UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctorado en Matemática

Una contribución al desarrollo de los qM_3-retículos

María A. Jiménez

BAHÍA BLANCA **ARGENTINA**

2015

A mis amados hijos,

Andrés, Victoria y Leandro,

con la esperanza que un futuro prometedor les aguarde.

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no se ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática, durante el período comprendido entre julio de 2011 y septiembre de 2015, bajo la dirección del Dr. Aldo V. Figallo.

25 de septiembre de 2015 María A. Jiménez

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que de forma directa o indirecta me han ayudado en la realización de esta tesis.

En primer lugar a mi Director el Dr. Aldo V. Figallo, por su labor de dirección, por haberme sugerido los temas que constituyen el estudio de la misma, por la confianza que puso en mí para llevarla a cabo y por haber cumplido un rol fundamental y decisivo en mi formación matemática.

Mi gratitud profunda a mi estimada amiga Inés Pascual, por sus enseñanzas, sugerencias y completa disposición para resolver mis dudas en los temas de representaciones topológicas y sobre todo por su apoyo y aliento en momentos complicados de mi vida, sin los cuales me hubiera resultado muy difícil continuar con el desarrollo de esta tesis.

A todos los que fueron y son integrantes en este momento del grupo de investigación conducido por el Dr. A. V. Figallo, porque sus tareas y esfuerzos me han servido de ejemplo y muchos de ellos me han aportado material valioso para completar el trabajo.

Mi reconocimiento a los profesores de la Universidad Nacional de San Juan de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática y a los de la Universidad Nacional del Sur que me dictaron los cursos de posgrado en los temas de lógica algebraica, por su contribución y gran influencia en mi formación académica.

Al Dr. Aldo Figallo Orellano, por su aporte al facilitarme bibliografía apropiada a los temas y su estímulo.

A mi hijo Andrés, por su ayuda en todo lo concerniente al soporte informático y por la edición de los gráficos.

Finalmente quiero agradecer a toda mi querida familia, a la de origen, sobre todo mis padres, por los valores de honestidad y trabajo que me inculcaron, y a la que formé, mi esposo y mis hijos, porque no solamente han sido una fuente de apoyo, sino también de inspiración para realizar esta obra.

Introducción

La importancia de la Lógica Matemática, desde el punto de vista de sus aplicaciones a la técnica, después del advenimiento de las computadoras en la década del 40, ha brindado una oportunidad extraordinaria a las aplicaciones de esta disciplina. En lo que concierne a las lógicas no clásicas y a las lógicas polivalentes, el desarrollo es vertiginoso. La historia muestra que el estudio de las lógicas no clásicas y de las lógicas polivalentes, tuvieron en su comienzo motivaciones de orden filosófico. Ya Aristóteles pensaba que ciertos enunciados, tenían más de dos valores lógicos de verdad. El estudio sistemático de las lógicas no clásicas, lo inició Brouwer, matemático holandés, a fines del siglo XIX, y el de las lógicas polivalentes, esto es, sistemas en los que se admite, para los valores de verdad de las proposiciones, más de los dos valores clásicos *verdadero* y *falso*, lo iniciaron, basados en motivaciones diferentes, J. Łukasiewicz y E. Post en la década del 20, del siglo pasado.

Łukasiewicz introdujo primero un cálculo proposicional trivalente y posteriormente consideró sistemas lógicos multivalentes, como una tentativa para ampliar los métodos de tablas de verdad para las proposiciones modales y las nociones de posibilidad y de necesidad, íntimamente relacionadas con tales proposiciones. El consideró, para cada número natural n, un cálculo proposicional $n-$valente, en el que a cada proposición se le puede asignar n valores de verdad distintos. Posteriormente presentó un sistema proposicional infinito-valente, en el cual a cada proposición se le puede asignar como valor de verdad, cualquier número real comprendido entre 0 y 1. El cálculo bivalente de Łukasiewicz coincide con el cálculo proposicional clásico.

Las observaciones de Brouwer, sobre los Fundamentos de la Matemática, lo llevaron a considerar un sistema proposicional en donde se elimina la ley del tercero excluído, y el estudio del tal sistema, condujo a Heyting, discípulo de Brouwer, a presentar una formulación algebraica de tal cálculo proposicional, la que actualmente es conocida como álgebra de Heyting. Estas álgebras desempeñan en el cálculo proposicional no clásico (o intuicionista), un rol análogo al que juegan las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico.

Sobre el avance algebraico de las lógicas polivalentes de Łukasiewicz podemos decir que Gr. Moisil, en 1940, introdujo la noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente, con el propósito de caracterizar algebraicamente las matrices del cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz, posteriormente presenta las álgebras de Łukasiewicz $n-$valentes, pero no considera los conectivos de implicación y negación introducidos por Łukasiewicz.

A. Rose observó que estas álgebras no son matrices del cálculo proposicional $n-$valente de Łukasiewicz, si $n \geq 5$. De todos modos, las motivaciones que condujeron a Moisil a la definición de estas álgebras, especialmente su posible aplicación al estudio del comportamiento real de circuitos, las hace interesantes de por sí.

En un trabajo de 1965, Gr. Moisil observa que las álgebras que él llamó de Łukasiewicz $n-$valentes, y que nosotros llamamos, álgebras de Moisil de orden n, son álgebras de Brouwer y por lo tanto se corresponden con un cálculo proposicional intuicionista extendido, con el agregado de una negación y de ciertos operadores modales s_i, que gradúan de alguna manera la *posibilidad* de una proposición. Luiz Monteiro probó también que las algebras de Moisil de orden 3, pueden ser definidas como álgebras de Brouwer con una negación que satisface ciertas condiciones especiales.

Entre los trabajos que se ocupan del estudio de lógicas polivalentes, con fines a sus aplicaciones a la técnica, podemos señalar [44], de M. E. Valentinuzzi. En el mismo, establece una relación clara entre el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz y los circuitos con interruptores dobles de tres posiciones. Para ello define un alfabeto, un lenguaje y una semántica adecuada con el fin de lograr la relación antes mencionada.

Dos propiedades de configuración de circuito ocurren en este caso: una simetría axial, consecuencia de la dualidad exhibida por las álgebras de Łukasiewicz, y un fenómeno de superposición, estrechamente relacionado con el lenguaje. Por último, la serie y las conexiones eléctricas de Boole paralelas, aparecen como parte del ínfimo y supremo de Łukasiewicz.

Por otra parte, muchos autores han presentado otras contrapartidas algebraicas de las lógicas polivalentes, como así también han definido otras clases de álgebras relacionadas con las álgebras de Łukasiewicz $n-$valentes, en particular A. V. Figallo introdujo los M_3-retículos, en *Los M_3-Reticulados* [14], Rev. Colombiana de Matemática, XXI, 1987, como álgebras $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$, donde el reducto $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo distributivo. Su estudio estuvo motivado en la implementación de ciertos circuitos de conmutación trivalentes.

En este mismo trabajo, demostró que $\triangle(x \wedge \sim x) = 0$, es el primer elemento del retículo $\langle L, \wedge, \vee\rangle$, razón por la cual pueden ser definidas equivalentemente como álgebras $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0)$ tal que el reducto $\langle L, \wedge, \vee, 0\rangle$ es un retículo distributivo con primer elemento 0. En un trabajo posterior ([16]), A. V. Figallo definió: (I) $x|y = x \wedge \triangle(\sim (x \vee \nabla y) \vee \sim (y \vee \sim x))$ y probó que si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo con último elemento 1, entonces $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Brouwer. Este hecho, le permitió caracterizar las congruencias utilizando la operación (I), y la noción de n-ideal que había introducido. Demostrando que la variedad es semisimple y que la única álgebra simple es: $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$, donde T es la cadena con tres elementos $\{0, 1/2, 1\}$ con $0 \leq 1/2 \leq 1$ y las operaciones $\sim$ y $\triangle$ están definidas en la siguiente tabla:

x	$\sim x$	$\triangle x$
0	0	0
1/2	1	0
1	1/2	1

Observemos que la operación definida en (I), puede ser caracterizada como el primer elemento del conjunto $\{z \in L : x \leq y \vee z\}$, por lo que esta operación puede ser considerada como una implicación dual de Heyting.

A. V. Figallo en otro trabajo publicado en 1990 ([16]), probó que $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, -, \Diamond, 0, 1\rangle$, es un álgebra de Łukasiewicz trivalente en el sentido de [27]. Donde las operaciones $\Diamond$ y $-$ están definidas como siguen:

(i) $\Diamond x = \neg\neg x$,

(ii) $-x = (\neg\neg x \to x) \wedge (x \to \neg x)$.

siendo

(iii) $x \to y = \triangle \sim (x \vee \sim 1) \vee y$,

(iv) $\neg x = \triangle \sim (\nabla x \vee \sim 1)$

De este resultado, teniendo en cuenta un teorema de representación que Figallo había demostrado para estas álgebras, se puede asegurar que si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo con último elemento 1, y $\Diamond$ y $-$ son las indicadas en (i) y (ii) respectivamente, entonces $\langle L, \wedge, \vee, -, \Diamond, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente centrada, con centro $c = \sim 1$.

Por otra parte, ha sido muy estudiado el hecho de dotar a las álgebras, relacionadas con lógicas clásicas y no clásicas, de cuantificadores. La noción de cuantificador sobre álgebras de Boole fue introducida por Halmos en [22]. Esta noción algebraica se corresponde con la noción lógica de cuantificador existencial de la lógica clásica. Como en el caso de las álgebras de Boole, con cada cuantificador existencial sobre un álgebra de De Morgan, está asociado un cuantificador universal, ambos cuantificadores están interdefinidos. Por este motivo son llamadas álgebras de De Morgan monádicas. Esta noción fue extendida a álgebras correspondientes a diferentes lógicas no clásicas, como por ejemplo las realizadas en 1974, por A. Monteiro y O. Varsavsky ([31]), que introdujeron el concepto de álgebras de Heyting monádicas, donde los cuantificadores no están relacionados entre sí, es decir no es posible definir uno de ellos a partir del otro, como sucede en las álgebras monádicas donde $\exists x = \sim \forall \sim x$ y por lo tanto, debieron equipar a las álgebras de Heyting con los dos cuantificadores. En muchas álgebras que tienen como base un álgebra de De Morgan, basta equipar a la estructura algebraica con un cuantificador, como son los casos de las álgebras de Łukasiewicz n-valentes monádicas consideradas por Abad, las álgebras de De Morgan monádicas investigadas por Petrovich y las álgebras de De Morgan tetravalentes modales monádicas, estudiadas por Ziliani. Sin embargo, debemos señalar que hay otras clases de álgebras donde esto también es posible, como por ejemplo, las álgebras de Tarski monádicas o las álgebras Implicativas de Łukasiewicz monádicas introducidas y estudiadas por A. V. Figallo en [17] y [18].

Otro hecho interesante, es el agregado en las estructuras algebraicas de operadores que son automorfismos. En los años 50, Moisil, introdujo las álgebras de Boole simétricas para estudiar la teoría de circuitos, posteriormente las mismas fueron estudiadas por A. Monteiro en [30]. Este último autor más tarde, estudió las álgebras de Boole cíclicas, es decir álgebras de Boole con un automorfismo de período k. Posteriormente otros autores consideraron ideas similares en otras clases de álgebras.

Lo curioso en este tipo de álgebras, es que muchas veces a partir de la estructura k-cíclica es posible definir un cuantificador, como es el caso de las álgebras de Wajsberg $(n+1)$-acotadas cíclicas, donde es posible definir un U-operador a partir del automorfismo, pero a partir de un álgebra de Wajsberg $(n+1)$-acotada finita con un U-operador, no siempre es posible trasformarla en un álgebras de Wajsberg $(n+1)$-acotada cíclica, como fue demostrado por M. Lattanzi en su tesis doctoral. En otras álgebras, este hecho si es posible, como es el caso de las álgebras de Łukasiewicz n-valente monádicas, estudiadas por M. Abad en [1].

Todo lo expresado anteriormente motivó el estudio de los temas desarrollados en esta tesis. En ella investigamos la clase de los qM_3-retículos que son M_3-retículos dotados de un cuantificador existencial y los M_3-retículos monádicos, M_3-retículos con dos cuantificadores: existencial y universal. También estudiamos la clase de los M_3-retículos k–cíclicos, que son M_3-retículos a los que se ha agregado a su estructura un automorfismo de período k.

La mayoría de los resultados obtenidos en esta tesis han sido expuestos en reuniones anuales de la Unión Matemática Argentina, en el Congreso Antonio Monteiro y en el IV Congreso Latinoamericano de Matemáticos.

Resumen

En esta tesis investigamos la clase de los qM_3-retículos y la de los mM_3-retículos o M_3-retículos monádicos, que son M_3-retículos dotados de un cuantificador existencial, en el primer caso, y en el segundo de dos cuantificadores: existencial y universal. También estudiamos la clase de los M_3-retículos k–cíclicos, que son M_3-retículos dotados de un automorfismo de período k. Hemos organizado el trabajo en cinco capítulos, divididos a su vez en secciones y subsecciones en algunos casos.

El Capítulo 1 está dividido en cuatro secciones. En las primeras, repasamos resultados principales sobre retículos distributivos y exponemos distintos conceptos de álgebra universal y espacios de Priestley. Todos los resultados indicados son conocidos. Los hemos incluído tanto para facilitar la lectura posterior, como para fijar las definiciones. En la última sección, introducimos los M_3-retículos definidos por A. V. Figallo a sugerencia de A. Monterio en *Los M_3-Reticulados* [14], Rev. Colombiana de Matemática, XXI, 1987.

En la primera sección del Capítulo 2, indicamos una dualidad topológica para los M_3-retículos. En la segunda sección, utilizando la dualidad, caracterizamos el retículo de las congruencias de estas álgebras y determinamos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles, reencontrando los resultados que Figallo había establecido de manera algebraica, de una forma diferente, vía la topología. Luego nos dedicamos al estudio de las

congruencias principales y booleanas, demostrando que ambas coinciden, están definidas ecuacionalmente (CPDE) y son congruencias regulares y uniformes. Además probamos que la variedad $\mathbf{M_3}$, es a congruencias conmutativas, que es una variedad filtral y discriminadora y tiene la propiedad de extensión de congruencias (PEC).

El Capítulo 3, está dividido en cuatro secciones. La primera, está dedicada al estudio del sistema determinante de un M_3-retículo finito, mostrando que el conjunto ordenado de sus elementos primos, determina la estructura del mismo. En la segunda y tercera sección, indicamos un método para construir los $\mathbf{M_3}-$automorfismos y los $\mathbf{M_3}-$epimorfismos, cuando se trata de M_3-retículos finitos, y determinamos en cada caso el número de los mismos. En la cuarta sección, referida a los M_3-retículos k–cíclicos, probamos que la variedad es semisimple y determinamos el cardinal del álgebra libre finitamente generada. Comprobamos con esos resultados que dicha variedad es finitamente generada y localmente finita. Concluimos la sección estableciendo el número de estructuras cíclicas, no isomorfas, que se pueden definir sobre un M_3-retículo finito.

En el Capítulo 4, en la primera sección definimos los qM_3-retículos y estudiamos algunas propiedades válidas en esta clase. En particular, determinamos cómo a partir de una familia especial de subálgebras de un M_3-retículo, podemos obtener un cuantificador existencial de modo que lo transforme en un qM_3-retículo. En la segunda sección, extendemos la dualidad de Priestley realizada para los M_3-retículos con último elemento, al caso de los qM_3-retículos acotados. Empleando esta dualidad, en la tercera sección, probamos que la variedad es semisimple y obtenemos una caracterización funcional de los qM_3-retículos simples. De igual modo nos abocamos al estudio de las congruencias principales y booleanas, indicando sus propiedades más destacadas.

El Capítulo 5, está dedicado a los M_3-retículos monádicos. En la primera sección, mostramos propiedades de los mismos y exhibimos la relación existente entre estas álgebras y los M_3-retículos k–cíclicos. En la segunda y tercera sección, presentamos una dualidad topológica que nos facilita describir las congruencias, probar que la variedad es semisimple y obtener una caracterización funcional de los mM_3-retículos simples. En la última sección, mostramos, con técnicas topológicas, que se puede interrelacionar ambos cuantificadores, a pesar que en estas álgebras no es posible hacerlo de la manera clásica, puesto que la negación de las mismas no se comporta como una negación de De Morgan; lo que nos permite afirmar que todo qM_3-retículo es un M_3-retículo monádico.

Abstract

In this thesis, we study qM_3-lattices and mM_3-lattices or M_3-monadic lattices that are M_3-lattices provided with an existential quantifier in the first case, and, in the second case, they are provided with two quantifiers, existential and universal. We also study k–cyclic M_3-lattices, which are M_3-lattices provided with an automorphism of k period. We have organized this thesis into five chapters, divided into sections and subsections.

Chapter 1 is divided into four sections. In the first sections, we review main results on distributive lattices and we expose different universal algebra and Priestley spaces concepts. All the indicated results are well-known. We have included these concepts not only to facilitate the reading of the following sections but also to establish definitions. In the last section, we introduce M_3-lattices defined by A.V. Figallo, at suggestion of A. Monteiro in *Los M_3-Reticulados* [14], Rev. Colombiana de Matemática, XXI, 1987.

In the first section of Chapter 2, we indicate a topological duality for M3-lattices. In the second section, using this duality, we characterize the lattice of congruences of these algebras and we determine simple and subdirectly irreducible algebras, re-finding the results that Figallo had established in algebraic manner, in a different way, by means of topology. Then, we studied principal congruences and Boolean congruences, demonstrating that such congruences coincide, they are equationally defined (EDPC)

and they are regular and uniform congruences. We further prove what the $\mathbf{M_3}$ variety is to commutative congruencies; that it is a filter and discriminating variety, and that it has the property of congruencies extension (CEP).

Chapter 3 is divided into four sections. The first section is dedicated to the study of the determining the system of a finite M_3-lattice, proving that the ordered set of its prime elements determines its structure. In the second and third section, we indicate a method to construct the $\mathbf{M_3}-$automorphisms and the $\mathbf{M_3}-$epimorphisms, when it is about of finite M_3-lattices, and we also determine their number in both cases. The fourth section is dedicated to the study of the k–cyclic M_3-lattices. First, we prove that the variety is semisimple and we determine the cardinal of finitely generated free algebra. Afterward, we prove with these results that the variety is finitely generated and locally finite. To conclude this section, we determine the number of cyclic structures, non-isomorphic, that can be defined on a finite M_3-lattice.

In Chapter 4, in the first section we define qM_3-lattices and we study some valid properties of such lattices. In particular, we determine how, from a special family of sub-algebras of an M_3-lattice, we can obtain an existential quantifier in a way that transforms it into a qM_3-lattice. In the second section, we extend the Priestley duality for M_3-lattices with a last element, in the case of bounded qM_3-lattices. By using this duality, in the third section, we prove that the variety is semisimple and we also obtained a functional characterization of the simple qM_3-lattices. In the same way, we focus on the study of the principal and Boolean congruences, indicating their most outstanding properties.

Chapter 5 is dedicated to the study of monadic M_3-lattices. In the first section, we prove properties of the latter mentioned and we exhibit the relationship existing between these algebras and the k–cyclic M_3-lattices. In the second and third section, we establish a topological duality that facilitates us to describe the congruences, to prove that the variety is semisimple and to obtain a functional characterization of the simple mM_3-lattices. In the fourth section, we demonstrate that, with topological techniques, it is possible to interrelate both quantifiers, although it is not possible to do it in the classic manner in these algebras, since their negation does not behave as a De Morgan negation; which allows us to state that every qM_3-lattice is a monadic M_3-lattices.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera sección repasamos las nociones básicas y resultados principales sobre retículos distributivos y establecemos algunas notaciones generales que usamos en este trabajo. En las dos secciones siguientes exponemos distintos conceptos de álgebra universal y espacios de Priestley. En la cuarta introducimos los M_3-retículos definidos por A. V. Figallo a sugerencia de A. Monterio en *Los M_3-Reticulados* [14], Rev. Colombiana de Matemática, XXI, 1987.

1.1. Retículos distributivos

Las definiciones y resultados que utilizamos en este volumen pueden ampliarse en [2] y [6]. Con el objeto de facilitar la lectura del texto y además fijar las notaciones que empleamos, exponemos algunas nociones generales.

Un conjunto ordenado $(L, \leq)$ es un retículo si para todo $x, y \in L$ se verifica que existe el supremo y el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$, que notamos $x \wedge y$ y $x \vee y$ respectivamente. Cuando para todo $S \subseteq L$, existen el ínfimo de S y el supremo de S, que indicamos respectivamente con $\bigwedge S$ con $\bigvee S$, entonces decimos que $(L, \leq)$ es un retículo completo. Si el retículo tiene primer elemento y tiene último elemento, decimos que es un retículo acotado. En tal caso, en general, denotamos con 0 y 1 al primer y último elemento.

Si $(L, \leq)$ es un retículo completo, un elemento $a \in L$ se dice compacto si, y solo si, para todo $X \subseteq L$, si $a \leq \bigvee X$, entonces $a \leq \bigvee Y$, para algún conjunto finito $Y \subseteq X$.

Un retículo completo L, se dice un retículo algebraico, si, y solo si, cada elemento de L es supremo de un conjunto de elementos compactos de L.

Si un retículo verifica la igualdad

(D) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

se dice que es un retículo distributivo. Toda cadena es un retículo distributivo.

Si $(L, \leq)$ es un retículo distributivo, L ordenado por el orden inverso del orden $\leq$, es también un retículo distributivo que simbolizaremos con $L^{\geq}$.

En un retículo acotado L, $a \in L$ se dice complementado, si existe $b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. En este caso decimos que b es un complemento de a. Si L es distributivo y existe el complemento de un elemento éste es único. A los elementos de un retículo distributivo L que tienen complemento, se los denomina elementos booleanos y denotamos con $B(L)$ al conjunto de los elementos booleanos de L.

Un retículo distributivo acotado se dice un álgebra de Boole si todo elemento tiene complemento. En este caso al complemento de un elemento a lo denotamos generalmente por $-a$ o en algunos casos por a'. Un ejemplo típico de álgebra de Boole es el conjunto de las partes de un conjunto. Si A es un conjunto indicamos con $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de las partes de A.

Cada intervalo $[a, b]$ de un álgebra de Boole L, es un álgebra de Boole bajo el orden parcial inducido.

Un elemento a de un retículo L se dice relativamente complementado, si x está complementado en cada intervalo $[a, b]$ de L que contiene a x.

Un álgebra de Boole generalizada es un retículo distributivo con primer elemento tal que cada elemento está relativamente complementado.

Una condición necesaria y suficiente para que un retículo distributivo L con primer elemento 0 sea un álgebra de Boole generalizada, es que para cada $y \in L$ se verifique que el segmento $[0, y] = \{x \in L : 0 \leq x \leq y\}$ es un álgebra de Boole (ver [2]).

Sea L un retículo distributivo. Un subconjunto I de L es un ideal si verifica:

(i1) $I \neq \emptyset$,

(i2) si $x, y \in I$, entonces $x \vee y \in I$,

(i3) si $x \in I$, $y \in L$ y $y \leq x$, entonces $y \in I$.

Un ideal se dice primo, si es distinto de L y además verifica la siguiente propiedad:

(i4) Si $x \wedge y \in I$, entonces $x \in I$ o $y \in I$.

La noción dual de ideal (primo) es la de filtro (primo). Notamos con $X(L)$ al conjunto de los filtros primos de L y con $\mathcal{I}_p(L)$, al conjunto de los ideales primos de L. Un subconjunto I de L es un ideal, si I es un filtro de $L^{\geq}$. Un subconjunto P de L es un ideal primo si, y solo si, $L \setminus P$ es un filtro primo.

Un filtro F de un retículo L se dice maximal, si $F \neq L$ y si F' es un filtro que contiene a L, entonces $F = F'$ o $F' = L$. En un retículo distributivo todo filtro maximal es primo, pero no vale la recíproca, basta tomar por ejemplo la cadena con tres elementos $0 < a < 1$ y $F = \{1\}$.

Un filtro propio F de un retículo se dice irreducible si $F = F_1 \cap F_2$, siendo F_1 y F_2 filtros de L, implica que $F = F_1$ o $F = F_2$ y se dice completamente irreducible si del hecho de que $F = \bigcap_{i \in I} F_i$, siendo F_i filtros de L, para todo $i \in I$, se deduce que $F = F_j$ para algún $j \in I$. Un filtro C_a se dice ligado al elemento $a \in L$, si $a \notin C_a$ y si F' es un filtro que contiene a C_a, entonces $a \in F'$.

Un resultado importante es el que establece que si L es un álgebra de Boole, entonces un filtro de L es primo si, y solo si, es maximal. Mas aún esta propiedad caracteriza a las álgebras de Boole como lo prueba el conocido teorema de Nachbin [2].

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de retículos distributivos y será usado con bastante frecuencia.

Teorema de Birkhoff-Stone o del filtro primo: *Sea L un retículo distributivo. Si F e I son un filtro y un ideal de L respectivamente tales que $I \cap F = \emptyset$, entonces existe un filtro primo P tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Sea X un subconjunto de L. Notamos por $F(X)$ y con $I(X)$ al filtro y al ideal generado por X respectivamente. Se puede probar que $F(X) = \{z \in L : \text{existen } x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \text{ tales que } x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq z\}$. En forma dual se describe a $I(X)$.

Sea L un retículo acotado y a un elemento de L distinto de 0. Se dice que a es primo, si $a \leq b \vee c$ implica que $a \leq b$ o $a \leq c$, para todo $b, c \in L$. Se dice que $a \in L$ es sup-irreducible o irreducible simplemente, si vale la igualdad en las condiciones anteriores y que a es átomo si $x \leq a$ implica $x = 0$ o $x = a$ para todo $x \in L$. En un retículo, todo elemento primo o átomo es un elemento irreducible, la recíproca no siempre se verifica. En los retículos distributivos finitos todo elemento irreducible es un primo y en las álgebras de Boole finitas, irreducibles, primos y átomos coinciden. En un retículo finito L, si $a, b \in L$ son tales que $a \not\leq b$, entonces existe un irreducible q tal que $q \leq a$ y $q \not\leq b$. Como consecuencia de lo anterior, todo elemento $x \neq 0$, es supremo de los elementos irreducibles que lo preceden y si $x = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n$, con q_j elementos irreducibles para $j = 1, 2, \ldots, n$ y $x \neq q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_{j-1} \vee q_{j+1} \vee \ldots \vee q_n$ cualquiera sea $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, decimos que dicha representación es una representación irredundante de x como supremo de irreducibles.

Un filtro F se llama principal si está generado por un conjunto unitario, es decir, si existe $a \in L$ tal que $F = F(\{a\})$ y lo denotamos por $F(a)$. En forma dual con $I(a)$ indicamos al ideal generado por a. Se puede probar que un filtro $F(a)$ es primo, si, y solo si a es un elemento primo y es un filtro maximal si, y solo si, a es un átomo de L.

Si L es un retículo acotado, un operador de clausura sobre L es una función $c : L \longrightarrow L$ sobre L, tal que para todo $a, b \in L$:

(i) $a \leq c(a)$,

(ii) $c(c(a)) = c(a)$,

(iii) $a \leq b$ implica $c(a) \leq c(b)$.

Si además c es un homomorfismo superior, es decir verifica $c(a \vee b) = c(a) \vee c(b)$ y $c(0) = 0$, para todo $a, b \in L$, entonces c se denomina un operador de clausura aditivo.

Es fácil ver en este caso que la condición (iii) se deduce del hecho de que c preserva el supremo.

Sea X un espacio topológico. El ejemplo típico de operador de clausura aditivo definido sobre $\mathcal{P}(X)$, es la función que a cada subconjunto de X le asigna su clausura.

Un cuantificador sobre un retículo acotado L es una función $\nabla : L \longrightarrow L$ que satisface las siguientes identidades: (Q1) $\nabla 0 = 0$, (Q2) $a \wedge \nabla a = a$, (Q3) $\nabla(a \wedge \nabla b) = \nabla a \wedge \nabla b$, (Q4) $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$.

Cada cuantificador ∇ es un operador de clausura aditivo y es inmediato probar que todo operador de clausura que verifica además (Q1) y (Q3) es un cuantificador.

La demostración del siguiente resultado puede ser consultada en [11].

Sea L un reticulado distributivo acotado y $j : L \longrightarrow L$ un homomorfismo superior. Si F es un filtro de L y P un filtro primo de L es tal que $F \subseteq j^{-1}(P)$, entonces existe un filtro primo Q de L tal que $F \subseteq Q \subseteq j^{-1}(P)$.

Antes de continuar, en esta sección establecemos también las siguientes notaciones. Si X es un conjunto parcialmente ordenado, con $max\, X$ ($min\, X$) indicamos el conjunto de los maximales (minimales) de X. Además si $C \subseteq X$, con $(C]$ ($[C)$) representamos el conjunto de todos los elementos $x \in X$ tal que $x \leq y$ ($y \leq x$) para algún $y \in C$, y decimos que C es decreciente (creciente) si $C = (C]$ ($C = [C)$). Algunas de las propiedades de los conjuntos crecientes y decrecientes son las siguientes:

(i) C es creciente (decreciente) si, y solo si, $X \setminus C$ es decreciente (creciente).

(ii) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos crecientes (decrecientes), entonces $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ y $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ son crecientes (decrecientes).

También con $C_i(X)$ y $C_d(X)$ designamos a la familia de los cerrados crecientes de X y los cerrados decrecientes de X respectivamente.

1.2. Nociones de álgebra universal

En esta sección exponemos las nociones básicas de álgebra universal que nos serán necesarias más adelante. Las definiciones y resultados de álgebra universal que utilizamos en este volumen pueden ampliarse por ejemplo en [8, 19].

1.2.1. Algebras universales

Sea A un conjunto no vacío y n un número natural. Una operación $n-$aria sobre A es cualquier función $f : A^n \longrightarrow A$, donde n es la aridad de f. Si $n = 0$, una operación $0-$aria es una constante de A. Una operación finitaria sobre A es una operación $n-$aria para algún número natural n.

Un lenguaje o tipo de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman símbolos de función, tal que a cada miembro de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural n, llamado aridad de f y f se denomina símbolo de función $n-$ario.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{F}$, es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$, le corresponde una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}$ sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama universo o soporte del álgebra $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribimos f en lugar de $f^{\mathcal{A}}$ y si $\mathcal{F}$ es finito, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$ donde $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. En este caso, si n_i es el rango de f_i para $1 \leq i \leq k$, también decimos que A es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representamos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte A.

1.2.2. Diversos ejemplos de álgebras

Es bien conocido que a todo *retículo distributivo acotado* L, se le puede asociar un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ que verifica:

(R1) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

(R2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,

(R3) $a \wedge b = b \wedge a$,

(R4) $a \vee b = b \vee a$,

(R5) $a \wedge a = a$,

(R6) $a \vee a = a$,

(R7) $a \wedge (a \vee b) = a$,

(R8) $a \vee (a \wedge b) = a$,

(R9) $a \wedge 1 = a$,

(R10) $a \vee 0 = a$,

(D) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

En todo lo que sigue designamos con $\mathbf{L}$, a la clase de los retículos distributivos acotados (o $(0,1)-$retículos distributivos).

Como en el caso de los retículos distributivos acotados, las *álgebras de Boole* se pueden definir como álgebras $\langle A, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,0,0)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,

(B2) $x \wedge -x = 0$,

(B3) $x \vee -x = 1$.

Las álgebras de Boole son la contrapartida algebraica de la lógica clásica. Mayor información sobre estas álgebras se encuentra, por ejemplo, en [21] y [43].

Un *álgebra de Boole monádica* es un par $(A, \exists)$ formado por un álgebra de Boole A y una operación unaria $\exists$ definida sobre A que verifica las siguientes identidades:

(BM1) $\exists 0 = 0$,

(BM2) $x = x \wedge \exists x$,

(BM3) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$. (ver [33])

P. Halmos (ver [20, 22]), mostró que esta noción es el instrumento algebraico adecuado para el estudio del cálculo de predicados monádicos de la lógica clásica.

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,0,0)$ se dice un *álgebra de De Morgan* (o M–álgebra) si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se satisfacen las identidades:

(DM1) $\sim\sim x = x$,

(DM2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

Las M–álgebras están relacionadas con la lógica, en particular con la lógica $4-$valuada desarrollada por Belnap en [4]. La información sobre las M–álgebras puede ser ampliada en [2, 3, 26].

Un álgebra de De Morgan $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un *álgebra de Kleene* si para todo $x, y \in A$ se verifica la propiedad

(KL) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$.

La *álgebras de Łukasiewicz trivalentes* fueron introducidas y desarrolladas por Gr. Moisil [24]. A. Monteiro (ver [27, 28]) indicó una axiomática equivalente a la dada por Moisil y la que daremos a continuación es debida a L. Monteiro (ver [32]).

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,1,0,0)$ se dice un álgebra de Łukasiewicz trivalente (o Ł–álgebra) si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las identidades:

(L1) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(L2) $\sim x \wedge \nabla x = \sim x \wedge x$,

(L3) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Las álgebras de Heyting fueron introducidas por G. Birkhoff, de la siguiente manera: Un retículo distributivo acotado L es un *álgebra de Heyting* si para todo par a, b de elementos de L, existe el pseudocomplemento relativo de a respecto a b que será denotado con $a \to b$ y que satisface las siguientes condiciones:

(i) $a \wedge a \to b \leq b$,

(ii) para cada $c \in A$, si $a \wedge c \leq b$, entonces $c \leq a \to b$.

Por lo tanto el pseudocomplemento relativo posee la propiedad de ser el último elemento del conjunto $\{x \in L : a \wedge x \leq b\}$.

En 1955, A. Monteiro [25] demostró que estas álgebras pueden ser definidas equivalentemente como álgebras $\langle A, \vee, \wedge, \to, 0 \rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ que satisfacen las siguientes identidades:

(H1) $x \wedge 0 = 0$,

(H2) $x \to x = y \to y$,

(H3) $(x \to y) \wedge y = y$,

(H4) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$,

(H5) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$,

(H6) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$.

Si $L^{\geq}$ es un álgebra de Heyting, entonces L se denomina un *álgebra de Brouwer* y con $\mathbf{B_R}$ representamos a la clase de estas álgebras.

1.2.3. Homomorfismos y subálgebras

Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ se dice un isomorfismo de A en B, si h es inyectiva, sobre, y si para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y para toda $n-$upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos

(H) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

Cuando existe un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, decimos que $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{B}$ y escribimos $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Si h verifica solo la condición (H), h es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. En el caso que h es inyectiva, h se dice una inmersión. Si se verifica que h es sobreyectiva, decimos que h es un epimorfismo y que $\mathcal{B}$ es una imagen homomórfica de $\mathcal{A}$.

Si $\mathfrak{K}$ es una clase de álgebras tal que $A, B \in \mathfrak{K}$ y $h : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo (isomorfismo) de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, decimos que h es un $\mathfrak{K}-$homomorfismo (o $\mathfrak{K}-$isomorfismo).

Subálgebras

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ y lo notaremos $\mathcal{B} \lhd \mathcal{A}$ (o simplemente $B \lhd A$) si $B \subseteq A$ y toda operación fundamental de $\mathcal{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, para cada $X \subseteq A$ definimos

$$[X] = \bigcap\{B : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es una subálgebra de } A\}.$$

Entonces $[X]$ es una subálgebra de A, llamada la subálgebra generada por X.

Si $X \subseteq A$, decimos que X genera a $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{A}$ está generada por X si $[X] = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es finitamente generada si tiene un conjunto finito de generadores.

Cuando cada subálgebra de un álgebra, está finitamente generada, se dice que el álgebra es localmente finita. Una clase $\mathfrak{K}$ es localmente finita si todo miembro de $\mathfrak{K}$ es localmente finito.

1.2.4. Productos directos y subdirectos

Productos directos

Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Entonces el producto directo $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es $\prod\limits_{i\in I} A_i$ y si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de operación $n-$ario, se define $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), a_2(i), \ldots, a_n(i))$ donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$, es decir $f^{\mathcal{A}}$ se define coordenada a coordenada.

La aplicación $P_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ definida por $P_j(a) = a_j$ para cada $j \in I$ se denomina la proyección sobre la $j-$ésima coordenada y determina un epimorfismo.

Una clase $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ de álgebras del mismo tipo es una variedad, si es una clase cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos.

Productos subdirectos

Un álgebra $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de una familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ de álgebras, si se verifican las siguientes condiciones:

(PS1) existe una inmersión $h : \mathcal{A} \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$,

(PS2) si $P_j : \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es la proyección sobre la $j-$ésima coordenada, entonces la composición $P_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ es sobreyectiva.

Un álgebra $\mathcal{A}$ se denomina subdirectamente irreducible, si tiene más de un elemento y si $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de la familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ de álgebras, entonces existe $j \in I$ tal que $P_j \circ h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es un isomorfismo, donde h es cualquier función que verifica (PS1) y (PS2).

1.2.5. Algebras libres

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras. Un álgebra $\mathbb{L}_{\mathcal{K}} = \langle L, F \rangle$ es relativamente libre en $\mathcal{K}$ si existe $G \subseteq L$ tal que:

(L1) $[G] = L$,

(L2) si $A \in \mathcal{K}$ y $f : G \longrightarrow A$ es una función arbitraria, entonces existe un homomorfismo $h : L \longrightarrow A$ que prolonga a f.

En este caso decimos que $\mathbb{L}_{\mathcal{K}}$ tiene a G como conjunto de generadores libres y notamos $L = \mathbb{L}_{\mathcal{K}}(G)$.

Por un resultado de Birkhoff se puede asegurar que si estamos en una clase $\mathcal{V}$ que es una variedad, entonces el algebra relativamente libre $\mathbb{L}_{\mathcal{V}}$ verifica que $\mathbb{L}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$.

Una variedad $\mathcal{V}$ es localmente finita si, y solo si, G finito implica que $\mathbb{L}_{\mathcal{V}}(G)$ es un conjunto finito (ver [8]).

1.2.6. Congruencias y álgebras cociente

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces decimos que θ es una congruencia sobre $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$, si $(a_i, b_i) \in \theta$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces:

$$(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \dots, b_n)) \in \theta.$$

Por lo tanto, para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$, tenemos definido en el conjunto cociente A/θ, una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}/\theta$ que a cada $n-$upla de clases de equivalencia $(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \dots, |a_n|_\theta) \in A/\theta$ le asigna el elemento $|f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)|_\theta$.

El conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotamos por $Con(\mathcal{A})$ o a veces para simplificar escribimos $Con(A)$. Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras y $A \in \mathcal{K}$, indicamos con $Con_{\mathcal{K}}(A)$ al conjunto de las congruencias sobre $\mathcal{A}$ o también $\mathcal{K}-$congruencias, para poner de este modo en evidencia la clase de álgebras que estamos considerando. Además, en general, si $a \in A$ y θ es una congruencia sobre $\mathcal{A}$, con $|a|_\theta$ o a_θ, notaremos la clase de equivalencia de a.

Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces el álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por θ que representamos $\mathcal{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) = |f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y f es un símbolo de función $n-$aria en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. De esta definición resulta que la aplicación canónica $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $Con(\mathcal{A})$ ordenado por la relación de inclusión es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es la relación id_A, identidad sobre A, y su último elemento es $A \times A$.

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo, aunque el retículo general no lo sea. Sin embargo $Con(\mathcal{A})$ puede no ser distributivo en general, basta tomar por ejemplo el retículo de congruencias del grupo abeliano de los enteros.

Un operador de clausura C sobre un conjunto A, es un operador de clausura sobre $\mathcal{P}(A)$. Tal operador se dice algebraico, si para todo $X \subseteq A$ se verifica que $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X, Y \text{ finito}\}$.

Una caracterización del retículo de las congruencias de un álgebra $\mathcal{A}$ es el siguiente:

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, existe un operador de clausura algebraico Θ sobre $A \times A$, tal que los subconjuntos cerrados de $A \times A$ son las congruencias de $\mathcal{A}$. Entonces $Con(\mathcal{A})$ es un retículo algebraico.

El retículo de las congruencias caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles. En efecto,

Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y solo si, $Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$ tiene primer elemento.

Es decir, $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y solo, si existe $\theta_1 \in Con(\mathcal{A})$, $\theta_1 \neq id_A$ tal que $\theta_1 \subseteq \theta$ para toda $\theta \in Con(\mathcal{A})$.

Un teorema fundamental debido a G. Birkhoff es el siguiente:

Toda álgebra con más de un elemento, es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles.

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y solo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir id_A y $A \times A$. Además un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple, si es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.

Una variedad $\mathcal{V}$ es semisimple, si todo miembro de $\mathcal{V}$ es semisimple. Del teorema de Birkhoff mencionado arriba, se obtiene que una variedad $\mathcal{V}$ es semisimple si, y solo si, todo miembro subdirectamente irreducible de $\mathcal{V}$ es simple.

Propiedad de extensión de congruencias

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de extensión de congruencias (PEC), si para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ y toda $\theta \in Con(B)$, existe $\Phi \in Con(A)$ tal que $\theta = \Phi \cap (B \times B)$.

Una clase $\mathcal{K}$ tiene la PEC si toda álgebra de $\mathcal{K}$ la tiene.

Congruencias finitamente generadas

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, con $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denotamos la congruencia generada por $\{(a_i, a_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$, es decir, la menor congruencia tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en la misma clase de equivalencia. Llamamos congruencia principal a $\Theta(a_1, a_2)$ y notamos con $Con_P(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias principales de $\mathcal{A}$.

Algunos resultados útiles sobre las congruencias, que se obtienen fundamentalmente como consecuencia que Θ es un operador de clausura algebraico, son los siguientes:

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, sean $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in A$ y $\theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces

(CFG1) $\Theta(a_1, a_2) = \Theta(a_2, a_1)$,

(CFG2) $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)) = \Theta(a_1, b_1) \vee \Theta(a_2, b_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n)$, donde $\vee$ es, en este caso, la operación de supremo entre congruencias.

(CFG3) $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Theta(a_1, a_2) \vee \Theta(a_2, a_3) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$,

(CFG4) $\theta = \bigcup\{\Theta(a, b) : (a, b) \in \theta\} = \bigvee\{\Theta(a, b) : (a, b) \in \theta\}$.

Como $Con(\mathcal{A})$ es un retículo algebraico, los elementos compactos son las congruencias de $\mathcal{A}$ finitamente generadas. Notaremos con $Con_C(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias compactas de $\mathcal{A}$.

Congruencias principales definibles ecuacionalmente

Una variedad $\mathcal{V}$, tiene la propiedad de congruencias principales definibles ecuacionalmente (PCPDE), si existe un número finito de pares $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ de polinomios en cuatro variables tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ y cualesquiera sean $a, b, c, d \in A$, $(c, d) \in \theta(a, b)$ si, y solo si, $p_i(a, b, c, d) = q_i(a, b, c, d)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Algebras a congruencias distributivas

Un álgebra $\mathcal{A}$, es a congruencias distributivas, si el retículo $Con(\mathcal{A})$ es distributivo. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras, es a congruencias distributivas si, y solo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias distributivas.

Algebras a congruencias conmutativas

Un par de congruencias θ_1 y θ_2 son permutables o también que θ_1 y θ_2 permutan, si $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias conmutativas si todo par de congruencias de $\mathcal{A}$ permuta. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras, es a congruencias conmutativas si, y solo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias conmutativas.

Las congruencias conmutativas de un álgebra $\mathcal{A}$ pueden ser caracterizadas de la siguiente manera:

Si $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(CC1) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$,

(CC2) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$,

(CC3) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

Condiciones de Mal'cev

Uno de los resultados más fructíferos de las investigaciones iniciadas por A. I. Mal'cev (ver [23]) en 1950 es el que exhibe la conexión entre la conmutatividad de las congruencias para todas las álgebras de una variedad $\mathcal{V}$ y la existencia de un término ternario $p = p(x, y, z)$ tal que $\mathcal{V}$ satisface ciertas identidades que están relacionadas con p.

A.I. Mal'cev ([23]) demostró los siguientes resultados:

(CC) *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de álgebras, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{V}$ es a congruencias conmutativas,*

(ii) *existe un término ternario $p(x, y, z)$ tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ se verifica la siguiente condición:*

(P) $p(x, x, y) = y$ y $p(x, y, y) = x$.

p se denomina término de Mal'cev para $\mathcal{V}$.

(CD) *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de álgebras, para la cuál existe un término ternario $M(x, y, z)$ tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ se verifica la siguiente condición:*

(M) $M(x, x, y) = M(x, y, x) = M(y, x, x) = x$,

entonces $\mathcal{V}$ es a congruencias distributivas.

