de compresión, actuantes de manera centrada en los extremos de los largueros. Se prescinde también del peso propio del reticulado. El caso analizado, en lo que a la C.B. se refiere, es el mismo al considerado en el análisis de la elástica.

1º caso: apoyado-apoyado (A-A)

Al igual que en el caso de las elásticas, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y\o sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_{o(0)} = V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \quad (6.180)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo(0)} = & V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5 \lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (6.181)$$

$$v''_{o(0)} = V_3 \lambda_3^2 + V_4 \lambda_4^2 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (6.182)$$

$$v_{o(L_i)} = V_1 + V_2 L_i + V_3 e^{\lambda_3 L_i} + V_4 e^{\lambda_4 L_i} + V_5 e^{\lambda_5 L_i} + V_6 e^{\lambda_6 L_i} = 0 \quad (6.183)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo(L_i)} = & V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_i} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_i} + \\ & + V_5 \lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_i} + V_6 \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_i} = 0 \end{aligned} \quad (6.184)$$

$$v''_{o(L_i)} = V_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_i} + V_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_i} + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_i} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_i} = 0 \quad (6.185)$$

De este modo, se tiene un sistema de seis ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, las que expresadas matricialmente resultan:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \\ 0 & \dots & \lambda_6^2 \\ 1 & \dots & e^{\lambda_6 L_i} \\ 0 & \dots & \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_i} \\ 0 & \dots & \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.186)$$

La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a P_{cro} en (6.130) se determinan

las cuatro raíces λ_j ($j = 3, \dots, 6$) (ya se sabe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo dada por (6.186), determinando entonces la carga crítica de flexión P_{cro}^f alrededor del eje z . Con un desarrollo equivalente se determina la carga crítica de flexión alrededor del eje y .

Evaluando ahora la solución para el giro torsional (y/o sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, de acuerdo a las C.B. del mismo resulta:

$$\theta_{uo(0)} = \Theta_1 + \Theta_3 + \Theta_4 = 0 \quad (6.187)$$

$$\theta''_{uo(0)} = \Theta_3 \lambda_3^2 + \Theta_4 \lambda_4^2 = 0 \quad (6.188)$$

$$\theta_{uo(L_l)} = \Theta_1 + \Theta_2 L_l + \Theta_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (6.189)$$

$$\theta''_{uo(L_l)} = \Theta_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (6.190)$$

De este modo, se tiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, las que expresadas matricialmente resultan:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \lambda_4^2 \\ 1 & \dots & e^{\lambda_4 L_l} \\ 0 & \dots & \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.191)$$

La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a P_{cro} en (6.140) se determinan las dos raíces λ_3 y λ_4 (ya se sabe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición dada por (6.191), determinando entonces la carga crítica de torsión P_{cro}^t alrededor del eje x .

6.7.4 Resultados numéricos

Se evalúa numéricamente el caso de un mástil reticulado cuyas características son las que a continuación se indican: longitud de largueros $L_l = 24.0$ m, paso o separación entre diagonales $\Delta = 0.2$ m, lado de cada plano de diagonales $e = 0.3$ m, sección de largueros $A_l = 67.69 \times 10^{-5}$ m², inercia flexional de largueros $J_{ly} = J_{lz} = 17.51 \times 10^{-8}$ m⁴, sección de diagonales $A_d = 16.78 \times 10^{-5}$ m², módulo de elasticidad $E_l = E_d = 200000$ MPa y densidad del material $\rho_l = \rho_d = 7850$ kg/m³. Para la evaluación de la elástica del reticulado, se considera que la carga transversal distribuida uniformemente sobre cada larguero en la dirección de análisis y , resulta de $q_{vo} = 75$ N/m, en tanto que para la evaluación del efecto de la carga axial de compresión sobre las vibraciones naturales, se considera una fuerza de $P_{uo(c)}$ de 1000 N. Los resultados numéricos para el modelo continuo simplificado desarrollado se referencian, en adelante 6ED, mientras que para el modelo continuo simplificado para el cual se ha prescindido de aportes locales (ver Apéndice C), en adelante 6ED*. Para el caso particular dado por la C.B. A-A, se comparan resultados con los obtenidos del modelo 9ED. Al mismo tiempo y para comparar resultados de elásticas y vibraciones naturales para las distintas C.B., se llevan adelante dos modelaciones vía elementos finitos (modelos discretos): el primero denominado en adelante RE-EF (ver. Fig. 6.6) en el cual fueron modelados cada uno de los elementos del reticulado utilizando para los largueros elementos tipo viga de dos nodos (240 por cada larguero), y para las diagonales elementos tipo barra también de dos nodos (1 por cada diagonal), y el segundo modelo denominado VC-EF (ver Fig. 6.6), en el que el reticulado fue modelado como viga-columna y cuyas propiedades equivalentes fueron obtenidas en la Sección 6.5, utilizando 120 elementos tipo viga de dos nodos. El *software* utilizado en la simulación numérica fue SAP2000 [62]. En tanto que para comparar resultados de cargas críticas, se hace uso de los resultados obtenidos mediante el modelo discreto VC-EF.

En Tabla 6.1 se muestran los resultados del corrimiento lateral máximo en la dirección de y , en Tablas 6.2 a 6.8 se muestran los resultados de las tres primeras frecuencias circulares (axiales, flexionales y torsionales), mientras que en Tablas 6.9 a 6.10 se muestran resultados de la influencia de la carga axial de compresión en la primera frecuencia flexional

y torsional. En tanto que en Tablas 6.11 y 6.12 se muestran resultados de las cargas críticas de flexión y torsión del reticulado. En todas las Tablas indicadas, los resultados obtenidos corresponden a cada uno de los casos evaluados, es decir, para las distintas C.B. posibles.

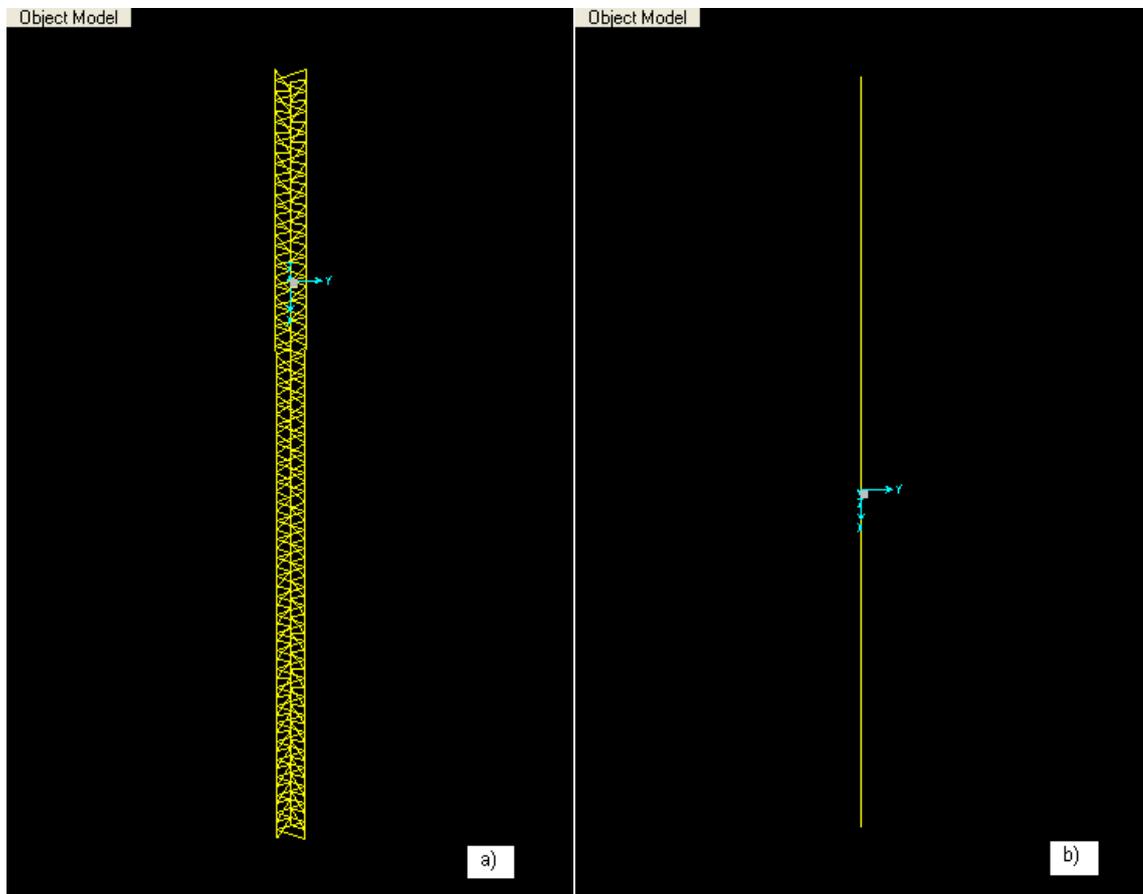


Figura 6.6: Modelación discreta del mástil reticulado. a) RE-EF. b) VC-EF

Caso	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
A-A	156.739	159.441	156.632	156.804
F-F	32.268	32.793	32.067	32.265
E-E	32.207	-	32.007	-
L-F	1499.165	1524.298	1510.667	1498.992
L-E	1498.548	-	1510.031	-
A-F	66.041	67.149	66.541	66.050
A-E	65.986	-	66.487	-

Tabla 6.1: Corrimiento transversal $v_{o(max)}$ en [mm] del mástil reticulado

Frec.	9ED	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	494.688	496.618	496.624	494.739	496.694
ω_2^a	989.368	993.198	993.248	989.478	992.604
ω_3^a	1484.035	1489.704	1489.872	1485.387	1488.906
ω_1^f	7.969	8.000	7.931	7.969	7.999
ω_2^f	31.528	31.651	31.378	31.529	31.647
ω_3^f	69.689	69.966	69.345	69.697	69.945
ω_1^t	74.383	74.384	74.376	65.450	-
ω_2^t	148.813	148.816	148.751	130.954	-
ω_3^t	223.336	223.344	223.127	196.534	-

Tabla 6.2: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-A

Frec.	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	496.618	496.624	494.739	496.694
ω_2^a	993.198	993.248	989.478	992.604
ω_3^a	1489.704	1489.872	1485.387	1488.906
ω_1^f	17.867	17.723	17.800	17.869
ω_2^f	48.217	47.828	48.040	48.221
ω_3^f	92.063	91.306	91.725	92.048
ω_1^t	74.384	74.376	65.450	-
ω_2^t	148.816	148.751	130.954	-
ω_3^t	223.344	223.127	196.534	-

Tabla 6.3: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso F-F

Frec.	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	496.618	-	494.739	-
ω_2^a	993.198	-	989.478	-
ω_3^a	1489.704	-	1485.387	-
ω_1^f	17.883	-	17.816	-
ω_2^f	48.292	-	48.114	-
ω_3^f	92.277	-	91.940	-
ω_1^t	75.142	-	66.097	-
ω_2^t	150.333	-	132.250	-
ω_3^t	225.620	-	198.458	-

Tabla 6.4: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso E-E

Frec.	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	248.311	248.312	247.370	248.347
ω_2^a	744.915	744.936	741.816	744.453
ω_3^a	1241.463	1241.560	1236.847	1241.736
ω_1^f	2.853	2.829	2.844	2.855
ω_2^f	17.665	17.519	17.637	17.707
ω_3^f	48.597	48.186	48.583	48.775
ω_1^t	37.189	37.187	32.723	-
ω_2^t	111.584	111.564	98.190	-
ω_3^t	186.033	185.939	163.710	-

Tabla 6.5: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso L-F

Frec.	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	248.311	-	247.370	-
ω_2^a	744.915	-	741.816	-
ω_3^a	1241.463	-	1236.847	-
ω_1^f	2.854	-	2.845	-
ω_2^f	17.674	-	17.645	-
ω_3^f	48.635	-	48.620	-
ω_1^t	37.760	-	32.884	-
ω_2^t	113.306	-	98.668	-
ω_3^t	188.926	-	164.524	-

Tabla 6.6: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso L-E

Frec.	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	248.311	248.312	247.370	248.347
ω_2^a	744.915	744.936	741.816	744.453
ω_3^a	1241.463	1241.560	1236.847	1241.736
ω_1^f	12.415	12.312	12.370	12.415
ω_2^f	39.596	39.264	39.447	39.594
ω_3^f	80.797	80.105	80.492	80.781
ω_1^t	74.384	74.376	65.450	-
ω_2^t	148.816	148.751	130.954	-
ω_3^t	223.344	223.127	196.534	-

Tabla 6.7: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-F

Frec.	6ED	6ED*	RE-EF	VC-EF
ω_1^a	248.311	-	247.370	-
ω_2^a	744.915	-	741.816	-
ω_3^a	1241.463	-	1236.847	-
ω_1^f	12.420	-	12.373	-
ω_2^f	39.623	-	39.472	-
ω_3^f	80.884	-	80.574	-
ω_1^t	74.761	-	65.772	-
ω_2^t	149.570	-	131.585	-
ω_3^t	224.477	-	197.522	-

Tabla 6.8: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-E

Caso	$P_{uo(c)}$ [N]	9ED	6ED	6ED*	P_{uo} [N]	9ED	6ED	6ED*
A-A	1000	7.855	7.886	7.817	0	7.969	8.000	7.931
F-F	1000	-	17.804	17.660	0	-	17.867	17.723
E-E	1000	-	17.820	-	0	-	17.883	-
L-F	1000	-	2.701	2.676	0	-	2.853	2.829
L-E	1000	-	2.702	-	0	-	2.854	-
A-F	1000	-	12.331	12.227	0	-	12.415	12.312
A-E	1000	-	12.335	-	0	-	12.420	-

Tabla 6.9: Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia flexional ω_1^f

Caso	$P_{uo(c)}$ [N]	9ED	6ED	6ED*	P_{uo} [N]	9ED	6ED	6ED*
A-A	1000	74.368	74.368	74.360	0	74.383	74.384	74.376
F-F	1000	-	74.368	74.360	0	-	74.384	74.376
E-E	1000	-	75.126	-	0	-	75.142	-
L-F	1000	-	37.181	37.180	0	-	37.189	37.187
L-E	1000	-	37.752	-	0	-	37.760	-
A-F	1000	-	74.368	74.360	0	-	74.384	74.376
A-E	1000	-	74.745	-	0	-	74.761	-

Tabla 6.10: Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia torsional ω_1^t

Caso	9ED	6ED	6ED*	VC-EF
A-A	35140	35413	34812	35405
F-F	-	138636	136270	138541
E-E	-	138671	-	-
L-F	-	8900	8751	8901
L-E	-	8901	-	-
A-F	-	71791	70576	71767
A-E	-	71803	-	-

Tabla 6.11: Carga crítica de flexión P_{cro}^f en [N] sobre cada larguero

Caso	9ED	6ED	6ED*	VC-EF
A-A	2388333	2388436	2387836	-
F-F	-	2388436	2387836	-
E-E	-	2402350	-	-
L-F	-	2387730	2387836	-
L-E	-	2387836	-	-
A-F	-	2388436	2387836	-
A-E	-	2399865	-	-

Tabla 6.12: Carga crítica de torsión P_{cro}^t en [N] sobre cada larguero

6.8 Propuesta práctica para la determinación de la carga crítica de pandeo

En la presente sección se desarrollan expresiones prácticas y explícitas, conducentes de manera expeditiva y sin mayores complicaciones a la determinación de las cargas críticas de flexión y torsión del mástil reticulado. Para la obtención de las mismas, se parte de establecer como C.B. particulares del mástil reticulado al de apoyado-apoyado (A-A), y para el cual se considera que como acciones externas solo actúan cargas estáticas axiales de compresión en los extremos de los largueros, prescindiendo del peso propio del reticulado.

6.8.1 Expresiones explícitas de cargas críticas para el caso A-A

Aceptando como solución para las funciones corrimiento transversal v_o , y para el giro flexional θ_{wo} a:

$$v_o(x) = V \sin\left(\frac{\pi x}{L_l}\right) \quad (6.192)$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi \cos\left(\frac{\pi x}{L_l}\right) \quad (6.193)$$

las cuales satisfacen las C.B. del presente caso analizado (A-A) y reemplazando luego en el sistema diferencial (6.24 y 6.28), resulta el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left[E_l J_{ly} \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^4 + (GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2 - 3P_{cro} \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2 \right] V - (GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l}\right) \Psi = 0 \quad (6.194)$$

$$-(GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l}\right) V + \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2 + (GA)_o \right] \Psi = 0 \quad (6.195)$$

Expresando dicho sistema diferencial en forma matricial, la condición de solución no trivial resulta en una ecuación algebraica de primer orden en P_{cro}^f , de donde se obtiene que la carga crítica de flexión actuante de manera centrada sobre cada larguero, vale:

$$P_{cro}^f = \frac{E_l J_{ly} e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^4 + 2(EJ_y)_o (GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2}{e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2 + 6(GA)_o} \quad (6.196)$$

Aceptando ahora como solución para la función giro torsional θ_{uo} a:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta \cos\left(\frac{\pi}{L_l}x\right) \quad (6.197)$$

la cual nuevamente satisface las C.B. del presente caso analizado (A-A) y reemplazando luego en la ecuación diferencial (6.26), resulta la siguiente ecuación algebraica:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2 - e^2 P_{cro} + (GJ_x)_o = 0 \quad (6.198)$$

de donde se obtiene que la carga crítica de torsión sobre cada larguero, vale:

$$P_{cro}^t = \frac{E_l J_{lp}}{2} \left(\frac{\pi}{L_l}\right)^2 + \frac{(GJ_x)_o}{e^2} \quad (6.199)$$

De este modo se han obtenido expresiones explícitas para la determinación de las cargas críticas de pandeo del mástil reticulado A-A.

6.8.2 Dependencia entre la carga crítica de Euler y las C.B. de una barra

Siguiendo los desarrollos de Euler y cuando se trata de desplazamientos pequeños de la barra articulada en sus extremos, la flexión de ésta durante el pandeo ocurre según una semionda de senoide [16], resultando la carga crítica:

$$P_{cr}^f = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad (6.200)$$

Aprovechando las particularidades de la línea elástica, resulta posible extender la solución obtenida a otros casos de apoyo de la barra, por lo tanto generalizando esta última expresión, se puede hallar la expresión general de la carga crítica para la barra comprimida bajo distintas condiciones de borde, la cual resulta:

$$P_{cr}^f = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu L)^2} \quad (6.201)$$

siendo μ el coeficiente denominado *coeficiente de cambio de la longitud*, cuyos valores adoptados se muestran en la Figura 6.7.

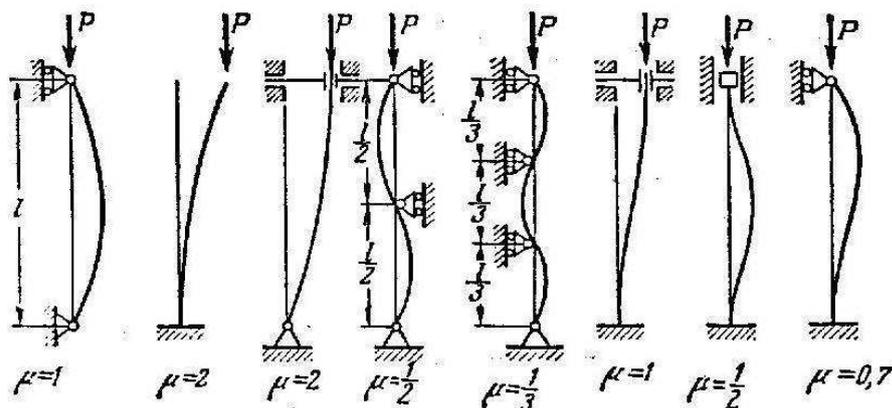


Figura 6.7: Coeficiente de cambio de la longitud (extraído de V. Feodosiev, 1980)

6.8.3 Propuesta práctica para las cargas críticas del mástil reticulado

Ahora bien, a partir de lo desarrollado para el caso del mástil reticulado simplemente apoyado, y por desarrollos equivalentes, al comparar las expresiones (6.196) con (6.201), resulta que la expresión general de la carga crítica de flexión para distintas C.B. del mástil, puede expresarse como:

$$P_{croPP}^f = \frac{E_l J_{ly} e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{\mu L_l}\right)^4 + 2(EJ_y)_o (GA)_o \left(\frac{\pi}{\mu L_l}\right)^2}{e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{\mu L_l}\right)^2 + 6(GA)_o} \quad (6.202)$$

mientras que a partir de la expresión (6.199), la expresión general de la carga crítica de torsión para distintas C.B. del mástil, resulta:

$$P_{croPP}^t = \frac{E_l J_{lp} \left(\frac{\pi}{\mu L_l}\right)^2}{2} + \frac{(GJ_x)_o}{e^2} \quad (6.203)$$

6.8.4 Resultados numéricos

Se analiza el mismo ejemplo que el anteriormente evaluado, haciendo uso de las propuestas prácticas obtenidas (en adelante PP).

En Tabla 6.13 se muestran resultados obtenidos para las cargas críticas de flexión y torsión, y para distintas C.B. del mástil reticulado haciendo uso de los valores de μ dados en la Figura 6.7 [16].

Caso	μ	P_{croPP}^f	P_{croPP}^t
A-A	1.0	35413	2388436
F-F	0.5	138670	2390236
L-F	2.0	8901	2387986
A-F	0.7	71736	2387836

Tabla 6.13: Cargas críticas de flexión y torsión en cada larguero en [N] para distintas C.B.

En Tablas 6.14 y 6.15 se comparan resultados de cargas críticas para distintas modelaciones, incluyendo las propuestas prácticas dadas por las expresiones (C.170 y C.171) obtenidas en el Apéndice C (en adelante PP*) en las cuales se ha prescindido de los aportes locales.

Caso	9ED	6ED	6ED*	PP	PP*	VC-EF
A-A	35140	35413	34812	35413	34813	35405
F-F	-	138636	136270	138670	136270	138541
E-E	-	138671	-	-	-	-
L-F	-	8900	8751	8901	8751	8901
L-E	-	8901	-	-	-	-
A-F	-	71791	70576	71736	70511	71767
A-E	-	71803	-	-	-	-

Tabla 6.14: Carga crítica de flexión P_{cro}^f en [N] sobre cada larguero

Caso	9ED	6ED	6ED*	PP	PP*	VC-EF
A-A	2388333	2388436	2387836	2388436	2387836	-
F-F	-	2388436	2387836	2390236	2387836	-
E-E	-	2402350	-	-	-	-
L-F	-	2387730	2387836	2387986	2387836	-
L-E	-	2387836	-	-	-	-
A-F	-	2388436	2387836	2399060	2387836	-
A-E	-	2399865	-	-	-	-

Tabla 6.15: Carga crítica de torsión P_{cro}^t en [N] sobre cada larguero

6.9 Conclusiones

La implementación del modelo simplificado desarrollado (6ED), implica un mínimo esfuerzo y costo computacional para abordar la solución numérica del sistema diferencial, fundamentalmente debido a que sólo hay acoplamiento entre el corrimiento transversal y su giro flexional asociado. Al mismo tiempo, el desarrollo de dicho modelo permitió obtener las propiedades equivalentes necesarias para la modelación discreta, vía elementos finitos, del mástil reticulado como viga-columna (VC-EF). Dichas propiedades equivalentes incorporan rigideces e inercias locales de largueros y diagonales las cuales no suelen ser tenidos en cuenta en otros modelos, principalmente, debido a que incrementan el orden del sistema diferencial resultando así más compleja su solución. Por último, se obtuvieron formulaciones prácticas y explícitas conducentes a la determinación directa y simple de las cargas críticas de pandeo para el mástil reticulado bajo distintas C.B., facilitando de este modo el análisis de la estabilidad.

Los resultados obtenidos a través de los ejemplos analizados, indican un muy buen desempeño del modelo 6ED desarrollado al momento de evaluar el comportamiento estático, dinámico y de estabilidad del reticulado, bajo diferentes condiciones de borde. El modelo tridimensional estando empotrado los tres largueros (condición E) restringe la flexibilidad local de dichos largueros, y dicha condición de vínculo no puede ser representada por el modelo discreto viga-columna, así como tampoco, lo relacionado con el fenómeno torsional. En cambio estas consideraciones si pueden ser tenidas en cuenta mediante el uso del modelo continuo simplificado. Por otro lado, al comparar resultados y siendo los largueros esbeltos, se puede observar que el aporte local de los mismos resulta poco significativo, lo cual en algunos casos justificaría poder prescindir de dichos aportes, y con ello, hacer uso del modelo desarrollado en el Apéndice C. Al mismo tiempo, los resultados numéricos obtenidos para las cargas críticas haciendo uso de las propuestas prácticas, mostraron un excelente desempeño de las mismas, más aún, cuando dicha determinación se logra de manera directa.

Capítulo 7

Modelo continuo para la representación de un mástil arriostrado

7.1 Mástil arriostrado

Tal como se ha venido mencionando, el comportamiento no-lineal de los sistemas estructurales mástil-riostros se debe principalmente a la configuración geométrica de las riostras, lo cual hace que la relación desplazamiento-deformación de éstas, resulte geoméricamente no-lineal. Las riostras son los elementos estructurales capaces de estabilizar al mástil, y como suele suceder en la práctica, presentan una elevada pretensión inicial a fin de lograr la estabilidad del conjunto. Cuando los corrimientos estáticos laterales del sistema mástil-riostros debido a las cargas actuantes, o bien, las amplitudes de vibración debido a una excitación dinámica son pequeñas, se admiten modelos linealizados para la representación del comportamiento de las riostras. Estos modelos, establecen una relación lineal entre el desplazamiento y la deformación, tal como se demostró en el Capítulo 3.

De este modo, el sistema estructural mástil-riostros (ver Fig. 7.1) puede ser representado mediante un modelo continuo, en donde el mástil reticulado se considera apoyado

en resortes elásticos horizontales ubicados en los puntos de amarre de las riostras al mástil, y cuya rigidez dependerá de la rigidez axial de la riostra y de la inclinación de la misma. A su vez, la rigidez axial de la riostra depende del estado tensional que impera en ella.

