UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de magister en matemática

algebras autoinyectivas y extensiones triviales de álgebras monomiales

María Valeria Hernández

Bahía Blanca Argentina

2016

Prefacio.

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Magister en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur durante el período comprendido entre los meses de Octubre de 2012 y Noviembre de 2016, bajo la dirección de la Dra. María Inés Platzeck, Profesora Emérita del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y la dirección adjunta de la Dra. María Andrea Gatica, Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Agradecimientos.

En primer lugar quiero agradecer inmensamente a mis directoras María Inés Platzeck y María Andrea Gatica. A ambas admiro por su pasión por hacer matemática, y su inmensa calidez humana. Muchas gracias por brindarme el honor de trabajar con ustedes!

A María Inés le agradezco su paciencia infinita, sus inestimables aportes y sugerencias, su bondad y su esfuerzo para que esta tesis quede lo más clara y elegante posible. A Andrea porque gracias a ella comencé a realizar esta maestría, porque siempre confió en mí y me brindó todo su apoyo y optimismo durante toda esta etapa. A ambas por su hospitalidad, por recibirme siempre con gran entusiasmo adaptándose a mis posibilidades de viajar.

A mi esposo Roberto, por su infinita contención y ayuda. A mis hijas Ana y Sofía, que tantas veces tuvieron que resignar tiempo compartido para que yo pudiera hacer este trabajo. A mis amigos, a mis padres, y a mis hermanas Laura, Mariana y Analía, por estar siempre que los necesité.

A toda la gente del Departamento e Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur que siempre me recibieron con gran hospitalidad y que posibilitaron de diversas maneras el desarrollo de este trabajo. Muchas gracias, Lucre, por regalarme tu amistad, ser mi compañera de estudio y congresos, y compartir conmigo tantos lindos momentos...

A la gente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, que de una u otra manera ayudaron para que yo pudiera hacer esta Maestría. Gracias Marina y Marita por todo el apoyo brindado! Y gracias profesor Darío Picco por despertar en mí este amor por la matemática y por su constante interés en el progreso de mi trabajo.

A todos: MUCHAS GRACIAS!

Resumen.

En esta tesis se estudian álgebras autoinyectivas. Una subfamilia muy importante de las mismas la constituyen las llamadas álgebras Frobenius, que fueron introducidas por F. G. Frobenius en 1903.

En el presente trabajo se establece un paralelismo entre este desarrollo clásico y el actual. Este enfoque nos permitió dar demostraciones alternativas de caracterizaciones conocidas para álgebras Frobenius y simétricas. Se presentan aquí las nociones de automorfismo de Nakayama, funtor de Nakayama y permutación de Nakayama, estableciendo la relación existente entre ellas.

El carcaj de la extensión trivial $T(A)$ de un álgebra de dimensión finita $A = kQ/I$ fue descripto por Fernández y Platzeck en [FP]. En este trabajo describimos las relaciones de $T(A)$ cuando A es un álgebra monomial, con lo que se obtiene una presentación de $T(A)$ como cociente del álgebra de caminos de un carcaj por un ideal admisible de relaciones. Cuando A es además un álgebra gentil resolvemos el problema recíproco: dada un álgebra $B = kQ_B/I_B$, determinar si B es la extensión trivial de un álgebra gentil. Caracterizamos tales álgebras B en base a propiedades de sus ciclos y mostramos cómo encontrar todas las álgebras gentiles A tales que $T(A) \cong B$. Demostramos que las extensiones triviales de álgebras gentiles coinciden con las álgebras de grafo de Brauer con multiplicidad 1 en todos sus vértices, resultado obtenido por S. Schroll en [S] con otros métodos.

Abstract.

In this thesis we study selfinjective algebras. An important subfamily of this class of algebras consists of the so called Frobenius algebras, which were introduced by Frobenius in 1903.

We establish here a parallel between the classical development and the present one. With this approach we were able to give alternative proofs of known characterizations of Frobenius and symmetric algebras. We recall the notions of Nakayama automorphism, Nakayama functor and Nakayama permutation and study the relationship between them.

The quiver of the trivial extension $T(A)$ of a finite dimensional algebra $A = kQ/I$ was described by Fernández and Platzeck in [FP]. In this work we describe the ideal of relations for $T(A)$ in case A is a monomial algebra. Thus we obtain a presentation for $T(A)$ as a quotient of the path algebra of a quiver by an admissible ideal of relations. When A is, moreover, a gentle algebra, we solve the converse problem: given an algebra $B = kQ_B/I_B$, determine whether B is the trivial extension of a gentle algebra. We characterize such algebras B through properties of the cycles of their quiver, and show how to obtain all gentle algebras A such that $T(A) \cong B$. We prove that trivial extensions of gentle algebras coincide with Brauer graph algebras with multiplicity one in all vertices in the associated Brauer graph, result proven by S. Schroll in [S].

Índice general

Introducción.

Las álgebras Frobenius fueron introducidas por F. G. Frobenius en 1903. Se definió en este desarrollo clásico a las álgebras Frobenius como aquellas álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo para las cuales las representaciones regulares a izquierda y a derecha son equivalentes. Se probaron caracterizaciones de las álgebras Frobenius y de una subfamilia muy importante de ellas: las álgebras simétricas. En sus trabajos realizados entre 1937 y 1941 R. Brauer, C. Nesbitt y T. Nakayama caracterizaron las álgebras Frobenius a través de la existencia de una familia particular de matrices llamadas matrices parastróficas. Probaron que la propiedad de un álgebra de ser Frobenius es equivalente a la existencia de una matriz parastrófica inversible. En este contexto se definió a las algebras simétricas como las álgebras Frobenius tales que la matriz parastrófica asociada es simétrica.

En el presente trabajo se establece un paralelismo entre este desarrollo y la existencia de homomorfismos entre los A - módulos A_A y $(D({}_AA))_A$, donde A designa un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k. En el enfoque clásico se trabaja con las constantes de estructura del álgebra, que dependen de la elección de una base β de la misma. Sea β^* la base dual de β en DA. La correspondencia que a una transformación lineal de A en DA le asigna su matriz con respecto a las bases β de A y β^* de DA, induce una correspondencia entre los homomorfismos de A - módulos a derecha de A en DA y las matrices parastróficas. Es esta correspondencia la que nos permite traducir los resultados expresados en el lenguaje clásico al lenguaje actual. Así, probamos que la existencia de una matriz parastrófica inversible es equivalente a la existencia de un isomorfismo entre los A - módulos a derecha A y DA. Además demostramos que la existencia de una matriz parastrófica inversible simétrica es equivalente a la existencia de un isomorfismo de A - bimódulos entre A y DA. Este enfoque nos permitió demostrar caracterizaciones conocidas para álgebras Frobenius y simétricas de manera diferente.

Las álgebras Frobenius están dotadas de un automorfismo con interesantes propiedades, llamado el automorfismo de Nakayama. Se prueba que las álgebras simétricas son aquellas álgebras Frobenius para las cuales el automorfismo de Nakayama es interior. Por otro lado el funtor de Nakayama, definido de la categoría de A - módulos finitamente generados en sí misma, es una autoequivalencia cuando A es autoinyectiva. Se prueba que el automorfismo de Nakayama y el funtor de Nakayama están íntimamente relacionados en el caso de las álgebras Frobenius. En este trabajo se explican estos resultados dando demostraciones de los mismos.

Presentamos los cuatro teoremas de Nakayama, que aportan caracterizaciones y propiedades de las álgebras autoinyectivas y de las álgebras Frobenius en particular. El primer teorema permite definir una permutación del conjunto de los A - módulos proyectivos indescomponibles, llamada la permutación de Nakayama. En este trabajo explicamos la relación de esta permutación con el automorfismo y con el funtor de Nakayama. Por otro lado, el teorema de Morita nos permite construir todas las álgebras autoinyectivas a partir de las álgebras Frobenius básicas. Mostramos cómo el segundo teorema de Nakayama nos da un criterio sencillo para decidir cuáles de ellas son Frobenius y cuáles no.

Las extensiones triviales forman una subfamilia importante de las álgebras simétricas. El estudio de la extensión trivial de un álgebra provee importante información sobre el álgebra y recíprocamente.

En [FP], Fernández y Platzeck describieron el carcaj de la extensión trivial de un álgebra de dimensión finita A y las relaciones de dicha extensión trivial cuando el carcaj de A no tiene ciclos orientados no nulos. En este trabajo abordamos el mismo problema para álgebras monomiales, que son las que tienen una presentación de la forma $A = kQ/I$ donde I está generado por caminos. Las álgebras monomiales forman una familia amplia que contiene entre otras a las álgebras cuerda y a las álgebras gentiles.

Demostramos el siguiente teorema:

Teorema A: *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra de dimensión finita, donde el ideal admisible I_A está generado por caminos. Sea I' el ideal generado por:*

(i) los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $\mu - \mu'$, donde μ, μ' son caminos diferentes de $kQ_{T(A)}$ con un suplemento común γ en ciclos elementales C y C' respectivamente.

Entonces I' es admisible y $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

Este resultado se prueba en la Sección 2 del Capítulo 5 de la Tesis.

En el caso en que A es un álgebra gentil, se puede simplificar la descripción de las relaciones de su extensión trivial reemplazando (ii) en el Teorema A por

$(ii)'$ los elementos de la forma $C - C'$, donde C y C' son ciclos elementales que comienzan en un mismo vértice de Q_A.

Los resultados anteriores proporcionan una manera simple y directa de construir la extensión trivial de un álgebra gentil.

Además estudiamos el problema recíproco: dada un álgebra B por su carcaj y relaciones, determinar si B es la extensión trivial de un álgebra gentil. Dimos una caracterización de tales extensiones en base a ciertas propiedades $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ de sus ciclos. Además, para una tal extensión B, mostramos cómo encontrar todas las álgebras gentiles A tales que $T(A) \cong B$. [Capítulo 6, Sección 1]

Luego se dan las definiciones de grafo de Brauer y de álgebra de grafo de Brauer siguiendo a [B] y se demuestra que si un grafo de Brauer tiene multiplicidad uno en todos sus vértices, el álgebra de grafo de Brauer asociada coincide con la extensión trivial de un álgebra gentil. Este resultado fue obtenido por Schroll en [S] con métodos muy diferentes. Nosotros aquí lo demostramos probando que B es álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno si y sólo si los ciclos de B satisfacen las propiedades $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ que caracterizan a las extensiones triviales de álgebras gentiles.

A continuación, indicamos la organización del presente trabajo.

El Capítulo 1 está destinado a introducir las nociones básicas y los resultados conocidos que utilizaremos en el trabajo.

En el Capítulo 2 se presentan las definiciones y caracterizaciones de las álgebras Frobenius y simétricas mostrando las relaciones entre el enfoque clásico y el actual. Se presenta en la última sección de este capítulo una lista de ejemplos donde se ilustran estas nociones y caracterizaciones.

En el Capítulo 3 se estudia el automorfismo de Nakayama de un álgebra Frobenius y su relación con el funtor de Nakayama. También se demuestra la invariancia por equivalencia

Morita de las álgebras simétricas.

En el Capítulo 4 se presentan los cuatro teoremas de Nakayama probados originalmente por T. Nakayama en [Nak1] y [Nak2], y se explica la relación existente entre el automorfismo, el funtor y la permutación de Nakayama cuando el álgebra es Frobenius.

En el Capítulo 5 se dan las relaciones de la extensión trivial de las álgebra monomiales.

El Capítulo 6 está dedicado al estudio de las álgebras gentiles, su extensión trivial y la relación con las álgebras de grafo de Brauer.

Capítulo 1

Conceptos preliminares.

En este capítulo daremos definiciones y resultados básicos necesarios para el desarrollo de esta tesis, que pueden verse en [ASS] y [ARS]. También fijaremos notaciones a utilizar en este trabajo.

1.1. Álgebras y módulos.

Recordemos que dado un cuerpo k, una k-***álgebra*** (asociativa, con unidad) A es un anillo A con elemento identidad $1 \neq 0$ tal que A posee una estructura de k-espacio vectorial que es compatible con la multiplicación del anillo, esto es, $\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$ para todo $\lambda \in k$ y $a, b \in A$. Una k-álgebra A se dice de dimensión finita si la dimensión $\dim_k A$ del k-espacio vectorial A es finita. En todo el trabajo A denotará una k-álgebra de dimensión finita.

Dada un álgebra A, denotamos con A^{op} al ***álgebra opuesta*** de A, que es el álgebra que coincide con A como espacio vectorial, donde la multiplicación $*$ está dada por $a*b = ba$. Los módulos a izquierda sobre A coinciden con los módulos a derecha sobre A^{op}, y dado M en mod A, $\mathrm{Hom}_k(M, k)$ es un A^{op} - módulo poniendo $(af)(x) = f(xa)$.

Sea A un álgebra. Un A-***módulo*** a derecha M es un par $(M, \cdot)$ donde M es un k-espacio vectorial y $\cdot : M \times A \to M$, $(m, a) \mapsto m \cdot a$, es una operación binaria que verifica las siguientes condiciones:

(a) $(x + y)a = xa + ya$;

(b) $x(a+b) = xa + xb$;

(c) $x(ab) = (xa)b$;

(d) $x1 = x$;

(e) $(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda$;
para elementos arbitrarios x, y en M, a, b en A y λ en k.

La definición de A-módulo a izquierda es análoga. A veces escribiremos $M_A({}_AM)$ para indicar que M es un A-módulo a derecha (izquierda).

M_A se dice de ***dimensión finita*** si $\dim_k M$ es finita y se dice que está generado por los elementos $m_1, m_2, \cdots, m_s$ de M si todo elemento m de M tiene la forma $m = m_1a_1 + \cdots + m_sa_s$ para algunos elementos $a_1, \cdots, a_s$ de A. Además, M_A se dice ***finitamente generado*** si está generado por un subconjunto finito de M.

Denotaremos con mod A a la categoría de todos los A-módulos a derecha finitamente generados. Si A es un álgebra de dimensión finita la noción de A-módulo de dimensión finita coincide con la de A-módulo finitamente generado. A lo largo de toda la tesis cada vez que se diga un A-módulo significará un A-módulo a derecha finitamente generado a menos que se indique lo contrario.

Un A-módulo se dice ***indescomponible*** si M es no nulo y no posee una descomposición de la forma $M = N \oplus L$, con N y L A-módulos no nulos.
Sabemos que todo A-módulo M puede descomponerse de manera única a menos de isomorfismos como $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, donde $M_1, \cdots, M_m$ son A - submódulos indescomponibles de M. En particular se verifica el siguiente resultado.

Proposición 1.1. *Sea A una k- álgebra de dimensión finita y $e_1, \cdots, e_n$ un conjunto de elementos idempotentes, ortogonales dos a dos y primitivos de A con $1_A = e_1 + \cdots + e_n$. Entonces existe una descomposición $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ en suma directa de A-módulos a derecha proyectivos indescomponibles. Además, todo A-módulo a derecha proyectivo indescomponible es isomorfo a e_iA para algún $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

El ***radical de Jacobson*** rad A del álgebra A es la intersección de todos los ideales a derecha maximales de A. Dado M un A-módulo de A, el ***radical de Jacobson*** rad M

del A-módulo M es la intersección de todos los submódulos maximales de M. Observemos que el radical rad A del A-módulo A coincide con el radical rad A del álgebra A. Además, para cualquier A-módulo M de A se verifica que rad $M = M \operatorname{rad} A$.

A cada módulo no nulo M en mod A se le asignan dos A-módulos semisimples

top $M = M/\operatorname{rad} M$ llamado el ***top de M*** y

soc $M = \sum\limits_{S \in \mathcal{S}_M} S$ donde $\mathcal{S}_M$ es el conjunto de todos los A - submódulos simples de M, llamado el ***zócalo*** de M.

Recordemos que un A-módulo L se dice ***libre*** si es de la forma $L \cong A^r$. Además, un A-módulo se dice ***proyectivo*** si es un sumando directo de un A-módulo libre.

Se prueba que, si P es un A-módulo proyectivo indescomponible, top P es un A-módulo simple, o sea, P posee un único submódulo maximal.

Se puede demostrar que todo módulo M de mod A posee una cubierta proyectiva $P = P_0(M)$, donde ésta se define de la siguiente manera:

Un A - epimorfismo $h : M \to N$ en mod A es ***minimal*** si $\operatorname{Ker} h$ es superfluo en M, es decir, $\operatorname{Ker} h + X = M$ implica $X = M$ para todo submódulo X de M. Un epimorfismo $h : P \to M$ en mod A es llamado ***cubierta proyectiva*** de M si P es un A-módulo y h es un epimorfismo minimal.

También puede demostrarse que todo módulo L de mod A posee una envolvente inyectiva $I = I_0(L)$, que se define de la siguiente manera:

Un monomorfismo de A-módulos $u : L \to M$ en mod A es ***minimal*** si todo submódulo no nulo X de M tiene intersección no nula con $\operatorname{Im} u$. Un monomorfismo $u : L \to E$ en mod A es llamado una ***envolvente inyectiva*** de L si E es un módulo inyectivo y u es un monomorfismo minimal.

Sean A y B dos álgebras. Un $A - B -$ ***bimódulo*** ${}_AM_B$ es una terna $(M, *, \cdot)$ donde ${}_AM = (M, *)$ es A-módulo a izquierda, $M_B = (M, \cdot)$ es B-módulo a derecha, y $(a*m)\cdot b = a*(m \cdot b)$ para elementos arbitrarios m en M, a en A, b en B.

Para un $A-B-$bimódulo ${}_AM_B$ y X en Mod B, el k-espacio vectorial $\operatorname{Hom}_B({}_AM_B, X_B)$ de todos los homomorfismos de B-módulos de M_B en X_B tiene estructura de A-módulo a derecha con respecto a la multiplicación $(f, a) \mapsto fa$ dada por $(fa)(m) = f(am)$. Se tiene entonces un funtor covariante $\operatorname{Hom}_B({}_AM_B, -) : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$ que al B-módulo X le asocia el A-módulo $\operatorname{Hom}_B(M_B, X_B)$.

El funtor contravariante $\mathrm{Hom}_B(-,{}_A M_B) : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A^{op}$ se define análogamente.

Dado un $A-B-$bimódulo ${}_AM_B$, los funtores covariantes producto tensorial

$(-) \otimes_A M_B : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ B, \quad {}_AM \otimes_B (-) : \mathrm{Mod}\ B^{op} \to \mathrm{Mod}\ A^{op}$

se definen asociando a un A-módulo X y a un B-módulo Y el producto tensorial $X \otimes_A M_B$ y ${}_AM \otimes_B Y$ con la estructura natural de B-módulo a derecha y de A-módulo a izquierda, respectivamente.

Se tiene un isomorfismo $\theta : \mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M_B, Z_B) \to Hom_A(X_A, Hom_B({}_AM_B, Z_B))$ definido por $[(\theta(f))(x)](m) = f(x \otimes m)$ para f en $\mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M_B, Z_B)$, x en X, m en M.

El funtor $D = \mathrm{Hom}_k(-,k) : \mathrm{mod}\ A \to \mathrm{mod}\ A^{op}$ define una dualidad entre las categorías $\mathrm{mod}\ A$ y $\mathrm{mod}\ A^{op}$, esto es, el funtor contravariante D es pleno, fiel y denso. Esta dualidad es llamada la ***dualidad estándar***.

Proposición 1.2. *Sea A un álgebra y D la dualidad estándar entre* $\mathrm{mod}\ A$ *y* $\mathrm{mod}\ A^{op}$. *Entonces:*

(i) E en $\mathrm{mod}\ A$ *es inyectivo si y sólo si $D(E)$ en* $\mathrm{mod}\ A^{op}$ *es proyectivo.*

(ii) P de $\mathrm{mod}\ A$ *es proyectivo si y sólo si $D(P)$ en* $\mathrm{mod}\ A^{op}$ *es inyectivo.*

(iii) S de $\mathrm{mod}\ A$ *es simple si y sólo si $D(S)$ en* $\mathrm{mod}\ A^{op}$ *es simple.*

(iv) M de $\mathrm{mod}\ A$ *es semisimple si y sólo si $D(M)$ en* $\mathrm{mod}\ A^{op}$ *es semisimple.*

(v) Para todo módulo no nulo M en $\mathrm{mod}\ A$, *se tiene que* $D(\mathrm{top}\ M) \cong \mathrm{soc}(D(M))$ *y* $D(\mathrm{soc}(M)) \cong \mathrm{top}(D(M))$.

Observación 1.3. Las afirmaciones (i), (ii), (iii) y (iv) en la proposición anterior son consecuencia inmediata de que D es una dualidad.

Recordamos que un álgebra A se dice ***indescomponible*** si A no puede descomponerse como producto directo de dos álgebras.

Un álgebra A se dice ***básica*** si en una descomposición de A como suma de módulos proyectivos indescomponibles, $A = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i^{r_i}$ con $P_i \not\cong P_j$ si $i \neq j$, se tiene que $r_i = 1$ para todo i.

Sea A un álgebra con un conjunto completo $\{e_1, \cdots, e_r\}$ de elementos primitivos, idempotentes y ortogonales dos a dos. Entonces $A^b = e_A A e_A$ es un álgebra básica y se llama un ***álgebra básica asociada a A***, donde $e_A = e_{j_1} + \cdots + e_{j_\alpha}$ y $e_{j_1}, \cdots, e_{j_\alpha}$ son elegidos tal que $e_{j_i}A \ncong e_{j_t}A$ si $i \neq t$ y cada módulo e_sA es isomorfo a uno de los módulos $e_{j_1}A, \cdots, e_{j_\alpha}A$. Además $A^b \cong \mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{\alpha} e_{j_i}A\right)$, y es única amenos de isomorfismos.

Definimos el álgebra ***extensión trivial*** $T(A) = A \ltimes DA$ de A por $DA = \mathrm{Hom}_k(A, k)$, como el k-espacio vectorial $A \bigoplus DA$ con la multiplicación dada por $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$, para $a, b \in A$ y $f, g \in DA$.

Dos álgebras A y B se dicen ***Morita equivalentes*** si las categorías $Mod\,A$ y $Mod\,B$ son equivalentes, y a un funtor $F : Mod\,A \to Mod\,B$ que define tal equivalencia se lo denomina ***equivalencia de Morita***. En el caso en que A y B sean álgebras de dimensión finita, esto es equivalente a decir que las categorías mod A y mod B son equivalentes.

Sean A y B dos álgebras de dimensión finita. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) A y B son Morita equivalentes si, y sólo si $B \cong \mathrm{End}_A(P)$, con P un progenerador de mod A (esto es, P es proyectivo y para cualquier módulo M en mod A existe un epimorfismo de P^n en M, para algún entero positivo n).

(ii) A es Morita equivalente a su álgebra básica A^b.

(iii) A y B son Morita equivalentes si, y sólo si A^{op} y B^{op} son Morita equivalentes.

1.2. Álgebras de caminos.

Un ***carcaj*** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuádrupla que consiste en dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos son llamados ***puntos*** o ***vértices***) y Q_1 (cuyos elementos son llamados ***flechas***), y dos funciones s, t: $Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su ***origen*** $s(\alpha) \in Q_0$ y su ***término*** $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente. Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es usualmente denotado por $Q = (Q_0, Q_1)$ o simplemente por Q. Un carcaj Q se dice ***finito*** si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos. Todos los carcajs considerados en este trabajo son finitos, por lo que la palabra *carcaj* significará siempre *carcaj finito*. El grafo $\overline{Q}$ asociado al carcaj

Q se obtiene quitando la orientación a las flechas del carcaj. Un carcaj Q se dice ***conexo*** si $\overline{Q}$ es un grafo conexo.

Un camino en el carcaj Q es una secuencia de flechas $p = \alpha_l \cdots \alpha_1$ con $s(\alpha_{t+1}) = t(\alpha_t)$ para $1 \leq t < l$, o el símbolo e_i, para $i \in Q_0$. Los caminos e_i se llaman ***caminos triviales*** y definimos $s(e_i) = t(e_i) = i$. Además decimos que un camino trivial tiene longitud 0. Para un camino no trivial $p = \alpha_l \cdots \alpha_1$ definimos $s(p) = s(\alpha_1)$ y $t(p) = t(\alpha_l)$ y decimos que la longitud de p es l. Si $s(p) = t(p)$, entonces p se denomina ***ciclo orientado***. Si además $l(p) = 1$ se dice que p es un ***lazo***.

Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un carcaj finito y k un cuerpo. El ***álgebra de caminos*** kQ de Q sobre k es la k-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de todos los caminos de longitud $\ell \geq 0$ en Q y el producto de dos vectores de la base se define de la siguiente manera:
Para un camino trivial e_i y q un camino de la base tenemos

$$e_i.q = \begin{cases} q & \text{si } t(q) = i \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si p, q son dos caminos de la base, con p no trivial, tenemos

$$p.q = \begin{cases} pq & \text{si } t(q) = s(p) \text{ y } p \text{ es no trivial} \\ p & \text{si } q = e_{s(p)} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde pq indica la concatenación de los caminos p y q.

Proposición 1.4. *Sea Q un carcaj. El elemento $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$ es el elemento unidad de kQ y el conjunto $\{e_i \,/\, i \in Q_0\}$ de todos los caminos triviales es un conjunto completo de elementos idempotentes ortogonales dos a dos y primitivos de kQ.*

Sea $A = kQ$ un álgebra de caminos. Para cada vértice i en Q_0, notaremos con S_i al A-módulo simple asociado a i, y $P_i = P_0(S_i)$ e $I_i = I_0(S_i)$ denotan la cubierta proyectiva y la cápsula inyectiva de S_i, respectivamente. Así, si e_i es el elemento idempotente de A correspondiente al vértice i de Q, se tiene que $P_i = e_i A$ e $I_i = D(Ae_i)$.

Lema 1.5. *Sea Q un carcaj y kQ su álgebra de caminos. Entonces:*

(i) kQ es un álgebra asociativa.

(ii) kQ es de dimensión finita si, y sólo si, Q es finito y acíclico.

(iii) Si Q es finito, entonces kQ es indescomponible si, y sólo si, Q es conexo.

(iv) Si Q es finito, conexo y acíclico, entonces kQ es una k-álgebra básica.

Sea Q un carcaj conexo. El ideal bilátero del álgebra de caminos kQ generado por las flechas de Q es llamado el ***ideal de las flechas*** de kQ y denotado por R_Q. Un ideal bilátero $\mathcal{I}$ de kQ se dice ***admisible*** si existe $m \geq 2$ que verifica $R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$.

Lema 1.6. *Sea Q un carcaj, k un cuerpo, e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de kQ. Entonces $kQ/\mathcal{I}$ es una k-álgebra de dimensión finita.*

Sea Q un carcaj. Una ***relación*** en Q es una combinación k - lineal $\varrho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i$ de caminos de longitud mayor o igual a 2 que tienen el mismo inicio y el mismo fin.

Lema 1.7. *Sea Q un carcaj, k un cuerpo, e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de kQ. Entonces $\mathcal{I}$ está generado por un número finito de relaciones $\varrho_1, ..., \varrho_r$ de kQ.*

Si $(\varrho_j)_{j\in J}$ es un conjunto de relaciones de un carcaj Q tal que el ideal $\langle\, \varrho_j, j \in J \,\rangle$ es admisible, se dice que el carcaj está sujeto a las relaciones $\varrho_j = 0$ para todo $j \in J$.

El siguiente resultado muestra la importancia del concepto de álgebra de caminos, pues da una descripción de toda álgebra como producto directo de álgebras equivalentes a álgebras que son cocientes admisibles de álgebras de caminos.

Teorema 1.8. (Teorema de P. Gabriel) Sea A una k-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, básica e indescomponible. Entonces A es isomorfa a un cociente de un álgebra de caminos sobre un ideal admisible, es decir $A \cong kQ/I$, donde Q es un carcaj e I un ideal admisible de A. El par (Q, I) se llama una ***presentación*** del álgebra A.

Sea $A \cong kQ/I$, con Q un carcaj e I un ideal admisible de kQ. Indicaremos con $\overline{x}$ la clase del elemento x de kQ en A. Un camino p en kQ se dice ***maximal*** en A si $\overline{p} \neq 0$ y $\overline{\alpha p} = 0 = \overline{p\alpha}$ para toda $\alpha \in Q_1(A)$.

Lema 1.9. *Sea Q un carcaj, k un cuerpo, e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de kQ. Entonces:*

(i) $kQ/\mathcal{I}$ *es un álgebra básica.*

ii) Si Q *es conexo entonces* $kQ/\mathcal{I}$ *es un álgebra indescomponible.*

Capítulo 2

Álgebras Frobenius y simétricas.