M se llama término mayoritario para $\mathcal{V}$.

Algebras a congruencias regulares

Un álgebra $\mathcal{A}$, es a congruencias regulares si para toda θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, $|a|_{\theta_1} = |a|_{\theta_2}$ para algún $a \in A$, entonces $\theta_1 = \theta_2$. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras, es a congruencias regulares si, y solo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias regulares.

Variedades aritméticas

Una variedad $\mathcal{V}$ es aritmética, si es a congruencias distributivas y conmutativas.

A.F. Pixley ([37]) caracterizó a las variedades aritméticas del siguiente modo:

Si $\mathcal{V}$ es una variedad de álgebras, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{V}$ *es aritmética,*

(ii) $\mathcal{V}$ *satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

(a) *existen términos p y M como los indicados en* (P) y (M),

(b) *existe un término $m(x,y,z)$ tal que $m(x,y,x) = m(x,y,y) = m(y,y,x) = x$.*

Congruencias factores

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, $\theta \in Con(\mathcal{A})$ es una congruencia factor, si existe $\theta^* \in Con(\mathcal{A})$ tal que:

(CF1) $\theta \cap \theta^* = id_A$,

(CF2) $\theta \vee \theta^* = A \times A$,

(CF3) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$.

El par θ, θ^* se denomina par de congruencias factores y se verifica $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\theta^*$, donde el isomorfismo está dado por $\alpha(a) = (|a|_\theta, |a|_{\theta^*})$.

Algebras directamente indescomponibles

Un álgebra $\mathcal{A}$ es directamente indescomponible, si $\mathcal{A}$ no es isomorfa al producto directo de dos álgebras no triviales.

Las congruencias factores de un álgebra $\mathcal{A}$, permiten caracterizar a las álgebras directamente indescomponibles. En efecto,

(DI1) *Un álgebra $\mathcal{A}$ es directamente indescomponible si, y solo si, las únicas congruencias factores de $\mathcal{A}$ son id_A y $A \times A$.*

Además se verifican

(DI2) *Un álgebra subdirectamente irreducible es directamente indescomponible.*

(DI3) *Si $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es una variedad a congruencias distributivas tal que todo miembro directamente indescomponible de $\mathcal{V}$ es subdirectamente irreducible, entonces $\mathcal{V}$ es semisimple.*

Congruencias uniformes

Una congruencia θ sobre $\mathcal{A}$ es uniforme, si para todo $x, y \in A$ se verifica $||x|_\theta| = ||y|_\theta|$. Es decir, las clases tienen el mismo número de elementos.

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias uniformes, si toda congruencia sobre $\mathcal{A}$ es uniforme.

Congruencias filtrales

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene congruencias filtrales si, y solo si, para cada representación subdirecta $f : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, por álgebras subdirectamente irreducibles $\mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$, cada congruencia θ sobre $\mathcal{A}$ es de la forma $(x, y) \in \theta$ si, y solo si, $\{i : f(x)(i) = f(y)(i)\} \in F$, para algún filtro F sobre I. Una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es filtral si cada álgebra de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es filtral. (ver [45] y [5]).

Variedades discriminadoras

Una función discriminadora ternaria sobre un conjunto A, es una función $t : A^3 \longrightarrow A$, definida por:

$$t(a,b,c) = \begin{cases} c & \text{si } a = b \\ a & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es discriminadora, si tiene un polinomio p que coincide con la función discriminadora en cada miembro subdirectamente irreducible de la variedad.

Tal polinomio, se denomina el polinomio discriminador ternario para $\mathcal{V}$ y se relaciona con las congruencias principales de la siguiente forma: Para toda $A \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible y $a, b \in A$, la congruencia principal $\Theta(a,b)$ está definida como sigue: $\Theta(a,b) = \{(x,y) : p_A(a,b,x) = p_A(a,b,y)\}$.

1.3. Espacios de Priestley y relaciones de Priestley

1.3.1. Categorías y funtores

Categorías

Una categoría $\underline{A}$ es una clase Obj$\underline{A}$, cuyos miembros son llamados objetos de $\underline{A}$ junto con :

(i) Una clase de conjuntos disjuntos $(A,B)_{\underline{A}}$ donde A, $B \in Obj\underline{A}$ y cuyos elementos son llamados morfismos de $\underline{A}$. Si el morfismo $f \in (A,B)_{\underline{A}}$, lo indicamos $f : A \longrightarrow B$.

(ii) Una función que asigna a cada terna $(A,B,C) \in (Obj\underline{A})^3$ una función de $(B,C)_{\underline{A}} \times (A,B)_{\underline{A}} \longrightarrow (A,C)_{\underline{A}}$ tal que si $f \in (A,B)_{\underline{A}}$ y $g \in (B,C)_{\underline{A}}$, entonces el valor de la función mencionada anteriormente en el punto (g,f) , es denotado como $g \circ f$ y lo llamamos la composición de f y g.
Además, si A, B, C, $D \in Obj\underline{A}$, $f \in (A,B)_{\underline{A}}$, $g \in (B,C)_{\underline{A}}$ y $h \in (C,D)_{\underline{A}}$ entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(iii) Para cada $A \in Obj\underline{A}$, existe un morfismo $1_A \in (A, A)_{\underline{A}}$, llamado el morfismo identidad de A, el cual satisface para cada $f \in (B, A)_{\underline{A}}$ y $g \in (A, C)_{\underline{A}}$ las condiciones: $1_A \circ f = f$ y $g \circ 1_A = g$.

Una categoría $\underline{B}$ es una subcategoría de una categoría $\underline{A}$ si:

(i) $Obj\underline{B} \subseteq Obj\underline{A}$.

(ii) $(A, B)_{\underline{B}} \subseteq (A, B)_{\underline{A}}$ para todo A, $B \in Obj\underline{B}$.

(iii) Los morfismos identidad en $\underline{B}$ son los mismos que en $\underline{A}$.

(iv) La composición de morfismos en $\underline{B}$ es la misma que en $\underline{A}$.

$\underline{B}$ es una subcategoría plena de $\underline{A}$ si $(A, B)_{\underline{B}} = (A, B)_{\underline{A}}$ para todo A, $B \in Obj\underline{B}$.

Sea $\underline{A}$ una categoría, llamamos categoría dual de $\underline{A}$ y la denotamos $\underline{A}^*$ a la categoría que verifica:

(i) $Obj\underline{A} = Obj\underline{A}^*$.

(ii) Para todo A, $B \in Obj\underline{A}^*$, $(A, B)_{\underline{A}^*} = (B, A)_{\underline{A}}$.

(iii) Si $f \in (A, B)_{\underline{A}^*}$ y $g \in (B, C)_{\underline{A}^*}$, entonces la composición $g \circ f$ en $\underline{A}^*$ está definida como la composición de $f \circ g$ en $\underline{A}$.

Un isomorfismo, es un morfismo $f \in (A, B)_{\underline{A}}$ tal que existe $f^{-1} \in (B, A)_{\underline{A}}$ y verifica que: $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Funtores

Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos categorías.

Un funtor contravariante (o simplemente funtor) $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, es una correspondencia que asigna a cada $A \in Obj\underline{A}$ un objeto $F(A) \in Obj\underline{B}$, y a cada morfismo $f \in (A, B)_{\underline{A}}$ un morfismo $F(f) \in (F(B), F(A))_{\underline{B}}$ tal que:

(a) $F(1_A) = 1_{F(A)}$, para todo $A \in Obj\underline{A}$.

(b) Si $f \circ g$ está definida en $\underline{A}$, entonces $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Sean $\underline{A}$, $\underline{B}$ dos categorías, $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y $G : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ dos funtores. Una equivalencia natural entre los funtores F y G, es una familia de isomorfismos $\{n_A : A \in Obj\underline{A}\}$ con la siguiente propiedad:
Para cada $A \in Obj\underline{A}$ y cada $h \in (A, B)_{\underline{A}}$ existen morfismos $n_A \in (F(A), G(A))_{\underline{B}}$ y $n_B \in (F(B), G(B))_{\underline{B}}$ que verifican $G(h) \circ n_A = n_B \circ F(h)$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "n_A"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(A) \arrow[d, "G(h)"] \\
F(B) \arrow[r, "n_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Decimos que dos funtores $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y $G : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ son naturalmente equivalentes si existe una equivalencia natural entre ellos.

Dos categorías $\underline{A}$ y $\underline{B}$ se dicen naturalmente equivalentes si existen dos funtores $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y $G : \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ tales que $F \circ G : \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$ y $G \circ F : \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$ son naturalmente equivalentes a $Id_{\underline{B}} : \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$ y $Id_{\underline{A}} : \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$ respectivamente, donde $Id_{\underline{A}}$ y $Id_{\underline{B}}$ son los funtores identidad.

1.3.2. Espacios de Priestley

Si bien la teoría de los espacios de Priestley y su relación con los retículos distributivos con primer y último elemento es muy conocida, enunciamos a continuación algunos resultados. Para más detalles sobre este tema remitirse a [38] y [39].

Un espacio topológico totalmente disconexo en el orden, es una terna $(X, \tau, \leq)$ tal que $(X, \leq)$ un conjunto ordenado, (X, τ) un espacio topológico, y dados $x, y \in X$ tales que $x \not\leq y$, existe un conjunto $U \subseteq X$ abierto , cerrado y creciente tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Un espacio de Priestley, es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden.

Si $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Priestley, entonces :

(i) X es un espacio de Hausdorff (por ser totalmente disconexo en el orden).

(ii) Si X es finito, entonces la topología de X es la discreta. Luego en este caso la noción de espacio topológico compacto, totalmente disconexo en el orden, se reduce a la de conjunto finito parcialmente ordenado.

Sea I un conjunto cualquiera. Si consideramos la cadena de dos elementos $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ con la topología discreta, ésta resulta ser un espacio de Priestley. Entonces por el teorema de Tychonoff, $\mathbf{2}^I = \{f : I \longrightarrow \mathbf{2}\}$ es un espacio de Priestley con la topología producto y el orden natural de funciones ($f \leq g$ sii $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$).

Sea L un retículo distibutivo acotado. No es difícil probar que el conjunto $Hom(L, \mathbf{2})$, de los homomorfismos acotados de L en $\mathbf{2}$, es un subconjunto cerrado de $\mathbf{2}^L$, y por lo tanto un espacio de Priestley. De este resultado, se deduce que $\mathcal{I}_p(L)$, el conjunto de los ideales primos de L, ordenado por la relación inclusión y dotado con la topología τ, que tiene como subbásicos a los conjuntos

(A1) $\sigma_L(a) = \{I \in \mathcal{I}_p(L) : a \notin I\}$ e $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$, para cada $a \in L$,

es un espacio de Priestley, llamado el espacio de Priestley de L o dual de L. Además la función $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ es un isomorfismo de retículos acotados.

Si X es un espacio de Priestley y con $D(X)$ notamos al retículo distributivo acotado de los subconjuntos abiertos, cerrados y decrecientes de X, la función $\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{I}_p(D(X))$ definida por

(A2) $\varepsilon_X(x) = \{V \in D(X) : x \notin V\}$,

es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.

Esto nos dice que todo retículo distributivo acotado puede considerarse como el retículo de los abiertos, cerrados y decrecientes de un espacio de Priestley y que todo espacio de Priestley se lo puede considerar como el conjunto de los ideales primos de un retículo acotado.

Por otra parte si L y L' son retículos distributivos acotados y $h : L \longrightarrow L'$ es un homomorfismo de retículos acotados, entonces la aplicación $\Phi(h) : \mathcal{I}_p(L') \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$, definida por $\Phi(h)(I') = h^{-1}(I')$, para cada $I' \in \mathcal{I}_p(L')$, es una función contínua y creciente. También se verifica que:

(i) h es sobre si, y solo si, $\Phi(h)$ es monomorfismo de orden.

(ii) $\Phi(h)$ es sobre si, y solo si, h es inyectiva.

Además si $h : X \longrightarrow X'$ una función (biyectiva) contínua y creciente, entonces $\Psi(h) : D(X') \longrightarrow D(X)$ definida por $\Psi(h)(V) = h^{-1}(V)$, para cada $V \in D(X')$, es un homomorfismo (isomorfismo) de retículos acotados.

Si denotamos con $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley o $P-$espacios y cuyos morfismos son las funciones continuas y crecientes o $P-$funciones, y con $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ la categoría cuyos objetos son los retículos distributivos acotados y cuyos morfismos son los homomorfismos acotados de retículos, entonces en el lenguaje de la teoría de categorías, los isomorfismos anteriores σ_L y ε_X, definen una equivalencia dual entre $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, a la cual es usual llamar la *dualidad de Priestley*.

Los siguientes resultados son usados frecuentemente en este trabajo, la demostración de (i) puede ser consultada en [41].

(i) Sea X un espacio de Priestley y S un subconjunto cerrado de X. Para cada $x \in S$, existe $z \geq x$ ($z \leq x$) tal que $z \in max\, S$ ($z \in min\, S$). En particular, $max\, S \neq \emptyset$ ($min\, S \neq \emptyset$) si $S \neq \emptyset$.

(ii) Sea X un espacio de Priestley y $x \in X$. Los conjuntos $U_z = \{y \in X : y \not\leq x\}$ y $V_z = \{y \in X : y \not\geq x\}$ son abiertos.

1.3.3. Relaciones de Priestley

Si X e Y son dos conjuntos y $R \subseteq X \times Y$ una relación, entonces $R(S)$ denota la imagen de S por R y si $S = \{x\}$ escribimos $R(x)$ en lugar de $R(\{x\})$. Llamamos dominio de R, al conjunto $domR = \{a \in X :$ existe $b \in Y$ tal que $(a, b) \in R\}$.

Si $V \subseteq Y$, $R^{-1}(V)$ denota la imagen inversa de V por R, es decir, $R^{-1}(V) = \{x \in X : R(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Además si $R \subseteq X \times X$ y $V \subseteq X$, entonces se verifican:

(i) R reflexiva implica que $V \subseteq R^{-1}(V)$.

(ii) R transitiva implica que

  (a) si $y \in R(x)$, entonces $R(y) \subseteq R(x)$,

  (b) si $y \in R^{-1}(x)$, entonces $R^{-1}(y) \subseteq R^{-1}(x)$,

  (c) $R^{-1}(R^{-1}(V)) \subseteq R^{-1}(V)$.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y R una relación binaria definida sobre X. Decimos que R es de cuasiequivalencia (dual) si verifica las siguientes condiciones:

(a) R es un preorden.

(b) Si $(x, y) \in R$, entonces existe $z \in X$ tal que $y \leq z$ ($z \leq y$), $(x, z) \in R$ y $(z, x) \in R$.

Las definiciones y resultados siguientes están contenidos en [11].

Si X e Y son dos espacios de Priestley, $R \subseteq X \times Y$ se dice una relación de Priestley (dual) si verifica las siguientes condiciones:

(a) $R(x)$ es un subconjunto cerrado y decreciente (creciente) de X, para todo $x \in X$.

(b) Si $V \in D(Y)$, entonces $R^{-1}(V) \in D(X)$, siendo $D(X)$ y $D(Y)$ la familia de los abiertos, cerrados y crecientes (decrecientes) de X e Y respectivamente.

En particular si $X = Y$, R se dice una relación de Priestley sobre X.

Si $R \subseteq X \times Y$ es una relación de Priestley, entonces $R^* : D(Y) \longrightarrow D(X)$ definida por $R^*(S) = R^{-1}(S)$, para cada $S \subseteq Y$, es un homomorfismo superior.

Si L y M son retículos distributivos acotados y $j : L \longrightarrow M$ un homomorfismo superior, entonces se verifican $j^* = \{(P, Q) \in X(M) \times X(L) : Q \subseteq j^{-1}(P)\}$ es una relación de Priestley, $dom j^* = \sigma_L(j(1))$ y para todo $a \in L$, $j^{**}(\sigma_L(a)) = \sigma_L(j(a))$.

También se verifica que j es un operador de clausura aditivo sobre un retículo distributivo acotado L, si, y solo si, j^* es un preorden sobre $X(L)$.

Si R una relación de Priestley sobre X, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Si $x, y \in X$, $x \leq y$, entonces $R(x) \subseteq R(y)$.

(ii) Si $x, y \in X$, $y \notin R(x)$, entonces existe $V \in D(X)$ (abierto, cerrado y creciente) tal que $y \in V$ y $V \cap R(x) = \emptyset$, es decir, $x \notin R^{-1}(V)$.

Si R es una relación de Priestley (dual), definida sobre un espacio de Priestley X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) R es de cuasiequivalencia (dual),

(b) R es un preorden, y para todo $x \in X$, $maxR(x) \subseteq R^{-1}(x)$ ($minR(x) \subseteq R^{-1}(x)$),

(c) R^* es un cuantificador sobre $D(X)$.

1.4. M_3-retículos

La consideración de la clase de los M_3-retículos, estrechamente relacionada con la clase de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes, estuvo motivada por su posible aplicación al estudio del comportamiento de ciertos circuitos eléctricos de conmutación trivalentes y fue definida por A. V. Figallo en *Los M_3-Reticulados* [14], Rev. Colombiana de Matemática, XXI, 1987 como sigue:

Un M_3-retículo es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle \rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ que satisface las siguientes identidades:

(m1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(m2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(m3) $x = \sim\sim x$,

(m4) $x = \triangle x \vee \sim \nabla x$,

(m5) $\triangle x = \triangle x \vee \sim \triangle x$,

(m6) $\triangle \nabla x = \nabla x$,

(m7) $\triangle(x \wedge \sim x) = \triangle(y \wedge \sim y)$,

(m8) $\triangle(x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$,

(m9) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

donde ∇x es una abreviatura de $x \vee \sim x$.

Observemos que de (m1) y (m2), teniendo en cuenta un resultado de M. Sholander, podemos afirmar que $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo distributivo y al orden asociado a dicho retículo lo representamos con $\leq$.

A. V. Figallo en este mismo trabajo demostró que los axiomas son independientes y probó que $\triangle(x \wedge \sim x) = 0$ es el primer elemento del retículo $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, razón por la cual pueden ser definidas equivalentemente como álgebras $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0 \rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0)$ tal que el reducto $\langle L, \wedge, \vee, 0 \rangle$ es un retículo distributivo con primer elemento 0 y satisfacen las siguientes identidades:

(M1) $\triangle(x \wedge \sim x) = 0$,

(M2) $\sim \sim x = x$,

(M3) $x = \triangle x \vee \sim \nabla x$, donde ∇x es una abreviatura de $x \vee \sim x$,

(M4) $\triangle x = \triangle x \vee \sim \triangle x$,

(M5) $\triangle \nabla x = \nabla x$,

(M6) $\triangle(x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$,

(M7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

La definición anterior es la que usamos de ahora en adelante y cuando no haya lugar a dudas, representamos a cualquier M_3-retículo por su conjunto soporte.

Si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo tal que el reducto $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo distributivo con último elemento, decimos que es un M_3-retículo acotado y denotamos con $\mathbf{M_3}$ a la variedad de los M_3-retículos acotados.

Las siguientes propiedades sobre los M_3-retículos fueron demostradas por A. V. Figallo en [14], algunas de las ellas se derivan directamente de los axiomas:

(M8) $\triangle x \leq x$,

(M9) $\sim \nabla x \leq x$,

(M10) $\sim \triangle x \leq \triangle x$,

(M11) $x \leq \nabla x$,

(M12) $\sim x \leq \nabla x$,

(M13) $\triangle(x \wedge \sim x) = 0$ es el primer elemento del retículo $\langle L, \wedge, \vee\rangle$,

(M14) $\nabla \sim x = \nabla x$,

(M15) $\nabla\nabla x = \nabla x$,

(M16) $\nabla\triangle x = \triangle x$,

(M17) si $x \leq y$, entonces $\triangle x \leq \triangle y$ y $\nabla x \leq \nabla y$,

(M18) $\triangle \sim \nabla x = 0$,

(M19) $\triangle \sim \triangle x = 0$,

(M20) $\triangle\triangle x = \triangle x$,

(M21) $\nabla x = \triangle x \vee \triangle \sim x$,

(M22) $\sim x = x$ si, y solo si, $x = 0$, (M23) $\triangle 0 = \nabla 0 = \sim 0 = 0$.

En este mismo trabajo, A. V. Figallo definió la noción de elemento invariante como sigue: *un elemento a de un M_3-retículo L, se dice invariante si verifica* $\triangle a = a$ y representó con $K(L)$ al conjunto de todos los elementos invariantes de un M_3-retículo L.

También demostró que el conjunto $K(L)$ es cerrado por las operaciones $\wedge$, $\vee$, $\triangle$ y ∇ pues se verifican las siguientes propiedades:

(i) $x \in K(L)$ si, y solo si, $x = \nabla x$,

(ii) si $x, y \in K(L)$, entonces $x \wedge y, x \vee y \in K(L)$,

(iii) si $x \in K(L)$, entonces $\triangle x, \nabla x \in K(L)$,

(iv) $0 \in K(L)$.

Estas le permitieron demostrar las siguientes:

(M24) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$,

(M25) $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y$,

(M26) (Principio de determinación) si $\triangle x = \triangle y$ y $\nabla x = \nabla y$, entonces $x = y$,

(M27) si $\triangle x \leq \triangle y$ y $\nabla x \leq \nabla y$, entonces $x \leq y$,

(M28) $\sim (x \vee y) \leq \sim x \vee \sim y$,

(M29) $\sim x \wedge \sim y \leq \sim (x \wedge y)$.

Luego con el objetivo de encontrar un teorema de representación para los M_3-retículos, introdujo la noción de $n-$ideal (primo) de un M_3-retículo L, como un ideal (primo) N de L que verifica si $x \in N$, entonces $\sim x \in N$, o equivalentemente, $x \in N$ implica $\nabla x \in N$ y probó que si $I(X)$ y $N(X)$ representan al ideal y al $n-$ideal generados por un subconjunto X de L respectivamente, entonces se verifican:

(M30) $N(X) = I(K(X))$, donde $K(X) = \{\nabla x : x \in X\} = \{\triangle x : x \in X\}$.

(M31) Si M es un $n-$ideal de L y $a \in L$, entonces $N(M \cup \{a\}) = \{z \in L : z \leq \nabla(u \vee a)$ para algún $u \in M\}$.

Demostró también que el conjunto $E(L) = \{M \in \mathcal{P}(L) : M$ es un $n-$ideal primo$\}$, llamado el espectro primo de L, verifica que $\bigcap\{M : M \in E(L)\} = \{0\}$, dió además una caracterización de los $n-$ideales primos como sigue:

(M32) M es un $n-$ideal primo de L si, y solo si, existe un ideal primo I tal que $M = I \cap \sim I$, donde $\sim I = \{\sim x : x \in I\}$,

y probó los siguientes resultados:

(M33) Si L es un M_3-retículo simple, entonces el único n ideal primo de L es $\{0\}$ y por consiguiente L es isomorfo a $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$, donde T es la cadena con tres elementos $\{0, 1/2, 1\}$ con $0 \leq 1/2 \leq 1$ y las operaciones $\sim$ y $\triangle$ están definidas en la siguiente tabla:

x	$\sim x$	$\triangle x$
0	0	0
1/2	1	0
1	1/2	1

(M34) Teorema de representación: Todo M_3-retículo L no trivial, es isomorfo a un M_3-subretículo de $\mathrm{T}^{E(L)}$, siendo $\mathrm{T}^{E(L)}$ el M_3-retículo de todas las funciones de $E(L)$ en T, donde las operaciones están definidas punto por punto y T es la cadena con tres elementos dada como en (M33).

Una de las consecuencias directas del teorema anterior es que si L es un M_3-retículo finito, entonces $K(L)$ es un álgebra de Boole y por consiguiente se verifica el siguiente

(M34') Corolario: Si L es un M_3-retículo finito, entonces L y T^n son isomorfos, donde $n = 1$ si, y solo si, es simple, y si $n > 1$, entonces n es el número de átomos de $K(L)$. (ver [15])

En un trabajo posterior ([16]) A. V. Figallo definió:

(M35) $x|y = x \wedge \triangle(\sim (x \vee \nabla y) \vee \sim (y \vee \sim x))$,
y probó que si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo con último elemento, entonces $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Brouwer.

Lo que le permitió caracterizar las congruencias del siguiente modo:

(M36) Si N es un $n-$ideal de un M_3-retículo L, entonces $R(N) = \{(x, y) \in L^2 : (x|y) \vee (y|x) \in N\}$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia y recíprocamente para cada $\mathbf{M_3}-$congruencia R de L, existe un $n-$ideal N tal que $R = R(N)$.

En ese mismo trabajo puso en evidencia también la importancia del retículo $K(L)$, al probar que si L es un M_3-retículo, entonces $K(L)$ es un álgebra de Boole generalizada, y en el caso que L sea un M_3-retículo con último elemento, entonces $K(L)$ es un álgebra de Boole. Estos resultados le permitieron demostrar que:

(M37) En los M_3-retículos las nociones de $n-$ideal maximal, $n-$ideal primo, $n-$ideal irreducible y $n-$ideal completamente irreducible coinciden.
(M38) Si L es un M_3-retículo finito acotado, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) M es un $n-$ideal primo de L,

(ii) existe b, átomo dual de $K(L)$ tal que $M = I(b)$,

(iii) M es un $n-$ideal maximal de $K(L)$.

Algunas propiedades de la operación $|$ que pueden ser consultadas en [16], son las siguientes:
(M39) $\triangle(x|y) = \triangle x|\triangle y$,
(M40) $\sim x| \sim y \leq \sim (x|y) \vee (y|x)$,
(M41) $x|0 = x$,
(M42) $0|x = 0$.

Otro resultado importante de destacar en [16], es que si en $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$, el álgebra indicada en (M33), se definen las operaciones $\rightarrow$ y $\neg$ por las fórmulas:

(i) $x \rightarrow y = \triangle \sim (x \vee \sim 1) \vee y$,

(ii) $\neg x = \triangle \sim (\nabla x \vee \sim 1)$,

cuyas tablas correspondientes son:

$\rightarrow$	0	$1/2$	1
0	1	1	1
$1/2$	1	1	1
1	0	$1/2$	1

x	$\neg x$
0	1
$1/2$	0
1	0

y a partir de ellas se definen las operaciones $\Diamond$ y $-$ como siguen:

(iii) $\Diamond x = \neg\neg x$,

(iv) $-x = (\neg\neg x \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow \neg x)$,

se tiene que $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, -, \Diamond, 0, 1\rangle$, es un álgebra de Lukasiewicz trivalente en el sentido de [27].

De este resultado, teniendo en cuenta el teorema de representación dado en (M34), podemos asegurar que si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo con último elemento 1, y $\Diamond$ y $-$ son las indicadas en (iii) y (iv) respectivamente, entonces $\langle L, \wedge, \vee, -, \Diamond, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Lukasiewicz trivalente centrada, con centro $c =\sim 1$.

Capítulo 2

Dualidad de Priestley para los M_3−retículos y aplicaciones

Este capítulo está conformado por dos secciones. En la primera extendemos la dualidad Priestley para los retículos distributivos acotados, al caso de los M_3−retículos con último elemento. En la segunda sección a partir de la dualidad obtenida describimos las $\mathbf{M_3}$−congruencias, en particular las principales, por medio de los abiertos y cerrados del espacio de Priestley asociado y los M_3−retículos subdirectamente irreducibles, reencontrando los resultados establecidos por Figallo de manera diferente. Entre otros resultados, probamos que las congruencias principales son booleanas y determinamos los ideales que las definen.

2.1. Dualidad de Priestley para los M_3−retículos

2.1.1. Propiedades del espectro primo de un M_3−retículo

A continuación, exponemos algunas propiedades del espectro primo de un M_3−retículo que usamos para obtener la dualidad en el desarrollo del capítulo. En lo que sigue notamos con $\mathcal{NI}_p(L)$ a la familia de los n−ideales primos de un M_3−retículo L.

Lema 2.1.1.1 *Sea* L *un* M_3-*retículo y para cada* $I \in \mathcal{I}_p(L)$ *sean* $I_\nabla = I \cap \sim I$ *e* $I_\triangle = \triangle^{-1}(I)$*. Entonces se verifican:*

(I1) $I_\nabla \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$,

(I2) $I_\triangle \in \mathcal{I}_p(L)$,

(I3) $I_\nabla \subseteq I \subseteq I_\triangle$,

(I4) *si* $I \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$*, entonces* $I_\nabla = I \subset I_\triangle$*, y además* $I_\triangle \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$,

(I5) *si* $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$*, entonces* $I_\nabla \subset I$.

Dem.

(I1): Resulta inmediato de (M32). Por otro lado teniendo en cuenta los axiomas de M_3-retículo es fácil demostrar (I2).

(I3): De la definición de I_∇ es inmediato que $I_\nabla \subseteq I$. Por otro lado si $x \in I$, entonces por (M8), $\triangle x \in I$ y por lo tanto $x \in I_\triangle$, de lo que concluimos que $I \subseteq I_\triangle$.

(I4): Si $I \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$, entonces por (M32), $I = I_\nabla$, y como I es un $n-$ideal propio, entonces por (M2), existe $a \in L \setminus I$ tal que $\sim a \notin I$, además por ser ideal primo, (1) $a \wedge \sim a \notin I$. Por otro lado, teniendo en cuenta (M1) se verifica que $\triangle(a \wedge \sim a) \in I$, entonces (2) $a \wedge \sim a \in I_\triangle$. Luego de (I3), (1) y (2) se tiene que $I \subset I_\triangle$ y como por (M37), I es un $n-$ideal maximal, se debe verificar que $I_\triangle \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$ pues caso contrario debería ser $I_\triangle = L$, lo que contradice que $I_\triangle$ es ideal propio.

(I5): Si $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$, entonces existe $x \in I$ tal que $\sim x \notin I$ y por lo tanto $x \notin I_\nabla$, resultando así por (I3) que $I_\nabla \subset I$.

$\square$

Lema 2.1.1.2 *Si L un M_3-retículo, entonces se verifican:*

(I6) $min\,\mathcal{I}_p(L) = \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$,

(I7) $max\,\mathcal{I}_p(L) = \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$,

(I8) $I \in max\,\mathcal{I}_p(L)$ *si, y solo si,* $I = I_\triangle$.

Dem.

(I6): Sea $I \in min\,\mathcal{I}_p(L)$, y supongamos que I no es $n-$ideal, entonces por (M32), $M = I \cap \sim I$ es un ideal primo de L, tal que $M \subset I$, esto contradice que $I \in min\ \mathcal{I}_p(L)$, luego $I \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$.

Recíprocamente, sea $N \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$ y supongamos que $N \notin min\,\mathcal{I}_p(L)$, entonces existe $I \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $I \subset N$. Sea $M = I \cap \sim I$, luego por (M32), $M \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$ y como por (M37), M es un $n-$ideal maximal tal que $M \subseteq I \subset N$, entonces se debe verificar que $N = L$, lo que contradice que N es propio.

(I7): Si $I \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$, entonces por (I4) e (I2), $I \notin max\,\mathcal{I}_p(L)$, de lo que se sigue que $max\,\mathcal{I}_p(L) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$.

Recíprocamente, sea $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$, entonces por (I5), $I_\nabla \subset I$. Supongamos que $I \notin max\,\mathcal{I}_p(L)$, luego existe $R \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que (1) $I \subset R$. Sea $N = N(I)$, entonces de (1), existe (2) $t \in R \setminus I$, tal que (3) $t \notin N$. En efecto, si $t \in N$, entonces por (M30), existe $x \in I$ tal que $t \leq \triangle x$, de donde teniendo en cuenta (M8), $t \in I$ lo que contradice (2). Luego de (2) y (3) resulta que $I \subset N$. Por otro lado, de (M37), (I1) e (I5), se tiene que I_∇ es un $n-$ideal maximal tal que $I_\nabla \subset I \subset N$, de lo que se sigue que $N = L$, lo que contradice (3).

(I8): Si $I \in max\,\mathcal{I}_p(L)$, entonces por (I2) e (I3), $I = I_\triangle$.

Recíprocamente sea ahora $I \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que (1) $I = I_\triangle$ y supongamos que $I \notin max\,\mathcal{I}_p(L)$. Entonces existe $R \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que (2) $I \subset R$, en consecuencia (3) $I_\nabla \subseteq R_\nabla$ y existe (4) $x \in R \setminus I$, de lo cual teniendo en cuenta (1) concluímos que

(5) $\triangle x \notin I$. Por otra parte por (M1) y (M25), $\triangle x \wedge \triangle \sim x \in I$, entonces de (5) y por ser I un ideal primo se verifica que $\triangle \sim x \in I$, de donde resulta que $\sim x \in I_\triangle$, y por lo tanto de (1), (2) y (M2) tenemos que (6) $x \in \sim R$.

Luego de (4) y (6), $x \in R_\triangledown \setminus I_\triangledown$ y en consecuencia de (3) se sigue que $I_\triangledown \subset R_\triangledown$, lo que contradice por (I1) y (M37) que $I_\triangledown$ es un $n-$ideal maximal.

□

Teorema 2.1.1.3 *Todo ideal primo I de un M_3-retículo es miembro de una y solo una cadena de ideales primos de dos elementos que es precisamente $I_\triangledown \subset I_\triangle$.*

Dem. Si $I \in \mathcal{I}_p(L)$, entonces por (I4), (I7) e (I8), tenemos que $I = I_\triangle$ o $I = I_\triangledown$, con $I_\triangledown \subset I_\triangle$, además $I_\triangledown \in min\,\mathcal{I}_p(L)$, e $I_\triangle \in max\,\mathcal{I}_p(L)$. Si $R \in \mathcal{I}_p(L)$ es tal que (1) $I \subset R$, entonces por (I6), $R \notin \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$, de donde por (I7) e (I8) resulta que (2) $R = R_\triangle$. Por otro lado de (1), $I_\triangle \subseteq R_\triangle$ y por ser $I_\triangle$ maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, se deduce que (3) $I_\triangle = R_\triangle$. Luego de (2) y (3) se obtiene en este caso que $R = I_\triangle$. Si (4) $R \subset I$, entonces por (I7), $R \notin \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$, de lo que se sigue por (I4) que (5) $R = R_\triangledown$ y además (6) $R_\triangledown \subseteq I_\triangledown$. Como por (I1) e (I6), $I_\triangledown$ es minimal en $\mathcal{I}_p(L)$, entonces de (5) y (6), $I_\triangledown = R$. Por lo tanto I es miembro de una y solo una cadena de dos elementos que es $I_\triangledown \subset I_\triangle$. □

Corolario 2.1.1.4 *Si L es un M_3-retículo, entonces el conjunto $\mathcal{I}_p(L)$ ordenado por la relación inclusión, es la suma cardinal de conjuntos totalmente ordenados, cada uno de los cuales tiene dos elementos.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.1.1.3. □

2.1.2. La categoría de los M_3-espacios y los M_3-morfismos

Con el objetivo de explicitar una dualidad topológica para los M_3-retículos acotados, teniendo en cuenta la descripta en el Capítulo 1 para los retículos distributivos acotados, en esta sección introducimos la categoría $\mathfrak{M}_3$, describimos sus objetos y morfismos y damos algunas propiedades de los mismos.

Definición 2.1.2.1 *Un M_3-espacio es una terna $(X, \tau, \leq)$ tal que:*

(MP1) $(X, \tau, \leq)$ *es un $P-$espacio,*

(MP2) $(X, \leq)$ *es una suma cardinal de cadenas con dos elementos,*

y para cada $U \in D(X)$ se satisfacen:

(MP3) $(M_X U]$ *es abierto y cerrado en X,*

(MP4) $[m_X U) \setminus M_X U$ *es abierto y cerrado en X,*
donde $M_X U = max\, X \cap U$ y $m_X U = min\, X \cap U$.

Para simplificar si $(X, \tau, \leq)$ es un M_3-espacio, decimos que X es un M_3-espacio.

Observación 2.1.2.2 *Si $(X, \tau, \leq)$ es un M_3-espacio, entonces de* (MP1) *y* (MP2) *se tiene que:*

(i) *$min\ X \cup max\ X = X$,*

(ii) *$min\ X \cap max\ X = \emptyset$,*

(iii) *las componentes conexas, en el sentido del orden, tienen dos elementos.*

Definición 2.1.2.3 *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ M_3-espacios. Una M_3-función de $(X, \tau, \leq)$ en $(X', \tau', \leq')$ es una $P-$función $h : X \longrightarrow X'$ tal que para todo $V \in D(X')$ se verifican:*

(i) $(M_X h^{-1}(V)] = h^{-1}((M_{X'} V])$,

(ii) $[m_X h^{-1}(V)) \setminus M_X h^{-1}(V) = h^{-1}([m_{X'} V) \setminus M_{X'} V)$.

Notamos con $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ a la categoría de los M_3-espacios y las M_3-funciones y con $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$ la categoría de los M_3-retículos acotados y los $\mathbf{M_3}-$homomorfismos.

2.1.3. Propiedades de los M_3−espacios y los M_3−morfismos

Lema 2.1.3.1 *Sea $(X, \tau, \leq)$ un objeto en $\mathfrak{M}_3$. Si para cada $U \subseteq X$, definimos:*

(D) $\triangle^* U = (M_X U]$,

(N) $\neg U = [m_X U) \setminus M_X U$,

(B) $\nabla^* U = U \cup \neg U$,

entonces para todo $U, V \in D(X)$ se verifican:

(MP5) $\triangle^* U, \neg U, \nabla^* U \in D(X)$,

(MP6) $\triangle^* U \subseteq U$,

(MP7) $U \subseteq \nabla^* U$,

(MP8) $\neg U = m_X U \cup \{x \in X \setminus U : \ \textit{existe } t \in U \ \ \textit{y} \ \ t < x\}$,

(MP9) $m_X \neg U = m_X U$,

(MP10) $m_X U = U \cap \neg U$,

(MP11) $M_X U = \{y \in X \setminus \neg U : \text{existe } v \in \neg U \text{ y } v < y\}$,

(MP12) $\{x \in X \setminus \triangle^* U : \text{existe } t \in \triangle^* U \text{ y } t < x\} = \emptyset$,

(MP13) $\{x \in X \setminus \nabla^* U : \text{existe } t \in \nabla^* U \text{ y } t < x\} = \emptyset$,

(MP14) $U \cup \neg U = U \cup \{x \in X \setminus U : \text{existe } t \in U \text{ y } t < x\}$,

(MP15) $\neg \nabla^* U = m_X U$,

(MP16) $M_X U \subseteq M_X \nabla^* U$,

(MP17) $U \subseteq V \Rightarrow \nabla^* U \subseteq \nabla^* V$.

Dem.

(MP5): Si $U \in D(X)$, entonces por (MP3) y (MP4), $\triangle^* U, \neg U, \nabla^* U$ son abiertos y cerrados en X. Solo resta probar que $\neg U$ es decreciente. Sea $u \in \neg U$ y $v \in X$ tal que (1) $v < u$. Entonces por (MP2), $u \notin min\ X$, de lo que se sigue que $u \notin m_X U$ y por (N), existe (2) $t \in m_X U \setminus M_X U$ tal que (3) $t < u$. De (1), (3) y (MP2) resulta que $t = v$, de lo cual obtenemos teniendo en cuenta (2) y (N) que $v \in \neg U$.

(MP6): Si $x \in \triangle^* U$, entonces por (D) existe $u \in M_X U$ tal que $x \leq u$. Como U es decreciente se tiene que $x \in U$.

(MP7) y (MP8): Son consecuencias inmediatas de (B) y (N) respectivamente.

(MP9): Por (MP8), $m_X U \subseteq \neg U$ y, como $m_X U \subseteq min\, X$, entonces es inmediato que $m_X U \subseteq m_X \neg U$. Por otra parte de (MP8) y (MP2) se sigue que $m_X \neg U \subseteq m_X U$.

(MP10): Es consecuencia de (MP8).

(MP11): Sea $m \in M_X U$, entonces por (MP8) y (MP2), $m \in U \setminus \neg U$ y existe $z \in min\, X$ tal que $z < m$. Como U es decreciente, entonces $z \in m_X U$, de lo que se sigue por (MP8) que $z \in \neg U$. De lo anterior concluimos que $m \in \{y \in X \setminus \neg U : \text{existe } v \in \neg U \text{ y } v < y\}$.

Veamos que la otra inclusión también es válida. Sea $y \in \{y \in X \setminus \neg U : \text{existe } v \in \neg U \text{ y } v < y\}$. Luego (1) $y \in X \setminus \neg U$ y existe (2) $v \in \neg U$ que verifica (3) $v < y$. Entonces de (2), (3) y (MP2), $v \in m_X \neg U$, de lo que sigue por (MP9) que (4) $v \in m_X U \subseteq U$. Luego de (3), (4) y (MP8), si $y \notin X \setminus U$, tendríamos que $y \in \neg U$, lo que contradice (1), por lo tanto $y \in M_X U$.

(MP12): Supongamos que existen (1) $x \in X \setminus \triangle^* U$ y (2) $t \in \triangle^* U$ tal que (3) $t < x$. Por (3) y (MP2), $t \notin max\, X$; por lo tanto $t \notin M_X U$, de lo que se sigue por (2) que existe $z \in M_X(U)$ tal que (4) $t < z$. Entonces por (3), (4) y (MP2), $z = x$ de lo que resulta $x \in \triangle^* U$, lo que contradice (1).

(MP13): Supongamos que existen (1) $x \in X \setminus \nabla^* U$ y (2) $t \in \nabla^* U$ tales que (3) $t < x$. De (2), si $t \in U$, entonces de (3) y (MP8), como $x \notin U$ tenemos que $x \in \neg U$; por lo tanto $x \in \nabla^* U$, lo que contradice (1). Si $t \in \neg U$, como por (1), $x \notin \neg U$, entonces de (3) y (MP11), $x \in M_X U$, de lo que concluimos que $x \in U$ y por lo tanto $x \in \nabla^* U$, lo que contradice (1).

(MP14): Es inmediato de (MP8); (MP15) es consecuencia de (MP8), (MP9) y (MP13); además, (MP16) y (MP17) son consecuencias inmediatas de (B). $\square$

Lema 2.1.3.2 *Sean X y X', M_3-espacios y $h : X \longrightarrow X'$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *h es un isomorfismo en $\mathfrak{M}_\mathbf{3}$,*

(ii) *h es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden que satisface las siguientes condiciones:*

   (a) $\triangle^* h^{-1}(V) = h^{-1}(\triangle^* V)$, *para todo* $V \in D(X')$,

   (b) $\neg h^{-1}(V) = h^{-1}(\neg V)$, *para todo* $V \in D(X')$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sea $h : X \longrightarrow X'$ un isomorfismo en $\mathfrak{M}_\mathbf{3}$, entonces h es un morfismo en la categoría $\mathfrak{M}_\mathbf{3}$ y existe $g : X' \longrightarrow X$, morfismo en $\mathfrak{M}_\mathbf{3}$ tal que $h \circ g = 1_{X'}$ y $g \circ h = 1_X$. Por consiguiente h y g son funciones continuas y crecientes que verifican las condiciones adicionales siguientes:

(a1) $(M_X h^{-1}(V)] = h^{-1}((M_{X'} V])$, para todo $V \in D(X')$,

(a2) $[m_X h^{-1}(V)) \setminus M_X h^{-1}(V) = h^{-1}([m_{X'} V) \setminus M_{X'} V)$, para todo $V \in D(X')$,

(a3) $(M_{X'} g^{-1}(U)] = g^{-1}((M_X U])$, para todo $U \in D(X)$,

(a4) $[m_{X'} g^{-1}(U)) \setminus M_{X'} g^{-1}(U) = g^{-1}([m_X U) \setminus M_X U)$, para todo $U \in D(X)$.

Luego h es un isomorfismo en la categoría $\mathfrak{P}$, y por lo tanto h es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo. Por otra parte de las condiciones (a1), (a2) y el Lema 2.1.3.1, se satisfacen (a) y (b).

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Como h es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden, entonces h es un isomorfismo en la categoría $\mathfrak{P}$, luego existe una $P-$función $g : X' \longrightarrow X$ tal que $h \circ g = 1_{X'}$ y $g \circ h = 1_X$. Además h satisface (a) y (b), en consecuencia se verifican (i) y (ii) de la Definición 2.1.2.3, por lo que h es un morfismo en la categoría $\mathfrak{M}_\mathbf{3}$. Resta probar que g también satisface esas las condiciones, es decir: (c) $(M_{X'}g^{-1}(V)] = g^{-1}((M_XV])$ y (d) $[m_{X'}g^{-1}(V)) \setminus M_{X'}g^{-1}(V) = g^{-1}([m_XV) \setminus M_XV)$ para cada $V \in D(X)$. Tengamos en cuenta que si $V \in D(X)$, entonces $g^{-1}(V) = h(V)$.