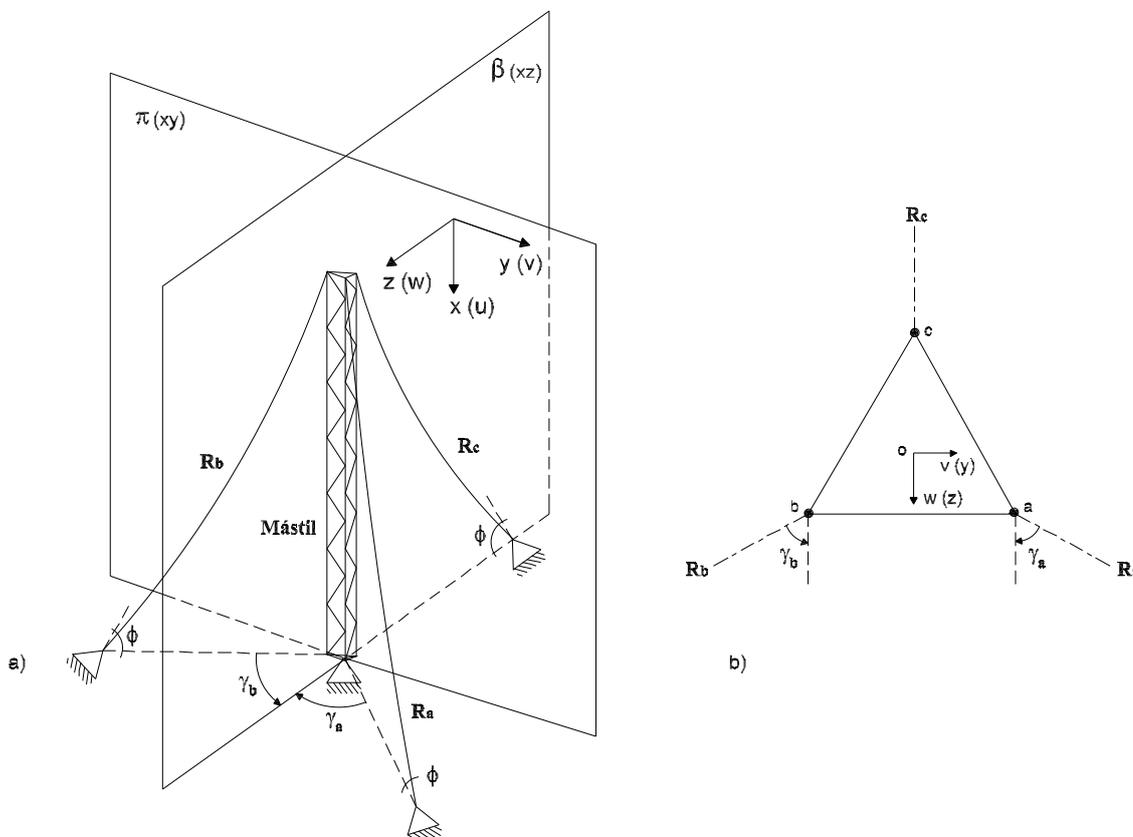


Figura 7.1: Mástil reticulado arriostrado. a) Vista. b) Planta

7.1.1 Energía interna de deformación elástica de un resorte

A fin de incorporar el comportamiento de las riostras como un resorte (ver Fig. 7.2) al modelo continuo 6ED presentado en el Capítulo 6, resulta necesario determinar la energía interna de deformación elástica desarrollada por el resorte equivalente. Cuando un resorte está sujeto a un estiramiento (o contracción) debido a la aplicación de una fuerza externa (trabajo), éste va acumulando energía elástica de deformación, la cual luego utilizará para volver a su posición inicial, es decir en la dirección opuesta a la de la fuerza externa.

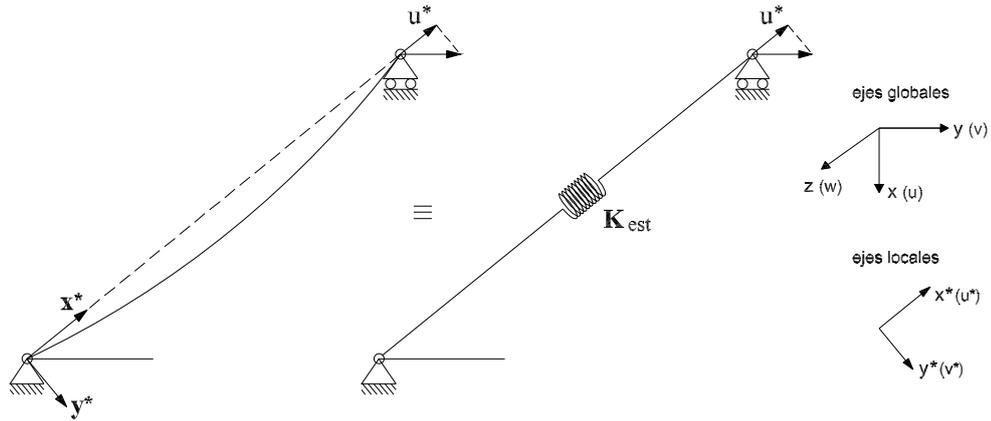


Figura 7.2: Representación de la riostra como resorte elástico

Para el presente caso de análisis y de acuerdo a lo desarrollado en el Capítulo 3, la riostra presenta una variación no-lineal de su rigidez y por lo tanto su contribución energética dará lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineal, debiendo con ello adoptarse algún método numérico para hallar la solución a dicho sistema. Por otro lado y como una estrategia alternativa y válida para incorporar el comportamiento de la riostra al modelo continuo, se considera que la rigidez de la riostra (el resorte) adopta un valor inicial el cual necesariamente deberá actualizarse hasta que el valor de dicha rigidez se corresponda con el valor asociado al desplazamiento que ha experimentado el extremo de la riostra. Bajo esta consideración, la energía aportada por la riostra da lugar a un sistema diferencial lineal el cual necesita ser resuelto mediante iteraciones sucesivas a fin de ir actualizando la rigidez de la riostra, de modo tal que al final de las iteraciones necesarias se habrá hallado la solución del sistema lineal, solución que se correspondería con aquella del sistema no-lineal en caso de haber considerado explícitamente al resorte con una ley de variación no-lineal.

Por lo tanto considerando al resorte con una variación lineal de su rigidez en cada paso o iteración necesaria, la energía de deformación resulta:

$$U_{ri} = \frac{1}{2} k_i \delta_i^2 \quad i = a, b, c \quad (7.1)$$

siendo i el índice que identifica a cada una de las riostras. Para nuestro caso la constante de resorte $k_i = K_{est_i}$ y el desplazamiento del resorte $\delta_i = u_i^*$, resultando entonces la energía

potencial desarrollada por el resorte i sobre el eje local x^* :

$$U_{ri}^* = \frac{1}{2} K_{esti} u_i^{*2} \quad i = a, b, c \quad (7.2)$$

Relacionaremos ahora los corrimientos del nudo arriostrado del larguero con el corrimiento axial sobre el eje de la riostra. Para ello consideremos una riostra genérica tensa, (ver Fig. 7.3), la cual presenta posibilidad de corrimiento de su extremo superior (nudo arriostrado), mientras que el extremo inferior esta impedido de moverse (fundación).

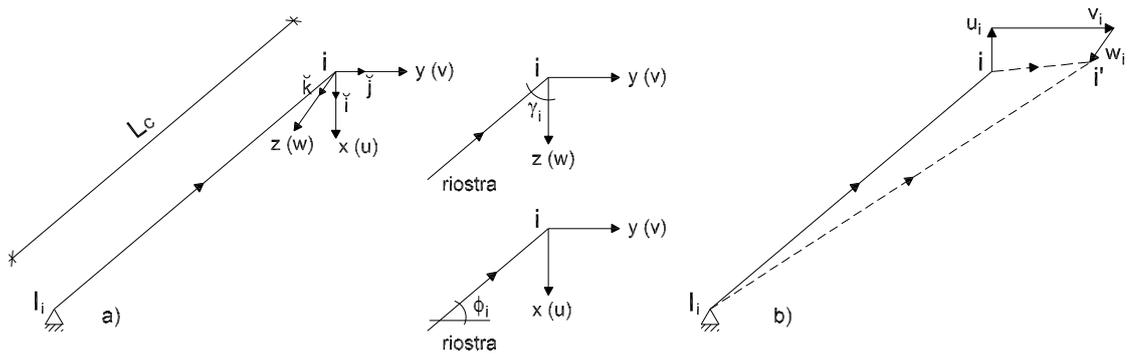


Figura 7.3: Riostra tensa. a) Configuración de referencia. b) Configuración desplazada

El ángulo vertical ϕ_i representa la inclinación de la cuerda respecto al plano horizontal yz dado por el sistema global de referencia, mientras que el ángulo horizontal γ_i representa la inclinación de la riostra con respecto al plano vertical xz . Designando a $\vec{I}_i i$ como el vector que define la posición de la cuerda de la riostra en la configuración de referencia (inicial), resulta:

$$\vec{I}_i i = \check{i} dx + \check{j} dy + \check{k} dz \quad (7.3)$$

donde dx , dy y dz es la proyección de L_c sobre cada uno de los ejes principales.

Llamando ahora a $\vec{I}_i i'$ como el vector que define la posición de la cuerda pero en la configuración desplazada, de la suma vectorial resulta:

$$\vec{I}_i i = \vec{I}_i i' + \vec{i} i' \quad i = a, b, c \quad (7.4)$$

de donde

$$\vec{i}i' = \check{i}u_i + \check{j}v_i + \check{k}w_i \quad i = a, b, c \quad (7.5)$$

Analizando la riostra R_a , la cual arriestra al larguero a , se tiene que:

$$\vec{I}_a a = -\check{i}L_c \sin\phi_a - \check{j}L_c \sin\gamma_a \cos\phi_a - \check{k}L_c \cos\gamma_a \cos\phi_a \quad (7.6)$$

y desarrollando, su módulo vale:

$$|\vec{I}_a a| = L_c \quad (7.7)$$

En tanto que:

$$\vec{I}_a a' = -\check{i}(u_a + L_c \sin\phi_a) - \check{j}(v_a + L_c \sin\gamma_a \cos\phi_a) - \check{k}(w_a + L_c \cos\gamma_a \cos\phi_a) \quad (7.8)$$

y desarrollando algebraicamente, su módulo resulta:

$$|\vec{I}_a a'| = L_c \left[1 + \frac{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}{L_c^2} + \frac{2}{L_c} (u_a \sin\phi_a + v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a + w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a) \right]^{1/2} \quad (7.9)$$

Dado que los corrimientos u_a , v_a y w_a son muy pequeños frente a la longitud de la cuerda L_c , se acepta que:

$$|\vec{I}_a a'| \approx L_c \left[1 + \frac{2}{L_c} (u_a \sin\phi_a + v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a + w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a) \right]^{1/2} \quad (7.10)$$

y luego desarrollando la raíz por expansión binomial, y prescindiendo de los términos de orden superior, resulta:

$$|\vec{I}_a a'| \approx L_c + (u_a \sin\phi_a + v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a + w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a) \quad (7.11)$$

Por lo tanto, el módulo del vector desplazamiento del extremo móvil de la riostra, al pasar de una configuración a la otra, resulta:

$$u_a^* = |a\vec{a}'| = |\vec{I}_a a| - |\vec{I}_a a'| \approx -u_a \sin\phi_a - v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a - w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a \quad (7.12)$$

Con un desarrollo equivalente se obtiene también el módulo del vector desplazamiento para las riostras R_b y R_c :

$$u_b^* = |b\vec{b}'| = |\vec{I}_b b| - |\vec{I}_b b'| \approx -u_b \sin\phi_b + v_b \sin\gamma_b \cos\phi_b - w_b \cos\gamma_b \cos\phi_b \quad (7.13)$$

$$u_c^* = |c\vec{c}'| = |I_c\vec{c}| - |I_c\vec{c}'| \approx -u_c \sin\phi_c - v_c \sin\gamma_c \cos\phi_c + w_c \cos\gamma_c \cos\phi_c \quad (7.14)$$

Para el caso presentado resulta que:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_a = \phi_b = \phi_c \\ \gamma_a &= \gamma_b = 60^\circ \quad ; \quad \gamma_c = 0^\circ \end{aligned} \quad (7.15)$$

por lo tanto reemplazando los módulos de los vectores desplazamientos, obtenidos para cada riostra, en la ecuación (7.2) y desarrollando, resulta la energía de deformación desarrollada por cada riostra amarrada a cada larguero:

$$\begin{aligned} U_{ra} &= \frac{1}{2} K_{esta} \left[u_a(x, t)^2 \sin^2\phi + \left(\frac{3}{4} v_a(x, t)^2 + \frac{1}{4} w_a(x, t)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_a(x, t) w_a(x, t) \right) \cos^2\phi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{3} u_a(x, t) v_a(x, t) + u_a(x, t) w_a(x, t) \right) \sin\phi \cos\phi \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} U_{rb} &= \frac{1}{2} K_{estb} \left[u_b(x, t)^2 \sin^2\phi + \left(\frac{3}{4} v_b(x, t)^2 + \frac{1}{4} w_b(x, t)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_b(x, t) w_b(x, t) \right) \cos^2\phi - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{3} u_b(x, t) v_b(x, t) - u_b(x, t) w_b(x, t) \right) \sin\phi \cos\phi \right] \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$U_{rc} = \frac{1}{2} K_{estc} \left(u_c(x, t)^2 \sin^2\phi + w_c(x, t)^2 \cos^2\phi - 2u_c(x, t) w_c(x, t) \sin\phi \cos\phi \right) \quad (7.18)$$

Reemplazando ahora en las ecuaciones (7.16, 7.17 y 7.18) los corrimientos de cada larguero dados en (6.2) y desarrollando algebraicamente, resulta la energía de deformación de cada riostra pero referida al eje baricéntrico del mástil reticulado:

$$\begin{aligned} U_{roa} &= \frac{1}{2} K_{esta} \left[\left(u_o(x, t)^2 + \frac{e^2}{12} \theta_{vo}(x, t)^2 + \frac{e^2}{4} \theta_{wo}(x, t)^2 + \frac{\sqrt{3}e}{3} u_o(x, t) \theta_{vo}(x, t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e u_o(x, t) \theta_{wo}(x, t) - \frac{\sqrt{3}e^2}{6} \theta_{vo}(x, t) \theta_{wo}(x, t) \right) \sin^2\phi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{4} v_o(x, t)^2 + \frac{1}{4} w_o(x, t)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_o(x, t) w_o(x, t) \right) \cos^2\phi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{3} u_o(x, t) v_o(x, t) + u_o(x, t) w_o(x, t) - \frac{\sqrt{3}e}{2} v_o(x, t) \theta_{wo}(x, t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e}{2} v_o(x, t) \theta_{vo}(x, t) - \frac{e}{2} w_o(x, t) \theta_{wo}(x, t) + \frac{\sqrt{3}e}{6} w_o(x, t) \theta_{vo}(x, t) \right) \sin\phi \cos\phi \right] \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned}
U_{r_{ob}} = \frac{1}{2}K_{est_b} \left[\left(u_o(x,t)^2 + \frac{e^2}{12}\theta_{vo}(x,t)^2 + \frac{e^2}{4}\theta_{wo}(x,t)^2 + \frac{\sqrt{3}e}{3}u_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) + \right. \right. \\
\left. \left. + eu_o(x,t)\theta_{wo}(x,t) + \frac{\sqrt{3}e^2}{6}\theta_{vo}(x,t)\theta_{wo}(x,t) \right) \sin^2\phi + \right. \\
\left. + \left(\frac{3}{4}v_o(x,t)^2 + \frac{1}{4}w_o(x,t)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_o(x,t)w_o(x,t) \right) \cos^2\phi - \right. \\
\left. - \left(\sqrt{3}u_o(x,t)v_o(x,t) - u_o(x,t)w_o(x,t) + \frac{\sqrt{3}e}{2}v_o(x,t)\theta_{wo}(x,t) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{e}{2}v_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) - \frac{e}{2}w_o(x,t)\theta_{wo}(x,t) - \frac{\sqrt{3}e}{6}w_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) \right) \sin\phi\cos\phi \right] \quad (7.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r_{oc}} = \frac{1}{2}K_{est_c} \left[\left(u_o(x,t)^2 + \frac{e^2}{3}\theta_{vo}(x,t)^2 - \frac{2\sqrt{3}e}{3}u_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) \right) \sin^2\phi + \right. \\
\left. + w_o(x,t)^2\cos^2\phi - \left(2u_o(x,t)w_o(x,t) - \frac{2\sqrt{3}e}{3}w_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) \right) \sin\phi\cos\phi \right] \quad (7.21)
\end{aligned}$$

en donde el subíndice o indica la referencia al eje baricéntrico de la sección.

Por lo tanto, la energía total de deformación desarrollada por las riostras y referidas al eje baricéntrico del mástil reticulado resulta:

$$U_{r_o} = U_{r_{oa}} + U_{r_{ob}} + U_{r_{oc}} \quad (7.22)$$

Reemplazando las ecuaciones (7.19, 7.20 y 7.21) en la ecuación (7.22), se tiene:

$$\begin{aligned}
U_{r_o} = \frac{1}{2} \left\{ \left[(K_{est_x})_o u_o^2(x,t) + \frac{e^2}{3} (K_{est_z})_o \theta_{vo}^2(x,t) + \frac{e^2}{3} (K_{est_y})_o \theta_{wo}^2(x,t) + \right. \right. \\
+ \frac{\sqrt{3}}{3} e (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) u_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) - e (K_{est_a} - K_{est_b}) u_o(x,t)\theta_{wo}(x,t) - \\
- \frac{\sqrt{3}}{6} e^2 (K_{est_a} - K_{est_b}) \theta_{vo}(x,t)\theta_{wo}(x,t) \left. \right] \sin^2\phi + \left[(K_{est_y})_o v_o^2(x,t) + (K_{est_z})_o w_o^2(x,t) + \right. \\
+ \frac{\sqrt{3}}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) v_o(x,t)w_o(x,t) \left. \right] \cos^2\phi + \left[\sqrt{3} (K_{est_a} - K_{est_b}) u_o(x,t)v_o(x,t) + \right. \\
+ (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) u_o(x,t)w_o(x,t) - \frac{2\sqrt{3}e}{3} (K_{est_y})_o v_o(x,t)\theta_{wo}(x,t) + \\
+ \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) v_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) - \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) w_o(x,t)\theta_{wo}(x,t) + \\
\left. \left. + \frac{2\sqrt{3}e}{3} (K_{est_z})_o w_o(x,t)\theta_{vo}(x,t) \right] \sin\phi\cos\phi \right\} \quad (7.23)
\end{aligned}$$

en donde se ha llamado a la rigidez aportada por las riostras en las direcciones principales de x , y y z , respectivamente como:

$$\begin{aligned}(K_{estx})_o &= K_{esta} + K_{estb} + K_{estc} \\ (K_{esty})_o &= \frac{3}{4} \left(K_{esta} + K_{estb} \right) \\ (K_{estz})_o &= \frac{1}{4} \left(K_{esta} + K_{estb} + 4K_{estc} \right)\end{aligned}\quad (7.24)$$

7.1.2 Energía cinética aportada por las riostras

La masa total de cada riostra resulta $\rho_r A_r L_c$, admitiéndose que la mitad de dicha masa estará actuando en el punto en donde la riostra se toma al larguero correspondiente. Por lo tanto bajo esta consideración, la energía cinética desarrollada por la masa que aporta cada riostra resulta:

$$T_{ri} = \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c \left(\dot{u}_i(x, t)^2 + \dot{v}_i(x, t)^2 + \dot{w}_i(x, t)^2 \right) \quad i = a, b, c \quad (7.25)$$

con lo cual:

$$T_{ra} = \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c \left(\dot{u}_a(x, t)^2 + \dot{v}_a(x, t)^2 + \dot{w}_a(x, t)^2 \right) \quad (7.26)$$

$$T_{rb} = \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c \left(\dot{u}_b(x, t)^2 + \dot{v}_b(x, t)^2 + \dot{w}_b(x, t)^2 \right) \quad (7.27)$$

$$T_{rc} = \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c \left(\dot{u}_c(x, t)^2 + \dot{v}_c(x, t)^2 + \dot{w}_c(x, t)^2 \right) \quad (7.28)$$

Reemplazando ahora en las ecuaciones (7.26, 7.27 y 7.28) los corrimientos de cada larguero dados en (6.2) y desarrollando algebraicamente, resulta la energía cinética aportada por cada riostra pero referida al eje baricéntrico del mástil reticulado:

$$\begin{aligned}T_{roa} &= \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c \left(\dot{u}_o(x, t)^2 + \dot{v}_o(x, t)^2 + \dot{w}_o(x, t)^2 + \frac{e^2}{3} \dot{\theta}_{uo}(x, t)^2 + \frac{e^2}{12} \dot{\theta}_{vo}(x, t)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2}{4} \dot{\theta}_{wo}(x, t)^2 + \frac{\sqrt{3}e}{3} \dot{u}_o(x, t) \dot{\theta}_{vo}(x, t) - e \dot{u}_o(x, t) \dot{\theta}_{wo}(x, t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{3}e}{3} \dot{v}_o(x, t) \dot{\theta}_{uo}(x, t) + e \dot{v}_o(x, t) \dot{\theta}_{uo}(x, t) - \frac{\sqrt{3}e^2}{6} \dot{\theta}_{vo}(x, t) \dot{\theta}_{wo}(x, t) \right) \quad (7.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{r_{ob}} = \frac{1}{4}\rho_r A_r L_c & \left(\dot{u}_o(x,t)^2 + \dot{v}_o(x,t)^2 + \dot{w}_o(x,t)^2 + \frac{e^2}{3}\dot{\theta}_{uo}(x,t)^2 + \frac{e^2}{12}\dot{\theta}_{vo}(x,t)^2 + \right. \\
& + \frac{e^2}{4}\dot{\theta}_{wo}(x,t)^2 + \frac{\sqrt{3}e}{3}\dot{u}_o(x,t)\dot{\theta}_{vo}(x,t) + e\dot{u}_o(x,t)\dot{\theta}_{wo}(x,t) - \\
& \left. - \frac{\sqrt{3}e}{3}\dot{v}_o(x,t)\dot{\theta}_{uo}(x,t) - e\dot{w}_o(x,t)\dot{\theta}_{uo}(x,t) + \frac{\sqrt{3}e^2}{6}\dot{\theta}_{vo}(x,t)\dot{\theta}_{wo}(x,t) \right) \quad (7.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{r_{oc}} = \frac{1}{4}\rho_r A_r L_c & \left(\dot{u}_o(x,t)^2 + \dot{v}_o(x,t)^2 + \dot{w}_o(x,t)^2 + \frac{e^2}{3}\dot{\theta}_{uo}(x,t)^2 + \frac{e^2}{3}\dot{\theta}_{vo}(x,t)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{2\sqrt{3}e}{3}\dot{u}_o(x,t)\dot{\theta}_{vo}(x,t) + \frac{2\sqrt{3}e}{3}\dot{v}_o(x,t)\dot{\theta}_{uo}(x,t) \right) \quad (7.31)
\end{aligned}$$

siendo la energía cinética total desarrollada por las riostras:

$$T_{r_o} = T_{r_{oa}} + T_{r_{ob}} + T_{r_{oc}} \quad (7.32)$$

Reemplazando las ecuaciones (7.29, 7.30 y 7.31) en la ecuación (7.32), se tiene:

$$\begin{aligned}
T_{r_o} = \frac{3}{4}\rho_r A_r L_c & \left(\dot{u}_o(x,t)^2 + \dot{v}_o(x,t)^2 + \dot{w}_o(x,t)^2 + \frac{e^2}{3}\dot{\theta}_{uo}(x,t)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{e^2}{6}\dot{\theta}_{vo}(x,t)^2 + \frac{e^2}{6}\dot{\theta}_{wo}(x,t)^2 \right) \quad (7.33)
\end{aligned}$$

7.2 Ecuaciones diferenciales y condiciones de borde

El mástil reticulado estudiado presenta una sección transversal triangular, y está arriostrado por un nivel de tres riostras dispuestas a 120° entre sí (ver Fig. 7.4). La base del mástil se encuentra bajo la C.B. definida como fija (F) (ver Fig. 6.4).

A partir de lo desarrollado en el Capítulo 6, al mástil reticulado se lo representa mediante el modelo continuo simplificado obtenido en dicho Capítulo, mientras que a las riostras se las representa como resortes elásticos cuya energía de deformación y cinética fuera determinada en párrafos anteriores. En la Figura 7.4 también se muestra el modelo equivalente de representación para el mástil reticulado arriostrado.