Las álgebras Frobenius fueron definidas y caracterizadas por Frobenius en [Fro1] y [Fro2]. En este capítulo presentaremos la definición y caracterizaciones dadas en el desarrollo clásico, proporcionando demostraciones alternativas a las originales. Una de estas caracterizaciones es la que se encuentra como definición de álgebra Frobenius en la mayoría de los textos actuales.

Comenzamos explicando que las representaciones de un álgebra se pueden interpretar como módulos sobre la misma. Las representaciones regulares a derecha e izquierda del álgebra A son las que corresponden a los A-módulos ${}_AA$ y ${}_A(DA)$ respectivamente. Un álgebra se dice Frobenius cuando estas representaciones son equivalentes.

En el enfoque clásico se presenta la noción de representación a partir de las constantes de estructura del álgebra. Éstas dependen de la elección de una base β de la misma y se prueba que A es Frobenius cuando existe una matriz de cierto tipo ("parastrófica") inversible. En [SY] se da una demostración de este hecho.

Nosotros presentamos aquí un enfoque diferente, mostrando un paralelismo entre la teoría clásica y la actual, utilizando la correspondencia entre transformaciones lineales y matrices. Elegida la base β de A, sea β^* su base dual en DA. La correspondencia que a una transformación lineal de A en DA le asigna su matriz con respecto a las bases β y β^* induce una correspondencia entre homomorfismos de A-módulos a izquierda de A en DA y matrices parastróficas. Esta correspondencia permite entender claramente los distintos aspectos de los dos enfoques.

Una importante subfamilia de las álgebras Frobenius es la de las álgebras simétricas.

En este capítulo estudiaremos estas álgebras y probaremos que las extensiones triviales son ejemplos de las mismas. Finalmente daremos ejemplos de las nociones y resultados estudiados en este capítulo, ilustrando los distintos lenguajes utilizados.

2.1. Representaciones regulares de un álgebra.

En todo el capítulo notaremos con $M_m(k)$ al anillo de matrices cuadradas de orden m con coeficientes en el cuerpo k, y $GL_m(k)$ al grupo lineal de las matrices cuadradas de orden m que son inversibles.

Definición 2.1. Llamamos ***representación*** de la k-álgebra A a un homomorfismo de k-álgebras $F : A \to M_m(k)$, con $m \geq 1$. El entero m es llamado la ***dimensión*** de la representación. Además, diremos que dos representaciones $F : A \to M_m(k)$ y $G : A \to M_m(k)$ de la k-álgebra A son ***equivalentes*** si existe una matriz $\mathrm{C} \in GL_m(k)$ tal que $F(a) = CG(a)C^{-1}$ para todo $a \in A$.

Nos interesa dar una interpretación de las representaciones de un álgebra a través de los módulos sobre la misma.

Veamos que a todo A-módulo a izquierda finitamente generado ${}_AM$ le corresponde una representación del álgebra A. En efecto:

Dado un k-espacio vectorial M, con $\dim_k M = m < \infty$, una estructura de A-módulo a izquierda sobre M está dada por un homomorfismo de anillos $A \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_k(M)$ de A en el anillo de endomorfismos de M. La estructura de A-módulo en M está dada por: $am = \varphi(a)(m)$ para elementos a de A y m de M.
Fijada una base β_M en M, y considerando el isomorfismo natural $\varepsilon : \mathrm{End}_k(M) \longrightarrow M_m(k)$ que a un endomorfismo f de M le asocia su matriz $[f]_{\beta_M}$ en la base β_M se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "F_M"'] & \mathrm{End}_k(M) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & M_m(k) \end{tikzcd} \qquad (\bigstar)$$

donde $F_M = \varepsilon \circ \varphi$. Entonces F_M es una representación del álgebra A ya que ε y φ son homomorfismos de k-álgebras.
De esta manera, fijada una base β_M del espacio vectorial M se obtiene una representación de dimensión m del álgebra A. Además, la elección de bases diferentes de M induce representaciones equivalentes de A.

Recíprocamente, a toda representación del álgebra le corresponde un A-módulo a izquierda de la siguiente manera.

A una representación $F : A \to M_m(k)$ le asignamos la estructura de A-módulo a izquierda en el k-espacio vectorial k^m definida por:
$ax = F(a)x$ para todo $a \in A, x \in k^m$.
Esta correspondencia transforma representaciones equivalentes en A-módulos isomorfos.
Los resultados anteriores pueden resumirse en la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sea A una k-álgebra de dimensión finita. Las correspondencias arriba definidas establecen biyecciones (una inversa de la otra) entre las clases de equivalencia de representaciones de dimensión m de la k - álgebra A y las clases de isomorfismo de A-módulos a izquierda de dimensión m.*

A continuación vamos a describir las representaciones que se obtienen al considerar los A-módulos ${}_AA$ y ${}_A(DA)$.

Consideremos $M = {}_AA$ y $\beta = \{a_1, ..., a_n\}$ una base de A como k-espacio vectorial. En el diagrama ($\bigstar$) se observa que $F_A : A \to M_m(k)$ es la representación que a cada elemento $a \in A$ le asigna la matriz $[a.]_\beta$ que corresponde a la multiplicación a izquierda por el elemento a.

Consideremos ahora $M = {}_A(DA)$ y β^* la base dual de β en DA. Observemos primero que un A-módulo a derecha está dado por un homomorfismo de anillos $A^{op} \xrightarrow{\psi} \mathrm{End}_k({}_AM)$ o equivalentemente $A \xrightarrow{\psi} (\mathrm{End}_k({}_AM))^{op} \simeq \mathrm{End}_k({}_A(D(M_A)))$.
Tomando en ${}_AM = {}_A(DA_A)$ la base β^* dual de la base $\beta = \{a_1, ..., a_n\}$ elegida de A obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr] & \mathrm{End}_k(A_A) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\varepsilon_\beta"] & \mathrm{End}_k({}_A(D(A_A))) \arrow[dd, "\varepsilon_{\beta^*}"] \\
 & M_n(k) \arrow[dr, "t"] & \\
 & & M_n(k)
\end{tikzcd}$$

donde t es la función traspuesta.

Como la estructura de ${}_AD(A_A)$ está dada por la composición $D \circ \psi$ resulta que $F_{DA} : A \to M_m(k)$ es la representación que a cada elemento $a \in A$ le asigna la matriz $([.a]_\beta)^t$ que corresponde a la multiplicación a derecha por el elemento a.
Las representaciones F_A y F_{DA} así obtenidas coinciden con las representaciones regulares definidas por Frobenius en [Fro1] a partir de las constantes de estructura de un álgebra como explicaremos a continuación.

Sea A una k-álgebra de dimensión finita, con $\dim_k A = n$ y fijamos $\beta = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ una base de A como k-espacio vectorial.
Se tiene entonces que

$$a_j a_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} a_i, \text{ donde } \alpha_{ijk} \in k \qquad\qquad \text{para } i, j, k \in \{1, ..., n\}$$

Las constantes α_{ijk} son llamadas las ***constantes de estructura*** asociadas al álgebra A, con respecto a la base $\beta = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Además, escribimos $1_A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, con $\lambda_j \in k$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Observación 2.3. Si $\dim_k A = n$, se tienen entonces n^3 constantes de estructura asociadas a A.

Observación 2.4. Las constantes de estructura asociadas al álgebra opuesta de A, A^{op}, están dadas por

$$\alpha^{op}_{ijk} = \alpha_{ikj}$$

La propiedad asociativa del álgebra A y el hecho de que $1_A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, con $\lambda_j \in$

k para todo $j \in \{1, ..., n\}$ es neutro a izquierda y derecha se traducen en las igualdades del siguiente lema.

Lema 2.5. [*SY, Lemma I.1.2.*] *Con las notaciones anteriores, se verifica que:*

(i) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}\alpha_{hil} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl}\alpha_{hji}$ *para todos* $j, k, h, l \in \{1, ..., n\}$

(ii) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ijk} = \delta_{ik}$ *y* $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ikj} = \delta_{ik}$ *para todos* $i, k \in \{1, ..., n\}$, *donde* δ_{ik} *es la delta de Kronecker.*

Consideremos las matrices

$L(a_j) = [L(a_j)_{ik}] = [\alpha_{ijk}]_{ik} \in M_m(k)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$,

$R(a_j) = [R(a_j)_{ik}] = [\alpha_{ikj}]_{ik} \in M_m(k)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Estas matrices representan las transformaciones lineales de A en A que asignan a un elemento $a \in A$ el producto $a_j a$ (y respectivamente aa_j) que corresponde por la multiplicación a izquierda (derecha) por el elemento a_j de la base β.

Tenemos así la función $L : \beta \to M_n(k)$ que se extiende a una única transformación lineal $L : A \to M_n(k)$. Resulta que $L(a)$ es la matriz que representa a la multiplicación a izquierda por el elemento a de A. Esto es, $L = F_A$.

En forma análoga, $R : \beta \to M_n(k)$ se extiende a una única transformación lineal $R : A \to M_n(k)$ y componiendo con la función traspuesta tenemos que $R^t(a) = (R(a))^t$ es la matriz que representa a la multiplicación a derecha por el elemento a de A. Esto es, $R^t = F_{DA}$.

Vemos así que L y R^t son representaciones de la k-álgebra A. Este resultado fue demostrado originalmente de manera directa utilizando la definición de representación [SY, Lemma I.2.3].

Las transformaciones lineales L y R dependen del álgebra A y de la base β elegida. Cuando sea necesario explicitaremos este hecho escribiendo L_β^A y R_β^A en lugar de L y R.

Observación 2.6. R es una representación del álgebra A^{op} ya que $R_\beta^A = L_\beta^{A^{op}}$.

Definición 2.7. Las representaciones L y R^t son llamadas la ***primer (izquierda)*** y ***segunda (derecha) representación regular*** del álgebra A sobre k, y están definidas a menos de equivalencia.

Definición 2.8. Una k-álgebra de dimensión finita A se dice ***álgebra Frobenius*** si las representaciones L y R^t son equivalentes.

Considerando la interpretación de las representaciones de un álgebra a través de los módulos sobre la misma, se tiene la siguiente caracterización de las álgebras Frobenius.

Proposición 2.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un álgebra A de dimensión finita:*

(i) A es un álgebra Frobenius.

(ii) Los A-módulos a izquierda ${}_AA$ y ${}_A(DA)$ son isomorfos.

(iii) Los A-módulos a derecha A_A y $(DA)_A$ son isomorfos.

Demostración. Supongamos que A es un álgebra Frobenius. Por definición, las representaciones L y R^t son equivalentes. Sabemos que a la representación L le corresponde el A-módulo ${}_AA$ y a la representación R^t el A-módulo ${}_A(DA)$.
Entonces ${}_AA$ y ${}_A(DA)$ son isomorfos por Proposición 2.2.
Recíprocamente, si ${}_AA$ y ${}_A(DA)$ son isomorfos se tiene por Proposición 2.2 que sus representaciones asociadas son equivalentes. Esto es, las representaciones L y R^t son equivalentes. Por definición, A es Frobenius.
La equivalencia de las afirmaciones (ii) y (iii) es consecuencia inmediatamente de aplicar el funtor D al esquema ${}_AA \xrightarrow[\cong]{\varphi} {}_A(DA)$. □

Actualmente las caracterizaciones dadas en los items (ii) y (iii) son la que se utilizan para definir álgebra Frobenius.

2.2. Álgebras autoinyectivas

Definición 2.10. Se dice que un álgebra A es ***autoinyectiva*** si A_A es un módulo inyectivo.

Ejemplo 2.11. Toda álgebra Frobenius es un álgebra autoinyectiva, ya que si A es un álgebra Frobenius, sabemos por Proposición 2.9 que A_A es isomorfo a $(D_AA)_A$, que es un A-módulo inyectivo.

Además, como consecuencia inmediata de la aplicación de la dualidad standard $D : mod\, A \to mod\, A^{op}$ se tiene la siguiente caracterización de las álgebras autoinyectivas.

Proposición 2.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es autoinyectiva.

(ii) Un A-módulo es proyectivo si y sólo si es inyectivo.

(iii) A^{op} es autoinyectiva.

Proposición 2.13. *Si A es un álgebra autoinyectiva básica entonces A es un álgebra Frobenius.*

Demostración. Sabemos que existe un conjunto completo $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de elementos idempotentes primitivos y ortogonales dos a dos de A tal que $1_A = e_1+e_2+...+e_n$ y así A_A puede descomponerse en suma directa $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus ... \oplus e_nA$, con $\{e_1A, e_2A, ..., e_nA\}$ un conjunto completo de A-módulos proyectivos indescomponibles, que son no isomorfos dos a dos.
Entonces, $D(Ae_1), D(Ae_2), ..., D(Ae_n)$ forman un conjunto completo de A-módulos inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos, con $(D(A))_A = D(_AA) \cong D(Ae_1) \oplus D(Ae_2) \oplus ... \oplus D(Ae_n)$. Como A_A es un A-módulo inyectivo por hipótesis, entonces $e_1A, e_2A, ..., e_nA$ forman un conjunto completo de A-módulos inyectivos indescomponibles, que son no isomorfos dos a dos. Luego existe un isomorfismo $A_A \to (DA)_A$ y así A es un álgebra Frobenius, como queríamos demostrar. $\square$

Como consecuencia inmediata, y teniendo en cuenta el Lema 1.9 inciso (a) tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.14. *Sea Q un carcaj finito, k un cuerpo, I un ideal admisible del álgebra de caminos kQ, y $A = kQ/I$. Si A es un álgebra autoinyectiva entonces A es un álgebra Frobenius.*

2.3. Caracterizaciones de las álgebras Frobenius y simétricas.

Recordemos que utilizando las constantes de estructura definimos las matrices
$L(a_j) = [L(a_j)_{ik}] = [\alpha_{ijk}]_{ik} \in M_m(k)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$
$R(a_j) = [R(a_j)_{ik}] = [\alpha_{ikj}]_{ik} \in M_m(k)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Consideremos ahora otras matrices que se definen también a partir de las constantes de estructura del álgebra y que proporcionan otra caracterización de las álgebras Frobenius.

Definición 2.15. Las matrices

$$P(\xi) = \sum_{h=1}^{n} \xi_h P_h \in M_n(k)$$

para cualquier elemento $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in k^n$, son llamadas ***matrices parastróficas***, donde las matrices P_h están dadas por

$$P_h = [P_h]_{ij} = [\alpha_{hij}]_{ij} \in M_n(k), \qquad \text{para todo } h \in \{1, ..., n\}.$$

Nuestro próximo objetivo es establecer una correspondencia entre el conjunto de A - homomorfismos definidos de ${}_AA$ en ${}_A(DA)$ y el conjunto de las matrices parastróficas.

Fijada la base $\beta = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ en A, y tomando su base dual $\beta^* = \{a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*\}$ en $D(A_A)$, tenemos el homomorfismo natural de k-espacios vectoriales

$$\omega = \omega_\beta : \mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A)) \to M_n(k)$$

que al elemento f de $\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A))$ le hace corresponder su matriz con respecto a las bases β, β^*; esto es $\omega(f) = [f]_{\beta,\beta^*}$.

Probaremos que Im (ω) es el subespacio de matrices parastróficas $\mathcal{P} = \langle P_1, P_2, ..., P_n \rangle$, de lo que resultará que la existencia de una matriz parastrófica inversible es equivalente a la existencia de un isomorfismo de A-módulos entre ${}_AA$ y ${}_A(DA_A)$.

Comenzamos describiendo, para cada $h \leq n$, un homomorfismo $p_h : {}_AA \to D(A_A)$ tal que $\omega(p_h) = P_h$.

Sea $p_h : A \to D(A)$ el homomorfismo de A-módulos a izquierda definido por $p_h(1_A) = a_h^* \in \beta^*$ para todo $h \in \{1, ..., n\}$.

Con esta definición se tiene que $\{p_h\}$, con $h \in \{1, ..., n\}$, es una base de $\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A))$.

En efecto:

El conjunto $\{p_h\}$, con $h \in \{1, ..., n\}$, es linealmente independiente ya que si tomamos escalares $k_1, ..., k_n$ en k tenemos que $\sum_{h=1}^{n} k_h p_h = 0$ implica que $\sum_{h=1}^{n} k_h p_h(1) = 0$.

De donde, por definición de los p_h, tenemos que $\sum_{h=1}^{n} k_h a_h^* = 0$. Y por la independencia lineal de las a_h^* concluimos que $k_h = 0$ para todo $h \in \{1, ..., n\}$.

Además, $\dim_k(\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A))) = n$. En efecto:

$\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_AM)$ y ${}_AM$ son isomorfos como A-módulos a izquierda para cualquier A-módulo ${}_AM$. Considerando ${}_AM = {}_A(D(A_A))$ se tiene que $\dim_k(\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A))) = \dim_k(DA) = \dim_k({}_AA) = n$. Luego $\{p_h\}$, con $h \in \{1, ..., n\}$, es base de $\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A))$.

Ahora veamos a qué es igual $\omega(p_h)$.

Tomando $a_i \in \beta$ arbitrario, se obtiene:

$p_h(a_i) = p_h(a_i \cdot 1_A) = a_i p_h(1_A) = a_i a_h^* = \sum_{j=1}^{n} c_j a_j^*$,

donde $c_j = (a_i a_h^*)(a_j) = a_h^*(a_j a_i) = a_h^* \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{lji} a_l \right) = \alpha_{hji}$.

Así, $p_h(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{hji} a_j^*$. De manera que los α_{hji} representan la i-ésima columna de $[p_h]_{\beta,\beta^*}$.

$$\text{Luego, } \omega(p_h) = [p_h]_{\beta,\beta^*} = \begin{bmatrix} \alpha_{h11} & \alpha_{h12} & \dots & \alpha_{h1n} \\ \alpha_{h21} & \alpha_{h22} & \dots & \alpha_{h2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{hn1} & \alpha_{hn2} & \dots & \alpha_{hnn} \end{bmatrix} = P_h \qquad (\diamond)$$

Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.16. *Sea $\omega_\beta : \mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_A(DA_A)) \to M_n(k)$ el homomorfismo de k-espacios vectoriales definido por $\omega_\beta(f) = [f]_{\beta,\beta^*}$, y sean las matrices P_h definidas arriba $((\diamond))$. Entonces se verifica que:*

(i) ω_β *es monomorfismo.*

(ii) $\omega_\beta(p_h) = P_h$ *para todo* $h \in \{1, \cdots, n\}$.

(iii) *Im* $(\omega) = \mathcal{P} = \langle P_1, P_2, ..., P_n \rangle$.

Demostración. (i) Es una consecuencia inmediata de la definición de ω_β e (ii) se demostró arriba.
(iii) De lo observado anteriormente, se tiene que $\dim_k (\mathcal{P} = \langle P_1, P_2, ..., P_n \rangle) = n$.
Además, sabemos que $\dim_k (\mathrm{Hom}_A({}_AA,{}_A(DA_A))) = n$.
Ahora, utilizando el hecho de que ω es inyectiva, y por cuestiones de dimensión, se tiene que ω es sobreyectiva. Así Im $(\omega) = \mathcal{P} = \langle P_1, P_2, ..., P_n \rangle$, como queríamos demostrar. □

Corolario 2.17. $\mathbb{P} = \{P_h\}$ *con* $h \in \{1, ..., n\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

De esta manera hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 2.18. *La transformación lineal* $\omega_\beta : \mathrm{Hom}_A({}_AA,{}_A(DA_A)) \to \mathcal{P} \subseteq M_n(k)$ *definida por* $\omega_\beta(f) = [f]_{\beta,\beta^*}$ *es un isomorfismo de* k*- espacios vectoriales.*

Observación 2.19. Si β y β' son bases de A y $(\beta)_{\beta'}$ es la matriz de cambio de base de β a β', las matrices $\omega_\beta(f)$ y $\omega_{\beta'}(f)$ satisfacen la relación

$$\omega_\beta(f) = (\beta)_{\beta'}\omega_{\beta'}(f)(\beta)_{\beta'}^{-1}.$$

Resulta en particular que la existencia de una matriz parastrófica inversible es independiente de la elección de la base.
Combinando la proposición anterior con la Proposición 2.9 obtenemos el siguiente resultado clásico.

Corolario 2.20. *A es álgebra Frobenius si y sólo si existe una matriz parastrófica inversible.*

Nos interesa caracterizar $\omega(f)$ en el caso en que el homomorfismo de A-módulos a izquierda $f : A \to DA$ sea un homomorfismo de A - bimódulos. Probaremos esta caracterización basándonos en el hecho de que todo homomorfismo de A-módulos a izquierda (derecha) $f :_A A \to_A (DA_A)$ $(f : A_A \to (D_AA)_A)$ es la multiplicación a derecha (izquierda) por un elemento φ de DA, que notaremos $.\varphi$ $(\varphi\,.)$.

Lema 2.21. *Los morfismos $\epsilon_l, \epsilon_r : DA \to M_n(k)$ que a $\varphi \in DA$ hacen corresponder la matriz de la multiplicación a izquierda por φ y la de la multiplicación a derecha por φ con respecto a las bases β, β^* respectivamente, verifican la siguiente propiedad:*

$$\epsilon_l(\varphi) = \epsilon_r^t(\varphi)$$

Esto es $[\varphi\, .\,]_{\beta,\beta^*} = [\,.\,\varphi]^t_{\beta,\beta^*}$.

Demostración. Recordemos que $\varphi \in DA$ es un homomorfismo de k-espacios vectoriales de A en k y que la multiplicación a izquierda por φ es un morfismo de A-módulos a derecha de A en $D({}_AA)$. Para $a, a' \in A$, vale que

$$(\varphi.a)(a') = \varphi(a.a').$$

En forma similar

$$(a.\varphi)(a') = \varphi(a'.a)$$

El elemento ij de $[\varphi\, .\,]_{\beta\beta^*}$ es el coeficiente de a_i^* en la expresión de $(\varphi.)a_j = \varphi.a_j$ como combinación lineal de la base β^*. Sabemos que este coeficiente es

$$(\varphi.a_j)(a_i) = \varphi(a_j.a_i).$$

Ahora bien, el elemento ij de $[\,.\,\varphi]_{\beta,\beta^*}$ es el coeficiente de a_i^* en la expresión de $(.\varphi)a_j = a_j\,.\varphi$ como combinación lineal de los elementos de la base β^*. Este coeficiente es

$$(a_j\,.\varphi)(a_i) = \varphi(a_i.a_j).$$

Como el elemento ij de una matriz es el coeficiente ji de la otra, una matriz es la traspuesta de la otra. □

Se desprende entonces que un homomorfismo de A-módulos a izquierda $f :_A A \to_A (DA_A)$ es homomorfismo de A - bimódulos si y sólo si $[\,.\,\varphi]_{\beta,\beta^*} = [\varphi\, .\,]_{\beta,\beta^*}$ con $\varphi = f(1)$ el correspondiente elemento en ${}_A(DA_A)$.
Llamando $\mathcal{SP}$ al subespacio de $\mathcal{P}$ formado por todas las matrices parastróficas simétricas, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.22. *El isomorfismo $\omega : \mathrm{Hom}_A({}_AA,{}_A(D(A_A)) \longrightarrow \mathcal{P}$ definido por $\omega(f) = [f]_{\beta,\beta^*}$ se restringe a un isomorfismo $\omega : \mathrm{Hom}_{A-A}({}_AA,{}_A(D(A_A)) \longrightarrow \mathcal{SP}$ de k-espacios vectoriales.*

Corolario 2.23. *Existe un isomorfismo de A - bimódulos de A en DA si y sólo si existe una matriz parastrófica inversible simétrica.*

La clase de álgebras que aparecen en el corolario anterior forman una familia muy importante llamada álgebras simétricas.

Definición 2.24. Sea A una k-álgebra de dimensión finita. A se dice ***simétrica*** si existe un isomorfismo de A - bimódulos de A en DA.

Observación 2.25. Como consecuencia del Corolario 2.23 se tiene que toda álgebra simétrica es álgebra Frobenius.

Con el propósito de establecer otra caracterización de las álgebras Frobenius comenzaremos estudiando la relación entre el núcleo de un elemento $\varphi \in DA$ y el del homomorfismo correspondiente $f = \varphi\,\textbf{.}$.

Proposición 2.26. *Sea $\varphi \in DA$, y f: $A_A \to D({}_AA)_A$ el homomorfismo definido como la multiplicación a izquierda por φ ($f = \varphi\textbf{.}$). Entonces:*

(i) Ker $f \subseteq$ Ker φ.

(ii) Dado un ideal a derecha I de A, se tiene que $I \subseteq$ Ker f si y sólo si $I \subset$ Ker φ.

(iii) Ker f *es la suma de todos los ideales a derecha de A contenidos en* Ker φ.

(iv) f es un isomorfismo si y sólo si Ker φ *no contiene ideales a derecha no nulos.*

(v) f es homomorfismo de A - bimódulos si y sólo si $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todo $a, b \in A$.

Demostración. (i) Sea $a \in$ Ker f. Entonces $f(a) = 0$. Así, $\varphi\textbf{.}a = 0$, la transformación lineal nula. De lo que resulta: $(\varphi\textbf{.}a)(a') = 0$ para todo $a' \in A$. En particular, tenemos que $(\varphi\textbf{.}a)(1_A) = \varphi(a \cdot 1_A) = \varphi(a) = 0$. Y así $a \in$ Ker φ.
(ii) Sea I un ideal de A. Si I $\subseteq$ Ker f se sigue de (i) que I $\subset$ Ker φ.
Recíprocamente, tomemos I $\subset$ Ker φ. Entonces $\varphi(a) = 0$ para todo elemento a de I.
Así, $0 = \varphi(a)a' = \varphi(aa') = (\varphi\textbf{.}a)(a')$ para todo elemento a' de A.
De aquí, $f(a) = \varphi\textbf{.}a = 0$ y así $a \in$ Ker f.
(iii) Es consecuencia de (ii) por ser Ker f un ideal a derecha.

(iv) Si f no es isomorfismo, f no es monomorfismo pues $\dim_k A = \dim_k DA$. Entonces existe $a \neq 0 \in A$ con $f(a) = 0$. Es decir, Ker f es un ideal no nulo contenido en Ker φ. Por lo tanto, Ker φ contiene un ideal no nulo.

Recíprocamente, supongamos que existe un ideal no nulo I $\subset$ Ker φ. Entonces existe $a \in I$ no nulo. Así, $aa' \in$ I para todo $a' \in A$, de donde $aa' \in$ Ker φ para todo $a' \in A$. Luego, por definición de f, se tiene que $f(a) = 0$ y por lo tanto f no es isomorfismo.

(v) Supongamos que f es homomorfismo de A - bimódulos.

Esto es $f(ab) = af(b) = f(a)b \quad$ para todos $a, b \in A$.

Así tenemos que $f(a \cdot 1) = a \cdot f(1) \quad$ para todo $a \in A$. Y de esta manera $f(a) = a \cdot f(1) \quad$ para todo $a \in A$.

Ahora, por la definición de f, obtenemos $\varphi.a = a.(\varphi.1) = a.\varphi$. Luego, tomando un elemento arbitrario b de A, resulta que $(\varphi.a)(b) = (a.\varphi)(b)$. De donde resulta que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para cualesquiera $a, b \in A$, como queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para elementos arbitrarios $a, b \in A$. Entonces $(\varphi.a)(b) = (a.\varphi)(b)$ para todo $b \in A$.

Y así, $\varphi.a = a.\varphi = a.(\varphi.1)$. De manera que $f(a) = a \cdot f(1) \quad$ para todo $a \in A$. Ahora, multiplicando por un elemento arbitrario b de A resulta que $f(a) \cdot b = a \cdot f(1) \cdot b = af(1b) = af(b)$, y así $f(ab) = af(b) \quad$ para elementos arbitrarios $a, b \in A$.

Luego hemos probado que f es homomorfismo de A - módulos a izquierda, y como por hipótesis es homomorfismo de A-módulos a derecha, se tiene que f es homomorfismo de A - bimódulos, como queríamos demostrar. $\square$

Lema 2.27. *Sea $\varphi \in DA$ que verifica $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$. Entonces:* Ker φ *no contiene ideales a derecha no nulos si y sólo si* Ker φ *no contiene ideales biláteros no nulos.*

Demostración. Si Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos, entonces Ker φ no contiene ideales biláteros no nulos.

Supongamos ahora que Ker φ no contiene ideales biláteros no nulos, y veamos que Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos.