(c) $(M_{X'}h(V)] = h((M_XV])$: Sea $x \in h((M_XV])$, entonces existe $z \in (M_XV]$ tal que $h(z) = x$. Luego existe $v \in V$ tal que $v \in max\, X \cap V$ y $z \leq v$. Como h es creciente $x = h(z) \leq h(v)$ y $h(v) \in h(V)$, además por ser h un isomorfismo de orden se verifica que $h(v) \in max\, X'$, por lo tanto $h(v) \in max\, X' \cap h(V)$ y $x \leq h(v)$, lo que implica que $x \in (M_{X'}h(V)]$. Recíprocamente si $y \in (M_{X'}h(V)]$, existe $t \in maxX^* \cap h(V)$ tal que $y \leq t$ y como h un isomorfismo de orden $t = h(v)$ con $v \in V \cap max\, X$. Por otro lado como h es sobre, entonces $y = h(z)$ para algún $z \in X$, por lo tanto $h(z) \leq h(v)$, de donde tenemos que $z \leq v$ con $v \in V \cap max\, X$. Así $z \in (M_XV]$ y en consecuencia $y \in h((M_XV])$.

(d) $h([m_XV) \setminus M_XV) = [m_{X'}h(V)) \setminus M_{X'}h(V)$: Sea $x \in h([m_XV) \setminus M_XV)$, entonces existe $t \in [m_XV) \setminus M_XV$ tal que $x = h(t)$. Luego existe $v \in min\, X \cap V$ tal que $v \leq t$ y (1) $t \notin max\, X \cap V$. Por ser h isomorfismo de orden se verifica que $h(v) \leq h(t) = x$ y $h(v) \in minX' \cap h(V)$, por lo que $x \in [m_{X'}h(V))$. Si $x \in max\, X' \cap h(V)$, entonces existe $u \in V$ tal que $x = h(u)$ y por ser h inyectiva como $h(t) = x$, tenemos que $t = u$, de donde $t \in maxX \cap V$ lo que contradice (1). Tenemos así que $x \in [m_{X'}h(V)) \setminus M_Xh(v)$. Recíprocamente, sea $x \in [m_{X'}h(V)) \setminus M_{X'}h(V)$, por lo tanto existe $t \in m_{X'}h(V)$ tal que $t \leq x$ y (1) $x \notin max\, X' \cap h(V)$. Luego $t \in minX' \cap h(V)$ y $t \leq x$, de donde existe $u \in V$ tal que $t = h(u) \in min\, X'$ con $u \in V$ y $t = h(u) \leq x$. Como h es sobre $x = h(y)$ y por lo tanto $h(u) \leq h(y)$, de donde $u \leq y$ con $u \in V \cap min\, X$, lo que implica que $y \in [m_XV)$. Si $y \in max\, X \cap V$, entonces $h(y) \in max\, X' \cap h(V)$, lo que implicaría que $x \in max\, X' \cap h(V)$ que contradice (1). Por lo tanto $y \in m_X V) \setminus M_X V$ y tenemos así que $x \in h([m_X V) \setminus M_X V)$.

$\square$

2.1.4. M_3-retículo dual de un M_3-espacio

Proposición 2.1.4.1 *Si X es un M_3-espacio, entonces $\langle D(X), \cap, \cup, \triangle^*, \neg, \emptyset, X\rangle$ es un M_3-retículo acotado, donde las operaciones $\triangle^*$ y $\neg$ son las indicadas en* (D) *y* (N) *del* Lema 2.1.3.1 *respectivamente.*

Dem. Por (MP5) tenemos que las operaciones $\triangle^*$ y $\neg$ están bien definidas. La demostración de los axiomas de M_3-retículo, se obtienen a partir de las propiedades (MP6) a (MP17) del Lema 2.1.3.1, como siguen:

(M1) $\triangle^*(U \cap \neg U) = \emptyset$: Por (MP10), $\triangle^*(U \cap \neg U) = \triangle^*(m_X U)$ y como por (D), $\triangle^*(m_X U) = (M_X(m_X U)]$ y $M_X(m_X U) = \emptyset$, concluimos que $\triangle^*(U \cap \neg U) = \emptyset$.

(M2) $\neg\neg U = U$: Por (MP8), (MP9) y (MP11), tenemos que $\neg\neg U = m_X U \cup M_X U$, de lo que se sigue por (MP2) que $\neg\neg U = U$.

(M3) $\triangle^* U \cup \neg\nabla^* U = U$: De (MP6) y (MP15) se sigue que $\triangle^* U \cup \neg\nabla^* U \subseteq U$. Recíprocamente, sea $x \in U$, entonces por (MP2), $x \in m_X U$ ó $x \in M_X U$. Si $x \in m_X U$, por (MP15), $x \in \neg\nabla^* U$, y si $x \in M_X U$, por (D) tenemos que $x \in \triangle^* U$.

(M4) $\neg\triangle^* U \cup \triangle^* U = \triangle^* U$: De las propiedades (MP8) y (MP12) resulta que $\neg\triangle^* U = m_X \triangle^* U$, y por lo tanto $\neg\triangle^* U \cup \triangle^* U = \triangle^* U$.

(M5) $\triangle^*\nabla^* U = \nabla^* U$: Por (MP5) y (MP6), $\triangle^*\nabla^* U \subseteq \nabla^* U$.

Para probar la otra inclusión veamos que $U \subseteq \triangle^*\nabla^* U$. En efecto, si $x \in M_X U$, de (MP16) y (D), $x \in \triangle^*\nabla^* U$. Si (1) $x \in m_X U$, entonces por (MP2), existe (2) $t \in max\, X$ tal que (3) $x < t$. Si $t \in U$, entonces por (2), $t \in M_X U$, y por lo tanto de (MP16), $t \in M_X \nabla^* U$, de lo cual por (3) y (D) se tiene que $x \in \triangle^*\nabla^* U$.

Si $t \notin U$, entonces $t \notin M_X U$, de donde por (1), (2) y (3) resulta que $t \in \neg U$, y en consecuencia por (2) tenemos, (4) $t \in M_X \neg U$. Como $M_X \neg U \subseteq M_X \nabla^* U$, entonces de (3), (4) y (D), $x \in \triangle^* \nabla^* U$.

En forma análoga se prueba que $\neg U \subseteq \triangle^* \nabla^* U$, de lo que concluimos que $\triangle^* \nabla^* U = \nabla^* U$.

(M6) $\triangle^*(U \cup V) = \triangle^* U \cup \triangle^* V$: Es inmediato de la definición de $\triangle^*$, teniendo en cuenta que $M_X(U \cup V) = M_X U \cup M_X V$.

(M7) $\nabla^*(U \cap V) = \nabla^* U \cap \nabla^* V$: Por (MP17), se verifica que $\nabla^*(U \cap V) \subseteq \nabla^* U \cap \nabla^* V$.

Para la recíproca, si $x \in \nabla^* U \cap \nabla^* V$, entonces teniendo en cuenta la definición de ∇^*, se puede presentar que $x \in U \cap V$, ó $x \in U \cap \neg V$, ó $x \in V \cap \neg U$ ó $x \in \neg U \cap \neg V$.

Si $x \in U \cap V$, es inmediato que $x \in \nabla^*(U \cap V)$. Si $x \in U \cap \neg V$, entonces por (MP8), (1) $x \in U \cap m_X V$ ó (2) $x \in U \cap \{x \in X \setminus V : \text{ existe } t \in V \text{ y } t < x\}$. De (1) se sigue que $x \in U \cap V$ y por lo tanto $x \in \nabla^*(U \cap V)$. De (2) es inmediato que (3) $x \in U \cap (X \setminus V)$ y existe (4) $t \in V$ tal que (5) $t < x$. Luego de (3), (4) y (5), teniendo en cuenta que U es decreciente, existe $t \in U \cap V$ tal que $t < x$ y como $x \notin U \cap V$, entonces por (MP8), $x \in \neg(U \cap V)$, de lo que concluimos que $x \in \nabla^*(U \cap V)$.

Si $x \in V \cap \neg U$, mediante un razonamiento análogo se tiene que $x \in \nabla^*(U \cap V)$. Finalmente si $x \in \neg U \cap \neg V$, entonces por (MP8), si $x \in m_X U \cap m_X V$, entonces $x \in U \cap V$ y por lo tanto $x \in \nabla^*(U \cap V)$; y si $x \in X \setminus U \cup V$ y existen $u \in U$, $v \in V$, tales que $u < x$ y $v < x$, entonces por (MP2), $u = v$, de donde resulta que $x \in \neg(U \cap V)$ y por lo tanto $x \in \nabla^*(U \cap V)$.

□

2.1.5. M_3−espacio asociado a un M_3−retículo acotado

Proposición 2.1.5.1 *Si $\langle L, \wedge, \vee, \triangle, \sim, 0, 1\rangle$ es un M_3−retículo acotado, entonces $\mathcal{I}_p(L)$, el espacio de Priestley de L, es un M_3−espacio y $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ definida como en*

(A1), *es un* $\mathbf{M_3}-$*isomorfismo.*

Dem. Por lo visto en el la Sección 1.3.2 del Capítulo 1, sabemos que $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ definida como en (A1) es un isomorfismo de retículos acotados, esto nos permite afirmar que si $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$, entonces $U = \sigma_L(a)$ para algún $a \in L$. Para probar las condiciones (MP3) y (MP4) de la Definición 2.1.2.1 que restan probar, teniendo en cuenta el Corolario 2.1.1.4, es suficiente mostrar que $\triangle^*\sigma_L(a) = \sigma_L(\triangle a)$ y $\neg\sigma_L(a) = \sigma_L(\sim a)$, las que también nos permitirán afirmar que $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$, es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo.

(i) $\triangle^*\sigma_L(a) = \sigma_L(\triangle a)$: Por (I7) resulta que (1) $M_{\mathcal{I}_p(L)}\ \sigma_L(a) = \{I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{NI}_p(L) : a \notin I\}$, en consecuencia si $R \in \triangle^*\sigma_L(a)$, entonces existe $J \in \{I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{NI}_p(L) : a \notin I\}$ tal que (2) $R \subseteq J$. Si $\triangle a \in R$, entonces por (2), $\triangle a \in J$ y por consiguiente $a \in J_\triangle$. Además por (I7) e (I8), tenemos que $J_\triangle = J$ y por lo tanto $a \in J$, lo que contradice la hipótesis, de lo que se sigue que $\triangle^*\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(\triangle a)$.

Recíprocamente, sea $R \in \sigma_L(\triangle a)$, entonces por (M8), $a \notin R$. Si $R \in \mathcal{I}_p(L)\setminus\mathcal{NI}_p(L)$, entonces por (1) es fácil ver que que $R \in \triangle^*\sigma_L(a)$. Si $R \in \mathcal{NI}_p(L)$, por (I4), $R_\triangle \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \mathcal{NI}_p(L)$, $R \subset R_\triangle$ y $a \notin R_\triangle$, por lo tanto $R_\triangle \in M_{\mathcal{I}_p(L)}\ \sigma_L(a)$ y así $R \in \triangle^*\sigma_L(a)$.

(ii) $\neg\sigma_L(a) = \sigma_L(\sim a)$: De (I6) tenemos que $m_{\mathcal{I}_p(L)}\ \sigma_L(a) = \{I \in \mathcal{NI}_p(L) : a \notin I\}$, y por lo tanto por (MP8) resulta que (3) $\neg\sigma_L(a) = \{I \in \mathcal{NI}_p(L) : a \notin I\} \cup \{I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a) :\ \text{existe } R \in \sigma_L(a) \text{ y } R \subset I\}$. Si $I \in \{I \in \mathcal{NI}_p(L) : a \notin I\}$ es inmediato por (M2) que $\sim a \notin I$ y por lo tanto $I \in \sigma_L(\sim a)$. Si $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$ y existe $R \in \sigma_L(a)$ tal que $R \subset I$, entonces por Teorema 2.1.1.3, $R = I_\nabla$, en consecuencia $a \notin I_\nabla$ es decir, $\nabla a \notin I$, y como $a \in I$ se verifica $\sim a \notin I$ y por lo tanto $I \in \sigma_L(\sim a)$, de lo que se sigue que $\neg\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(\sim a)$.

Recíprocamente, si (4) $I \in \sigma_L(\sim a)$, es tal que $I \in \mathcal{NI}_p(L)$ tenemos que $a \notin I$ y por lo tanto $I \in \neg\sigma_L(a)$. Si $I \notin \mathcal{NI}_p(L)$, $a \notin I_\nabla$, en consecuencia $I_\nabla \in \sigma_L(a)$ y por (I5), $I_\nabla \subset I$. Resta probar, teniendo en cuenta (3), que $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$. Supongamos que $I \in \sigma_L(a)$, luego $a \notin I$. Por (M1) y (M25), $\triangle a \wedge \triangle \sim a \in I$, entonces por ser I

un ideal primo se verifica que $\triangle a \in I$ o $\triangle \sim a \in I$, pero como $I \notin \mathcal{NI}_p(L)$, por (I7) e (I8), $I = I_\triangle$ y por lo tanto $\triangle a \notin I$, de donde resulta que $\triangle \sim a \in I$ y así $\sim a \in I$ lo que contradice (4). Luego $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$.

$\square$

2.1.6. Dualidad entre las categorías $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$

Las Proposiciones 2.1.4.1 y 2.1.5.1, nos permiten decir que hemos establecido una correspondencia entre los objetos de las categorías $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$. Con el objetivo de probar que estas categorías son naturalmente equivalentes y definir los funtores correspondientes, demostramos a continuación que existe una correspondencia entre los morfismos de dichas categorías.

Lema 2.1.6.1 *Sea $h : X \longrightarrow X'$ una M_3-función (biyectiva), entonces la aplicación $\Psi(h) : D(X') \longrightarrow D(X)$ definida por $\Psi(h)(V) = h^{-1}(V)$ para cada $V \in D(X')$, es un $\mathbf{M_3}-$homomorfismo (isomorfismo).*

Dem. Resulta inmediato por ser h una M_3-función. $\square$

Proposición 2.1.6.2 *Sea X un M_3-espacio. Entonces $\epsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{I}_p(D(X))$ definida por $\epsilon_X(x) = \{V \in D(X) : x \notin V\}$ es un isomorfismo en la categoría $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$.*

Dem. Como ϵ_X es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden, entonces solo resta probar las condiciones (a) y (b) del inciso (ii) del Lema 2.1.3.2.

(a) $\triangle^* \epsilon_X^{-1}(V) = \epsilon_X^{-1}(\triangle^* V)$: Sea $x \in \triangle^* \epsilon_X^{-1}(V)$, entonces existe $y \in max\, X \cap \epsilon_X^{-1}(V)$ tal que $x \leq y$, como ϵ_X es un isomorfismo de orden e $y \in max\, X$, se verifica que $\epsilon_X(x) \leq \epsilon_X(y)$ y $\epsilon_X(y) \in max\, \mathcal{I}_p(D(X))$. Luego existe $\epsilon_X(y) \in max\, \mathcal{I}_p(D(X)) \cap V$ tal que $\epsilon_X(x) \leq \epsilon_X(y)$, en consecuencia $\epsilon_X(x) \in (max\, \mathcal{I}_p(D(X)) \cap V]$ y por lo tanto $x \in \epsilon_X^{-1}(\triangle^* V)$.

Recíprocamente, si $x \in \epsilon_X^{-1}(\triangle^* V)$, entonces $\epsilon_X(x) \in \triangle^* V$ y por (D), existe $t \in max\, \mathcal{I}_p(D(X)) \cap V$ tal que $\epsilon_X(x) \leq t$. Por lo tanto $x \leq \epsilon_X^{-1}(t)$ y $\epsilon_X^{-1}(t) \in max\, X \cap \epsilon_X^{-1}(V)$, de donde resulta $x \in \triangle^* \epsilon_X^{-1}(V)$.

(b) $\neg \epsilon_X^{-1}(V) = \epsilon_X^{-1}(\neg V)$: En primer lugar tengamos en cuenta que por (MP8) del Lema 2.1.3.1, se verifica que $\neg \epsilon_X^{-1}(V) = (min\, X \cap \epsilon_X^{-1}(V)) \cup \{x \in X \setminus \epsilon_X^{-1}(V) :$ existe $t \in \epsilon_X^{-1}(V)$ y $t < x\}$. Probaremos a continuación que $\neg \epsilon_X^{-1}(V) \subseteq \epsilon_X^{-1}(\neg V)$.

Sea $x \in \neg \epsilon_X^{-1}(V)$. Si $x \in min\, X \cap \epsilon_X^{-1}(V)$ se tiene que $\epsilon_X(x) \in min\, \mathcal{I}_p(D(X)) \cap V$ y por lo tanto $x \in \epsilon_X^{-1}(\neg V)$. Si $y \in \{x \in X \setminus \epsilon_X^{-1}(V) :$ existe $t \in \epsilon_X^{-1}(V)$ y $t < x\}$, entonces existe $t \in \epsilon_X^{-1}(V)$ tal que $t < y$ y $y \notin \epsilon_X^{-1}(V)$, luego $\epsilon_X(t) \subset \epsilon_X(y)$, $\epsilon_X(t) \in V$ y $\epsilon_X(y) \notin V$. Por lo tanto $\epsilon_X(y) \in \{I \in \mathcal{I}_p(D(X)) \setminus V :$ existe $R \in V$ y $R \subset I\}$ y así $y \in \epsilon_X^{-1}(\neg V)$.

Recíprocamente sea $x \in \epsilon_X^{-1}(\neg V)$, entonces $\epsilon_X(x) \in \neg V$. Por (MP8), si $\epsilon_X(x) \in min\, \mathcal{I}_p(D(X)) \cap V$ se verifica que $x \in min\, X \cap \epsilon_X^{-1}(V)$ y por lo tanto $x \in \neg \epsilon_X^{-1}(V)$.

Por otra parte si $\epsilon_X(x) \notin V$ y existe $R \in V$ tal que $R \subset \epsilon_X(x)$, entonces $\epsilon_X^{-1}(R) \in \epsilon_X^{-1}(V)$ y $\epsilon_X^{-1}(R) < x$, de lo que se sigue por (MP8) que $x \in \neg \epsilon_X^{-1}(V)$.

□

Proposición 2.1.6.3 *Sean L y L' M_3-retículos y $h : L \longrightarrow L'$ un $\mathbf{M_3}-$homomorfismo, entonces la aplicación $\Phi(h) : \mathcal{I}_p(L') \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$, definida por $\Phi(h)(I') = h^{-1}(I')$, para cada $I' \in \mathcal{I}_p(L')$, es una M_3-función.*

Dem. Resulta del hecho de que $\Phi(h)$ es una $P-$función ([39]) y la Proposición 2.1.5.1, pues si $V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, entonces $V = \sigma_L(a)$ para algún $a \in L$ y $\Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a)) = \sigma_L(h(a))$. En consecuencia $\Phi(h)^{-1}(\triangle^* \sigma_L(a)) = \triangle^* \Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a))$, $\Phi(h)^{-1}(\neg \sigma_L(a)) = \neg \Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a))$ y por lo tanto se verifican las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.1.2.3. □

De la Proposición 2.1.4.1 y el Lema 2.1.6.1 resulta que Ψ es un funtor contravariante de $\mathfrak{M}_3$ en $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$. Por otra parte de las Proposiciones 2.1.5.1 y 2.1.6.3 se deduce fácilmente que

Φ es un funtor contravariante de $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$ en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$. Estos resultados y la Proposición 2.1.6.2, nos permiten concluir el siguiente:

Teorema 2.1.6.4 *Los funtores $\Psi \circ \Phi$ y $\Phi \circ \Psi$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ respectivamente y estas dos categorías son naturalmente equivalentes.*

2.2. Congruencias y álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathbf{M_3}$

2.2.1. Caracterización del retículo de las $\mathbf{M_3}-$congruencias

Uno de los hechos importantes de la dualidad de Priestley es que si L es un retículo distributivo acotado, existe una correspondencia biunívoca entre las congruencias de L y los subconjuntos cerrados de $\mathcal{I}_p(L)$, más precisamente H. A. Priestley ([38], [39], [40]) probó el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1.1 *Sea L un retículo distributivo acotado. Si Y es un subconjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, entonces*

(A3) $\Theta(Y) = \{(a,b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$,

es una congruencia sobre L. Recíprocamente, si θ es una congruencia de L y $q : L \longrightarrow L/\theta$ es el epimorfismo canónico, entonces

(A4) $Y = \{q^{-1}(I) : I \in \mathcal{I}_p(L/\theta)\}$,

es un subconjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$ tal que $\Theta(Y) = \theta$ y la correspondencia $Y \longrightarrow \Theta(Y)$, establece un isomorfismo entre $C(\mathcal{I}_p(L))$, el retículo de los subconjuntos cerrados de L, y el dual del retículo $Con(L)$ de las congruencias de L .

Otro de los resultados que usamos posteriormente y se puede consultar entre los trabajos de H. A. Priestley citados anteriormente es el siguiente:

Proposición 2.2.1.2 *El conjunto* Y *indicado en* (A4)*, verifica que si* $I \in \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$*, entonces existen* $a, b \in L$*, tales que* $(a, b) \in \theta$*,* $a \in I$ *y* $b \notin I$*.*

En esta sección damos una generalización del Teorema 2.2.1.1 para los M_3-retículos, para ello obtenemos una caracterización del retículo de las congruencias de un M_3-retículo, en término de ciertos subconjuntos cerrados de su M_3-espacio asociado.

Definición 2.2.1.3 *Sea* X *un* M_3-*espacio. Diremos que un subconjunto* Y *de* X *es* $\triangle-$*involutivo si* $\triangle^* Y = Y$*.*

Lema 2.2.1.4 *Sea* X *un* M_3-*espacio. Entonces toda cadena maximal en* X *es* $\triangle-$*involutivo.*

Dem. Si C una cadena maximal en X, entonces por (MP2), C es una cadena de dos elementos. Sea $x \in C$, si $x \in max\, X$ entonces es inmediato que $x \in \triangle^* C$. Si $x \in min\, X \cap C$, entonces existe $z \in max\, X \cap C$ tal que $x < z$, lo que implica que $x \in \triangle^* C$. Recíprocamente, si $x \in \triangle^* C$, entonces existe (1) $t \in max\, X \cap C$ tal que $x \leq t$. Si $x = t$ es inmediato que $x \in C$. Si $x < t$, entonces (2) $x \in C_t$ que es la cadena de dos elementos que contiene a t. Por (1), (2) y (MP2) concluímos que $C_t = C$ y por lo tanto $x \in C$. □

Teorema 2.2.1.5 *Sea* X *un* M_3-*espacio e* Y *un subconjunto no vacío de* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es* $\triangle-$*involutivo,*

(ii) Y *es creciente y decreciente,*

(iii) Y *es suma cardinal de cadenas de dos elementos.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la definición de $\triangle^* Y$ resulta inmediato que si Y es $\triangle-$involutivo, entonces Y es decreciente. Por otra parte, si $x \in Y$, $y \in X$, son tales que (1) $x \leq y$, entonces, como Y es $\triangle-$involutivo, existe (2) $t \in M_X Y$ tal que (3) $x \leq t$. Luego si $x = y$, entonces de (1) es inmediato que $y \in Y$ y si $x < y$, entonces de (1), (3) y (MP2) resulta que $t = y$ y por lo tanto de (2), $y \in Y$. De lo cual podemos concluir que Y es creciente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $x \in Y$ y C_x la cadena con dos elementos que contiene a x. Como Y es creciente y decreciente es inmediato que $C_x \subseteq Y$, de lo que se sigue $Y = \bigcup\limits_{x \in Y} C_x$ y en consecuencia por (MP2), Y es suma cardinal de las cadenas C_x.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sea $Y = \bigcup\limits_{x \in Y} C_x$, con C_x cadenas de dos elementos. Por el Lema 2.2.1.4, para cada $x \in Y$ tenemos que $C_x = \triangle^* C_x$, en consecuencia resulta $\bigcup\limits_{x \in Y} C_x = \triangle^* \bigcup\limits_{x \in Y} C_x$ y por lo tanto Y es $\triangle-$involutivo. $\square$

Los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos del M_3-espacio asociado a un M_3-retículo son fundamentales para caracterizar las $\mathbf{M_3}-$congruencias sobre estas álgebras, como se muestra a continuación.

Proposición 2.2.1.6 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ el retículo de los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$. Si $Y \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces $\Theta_{C\triangle}(Y) \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$, donde $\Theta_{C\triangle}(Y)$ está definida como en* (A3).

Dem. Sabemos por Teorema 2.2.1.1 que $\Theta_{C\triangle}(Y)$ es una congruencia de retículos, luego resta probar que $\Theta_{C\triangle}(Y)$ es compatible con $\triangle$ y $\sim$. Sea $(a, b) \in \Theta_{C\triangle}(Y)$, entonces (1) $\sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y$. Como Y es $\triangle-$involutivo y σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo, para cada $x \in L$ se verifica que $\sigma_L(\triangle x) \cap Y = \triangle^* \sigma_L(x) \cap \triangle^* Y$, y además por (M25), $\triangle^* \sigma_L(x) \cap \triangle^* Y = \triangle^*(\sigma_L(x) \cap Y)$. Entonces $\sigma_L(\triangle x) \cap Y = \triangle^*(\sigma_L(x) \cap Y)$, para cada $x \in L$, lo que implica teniendo en cuenta (1) que $\sigma_L(\triangle a) \cap Y = \sigma_L(\triangle b) \cap Y$, resultando en consecuencia que $\Theta_{C\triangle}(Y)$ es compatible con la operación $\triangle$.

Por otro lado se verifica que $\sigma_L(\sim a) \cap Y = \neg(\sigma_L(a) \cap Y)$. En efecto, si $I \in \sigma_L(\sim a) \cap Y$, como σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo, resulta que $I \in \neg\sigma_L(a)$, y por lo tanto existe (1) $Q \in m_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a)$ tal que (2) $Q \subseteq I$ y (3) $I \notin M_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a)$. Por el Teorema 2.2.1.5, como Y es decreciente, de (1) y (2), tenemos que $Q \in m_{\mathcal{I}_p(L)}(\sigma_L(a) \cap Y)$, de donde se sigue por (3) que $I \in [m_{\mathcal{I}_p(L)}(\sigma_L(a) \cap Y)) \setminus M_{\mathcal{I}_p(L)}(\sigma_L(a) \cap Y)$, lo cual implica que $I \in \neg(\sigma_L(a) \cap Y)$.

Para probar la otra inclusión, supongamos ahora que $I \in \neg(\sigma_L(a) \cap Y)$, esto implica, teniendo en cuenta la definición de $\neg$ en $D(\mathcal{I}_p(L))$, que existe (4) $R \in m_{\mathcal{I}_p(L)}(\sigma_L(a) \cap Y)$ tal que (5) $R \subseteq I$ y (6) $I \notin M_{\mathcal{I}_p(L)}(\sigma_L(a) \cap Y)$. Luego de (4) y (5) es claro que $I \in [m_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a))$ y como por el Teorema 2.2.1.5, Y es creciente, tenemos (7) $I \in Y$. Si $I \in M_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a)$, se seguiría de (7) que $I \in M_{\mathcal{I}_p(L)}(\sigma_L(a) \cap Y)$, lo que contradice (6). Por lo tanto $I \in [m_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a)) \setminus M_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a)$ y en consecuencia $I \in \neg\sigma_L(a) \cap Y$.

Hemos demostrado así que $\Theta_{C\triangle}(Y)$ es compatible con las operaciones $\triangle$ y $\sim$, en consecuencia $\Theta_{C\triangle}(Y) \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$.

$\square$

Proposición 2.2.1.7 *Sean $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ el retículo de los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$. Si $\theta \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$, entonces existe $Y \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\theta = \Theta_{C\triangle}(Y)$, donde $\Theta_{C\triangle}(Y)$ está definida como en* (A3).

Dem.

Sea $\theta \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ y $q : L \longrightarrow L/\theta$ el epimorfismo canónico. Como $Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ es un subretículo de $Con(L)$, entonces por Teorema 2.2.1.1, $Y = \{q^{-1}(Q) : Q \in \mathcal{I}_p(L/\theta)\}$ es un cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$ y $\theta = \Theta_{C\triangle}(Y)$. Para probar que Y es $\triangle-$involutivo, por Teorema 2.2.1.5, es suficiente mostrar que Y es creciente y decreciente.

(a) Y es decreciente: Supongamos que Y no es decreciente, entonces existen $I \in \mathcal{I}_p(L)$ y (1) $Q \in Y$ tales que (2) $I \subset Q$ y (3) $I \notin Y$. De (2) y (MP2), $Q \in max\,\mathcal{I}_p(L)$ y por (I5) e (I7) tenemos que (4) $Q_\nabla = I$, además por (I6) resulta que (5) $I \in \mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)$.

Por otro lado de (3) y la Proposición 2.2.1.2, podemos afirmar que existen $a, b \in L$ tales que (6) $(a, b) \in \theta$ con (7) $a \in I$ y (8) $b \notin I$. Luego de (5) y (7) resulta que (9) $\sim a \in I$ y por (4) y (8) tenemos que $b \notin Q$ o $b \notin \sim Q$. Si $b \notin Q$, entonces por (2) y (6), $a \notin I$, lo que contradice (7). En forma análoga, si $b \notin \sim Q$, entonces $\sim a \notin I$, lo que contradice (9).

(b) Y es creciente: Supongamos que existen, $I \in \mathcal{I}_p(L)$, (1) $Q \in Y$, tal que (2) $Q \subset I$ y (3) $I \notin Y$. De (3) y la Proposición 2.2.1.2, existen $a, b \in L$ tales que (4) $(a, b) \in \theta$, (5) $a \in I$ y (6) $b \notin I$. Luego de (2) y (6), resulta que $b \notin Q$ y como $\theta = \Theta_{C\triangle}(Y)$, de (1), (4) se sigue que (7) $a \notin Q$. Por (2), (MP2) y (6), tenemos que $I \in M_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(b)$, y por lo tanto $Q \in \triangle^*\sigma_L(b)$, lo que implica por ser σ_L un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo que $\triangle b \notin Q$. Entonces como θ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia, de (4) se verifica que $(\triangle a, \triangle b) \in \theta$ y por lo tanto (9) $\triangle a \notin Q$. Además por (M1) y (M25) tenemos que $0 = \triangle a \wedge \triangle \sim a \in Q$ y como Q es ideal primo, de (9), $\triangle \sim a \in Q$ o lo que es equivalente, (10) $\sim a \in \triangle^{-1}(Q)$. Por otra parte de (2) y (MP2), $I \in max\, \mathcal{I}_p(L)$ y $Q \in min\, \mathcal{I}_p(L)$, entonces por los Lemas 2.1.1.1 y 2.1.1.2, inferimos que (11) $I = Q_\triangle$ y (12) $Q = I_\nabla$. Luego de (10), (11) y (M2), concluímos que $a \in \sim I$. De esta afirmación teniendo en cuenta (5) y (12) obtenemos que $a \in Q$, lo que contradice (7).

□

Teorema 2.2.1.8 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Entonces el retículo $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ de los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ de las $\mathbf{M_3}-$congruencias, y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{C\triangle}$ definida por la misma prescripción que la dada en* (A3).

Dem. Es consecuencia de las Proposiciones 2.2.1.6 y 2.2.1.7 y el hecho de que la correspondencia $Y \longrightarrow \Theta_{C\triangle}(Y)$, establece un isomorfismo del retículo $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ sobre el dual del retículo $Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ de las $\mathbf{M_3}-$congruencias de L. □

2.2.2. Algebras simples y subdirectamente irreducibles en $\mathbf{M_3}$

A continuación, aplicamos el Teorema 2.2.1.8 para caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en $\mathbf{M_3}$.

Teorema 2.2.2.1 *Sea X un M_3-espacio y $\Psi(X)$ su M_3-retículo dual asociado, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *X es totalmente ordenado,*

(ii) *$\Psi(X)$ es simple,*

(iii) *$\Psi(X)$ es subdirectamente irreducible.*

Dem.
(i)$\Rightarrow$ (ii): Si X es totalmente ordenado, entonces por (MP2), tenemos que X es a una cadena maximal de dos elementos. Luego por el Lema 2.2.1.4, X es $\triangle-$involutivo y en consecuencia es el único cerrado y $\triangle-$involutivo de X no vacío, lo que implica por el Teorema 2.2.1.8 que $\Psi(X)$ es simple.

(ii)$\Rightarrow$ (iii): Trivial.

(iii)$\Rightarrow$ (i): Si $\Psi(X)$ es subdirectamente irreducible, entonces por el Teorema 2.2.1.8, la familia $C_\triangle(X)$, de los subconjuntos cerrados, $\triangle-$involutivos y propios de X, tiene último elemento F_0. Por ser F_0 propio, existe (1) $x \in X \setminus F_0$. Si C_x es la cadena de dos elementos que contiene a x, entonces por el Lema 2.2.1.4, $C_x \in C_\triangle(X)$, de esto resulta por (1) que $C_x = X$ y por lo tanto X es totalmente ordenado. $\square$

Corolario 2.2.2.2 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ con más de un elemento. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *L es simple,*

(ii) *L es subdirectamente irreducible,*

(iii) *L es isomorfo a* T*, donde* T *está dado como en* (M33)*,* (ver Sección 1.4 del Capítulo 1)*.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.2.1 y el Corolario 2.1.1.4. □

2.2.3. Otra caracterización del retículo de las $\mathbf{M_3}-$congruencias

A veces es más conveniente caracterizar las congruencias de un retículo distributivo L, por medio de los subconjuntos abiertos de su espacio de Priestley asociado. Si G es un subconjunto abierto de $\mathcal{I}_p(L)$, entonces la relación $\Theta_O(G)$ definida por $(a,b) \in \Theta_O(G)$ si, y solo si, $\sigma_L(a) \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus G) = \sigma_L(b) \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus G)$, para todo $a, b \in L$, es una congruencia de retículo llamada congruencia determinada por el subconjunto abierto G y la correspondencia $G \longrightarrow \Theta_O(G)$ define un isomorfismo del retículo $O(\mathcal{I}_p(L))$ de los abiertos de $\mathcal{I}_p(L)$ sobre el retículo $Con(L)$ de las congruencias de L. Además es claro que $\Theta_O(G) = \Theta(\mathcal{I}_p(L) \setminus G)$.

La dualidad descripta en la Sección 2.1, nos permitió caracterizar el retículo de las congruencias de un M_3-retículo, en término de ciertos subconjuntos cerrados de su M_3-espacio asociado, mas precisamente los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos.

A continuación probamos que esto también se puede realizar con subconjuntos abiertos y $\triangle-$involutivos del M_3-espacio asociado.

Lema 2.2.3.1 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L, entonces para todo $U, V \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_p(L))$ se verifica que $\triangle^*(U \setminus V) = \triangle^*U \setminus \triangle^*V$.*

Dem.

Sea $x \in \triangle^*(U \setminus V)$, entonces existe $y \in max\, \mathcal{I}_p(L) \cap (U \setminus V)$ tal que $x \leq y$. Luego es claro que existe $y \in max\, \mathcal{I}_p(L) \cap U$ tal que $x \leq y$ y en consecuencia $x \in \triangle^*U$. Si $x \in \triangle^*V$, tendríamos que existe $z \in max\, \mathcal{I}_p(L) \cap V$ tal que $x \leq z$, de donde analizando los distintos casos que se presentan: (a) $x < y$ y $x < z$, (b) $x < y$ y $x = z$, (c) $x = y$ y $x < z$, (d) $x = y$ y $x = z$, llegaríamos a contradicciones. Por lo tanto $x \notin \triangle^*V$ y así $x \in \triangle^*U \setminus \triangle^*V$.

Para la otra inclusión, consideremos (1) $x \in \triangle^* U \setminus \triangle^* V$. Entonces existe $y \in max\,\mathcal{I}_p(L) \cap U$ tal que $x \leq y$. Si $y \in V$, se verificaría que $y \in max\,\mathcal{I}_p(L) \cap V$, lo que implicaría que $x \in \triangle^* V$ que contradice (1). Luego $y \in (U \setminus V) \cap max\,\mathcal{I}_p(L)$, y por lo tanto se verifica $x \in \triangle^*(U \setminus V)$.

$\square$

Corolario 2.2.3.2 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Entonces G es un abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$, si, y solo si, $\mathcal{I}_p(L) \setminus G$ es un cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$.*

Dem. Sea G es abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$, entonces es claro que $\mathcal{I}_p(L) \setminus G$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$. Además por el Lema 2.2.3.1 se verifica que $\triangle^*(\mathcal{I}_p(L) \setminus G) = (\triangle^* \mathcal{I}_p(L)) \setminus (\triangle^* G)$ y como $\triangle^* \mathcal{I}_p(L) = \mathcal{I}_p(L)$ y $\triangle^* G = G$ por ser G un conjunto $\triangle-$involutivo, se verifica que $\triangle^*(\mathcal{I}_p(L) \setminus G) = \mathcal{I}_p(L) \setminus G$, de donde $\mathcal{I}_p(L) \setminus G$ es $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. La recíproca es análoga. $\square$

Es sencillo probar el siguiente

Lema 2.2.3.3 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Si Y es un subconjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$ y $a, b \in L$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y$,

(ii) $(\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)) \cap Y = \emptyset$,

(iii) $(\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$,

siendo $\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)$ la diferencia simétrica de $\sigma_L(b)$ con $\sigma_L(a)$.

Teorema 2.2.3.4 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ su M_3-espacio asociado. Entonces el retículo $O_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ de los subconjuntos abiertos y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$ es isomorfo al retículo $Con_{\mathbf{M_3}}(L)$de las $\mathbf{M_3}-$congruencias de L, y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{O\triangle}$ definida por:*

(A3') $\Theta_{O\triangle}(G) = \{(a,b) \in L \times L : (\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)) \subseteq G\}$.

Dem.

Es consecuencia inmediata del Lema 2.2.3.3, el Corolario 2.2.3.2 y el Teorema 2.2.1.8.

□

2.2.4. $\mathbf{M_3}-$congruencias principales

En esta sección caracterizamos los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos y los subconjuntos abiertos y $\triangle-$involutivos, que corresponden a $\mathbf{M_3}-$congruencias principales bajo la dualidad.

A continuación exponemos algunos resultados que son necesarios para la determinación de las congruencias principales.

Proposición 2.2.4.1 *Sea $L \in \mathbf{L}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el espacio de Priestley asociado a L, $I \subseteq L$ un ideal y $\sigma(I) = \{I_p \in \mathcal{I}_p(L) : I \subseteq I_p\}$. Entonces se verifican:*

(i) *$\sigma(I)$ es cerrado y creciente en $\mathcal{I}_p(L)$.*

(ii) *$\theta(I) = \Theta(\sigma(I))$, siendo $\theta(I) = \{(a,b) \in L^2 : $ existe $i \in I$, y $\ a \vee i = b \vee i\}$, la congruencia asociada al ideal I, y $\Theta(\sigma(I))$, la congruencia definida como en* (A3).

Dem.

(i): Es fácil ver $\sigma(I)$ es un conjunto creciente en $\mathcal{I}_p(L)$. Por otra parte si $I'_p \in \mathcal{I}_p(L) \backslash \sigma(I)$, existe $a \in L$ tal que (1) $a \in I$ y $a \notin I'_p$, por lo tanto $I'_p \in \sigma_L(a)$, además se verifica que $\sigma_L(a) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma(I)$. En efecto, si $I''_p \in \sigma_L(a)$, entonces $a \notin I''_p$ y de (1) $I''_p \notin \sigma(I)$. Luego $I''_p \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma(I)$ y por lo tanto $\sigma(I)$ es un cerrado en $\mathcal{I}_p(L)$.

(ii): Consideremos $I \subseteq L$ un ideal y $a,b \in L$ tales que $(a,b) \in \theta(I)$. Entonces existe (1) $i \in I$ tal que (2) $a \vee i = b \vee i$. Sea $I_p \in \sigma(I) \cap \sigma_L(a)$, luego (3) $I \subseteq I_p$ y $a \notin I_p$, de esto último $a \vee i \notin I_p$ y teniendo en cuenta (2) se verifica $b \vee i \notin I_p$, de donde por (1) y (3) $b \notin I_p$. Así $I_p \in \sigma(L) \cap \sigma_L(b)$. En forma análoga se puede probar la otra inclusión, por lo tanto $\sigma_L(a) \cap \sigma(I) = \sigma_L(b) \cap \sigma(I)$, y queda demostrado así que $(a, b) \in \Theta(\sigma(I))$. Luego $\theta(I) \subseteq \Theta(\sigma(I))$.

Para la otra inclusión consideremos $a, b \in L$ tales que (4) $(a, b) \in \Theta(\sigma(I))$ y supongamos que $(a, b) \notin \theta(I)$. Entonces para todo $i \in I$ se verifica $a \vee i \neq b \vee i$, lo cual implica que para todo $i \in I$, $a \vee i \not\leq b \vee i$, o para todo $i \in I$, $b \vee i \not\leq a \vee i$.
Supongamos que para todo $i \in I$, $a \vee i \not\leq b \vee i$, entonces para todo $i \in I$, $a \not\leq b \vee i$, y por lo tanto $a \notin I(I \cup \{b\})$, siendo $I(I \cup \{b\})$ el ideal generado por $I \cup \{b\}$. Luego como consecuencia del Teorema de Birkhoff-Stone, existe $I_p \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $I(I \cup \{b\}) \subseteq I_p$ y $a \notin I_p$ y por lo tanto $I_p \in \sigma(I) \cap \sigma_L(a)$ e $I_p \notin \sigma_L(b)$, lo cual implica $I_p \notin \sigma_L(b) \cap \sigma(I)$. Tenemos así que $\sigma_L(a) \cap \sigma(I) \neq \sigma_L(b) \cap \sigma(I)$, de donde $(a, b) \notin \Theta(\sigma(I))$, lo que contradice (4). Si suponemos que para todo $i \in I$, $b \vee i \not\leq a \vee i$, se obtiene en forma análoga una contradicción similar, por lo que $(a, b) \in \theta(I)$.

$\square$

Proposición 2.2.4.2 *Sea $L \in \mathbf{L}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el espacio de Priestley asociado a L e $Y \subseteq \mathcal{I}_p(L)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es cerrado y creciente de $\mathcal{I}_p(L)$,*

(ii) *si $I_p \notin Y$, entonces existe $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $I_p \in U$ y $U \cap Y = \emptyset$,*

(iii) *si $I_p \notin Y$, existe $a \in L$ tal que $a \notin I_p$ y $a \in Z_p$ para todo $Z_p \in Y$,*

(iv) *existe un ideal I de L tal que $\sigma(I) = Y$ y además $I = \bigcap_{Q \in Y} Q$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea Y es cerrado y creciente de $\mathcal{I}_p(L)$, tal que $I_p \notin Y$. Luego como Y es creciente, para todo $Z_p \in Y$, $Z_p \not\subseteq I_p$, lo cual implica por tratarse de un espacio de Priestley, que para cada $Z_p \in Y$, existe $U_Z \in D(X)$ tal que $Z_p \notin U_Z$ e (1) $I_p \in U_Z$. De lo anterior tenemos que (2) $Y \subseteq \bigcup_{Z_p \in Y} (\mathcal{I}_p(L) \setminus U_Z)$.

Por otra parte como Y es un cerrado del espacio compacto $\mathcal{I}_p(L)$ se verifica que Y es compacto, y por lo tanto de (2) existen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ tales que (3) $Y \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_{Z_i}$. Entonces si $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{Z_i}$, de (1) y (3), tenemos que $I_p \in U$ y $U \cap Y = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $I_p \notin Y$, entonces por (ii) existe $U = \sigma_L(a) \in D(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $I_p \in U$ y $U \cap Y = \emptyset$. Luego existe $a \in L$ tal que $a \notin I_p$ y $a \in Z_p$, para todo $Z_p \in Y$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es claro que $I = \bigcap_{Q \in Y} Q$ es un ideal de L, tal que $Q \in \sigma(I)$ para todo $Q \in Y$, lo cual implica que $Y \subseteq \sigma(I)$. Para la otra inclusión, sea (1) $I_p \notin Y$, entonces por (iii), existe $a \in L$ tal que (2) $a \notin I_p$ y $a \in Q$ para todo $Q \in Y$, por lo tanto (3) $a \in I$. De (2) y (3), $I \not\subseteq I_p$, de donde resulta (4) $I_p \notin \sigma(I)$. Finalmente de (1) y (4) tenemos que $\mathcal{I}_p \setminus Y \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma(I)$, y por lo tanto $\sigma(I) \subseteq Y$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Se verifica por la parte (i) de la Proposición 2.2.4.1. $\square$

Definición 2.2.4.3 *Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, diremos que un subconjunto Y de X es convexo si $x, y \in Y$ y $x \leq z \leq y$ implica $z \in Y$.*

Observación 2.2.4.4 *Si $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ es su M_3-espacio asociado, entonces todo subconjunto Y de $\mathcal{I}_p(L)$ es convexo, por ser el espacio suma cardinal de cadenas de dos elementos.*

Proposición 2.2.4.5 *Si R es un conjunto abierto, cerrado y convexo en un espacio de Priestley X y $D(X)$ el conjunto de los abiertos, cerrados y decrecientes del espacio X, entonces existen $U, V \in D(X)$, tales que $U \subseteq V$ y $R = V \setminus U$.*

Dem.