Incorporando a la función lagrangiana obtenida para el modelo reducido de representación del mástil reticulado, ecuación (6.22), los funcionales de energía determinados

para la riostra, U_{r_o} y T_{r_o} , resulta:

$$L_o = (V_o + U_{r_o}) - (T_o + T_{r_o}) \quad (7.34)$$

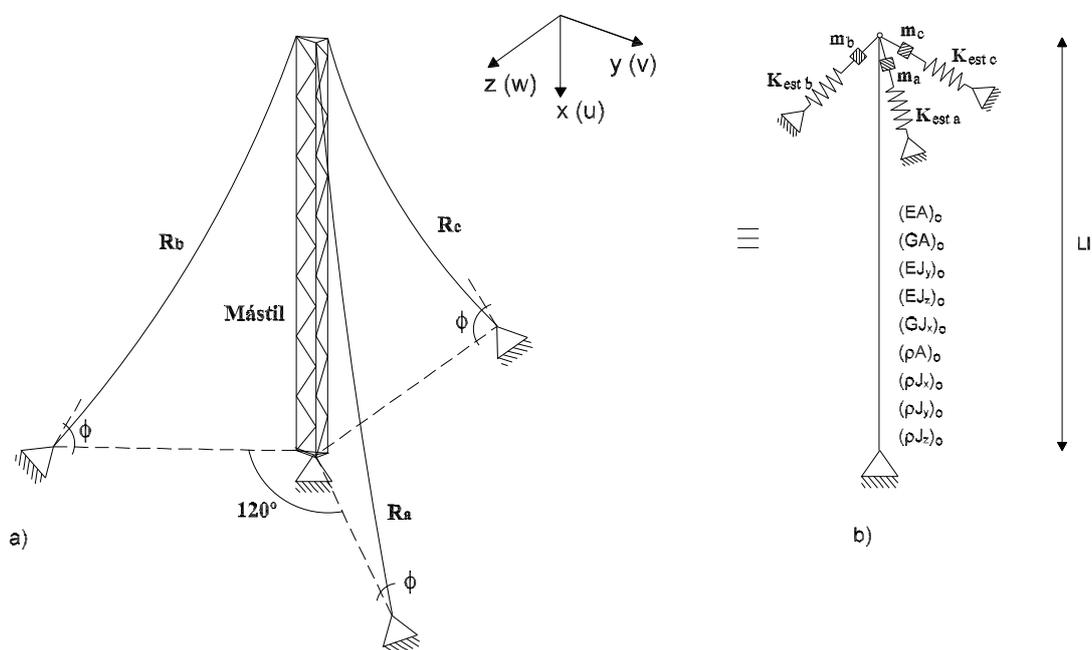


Figura 7.4: Modelo de representación. a) Sistema mástil-riostas. b) Modelo equivalente

La ecuación (7.34) representa la función lagrangiana correspondiente al sistema mástil-riostas analizado en el presente Capítulo. Aplicando luego el principio variacional que venimos utilizando se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales gobernantes, las cuales resultan ser las mismas ecuaciones que las obtenidas para el modelo reducido de representación del mástil reticulado, es decir, las ecuaciones (6.23 a 6.28). Ahora bien, por encontrarse un extremo del mástil arriostrado, las condiciones de borde de dicho extremo difieren de aquéllas determinadas en el Capítulo 6 (6.32 a 6.37) para el modelo continuo simplificado del mástil reticulado. Reescribiendo ahora las C.B. para el mástil reticulado arriostrado analizado, éstas resultan:

$$\left| \left[(EA)_o u'_o(x, t) + r_d \ddot{u}'_o(x, t) - 3P_{uo}(t) \right] \mathcal{U}_o(x, t) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (7.35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[(EA)_o u'_o(x, t) + r_d \ddot{u}'_o(x, t) - 3P_{uo}(t) + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \ddot{u}_o(x, t) - \right. \\ & \left. - \left[(K_{est_x})_o u_o(x, t) + \frac{\sqrt{3}}{6} e (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) \theta_{vo}(x, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) \theta_{wo}(x, t) \right] \sin^2 \phi - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) v_o(x, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) w_o(x, t) \right] \sin \phi \cos \phi \right\} \mathcal{U}_o(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.36) \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} & \left[3E_l J_{ly} v_o'''(x, t) - (GA)_o (v'_o(x, t) - \theta_{wo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) v'_o(x, t) - \right. \\ & \left. - (3\rho_l J_{ly} + r_d) \ddot{v}'_o(x, t) - 3P_{vo}(t) \right] \mathcal{V}_o(x, t) \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.37) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[3E_l J_{ly} v_o'''(x, t) - (GA)_o (v'_o(x, t) - \theta_{wo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) v'_o(x, t) - \right. \\ & \left. - (3\rho_l J_{ly} + r_d) \ddot{v}'_o(x, t) - 3P_{vo}(t) - \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \ddot{v}_o(x, t) + \right. \\ & \left. + \left[(K_{est_y})_o v_o(x, t) + \frac{\sqrt{3}}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) w_o(x, t) \right] \cos^2 \phi + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) u_o(x, t) + \frac{e}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \theta_{vo}(x, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{est_y})_o \theta_{wo}(x, t) \right] \sin \phi \cos \phi \right\} \mathcal{V}_o(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.38) \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} & \left[3E_l J_{lz} w_o'''(x, t) - (GA)_o (w'_o(x, t) + \theta_{vo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) w'_o(x, t) - \right. \\ & \left. - (3\rho_l J_{lz} + r_d) \ddot{w}'_o(x, t) - 3P_{wo}(t) \right] \mathcal{W}_o(x, t) \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.39) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ 3E_l J_{lz} w_o'''(x, t) - (GA)_o (w_o'(x, t) + \theta_{vo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) w_o'(x, t) - \right. \\
& \quad - (3\rho_l J_{lz} + r_d) \ddot{w}_o'(x, t) - 3P_{wo}(t) - \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \ddot{w}_o(x, t) + \\
& \quad + \left[(K_{estz})_o w_o(x, t) + \frac{\sqrt{3}}{4} (K_{esta} - K_{estb}) v_o(x, t) \right] \cos^2 \phi + \\
& \quad + \left[\frac{1}{2} (K_{esta} + K_{estb} - 2K_{estc}) u_o(x, t) + \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{estz})_o \theta_{vo}(x, t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{e}{4} (K_{esta} - K_{estb}) \theta_{wo}(x, t) \right] \sin \phi \cos \phi \left. \right\} \mathcal{W}_o(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x, t) - \left[e^2 (P_{uo}(t) + p_o x) - (GJ_x)_o \right] \theta_{uo}'(x, t) - \right. \\
& \quad \left. - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \ddot{\theta}_{uo}'(x, t) - M_u(t) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x, t) \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x, t) - \left[e^2 (P_{uo}(t) + p_o x) - (GJ_x)_o \right] \theta_{uo}'(x, t) - \right. \\
& \quad \left. - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \ddot{\theta}_{uo}'(x, t) - M_u(t) - \frac{1}{2} \rho_r A_r L_c e^2 \ddot{\theta}_{uo}(x, t) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.42)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{vo}'(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{vo}'(x, t) - M_v(t) \right] \mathcal{G}_{vo}(x, t) \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{vo}'(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{vo}'(x, t) - M_v(t) + \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c e^2 \ddot{\theta}_{vo}(x, t) - \right. \\
& \quad - \left[\frac{\sqrt{3}e}{6} (K_{esta} + K_{estb} - 2K_{estc}) u_o(x, t) + \frac{e^2}{3} (K_{estz})_o \theta_{vo}(x, t) - \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{\sqrt{3}e^2}{12} (K_{esta} - K_{estb}) \theta_{wo}(x, t) \right] \sin^2 \phi - \\
& \quad \left. - \left[\frac{e}{4} (K_{esta} - K_{estb}) v_o(x, t) + \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{estz})_o w_o(x, t) \right] \sin \phi \cos \phi \right\} \mathcal{G}_{vo}(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.44)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{wo}'(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{wo}'(x, t) - M_w(t) \right] \mathcal{G}_{wo}(x, t) \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{e^2(EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x, t) + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{wo}(x, t) - M_w(t) + \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c e^2 \ddot{\theta}_{wo}(x, t) + \right. \\
& \quad + \left[\frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) u_o(x, t) + \frac{\sqrt{3} e^2}{12} (K_{est_a} - K_{est_b}) \theta_{vo}(x, t) - \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{e^2}{3} (K_{est_y})_o \theta_{wo}(x, t) \right] \sin^2 \phi + \\
& \quad \left. + \left[\frac{\sqrt{3} e}{3} (K_{est_y})_o v_o(x, t) + \frac{e}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) w_o(x, t) \right] \sin \phi \cos \phi \right\} \mathcal{G}_{wo}(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.46)
\end{aligned}$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_o''(x, t) - M_{wo}(t) \right) \mathcal{V}'_o(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (7.47)$$

$$\left| \left(E_l J_{lz} w_o''(x, t) - M_{vo}(t) \right) \mathcal{W}'_o(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (7.48)$$

$$\left| \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}''(x, t) \right) \mathcal{G}'_{uo}(x, t) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (7.49)$$

Se observa en las C.B. del extremo arriostrado la incorporación del aporte de la rigidez axial de las riostras, así como también, el aporte de masa de las mismas, presentándose en las mismas un acoplamiento entre los corrimientos del extremo. Se observa también, que el aporte de rigidez de las riostras no contribuye a la C.B. asociada al giro torsional.

7.3 Rigidez del nudo arriostrado en las direcciones principales

Frente a cargas transversales, el sistema estructural mástil-riostras experimentará desplazamientos laterales. Dependiendo de la magnitud de estos desplazamientos y de la ubicación de las riostras, podrá suceder que alguna o algunas de éstas se tensen suficientemente, mientras que otra u otras se aflojen demasiado. Aquellas riostras que se tensan, su rigidez axial K_{est_i} tenderá a la rigidez elástica, es decir a $\frac{E_r A_r}{L_e}$, en tanto que aquellas riostras que se aflojan, y dada la incapacidad de las mismas de tomar esfuerzos de compresión,

sucedará que K_{est_i} tenderá a anularse. Esta situación dependerá del estado tensional que presente la riostra debido a la carga actuante. Preidikman *et al* [58] también observaron tal situación, indicando que cuando se produce un gran desplazamiento lateral del mástil y dependiendo de la pretensión inicial o de montaje dada a las riostras, el mástil reticulado puede presentar una rigidización (o "endurecimiento") o bien una flexibilización (o "ablandamiento"). Suponiendo que el desplazamiento del sistema mástil-riostras se corresponde con la dirección principal z , resulta entonces que la riostra R_c la cual está contenida en el plano principal xz , aporta una rigidez que resulta de reescribir la ecuación (3.143) obtenida en el Capítulo 3:

$$K_{est_c} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa_c^2}{12}} \quad (7.50)$$

en donde:

$$\kappa_c^2 = \left(\frac{mg \cos \phi L_c}{H_c^*} \right)^2 \frac{E_r A_r L_c}{H_c^* L_e} \quad (7.51)$$

siendo H_c^* el estado tensional de la riostra R_c . Las riostras R_a y R_b ubicadas fuera del plano principal xz aportan la misma rigidez, la cual está dada por la ecuación (3.143):

$$K_{est_{a,b}} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa_{a,b}^2}{12}} \quad (7.52)$$

y en donde:

$$\kappa_{a,b}^2 = \left(\frac{mg \cos \phi L_c}{H_{a,b}^*} \right)^2 \frac{E_r A_r L_c}{H_{a,b}^* L_e} \quad (7.53)$$

siendo $H_{a,b}^* = H_a^* = H_b^*$ el estado tensional de las riostras R_a y R_b . Por lo tanto la rigidez horizontal del mástil en el extremo arriostrado y en la dirección de z resulta:

$$(K_{est_z})_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_c} + \frac{1}{2} K_{est_{a,b}} \right) \cos^2 \phi \quad (7.54)$$

Frente a un desplazamiento en la dirección principal de y y con un desarrollo equivalente al anterior, la rigidez horizontal del mástil en el extremo arriostrado y en la dirección de y resulta:

$$(K_{est_y})_o \cos^2 \phi = \frac{3}{4} \left(K_{est_a} + K_{est_b} \right) \cos^2 \phi \quad (7.55)$$

En tanto que frente a un desplazamiento en la dirección principal de x , la rigidez vertical del mástil en el extremo arriostrado y en la dirección de x resulta:

$$(K_{est_x})_o \sin^2 \phi = \left(K_{est_a} + K_{est_b} + K_{est_c} \right) \sin^2 \phi \quad (7.56)$$

En el estado de pretensión o montaje, la tensión de las riostras dispuestas en un mismo nivel presentan igual estado tensional H_o^* . Por lo tanto la rigidez horizontal del mástil en el extremo arriostrado es igual en ambas direcciones principales y y z :

$$(K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi = \frac{3}{2} K_{est_o} \cos^2 \phi \quad (7.57)$$

mientras que la rigidez de dicho extremo en la dirección principal de x resulta:

$$(K_{mont_x})_o \sin^2 \phi = 3 K_{est_o} \sin^2 \phi \quad (7.58)$$

en donde la rigidez axial aportada por cada cada riostra en el montaje, resulta:

$$K_{est_o} = K_{est_a} = K_{est_b} = K_{est_c} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa_a^2}{12}} \quad (7.59)$$

Ahora bien, si el desplazamiento $w_{o(0)}$ del extremo del mástil en la dirección y sentido (+) de z es muy grande, tal que $w_{o(0)} \rightarrow +\infty$, la riostra R_c experimentará un estiramiento lo cual generará un incremento en su estado tensional, mientras que las riostras R_a y R_b se aflojarán perdiendo de este modo su estado de pretensión inicial. Por lo tanto sucederá que:

$$w_{o(0)} \rightarrow +\infty \quad \kappa_c^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_c} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad y \quad \kappa_{a,b}^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_{a,b}} \rightarrow 0 \quad (7.60)$$

resultando entonces que:

$$\left(K_{est_z}^{+\infty} \right)_o \cos^2 \phi \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi \quad (7.61)$$

es decir que la rigidez horizontal del nudo arriostrado tiende al valor de la rigidez elástica horizontal de la riostra.

Cuando el desplazamiento $w_{o(0)}$ es muy grande pero en el sentido opuesto (-) de z , la riostra R_c se afloja mientras que las riostras R_a y R_b se estiran, lo cual implica que:

$$w_{o(0)} \rightarrow -\infty \quad \kappa_c^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_c} \rightarrow 0 \quad y \quad \kappa_{a,b}^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_{a,b}} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad (7.62)$$

resultando entonces que:

$$\left(K_{est_z}^{-\infty} \right)_o \cos^2 \phi \rightarrow \frac{1}{2} \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi \quad (7.63)$$

es decir que la rigidez horizontal del nudo arriostrado tiende en este caso, a la mitad del valor de la rigidez elástica horizontal de la riostra.

Para un desplazamiento muy grande $v_{o(0)}$ en ambos sentidos de la dirección principal y , y con un desarrollo equivalente al anterior, resulta:

$$v_{o(0)} \rightarrow +\infty \quad \kappa_b^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_b} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad y \quad \kappa_a^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_a} \rightarrow 0 \quad (7.64)$$

$$v_{o(0)} \rightarrow -\infty \quad \kappa_b^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_b} \rightarrow 0 \quad y \quad \kappa_a^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_a} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad (7.65)$$

resultando entonces que:

$$\left(K_{est_y}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \rightarrow \frac{3 E_r A_r}{4 L_e} \cos^2 \phi \quad (7.66)$$

Si la pretensión inicial o de montaje H_o^* de las riostras es suficientemente grande como para que κ_o^2 sea menor a 6, el nudo arriostrado pierde rigidez o se ablanda frente al desplazamiento $w_{o(0)}$ cualquiera sea el sentido de este, debido a que:

$$\kappa_o^2 < 6 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi > \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_z}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi > \left(K_{est_z}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \quad (7.67)$$

En cambio si H_o^* presenta un valor pequeño tal que haga que κ_o^2 sea mayor a 24, el nudo arriostrado se rigidiza o endurece frente al desplazamiento $w_{o(0)}$ cualquiera sea el sentido de este, debido a que en este caso resulta:

$$\kappa_o^2 > 24 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi < \frac{1 E_r A_r}{2 L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_z}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi < \left(K_{est_z}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi \quad (7.68)$$

En la dirección de y y con un análisis equivalente al anterior, resulta que si:

$$\kappa_o^2 < 12 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi > \frac{3 E_r A_r}{4 L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \quad (7.69)$$

con lo cual el nudo arriostrado pierde rigidez o se ablanda frente a un desplazamiento $v_{o(0)}$, mientras que si:

$$\kappa_o^2 > 12 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi < \frac{3 E_r A_r}{4 L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \quad (7.70)$$

el nudo arriostrado se rigidiza o endurece frente a un desplazamiento $v_{o(0)}$.

Por lo tanto frente a un desplazamiento lateral, y dependiendo de la tensión de montaje suministrada a las riostras, el sistema estructural mástil-riostras podrá rigidizarse o bien flexibilizarse. Cabe destacar que en la mayoría de los casos prácticos las pretensiones mínimas de trabajo establecidas para las riostras, hace que κ_o^2 resulte menor a 6, con lo cual es de esperar después del montaje una pérdida de rigidez del sistema estructural frente a un desplazamiento lateral del mismo.

7.4 Implementación del modelo continuo

7.4.1 Elástica del mástil

Se analiza el caso del mástil reticulado (ver Fig. 7.4) cuyo extremo superior se encuentra arriostrado, mientras que su base se encuentra fija. Para el mismo, se evalúa el corrimiento de la cima del mástil en la dirección principal de y cuando cada larguero se encuentra sujeto a una carga uniformemente distribuida q_{vo} (carga en la dirección de y). Se prescinde del peso propio del mástil reticulado.

Las C.B. del extremo arriostrado dan lugar a que se presente un acoplamiento entre los corrimientos del eje baricéntrico. Al mismo tiempo, la rigidez axial de la riostra que se amarra a un extremo del larguero, depende de los corrimientos en las direcciones principales de dicho larguero, los que a su vez, dependen de los corrimientos del eje baricéntrico del mástil. Por lo tanto esto último también da lugar a un acoplamiento entre los corrimientos baricéntricos.

Ante esta condición de corrimientos acoplados, la solución de la elástica implica el tratamiento del sistema diferencial completo, es decir, las seis ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del mástil. La solución de dicho sistema diferencial debe hallarse mediante iteraciones sucesivas debido a la necesidad de actualizar la rigidez de la riostra bajo la estrategia de representación adoptada, y con ello, considerar el comportamiento no-lineal de cada riostra, y en donde la rigidez de las riostra se encuentra presente en las C.B. del extremo arriostrado del mástil.

Del análisis de las elásticas abordado en el Capítulo 6 para el mástil reticulado se tiene para este caso particular, en donde la única carga aplicada es q_{vo} , que las soluciones de los corrimientos del eje baricéntrico resultan:

$$u_o(x) = U_1 + U_2x \quad (7.71)$$

$$v_o(x) = \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{x^4}{24} + V_1 + V_2x + V_3x^2 + V_4x^3 + V_5e^{\lambda_{5v}x} + V_6e^{\lambda_{6v}x} \quad (7.72)$$

$$w_o(x) = W_1 + W_2x + W_3x^2 + W_4x^3 + W_5e^{\lambda_{5w}x} + W_6e^{\lambda_{6w}x} \quad (7.73)$$

$$\theta_{uo}(x) = \Theta_1 + \Theta_2x + \Theta_3e^{\lambda_{3\theta}x} + \Theta_4e^{\lambda_{4\theta}x} \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} \theta_{vo}(x) = W_2 + 2W_3x + W_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3x^2 \right] + W_5 e^{\lambda_{5w}} \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + \\ + W_6 e^{\lambda_{6w}} \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) \end{aligned} \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(x) = \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o x}{(GA)_o 6} \right] + V_2 + 2V_3x + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3x^2 \right] + \\ + V_5 e^{\lambda_{5v}} \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + V_6 e^{\lambda_{6v}} \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) \end{aligned} \quad (7.76)$$

en donde las raíces no nulas λ_{5v} y λ_{6v} se determinan a partir de la ecuación (6.93), de manera equivalente las raíces λ_{5w} y λ_{6w} pero para $(EJ_z)_o$ y J_{lz} , en tanto que las raíces $\lambda_{3\theta}$ y $\lambda_{4\theta}$ se determinan de la ecuación (6.106).

Reemplazando estas funciones solución en las C.B. del problema estático, ecuaciones (7.35 a 7.49), resulta respectivamente:

$$U_1 + U_2 L_l = 0 \quad (7.77)$$

$$\begin{aligned} -U_1 (K_{est_x})_o \sin^2 \phi + U_2 (EA)_o - \frac{\sqrt{3}}{6} e (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) \sin^2 \phi \left[W_2 + \right. \\ \left. + W_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + W_5 \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + W_6 \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) \right] + \\ \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin^2 \phi \left[V_2 + V_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + V_5 \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + \right. \\ \left. + V_6 \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin \phi \cos \phi (V_1 + V_5 + V_6) - \\ - \frac{1}{2} (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) \sin \phi \cos \phi (W_1 + W_5 + W_6) = 0 \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_{5v} L_l} + V_6 e^{\lambda_{6v} L_l} = -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned}
& U_1 \frac{\sqrt{3}}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin\phi \cos\phi + V_4 [18E_l J_{ly} + e^2(EA)_o] + \\
& + (K_{est_y})_o \cos^2\phi (V_1 + V_5 + V_6) + \frac{\sqrt{3}}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \cos^2\phi (W_1 + W_5 + W_6) + \\
& + \frac{e}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin\phi \cos\phi \left[W_2 + W_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + W_5 \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + \right. \\
& \left. + W_6 \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{3} e (K_{est_y}) \sin\phi \cos\phi \left[V_2 + V_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + \right. \\
& \left. + V_5 \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + V_6 \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) \right] = 0 \quad (7.80)
\end{aligned}$$

$$W_1 + W_2 L_l + W_3 L_l^2 + W_4 L_l^3 + W_5 e^{\lambda_{5w} L_l} + W_6 e^{\lambda_{6w} L_l} = 0 \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned}
& U_1 \frac{1}{2} (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) \sin\phi \cos\phi + 3E_l J_{lz} (6W_4 + W_5 \lambda_{5w}^3 + W_6 \lambda_{6w}^3) - \\
& - (GA)_o \left[2W_2 + W_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + W_5 \left(\lambda_{5w}^2 - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^4 \right) + W_6 \left(\lambda_{6w}^2 - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^4 \right) \right] + \\
& + (K_{est_z})_o \cos^2\phi (W_1 + W_5 + W_6) + \frac{\sqrt{3}}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \cos^2\phi (V_1 + V_5 + V_6) + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{3} e (K_{est_z}) \sin\phi \cos\phi \left[W_2 + W_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + W_5 \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + \right. \\
& \left. + W_6 \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) \right] - \frac{e}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin\phi \cos\phi \left[V_2 + V_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + \right. \\
& \left. + V_5 \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + V_6 \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) \right] = 0 \quad (7.82)
\end{aligned}$$

$$\Theta_1 + \Theta_2 L_l + \Theta_3 e^{\lambda_{3\theta} L_l} + \Theta_4 e^{\lambda_{4\theta} L_l} = 0 \quad (7.83)$$

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} (\Theta_3 \lambda_{3\theta}^2 + \Theta_4 \lambda_{4\theta}^2) + (GJ_x)_o (\Theta_2 + \Theta_3 \lambda_{3\theta} + \Theta_4 \lambda_{4\theta}) = 0 \quad (7.84)$$

$$\begin{aligned}
& W_2 + 2W_3 L_l + W_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + W_5 e^{\lambda_{5w}} \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + \\
& + W_6 e^{\lambda_{6w}} \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) = 0 \quad (7.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -U_1 \frac{\sqrt{3}}{6} e (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) \sin^2 \phi + \frac{e^2 (EA)_o}{6} \left[2W_3 + W_5 \left(\lambda_{5w}^2 - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^4 \right) + \right. \\
& \quad \left. + W_6 \left(\lambda_{6w}^2 - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^4 \right) \right] - \frac{e^2 (K_{est_z})_o \sin^2 \phi}{3} \left[W_2 + W_4 \frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} + \right. \\
& \quad \left. + W_5 \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + W_6 \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) \right] + \\
& \quad + \frac{\sqrt{3}}{12} e^2 (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin^2 \phi \left[V_2 + V_4 \frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} + V_5 \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + V_6 \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) \right] - \frac{e}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin \phi \cos \phi (V_1 + V_5 + V_6) - \\
& \quad - \frac{\sqrt{3}}{3} e (K_{est_z}) \sin \phi \cos \phi (W_1 + W_5 + W_6) = 0 \tag{7.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 e^{\lambda_{5v}} \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + \\
& \quad + V_6 e^{\lambda_{6v}} \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) = -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2 (EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] \tag{7.87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_1 \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin^2 \phi + \frac{e^2 (EA)_o}{6} \left[2V_3 + V_5 \left(\lambda_{5v}^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^4 \right) + \right. \\
& \quad \left. + V_6 \left(\lambda_{6v}^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^4 \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{12} e^2 (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin^2 \phi \left[W_2 + W_4 \frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} + \right. \\
& \quad \left. + W_5 \left(\lambda_{5w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{5w}^3 \right) + W_6 \left(\lambda_{6w} - \frac{3E_l J_{lz}}{(GA)_o} \lambda_{6w}^3 \right) \right] - \\
& \quad - \frac{e^2 (K_{est_y})_o \sin^2 \phi}{3} \left[V_2 + V_4 \frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} + V_5 \left(\lambda_{5v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{5v}^3 \right) + V_6 \left(\lambda_{6v} - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_{6v}^3 \right) \right] + \\
& \quad + \frac{\sqrt{3}}{3} e (K_{est_y}) \sin \phi \cos \phi (V_1 + V_5 + V_6) + \frac{e}{4} (K_{est_a} - K_{est_b}) \sin \phi \cos \phi (W_1 + W_5 + W_6) = \\
& \quad = -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \right]^2 \frac{1}{(GA)_o} \tag{7.88}
\end{aligned}$$

$$2V_3 + 6V_4 L_l + V_5 \lambda_{5v}^2 e^{\lambda_{5v} L_l} + V_6 \lambda_{6v}^2 e^{\lambda_{6v} L_l} = -\frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^2}{2} \tag{7.89}$$

$$2V_3 + V_5 \lambda_{5v}^2 + V_6 \lambda_{6v}^2 = 0 \tag{7.90}$$

$$2W_3 + 6W_4L_l + W_5\lambda_{5w}^2e^{\lambda_{5w}L_l} + W_6\lambda_{6w}^2e^{\lambda_{6w}L_l} = 0 \quad (7.91)$$

$$2W_3 + W_5\lambda_{5w}^2 + W_6\lambda_{6w}^2 = 0 \quad (7.92)$$

$$\Theta_3\lambda_{3\theta}^2e^{\lambda_{3\theta}L_l} + \Theta_4\lambda_{4\theta}^2e^{\lambda_{4\theta}L_l} = 0 \quad (7.93)$$

$$\Theta_3\lambda_{3\theta}^2 + \Theta_4\lambda_{4\theta}^2 = 0 \quad (7.94)$$

De este modo, resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas no homogéneas, se obtienen los corrimientos del eje baricéntrico del mástil reticulado y arriostrado sujeto el mismo a una carga q_{vo} uniformemente distribuida sobre cada uno de los largueros. Para abordar la solución y como ya se dijo, necesariamente se debe iterar debido al comportamiento no-lineal de las riostras, en donde el procedimiento adoptado consiste en los siguientes pasos:

1. Inicialmente se considera a las riostras con el mismo estado de pretensión, lo cual implica corrimientos nulos del eje baricéntrico
2. Se determina la rigidez axial inicial de dichas riostras
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas no homogéneas, y dada la carga aplicada se obtienen corrimientos del eje baricéntrico
4. Con estos corrimientos se actualiza la rigidez axial de las riostras
5. Se resuelve nuevamente el sistema de ecuaciones, obteniéndose nuevos corrimientos
6. Se actualiza la rigidez axial de las riostras
7. El proceso finaliza cuando los corrimientos del paso anterior y que permiten actualizar la rigidez de las riostras, coinciden con los corrimientos determinados en el paso posterior y que resultan de resolver el sistema de ecuaciones

7.4.2 Vibraciones naturales del mástil

En este caso, se analizan las vibraciones libres (no amortiguadas) del mismo sistema mástil-riostros considerado en la evaluación de la elástica. Para ello, se libera al mismo de cargas aplicadas, considerando solo la reacción vertical provista al mástil por la pretensión inicial dada a cada una de las riostras, esto, a efectos de considerar la influencia de dichos esfuerzo en las frecuencias a determinar. En este caso y debido a que la pretensión de montaje H_o^* dada a las riostras es la misma para cada una de ellas, la rigidez del extremo arriostrado del mástil reticulado en las direcciones principales, está dada por las expresiones (7.57 y 7.58).