Sea I un ideal a derecha contenido en Ker φ y sea $y \in I$. Entonces $y.a \in I$ para todo $a \in A$. Luego, $\varphi(y.a) = 0$ para todo $a \in A$. Como $\varphi(y.a) = \varphi(a.y)$ para todo $a \in A$ se tiene que $\varphi(a.y) = 0$ cualquiera sea $a \in A$.

Así, el ideal a izquierda $A.I$ es un ideal bilátero (por ser I ideal a derecha) contenido en Ker φ por lo observado anteriormente.

De lo supuesto resulta que $A.I = 0$, de donde surge que $I = 0$.

De esta manera Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos, como queríamos demostrar. $\square$

Dados V y W k-espacios vectoriales, existe un isomorfismo θ del k-espacio vectorial $\mathcal{BIL}(V \times W, k)$ de las formas bilineales de $V \times W$ en k en el k-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_k(V, W^*)$ de las transformaciones lineales de V en W^* dado por $\theta(\mathcal{B})(v) = \mathcal{B}(v, -)$, para $\mathcal{B} \in \mathcal{BIL}(V \times W, k)$ y $v \in V$.

Consideremos el caso $V = W = A$.

Recordemos que las afirmaciones

$(i)\, \mathcal{B}(a, -) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y

$(ii)\, \mathcal{B}(-, a) = 0 \Longrightarrow a = 0$

son equivalentes para todo $a \in A$ (ver [HK], pág. 359).

Recordemos también que:

- $\mathcal{B}$ es ***no degenerada*** si verifica las condiciones equivalentes (i) y (ii) anteriores.
- $\mathcal{B}$ es ***simétrica*** si $\mathcal{B}(a, b) = \mathcal{B}(b, a)$ para cualesquiera elementos a, b en A.

Finalmente, se dice que $\mathcal{B}$ es ***asociativa*** si $\mathcal{B}(ab, c) = \mathcal{B}(a, bc)$ para cualesquiera elementos a, b, c en A.

Se obtiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 2.28. *Sea $\theta : \mathcal{BIL}(A \times A, k) \to \mathrm{Hom}_k(A, DA)$ definido por $\theta(\mathcal{B})(v) = \mathcal{B}(v, -)$ para $\mathcal{B}$ en $\mathcal{BIL}(A \times A, k)$. Entonces:*

(i) $\theta(\mathcal{B})$ es homomorfismo de A-módulos a derecha si y sólo si $\mathcal{B}$ es una forma bilineal asociativa.

(ii) $\theta(\mathcal{B})$ es isomorfismo de A-módulos a derecha si y sólo si $\mathcal{B}$ es una forma bilineal asociativa no degenerada.

(iii) $\theta(\mathcal{B})$ *es isomorfismo de* A *- bimódulos si y sólo si* $\mathcal{B}$ *es una forma bilineal asociativa no degenerada simétrica.*

Demostración. (i) Supongamos que $\theta(\mathcal{B})$ es homomorfismo de A-módulos a derecha. Esto es, $\theta(\mathcal{B})(ab) = \theta(\mathcal{B})(a).b$, para cualesquiera a, b de A. Así, por definición de $\theta(\mathcal{B})$ tenemos que $\mathcal{B}(ab, -) = \mathcal{B}(a, -).b$. Es decir, $\mathcal{B}(ab, -)(a') = (\mathcal{B}(a, -).b)(a')$para todo a' de A. Con lo cual $\mathcal{B}(ab, a') = \mathcal{B}(a, ba')$ para todo a' de A.
Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{B}$ es asociativa.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B}$ es asociativa. Esto es, $\mathcal{B}(ab, a') = \mathcal{B}(a, ba')$, para cualesquiera a, b, a' de A. Equivalentemente, $\mathcal{B}(ab, -)(a') = \mathcal{B}(a, -)(ba')$ para a, b, a' elementos arbitrarios de A. De lo que resulta que $\mathcal{B}(ab, -)(a') = (\mathcal{B}(a, -).b)(a')$ si a, b, a' están en A. Así, utilizado la definición de θ tenemos que $\theta(\mathcal{B})(ab) = \theta(\mathcal{B})(a).b$ para todos a, b de A. Lo cual significa que $\theta(\mathcal{B})$ es homomorfismo de A-módulos a derecha.
(ii)
Resulta de (i) y del hecho que $\mathcal{B}$ es no degenerada si y sólo si $\theta(\mathcal{B})$ es inyectiva.
(iii)
Supongamos que $\theta(\mathcal{B})$ es isomorfismo de A - bimódulos. Por (i) y (ii) sabemos que $\mathcal{B}$ es asociativa y no degenerada. Veamos que es simétrica.
Por hipótesis, $\theta(\mathcal{B})(ab) = a.\theta(\mathcal{B})(b) = \theta(\mathcal{B})(a).b$. Así, teniendo en cuenta la estructura de A - bimódulo en A^* y tomando a' un elemento arbitrario de A se tiene que:
$\theta(\mathcal{B})(b)(aa') = \theta(\mathcal{B})(a)(ba')$. Es decir, $\mathcal{B}(b, a'a) = \mathcal{B}(a, ba')$ para cualquier elemento a' de A. En particular, para $a = 1$ se tiene que $\mathcal{B}(b, a) = \mathcal{B}(a, b)$ y así $\mathcal{B}$ resulta simétrica como queríamos demostrar.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B}$ es forma bilineal asociativa no degenerada simétrica. Sabemos por (i) y (ii) que $\theta(\mathcal{B})$ es isomorfismo de A-módulos a derecha. Resta probar que $\theta(\mathcal{B})$ es homomorfismo de A-módulos a izquierda.
Veamos que $\theta(\mathcal{B})(ab) = a.\theta(\mathcal{B})(b)$ para todos $a, b \in A$. En efecto:
Sea a' un elemento arbitrario de A. Entonces, $(a.\theta(\mathcal{B})(b))\,(a') = \theta(\mathcal{B})(b)(a'a) = \mathcal{B}(b, a'a) = \mathcal{B}(a'a, b) = \mathcal{B}(a', ab) = \mathcal{B}(ab, a') = \theta(\mathcal{B})(ab)(a')$, como queríamos demostrar. □

Observación 2.29. Se obtiene un resultado análogo al de la proposición anterior para A-módulos a izquierda al considerar $\theta'(\mathcal{B})(v) = \mathcal{B}(-, v)$.

Podemos resumir las propiedades vistas en esta sección en el siguiente teorema que caracteriza a las álgebras Frobenius.

Teorema 2.30. *Sea A una k-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es un álgebra Frobenius.

(b) Existe un isomorfismo $f : A_A \to (D_A A)_A$ de A-módulos a derecha.

(c) Existe una transformación lineal $\varphi : A \to k$ tal que $\operatorname{Ker} \varphi$ *no contiene ideales a derecha no nulos.*

(d) Existe una forma k - bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B} : A \times A \to k$.

(b') Existe un isomorfismo $f' :_A A \to {}_A(DA_A)$ de A- módulos a izquierda.

(c') Existe una transformación lineal $\varphi' : A \to k$ tal que $\operatorname{Ker} \varphi'$ *no contiene ideales a izquierda no nulos.*

(e) Existe una matriz parastrófica inversible $P(\xi)$ para alguna (toda) base de A.

Demostración. $(a) \iff (b)$

La equivalencia ha sido probada en la Proposición 2.9.

$(a) \iff (e)$

La equivalencia ha sido probada en el Corolario 2.20.

$(b) \iff (c)$

Sea $f : A_A \to (D_A A)_A$ un homomorfismo de A-módulos a derecha. Entonces puede escribirse como la multiplicación a izquierda por un elemento φ de DA. Luego, existe una transformación lineal $\varphi : A \to k$ que verifica, por la Proposición 2.26, que $\operatorname{Ker} \varphi$ no contiene ideales a derecha no nulos, pues f es isomorfismo.

Recíprocamente, supongamos que existe una transformación lineal $\varphi : A \to k$ tal que $\operatorname{Ker} \varphi$ no contiene ideales a derecha no nulos. Entonces, si consideramos el morfismo $f : A_A \to (D_A A)_A$ de A-módulos a derecha asociado a φ que corresponde a la multiplicación a izquierda por φ, tenemos por la Proposición 2.26 que f es un isomorfismo, pues

por hipótesis φ no contiene ideales a derecha no nulos.
$(b) \iff (d)$
La equivalencia ha sido probada en la Proposición 2.28.

□

Análogamente, obtenemos la siguiente caracterización de las álgebras simétricas.

Teorema 2.31. *Sea A una k-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es un álgebra simétrica.

(b) Existe una matriz parastrófica inversible simétrica $P(\xi)$ para alguna (toda) base de A.

(c) Existe una transformación lineal $\varphi: A \to k$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$ y cuyo núcleo no contiene ideales biláteros no nulos.

(d) Existe una forma k - bilineal asociativa no degenerada simétrica $\mathcal{B}: A \times A \to k$.

Demostración. $(a) \iff (b)$ ha sido demostrada en el Corolario 2.23.
$(a) \iff (c)$
Supongamos que A es un álgebra simétrica. Entonces, existe un isomorfismo f de A - bimódulos de A en DA. Como en particular f es isomorfismo de A-módulos a derecha, sabemos por el Teorema 2.30 que existe una transformación lineal $\varphi: A \to k$, con $f = \varphi_{\bullet}$ tal que Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos. Por la Proposición 2.26 tenemos que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$. Luego, por Lema 2.27, Ker φ no contiene ideales biláteros no nulos.
Recíprocamente, supongamos que existe una transformación lineal $\varphi: A \to k$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$ y cuyo núcleo no contiene ideales biláteros no nulos. Sabemos por Lema 2.27 que dicho núcleo no contiene ideales a derecha no nulos. Tomando $f = \varphi_{\bullet}$ se tiene por la Proposición 2.26 que f es isomorfismo de A - bimódulos.
$(a) \iff (d)$
La equivalencia ha sido probada en la Proposición 2.28 (iii). □

2.4. Ejemplos de álgebras Frobenius y simétricas.

En los siguientes ejemplos ilustraremos el uso de las caracterizaciones desarrolladas en la sección anterior para determinar si un álgebra dada es o no Frobenius (o, en particular, simétrica).

Ejemplo 2.32. Sea k un cuerpo, Q el carcaj

$$1\bullet \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\leftrightarrows}} \bullet 2$$

I el ideal admisible del álgebra de caminos kQ de Q sobre k generado por los caminos $\alpha\,\beta$, $\beta\,\alpha$ y $A = kQ/I$. Así definida, A es una k-álgebra de dimensión 4 con base $\beta = \{e_1, e_2, \overline{\alpha}, \overline{\beta}\}$, con $e_1 = \varepsilon_1 + I, e_2 = \varepsilon_2 + I, \overline{\alpha} = \alpha + I, \overline{\beta} = \beta + I$,
donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son los caminos triviales correspondientes a los vértices 1 y 2 respectivamente.

Recordemos que las constantes de estructura se calculan multiplicando dos a dos los elementos de la base elegida y expresando estos resultados como combinación lineal de la misma. Llamando $a_1 = e_1; a_2 = e_2;\ a_3 = \overline{\alpha}$ y $a_4 = \overline{\beta}$, tenemos
$[a_j.a_k]_\beta = (\alpha_{1jk}, \alpha_{2jk}, \alpha_{3jk}, \alpha_{4jk})$.

Así

$[a_1.a_1]_\beta = [a_1]_\beta = (1,0,0,0)$

$[a_1.a_2]_\beta = [0]_\beta = (0,0,0,0)$

$[a_1.a_3]_\beta = [0]_\beta = (0,0,0,0)$

$[a_1.a_4]_\beta = [a_4]_\beta = (0,0,0,1)$

$[a_2.a_1]_\beta = [0]_\beta = (0,0,0,0)$

$[a_2.a_2]_\beta = [a_2]_\beta = (0,1,0,0)$

$[a_2.a_3]_\beta = [a_3]_\beta = (0,0,1,0)$

$[a_2.a_4]_\beta = [0]_\beta = (0,0,0,0)$ (⋇)

$[a_3.a_1]_\beta = [a_3]_\beta = (0,0,1,0)$

$[a_3.a_2]_\beta = [0]_\beta = (0,0,0,0)$

$[a_3.a_3]_\beta = [0]_\beta = (0,0,0,0)$

$$
\begin{aligned}
[a_3.a_4]_\beta &= [0]_\beta = (0,0,0,0)\\
[a_4.a_1]_\beta &= [0]_\beta = (0,0,0,0)\\
[a_4.a_2]_\beta &= [a_4]_\beta = (0,0,0,1)\\
[a_4.a_3]_\beta &= [0]_\beta = (0,0,0,0)\\
[a_4.a_4]_\beta &= [0]_\beta = (0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

Estos vectores forman las columnas de las matrices $L(a_i)$:

Los cuatro primeros, las columnas de $L(a_1) = L(e_1)$, los cuatro siguientes, las columnas de $L(a_2) = L(e_2)$, etc.

Tenemos entonces

$$
L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; L(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
L(\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; L(\overline{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

De modo que la representación izquierda de A está dada por

$L : A \to M_4(k)$

$$
L(x) = x_1 L(e_1) + x_2 L(e_2) + x_3 L(\overline{\alpha}) + x_4 L(\overline{\beta}) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & x_1 \end{pmatrix}
$$

donde $x \in A, [x]_\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Las matrices $R(a_i)$ tienen como columnas las coordenadas de los vectores

$a_1.a_i$, $a_2.a_i$, $a_3.a_i$, $a_4.a_i$, obtenidos al multiplicar a derecha por a_i. Obtenemos así las filas de $R^t(a_i)$.

$$R^t(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^t(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R^t(\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^t(\overline{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la representación derecha de A está dada por

$R^t : A \to M_4(k)$

$$R^t(x) = x_1 R^t(e_1) + x_2 R^t(e_2) + x_3 R^t(\overline{\alpha}) + x_4 R^t(\overline{\beta}) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

donde $x \in A, [x]_\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Las i - ésimas coordenadas de los vectores en (⋇) permiten obtener las filas de la matriz P_i: las 4 primeras corresponden a la primer fila, las 4 siguientes a la segunda fila y así sucesivamente.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que la transformación lineal P viene dada por

$P : k^4 \to M_4(k)$

$$k_v = (k_1, k_2, k_3, k_4) \mapsto k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 + k_4 P_4 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & k_4 \\ 0 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veremos ahora si A es un álgebra Frobenius, determinando si existe una matriz parastrófica inversible para algún valor $k_v = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ de k^4.

det $P = -(k_3k_4)^2$, que es no nulo tomando valores de k_3 y k_4 no nulos. Así, tomando $k = (0, 0, 1, 1)$ se tiene que

$P(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz parastrófica inversible, y así A es un álgebra Frobenius.

Como además la condición $k_3 \neq 0$ hace imposible la existencia de una matriz parastrófica inversible simétrica, se tiene que A no es álgebra simétrica.

Se tiene además que:

• La forma bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B} : A \times A \to k$ está definida por $\mathcal{B}(a_i, a_j) = P_{ij}$, con a_i, a_j elementos de la base β; de donde $\mathcal{B}(x, y) = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_4y_2$ para elementos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de A.

• La transformación lineal $\varphi : A \to k$ asociada está definida mediante $\varphi(x) = \mathcal{B}(x, 1_A) = x_3 + x_4$, con $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$.

Además, Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos.

En efecto:

Ker $\varphi = \{k_v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3\overline{\alpha} - k_3\overline{\beta}\}$

Supongamos que $I \subseteq$ Ker φ. I ideal a derecha. Entonces, los elementos de I son de la forma $k_v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3\overline{\alpha} - k_3\overline{\beta}$.

Por ser I ideal a derecha, si $k_v \in I$, entonces $k_v\overline{\beta}$ también.

Luego $k_v\overline{\beta} = (k_1e_1 + k_2e_2 + k_3\overline{\alpha} - k_3\overline{\beta})\overline{\beta} = k_1\overline{\beta} \in I$. Por lo tanto $k_1 = 0$

También tenemos que, si $k_v \in I$, entonces k_ve_1 también.

Luego $k_ve_1 = (k_2e_2 + k_3\overline{\alpha} - k_3\overline{\beta})e_1 = k_3\overline{\alpha} \in I$. Así $k_3 = 0$

Análogamente, si $k_v \in I$, entonces $k_v\overline{\alpha}$ también.

Luego $k_v\overline{\alpha} = (k_2e_2)\overline{\alpha} = k_2\overline{\alpha} \in I$. De modo que $k_2 = 0$

De manera que $I = 0$

• El isomorfismo de A-módulos a derecha $\theta : A \to DA$ se calcula mediante

$\theta(x) = \theta_x$ con $\theta_x : A \to k$ tal que $\theta_x(y) = f(xy)$
De modo que, para elementos arbitrarios $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de A, se tiene que $\theta_x(y) = x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_4 + x_4y_2$.

En el **Ejemplo** 2.32 mostramos un álgebra Frobenius no simétrica. Daremos a continuación un ejemplo de álgebra simétrica, utilizando la equivalencia correspondiente a la existencia de una transformación lineal $\varphi : A \to k$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$ y cuyo núcleo no contiene ideales biláteros no nulos.

Ejemplo 2.33. Sea k un cuerpo, Q el carcaj

$$1\bullet \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \bullet 2 \qquad\qquad \text{con } I = \langle \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta \rangle$$

y consideremos $A = kQ/I$. Así definida, A es una k-álgebra de dimensión 6 con base $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\alpha}\overline{\beta}, \overline{\beta}\overline{\alpha}\}$.
Consideremos la transformación lineal $\varphi : A \to k$ definida mediante
$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{\beta}) = 0$
$\varphi(\overline{\alpha}\overline{\beta}) = \varphi(\overline{\beta}\overline{\alpha}) = 1$.
Entonces, Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos. En efecto:
Ker $\varphi = \{k_v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3\overline{\alpha} + k_4\overline{\beta} + k_5\overline{\alpha}\overline{\beta} - k_5\overline{\beta}\overline{\alpha}\}$
Supongamos que I es un ideal a derecha no nulo incluido en Ker φ. Veamos que $I = 0$.
Los elementos de I son de la forma $k_v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3\overline{\alpha} + k_4\overline{\beta} + k_5\overline{\alpha}\overline{\beta} - k_5\overline{\beta}\overline{\alpha}$.
Por ser I ideal a derecha, si $k_v \in I$, entonces $k_v\overline{\alpha}\overline{\beta} = k_2\overline{\alpha}\overline{\beta} \in I$. Luego, $k_2 = 0$.
$k_v\overline{\beta}\overline{\alpha} = k_1\overline{\beta}\overline{\alpha} \in I$. Entonces, $k_1 = 0$.
$k_v\overline{\beta} = k_3\overline{\alpha}\overline{\beta} \in I$. Así $k_3 = 0$.
$k_v\overline{\alpha} = k_4\overline{\beta}\overline{\alpha} \in I$. Y de esta manera $k_4 = 0$.
$k_ve_1 = -k_5\overline{\beta}\overline{\alpha} \in I$. De modo que $k_5 = 0$.
Por lo tanto, $I = 0$, como queríamos. De manera que φ es una transformación lineal que no contiene ideales no nulos en su núcleo.
Además, $\varphi(xy) = \varphi(yx)$. En efecto:
Si $[x]_{\mathfrak{B}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ y $[y]_{\mathfrak{B}} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ se tiene que $\varphi(xy) = x_3y_4\varphi(\overline{\alpha}\overline{\beta}) + x_4y_3\varphi(\overline{\beta}\overline{\alpha}) = x_3y_4 + x_4y_3 = y_3x_4 + y_4x_3 = y_3x_4\varphi(\overline{\alpha}\overline{\beta}) + y_4x_3\varphi(\overline{\beta}\overline{\alpha}) = \varphi(yx)$.
De esta manera hemos probado que A es un álgebra simétrica.

El siguiente ejemplo ilustra cómo determinar que un álgebra no es Frobenius.

Ejemplo 2.34. Sea k un cuerpo, Q el carcaj

$$1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$$

Entonces $A = kQ$ es una k-álgebra de dimensión 3 con base $B = \{e_1, e_2, \overline{\alpha}\}$.
Consideremos una transformación lineal arbitraria $\varphi : A \to k$ y probemos que existe un ideal a derecha no nulo incluido en Ker φ.
Sean $\varphi(e_1) = b_1; \varphi(e_2) = b_2; \varphi(\overline{\alpha}) = b_3$ con $b_1, b_2, b_3 \in k$.
Entonces Ker $\varphi = \{x = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3\overline{\alpha},$ con $k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0\}$.
Consideremos $I = \langle(b_3e_1 - b_1\overline{\alpha})\rangle$. Así, I es un ideal a derecha de A contenido en Ker φ.
Además, si $I = 0$ entonces Ker $\varphi = \langle(e_1, 0, \overline{\alpha})\rangle$ es un ideal a derecha no nulo de A.
De modo que A no es álgebra Frobenius.

En el siguiente ejemplo se demuestra que la extensión trivial $T(A)$ de un álgebra A es siempre una álgebra simétrica. A partir del estudio de la extensión trivial de un álgebra se pueden demostrar propiedades del álgebra original, y viceversa. En los capítulos 5 y 6 de esta tesis profundizaremos el estudio de estas álgebras.

Ejemplo 2.35. Extensión trivial $T(A) = A \ltimes D(A)$.
Definimos $\varphi : T(A) \longrightarrow k$ mediante $\varphi(a, f) = f(1)$. Así definida, resulta que:
• φ es k - lineal.
En efecto
$\varphi(x(a, f) + x'(b, g)) = \varphi(xa + x'b, xf + x'g)) = (xf + x'g)(1) = (xf)(1) + (x'g)(1) = xf(1) + x'g(1) = x\varphi(a, f) + x'\varphi(b, g)$.
• $\varphi((a, f)(b, g)) = \varphi((b, g)(a, f))$.
En efecto
$\varphi((a, f)(b, g)) = \varphi(ab, ag+fb) = (ag+fb)(1) = (ag)(1)+(fb)(1) = g(1\cdot a)+f(b\cdot 1) = g(a) + f(b) = f(b) + g(a) = f(1 \cdot b) + g(a \cdot 1) = (bf)(1)(ga)(1) = (bf + ga)(1) = \varphi(ba, bf + ga) = \varphi((b, g)(a, f))$
• Ker φ no contiene ideales biláteros no nulos.
En efecto
Sea I un ideal bilátero de $T(A)$ contenido en Ker φ.

Sea $x = (a, f) \in I$. Entonces $f(1) = 0$. Además,

$(a, f)(1, g) \in I$, de donde $(ag+f)(1) = 0$. Entonces $(ag)(1) = g(a) = 0$ para todo $g \in D(A)$ y así $a = 0$.

Entonces, $(0, f) \in I$, y así $(0, f)(b, 0) = (0, fb) \in I$ para todo $b \in A$.

Por lo tanto $fb(1) = 0$ para todo b y así $f = 0$.

Luego $T(A)$ es un álgebra simétrica.

Observación 2.36. El ejemplo anterior también podría desarrollarse teniendo en cuenta la identificación natural $D(A \oplus DA) \cong DA \oplus DDA$. Así, podemos definir

$(A \oplus DA) \xrightarrow{\theta} DA \oplus DDA$

$(a, f) \mapsto (f, a^{**})$

Entonces $\theta(a, f)(b, g) = f(b) + a^{**}(g) = f(b) + g(a)$.

Así definido, se verifica que θ es un isomorfismo de $T(A)$ - módulos.

Capítulo 3

El automorfismo de Nakayama y el funtor de Nakayama.

Comenzamos este capítulo definiendo el automorfismo de Nakayama de un álgebra Frobenius, para luego probar que un álgebra Frobenius es simétrica si y sólo si este automorfismo es interior.
Por otra parte definimos el funtor de Nakayama, que es una autoequivalencia de mod A, y vemos cuál es su relación con el automorfismo de Nakayama.
Esto lo haremos estudiando relaciones entre las estructuras de bimódulo sobre un álgebra y los automorfismos definidos sobre la misma.
Para terminar el capítulo, probamos que la propiedad de que un álgebra sea simétrica es invariante por equivalencia Morita.

3.1. El automorfismo de Nakayama.

En esta sección probaremos que si A es un álgebra Frobenius con forma bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B}$, existe un único automorfismo de k-álgebras ν definido en A tal que $\mathcal{B}(w, v) = \mathcal{B}(\nu(v), w)$.
Primero estudiaremos el caso de una forma bilineal no degenerada $\mathcal{B}$ sobre un k-espacio vectorial V de dimensión finita, y probaremos la existencia de un automorfismo ν del espacio vectorial V tal que $\mathcal{B}(w, v) = \mathcal{B}(\nu(v), w)$. Luego probaremos que si $V = A$ es un álgebra Frobenius, con forma bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B}$, entonces el automorfis-

mo ν es de k-álgebras. Además veremos que A es simétrica si y sólo si ν es automorfismo interior.

Comenzaremos esta sección recordando dos resultados conocidos referidos a espacios vectoriales sobre un cuerpo k, que utilizaremos en el desarrollo de la misma.

Lema 3.1. [HK, Capítulo 10] *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} : V \times V \to k$ una forma bilineal no degenerada. Entonces:*
(i) $\mathcal{B}$ induce isomorfismos de k-espacios vectoriales $L_{\mathcal{B}}$, $R_{\mathcal{B}} : V \to \mathrm{Hom}_k(V, k)$ definidos por $L_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{B}(v, -)$ y $R_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{B}(-, v)$ para todo $v \in V$.
(ii) Si $f \in \mathrm{Hom}_k(V, k)$, existe un único $v \in V$ tal que $f = \mathcal{B}(v, -)$

En lo que sigue, $L_{\mathcal{B}}$ y $R_{\mathcal{B}}$ denotarán los isomorfismos de k-espacios vectoriales definidos en el Lema 3.1.

Proposición 3.2. *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} : V \times V \to k$ una forma bilineal no degenerada. Entonces, existe un único automorfismo de espacios vectoriales $\nu : V \to V$ tal que $\mathcal{B}(\nu(v), w) = \mathcal{B}(w, v)\ \forall w \in V$. Además $\nu = L_{\mathcal{B}}^{-1} \circ R_{\mathcal{B}}$.*

Demostración. Sea $u \in V$, y consideremos la funcional lineal $\mathcal{B}(-, u)$. Por el Lema 3.1 (ii) sabemos que existe un único $v = v_u \in V$ tal que $\mathcal{B}(v_u, -) = \mathcal{B}(-, u)$.
Definamos entonces $\nu : V \to V$ mediante $\nu(u) = v_u$. Así definida, ν es la única función definida de V en V tal que $\mathcal{B}(\nu(v), w) = \mathcal{B}(w, v)\ \forall w \in V$. Probemos que $\nu = L_{\mathcal{B}}^{-1} \circ R_{\mathcal{B}}$. En efecto:
Dado un elemento arbitrario v de V, se tiene que
$(L_{\mathcal{B}}^{-1} \circ R_{\mathcal{B}})(v) = L_{\mathcal{B}}^{-1}(R_{\mathcal{B}}(v)) = L_{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{B}(-, v) = L_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B}(\nu(v), -)) = \nu(v)$
De modo que $\nu(v) = (L_{\mathcal{B}}^{-1} \circ R_{\mathcal{B}})(v)\ \forall v \in V$, y por lo tanto ν es transformación lineal. Hemos probado entonces todo lo requerido. □

Observación 3.3. En lo que sigue, notaremos con $\nu_{\mathcal{B}}$ al automorfismo asociado a la forma bilineal $\mathcal{B}$ definido en la proposición anterior.

Aplicaremos el resultado de la Proposición 3.2 al caso en que $V = A$ es álgebra Frobenius. Esto equivale a decir que existe una forma bilineal no degenerada
$\mathcal{B} : A \times A \to k$ que es asociativa (por Teorema 2.27).

De la propiedad asociativa de $\mathcal{B}$ surge inmediatamente que $L_{\mathcal{B}}^{-1}$ y $R_{\mathcal{B}}$ son homomorfismos de A-módulos. Además, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sea A una k-álgebra Frobenius con $\mathcal{B} : A \times A \to k$ una forma bilineal asociativa no degenerada. Entonces:*

(i) El automorfismo de k-espacios vectoriales $\nu_{\mathcal{B}} : A \to A$ tal que $\mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(v), w) = \mathcal{B}(w, v)$ para elementos $v, w \in A$, es automorfismo de k-álgebras.

(ii) Sea c un elemento inversible de A e I_c el automorfismo interior definido como $I_c(a) = cac^{-1}\ \forall\, a \in A$. Sea $\mathcal{B}'$ definida por $\mathcal{B}'(x, y) = \mathcal{B}(x, yc^{-1})$. Entonces $\nu_{\mathcal{B}'} = \nu_{\mathcal{B}} \circ I_c$.