Es consecuencia de los siguientes resultados, cuya demostración exponemos en cada caso:

(i) $(R] = \{x \in X :$ existe $y \in R$ tal que $x \leq y\}$ es un cerrado en X:

Sea $x \in X \setminus (R]$, entonces $x \not\leq y$ para todo $y \in R$. Como X es disconexo en el orden, para cada $y \in R$ existe $U_{xy} \in D(X)$ tal que $y \in U_{x,y}$ y $x \notin U_{xy}$. En consecuencia $R \subseteq \bigcup_{y \in R} U_{x,y}$ y como X es compacto existen $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$, tales que $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{xy_i}$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{xy_i}$, entonces $V = X \setminus U$ es un abierto y creciente, $x \in V$ y (1) $R \cap V = \emptyset$. Supongamos que $(R] \cap V \neq \emptyset$, entonces existe $z \in X$ tal que $z \in (R]$ y $z \in V$. Por consiguiente existe $s \in R$ tal que $z \leq s$ y por ser V creciente $s \in V$. Luego $s \in R \cap V$, lo que contradice (1), por lo tanto $V \subseteq X \setminus (R]$. Entonces para cada $x \in X \setminus (R]$, existe V, abierto en X, tal que $x \in V$ y $V \subseteq X \setminus (R]$, lo que implica que $X \setminus (R]$ es abierto en X y por consiguiente $(R]$ es cerrado en X.

(ii) $(R] \setminus R$, es decreciente:

Sea (1) $x \in (R] \setminus R$ y $y \in X$ tal que $y \leq x$. Luego existe $z \in R$ tal que $x \leq z$ y en consecuencia $y \leq x \leq z$ con $z \in R$, lo que implica que $y \in (R]$. Si $y \in R$, $x \in R$ pues R es compacto, lo que contradice (1). Por lo tanto $y \in (R] \setminus R$.

(iii) Existe $U \in D(X)$ tal que: (a) $(R] \setminus R \subseteq U$ y (b) $R \cap U = \emptyset$:

Sea $x \in R$ e $y \in (R] \setminus R$. Como $(R] \setminus R$ es decreciente tenemos que $x \not\leq y$. Luego para cada $y \in (R] \setminus R$ existe $U_{xy} \in D(X)$ tal que $y \in U_{xy}$ y $x \notin U_{xy}$, lo que implica que (1) $(R] \setminus R \subseteq \bigcup_{y \in R} U_{xy}$. Por ser R y $(R]$ cerrados de X, se verifica que (2) $(R] \setminus R$ es compacto y por lo tanto de (1) y (2), existen $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$, tales que $(R] \setminus R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{xy_i}$. Es claro que para cada $x \in R$, existe $U_x = \bigcup_{i=1}^{n} U_{xy_i} \in D(X)$, tal que (3) $(R] \setminus R \subseteq U_x$ y $x \in X \setminus U_x$. De esto resulta que $R \subseteq \bigcup_{x \in R} (X \setminus U_x)$ y como R es compacto, existen $x_1, x_2, \dots, x_m \in R$ tal que $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (X \setminus U_{x_i})$ o lo que es equivalente (4) $R \subseteq X \setminus (\bigcap_{i=1}^{m} U_{x_i})$. Si $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{x_i} \in D(X)$, de (3) y (4), se verifican (a) y (b).

(iv) $V = R \cup U \in D(X)$ y $V \setminus U = R$, siendo U el conjunto cuya existencia asegura (iii):

Por ser R un conjunto abierto y cerrado, podemos asegurar que $V = R \cup U$ es un abierto y cerrado de X. Veamos que V es decreciente. Sea $x \in V$ e $y \leq x$. Se nos presentan dos casos: (a) $x \in U$ o (b) $x \in R$. Si ocurre (a), es claro que $y \in V$, por ser U decreciente. Si se verifica (b), tenemos que $y \in (R]$. Luego si $y \in R$ resulta $y \in V$, pero si $y \notin R$, se verifica que $y \in (R] \setminus R$ y por lo demostrado en (iii), $y \in U$ de donde $y \in V$, con lo que queda demostrado que $V \in D(X)$. Además por (b) de (iii), es inmediato que $V \setminus U = R$.

$\square$

Proposición 2.2.4.6 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ su M_3-espacio asociado y $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ dada como en* (A1) *del* Capítulo 1, Sección 1.3.2*, entonces la restricción de la función σ_L a $K(L)$ es un isomorfismo booleano y para todo $d \in K(L)$ se verifica $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(d) = \sigma_L(\overline{d})$, donde $\overline{d}$ es el complemento booleano de d en $K(L)$.*

Dem.

En [16], Figallo probó que si L es un M_3-retículo, el conjunto $K(L)$, de los elementos invariantes de L, es un álgebra de Boole generalizada. De este hecho, si L tiene como último elemento a 1, se verifica que $1 \in K(L)$, y por lo tanto $[0,1] = \{x \in K(L) : 0 \leq x \leq 1\}$ que coincide con $K(L)$, es un álgebra de Boole, tal que si $x \in K(L)$, entonces $\overline{x} = \triangle \sim (x \vee \sim 1)$ es su complemento booleano. Para probar que la restricción de σ_L a $K(L)$ es un isomorfismo booleano solo nos resta probar que para todo $x \in K(L)$, se verifica que $\sigma_L(x) \in K(D(\mathcal{I}_p(L))$ y que $\sigma_L(\overline{x}) = \overline{\sigma_L(x)}$, donde $\overline{\sigma_L(x)}$ el complemento booleano de $\sigma_L(x)$ en $K(D(\mathcal{I}_p(L))$. En primer lugar observemos que si $x \in K(L)$, entonces $\triangle x = x$ y como la aplicación $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo, tenemos que $\sigma_L(x) = \triangle^* \sigma_L(x)$, resultando de este modo que $\sigma_L(x) \in K(D(\mathcal{I}_p(L))$. En consecuencia como $\sigma_L|K(L) : K(L) \longrightarrow K(D(\mathcal{I}_p(L)))$ es un homomorfismo de retículos acotados entre álgebras de Boole, entonces $\sigma_L|K(L)$ también preserva el complemento y por lo tanto $\sigma_L|K(L)$ es un isomorfismo booleano es decir $\sigma_L(\overline{x}) = \sigma_L(\triangle \sim (x \vee \sim 1)) = \triangle^* \neg(\sigma_L(x) \cup \neg \mathcal{I}_p(L)) = \overline{\sigma_L(x)}$.

Veamos ahora que $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(d) = \sigma_L(\overline{d})$, para todo $d \in K(L)$. Sea $P \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(d)$ con $d \in K(L)$. Si $\overline{d} \in P$, entonces $d \vee \overline{d} = 1 \in P$, pues $d \in P$, y por lo tanto P no sería un ideal propio, lo cual es absurdo pues P es un ideal primo. Luego $P \in \sigma_L(\overline{d})$. Para la otra inclusión, sea $P \in \sigma_L(\overline{d})$, entonces $\overline{d} \notin P$. Como $0 = d \wedge \overline{d} \in P$, y P es ideal primo, se verifica que $d \in P$. Luego $P \notin \sigma_L(d)$, o lo que es equivalente $P \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(d))$.

$\square$

Observación 2.2.4.7 *Si L es un M_3-retículo y $\Theta(a,b)$ es una congruencia principal, podemos suponer que $a \leq b$, pues en caso contrario tomamos $a \wedge b$ y $a \vee b$, ya que $\Theta(a,b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$.*

Lema 2.2.4.8 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ su M_3-espacio asociado y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si Y es un subconjunto de $\mathcal{I}_p(L)$ cerrado y $\triangle-$involutivo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(a,b) \in \Theta_{C\triangle}(Y)$,

(ii) $(\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)) \cap Y = \emptyset$,

(iii) $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \cap Y = \emptyset$,

(iv) $(a,b) \in \Theta_{O\triangle}(\mathcal{I}_p(L) \setminus Y)$.

Dem.

La demostración es inmediata del Lema 2.2.3.3 y el Teorema 2.2.3.4, teniendo en cuenta que si $a \leq b$, como $\sigma_L : L \longrightarrow D(X(L))$ es un isomorfismo de retículos, entonces $\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(b)$ y por lo tanto $\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a) = \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.

$\square$

Definición 2.2.4.9 *Sea X un M_3-espacio y $C_\triangle(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X cerrados y $\triangle-$involutivos. Decimos que $Y \in C_\triangle(X)$es maximalmente disjunto en $C_\triangle(X)$ con un subconjunto R de X, si $Y \cap R = \emptyset$ y para todo $Z \in C_\triangle(X)$ tal que $Z \cap R = \emptyset$ se verifica que $Z \subseteq Y$.*

Lema 2.2.4.10 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $Y \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{C\triangle}(Y) = \Theta(a, b)$,

(ii) *Y es maximalmente disjunto con el conjunto abierto y cerrado $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$ en $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $Y \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\Theta_{C\triangle}(Y) = \Theta(a, b)$ con $a \leq b$ y $F \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ disjunto con $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$. Por el Lema 2.2.4.8 sabemos que $Y \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) = \emptyset$ y que $(a, b) \in \Theta_{C\triangle}(F)$. En consecuencia $\Theta_{C\triangle}(Y) \subseteq \Theta_{C\triangle}(F)$ y por tratarse $\Theta_{C\triangle}$ de un antiisomorfismo, se verifica que $F \subseteq Y$, quedando probado de esta manera (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si consideramos que Y es maximal en la familia de los subconjuntos de $\mathcal{I}_p(L)$ cerrados, $\triangle-$involutivos y disjuntos con $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, entonces por Lema 2.2.4.8, $\Theta_{C\triangle}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia tal que $(a, b) \in \Theta_{C\triangle}(Y)$ y por lo tanto $\Theta(a, b) \subseteq \Theta_{C\triangle}(Y)$. Además, por el Teorema 2.2.1.8, existe F cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$ tal que $\Theta(a, b) = \Theta_{C\triangle}(F)$ y por consiguiente tenemos que $\Theta_{C\triangle}(F) \subseteq \Theta_{C\triangle}(Y)$, de donde por ser $\Theta_{C\triangle}$ un antiisomorfismo resulta que (1) $Y \subseteq F$. Por otra parte como $(a, b) \in \Theta_{C\triangle}(F)$, entonces se verifica que (2) $F \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) = \emptyset$. Luego de (1) y (2), por la maximalidad de Y resulta que $Y = F$ y en consecuencia $\Theta(a, b) = \Theta_{C\triangle}(Y)$.

□

Proposición 2.2.4.11 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Si $Y \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_{C\triangle}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto R de $\mathcal{I}_p(L)$ abierto y cerrado, tal que Y es maximalmente disjunto con R en $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es inmediato del Lema 2.2.4.10, siendo $R = \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $Y \in C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, tal que existe $R \subseteq \mathcal{I}_p(L)$ que verifica:

(a) R es abierto y cerrado,

(b) $Y \cap R = \emptyset$,

(c) si $F \in C_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ y $F \cap R = \emptyset$, entonces $F \subseteq Y$.

De (a), por la Proposición 2.2.4.5 y la Observación 2.2.4.4, existen $U, V \in D(\mathcal{I}_p(L))$ tales que $U \subseteq V$ y $V \setminus U = R$. Luego existen $a, b \in L$, $a \leq b$ tales que $U = \sigma_L(a)$ y $V = \sigma_L(b)$ y por (b) y el Lema 2.2.4.8, (1) $(a, b) \in \Theta_{C\triangle}(Y)$. Sea (2) $\vartheta \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ tal que (3) $(a, b) \in \vartheta$. Entonces por Teorema 2.2.1.8, existe $F \in C_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\vartheta = \Theta_{C\triangle}(F)$, lo que implica $(a, b) \in \Theta_{C\triangle}(F)$ y en consecuencia por el Lema 2.2.4.8, $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \cap F = \emptyset$. De esto último resulta por (c) que $F \subseteq Y$, y como $\Theta_{C\triangle}$ es un antiisomorfismo tenemos (4) $\Theta_{C\triangle}(Y) \subseteq \Theta_{C\triangle}(F) = \vartheta$. Luego de (1), (2), (3) y (4) inferimos que $\Theta_{C\triangle}(Y) = \Theta_{C\triangle}(a, b)$ y por lo tanto es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal.

$\square$

Proposición 2.2.4.12 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $G \in O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) *G es el menor subconjunto de $O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $G \in O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$. Como $(a, b) \in \Theta_{O\triangle}(G)$, entonces por el Lema 2.2.4.8, se verifica que (1) $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \subseteq G$.

Por otro lado como $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta_{C\triangle}(\mathcal{I}_p(L) \setminus G)$, entonces $\Theta_{C\triangle}(\mathcal{I}_p(L) \setminus G) = \Theta(a, b)$ y por el Lema 2.2.4.10, $F = \mathcal{I}_p(L) \setminus G$ es maximalmente disjunto con $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$ en $C_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$.

Sea $G' \in O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq G'$, entonces (2) $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus G') = \emptyset$, y (3) $F' = \mathcal{I}_p(L) \setminus G' \in C_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$. Luego de (2) y (3), por la maximalidad de F, resulta que $\mathcal{I}_p(L) \setminus G' \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus G$ y en consecuencia $G \subseteq G'$. Por lo tanto de (1), G es el menor subconjunto de $O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Como por hipótesis $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \subseteq G$, entonces por Lema 2.2.4.8 $(a, b) \in \Theta_{O\triangle}(G)$. Por otra parte si $\vartheta \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ es tal que $(a, b) \in \vartheta$, entonces por el Teorema 2.2.3.4, existe $G' \in O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\vartheta = \Theta_{O\triangle}(G')$ y por Lema 2.2.4.8, $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq G'$. De esto último, teniendo en cuenta que G es el menor conjunto que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, resulta que $G \subseteq G'$ y en consecuencia como $\Theta_{O\triangle}$ es un isomorfismo tenemos que $\Theta_{O\triangle}(G) \subseteq \Theta_{O\triangle}(G')$. De esta forma resulta que $\Theta_{O\triangle}(G)$ es la menor $\mathbf{M_3}-$congruencia que contiene al par (a, b) y por consiguiente $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$.

$\square$

Proposición 2.2.4.13 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $G \in O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) $G = \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$, *con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$, entonces por la Proposición 2.2.4.12, G es el menor subconjunto de $O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$ y por ser G un conjunto $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$, por el Teorema 2.2.1.5, $G = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$, con C_i cadenas maximales (cadenas de dos elementos), para todo $i \in I$. Por otro lado como $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq G$, existe un conjunto $I_0 \subseteq I$ tal que $C_i \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset$, para todo $i \in I_0$ y $\bigcup\limits_{i \in I_0} C_i \subseteq G$. Supongamos que $\bigcup\limits_{i \in I_0} C_i \subset G$, entonces existe (1) $P \in G$ y $j \notin I_0$ tal que la cadena maximal $C_j \subseteq G$ verifica que (2) $P \in C_j$ y $C_j \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) = \emptyset$. Como $\mathcal{I}_p(L)$ es un espacio T_2, todo conjunto finito es cerrado, en consecuencia C_j es cerrado y además $\triangle-$involutivo. Luego $\mathcal{I}_p(L) \setminus C_j$ es un subconjunto abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$ tal que $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus C_j$, de donde por la minimalidad de G, tenemos que $G \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus C_j$, o lo que es equivalente (3) $C_j \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus G$. Entonces de (2) y (3) obtenemos que $P \in \mathcal{I}_p(L) \setminus G$, lo que contradice (1). Por lo tanto $G = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Sea $G = \bigcup_{C_i \cap (U \setminus V) \neq \emptyset} C_i$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, con $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$. Veamos que $V \setminus U \subseteq G$. Sea $P \in V \setminus U$, entonces como el espacio es suma cardinal de cadenas de dos elementos se verifica que $P \in C_P$, siendo C_P la cadena de dos elementos que contiene a P y por lo tanto $P \in C_P \cap (V \setminus U)$. Luego $P \in C_P \subseteq \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i = G$.

Sea $G' \in O_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ tal que (1) $V \setminus U \subseteq G'$. Entonces se verifica que $G \subseteq G'$. En efecto, sea $R \in G = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$, entonces existe i_0 tal que $R \in C_{i_0}$ y (2) $C_{i_0} \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$. Luego de (1) y (2), $C_{i_0} \cap G' \neq \emptyset$ y por ser G' $\triangle-$involutivo se debe verificar $C_{i_0} \subseteq G'$, lo cual implica que $R \in G'$. Hemos probado así que $G \subseteq G'$, por lo tanto G es el menor $\triangle-$involutivo que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, lo cual implica por la Proposición 2.2.4.12 que $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$.

$\square$

Proposición 2.2.4.14 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $G \in O_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(G)$, *es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto R de $\mathcal{I}_p(L)$ cerrado y abierto, tal que $G = \bigcup_{C_i \cap R \neq \emptyset} C_i$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Inmediato de la Proposición 2.2.4.13.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea R un conjunto tal como plantea la hipótesis. Luego como por la Observación 2.2.4.4, R es un conjunto convexo, la Proposición 2.2.4.5, nos asegura que existen $U, V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, tales que $U \subseteq V$ y $R = V \setminus U$. Por otro lado como σ_L es un isomorfismo existen $a, b \in L$ tales que $a \leq b$, $U = \sigma_L(a)$ y $V = \sigma_L(b)$. En consecuencia $G = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$, de donde por la Proposición 2.2.4.13, podemos asegurar que $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$, y por lo tanto $\Theta_{O\triangle}(G)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal. $\square$

La demostración de la siguiente proposición es larga y computacional, por este motivo la hacemos en forma detallada.

Proposición 2.2.4.15 *Sea* $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ *el* M_3-*espacio asociado a* L *y* $a, b \in L$ *tales que* $a \leq b$. *Si* $G \in O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a,b)$,

(ii) $G = (\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$.

Dem. Sean $U = \sigma_L(a)$ y $V = \sigma_L(b)$. Por lo visto en la Proposición 2.2.4.13, solo debemos probar que $(\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a)) = \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$.

(i) $(\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a)) \subseteq \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$:

(1) $x \in (\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$, [hip.]

(2) $x \in (\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a))$ o $x \in \triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$, [(1)]

Si en (2)

(3) $x \in (\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a))$, [(2)]

(3.1) (a) $x \in \sigma_L(b)$ o (b) $x \in \neg\sigma_L(b)$, [(3), (B) Lema 2.1.3.1]

(3.2) $x \notin \sigma_L(a)$ y $x \notin \neg\sigma_L(a)$, [(3), (B) Lema 2.1.3.1]

Si en (3.1) se verifica (a), entonces

(3.1.a.1) $x \in \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a))$, [(3.1)(a), (3.2)]

(3.1.a.2) $x \in C_x$, siendo C_x la cadena de dos elementos que contiene a x, [$\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

(3.1.a.3) $C_x \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset$, [(3.1.a.1), (3.1.a.2)]

(3.1.a.4) $x \in C_x \subseteq \bigcup_{C_i \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset} C_i$, [(3.1.a.2), (3.1.a.3)]

Si en (3.1) ocurre (b):

(3.1.b.1) existe $y \in min\mathcal{I}_p(L) \cap \sigma_L(b)$ tal que $y \leq x$, y
$x \notin max\mathcal{I}_p(L) \cap \sigma_L(b)$, [(3.1)(b), (N) Lema 2.1.3.1]

Si de (3.1.b.1) tenemos que

(3.1.b.2) $x \notin max\mathcal{I}_p(L)$,

(3.1.b.3) $x \in min\mathcal{I}_p(L)$, [(3.1.b.2), $\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

(3.1.b.4) $y = x$, [((3.1.b.1), (3.1.b.3)]

(3.1.b.5) $x \in \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, [(3.1.b.1), (3.1.b.4), (3.2)]

(3.1.b.6) $x \in C_x$, siendo C_x la cadena de dos elementos
que contiene a x, [$\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

(3.1.b.7) $C_x \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset$, [(3.1.b.5), (3.1.b.6)]

(3.1.b.8) $x \in C_x \subseteq \bigcup_{C_i \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset} C_i$, [(3.1.b.6), (3.1.b.7)]

Si en (3.1.b.1) se verifica

(3.1.b.9) $x \notin \sigma_L(b)$,

(3.1.b.10) $y < x$, [(3.1.b.1), (3.1.b.9)]

(3.1.b.11) $x \in C_y$, siendo C_y la cadena de dos elementos
que contiene a y, [(3.1.b.10), $\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

(3.1.b.12) $y \in \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, [(3.1.b.1), (3.1.b.10), (3.2)]

(3.1.b.13) $C_y \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset$, [(3.1.b.11), (3.1.b.12)]

(3.1.b.14) $x \in C_y \subseteq \bigcup_{C_i \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset} C_i$, [(3.1.b.11), (3.1.b.13)]

Si en (2)

(4) $x \in \triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$,

(4.1) $x \in (M_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(b)]$, [(4), (D) Lema 2.1.3.1]

(4.2) existe $y \in max\mathcal{I}_p(L) \cap \sigma_L(b)$ tal que $x \leq y$, [(4.1)]

Si

(4.3) $y \in \sigma_L(a)$, [hip.]

(4.4) $x \in (M_{\mathcal{I}_p(L)}\sigma_L(a)]$, [(4.2), (4.3)]

(4.5) $x \in \triangle^*\sigma_L(a))$, [(4.4), (D) Lema 2.1.3.1]

(4.6) (4.5) contradice (4),

(4.7) $y \notin \sigma_L(a)$, [(4.3), (4.6)]

(4.8) $y \in \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, [(4.2), (4.7)]

(4.9) $C_y \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset$, siendo C_y la cadena de dos elementos que contiene a y, [(4.8)]

(4.10) $x \in C_y \subseteq \bigcup_{C_i \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset} C_i$. [(4.2), (4.9)]

(ii) $\bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i \subseteq (\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$:

(1) $x \in \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, [hip.]

(2) existe i_0 tal que $x \in C_{i_0}$ y $C_{i_0} \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$, [(1)]

(3) $x \in V \setminus U$ o $x \notin V \setminus U$, [(2)]

Si en (3)

(4) $x \in V \setminus U$,

pueden presentarse dos casos:

(4.1) (a) $max\mathcal{I}_p(L)$ o (b) $x \in min\mathcal{I}_p(L)$, [$\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

si en (4.1) tenemos (a)

(4.2) $x \in \triangle^* V$, [(4.1)(a), (D) Lema 2.1.3.1]

(4.3) $x \notin \triangle^* U$, [(4), (MP6) Lema 2.1.3.1]

(4.4) $x \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$, [(4.2), (4.3)]

si en (4.1) ocurre (b)

(4.5) $x \in m_{\mathcal{I}_p(L)} V$, [(4), (4.1)(b)]

(4.6) $x \in \neg V \subseteq \nabla^* V$, [(4.5), (B) Lema 2.1.3.1]

si fuese que

(4.7) $x \in \nabla^* U$, [hip.]

(4.8) $x \in \neg U$, [(4), (4.7)]

(4.9) $x \in m_{\mathcal{I}_p(L)} U$, [(4.8), (4.5), (MP8) Lema 2.1.3.1]

(4.10) $x \in U$, [(4.9)]

(4.11) (4.10) contradice (4),

(4.12) $x \notin \nabla^* U$, [(4.7), (4.11)]

(4.13) $x \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$, [(4.6), (4.12), $\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

Si en (3)

(5) $x \notin V \setminus U$,

(5.1) $x \in C_{i_0} = C_y$ con $y \in V \setminus U$, [(2), (5)]

Trabajando en forma análoga al caso (4), de (5.1) tenemos:

(5.2) $y \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$ o $y \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$, [(5.1)]

y teniendo en cuenta que los conjuntos $\triangle^* Z$ y $\nabla^* Z$, son $\triangle-$involutivos para todo subconjunto Z del espacio, resulta que:

(5.3) $x \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$ o $x \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$. [(5.1), (5.2)]

□

Corolario 2.2.4.16 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $G \in O_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) $G = \sigma_L(d)$ *con* $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$, *donde* $\overline{\nabla a}$ *y* $\overline{\triangle a}$ *son el complemento booleano en* $K(L)$ *de* ∇a *y* $\triangle a$ *respectivamente.*

Dem. Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.2.4.15 y 2.2.4.6.

□

Observación 2.2.4.17 *Como consecuencia de la* Proposición 2.2.4.6, *el conjunto $G = \sigma_L(d)$ con $d \in K(L)$, es un conjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$.*

Proposición 2.2.4.18 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $d \in K(L)$ y $\overline{d}$ el complemento booleano de d en $K(L)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para toda $\mathbf{M_3}-$congruencia φ sobre L:*

(i) $\varphi = \Theta_{O\triangle}(\sigma_L(d))$,

(ii) $\varphi = \Theta_{C\triangle}(\sigma_L(\overline{d}))$,

(iii) $\varphi = \theta(I(d))$, *donde* $\theta(I(d))$ *es la congruencia asociada al ideal* $I(d)$.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Resulta de los Teoremas 2.2.1.8 y 2.2.3.4, el Lema 2.2.3.3 y la Observación 2.2.4.17.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $\varphi = \Theta_{C\triangle}(\sigma_L(\overline{d}))$, con $d \in K(L)$. Luego $Y = \sigma_L(\overline{d})$ es un cerrado y creciente de $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces por la Proposición 2.2.4.2, existe el ideal $I = \bigcap\limits_{Q\in Y} Q$ tal que $Y = \sigma(I)$. Veamos que $I = I(d)$. En efecto: Sea $x \in I(d)$ y $Q \in Y$, entonces $Q \in \mathcal{I}_p(L)$ y $\overline{d} \notin Q$. Del hecho que $0 = d \wedge \overline{d} \in Q$, para todo $Q \in Y$, tenemos que $d \in Q$ para todo $Q \in Y$ y como $x \leq d$, se verifica que $x \in \bigcap\limits_{Q\in Y} Q$. Para la otra inclusión, sea $y \in \bigcap\limits_{Q\in Y} Q$, luego es claro que (1) $y, d \in Q$ para todo $Q \in Y$. Si $y \not\leq d$, entonces por el teorema de Birkhoff-Stone, existe un ideal primo S tal que $d \in S$ y $y \notin S$, esto implica que $S \in \sigma_L(\overline{d}) = Y$ e $y \notin S$, lo que contradice (1). Por lo tanto $y \leq d$ y así $y \in I(d)$. Finalmente por la Proposición 2.2.4.1 tenemos que $\varphi = \theta(I(d))$.

(iii)$\Rightarrow$ (ii): Sea $\varphi = \theta(I(d))$, donde $\theta(I(d))$ es la congruencia asociada al ideal $I(d)$ con $d \in K(L)$. Entonces por la Proposición 2.2.4.1, se verifica que (1) $\varphi = \Theta(\sigma(I(d)))$. Además (2) $\sigma(I(d)) = \sigma_L(\overline{d})$. En efecto: si $I \in \sigma(I(d))$, entonces $I \in \mathcal{I}_p(L)$ y $I(d) \subseteq I$, luego $d \in I$ y como I es un ideal propio por ser primo, se cumple que $\overline{d} \notin I$, por lo tanto $I \in \sigma_L(\overline{d})$. Recíprocamente, si $I \in \sigma_L(\overline{d})$, entonces $I \in \mathcal{I}_p(L)$ y $\overline{d} \notin I$. Como $0 = d \wedge \overline{d}$, tenemos que $d \in I$ y en consecuencia $I(d) \subseteq I$ de donde $I \in \sigma(I(d))$.

Luego de (1), (2) y la Observación 2.2.4.17, resulta que $\varphi = \Theta_{C\triangle}(\sigma_L(\overline{d}))$. □

Proposición 2.2.4.19 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Si $G \in O_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(G)$*, es una* $\mathbf{M_3}-$*congruencia principal,*

(ii) *G es abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo en $\mathcal{I}_p(L)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por el Corolario 2.2.4.16, sabemos que si $\Theta_{O\triangle}(G)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal, digamos $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a,b)$, con $a \leq b$, entonces $G = \sigma_L(d)$ con $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a}) \in K(L)$, de donde se infiere, por la Observación 2.2.4.17, que G es un conjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea G es abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo en $\mathcal{I}_p(L)$, entonces por la Proposición 2.2.4.5, (I) $G = V \setminus U$, con $U, V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, $U \subseteq V$, $V = \sigma_L(b)$ y

$U = \sigma_L(a)$, con $a, b \in L$. Como además G es $\triangle-$involutivo, entonces teniendo en cuenta el Lema 2.2.3.1 se verifica, (II) $G = \triangle^* V \setminus \triangle^* U$. A continuación probamos que $\nabla^* V \setminus \nabla^* U \subseteq \triangle^* V \setminus \triangle^* U$.

(1) $x \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$, [hip.]

(2) $x \in V \cup \neg V$ y $x \notin U \cup \neg U$, [(1), (B) Lema 2.1.3.1]

si en (2)

(3) $x \in V$, [(2)]

(3.1) $x \in V \setminus U = G$, [(3), (2), (I)]

(3.2) $x \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$, [(3.1), (II)]

si en (2)

(4) $x \in \neg V$, [(2)]

(4.1) existe $z \in min\mathcal{I}_p(L) \cap V$ tal que $z \leq x$ y $x \notin max\mathcal{I}_p(L) \cap V$, [(4), (N) Lema 2.1.3.1]

se presentan dos casos:

(4.2) (a) $z = x$ o (b) $z < x$, [(4.1)]

si ocurre (a)

(4.3) $x \in V$, [(a), (4.1)]

(4.4) $x \notin max\mathcal{I}_p(L)$, [(4.3), (4.1)]

(4.5) $x \in min\mathcal{I}_p(L)$, [(4.4), $\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

si

(4.6) $x \in U$, [hip.]

(4.7) $x \in \neg U$, [(4.4), (4.5), (4.6), (N) Lema 2.1.3.1]

(4.8) $x \in \nabla^* U$, lo que contradice (1), [(4.7), (N) Lema 2.1.3.1]

(4.9) $x \in V \setminus U = G$, [(4.3), (4.6), (4.8), (I)]

(4.10) $x \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$, [(4.9), (II)]

si ocurre (b)

(4.11) $x \in max\mathcal{I}_p(L)$, [(b)]

(4.12) $x \notin V$, [(4.11), (4.1)]

si

(4.13) $z \in U$, [hip.]

(4.14) $z \in min\mathcal{I}_p(L) \cap U$, [(4.13), (4.1)]

(4.15) $x \in \neg U \subseteq \nabla^* U$, lo que contradice (1), [(b), (4.14), (N) Lema 2.1.3.1]

(4.16) $z \notin U$, [(4.13), (4.15)]

(4.17) $z \in V \setminus U = G$, [(4.1), (4.16), (I)]

(4.18) $x \in V \setminus U = G$, [(b), (4.17), G es $\triangle-$involutivo]

(4.19) $x \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$. [(4.18), (II)]

Luego de lo demostrado resulta que $G = (\nabla^* \sigma_L(b) \setminus \nabla^* \sigma_L(a)) \cup (\triangle^* \sigma_L(b) \setminus \triangle^* \sigma_L(a))$, de donde, por la Proposición 2.2.4.15, podemos asegurar que $\Theta_{O\triangle}(G)$, es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal. □

Teorema 2.2.4.20 *Sea* $L \in \mathbf{M_3}$ *e* $\mathcal{I}_p(L)$ *el* M_3-*espacio asociado a* L. *Entonces el retículo* $OC_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$ *de los subconjuntos abiertos, cerrados y* $\triangle-$*involutivos de* $\mathcal{I}_p(L)$ *es isomorfo al retículo* $Con_{\mathbf{M_3}P}(L)$ *de las* $\mathbf{M_3}-$*congruencias principales de* L*, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{OC\triangle} : OC_\triangle(\mathcal{I}_p(L)) \longrightarrow Con_{\mathbf{M_3}P}(L)$ *definida por la misma prescripción que la función* $\Theta_{O\triangle}$ *dada en* (A3').

Dem.

Es inmediato del Teorema 2.2.3.4, la Proposición 2.2.4.19 y el hecho de que $OC_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ es un subretículo de $O_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$. $\square$

Corolario 2.2.4.21 *En todo M_3-retículo acotado, el retículo de las congruencias principales es un álgebra de Boole.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.4.20, teniendo en cuenta que el retículo de los subconjuntos cerrados, abiertos y $\triangle-$involutivos de su M_3-espacio asociado es un álgebra de Boole.

$\square$

Observación 2.2.4.22 *En todo M_3-retículo acotado se verifica:*

(i) *la intersección de un número finito de $\mathbf{M_3}-$congruencias principales es también una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal,*

(ii) *las $\mathbf{M_3}-$congruencias principales son booleanas.*

Proposición 2.2.4.23 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Si G es un subconjunto de $\mathcal{I}p(L)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *G es un subconjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}p(L)$,*

(ii) *existe $a \in K(L)$ tal que $G = \sigma_L(a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea G un subconjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}p(L)$, entonces en particular, G es un abierto, cerrado y decreciente. Como σ_L es un isomorfismo entre L y $D(\mathcal{I}p(L))$, existe $a \in L$ tal que $G = \sigma_L(a)$. Por otro lado como G es $\triangle-$involutivo se verifica que $G = \triangle^*G$, y en consecuencia $G = \sigma_L(\triangle a)$ con $\triangle a \in K(L)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si existe $a \in K(L)$ tal que $G = \sigma_L(a)$, entonces $a = \triangle a = \nabla a$. Por lo tanto $G = \sigma_L(\triangle a) = \triangle^*\sigma_L(a)$ y en consecuencia G es un subconjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. $\square$

Teorema 2.2.4.24 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Entonces, el retículo $K(L)$ de los elementos booleanos de L es isomorfo al retículo $OC_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$ de los subconjuntos abiertos, cerrados y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$, donde el isomorfismo está definido por la restricción a $K(L)$ del isomorfismo $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$, definido como en* (A1).

Dem. Inmediata de las Proposiciones 2.1.5.1 y 2.2.4.23. $\square$

Corolario 2.2.4.25 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Entonces, el retículo $K(L)$ de los elementos booleanos de L es isomorfo al retículo $Con_{\mathbf{M_3}P}(L)$ de las $\mathbf{M_3}-$congruencias principales sobre L, y el isomorfismo es la composición $\Theta_{OC\triangle} \circ \sigma_L$.*

Dem. Inmediata de los Teoremas 2.2.4.24 y 2.2.4.20. $\square$

El corolario siguiente proporciona una caracterización de las congruencias en los M_3-retículos finitos.

Corolario 2.2.4.26 *Las $\mathbf{M_3}-$congruencias sobre un M_3-retículo finito son principales.*

Dem. Sea L un M_3-retículo finito y φ una $\mathbf{M_3}-$congruencia sobre L. Entonces por el Teorema 2.2.3.4, existe G un subconjunto abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}p(L)$ tal que $\varphi = \Theta_{O\triangle}(G)$. Por otro lado como L es finito, entonces $\mathcal{I}p(L)$ es suma cardinal de un número finito de cadenas de dos elementos y la topología del espacio de Priestley es la discreta. Luego G es abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo y en consecuencia la congruencia que determina, en virtud del Teorema 2.2.4.20, es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal.

$\square$

Corolario 2.2.4.27 *Sea L un M_3-retículo acotado tal que su M_3-espacio asociado es la suma cardinal de n cadenas, con n número entero positivo. Si $K(L)$ es el retículo de los elementos booleanos de L, entonces $|Con_{\mathbf{M_3}}(L)| = |K(L)| = 2^n$.*

Dem. Sea L un M_3-retículo tal que $\mathcal{I}_p(L)$, su M_3-espacio asociado, es la suma cardinal de n cadenas, con n entero positivo. Luego L es un conjunto finito y en consecuencia por el Corolario 2.2.4.26, las congruencias de L son principales. Por otro lado por el Teorema 2.2.4.20 y la Proposición 2.2.4.13, cada $\mathbf{M_3}-$congruencia principal está determinada por un subconjunto de $\mathcal{I}_p(L)$, que es una unión finita de cadenas de dos elementos. Entonces teniendo en cuenta el Corolario 2.2.4.25, se verifica que $|K(L)| = |Con_{\mathbf{M_3}P}(L)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

$\square$

Corolario 2.2.4.28 *Sea L un M_3-retículo finito con n elementos booleanos (i.e. $|K(L)| = n$), entonces su M_3-espacio asociado es suma cardinal de $Log_2 n$ cadenas de dos elementos.*

Dem. Es inmediato del Corolario 2.2.4.27. $\square$

Finalmente pudimos determinar que las $\mathbf{M_3}-$congruencias principales sobre un M_3-retículo son las congruencias asociadas a los ideales generados por los elementos booleanos del álgebra, ya que obtuvimos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.4.29 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $\overline{\nabla a}$ y $\overline{\triangle a}$ son el complemento booleano en $K(L)$ de ∇a y $\triangle a$ respectivamente, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta(a, b) = \Theta_{O\triangle}(G)$,

(ii) $\Theta(a, b) = \Theta_{O\triangle}(\sigma_L(d))$, *con* $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$,

(iii) $\Theta(a, b) = \theta(I(d))$, *con* $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$, *donde* $\theta(I(d))$ *es la congruencia asociada al ideal* $I(d)$.

Dem. Inmediata del Corolario 2.2.4.16 y la Proposición 2.2.4.18. $\square$

Corolario 2.2.4.30 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ y φ una $\mathbf{M_3}-$congruencia sobre L. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* $\mathbf{M_3}-$*congruencia principal,*

(ii) $\varphi = \theta(I(d))$ *con* $d \in K(L)$*, siendo* $\theta(I(d))$ *la congruencia asociada al ideal* $I(d)$.

Dem. Inmediata del Teorema 2.2.3.4 y la Proposición 2.2.4.29. □

Corolario 2.2.4.31 *Todo* M_3-*retículo acotado tiene las* $\mathbf{M_3}-$*congruencias principales definibles ecuacionalmente* (CPDE).

Dem. Resulta inmediato del Corolario 2.2.4.30. □

Una consecuencia importante de la proposición anterior es la siguiente:

Proposición 2.2.4.32 *Si* $L \in \mathbf{M_3}$*,* φ_1 *y* φ_2 *son* $\mathbf{M_3}-$*congruencias principales, tales que* $\varphi_1 = \theta(I(d))$ *y* $\varphi_2 = \theta(I(k))$ *con* $d, k \in K(L)$*, entonces se verifican:*

(i) $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \theta(I(d \vee k))$,

(ii) $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$.

Dem. Sean (1) $\varphi_1 = \theta(I(d))$ y (2) $\varphi_2 = \theta(I(k))$ con $d, k \in K(L)$ congruencias principales. Por la Proposición 2.2.4.18, se verifica que $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \Theta_{O\triangle}(\sigma_L(d)) \vee \Theta_{O\triangle}(\sigma_L(k))$ y como $\Theta_{O\triangle}$ y σ_L son isomorfismos tenemos, (3) $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \theta(I(d \vee k))$. Demostremos ahora que $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$. En efecto: Sea $(x, y) \in \varphi_1 \circ \varphi_2$, entonces existe $z \in L$ tal que $(x, z) \in \varphi_2$ y $(z, y) \in \varphi_1$. Luego teniendo en cuenta (1) y (2), se cumple que $x \vee k = z \vee k$ y $z \vee d = y \vee d$, de donde $x \vee d \vee k = z \vee d \vee k$ y $z \vee d \vee k = y \vee d \vee k$. Por lo tanto $x \vee d \vee k = y \vee d \vee k$, de donde se infiere que $(x, y) \in \theta(I(d \vee k))$ y de (3) tenemos entonces que $(x, y) \in \varphi_1 \vee \varphi_2$. La otra inclusión es inmediata y resulta por el hecho de que $\varphi_i \subseteq \varphi_1 \circ \varphi_2$ para $i = 1, 2$ y por lo tanto $\varphi_1 \vee \varphi_2 \subseteq \varphi_1 \circ \varphi_2$. □

Corolario 2.2.4.33 *En la variedad* $\mathbf{M_3}$*, la composición de congruencias principales es conmutativa.*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.4.32. □

2.2.5. $\mathbf{M_3}-$congruencias booleanas

Los siguientes resultados dan una caracterización de las congruencias booleanas en los M_3-retículos.

Lema 2.2.5.1 *Sean $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L e Y un subconjunto abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(Y)$ *es una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana sobre L,*

(ii) $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ *es un subconjunto abierto y $\triangle-$involutivo.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\Theta_{O\triangle}(Y)$ una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana sobre L, entonces existe $\Theta_{O\triangle}(G) \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$, tal que $\Theta_{O\triangle}(Y) \cap \Theta_{O\triangle}(G) = id_L$ y $\Theta_{O\triangle}(Y) \cup \Theta_{O\triangle}(G) = L \times L$, siendo Y y G abiertos y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$. Como $\Theta_{O\triangle}$ es un isomorfismo se verifica que $\Theta_{O\triangle}(Y \cap G) = \Theta_{O\triangle}(\emptyset)$ y $\Theta_{O\triangle}(Y \cup G) = \Theta_{O\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$. De donde resulta que $Y \cap G = \emptyset$ y $Y \cup G = \mathcal{I}_p(L)$, y por lo tanto $G = \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$, lo que implica que $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ es un abierto y $\triangle-$involutivo.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $G = \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ un abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces $\Theta_{O\triangle}(G) \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ y como Y es también un abierto y $\triangle-$involutivo, por el Teorema 2.2.4.20, tenemos que $\Theta_{O\triangle}(Y) \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$. Además por ser $\Theta_{O\triangle}$ un isomorfismo se verifica que $\Theta_{O\triangle}(Y) \cap \Theta_{O\triangle}(G) = \Theta_{O\triangle}(Y \cap G) = \Theta_{O\triangle}(\emptyset) = id_L$ y $\Theta_{O\triangle}(Y) \cup \Theta_{O\triangle}(G) = \Theta_{O\triangle}(Y \cap G) = \Theta_{O\triangle}(\mathcal{I}_p(L)) = L \times L$, lo que implica $\Theta_{O\triangle}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana. $\square$

Proposición 2.2.5.2 *Sean $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Si Y es subconjunto de $\mathcal{I}_p(L)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle}(Y)$ *es una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana sobre L,*

(ii) Y *es un subconjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Si $\Theta_{O\triangle}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana sobre L, entonces Y es un abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. Por el Lema 2.2.5.1, se verifica que $\mathcal{I}p(L) \setminus Y$ es también un subconjunto abierto y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$, de donde tenemos que Y es un subconjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea Y un subconjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ es un subconjunto abierto y $\triangle-$involutivo y por el Lema 2.2.5.1, podemos afirmar que $\Theta_{O\triangle}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana.

□

Corolario 2.2.5.3 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia booleana sobre L,*

(ii) *φ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal sobre L.*

Dem. Inmediato de la Proposición 2.2.5.2 y el Teorema 2.2.4.20.

□

Teorema 2.2.5.4 *Sean $L \in \mathbf{M_3}$ e $\mathcal{I}_p(L)$ el M_3-espacio asociado a L. Entonces el retículo $OC_\triangle\mathcal{I}_p(L)$ de los subconjuntos abiertos, cerrados y $\triangle-$involutivos de $\mathcal{I}_p(L)$, es isomorfo al retículo $Con_{\mathbf{M_3}B}(L)$ de las $\mathbf{M_3}-$congruencias booleanas sobre L, y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{OC\triangle} : OC_\triangle(\mathcal{I}_p(L)) \longrightarrow Con_{\mathbf{M_3}B}(L)$ definida por la misma prescripción que la función $\Theta_{O\triangle}$ dada en* (A3').

Dem.