Las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento axial (dirección de x), habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left| \left\{ \left[(EA)_o - r_d \omega^2 \right] u'_o(x) \right\} \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (7.95)$$

$$\left| \left\{ \left[(EA)_o - r_d \omega^2 \right] u'_o(x) - \left[(K_{mont_x})_o \sin^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega^2 \right] u_o(x) \right\} \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (7.96)$$

donde para este caso particular se tiene que:

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (7.97)$$

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad (7.98)$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y/o sus derivadas según corresponda), resulta:

$$\begin{aligned} & \left[(EA)_o - r_d \omega^2 \right] u'_{o(0)} - \left[(K_{mont_x})_o \sin^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega^2 \right] u_{o(0)} = \\ & = \left\{ \left[(EA)_o - r_d \omega_{(n)}^2 \right] \lambda_j^{(n)} - \left[(K_{mont_x})_o \sin^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega_{(n)}^2 \right] \right\} U_j^{(n)} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.99)$$

$$u_{o(L_l)}^{(n)} = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.100)$$

con lo cual expresando matricialmente a este sistema de dos ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, resulta:

$$\left(\begin{array}{c} \left\{ [(EA)_o - r_d \omega_{(n)}^2] \lambda_1^{(n)} - \dots \right\} \\ e^{\lambda_1^{(n)} L_l} \end{array} \quad \left\{ [(EA)_o - r_d \omega_{(n)}^2] \lambda_2^{(n)} - \dots \right\} \right) \begin{pmatrix} U_1^{(n)} \\ U_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.101)$$

en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (6.111), se determinan las raíces λ_1 y λ_2 , y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición dada en (7.101). Así a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^a , a la frecuencia siguiente ω_2^a , y así sucesivamente.

En cuanto a las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left| \left\{ 3E_l J_{ly} v_o'''(x) + \left[3P_{uo} - (GA)_o + (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 \right] v_o'(x) + (GA)_o \theta_{wo}(x) \right\} \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (7.102)$$

$$\left| \left\{ 3E_l J_{ly} v_o'''(x) + \left[3P_{uo} - (GA)_o + (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 \right] v_o'(x) + \left[(K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega^2 \right] v_o(x) + \left[(GA)_o - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin \phi \cos \phi \right] \theta_{wo}(x) \right\} \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (7.103)$$

$$\left| \left\{ \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} - \frac{e^2 r_d \omega^2}{6} \right] \theta'_{wo}(x) \right\} \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (7.104)$$

$$\left| \left\{ \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} - \frac{e^2 r_d \omega^2}{6} \right] \theta'_{wo}(x) - \left[\frac{e^2}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c e^2 \omega^2 \right] \theta_{wo}(x) + \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin \phi \cos \phi v_o(x) \right\} \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (7.105)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v_o''(x) \right) \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (7.106)$$

donde para este caso particular, evaluando en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y para la forma modal en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\begin{aligned} & 3E_l J_{ly} v_o'''(0) + \left[3P_{uo} - (GA)_o + (3\rho_l J_{ly} + r_d)\omega^2 \right] v_o'(0) + \\ & + \left[(K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega^2 \right] v_o(0) + \left[(GA)_o - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin \phi \cos \phi \right] \theta_{wo(0)} = \\ & = \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_j^{3(n)} + \left[3P_{uo} - (GA)_o + (3\rho_l J_{ly} + r_d)\omega_{(n)}^2 \right] \lambda_j^{(n)} + \right. \\ & \left. + (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega^2 - \left[(GA)_o - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin \phi \cos \phi \right] \frac{C_{1j}^{(n)}}{C_{2j}^{(n)}} \right\} V_j^{(n)} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.107) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} - \frac{e^2 r_d}{6} \omega^2 \right] \theta'_{wo(0)} - \left[\frac{e^2}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \rho_r A_r L_c e^2 \omega^2 \right] \theta_{wo(0)} + \\ & \quad + \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{mont_{y,z}})_o \sin \phi \cos \phi v_o(0) = \\ & = \left\{ \left[- \left((EA)_o - r_d \omega_{(n)}^2 \right) \lambda_j^{(n)} + 2(K_{mont_{y,z}})_o \sin^2 \phi + \frac{3}{2} \rho_r A_r L_c \omega_{(n)}^2 \right] \frac{C_{1j}^{(n)}}{C_{2j}^{(n)}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\sqrt{3}}{e} (K_{mont_{y,z}})_o \sin \phi \cos \phi \right\} V_j^{(n)} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.108) \end{aligned}$$

$$v_o''(0) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.109)$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.110)$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = - \frac{C_{1j}^{(n)}}{C_{2j}^{(n)}} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.111)$$

$$v_o''(L_l) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.112)$$

Resulta así en un sistema de seis ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas. La relación entre $\Psi_j^{(n)}$ y $V_j^{(n)}$ esta dada por (6.120). Al igual que para la vibración axial, dicho sistema puede ser expresado matricialmente, en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (6.119) se determinan las seis raíces λ_j (con $j = 1, \dots, 6$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo. De este modo aquellas frecuencias asignadas y que verifican lo anterior, nos permiten obtener las frecuencias flexionales del mástil reticulado arriostrado. Con un desarrollo equivalente se determinan las frecuencias para el movimiento transversal en z acoplado al giro flexional alrededor del eje y .

En cuanto a las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento torsional alrededor del eje x , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x) + \left[(GJ_x)_o - e^2 P_{uo} + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \right] \theta_{uo}'(x) + \frac{1}{2} \rho_r A_r L_c e^2 \omega^2 \theta_{uo}(x) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.113)$$

$$\left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x) + \left[(GJ_x)_o - e^2 P_{uo} + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \right] \theta_{uo}'(x) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x) \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.114)$$

$$\left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}''(x) \right) \mathcal{G}'_{uo}(x) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (7.115)$$

donde para este caso particular, evaluando en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración torsional (y/o sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo(0)}''' + \left[(GJ_x)_o - e^2 P_{uo} + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \right] \theta_{uo(0)}' + \frac{1}{2} \rho_r A_r L_c e^2 \omega^2 \theta_{uo(0)} = \\ & = \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_j^{3(n)} + \left[(GJ_x)_o - e^2 P_{uo} + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \right] \lambda_j^{(n)} + \frac{1}{2} \rho_r A_r L_c e^2 \omega^2 \right\} \Theta_j^{(n)} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.116) \end{aligned}$$

$$\theta_{uo(0)}''^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.117)$$

$$\theta_{uo(L_l)}^{(n)} = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.118)$$

$$\theta_{uo(L_l)}''^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.119)$$

Resulta así en un sistema de cuatro ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas. Al igual que para la vibración axial, dicho sistema puede ser expresado matricialmente, en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (6.123) se determinan las cuatro raíces λ_j (con $j = 1, \dots, 4$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo. De este modo aquellas frecuencias asignadas y que verifican lo anterior, nos permiten obtener las frecuencias torsionales del mástil reticulado arriostrado.

7.4.3 Estabilidad del mástil

En este caso, se analiza la estabilidad flexional del mismo sistema mástil-riostras considerado en la evaluación de la elástica. Para ello, se libera al mismo de cargas aplicadas, considerando solo las cargas estáticas de compresión P_{cro} actuantes en los extremos de los largueros. Al igual que en el análisis de las frecuencias naturales, la pretensión de montaje dada a las riostras es la misma para cada una de ellas, por lo que la rigidez del extremo arriostrado del mástil reticulado en las direcciones principales de y y z , está dada por la expresión (7.57).

En cuanto a la estabilidad torsional, y dado que la rigidez de las riostras no contribuyen a las C.B. asociadas al giro torsional, su determinación está dada a partir del análisis del mástil reticulado correspondiente al caso referenciado como libre-fijo (L-F) desarrollado en el Apéndice C.

Continuando con el análisis de la estabilidad flexional alrededor del eje principal z , las C.B. asociadas a este fenómeno resultan:

$$\left[\left[3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) + 3P_{cro} v_o'(x) \right] \mathcal{V}_o(x) \right] \Big|_{x=L_l} = 0 \quad (7.120)$$

$$\left[\left[3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) + 3P_{cro} v_o'(x) + (K_{esty})_o \cos^2 \phi v_o(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{esty})_o \sin \phi \cos \phi \theta_{wo}(x) \right] \mathcal{V}_o(x, t) \right]_{x=0} = 0 \quad (7.121)$$

$$\left[\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x) \right] \mathcal{G}_{wo}(x) \right]_{x=L_l} = 0 \quad (7.122)$$

$$\left[\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x) - \frac{e^2}{3} (K_{esty})_o \sin^2 \phi \theta_{wo}(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{esty})_o \sin \phi \cos \phi v_o(x) \right] \mathcal{G}_{wo}(x) \right]_{x=0} = 0 \quad (7.123)$$

$$\left[\left(E_l J_{ly} v_o''(x) \right) \mathcal{V}'_o(x) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (7.124)$$

Reemplazando ahora en estas C.B. las funciones solución dadas por las ecuaciones (6.135 y 6.136) obtenidas en el Capítulo 6, resulta respectivamente:

$$V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (7.125)$$

$$3E_l J_{ly} \left(V_3 \lambda_3^3 + V_4 \lambda_4^3 + V_5 \lambda_5^3 + V_6 \lambda_6^3 \right) - (GA)_o \left\{ V_3 \lambda_3 + V_4 \lambda_4 + V_5 \lambda_5 + V_6 \lambda_6 - \right. \\ - V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} - V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} - V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} - \\ \left. - V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \right\} + 3P_{cro} (V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6) - \\ - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{esty})_o \sin \phi \cos \phi \left\{ V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} + \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \right\} = 0 \quad (7.126)$$

$$V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} + \\ + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} + \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (7.127)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^2(EA)_o}{6} \left\{ V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} \lambda_3 + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} \lambda_4 + \right. \\
& \left. + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} + \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} \lambda_5 + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \lambda_6 \right\} - \\
& - \frac{e^2}{3} (K_{est_y})_o \sin^2 \phi \left\{ V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \right. \\
& \left. + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} + \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \right\} + \\
& + \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{est_y})_o \sin \phi \cos \phi (V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6) = 0 \tag{7.128}
\end{aligned}$$

$$V_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \tag{7.129}$$

$$V_3 \lambda_3^2 + V_4 \lambda_4^2 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \tag{7.130}$$

en donde se obtiene así un sistema de seis ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas. Expresando matricialmente dicho sistema, la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo. De este modo, asignando un valor inicial a P_{cro} en (6.130) se determinan las cuatro raíces λ_j (con $j = 3, \dots, 6$) (ya se sabe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo. De este modo aquella carga de compresión asignada y que hace que se verifique lo anterior, resulta ser la carga crítica de flexión P_{cro}^f alrededor del eje z . Con un desarrollo equivalente se determina la carga crítica de flexión alrededor del eje y .

7.4.4 Estado tensional en las riostras

El estado tensional de las riostras frente a corrimientos del eje baricéntrico del mástil, es determinado a partir de resolver la ecuación (3.158) obtenida en el Capítulo 3.

7.4.5 Vibraciones naturales de las riostras

Las vibraciones libres de las riostras son determinadas a partir de aplicar las ecuaciones (3.184, 3.203 y 3.207) obtenidas en el Capítulo 3.

7.5 Resultados numéricos

A partir de la aplicación del modelo continuo desarrollado, MRA-6ED en adelante, se evalúan numéricamente la elástica, las frecuencias naturales y la estabilidad flexional del mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras, dispuestas las mismas 120° entre sí (ver Fig. 7.5). En tanto que el estado tensional y las frecuencias naturales de las riostras son obtenidas de aplicar las expresiones dadas en el Capítulo 3, en adelante Ec-TR y Ec-FR respectivamente. Para la evaluación de la elástica, se considera una carga uniformemente distribuida $q_{vo} = 75$ N/m aplicada sobre cada larguero en la dirección de y . Al mismo tiempo y para comparar resultados, se realizan dos modelaciones vía elementos finitos (ver Fig. 7.6), el primero denominado MRA-EF en el cual fueron modelados cada uno de los elementos del mástil reticulado utilizando para los largueros elementos tipo viga (240 por cada larguero), y para las diagonales elementos tipo barra de dos nodos (1 por cada diagonal), en tanto que para las riostras se utilizaron elementos tipo cable (10 por cada riostra). En el segundo modelo de elementos finitos, denominado VCA-EF, el mástil fue modelado como viga-columna, y cuyas propiedades equivalentes fueron obtenidas a partir de las ecuaciones desarrolladas en el Capítulo 6. Para la modelación se utilizaron 120 elementos tipo viga de dos nodos, en tanto que las riostras fueron consideradas como vínculos elásticos, y cuya rigidez fue determinada a partir de las ecuaciones (7.57 y 7.58). El *software* utilizado en la simulación numérica fue SAP2000 [62].

Las características mecánicas y geométricas del mástil reticulado, resultan las mismas a las indicadas para el ejemplo numérico abordado en el Capítulo 6, en tanto que para las riostras, éstas presentan una sección transversal $A_r = 28.27 \times 10^{-6} \text{m}^2$, un módulo de elasticidad $E_r = 150000$ MPa, una tensión de rotura $\sigma_r = 1800$ MPa, una densidad del material $\rho_r = 7850$ kg/m³ y una inclinación $\phi = 60^\circ$. La disposición en planta de cada una de las riostras queda referenciada a partir del ángulo γ .

En cuanto al pretensado inicial o de montaje de las riostras, el mismo se determina de dos maneras: a partir de lo establecido en el Reglamento CIRSOC 306 [8], y a partir de lo establecido en la Norma ANSI/TIA/EIA-222-F [2]. Adaptando la nomenclatura utilizada en dicho Reglamento y Norma a la del presente trabajo, la expresión que define la pretensión

de montaje mínima a suministrar a cada una de las riostras y expresada ésta en kN, en ambos casos resulta:

$$H_{o(C-306)}^* = 7100 \left(L_c \cos \phi \right)^{\frac{2}{3}} A_r = 7100 \left(\frac{L_l}{\tan \phi} \right)^{\frac{2}{3}} A_r \tag{7.131}$$

$$H_{o(A-222)}^* = 0.08 \sigma_r A_r \tag{7.132}$$

Por lo tanto para el presente ejemplo se tiene que la pretensión de montaje obtenida resulta ser $H_{o(C-306)}^* = 1157.94 \text{ N}$ y $H_{o(A-222)}^* = 4071.50 \text{ N}$, en donde se observa una gran diferencia en los valores determinados de pretensión dependiendo esto de la reglamentación o norma utilizada. El valor del coeficiente κ_o^2 para la pretensión $H_{o(C-306)}^*$ resulta de 2.47, en tanto que para la pretensión $H_{o(A-222)}^*$ resulta de 0.06, con lo cual se observa que en ambos casos $\kappa_o^2 < 6$ por lo que es de esperar que frente a un corrimiento lateral del mástil, el nudo arriostrado pierda rigidez traslacional respecto de la de montaje, es decir, que se produzca un "ablandamiento" del sistema estructural.

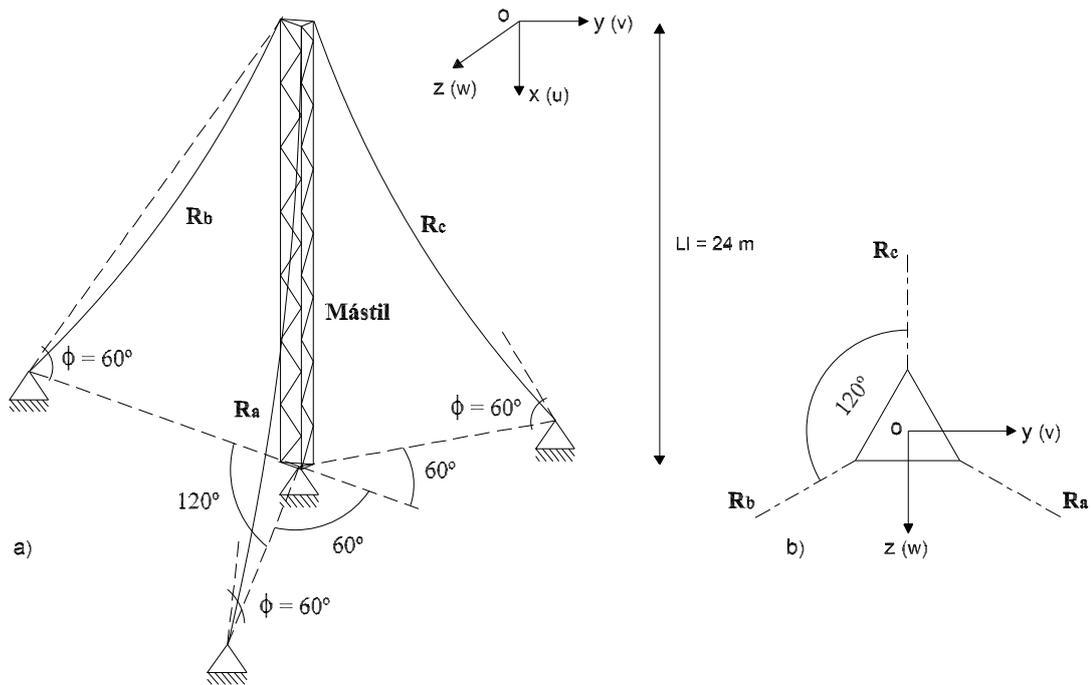


Figura 7.5: Mástil arriostrado analizado. a) Geometría espacial. b) Planta

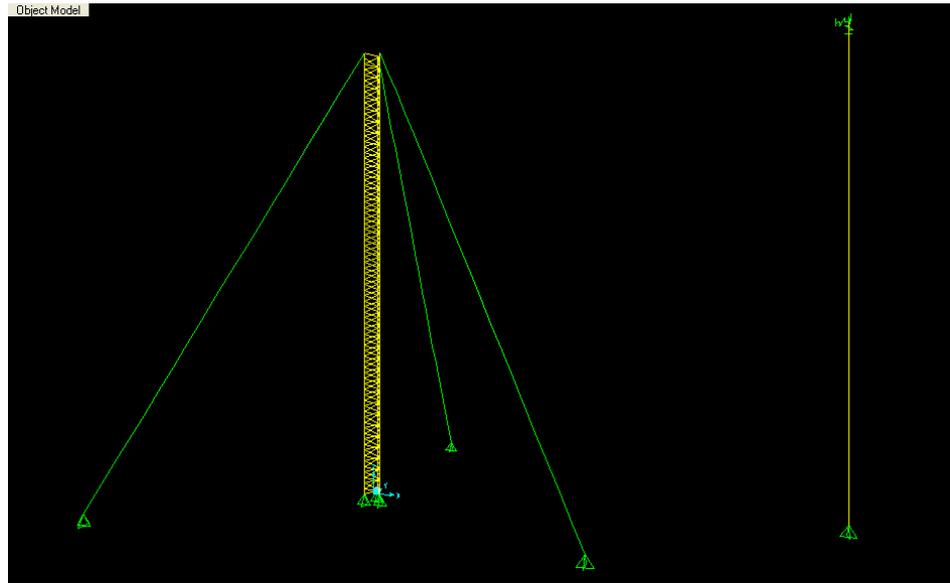


Figura 7.6: Modelos vía elementos finitos del mástil arriostrado

7.5.1 Corrimiento transversal de la cima del mástil y tensión en riostras

En Tablas 7.1 y 7.2 se muestran los resultados obtenidos para el corrimiento transversal en la dirección de y y en el extremo arriostrado del mástil reticulado ($x = 0$), y para los dos estados de pretensión considerados. En tanto que en Tablas 7.3 y 7.4 se muestran resultados del estado tensional que resulta en las riostras debido al corrimiento del mástil.

Corrimiento	MRA-6ED	MRA-EF	VCA-EF
$v_o(0)$	69.852	66.637	66.291

Tabla 7.1: Corrimiento del mástil reticulado en [mm] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N

Corrimiento	MRA-6ED	MRA-EF	VCA-EF
$v_o(0)$	37.339	37.364	35.434

Tabla 7.2: Corrimiento del mástil reticulado en [mm] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N

Riostra	Ec-TR	MRA-EF
R_a	203.90	231.95
R_b	5333.90	4618.76
R_c	1438.90	2559.80

Tabla 7.3: Tracción en riostras en [N] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N

Riostra	Ec-TR	MRA-EF
R_a	1804.40	1697.22
R_b	6362.10	6177.46
R_c	4079.60	4237.30

Tabla 7.4: Tracción en riostras en [N] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N

7.5.2 Frecuencias naturales del mástil y de las riostras

La pretensión de montaje en las riostras da lugar a un esfuerzo normal de compresión actuante en el nudo arriostrado, el cual es determinado a partir de la proyección de H_o^* sobre el eje de cada larguero al cual se toma la riostra. Por lo tanto se tiene que el esfuerzo de compresión actuante en cada larguero resulta:

$$P_{uo(0)} = H_o^* \sin\phi \quad (7.133)$$

y en correspondencia con los dos niveles de pretensión resultantes para las riostras, se tiene que $P_{uo(0)(C-306)} = 1002.80$ N y $P_{uo(0)(A-222)} = 3526.02$ N.

En Tablas 7.5 y 7.6 se muestran resultados obtenidos para las tres primeras frecuencias axiales, flexionales y torsionales del mástil reticulado, para los dos estados de pretensión, e indicándose también el efecto sobre las frecuencias debido a las cargas de compresión sobre los largueros (efecto de 2^{do} orden), como consecuencia de la pretensión de las riostras. En tanto que en Tablas 7.7 y 7.8 se muestran resultados de frecuencias naturales para las riostras.

Por otro lado y a fin de evaluar si resulta significativo este efecto de 2^{do} orden

sobre las frecuencias flexionales, en Tablas 7.9 y 7.10 se muestran resultados para un mástil más flexible, para lo cual se duplica la altura del mástil anteriormente analizado, es decir, se hace $L_l = 48$ m. Al incrementarse la altura, la inclinación de las riostras resulta ahora aproximadamente $\phi = 74^\circ$, pero la pretensión de montaje al ser determinada resulta igual al caso anterior, y con ello, la carga de compresión sobre los largueros.

Frec.	MRA-6ED($P_{uo}=1002.80N$)	MRA-6ED($P_{uo}=0$)	MRA-EF	VCA-EF
ω_1^a	253.377	253.377	247.272	246.690
ω_2^a	755.664	755.664	741.816	735.736
ω_3^a	1258.738	1258.738	1234.418	1224.792
ω_1^f	10.585	10.635	10.997	10.745
ω_2^f	26.747	26.834	26.891	24.887
ω_3^f	54.326	54.459	52.720	50.286
ω_1^t	36.914	36.922	32.850	-
ω_2^t	110.764	110.787	98.083	-
ω_3^t	184.679	184.717	163.497	-

Tabla 7.5: Frecuencias del mástil reticulado en [rad/seg] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N

Frec.	MRA-6ED($P_{uo}=3526.02N$)	MRA-6ED($P_{uo}=0$)	MRA-EF	VCA-EF
ω_1^a	253.717	253.717	247.272	246.981
ω_2^a	755.778	755.778	741.816	735.736
ω_3^a	1258.806	1258.806	1234.418	1224.792
ω_1^f	10.678	10.869	10.916	11.016
ω_2^f	27.708	27.991	27.265	26.151
ω_3^f	54.892	55.345	53.050	50.913
ω_1^t	36.895	36.922	32.891	-
ω_2^t	110.706	110.787	98.175	-
ω_3^t	184.584	184.717	163.539	-

Tabla 7.6: Frecuencias del mástil reticulado en [rad/seg] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N

Frec.	Ec-FR	MRA-EF
ω_1^{ant}	16.376	16.956
ω_2^{ant}	32.752	32.279
ω_3^{ant}	49.128	44.410
ω_1^{sim}	8.188	8.223
ω_2^{sim}	24.564	24.944
ω_3^{sim}	40.940	38.823
ω_1^{bal}	8.188	8.143
ω_2^{bal}	16.376	16.951
ω_3^{bal}	24.564	24.863

Tabla 7.7: Frecuencias de las riostras en [rad/seg] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N

Frec.	Ec-FR	MRA-EF
ω_1^{ant}	30.708	30.554
ω_2^{ant}	61.415	57.984
ω_3^{ant}	92.123	79.712
ω_1^{sim}	15.354	15.448
ω_2^{sim}	46.061	44.717
ω_3^{sim}	76.769	69.682
ω_1^{bal}	15.354	15.378
ω_2^{bal}	30.708	30.489
ω_3^{bal}	46.061	44.714

Tabla 7.8: Frecuencias de las riostras en [rad/seg] para $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N

Frec.	MRA-6ED ($P_{uo}=1002.80N$)	MRA-6ED ($P_{uo}=0$)	Diferencia [%]
ω_1^f	2.710	2.767	2.10
ω_2^f	7.168	7.244	1.06
ω_3^f	14.115	14.241	0.89

Tabla 7.9: Frecuencias flexionales del mástil reticulado con $L_l = 48$ m en [rad/seg] para $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N

Frec.	MRA-6ED($P_{uo}=3526.02N$)	MRA-6ED($P_{uo}=0$)	Diferencia [%]
ω_1^f	2.588	2.813	8.69
ω_2^f	7.290	7.546	3.51
ω_3^f	14.106	14.536	3.05

Tabla 7.10: Frecuencias flexionales del mástil reticulado con $L_l = 48$ m en [rad/seg] para $H_{O(A-222)}^* = 4071.50$ N

7.5.3 Carga crítica de pandeo flexional del mástil

En Tablas 7.11 y 7.12 se muestran los resultados obtenidos para la carga crítica de pandeo flexional alrededor del eje z sobre cada larguero, y para los dos estados de pretensión considerados.

MRA-6ED	VCA-EF
71340	70160

Tabla 7.11: Carga crítica de flexión P_{cro}^f sobre cada larguero en [N] y para $H_{O(C-306)}^* = 1157.94$ N

MRA-6ED	VCA-EF
71615	70476

Tabla 7.12: Carga crítica de flexión P_{cro}^f sobre cada larguero en [N] y para $H_{O(A-222)}^* = 4071.50$ N

7.6 Conclusiones

La consideración de las riostras como resortes elásticos, permite la incorporación de los efectos de éstas en el modelo continuo 6ED para la representación del mástil reticulado (desarrollado en el Capítulo 6). Estos efectos quedan evidenciados en las C.B. del nuevo modelo continuo MRA-6ED, en donde se observa que la rigidez axial provistas por las riostras no influye en las C.B. torsionales del mástil, lo cual se corresponde con los dis-

positivos especiales adoptados en la práctica para controlar el fenómeno torsional, conocidos comúnmente como estrellas anti-rotoras. La rigidez del nudo arriostrado en las direcciones principales, depende del estado tensional y de la ubicación de cada una de las riostras, lo cual hace que frente a corrimientos de la cima del mástil, suceda que alguna riostra se tense mientras que otra se afloje, y con ello, el mástil podrá rigidizarse o flexibilizarse. La aplicación del modelo MRA-6ED permite, de manera simple, la determinación de la elástica, de las frecuencias naturales (axiales, flexionales y torsionales) y de la carga crítica de pandeo flexional del mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras espacialmente dispuestas. El modelo discreto VCA-EF, en donde las riostras son consideradas como apoyos elásticos, es ampliamente utilizado a la hora del diseño por su bajo costo computacional de modelación y procesamiento, permitiendo obtener resultados con cierta aproximación a los dados por los otros modelos. En este caso, las propiedades equivalentes se determinan fácilmente a partir de las expresiones desarrolladas en el Capítulo 6, mientras que la rigidez del extremo arriostrado (apoyo elástico), se determina mediante la expresión dada para la rigidez de la riostra y presentada en el Capítulo 3.