(iii) Si $\mathcal{B}' : A \times A \to k$, es otra forma bilineal asociativa no degenerada, entonces existe un elemento inversible c de A tal que $\nu_{\mathcal{B}} = \nu_{\mathcal{B}'} \circ I_c$.

(iv) A es un álgebra simétrica si, y sólo si, existe una forma bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B}' : A \times A \to k$ tal que $\nu_{\mathcal{B}'}$ es un automorfismo interior.

Demostración. (i) Veamos que $\nu_{\mathcal{B}}$ es homomorfismo de álgebras.
Sabemos que, dado un elemento arbitrario x de A se verifica que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(vw), x) &= \mathcal{B}(x, vw) = \mathcal{B}(xv, w) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(w), xv) \\ &= \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(w)x, v) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(v), \nu_{\mathcal{B}}(w)x) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(v)\nu_{\mathcal{B}}(w), x).\end{aligned}$$

Esto significa, por ser $\mathcal{B}$ no degenerada, que $\nu_{\mathcal{B}}(vw) = \nu_{\mathcal{B}}(v)\nu_{\mathcal{B}}(w)$.
Además, si x es un elemento arbitrario de A, $\nu_{\mathcal{B}}(x) = \nu_{\mathcal{B}}(x.1) = \nu_{\mathcal{B}}(x)\nu_{\mathcal{B}}(1)$.
Por lo tanto $\nu_{\mathcal{B}}(1) = 1$ por ser $\nu_{\mathcal{B}}$ sobreyectiva, quedando así terminada la demostración.
(ii) Veamos primero que $\mathcal{B}'$ definida por $\mathcal{B}'(x, y) = \mathcal{B}(x, yc^{-1})$ es una forma bilineal asociativa no degenerada.
Se verifica inmediatamente que $\mathcal{B}'$ es bilineal. Probemos la asociatividad de $\mathcal{B}'$. Para ello tomemos x, y, z elementos arbitrarios de A. Entonces se tiene que
$\mathcal{B}'(x, yz) = \mathcal{B}(x, yzc^{-1}) = \mathcal{B}(xy, zc^{-1}) = \mathcal{B}'(xy, z)$, como queríamos demostrar.
$\mathcal{B}'$ es no degenerada por ser c un elemento inversible.
Llamemos $\nu' = \nu_{\mathcal{B}} \circ I_c$ y veamos que $\nu' = \nu_{\mathcal{B}'}$. En efecto:
ν' es automorfismo de A por ser composición de dos automorfismos de A.
Veamos ahora que $\mathcal{B}'(x, y) = \mathcal{B}'(\nu'(y), x)$ para elementos x, y en A.

$\mathcal{B}'(\nu'(y),x) = \mathcal{B}(\nu'(y),xc^{-1}) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(cyc^{-1}),xc^{-1}) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(cyc^{-1})x,c^{-1}) =$
$\mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(c^{-1}),\nu_{\mathcal{B}}(cyc^{-1})x) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(c^{-1})\nu_{\mathcal{B}}(cyc^{-1}),x) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(c^{-1}cyc^{-1}),x) =$
$\mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(yc^{-1}),x) = \mathcal{B}(x,yc^{-1}) = \mathcal{B}'(x,y)$.

Entonces $\nu = \nu_{\mathcal{B}'}$ debido a la unicidad del automorfismo en la Proposición 3.2, como queríamos demostrar.

(iii) Por Lema 3.1, sabemos que existe un único elemento a en A tal que $\mathcal{B}'(-,1) = \mathcal{B}(-,a)$. Así, para un elemento no nulo arbitrario y de A tenemos que

$\mathcal{B}'(x,y) = \mathcal{B}'(xy,1) = \mathcal{B}(xy,a) = \mathcal{B}(x,ya)$ para todo x en A.

Supongamos $ya = 0$. Entonces $\mathcal{B}'(x,y) = 0$ para todo x en A. Luego, $y = 0$ por ser $\mathcal{B}$ no degenerada, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Entonces $ya \neq 0$.

Luego, la transformación lineal de A en A que a todo elemento y de A le asigna el producto ya es inyectiva y entonces es biyectiva por ser A de dimensión finita. Por lo tanto existe a^{-1} en A con $a^{-1}a = 1$. Además $(aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = a \cdot 1 = a$. Como $1 \cdot a = a$ y la transformación lineal es inyectiva, $aa^{-1} = 1$. Luego, a es inversible.

Veamos que $\nu_{\mathcal{B}} = \nu_{\mathcal{B}'} \circ I_c$, para $c = a^{-1}$.

En efecto:

$\mathcal{B}'(\nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa),y) = \mathcal{B}'(\nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa)y,1) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa)y,a) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(a),\nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa)y) =$
$\mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(a)\nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa),y) = \mathcal{B}(\nu_{\mathcal{B}}(xa),y) = \mathcal{B}(y,xa) = \mathcal{B}(yx,a) = \mathcal{B}'(yx,1) = \mathcal{B}'(y,x) =$
$\mathcal{B}'(\nu_{\mathcal{B}'}(x),y)$, para x,y elementos arbitrarios de A.

Así $\mathcal{B}'(\nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa),y) = \mathcal{B}'(\nu_{\mathcal{B}'}(x),y)$, para todo $x,y \in A$, lo que demuestra que $\nu_{\mathcal{B}'}(x) = \nu_{\mathcal{B}}(a^{-1}xa)$ y de esta manera obtenemos lo que queríamos demostrar.

(iv) Supongamos que A es un álgebra simétrica, con forma bilineal asociativa no degenerada y simétrica $\mathcal{B}$ (por Teorema 2.31). Entonces, $\nu_{\mathcal{B}} = Id_A$, que es automorfismo interior.

Recíprocamente, si $\nu_{\mathcal{B}} = I_c$, con c un elemento inversible de A, resulta por (ii) que A es un álgebra simétrica. En efecto:

Definamos $\mathcal{B}'_1 : A \times A \to k$ como $\mathcal{B}'_1(x,y) = \mathcal{B}(x,yc^{-1})$. Sabemos por (ii) que $\mathcal{B}'_1$ es una forma bilineal asociativa no degenerada y que $\nu_{\mathcal{B}'_1} = \nu_{\mathcal{B}} \circ I_{c^{-1}}$ es su automorfismo asociado.

Así $\nu_{\mathcal{B}'_1} = I_c \circ I_{c^{-1}} = Id_A$, de donde resulta que $\mathcal{B}'_1$ es simétrica, y por lo tanto A es un álgebra simétrica. $\square$

Definición 3.5. El automorfismo ν_B asociado a una forma bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B}: A \times A \to k$ se denomina ***automorfismo de Nakayama*** asociado a $\mathcal{B}$.

3.2. El funtor de Nakayama.

Veremos a continuación que el funtor $^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$: mod $A \to$ mod A^{op} es una dualidad cuando A es un álgebra autoinyectiva. Recordemos que la estructura de A-módulo a izquierda de M^* está dada por $(a\varphi)(m) = \varphi(ma)$ para todo elemento m en M.

Comenzamos el desarrollo de esta sección definiendo, dado un A módulo M en mod A, la función $\Gamma_M : M \to M^{**}$ como $(\Gamma_M(m))(f) = f(m), \forall f \in M^*, m \in M$.

Así definida, se tiene que Γ_M es homomorfismo de A-módulos a derecha. En efecto:

Sean $m \in M, a \in A$ y consideremos $f \in M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Entonces $(\Gamma_M(m.a))(f) = f(m.a) = f(m).a = (\Gamma_M(m)(f)).a$, con lo cual $\Gamma_M(m.a) = \Gamma_M(m)a$, como queríamos demostrar.

Además, la correspondencia Γ que a M le asocia Γ_M define una correspondencia natural entre los funtores aditivos Identidad de mod A y $^{**} = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(-, A), A)$.

Definición 3.6. Sea M un A-módulo a derecha finitamente generado. Se dice que M es ***reflexivo*** si el homomorfismo $\Gamma_M : M \to M^{**} = \mathrm{Hom}_A(M^*, A_A)$ definido arriba es un isomorfismo.

La siguiente proposición muestra que, cuando A es autoinyectiva, el funtor * : mod $A \to$ mod A^{op} es una dualidad.

Proposición 3.7. *Sea A un álgebra autoinyectiva. Entonces todo módulo sobre A es reflexivo.*

Demostración. Sea M un A-módulo a derecha y sea $\Gamma_M : M \to M^{**}$ el homomorfismo de A-módulos a derecha arriba definido. Veamos que Γ_M es isomorfismo.

Si $M = A$ se tiene que $\Gamma_A : A \to A^{**}$ tal que $\Gamma_A(a)(f) = f(a)$ es una función inyectiva, entonces Γ_A es una biyección pues dim $A =$ dim A^{**}. También lo es si $M = A^n$, un

A-módulo libre, y en consecuencia se verifica para un A-módulo proyectivo $M = P$.
Sea ahora M un A-módulo finitamente generado. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\Gamma_{P_0}"] & M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\Gamma_M"] & I_0 \arrow[d, "\Gamma_{I_0}"] \\
P_0^{**} \arrow[r, two heads, "p^{**}"] & M^{**} \arrow[r, hook, "i^{**}"] & I_0^{**}
\end{tikzcd}$$

donde $P_0 = P_0(M)$ e $I_0 = I_0(M)$ denotan respectivamente la cubierta proyectiva y la cápsula inyectiva del A-módulo M.
Observemos que Γ_{P_0} es isomorfismo pues P_0 es A-módulo proyectivo. En particular, Γ_{P_0} es sobreyectiva. Además, como p es sobreyectiva y $^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$ es exacto por ser A autoinyectiva se tiene que p^{**} es sobreyectiva. De esta manera, Γ_M es sobreyectivo.
Usando que I_0 es A-módulo proyectivo ya que A es autoinyectiva se tiene que Γ_{I_0} es isomorfismo. En particular Γ_{I_0} es inyectivo y así $\Gamma_{I_0} \circ i$ es inyectivo. Luego, Γ_M es inyectivo.
Por lo tanto, Γ_M es biyectivo.
Así, hemos probado que cualquier A-módulo finitamente generado M es reflexivo, como queríamos demostrar. $\square$

Definición 3.8. Sea A una k-álgebra de dimensión finita. El funtor

$$\mathcal{N}_A = D\,\mathrm{Hom}_A(-, A) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_A(-, A), k) : \mathrm{mod}\ A \to \mathrm{mod}\ A,$$

es llamado el ***funtor de Nakayama*** de mod A.

Observación 3.9. Si A es un álgebra autoinyectiva, se tiene que $\mathcal{N}_A$ es composición de dos dualidades. Luego, es una equivalencia de mod A.

3.3. Estructuras de bimódulo definidas por automorfismos.

Recordemos que un automorfismo σ de un anillo $\mathcal{R}$ induce un isomorfismo de categorías $(-)_\sigma : \mathrm{mod}\ \mathcal{R} \to \mathrm{mod}\ \mathcal{R}$ definido de la siguiente manera:
Si $M \in \mathrm{mod}\ \mathcal{R}, M_\sigma$ es el grupo abeliano M con el producto $\cdot_\sigma$ definido por $m\cdot_\sigma r =$

$m\sigma(r), \forall m \in M, r \in \mathcal{R}$. Para un morfismo $f : M \to N$, se define $(-)_\sigma(f)(m) = f(m)$ para todo m de M. Escribiremos simplemente $(-)_\sigma(f) = f$.

Observación 3.10. Sea M un $B - A$ bimódulo, $\sigma : A \to A$ un automorfismo y c un elemento inversible de A. Entonces el morfismo $\delta = .\sigma(c) : M_{\sigma \circ I_c} \to M_\sigma$, es un isomorfismo de $B - A$ - bimódulos.

Demostración. Ya hemos probado que la multiplicación a derecha es un isomorfismo de B-módulos a izquierda. Además, dados m en M y a en A se tiene que
$\delta(m._{\sigma \circ I_c} a) = m\sigma(cac^{-1})\sigma(c) = m\sigma(c)\sigma(a) = \delta(m)\sigma(a) = \delta(m)._\sigma a$.
Con lo cual se prueba lo requerido. □

Nos interesa comparar las estructuras de bimódulo ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_\sigma$ determinadas por automorfismos σ de $\mathcal{R}$.

Lema 3.11. *Si ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_\sigma \cong {}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_\eta$ como bimódulos, con σ y η automorfismos de $\mathcal{R}$, entonces existe un elemento inversible c de $\mathcal{R}$ tal que $\sigma = \eta \circ I_c$.*

Demostración. Sea $\Theta : {}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_\sigma \to {}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_\eta$ un isomorfismo de $\mathcal{R}$ - bimódulos.
Por ser $\Theta : {}_{\mathcal{R}}\mathcal{R} \to {}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ isomorfismo de $\mathcal{R}$ - módulos a izquierda se tiene que $\Theta = .c$, donde $c = \Theta(1)$ es un elemento inversible de $\mathcal{R}$.
Como $\Theta : \mathcal{R}_\sigma \to \mathcal{R}_\eta$ es también homomorfismo a derecha, tenemos en particular que $\Theta(1._\sigma r) = \Theta(1)._\eta r$ para todo $r \in \mathcal{R}$. Es decir, $\Theta(\sigma(r)) = \Theta(1)\eta(r)$.
Entonces $\sigma(r).c = c.\eta(r)$, con lo cual $\sigma(r) = c.\eta(r).c^{-1}$.
Así hemos probado que $\sigma = \eta \circ I_c$, como queríamos demostrar. □

Observación 3.12. La identificación natural entre los A-módulos a izquierda $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_\sigma$ induce un isomorfismo $(N^*)_\sigma \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(N, \mathcal{R}_\sigma)$ para cualquier A-módulo a izquierda N.

Considerando en particular $\mathcal{R} = A$, con A un álgebra Frobenius, y $\sigma = \nu_A^{-1}$ se obtiene el funtor

$$\mathcal{N}'_A = (-)_{\nu_A^{-1}} : \mathrm{mod}\ A \to \mathrm{mod}\ A,$$

que es una equivalencia de mod A.
Si A es un álgebra Frobenius existe un isomorfismo de A-módulos a izquierda

${}_AA \cong {}_A(DA)$ que en general no es isomorfismo de A - bimódulos. Sin embargo, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 3.13. *Sea $\nu_{\mathcal{B}}$ el automorfismo de Nakayama asociado a una forma bilineal asociativa no degenerada $\mathcal{B} : A \times A \to k$. Entonces $R_{\mathcal{B}} :_A A \to {}_ADA$ induce un isomorfismo de bimódulos ${}_AA_{\nu^{-1}} \cong {}_A(DA)_A$.*
Recíprocamente, si ${}_AA_\eta \cong {}_A(DA)_A$ como bimódulos, entonces
η es un automorfismo de Nakayama.

Demostración. Supongamos que ν es automorfismo de Nakayama. Sea $\mathcal{B} : A \times A \to k$ la forma bilineal asociativa no degenerada tal que $\nu_{\mathcal{B}} = \nu$.
Consideremos $R_{\mathcal{B}} : {}_AA \to_A (DA)$ como lo definimos anteriormente. Entonces $R_{\mathcal{B}}$ es homomorfismo de A-módulos a izquierda.
Veamos que $R_{\mathcal{B}}(a._{\nu^{-1}}b) = R_{\mathcal{B}}(a)b$.
Sea x un elemento arbitrario en A. Entonces

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{B}}(a._{\nu^{-1}}b)(x) &= R_{\mathcal{B}}(a\nu^{-1}(b))(x) = \mathcal{B}(x, a\nu^{-1}(b)) = \mathcal{B}(xa, \nu^{-1}(b)) \\ &= \mathcal{B}(\nu(\nu^{-1}(b)), xa) = \mathcal{B}(bx, a) = R_{\mathcal{B}}(a)(bx) = (R_{\mathcal{B}}(a)b))(x), \end{aligned}$$

con lo cual probamos que $R_{\mathcal{B}} : {}_AA_{\nu^{-1}} \to_A (DA)_A$ es isomorfismo de bimódulos.
Recíprocamente, si ${}_AA_\eta \cong {}_A(DA)_A$ tenemos que ${}_AA_{\nu^{-1}} \cong {}_AA_\eta$ Entonces $\eta = \nu^{-1} \circ I_c$ con c un elemento inversible de A por Lema 3.11. Así, η es automorfismo de Nakayama, como queríamos demostrar. □

3.4. Relación entre el funtor de Nakayama y el automorfismo de Nakayama.

La siguiente proposición nos muestra la relación entre el funtor de Nakayama $\mathcal{N}_A$ y el automorfismo de Nakayama ν_A asociados a una k-álgebra A.

Proposición 3.14. *Sea A una k-álgebra Frobenius, ν_A un automorfismo de Nakayama sobre A, y $\mathcal{N}'_A = (-)_{\nu_A^{-1}}$. Entonces las equivalencias $\mathcal{N}_A, \mathcal{N}'_A : \mathrm{mod}\ A \to \mathrm{mod}\ A$ son funtores naturalmente isomorfos, vía $\mu_M : \mathcal{N}'_A(M) = M_{\nu^{-1}} \to \mathcal{N}_A(M) = DM^*$ definido como $(\mu_M(m))(f) = \mathcal{B}(1, f(m))$, con M en* mod A, *y para todo f en DM y m en M.*

Demostración. Sea M en mod A. Como A es autoinyectiva, sabemos por la Proposición 3.7 que el homomorfismo $\Gamma_M : M \to M^{**}$ es un isomorfismo, que induce el isomorfismo $(\Gamma_M)_{\nu^{-1}} = \Gamma_M : M_{\nu^{-1}} \to (M^{**})_{\nu^{-1}}$. Por la Observación 3.12 sabemos que $(M^{**})_{\nu^{-1}} = (M^*)^*_{\nu^{-1}} \cong \mathrm{Hom}_A(M^*, A_{\nu^{-1}})$.

Por la Proposición 3.13 tenemos un isomorfismo de bimódulos $R_{\mathcal{B}} : {}_A A_{\nu^{-1}} \to {}_A DA_A$, que induce el isomorfismo de A-módulos a derecha $\mathrm{Hom}_A(M^*, R_{\mathcal{B}}) : \mathrm{Hom}_A(M^*, {}_A A_{\nu^{-1}}) \to \mathrm{Hom}_A(M^*, {}_A DA_A)$.

Aplicando la dualidad $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$ tenemos el isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(M^*, {}_A DA_A) \to \mathrm{Hom}_A(D({}_A DA_A), DM^*)$, que está definido por $D(\theta)(\iota) = \iota \circ \theta$.

Finalmente hay un isomorfismo de A-módulos a derecha $\epsilon : \mathrm{Hom}_A(D({}_A DA_A), DM^*) \to DM^*$ que resulta de identificar A con DDA y $\mathrm{Hom}_A(A, DM^*)$ con DM^* de la manera natural. Esto es, si $1^{**} \in D(DA)$ está definido por $1^{**}(f) = f(1)$, entonces $\epsilon(h) = h(1^{**})$.

Todos los isomorfismos son naturales en M, luego su composición $\epsilon \circ D \circ \mathrm{Hom}(M^*, R_{\mathcal{B}}) \circ \Gamma_M$ define un isomorfismo de funtores de $\mathcal{N}'_A(M) = M_{\nu^{-1}}$ en $DM^* = \mathrm{Hom}_k(M^*, k) = \mathcal{N}_A(M)$. Veamos que esta composición es el isomorfismo μ_M buscado. Para f en DM y m en M se tiene que:

$$
\begin{aligned}
[\epsilon(D(\mathrm{Hom}(M^*, R_{\mathcal{B}})(\Gamma_M(m))))](f) &= [\epsilon(D(R_{\mathcal{B}} \circ \Gamma_M(m)))](f) \\
&= [D(R_{\mathcal{B}} \circ \Gamma_M(m))(1^{**})](f) \\
&= (1^{**} \circ (R_{\mathcal{B}} \circ \Gamma_M(m)))(f) \\
&= 1^{**}(R_{\mathcal{B}}(\Gamma_M(m)(f))) = 1^{**}(R_{\mathcal{B}}(f(m))) \\
&= R_{\mathcal{B}}(f(m))(1) = \mathcal{B}(1, f(m)) = \mu_M(m)(f).
\end{aligned}
$$

□

El siguiente corolario nos muestra de que manera el funtor de Nakayama permuta los A-módulos proyectivos.

Corolario 3.15. *Sea A una k-álgebra Frobenius y ν_A el automorfismo de Nakayama de A. Entonces, para todo elemento idempotente e de A, existe un isomorfismo $\mathcal{N}_A(eA) \cong \nu_A(e)A$ de A-módulos a derecha.*

Demostración. Por la Proposición 3.14 tenemos un isomorfismo $\mathcal{N}_A(eA) \xrightarrow{\mu_{eA}^{-1}} \mathcal{N}'_A(eA)$. Además, el automorfismo de Nakayama $\nu_A : A \to A$ induce un isomorfismo de A-módulos a derecha $\mathcal{N}'_A(eA) = (eA)_{\nu_A^{-1}} \to \nu_A(e)A$ que asigna a todo elemento ea de

eA el elemento $\nu_A(ea) = \nu_A(e)\nu_A(a) \in \nu_A(e)\nu_A(A) = \nu_A(e)A$. Componiendo estos dos isomorfismos de A-módulos a derecha, tenemos que $\mathcal{N}_A(eA) \cong \nu_A(e)A$, como queríamos demostrar. $\square$

3.5. Álgebras simétricas.

En la siguiente sección probaremos que el hecho de que un álgebra sea simétrica es una propiedad Morita invariante.

Proposición 3.16. *Sea A un álgebra. Entonces A es simétrica si y sólo si $B = \mathrm{End}_A(P)$ es simétrica para cualquier A-módulo proyectivo P.*

Demostración. Supongamos que A es un álgebra simétrica. Tomemos P un A-módulo proyectivo y veamos que $C = \mathrm{End}_A(P)$ es un álgebra simétrica.
Caso 1. Supongamos que P es un A-módulo libre, es decir, $P \cong A^n$.
Entonces $C \cong M_n(A)$. Como A es simétrica, sabemos por el Teorema 2.31 del Capítulo 2 que existe una transformación lineal $\varphi : A \to k$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ y Ker φ no contiene ideales a derecha no nulos. Entonces φ induce
$\varphi' : C \to M_n(A)$ poniendo $\varphi'([a_{ij}]) = [\varphi(a_{ij})]_{ij}$.
Consideramos la forma bilineal $\mathcal{B} : C \times C \to k$ definida por $\mathcal{B}(X,Y) = \varphi(\mathrm{Traza(XY)})$.
Entonces $\mathcal{B}$ es una forma asociativa simétrica.
Veamos que $\mathcal{B}$ es no degenerada. Supongamos que $\mathcal{B}(X,-) = 0$, con $X = [a_{ij}]$. Sea E_{ij} una matriz elemental. Entonces, para todo elemento b de A se tiene
$\mathcal{B}(X, bE_{ij}) = 0 = \varphi(\mathrm{Traza}(X.bE_{ij})) = \varphi(a_{ji}.b)$.
Luego $a_{ji}.A$ es un ideal a derecha contenido en Ker φ. Luego es nulo. Así $a_{ji} = 0$ para todo i,j. De modo que $X = 0$ y entonces $\mathcal{B}$ es no degenerada. Luego C es un álgebra simétrica.
Caso 2. Caso general. Sea P un A-módulo proyectivo de la forma $P = eA$. Así $\mathrm{End}_A\ P = eAe$. Sea Q tal que la suma directa $P \oplus Q = L$ es un A-módulo libre. Sea $C' = \mathrm{End}_A(L)$.
Sabemos que C' es simétrica, por el caso 1.
Entonces hay un isomorfismo de C-módulos a derecha $\mathrm{Hom}_A(L,P) \oplus \mathrm{Hom}_A(L,Q) \cong \mathrm{Hom}_A(L,L) = C'$, de donde $\mathrm{Hom}_A(L,P)$ es proyectivo sobre C'. Sea e el idempotente de

C' tal que $\mathrm{Hom}_A(L,P) = e.C'$. Entonces:
$C = \mathrm{End}_A(P) \overset{[ARS, Cap2]}{\cong} \mathrm{End}_C(\mathrm{Hom}_A(L,P)) \cong e.C'.e$ Como e es un elemento idempotente de C', se tiene que $e.C'.e$ es un álgebra simétrica. En efecto:
Sabemos que existe un isomorfismo $f : {}_C C_C \to {}_C DC_C$ de C - bimódulos. Entonces $f(eC'e) = ef(C')e = eDC'e = D(eC'e)$, y así f induce un isomorfismo $f_{eC'e} : eC'e \to D(eC'e)$ de $eC'e$ - bimódulos. Con lo cual $eC'e$ es simétrica.
Así, hemos probado que $C = \mathrm{End}_A(P)$ es un álgebra simétrica.
Recíprocamente, supongamos que $C = \mathrm{End}_A(P)$ es un álgebra simétrica para todo A-módulo proyectivo P. Entonces, tenemos en particular que $C = \mathrm{End}_A(A)$ es un álgebra simétrica. Luego $A \cong \mathrm{End}_A(A_A)$ es un álgebra simétrica. □

Se tiene entonces el siguiente corolario, que es una consecuencia directa de la Proposición 3.16.

Corolario 3.17. *Sean A y B k-álgebras Morita equivalentes. Entonces A es un álgebra simétrica si y sólo si B es un álgebra simétrica.*

Proposición 3.18. *Sea A un álgebra autoinyectiva y conmutativa. Entonces A es simétrica.*

Demostración. Por ser A una k-álgebra conmutativa se tiene que su álgebra básica asociada A^b, que es de la forma $A^b = eAe$ con e un elemento idempotente de A es conmutativa. Como A es autoinyectiva, se tiene que A^b es autoinyectiva por la Proposición 3.16. Ahora bien, en la Proposición 2.13 se demostró que un álgebra autoinyectiva básica es Frobenius. Luego A^b es Frobenius.
De modo que A^b es un álgebra Frobenius conmutativa, por lo que es un álgebra simétrica (ya que todo isomorfismo de módulos a derecha de A en DA es también isomorfismo de bimódulos). Entonces, como A y A^b son Morita equivalentes se tiene por el Corolario 3.17 que A es un álgebra simétrica, como queríamos demostrar. □

Capítulo 4

Los teoremas de Nakayama.

En este capítulo se presentan los cuatro teoremas de Nakayama, que aportan caracterizaciones y propiedades de las álgebras autoinyectivas y de las álgebras Frobenius en particular.

En la primera sección se enuncian los cuatro teoremas, y se dan demostraciones de todos ellos.

Las álgebras autoinyectivas son de la forma $\mathrm{End}_A\ P$, con A un álgebra autoinyectiva básica y P proyectivo. En la segunda sección se da una caracterización de las álgebras autoinyectivas que son Frobenius, en términos de la multiplicidad de los factores de composición de P y de la permutación de Nakayama.

En todo el capítulo supondremos que $P_1, P_2, \cdots, P_r$ son A-módulos proyectivos indescomponibles, $m(1), m(2), \cdots, m(r)$ enteros positivos tales que $A = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i^{m(i)}$, con $P_i \ncong P_j$ si $i \neq j$.

4.1. Los teoremas de Nakayama.

Comenzamos la sección probando el Primer Teorema de Nakayama, cuya demostración original puede consultarse en [Nak3], y que caracteriza a las álgebras autoinyectivas.