Inmediato del Corolario 2.2.5.3 y el Teorema 2.2.4.20. □

Corolario 2.2.5.5 *Las $\mathbf{M_3}-$congruencias principales sobre un M_3-retículo son conmutativas y booleanas, en consecuencia son congruencias factores.*

Dem. Es inmediata de los Corolarios 2.2.5.3 y 2.2.4.33. □

Corolario 2.2.5.6 *Las $\mathbf{M_3}-$congruencias principales y booleanas sobre un M_3-retículo acotado L son congruencias regulares y uniformes.*

Dem. Sea φ una $\mathbf{M_3}-$congruencia principal, entonces por el Corolario 2.2.4.30, $\varphi = \theta(I(a))$, con $a \in K(L)$. Si $|x|_\varphi$ es la clase de equivalencia de x, entonces $f : |x|_\varphi \longrightarrow |0|_\varphi$, definida por $f(z) = z \wedge a$ es una aplicación biyectiva. En efecto, dado $z \in |x|_\varphi$, es claro que $z \wedge a \leq a$ y por lo tanto $z \wedge a \in I(a) = |0|_\varphi$. Por otro lado si $y, z \in |x|_\varphi$ son tales que $y \neq z$, entonces $x \vee a = y \vee a$ y $x \vee a = z \vee a$, de donde (1) $y \vee a = z \vee a$. Si fuera $y \wedge a = z \wedge a$, de (1) por la ley del corte resultaría que $z = y$. Por lo tanto $y \wedge a \neq z \wedge a$ y así $f(y) \neq f(z)$, con lo cual f es inyectiva. Sea ahora $t \in |0|_\varphi$, entonces $t \leq a$. Si consideramos $z = (x \wedge \overline{a}) \vee t$, entonces es fácil probar que $z \vee a = x \vee a$, lo que implica que $z \in |x|_\varphi$ y además $f(z) = t$, de donde resulta que f es sobre. Lo probado nos permite afirmar que cualesquiera sean $|x|_\varphi$ y $|t|_\varphi$ se verifica que $||x|_\varphi| = ||t|_\varphi|$, de donde resulta que las congruencias principales son uniformes. Las congruencias principales son regulares, pues si φ_1 y φ_2 dos congruencias principales tales que $|0|_{\varphi_1} = |0|_{\varphi_2}$, entonces $\varphi_1 = \theta(I(a))$, $\varphi_2 = \theta(I(b))$, con $a, b \in K(L)$, y se verifica que $|0|_{\varphi_1} = I(a)$ y $|0|\varphi_2 = I(b)$ por lo tanto $\varphi_1 = \varphi_2$. Como por el Corolario 2.2.5.3, las congruencias booleanas coinciden con las principales, entonces dichas congruencias también son regulares y uniformes.

□

Observación 2.2.5.7 *A. V. Figallo en* [15] *demostró que en la variedad de los M_3-retículos, el cardinal del álgebra libre finitamente generada es finita. Como consecuencia de este resultado la variedad de los M_3-retículos es localmente finita* (ver [8]).

El siguiente teorema debido a D. Clark y P. Krauss (*Global subdirect products*, Mem. Amer. Math. Soc. 210 (1979)), nos fue muy útil en lo que sigue.

Teorema 2.2.5.8 *Si una variedad $\mathcal{V}$ localmente finita, es tal que todas sus álgebras finitas son a congruencias uniformes, entonces $\mathcal{V}$ es a congruencias conmutativas.*

Teorema 2.2.5.9 *La variedad $\mathbf{M_3}$ es a congruencias conmutativas.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.2.4.26 y 2.2.5.6, la Observación 2.2.5.7 y el Teorema 2.2.5.8. □

Observación 2.2.5.10 *Fried, Grätzer y Quackenbush probaron que una variedad semisimple es filtral si, y solo si, verifica la propiedad de las congruencias principales definibles ecuacionalmente* (CPDE). *Cada variedad filtral a congruencias conmutativas es una variedad discriminadora, ver* [7].

Teorema 2.2.5.11 *La variedad* $\mathbf{M_3}$ *es una variedad filtral.*

Dem. Resulta del hecho de que la variedad de los M_3-retículos es semisimple y que todo M_3-retículo acotado verifica la propiedad (CPDE), por el Corolario 2.2.4.31.

□

Teorema 2.2.5.12 *La variedad* $\mathbf{M_3}$ *es una variedad discriminadora.*

Dem. Es consecuencia de la Observación 2.2.5.10 y los Teoremas 2.2.5.9 y 2.2.5.11.

□

Corolario 2.2.5.13 *La variedad* $\mathbf{M_3}$ *es regular, tiene la propiedad de extensión de congruencias* (PEC) *y cada* $\mathbf{M_3}-$*congruencia compacta de un álgebra de la variedad, es una* $\mathbf{M_3}-$*congruencia principal.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 2.2.5.12. □

Capítulo 3

M_3-retículos $k-$cíclicos

En este capítulo obtenemos el sistema determinante de un M_3-retículo finito, mostrando que el conjunto ordenado de sus elementos primos, determina la estructura del mismo. También indicamos un método para construir los automorfismos de un M_3-retículo en el caso finito y todos los $\mathbf{M_3}-$epimorfismos de un M_3-retículo finito en otro. En la sección final estudiamos los M_3-retículos $k-$cíclicos, determinando las congruencias, las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de esta variedad y describimos la estructura del M_3-retículo $k-$cíclico con un número finito de generadores libres. Probando que la variedad es semisimple, está finitamente generada y es localmente finita.

3.1. Sistema determinante de un M_3-retículo finito

En lo que sigue denotamos con $\mathbf{M_{3f}}$ a la clase de los M_3-retículos finitos.

Teorema 3.1.0.14 *Si $L \in \mathbf{M_{3f}}$, entonces el conjunto ordenado $\Pi(L)$, de los elementos primos de L, es suma cardinal de cadenas de dos elementos.*

Dem. Es consecuencia directa de (M34'). □

Lema 3.1.0.15 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$. Si $p \in \Pi(L)$, entonces $\triangle p = 0$ o $\triangle p = p$, pero no ambas.*

Dem. Sea $p \in \Pi(L)$, luego por (M11) y (M21), $p \leq \nabla p = \triangle p \vee \triangle \sim p$. Entonces por ser p un elemento primo, (1) $p \leq \triangle p$ o (2) $p \leq \triangle \sim p$. Teniendo en cuenta (M8), si se verifica (1), tenemos $p = \triangle p$, si vale (2), $p \leq \sim p$, y por lo tanto $p = p \wedge \sim p$, de donde por (M1), $\triangle p = \triangle(p \wedge \sim p) = 0$. Es claro que ambas condiciones no pueden darse simultáneamente pues de ser así, resultaría que p no es un elemento primo, ya que $p = 0$.

$\square$

Teorema 3.1.0.16 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$. Si $M(\Pi(L)) = \{p \in \Pi(L) : \triangle p = 0\}$ y $R(\Pi(L)) = \{p \in \Pi(L) : \triangle p = p\}$, entonces se verifica que*

(i) $M(\Pi(L)) \cup R(\Pi(L)) = \Pi(L)$,

(ii) $M(\Pi(L)) \cap R(\Pi(L)) = \emptyset$.

Dem. Es consecuencia inmediata del Lema 3.1.0.15. $\square$

Observación 3.1.0.17 *Por* (M6) *queda univocamente determinada la operación $\triangle$ en los M_3-retículos finitos, pues si $x \in L$, $x \neq 0$, entonces $x = \bigvee\{p \in \Pi(L) : p \leq x\}$ y por lo tanto $\triangle x = \bigvee\{\triangle p : p \in \Pi(L) \text{ y } p \leq x\}$.*

Lema 3.1.0.18 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$ y $p \in \Pi(L)$. Entonces se verifica que $p \in M(\Pi(L))$ si, y solo si, $\sim p \in R(\Pi(L))$.*

Dem.

($\Longrightarrow$): Sea $p \in M(\Pi(L))$. Es claro que $\sim p \neq 0$ pues caso contrario, por (M22), resultaría $p = 0$, lo que contradice que p es primo. Sean $a, b \in L$ tales que (1) $\sim p = a \vee b$. Luego de (1) y (M6), tenemos que $\triangle \sim p = \triangle a \vee \triangle b$. Entonces teniendo en cuenta (M11), (M21) y el hecho que $\triangle p = 0$ resulta que $p \leq \nabla p = \triangle p \vee \triangle \sim p = \triangle a \vee \triangle b$, de donde por ser p un primo tenemos que $p \leq \triangle a$ o $p \leq \triangle b$. En cualquiera de los casos anteriores por (M17), (M16) y (M8) se verifica (2) $\nabla p \leq a$ o (3) $\nabla p \leq b$ y como por (M12), $\sim p \leq \nabla p$, de (2) y (3) obtenemos que $\sim p \leq a$ o $\sim p \leq b$ y por lo tanto $\sim p \in \Pi(L)$. Resta probar que $\triangle \sim p = \sim p$. Por (M8), se verifica que (4) $\triangle \sim p \leq \sim p$. Por otro lado por (M12), tenemos que $\sim p \leq \nabla p$, de donde por (M21) y la hipótesis $\triangle p = 0$, resulta (5) $\sim p \leq \triangle \sim p$. Luego de (4) y (5), $\triangle \sim p = \sim p$.

($\Longleftarrow$): Vamos probar que si $p \in R(\Pi(L))$, entonces $\sim p \in M(\Pi(L))$, de donde teniendo en cuenta (M2), resultará lo que queremos demostrar. Sea $p \in R(\Pi(L))$, entonces $\triangle p = p$. Luego $\sim p = \sim \triangle p$ y en consecuencia por (M19), tenemos que $\triangle \sim p = 0$. Veamos ahora que $\sim p$ es un primo. Es claro que $\sim p \neq 0$. Sean $a, b \in L$ tales que (1) $\sim p = a \vee b$, entonces por (M2) y (M28) resulta que $p \leq \sim a \vee \sim b$ y por ser p primo se verifica que $p \leq \sim a$ o $p \leq \sim b$. □

Notación 3.1.0.19 *En lo que sigue denotamos con $A_t(L)$ el conjunto de todos los átomos de un M_3-retículo finito L.*

Lema 3.1.0.20 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$ y los conjuntos $M(\Pi(L)$ y $R(\Pi(L)$ dados como en el* Teorema 3.1.0.16*, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $min\,\Pi(L) = M(\Pi(L)) = A_t(L)$,

(ii) $max\,\Pi(L) = R(\Pi(L)) = \Pi(L) \setminus A_t(L) = A_t(K(L))$.

Dem.

(i): Sea $p \in M(\Pi(L))$, entonces $\triangle p = 0$. Luego teniendo en cuenta (M21) y (M8) resulta que $\nabla p = \triangle \sim p \leq \sim p$ y por lo tanto por (M12), $\nabla p = \sim p$. Esto último implica, teniendo en cuenta (M11), que $p < \sim p$, pues si $p = \sim p$ resultaría por (M22) que $p = 0$, lo cual es aburdo pues p es primo. Entonces como por el Lema 3.1.0.18, $p, \sim p \in \Pi(L)$ y $\Pi(L)$ es suma cardinal de cadenas de dos elementos, concluímos que $p \in min\,\Pi(L)$. Para la otra inclusión, sea $p \in min\,\Pi(L)$ y supongamos que $\triangle p \neq 0$. Entonces por Teorema 3.1.0.16, resulta que $\triangle p = p$, de donde tenemos que $\sim p = \sim \triangle p$. Como por el Lema 3.1.0.18, $\sim p \in \Pi(L)$, resulta que $\sim \triangle p \in \Pi(L)$ y además por (M4) y (M8), se verifica que $\sim \triangle p \leq \triangle p = p$. Esto implica por ser p minimal en $\Pi(L)$ que $\sim \triangle p = p$, de donde por (M19) resulta que $\triangle p = 0$. Hemos probado así que $min\,\Pi(L) = M(\Pi(L))$.

Sea $q \in M(\Pi(L))$ y consideremos $c \in L$ tal que $0 \leq c \leq q$. Por lo demostrado antes tenemos (1) $q \in min\, \Pi(L)$. Si $c \neq 0$ y $c \neq q$, existe $s \in \Pi(L)$ tal que $s \leq c < q$, lo cual contradice (1). Luego $c = 0$ o $c = q$ y por lo tanto $q \in A_t(L)$. Entonces $min\, \Pi(L) = M(\Pi(L)) \subseteq A_t(L)$. Para la otra inclusión sea (2) $a \in A_t(L)$. Como $A_t(L) \subseteq \Pi(L)$, entonces $a \in \Pi(L)$. Si fuera que $a \notin min\, \Pi(L)$, entonces existiría $b \in \Pi(L)$ tal que $0 < b < a$, lo que contradice que a es un átomo.

(ii): La igualdad $max\, \Pi(L) = R(\Pi(L)) = \Pi(L) \setminus A_t(L)$, es consecuencia inmediata de lo probado en (i), el Teorema 3.1.0.14 y el hecho de que $R(\Pi(L)) = \Pi(L) \setminus M(\Pi(L))$. Veamos ahora que $R(\Pi(L)) = A_t(K(L))$. Sea $a \in A_t(K(L))$, entonces $a \neq 0$. Sean $u, v \in L$ tales que $a \leq u \vee v$. Luego por la propiedad (M17) de los M_3-retículos tenemos que $a = \triangle a \leq \triangle u \vee \triangle v$. Como $\triangle u, \triangle v \in K(L)$, por (M8) y el hecho de que a un átomo de $K(L)$, resulta que $a \leq \triangle u \leq u$ o $a \leq \triangle v \leq v$. Lo que prueba que $a \in \Pi(L)$ y como $\triangle a = a$ se verifica que $a \in R(\Pi(L))$. Para la otra inclusión, consideremos $q \in R(\Pi(L))$. Es claro que $q \in K(L)$. Supongamos que existe $c \in K(L)$ tal que $0 < c < q$. Como $c \neq 0$ y $K(L)$ es un álgebra de Boole, existe $b \in A_t(K(L))$ tal que $b \leq c$. Por lo probado anteriormente $b \in \Pi(L)$ y como $b < q$ con $q \in \Pi(L)$, entonces $b \in min\, \Pi(L)$ y por lo tanto $\triangle b = b = 0$, lo que contradice que $b \in A_t(K(L))$.

□

Teorema 3.1.0.21 *Si* $L \in \mathbf{M_{3f}}$*, entonces se verifican:*

(i) $p \in A_t(L)$ *si, y solo si,* $\sim p \in \Pi(L) \setminus A_t(L)$,

(ii) $p \in \Pi(L) \setminus A_t(L)$ *si, y solo si,* $\sim p \in A_t(L)$,

(iii) *Si* $C_{pq} \subseteq \Pi(L)$ *es la cadena de dos elementos primos tales que* $p < q$*, entonces se verifica que* $\sim p = q$ *y* $\sim q = p$.

Dem. Las dos primeras propiedades (i) y (ii), son consecuencia inmediata de los Lemas 3.1.0.18 y 3.1.0.20.

(iii): Consideremos la cadena $C_{pq} \subseteq \Pi(L)$ como indica la hipótesis. Entonces se verifica que $p \in min\,\Pi(L)$ y por lo tanto $\triangle p = 0$. En consecuencia, teniendo en cuenta (M21), se verifica que $\nabla p = \triangle \sim p$. Luego por (M8) y (M11), resulta que $p \leq \sim p$, lo que implica que $p < \sim p$, pues de ser $p = \sim p$, tendríamos por (M22) que $p = 0$, lo que contradice que p es un primo. Por lo tanto $\sim p = q$ y por (M2) se verifica también que $\sim q = p$. $\square$

Teorema 3.1.0.22 *Sea* $L \in \mathbf{M_{3f}}$*,* $x \in L$ *y* $x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i$*, con* $p_j \in \Pi(L)$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots, k$*, una representación irredundante de* x*. Entonces* $\sim x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} \sim p_i$ *y* $\triangle x = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \{p_i : \triangle p_i = p_i\}$*, con* $m \leq k$*, siendo estas últimas representaciones irredundantes de* $\sim x$ *y* $\triangle x$ *respectivamente.*

Dem. Sea x en las condiciones del enunciado y $u = \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_k$.
Luego por (M14) y (M24), tenemos (1) $\nabla \sim x = \nabla x = \nabla(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) = \nabla p_1 \vee \nabla p_2 \vee \ldots \vee \nabla p_k = \nabla \sim p_1 \vee \nabla \sim p_2 \vee \ldots \vee \nabla \sim p_k = \nabla(\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_k) = \nabla u$.

Por otra parte de (M17) y (M28), (2) $\triangle \sim x = \triangle \sim (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_i) \leq \triangle(\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_k) = \triangle u$.

Además por (M6) y el Lema 3.1.0.20, $\triangle u = \triangle \sim p_1 \vee \triangle \sim p_2 \vee \ldots \triangle \sim p_k$ con

$$\triangle \sim p_i = \begin{cases} 0, & \text{si } p_i \in \Pi(L) \setminus A_t(L) \\ \sim p_i, & \text{si } p_i \in A_t(L) \end{cases}$$

Por lo tanto $\triangle u = \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_t$, con $p_i \in A_t(L)$ y $t \leq k$.

Supongamos que $\triangle u \not\leq \triangle \sim x$, entonces existe $p_{i_0} \in A_t(L)$ tal que (3) $\sim p_{i_0} \not\leq \triangle \sim x$, con $i_0 \in \{1, \ldots t\}$. Por (M12), (M14) y (M24), se verifica que $\sim p_{i_0} \leq \nabla x$. Entonces teniendo en cuenta (M21) y (3), resulta que $\sim p_{i_0} \leq \triangle x$. Luego por (M8), tenemos que $\sim p_{i_0} \leq p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k$, de donde por ser $\sim p_{i_0}$ un primo, existe p_{l_0} tal que $\sim p_{i_0} \leq p_{l_0}$, con $l_0 \in \{1, \ldots k\}$ y en virtud del Teorema 3.1.0.21, $p_{l_0} \neq p_{i_0}$. Como $\sim p_{i_0} \in max\,\Pi(L)$, se verifica que $\sim p_{i_0} = p_{l_0}$, lo que implica que $p_{i_0} < p_{l_0}$ y en consecuencia la representación de x no es irredundante, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto de (2), se verifica (4) $\triangle u = \triangle {\sim} x$.

Finalmente teniendo en cuenta (1), (4) y el Principio de determinación (M26), resulta que (4) $\sim x = \sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_k$.

Veamos ahora que (4) es una representación irredundante de $\sim x$. Supongamos que no lo es, entonces existe $j_0 \in \{1, \ldots k\}$ tal que $\sim x = \sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_{j_0-1} \vee \sim p_{j_0+1} \vee \ldots \vee \sim p_n$. Luego tenemos que $\sim p_{j_0} \leq \sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_{j-1} \vee \sim p_{j+1} \vee \ldots \vee \sim p_n$ y en consecuencia por ser $\sim p_{j_0}$ un elemento primo, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sim p_{j_0} \leq \sim p_{i_0}$, con $i_0 \neq j_0$. Si $\sim p_{j_0} = \sim p_{i_0}$, entonces se verifica por (M2) que $p_{j_0} = p_{i_0}$ y esto es absurdo pues la representación de x es irredundante. Si ocurriera $\sim p_{j_0} < \sim p_{i_0}$, en este caso se verifica que $\sim\sim p_{j_0} = \sim p_{i_0}$ y por lo tanto (5) $p_{j_0} = \sim p_{i_0}$. Análogamente se puede probar que (6) $p_{i_0} = \sim p_{j_0}$. De (5) y (6) resulta que $p_{i_0} < p_{j_0}$, lo que contradice que la representación de x es irredundante.

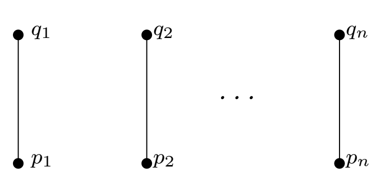
Por otro lado, como $x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i$, con $p_j \in \Pi(L)$, es una representación irredundante, por (M6), tenemos que $\triangle x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} \triangle p_i$ con

$$\triangle p_i = \begin{cases} p_i, & \text{si } p_i \in \Pi(L) \setminus A_t(L) \\ 0, & \text{si } p_i \in A_t(L) \end{cases}$$

y por lo tanto $\triangle x = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \{p_i : \triangle p_i = p_i\}$, con $m \leq k$. Teniendo en cuenta (M8), es fácil probar que esta representación es irredundante. $\square$

Observación 3.1.0.23 *El resultado anterior no es válido si la representación no es irredundante.*

Nota 3.1.0.24 *Teniendo en cuenta la* Observación 3.1.0.17 *y el* Teorema 3.1.0.22 *podemos decir que sobre un retículo distributivo finito L, puede definirse a lo sumo una sola estructura de M_3-retículo. Ello es posible si $\Pi(L)$ es unión de componentes conexas que son cadenas con dos elementos, como indica la figura:*



y definimos $\triangle 0 = 0$*,* $\sim 0 = 0$*,* $\triangle q_i = q_i$*,* $\triangle p_i = 0$*,* $\sim q_i = p_i$*,* $\sim p_i = q_i$*, y si* $x = \bigvee_{j=1}^{m} s_{i_j}$*, con* $1 \leq m \leq n$*, es una representación irredundante de* x *como supremo de primos, entonces* $\triangle x = \bigvee_{j=1}^{m} \triangle s_{i_j}$ *y* $\sim x = \bigvee_{j=1}^{n} \sim s_{i_j}$*.*

3.2. Automorfismos de un M_3-retículo finito

En esta sección determinamos cuántos automorfismos es posible definir en un M_3-retículo finito.

Un resultado muy conocido en la teoría de los retículos distributivos afirma que si $h : L \longrightarrow L$ es un isomorfismo de retículos distributivos y $f = h|\Pi(L)$ es la restricción de h a $\Pi(L)$, entonces $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ es un isomorfismo de orden y

$$\text{(I)} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = 0 \\ \bigvee\{f(p) : p \leq x, \ p \in \Pi(L)\}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Recíprocamente, todo isomorfismo de orden $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ puede ser extendido a un automorfismo de L por la fórmula (I).

Lema 3.2.0.25 *Sea* $L \in \mathbf{M_{3f}}$ *y* $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ *un isomorfismo de orden, entonces*

(i) $f(\sim p) =\sim f(p)$ *para todo* $p \in \Pi(L)$*,*

(ii) *si* $p \in \Pi(L)$ *y* $\triangle p \in \Pi(L)$ *se verifica que* $f(\triangle p) = \triangle f(p)$*.*

Dem.

(i): Sea $p \in \Pi(L)$, entonces por Teorema 3.1.0.16, se presentan dos casos (1) $p \in R(\Pi(L))$ o (2) $p \in M(\Pi(L))$.

Si vale (1), entonces $\triangle p = p$ y por (M10), $\sim p \leq p$, mas aún por ser p un primo, se verifica que $\sim p < p$. Luego por ser f isomorfismo de orden, $f(\sim p) < f(p)$ y en consecuencia, teniendo en cuenta (iii) del Teorema 3.1.0.21, $f(\sim p) =\sim f(p)$.

Si vale (2), entonces $\sim p \in R(\Pi(L))$ y $\sim\sim p \in M(\Pi(L))$. Luego por lo demostrado en el caso (1) resulta que $f(\sim\sim p) = \sim f(\sim p)$, de donde teniendo en cuenta (M2), se verifica $\sim f(p) = f(\sim p)$.

(ii): Si $p \in \Pi(L)$ y $\triangle p \in \Pi(L)$, entonces por Teorema 3.1.0.16, $\triangle p \in R(\Pi(L))$ y por lo tanto $p \in R(\Pi(L)) = max\, \Pi(L)$. Por ser f isomorfismo de orden se verifica también que $f(p) \in R(\Pi(L))$. Luego tenemos que $\triangle p = p$ y $\triangle f(p) = f(p)$, entonces resulta $f(\triangle p) = \triangle f(p)$.

$\square$

Teorema 3.2.0.26 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$ y $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ un isomorfismo de orden. Entonces $h : L \longrightarrow L$ dada por*

$$\text{(I)} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \bigvee\limits_{i=1}^{k} f(p_i), & \text{si } x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i \text{ es una representación irredundante de } x \\ & \qquad\qquad \text{como supremo de primos,} \end{cases}$$

es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo.

Dem. Es claro que h está bien definida y que es sobre, puesto que todo elemento $x \in L$, $x \neq 0$, admite una representación irredundante como supremo de elementos primos. Probaremos que h es un isomorfismo de orden, con lo que quedará demostrado que h es homomorfismo de retículos. Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ con $y = \bigvee\limits_{i=1}^{k} q_i$ y $x = \bigvee\limits_{i=1}^{m} p_i$ representaciones irredundantes. Como $p_i \leq \bigvee\limits_{i=1}^{k} q_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, entonces por ser p_i primo, existe q_{j_i} tal que $p_i \leq q_{j_i}$. Por lo tanto $f(p_i) \leq f(q_{j_i}) \leq \bigvee\limits_{i=1}^{k} f(q_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, de donde obtenemos $\bigvee\limits_{i=1}^{m} f(p_i) \leq \bigvee\limits_{i=1}^{k} f(q_i)$ y en consecuencia $h(x) \leq h(y)$. En forma análoga se puede demostrar que si $h(x) \leq h(y)$, entonces $x \leq y$.

Por otro lado, si $x = 0$, teniendo en cuenta (M22) y (M23), resulta $h(\triangle x) = \triangle h(x)$ y $h(\sim x) = \sim h(x)$. Veamos que esto también se verifica si $x \neq 0$. Sea $x \neq 0$, entonces x admite una representación irredundante como supremo de elementos primos de la forma

(1) $x = \bigvee_{i=1}^{k} p_i$. Luego $h(x) = \bigvee_{i=1}^{k} f(p_i)$ y además, teniendo en cuenta (M6), $\triangle h(x) = \bigvee_{i=1}^{k} \triangle f(p_i)$, donde

$$\triangle f(p_i) = \begin{cases} f(p_i), & \text{si } f(p_i) \in \Pi(L) \setminus A_t(L) \\ 0, & \text{si } f(p_i) \in A_t(L) \end{cases}$$

Por consiguiente (2) $\triangle h(x) = \bigvee_{i=1}^{m} \{f(p_i) : f(p_i) \in \Pi(L) \setminus A_t(L)\} = \bigvee_{i=1}^{m} \{f(p_i) : \triangle f(p_i) = f(p_i)\}$, con $m \leq k$.

Observemos por otra parte que como f es un isomorfismo de orden, se verifica que $p \in A_t(L) = min\,\Pi(L)$ si, y solo si, $f(p) \in A_t(L) = min\,\Pi(L)$ y $p \in \Pi(L) \setminus A_t(L) = max\,\Pi(L)$ si, y solo si, $f(p) \in \Pi(L) \setminus A_t(L) = max\,\Pi(L))$.

Entonces $\triangle x = \bigvee_{i=1}^{m} \{p_i : p_i \in \Pi(L) \setminus A_t(L)\} = \bigvee_{i=1}^{m} \{p_i : \triangle p_i = p_i\}$, con $m \leq k$, siendo esta una representación irredundante de $\triangle x$, por lo demostrado en el Teorema 3.1.0.22. En consecuencia (3) $h(\triangle x) = \bigvee_{i=1}^{m} \{f(p_i) : \triangle p_i = p_i\} = \bigvee_{i=1}^{m} \{f(p_i) : \triangle f(p_i) = f(p_i)\}$.

De (2) y (3) resulta que $h(\triangle x) = \triangle h(x)$.

Por otra parte, por ser f un isomorfismo de orden, si consideramos $y = \bigvee_{i=1}^{k} f(p_i)$, esta es una representación irredundante de y, puesto que (1) también lo es.

Entonces teniendo en cuenta el Teorema 3.1.0.22, tenemos que $\sim x = \bigvee_{i=1}^{k} \sim p_i$ y además (4) $\sim y = \bigvee_{i=1}^{k} \sim f(p_i)$, siendo ambas representaciones irredundantes de esos elementos.

Luego de (4), el Teorema 3.1.0.22 y el Lema 3.2.0.25, $h(\sim x) = \bigvee_{i=1}^{k} f(\sim p_i) = \bigvee_{i=1}^{k} \sim f(p_i) = \sim \bigvee_{i=1}^{k} f(p_i) = \sim h(x)$.

$\square$

Teorema 3.2.0.27 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$, $h : L \longrightarrow L$ un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo y $f = h|\Pi(L)$ la restricción de h a $\Pi(L)$, entonces $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ es un isomorfismo de orden.*

Dem. Es inmediata, pues si $h : L \longrightarrow L$ es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo, entonces es un isomorfismo de retículos distributivos y por lo tanto $f = h|\Pi(L)$, la restricción de h a $\Pi(L)$, es un isomorfismo de orden. $\square$

Notación 3.2.0.28 *Indicamos con* $Aut(L)$ *el conjunto de todos los* $\mathbf{M_3}-$*automorfimos que se pueden definir sobre un* M_3-*retículo* L *y con* $Iso_{ord}(\Pi(L))$ *el conjunto de todos los isomorfismos de orden sobre* $\Pi(L)$.

Teorema 3.2.0.29 *Sea* $L \in \mathbf{M_{3f}}$*, entonces* $|Aut(L)| = |Iso_{ord}(\Pi(L))|$ *y dicho número está determinado por las permutaciones de las componentes conexas de* $\Pi(L)$.

Dem. Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$, entonces por (M34') sabemos que L y T^n son isomorfos, donde $n = 1$ si, y solo si, es simple, y si $n > 1$, n es el número de átomos de $K(L)$, siendo T la cadena con tres elementos como está definida en (M33). Por consiguiente $\Pi(L)$ es suma cardinal de n cadenas de dos elementos y en consecuencia se pueden definir $n!$ automorfismos, determinados por las permutaciones de las componentes conexas de $\Pi(L)$, es decir $|Iso_{ord}(\Pi(L))| = n!$. Por otro lado, la correspondencia que a cada $\mathbf{M_3}-$isomorfismo h le asocia la restricción $h|\Pi(L)$, en virtud de los Teoremas 3.2.0.27 y 3.2.0.29 es una aplicación biyectiva, con lo que queda demostrado que $|Aut(L)| = |Iso_{ord}(\Pi(L))| = n!$.

□

Corolario 3.2.0.30 *Si* L *es isomorfo a* T^n*, donde* n *es el número de átomos de* $K(L)$*, entonces se pueden definir sobre* L*,* $n!$ *automorfismos, determinados por las permutaciones de las componentes conexas de* $\Pi(L)$.

Dem. Inmediata del Teorema 3.2.0.29. □

3.3. Epimorfismos de M_3-retículos finitos

En esta sección indicamos un método para determinar todos los $\mathbf{M_3}-$epimorfismos de un M_3-retículo finito en otro.

Proposición 3.3.0.31 *Sean* L *y* L' *dos* M_3-*retículos finitos y* $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L')$ *una función inyectiva y creciente. Entonces* $p \leq q$ *si, y solo si,* $f(p) \leq f(q)$*, para todo* $p, q \in \Pi(L)$.

Dem.

Sean $p, q \in \Pi(L)$. Si $p \leq q$, entonces, por ser f creciente, $f(p) \leq f(q)$. Recíprocamente, supongamos que $f(p) \leq f(q)$. Si fuera $f(p) = f(q)$, como f es inyectiva, se verifica que $p = q$ y por lo tanto $p \leq q$. Si (1) $f(p) < f(q)$ y suponemos que $p \not\leq q$, como $\Pi(L)$ es suma cardinal de un número finito de cadenas de dos elementos, debe suceder que p y q pertenecen a cadenas distintas. Entonces se presentan los siguientes casos: (a) $p, q \in min\,\Pi(L)$ tales que $p < u$ y $q < v$, con $u, v \in \Pi(L)$, (b) $p \in min\,\Pi(L)$, $q \in max\,\Pi(L)$, $p < u$ y $v < q$, con $u, v \in \Pi(L)$, (c) $q \in min\,\Pi(L)$, $p \in max\,\Pi(L)$, $u < p$ y $q < v$, con $u, v \in \Pi(L)$ o (d) $p, q \in max\,\Pi(L)$, $u < p$ y $v < q$, con $u, v \in \Pi(L)$.

En el caso (a) y (b), por ser f una función creciente, $f(p) < f(u)$ entonces por (1), debe verificarse que $f(u) = f(q)$ y en consecuencia, por la inyectividad de f, tenemos que $u = q$, lo que es absurdo pues q está en distinta cadena que p. En los casos (c) y (d), resulta que $f(u) < f(p)$, lo que implica que $f(p)$ es un elemento maximal, lo que contradice (1). Luego $p \leq q$.

$\square$

En el siguiente teorema probamos que toda función inyectiva y creciente de $\Pi(L)$ en $\Pi(L')$ induce un epimorfismo de L en L'.

Teorema 3.3.0.32 *Sean L y L' dos M_3-retículos finitos y $f : \Pi(L') \longrightarrow \Pi(L)$ una función inyectiva y creciente. Si para cada $x \in L$, $x \neq 0$ consideramos el conjunto $L'_x = \{p' \in \Pi(L') : f(p') \leq x\} \neq \emptyset$. Entonces la aplicación $F : L \longrightarrow L'$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} \bigvee\{p' : p' \in L'_x\}, & \text{si } L'_x \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es un epimorfismo de retículos y además F es creciente.

Dem.

(i) F es sobreyectiva: Sea $y \in L'$, si $y = 0$, existe $x = 0 \in L$ tal que $F(x) = y$. Supongamos que $y \neq 0$. Luego $y = \bigvee \Pi_y$, donde $\Pi_y = \{p' \in \Pi(L') : p' \leq y\}$. Consideremos $x = \bigvee\{f(p') : p' \in \Pi_y\}$. Probaremos que $F(x) = y$, para ello es suficiente probar que $L'_x = \Pi_y$.

Sea $q' \in L_x$, entonces como $f(q')$ es un primo de L, entonces $f(q') \leq f(p')$, para algún $p' \in \Pi_y$. de esto último, por la Proposición 3.3.0.31, resulta que $q' \leq p' \leq y$ y por lo tanto $q' \in \Pi_y$. Recíprocamente, sea $t' \in \Pi_y$, entonces $t' \leq \bigvee \Pi_y$, de donde, por ser t' un elemento primo, existe $s' \in \Pi_y$ tal que $t' \leq s' \leq y$ y por lo tanto $f(t') \leq f(s') \leq x$ y en consecuencia $t' \in L'_x$.

(ii) F es creciente: Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Si $L'_x = \emptyset$, entonces $F(x) = 0$ y se verifica que $F(x) = 0 \leq F(y)$. Si $L'_x \neq \emptyset$, entonces $x \neq 0$ y por consiguiente $y \neq 0$. Además si $p' \in L'_x$, tenemos que $f(p') \leq x \leq y$. Luego $p' \in L'_y$ y por consiguiente $p' \leq \bigvee\{p' : p' \in L'_y\} = F(y)$, para todo $p' \in L'_x$. Entonces tenemos que $\bigvee\{p' : p' \in L'_x\} = F(x) \leq F(y)$.

(iii) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$: Si $F(x \vee y) = 0$, entonces $L'_{x \vee y} = \emptyset$ y por consiguiente $L'_x = \emptyset$ y $L'_y = \emptyset$. Por lo tanto en este caso vale la igualdad. Si $F(v \vee y) \neq 0$, entonces $L'_x \neq \emptyset$ o $L'_y \neq \emptyset$. No es difícil probar que que $L'_{x \vee y} = L'_x \cup L'_y$ y en consecuencia $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$.

(iv) $F(x \wedge y) = F(x) \wedge F(y)$: Si $F(x \wedge y) = 0$, es claro que $F(x \wedge y) \leq F(x) \wedge F(y)$. Si fuese que $F(x \wedge y) \neq 0$. En este caso, como $L'_{x \wedge y} \neq \emptyset$, tenemos que $L'_x \neq \emptyset$ y $L'_y \neq \emptyset$. Como $L'_{x \wedge y} \subseteq L'_x$ y $L'_{x \wedge y} \subseteq L'_y$, entonces $F(x \wedge y) \leq F(x)$ y $F(x \wedge y) \leq F(y)$ y por lo tanto $F(x \wedge y) \leq F(x) \wedge F(y)$. Supongamos que (1) $F(x) \wedge F(y) \not\leq F(x \wedge y)$. Entonces existe $r' \in \Pi(L')$ tal que $r' \leq F(x) \wedge F(y)$ y $r' \not\leq F(x \wedge y)$. Luego existe $p' \in L'_x$ tal que $r' \leq p'$ y existe $q' \in L'_y$ tal que $r' \leq q'$. De estas últimas afirmaciones, como f es creciente, resulta que $f(r') \leq f(p') \leq x$ y $f(r') \leq f(q') \leq y$, de donde tenemos que $f(r') \leq f(p') \wedge f(q')$ y por consiguiente $r' \in L'_{x \wedge y}$, lo que contradice (1).

$\square$

Lema 3.3.0.33 *Sean L y L' dos M_3-retículos finitos y $F : L \longrightarrow L'$ definida como en el* Teorema 3.3.0.32. *Si $t \in \Pi(L)$ y $L'_t \neq \emptyset$, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $F(\triangle t) = \triangle F(t)$,

(ii) $F(\sim t) = \sim F(t)$.

Dem. Recordemos que por el Teorema 3.1.0.16, si $t \in \Pi(L)$, entonces $t \in M(\Pi(L))$ ó $t \in R(\Pi(L))$, donde $M(\Pi(L)) = \{p \in \Pi(L) : \triangle p = 0\}$ y $R(\Pi(L)) = \{p \in \Pi(L) : \triangle p = p\}$.

(i): Si $t \in M(\Pi(L)$, de las propiedades de f, descriptas en la Proposición 3.3.0.31, resulta $L'_t = \{t'\}$ con $t' \in M(\Pi(L')$ y $f(t') = t$. Entonces $L'_{\triangle t} = \emptyset$ y $F(\triangle t) = 0$. Además $\triangle F(t) = \triangle t' = 0$, luego $F(\triangle t) = \triangle F(t)$. Por otra parte, por el Teorema 3.1.0.21, $\sim t' \in R(L')$ y como $t' <\sim t'$, se tiene $f(t') < f(\sim t')$. Luego $L'_{\sim t} = \{t', \sim t'\}$, de donde resulta $F(\sim t) =\sim t' =\sim F(t)$.

(ii): Si $t \in R(\Pi(L)$. En este caso, teniendo en cuenta la Proposición 3.3.0.31, se verifica $L'_t = \{p', q'\}$ con $p' < q'$, entonces $F(\triangle t) = F(t) = q' = \triangle q' = \triangle F(t)$. En forma análoga a lo realizado en (i), se prueba $F(\sim t) =\sim F(t)$. $\square$

Teorema 3.3.0.34 *Sean L y L' dos M_3-retículos finitos y $F : L \longrightarrow L'$ definida como en el* Teorema 3.3.0.32*, entonces F es un $\mathbf{M_3}-$epimorfismo.*

Dem. Resulta del Teorema 3.1.0.22, el Lema 3.3.0.33 y el hecho de que F es creciente. $\square$

Lema 3.3.0.35 *Sean L y L' M_3-retículos finitos y $h : L \longrightarrow L'$ un $\mathbf{M_3}-$epimorfismo y $t' \in \Pi(L')$. Entonces existe un único $t \in \Pi(L)$ tal que $h(t) = t'$.*

Dem. Supongamos que $h^{-1}(t') = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, con $k > 1$ y sea (1) $t = \bigwedge_{i=1}^{k} x_i$. Es claro que se verifica $t \neq 0$ y $h(t) = t'$. Supongamos ahora que se cumple $t = x \vee y$, entonces $x \leq t$, $y \leq t$. Además $t' = h(t) = h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$. Como t' es primo, $t' = h(x)$ o $t' = h(y)$. Si $t' = h(x)$, $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, entonces, por (1), $t \leq x$. Similarmente si $t' = h(y)$. Entonces $t \in \Pi(L)$.

Probemos ahora que $h^{-1}(t') \cap \Pi(L) = \{t\}$. Sea $u \in h^{-1}(t') \cap \Pi(L)$, entonces $t \leq u$. Si vale $t < u$, tenemos que $t \in M(\Pi(L')$ y $u \in R(\Pi(L))$. Luego $u = \nabla t$, $\triangle u = u$, $\triangle t = 0$, entonces $t' = h(u) = h(\nabla t) = \nabla h(t) = \nabla t'$ y $0 = h(\triangle t) = \triangle h(t) = \triangle t'$, lo que es contradictorio, por lo tanto $t = u$. $\square$

Lema 3.3.0.36 *Sean L y L' M_3-retículos finitos y $h : L \longrightarrow L'$ un $\mathbf{M_3}-$epimorfismo. La función $f_h : \Pi(L') \longrightarrow \Pi(L)$, definida por $f_h(t') = t$ si, y solo si, $h(t) = t'$, es inyectiva y creciente.*

Dem.

(i) f_h es inyectiva:

Sean $t', t'' \in \Pi(L')$ tales que $f_h(t') = f_h(t'') = t$, entonces $h(t) = t'$, $h(t) = t''$. Luego, por el Lema 3.3.0.35, $t' = t''$.

(ii) f_h es creciente:

Sean $t', t'' \in \Pi(L')$, tales que $t' < t''$. Por el Lema 3.3.0.35, existen $t_1, t_2 \in \Pi(L)$, únicos que verifican $h(t_1) = t'$, $h(t_2) = t''$. Como $t' \in M(\Pi(L'))$, resulta que $t_1 \in M(\Pi(L))$. Sea $q_1 \in R(\Pi(L))$ tal que $t_1 < q_1$, entonces $h(q_1) = h(\sim t_1) =\sim h(t_1) = \sim t' = t''$.

Por otra parte tenemos $f_h(t') = t_1$, $f_h(t'') = q_1$, de donde resulta $f_h(t') < f_h(t'')$. $\square$

Sean $C_{iny}(\Pi(L'), \Pi(L))$, el conjunto de todas las funciones inyectivas y crecientes de $\Pi(L')$ en $\Pi(L))$ y $Epi_{\mathbf{M_3}}(L, L')$, el conjunto de todos los $\mathbf{M_3}-$epimorfismos de L sobre L'.

Lema 3.3.0.37 $|C_{iny}(\Pi(L'), \Pi(L))| = |Epi_{\mathbf{M_3}}(L, L')|$.

Dem. Por el Teorema 3.3.0.34 y el Lema 3.3.0.36, $\alpha : C_{iny}(\Pi(L'), \Pi(L)) \longrightarrow Epi_{\mathbf{M_3}}(L, L')$ definida por $\alpha(f) = F$, siendo F la función indicada en el Teorema 3.3.0.32, establece una biyección entre estos dos conjuntos. $\square$

Observación 3.3.0.38 *Sean L y L' tales que $|M(\Pi(L))| = n$, $|M(\Pi(L')))| = m$. Entonces $C_{iny}(\Pi(L'), \Pi(L))$ es no vacío, si, y solo si, $m \leq n$ y en este caso $|C_{iny}(\Pi(L'), \Pi(L))| = V_{n,m} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.*

Teorema 3.3.0.39 *Si L_n y L_m son M_3-retículos tales que $|M(\Pi(L_n))| = n$ y $|M(\Pi(L'_m))| = m$ y $m \leq n$, entonces $|Epi_{\mathbf{M_3}}(L_n, L'_m)| = V_{n,m}$.*

Dem. Inmediato del Lema 3.3.0.37 y la Observación 3.3.0.38.

$\square$

3.4. M_3-retículos $k-$cíclicos

Definición 3.4.0.40 *Sea $L \in \mathbf{M_3}$ y $T : L \longrightarrow L$ un automorfismo. Para todo n y m números naturales y $x \in L$ definimos:*

(i)

$$T^n(x) = \begin{cases} T(x), & \text{si } n = 1 \\ T(T^{n-1}(x)), & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

(ii) $T^{n+m}(x) = T^n(T^m(x))$,

(iii)

$$T^{nm}(x) = \begin{cases} T^m(x), & \text{si } n = 1 \\ T^{u\,m+m}(x), & \text{si } n = u+1 \text{ con } \ u \text{ natural} \end{cases}$$

Observación 3.4.0.41 *Si T es un $\mathbf{M_3}-$automorfismo de L que verifica $T^k(x) = x$, para todo $x \in L$, entonces por inducción se puede probar que $T^{q\,k}(x) = x$, para todo q natural y $x \in L$.*

Sea k, un entero positivo.