Los resultados numéricos obtenidos a partir de los ejemplos analizados, indican un muy buen desempeño del modelo MRA-6ED desarrollado. La máxima diferencia encontrada en los resultados al comparar el modelo continuo con el modelo discreto MRA-EF, fue del orden del 4 % y correspondió a la determinación de la elástica para el caso de riostras con una pretensión inicial dada de acuerdo a CIRSOC. Esto último se debería a que el modelo continuo considera a las riostras como un resorte cuya rigidez axial corresponde a la dada por el modelo parabólico, en tanto que el elemento finito cable del modelo discreto considera la formulación de la *catenaria*, y como es sabido, mientras menos tensas se encuentran las riostras las diferencias entre la solución parabólica y la de la *catenaria* son mayores. De acuerdo a la reglamentación o normativa utilizada, la pretensión de montaje a suministrarle a las riostras puede diferir de manera muy importante, en donde por ejemplo para el caso analizado, esta diferencia resultó ser del orden de tres veces y media. Esto último influiría considerablemente en los corrimientos del extremo arriostrado del mástil cuando el mismo se encuentra sujeto a una carga estática aplicada transversalmente sobre los largueros, en tanto que esta diferencia de pretensión inicial pareciera no influir significativamente tanto

en la carga crítica de pandeo como en las frecuencias naturales, aún para el caso del mástil más flexible ($L_l=48$ m), en donde la máxima diferencia encontrada fue del orden del 5 %. Al mismo tiempo se observó que el efecto de 2^{do} orden de las cargas de compresión sobre cada larguero debido a la pretensión de las riostras, resulta más relevante en la medida que el mástil sea menos rígido, lo que hace que esta carga de compresión esté más cerca de la carga crítica de pandeo flexional del larguero. Para los ejemplos analizados, la máxima diferencia encontrada entre las frecuencias flexionales teniendo en cuenta y no el efecto de 2^{do} orden, resultó ser de aproximadamente el 9 %. Por último, una mayor pretensión de las riostras hace que la rigidez del nudo arriostrado aumente y con ello la rigidez del mástil, pero por otro lado, esta mayor pretensión hace que la carga de compresión sobre cada larguero aumente también, con lo cual y debido al efecto de 2^{do} orden, el mástil se flexibiliza.

Capítulo 8

Síntesis, discusión de resultados, conclusiones y futuros trabajos

8.1 Síntesis

En situaciones de accidentes, catástrofes naturales, entre otras posibles emergencias, las comunicaciones son esenciales en la estrategia de defensa civil. Por ello, la seguridad estructural y la confiabilidad de las señales transmitidas por las antenas pasan a ser temas de singular relevancia.

Siendo los mástiles reticulados y arriostrados uno de los sistemas estructurales más utilizados en la comunicación inalámbrica para soportar los elementos de transmisión como lo son las antenas, éstos deben ser analizados y diseñados adecuadamente para soportar las acciones actuantes sobre los mismos.

Por ello, siendo el objetivo principal de la presente investigación formular modelos continuos de representación que permitan evaluar la respuesta mecánica de mástiles reticulados, extendiendo su aplicación a mástiles reticulados y arriostrados, se procedió primero a desarrollar analíticamente y luego evaluar numéricamente, distintas estrategias para la modelación del perfil geométrico de una riostra suspendida sujeta a cargas transversales, tales como el modelo parabólico y el modelo *catenaria*, incorporando en los mismos, las

características de inextensibilidad y extensibilidad elástica. Se evaluó también, cómo es afectada la respuesta de cada modelo frente a distintos niveles de pretensión y distintos grados de inclinación de las riostras. Posteriormente se analizó una riostra con un extremo desplazable, obteniéndose la expresión que define la evolución no-lineal de la rigidez axial de la misma cuando se produce el desplazamiento de su extremo. Dicha determinación permitió luego incorporar las riostras al modelo continuo mástil-riostras como si se tratasen de resortes elásticos no-lineales. Al mismo tiempo, la riostra fue modelada vía elementos finitos a partir del uso de un *software* comercial (SAP2000), y cuyos resultados fueron comparados con aquellos obtenidos analíticamente, lo cual permitió evaluar el desempeño de la citada herramienta computacional.

Seguidamente, se realizó el estudio paramétrico vía elementos finitos, de un mástil reticulado de 120 m de altura y arriostrado por cuatro niveles de riostras, con tres riostras por nivel. El sistema estructural fue sujeto a la acción de la componente horizontal principal de distintos terremotos registrados, permitiendo de este modo evaluar la respuesta sísmica del mismo. La variación en los parámetros de diseño: i) pretensión inicial en las riostras, ii) amortiguamiento estructural equivalente del sistema, y iii) rigidez flexional del mástil, fue tenido en cuenta a fin de evaluar la influencia de los mismos en la respuesta estructural del sistema mástil-riostras.

Dentro de los distintos patrones de reticulados capaces de materializar al mástil, el más utilizado resulta ser aquel de sección transversal triangular, constituido por tres largueros unidos entre sí mediante diagonales articuladas en sus extremos y dispuestas en un patrón del tipo zig-zag. Ante ello, se procedió a desarrollar un modelo continuo capaz de representar adecuadamente la respuesta del mástil reticulado descrito, para lo cual, las correspondientes ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde fueron obtenidas a partir de un planteo energético, haciendo uso del cálculo variacional. No obstante, y en la búsqueda de modelos reducidos de representación, se logró formalizar para el mástil reticulado, un nuevo modelo continuo pero simplificado, resultando con ello más fácil la resolución del sistema diferencial. Al mismo tiempo, se obtuvieron las propiedades equivalentes necesarias para la representación del reticulado a partir del modelo viga-columna, así como

también, expresiones explícitas capaces de determinar de manera directa las cargas críticas de pandeo del mástil reticulado.

Por último, se planteó un modelo continuo para la representación de un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras, en donde estas últimas fueron consideradas como resortes elásticos no-lineales y cuya rigidez axial se determinó a partir de lo desarrollado en el Capítulo 3. El aporte energético de las riostras, energía de deformación del resorte y energía cinética, y en consecuencia el efecto de las mismas, queda incorporado en las C.B. del modelo continuo del mástil obtenido en el Capítulo 6. La implementación numérica de este modelo continuo con C.B. modificadas por la presencia de las riostras, permitió evaluar la elástica, las frecuencias naturales y la estabilidad del mástil arriostrado. En el caso de las vibraciones naturales, se tuvo en cuenta el efecto de 2^{do} orden producido por las cargas de compresión sobre cada larguero, debido a la pretensión de las riostras.

8.2 Discusión de los resultados

La formulación *catenaria* conduce a la solución que de manera exacta describe el perfil geométrico adquirido por la riostra cuando ésta se encuentra sujeta a su propio peso, es decir, a una carga transversal uniformemente distribuida sobre la longitud de arco. En tanto que la formulación parabólica, la cual resulta más simple en su implementación, describe el perfil geométrico de una riostra sujeta a una carga transversal uniformemente distribuida sobre la longitud de la cuerda. Por ello, utilizar el modelo parabólico para representar la respuesta mecánica de una riostra bajo su peso propio, sólo conduce a una aproximación a la solución real del problema. No obstante, de las evaluaciones numéricas realizadas para distintos ejemplos de riostras suspendidas, se observó que para el caso de que éstas presenten suficiente pretensión, el modelo parabólico (considerando la extensibilidad elástica) conduce a una excelente aproximación de la respuesta, confirmando así lo indicado por la literatura.

En cuanto a la evolución no-lineal de la rigidez axial de la riostra cuando ésta experimenta un desplazamiento en uno de sus extremos, se observó que la misma es fuertemente dependiente del estado tensional imperante en la riostra. Para elevados valores de

pretensión, el valor de la rigidez tiende al de la rigidez elástica, es decir, como si la riostra se comportara como una biela trabajando en tracción. En tanto que para valores bajos de pretensión, la riostra experimenta una especie de "ablandamiento" axial, disminuyendo así considerablemente su rigidez.

De la evaluación de los resultados obtenidos para las frecuencias naturales de la riostra, se observó que para los modos de balanceo (fuera del plano) y para los modos antisimétricos (en el plano), estos resultan fuertemente dependientes de la pretensión de la riostra, en tanto que para los modos simétricos (en el plano) las frecuencias no sólo dependieron de la pretensión, sino que también, de la rigidez axial de la misma. Por otra parte, la componente adicional de tracción dinámica que se presenta en algunos modos naturales de vibración (en el plano), depende del corrimiento transversal total que resulta como consecuencia de la vibración producida. Por ello, esta componente sólo se presenta en los modos simétricos en donde por como se distribuyen estos corrimientos, la suma total de los mismos no resulta ser nula.

Las respuestas determinadas para la riostra a partir de su simulación numérica utilizando el *software* SAP2000 y el elemento finito cable disponible en su biblioteca, se correspondieron con aquellas respuestas evaluadas analíticamente, por lo que entonces resultaría apropiada esta herramienta computacional para ser utilizada en la modelación.

En cuanto a los resultados obtenidos de frecuencias, vía elementos finitos, para las vibraciones naturales del mástil arriostrado analizado en el Capítulo 4, los mismos fueron comparados con lo hecho por otros autores. Las máximas diferencias encontradas estuvieron en el orden del 4 %, lo cual no sólo permitió la verificación preliminar del modelo para el estudio posterior de sensibilidad sísmica, sino que también, establecer que el *software* SAP2000 resultaría adecuado para la representación de problemas similares al estudiado.

Del estudio de sensibilidad sísmica de dicho mástil arriostrado, se pudo establecer que el corte basal resultó del orden del 4 al 30 % del peso del mástil según el registro sísmico considerado, valores similares a los hallados por otros autores. En algunos casos las demandas de desplazamiento de la cima del mástil fueron del orden de los 0.60 m, resultando ser una respuesta significativa frente a lo que representa la altura total del mástil (120 m).

Por otro lado, a medida que el amortiguamiento estructural equivalente del sistema resultó ser mayor, las respuestas (corte basal y desplazamiento de la cima) disminuyeron. El orden de esta disminución depende del nivel de pretensión de las riostras, de la rigidez flexional del mástil y de las características propias del registro sísmico considerado, lo que estaría indicando que la respuesta estructural depende de la relación entre los parámetros mecánicos del sistema y los parámetros propios de registro.

Es así que en algunos de los casos analizados en el estudio paramétrico, se observaron demandas importantes en las respuestas, las cuales podrían llegar a comprometer la continuidad operativa de las comunicaciones debido a la sensibilidad de los equipos de transmisión-recepción, encontrándose que para ciertos registros sísmicos pareciera producirse un posible efecto de amplificación dinámica en la respuesta del sistema. Esto último resultó más notorio para los modelos con valores mínimos de amortiguamiento.

Por ello, la modificación de la rigidez del mástil así como también de los niveles de pretensión en las riostras (modificación de la rigidez del sistema), podría conducir a fuertes demandas en la respuesta del sistema frente a ciertos tipos de registros sísmicos, fundamentalmente, porque pareciera ser que las características propias de cada registro (PGA, contenido de frecuencias, duración de la fase intensa, etc.) tendrían una fuerte y marcada influencia en la respuesta. Esta consideración estaría indicando que resultaría muy difícil establecer tendencias de carácter general en cuanto a la respuesta esperada de un mástil arriostrado, sujeto el mismo a una eventual acción sísmica.

Respecto al desarrollo de un modelo continuo de representación para el mástil reticulado estudiado, preservando su configuración espacial, éste resulta ser un sistema de nueve ecuaciones diferenciales (9ED) las cuales gobiernan el comportamiento de dicho mástil, permitiendo entre otras cosas, evaluar posibles casos de cargas no simétricas actuantes en los largueros. A partir de los resultados obtenidos de elástica, frecuencias naturales y cargas críticas para un caso particular, se pudo observar un excelente desempeño numérico del modelo 9ED desarrollado. Esto se debe a que el mismo considera aportes locales de rigideces e inercias de los largueros, efectos de 2^{do} orden debido a las cargas de punta, y flexibilidad por corte propia de los sistemas reticulados.

Si bien estas consideraciones hacen que la respuesta del mástil sea determinada con precisión, también dichas consideraciones hacen que la solución numérica resulte más compleja de hallar, por dar lugar a un incremento en el orden del sistema diferencial. Pero el mayor esfuerzo y costo computacional que implica la implementación numérica del modelo, se debe fundamentalmente a los acoplamientos que se presentan entre los corrimientos axiales y transversales de cada uno de los largueros que conforman al mástil, lo cual hace que cada una de las ecuaciones del sistema diferencial resulten también acopladas entre sí.

Por lo anteriormente comentado, y en la búsqueda de modelos reducidos de representación, a partir del modelo continuo desarrollado (9ED) se pudo fundamentar física y matemáticamente el planteo de un nuevo modelo continuo pero simplificado (6ED). Este nuevo modelo resulta significativamente más simple al momento de abordar la solución del sistema diferencial, debido fundamentalmente al desacoplamiento que se presenta entre los corrimientos axiales, flexionales y torsionales. La implementación numérica del modelo 6ED a ejemplos del mástil reticulado bajo distintas C.B. posibles, mostraron que los resultados hallados de elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas, permiten indicar, al igual que para el modelo 9ED, un excelente desempeño numérico del mismo.

La determinación de las propiedades equivalentes resultan necesarias para la representación discreta del mástil como viga-columna. Los resultados encontrados en diversos ejemplos analizados con esta modelación, vía elementos finitos, indican que la misma es una estrategia válida a la hora del diseño del mástil reticulado, no solo por su bajo costo computacional sino que también, por el muy buen desempeño numérico del modelo. Esto último se debe a que las propiedades equivalentes determinadas (elásticas e inerciales) contemplan aportes locales provistos por los largueros y diagonales, y consideran la flexibilidad por corte propia del alma reticulada, aunque el fenómeno torsional no pudo ser representado.

Las expresiones obtenidas para la determinación de las cargas críticas de pandeo del mástil reticulado, fueron implementadas en diferentes ejemplos. Los resultados obtenidos fueron muy satisfactorios, en donde la diferencia con una modelación vía elementos finitos resultó ser inferior al 0.5 %. Estas expresiones permiten evaluar la estabilidad de manera simple y directa, y sin restricción en cuanto a las posibles C.B. que presente el problema.

La implementación numérica del modelo continuo desarrollado para la representación del sistema mástil-riostras, modelo MRA-6ED, permitió evaluar para distintos ejemplos las elásticas, frecuencias naturales, y cargas críticas de pandeo, en todos los casos de manera simple y sin un mayor esfuerzo computacional.

En cuanto al estado de pretensión inicial a suministrarle a las riostras, éste puede diferir significativamente dependiendo de la normativa considerada. Para los ejemplos abordados en esta investigación, se consideró el Reglamento Nacional CIRSOC-306 y la Norma Canadiense ANSI/TIA-222-F, en donde los niveles de pretensión obtenidos en cada caso fueron notoriamente distintos (diferencia del orden de tres veces y media). Esta situación influyó considerablemente en los valores de corrimientos de la cima del mástil obtenidos en cada caso, en tanto que esta diferencia de pretensión inicial no condujo a cambios relevantes en los valores de frecuencias naturales y cargas críticas del mástil.

De la comparación de resultados para un ejemplo de mástil arriostrado, obtenidos con el modelo continuo MRA-6ED y con un modelo discreto utilizando el *software* SAP2000, se observó una muy buena prestación del modelo desarrollado. La máxima diferencia encontrada en los resultados fue del orden del 4 % y correspondió a la determinación de la elástica para el caso de riostras con una pretensión inicial dada de acuerdo a Reglamento CIRSOC 306 (pretensión tres veces y media menor a la dada por la Norma Canadiense). Esta diferencia indicada se debería a que el modelo continuo considera a las riostras como resortes no-lineales cuya rigidez axial corresponde a la dada por el modelo parabólico, en tanto que el elemento finito cable (no-lineal) del modelo discreto considera la formulación de la *catenaria*, y como es sabido, mientras menos tensas se encuentran las riostras las diferencias entre la solución parabólica (aproximada) y la de la *catenaria* resultan mayores.

Este modelo continuo MRA-6ED se fundamentó en el modelo 6ED obtenido para el mástil reticulado, al que se le incorporó las riostras las que fueron consideradas como resortes elásticos no-lineales, quedando el efecto de las mismas evidenciado en las C.B. del problema. De analizar estas C.B., se observa que en aquéllas asociadas al giro torsional de la sección transversal no hay aporte de las riostras a la restricción de este giro. Esto último justificaría que en muchos casos de la práctica, exista la necesidad de disponer de dispositivos

especiales conocidos como "estrellas anti-rotoras" a fin de restringir este movimiento, el cual como se infiere, no puede ser controlado por las riostras dispuestas espacialmente 120° entre sí tal como resulta en los casos de mástiles arriostrados y de sección transversal triangular.

Por otro lado y a partir de resultados obtenidos, la consideración del efecto de 2^{do} orden producido por las cargas de compresión actuantes sobre los largueros debido a la pretensión de las riostras, podría tener cierta relevancia en los valores de las frecuencias naturales flexionales siempre y cuando el mástil resulte ser muy flexible. Esto implicaría que dicha carga de compresión actuante resulte cercana a la de pandeo flexional, de otro modo, la consideración de dicho efecto sería poco relevante. En la práctica, es de esperar que el diseño del mástil de lugar a una rigidez flexional del mismo tal que haga que la carga crítica que conduzca a la inestabilidad del sistema sea suficientemente mayor a la carga de compresión debido a la pretensión de las riostras, no presentándose así una modificación significativa en las frecuencias naturales como consecuencia del esfuerzo normal actuante.

8.3 Conclusiones

Las siguientes conclusiones que a continuación se indican, han sido deducidas a partir de evaluar analíticamente los modelos y expresiones desarrolladas en la presente investigación, así como también, de resultados numéricos obtenidos al ser implementado los mismos. Estos resultados fueron verificados utilizando modelaciones vía elementos finitos.

Como conclusiones generales, se pueden establecer que:

- El modelo continuo 6ED formulado representa con exactitud la respuesta mecánica (elásticas, frecuencias naturales y cargas críticas) del mástil reticulado analizado, pudiéndose evaluar el comportamiento estructural en cualquier parte del dominio y no encontrando restricción alguna de aplicación en cuanto a las distintas C.B. posibles del problema, resultando además simple su implementación numérica.
- En tanto que el modelo continuo MRA-6ED, variante del modelo 6ED para ser aplicado a mástiles arriostrados, mostró un excelente desempeño numérico al momento de evaluar la respuesta de un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras.

Como conclusiones particulares, se pueden establecer que:

- Resulta válido representar el comportamiento mecánico de la riostra mediante el modelo parabólico (solución aproximada) considerando la extensibilidad del material, siempre que ésta presente una suficiente pretensión tal que haga que su relación de flecha sea menor a $1/8$.
- La rigidez axial de la riostra depende del estado de pretensión que impera en la misma, presentando una evolución no-lineal frente a cambios en los esfuerzos internos que dan lugar a la modificación de dicha pretensión. Esto confirma el comportamiento no-lineal de la riostra, y al mismo tiempo, que no resulte apropiada su representación como un resorte lineal en un sistema arriostrado.
- Cuando la riostra se tensa, experimenta una especie de "endurecimiento" dando lugar a una rigidización de la misma, y si dicha pretensión aumenta aún más, la rigidez de la riostra tiende a ser la de una biela trabajando en tracción. En tanto que si pierde pretensión, la misma se "ablanda", originando una disminución en su rigidez axial.
- Los niveles de respuesta sísmica observados en el mástil arriostrado, muestran que los dispositivos de comunicaciones pueden ver afectada su operatividad, siendo necesario un estudio detallado de estas tipologías estructurales cuando las mismas sean emplazadas en zonas con elevado riesgo sísmico.
- Frente a las características particulares de cada registro sísmico, puede resultar un efecto de amplificación dinámica en la respuesta del sistema estructural como consecuencia, una aunque leve sea, de la variación en la rigidez del mismo. Esto pone de manifiesto que no siempre un mayor nivel de pretensión en las riostras conducirá a una menor demanda, por ejemplo, en el desplazamiento lateral de la cima del mástil.
- Por otra parte y como era de esperar, el amortiguamiento estructural del sistema pareciera ser el principal parámetro que permite, en cierto modo, morigerar la demanda sísmica sobre el mismo.

- El modelo continuo 9ED permite evaluar el comportamiento mecánico de cada uno de los largueros que conforman al mástil, es decir, preservando la configuración espacial del mismo y admitiendo inclusive, la aplicación de cargas no simétricas actuantes sobre éstos, aunque su implementación requiere de un mayor esfuerzo computacional.
- La implementación numérica del modelo continuo simplificado 6ED, el cual incorpora el efecto de 2^{do} orden, implica un mínimo esfuerzo y costo computacional, no habiendo restricción alguna de aplicación en cuanto a las distintas C.B. posibles del problema, y preservando la calidad de los resultados obtenidos con el modelo 9ED.
- El efecto de 2^{do} orden en los valores de las frecuencias flexionales del mástil resulta significativo, en la medida que la carga de compresión actuante sobre cada larguero sea próxima a la carga crítica de pandeo, de otro modo el efecto no resulta relevante.
- Se obtuvieron muy buenos resultados numéricos al representar al mástil reticulado mediante un modelo discreto viga-columna a partir de las propiedades equivalentes determinadas (elásticas e inerciales), aunque tanto el fenómeno torsional como la C.B. de restricción local al giro flexional de los largueros (condición E) no pudo ser representado por el modelo de elementos finitos implementado.
- Las expresiones obtenidas para la evaluación de la estabilidad flexional y torsional del reticulado entregaron excelentes resultados numéricos, permitiendo la determinación de las cargas críticas de manera simple y directa, resultando ser con ello una alternativa de aplicación válida, confiable y por demás novedosa.
- El modelo continuo MRA-6ED desarrollado, permite evaluar sin un mayor esfuerzo computacional y con muy buena prestación numérica, la respuesta de un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras, así como también, el comportamiento mecánico de estas últimas.
- Para la determinación de la elástica del mástil arriostrado sujeto a cargas transversales, se requirieron de muy pocas iteraciones necesarias para actualizar la rigidez del nudo arriostrado, y con ello, encontrar una adecuada solución al problema no-lineal.

- La consideración de distintas normativas para establecer la pretensión a dar a las riostras en el montaje puede conducir a valores significativamente muy distintos, y con ello, a que la respuesta elástica del mástil sea notoriamente diferente según la normativa adoptada.
- Lo comentado anteriormente destaca la importancia a la hora del montaje de los mástiles arriostrados, de disponer de dispositivos adecuados que permitan medir con precisión la pretensión a suministrarse a las riostras. En los montajes de estas estructuras suele suceder habitualmente que esta pretensión no se mida con certeza o que directamente no se mida, lo cual podría motivar a que la respuesta del sistema sea mayor a la esperada.

Es de destacar que no se reporta en la literatura consultada un modelo continuo espacial (9ED) como el desarrollado en esta investigación, el cual sea capaz de representar el comportamiento individual de cada uno de los largueros que conforman al mástil reticulado estudiado, permitiendo también, abordar casos en los cuales las cargas sobre los largueros están aplicadas de manera asimétrica.

En tanto que también resulta novedoso para la literatura, las expresiones obtenidas para la determinación de las cargas críticas de pandeo, las que por otro parte y dada la originalidad y practicidad de las mismas, serán propuestas a las correspondientes autoridades de CIRSOC para que ellas consideren si resultan pertinentes incorporarlas en la Reglamentación, fundamentado ello, en que actualmente no existe reporte alguno en los Reglamentos Nacionales que permita un análisis directo de la estabilidad como el propuesto en la presente investigación.

Por último, el trabajo de investigación desarrollado en esta tesis, ha permitido formar parte de once artículos presentados en distintas conferencias [3], [18], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], así como también, de un artículo en revisión enviado a una revista internacional [4].

8.4 Futuros Trabajos

Respecto al modelo continuo 9ED desarrollado, resultará de interés en trabajos futuros poder aplicar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del reticulado a otras C.B. posibles, así como también, evaluar la respuesta del mismo frente a cargas aplicadas en los largueros con una disposición del tipo asimétrica.

La búsqueda de modelos continuos capaces de representar con mayor precisión la respuesta dinámica del sistema mástil-riostros, hace necesaria la consideración del amortiguamiento estructural equivalente. Por ello, en trabajos futuros, dicha propiedad estructural será incorporada en dicho modelo de representación.

En lo que a la modelación discreta vía elementos finitos se refiere, y como un aporte a los reglamentos nacionales y a la práctica profesional, se pretende abordar el estudio de mástiles con otros patrones de reticulados distintos al de zig-zag, permitiendo ello obtener mediante un planteo energético las propiedades equivalentes necesarias para la representación del reticulado como viga-columna, así como también, expresiones explícitas capaces de determinar de manera directa las cargas críticas de pandeo.

Otro enfoque posible derivado del presente estudio, es la cuantificación de incertidumbre. En efecto, si alguna propiedad característica de un parámetro es considerada como una variable aleatoria, es posible evaluar la propagación de la variación estocástica de dicho parámetro y obtener así mayor información sobre la respuesta dinámica del sistema.

Ante ello, y debido al interés en encontrar cuál o cuáles son los parámetros propios de cada registro sísmico que, frente a las características mecánicas del sistema mástil-riostros hacen que la respuesta del mismo se vea amplificada, se pretende en el futuro abordar estas características con modelos estocásticos de mástiles arriostrados de distintas alturas y sujetos a diversos registros sísmicos, permitiendo de este modo obtener conclusiones que resulten generales a estas tipologías estructurales.

Como un aporte a lo comentado anteriormente, y a fin de comprender de mejor modo la respuesta sísmica del sistema, desde un trabajo experimental de campo se pretende

instrumentar un mástil reticulado arriostrado de aproximadamente 110 m de altura. Para este propósito se colocarían acelerómetros en distintos sectores del sistema estructural con el objeto de registrar la respuesta sísmica del mismo. Cabe destacar que dicho mástil arriostrado se encuentra emplazado en el predio de la Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Mendoza, Provincia en la cual su condición geológica hace que se presente una elevada actividad sísmica.