Proposición 4.1. *A es un álgebra autoinyectiva si y sólo si existe una permutación ϑ del conjunto $\{1, \cdots, r\}$ tal que $\mathrm{top}(P_i) \cong \mathrm{soc}(P_{\vartheta(i)})$, $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$.*

Demostración. Basta probar esta proposición para álgebras básicas, pues A es autoinyec-

tiva si y sólo si $A^b = \mathrm{End}_A(\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} P_i)$ es autoinyectiva.
Supongamos entonces que A es un álgebra autoinyectiva básica. Los P_i, $i \in \{1, \cdots, r\}$ forman un conjunto completo de A-módulos proyectivos indescomponibles, son no isomorfos dos a dos y están unívocamente determinados por sus tops simples $\mathrm{top}(P_i) = S_i$. Además, como por hipótesis A es autoinyectiva, los P_i forman también un conjunto completo de A-módulos inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos, unívocamente determinados por sus zócalos simples. De modo que existe una permutación ϑ en el conjunto $\{1, \cdots, r\}$ tal que $\mathrm{top}(P_i) = S_i \cong \mathrm{soc}\,(P_{\vartheta(i)})$, como queríamos demostrar.
Recíprocamente, supongamos que existe una permutación ϑ en el conjunto $\{1, \cdots, r\}$ tal que $\mathrm{top}(P_i) \cong \mathrm{soc}(P_{\vartheta(i)})$ en mod A para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$.
Como A es básica,
$A \cong \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} P_i$, y así top $A \cong \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{top}(P_i) \cong \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{soc}(P_{\vartheta(i)}) \cong \mathrm{soc}\ A_A \cong \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$.
Sea i la inclusión canónica de A en su cápsula inyectiva. Tenemos en mod A:
$A \overset{i}{\hookrightarrow} I_0(A) \cong I_0(\mathrm{soc}\ A) \cong I_0(\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i) \cong \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} I_0(S_i) \cong DA$.
Obtenemos de esta manera un monomorfismo $A \overset{i}{\hookrightarrow} D(A)$ de A-módulos a derecha que es isomorfismo pues $\dim_k A = \dim_k DA$. Así A es un álgebra Frobenius y por lo tanto es autoinyectiva, como queríamos demostrar. $\square$

Definición 4.2. La permutación ϑ del conjunto $\{1, \cdots, r\}$ tal que $\mathrm{top}(P_i) \cong \mathrm{soc}(P_{\vartheta(i)})$ en mod A, para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$ es llamada la *permutación de Nakayama* de A.

En caso de ser necesario notaremos con ϑ_A a la permutación de Nakayama asociada al álgebra A.

Corolario 4.3. *Sea A un álgebra autoinyectiva y ϑ la permutación de Nakayama asociada a A. Entonces $D(Ae_i) \cong e_{\vartheta^{-1}(i)}A$ para todo elemento idempotente primitivo e_i de A.*

El primer teorema de Nakayama nos permite, dada un álgebra Frobenius, hallar la relación entre la permutación de Nakayama, el automorfismo de Nakayama y el funtor de Nakayama. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.4. *Sea A un álgebra Frobenius, ν_A el automorfismo de Nakayama de A, $\mathcal{N}_A$ el funtor de Nakayama y ϑ la permutación de Nakayama de A. Entonces, para todo*

A-módulo proyectivo indescomponible $P_i = e_iA$ existen isomorfismos de A-módulos a derecha $\nu_A(e_i)A \cong \mathcal{N}_A(e_iA) \cong e_{\vartheta^{-1}(i)}A$.

Demostración. La existencia del primer isomorfismo fue probado en el Corolario 3.15. El segundo isomorfismo se debe a que por ser A un álgebra Frobenius $A_A \cong (DA)_A$, entonces $\mathcal{N}_A(e_iA) \cong D(e_iA)^* \cong D(Ae_i) \cong e_{\vartheta^{-1}(i)}A$. □

Corolario 4.5. *A es un álgebra simétrica si y sólo si ϑ_A es la función identidad.*

Ahora demostraremos el Segundo Teorema de Nakayama, que nos permite determinar cuándo un álgebra autoinyectiva es un álgebra Frobenius. La demostración original puede encontrarse en [Nak1].

Proposición 4.6. *Sea A un álgebra autoinyectiva y ϑ la permutación de Nakayama asociada a A. Entonces A es un álgebra Frobenius si y sólo si $m(i) = m(\vartheta(i))$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.30 del capítulo 2 que A es un álgebra Frobenius si y sólo si $A_A \cong (D_AA)_A$.
Además tenemos en mod A las siguientes descomposiciones
$A_A = \bigoplus_{i=1}^{r} (e_iA)^{m(i)}$ y
$D({}_AA)_A = D\left(\bigoplus_{i=1}^{r} (Ae_i)^{m(i)}\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} (D(Ae_i))^{m(i)}$
También, por la Proposición 4.1, $\operatorname{top}(e_iA) \cong \operatorname{soc}(e_{\vartheta(i)}A)$ en mod A, para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$. Además $\operatorname{top}(e_iA) \cong \operatorname{soc} D(Ae_i)$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$.
Así, como cada A-módulo proyectivo indescomponible e_iA está unívocamente determinado por su top simple $\operatorname{top}(e_iA)$, y por ser además inyectivo indescomponible está unívocamente determinado por su zócalo simple, tenemos que la existencia de un isomorfismo entre A_A y $(D_AA)_A$ es equivalente a la existencia de los siguientes isomorfismos
$\bigoplus_{i=1}^{r} (Ae_i)^{m(i)} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} D(Ae_i)^{m(i)} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} (e_{\vartheta(i)}A)^{m(\vartheta(i))}$.
De este modo, A es un álgebra Frobenius si y sólo si $m(i) = m(\vartheta(i))$, como queríamos demostrar. □

Antes de enunciar el tercer y cuarto teorema de Nakayama, es necesario definir las nociones de anulador a izquierda y a derecha, y establecer algunas propiedades de ellos.

Definición 4.7. Sea X un subconjunto no vacío de A. El anulador a izquierda de X en A es $\operatorname{ann}^{\ell}_A(X) = \{a \in A \,|\, aX = 0\}$ y análogamente, el anulador a derecha de X en A es $\operatorname{ann}^{r}_A(X) = \{a \in A \,|\, Xa = 0\}$.

Observación 4.8. $\operatorname{ann}^{\ell}_A(X)$ es un ideal a izquierda de A. Además, si X es un ideal a izquierda de A, $\operatorname{ann}^{\ell}_A(X)$ es un ideal bilátero. Análogamente, $\operatorname{ann}^{r}_A(X)$ es un ideal a derecha de A, y si X es un ideal a derecha de A, $\operatorname{ann}^{r}_A(X)$ es un ideal bilátero.

Observación 4.9. $\operatorname{ann}^{r}_A(X) = \operatorname{ann}_{\ell_{A^{op}}}(X)$ y $\operatorname{ann}_{r_{A^{op}}}(X) = \operatorname{ann}^{\ell}_A(X)$.

Observación 4.10. $\operatorname{ann}^{r}_A(\operatorname{rad} A) = \operatorname{soc}_A A$. En efecto:
$\operatorname{soc}_A A$ es el mayor submódulo semisimple de A. Por lo tanto, $\operatorname{rad} A \cdot \operatorname{soc}_A A = 0$.
Así, $\operatorname{soc}_A A \subseteq \operatorname{ann}^{r}_A(\operatorname{rad} A)$.
Recíprocamente, si $X \subseteq \operatorname{ann}^{r}_A(\operatorname{rad} A)$ se tiene que X es un submódulo semisimple a izquierda de A, y de esta manera $X \subseteq \operatorname{soc}_A A$.
De estas dos inclusiones surge la igualdad $\operatorname{ann}^{r}_A(\operatorname{rad} A) = \operatorname{soc}_A A$.

De las observaciones 4.9 y 4.10 obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Observación 4.11. $\operatorname{ann}^{\ell}_A(\operatorname{rad} A) = \operatorname{soc} A_A$.

Estamos en condiciones de probar el Tercer teorema de Nakayama, que establece una correspondencia entre los ideales a izquierda y a derecha de un álgebra autoinyectiva, y que fue demostrado originalmente en [Nak1] y [Nak2].

Proposición 4.12. *Sea A una k-álgebra autoinyectiva. Entonces las funciones anuladoras $\operatorname{ann}^{\ell}_A$ y ann^{r}_A inducen biyecciones mutuamente inversas*

$$\{\textit{ideales a derecha de } A\} \underset{\operatorname{ann}^{r}_A}{\overset{\operatorname{ann}^{\ell}_A}{\rightleftarrows}} \{\textit{ideales a izquierda de } A\}$$

Demostración. Sea I un ideal a izquierda de A. Veamos que $\operatorname{ann}^{\ell}_A(\operatorname{ann}^{r}_A(I)) = I$.
De la definición de anuladores, surge inmediatamente que $I \subseteq \operatorname{ann}^{\ell}_A(\operatorname{ann}^{r}_A(I))$. Probemos que $\dim_k I = \dim_k \left(\operatorname{ann}^{\ell}_A(\operatorname{ann}^{r}_A(I))\right)$.
Por ser ${}_A A$ y A_A módulos inyectivos, sabemos que los funtores exactos

$D_{A^{op}} = \mathrm{Hom}_{A^{op}}(-,_A A) : \mathrm{mod}\ A^{op} \to \mathrm{mod}\ A$ y

$D_A = \mathrm{Hom}_A(-, A_A) : \mathrm{mod}\ A \to \mathrm{mod}\ A^{op}$

definen dualidades inversas entre mod A^{op} y mod A.

Consideremos ahora la sucesión exacta en mod A

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow {}_A A \longrightarrow {}_A A/I \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $D_{A^{op}}$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A^{op}}({}_A A/I,_A A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{A^{op}}({}_A A,_A A) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{A^{op}}(I,_A A) \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{ann}^r_A(I) \arrow[r] & A_A \arrow[r] & A_A/\,\mathrm{ann}^r_A(I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en donde el isomorfismo ϕ está dado por $\phi(f) = f(\overline{1})$, ψ es el isomorfismo canónico y ζ es el inducido por los anteriores.

Aplicando el funtor D_A al diagrama anterior, obtenemos los siguientes isomorfismos de A-módulos a izquierda

$I \cong D_A(D_{A^{op}}(I)) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(I,_A A), A_A) \cong \mathrm{Hom}_A(A_A/\,\mathrm{ann}^r_A(I), A_A) \cong \mathrm{ann}^\ell_A\ \mathrm{ann}^r_A(I)$, de donde surge que $\dim_k I = \dim_k \mathrm{ann}^\ell_A\ \mathrm{ann}^r_A(I)$, y así $I = \mathrm{ann}^\ell_A\ \mathrm{ann}^r_A(I)$ como queríamos demostrar.

Por la Observación 4.9 se tiene inmediatamente que $\mathrm{ann}^r_A\left(\mathrm{ann}^\ell_A(J)\right) = J$ para cualquier ideal a derecha J de A.

De esta manera hemos probado que los anuladores ann^ℓ_A y ann^r_A inducen biyecciones inversas entre los ideales a izquierda y a derecha de A como queríamos demostrar. □

Observación 4.13. Si consideramos $I = radA$ en le diagrama de la demostración anterior, resulta que $\mathrm{ann}^r_A(\mathrm{rad}\, A) \cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(A/\,\mathrm{rad}\, A,_A A)$

Para finalizar, demostramos el cuarto Teorema de Nakayama, cuya demostración origial se encuentra en [Nak3], y que aporta una propiedad interesante con respecto al zócalo de un álgebra autoinyectiva.

Proposición 4.14. *Sea A un álgebra autoinyectiva. Entonces* $\mathrm{soc}({}_A A) = \mathrm{soc}(A_A)$

Demostración. Tenemos por la observación 4.10 que $\operatorname{soc}({}_AA) = \operatorname{ann}^r_A(\operatorname{rad} A)$.

Veamos que $\operatorname{ann}^r_A(\operatorname{rad} A) \subseteq \operatorname{soc} A_A$. En efecto:

Por el lema 4.13, $\operatorname{ann}^r_A(\operatorname{rad} A) \cong \operatorname{Hom}_{A^{op}}(A/\operatorname{rad} A, {}_AA)$ y éste es un A módulo a derecha semisimple por ser $A/\operatorname{rad} A$ un A-módulo a derecha semisimple y $D_{A^{op}}(-, {}_AA)$ una dualidad.

De modo que $\operatorname{ann}^r_A(\operatorname{rad} A) \subseteq \operatorname{soc} A_A$. Entonces $\operatorname{soc}_A A \subseteq \operatorname{soc} A_A$.

Aplicando esto al álgebra opuesta A^{op} se tiene de manera análoga que $\operatorname{soc}_{A^{op}} A \subseteq \operatorname{soc} A_{A^{op}}$ y de aquí obtenemos la otra inclusión, esto es $\operatorname{soc} A_A \subseteq \operatorname{soc}_A A$.

De esta manera hemos probado que $\operatorname{soc}({}_AA) = \operatorname{soc}(A_A)$ como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 4.15. En el Ejemplo 2.34 desarrollado en el capítulo 2 probamos que el álgebra de caminos correspondiente al carcaj

$$1\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$$

no es Frobenius.

Aplicando el Primer Teorema de Nakayama, puede verse fácilmente que no es un álgebra autoinyectiva. En efecto

$$P_1: \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \qquad P_2: \begin{matrix}2\\ \end{matrix} \qquad I_1: \begin{matrix}1\\ \end{matrix} \qquad I_2: \begin{matrix}1\\2\end{matrix}$$

Se ve así que $\operatorname{top} P_1 = S_1 \ncong \operatorname{soc} P_1 = S_2$ y $\operatorname{top} P_1 = S_1 \ncong \operatorname{soc} P_2 = S_2$ por lo que no existe una permutación de Nakayama, y por lo tanto no es un álgebra autoinyectiva.

Además, corroboremos en este ejemplo que los zócalos a izquierda y derecha no coinciden.

En efecto:

$${}_AA \cong P_1 \oplus P_2 \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in k \right\}.$$

De modo que

$$A \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ con } b \in k \right\} \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{soc}\, {}_AA \cong I_1 \oplus I_2 \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ con } b, c \in k \right\}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{soc} A_A &\cong \left\{ \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ con } a', b', c' \in k \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a', b' \in k \right\}.\end{aligned}$$

Así, se tiene que $\operatorname{soc}\, {}_AA \neq \operatorname{soc} A_A$.

4.2. Construcción de las álgebras autoinyectivas Frobenius y no Frobenius.

Hemos probado que toda álgebra autoinyectiva básica es Frobenius. Entonces, el teorema de Morita permite construir todas las álgebras autoinyectivas a partir de las álgebras Frobenius básicas. En esta sección mostramos cómo el segundo teorema de Nakayama nos permite de manera sencilla determinar cuáles de ellas son Frobenius y cuáles no.

Sea A un álgebra básica, $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_r$, con $P_1, \cdots, P_r$ A-módulos a derecha proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos.

Sean $m(1), m(2), \cdots, m(r)$ r números enteros positivos arbitrarios y consideremos el A-módulo proyectivo $P = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} P_i^{m(i)}$. Así, P es un progenerador de mod A, y entonces el álgebra $\Gamma = \operatorname{End}_A P$ es Morita equivalente al álgebra A. La equivalencia está dada por el funtor $\operatorname{Hom}_A(P, -)$. Veremos que el funtor de Nakayama conmuta con esta equivalencia a menos de isomorfismos. También veremos que A y Γ tienen esencialmente las mismas permutaciones de Nakayama.

Consideramos en Γ los módulos proyectivos $Q_i = \operatorname{Hom}_A(P, P_i)$ y vamos a comparar las permutaciones de Nakayama de A y Γ con respecto a las descomposiciones $A = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} P_i$ y $\Gamma = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} Q_i^{m(i)}$.

Teniendo en cuenta las definiciones y notaciones de arriba, y llamando como antes $\mathcal{N}_A$ y $\mathcal{N}_\Gamma$ a los funtores de Nakayama asociados a las álgebra A y Γ respectivamente, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.16. *Sea A un álgebra autoinyectiva. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) Γ es autoinyectiva

(ii) *Los funtores* $\mathcal{N}_\Gamma \circ \mathrm{Hom}_A(P,-)$ *y* $\mathrm{Hom}_A(P,-) \circ \mathcal{N}_A$ *son naturalmente isomorfos.*

(iii) *Las permutaciones de Nakayama de* A *y* Γ *coinciden,es decir,*
$Q_{\vartheta_\Gamma(i)} = P_{\vartheta_A(i)}$ *para todo* $i \in \{1, \cdots, r\}$.

Demostración.

(i) Se verifica trivialmente pues A y Γ son Morita equivalentes.

(ii) Designamos con $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{I}(A)$ las categorías de A-módulos proyectivos e inyectivos respectivamente. Análogamente designamos con $\mathcal{P}(\Gamma)$ y $\mathcal{I}(\Gamma)$ las categorías de Γ - módulos proyectivos e inyectivos respectivamente.
Recordemos que los funtores $\mathcal{N}_\Gamma$ y $\mathcal{N}_A$ están definidos por $\mathcal{N}_\Gamma = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_\Gamma(-,\Gamma),k)$ y $\mathcal{N}_A = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_A(-,A),k)$.
Si $X, Y \in \mathrm{mod}\ A$ el homomorfismo $X^* \otimes Y \xrightarrow{\theta_{X,Y}} \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ definido por $(\theta_{X,Y}(f \otimes y))(x) = f(x)y$ es funtorial en X y en Y, y es un isomorfismo cuando $Y = A$. Resulta entonces que $\theta_{X,P}$ es isomorfismo cuando P es proyectivo.
Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(P,-)"] \arrow[d, "\mathcal{N}_A"'] & \mathcal{P}(\Gamma) \arrow[d, "\mathcal{N}_\Gamma"] \\
\mathcal{I}(A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(P,-)"] & \mathcal{I}(\Gamma)
\end{tikzcd}$$

y queremos probar que $\mathcal{N}_\Gamma\left(\mathrm{Hom}_A(P,P_i)\right) \cong \mathrm{Hom}_A\left(P, \mathcal{N}_A(P_i)\right)$.
Dado que $P_i \in \mathcal{P}(A)$ es indescomponible, tenemos que:
$\mathcal{N}_\Gamma\left(\mathrm{Hom}_A(P,P_i)\right) = D\ \mathrm{Hom}_\Gamma\left(\mathrm{Hom}_A(P,P_i),\Gamma\right) \cong$
$D\ \mathrm{Hom}_\Gamma\left(\mathrm{Hom}_A(P,P_i), \mathrm{Hom}_A(P,P)\right) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(P_i,P)$ (1)
Por otro lado
$\mathrm{Hom}_A\left(P, \mathcal{N}_A(P_i)\right) = \mathrm{Hom}_A\left(P, \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_A(P_i,A),k\right) \cong$
$\mathrm{Hom}_k\left(P \otimes \mathrm{Hom}_A(P_i,A),k\right) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(P_i,P)$ (2)
De la igualdad de las expresiones (1) y (2), resulta que
$\mathcal{N}_\Gamma\left(\mathrm{Hom}_A(P,P_i)\right) \cong \mathrm{Hom}_A\left(P, \mathcal{N}_A(P_i)\right)$, como queríamos demostrar.

(iii) Sabemos por la relación entre las permutaciones y los funtores de Nakayama que $\mathrm{Hom}_A(P, \mathcal{N}_A(P_i)) \cong \mathrm{Hom}_A(P, P_{\vartheta_A(i)})$ y
$\mathcal{N}_\Gamma(\mathrm{Hom}_A(P, P_i)) \cong \mathcal{N}_\Gamma(Q_i) \cong Q_{\vartheta_\Gamma(i)} \cong \mathrm{Hom}_A(P, P_{\vartheta_\Gamma(i)})$.
Además, por *(ii)* sabemos que estas dos expresiones coinciden, y así se tiene que $P_{\vartheta_A(i)} \cong P_{\vartheta_\Gamma(i)}$ de donde resulta, por ser los P_i no isomorfos dos a dos, que $\vartheta_\Gamma(i) = \vartheta_A(i)$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$, como queríamos demostrar.

□

A partir de las álgebras básicas autoinyectivas se pueden construir todas las álgebras autoinyectivas y decidir cuáles son Frobenius y cuales no. Esto se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.17. *Sea A un álgebra autoinyectiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *A es un álgebra Frobenius.*

(ii) *A es isomorfa a $\mathrm{End}_A\left(\oplus_{i=1}^n P_i^{m(i)}\right)$ con $m(i) = m(j)$ si $\mathrm{top}(P_i) \cong \mathrm{soc}(P_j)$.*

Demostración. Consideremos el álgebra básica de A, $A^b = \oplus_{i=1}^n P_i$. Sabemos que A es isomorfa al álgebra $\mathrm{End}_A\left(\oplus_{i=1}^r P_i^{m(i)}\right)$ para ciertos $m(1), \cdots, m(n)$ enteros positivos. Además, las permutaciones de Nakayama de A y A^b coinciden por la Proposición 4.16.
Supongamos que A es Frobenius. Por el Segundo Teorema de Nakayama $m(i) = m(\vartheta(i))$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$. Luego $A \cong \mathrm{End}_A\left(\oplus_{i=1}^r P_i^{m(i)}\right)$ con $m(i) = m(j)$ si $\mathrm{top}(P_i) \cong \mathrm{soc}(P_j)$, por la definición de permutación de Nakayama.
Recíprocamente, supongamos que A es isomorfa a $\mathrm{End}_A\left(\oplus_{i=1}^n P_i^{m(i)}\right)$ con $m(i) = m(j)$ si $\mathrm{top}(P_i) \cong \mathrm{soc}(P_j)$. Entonces, $m(i) = m(j)$ si $P_j = P_{\vartheta(i)}$, por la definición de la permutación de Nakayama. Entonces $m(i) = m(\vartheta(i))$ y así A es Frobenius por el Segundo Teorema de Nakayama. □

Ejemplo 4.18. Sea $A = kQ/I$, con Q el carcaj

$$1\bullet \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \bullet 2$$

e $I = \langle \alpha\,\beta,\, \beta\,\alpha \rangle$.

Se probó en el Ejemplo 2.32 del Capítulo 2 que A es un álgebra autoinyectiva.

Tenemos que

$$P_1: \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \qquad P_2: \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \qquad I_1: \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \qquad I_2: \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Entonces $P_{\vartheta(1)} = P_2$ y $P_{\vartheta(2)} = P_1$. Luego, tomando $P = P_1^2 \oplus P_2$ se tiene que $\mathrm{End}_A\, P$ es un álgebra autoinyectiva no Frobenius.

Capítulo 5

Álgebras monomiales. Su extensión trivial.

En este capítulo describiremos las relaciones de la extensión trivial $T(A)$, cuando $A = kQ_A/I_A$ es una k-álgebra de dimensión finita e I_A es un ideal admisible generado por caminos. Estas álgebras se denominan monomiales.
En [FP] se caracterizó el carcaj de un álgebra de dimensión finita, y se describieron las relaciones en el caso en que Q_A no tiene ciclos orientados no nulos en A.
Utilizando las definiciones de ciclo elemental y camino maximal dadas en [FP] construiremos una presentación $(Q_{T(A)}, I_{T(A)})$ de la extensión trivial $T(A)$ de un álgebra monomial A. Realizaremos dicha construcción directamente a partir de una presentación (Q_A, I_A) del álgebra monomial A.

5.1. Algunas propiedades de las álgebras monomiales.

Comenzamos recordando la descripción del carcaj de la extensión trivial $T(A)$ de una k-álgebra de dimensión finita $A = kQ_A/I_A$ dada en [FP, Proposition 2.2].

El zócalo de A es un A-A - bimódulo, esto es, un módulo sobre $A^e = A \otimes_A A^{op}$. Fijemos un conjunto $\mathbb{M} = \{p_1, \cdots, p_t\}$ de elementos en kQ_A tal que $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es una k - base de soc A_{A^e}. Entonces el carcaj $Q_{T(A)}$ tiene la siguiente forma:
(i) $(Q_{T(A)})_0 = (Q_A)_0$
(ii) $(Q_{T(A)})_1 = (Q_A)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \cdots, \beta_{p_t}\}$ donde $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es la k - base de $\mathrm{soc}_{A^e} A$ elegida

y para cada i, β_{p_i} es una flecha de $t(p_i)$ a $s(p_i)$.

Extendemos la base fijada del zócalo de A a una base $\beta = \{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_n}\}$ de A y denotamos con $\beta^* = \{\overline{p_1}^*, \cdots, \overline{p_n}^*\}$ a su base dual en $D(A)$.

Definición 5.1. Sea C un ciclo orientado en $kQ_{T(A)}$. Se dice que C es ***elemental*** si $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_m \cdots \alpha_{j+1}$, donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in (Q_A)_1$, $p \in \mathbb{M}$ y $\overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1}) \neq 0$. En este caso, el ***peso*** de C es $\omega(C) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1})$.
Además, si $C_1 = \alpha_m \cdots \alpha_1$ es un ciclo, entonces $C_i = \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \alpha_m \cdots \alpha_i$ también lo es para cualquier $i \in \{1, \cdots, m\}$. Diremos en este caso que C_i es una permutación de C_1. Observamos entonces que si C es un ciclo elemental, toda permutación de C es también un ciclo elemental.

En lo que sigue estudiaremos propiedades de los caminos de un álgebra monomial.

Lema 5.2. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k-álgebra de dimensión finita, I_A generado por caminos. Si $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ son caminos distintos de kQ_A y $\sum_{i=1}^{s} a_i \overline{\gamma_i} = 0$ con $a_i \neq 0 \, \forall \, i \in \{1, \cdots, s\}$, entonces $\overline{\gamma_i} = 0 \; \forall i \in \{1, \cdots, s\}$. Esto es, las clases no nulas de caminos de A forman una base de A.*

Demostración. Sean $m_1, \cdots, m_t$ caminos en kQ_A distintos dos a dos que forman una base de I_A.
Supongamos $\sum_{i=1}^{s} a_i \overline{\gamma_i} = 0$ en kQ_A/I_A. Entonces $\sum_{i=1}^{s} a_i \gamma_i \in I_A$. Esto es
$\sum_{i=1}^{s} a_i \gamma_i = \sum_{j=1}^{t} b_j m_j$ en kQ_A, donde los γ_i y m_j son elementos de la base de caminos de kQ_A.
Luego, $s = t$ y existe una permutación θ en el conjunto $\{1, \cdots, s\}$ tal que $a_i = b_{\theta(i)}$, $\gamma_i = m_{\theta(i)}$. De modo que $\overline{\gamma_i} = 0 \; \forall i \in \{1, \cdots, s\}$ como queríamos demostrar. □

Proposición 5.3. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k-álgebra de dimensión finita donde I_A está generado por caminos. Entonces existe una base de* soc A_{A^e} *formada por clases de caminos maximales en A.*

Demostración. Sea M un conjunto de clases de caminos de soc A_{A^e} linealmente independiente maximal. Probaremos que M es base de soc A_{A^e}.

Sea $x \in kQ_A$ tal que $\overline{x} \in \text{soc } A_{A^e}$. Entonces $x = \sum_{i=1}^{r} a_i\gamma_i$, donde $a_i \in k$, γ_i son caminos distintos de kQ_A para cada $i \in \{1, \cdots, r\}$ y además $0 = \overline{x}\,\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\,\overline{x}$ para toda flecha α de Q_A dado que soc $A_{A^e} = \text{ann}_{\ell_A}(\text{rad } A)$. Esto es $0 = \overline{x\alpha} = \sum_{i=1}^{r} a_i(\overline{\gamma_i\alpha}) = \sum_{i=1}^{r} a_i(\overline{\alpha\gamma_i})$. Por el lema anterior, tenemos que $\overline{\gamma_i\alpha} = 0 = \overline{\alpha\gamma_i}$ para toda flecha α de Q_A y para cualquier $i \in \{1, \cdots, r\}$. Luego $\overline{\gamma_i} \in \text{soc } A_{A^e}$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$ y así es combinación lineal de M; y por lo tanto $\overline{x}$ también lo es.

Luego, M genera soc A_{A^e} y por lo tanto M es base de soc A_{A^e}, como queríamos demostrar. □

Observación 5.4. El resultado precedente generaliza lo probado en [S, Lemma 2.1.] para el caso particular de álgebras gentiles, las cuales definimos a continuación.

Definición 5.5. Una k-álgebra de dimensión finita A se llama ***de cuerdas*** si A es Morita equivalente a un álgebra de la forma kQ/I donde:

(S1) I está generado por caminos.

(S2) Cada vértice de Q es fuente y final de a lo sumo 2 flechas.

(S3) Para cada flecha $\alpha \in Q$ existe a lo sumo una flecha $\beta \in Q$ tal que $\alpha\beta \notin I$ y existe a lo sumo una flecha $\gamma \in Q$ tal que $\gamma\alpha \notin I$.

Un álgebra string es llamada ***gentil*** si además satisface:

(G1) Para cada flecha $\alpha \in Q$ existe a lo sumo una flecha $\delta \in Q$ tal que $\alpha\delta \in I$ y existe a lo sumo una flecha $\epsilon \in Q$ tal que $\epsilon\alpha \in I$.

(G2) I está generado por caminos de longitud 2.

Observación 5.6. Las álgebras de cuerdas, y las gentiles en particular, son ejemplos de álgebras monomiales. Además, si A es un álgebra monomial, A^{op} también lo es.