Definición 3.4.0.42 *Un M_3-retículo $k-$cíclico (o $M_{3,k}-$retículo) es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, T, 0\rangle$ tal que el reducto $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo y T es un $\mathbf{M_3}-$automorfismo de L que verifica $T^k(x) = x$, para todo $x \in L$.*

En lo que sigue, si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, T, 0\rangle$ es un M_3-retículo $k-$cíclico, los denotamos con (L, T). Cuando no haya dudas acerca del automorfismo T o no sea relevante, decimos simplemente, sea L un $M_{3,k}-$retículo. Si k es el menor natural tal que $T^k(x) = x$, para todo $x \in L$, decimos que T es de período k y que (L, T) es un M_3-retículo de orden k.

Representamos con $\mathbf{M_{3,k}}$ a la clase de los M_3-retículos de orden k y decimos que $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ es finito si L es finito. Además si S es una subálgebra de un $M_{3,k}-$retículo (L, T), decimos para abreviar que S es una subálgebra de L.

Ejemplo 3.4.0.43 *Consideremos el M_3-retículo* T*, la cadena con tres elementos, definida anteriormente en* (M33)*. Como* $\mathbf{M_3}$ *es una variedad,* $\mathrm{T}^k = \prod_{i=1}^{k} A_i$*, donde* $A_i = \mathrm{T}$*, para todo* i*, es un* M_3-*retículo. Si* $f \in \mathrm{T}^k$ *y definimos:*

$$Tf(i) = \begin{cases} f(k), & \text{si } i = 1 \\ f(i-1), & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

T *es un automorfismo de* T^k*. Además si* m *es un entero tal que* $m = qk + r$ *con* $0 \leq r < k$*, entonces se verifica que*

$$T^m f(i) = \begin{cases} f(i-r), & \text{si } i > r \\ f(i-r+k), & \text{si } i \leq r \end{cases}$$

y por lo tanto $T^k f = f$*, para todo* $f \in \mathrm{T}^k$*. En consecuencia el sistema* $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$ *es un* M_3-*retículo de orden* k*.*

3.4.1. $\boldsymbol{T}n-$ideales

Definición 3.4.1.1 *Sea* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$*,* $N \subseteq L$ *es un* $Tn-$*ideal, si es un* $n-$*ideal de* L *que verifica que* $T(x) \in N$ *cuando* $x \in N$*.*

Con $T\mathcal{NI}(L)$ y $T\mathcal{NI}_{max}(L)$ representamos la familia de todos los $Tn-$ideales y los $Tn-$ideales maximales de L, respectivamente.

Observación 3.4.1.2 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *y* $N \subseteq L$ *es un* $Tn-$*ideal, entonces* $T(N) \subseteq N$*. De esto se sigue que* $T^2(N) \subseteq T(N) \subseteq N$ *y continuando* $N = T^k(N) \subseteq T^{k-1}(N) \subseteq N$*. Por lo tanto* $N = T^{k-1}(N)$ *y en consecuencia* $T(N) = N$*.*

Definición 3.4.1.3 *Sea* $L \in \mathbf{M_{3,k}}$*, decimos que un* $Tn-$*ideal es primo, si es un ideal primo.*

Lema 3.4.1.4 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *y* $M \in T\mathcal{NI}(L)$*, entonces* $T^i(M) \in T\mathcal{NI}(L)$ *para todo* $i = 1, \ldots, k$*.*

Dem. Es claro que si $M \in T\mathcal{NI}(L)$ e $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, como T es un automorfismo, se verifica que $T^i(M)$ es un ideal de L y además si $x \in T^i(M)$, existe $y \in M$ tal que $x = T^i(y)$. En consecuencia $T(x) = T(T^i(y)) = T^i(T(y)) \in T^i(M)$ y $\sim x =\sim T^i(y) = T^i(\sim y) \in T^i(M)$, lo que implica que $T^i(M) \in T\mathcal{NI}(L)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Lema 3.4.1.5 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *y* $P \in T\mathcal{NI}(L)$ *es primo, entonces* $T^i(P)$ *es un* $Tn-$*ideal primo para todo* $i = 1, \ldots, k$*.*

Dem. Por el Lema 3.4.1.4, sabemos que $T^i(P)$ es un $Tn-$ideal de L. Veamos ahora que es primo. Sean $x, y \in L$ tal que $x \wedge y \in T^i(P)$, entonces existe $u \in P$ tales que $x \wedge y = T^i(u)$. Como T es sobreyectiva, existen $u_1, v_1 \in P$ tales que $T(u_1) = x$ y $T(v_1) = y$. En consecuencia $T(u_1 \wedge v_1) = T^i(u) = T(T^{i-1}(u))$, de donde por ser t inyectiva resulta que $u_1 \wedge v_1 = T^{i-1}(u)$. Continuando con este procedimiento, al cabo de i pasos podemos asegurar que existen u_i y v_i tales que $u_i \wedge v_i = u \in P$. Luego por ser P un ideal primo tenemos que $u_i \in P$ o $v_i \in P$. En cualquiera de los casos, como P es un $Tn-$ideal, se verifica que $T(u_i) = u_{i-1} \in T(P)$ o $T(v_i) = v_{i-1} \in T(P)$ y así repitiendo el proceso llegamos a que $T(u_2) = u_1 \in T^{i-1}(P)$ o $T(v_2) = v_1 \in T^{i-1}(P)$. De donde concluimos que $T(u_1) = x \in T^i(P)$ o $T(v_1) = y \in T^i(P)$, lo cual implica que $T^i(P)$ es un $Tn-$ideal primo. $\square$

Lema 3.4.1.6 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *y* $H \subseteq L$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $H \in T\mathcal{NI}(L)$,

(ii) *existe un* $n-$*ideal* M *de* L *tal que se verifica* $H = M \cap T(M) \cap \ldots \cap T^{k-1}(M)$*.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $H \in T\mathcal{NI}(L)$, entonces H es un $n-$ideal de L y se verifica que $H = H \cap T(H) \cap T^2(H) \cap \ldots \cap T^{k-1}(H)$. En efecto, si $x \in H$, entonces como H es un $Tn-$ideal, se verifica que $T^{k-i}(x) \in H$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Luego $x = T^k(x) = T^i(T^{k-i}(x)) \in T^i(H)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. En consecuencia $H \subseteq H \cap T(H) \cap T^2(H) \cap \ldots \cap T^{k-1}(H)$. Como la otra inclusión es inmediata, resulta la igualdad.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea M un $n-$ideal de L tal que $H = M \cap T(M) \cap \ldots \cap T^{k-1}(M)$. Como T es un automorfismo se verifica que $T^i(M)$ es un $n-$ideal, para todo $i = 1, \ldots, k$ y por lo tanto H también lo es. Por otro lado, es fácil verificar que si $x \in H$, entonces $T(x) \in H$. Luego resulta que $H \in T\mathcal{NI}(L)$.

$\square$

Lema 3.4.1.7 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *y* $M \subseteq L$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $M \in T\mathcal{NI}_{max}(L)$,

(ii) *existe un* $n-$*ideal primo* P *tal que* $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $M \in T\mathcal{NI}_{max}(L)$, luego M es propio y como $M \in T\mathcal{NI}(L)$, por el Lema 3.4.1.6, existe un $n-$ideal N de L tal que $M = N \cap T(N) \cap \ldots \cap T^{k-1}(N)$. Es claro que N es propio, en consecuencia existe un $n-$ideal primo P tal que $N \subseteq P$ y por lo tanto $M \subseteq P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$. Como $S = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$ es un $Tn-$ideal, por la maximalidad de M, se debe verificar que $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por la hipótesis existe P, $n-$ideal primo, tal que $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$. Luego por el Lema 3.4.1.6, podemos asegurar que $M \in T\mathcal{NI}(L)$. Solo resta probar que es maximal en la familia $T\mathcal{NI}(L)$. Supongamos que existe $S \in T\mathcal{NI}(L)$ propio tal que (1) $M \subset S$. Como S es propio, existe un $n-$ideal primo Q tal que (2) $S \subseteq Q$ y por lo tanto (3) $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P) \subset Q$. De esto último podemos asegurar que existe $j_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $T^{j_0}(P) \subseteq Q$. En efecto, supongamos que $T^j(P) \not\subseteq Q$, para todo

$j = 1, \ldots, k$. Luego existe $x_j \in T^j(P) \setminus Q$, para cada $j = 1, \ldots, k$. En consecuencia, por ser Q un ideal primo, $m = \bigwedge_{i=1}^{k} x_j \in T^j(P) \setminus Q$, para todo $j = 1, \ldots, k$, lo que implica que $m \in M$ y $m \notin Q$ que contradice (3). Además como $T^{j_0}(P)$ y Q son $n-$ideales primos, teniendo en cuenta (I6) del Lema 2.1.1.2, se verifica que son minimales en $\mathcal{I}_p(L)$ y por lo tanto se debe valer que (4) $T^{j_0}(P) = Q$. Entonces de (2) y (4) y por ser S un $Tn-$ideal, resulta que $S \subseteq T^{j_0+1}(P), \ldots, S \subseteq T^k(P) = P$, lo cual implica que $S \subseteq T(P), S \subseteq T^2(P), \ldots, S \subseteq T^{k-1}(P)$ y en consecuencia $S \subseteq M$, lo que contradice (1).

□

Teorema 3.4.1.8 *Para todo* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *se verifica que* $\bigcap\{M : M \in T\mathcal{N}\mathcal{I}_{max}(L)\} = \{0\}$

Dem.

Es una consecuencia inmediata del Lema 3.4.1.7 y el hecho de que $\bigcap\{M : M \in E(L)\} = \{0\}$, siendo $E(L) = \{M \subseteq L : M$ es un $n-$ideal primo$\}$.

□

Es de fácil verificación el siguiente

Lema 3.4.1.9 *Sea* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$, $b \in L$, *entonces* $I(b) \cap T(I(b)) \cap \ldots \cap T^{k-1}(I(b)) = I(b \wedge T(b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b))$.

El siguiente teorema da una caracterización de los $Tn-$ideales maximales de un $M_{3,k}-$retículo finito L, en función de los elementos de $K(L)$.

Teorema 3.4.1.10 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *es finito y* $M \subset L$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $M \in T\mathcal{N}\mathcal{I}_{max}(L)$,

(ii) *existe* b *átomo dual de* $K(L)$ *tal que* $M = I(b \wedge T(b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b))$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $M \in T\mathcal{NI}_{max}(L)$, entonces por Lema 3.4.1.7, sabemos que existe un $n-$ideal primo P de L tal que $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$.

Como L es finito por (M38), existe b, átomo dual de $K(L)$, tal que $P = I(b)$. Luego por el Lema 3.4.1.9, tenemos que $M = I(b \wedge T(b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea b un átomo dual de $K(L)$. Por (M38), podemos asegurar que $I(b)$ es un $n-$ideal primo de L. Entonces teniendo en cuenta el Lema 3.4.1.7 y el Lema 3.4.1.9, vemos que $I(b) \cap T(I(b)) \cap \ldots \cap T^{k-1}(I(b)) = I(b \wedge T(b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b))$ es un $Tn-$ideal maximal de L.

$\square$

3.4.2. Congruencias de los M_3-retículos $k-$cíclicos

A. V. Figallo en [16], definió $x|y = x \wedge \triangle(\sim (x \vee \nabla y) \vee \sim (y \vee \sim x))$ en un M_3-retículo $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ y probó que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Brouwer.

Esto le permitió caracterizar las congruencias de un M_3-retículo, teniendo en cuenta que las congruencias en un álgebra de Brouwer están determinadas por ideales y las propiedades (M39) y (M40), de la siguiente forma: Si N es un $n-$ideal de un M_3-retículo L, entonces $R(N) = \{(x, y) \in L^2 : (x|y) \vee (y|x) \in N\}$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia y si $x_{R(N)}$ denota la clase de equivalencia del elemento $x \in L$, entonces $0_{R(N)} = N$. Recíprocamente para cada $\mathbf{M_3}-$congruencia R de L, existe un $n-$ideal N tal que $R = R(N)$ y $0_R = N$. A continuación probamos que las congruencias en los M_3-retículos $k-$cíclicos, están determinadas por los $Tn-$ideales.

Definición 3.4.2.1 *Sea $h : L \to L'$ un $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo, llamamos núcleo del homomorfismo h y lo notamos $N(h)$ al conjunto $N(h) = h^{-1}(\{0\})$, esto es, $N(h) = \{x \in L : h(x) = 0\}$.*

Si $h : L \to L'$ es un $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo, se prueba sin dificultad que $N(h)$ es un $Tn-$ideal de L y si $S \subseteq L'$ es un $Tn-$ideal (primo), entonces $h^{-1}(S)$ es un $Tn-$ideal (primo) de L. Además el homomorfismo h es inyectivo si, y solo si, $N(h) = \{0\}$.

Teorema 3.4.2.2 *Sea* $(L,T) \in \mathbf{M_{3,k}}$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R \in Con_{\mathbf{M_{3,k}}}(L)$,

(ii) *existe* $N \in T\mathcal{NI}(L)$ *tal que* $R = R(N)$.

Dem.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $R \in Con_{\mathbf{M_{3,k}}}(L)$, entonces $R \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$ y en consecuencia existe un $n-$ideal N de L, tal que $R = R(N)$ y $0_{R(N)} = N$. Además si $x \in N$, entonces $(x,0) \in R(N)$ y como R es compatible con el automorfismo T, se verifica que $(T(x),0) \in R(N)$. Entonces, por (M41) y (M42), tenemos que $(T(x)|0) \vee (0|T(x)) = T(x) \in N$, de donde resulta que N es un $Tn-$ideal.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $N \in T\mathcal{NI}(L)$ tal que $R = R(N)$. Luego como en particular, N es un $n-$ideal, es claro que $R(N) \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$. Resta probar que $R(N)$ es compatible con el automorfismo T. Sea $(x,y) \in R(N)$, entonces $(x|y) \vee (y|x) \in N$ y por ser N es un $Tn-$ideal, tenemos que $T((x|y) \vee (y|x)) \in N$. Por otro lado como T es un automorfismo, se verifica que $T((x|y) \vee (y|x)) = T(x|y) \vee T(y|x) = (T(x)|T(y)) \vee (T(y)|T(x))$ y en consecuencia $(T(x)|T(y)) \vee (T(y)|T(x)) \in N$, lo que implica $(T(x),T(y)) \in R(N)$. $\square$

3.4.3. M_3-retículos $k-$cíclicos simples

Del Teorema 3.4.2.2, resulta en forma inmediata que $(L,T) \in \mathbf{M_{3,k}}$, con más de un elemento, es simple si, y solo si, sus únicos $Tn-$ideales son L y $\{0\}$.

Teorema 3.4.3.1 *Sea* $(L,T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *y* $M \subseteq L$ *un* $Tn-$*ideal de* L. *Entonces* M *es un* $Tn-$*ideal maximal de* L *si, y solo si,* L/M *es un* $M_{3,k}-$*retículo simple.*

Dem. Sea $M \subseteq L$ es un $Tn-$ideal maximal y supongamos que L/M no es un $M_{3,k}-$retículo simple. Entonces existe $H \in T\mathcal{NI}(L/M)$ tal que (1) $H \neq \{0_{R(M)}\}$ y (2) $H \neq L/M$. Luego $q^{-1}(H)$ es un $Tn-$ideal tal que $M \subseteq q^{-1}(H)$. Como M es un $Tn-$ideal maximal se verifica que $q^{-1}(H) = M$ o $q^{-1}(H) = L$, lo cual implica que $H = \{0_{R(M)}\}$ o $H = L/M$ que contradicen (1) y (2) respectivamente.

Recíprocamente, sea L/M un $M_{3,k}-$retículo simple. Supongamos que existe $Q \in T\mathcal{NI}(L)$ tal que $M \subseteq Q$. Luego es fácil verificar que $R(M) \subseteq R(Q)$ y teniendo en cuenta las aplicaciones canónicas $q_1 : L \longrightarrow L/M$ y $q_2 : L \longrightarrow L/Q$, existe un homomorfismo sobreyectivo $g : L/M \longrightarrow L/Q$ tal que $g \circ q_1 = q_2$ (ver [8]). Por consiguiente L/Q es una imagen homomórfica de L/M, que por ser un álgebra simple solo tiene imágenes homomórficas triviales. En consecuencia, L/Q es isomorfa a L/M o es isomorfa al álgebra trivial formada por un elemento. En el primer caso resulta que $Q = M$, en el segundo caso $Q = L$, lo que prueba que $M \subseteq L$ es un $Tn-$ideal maximal de L. □

Teorema 3.4.3.2 *Sea $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$, P un $n-$ideal primo de L tal que $M = \bigcap_{i=1}^{k} T^i(P) \subseteq L$ es un $Tn-$ideal maximal de L y $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, el M_3-retículo de orden k, definido como en el* Ejemplo 3.4.0.43*. Si llamamos $N_j = T^j(P)$, para todo $j = 1, \ldots, k$, entonces la aplicación $h : L \longrightarrow \mathrm{T}^k$ definida por*

$$h(x)(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in N_i \\ 1/2, & \text{si } x \in \{x \notin N_i : \triangle x \in N_i\} = \overline{N_i} \\ 1, & \text{si } x \notin N_i \cup \overline{N_i} \end{cases}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, es un $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo tal que $N(h) = M$.

Dem.

Es claro que h está bien definida, a continuación probamos que es un homomorfismo.

(i) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$:

Se presentan los siguientes casos:

Si $x \wedge y \in N_i$, entonces $h(x \wedge y)(i) = 0$. Por otro lado como N_i es un ideal primo, se verifica que $x \in N_i$ o $y \in N_i$, lo que implica que $h(x)(i) = 0$ o $h(y)(i) = 0$. Luego tenemos que $h(x \wedge y)(i) = 0 = h(x)(i) \wedge h(y)(i) = (h(x) \wedge h(y))(i)$.

Si fuese que $x \wedge y \in \overline{N_i}$, entonces $x \wedge y \notin N_i$ y en consecuencia $x \notin N_i$ e $y \notin N_i$, pero $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y \in N_i$. Esto último implica, por ser N_i ideal primo, que $\triangle x \in N_i$ o $\triangle y \in N_i$ y en consecuencia $h(x)(i) = 1/2$ o $h(y)(i) = 1/2$. En ningún caso se cumple que $h(x)(i) = 0$ o $h(y)(i) = 0$. Luego tenemos que $h(x \wedge y)(i) = 1/2 = h(x)(i) \wedge h(y)(i) = (h(x) \wedge h(y))(i)$.

Si $x \wedge y \notin N_i \cup \overline{N_i}$, se verifica que $x \wedge y \notin N_i$ y $x \wedge y \notin \overline{N_i}$. Luego $x \notin N_i$, $y \notin N_i$ y $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y \notin N_i$. De esto último, por ser N_i ideal primo, $\triangle x \notin N_i$ y $\triangle y \notin N_i$. Entonces $x \notin N_i \cup \overline{N_i}$ y $y \notin N_i \cup \overline{N_i}$, lo cual implica que $h(x \wedge y)(i) = 1 = (h(x) \wedge h(y))(i)$.

(ii) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$:

Si $x \vee y \in N_i$, por la definición de h, $h(x \vee y)(i) = 0$. Además por ser N_i decreciente tenemos que $x \in N_i$ e $y \in N_j$ y por lo tanto $h(x)(i) = 0$ y $h(y)(i) = 0$, lo que implica que $h(x \vee y)(i) = 0 = h(x)(i) \vee h(y)(i) = (h(x) \vee h(y))(i)$.

Si $x \vee y \in \overline{N_i}$, entonces $x \vee y \notin N_i$ pero $\triangle(x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y \in N_i$. Luego $x \notin N_i$ o $y \notin N_i$ y por ser N_i un decreciente, $\triangle x, \triangle y \in N_i$. Por lo tanto de acuerdo a la definición de h, se verifica que $h(x \vee y)(i) = 1/2$ y ($h(x)(i) = 1/2$ o $h(y)(i) = 1/2$). En ningún caso se cumple que $h(x)(i) = 1$ o $h(y)(i) = 1$, de donde resulta que $h(x \vee y)(i) = 1/2 = h(x)(i) \vee h(y)(i) = (h(x) \vee h(y))(i)$.

Si $x \vee y \notin N_i \cup \overline{N_i}$, entonces $x \vee y \notin N_i$ y $x \vee y \notin \overline{N_i}$. Por lo tanto $x, y \notin N_i$ y $\triangle x, \triangle y \notin N_i$, lo cual implica que $x \notin N_i \cup \overline{N_i}$ e $y \notin N_i \cup \overline{N_i}$ y en consecuencia $h(x \vee y(i) = 1$, $h(x)(i) = 1$ y $h(y)(i) = 1$, de donde obtenemos que $h(x \vee y)(i) = 1 = h(x)(i) \vee h(y)(i) = (h(x) \vee h(y))(i)$.

(iii) $h(\sim x) = \sim h(x)$:

Si $\sim x \in N_i$, como N_i es un $n-$ideal, se verifica que $\sim\sim x = x \in N_i$ y por lo tanto $h(x)(i) = 0$ y resulta que $\sim h(x)(i) = \sim 0 = 0$. Por otro lado $h(\sim x)(i) = 0$ y en consecuencia $\sim h(x) = h(\sim x)$ en este caso.

Si fuese que $\sim x \in \overline{N_i}$, tenemos que $\sim x \notin N_i$, pero $\triangle \sim x \in N_i$. Luego (1) $x \notin N_i$ y por lo tanto $h(\sim x)(i) = 1/2$. Si $x \in \overline{N_i}$, entonces $x \notin N_i$ pero $\triangle x \in N_i$. Como $\triangle \sim x \in N_i$, tendríamos que por (M21), $\nabla x \in N_i$, lo que implicaría por ser N_i decreciente que $x \in N_i$, que contradice (1). Entonces $x \notin N_i \cup \overline{N_i}$, de donde resulta que $h(x)(i) = 1$ y por lo tanto $(\sim h(x))(i) = \sim (h(x)(i) = \sim 1 = 1/2$. En consecuencia $h(\sim x) = \sim h(x)$.

Si $\sim x \notin N_i \cup \overline{N_i}$, entonces $\sim x \notin N_i$ y $\sim x \notin \overline{N_i}$. Luego (2) $\triangle \sim x \notin N_i$ y por la forma como está definida h, tenemos que $h(\sim x)(i) = 1$. Por otro lado es claro que $x \notin N_i$, pues caso contrario, como N_i es un $n-$ideal tendríamos que $\sim x \in N_i$. Supongamos por el absurdo que $\triangle x \notin N_i$. Como $\triangle x \wedge \triangle \sim x = 0 \in N_i$ y N_i es un ideal primo, se debe verificar que $\triangle \sim x \in N_i$, que contradice (2). Por lo tanto $x \in \overline{N_i}$ y en consecuencia $h(x)(i) = 1/2$, lo que implica que $(\sim h(x))(i) = \sim 1/2 = 1 = h(\sim x)(i)$.

(iv) $h(\triangle x) = \triangle h(x)$:

Si (1) $\triangle x \in N_i$, entonces $h(\triangle x)(i) = 0$. Supongamos que $h(x)(i) = 1$, luego $x \notin N_i \cup \overline{N_i}$. Entonces $x \notin N_i$ y $x \notin \overline{N_i}$, en consecuencia $\triangle x \notin N_i$ que contradice (1). Por lo tanto $h(x)(i) = 0$ o $h(x)(i) = 1/2$, lo que implica que $(\triangle h(x))(i) = 0$ y así se verifica la igualdad $h(\triangle x) = \triangle h(x)$ en este caso.

El caso $\triangle x \in \overline{N_i}$, no se puede presentar, pues de ser así, $\triangle x \notin N_i$, pero $\triangle\triangle x = \triangle x \in N_i$, lo que es una contradicción.

Si $\triangle x \notin N_i \cup \overline{N_i}$, entonces (2) $\triangle x \notin N_i$ y $\triangle x \notin \overline{N_i}$. Luego $\triangle\triangle x \notin N_i$ y $h(\triangle x)(i) = 1$. Veamos que $x \notin N_i \cup \overline{N_i}$. Si $x \in N_i$, entonces como $\triangle x \leq x$, tendríamos, por ser N_i decreciente, que $\triangle x \in N_i$ lo cual contradice (2). Si $x \in \overline{N_i}$, se verificaría que $x \notin N_i$, pero $\triangle x \in N_i$, lo que también contradice (2).

(v) $h(T(x)) = T(h(x))$:

Si $T(x) \in N_i$, entonces $h(T(x))(i) = 0$. Por otro lado $T(h(x))(i) = h(x)(k)$, si $i = 1$ y $T(h(x))(i) = h(x)(i-1)$, si $i \neq 1$. Analicemos cada caso. En el caso $i = 1$, $T(x) \in N_1 = T(P)$ y por lo tanto $x = T^k(x) \in T^k(P) = N_k$. Luego $h(x)(k) = 0$, de donde obtenemos que $T(h(x))(i) = 0$. Si fuese $i \neq 1$, tenemos que $T(x) \in N_i = T^i(P)$ y en consecuencia $x = T^k(x) \in T^{i+k-1}(P) = T^{i-1}(P)$. Luego resulta en este caso que $x \in N_{i-1}$ y por lo tanto $h(x)(i-1) = 0$, lo que implica que $T(h(x))(i) = 0$. Por consiguiente en todos los casos se verifica que $h(T(x)) = T(h(x))$, si $T(x) \in N_i$.

Si fuese que $T(x) \in \overline{N_i}$, tenemos que $T(x) \notin N_i$ pero $\triangle T(x) = T(\triangle x) \in N_i$ y se verifica que $h(T(x))(i) = 1/2$. Si $i = 1$, resulta que $T(x) \notin N_1$ y $\triangle T(x) = T(\triangle x) \in N_1 = T(P)$. Por lo tanto $\triangle x = T^k(\triangle x) \in T^k(P) = P$, de donde resulta $\triangle x \in N_k$. Si $x \in N_k = T^k(P) = P$, se verificaría que $T(x) \in T(P) = N_1$ lo que es una contradición. Como $x \in N_k$ pero $\triangle x \in N_k$, por la forma como está definida h, se verifica que $h(x)(k) = 1/2$ y en consecuencia $T(h(x))(1) = 1/2$, lo que prueba que $h(T(x))(1) = T(h(x))(1)$. Si $i \neq 1$, $T(\triangle x) \in N_i = T^i(P)$ y por consiguiente, $T^k(\triangle x) = \triangle x \in T^{i+k-1}(P) = T^{i-1}(P) = N_{i-1}$.

Por otro lado si fuese que $x \in N_{i-1}$, tendríamos que $T(x) \in T^i(P) = N_i$, lo cual no es posible. Luego $x \notin N_{i-1}$ pero $\triangle x \in N_{i-1}$, lo cual implica que $x \in \overline{N_{i-1}}$ y por lo tanto $h(x)(i-1) = 1/2 = T(h(x))(i)$.

Si $T(x) \notin N_i \cup \overline{N_i}$, entonces (1) $T(x) \notin N_i$ y (2) $T(x) \notin \overline{N_i}$. Luego se verifica que (3) $\triangle T(x) = T(\triangle x) \notin N_i$ y $h(T(x))(i) = 1$. Sea $i = 1$, y supongamos que $x \in N_k \cup \overline{N_k}$. Entonces tenemos que $x \in N_k$ o $x \in \overline{N_k}$. Si fuera que $x \in N_k = T^k(P)$, resulta que $T(x) \in T^{k+1}(P) = T(P) = N_i$, lo que contradice (2). Si $x \in \overline{N_k}$, se verifica que $x \notin N_k$, pero $\triangle x \in N_k$. Esto último implica que $T(\triangle x) = \triangle T(x) \in T(P) = N_i$, lo que contradice (3). Como en ambos casos hemos llegado a una contradicción, tenemos que $x \notin N_k \cup \overline{N_k}$, lo que implica que $h(x)(k) = 1$ y por lo tanto $T(h(x))(1) = T(h(x))(i) = 1$.

Analicemos ahora el caso $i \neq 1$. Supongamos que $x \in N_{i-1} \cup \overline{N_{i-1}}$. Si $x \in N_{i-1} = T^{i-1}(P)$, entonces se verificaría que $T(x) \in N_i$, lo cual contradice (1). Si fuese que $x \in \overline{N_{i-1}}$, tenemos que $x \notin N_{i-1}$ pero $\triangle x \in N_{i-1}$. Esto último implica que $T(\triangle x) = \triangle T(x) \in N_i$, lo que contradice (3). Luego $x \notin N_{i-1} \cup \overline{N_{i-1}}$ y por lo tanto $h(x)(i-1) = T(h(x))(i) = 1$.

(vi) $h(T(0)) = T(h(0))$:

Sea $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Como $T(0) = 0$, por ser T un automorfismo de L, se verifica que $h(T(0))(i) = 0$ pues $T(0) \in N_i$. Por otro lado, de acuerdo a como está definida h, tenemos que $h(0)(i) = 0$ para todo i y $T(h(0))(i) = h(0)(k)$ si $i = 1$ y $T(h(0))(i) = h(0)(i-1)$, si $i \neq 1$, lo que implica que $T(h(0))(i) = 0$, cualquiera sea $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

A continuación probaremos que $N(h) = M$. Sea $x \in N(h)$, luego $h(x)(i) = 0$ para todo i. En consecuencia $x \in N_i = T^i(P)$, para todo i y por lo tanto $x \in \bigcap_{i=1}^{k} T^i(P) = M$. Recíprocamente, si $x \in M$, entonces $x \in T^i(P) = N_i$, para todo i. Esto implica por la forma como está definida h que $h(x)(i) = 0$, para todo i, y por lo tanto $x \in N(h)$.

□

Corolario 3.4.3.3 *Si $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ y $M \subseteq L$ es un $Tn-$ideal maximal de L, entonces L/M, como $M_{3,k}-$retículo, es isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{T}_k$.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.4.3.2. □

Corolario 3.4.3.4 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *es simple, entonces es isomorfo a una subálgebra de* $\mathcal{T}_k$*, y en consecuencia es finito.*

Dem. Sea $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ un álgebra simple. Entonces L es no trivial y sus únicos $Tn-$ideales son los triviales, es decir $\{0\}$ y L. Luego $M = \{0\}$ es un $Tn-$ideal maximal y por Teorema 3.4.3.2, el $M_{3,k}-$retículo L/M, es isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{T}_k$. Como L/M y L en este caso son isomorfos como $M_{3,k}-$retículos, tenemos que (L, T) es isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{T}_k$. Además es claro que es finito, pues $\mathcal{T}_k$ lo es. $\square$

Teorema 3.4.3.5 *Sea* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *e* $I(L) = \{x \in L : T(x) = x\}$*. Entonces* (L, T) *es* $M_{3,k}-$*retículo simple si, y solo si,* $K(L) \cap I(L) = \{0, 1\}$*, siendo* 1 *el último elemento de* L*.*

Dem. Sea (L, T) un $M_{3,k}-$retículo simple y $a \in K(L) \cap I(L)$. Por el Corolario 3.4.3.4, sabemos que L es finito y por lo tanto tiene último elemento 1. Además $I(a)$, el ideal generado por a, es un $Tn-$ideal y en consecuencia, por ser (L, T) simple, se debe verificar que (1) $I(a) = \{0\}$ o (2) $I(a) = L$. En el caso (1), $a = 0$ y en el caso (2), $a = 1$, lo que prueba que $K(L) \cap I(L) = \{0, 1\}$, puesto que la inclusión $\{0, 1\} \subseteq K(L) \cap I(L)$ es inmediata. Recíprocamente, supongamos que $K(L) \cap I(L) = \{0, 1\}$ y sea $N \subseteq L$ un $Tn-$ideal de L tal que $N \neq L$ y $a \in N$. Como N es un $Tn-$ideal, se verifica que $\nabla a \in N$, $\nabla T(a) \in N$, $\ldots$, $\nabla T^{k-1}(a) \in N$ y por lo tanto $\nabla a \vee \nabla T(a) \vee \ldots \vee \nabla T^{k-1}(a) \in N$. Luego teniendo en cuenta que T es un automorfismo y (M24), $\nabla(a \vee T(a) \vee \ldots T^{k-1}(a)) \in N \cap K(L) \cap I(L)$, de donde por ser N propio, $\nabla(a \vee T(a) \vee \ldots T^{k-1}(a)) = 0$. Por lo tanto $a \vee T(a) \vee \ldots T^{k-1}(a) = 0$ de donde resulta que $a = 0$ y en consecuencia $N = \{0\}$. Luego el único $Tn-$ideal propio de L es $\{0\}$, lo que implica que (L, T) es $M_{3,k}-$retículo simple. $\square$

Corolario 3.4.3.6 $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$*, es un* $M_{3,k}-$*retículo simple.*

Dem. Teniendo en cuenta el Teorema 3.4.3.5, basta probar que $K(\mathrm{T}^k) \cap I(\mathrm{T}^k) \subseteq \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son el primer y último elemento de T^k respectivamente.

Sea $f \in K(\mathrm{T}^k) \cap I(\mathrm{T}^k)$, entonces $\triangle f = \nabla f = f$ y $Tf = f$. Esto implica que $\triangle f(i) = \nabla f(i) = f(i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, es decir $f(i)$ son elementos invariantes, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y por consiguiente se verifica que (1) $f(i) \in K(\mathrm{T}) = \{0, 1\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Por otro lado, como $Tf = f$, tenemos que $T^m f = f$, para $m = 1, 2, \ldots, k-1$, esto es $T^m f(i) = f(i)$, para $i = 1, 2, \ldots, k$ y $m = 1, 2, \ldots, k-1$.

Además por la forma que está definida T en T^k resulta que

$$T^m f(i) = \begin{cases} f(i-m), & \text{si } i > m \\ f(i-m+k), & \text{si } i \leq m \end{cases}$$

En particular, si $i = k$, $T^m f(k) = f(k-m) = f(k)$, para $m = 1, 2, \ldots, k-1$. Luego f es constante, es decir, (2) $f(i) = f(j)$, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Entonces de (1) y (2), resulta que $f = \mathbf{0}$ o $f = \mathbf{1}$.

$\square$

Corolario 3.4.3.7 *Toda subálgebra S de un $M_{3,k}-$retículo (L, T) simple, es un $M_{3,k}-$retículo simple.*

Dem. No es complicado probar que $I(S) = I(L) \cap S$ y $K(S) = K(L) \cap S$. Luego si (L, T) es simple, por Teorema 3.4.3.5, $K(L) \cap I(L) = \{0, 1\}$. Entonces $K(S) \cap I(S) = K(L) \cap I(L) \cap S = \{0, 1\}$, y por lo tanto S es un $M_{3,k}-$retículo simple. $\square$

Corolario 3.4.3.8 *Los miembros simples de la variedad* $\mathbf{M_{3,k}}$*, son las subálgebras de* $\mathcal{T}_k$.

Dem. Es inmediata de los Corolarios 3.4.3.4, 3.4.3.6 y 3.4.3.7. $\square$

3.4.4. Semisimplicidad de la variedad $\mathbf{M_{3,k}}$

A continuación probamos que en la variedad $\mathbf{M_{3,k}}$, toda álgebra de la misma es semisimple.

Teorema 3.4.4.1 *Un $M_{3,k}-$retículo (L,T), es producto subdirecto de una familia $\{(L_i,T_i)\}_{i\in I}$ de $M_{3,k}-$retículos si, y solo si, existe una familia $\{N_i\}_{i\in I}$ de $Tn-$ideales de L, tales que:*

(i) $\bigcap_{i\in I} N_i = \{0\}$,

(ii) *L_i es isomorfo a L/N_i, para todo $i \in I$.*

Dem. Supongamos que (L,T), es producto subdirecto de una familia $\{(L_i,T_i)\}_{i\in I}$ de $M_{3,k}-$retículos y que el monomorfismo es h. Entonces L es isomorfo, como $M_{3,k}-$retículo, a una subálgebra L' del producto $\prod_{i\in I} L_i$ y además para cada $i \in I$ se verifica que $h_i = P_i \circ h : L \longrightarrow L_i$ es sobreyectiva. Como h_i es un $\mathbf{M_{3,k}}-$epimorfismo para cada $i \in I$, se verifica que $N_i = N(h_i) = \{x \in L : h_i(x) = 0\}$ es un $Tn-$ideal de L y L_i/N_i es isomorfo, como $M_{3,k}-$retículo, a L_i, para cada $i \in I$. Por otra parte, si $x \in \bigcap_{i\in I} N_i$, entonces $h_i(x) = 0$, para cada $i \in I$, es decir $(P_i \circ h)(x) = 0$, para cada $i \in I$, lo cual implica $h(x)(i) = 0$, para cada $i \in I$ y por lo tanto $h(x) = 0$. De esto último, teniendo en cuenta que h es un monomorfismo, resulta que $x = 0$, lo que prueba que $\bigcap_{i\in I} N_i = \{0\}$.

Recíprocamente, sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de $Tn-$ideales tales que $\bigcap_{i\in I} N_i = \{0\}$. Veamos que L es producto subdirecto de $\{L/N_i\}_{i\in I}$. Sea $f : L \longrightarrow \prod_{i\in I} L/N_i$, definida por $f(x)(i) = q_i(x)$, para cada $i \in I$, siendo $q_i : L \longrightarrow L/N_i$ la aplicación canónica. Entonces se verifica que $N(f) = \{0\}$. En efecto, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $x \in N(f)$,

(ii) $f(x) = 0$,

(iii) $f(x)(i) = 0$, para cada $i \in I$,

(iv) $q_i(x) = 0$, para cada $i \in I$,

(v) $(x, 0) \in R(N_i)$, para cada $i \in I$,

(vi) $x \in 0_{R(N_i)} = N_i$, para cada $i \in I$,

(vii) $x \in \bigcap_{i \in I} N_i = \{0\}$.

Lo anterior prueba que f es un monomorfismo, pues es claro que h es homomorfismo, ya que la aplicación canónica lo es. Por otro lado, si $x_{R(N_i)} \in L/N_i$, entonces se verifica que existe $x \in L$ tal que $q_i(x) = x_{R(N_i)}$. Luego $(P_i \circ f)(x) = P_i(f(x)) = f(x)(i) = q_i(x) = x_{R(N_i)}$, lo que prueba que $P_i \circ f$ es sobreyectiva, para cada $i \in I$. En consecuencia L es producto subdirecto de $\{L/N_i\}_i \in I$.

$\square$

Teorema 3.4.4.2 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *es no trivial, entonces es producto subdirecto de la familia* $\{L/M : M \in T\mathcal{NI}_{max}(L)\}$ *y en consecuencia es producto subdirecto de una familia de* $M_{3,k}-$*retículos simples.*

Dem. Es consecuencia de Teoremas 3.4.1.8, 3.4.3.1 y 3.4.4.1. $\square$

Corolario 3.4.4.3 *La variedad* $\mathbf{M_{3,k}}$ *es semisimple.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 3.4.4.2. $\square$

Corolario 3.4.4.4 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *es no trivial, entonces es producto subdirecto de una familia de subálgebras de* $\mathcal{T}_k$.

Dem. La demostración es inmediata del Teorema 3.4.4.2 y el Corolario 3.4.3.8. $\square$

Teorema 3.4.4.5 *Si* $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ *es finito y no trivial, entonces es producto directo de la familia* $\{L/M : M \in T\mathcal{NI}_{max}(L)\}$ *y en consecuencia es producto directo de una familia de* $M_{3,k}-$*retículos simples. Mas aún, si* $\{M_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *es el conjunto de todos los* $Tn-$*ideales maximales de* L*, entonces* L *es isomorfa a* $\prod_{i=1}^{n} L/M_i$*, donde* $M_i = I(b_i \wedge T(b_i) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b_i))$*, siendo* b_i *un átomo dual de* $K(L)$.

Dem. Sea $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ finito y no trivial y $\{M_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ el conjunto de todos los $Tn-$ideales maximales de L. Sabemos, por el Teorema 3.4.4.2, que L es isomorfo a una subálgebra S del producto directo $\prod_{i=1}^{n} L/M_i$ y el isomorfismo está dado por la aplicación

$f : L \longrightarrow S \lhd \prod_{i=1}^{n} L/M_i$, definida por $f(x)(i) = q_i(x)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, siendo $q_i : L \longrightarrow L/M_i$ la aplicación canónica. Nuestro objetivo es probar que f es sobre.

Por el Teorema 3.4.1.10, tenemos que cada M_i, $Tn-$ideal maximal de L, es de la forma $M_i = I(b_i \wedge T(b_i) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b_i))$, siendo b_i un átomo dual de $K(L)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego no es difícil probar que $m_i = b_i \wedge T(b_i) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b_i) \in K(L) \cap I(L)$ y en consecuencia $q_j(m_i) \in K(L/Mj) \cap I(L/M_j) = \{0_{R(M_j)}, 1_{R(M_j)}\}$. Por otro lado es claro que (1) $q_i(m_i) = 0_{R(M_i)}$, pues $m_i \in M_i$, y (2) $q_j(m_i) = 1_{R(M_j)}$, si $i \neq j$, pues caso contrario, si $q_j(m_i) = 0_{R(M_j)}$, entonces resultaría que $m_i \in M_j = I(b_j \wedge T(b_j) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b_j))$, es decir, $m_i \leq b_j \wedge T(b_j) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(b_j) < b_j$. De esto último, por ser b_j un átomo dual de $K(L)$, es un elemento primo dual de $K(L)$ y por lo tanto debe verificarse que $1 > b_j \geq T^l(b_i)$, para algún $l \in \{1, \ldots, k\}$. Si fuese $b_j = T^l(b_i)$, entonces se podría demostrar que $m_i = m_j$, lo cual implicaría que $M_i = M_j$, lo cual no es posible. El caso $b_j > T^l(b_i)$ no puede darse tampoco, pues $T^l(b_i)$ es un átomo dual de $K(L)$.

Sea $b \in \prod_{i=1}^{n} L/M_i$ tal que $b(i) = b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $b_i \in L/M_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y la aplicación $q_i : L \longrightarrow L/M_i$ es sobreyectiva, entonces existe $x_i \in L$ tal que (3) $q_i(x_i) = b_i$.

Consideremos ahora $a = \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \vee m_i)$, luego teniendo en cuenta (1), (2) y (3), obtenemos que $q_j(a) = \bigwedge_{i=1}^{n} (q_j(x_i) \vee q_j(m_i)) = q_j(x_j) = b_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $f(a)(i) = q_i(a) = b_i$, que prueba que $f(a) = b$ y por lo tanto f es sobre. $\square$

3.4.5. Subálgebras del álgebra $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$

En esta sección vamos a determinar las subálgebras de $\mathcal{T}_k$.

Teorema 3.4.5.1 *Sea A una subálgebra de* T *y d un divisor de k, digamos $k = qd$. Entonces* $S(A, d) = \{f \in \mathrm{T}^k : f(i) \in A \text{ y } f(i) = f(j) \text{ si } i \equiv j \, mod\, (d)\}$ *es una subálgebra $d-$periódica de $\mathcal{T}_k$, como $M_{3,k}-$retículo.*

Dem. Es evidente que $S(A, d)$ es no vacía pues $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, el primer y último elemento de T^k, pertenecen a ella.

Por otro lado, no es complicado probar que si $f \in S(A,d)$, entonces $\triangle f, \sim f \in S(A,d)$ y si además $g \in S(A,d)$, se verifica que $f \wedge g, f \vee g \in S(A,d)$.

Veamos ahora que si $f \in S(A,d)$, entonces $Tf \in S(A,d)$. Por hipótesis $f(i) \in A$ y $f(i) = f(j)$ si $i \equiv j \, mod\,(d)$. Como

$$Tf(i) = \begin{cases} f(k), & \text{si } i = 1 \\ f(i-1), & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

se verifica que $Tf(i) \in A$. Resta probar que $Tf(i) = Tf(j)$ si $i \equiv j \, mod\,(d)$.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $i \equiv j \, mod\,(d)$, luego se verifica que existe t entero tal que (1) $i = j + td$. Se presentan los siguientes casos teniendo en cuenta la forma como está definida Tf:

(i) $i = 1$ y $j = 1$: $Tf(i) = Tf(j) = f(k)$.

(ii) $i \neq 1$ y $j = 1$: En este caso por (1), $Tf(i) = f(i-1) = f(j-1+td) = f(td)$ y $Tf(j) = f(k) = f(qd)$. Como $td \equiv qd \, mod\,(d)$, resulta que $Tf(i) = Tf(j)$.

(iii) $i \neq 1$ y $j \neq 1$: De (1), $Tf(i) = f(i-1) = f(j-1+td)$ y $Tf(j) = f(j-1) = f(j-1+td) = Tf(i)$, pues $j - 1 \equiv j - 1 + td \; mod\,(d)$.