Bibliografía

- [1] G. Amiri. Seismic sensitivity indicators for tall guyed telecommunication towers. *Computers and Structures*, 80:349–364, 2002.
- [2] ANSI/TIA/EIA-222-F *Structural Standard for Antenna Supporting Structures and Antennas*, Telecommunications Industry Association. Arlington, U.S.A, 1996.
- [3] J. Ballaben, M. Guzmán y M. Rosales. Parametric studies of guyed towers under wind and seismic loads. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 30:1019–1030, 2011.
- [4] J. Ballaben, M. Guzmán y M. Rosales. Sensitivity analysis of guyed towers under wind and seismic loadings. En revisión enviado a *Engineering Structures*, 2013.
- [5] CSA Standard S-37-01 *Antennas, Towers, and Antenna-Supporting Structures*. Canadian Standards Association. Ontario, Canada, 2001.
- [6] S. Chapra and R. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill/Interamericana, México, D. F., 5a. edition, 2006.
- [7] Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles. *Reglamento CIRSOC 302: Fundamentos de cálculo para los problemas de estabilidad del equilibrio en las estructuras de acero*. INTI, Buenos Aires, Argentina, 1982.

- [8] Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles. *Reglamento CIRSOC 306: Estructuras de acero para antenas*. INTI, Buenos Aires, Argentina, 1995.
- [9] Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles. *Recomendación CIRSOC 303: Estructuras livianas de acero*. INTI, Buenos Aires, Argentina, 1996.
- [10] COSMOS. Consortium of Organizations for Strong-Motion Observation Systems. Cosmos Virtual Data Center, Berkeley, California, USA.
<http://db.cosmos-eq.org/scripts/earthquakes.plx>
- [11] Y. Desai and S. Punde. Simple model for dynamic analysis of cable supported structures. *Engineering Structures*, 23:271–279, 2001.
- [12] L. Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, Moscú, U.R.S.S., 1977.
- [13] M. Escalante, C. Filipich, M. Rosales y R. Sampaio. Análisis dinámico de cables extensibles poco tensos: Método de descomposición ortogonal propia. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 27:771–784, 2008.
- [14] Eurocode 3. *Design of steel structures. Part 3-1: Towers, masts and chimneys-towers and masts*. BS, 1993.
- [15] M. Féliz , M. Molina. Telefónica I+D para el área de Reputación y Responsabilidad Corporativa de Telefónica S.A., 2006.
<http://www.sociedadinformacion.fundacion.telefonica.com>
- [16] V. Feodosiev. *Resistencia de Materiales*. MIR, Moscú, U.R.S.S., 1980.
- [17] C. Filipich and M. Rosales. Dynamic analysis of plane mooring chains of inextensible links. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 26:2479–2495, 2007.

- [18] C. Filipich , M. Guzmán and M. Rosales. Planteo discreto-continuo de piezas reticuladas planas y espaciales. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 29:863–882, 2010.
- [19] C. Frau. *Demanda sísmica incluyendo efectos de directividad en zonas near-fault de Argentina*. PhD thesis, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza, Argentina, 2009.
- [20] P. Gerstoft and A. Davenport. A simplified method for dynamic analysis of a guyed mast. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 23:487–499, 1986.
- [21] M. Guzmán, M. Rosales y C. Filipich. Torres atensoradas: el estado del arte en los últimos años. *Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería ENIDI 2009*, 1:133–145, 2009.
- [22] M. Guzmán, M. Rosales y C. Filipich. Cable sujeto a su propio peso: análisis de las soluciones exacta y aproximada. *Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería ENIDI 2009*, 1:146–160, 2009.
- [23] M. Guzmán, M. Rosales y C. Filipich. Respuesta sísmica de un mástil arriostrado. *XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, 2010.
- [24] M. Guzmán, C. Filipich y M. Rosales. Modelo continuo de un reticulado espacial para problemas dinámicos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 30:1205–1220, 2011.
- [25] M. Guzmán, M. Rosales , C. Filipich y G. Gonzalez del Solar. Planteo y solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la estática de un reticulado espacial. *Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería ENIDI 2011*, 187–201, 2011.
- [26] M. Guzmán, J. Ballaben y M. Rosales. Respuesta dinámica de un mástil arriostrado frente a cambios en sus parámetros de diseño. *Encuentro de Investigadores y Profesionales Argentinos de la Construcción EIPAC 2011*, 2011.

- [27] M. Guzmán, C. Filipich y M. Rosales. Modelo reducido 1D para la representación simplificada de un reticulado espacial. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 31:2411–2429, 2012.
- [28] M. Guzmán, M. Rosales y C. Filipich. Estabilidad de una torre reticulada a través de un modelo continuo. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 32:3449–3461, 2013.
- [29] M. Guzmán, M. Rosales y C. Filipich. Análisis de una riostra suspendida con un extremo desplazable. *Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería ENIDI 2013*, 31–45, 2013.
- [30] P. Harikrishna, A. Annadurai, S. Gomathinayagam and N. Lakshmanan. Full scale measurements of the structural response of a 50 m guyed mast under wind loading. *Engineering Structures*, 25:859–867, 2003.
- [31] G. Hensley. *Finite element analysis of the seismic behavior of guyed masts*. Master thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, U.S.A., 2005.
- [32] IASS. *International Association for Shell and Spatial Structures*. Madrid, España, 1991.
- [33] Instituto Nacional de Prevención Sísmica. *Zonificación sísmica de la República Argentina. Publicación Técnica N 5*. INPRES, San Juan, Argentina, 1977.
- [34] Instituto Nacional de Prevención Sísmica. *Análisis de los espectros de ductilidad correspondientes al terremoto de San Juan del 23 de noviembre de 1977. Publicación Técnica N 8*. INPRES, San Juan, Argentina, 1982.
- [35] Instituto Nacional de Prevención Sísmica. *Características principales del terremoto de Mendoza del 26 de enero de 1985. Publicación Técnica N 11*. INPRES, San Juan, Argentina, 1986.

- [36] Instituto Nacional de Prevención Sísmica-Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles. *Proyecto de Reglamento Argentino para Construcciones Sismorresistentes Parte 1, Construcciones en General*. INTI, Buenos Aires, Argentina, 2008.
- [37] M. Irvine. *Cable Structures*. Dover Publications, New York, 1992.
- [38] N. Ben Kahla. Equivalent beam-column analysis of guyed towers. *Computers and Structures*, 55(4):631–645, 1993.
- [39] N. Ben Kahla. Dynamics of a single guy cable. *Computers and Structures*, 54(6):1197–1211, 1995.
- [40] N. Ben Kahla. Nonlinear dynamic response of a guyed towers to a sudden guy rupture. *Engineering Structures*, 19(11):879–890, 1997.
- [41] N. Ben Kahla. Response of a guyed towers to a guy rupture under no wind pressure. *Engineering Structures*, 22:699–706, 2000.
- [42] T. Kewaisy. *Nonlinear Dynamic Interaction between Cables and Mast of Guyed-Tower Systems Subjected To Wind-Induced Forces*. PhD thesis, Texas Tech University, 2001.
- [43] J. Kim and S. Chang. Dynamic stiffness matrix of an inclined cable. *Engineering Structures*, 23:1614–1621, 2001.
- [44] J. Leonard. *Tension Structures: Behavior and Analysis*. McGraw-Hill, United States of America, 1a. edition, 1988.
- [45] R. Livesley. *Matrix Methods of Structural Analysis*. Pergamon Press, Oxford, England. 1975.
- [46] M. Madugula, Y. Wahba and G. Monforton. Dynamic response of guyed masts. *Engineering Structures*, 20(12):1097–1101, 1998.
- [47] M. Madugula. *Dynamic Response of Lattice Towers and Guyed Mast*. ASCE, EEUU, 2002.

- [48] L. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1969.
- [49] Waterloo Maple, Inc. *Maple v13.0*. Maplesoft, Inc., Waterloo, Canada, 2009.
- [50] A. Materazzi and I. Venanzi. A simplified approach for the wind response analysis of cable-stayed masts. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95:1272–1288, 2007.
- [51] M. Matuszkiewicz. Calculation of guyed masts in accordance with EN 1993-3-1 standard taking into account mast shaft geometrical imperfections. *Engineering Structures*, 33:2044–2048, 2011.
- [52] G. Militano. *Computer-aided free vibration analysis of guyed towers*. Master thesis, Department of Civil and Geological Engineering, University of Manitoba, Canada, 2000.
- [53] M. de Oliveira, J. da Silva, P. da S. Vellasco, S. de Andrade and L. de Lima. Structural analysis of guyed steel telecommunication towers for radio antennas. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. and Eng.*, 29:185–195, 2007.
- [54] ONU. Organización de las Naciones Unidas. Centro de Información para México, Cuba y República Dominicana, México, D.F., México, 2004.
<http://www.cinu.org.mx/prensa/comunicados/2004/PR040416.htm>
- [55] P. Pai. *Highly flexible structures: Modeling, computation, and experimentation*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Reston, Virginia, 2007.
- [56] V. Parnás y I. Lorenzo. No linealidad geométrica en torres atirantadas. *Revista Cubana de Ingeniería*, II(3):37–48, 2011.
- [57] PEER. Pacific Earthquake Engineering Research Center. Peer Strong Motion Database, Berkeley, California, USA, 2010.
<http://peer.berkeley.edu/smcat/index.html>

- [58] S. Preidikman, J. Massa y B. Rocchia. Análisis dinámico de mástiles arriostrados. *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 6(1):85–102, 2006.
- [59] W. Ren , M. Huang and W. Hu. A parabolic cable element for static analysis of cable structures. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 25(4):366–384, 2008.
- [60] M. Rosales, P. Bellés and R. Sampaio. Guyed towers dynamics using Karhunen-Loève expansions. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 27:833–844, 2008.
- [61] A. Salehian. *Micropolar Continuum Modeling of Large Space Structures with Flexible Joints and Thermal Effects: Theory and Experiment*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2008.
- [62] CSi, Computers and Structures, Inc. *SAP2000 v11 Analysis Reference Manual*. Computers And Structures, Inc., Berkeley, California, USA, 2007.
- [63] H. Shi. *Nonlinear Finite Element Modeling and Characterization of Guyed Towers Under Severe Loading*. PhD thesis, University of Missouri, Columbia, 2007.
- [64] B. Smith. *Communication Structures*. Thomas Telford, London, 2007.
- [65] U. Starossek. Cable Dynamics - A Review. *Structural Engineering International*, 4(3):171–176, 1994.
- [66] G. Tibert. *Numerical Analyses of Cable Roof Structures*. Licentiate thesis, Department of Structural Engineering Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1999.
- [67] W. Thomson. *Teoría de Vibraciones: Aplicaciones*. Prentice-Hall Hispanoamericana, Naulcalpan de Juárez, México. 1982.
- [68] R. Travanca , H. Varum and P. Vila Real. The past 20 years of telecommunication structures in Portugal. *Engineering Structures*, 48(5):472–485, 2013.
- [69] IARP. Inter-American Telecommunication Commission. Organization of American States, Washington, D.C., USA, 2005.
<http://www.oas.org/en/citel/infocitel/2005/enero/amateur-i.asp>

- [70] Y. Wahba , M. Madugula and G. Monforton. Effect of icing on the free vibration of guyed antenna towers. *Atmospheric Research*, 46:27–35, 1998.
- [71] Y. Wahba, M. Madugula and G. Monforton. Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. *Computers and Structures*, 68:207–212, 1998.
- [72] WCDR. World Conference on Disaster Reduction. Kobe, Hyogo, Japan, 2005. <http://www.unisdr.org/2005/wcdr/wcdr-index.htm>
- [73] Q. Wu, K. Takahashi and S. Nakamura. Formulae for frequencies and modes of in-plane vibrations of small-sag inclined cables. *Journal of Sound and Vibration*, 279:1155–1169, 2005.
- [74] N. Zhu. *Wind tunnel test for guyed masts dynamic characteristics under wind loads*. PhD thesis, Department of Civil and Geological Engineering, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada, 2007.

Apéndice A

Solución particular del sistema diferencial 6ED para el caso del mástil simplemente apoyado

En el presente Apéndice se aborda la solución particular del sistema diferencial 6ED desarrollado en el Capítulo 6. Para ello se analiza nuevamente el caso del mástil reticulado simplemente apoyado (A-A).

A.1 Vibraciones naturales

Se acepta que el sistema está liberado de cargas aplicadas, que se prescinde de su peso propio, y que además el mismo presenta modos armónicos de vibración, por lo cual resulta:

$$\{u_o, v_o, w_o, \theta_{uo}, \theta_{vo}, \theta_{wo}\}(x, t) = \{u_o, v_o, w_o, \theta_{uo}, \theta_{vo}, \theta_{wo}\}(x)e^{i\omega t} \quad (\text{A.1})$$

Vibración axial

Se adopta como solución para la variable espacial a la siguiente función trascendente:

$$u_o(x) = U \cos\left(\frac{n\pi}{L_l}x\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

la cual satisface las condiciones de borde del problema. Por lo tanto la función espacio-temporal puede ser expresada ahora como:

$$u_o(x, t) = U \cos\left(\frac{n\pi}{L_l}x\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.3})$$

y al reemplazar en la ecuación diferencial dada en (6.23), se obtiene:

$$-(EA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + r_d \omega^2 \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (\rho A)_o \omega^2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

de la que despejando, resulta:

$$\omega_{u_o} = \left(\frac{n\pi}{L_l}\right) \left[\frac{(EA)_o}{(\rho A)_o + r_d \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

siendo ω_{u_o} la frecuencia circular en vibración axial para el reticulado simplemente apoyado, obtenida a partir del modelo continuo simplificado 6ED.

Vibración flexional

Se adopta como soluciones para las variables espaciales, a las siguientes funciones trascendentes:

$$v_o(x) = V \sin\left(\frac{n\pi}{L_l}x\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.6})$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi \cos\left(\frac{n\pi}{L_l}x\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

las cuales satisfacen las condiciones de borde del problema. Por lo tanto las funciones espacio-temporal pueden ser expresadas ahora como:

$$v_o(x, t) = V \sin\left(\frac{n\pi}{L_l}x\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.8})$$

$$\theta_{wo}(x, t) = \Psi \cos\left(\frac{n\pi}{L_l} x\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.9})$$

y al reemplazar en las ecuaciones diferenciales dadas en (6.24 y 6.28), se obtiene:

$$\left[3E_l J_{ly} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^4 + (GA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 - (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 - (\rho A)_o \omega^2 \right] V - (\text{GA})_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right) \Psi = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{GA})_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right) V - \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 - \frac{e^2 r_d}{6} \omega^2 \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 - \frac{(\rho J_x)_o}{2} \omega^2 + (\text{GA})_o \right] \Psi = 0 \quad (\text{A.11})$$

Expresando dicho sistema diferencial homogéneo en forma matricial, la condición de solución no trivial resulta en una ecuación algebraica de cuarto orden en ω_{v_o} :

$$a\omega_{v_o}^4 + b\omega_{v_o}^2 + c = 0 \quad (\text{A.12})$$

en donde se ha definido a:

$$a = - \left[(3\rho_l J_{ly} + r_d) \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (\rho A)_o \right] \left[\frac{e^2 r_d}{6} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + \frac{(\rho J_x)_o}{2} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$b = E_l J_{ly} \frac{e^2 r_d}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^6 + \left[(3\rho_l J_{ly} + r_d) \frac{e^2 (EA)_o}{6} + (\text{GA})_o \frac{e^2 r_d}{6} + 3E_l J_{ly} \frac{(\rho J_x)_o}{2} \right] \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^4 + (\text{GA})_o (\rho J_y)_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (\text{GA})_o (\rho A)_o \quad (\text{A.14})$$

$$c = - \left[E_l J_{ly} \frac{e^2 (EA)_o}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^6 + (E J_y)_o (\text{GA})_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^4 \right] \quad (\text{A.15})$$

De (A.12) se obtiene ω_{v_o} , siendo ésta la frecuencia circular en vibración flexional para el reticulado simplemente apoyado, obtenida a partir del modelo continuo simplificado 6ED. Con un desarrollo equivalente, se obtiene la frecuencia circular en vibración flexional ω_{w_o} .

Vibración torsional

Se adopta como solución para la variable espacial a la siguiente función trascendente:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta \cos\left(\frac{n\pi}{L_l} x\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.16})$$

la cual satisface las condiciones de borde del problema. Por lo tanto la función espacio-temporal puede ser expresada ahora como:

$$\theta_{uo}(x, t) = \Theta \cos\left(\frac{n\pi}{L_l}x\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.17})$$

y al reemplazar en la ecuación diferencial dada en (6.26), se obtiene:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^4 + (GJ_x)_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3}\right) \omega^2 \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 - (\rho J_x)_o \omega^2 = 0 \quad (\text{A.18})$$

de la que despejando, resulta:

$$\omega_{\theta_{uo}} = \left(\frac{n\pi}{L_l}\right) \left[\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (GJ_x)_o \right]^{\frac{1}{2}} \left[e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3}\right) \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (\rho J_x)_o \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.19})$$

siendo $\omega_{\theta_{uo}}$ la frecuencia circular en vibración torsional para el reticulado simplemente apoyado, obtenida a partir del modelo continuo simplificado 6ED.

Efecto de la carga axial en las vibraciones naturales

Las frecuencias circulares flexionales y torsionales se ven modificadas como consecuencia de las cargas axiales que actúan en los extremos de los largueros. Por ello se analiza el caso en el cual sobre los extremos de cada uno de largueros actúa una carga axial P_{uo} . La presencia de estas cargas hace que, al desarrollar analíticamente el sistema diferencial en búsqueda de la solución del mismo, se incorporen nuevos términos a las ecuaciones correspondientes a las frecuencias mencionadas.

Frecuencias flexionales: a la definición del coeficiente b dado en (A.14), se le incorpora el siguiente término:

$$-\left[\frac{e^2 r_d}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^4 + \frac{3(\rho J_x)_o}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 \right] P_{uo} \quad (\text{A.20})$$

mientras que a la definición del coeficiente c dado en (A.15), se le incorpora el siguiente término:

$$\left[\frac{e^2 (EA)_o}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^4 + 3(GA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 \right] P_{uo} \quad (\text{A.21})$$

Frecuencias torsionales: la consideración de las cargas axiales hace que la expresión de la frecuencia dada en (A.19) resulte ahora:

$$\omega_{\theta u_o} = \left(\frac{n\pi}{L_l}\right) \left[\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (GJ_x)_o - e^2 P_{uo} \right]^{\frac{1}{2}} \left[e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3}\right) \left(\frac{n\pi}{L_l}\right)^2 + (\rho J_x)_o \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.22})$$

En Tabla A.1 se muestran resultados numéricos de frecuencias naturales para el mismo ejemplo considerado en el Capítulo 5, comparando con los resultados obtenidos en dicho Capítulo al implementar el modelo 9ED. En Tabla A.2 se muestra el efecto de la carga axial de compresión P_{uo} en los resultados de frecuencias obtenidos.

Frecuencia	n	6ED	9ED
Axial	1	496.618	494.688
	2	993.198	989.368
	3	1489.704	1484.035
Flexional	1	8.000	7.969
	2	31.651	31.528
	3	69.966	69.689
Torsional	1	74.384	74.383
	2	148.816	148.813
	3	223.344	223.336

Tabla A.1: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Modelos 6ED y 9ED

$P_{uo(c)}$ [N]	Frecuencia	n	6ED	9ED
1000	Flexional	1	7.886	7.855
		2	31.537	31.413
		3	69.850	69.572
1000	Torsional	1	74.368	74.368
		2	148.784	148.782
		3	223.297	223.289

Tabla A.2: Efecto de la carga axial de compresión en las frecuencias naturales en [rad/seg]

A.2 Estabilidad

En este caso, corresponde a lo desarrollado en la Sección 6.7 del Capítulo 6.

En Tabla A.3 se muestran resultados de la carga crítica de flexión y de torsión actuante sobre cada larguero, obtenidos al implementar el modelo 6ED al mismo ejemplo que fuera analizado en el Capítulo 5, y comparándose nuevamente con los resultados obtenidos en dicho Capítulo.

Carga crítica	6ED	9ED
P_{cro}^f	35413	35140
P_{cro}^t	2388436	2388333

Tabla A.3: Carga crítica de flexión y torsión en cada larguero en [N]. Modelos 6ED y 9ED

Nota: en todos los casos de vibraciones y cargas críticas analizados anteriormente, si se prescinde de los aportes locales, la solución del sistema diferencial resulta más simple de obtener, tal como se puede ver en el Apéndice B en donde se muestra el correspondiente desarrollo.

Apéndice B

Solución general del sistema diferencial 6ED para el caso del mástil con distintas C.B.

B.1 Implementación del modelo simplificado desarrollado

En el Capítulo 6 se procedió a la implementación del modelo continuo simplificado para evaluar numéricamente la estática, estabilidad y dinámica de mástiles reticulados bajo la C.B. de apoyado-apoyado (A-A). En el presente Apéndice se implementa dicho modelo a la solución del mástil reticulado bajo otras C.B., las cuales se muestran en la Figura 6.4 del Capítulo anteriormente citado.

B.1.1 Elásticas

2º caso: fijo-fijo (F-F)

En el presente caso los extremos de los largueros presentan restringidos los corrimientos en las tres direcciones principales, dando lugar también a una restricción del giro

flexional de la sección transversal. Por lo tanto para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| v''_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Evaluando ahora la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$v_o(0) = V_1 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\theta_{wo}(0) = V_2 + V_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$v''_o(0) = 2V_3 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] e^{\lambda_5 L_l} + \\ & + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$v''_o(L_l) = 2V_3 + 6V_4 L_l + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^2}{2} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

3° caso: empotrado-empotrado (E-E)

En el presente caso los extremos de los largueros presentan restringidos los corrimientos en las tres direcciones principales, así como también los giros flexionales. Nuevamente, los giros flexionales de la sección transversal se encuentran también restringidos. Por lo tanto para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.12})$$

Evaluando ahora la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$v_o(0) = V_1 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\theta_{wo}(0) = V_2 + V_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$v'_o(0) = V_2 + V_5 \lambda_5 + V_6 \lambda_6 = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] e^{\lambda_5 L_l} + \\ & + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$v'_o(L_l) = V_2 + 2V_3 L_l + 3V_4 L_l^2 + V_5 \lambda_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^3}{6} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

4° caso: libre-fijo (L-F)

En el presente caso, los extremos iniciales ($x = 0$) de los largueros presentan liberados los corrimientos en las tres direcciones principales, dando lugar también a que la sección transversal en dicho borde pueda girar flexionalmente. En tanto que en los extremos finales ($x = L_l$), los largueros presentan restringidos los corrimientos en las tres direcciones principales, así como los giros flexionales de la sección. Por lo tanto para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| 3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| v_o''(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Evaluando ahora la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$3E_l J_{ly} v_o'''(0) - (GA)_o (v_o'(0) - \theta_{wo}(0)) = V_4 = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + V_5 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] + V_6 \left[\lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \right] + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$v_o''(0) = 2V_3 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = V_2 + 2V_3L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_lJ_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] e^{\lambda_5 L_l} + \\ + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_lJ_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$v_o''(L_l) = 2V_3 + 6V_4L_l + V_5\lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6\lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^2}{2} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Resolviendo ahora de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

5° caso: libre-empotrado (L-E)

En el presente caso, los extremos iniciales ($x = 0$) de los largueros presentan liberados los corrimientos en las tres direcciones principales, dando lugar también a que la sección transversal en dicho borde pueda girar flexionalmente. En tanto que en los extremos finales ($x = L_l$), los largueros presentan restringidos los corrimientos y los giros flexionales locales en las tres direcciones principales, dando lugar también a una restricción de los giros flexionales de la sección transversal. Por lo tanto para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left. \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left. \left[3E_lJ_{ly}v_o'''(x) - (GA)_o(v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) \right] \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\left. \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left. \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\left. \mathcal{V}_o(x) \right|^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. v_o(x) \right|^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\left. \mathcal{V}_o(x) \right|^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. v_o(x) \right|^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.33})$$

$$\left. \mathcal{G}_{wo}(x) \right|^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. \theta_{wo}(x) \right|^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v'_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.35})$$

Evaluando ahora la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$3E_l J_{ly} v_o'''(0) - (GA)_o (v'_o(0) - \theta_{wo}(0)) = V_4 = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + V_5 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] + V_6 \left[\lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \right] + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} = 0 \quad (\text{B.37})$$

$$v_o''(0) = 2V_3 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.38})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] e^{\lambda_5 L_l} + \\ & + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2 (EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$v'_o(L_l) = V_2 + 2V_3 L_l + 3V_4 L_l^2 + V_5 \lambda_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^3}{6} = 0 \quad (\text{B.41})$$

Resolviendo ahora de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

6° caso: apoyado-fijo (A-F)

En el presente caso, los extremos iniciales ($x = 0$) de los largueros presentan solo restringidos los corrimientos en las direcciones principales de y y z . En tanto que los extremos finales ($x = L_l$), presentan restringidos los corrimientos en las tres direcciones principales, así como también los giros flexionales de la sección transversal. Por lo tanto para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.42})$$

$$\left. \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left. \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\left. \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left. v''_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$\left. \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. \theta_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.45})$$

Por lo tanto evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$v_o(0) = V_1 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.46})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + V_5 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] + V_6 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} = 0 \quad (\text{B.47})$$

$$v''_o(0) = 2V_3 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.48})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] e^{\lambda_5 L_l} + \\ & + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

$$v''_o(L_l) = 2V_3 + 6V_4 L_l + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^2}{2} = 0 \quad (\text{B.51})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

7° caso: apoyado-empotrado (A-E)

En el presente caso, los extremos iniciales ($x = 0$) de los largueros presentan solo restringidos los corrimientos en las direcciones principales de y y z . En tanto que los

extremos finales ($x = L_l$), presentan restringidos los corrimientos en las tres direcciones principales y los giros flexionales locales, así como también los giros flexionales de la sección transversal. Por lo tanto para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| v''_o(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.54})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.55})$$

$$\left| \mathcal{V}'_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v'_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.56})$$

Por lo tanto evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, se tiene:

$$v_o(0) = V_1 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.57})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + V_5 \left[\lambda_5^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^4 \right] + V_6 \left[\lambda_6^2 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^4 \right] + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} = 0 \quad (\text{B.58})$$

$$v''_o(0) = 2V_3 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.59})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^4}{24} = 0 \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + V_5 \left[\lambda_5 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_5^3 \right] e^{\lambda_5 L_l} + \\ & + V_6 \left[\lambda_6 - \frac{3E_l J_{ly}}{(GA)_o} \lambda_6^3 \right] e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \left[\frac{L_l^3}{6} + \frac{e^2(EA)_o L_l}{(GA)_o 6} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

$$v'_o(L_l) = V_2 + 2V_3 L_l + 3V_4 L_l^2 + V_5 \lambda_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6 e^{\lambda_6 L_l} + \frac{3q_{vo}}{(EJ_y)_o} \frac{L_l^3}{6} = 0 \quad (\text{B.62})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

B.1.2 Vibraciones naturales

2º caso: fijo-fijo (F-F)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, resulta para este caso:

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| u_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.63})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial, se tiene:

$$u_o^{(n)}(0) = U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.64})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.65})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. del reticulado resultan las mismas que las del análisis de la elástica. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), resulta:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.66})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(0) = \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.67})$$

$$v_o''^{(n)}(0) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.68})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.69})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.70})$$

$$v_o''^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.71})$$

En cuanto a la evaluación de la solución para las vibraciones torsionales (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, y dado que las C.B. torsionales son idénticas a las del caso A-A, se obtienen los mismos resultados. Por lo tanto procediendo de manera equivalente a dicho caso, se determina las frecuencias torsionales.