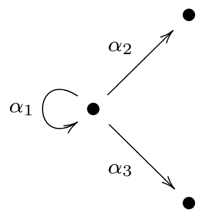
De aquí en adelante supondremos que $A = kQ_A/I_A$ es una k-álgebra de dimensión finita donde I_A está generado por caminos. De esta manera, podemos elegir $\mathbb{M} = \{p_1, \cdots, p_t\}$ formado por caminos (maximales) de Q_A tal que $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es una k - base de $\text{soc}_{A^e} A$ (cuya existencia está garantizada por la Proposición 5.3). Extendemos esta base a una base de clases de caminos $\beta = \{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_n}\}$ de A añadiendo las restantes clases no nulas de caminos de A, y notamos con $\beta^* = \{\overline{p_1}^*, \cdots, \overline{p_n}^*\}$ a su base dual en

$D(A)$.

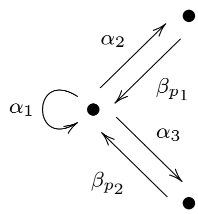
En este caso se tiene que C es un ciclo elemental si $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_m \cdots \alpha_{j+1}$, donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in (Q_A)_1$, $p \in \mathbb{M}$ y $p = \alpha_m \cdots \alpha_1$. De esta manera, el ***peso*** de C es $\omega(C) = 1$ para cualquier ciclo elemental.

El siguiente ejemplo ilustra la descripción precedente.

Ejemplo 5.7. Sea A dada por el carcaj Q_A:



con la relación $(\alpha_1)^2 = 0$. Entonces $\{\overline{p_1} = \overline{\alpha_2\alpha_1}$ y $\overline{p_2} = \overline{\alpha_3\alpha_1}\}$ es una k - base de $\operatorname{soc}_{A^e} A$ y así el carcaj de $T(A)$ es



Además, los ciclos elementales son: $C_1 = \beta_{p_1}\alpha_2\alpha_1$ y $C_2 = \beta_{p_2}\alpha_3\alpha_1$; y todas sus permutaciones.

Definición 5.8. Diremos que un camino q de kQ_A ***está contenido*** en el camino q' si se verifica que $q' = \gamma_2 q \gamma_1$, donde γ_2, γ_1 son caminos y además $t(\gamma_1) = s(q)$ y $s(\gamma_2) = t(q)$.

Proposición 5.9. [FP, Remark 3.3] Si $\overline{v}$ es un elemento no nulo de A, entonces existen caminos $\delta_1, \delta_2 \in kQ_A$ y $p_j \in \mathbb{M}$ tales que $\overline{p_j}^*(\overline{\delta_1 v \delta_2}) \neq 0$. En particular, cualquier camino no nulo de A está contenido en un ciclo elemental.

Damos a continuación la prueba realizada en [FP].

Demostración. Sean δ_1, δ_2 caminos en kQ_A de longitud maximal tales que $\overline{z} = \overline{\delta_1 v \delta_2} \neq 0$. Entonces $\overline{z} \in \operatorname{soc} A_{A^e}$; esto es, $\overline{z} = \sum_{i=1}^{t} b_i \overline{p_i}$, con $b_i \in k$ y $p_i \in \mathbb{M}$, $\forall\, i = 1, \cdots, t$. Como

$\overline{z} \neq 0$ existe j tal que $b_j \neq 0$. Así $\overline{p_j}^*(\overline{z}) \neq 0$. De aquí sigue que si v es un camino en kQ_A tal que $\overline{v} \neq 0$, entonces $\beta_{p_j}\delta_1 v\delta_2$ es un ciclo elemental que contiene a v, como queríamos demostrar. $\square$

Definición 5.10. Sea q un camino contenido en un ciclo elemental C, de longitud menor o igual que la longitud de C. Si $q = C$, el ***suplemento*** de q en C es el camino trivial $e_{s(q)}$; en otro caso, es el camino formado por las flechas restantes de C.

5.2. Las relaciones de la extensión trivial $T(A)$ de un álgebra monomial.

En esta sección construiremos las relaciones de la extensión trivial $T(A)$ de un álgebra monomial $A = kQ_A/I_A$.

En [FP, Theorem 3.9] se caracterizó el ideal $I_{T(A)}$ de relaciones de la extensión trivial $T(A) = kQ_{T(A)}/I_{T(A)}$ del álgebra de dimensión finita $A = kQ_A/I_A$ donde todo ciclo orientado es nulo en A.

Consideremos, como se hizo en [FP], el morfismo de k-álgebras $\Phi : kQ_{T(A)} \to T(A)$ tal que:

$\Phi(e_i) = (\overline{e_i}, 0) \qquad\qquad \forall\, i = 1, \cdots, n,$

$\Phi(\alpha) = (\overline{\alpha}, 0), \qquad \Phi(\beta_p) = (0, \overline{p}^*) \qquad \forall\, \alpha \in (Q_A)_1$ y $p \in \mathbb{M}$

Por su definición, Φ es sobreyectivo y de esta manera podemos hacer la identificación $T(A) = kQ_{T(A)}/ker\Phi$.

También definimos los morfismos asociados:

$\varphi_1 = \pi_1\Phi : kQ_{T(A)} \to A$ y $\varphi_2 = \pi_2\Phi : kQ_{T(A)} \to D(A)$, donde , π_1, π_2 son las proyecciones inducidas por la descomposición $T(A) = A \oplus D(A)$.

En [FP, Lemma 3.5] se listan propiedades de estos morfismos bajo la hipótesis adicional que los ciclos orientados de kQ_A son nulos en A. Salvo en la propiedad (i) demostrada en el mencionado trabajo, esta hipótesis adicional no es necesaria. Enunciamos las propiedades $(a) - (h)$ en el siguiente lema, incluyendo su demostración hecha en [FP], para un mejor entendimiento.

Lema 5.11. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k-álgebra de dimensión finita. Sean q, u caminos de $kQ_{T(A)}$, entonces:*

(a) Si $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in kQ_A, v_2 \in (\beta_p)_{p \in \mathbb{M}}$, entonces $\Phi(v) = (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2))$.

(b) Si $\varphi_2(q) \neq 0$ entonces $q \in (\beta_p)_{p \in \mathbb{M}}$.

(c) Si q contiene dos o más flechas β_p, $p \in \mathbb{M}$, entonces $\varphi_2(q) = 0$.

(d) Si $\varphi_2(q)(\overline{u}) \neq 0$, entonces u es un suplemento de q.

(e) $\varphi_2(v)(\overline{u}) = \varphi_2(vu)(\overline{e_i}) = \varphi_2(uv)(\overline{e_j})$ si u es un camino de i a j en kQ_A.

(f) Si $v = \sum_{s=1}^{l} a_s q_s$, con $q_1, q_2, \cdots, q_l$ caminos diferentes y $\varphi_2(v) \neq 0$, entonces existe un suplemento u de uno de los q_s tal que $\varphi_2(vu) \neq 0$ y $\varphi_2(uv) \neq 0$.

(g) Sea C un ciclo elemental con origen e. Entonces $\varphi_2(C)(\overline{e}) = \omega(C)$ y $\varphi_2(C)(\overline{u}) = 0$ para cualquier camino u en kQ_A, $u \neq e$. Si además, I_A está generado por caminos, se tiene que $\varphi_2(C)(\overline{e}) = 1$.

(h) Si q tiene un suplemento, entonces $\Phi(q) \neq 0$.

Demostración. $(a), (b)$ y (e) surgen directamente de las definiciones.

(c) Supongamos (sin pérdida de generalidad) $q = \beta_{p_j}\alpha_n \cdots \alpha_1\beta_{p_i}$.
Entonces $\Phi(q) = \Phi(\beta_{p_j})\Phi(\alpha_n \cdots \alpha_1)\Phi(\beta_{p_i}) = (0, \overline{p_j}^*)(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}, 0)(0, \overline{p_i}^*) = (0, \overline{p_j}^*(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}))(0, \overline{p_i}^*) = (0, 0)$.

(d) Supongamos que $\varphi_2(q)(\overline{u}) \neq 0$. Entonces sabemos por (b) y (c) que $q = \gamma\beta_p\delta$, con γ y δ caminos en kQ_A. Luego $0 \neq \varphi_2(q)(\overline{u}) = \varphi_2(\gamma\beta_p\delta)(\overline{u}) = \left((\overline{\gamma}, 0)(0, \overline{p}^*)(\overline{\delta}, 0)\right)(\overline{u}) = \left((0, \overline{\gamma}\,\overline{p}^*)(\overline{\delta}, 0)\right)(\overline{u}) = (0, \overline{\gamma}\,\overline{p}^*\overline{\delta})(\overline{u}) = \overline{p}^*(\overline{\delta u \gamma})$. Así tenemos que $\overline{p}^*(\overline{\delta u \gamma}) \neq 0$, lo que significa que u es un suplemento de q en el ciclo elemental $\gamma\beta_p\delta u$.

(f) Sea $v = \sum_{s=1}^{l} a_s q_s$, con con $q_1, q_2, \cdots, q_l$ caminos diferentes y $\varphi_2(v) \neq 0$. Entonces existe un camino u tal que $\varphi_2(v)(\overline{u}) \neq 0$. Así, $\varphi_2(q_s)(\overline{u}) \neq 0$ para algún s. Luego, por (d), se tiene que u es un suplemento de uno de los q_s.
Además, por (e), $0 \neq \varphi_2(v)(\overline{u}) = \varphi_2(vu)(\overline{e_i}) = \varphi_2(uv)(\overline{e_j})$, donde $s(u) = i$ y

$t(u) = j$.

Por lo tanto $\varphi_2(vu) \neq 0$ y $\varphi_2(uv) \neq 0$ como queríamos demostrar.

(g) Sea C un ciclo elemental con origen e; $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_n \cdots \alpha_{j+1}$.

Si $\varphi_2(C)(\overline{u}) \neq 0$, sabemos por (d) que u es un suplemento de C. De modo que debe ser $u = e$.

Así $\varphi_2(C)(\overline{u}) \neq 0$ si, y sólo si, $u = e$.

Además, $\varphi_2(C)(\overline{e}) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1} e \alpha_j \cdots \alpha_1}) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1} \alpha_j \cdots \alpha_1}) = \omega(C)$.

En particular, si I_A está generado por caminos, $\varphi_2(C)(\overline{e}) = \omega(C) = 1$.

(h) Supongamos que u es un suplemento de q en C. Así, $C = qu$. Por (g) sabemos que $\varphi_2(C) \neq 0$ y así $\Phi(q) \neq 0$.

□

Supondremos en lo que sigue que A es un álgebra monomial. Comenzamos dando una descripción de los ciclos elementales de $T(A)$.

Proposición 5.12. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k-álgebra de dimensión finita, donde I_A está generado por caminos. Sea C un ciclo orientado de $kQ_{T(A)}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) C es un ciclo elemental.

(ii) $C = p\beta_p$ en $kQ_{T(A)}$, con $p \in \mathbb{M}$, o una permutación de este ciclo.

(iii) C es maximal en $T(A)$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$

Sea $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_n \cdots \alpha_{j+1}$ un ciclo elemental, con $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in (Q_A)_1$, $p \in \mathbb{M}$. Así se tiene que $\alpha_n \cdots \alpha_1 = p$ pues I_A está generado por caminos. Por lo tanto $C = p\beta_p$ donde p es un camino no nulo maximal, o una permutación de este ciclo, como se quería demostrar.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Sea $C = p\beta_p$. Como $\overline{p}^*(\overline{p}) = 1$ entonces C es un ciclo elemental, por definición.

$(i) \Rightarrow (iii)$

Sea $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_n \cdots \alpha_{j+1}$ un ciclo elemental, con $\alpha_n \cdots \alpha_1 = p \in \mathbb{M}$.
Supongamos que C no es maximal. Entonces existe una flecha $\alpha \in Q_{T(A)}$ tal que $\overline{\alpha}\overline{C} \neq 0$ (o $\overline{C}\overline{\alpha} \neq 0$) en $T(A)$. Luego $\Phi(\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_n \cdots \alpha_{j+1}) \neq (0,0)$. De esta manera, $\Phi(\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1)\Phi(\beta_p)\Phi(\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}) = (\overline{\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1}, 0)(0, \overline{p}^*)(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}}, 0) \neq (0,0)$.
Por lo tanto $(0, \overline{\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1}\, \overline{p}^*\, \overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}}) \neq (0,0)$. En consecuencia
$\overline{\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1}\, \overline{p}^*\, \overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}} \neq 0$. Es decir, existe un camino q de $kQ_{T(A)}$ tal que
$\overline{\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1}\, \overline{p}^*\, \overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}}(\overline{q}) \neq 0$. Por definición, tenemos que
$\overline{\alpha\alpha_j \cdots \alpha_1}\, \overline{p}^*\, \overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}}(\overline{q}) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1} q \alpha\alpha_j \cdots \alpha_1}) \neq 0$, lo cual contradice que $\overline{p}^*(\overline{p'}) = 0$ para todo camino $p' \neq p$ de $kQ_{T(A)}$.
Por lo tanto C es maximal, como se quería demostrar.
$(iii) \Rightarrow (i)$
Supongamos que C es un ciclo de $Q_{T(A)}$ maximal en $T(A)$.
Entonces $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_n \cdots \alpha_{j+1}$ y $\varphi_2(C) \neq 0$. Por lo tanto, existe un camino γ tal que $\varphi_2(C)(\overline{\gamma}) \neq 0$. Por Lema 5.11$(e)$ tenemos $\varphi_2(C\gamma) \neq 0$.
Como C es maximal, entonces $\gamma = e$ y así
$\varphi_2(C)(\overline{e}) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}\, e\, \alpha_j \cdots \alpha_1}) \neq 0$, con lo cual $\alpha_n \cdots \alpha_{j+1}\alpha_j \cdots \alpha_1 = p$, como queríamos demostrar. □

Observación 5.13. Resulta de la Proposición 5.12 que si $A = kQ_A/I_A$ es una k-álgebra de dimensión finita donde I_A está generado por caminos, toda permutación de un ciclo maximal de $T(A)$ es también un ciclo maximal de $T(A)$.

Corolario 5.14. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k-álgebra de dimensión finita, donde I_A está generado por caminos. Entonces:*

(i) Toda flecha β_p (con $p \in \mathbb{M}$) de $Q_{T(A)}$ está contenida en un único ciclo elemental, a menos de permutaciones.

(ii) Si $\mu \in (\beta_p)_{p\in\mathbb{M}}$ tiene suplementos γ, γ' entonces $\gamma = \gamma'$.

Demostración. (i) Por construcción se tiene que β_p está contenida en el ciclo elemental $C = p\beta_p$ que es único a menos de permutaciones, por la Proposición 5.12.
(ii) Sea $\mu \in (\beta_p)_{p\in\mathbb{M}}$ un camino de $kQ_{T(A)}$ que tiene suplementos γ, γ'. Entonces $\mu = \delta\beta_p\rho$ está contenido en ciclos elementales $C = \mu\gamma$ y $C' = \mu\gamma'$ de $kQ_{T(A)}$. Por la

Proposición 5.12, $C = p\beta_p$ y $C' = p'\beta'_p$ (o una permutación de los mismos). Como por (i) se tiene que β_p está contenida en el único ciclo elemental $C = p\beta_p$ se tiene que $C = C'$ y así $\gamma = \gamma'$, como queríamos demostrar. □

Proposición 5.15. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k-álgebra de dimensión finita, donde I_A está generado por caminos. Sea Φ el morfismo definido anteriormente. Para cada $j \in (Q_{T(A)})_0$, sea Y_j el ideal en $kQ_{T(A)}$ generado por:*

(i) los ciclos orientados de j a j que no están contenidos en un ciclo elemental,

(ii) los elementos $C - C'$, donde C, C' son ciclos elementales con origen j.

Entonces $Y_j \subseteq ker\,\Phi \cap e_j kQ_{T(A)} e_j$.

Demostración. Basta probar que los generadores dados de Y_j se anulan por Φ.

Sea v un generador de Y_j que satisface la condición (i), es decir un camino de j a j que no está contenido en ningún ciclo elemental. Si v es un camino de kQ_A, $\overline{v} \neq 0$ en A por la Observación 5.9 tenemos que v está contenido en un ciclo elemental. Luego $v \notin kQ_A$, esto es, $v \in (\beta_p)_{p \in \mathbb{M}}$ y así $\Phi(v) = (0, \varphi_2(v))$.

Si v tiene dos o más flechas β_p, sabemos por el Lema 5.11 (c) que $\varphi_2(v) = 0$. Luego, $v \in ker\,\Phi \cap e_j kQ_{T(A)} e_j$.

Si v tiene exactamente una flecha β_p, para algún $p \in \mathbb{M}$, entonces $v = \gamma\beta_p\delta$, con γ y δ caminos en kQ_A.

Supongamos que $\varphi_2(v) \neq 0$, entonces existe un camino u en kQ_A tal que $\varphi_2(v)(\overline{u}) \neq 0$. Así, $\overline{p}^*(\delta u \gamma) = 1$. Luego, u es un suplemento de v en el ciclo elemental $\gamma\beta_p\delta u$. Lo cual es una contradicción pues por hipótesis v no está contenido en ningún ciclo elemental.

Por lo tanto $\varphi_2(v) = 0$ y así $v \in ker\,\Phi \cap e_j kQ_{T(A)} e_j$, como queríamos demostrar.

Sea v un generador de Y_j que satisface la condición (ii), es decir $v = C - C'$, donde C, C' son ciclos elementales con origen j. Entonces $\Phi(v) = (0, \varphi_2(v))$ y $\varphi_2(v) = \varphi_2(C) - \varphi_2(C')$.

Sea $u \in kQ_A$. Veamos que $\varphi_2(v)(\overline{u}) = 0$.

Si $u \neq e_j$, $\varphi_2(C)(\overline{u}) = \varphi_2(C')(\overline{u}) = 0$ (por Lema 5.11(g)), de donde $\varphi_2(v)(\overline{u}) = 0$.

Si $u = e_j$, entonces $\varphi_2(C)(\overline{e_j}) = 1$ y $\varphi_2(C')(\overline{e_j}) = 1$.

Entonces $\varphi_2(v)(\overline{e_j}) = 1 - 1 = 0$.

Por lo tanto $\varphi_2(v) = 0$ y así $v \in ker\,\Phi \cap e_j kQ_{T(A)} e_j$, como queríamos demostrar. □

Observación 5.16. Como consecuencia directa de la proposición anterior se tiene que las clases de los ciclos elementales con origen j en $kQ_{T(A)}$ generan un subespacio de dimensión 1 de $kQ_{T(A)}/Y_j$.

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente teorema, que nos permite construir las relaciones del álgebra de extensión trivial $T(A)$ de un álgebra monomial A.

Teorema 5.17. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra de dimensión finita, donde I_A está generado por caminos. Sea I' el ideal de $kQ_{T(A)}$ generado por:*

(i) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $\mu - \mu'$, donde μ, μ' son caminos diferentes de $kQ_{T(A)}$ con un suplemento común γ en ciclos elementales C y C' respectivamente.

Entonces I' es admisible e $I' = \operatorname{Ker}\Phi$. Luego $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

Antes de demostrar este teorema, haremos algunas observaciones útiles acerca de la definición del ideal I' definido en su enunciado.

Observación 5.18. (1) $I_A \subseteq I'$, pues si q es un camino de I_A se verifica que $\overline{q} = 0$ en A y así q no pertenece a ningún ciclo elemental, por Observación 5.9. Entonces $I_A = I' \cap kQ_A$.

(2) Si $\mu - \mu'$ es un generador de I' de tipo (ii) en Teorema 5.17, entonces μ, $\mu' \in (\beta_p)_{p\in\mathbb{M}}$ por poseer un suplemento común γ, y se tiene que $\gamma \in kQ_A$ por Corolario 5.14.

(3) Si un camino q en $kQ_{T(A)}$ no está en I', entonces q posee un suplemento en algún ciclo elemental, pues por ser q un camino en $kQ_{T(A)}$ que no está en I' sabemos que q está contenido en algún ciclo elemental por definición de I'. Así, q tiene un suplemento.

Haremos ahora la demostración del Teorema 5.17

Demostración. Debemos probar que $I' = ker\,\Phi$, donde Φ es el morfismo definido anteriormente.
Veamos primero que $I' \subseteq ker\,\Phi$. Para ello, probemos que los generadores dados de I'

pertenecen a $ker\,\Phi$.

Caso 1: El generador dado es un camino q de I' que no está contenido en ningún ciclo elemental. Entonces:

• Si $q \in kQ_A$, por Observación 5.9, $\overline{q} = 0$. Entonces $\Phi(q) = (0,0)$ y así $q \in \operatorname{Ker}\Phi$.

• Si $q \in (\beta_p)_{p\in\mathbb{M}}$, $q = \gamma\beta_p\delta$, con $p \in \mathbb{M}$, donde γ y δ son caminos en kQ_A. Se tiene entonces que $\Phi(q) = (0, \varphi_2(q))$.

Supongamos por el absurdo que $\varphi_2(q) \neq 0$. Entonces existe un camino u de kQ_A tal que $\varphi_2(q)(\overline{u}) \neq 0$. Entonces $\overline{p}^*(\overline{\delta u\gamma}) \neq 0$. Así, u es un suplemento de q en el ciclo elemental $\gamma\beta_p\delta u$, lo cual contradice el hecho de que q no está contenido en ningún ciclo elemental.

De esta manera, $\varphi_2(q) = 0$ y así $q \in \operatorname{Ker}\Phi$.

Caso 2: Sea v un generador de I' de la forma $v = \mu - \mu'$, donde μ, μ' son caminos diferentes de i a j en $kQ_{T(A)}$ con un suplemento común γ en ciclos elementales C y C' respectivamente. Digamos $C = \gamma\,\mu$ y $C' = \gamma\,\mu'$. Sabemos que $\Phi(v) = (0, \varphi_2(v))$ pues μ, $\mu' \in (\beta_p)_{p\in\mathbb{M}}$ por Observación 5.18 (2). Veamos que $\varphi_2(v) = 0$.

Sabemos que $\gamma\,v = \gamma\mu - \gamma\mu' = C - C' \in Y_j$ donde Y_j es el ideal definido en la Proposición 5.15 y así $\gamma v \in \operatorname{Ker}\Phi$ pues $Y_j \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$. Esto es, $\varphi_2(\gamma\,v) = 0$. En particular $\varphi_2(\gamma\,v)(\overline{e_i}) = 0$. Luego $0 = \varphi_2(\gamma\,v)(\overline{e_i}) = \varphi_2(v)(\overline{e_i\gamma}) = \varphi_2(v)(\overline{\gamma})$. Así, $\varphi_2(v)(\overline{\gamma}) = 0$.

Supongamos por el absurdo que existe un camino $q \in kQ_A$ tal que $\varphi_2(v)(\overline{q}) \neq 0$. Entonces $\varphi_2(v)(\overline{q}) = \varphi_2(\mu - \mu')(\overline{q}) = \varphi_2(\mu)(\overline{q}) - \varphi_2(\mu')(\overline{q}) \neq 0$. Entonces $\varphi_2(\mu)(\overline{q})$ y $\varphi_2(\mu')(\overline{q})$ no pueden ser ambos nulos.

Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $\varphi_2(\mu)(\overline{q}) \neq 0$. Entonces q es un suplemento de μ por Proposición 5.11 (d). Por la unicidad del suplemento de un camino en $(\beta_p)_{p\in\mathbb{M}}$ (Corolario 5.14 (ii)) tenemos que $q = \gamma$. De donde $\varphi_2(v)(\overline{\gamma}) = \varphi_2(v)(\overline{q}) \neq 0$ lo cual contradice que $\varphi_2(v)(\overline{\gamma}) = 0$.

De modo que $\varphi_2(v) = 0$ y así $v \in ker\,\Phi$.

Del análisis caso a caso se obtiene que $I' \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$, como queríamos demostrar.

Sea $\pi : kQ_{T(A)} \to kQ_{T(A)}/I'$ el epimorfismo canónico y denotemos $\pi(y) = \widetilde{y}$.

Como $\Phi : kQ_{T(A)} \to T(A)$ es un morfismo sobreyectivo e $I' \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$, Φ induce un epimorfismo $\overline{\Phi} : kQ_{T(A)}/I' \twoheadrightarrow kQ_{T(A)}/\operatorname{Ker}\Phi = T(A)$ tal que $\overline{\Phi} \circ \pi = \Phi$. Para probar que se verifica la igualdad $I' = \operatorname{Ker}\Phi$ es suficiente probar que $\dim_k kQ_{T(A)}/I' = \dim_k T(A) = 2\dim_k A$.

La inclusión de A en $T(A)$ se factoriza a través de $kQ_{T(A)}/I'$ pues $I_A \subseteq I'$. Así, el morfismo $\iota : A \to kQ_{T(A)}/I'$ inducido por la inclusión de kQ_A en $kQ_{T(A)}$ es un monomorfismo. Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
kQ_A \arrow[r, hook] \arrow[d] & kQ_{T(A)} \arrow[d, "\pi"] \\
A = kQ_A/I_A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook] & kQ_{T(A)}/I' \arrow[d, "\overline{\Phi}"] \\
 & T(A) = kQ_{T(A)}/ker\Phi
\end{tikzcd}$$

con $\overline{\Phi} \circ \pi = \Phi$.

Sabemos que $kQ_{T(A)} = kQ_A + k(\beta_p)_{p \in \mathbb{M}}$. Luego, $e_j kQ_{T(A)} e_i = e_j kQ_A e_i + e_j k(\beta_p)_{p \in \mathbb{M}} e_i$, para cada $i, j \in (Q_{T(A)})_0$.

Consideramos en $kQ_{T(A)}/I'$ los subespacios $\mathscr{P}_{ij} = \pi(e_j kQ_A e_i)$ y $\mathscr{F}_{ij} = \pi(e_j k(\beta_p)_{p \in \mathbb{M}} e_i)$.

Entonces $\mathscr{P}_{ij} = \iota(e_j A e_i) \simeq e_j A e_i$. Así $\displaystyle\sum_{i,j} \dim_k \mathscr{P}_{ij} = \dim_k A$.

Probaremos que $\dim_k(\mathscr{P}_{ij}) \geq \dim_k(\mathscr{F}_{ji})$.

Observemos primero que $\mathscr{F}_{ji} \neq 0$ si y sólo si $\mathscr{P}_{ij} \neq 0$, pues si $\mathscr{F}_{ji} \neq 0$, existe un camino q en $e_i k(\beta_p)_{p \in \mathbb{M}} e_j$ que no está en I' y así posee un suplemento γ por Observación 5.18 (3). Luego γ es un camino de kQ_A y γ no pertenece a I'. Entonces $0 \neq \widetilde{\gamma} \in \mathscr{P}_{ij}$ y así $\mathscr{P}_{ij} \neq 0$. Recíprocamente, si $\mathscr{P}_{ij} \neq 0$, existe un camino q de kQ_A que no está en I' y así posee un suplemento γ nuevamente por Observación 5.18 (3). Luego γ es un camino de $e_i k(\beta_p)_{p \in \mathbb{M}} e_j$ y γ no pertenece a I'. Entonces $0 \neq \widetilde{\gamma} \in \mathscr{F}_{ji}$ y así $\mathscr{F}_{ji} \neq 0$.

Por lo tanto asumimos que ambos, $\mathscr{F}_{ji}$ y $\mathscr{P}_{ij}$, son no nulos y elegimos caminos $\mu_1, \cdots, \mu_f \in (\beta_p)_{p \in \mathbb{M}}$ tal que $\{\widetilde{\mu_1}, \cdots, \widetilde{\mu_f}\}$ es base de $\mathscr{F}_{ji}$.

Se tiene entonces que $\mu_t \notin I'$ si $t \in \{1, \cdots, f\}$. Así, μ_t tiene un suplemento en un ciclo elemental $C_t = \mu_t \gamma_t$ para todo $t \in \{1, \cdots, f\}$ por Observación 5.18 (3). Se tiene que $\widetilde{\gamma_1}, \cdots, \widetilde{\gamma_f}$ están en kQ_A.

Si $\widetilde{\gamma_1}, \cdots, \widetilde{\gamma_f}$ fueran linealmente dependientes en $kQ_{T(A)}/I'$, como ι es monomorfismo, $\overline{\gamma_1}, \cdots, \overline{\gamma_f}$ serían linealmente dependientes en A. Como los $\overline{\gamma_t}$ son todos no nulos en A para $t \in \{1, \cdots, f\}$, el Lema 5.2 nos dice que $\gamma_1, \cdots, \gamma_f$ no son distintos dos a dos.