(iv) $i = 1$ y $j \neq 1$: $Tf(i) = f(k) = f(qd)$ y por (1), $Tf(j) = f(j-1) = f(i-1-td) = f(-td)$, de donde teniendo en cuenta que $-td \equiv qd \, mod\,(d)$, resulta que $Tf(i) = Tf(j)$.

Por otra parte por lo visto en el Ejemplo 3.4.0.43, tenemos que

$$T^d f(i) = \begin{cases} f(i-d), & \text{si } i > d \\ f(i-d+k), & \text{si } i \leq d \end{cases}$$

pero $i - d + k = i - d + qd = i + (q-1)d \equiv i \, mod\,(d)$ e $i - d \equiv i \, mod\,(d)$, lo que implica que $T^d f(i) = f(i)$, para todo i, y por lo tanto $T^d f = f$.

Supongamos que d no es el menor entero positivo tal que $T^d f = f$, para toda $f \in S(A,d)$. Entonces existe d' entero tal que $0 < d' < d$ tal que $T^{d'} f = f$, para toda $f \in S(A,d)$. Sea la función f definida por $f(i) = 1$ si $i = td$, con $1 \leq t \leq q$ y $f(i) = 0$ si $i \neq td$. Es claro que $f \in S(A,d)$, pues si $i \equiv j \, mod\,(d)$ y suponemos que $f(i) \neq f(j)$, resultaría que ($f(i) = 1$ y $f(j) = 0$) o ($f(i) = 0$ y $f(j) = 1$). En el primero de los casos,

$i = td$, con $1 \leq t \leq q$ y $j \neq td$. Pero como $i = j + md$, con m entero, por ser congruentes módulo d, tendríamos que $j = i - md = td - md = (t - m)d$, lo que es una contradicción. El otro caso es análogo. Luego $T^{d'} f(d') = f(d' - d' + k) = f(k) = 1$, mientras $f(d') = 0$, lo que implica que $T^{d'} f \neq f$. Esto prueba que $S(A, d)$ es una subálgebra $d-$periódica de $\mathcal{T}_k$, como $M_{3,k}-$retículo. $\square$

A continuación probamos que las únicas subálgebras de $\mathcal{T}_k$ son de la forma $S(A, d) = \{f \in \mathrm{T}^k : f(i) \in A \text{ y } f(i) = f(j) \text{ si } i \equiv j \, mod\, (d)\}$, con A una subálgebra de T y d un divisor de k.

Lema 3.4.5.2 *Sea S una subálgebra de $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces para cada i tal que $1 \leq i \leq k$ se verifica que $A_i = \{a \in \mathrm{T} : \text{existe } f \in S \text{ tal que } a = f(i)\}$, es una subálgebra de* T *y $A_i = A_j$ para todo par i, j tal que $1 \leq i, j \leq k$.*

Dem. Sea i tal que $1 \leq i \leq k$ y $A_i = \{a \in \mathrm{T} : \text{existe } f \in S \text{ tal que } a = f(i)\}$. Entonces $A_i \neq \emptyset$ pues existe $\mathbf{0} \in S$ tal que $\mathbf{0}(i) = 0$, para todo i, con $0 \in \mathrm{T}$, lo que implica que $0 \in A_i$. Por otra parte si $a \in A_i$, existe $f \in S$ tal que $f(i) = a$ y por lo tanto $\triangle f(i) = (\triangle f)(i) = \triangle a$, con $\triangle a \in \mathrm{T}$ y $\triangle f \in S$; además $\sim f(i) = (\sim f)(i) =\sim a$, con $\sim a \in \mathrm{T}$ y $\sim f \in S$. Por lo tanto $\triangle a, \sim a \in A_i$. Si $b, c \in A_i$, entonces existen $g, h \in S$ tal que $g(i) = b$ y $h(i) = c$. Luego $b \wedge c = g(i) \wedge h(i) = (g \wedge h)(i)$ y $b \vee c = g(i) \vee h(i) = (g \vee h)(i)$, con $g \wedge h, g \vee h \in S$, por lo tanto $b \wedge c, b \vee c \in A_i$. Hemos probado así que A_i es una subálgebra de T.

Veamos ahora que $A_i = A_j$ para todo par i, j tal que $1 \leq i, j \leq k$.

Supongamos que $i < j$ y sea $a \in A_i$. Entonces existe $f \in S$ tal que $f(i) = a$. Además como $j - i < j$ se verifica que $T^{j-i} f(j) = f(j - (j - i)) = f(i) = a$ y por ser S una subálgebra de $\mathcal{T}_k$, tenemos que $T^{j-1} f \in S$. Luego $a \in A_j$, y por lo tanto $A_i \subseteq A_j$. Recíprocamente, si $a \in A_j$, existe $f \in S$ tal que $f(j) = a$. Entonces como $k - j + i \geq i$, resulta que $T^{k-(j-i)} f(i) = T^{k-j+i} f(i) = f(i - (k - j + i) + k) = f(j) = a$, lo que prueba que $a \in A_i$ y así $A_j \subseteq A_i$. $\square$

Observación 3.4.5.3 *Sea $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_k$, donde los A_i están dados como en el* Lema 3.4.5.2*. Si S una subálgebra de $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, entonces $f(i) \in A$, para todo i tal que $1 \leq i \leq k$.*

Lema 3.4.5.4 *Sea S una subálgebra de $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$ y d el menor entero positivo tal que $T^d f = f$, para todo $f \in S$. Entonces se verifica que $S \subseteq S(A, d) = \{f \in \mathrm{T}^k : f(i) \in A \text{ y } f(i) = f(j) \text{ si } i \equiv j \, mod\,(d)\}$, donde A es el conjunto indicado en la* Observación 3.4.5.3 *y d es un divisor positivo de k.*

Dem. De las hipótesis es claro que d divide a k, pues caso contrario d no sería el menor entero positivo tal que $T^d f = f$, para todo $f \in S$. Sea $f \in S$ e $i \equiv j \, mod\,(d)$ y consideremos que $i > j$. Entonces $i = td + j$, con $t \geq 1$ y $f(i) = f(td + j)$. Por otro lado, por lo visto en el Ejemplo 3.4.0.43, resulta que $T^{td} f(j + td) = f(j + td)$ y por la forma que está definida T en T^k tenemos que $T^{td} f(j+td) = f(j+td-td) = f(j)$. Luego $f(i) = f(j)$, si $i \equiv j \, mod\,(d)$, lo que implica que $f \in S(A, d)$. □

Observación 3.4.5.5 *Sea $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, por lo visto en el* Capítulo 1*, sabemos que $K(\mathrm{T}^k)$ es un álgebra de Boole y la restricción del automorfismo T a este conjunto de constantes, es un automorfismo. En base a esto podemos afirmar que $B_k = (K(\mathrm{T}^k), T)$ es un álgebra de Boole $k-$periódica, cuyos átomos son los elementos g_i tales que $g_i(i) = 1$ y $g_i(j) = 0$ si $j \neq i$, con $i = 1, 2, \ldots, k$. Además T permuta circularmente los átomos. A. Monteiro probó en* [29]*, que la familia de todas las subálgebras de B_k, ordenada por inclusión, es isomorfa al conjunto de los divisores positivos de k, ordenados por la relación divide, donde para cada divisor d de k, la subálgebra B_d asociada a d, es la única subálgebra de B_k, $d-$periódica, caracterizada por $B_d = \{g \in B_k : T^d g = g\}$. También se verifica que los átomos de B_d son los elementos g_i^*, para $i = 1, 2, \ldots, d$, de la forma:*

$$g_i^*(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \equiv j \, mod\,(d) \\ 0, & \text{si } i \not\equiv j \, mod\,(d) \end{cases}$$

y $Tg_1^* = g_2^*$, $Tg_2^* = g_3^*$, $\ldots Tg_d^* = g_1^*$.

Lema 3.4.5.6 *En el álgebra $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, si $e_1, e_2 \in \mathrm{T}^k$ son tales que $e_1(i) = 1/2$ y $e_2(i) = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, en ambos casos, entonces para toda $f \in \mathrm{T}^k$ se verifica que $f = (\nabla f \wedge e_1) \vee (\triangle f \wedge e_2)$.*

Dem. Sea $m = (\nabla f \wedge e_1) \vee (\triangle f \wedge e_2)$. Como en T, tenemos que $\nabla 1/2 = 1$, $\nabla 1 = 1$, $\triangle 1/2 = 0$ y $\triangle 1 = 1$, entonces en $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, se verifica que $\nabla e_1 = \mathbf{1}$, $\nabla e_2 = e_2 = \mathbf{1}$, $\triangle e_1 = \mathbf{0}$ y $\triangle e_2 = e_2 = \mathbf{1}$. En consecuencia por (M24), (M7), (M15) y (M16), $\nabla m = (\nabla f \wedge \nabla e_1) \vee (\triangle f \wedge \nabla e_2) = \nabla f \vee \triangle f$ y teniendo en cuenta que $\triangle f \leq \nabla f$, resulta que (1) $\nabla m = \nabla f$. Además por (M6), (M25), (M5) y (M20); (2) $\triangle m = (\nabla f \wedge \triangle e_1) \vee (\triangle f \wedge \triangle e_2) = \triangle f$. Luego de (1), (2) y (M26), el principio de determinación, obtenemos que $f = m$. $\square$

Lema 3.4.5.7 *Sea S una subálgebra de $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$ y d el menor entero positivo tal que $T^d f = f$, para todo $f \in S$. Entonces $K(S) = B_d$.*

Dem. $K(S)$ es una subálgebra de $B_k = (K(\mathrm{T}^k), T)$ y como $T^d f = f$ para todo $f \in B(S)$, entonces por lo visto en la Observación 3.4.5.5, se verifica que $K(S) \subseteq B_d$. Para ver que $K(S) = B_d$ basta probar que d es el menor entero positivo tal que $T^d g = g$, para todo $g \in K(S)$.

Supongamos que existe un entero positivo $d' < d$ tal que para todo $g \in K(S)$ se tiene que $T^{d'} g = g$. Sea $f \in S$, por lo demostrado en el Lema 3.4.5.6, $f = (\nabla f \wedge e_1) \vee (\triangle f \wedge e_2)$ con $\nabla f, \triangle f \in K(S)$. Además como $T e_i = e_i$ para todo $i = 1, 2$, se cumple que $T^{d'} e_i = e_i$, para todo $i = 1, 2$. Luego resulta que $T^{d'} f = (T^{d'} \nabla f \wedge T^{d'} e_1) \vee (T^{d'} \triangle f \wedge T^{d'} e_2) = (\nabla f \wedge e_1) \vee (\triangle f \wedge e_2) = f$, lo que contradice que d es el menor entero positivo tal que $T^d f = f$. $\square$

Teorema 3.4.5.8 *Sea S una subálgebra de $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$ y d el menor entero positivo tal que $T^d f = f$, para todo $f \in S$. Entonces se verifica que $S = S(A, d) = \{f \in \mathrm{T}^k :$ $f(i) \in A$ y $f(i) = f(j)$ si $i \equiv j \, mod\,(d)\}$, donde A es el conjunto indicado en la* Observación 3.4.5.3.

Dem.

Por el Lema 3.4.5.4, sabemos que $S \subseteq S(A,d)$. Veremos ahora la otra inclusión. Sea $f \in S(A,d)$. Entonces para cada i, tal que $1 \leq i \leq k$, se verifica que $f(i) \in A$, luego existe $h_i \in S$ tal que $h_i(i) = f(i)$. En efecto, como $A \subseteq \mathrm{T}$, tenemos que $f(i) = 0$, $f(i) = 1/2$ o $f(i) = 1$. En el primero de los casos, existe $h_i = \mathbf{0} \in S$ tal que $h_i(i) = f(i) = 0$. En el segundo caso, como $\mathbf{1} \in S$ y S una subálgebra de $\mathcal{T}_k$, tenemos que $\sim \mathbf{1} \in S$ y $\sim \mathbf{1}(i) = 1/2$, para todo $1 \leq i \leq k$. Luego existe $h_i = \sim \mathbf{1}$ tal que $h_i(i) = f(i)$. El último caso es análogo al primero, pues existe $h_i = \mathbf{1} \in S$ tal que $h_i(i) = f(i) = 1$.

Además como $S \subseteq S(A,d)$, se tiene que $h_i \in S(A,d)$ y por lo tanto $h_i(j) = f(i)$, si $i \equiv j \, mod \, (d)$.

Por otro lado, por el Lema 3.4.5.7 y la Observación 3.4.5.5, resulta que los elementos g_i^*, para $i = 1, 2, \ldots, d$, de la forma:

$$g_i^*(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \equiv j \, mod \, (d) \\ 0, & \text{si } i \not\equiv j \, mod \, (d) \end{cases}$$

son elementos de S, por ser los átomos del álgebra de Boole $K(S) = B_d$.

Luego $h_i \wedge g_i^* \in S$, para $i = 1, 2, \ldots, d$ y

$$(h_i \wedge g_i^*)(j) = \begin{cases} f(i), & \text{si } i \equiv j \, mod \, (d) \\ 0, & \text{si } i \not\equiv j \, mod \, (d) \end{cases}$$

Entonces se verifica que $f = (h_1 \wedge g_1^*) \vee (h_2 \wedge g_2^*) \vee \ldots \vee (h_d \wedge g_d^*)$ y por lo tanto $f \in S$. □

Corolario 3.4.5.9 *Las subálgebras del $M_{3,k}-$retículo $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, son de la forma $S(A,d) = \{f \in \mathrm{T}^k : f(i) \in A$ y $f(i) = f(j)$ si $i \equiv j \, mod \, (d)\}$, donde A es una subálgebra de* T *y d es un divisor positivo de k.*

Dem. Inmediata de los Teoremas 3.4.5.1 y 3.4.5.8. □

Observaciones 3.4.5.10

(i) *Por el* Corolario 3.4.5.9, *podemos afirmar que $\mathcal{T}_k = S(\mathrm{T}, k)$.*

(ii) *De acuerdo a como está definida $S(A,d)$, cada elemento $f \in S(A,d)$ queda determinado por los d valores $f(i) \in A$, para $i = 1,2,\ldots,d$. Entonces $|S(A,d)| = |A|^d$, donde $|X|$, indica el número de elementos de un conjunto X. Además si $\mathcal{S}_{\mathcal{T}_k}$ y $\mathcal{S}_{\mathrm{T}}$ son la familia de todas las subálgebras de $\mathcal{T}_k$ y T respectivamente, y $D(k)$ es el conjunto de los divisores positivos de k, entonces $|\mathcal{S}_{\mathcal{T}_k}| = |\mathcal{S}_{\mathrm{T}}|.|D(k)| = 2.|D(k)|$.*

Lema 3.4.5.11 *Las subálgebras del $M_{3,k}-$retículo $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$, de la forma $S(\mathrm{T}, d) = \{f \in \mathrm{T}^k : f(i) \in \mathrm{T} \text{ y } f(i) = f(j) \text{ si } i \equiv j \, mod\,(d)\}$, donde d es un divisor positivo de k, son isomorfas a $\mathcal{T}_d = (\mathrm{T}^d, T)$.*

Dem. Resulta inmediato por el hecho de que la aplicación $\alpha : S(\mathrm{T}, \mathrm{d}) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ definida por $(\alpha(f))(i) = f(i)$, para todo $i = 1,\ldots,d$, es un $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo. □

El siguiente resultado nos permitió determinar las subálgebras maximales de $S(A,d)$.

Lema 3.4.5.12 *Sean $S(A_1,d_1)$ y $S(A_2,d_2)$ dos subálgebras del $M_{3,k}-$retículo $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces $S(A_1,d_1) \subseteq S(A_2,d_2)$ si, y solo si, $A_1 \subseteq A_2$ y d_1 divide a d_2.*

Dem. Supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y que d_1 divide a d_2. Sea $f \in S(A_1,d_1)$, entonces $f(i) \in A_1$, para todo $i = 1,2,\ldots,k$ y por lo tanto $f(i) \in A_2$. Por otro lado si $i \equiv j \, mod\,(d_2)$, entonces, como d_1 divide a d_2, se verifica que $i \equiv j \, mod\,(d_1)$ y en consecuencia, $f(i) = f(j)$. Luego $f \in S(A_2,d_2)$ y así $S(A_1,d_1) \subseteq S(A_2,d_2)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $S(A_1,d_1) \subseteq S(A_2,d_2)$. Sea $a \in A_1$ y la función $f \in \mathrm{T}^k$, definida por $f(i) = a$, para todo $i = 1,2,\ldots,k$. Luego $f \in S(A_1,d_1)$ y por lo tanto $f \in S(A_2,d_2)$, de donde resulta que $f(i) = a \in A_2$, que prueba que $A_1 \subseteq A_2$.

A continuación veremos que d_1 divide a d_2. Supongamos que d_1 no divide a d_2, entonces existen t, r enteros, tales que (1) $d_2 = t \cdot d_1 + r$ con $0 < r < d_1$. Consideremos $g \in \mathrm{T}^k$ definida por

$$g(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \equiv r \, mod\,(d_1) \\ 0, & \text{si } i \not\equiv r \, mod\,(d_1) \end{cases}$$

Entonces tenemos que $g \in S(A_1,d_1)$, pues es claro que $g(i) \in A_1$ y si $i \equiv j \, mod\,(d_1)$, resulta que $g(i) = g(j)$, ya que si $i \equiv r \, mod\,(d_1)$, por transitiva y conmutativa de la relación

$\equiv mod\,(d_1)$, vemos que $j \equiv r\,mod\,(d_1)$ y por lo tanto $g(i) = g(j) = 1$. En el caso que $i \not\equiv r\,mod\,(d_1)$, se debe cumplir que $j \not\equiv r\,mod\,(d_1)$, de donde resulta que $g(i) = g(j) = 0$.

Además de (1), vemos que (2) $d_2 \equiv r\,mod\,(d_1)$, lo cual implica que $g(d_2) = 1$. Por otra parte de (2), $2 \cdot d_2 \equiv 2 \cdot r\,mod\,(d_1)$. Si fuese $2 \cdot d_2 \equiv r\,mod\,(d_1)$, entonces tendríamos que $2 \cdot r \equiv r\,mod\,(d_1)$, lo cual es imposible pues $r < d_1$. Luego $2 \cdot d_2 \not\equiv r\,mod\,(d_1)$ y por lo tanto $g(2 \cdot d_2) = 0$. Por lo tanto $g(d_2) \neq g(2 \cdot d_2)$, pero $d_2 \equiv 2 \cdot d_2\,mod\,(d_2)$, y en consecuencia $g \notin S(A_2, d_2)$, lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 3.4.5.13 *Sea $S(A, d)$ una subálgebra del $M_{3,k}-$retículo $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces las subálgebras maximales de $S(A, d)$, son las subálgebras del tipo $S(A', d)$, donde A' es una subálgebra maximal de A, o del tipo $S(A, d')$, donde d' es un divisor positivo maximal de d.*

Dem. Es claro que las subálgebras indicadas en el enunciado, son subálgebras maximales de $S(A, d)$. Recíprocamente, si $S(A_1, d_1)$ es una subálgebra maximal de $S(A, d)$, por el Lema 3.4.5.12, tenemos que $A_1 \subseteq A$ y d_1 es un divisor de d. Luego $A_1 = A$ y d_1 divisor maximal de d, o A_1 subálgebra maximal de A y $d_1 = d$, pues en cualquier otro caso se puede obtener una subálgebra propia de $S(A, d)$ que contiene propiamente a $S(A_1, d_1)$, lo que negaría que $S(A_1, d_1)$ es una subálgebra maximal de $S(A, d)$.

$\square$

Corolario 3.4.5.14 *Sea $S(A, d)$ una subálgebra del $M_{3,k}-$retículo $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces el número de subálgebras maximales de $S(A, d)$, es igual al número de subálgebras maximales de A, más el número de divisores positivos maximales de d.*

Dem. Inmediata del Teorema 3.4.5.13. $\square$

Teorema 3.4.5.15 *Sea $\{S(A_i, d_i)\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ una familia de subálgebras del $M_{3,k}-$retículo $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S(A_i, d_i) = S(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge\limits_{i=1}^{n} d_i)$, donde $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} d_i$ indica el máximo común divisor de $d_1, d_2, \ldots, d_n$.*

Dem. Sea $f \in S(\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{i=1}^{n} d_i)$. Entonces $f(j) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $f(i) = f(j)$ si $i \equiv j \, mod\,(d)$, donde $d = \bigwedge_{i=1}^{n} d_i$. Luego $f(j) \in A_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y si $i \equiv j \, mod\,(d_i)$, entonces $i \equiv j \, mod\,(d)$ y por lo tanto $f(i) = f(j)$. En consecuencia $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(A_i, d_i)$.

Recíprocamente, sea $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(A_i, d_i)$ y $d = \bigwedge_{i=1}^{n} d_i$. Entonces $f \in S(A_i, d_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por lo tanto tenemos que $f(j) \in A_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Luego $f(j) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Sea t el menor entero positivo tal que $T^t f = f$, para todo $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(A_i, d_i)$. Entonces t divide a d_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por lo tanto t divide a d. Luego teniendo en cuenta la Observación 3.4.0.41, podemos asegurar que $T^d f = f$. Esto último implica, por lo visto en la demostración del Lema 3.4.5.4, que si $i \equiv j \, mod\,(d)$, entonces $f(i) = f(j)$. Luego $f \in S(\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{i=1}^{n} d_i)$.

$\square$

3.4.6. M_3−retículos k−cíclicos libres

Nuestro objetivo ahora es describir la estructura del M_3−retículo k−cíclico con un número finito de generadores libres.

Definición 3.4.6.1 *Dado un número cardinal $c > 0$, diremos que un álgebra $\mathbb{L}_k(c)$, es un M_3−retículo k−cíclico libre con c generadores libres si:*

(i) $\mathbb{L}_k(c)$ *contiene un subconjunto G de generadores de cardinal c, esto es $[G] = \mathbb{L}_k(c)$.*

(ii) *Para cualquier $A \in \mathbf{M_{3,k}}$, toda aplicación $f : G \longrightarrow A$ puede prolongarse a un homomorfismo $h_f : \mathbb{L}_k(c) \longrightarrow A$.*

En este caso diremos que G es un conjunto de generadores libres para $\mathbb{L}_k(c)$ y cuando queramos poner en evidencia el conjunto de generadores, notaremos $\mathbb{L}_k(G)$.

Observemos que como $\mathbf{M_{3,k}}$ es una variedad, por un conocido teorema de G. Birkhoff, se puede asegurar la existencia y unicidad, a menos de isomorfismo, de $\mathbb{L}_k(c)$ y que dicha álgebra es un $\mathbf{M_{3,k}}-$retículo.

Además el homomorfismo h_f de la Definición 3.4.6.1, es único, está unívocamente determinado por las imágenes de los elementos de G y es un $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo.

Lema 3.4.6.2 *Sea $\mathbb{L}_k(G)$ con $|G| = c$ y $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre $F(G, \mathrm{T}^k)$, el conjunto de todas las funciones de G en T^k y el conjunto $Hom(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_k)$ de todos los $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismos de $\mathbb{L}_k(G)$ en $\mathcal{T}_k$.*

Dem. Basta asociar a cada $f : G \longrightarrow \mathrm{T}^k$ el $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo extensión $h_f : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow \mathcal{T}_k$. □

En lo que sigue supondremos que $|G| = n > 0$ es un número cardinal finito.

Lema 3.4.6.3 *Sea $\mathcal{M} = T\mathcal{N}\mathcal{I}_{max}(\mathbb{L}_k(G))$ el conjunto de todos los $Tn-$ideales maximales de $\mathbb{L}_k(G)$, donde $|G| = n$ y $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$. Entonces $|\mathcal{M}| \leq |F(G, \mathrm{T}^k)|$.*

Dem. Sea $\alpha : F(G, \mathrm{T}^k) \longrightarrow \mathcal{M}$ definida por $\alpha(f) = N(h_f)$ donde h_f es el único $\mathbf{M_{3,k}}-$homomorfismo que extiende a f. Veamos en primer lugar que α está bien definida. Sabemos que $h_f : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow \mathcal{T}_k$ y $[G] = \mathbb{L}_k(G)$. Luego $h(\mathbb{L}_k(G)) = h([G]) = [h(G)] = [f(G)] = S$, y S es una subálgebra de $\mathcal{T}_k$. Por los Corolarios 3.4.3.6 y 3.4.3.7, podemos afirmar que S es simple, pues $\mathcal{T}_k$ es un álgebra simple. Además por el teorema del triángulo se verifica que $\mathbb{L}_k(G)/N(h_f)$ es isomorfa a S. Entonces resulta que $\mathbb{L}_k(G)/N(h_f)$ es simple y en consecuencia, por el Teorema 3.4.3.1, podemos afirmar que $N(h_f) \in \mathcal{M}$.

Sea $M \in \mathcal{M}$, $q : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow \mathbb{L}_k(G)/M$ el epimorfismo canónico y $f = q|G$ la restricción de q al conjunto generador G. Entonces $\alpha(f) = N(q) = M$, y por lo tanto α es sobreyectiva. Luego como $F(G, \mathrm{T}^k)$ es un conjunto finito, concluímos que $\mathcal{M}$ es finito y $|\mathcal{M}| \leq |F(G, \mathrm{T}^k)|$. □

Teorema 3.4.6.4 *El álgebra libre $\mathbb{L}_k(G)$ con $|G| = n$, es finita.*

Dem. Por el Teorema 3.4.4.2, podemos afirmar que $\mathbb{L}_k(G)$ es producto subdirecto de la familia $\{\mathbb{L}_k(G)/M : M \in \mathcal{TNI}_{max}(\mathbb{L}_k(G))\}$. En consecuencia por el Corolario 3.4.3.3, es producto subdirecto de una familia de subálgebras de $\mathcal{T}_k$, tantas como $Tn-$ideales maximales tiene el álgebra. Luego por el Lema 3.4.6.3, $\mathbb{L}_k(G)$ es isomorfa a un producto subdirecto de una familia finita de subálgebras de $\mathcal{T}_k$ y como cada subálgebra de $\mathcal{T}_k$ es finita, pues $\mathcal{T}_k$ lo es, resulta que $\mathbb{L}_k(G)$ es finita. $\square$

Teorema 3.4.6.5 *Sea $\mathbb{L}_k(G)$ el álgebra libre con $|G| = n$. Entonces si $\{M_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es el conjunto de todos los $Tn-$ideales maximales de $\mathbb{L}_k(G)$, se verifica que $\mathbb{L}_k(G)$ es isomorfa al producto directo $\prod\limits_{i=1}^{m} \mathbb{L}_k(G)/M_i$.*

Dem. Inmediata de los Teoremas 3.4.4.5 y 3.4.6.4. $\square$

Observación 3.4.6.6 *Si M es un $Tn-$ideal maximal del álgebra libre $\mathbb{L}_k(n)$, entonces por el* Corolario 3.4.3.3, *$\mathbb{L}_k(n)/M$ es isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{T}_k = (\mathrm{T}^k, T)$ y por el* Corolario 3.4.3.8, *podemos afirmar que dicho cociente, es un miembro simple de la variedad. Además teniendo en cuenta que las únicas subálgebras de* T, *son las triviales, por el* Corolario 3.4.5.9 *y el* Lema 3.4.5.11, *tenemos que $\mathbb{L}_k(n)/M$ es isomorfo a $\mathcal{T}_d = (\mathrm{T}^d, T)$ siendo d un divisor positivo de k.*

La observación y el teorema anterior nos permiten enunciar los siguientes corolarios.

Corolario 3.4.6.7 *Sea $\mathbb{L}_k(G)$ el álgebra libre con $|G| = n$, $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los $Tn-$ideales maximales de $\mathbb{L}_k(G)$ y d un divisor positivo de k (notaremos $d|k$). Entonces si $\mathcal{M}_d = \{M \in \mathcal{M} : \mathbb{L}_k(G)/M \simeq \mathcal{T}_d\}$, se verifica que $\mathbb{L}_k(G)$ es isomorfa al producto directo $\prod\limits_{d|k}(\mathcal{T}_d)^{|\mathcal{M}_d|}$.*

Corolario 3.4.6.8 *Sea $\mathbb{L}_k(G)$ el álgebra libre con $|G| = n$, $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los $Tn-$ideales maximales de $\mathbb{L}_k(G)$ y d un divisor positivo de k (notamos $d|k$). Entonces $|\mathbb{L}_k(G)| = \prod\limits_{d|k}(3^d)^{|\mathcal{M}_d|}$, donde $\mathcal{M}_d = \{M \in \mathcal{M} : \mathbb{L}_k(G)/M \simeq \mathcal{T}_d\}$.*

Dem. Inmediata del Corolario 3.4.6.7. □

Teniendo en cuenta el corolario anterior, para calcular el cardinal del álgebra libre, basta computar $|\mathcal{M}_d|$ para cada divisor positivo d de k.

Notación 3.4.6.9 *Sean L y L' $M_{3,k}-$retículos. Indicaremos con $Aut(L)$ al conjunto de todos los $\mathbf{M_{3,k}}-$automorfimos que se pueden definir sobre L y con $Epi(L, L')$ al conjunto de todos los $\mathbf{M_{3,k}}-$epimorfismos de L sobre L'.*

Teorema 3.4.6.10 *Sea $\mathbb{L}_k(G)$ el álgebra libre con $|G| = n$, $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los $Tn-$ideales maximales de $\mathbb{L}_k(G)$, d un divisor positivo de k (notamos $d|k$) y $\mathcal{M}_d = \{M \in \mathcal{M} : \mathbb{L}_k(G)/M \simeq \mathcal{T}_d\}$. Entonces $|\mathcal{M}_d| = \dfrac{|Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)|}{d!}$.*

.

Dem. Sea $\alpha : Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d) \longrightarrow \mathcal{M}_d$ definida por $\alpha(h) = N(h)$. Veamos en primer lugar que α está bien definida. Como $h : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow \mathcal{T}_d$ es un epimorfismo, por el teorema del triángulo (ver [8]), sabemos que $\mathbb{L}_k(G)/N(h) \simeq \mathcal{T}_d$. Por otro lado, por el Lema 3.4.5.11, $\mathcal{T}_d \simeq S(A, d)$, siendo $S(A, d)$ una subálgebra de $\mathcal{T}_k$ y por consiguiente un álgebra simple. Luego resulta que $\mathbb{L}_k(G)/N(h)$ es simple y en consecuencia, por el Teorema 3.4.3.1, podemos asegurar que $N(h) \in \mathcal{M}$. Ahora probaremos que α es sobreyectiva. Sea $M \in \mathcal{M}_d$, entonces $M \in \mathcal{M}$ y existe $\overline{h} : \mathbb{L}_k(G)/M \longrightarrow \mathcal{T}_d$ que es un isomorfismo. Si la aplicación $q : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow L(n)/M$ es el epimorfismo canónico, entonces $h = \overline{h} \circ q$ es un epimorfismo tal que $N(h) = M$. Luego $h \in Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)$ y $\alpha(h) = M$, lo que implica que α es sobreyectiva. Además si $\alpha(h) = M$, entonces $\alpha^{-1}(M) = \{g \circ h : g \in Aut(\mathcal{T}_d)\}$. De lo último podemos afirmar que $|\mathcal{M}_d| = \dfrac{|Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)|}{|Aut(\mathcal{T}_d)|}$. Por otro lado, no es difícil probar que $|Aut(\mathcal{T}_d)| = d!$, y por lo tanto queda probado el teorema.

□

Teorema 3.4.6.11 *Sea $\mathbb{L}_k(G)$ el álgebra libre con $|G| = n$, $\mathcal{T}_d^G$ el conjunto de todas las funciones de G en $\mathcal{T}_d$ y $F^*(G, \mathcal{T}_d) = \{f \in \mathcal{T}_d^G : [f(G)] = \mathcal{T}_d\}$. Entonces $|Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)| = |F^*(G, \mathcal{T}_d)|$.*

Dem. Consideremos $\beta : Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d) \longrightarrow F^*(G, \mathcal{T}_d)$ definida por $\beta(h) = h|G$, donde $h|G : G \longrightarrow \mathcal{T}_d$ es la restricción de h al conjunto G, para cada $h \in Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)$. Veamos en primer lugar que β está bien definida.

Sea $h : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow \mathcal{T}_d$ un epimorfismo y $h|G : G \longrightarrow \mathcal{T}_d$, la restricción de h al conjunto G. Como $\mathbb{L}_k(G) = [G]$ y $h(\mathbb{L}_k(G)) = \mathcal{T}_d$, entonces $h([G]) = [h(G)] = [h|G(G)] = \mathcal{T}_d$, lo que prueba que $h|G \in F^*(G, \mathcal{T}_d)$.

Sean $h_1, h_2 \in Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)$ tal que $f = h_1|G = h_2|G$. Por ser $\mathbb{L}_k(G)$ un álgebra libre, el homomorfismo que extiende a f es único, luego se verifica que $h_1 = h_2$. Por lo tanto β es inyectiva. Además si $f \in F^*(G, \mathcal{T}_d)$, existe $h : \mathbb{L}_k(G) \longrightarrow \mathcal{T}_d$ homomorfismo que extiende a f, es decir, $h|G = f$. Por otro lado como $\mathbb{L}_k(G) = [G]$, tenemos que $h([G]) = [h(G)] = [h|G(G)] = [f(G)] = \mathcal{T}_d$, de donde $h \in Epi(\mathbb{L}_k(G), \mathcal{T}_d)$ y $\beta(h) = f$. Luego β es sobreyectiva y en consecuencia biyectiva.

$\square$

Teorema 3.4.6.12 *Sea $f : G \longrightarrow \mathcal{T}_k$ una función y $S(A, d)$ una subálgebra de $\mathcal{T}_k$. Entonces $[f(G)] = S(A, d)$ si, y solo si, $f(G) \subseteq S(A, d)$ y $f(G)$ no está contenido en ninguna subálgebra maximal de $S(A, d)$.*

Dem. Sea $f : G \longrightarrow \mathcal{T}_k$ una función tal que $[f(G)] = S(A, d)$. Es claro que $f(G) \subseteq S(A, d)$. Supongamos que $f(G) \subseteq S(A', d')$, siendo $S(A', d')$ una subálgebra maximal de $S(A, d)$. Como $S(A', d')$ es una subálgebra de $\mathcal{T}_k$, se verifica que $[f(G)] = S(A, d) \subseteq S(A', d')$. Luego por el Lema 3.4.5.12, (1) $A \subseteq A'$, $d'|d$ y $d|d'$ y por lo tanto (2) $d = d'$. Además, por el Teorema 3.4.5.13, se verifica que (A' es una subálgebra maximal de A y $d' = d$) o ($A' = A$ y d' es un divisor positivo maximal de d). En ambos casos, teniendo en cuenta (1), se verifica que $A = A'$. Luego por (2), $S(A', d') = S(A, d)$, lo cual es absurdo, por ser $S(A', d')$ una subálgebra maximal de $S(A, d)$.

Recíprocamente, sea $f(G) \subseteq S(A, d)$ tal que $f(G)$ no está contenido en ninguna subálgebra maximal de $S(A, d)$. Entonces $[F(G)] \subseteq S(A, d)$ y como $[F(G)]$ es una subálgebra de $\mathcal{T}_k$, resulta que $[F(G)] = S(A', d')$, con A' subálgebra de T y $d'|d$. Es claro que $S(A', d')$ es una subálgebra de $S(A, d)$. Supongamos que $S(A', d') \subset S(A, d)$ y consideremos el conjunto de todas las subálgebras de $S(A,d)$, ordenado por inclusión. Como se trata de un conjunto ordenado finito, tiene elementos maximales. Entonces si $S(A',d')$ fuera una subálgebra maximal de $S(A,d)$, $f(G)$ estaría contenido en una subálgebra maximal de $S(A,d)$, lo que contradice la hipótesis. Si $S(A',d')$ no fuera una subálgebra maximal de $S(A,d)$, entonces existe $S(A'',d'')$ subálgebra maximal de $S(A,d)$ tal que $S(A',d') \subseteq S(A'',d'')$, y por consiguiente $f(G) \subseteq S(A'',d'')$, lo cual también contradice la hipótesis. Luego $[F(G)] = S(A',d') = S(A,d)$. $\square$

Observación 3.4.6.13 *De los* Teoremas 3.4.6.11 y 3.4.6.12*, podemos ver que* $F^*(G,\mathcal{T}_d)$ *es el conjunto de todas las funciones de* G *en* $\mathcal{T}_d$*, tal que no existe una subálgebra maximal* S *de* $\mathcal{T}_d$ *que verifique* $f(G) \subseteq S$*, es decir,* $f(G) \not\subseteq S$*, para toda* S*, subálgebra maximal de* $\mathcal{T}_d$*. Observemos también que las subálgebras maximales de* $\mathcal{T}_d$*, son álgebras isomorfas a* $\mathcal{T}_x$*, con* $x \in M(d)$*, donde* $M(d)$ *es el conjunto de los divisores maximales de* d*. Es decir* $M(d)$ *es el conjunto de los átomos duales del retículo distributivo* $D(d)$*, de los divisores positivos de* d*, ordenado por la relación divide.*

Teorema 3.4.6.14 *Sea* $\mathbb{L}_k(G)$ *el álgebra libre con* $|G| = n$*,* $\mathcal{T}_y^G$ *el conjunto de todas las funciones de* G *en* $\mathcal{T}_y = (\mathrm{T}^y, T)$ *y* $F^*(G,\mathcal{T}_d) = \{f \in \mathcal{T}_d^G : [f(G)] = \mathcal{T}_d\}$*. Entonces* $F^*(G,\mathcal{T}_d) = \mathcal{T}_d^G \setminus \bigcup_{x \in M(d)} \mathcal{T}_x^G$*, donde* $M(d)$ *es el conjunto de los divisores maximales de* d*.*

Dem. Inmediato del Teorema 3.4.6.12 y la Observación 3.4.6.13. $\square$

Teorema 3.4.6.15 *Sea* $\mathbb{L}_k(G)$ *el álgebra libre con* $|G| = n$*,* $\mathcal{T}_y^G$ *el conjunto de todas las funciones de* G *en* $\mathcal{T}_y = (\mathrm{T}^y, T)$ *y* $F^*(G,\mathcal{T}_d) = \{f \in \mathcal{T}_d^G : [f(G)] = \mathcal{T}_d\}$*. Entonces* $|F^*(G,\mathcal{T}_d)| = |\mathcal{T}_d^G| - |\bigcup_{x \in M(d)} \mathcal{T}_x^G|$*, donde* $M(d)$ *es el conjunto de los divisores maximales de* d*.*

Dem. Inmediata del Teorema 3.4.6.14. $\square$

Corolario 3.4.6.16 *Sea* $\mathbb{L}_k(G)$ *el álgebra libre con* $|G| = n$*,* $\mathcal{T}_y^G$ *el conjunto de todas las funciones de* G *en* $\mathcal{T}_y = (\mathrm{T}^y, T)$ *y* $F^*(G,\mathcal{T}_d) = \{f \in \mathcal{T}_d^G : [f(G)] = \mathcal{T}_d\}$*. Entonces*

$|F^*(G,\mathcal{T}_d)| = (3^d)^{|G|} - \sum\limits_{\emptyset\neq X\subseteq M(d)} (-1)^{|X|}\cdot \left(3^{\bigwedge\limits_{x\in X} x}\right)^{|G|}$, *donde* $\bigwedge\limits_{x\in X} x$ *es el máximo común divisor de los elementos del conjunto* X *y* $M(d)$ *es el conjunto de los divisores maximales de* d.

Dem. Inmediata del Teorema 3.4.6.15 y el principio de inclusión-exclusión. $\square$

Corolario 3.4.6.17 *Sea* $\mathbb{L}_k(G)$ *el álgebra libre con* $|G| = n$. *Entonces* $|\mathbb{L}_k(G)| = \prod\limits_{d|k}(3^d)^{|\mathcal{M}_d|}$, *con* $|\mathcal{M}_d| = \dfrac{(3^d)^n - \sum\limits_{\emptyset\neq X\subseteq M(d)} (-1)^{|X|}\cdot\left(3^{\bigwedge\limits_{x\in X} x}\right)^n}{d!}$, *donde* $\bigwedge\limits_{x\in X} x$ *es el máximo común divisor de los elementos del conjunto* X *y* $M(d)$ *es el conjunto de los divisores maximales de* d.

3.4.7. Determinación del número de estructuras de M_3−retículo k−cíclico no isomorfas definibles sobre un M_3−retículo

En este apartado describimos un método para construir un automorfismo T, a partir de una partición P del conjunto $\Pi(L)$. Dicho automorfismo se dirá el P−automorfismo o automorfismo inducido por P.

Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$, por el Teorema 3.1.0.14, sabemos que L es suma cardinal de un número finito, digamos n, de cadenas de dos elementos. Luego por el Teorema 3.1.0.16 y el Lema 3.1.0.20, se verifica que $|A_t(L)| = n$, siendo $A_t(L) = \{p \in \Pi(L) : \triangle p = 0\} = min\,\Pi(L) = M(\Pi(L))$. Recordemos además que $R(\Pi(L)) = \{p \in \Pi(L) : \triangle p = p\} = \Pi(L) \setminus A_t(L) = max\,\Pi(L)$.

Teorema 3.4.7.1 *Sea* $L \in \mathbf{M_{3f}}$ *tal que* $|A_t(L)| = n$, *y* k *un entero tal que* $0 < k \leq n$, *entonces existe un* $\mathbf{M_3}$−*automorfismo* T *de* L *tal que* $T^k(x) = x$.

Dem.

Sea $\mathrm{P}_1 = \{C_i^1\}_{i=1,2,\ldots,t}$ cualquier partición de $A_t(L)$ con la propiedad que si $|C_i^1| = h_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$, entonces k es el mínimo común múltiplo de los elementos del conjunto $\{h_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Sea $C_i^1 = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{h_i}}\}$ y $g_i^1 : C_i^1 \longrightarrow C_i^1$ la siguiente biyección:

$$g_i^1(p_{i_t}) = \begin{cases} p_{i_{(t+1)}} & \text{si } 1 \leq t \leq h_i - 1 \\ p_{i_1} & \text{si } t = h_i \end{cases}$$

Las funciones g_i^1 con $i = 1, 2, \ldots, t$, inducen la siguiente función:

$f_1 : A_t(L) \longrightarrow A_t(L)$, definida por $f_1(p) = g_i^1(p)$ si y solo si $p \in C_i^1$.

Sea $\mathrm{P}_2 = \{C_i^2\}_{i=1,2,\ldots,t}$ tal que $C_i^2 = \{\nabla p : p \in C_i^1\}$, $1 \leq i \leq t$ y $g_i^2 : C_i^2 \longrightarrow C_i^2$ la siguiente biyección: $g_i^2(\nabla p) = \nabla g_i^1(p)$.

Las funciones g_i^2 con $i = 1, 2, \ldots, t$, inducen análogamente la siguiente función:

$f_2 : R(\Pi(L)) \longrightarrow R(\Pi(L))$ tal que $f_2(p) = g_i^2(p)$ si y solo si $p \in C_i^2$.

Por la forma como está definida es claro que $(g_i^1)^k(p) = p$ y $(g_i^2)^k(p) = p$, para todo $i = 1, 2, \ldots, t$. En consecuencia $(f_1)^k(p) = p$ y $(f_2)^k(p) = p$.

Es fácil verificar que $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t \in A_t(L) \\ f_2(t) & \text{si } t \in R(\Pi(L)) \end{cases}$$

es un isomorfismo de orden, al que llamaremos $\mathrm{P}-$biyección, siendo $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$.

Luego, por el Teorema 3.2.0.26, la aplicación $T : L \longrightarrow L$ definida por:

$$(\mathrm{I}) \quad T(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = 0 \\ \bigvee\limits_{i=1}^{k} f(p_i), & \text{si } x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i \text{ es una representación irredundante de } x \\ & \qquad\qquad \text{como supremo de primos} \end{cases}$$

es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo.