3° caso: empotrado-empotrado (E-E)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, resulta igual a la del caso F-F. Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial, resulta:

$$u_o^{(n)}(0) = U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.72})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.73})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. del reticulado resultan las mismas del caso estático. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.74})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(0) = \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.75})$$

$$v_o'^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.76})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.77})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.78})$$

$$v_o'^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.79})$$

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left| \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.80})$$

$$\left| \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.81})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\theta_{uo}^{(n)}(0) = \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.82})$$

$$\theta_{uo}'^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.83})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.94})$$

$$v_o''^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.95})$$

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \equiv \left. \left[\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x) + \left[(GJ_x)_o + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - e^2 P_{uo} \right] \theta_{uo}'(x) \right] \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.96})$$

$$\left. \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \equiv \left. \theta_{uo}''(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.97})$$

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \equiv \left. \theta_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.98})$$

$$\left. \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=L_l} \neq 0 \equiv \left. \theta_{uo}''(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.99})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(0) + \left[(GJ_x)_o + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - e^2 P_{uo} \right] \theta_{uo}'(0) = \\ & = \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_j^{3(n)} + \left[(GJ_x)_o + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - e^2 P_{uo} \right] \lambda_j^{(n)} \right\} \Theta_j^{(n)} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.100}) \end{aligned}$$

$$\theta_{uo}''^{(n)}(0) = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.101})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.102})$$

$$\theta_{uo}''^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.103})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \equiv \left. \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(x) + \left[(GJ_x)_o + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - e^2 P_{uo} \right] \theta_{uo}'(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.114})$$

$$\left. \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \equiv \left. \theta_{uo}''(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.115})$$

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \equiv \left. \theta_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.116})$$

$$\left. \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \equiv \left. \theta'_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.117})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(0) + \left[(GJ_x)_o + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - e^2 P_{uo} \right] \theta_{uo}'(0) = \\ & = \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_j^{3(n)} + \left[(GJ_x)_o + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - e^2 P_{uo} \right] \lambda_j^{(n)} \right\} \Theta_j^{(n)} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

$$\theta_{uo}''(0) = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.119})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.120})$$

$$\theta_{uo}'^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{(n)} \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.121})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

6° caso: apoyado-fijo (A-F)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, resultan:

$$\left. \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \equiv \left. u'_o(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.122})$$

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| u_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.123})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y sus derivadas según corresponda), resulta:

$$u_o'^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.124})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.125})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. del reticulado resultan las mismas del caso estático. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.126})$$

$$\theta_{wo}'^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.127})$$

$$v_o''^{(n)}(0) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.128})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.129})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.130})$$

$$v_o''^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.131})$$

En cuanto a la evaluación de la solución para las vibraciones torsionales (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, y dado que las C.B. torsionales son idénticas a las del caso A-A, se obtienen los mismos resultados. Por lo tanto procediendo de manera equivalente a dicho caso, se determinan las frecuencias torsionales.

7º caso: apoyado-empotrado (A-E)

Las C.B. del reticulado para el movimiento axial, resultan:

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| u_o'(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.132})$$

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| u_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.133})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y sus derivadas según corresponda), resulta:

$$u_o'^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.134})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.135})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. del reticulado resultan las mismas del caso estático. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.136})$$

$$\theta_{wo}'^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.137})$$

$$v_o''^{(n)}(0) = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.138})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.139})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.140})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 6 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.141})$$

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left| \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.142})$$

$$\left| \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta''_{uo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.143})$$

$$\left| \mathcal{G}'_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{B.144})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\theta_{uo}^{(n)}(0) = \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.145})$$

$$\theta_{uo}''^{(n)}(0) = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.146})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.147})$$

$$\theta_{uo}'^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{(n)} \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.148})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

B.1.3 Estabilidad

2º caso: fijo-fijo (F-F)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.149})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(0) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.150})$$

$$v_o''(0) = V_3 \lambda_3^2 + V_4 \lambda_4^2 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.151})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (\text{B.152})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.153})$$

$$v_o''(L_l) = V_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (\text{B.154})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión.

En cuanto a la evaluación de la solución para el giro torsional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, y dado que las C.B. torsionales son idénticas a las del caso A-A, se obtienen los mismos resultados. Por lo tanto procediendo de manera equivalente a dicho caso, se determina la carga crítica de torsión.

3° caso: empotrado-empotrado (E-E)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.155})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(0) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.156})$$

$$v'_o(0) = V_2 + V_3 \lambda_3 + V_4 \lambda_4 + V_5 \lambda_5 + V_6 \lambda_6 = 0 \quad (\text{B.157})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (\text{B.158})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.159})$$

$$v'_o(L_l) = V_2 + V_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 \lambda_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (\text{B.160})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión.

En cuanto a la evaluación de la solución para el giro torsional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\theta_{uo}(0) = \Theta_1 + \Theta_3 + \Theta_4 = 0 \quad (\text{B.161})$$

$$\theta'_{uo}(0) = \Theta_2 + \Theta_3 \lambda_3 + \Theta_4 \lambda_4 = 0 \quad (\text{B.162})$$

$$\theta_{uo}(L_l) = \Theta_1 + \Theta_2 L_l + \Theta_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{B.163})$$

$$\theta'_{uo}(L_l) = \Theta_2 + \Theta_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{B.164})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de torsión.

4º caso: libre-fijo (L-F)

Al igual que para la elástica, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\begin{aligned}
& 3E_l J_{ly} v_o'''(0) - (GA)_o (v_o'(0) - \theta_{wo}(0)) + 3P_{cro} v_o'(0) = 3P_{cro} V_2 + \\
& + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_3^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_3 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} \right\} V_3 + \\
& + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_4^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_4 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} \right\} V_4 + \\
& + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_5^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_5 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} \right\} V_5 + \\
& + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_6^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_6 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \right\} V_6 = 0 \quad (B.165)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta'_{wo}(0) = & V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\
& + V_5 \lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \quad (B.166)
\end{aligned}$$

$$v_o''(0) = V_3 \lambda_3^2 + V_4 \lambda_4^2 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (B.167)$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (B.168)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{wo}(L_l) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} + \\
& + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (B.169)
\end{aligned}$$

$$v_o''(L_l) = V_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (B.170)$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión.

En cuanto a la evaluación de la solución para el giro torsional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\begin{aligned} & \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{uo}'''(0) + [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \theta'_{uo}(0) = \\ & = [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \Theta_2 + \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_3^3 + [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \lambda_3 \right\} \Theta_3 + \\ & + \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_4^3 + [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \lambda_4 \right\} \Theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.171})$$

$$\theta_{uo}''(0) = \Theta_3 \lambda_3^2 + \Theta_4 \lambda_4^2 = 0 \quad (\text{B.172})$$

$$\theta_{uo}(L_l) = \Theta_1 + \Theta_2 L_l + \Theta_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{B.173})$$

$$\theta_{uo}'(L_l) = \Theta_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{B.174})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de torsión.

5º caso: libre-empotrado (L-E)

Al igual que para la elástica, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\begin{aligned} & 3E_l J_{ly} v_o'''(0) - (GA)_o (v_o'(0) - \theta_{wo}(0)) + 3P_{cro} v_o'(0) = 3P_{cro} V_2 + \\ & + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_3^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_3 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} \right\} V_3 + \\ & + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_4^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_4 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} \right\} V_4 + \\ & + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_5^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_5 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} \right\} V_5 + \\ & + \left\{ 3E_l J_{ly} \lambda_6^3 + [3P_{cro} - (GA)_o] \lambda_6 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} \right\} V_6 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.175})$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo}(0) = & V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5 \lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.176})$$

$$v''_o(0) = V_3 \lambda_3^2 + V_4 \lambda_4^2 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.177})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (\text{B.178})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.179})$$

$$v'_o(L_l) = V_2 + V_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 \lambda_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (\text{B.180})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión.

En cuanto a la evaluación de la solución para el giro torsional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\begin{aligned} & \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta'''_{uo}(0) + [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \theta'_{uo}(0) = \\ = & [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \Theta_2 + \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_3^3 + [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \lambda_3 \right\} \Theta_3 + \\ & + \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda_4^3 + [(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}] \lambda_4 \right\} \Theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.181})$$

$$\theta''_{uo}(0) = \Theta_3 \lambda_3^2 + \Theta_4 \lambda_4^2 = 0 \quad (\text{B.182})$$

$$\theta_{uo}(L_l) = \Theta_1 + \Theta_2 L_l + \Theta_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{B.183})$$

$$\theta'_{uo}(L_l) = \Theta_2 + \Theta_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{B.184})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de torsión.

6º caso: apoyado-fijo (A-F)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.185})$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo}(0) = & V_3\lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4\lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5\lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6\lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.186})$$

$$v''_o(0) = V_3\lambda_3^2 + V_4\lambda_4^2 + V_5\lambda_5^2 + V_6\lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.187})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2L_l + V_3e^{\lambda_3L_l} + V_4e^{\lambda_4L_l} + V_5e^{\lambda_5L_l} + V_6e^{\lambda_6L_l} = 0 \quad (\text{B.188})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4L_l} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6L_l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.189})$$

$$v''_o(L_l) = V_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3L_l} + V_4\lambda_4^2 e^{\lambda_4L_l} + V_5\lambda_5^2 e^{\lambda_5L_l} + V_6\lambda_6^2 e^{\lambda_6L_l} = 0 \quad (\text{B.190})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión.

En cuanto a la evaluación de la solución para el giro torsional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, y dado que las C.B. torsionales son idénticas a las del caso A-A, se obtienen los mismos resultados. Por lo tanto procediendo de manera equivalente a dicho caso, se determina la carga crítica de torsión.

7º caso: apoyado-empotrado (A-E)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \quad (\text{B.191})$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo}(0) = & V_3\lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4\lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5\lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6\lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.192})$$

$$v''_o(0) = V_3\lambda_3^2 + V_4\lambda_4^2 + V_5\lambda_5^2 + V_6\lambda_6^2 = 0 \quad (\text{B.193})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2L_l + V_3e^{\lambda_3L_l} + V_4e^{\lambda_4L_l} + V_5e^{\lambda_5L_l} + V_6e^{\lambda_6L_l} = 0 \quad (\text{B.194})$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo}(L_l) = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4L_l} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5L_l} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6L_l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.195})$$

$$v'_o(L_l) = V_2 + V_3\lambda_3e^{\lambda_3L_l} + V_4\lambda_4e^{\lambda_4L_l} + V_5\lambda_5e^{\lambda_5L_l} + V_6\lambda_6e^{\lambda_6L_l} = 0 \quad (\text{B.196})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión.

En cuanto a la evaluación de la solución para el giro torsional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\theta_{uo}(0) = \Theta_1 + \Theta_3 + \Theta_4 = 0 \quad (\text{B.197})$$

$$\theta''_{uo}(0) = \Theta_3\lambda_3^2 + \Theta_4\lambda_4^2 = 0 \quad (\text{B.198})$$

$$\theta_{uo}(L_l) = \Theta_1 + \Theta_2L_l + \Theta_3e^{\lambda_3L_l} + \Theta_4e^{\lambda_4L_l} = 0 \quad (\text{B.199})$$

$$\theta'_{uo}(L_l) = \Theta_2 + \Theta_3\lambda_3e^{\lambda_3L_l} + \Theta_4\lambda_4e^{\lambda_4L_l} = 0 \quad (\text{B.200})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de torsión.

Apéndice C

Modelo simplificado 6ED* prescindiendo del aporte local de largueros

En el presente Apéndice se reescribe el sistema diferencial correspondiente al modelo simplificado 6ED desarrollado en el Capítulo 6, pero prescindiendo ahora de los aportes locales. En ese sentido, y por resultar en la mayoría de los casos prácticos, J_{ly} y J_{lz} de valor muy pequeño, al igual que el término r_d , se puede aceptar prescindir entonces de los aportes dado por $3E_l J_{ly}$, $3E_l J_{lz}$, $3\rho_l J_{ly}$, $3\rho_l J_{lz}$, $E_l J_{lp}$, $3\rho_l J_{lp}$ y r_d . Por lo tanto reescribiendo las ecuaciones diferenciales (6.23 a 6.28), las mismas resultan:

$$(EA)_o u''_o(x, t) - (\rho A)_o \ddot{u}_o(x, t) - 3(p_o + q_{uo}(x, t)) = 0 \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} -(GA)_o (v''_o(x, t) - \theta'_{wo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) v''_o(x, t) + 3p_o v'_o(x, t) + \\ -(\rho A)_o \ddot{v}_o(x, t) - 3q_{vo}(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} -(GA)_o (w''_o(x, t) + \theta'_{vo}(x, t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) w''_o(x, t) + 3p_o w'_o(x, t) + \\ +(\rho A)_o \ddot{w}_o(x, t) - 3q_{wo}(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (C.3)$$

$$\left[e^2 (P_{uo}(t) + p_o x) - (GJ_x)_o \right] \theta''_{uo}(x, t) + e^2 p_o \theta'_{uo}(x, t) - (\rho J_x)_o \ddot{\theta}_{uo}(x, t) = 0 \quad (C.4)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6}\theta''_{vo}(x,t) - (GA)_o(w'_o(x,t) + \theta_{vo}(x,t)) - \frac{(\rho J_x)_o}{2}\ddot{\theta}_{vo}(x,t) = 0 \quad (C.5)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6}\theta''_{wo}(x,t) + (GA)_o(v'_o(x,t) - \theta_{wo}(x,t)) - \frac{(\rho J_x)_o}{2}\ddot{\theta}_{wo}(x,t) = 0 \quad (C.6)$$

En tanto reescribiendo las C.B., estas resultan:

$$\left[\left[(EA)_o u'_o(x,t) - 3P_{uo}(t) \right] \mathcal{U}_o(x,t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.7)$$

$$\left[\left[- (GA)_o (v'_o(x,t) - \theta_{wo}(x,t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) v'_o(x,t) - 3P_{vo}(t) \right] \mathcal{V}_o(x,t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.8)$$

$$\left[\left[- (GA)_o (w'_o(x,t) + \theta_{vo}(x,t)) + 3(P_{uo}(t) + p_o x) w'_o(x,t) - 3P_{wo}(t) \right] \mathcal{W}_o(x,t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.9)$$

$$\left\{ \left[(GJ_x)_o - e^2(P_{uo}(t) + p_o x) \right] \theta'_{uo}(x,t) - M_u(t) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x,t) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.10)$$

$$\left[\left[\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta'_{vo}(x,t) - M_v(t) \right] \mathcal{G}_{vo}(x,t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.11)$$

$$\left[\left[\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x,t) - M_w(t) \right] \mathcal{G}_{wo}(x,t) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.12)$$

C.1 Solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

C.1.1 Elásticas

Para el caso del corrimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor de z , producido por una carga transversal q_{vo} de distribución uniforme y prescindiendo del efecto de 2^o orden, el sistema homogéneo asociado a las ecuaciones (C.2

y C.6) da lugar a una ecuación algebraica de cuarto orden en λ , de donde se obtienen las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad (\text{C.13})$$

Por lo tanto, las soluciones complementarias resultan:

$$v_o^c(x) = V_1 + V_2x + V_3x^2 + V_4x^3 \quad (\text{C.14})$$

$$\theta_{wo}^c(x) = \Psi_1 + \Psi_2x + \Psi_3x^2 + \Psi_4x^3 \quad (\text{C.15})$$

y luego reemplazando estas soluciones y sus derivadas en el sistema homogéneo, puede ponerse la constante Ψ en función de V , con lo que resulta:

$$\theta_{wo}^c(x) = V_2 + 2V_3x + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3x^2 \right] \quad (\text{C.16})$$

En cuanto a la solución particular, se propone:

$$v_o^p(x) = \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{x^4}{4} \quad (\text{C.17})$$

$$\theta_{wo}^p(x) = 3q_{vo} \left[\frac{x}{(GA)_o} + \frac{x^3}{e^2(EA)_o} \right] \quad (\text{C.18})$$

con lo que, la solución general resulta:

$$v_o(x) = V_1 + V_2x + V_3x^2 + V_4x^3 + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{x^4}{4} \quad (\text{C.19})$$

$$\theta_{wo}(x) = V_2 + 2V_3x + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3x^2 \right] + 3q_{vo} \left[\frac{x}{(GA)_o} + \frac{x^3}{e^2(EA)_o} \right] \quad (\text{C.20})$$

Nuevamente, las constantes arbitrarias V_j (con $j = 1, \dots, 4$) se determinan a partir de las C.B. de cada caso particular.

En cuanto al giro torsional, la ecuación (C.4) al prescindir del efecto de 2º orden resulta ser una ecuación homogénea, por lo que la solución general será entonces la solución complementaria. Por lo tanto (C.4) da lugar a una ecuación algebraica de segundo orden en λ , de donde se obtienen las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (\text{C.21})$$

resultando entonces la solución general:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta_1 + \Theta_2x \quad (\text{C.22})$$

en donde las constantes arbitrarias Θ_1 y Θ_2 se determinan a partir de las C.B. de cada caso particular.

C.1.2 Vibraciones naturales

Se acepta que el sistema está liberado de cargas aplicadas, salvo la aplicación de la carga axial P_{uo} a efectos de evaluar su influencia en las vibraciones. Se prescinde del peso propio del reticulado, y además se considera que el mismo presenta modos armónicos de vibración.

La ecuación (C.1) que gobierna el movimiento axial habiendo hecho separación de variables, resulta:

$$(EA)_o \lambda^2 + (\rho A)_o \omega^2 = 0 \quad (C.23)$$

la cual es una ecuación algebraica de segundo orden en λ . Las raíces λ , y que dependen de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de dos constantes a determinar, U_1 y U_2 :

$$u_o^{(n)}(x) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j x} \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (C.24)$$

Estas constantes U_j se determinan a partir de las C.B. de cada caso particular.

El sistema diferencial dado por las ecuaciones (C.2 y C.6) que gobierna el movimiento flexional en la dirección de y , habiendo hecho separación de variables, resulta:

$$C_1 V + C_2 \Psi = 0 \quad (C.25)$$

$$C_2 V + C_3 \Psi = 0 \quad (C.26)$$

siendo:

$$C_1 = [3P_{uo} - (GA)_o] \lambda^2 - (\rho A)_o \omega^2 \quad (C.27)$$

$$C_2 = (GA)_o \lambda \quad (C.28)$$

$$C_3 = \frac{e^2 (EA)_o}{(GA)_o} \lambda^2 - (GA)_o + \frac{(\rho J_x)_o}{2} \omega^2 \quad (C.29)$$

De la condición de no trivialidad del sistema dado por las ecuaciones (C.25 y C.26), resulta una ecuación algebraica de cuarto orden en λ :

$$C_1 C_3 - C_2^2 = 0 \quad (\text{C.30})$$

Las raíces λ , y que dependen de ω , nos permiten disponer de las dos formas modales en función de ocho constantes a determinar (V_j y Ψ_j donde $j = 1, \dots, 4$). De (C.25) se tiene que:

$$\Psi_j = -\frac{C_{1j}}{C_{2j}} V_j \quad (\text{C.31})$$

con lo cual las formas modales resultan:

$$v_o^{(n)}(x) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j x} \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.32})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(x) = -\frac{C_{1j}}{C_{2j}} V_j^{(n)} e^{\lambda_j x} \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.33})$$

y de este modo el número de constantes a determinar a partir de las C.B. se reduce solo a cuatro.

La ecuación (C.4) que gobierna el movimiento torsional habiendo hecho separación de variables, resulta:

$$\left[e^2 P_{uo} - (GJ_x)_o \right] \lambda^2 - (\rho J_x)_o \omega^2 = 0 \quad (\text{C.34})$$

la cual es una ecuación algebraica de segundo orden en λ . Las raíces λ , y que dependen de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de dos constantes a determinar, Θ_1 y Θ_2 :

$$\theta_{wo}^{(n)}(x) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j x} \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.35})$$

Estas constantes Θ_j se determinan a partir de las C.B. de cada caso particular.

C.1.3 Estabilidad

Con un desarrollo equivalente a lo realizado en el Capítulo 6, se consideran cargas estáticas axiales de compresión actuantes centradamente sobre los extremos de los largueros, prescindiendo del peso propio del reticulado.

Nuevamente para la determinación de la carga crítica de flexión, se acepta la solución exponencial clásica tanto para el corrimiento transversal como para el giro flexional incógnita:

$$v_o(x) = Ve^{\lambda x} \quad (\text{C.36})$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi e^{\lambda x} \quad (\text{C.37})$$

y reemplazando en (C.2 y C.6), se tiene:

$$\left[-(GA)_o \lambda^2 + 3P_{cro} \lambda^2 \right] V + (GA)_o \lambda \Psi = 0 \quad (\text{C.38})$$

$$(GA)_o \lambda V + \left[\frac{e^2(EA)_o}{6} \lambda^2 - (GA)_o \right] \Psi = 0 \quad (\text{C.39})$$

en donde la condición de no trivialidad resulta en una ecuación algebraica de cuarto orden en λ :

$$\left[-(GA)_o + 3P_{cro} \right] \frac{e^2(EA)_o}{6} \lambda^4 - 3P_{cro}(GA)_o \lambda^2 = 0 \quad (\text{C.40})$$

de donde se obtienen las siguientes cuatro raíces, las cuales evidentemente dependen de la carga crítica P_{cro} :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (\text{C.41})$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \left\{ \frac{18P_{cro}(GA)_o}{[3P_{cro} - (GA)_o]e^2(EA)_o} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.42})$$

De este modo las soluciones complementarias, las que en este caso resultan ser iguales a las generales, debido a la carga crítica de flexión resultan:

$$v_o(x) = V_1 + V_2x + V_3e^{\lambda_3x} + V_4e^{\lambda_4x} \quad (\text{C.43})$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi_1 + \Psi_2x + \Psi_3e^{\lambda_3x} + \Psi_4e^{\lambda_4x} \quad (\text{C.44})$$

en donde las constantes V_j y Ψ_j ($j = 1, \dots, 4$) se determinan a partir de las condiciones de borde del problema. Derivando estas soluciones complementarias y reemplazando en el sistema diferencial homogéneo (C.2 y C.6), se obtiene la relación entre V y Ψ , y de este modo solo son cuatro las constantes arbitrarias a determinar a partir de las C.B. Reescribiendo las soluciones, se tiene:

$$v_o(x) = V_1 + V_2x + V_3e^{\lambda_3x} + V_4e^{\lambda_4x} \quad (\text{C.45})$$

$$\theta_{wo}(x) = V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 x} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 x} \quad (\text{C.46})$$

donde las cuatro constantes arbitrarias V_j ($j = 1, \dots, 4$) son las que se determinan a partir de las C.B. del problema. Para la implementación del modelo, se siguen los mismos pasos establecidos en el Capítulo 6, permitiendo así obtener la carga crítica de flexión P_{cro}^{*f} habiendo prescindido de los aportes locales. Con un desarrollo equivalente, se obtiene la carga crítica de flexión alrededor del eje y .

Nuevamente para la determinación de la carga crítica de torsión, se acepta la solución exponencial clásica para el giro torsional incognita:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta e^{\lambda x} \quad (\text{C.47})$$

y luego reemplazando esta propuesta de solución en la ecuación diferencial dada en (6.26), resulta la siguiente ecuación algebraica y homogénea:

$$\left[e^2 P_{cro} - (GJ_x)_o \right] \lambda^2 = 0 \quad (\text{C.48})$$

de donde se obtiene que:

$$P_{cro}^{*t} = \frac{(GJ_x)_o}{e^2} \quad (\text{C.49})$$

En este caso en donde se ha prescindido de los aportes locales, la carga crítica de torsión P_{cro}^{*t} resulta independiente de las C.B. y de la altura L_l del mástil reticulado.

C.2 Implementación del modelo simplificado prescindiendo de aportes locales

En este caso particular y dado de que se prescinde, entre otras cosas, de la rigidez e inercia flexional de los largueros, las posibles condiciones de borde que pueden ser representadas para el mástil reticulado son las que se muestran en la Figura C.1.

C.2.1 Elásticas

Se analiza el corrimiento transversal del mástil reticulado sujeto el mismo a una carga transversal uniformemente distribuida, q_{vo} , actuante en la dirección principal y , y en

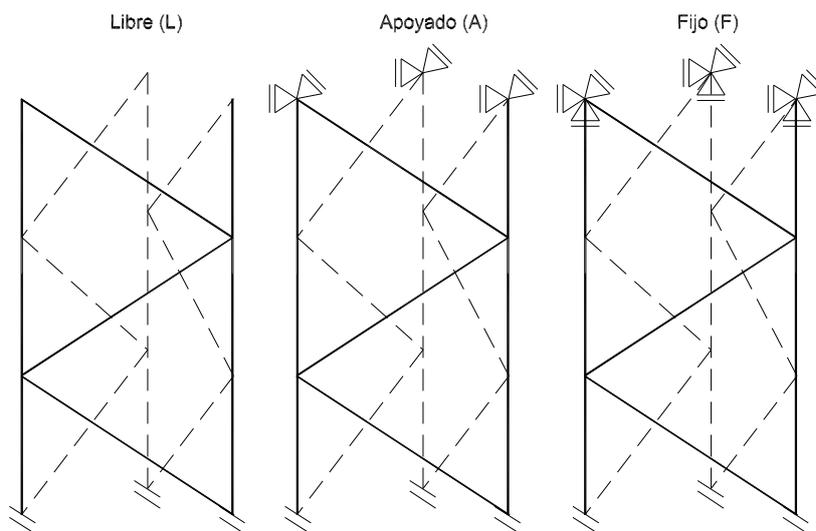


Figura C.1: Condiciones de vínculo del mástil reticulado prescindiendo de aportes locales

cada uno de los largueros. La evaluación frente a una carga q_{wo} en la dirección de z , resulta de un desarrollo equivalente.