Supongamos que dos de los caminos $\gamma_1, \cdots, \gamma_f$ son iguales. Digamos que $\gamma_1 = \gamma_2$. En-

tonces los ciclos elementales C_1 y C_2 tienen en común al camino γ_1. O sea, $C_1 = \mu_1\gamma_1$ y $C_2 = \mu_2\gamma_1$ de donde $\mu_2 - \mu_1$ es un elemento de I'. Como $I' \subseteq \operatorname{Ker}\phi$ se tiene que $\widetilde{\mu_2} = \widetilde{\mu_1}$, lo que contradice el hecho que $\widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2}$ son elementos de una base de $\mathscr{F}_{ji}$.
Luego $\widetilde{\gamma_1}, \cdots, \widetilde{\gamma_f}$ son elementos de $\mathscr{P}_{ij}$ distintos dos a dos y en consecuencia son linealmente independientes en $kQ_{T(A)}/I'$.
De modo que $\dim_k(\mathscr{P}_{ij}) \geq \dim_k(\mathscr{F}_{ji})$.
De esta manera,
$\dim_k kQ_{T(A)}/I' \leq \sum_{i,j}(\dim_k \mathscr{P}_{ij} + \dim_k \mathscr{F}_{ij}) \leq \sum_{i,j}(\dim_k \mathscr{P}_{ij} + \dim_k \mathscr{P}_{ji}) = 2\dim_k A = \dim_k T(A)$.
Por otro lado, como $\overline{\Phi} : kQ_{T(A)}/I' \twoheadrightarrow T(A)$ es sobreyectiva tenemos que $\dim_k kQ_{T(A)}/I' \geq \dim_k T(A)$.
Es decir, $\dim_k kQ_{T(A)}/I' = \dim_k T(A)$, y $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$, como queríamos demostrar. $\square$

Utilizando este resultado, podemos ahora describir las relaciones del álgebra considerada en el Ejemplo 5.7.

Ejemplo 5.19. Sea A el álgebra dada en el Ejemplo 5.7. Entonces las relaciones en $Q_{T(A)}$ están dadas por:

$$\begin{array}{lll}
(\widetilde{\alpha_1})^2 = 0 & \widetilde{\alpha_3\beta_{p_1}} = 0 & \widetilde{\alpha_2\beta_{p_2}} = 0 \\
\widetilde{\alpha_3\alpha_1\beta_{p_1}} = 0 & \widetilde{\alpha_2\alpha_1\beta_{p_2}} = 0 & \\
\alpha_2\widetilde{\alpha_1\beta_{p_1}}\alpha_2 = 0 & \beta_{p_1}\widetilde{\alpha_2\alpha_1}\beta_{p_1} = 0 & \alpha_1\widetilde{\beta_{p_1}\alpha_2}\alpha_1 = 0 \\
\alpha_3\widetilde{\alpha_1\beta_{p_2}}\alpha_3 = 0 & \beta_{p_2}\widetilde{\alpha_3\alpha_1}\beta_{p_2} = 0 & \alpha_1\widetilde{\beta_{p_2}\alpha_3}\alpha_1 = 0 \\
\widetilde{\beta_{p_1}\alpha_2} = \widetilde{\beta_{p_2}\alpha_3} & &
\end{array}$$

Ejemplo 5.20. Sea A dada por el carcaj Q_A:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha_1"] & \bullet \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[r, "\alpha_3"] & \bullet \arrow[loop right, "\alpha_4"] \end{tikzcd}$$

con las relaciones $(\overline{\alpha_1})^2 = (\overline{\alpha_4})^2 = 0$.
Además, $\{\overline{p_1} = \overline{\alpha_1\alpha_2}; \overline{p_2} = \overline{\alpha_4\alpha_3}\}$ es una k - base de $\operatorname{soc}_{A^e} A$ y así el carcaj de $T(A)$ es

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_{p_1}"'] & \bullet \arrow[l, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[r, shift left, "\alpha_3"] & \bullet \arrow[loop right, "\alpha_4"] \arrow[l, shift left, "\beta_{p_2}"] \end{tikzcd}$$

Los ciclos elementales son: $C_1 = \beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2$ y $C_2 = \beta_{p_2}\alpha_4\alpha_3$; y todas sus permutaciones. De modo que las relaciones en $T(A)$ están dadas por:

$$
\begin{array}{lll}
(\widetilde{\alpha_1})^2 = (\widetilde{\alpha_4})^2 = 0 & \widetilde{\alpha_3\beta_{p_1}} = 0 = \widetilde{\alpha_2\beta_{p_2}} & \widetilde{\beta_{p_1}\alpha_2} = 0 = \widetilde{\beta_{p_2}\alpha_3} \\
\beta_{p_1}\widetilde{\alpha_1\alpha_2\beta_{p_1}} = 0 & \alpha_1\widetilde{\alpha_2\beta_{p_1}\alpha_1} = 0 & \alpha_2\widetilde{\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2} = 0 \\
\beta_{p_2}\widetilde{\alpha_4\alpha_3\beta_{p_2}} = 0 & \alpha_4\widetilde{\alpha_3\beta_{p_2}\alpha_4} = 0 & \alpha_3\widetilde{\beta_{p_2}\alpha_4\alpha_3} = 0 \\
\widetilde{\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2} = \widetilde{\beta_{p_2}\alpha_4\alpha_3} & \widetilde{\alpha_2\beta_{p_1}\alpha_1} = \widetilde{\alpha_1\alpha_2\beta_{p_1}} & \widetilde{\alpha_4\alpha_3\beta_{p_2}} = \widetilde{\alpha_3\beta_{p_2}\alpha_4}
\end{array}
$$

Capítulo 6

Extensiones triviales de álgebra gentiles y álgebras de grafo de Brauer.

En este capítulo probaremos que la descripción obtenida de las relaciones de la extensión trivial de un álgebra monomial puede simplificarse cuando el álgebra A es gentil.

Veremos que es posible determinar si un álgebra $B = kQ_B/I_B$, dada por su carcaj y relaciones, es la extensión trivial de un álgebra gentil. Caracterizamos tales álgebras B en base a propiedades de sus ciclos y mostramos cómo encontrar todas las álgebras gentiles A tales que $T(A) \cong B$.

Luego se da la definición de grafo de Brauer y de álgebra asociada a un grafo de Brauer siguiendo a [B]. Demostramos que las extensiones triviales de álgebras gentiles coinciden con las álgebras de grafo de Brauer con multiplicidad 1 en todos sus vértices, resultado obtenido por S. Schroll en [S] con otros métodos. Nosotros aquí lo demostramos probando que B es el álgebra asociada a un tal grafo de Brauer si y sólo si los ciclos de su carcaj satisfacen las mismas propiedades que caracterizan a los ciclos de las extensiones triviales de las álgebras gentiles.

6.1. La extensión trivial de un álgebra gentil.

En esta sección estudiaremos la extensión trivial $T(A)$ en el caso particular en que A es un álgebra gentil. Comenzamos observando algunas propiedades particulares de las álgebras gentiles.

Si $A = kQ_A/I_A$ es una k-álgebra de dimensión finita, todo camino no nulo es un subcamino de algún camino maximal y si además el camino es no trivial y A es un álgebra gentil, este camino maximal es único. De esta manera, si A es un álgebra gentil toda flecha está contenida en un único camino maximal, a lo sumo dos caminos maximales comienzan en un mismo vértice dado, y a lo sumo dos caminos maximales terminan en un vértice dado. Así dos caminos maximales distintos no pueden tener una flecha en común. Luego, los caminos maximales sólo se intersectan en un vértice de Q_A. Estas observaciones surgen directamente de las definiciones correspondientes, como puede verse en [S].

Observación 6.1. En el Ejemplo 5.7 tenemos que la flecha α_1 está contenida en dos ciclos elementales (maximales). En el caso de las álgebras gentiles esto no puede ocurrir, como se muestra en el Ejemplo 5.20, donde todo camino está contenido en un único ciclo elemental (maximal).

La descripción del ideal de relaciones de $T(A)$ obtenida en el capítulo anterior puede simplificarse en el caso en que A es un álgebra gentil, pues la extensión trivial de este tipo de álgebras satisface propiedades particulares, como puede verse en la siguiente proposición.

Proposición 6.2. *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra gentil. Entonces su extensión trivial $T(A)$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) Todo camino no trivial en $kQ_{T(A)}$ y no nulo en $T(A)$ está contenido en un único ciclo maximal, a menos de permutaciones. En particular, si C_1 y C_2 son dos ciclos maximales de j a j, entonces C_1 y C_2 no se solapan (es decir no tienen flechas en común) y $\widetilde{C_1} = \widetilde{C_2}$ en $T(A)$.

(ii) Existen a lo sumo dos ciclos distintos de j a j en $kQ_{T(A)}$ maximales en $T(A)$ para todo j en $\{1, \cdots, n\}$.

Demostración. (i) Resulta del hecho que los ciclos maximales de $T(A)$ coinciden con los ciclos de la forma $C = p_h\beta_{p_h}$, con $p_h \in \mathbb{M}$ por la Proposición 5.12 y del hecho que todo camino no trivial de kQ_A está contenido en un único camino maximal, por ser A un álgebra gentil.

En particular, si C_1 y C_2 son dos ciclos maximales de j a j, entonces tienen a e_j como suplemento común. Luego el camino $C_1 - C_2 \in I'$ por satisfacer la condición (ii) de la Proposición 5.17. Así $\widetilde{C_1} = \widetilde{C_2}$ en $T(A)$, como queríamos demostrar.

(ii) Sabemos que todo ciclo elemental C_i posee una única flecha β_{p_i} y que la longitud de cada ciclo no es inferior a 2. Supongamos por el absurdo que existen tres ciclos $C_1 = \delta_1 \, q_1 \, \gamma_1$, $C_2 = \delta_2 \, q_2 \, \gamma_2$ y $C_3 = \delta_3 \, q_3 \, \gamma_3$ de j a j en $kQ_{T(A)}$ maximales en $T(A)$, donde γ_i, δ_i son flechas de $Q_{T(A)}$ y q_i es un camino de $kQ_{T(A)}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Los ciclos C_1, C_2, C_3 no tienen flechas en común por (i).

Además, γ_1, γ_2, γ_3 no pueden ser todas flechas de Q_A pues A es gentil. Si ninguna de ellas es una flecha de Q_A se tiene que las flechas δ_1, δ_2, δ_3 están en Q_A, lo que tampoco puede suceder por ser A gentil. Tenemos entonces los siguientes 2 casos:

Caso 1: Dos de las flechas γ_i, digamos γ_1 y γ_2 son flechas de Q_A y así γ_3 debe ser la flecha β_{p_3}. Luego δ_3 debe ser una flecha de Q_A y $\widetilde{\gamma_1} \, \widetilde{\delta_3}$ y $\widetilde{\gamma_2} \, \widetilde{\delta_3}$ son nulos pues si alguno de los caminos $\widetilde{\gamma_1} \, \widetilde{\delta_3}$, $\widetilde{\gamma_2} \, \widetilde{\delta_3}$ fuera no nulo, entonces ese camino estaría contenido en un ciclo maximal C'. Como γ_1, γ_2 no están contenidas en C_3 y δ_3 sí lo está, y como los ciclos maximales no se solapan, entonces los ciclos maximales C' y C_3 son distintos. Así δ_3 está contenida en dos ciclos maximales, lo que contradice que toda flecha de $Q_T(A)$ está contenida en un único ciclo maximal por (i). Luego $\widetilde{\gamma_1} \, \widetilde{\delta_3}$ y $\widetilde{\gamma_2} \, \widetilde{\delta_3}$ son nulos, pero esto no puede suceder por ser A un álgebra gentil.

Caso 2: Sólo una de las flechas γ_i, digamos γ_1 es flecha de Q_A y así $\gamma_2 = \beta_{p_2}$ y $\gamma_3 = \beta_{p_3}$. Entonces δ_2, δ_3 son flechas de Q_A. El resultado se obtiene del caso 1 por dualidad.

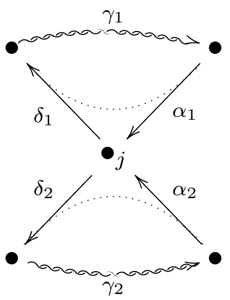
Luego, existen a lo sumo 2 ciclos maximales de j a j, como queríamos demostrar. □

Los siguientes tres lemas establecen propiedades de un álgebra gentil, que serán de utilidad para describir a su extensión trivial.

Lema 6.3. *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra gentil y $C = \alpha_s \cdots \alpha_1$ un ciclo de origen j no nulo en A. Entonces $\overline{\alpha_1 \, \alpha_s} = 0$.*

Demostración. Por ser C no nulo tenemos que $\overline{\alpha_s \cdots \alpha_1} \neq 0$. Supongamos por el absurdo que $\overline{\alpha_1 \, \alpha_s} \neq 0$. Entonces $\overline{\alpha_1 \, C} = \overline{\alpha_1 \alpha_s \cdots \alpha_1} \neq 0$ pues I está generado por caminos de longitud 2. Por la misma razón $\overline{\alpha_1 \, C^k} \neq 0$ para todo k mayor a uno, lo que contradice que A es de dimensión finita. □

Lema 6.4. *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra gentil. Entonces Q_A no contiene ningún subcarcaj de la forma*



$$q_1 = \alpha_1\,\gamma_1\,\delta_1$$

$$q_2 = \alpha_2\,\gamma_2\,\delta_2$$

con q_1, q_2 ciclos distintos de origen j, con $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ no nulos en A.

Demostración. Por Lema 6.3 sabemos que $\overline{\delta_1\,\alpha_1} = \overline{\delta_2\,\alpha_2} = 0$. Supongamos por el absurdo que Q_A posee dos ciclos q_1, q_2 de origen j, $\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ elementos distintos y no nulos en A. Por ser A un álgebra gentil se tiene que $\overline{\delta_2\,\alpha_1}$ y $\overline{\delta_1\,\alpha_2}$ son no nulos. Entonces $(q_2\,q_1)^r \neq 0$ para todo r mayor o igual que 1 pues I_A está generado por caminos de longitud 2, y esto contradice que A es de dimensión finita. □

Lema 6.5. *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra gentil. Si $\dim_k \operatorname{End}_{T(A)}(P_j) > 2$ para algún $T(A)$ - módulo proyectivo indescomponible P_j, entonces existe un ciclo de kQ_A que comienza en j que no es nulo en A.*

Demostración. Como $\dim_k \operatorname{End}_{T(A)}(P_j) > 2$ existe un ciclo de j a j no elemental y no nulo en $T(A)$ pues de lo contrario $\dim_k \operatorname{End}_{T(A)}(P_j) = 1$ por Proposición 6.2. Sea γ un tal ciclo. Existe un ciclo elemental C de j a j que puede escribirse en la forma $C = \delta\gamma$ con δ no trivial. Entonces δ es un ciclo de j a j y una permutación de C tiene la forma $p\,\beta_p$ con $p \in \mathbb{M}$ (por Proposición 5.12). Luego, β_p está en δ ó β_p está en γ y así uno de los ciclos γ ó δ está en kQ_A. □

Podemos ahora determinar $\dim_k \operatorname{End}_{T(A)}(P_j)$ cuando A es un álgebra gentil que posee un ciclo en j no nulo en A.

Proposición 6.6. *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra gentil que posee un ciclo γ de j a j no nulo en A. Entonces hay un ciclo δ de j a j en $kQ_{T(A)}$ no nulo en $T(A)$, $\delta \neq \gamma$, tal que las clases de caminos $\widetilde{e_j}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}$, $\widetilde{\gamma\,\delta} = \widetilde{\delta\,\gamma}$ forman una base de $\operatorname{End}_{T(A)} P_j$.*

Demostración. Sea $\gamma = \alpha_s \cdots \alpha_1$ con α_i flechas de Q_A para todo $i \in \{1, \cdots, s\}$ un ciclo de j a j de kQ_A no nulo en A. Sabemos que existe un único ciclo elemental C de $kQ_{T(A)}$

de j a j que lo contiene, por la Proposición 6.2. Sea $\delta = \epsilon_r \cdots \epsilon_1$ con ϵ_i flechas de $Q_{T(A)}$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$ el suplemento de γ en el ciclo elemental C. Entonces δ es un ciclo de j a j distinto de γ, no nulo en $T(A)$ y podemos suponer $C = \gamma\,\delta$. Además una permutación de C tiene la forma $p\,\beta_p$ con $p \in \mathbb{M}$.

Sabemos que $\widetilde{\alpha_1\,\alpha_s} = 0$ por Lema 6.3, $\widetilde{\epsilon_1\,\epsilon_r} = 0$ pues el camino $\epsilon_1\,\epsilon_r$ no está contenido en ningún ciclo elemental y los caminos $\widetilde{\epsilon_1\,\alpha_s}$ y $\widetilde{\alpha_1\,\epsilon_r}$ son no nulos en $kQ_{T(A)}$ pues toda permutación de un ciclo maximal es maximal.

Afirmamos que los únicos ciclos en j no nulos en $T(A)$ son γ, δ y $C = \gamma\,\delta$ y su permutación $C' = \delta\,\gamma$. En efecto:

Sabemos que $C = \alpha_s \cdots \alpha_1 \epsilon_r \cdots \epsilon_1$, $C = \epsilon_r \cdots \epsilon_1 \alpha_s \cdots \alpha_1$ y $\widetilde{\alpha_1\,\alpha_s} = 0$. Entonces $\epsilon_r \neq \alpha_s$ y $\epsilon_1 \neq \alpha_1$.

Supongamos que existe otro ciclo de j a j en $kQ_{T(A)}$ no nulo en $T(A)$. Entonces está contenido en un ciclo elemental $C' = \rho_t \cdots \rho_1$ de j a j. Entonces C y C' no tienen flechas en común. Además C' tiene una permutación de la forma $p'\,\beta_{p'}$ con $p' \in \mathbb{M}$. Se presentan dos casos:

Caso 1: γ es maximal. Entonces $\delta = \beta_p$. Luego, $\rho_1 \neq \beta_{p'}$ o $\rho_t \neq \beta_{p'}$ por el Lema 6.4. Supongamos $\rho_1 \neq \beta_{p'}$. Entonces $\rho_1 \alpha_s \neq 0$ por ser A gentil y esto contradice la maximalidad de γ. Suponiendo $\rho_t \neq \beta_{p'}$ se llega análogamente a la misma contradicción.

Caso 2: γ no es maximal. Luego, $\epsilon_1 \neq \beta_p$ o $\epsilon_r \neq \beta_p$. Supongamos $\epsilon_1 \neq \beta_p$. Entonces $\rho_1 = \beta_{p'}$ por ser A gentil. Luego $\rho_t \neq \beta_{p'}$ y $\alpha_1 \rho_t \neq 0$ por ser A gentil. Por lo tanto $\alpha_1 \rho_t$ está contenido en un ciclo maximal C'' y así α_1 está contenida en dos ciclos distintos, lo cual es una contradicción.

Del análisis precedente surge que los únicos ciclos en j no nulos en $T(A)$ son γ, δ, $C = \gamma\,\delta$ y su permutación $C' = \delta\,\gamma$ y así $\mathrm{End}_{T(A)}\,P_j$ está generado por $\widetilde{e_j}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}$, $\widetilde{\gamma\,\delta} = \widetilde{\delta\,\gamma}$. $\square$

Observación 6.7. La hipótesis acerca de la existencia de un ciclo de kQ_A no nulo en A de la proposición anterior es equivalente a la existencia de un ciclo de $kQ_{T(A)}$ no maximal en $T(A)$.

Consideremos las siguientes propiedades de los ciclos de una k-álgebra de dimensión finita $B = kQ_B/I_B$:

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.

(T2) Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B está contenido en un único ciclo maximal en B, a menos de permutaciones.

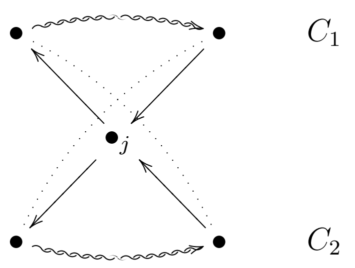
(T3) Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kQ_B maximales en B para cualquier vértice j de Q_B. Si hay dos, son iguales en B.

(T4) Si hay un ciclo $\gamma = \alpha_s \cdots \alpha_1$ en kQ_B de j a j que es no nulo y no maximal en B, entonces $\overline{\alpha_1 \alpha_s} = 0$ en B y $\dim_k \operatorname{End}_B(P_j) = 4$.

Observación 6.8. Sea $B = kQ_B/I_B$ una k-álgebra de dimensión finita que satisface (T1), (T2), (T3) y (T4). Luego toda flecha de Q_B está contenida en un ciclo no nulo en B. Sea j un vértice de Q_B, entonces:

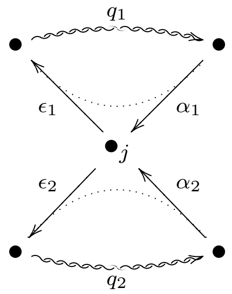
(a) Si hay un único ciclo de j a j en kQ_B no nulo en B, éste es maximal por $(T2)$, y hay una única flecha que sale de (llega a) j.

(b) Si hay exactamente dos ciclos distintos C_1, C_2 de j a j no nulos en B, éstos son ambos maximales por $(T4)$, pues en caso contrario $\dim_k \operatorname{End}_B(P) = 4$. Esta situación se ilustra en el siguiente diagrama:



donde $\overline{C_1} = \overline{C_2}$, y $\dim_k \operatorname{End}_B(P_j) = 2$, con base $\{\overline{e_j}, \overline{C} = \overline{C'}\}$.

(c) Si hay más de dos ciclos distintos de j a j no nulos en B, por $(T3)$ sabemos que hay uno que no es maximal. En este caso, $\dim_k \operatorname{End}_B(P_j) = 4$ por T_4, hay cuatro ciclos de j a j en kQ_B y dos de ellos son maximales, uno permutación del otro, como se muestra en el siguiente diagrama:



$$\gamma = \alpha_1\, q_1\, \epsilon_1$$

$$\delta = \alpha_2\, q_2\, \epsilon_2$$

con γ y δ no maximales, $\overline{\gamma\delta} = \overline{\delta\gamma}$ y $C_1 = \gamma\,\delta$, $C_2 = \delta\,\gamma$ los ciclos de kQ_B maximales en B, que son iguales en B.

En cualquier caso, hay a lo sumo dos flechas que salen de j o que llegan a j.

Observación 6.9. Un álgebra $B = kQ_B/I_B$ que satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ está unívocamente determinada por su carcaj Q_B y los ciclos de kQ_B maximales en B. Esto es: Si las álgebras A, B satisfacen $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$, entonces son isomorfas si y sólo si tienen el mismo carcaj y los mismos ciclos maximales.

Observación 6.10. Demostramos que si A es un álgebra gentil entonces $B = T(A)$ satisface $(T1)$ por Proposición 5.12, $(T2)$ por Proposición 6.2 (i), $(T3)$ por Proposición 6.2 y $(T4)$ por la Proposición 6.6.

La validez de $(T2)$ nos permite describir de manera más sencilla las relaciones de la extensión trivial de un álgebra gentil, simplificando (ii) en el Teorema 5.17 como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 6.11. *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra gentil. Sea I' el ideal generado por:*

(i) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $C - C'$, donde C y C' son ciclos elementales que comienzan en un mismo vértice de $Q_{T(A)}$.

Entonces I' es admisible e $I' = \operatorname{Ker}\Phi$. Luego $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

Observación 6.12. El resultado anterior proporciona una manera simple y directa de construir la extensión trivial de un álgebra gentil. En [S] Schroll asocia a un álgebra gentil A un grafo de Brauer y prueba que la extensión trivial de A coincide con el álgebra de grafo de Brauer asociada a dicho grafo de Brauer. Las relaciones entre estos enfoques se desarrollarán en la sección siguiente.

Observación 6.13. Si A es un álgebra gentil entonces toda flecha de $Q_{T(A)}$ aparece una única vez en un ciclo de $kQ_{T(A)}$ maximal en $T(A)$, como se observa en el Ejemplo 5.20.

Probaremos que la recíproca de la Observación 6.10 vale: Si B satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$, entonces existe un álgebra gentil A tal que $B \cong T(A)$. La siguiente proposición prueba su existencia pero además nos dice cómo construir A.

Proposición 6.14. *Sea $B = kQ_B/I_B$ una k-álgebra de dimensión finita que satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$. Sea Q_A el carcaj que se obtiene eliminando exactamente una flecha de cada ciclo de kQ_B maximal en B, y sea $I_A = kQ_A \cap I_B$ el ideal inducido. Entonces $A = kQ_A/I_A$ es un álgebra gentil con $T(A) \cong B$.*

Demostración. Probemos todas las condiciones que deben satisfacerse para que A sea gentil.
$(S1)$ I_A está generado por caminos. En efecto:
Supongamos que hay una relación $\overline{k_1q_1} + \overline{k_2q_2} + ... + \overline{k_rq_r} = 0$, donde $0 \neq k_i \in k$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$ y todos los q_i son caminos distintos en kQ_A y no nulos en A. Elegimos una tal suma con r mínimo.
Podemos suponer que al menos uno de los q_i es maximal en A pues en caso contrario se puede extender uno de ellos, por ejemplo q_1, a un camino maximal $q'q_1q$ y reemplazamos la relación original por $\overline{k_1q'q_1q} + \overline{k_2q'q_2q} + ... + \overline{k_rq'q_rq} = 0$.
Supongamos q_1 maximal en A. Sea α una flecha de Q_A. Entonces $\overline{\alpha}\,\overline{q_1} = 0$ por la maximalidad de q_1. Así $\overline{k_2\alpha q_2} + ... + \overline{k_r\alpha q_r} = 0$. Luego, por la minimalidad de r se tiene que $\overline{\alpha}\,\overline{q_2} = \cdots = \overline{\alpha}\,\overline{q_r} = 0$ y así todos los q_i son maximales.
Por la construcción de A tenemos una flecha $\epsilon \in Q_B$ tal que $q_1\epsilon$ es un ciclo maximal en B. Entonces $\overline{k_1q_1\epsilon} + \overline{k_2q_2\epsilon} + ... + \overline{k_rq_r\epsilon} = 0$ en B con el primer sumando no nulo. Hay otro sumando además del primero que es no nulo. Digamos que $\overline{q_2\epsilon} \neq 0$ en B. Entonces podemos suponerlo maximal en B, pues si no podría completarse a $gq_2\epsilon$ maximal en B. Como ϵ no está en Q_A, tenemos que $g\,q_2$ está en A y es no nulo. Por la maximalidad de q_2 resulta que g es trivial.

Luego $q_1\epsilon$, $q_2\epsilon$ son ciclos maximales de B que contienen a ϵ. Por (T2) resulta que son iguales en kQ_B. Luego $q_1 = q_2$ en kQ_A, lo que contradice que todos los q_i son caminos distintos de kQ_A.

Así, I_A está generado por caminos.

$(S2)$ Cada vértice de Q_A es fuente de a lo sumo 2 flechas y final de a lo sumo 2 flechas.

En efecto:

Por Observación 6.8 los vértices de Q_B tienen esta propiedad. En particular, los del subcarcaj Q_A también tienen esta propiedad.

Las propiedades $(S3)$: Para cada flecha $\alpha \in Q_A$ existe a lo sumo una flecha $\pi \in Q_A$ tal que $\alpha\pi \notin I_A$ y existe a lo sumo una flecha $\epsilon \in Q_A$ tal que $\epsilon\alpha \notin I_A$ y $(G1)$: Para cada flecha $\alpha \in Q_A$ existe a lo sumo una flecha $\rho \in Q_A$ tal que $\alpha\rho \in I_A$ y existe a lo sumo una flecha $\epsilon \in Q_A$ tal que $\epsilon\alpha \in I_A$ se verifican pues toda flecha α de Q_A es una flecha de Q_B y así es consecuencia de la Observación 6.8. $(G2)$ I_A está generado por caminos de longitud dos.

Supongamos que $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ es un elemento de I_A con $r > 2$, donde las α_i son flechas de Q_A $\forall\, i \in \{1, \cdots, r\}$, y $\overline{\alpha_i\alpha_{i+1}} \neq 0$. Tenemos que $\alpha_1\alpha_2$ y $\alpha_2\alpha_3$ son caminos no nulos en A con una flecha en común, luego por $(T2)$ están ambos contenidos en un mismo ciclo C de Q_B, maximal en B. Pueden darse los siguientes casos:

Caso 1: $\alpha_1 = \alpha_r$. Entonces $C \neq \alpha_2 \cdots \alpha_1$ pues A se obtuvo eliminando una flecha de cada ciclo de kQ_B maximal en B.

Luego, por $(T4)$, $\overline{\alpha_1\alpha_2} = 0$, lo que contradice nuestra hipótesis inicial $\overline{\alpha_1\alpha_2} \neq 0$.

Caso 2: $\alpha_1 \neq \alpha_r$. Entonces $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ es subcamino propio de C, lo cual contradice que $\overline{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r} = 0$.

Del análisis anterior tenemos que I_A está generado por caminos de longitud 2.

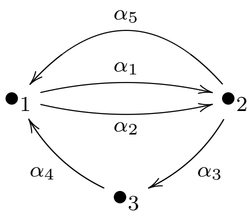
Además, como consecuencia de la construcción de A tenemos que su extensión trivial $T(A) = kQ_{T(A)}/I_{T(A)}$ verifica que $Q_{T(A)} = Q_B$, los ciclos de kQ_B maximales en B coinciden con los ciclos de $kQ_{T(A)}$ maximales en $T(A)$. Por otro lado, $T(A)$ satisface las propiedades $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ por la Observación 6.10. Así $T(A) \cong B$ por Observación 6.9. □

La Observación 6.10 y la Proposición 6.14 nos brindan la siguiente caracterización de las extensiones triviales de las álgebras gentiles en términos de los ciclos de B y sus propiedades.

Teorema 6.15. *Existe un álgebra gentil A tal que $T(A) \cong B$ si y sólo si B es una k-álgebra de dimensión finita con una presentación que satisface* $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ *y* $(T4)$.

Ejemplo 6.16. Consideremos el álgebra $B = kQ_B/I_B$ donde

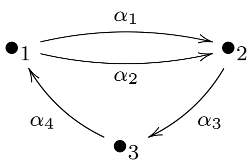
Q_B



$$
\begin{aligned}
I_B = <\ & \alpha_1\,\alpha_4,\ \alpha_3\,\alpha_2,\ \alpha_5\,\alpha_1,\ \alpha_2\,\alpha_5,\\
& \alpha_5\,\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_5,\ \alpha_1\,\alpha_5\,\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1,\\
& \alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_5\,\alpha_2,\ \alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_5\,\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3,\\
& \alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_5\,\alpha_2\,\alpha_4,\\
& \alpha_5\,\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1 - \alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_5\,\alpha_2,\\
& \alpha_1\,\alpha_5\,\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3 - \alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_5\ >
\end{aligned}
$$

De la observación directa de Q_B e I_B surge que B satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$. Consideremos el álgebra que se obtiene eliminando α_5 del único ciclo maximal presente en Q_B a menos de permutaciones. El álgebra gentil $A = kQ_A/I_A$ obtenida es la siguiente:

Q_A



$$I_A = <\ \alpha_1\,\alpha_4,\ \alpha_3\,\alpha_2\ >$$

Observemos además que si construimos $T(A)$ a través de la caracterización dada en la Proposición 6.11 se obtiene que $T(A) = B$.

6.2. Extensiones triviales y álgebras de grafo de Brauer.

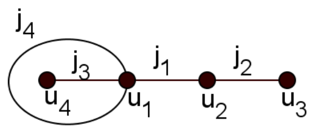
En esta sección vamos a considerar las álgebras de grafo de Brauer definidas en [B], suponiendo siempre que todos los vértices del grafo de Brauer asociado tienen multiplicidad uno. Estableceremos una correspondencia biunívoca entre estas álgebras y aquellas que satisfacen las condiciones $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ estudiadas en la sección anterior.

Esto nos permitirá demostrar que dichas álgebras de grafo de Brauer coinciden con las extensiones triviales de álgebras gentiles, resultado dado por S. Schroll en [S].

Definición 6.17. Un ***grafo de Brauer*** es un grafo Γ finito y conexo (posiblemente con aristas múltiples y lazos) donde a cada vértice se le asigna un ordenamiento cíclico de las aristas que inciden en él, y un número entero positivo llamado la ***multiplicidad*** del vértice. Si $j_1, j_2, \cdots, j_r, j_1$ es el ordenamiento cíclico de las aristas alrededor de u diremos que $j_1, j_2, \cdots, j_r$ es una ***secuencia de sucesores*** de j_1 en el vértice u. Si un lazo j_k incide en u, aparece dos veces en cualquier secuencia de sucesores de este vértice, y estas apariciones se nombran j_k y $\widehat{j_k}$. La secuencia de sucesores de j_1 en el vértice u es única si j_1 no es un lazo en u. Si j_1 es un lazo en u hay dos secuencias de sucesores de j_1 en u, una que comienza en j_1 y otra en $\widehat{j_1}$.

En todos los ejemplos de esta sección fijamos el orden antihorario en cada vértice de Γ, y la multiplicidad es uno en cada uno de estos vértices.

Ejemplo 6.18. Consideremos el siguiente grafo de Brauer Γ, con multiplicidad uno y ordenamiento cíclico antihorario en cada uno de los vértices.



Las secuencias de sucesores son las siguientes:

de j_1 en u_1 : $j_1, j_4, j_3, \widehat{j_4}$

de j_4 en u_1 : $j_4, j_3, \widehat{j_4}, j_1$
$\widehat{j_4}, j_1, j_4, j_3$

de j_3 en u_1 : $j_3, \widehat{j_4}, j_1, j_4$

de j_3 en u_4 : j_3

de j_1 en u_2 : j_1, j_2

de j_2 en u_2 : j_2, j_1

de j_2 en u_3 : j_2

Definición 6.19. Se dice que una k-álgebra de dimensión finita B_Γ es el ***álgebra de grafo de Brauer*** asociada al grafo de Brauer Γ si existe una correspondencia biunívoca entre las aristas j del grafo y los B_Γ - módulos simples S_j de modo que la cubierta proyectiva P_j de S_j tiene la siguiente descripción: $P_j/\operatorname{rad}(P_j) \cong \operatorname{soc}(P_j) \cong S_j$, y $\operatorname{rad}(P_j)/\operatorname{soc}(P_j)$ es una suma directa de dos (posiblemente nulos) módulos uniseriales U_j y V_j correspondientes a los vértices u y v donde incide la línea j, definidos como sigue. Si $j = j_1, j_2, \cdots, j_r$ es una secuencia de sucesores para j sobre el vértice u, entonces U_j es el módulo uniserial con factores de composición (desde el top) $S_{j_2}, S_{j_3}, \cdots, S_{j_r}$ (observemos que $U_j = 0$ si $r = 1$). Si j_1 no es un lazo, V_{j_1} corresponde análogamente a la secuencia de sucesores de j_1 sobre el vértice v. Si j_1 es un lazo en u, V_{j_1} corresponde a la secuencia de sucesores que comienza en $\widehat{j_1}$.

Continuando con el Ejemplo 6.18 tenemos que los módulos proyectivos indescomponibles son los siguientes:

$$\begin{array}{ccc} & S_{j_1} & \\ S_{j_4} & & \\ S_{j_3} & & S_{j_2} \\ S_{j_4} & & \\ & S_{j_1} & \end{array} \qquad \begin{array}{c} S_{j_2} \\ S_{j_1} \\ S_{j_2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} S_{j_3} \\ S_{j_4} \\ S_{j_1} \\ S_{j_4} \\ S_{j_3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & S_{j_4} & \\ S_{j_3} & & S_{j_1} \\ S_{j_4} & & S_{j_4} \\ S_{j_1} & & S_{j_3} \\ & S_{j_4} & \end{array}$$

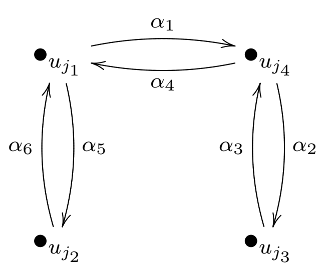
El carcaj Q_Γ asociado al grafo de Brauer Γ se define de la siguiente forma:
Por cada arista j_k de Γ existe un vértice v_{j_k} en Q_Γ. Si la arista j_{k+1} de Γ sigue inmediatamente a la arista j_k en alguna secuencia de sucesores entonces existe una flecha $u_{j_k} \to u_{j_{k+1}}$ en Q_Γ. Se tiene entonces que Q_Γ es el carcaj asociado al álgebra B_Γ.
Así, para cada secuencia de sucesores $j_1, j_2, \cdots, j_r$ de j_1 en u se obtiene un ciclo $u_{j_1} \to u_{j_2} \to \cdots \to u_{j_r} \to u_{j_1}$ que es maximal en B_Γ. Si j_1 no es un lazo, designaremos $C_{j_1,u}$ a este ciclo. Si j_1 es un lazo, llamaremos $C_{j_1,u}$, $C_{\widehat{j}_1,u}$ a los ciclos que corresponden a las dos apariciones de j_1 en el ordenamiento cíclico de u.
Se obtienen de esta manera todos los ciclos maximales en B_Γ, y toda flecha está contenida en uno de estos ciclos.
De la descripción de los módulos proyectivos indescomponibles se desprende que tenemos tres tipos de relaciones:
• Relaciones de tipo uno: $C_{j_1,u} - C_{j_1,v}$ si la arista j_1 de Γ incide en dos vértices distintos $u, v \in \Gamma$; $C_{j_1,u} - C_{\widehat{j}_1,u}$ si la arista j_1 de Γ es un lazo en u.
• Relaciones de tipo dos: $\alpha\, C_{j_1,u}$, donde $u_{j_1} \overset{\alpha}{\to} u_{j_2}$.
• Relaciones de tipo tres: Caminos de longitud dos de kQ_Γ que no son subcaminos de

ningún ciclo $C_{j_1,u}$.

La construcción de Q_Γ e I_Γ a partir de un grafo de Brauer Γ también puede encontrarse en [S], [GSS] y [GSST].

Ejemplo 6.20. Para el grafo dado en el Ejemplo 6.18 el álgebra de grafo de Brauer B_Γ está dada por:

Q_{B_Γ}



$$\begin{aligned} I_{B_\Gamma} = < \; & \alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1 - \alpha_6\,\alpha_5, \\ & \alpha_1\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_2 - \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_4, \\ & \alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_5,\ \alpha_6\,\alpha_5\,\alpha_6, \\ & \alpha_1\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1,\ \alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_2, \\ & \alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_4,\ \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_4\,\alpha_3 \\ & \alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_4\,\alpha_1,\ \alpha_5\,\alpha_4,\ \alpha_1\,\alpha_6 \; > \end{aligned}$$

Ejemplo 6.21. Si A es un álgebra gentil, $T(A)$ es un álgebra de grafo de Brauer, el cual tiene multiplicidad igual a uno en todos sus vértices, y $T(A^{op})$ también.

Dada un álgebra B por su carcaj y relaciones, veremos en lo que sigue que es posible determinar si B es un álgebra de grafo de Brauer. Más precisamente, caracterizaremos a las álgebras de grafo de Brauer por su carcaj y relaciones, a partir de las propiedades de sus ciclos, utilizando para esto las propiedades $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ enunciadas en la Sección 6.1.

Damos a continuación dos proposiciones, que combinadas nos brindan el resultado deseado.

Proposición 6.22. *Sea $B_\Gamma = kQ_\Gamma/I_\Gamma$ un álgebra de grafo de Brauer, con grafo de Brauer Γ con multiplicidad uno en todos sus vértices. Entonces B_Γ satisface las condiciones $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$.*

Demostración. $(T1)$ Toda permutación de un ciclo maximal en B_Γ es un ciclo maximal en B_Γ.

Resulta de que toda permutación del ciclo $C_{j_1,u}$ maximal en B_Γ se obtiene al considerar una permutación de la secuencia de sucesores $j_1, j_2, \cdots, j_r$ de j_1 en el vértice u, que es también una secuencia de sucesores en el mismo vértice, y por lo tanto da origen a otro ciclo de kQ_Γ maximal en B_Γ.

$(T2)$ Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B_Γ está contenido en un único ciclo maximal en B_Γ, a menos de permutaciones.

Sea $u_{j_1} \to u_{j_2} \to \cdots \to u_{j_k}$ un camino no trivial de kQ_Γ y no nulo en B_Γ. De la descripción de Q_Γ se tiene que cada arista j_{t+1} sigue inmediatamente a la arista j_t en una secuencia de sucesores de j_1 en algún vértice u de Γ. Entonces el camino considerado es subcamino del ciclo $C_{j_1,u}$ que es maximal en B_Γ y es el único que lo contine a menos de permutaciones, por construcción.

$(T3)$ Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kQ_B maximales en B_Γ para cualquier vértice j de Q_B. Si hay dos, son iguales en B_Γ.

Resulta de que toda arista j_1 de Γ incide en dos vértices, y así todo vértice u_{j_1} de Q_Γ es comienzo de a lo sumo dos ciclos maximales en B_Γ. Además, si hay dos ciclos maximales que comienzan en un mismo vértice, son de la forma $C_{j_1,u}$ y $C_{j_1,v}$ si j_1 no es lazo, ó $C_{j_1,u}$ y $C_{\widehat{j}_1,u}$ si j_1 es lazo. En el primer caso $C_{j_1,u} - C_{j_1,v}$ es una relación de tipo uno y en el segundo lo es $C_{j_1,u} - C_{\widehat{j}_1,u}$.

$(T4)$ Si hay un ciclo $\gamma = \alpha_s \cdots \alpha_1$ en kQ_B de j a j que es no nulo y no maximal en B_Γ, entonces $\overline{\alpha_1\alpha_s} = 0$ en B y $\dim_k \mathrm{End}_B(P_j) = 4$.

Sea $\gamma : u_{j_1} \to u_{j_2} \to \cdots \to u_{j_{s-1}} \to u_{j_1}$ un ciclo de u_{j_1} a u_{j_1} en kQ_Γ no nulo y no maximal en B_Γ. Entonces la arista j_1 incide dos veces en el vértice u de Γ y da lugar a las secuencias de sucesores $j_1, j_2, \cdots, j_{s-1}, \widehat{j}_1, j_{s+1}, \cdots, j_r$ y $\widehat{j}_1, j_{s+1}, \cdots, j_r, j_1, j_2, \cdots, j_{s-1}$. Luego, el camino $u_{j_{s-1}} \xrightarrow{\alpha_s} u_{j_1} \xrightarrow{\alpha_1} u_{j_2}$ no es subcamino de ningún ciclo maximal pues j_2 no es sucesor inmediato de $\widehat{j}_1$ en ninguna secuencia de sucesores. Entonces tenemos la relación de tipo 3 $\overline{\alpha_1\alpha_s} = 0$.

Además el ciclo $\gamma' : u_{j_1} \to u_{j_{s+1}} \to \cdots \to u_{j_r} \to u_{j_1}$ de u_{j_1} a u_{j_1} en kQ_Γ también es no nulo y no maximal en B_Γ por construcción. Luego, los ciclos que comienzan en u_j son γ, γ', y los ciclos maximales $\gamma'\gamma = C_{j_1,u}$ y $\gamma\gamma' = C_{\widehat{j}_1,u}$. Como $C_{j_1,u} - C_{\widehat{j}_1,u}$ es una relación de tipo 1 tenemos que $\mathrm{End}_{B_\Gamma} P_{j_1}$ está generado por e_{j_1}, γ, γ' y $C_{j_1,u}$. En consecuencia $\dim_k \mathrm{End}_{B_\Gamma} P_{j_1} = 4$. □

Proposición 6.23. *Sea $B = kQ_B/I_B$ una k-álgebra de dimensión finita que satisface*

$(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ *y* $(T4)$. *Entonces, existe un grafo de Brauer* Γ *con multiplicidad 1 en todos sus vértices, tal que el álgebra de grafo de Brauer* B_Γ *es isomorfa a* B.

Demostración. Podemos suponer que B no es semisimple. Consideremos en el conjunto $\{C_1, C_2, \cdots, C_r\}$ de ciclos de kQ_B maximales en B, que es no vacío por (T2), la relación $C_i \sim C_j$ si y sólo si C_j es una permutación de C_i. Esta relación es de equivalencia por $(T1)$. Tomemos el conjunto cociente $\{\overline{C_1}, \cdots, \overline{C_s}\}$ con $s \leq r$.

Construimos el grafo Γ como sigue.

El conjunto de vértices de Γ es $\{u_{\overline{C}_1}, u_{\overline{C}_2}, \cdots, u_{\overline{C}_s}\} \bigcup \{u_{v_j}$ tal que $v_j \in Q_0$ y v_j es inicio de un único ciclo maximal$\}$.

El conjunto de aristas de Γ es $\{a_1, a_2, \cdots, a_t\}$ donde t es la cantidad de vértices de Q.

Cada arista a_i tiene extremos $u_{\overline{C_1}}, u_{\overline{C_2}}$ si el vértice v_i de Q es comienzo de dos ciclos maximales distintos C_1 y C_2 ó $u_{\overline{C_1}}, u_{v_i}$ si el vértice v_i es comienzo de un único ciclo maximal C_1. En el primer caso puede ocurrir que $\overline{C_1} = \overline{C_2}$ y entonces a_i es un lazo. En el segundo caso a_i es la única arista que tiene por extremo a u_{v_i}.

Definimos un ordenamiento cíclico (que elegimos antihorario) sobre las aristas que tienen por extremo el mismo vértice $u_{\overline{C}_k}$ de la siguiente manera.

La arista a_{j+1} sigue inmediatamente a la arista a_j en el ordenamiento cíclico sobre el vértice $u_{\overline{C}_k}$ si existe una flecha $j \to j+1$ de Q_B que está contenida en un ciclo maximal de $\overline{C}_k$. Este ordenamiento está bien definido pues toda flecha está contenida en un único ciclo maximal a menos de permutaciones por $(T2)$. Luego, todas las aristan que inciden en el vértice $u_{\overline{C}_k}$ corresponden a todos los vértices del ciclo maximal C_k.

Asignamos a cada vértice de Γ la multiplicidad uno obteniendo así un grafo de Brauer asociado a Q_B.

A partir del grafo de Brauer Γ obtenemos el álgebra de grafo de Brauer $B_\Gamma = Q_\Gamma/I_\Gamma$. Sabemos que B_Γ satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$, por Proposición 6.22.

Veamos que $Q_B = Q_\Gamma$, y que los ciclos de Q_B maximales en B coinciden con los ciclos de Q_Γ maximales en B_Γ.

Probemos primero que $Q_B = Q_\Gamma$. En efecto:

Los vértices de Q_B están en correspondencia 1-1 con las aristas de Γ por construcción de Γ, y ya vimos que éstas se encuentran en correspondencia 1-1 con los vértices de Q_Γ como consecuencia de la definición de álgebra de grafo de Brauer. Entonces los vértices de Q_B

coinciden con los de Q_Γ.

Decir que existe una flecha $v_j \to v_{j+1}$ en Q_B equivale a decir que la arista $j+1$ de Γ sucede inmediatamente a la arista j en el ordenamiento cíclico sobre un mismo vértice, y esto significa que existe una flecha $u_j \to u_{j+1}$ en Q_Γ. Esto es, las flechas de Q_B coinciden con las de Q_Γ.

Veamos que los ciclos de Q_B maximales en B coinciden con los ciclos de Q_Γ maximales en Γ. En efecto.

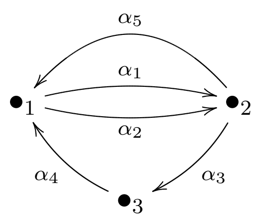
Decir que $C_j = v_{j_1} \to v_{j_2} \to \cdots \to v_{j_t}$ es un ciclo de kQ_B maximal en B es equivalente a decir que $j_1, j_2, \cdots, j_t$ son todas las aristas que tienen por extremo al vértice $u_{\overline{C}_j}$ de Γ ordenadas de esa manera. Esto significa que $j_1, j_2, \cdots, j_t$ es una secuencia de sucesores, lo cual equivale a decir que $C_{j_1, u_{\overline{C}_j}}$ es un ciclo de Q_Γ maximal en B_Γ. Entonces los ciclos de Q_B maximales en B coinciden con los ciclos de Q_Γ maximales en Γ.

Luego, $B_\Gamma \cong B$ por Observación 6.9. $\square$

Ejemplo 6.24. Consideremos el álgebra definida en el Ejemplo 6.16.

$B = kQ_B/I_B$ donde

Q_B



$$I_B = < \alpha_1\alpha_4,\ \alpha_3\alpha_2,\ \alpha_5\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_5,$$
$$\alpha_5\alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_1\alpha_5,\ \alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_1,$$
$$\alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2,\ \alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_4\alpha_3,$$
$$\alpha_4\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_4,$$
$$\alpha_5\alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_1 - \alpha_4\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2,$$
$$\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_4\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_1\alpha_5 >$$

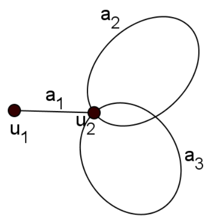
Vimos que B satisface las condiciones $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$. Por lo tanto, podemos encontrar un álgebra de grafo de Brauer isomorfa a ella.

Para ello asociamos a B un grafo de Brauer Γ mediante la construcción que se realizó en la demostración de la Proposición 6.23.

Hay un único ciclo de Q_B maximal en B_Γ (salvo permutaciones), que se corresponde con el vértice u_1 de Γ. Como además, el vértice 3 de Q_B es inicio de un único ciclo maximal, tenemos otro vértice en Γ, que llamaremos u_2.

Los vértices 1, 2 y 3 de Q_B determinan las aristas a_1, a_2 y a_3.

El vértice 1 es inicio de un único ciclo maximal, que está representado por u_1. De modo que la arista a_1 tiene por extremos a u_1 y u_2. Los vértice 2 y 3 son comienzo de 2 ciclos maximales, uno permutación de otro, que están representados por u_2. Por lo tanto estas aristas son lazos en u_2. El grafo de Brauer Γ es



A partir de él, obtenemos el álgebra de grafo de Brauer, que coincide con B.

Observación 6.25. Sea $B = kQ_B/I_B$ una k-álgebra de dimensión finita que satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$. El grafo de Brauer Γ obtenido directamente a partir de Q_B coincide con el que construye Schroll en [S] a partir del álgebra gentil A para obtener el álgebra de grafo de Brauer que es la extensión trivial de A.

Las dos proposiciones anteriores nos dan una caracterización de las álgebras de grafo de Brauer.

Teorema 6.26. *Existe un grafo de Brauer Γ con multiplicidad 1 en todos sus vértices, tal que el álgebra de grafo de Brauer B_Γ es isomorfa a B si y sólo si $B = kQ_B/I_B$ es una k-álgebra de dimensión finita que satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$.*

Además, los Teoremas 6.15 y 6.26 nos brindan una demostración alternativa al siguiente resultado probado por S. Schroll en [S].

Teorema 6.27. *[S] B es un álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno en todos los vértices del grafo de Brauer asociado si y sólo si existe un álgebra gentil A tal que $T(A) = B$.*

Para finalizar este capítulo reunimos los resultados enunciados en los Teoremas 6.15, 6.26 y 6.27 en un teorema que nos permite reconocer a las extensiones triviales de álgebras gentiles a través de diferentes enfoques.

Teorema 6.28. *Sea $B = kQ_B/I_B$ una k-álgebra de dimensión finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *B es la extensión trivial de un álgebra gentil.*

(ii) *B satisface las condiciones $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$.*

(iii) *B es un álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno en todos los vértices del grafo de Brauer asociado.*

Por lo expuesto en este capítulo, tenemos dos maneras diferentes de construir la extensión trivial de un álgebra gentil $A = kQ_A/I_A$.
La primera se realiza directamente utilizando la Proposición 6.11. Además, por la Observación 6.10 $T(A)$ satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$ y por lo tanto $T(A)$ es isomorfa a un álgebra de grafo de Brauer por la Proposición 6.23.
La segunda es la desarrollada por Schroll en [S]. Se construye un grafo de Brauer Γ_A y a partir de él su álgebra de grafo de Brauer B_{Γ_A}, la cual es isomorfa a $T(A)$.
Además, dada un álgebra $B = kQ_B/I_B$ podemos determinar si B es la extensión trivial de un álgebra gentil por la Proposición 6.14. En caso de que lo sea podemos hallar a partir de B el álgebra gentil A tal que $T(A) \cong B$ y el grafo de Brauer Γ tal que $B_\Gamma \cong B$ por la Proposición 6.23.

Ejemplo 6.29. Sea $B = kQ_B/I_B$ donde

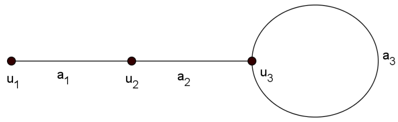
Q_B

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] & \bullet_2 \arrow[l, bend left, "\alpha_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_3"] & \bullet_3 \arrow[l, bend left, "\alpha_5"] \arrow[loop right, "\alpha_4"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} I_B = < \; & \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_1,\ \alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_2,\ \alpha_3\,\alpha_2, \\ & \alpha_1\,\alpha_5,\ \alpha_5\,\alpha_3,\ \alpha_4\,\alpha_4,\ \alpha_3\,\alpha_5\,\alpha_4\,\alpha_3, \\ & \alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_5\,\alpha_4,\ \alpha_5\,\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_5, \\ & \alpha_2\,\alpha_1 - \alpha_5\,\alpha_4\,\alpha_3, \\ & \alpha_3\,\alpha_5\,\alpha_4 - \alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_5 \; > \end{aligned}$$

Así definida B satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$.
Podemos obtener el grafo de Brauer Γ asociado a Q_B observando que
los ciclos de kQ_B maximales en B son
$C_1 = \alpha_1\,\alpha_2$ y su permutación $\alpha_2\,\alpha_1$.
$C_2 = \alpha_5\,\alpha_4\,\alpha_3$ y sus permutaciones $\alpha_3\,\alpha_5\,\alpha_4$ y $\alpha_4\,\alpha_3\,\alpha_5$.
El vértice 1 de Q_B es comienzo de un único ciclo maximal.
De esta manera, los vértices de Γ son: u_1, $u_2 = u_{\overline{C}_1}$ y $u_3 = u_{\overline{C}_2}$.

Como Q_B posee tres vértices, Γ tiene tres aristas: a_1, cuyos extremos son u_1 y u_2; a_2, que tiene por extremos a u_2 y u_3; y a_3 que es un lazo en u_3.
De modo que Γ es



donde consideramos el ordenamiento cíclico antihorario y multiplicidad uno en cada uno de los vértices.
Por otro lado, observemos que si eliminamos en Q_B una flecha de cada ciclo maximal (a menos de permutaciones) podemos construir a partir de B un álgebra gentil A tal que $T(A) = B$. Eliminando las flechas α_2 y α_5 obtenemos
$A = kQ_A/I_A$, con

Q_A: $\bullet_1 \xleftarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_3 \circlearrowright \alpha_4$; $I_A = < \alpha_4\alpha_4 >$.

Bibliografía

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø. Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press (1997).

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronki. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press (2006).

[B] D. J. Benson. Representations and cohomology. I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30. Cambridge University Press (1991).

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg. Homological algebra. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press. (1956)

[F] E. A. Fernández. Extensiones triviales y álgebras inclinadas iteradas. PhD thesis, Universidad Nacional del Sur, Argentina (1999). http://inmabb.criba.edu.ar/tesis/1999

[FP] E. A. Fernández, M. I. Platzeck. Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner. J. Algebra 249 (2002), no. 2, 326-344.

[Fro1] F. G. Frobenius. Theorie der hyperkomplexen Grössen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1903), 504-537. 14, 15, 333, 334.

[Fro2] F. G. Frobenius. Theorie der hyperkomplexen Grössen II. Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1903), 634-645. 14, 15, 333, 334.

[GSS] E. Green, S. Schroll, N. Snashall. Group actions and coverings of Brauer graph algebras. http://arxiv.org/pdf/1112.2199.pdf

[GSST] E. Green, S. Schroll, N. Snashall, R. Taillefer. The Ext algebra of a Brauer graph algebra. http://arxiv.org/pdf/1302.6413.pdf. Paper to appear in Journal of Noncommutative Geometry.

[HK] K. Hoffman, R. Kunze. Álgebra lineal. Editorial Prentice/Hall internacional (1973).

[Nak1] T. Nakayama. On Frobeniusean algebras I. Ann. of Math. 40 (1939), 611-633. 180, 336, 340, 341, 345, 377, 380, 391.

[Nak2] T. Nakayama. On Frobeniusean algebras II. Ann. of Math. 42 (1941), 1-21. 104, 336, 340, 341, 376, 380, 382.

[S] S. Schroll. Trivial extensions of gentle algebras and Brauer graph algebras. Journal of Algebra, v 444 (2015), 183-200.

[SY] A. Skowronki, K. Yamagata. Frobenius Algebras I. European Mathematical Society (2011).