1º caso: apoyado-apoyado (A-A)

En cuanto a las C.B. del reticulado, referidas al eje baricéntrico, para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.50})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.51})$$

Por lo tanto evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta:

$$v_o(0) = V_1 = 0 \quad (\text{C.52})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + \frac{3q_{wo}}{(GA)_o} = 0 \quad (\text{C.53})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2L_l + V_3L_l^2 + V_4L_l^3 + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{L_l^4}{4} = 0 \quad (C.54)$$

$$\theta'_{wo}(L_l) = 2V_3 + 6V_4L_l + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \left[3L_l^2 + \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} \right] = 0 \quad (C.55)$$

Se tiene entonces un sistema de cuatro ecuaciones algebraicas y lineales, las que expresadas matricialmente resultan:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & L_l^3 \\ 0 & \dots & 6L_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3q_{vo}}{(GA)_o} \\ -\frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{L_l^4}{4} \\ -\frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \left[3L_l^2 + \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} \right] \end{pmatrix} \quad (C.56)$$

Resolviendo dicho sistema, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j , y con ello, el corrimiento transversal y el giro flexional para el presente caso analizado.

2° caso: fijo-fijo (F-F)

Para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.57)$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (C.58)$$

Por lo tanto evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta:

$$v_o(0) = V_1 = 0 \quad (C.59)$$

$$\theta_{wo}(0) = V_2 + V_4 \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} = 0 \quad (C.60)$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2L_l + V_3L_l^2 + V_4L_l^3 + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{L_l^4}{4} = 0 \quad (C.61)$$

$$\theta_{wo}(L_l) = V_2 + 2V_3L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \left[L_l^3 + \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} L_l \right] = 0 \quad (C.62)$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

3° caso: empotrado-empotrado (E-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

4° caso: libre-fijo (L-F)

Para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| -(GA)_o (v'_o(x) - \theta_{wo}(x)) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.63})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.64})$$

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.65})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.66})$$

Evaluando ahora la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta:

$$-(GA)_o (v'_o(0) - \theta_{wo}(0)) = V_4 = 0 \quad (\text{C.67})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + \frac{3q_{vo}}{(GA)_o} = 0 \quad (\text{C.68})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 L_l^2 + V_4 L_l^3 + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{L_l^4}{4} = 0 \quad (\text{C.69})$$

$$\theta_{wo}(L_l) = V_2 + 2V_3 L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \left[L_l^3 + \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} L_l \right] = 0 \quad (\text{C.70})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

5° caso: libre-empotrado (L-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

6° caso: apoyado-fijo (A-F)

Para este caso particular, las C.B. resultan:

$$\left| \mathcal{V}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| v_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.71})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| \theta'_{wo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.72})$$

$$\left| \mathcal{G}_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{wo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.73})$$

Por lo tanto evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta:

$$v_o(0) = V_1 = 0 \quad (\text{C.74})$$

$$\theta'_{wo}(0) = 2V_3 + \frac{3q_{vo}}{(GA)_o} = 0 \quad (\text{C.75})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2L_l + V_3L_l^2 + V_4L_l^3 + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \frac{L_l^4}{4} = 0 \quad (\text{C.76})$$

$$\theta_{wo}(L_l) = V_2 + 2V_3L_l + V_4 \left[\frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} + 3L_l^2 \right] + \frac{3q_{vo}}{e^2(EA)_o} \left[L_l^3 + \frac{e^2(EA)_o}{(GA)_o} L_l \right] = 0 \quad (\text{C.77})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtienen los correspondientes valores de las constantes V_j .

7º caso: apoyado-empotrado (A-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

C.2.2 Vibraciones naturales

Se evalúan las vibraciones libres no amortiguadas (axial, flexional y torsional) del mástil reticulado, para lo cual se libera al mismo de cargas aplicadas y se prescinde de su peso propio. Los casos analizados, en lo que a las C.B. se refiere, son los mismos a los considerados en el análisis de las elásticas.

1º caso: apoyado-apoyado (A-A)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, habiendo hecho separación de variables, resulta:

$$\left| \left[(EA)_o u'_o(x) \right] \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.78})$$

donde para este caso particular se tiene:

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| u'_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.79})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y sus derivadas según corresponda), resulta:

$$u'_o{}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.80})$$

$$u'_o{}^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.81})$$

con lo que expresando matricialmente a este sistema de dos ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, resulta:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} \\ \lambda_1^{(n)} e^{\lambda_1^{(n)} L_l} & \lambda_2^{(n)} e^{\lambda_2^{(n)} L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(n)} \\ U_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.82})$$

en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo, con lo cual:

$$e^{\lambda_1^{(n)}L_l} - e^{\lambda_2^{(n)}L_l} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.83})$$

De este modo, asignando un valor inicial a ω en (C.23), se determinan las raíces λ_1 y λ_2 , y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición dada en (C.83). Así a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^{*a} , a la frecuencia siguiente ω_2^{*a} , y así sucesivamente.

En cuanto a las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left[- (GA)_o (v'_o(x) - \theta_{wo}(x)) + 3P_{wo}v'_o(x) \right] \mathcal{V}_o(x) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.84})$$

$$\left[\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x) \right] \mathcal{G}_{wo}(x) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.85})$$

donde para este caso particular, evaluando en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.86})$$

$$\theta'_{wo}{}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.87})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)}L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.88})$$

$$\theta'_{wo}{}^{(n)}(L_l) = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)}L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.89})$$

Resulta así en un sistema de cuatro ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, con ocho constantes a determinar. De (C.31) podemos poner $\Psi_j^{(n)}$ en función de $V_j^{(n)}$, siendo ahora solo cuatro las constantes a determinar. Luego expresando matricialmente al sistema, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(n)} \frac{C_{11}^{(n)}}{C_{21}^{(n)}} & \dots & \lambda_4^{(n)} \frac{C_{14}^{(n)}}{C_{24}^{(n)}} \\ e^{\lambda_1^{(n)}L_l} & \dots & e^{\lambda_4^{(n)}L_l} \\ \lambda_1^{(n)} \frac{C_{11}^{(n)}}{C_{21}^{(n)}} e^{\lambda_1^{(n)}L_l} & \dots & \lambda_4^{(n)} \frac{C_{14}^{(n)}}{C_{24}^{(n)}} e^{\lambda_4^{(n)}L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{(n)} \\ V_2^{(n)} \\ V_3^{(n)} \\ V_4^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.90})$$

La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (C.30) se determinan las cuatro raíces λ_j ($j = 1, \dots, 4$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo dada por (C.90). Así, a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^{*f} , a la frecuencia siguiente ω_2^{*f} , y así sucesivamente. Con un desarrollo equivalente se determinan las frecuencias para el movimiento transversal en z acoplado al giro flexional alrededor del eje y .

Las C.B. del eje baricéntrico para el giro torsional alrededor del eje x , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left\{ \left[(GJ_x)_o - e^2 P_{uo} \right] \theta'_{uo}(x) \right\} \mathcal{G}_{uo}(x) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.91})$$

donde para este caso particular resulta:

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. \theta_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.92})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\theta_{uo}^{(n)}(0) = \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.93})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.94})$$

Resulta así en un sistema de dos ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, las que expresadas matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{\lambda_1^{(n)} L_l} & \dots & e^{\lambda_2^{(n)} L_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1^{(n)} \\ \Theta_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.95})$$

Nuevamente, la condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en (C.34), se determinan las dos raíces λ_1 y λ_2 , y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo dada por (C.95). Así, a la mayor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1^{*t} , a la frecuencia siguiente ω_2^{*t} , y así sucesivamente.

2º caso: fijo-fijo (F-F)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, resulta para este caso:

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| u_o(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.96})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial, resulta:

$$u_o^{(n)}(0) = U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.97})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.98})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. resultan las mismas que para el análisis de la elástica. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.99})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(0) = \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.100})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.101})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.102})$$

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left| \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| \theta_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.103})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\theta_{uo}^{(n)}(0) = \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.104})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.105})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

3° caso: empotrado-empotrado (E-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

4° caso: libre-fijo (L-F)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, resultan:

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left| u'_o(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.106})$$

$$\left| \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left| u_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.107})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y sus derivadas según corresponda), resulta:

$$u'_o{}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.108})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.109})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. del reticulado resultan las mismas que las del análisis de la elástica. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$-(GA)_o (v'_o(0) - \theta_{wo}(0)) + 3P_{uo} v'_o(0) = \left\{ [3P_{uo} - (GA)_o] \lambda_j^{(n)} - (GA)_o \frac{C_{1j}^{(n)}}{C_{2j}^{(n)}} \right\} V_j^{(n)} = 0$$

$$j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.110})$$

$$\theta'_{wo}{}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.111})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.112})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.113})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left. \theta'_{uo}(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.114})$$

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. \theta_{uo}(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.115})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\theta'_{uo}{}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.116})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.117})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

5° caso: libre-empotrado (L-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

6° caso: apoyado-fijo (A-F)

La C.B. del reticulado para el movimiento axial, resultan:

$$\left. \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=0} \neq 0 \quad \equiv \quad \left. u'_o(x) \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.118})$$

$$\left. \mathcal{U}_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. u_o(x) \right|_{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.119})$$

Por lo tanto, evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal en vibración axial (y sus derivadas según corresponda), resulta:

$$u'_o{}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.120})$$

$$u_o^{(n)}(L_l) = U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.121})$$

En cuanto al movimiento transversal en y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , las C.B. del reticulado resultan las que para el análisis de la elástica. Por lo tanto habiendo evaluado en los bordes del problema las funciones solución para la forma modal en vibración transversal y en vibración por giro flexional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$v_o^{(n)}(0) = V_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.122})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(0) = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.123})$$

$$v_o^{(n)}(L_l) = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.124})$$

$$\theta_{wo}^{(n)}(L_l) = \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.125})$$

En cuanto al movimiento por giro torsional, las C.B. para el reticulado resultan:

$$\left. \mathcal{G}_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. \theta_{uo}(x) \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (\text{C.126})$$

y evaluando en los bordes del problema la función solución para la forma modal por vibración torsional (y sus derivadas según corresponda), se tiene:

$$\theta_{uo}^{(n)}(0) = \Theta_j^{(n)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.127})$$

$$\theta_{uo}^{(n)}(L_l) = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.128})$$

De este modo procediendo de forma equivalente al caso A-A, se determinan las frecuencias correspondientes y las formas modales.

7º caso: apoyado-empotrado (A-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

C.2.3 Estabilidad

Se evalúan las cargas críticas de flexión y torsión capaces de producir la inestabilidad del mástil reticulado, a partir de la implementación del modelo simplificado prescindiendo de los aportes locales.

1º caso: apoyado-apoyado (A-A)

Al igual que en el caso de las elásticas, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 = 0 \quad (\text{C.129})$$

$$\theta'_{wo}(0) = V_3\lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4\lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} = 0 \quad (\text{C.130})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2L_l + V_3e^{\lambda_3L_l} + V_4e^{\lambda_4L_l} = 0 \quad (\text{C.131})$$

$$\theta'_{wo}(L_l) = V_3\lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3L_l} + V_4\lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4L_l} = 0 \quad (\text{C.132})$$

De este modo, se tiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas, las que expresadas matricialmente resultan:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \\ 0 & \dots & \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} & \\ 1 & \dots & e^{\lambda_4L_l} & \\ 0 & \dots & \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4L_l} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.133})$$

La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a P_{cro} en (C.40) se determinan las dos raíces λ_3 y λ_4 (ya se sabe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo dada por (C.133), determinando entonces la carga crítica de flexión P_{cro}^{*f} alrededor del eje z . Con un desarrollo equivalente se determina la carga crítica de flexión alrededor del eje y .

En cuanto a la determinación de la carga crítica de torsión P_{cro}^{*t} , y como se demostró anteriormente, es independiente de las C.B. del mástil y su valor se obtiene directamente a partir de (C.49).

2º caso: fijo-fijo (F-F)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 = 0 \quad (\text{C.134})$$

$$\theta_{wo}(0) = V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} = 0 \quad (\text{C.135})$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{C.136})$$

$$\theta_{wo}(L_l) = V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{C.137})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión y de torsión.

3º caso: empotrado-empotrado (E-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

4º caso: libre-fijo (L-F)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$\begin{aligned}
& -(GA)_o(v'_o(0) - \theta_{wo}(0)) + 3P_{cro}v'_o(0) = 3P_{cro}V_2 + \\
& + \left\{ \left[3P_{cro} - (GA)_o \right] \lambda_3 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} \right\} V_3 + \\
& + \left\{ \left[3P_{cro} - (GA)_o \right] \lambda_4 + (GA)_o \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} \right\} V_4 = 0 \quad (C.138)
\end{aligned}$$

$$\theta'_{wo}(0) = V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} = 0 \quad (C.139)$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (C.140)$$

$$\theta_{wo}(L_l) = V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (C.141)$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión y de torsión.

5° caso: libre-empotrado (L-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

6° caso: apoyado-fijo (A-F)

Para el presente caso, evaluando la solución para el corrimiento transversal y para el giro flexional (y sus derivadas según corresponda) en los bordes del problema, resulta ahora:

$$v_o(0) = V_1 + V_3 + V_4 = 0 \quad (C.142)$$

$$\theta'_{wo}(0) = V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} = 0 \quad (C.143)$$

$$v_o(L_l) = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (C.144)$$

$$\theta_{wo}(L_l) = V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (\text{C.145})$$

Resolviendo de manera equivalente al caso A-A, se obtiene la correspondiente carga crítica de flexión y de torsión.

7º caso: apoyado-empotrado (A-E)

El presente caso no puede ser representado mediante el modelo simplificado por prescindir de la rigidez flexional de los largueros.

C.2.4 Resultados numéricos

Se analiza numéricamente con el modelo 6ED* desarrollado, el ejemplo del mástil reticulado cuyas características geométricas y mecánicas corresponden a las indicadas en el Capítulo 6. En Tabla C.1 se muestran los resultados del corrimiento lateral máximo en la dirección de y , en Tablas C.2 a C.5 los resultados de las tres primeras frecuencias circulares (axiales, flexionales y torsionales), mientras que en Tablas C.6 y C.7 los resultados de la influencia de la carga axial de compresión en la primera frecuencia flexional y torsional. En Tablas C.8 y C.9 se muestran resultados de las cargas críticas de flexión y torsión. En todos ellos obtenidos para cada uno de los casos evaluados, es decir, para las distintas C.B. posibles.

Caso	6ED*
A-A	159.441
F-F	32.793
L-F	1522.790
A-F	67.149

Tabla C.1: Corrimiento transversal $v_{o(max)}^*$ en [mm] del mástil reticulado

Frec.	6ED*
ω_1^{*a}	496.624
ω_2^{*a}	993.248
ω_3^{*a}	1489.872
ω_1^{*f}	7.931
ω_2^{*f}	31.378
ω_3^{*f}	69.345
ω_1^{*t}	74.376
ω_2^{*t}	148.751
ω_3^{*t}	223.127

Tabla C.2: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-A

Frec.	6ED*
ω_1^{*a}	496.624
ω_2^{*a}	993.248
ω_3^{*a}	1489.872
ω_1^{*f}	17.723
ω_2^{*f}	47.828
ω_3^{*f}	91.306
ω_1^{*t}	74.376
ω_2^{*t}	148.751
ω_3^{*t}	223.127

Tabla C.3: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso F-F

Frec.	6ED*
ω_1^{*a}	248.312
ω_2^{*a}	744.936
ω_3^{*a}	1241.560
ω_1^{*f}	2.829
ω_2^{*f}	17.519
ω_3^{*f}	48.186
ω_1^{*t}	37.188
ω_2^{*t}	111.564
ω_3^{*t}	185.939

Tabla C.4: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso L-F

Frec.	6ED*
ω_1^{*a}	248.312
ω_2^{*a}	744.936
ω_3^{*a}	1241.560
ω_1^{*f}	12.312
ω_2^{*f}	39.264
ω_3^{*f}	80.105
ω_1^{*t}	74.376
ω_2^{*t}	148.751
ω_3^{*t}	223.127

Tabla C.5: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg]. Caso A-F

Caso	$P_{uo(c)}$ [N]	6ED*	P_{uo} [N]	6ED*
A-A	1000	7.817	0	7.931
F-F	1000	17.660	0	17.723
L-F	1000	2.674	0	2.829
A-F	1000	12.227	0	12.312

Tabla C.6: Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia flexional ω_1^f

Caso	$P_{uo(c)}$ [N]	6ED*	P_{uo} [N]	6ED*
A-A	1000	74.360	0	74.376
F-F	1000	74.360	0	74.376
L-F	1000	37.180	0	37.188
A-F	1000	74.360	0	74.376

Tabla C.7: Influencia de la carga axial $P_{uo(c)}$ sobre la primera frecuencia torsional ω_1^t

Caso	6ED*
A-A	34182
F-F	136270
L-F	8751
A-F	70574

Tabla C.8: Carga crítica de flexión P_{cro}^{*f} en [N] sobre cada larguero

Caso	6ED*
A-A	2387836
F-F	2387836
L-F	2387836
A-F	2387836

Tabla C.9: Carga crítica de torsión P_{cro}^{*t} en [N] sobre cada larguero

C.3 Solución particular del sistema diferencial para el caso del mástil simplemente apoyado

Vibraciones naturales

Con un desarrollo equivalente a lo realizado en el Apéndice A para el caso del mástil reticulado simplemente apoyado, pero prescindiendo ahora de los aportes locales, la ecuación diferencial dada en (6.23) resulta:

$$(EA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 - (\rho A)_o \omega^2 = 0 \quad (C.146)$$

de la que al despejar, se obtiene:

$$\omega_{uo}^* = \left(\frac{n\pi}{L_l} \right) \left[\frac{(EA)_o}{(\rho A)_o} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (C.147)$$

siendo ω_{uo}^* la frecuencia circular en vibración axial del mástil simplemente apoyado, obtenida a partir del modelo 6ED*.

Del mismo modo a lo anterior, las ecuaciones diferenciales (6.24 y 6.28) resultan ahora:

$$\left[(GA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 - (\rho A)_o \omega^2 \right] V - (GA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l} \right) \Psi = 0 \quad (C.148)$$

$$(GA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l} \right) V - \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 + (GA)_o - \frac{(\rho J_x)_o}{2} \omega^2 \right] \Psi = 0 \quad (C.149)$$

La condición de solución no trivial de este último sistema, resulta en una ecuación algebraica de cuarto orden en ω_{vo}^* :

$$a^* \omega_{vo}^{*4} + b^* \omega_{vo}^{*2} + c^* = 0 \quad (C.150)$$

en donde se ha definido a:

$$a^* = -(\rho A)_o \frac{(\rho J_x)_o}{2} \quad (\text{C.151})$$

$$b^* = (GA)_o \left[\frac{(\rho A)_o (EA)_o e^2}{(GA)_o} \frac{e^2}{6} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} \right] \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 + (GA)_o (\rho A)_o \quad (\text{C.152})$$

$$c^* = -(GA)_o \frac{e^2 (EA)_o}{6} \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^4 \quad (\text{C.153})$$

y siendo ω_{vo}^* la frecuencia circular en vibración flexional del mástil simplemente apoyado, obtenida a partir del modelo 6ED*.

Por último, bajo un mismo análisis, la ecuación diferencial (6.26) resulta ahora:

$$(GJ_x)_o \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 - (\rho J_x)_o \omega^2 = 0 \quad (\text{C.154})$$

de la que al despejar, se obtiene:

$$\omega_{\theta_{uo}}^* = \left(\frac{n\pi}{L_l} \right) \left[\frac{(GJ_x)_o}{(\rho J_x)_o} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.155})$$

siendo ω_{uo}^* la frecuencia circular en vibración torsional del mástil simplemente apoyado, obtenida a partir del modelo 6ED*.

En cuanto al efecto de la carga axial en las vibraciones flexionales, al coeficiente b^* se le incorpora el término:

$$-\frac{3(\rho J_x)_o}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 P_{uo} \quad (\text{C.156})$$

mientras que coeficiente c^* se le incorpora el mismo término que el dado en (B.21), es decir:

$$\left[\frac{e^2 (EA)_o}{2} \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^4 + 3(GA)_o \left(\frac{n\pi}{L_l} \right)^2 \right] P_{uo} \quad (\text{C.157})$$

En tanto que el efecto de la carga axial sobre las vibraciones torsionales, resulta:

$$\omega_{\theta_{uo}}^* = \left(\frac{n\pi}{L_l} \right) \left[\frac{(GJ_x)_o - e^2 P_{uo}}{(\rho J_x)_o} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.158})$$

En Tabla C.10 se muestran resultados de frecuencias circulares para el ejemplo del reticulado simplemente apoyado presentado en el Capítulo 5, obtenidos al implementar el

modelo 6ED*, así como también comparaciones con los resultados obtenidos de los modelos 6ED y 9ED. En Tabla C.11 se muestran los efectos de la carga axial P_{uo} en los resultados de frecuencias flexionales y torsionales, y se compara nuevamente con los resultados obtenidos en el Capítulo 5 y en el Apéndice A.

Frecuencia	n	6ED*	6ED	9ED
Axial	1	496.624	496.618	494.688
	2	993.248	993.198	989.368
	3	1489.872	1489.704	1484.035
Flexional	1	7.931	8.000	7.969
	2	31.378	31.651	31.528
	3	69.345	69.966	69.689
Torsional	1	74.376	74.384	74.383
	2	148.751	148.816	148.813
	3	223.127	223.344	223.336

Tabla C.10: Frecuencias naturales del mástil reticulado en [rad/seg] para los modelos 6ED*, 6ED y 9ED

$P_{uo(c)}$ [N]	Frecuencia	n	6ED*	6ED	9ED
1000	Flexional	1	7.817	7.886	7.855
		2	31.262	31.537	31.413
		3	69.227	69.850	69.572
1000	Torsional	1	74.360	74.368	74.368
		2	148.720	148.784	148.782
		3	223.080	223.297	223.289

Tabla C.11: Efecto de la carga axial de compresión en las frecuencias naturales en [rad/seg]

Estabilidad

Con un desarrollo equivalente a lo realizado en el Capítulo 6 (Sección 6.8) para la determinación de las cargas críticas de flexión y compresión del reticulado simplemente apoyado al prescindir de los aportes locales, las ecuaciones diferenciales (6.24 y 6.28) resultan ahora:

$$-(GA)_o \left(v_o''(x, t) - \theta_{wo}'(x, t) \right) + 3P_{cro} v_o''(x, t) = 0 \quad (C.159)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta_{wo}''(x, t) + (GA)_o \left(v_o'(x, t) - \theta_{wo}(x, t) \right) = 0 \quad (C.160)$$

y aceptando nuevamente como solución para el corrimiento v_o , y para el giro flexional θ_{wo} a:

$$v_o(x) = V \sin\left(\frac{\pi x}{L_l}\right) \quad (C.161)$$

$$\theta_{wo}(x) = \Psi \cos\left(\frac{\pi x}{L_l}\right) \quad (C.162)$$

las cuales satisfacen las C.B. del presente caso analizado, y luego reemplazando en (C.159 y C.160), resulta el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left[(GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l} \right)^2 - 3P_{cro} \left(\frac{\pi}{L_l} \right)^2 \right] V - (GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l} \right) \Psi = 0 \quad (C.163)$$

$$(GA)_o \left(\frac{\pi}{L_l} \right) V - \left[\frac{e^2(EA)_o}{6} \left(\frac{\pi}{L_l} \right)^2 + (GA)_o \right] \Psi = 0 \quad (C.164)$$

Expresando dicho sistema algebraico en forma matricial, la condición de solución no trivial resulta en una ecuación algebraica de primer orden en P_{cro} , de donde se obtiene que la carga crítica de flexión actuante de manera centrada sobre cada larguero, resulta ahora para el modelo 6ED*:

$$P_{cro}^{*f} = \frac{(GA)_o e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{L_l} \right)^2}{3e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{L_l} \right)^2 + 18(GA)_o} \quad (C.165)$$

En tanto que la ecuación diferencial (6.26) que define el giro torsional, al prescindir de los aportes locales, resulta ahora:

$$e^2 P_{cro} \theta''_{uo}(x, t) - (GJ_x)_o \theta''_{uo}(x, t) = 0 \quad (C.166)$$

Aceptando como solución para el giro torsional θ_{uo} a:

$$\theta_{uo}(x) = \Theta \cos\left(\frac{\pi x}{L_l}\right) \quad (C.167)$$

la cual satisface las C.B. del presente caso analizado, y luego reemplazando en (C.166), resulta la siguiente ecuación algebraica:

$$e^2 P_{cro} - (GJ_x)_o = 0 \quad (C.168)$$

a partir de la cual se obtiene que la carga crítica de torsión actuante de manera centrada sobre cada larguero, resulta ahora para el modelo 6ED*:

$$P_{cro}^{*t} = \frac{(GJ_x)_o}{e^2} \quad (C.169)$$

En Tabla C.12 se muestran los resultados de las cargas críticas de flexión y torsión obtenidas al implementar el modelo 6ED* para el ejemplo analizado en el Capítulo 5, y se comparan nuevamente con los resultados obtenidos en dicho Capítulo y en el Apéndice A, respectivamente para los modelos 9ED y 6ED.

Modelo	6ED*	6ED	9ED
P_{cro}^f	34812	35413	35140
P_{cro}^t	2387836	2388436	2388333

Tabla C.12: Carga crítica de flexión y torsión en [N] para los modelos 6ED*, 6ED y 9ED

Nuevamente, a partir de la comparación con la expresión de Euler, y de manera equivalente a lo presentado en el Capítulo 6 (Sección 6.8), se obtiene una propuesta práctica para la expresión general de la carga crítica de flexión para distintas C.B. del mástil, la cual al prescindir de los aportes locales resulta ahora:

$$P_{croPP}^{*f} = \frac{(GA)_o e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{\mu L_l}\right)^2}{3e^2 (EA)_o \left(\frac{\pi}{\mu L_l}\right)^2 + 18(GA)_o} \quad (C.170)$$

y en donde los valores de μ se obtienen de la Figura 6.7 mostrada en el Capítulo 6. En tanto que como se observó en las ecuaciones (C.49), la carga crítica de torsión es independiente de las C.B. y de la altura L_l del mástil, por lo tanto una propuesta práctica para la expresión general de la carga crítica de torsión, al prescindir de los aportes locales, resulta ahora:

$$P_{croPP}^{*t} = \frac{(GJ_x)_o}{e^2} \quad (C.171)$$

En Tablas C.13 y C.14 se muestran resultados de las cargas críticas de flexión y de torsión actuantes sobre cada larguero, obtenidas para distintas C.B. del mástil a partir de la aplicación de la expresión (C.170 y C.171), y se comparan con los resultados obtenidos en el Capítulo 6.

Caso	μ	P_{croPP}^{*f}	P_{croPP}^f
A-A	1.0	34813	35413
F-F	0.5	136270	138670
L-F	2.0	8751	8901
A-F	0.7	70511	71736

Tabla C.13: Carga crítica de flexión sobre cada larguero en [N] para distintas C.B.

Caso	μ	P_{croPP}^{*t}	P_{croPP}^t
A-A	1.0	2387836	2388436
F-F	0.5	2387836	2390236
L-F	2.0	2387836	2387986
A-F	0.7	2387836	2389060

Tabla C.14: Carga crítica de torsión sobre cada larguero en [N] para distintas C.B.