Observemos que como $x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i$ es una representación irredundante de x como supremo de primos y $x \neq 0$, entonces , $T(x) = \bigvee\limits_{i=1}^{k} f(p_i)$, es también una representación irredundante de $T(x)$ como supremo de primos. Luego por inducción se puede probar que si $x \neq 0$, entonces $T^k(x) = \bigvee\limits_{i=1}^{k} f^k(p_i) = \bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i = x$. Como además es claro que $T^k(0) = 0$, entonces resulta que T es un $\mathbf{M_3}-$automorfismo de período k. $\square$

Observación 3.4.7.2 *En el* Teorema 3.4.7.1*, hemos probado que toda partición del conjunto $A_t(L)$, de un M_3-retículo finito L, determina un $\mathbf{M_3}-$automorfismo de período k. Recíprocamente, si $h : L \longrightarrow L$ es un $\mathbf{M_3}-$automorfismo de período k, en el* Teorema 3.2.0.27*, demostramos que la restricción $f = h|\Pi(L)$, es un isomorfismo de orden. En consecuencia f es una función biyectiva y determina una permutación de las componentes conexas de $\Pi(L)$, que son cadenas de dos elementos. Además es claro que $f(min\,\Pi(L)) \subseteq min\,\Pi(L)$ y $f(max\,\Pi(L)) \subseteq max\,\Pi(L)$. Por lo tanto los ciclos disjuntos de la permutación determinarán una partición de $min\,\Pi(L) = A_t(L)$.*

Teorema 3.4.7.3 *Los $\mathbf{M_3}-$automorfismos de período k de un M_3-retículo finito L, quedan determinados por las particiones del conjunto $A_t(L)$.*

Dem.

Es inmediata del Teorema 3.4.7.1 y la Observación 3.4.7.2. $\square$

En el apartado anterior hemos descripto como a partir de un M_3-retículo L con $|A_t(L)| = n$, es posible hallar un M_3-retículo $k-$cíclico (L, T) con $k \leq n$. En este párrafo determinamos cuántas de estas estructuras $k-$cíclicas son no isomorfas. La construcción de T indicada en (I) de la demostración del Teorema 3.4.7.1, nos conduce a la siguiente:

Definición 3.4.7.4 *Diremos que* $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ *es una familia de particiones del conjunto $\Pi(L)$, de un M_3-retículo finito L, si $\mathrm{P}_1 = \{C_i^1\}_{i=1,2,\ldots,t}$ es una partición de $A_t(L)$ y $\mathrm{P}_2 = \{C_i^2\}_{i=1,2,\ldots,t}$, donde $C_i^2 = \{\nabla p : p \in C_i^1\}$, es una partición de $R(\Pi(L))$.*

Definición 3.4.7.5 *Sea $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$ finito y $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ una familia de particiones del conjunto $\Pi(L)$, tal que $\mathrm{P}_1 = \{C_i^1\}_{i=1,2,\ldots,t}$ es una partición de $A_t(L)$ y $\mathrm{P}_2 = \{C_i^2\}_{i=1,2,\ldots,t}$, donde $C_i^2 = \{\nabla p : p \in C_i^1\}$, es una partición de $R(\Pi(L))$. Diremos que la partición* P *es $k-$compatible, si $h_i = |C_i^1|$, para cada $i = 1, 2, \ldots, t$, entonces k es el mínimo común múltiplo de los elementos del conjunto $\{h_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,t\}}$.*

Definición 3.4.7.6 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$ finito,* $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ *y* $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$ *dos familias de particiones de* $\Pi(L)$. *Diremos que* P *y* Q *son similares si* $\mathrm{P}_1 = \{C_i^1\}_{i=1,2,\ldots,t}$, $\mathrm{Q}_1 = \{\overline{C_j^1}\}_{j=1,2,\ldots,p}$ *y se verifican:*

(i) $t = p$ *(ambas tienen el mismo número de clases),*

(ii) *para cada* $C_i^1 \in \mathrm{P}_1$ *existe* $\overline{C_i^1} \in \mathrm{Q}_1$ *tal que* $|C_i^1| = |\overline{C_i^1}|$.

Teorema 3.4.7.7 *Sea $L \in \mathbf{M_{3f}}$ finito,* $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ *y* $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$ *dos familias de particiones de* $\Pi(L)$*, $k-$compatibles similares de* $\Pi(L)$*. Si T y $\overline{T}$ son los $\mathbf{M_3}-$automorfismos inducidos por estas particiones respectivamente, entonces (L, T) y $L, \overline{T})$ son isomorfos como M_3-retículos $k-$cíclicos.*

Dem.

Sean $\mathrm{P}_1 = \{C_i^1\}_{i=1,2,\ldots,t}$ una partición de $A_t(L)$, $\mathrm{P}_2 = \{C_i^2\}_{i=1,2,\ldots,t}$, donde $C_i^2 = \{\nabla p : p \in C_i^1\}$, es una partición de $R(\Pi(L))$, $\mathrm{Q}_1 = \{\overline{C_j^1}\}_{j=1,2,\ldots,p}$ una partición de $A_t(L)$ y $\mathrm{Q}_2 = \{\overline{C_j^2}\}_{j=1,2,\ldots,p}$, una partición de $R(\Pi(L))$, donde $\overline{C_i^2} = \{\nabla q : p \in \overline{C_i^1}\}$, tales que $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ y $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$ son familias de particiones de $\Pi(L)$, $k-$compatibles y similares.

Consideremos que $f : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ y $g : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ son las $\mathrm{P}, \mathrm{Q}-$biyecciones respectivas.

Entonces si $P_1 = \{\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k_1}}\}, \{a_{h_1}, \ldots, a_{h_{k_2}}\}, \ldots, \{a_{u_1}, \ldots, a_{u_{k_t}}\}\}$, también lo podemos escribir como

$P_1 = \{\{a_{i_1}, f(a_{i_1}), \ldots, f^{k_1-1}(a_{i_1})\}, \{a_{h_1}, f(a_{h_1}), \ldots, f^{k_2-1}(a_{h_1})\}, \ldots$
$\ldots, \{a_{u_1}, f(a_{u_1}), \ldots, f^{k_t-1}(a_{u_1})\}\}$.

Sea $|A_t(L)| = n$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces podemos pensar que P_1 induce una permutación α de I_n, a saber:

$\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_{k_1})(h_1, h_2, \ldots, h_{k_2}), \ldots (u_1, u_2, \ldots, u_{k_t})$
y se verifica que $f(a_s) = a_{\alpha(s)}$.

En forma totalmente análoga, si consideramos P_2 y g, podemos decir que P_2 induce una permutación

$\beta = (i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k_1})(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{k_2}), \ldots (u'_1, u'_2, \ldots, u'_{k_t})$

de modo que $g(a_s) = a_{\beta(s)}$.

Es claro que α y β tienen la misma estructura cíclica, es decir, están descompuestas en la misma cantidad de ciclos disjuntos de la misma longitud ([34]). Luego podemos afirmar que existe una permutación γ de I_n, tal que $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \beta$ ([34]).

Definimos $h : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$, como $h(a_s) = a_{\gamma(s)}$ y $\psi : L \longrightarrow L$ dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = 0 \\ \bigvee\limits_{i=1}^{m} h(p_i), & \text{si } x = \bigvee\limits_{i=1}^{m} p_i \text{ es una representación irredundante de } x \\ & \qquad\qquad \text{como supremo de primos} \end{cases}$$

Luego, de forma análoga a lo realizado en el Teorema 3.2.0.26, podemos probar que la aplicación ψ es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo.

Es claro que h hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Pi(L) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & \Pi(L) \arrow[d, "h"] \\ \Pi(L) \arrow[r, "f"'] & \Pi(L) \end{tikzcd}$$

En efecto:

(1) $(f \circ h)(a_i) = f(h(a_i)) = f(a_{\gamma(i)}) = a_{\alpha(\gamma(i))} = a_{(\alpha\circ\gamma)(i)} = a_{(\gamma\circ\beta)(i)} = a_{\gamma(\beta(i))} = h(a_{\beta(i)} = h(g(a_i)) = (h \circ g)(a_i)$.

Luego de (1) tenemos que si $x \neq 0$ y $x = \bigvee\limits_{i=1}^{m} p_i$ es una representación irredundante de x, como supremo de primos, entonces

$\psi(\overline{T}(x)) = \psi(\bigvee\limits_{i=1}^{m} g(p_i)) = \bigvee\limits_{i=1}^{m} h(g(p_i)) = \bigvee\limits_{i=1}^{m} (h \circ g)(p_i) = \bigvee\limits_{i=1}^{m} (f \circ h)(p_i) = \bigvee\limits_{i=1}^{m} f(h(p_i)) = T(\bigvee\limits_{i=1}^{m} h(p_i)) = T(\psi(x))$. También se verifica que $\psi(\overline{T}(0)) = \psi(0) = T(\psi(0))$. Por lo tanto $\psi(\overline{T}(x)) = T(\psi(x))$, para todo $x \in L$. $\square$

El resultado anterior muestra que el número de estructuras cíclicas *esencialmente distintas* que admite un M_3-retículo finito L_n, con n átomos, concide con el número de particiones $k-$admisibles $(1 \leq k \leq n)$ no similares que pueden darse sobre $\Pi(L_n)$, y se prueba sin dificultad que este número coincide con el número de descomposiciones distintas que admite el número natural n, como suma de números naturales. Entonces resulta el siguiente:

Teorema 3.4.7.8 *Sobre el M_3-reticulo finito L_n, con n átomos, pueden definirse* $\Pi_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\Pi_{n-\frac{3i^2-1}{2}} + \Pi_{n-\frac{3i^2+1}{2}})$, *con* $\Pi_0 = 1$ *y* $\Pi_k = 0$ *si* $k < 0$, *estructuras k cíclicas* $(1 \leq k \leq n)$ *no isomorfas.*

Capítulo 4

qM_3-retículos

En este capítulo definimos los qM_3-retículos como M_3-retículos dotados de un cuantificador existencial, y estudiamos algunas propiedades algebraicas de los mismos. También vemos que en esta clase de álgebras es posible definir una estructura de qM_3-retículo, a partir de la estructura k-cíclicla y en el caso finito pudimos, a partir de una estructura de qM_3-retículo, definir un M_3-retículo k-cíclico. En la segunda sección extendemos la dualidad Priestley para los M_3-retículos con último elemento para el caso de los M_3-retículos dotados de un cuantificador. Utilizando esta dualidad caracterizamos las congruencias, en particular las principales, por medio ciertos abiertos y cerrados del espacio de Priestley asociado y las álgebras subdirectamente irreducibles de esta variedad. Entre otros resultados, probamos que las congruencias principales son booleanas y determinamos los ideales que las definen.

4.1. qM_3-retículos

Definición 4.1.0.9 *Un qM_3-retículo es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, 0\rangle$, de tipo $(2, 2, 1, 1, 1, 0)$, tal que el reducto $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo y $\exists$ es un operador unario (cuantificador existencial) definido sobre L que verifica las siguientes identidades:*

(E1) $\exists 0 = 0,$

(E2) $x \wedge \exists x = x$,

(E3) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$,

(E4) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$,

(E5) $\exists\exists x = \exists x$,

(E6) $\exists \triangle x = \triangle \exists x$,

(E7) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$.

Si $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, 0\rangle$ es un qM_3-retículo tal que el reducto $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo acotado, decimos que es un qM_3-retículo acotado.

En lo que sigue, para simplificar, notamos con $(L, \exists)$ a los qM_3-retículos e indicamos con $\mathbf{qM_3}$ a la variedad de los qM_3-retículos acotados.

Algunas consecuencias de la definición anterior están contenidas en el siguiente:

Lema 4.1.0.10 *Si* $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo, entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(E8) $x \leq y$ *implica* $\exists x \leq \exists y$,

(E9) *si* L *tiene último elemento* 1, *entonces* $\exists 1 = 1$.

Dem.

(E8): Si $x \leq y$, entonces $y = x \vee y$, luego por E3), $\exists y = \exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$, de donde resulta $\exists x \leq \exists y$.

(E9): Si 1 es el último elemento de L, entonces por E2), $1 \wedge \exists 1 = 1$. En consecuencia $1 \leq \exists 1$ y por lo tanto $\exists 1 = 1$.

$\square$

Lema 4.1.0.11 *Sea* $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo. Entonces si* $x \in K(L)$, *se verifica que* $\exists x \in K(L)$.

Dem. Sea $x \in K(L)$, entonces $x = \triangle x$. Luego $\exists x = \exists \triangle x$ y por E6), $\exists x = \triangle \exists x$, de donde $\exists x \in K(L)$. $\square$

Proposición 4.1.0.12 *Si* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, *entonces* $(K(L), \exists)$ *es un álgebra de Boole monádica.*

Dem. En [16] está demostrado que $K(L)$ es un álgebra de Boole generalizada, luego para cada $y \in K(L)$, se verifica que $[0, y] = \{x \in K(L) : 0 \leq x \leq y\}$ es un álgebra de Boole y todo elemento $x \in [0, y]$ tiene por complemento el elemento $-x = \triangle \sim (x \vee \sim y)$.

En particular, como en este caso L tiene último elemento, entonces $[0, 1] = K(L)$ es un álgebra de Boole y si $x \in K(L)$, entonces $-x = \triangle \sim (x \vee \sim 1)$ es el complemento booleano de x. Luego del Lema 4.1.0.11, (E1), (E2) y (E4), resulta que $\langle K(L), \exists \rangle$ es un álgebra de Boole monádica.

4.1.1. Relación entre las subálgebras y el cuantificador

Lema 4.1.1.1 *Si* $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $x \in \exists(L)$ *si, y solo si,* $\exists x = x$,

(ii) $\exists(L)$ *es una subálgebra de* L,

(iii) *para cada* $a \in L$, $\exists a$ *es el primer elemento del conjunto* $[a) \cap \exists(L)$,

(iv) *si* $z \in [x \wedge \exists y) \cap \exists(L)$, *entonces* $\exists x \wedge \exists y \leq z$,

(v) *para cada* $x \in L$, *se verifica que* $\triangle x \leq \triangle \exists x$,

(vi) *si* $z \in [\triangle x) \cap S$, *entonces* $\triangle \exists x \leq z$,

(vii) *si* $P \in \mathcal{I}_p(L)$, *entonces* $\exists^{-1}(P)$ *es un ideal de* L,

(viii) *si* $L \setminus M$ *es un filtro y* P *es un ideal primo tal que* $\exists^{-1}(P) \subseteq M$, *entonces existe un ideal primo* Q *de* L *tal que* $\exists^{-1}(P) \subseteq Q \subseteq M$.

Dem.

(i): Si $x \in \exists(L)$, entonces $x = \exists y$ para algún $y \in L$. Luego $\exists x = \exists\exists y$ y por (E5), $\exists x = \exists y$, de donde tenemos $\exists x = x$. La recíproca es inmediata.

(ii): Por (E1), resulta que $0 \in \exists(L)$. Sean $x, y \in \exists(L)$, luego por (i), $\exists x = x$ y $\exists y = y$. Entonces teniendo en cuenta (E6) y (E7), tenemos que $\sim x = \exists \sim \exists x$ y $\triangle x = \exists \triangle x$, lo que prueba que $\sim x \in \exists(L)$ y $\triangle x \in \exists(L)$. Por otro lado de (E3), $x \vee y = \exists(x \vee y)$ y de (E4), resulta que $x \wedge y = \exists(x \wedge \exists y)$. Por lo tanto $x \vee y \in \exists(L)$ y $x \wedge y \in \exists(L)$.

(iii): Es claro que para cada $a \in L$, $\exists a \in \exists(L)$ y por (E2), tenemos que $\exists a \in [a) \cap \exists(L)$. Sea $z \in [a) \cap \exists(L)$, luego $a \leq z$ y $\exists z = z$, de donde por (E8), $\exists a \leq z$, lo que prueba que $\exists a$ es el primer elemento del conjunto $[a) \cap \exists(L)$.

(iv): Sea $z \in [x \wedge \exists y) \cap \exists(L)$, entonces $x \wedge \exists y \leq z$. Como $z \in \exists(L)$, por (i), (E2) y (E4), $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y \leq \exists z = z$.

(v): Es inmediato de (E2) y (M17) (ver Sección 1.4, Capítulo 1), pues como $x \leq \exists x$, entonces $\triangle x \leq \triangle \exists x$.

(vi): Si $\triangle x \leq z$ y $z \in \exists(L)$, entonces por (i) y(E3), $\exists \triangle x \leq \exists z = z$. Luego, teniendo en cuenta (E6), resulta que $\triangle \exists x \leq z$.

(vii): Sean $x, y \in \exists^{-1}(P)$, entonces $\exists x, \exists y \in P$. Como P es un ideal de L, resulta que $\exists x \vee \exists y \in P$. Teniendo en cuenta (E3), se sigue que $x \vee y \in \exists^{-1}(P)$.
Por otro lado, sean $z, w \in L$ tales que $z \in \exists^{-1}(P)$ y $w \leq z$. Entonces por (E8), se verifica que $\exists w \leq \exists z$, y como $\exists z \in P$, tenemos que $w \in \exists^{-1}(P)$, lo que termina la demostración.

(viii): Sean $L \setminus M$ un filtro y P es un ideal primo tal que $\exists^{-1}(P) \subseteq M$. Entonces como $\exists^{-1}(P)$ es un ideal de L y $\exists^{-1}(P) \cap (L \setminus M) = \emptyset$, por el teorema de Birkhoff-Stone, existe un ideal primo Q tal que $\exists{-}1(P) \subseteq Q$ y $Q \cap (L \setminus M) = \emptyset$, de donde resulta $\exists^{-1}(P) \subseteq Q \subseteq M$. $\square$

Proposición 4.1.1.2 *Sea L un M_3-retículo y S una subálgebra de L que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *para cada $x \in L$, el conjunto $[x) \cap S$ tiene primer elemento que indicaremos con $\exists_S x$,*

(ii) *si $z \in [x \wedge \exists_S y) \cap S$, entonces $\exists_S x \wedge \exists_S y \leq z$,*

(iii) *para cada $x \in L$ se verifica que $\triangle x \leq \triangle \exists_S x$,*

(iv) *$z \in [\triangle x) \cap S$, implica $\triangle \exists_S x \leq z$.*

Entonces $(L, \exists_S)$ es un qM_3-retículo y $\exists_S(L) = S$.

Dem.

Por la condición (i), es claro que $\exists_S$ es una operación unaria definida en L. Veamos que se verifican las propiedades desde (E1) hasta (E7) de la Definición 4.1.0.9.
(E1) $\exists_S 0 = 0$: Como 0 es el primer elemento de L, entonces $[0) = L$. En consecuencia $[0) \cap S = S$ y es claro que 0 es el primer elemento de S.

(E2) $x \wedge \exists_S x = x$: Es inmediato de la hipótesis (i), pues como $\exists_S x \in [x) \cap S$, entonces $x \leq \exists_S x$.

(E3) $\exists_S (x \vee y) = \exists_S x \vee \exists_S y$: Por (i), se verifica que $x \leq \exists_S x$, $y \leq \exists_S y$ y $\exists_S x, \exists_S y \in S$. Luego resulta que $x \vee y \leq \exists_S x \vee \exists_S y$ y por ser S una subálgebra de L, tenemos que $\exists_S x \vee \exists_S y \in S$. Por lo tanto $\exists_S x \vee \exists_S y \in [x \vee y) \cap S$. Por otra parte sea $z \in [x \vee y) \cap S$, entonces $z \in [x) \cap S$ y $z \in [y) \cap S$, lo que implica que $\exists_S x \leq z$ y $\exists_S y \leq z$, de donde resulta que $\exists_S x \vee \exists_S y \leq z$. Lo demostrado prueba que $\exists_S x \vee \exists_S y$, es el primer elemento de $[x \vee y) \cap S$ y por lo tanto se verifica (E3).

(E4) $\exists_S (x \wedge \exists_S y) = \exists_S x \wedge \exists_S y$: Como S es una subálgebra de L y $\exists_S x, \exists_S y \in S$, entonces $\exists_S x \wedge \exists_S y \in S$. Por otro lado, del hecho de que $x \leq \exists_S x$, entonces $x \wedge \exists_S y \leq \exists_S x \wedge \exists_S y$. De lo anterior podemos concluir que $\exists_S x \wedge \exists_S y \in [x \wedge \exists_S y) \cap S$, de donde por la hipótesis (ii), resulta (E4).

(E5) $\exists_S \exists_S x = \exists_S x$: De la propiedad (i), es claro que $\exists_S x \in [\exists_S x) \cap S$. Además si $z \in [\exists_S x) \cap S$, se verifica $\exists_S x \leq z$, lo que prueba que $\exists_S x$ es el primer elemento del conjunto $[\exists_S x) \cap S$ y por lo tanto queda probado (E5).

(E6) $\exists_S \triangle x = \triangle \exists_S x$: Teniendo en cuenta que $\exists_S x \in S$, entonces, por ser S una subálgebra de L, se verifica que $\triangle \exists_S x \in S$, de este hecho y (iii), resulta que $\triangle \exists_S x \in [\triangle x) \cap S$. Luego, teniendo en cuenta (iv), $\triangle \exists_S x$ es el primer elemento de $[\triangle x) \cap S$ y por lo tanto queda probado (E6).

(E7) $\exists_S \sim \exists_S x = \sim \exists_S x$: Por ser S una subálgebra de L, de (i), es claro que $\sim \exists_S x \in S$ y por lo tanto $\sim \exists_S x \in [\sim \exists_S x) \cap S$. Por otro lado si $z \in [\sim \exists_S x) \cap S$, es evidente que $\sim \exists_S x) \leq z$, lo que prueba (E7).

Luego podemos afirmar que $(L, \exists_S)$ es un qM_3-retículo. Ahora probaremos que $\exists_S(L) = S$. Sea $z \in \exists_S(L)$, entonces existe $x \in L$ tal que $\exists_S x = z$. Como por (i), $\exists_S x \in S$, resulta que $z \in S$. Recíprocamente, sea $x \in S$, entonces como $x \in L$, por (i), existe $\exists_S x$ que es el primer elemento del conjunto $[x) \cap S$. Luego tenemos que $x \leq \exists_S x$. Por otra parte, como $x \in [x) \cap S$, se verifica que $\exists_S x \leq x$, y por lo tanto $x = \exists_S x$ y en consecuencia $x \in \exists_S(L)$. $\square$

4.1.2. Relación entre los qM_3-retículos y los M_3-retículos $k-$cíclicos

Es bien sabido que toda álgebra de Boole $k-$cíclica (B, T), define un álgebra de Boole monádica $(B, \exists_T)$, donde $\exists_T x = x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x)$. A continuación probamos que usando la misma expresión del cuantificador, es posible a partir de una estructura $k-$cíclica, definir una estructura de qM_3-retículo.

Proposición 4.1.2.1 *Sea L un M_3-retículo y $T : L \longrightarrow L$ un automorfismo de período k. Entonces $(L, \exists_T)$ donde $\exists_T x = x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x)$, para cada $x \in L$, es un qM_3-retículo.*

Dem. Es claro que $\exists_T$ es un operador unario. Solo resta probar que se verifican desde (E1) hasta (E7) de la Definición 4.1.0.9. Para ello en primer lugar veamos que (1) $T(\exists_T x) = \exists_T x$, para cada $x \in L$. En efecto, por ser T un automorfismo de período k, tenemos que $T(\exists_T\, x) = T(x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x)) = T(x) \vee T^2(x) \vee \ldots \vee T^k(x) = T(x) \vee T^2(x) \vee \ldots \vee x = \exists_T\, x$.

(E1) $\exists_T\, 0 = 0$: Es inmediato por ser T un automorfismo sobre L y 0 el primer elemento de L.

(E2) $x \wedge \exists_T\, x = x$: Resulta de que $x \leq x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x) = \exists_T\, x$.

(E3) $\exists_T\,(x \vee y) = \exists_T\, x \vee \exists_T\, y$: Por ser T un automorfismo se verifica que $\exists_T\,(x \vee y) = (x \vee y) \vee T(x \vee y) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x \vee y) = (x \vee y) \vee (T(x) \vee T(y)) \vee \ldots \vee (T^{k-1}(x) \vee T^{k-1}(y))$, de donde, por asociativa y conmutativa de la operación $\vee$, tenemos que vale (E3).

(E4) $\exists_T\,(x \wedge \exists_T\, y) = \exists_T\, x \wedge \exists_T\, y$: Teniendo en cuenta la igualdad (1) y el hecho de que T es automorfismo, resulta que $\exists_T\,(x \wedge \exists_T\, y) = (x \wedge \exists_T\, y) \vee T(x \wedge \exists_T\, y) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x \wedge \exists_T\, y) = (x \wedge \exists_T\, y) \vee (T(x) \wedge \exists_T\, y) \vee \ldots \vee (T^{k-1}(x) \wedge \exists_T\, y) = (x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x)) \wedge \exists_T\, y = \exists_T\, x \wedge \exists_T\, y$.

(E5) $\exists_T\, \exists_T\, x = \exists_T\, x$: Por definición del cuantificador y la propiedad (1), tenemos que $\exists_T\, \exists_T\, x = \exists_T\, x \vee T(\exists_T\, x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(\exists_T\, x) = \exists_T\, x \vee \exists_T\, x \vee \ldots \vee \exists_T\, x = \exists_T\, x$.

(E6) $\exists_T \triangle x = \triangle \exists_T\, x$: Es inmediata por ser T un automorfismo y la propiedad (M6) de los M_3-retículos. En efecto, $\exists_T \triangle x = \triangle x \vee T(\triangle x) \vee \ldots T^{k-1}(\triangle x) = \triangle x \vee \triangle T(x) \vee \ldots \vee \triangle T^{k-1}(x) = \triangle(x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x)) = \triangle \exists_T(x)$.

(E7) $\exists_T \sim \exists_T\, x = \sim \exists_T\, x$: Se obtiene de la propiedad (1) y el hecho de que T es un automorfismo, como se ve a continuación: $\exists_T \sim \exists_T\, x = \sim \exists_T\, x \vee T(\sim \exists_T\, x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(\sim \exists_T\, x) = \sim \exists_T\, x \vee \sim T(\exists_T\, x) \vee \ldots \vee \sim T^{k-1}(\exists_T\, x) = \sim \exists_T\, x \vee \sim \exists_T\, x \vee \ldots \vee \sim \exists_T\, x = \sim \exists_T\, x$. □

En lo que sigue vemos que si $(L, \exists)$ es un qM_3-retículo finito, entonces es posible definir en L, un automorfismo T, de manera (L, T) sea un M_3-retículo $k-$cíclico.

Consideremos $I(L) = \{x \in L : \exists x = x\}$, $K(L) = \{x \in L : \triangle x = \nabla x = x\}$ y $B(L) = K(L) \cap I(L)$. Como L es finito, sabemos que $K(L)$ es un álgebra de Boole, en consecuencia, $B(L)$ también lo es. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los átomos de $B(L)$ y $P_i = \{p \in \Pi(L) : p \leq a_i\}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lema 4.1.2.2 *Los conjuntos P_i determinan una partición del conjunto $\Pi(L)$, de los elementos primos de L.*

Dem.

Si a_i es un átomo de $B(L)$, entonces $a_i \neq 0$ y por lo tanto siempre existe $p \in \Pi(L)$ tal que $p \leq a_i$. Luego $p \in P_i$ y en consecuencia $P_i \neq \emptyset$.

Sean $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $i \neq j$ y supongamos que $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Entonces existe $p \in \Pi(L)$ tales que $p \leq a_i$ y $p \leq a_j$. En consecuencia por la propiedad (M17) de los M_3-retículos y la propiedad (E8) de los qM_3-retículos, tenemos que $\exists\triangle p \leq \exists\triangle a_i = a_i$ y $\exists\triangle p \leq \exists\triangle a_j = a_j$. Luego teniendo en cuenta (E6), $\triangle\exists p = \exists\triangle p \leq a_i \wedge a_j = 0$, lo que implica que $\exists\triangle p = 0$ y por lo tanto por (E2), resulta que $p = 0$, lo que contradice que p es un elemento primo de L.

Es claro que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \subseteq \Pi(L)$. Probemos ahora la otra inclusión. Sea $p \in \Pi(L)$, entonces por (E2) y (M11), $p \leq \nabla\exists p$. Por otro lado $\nabla\exists p \in B(L)$, pues por la propiedad (M5) de los M_3-retículos $\triangle\nabla\exists p = \nabla\exists p$ y por (M3), (E3), (E5) y (E7), $\exists\nabla\exists p = \exists(\exists p \vee \sim \exists p) = \exists(\exists p \vee \exists \sim \exists p) = \exists\exists(p \vee \sim \exists p) = \exists(p \vee \sim \exists p) = \exists p \vee \sim \exists p = \nabla\exists p$.

Luego, $\nabla\exists p = \bigvee\limits_{j=1}^{t} a_{i_j}$ siendo a_{i_j} átomos de $B(L)$ y por ser p un elemento primo, tenemos que $p \leq a_{i_{j_0}}$, para algún $j_0 \in \{1, 2, \ldots, t\}$, lo que implica que $p \in P_{i_{j_0}} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$.

□

Lema 4.1.2.3 *Los subconjuntos ordenados P_i son suma cardinal de cadenas maximales de $\Pi(L)$, es decir suma cardinal de cadenas de dos elementos.*

Dem.

Sea $r \in P_i$, entonces $r \in \Pi(L)$ y (1) $r \leq a_i$, siendo a_i un átomo de $\Pi(L)$. Como por el Teorema 3.1.0.14, $\Pi(L)$ es suma cardinal de cadenas de dos elementos, entonces $r \in C_r$, donde C_r es la cadena de dos elementos que contiene a r. Pueden presentarse dos casos: (a) $r \in max\,\Pi(L)$ o (b) $r \in min\,\Pi(L)$. En el caso (a), existe $p \in \Pi(L)$ tal que $p < r$, entonces de (1), $p < a_i$ y por lo tanto $p \in P_i$. Tenemos así que $C_r = \{p, r\}$ con $p < r$, es tal que $C_r \subseteq P_i$. En el caso (b), existe $q \in \Pi(L)$ tal que $r < q$. Supongamos que $q \not\leq a_i$, entonces, como por el Lema 4.1.2.2, los conjuntos P_i forman una partición de $\Pi(L)$, existe a_j átomo de $\Pi(L)$ tal que $q \in P_j$. Luego se verifica que (2) $r < q \leq a_j$. Por lo tanto de (1) y (2), resulta que $r \leq a_i \wedge a_j = 0$, lo que implica que $r = 0$, que contradice que r es un elemento primo de L. Hemos demostrado en este caso que también $C_r \subseteq P_i$. Luego cualquiera sea $r \in P_i$ se verifica que $C_r \subseteq P_i$ y en consecuencia $\bigcup_{r \in P_i} C_r = P_i$, siendo C_r la cadena de dos elementos que contiene a r. $\square$

Observación 4.1.2.4 *Por el* Lema 4.1.2.3*, podemos asegurar que cada P_i es suma cardinal de las cadenas C_r, con $r \in P_i$. Para indicar este hecho, escribiremos $P_i = \sum_{j=1}^{m_i} C_j^i$, donde $m_i = \frac{|P_i|}{2}$, $C_j^i = \{p_j^i, q_j^i\}$ con $p_j^i, q_j^i \in P_i$ y $p_j^i < q_j^i$. Teniendo en cuenta esto, podemos decir además, por el* Lema 4.1.2.2*, que $\Pi(L)$ es suma cardinal de los conjuntos P_i, y notaremos $\Pi(L) = \sum_{j=1}^{n} P_i$, donde n es el número de átomos de $B(L)$.*

El siguiente lema es de fácil demostración, por este motivo no incluimos su prueba.

Lema 4.1.2.5 *Si $P_i = \sum_{j=1}^{m_i} C_j^i$, donde $m_i = \frac{|P_i|}{2}$ y $C_j^i = \{p_j^i, q_j^i\}$ con $p_j^i, q_j^i \in P_i$ y $p_j^i < q_j^i$. Entonces la aplicación $h_i : P_i \longrightarrow P_i$ definida como sigue:*

$$\text{(I)} \quad h_i(r) = \begin{cases} p_{j+1}^i, & \text{si } \ r \in C_j^i \text{ y } r = p_j^i \text{ con } 1 \leq j < m_i \\ p_1^i, & \text{si } \ r \in C_{m_i}^i \text{ y } r = p_{m_i}^i \\ q_{j+1}^i, & \text{si } \ r \in C_j^i \text{ y } r = q_j^i \text{ con } 1 \leq j < m_i \\ q_1^i, & \text{si } \ r \in C_{m_i}^i \text{ y } r = q_{m_i}^i \end{cases}$$

es un isomorfismo de orden y $h_i^{m_i}(r) = r$, para cada $r \in P_i$.

Teorema 4.1.2.6 *Si $\Pi(L) = \sum_{j=1}^{n} P_i$, la aplicación $h : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ definida por $h(p) = h_i(p)$, si, y solo si, $p \in P_i$, donde la aplicación h_i está dada como en el* Lema 4.1.2.5*, es un isomorfismo de orden. Además si k es el mínimo común múltiplo de los m_i, siendo $m_i = \frac{|P_i|}{2}$, entonces $h^k(p) = p$, para cada $p \in \Pi(L)$.*

Dem. Es consecuencia del Lema 4.1.2.5 y la definición de h. □

Teorema 4.1.2.7 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo finito y* $h : \Pi(L) \longrightarrow \Pi(L)$ *el isomorfismo de orden dado como en el* Teorema 4.1.2.6. *Entonces* $T : L \longrightarrow L$ *dada por*

$$\text{(I)} \quad T(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = 0 \\ \bigvee\limits_{i=1}^{s} h(r_t), & \text{si } x = \bigvee\limits_{t=1}^{s} r_t \text{ es una representación irredundante de } x \\ & \qquad\qquad \text{como supremo de primos} \end{cases}$$

es un $\mathbf{M_3}-$*isomorfismo y si* k *es el mínimo común múltiplo de los* m_i *siendo* $m_i = \frac{|P_i|}{2}$*, entonces* T *es un* $\mathbf{M_3}-$*isomorfismo de período* k*.*

Dem. Inmediata de los Teoremas 3.2.0.26 y 4.1.2.6. □

4.2. Dualidad topológica para los qM_3-retículos

En esta sección extendemos la dualidad Priestley para los M_3-retículos con último elemento, al caso de los qM_3-retículos acotados.

De ahora en adelante $D(X)$, denotará la familia de los subconjuntos abiertos, cerrados y decrecientes de un espacio de Priestley X.

4.2.1. La categoría de los qM_3-espacios y los qM_3-morfismos

En esta sección introducimos la categoría $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$, describimos sus objetos y morfismos y explicitamos algunas propiedades de los mismos.

Definición 4.2.1.1 *Un* qM_3-*espacio es un par* (X, R) *tal que* X *es un espacio de Priestley y* R *una relación binaria definida sobre* X *tal que:*

(qM1) X *es un* M_3-*espacio,*

(qM2) $R(x)$ *es un subconjunto cerrado y creciente de* X*, para todo* $x \in X$*,* (qM3) *si* $V \in D(X)$, *entonces* $R^{-1}(V) \in D(X)$,

(qM4) R *es un preorden,*

(qM5) *si* $(x, y) \in R$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $z \leq y$, $(x, z) \in R$ *y* $(z, x) \in R$,

(qM6) $R^{-1}((M_X U]) = (M_X R^{-1}(U)]$, *para todo* $U \in D(X)$,

(qM7) $R^{-1}([m_X R^{-1}(U)) \setminus M_X R^{-1}(U)) = [m_X R^{-1}(U)) \setminus M_X R^{-1}(U)$, *para todo* $U \in D(X)$.

Observación 4.2.1.2 *Si* (X, R) *es un* qM_3-*espacio, de* (qM2) *y* (qM3), *la relación* R *resulta ser una relación de Priestley dual, y por* (qM4) *y* (qM5), R *es una cuasiequivalencia dual. Por otra parte de* (qM5), *es inmediato que si* $(y, x) \in R$ *y* $x \in minX$, *entonces* $(x, y) \in R$.

Definición 4.2.1.3 *Sean* (X_1, R_1) *y* (X_2, R_2) *dos* qM_3-*espacios. Una* qM_3-*función de* (X_1, R_1) *en* (X_2, R_2) *es una* M_3-*función* $h : X_1 \longrightarrow X_2$ *tal que para todo* $V \in D(X_2)$, $h^{-1}(R_2^{-1}(V)) = R_1^{-1}(h^{-1}(V))$.

Notamos con $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$ la categoría de los qM_3-espacios y las qM_3-funciones; y con $\boldsymbol{q\mathcal{M}_3}$ la categoría de los qM_3-retículos acotados y los $\mathbf{qM_3}-$homomorfismos.

Lema 4.2.1.4 *Sea* X *un* $P-$*espacio y* R *un preorden sobre* X *tal que* $R(x)$ *es un conjunto cerrado y creciente de* X, *para todo* $x \in X$. *Entonces si* $(x, y) \notin R$, *existe* $U \in D(X)$ *tal que* $y \in U$ *y* $x \notin R^{-1}(U)$.

Dem. Sea X un $P-$espacio y R un preorden sobre X. Sea $R(x)$ es un conjunto cerrado y creciente de X, para todo $x \in X$. Supongamos que $(x, y) \notin R$, entonces $y \notin R(x)$. Como $R(x)$ es creciente, para todo $z \in R(x)$, $z \not\leq y$. Luego por ser X un espacio totalmente disconexo en el orden, para cada $z \in R(x)$, existe $U_z \in D(X)$ tal que $y \in U_z$ y $z \notin U_z$, por lo tanto $R(x) \subseteq \bigcup\limits_{z \in R(x)} (X \setminus U_z)$. Además como $R(x)$ es un cerrado de un espacio compacto, es compacto, y por lo tanto se verifica que existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in R(x)$ tales que $R(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus U_{z_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_{z_i}$. Entonces si $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{z_i}$, tenemos que $U \in D(X)$, $y \in U$ y $R(x) \cap U = \emptyset$, lo que implica, teniendo en cuenta que R es reflexiva, que existe $U \in D(X)$ tal que y $x \notin R^{-1}(U)$. □

El Lema 4.2.1.4, nos permite dar una caracterización de las qM_3-funciones en la categoría $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$ de la siguiente forma:

Lema 4.2.1.5 *Sean* (X_1, R_1) *y* (X_2, R_2) *dos* qM_3-*espacios y* $h : X_1 \longrightarrow X_2$ *una* M_3-*función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) h *es una* qM_3-*función,*

(ii) h *satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si* $(x, y) \in R_1$, *entonces* $(h(x), h(y)) \in R_2$,

(b) *si* $(h(x), z) \in R_2$, *entonces existe* $y \in X_1$, *tal que* $(x, y) \in R_1$ *y* $h(y) \leq z$.

Dem.
(i) $\Rightarrow$ (ii):

(a): Sea (1) $(x, y) \in R_1$ y supongamos que $(h(x), h(y)) \notin R_2$, entonces $h(y) \notin R_2(h(x))$. Luego por el Lema 4.2.1.4, existe $V \in D(X_2)$ tal que $h(y) \in V$ y $V \cap R_2(h(x)) = \emptyset$, es decir $h(x) \notin R_2^{-1}(V)$. Entonces teniendo en cuenta (i), resulta (2) $x \notin R_1^{-1}(h^{-1}(V))$. Por otro lado de (1), como $y \in h^{-1}(V)$, tenemos $x \in R_1^{-1}(h^{-1}(V))$, lo que contradice (2).

(b): Sea $x \in X_1$ y $z \in X_2$ tal que (1) $(h(x), z) \in R_2$. Si $h(x) \leq z$, eligiendo $y = x$, tenemos $h(y) = h(x)$ y $h(y) \leq z$, por lo tanto se verifica (b). Si por el contrario $h(x) \not\leq z$, como X_2 es un espacio totalmente disconexo en el orden, existe $U \in D(X_2)$ tal que $h(x) \notin U$ y $z \in U$. Entonces por (1) $h(x) \in R_2^{-1}(U)$, o lo que es equivalente, teniendo en cuenta (i), (2) $x \in R_1^{-1}(h^{-1}(U))$. Por lo tanto se verifica que $h^{-1}(U) \cap R_1(x) \neq \emptyset$. Como h es continua y cerrada $K = h(h^{-1}(U) \cap R_1(x))$ es un cerrado de X_2 y por lo tanto es un compacto. Si suponemos que $h(y) \not\leq z$ para todo $y \in h^{-1}(U) \cap R(x)$, entonces $k \not\leq z$ para todo $k \in K$. Luego como X_2 es totalmente disconexo en el orden, para cada $k \in K$ existe $V_k \in D(X_2)$ tal que $k \notin V_k$ y $z \in V_k$, lo cual implica que $K \subseteq \bigcup_{k \in K} (X_2 \setminus V_k)$. Teniendo en cuenta que K es compacto se verifica $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (X_2 \setminus V_{k_i})$, y si $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{k_i}$, entonces (3) $V \cap K = \emptyset$ y $z \in V$. Por otro lado si $W = U \cap V$, entonces $z \in W$ y de (1), se sigue que $h^{-1}(W) \cap R_1(x) \neq \emptyset$, de donde concluimos que $V \cap K \neq \emptyset$, lo que contradice (3). Por lo tanto existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in R$ y $h(y) \leq z$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Solo resta probar que $h^{-1}(R_2^{-1}(V)) = R_1^{-1}(h^{-1}(V))$. Sea $x \in h^{-1}(R_2^{-1}(V)$, entonces $h(x) \in R_2^{-1}(V)$. Luego existe $t \in V$ tal que $(h(x), t) \in R_2$, de donde teniendo en cuenta (b), existe $z \in X_1$, tal que $(x, z) \in R_1$ y $h(z) \leq t$. Como V es decreciente, se verifica que $z \in h^{-1}(V)$ y en consecuencia $x \in R_1^{-1}(h^{-1}(V))$. Para la otra inclusión, sea $x \in R_1^{-1}(h^{-1}(V))$, entonces existe $y \in h^{-1}(V)$ tal que $(x, y) \in R_1$, de donde $h(y) \in V$ y $(x, y) \in R_1$. Luego de esto último y (a), se verifica $(h(x), h(y)) \in R_2$ y por lo tanto $h(x) \in R_2^{-1}(V)$ o lo que es equivalente $x \in h^{-1}(R_2^{-1}(V))$.

□

A continuación detallamos los resultados necesarios para demostrar que las categorías $\boldsymbol{q\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$ son dualmente equivalentes.

4.2.2. qM_3-retículo dual de un qM_3-espacio

Proposición 4.2.2.1 *Si (X, R) es un qM_3-espacio, entonces $(D(X), \exists_R)$ es un qM_3-retículo acotado, donde la operación unaria $\exists_R$ está dada por $\exists_R(U) = R^{-1}(U)$, para cada $U \in D(X)$.*

Dem. Por la Proposición 2.1.4.1, tenemos que $D(X)$ es un M_3-retículo acotado. Por otra parte como consecuencia de (qM3), es claro que $\exists_R$ es un operador unario, de (qM6) se verifica (E6) y de (qM7) es inmediato (E7). Solo resta probar que verifica desde (E1) hasta (E5), para ello probaremos que $\exists_R$ es un cuantificador sobre $D(X)$.

Sean $U, V \in D(X)$,

(C1) $U \cap \exists_R(U) = U$ o lo que es equivalente $U \subseteq \exists_R(U)$:

Si $x \in U$, entonces por ser R un preorden, se verifica $(x, x) \in R$, de donde $x \in R^{-1}(U)$ y por lo tanto $x \in \exists_R(U)$.

(C2) Si $U \subseteq V$, entonces $\exists_R(U) \subseteq \exists_R(V)$:

Si $x \in \exists_R(U)$, entonces existe $y \in U$ tal que $(x, y) \in R$. Como $U \subseteq V$, tenemos $y \in V$ y así $x \in \exists_R(V)$.

(C3) $\exists_R \exists_R(U) = \exists_R(U)$:

Teniendo en cuenta (C1), se verifica que $\exists_R(U) \subseteq \exists_R \exists_R(U)$. Probemos la otra inclusión. Sea $x \in \exists_R \exists_R(U)$, luego existe $y \in \exists_R(U)$ tal que $(x, y) \in R$, y existe $z \in U$ tal que $(y, z) \in R$, de donde por ser R un preorden, se verifica $(x, z) \in R$ con $z \in U$ y por lo tanto $x \in \exists_R(U)$.

(C4) $\exists_R(U \cup V) = \exists_R(U) \cup \exists_R(V)$:

Como $U \subseteq U \cup V$ y $V \subseteq U \cup V$, entonces por (C2) tenemos que $\exists_R(U) \cup \exists_R(V) \subseteq \exists_R(U \cup V)$. Veamos la otra inclusión, sea $x \in \exists_R(U \cup V) = R^{-1}(U \cup V)$, entonces existe $y \in U \cup V$ tal que $(x, y) \in R$. Si $y \in U$ se verifica $x \in R^{-1}(U)$ y si $y \in V$, $x \in R^{-1}(V)$ y por lo tanto $x \in \exists_R(U) \cup \exists_R(V)$.

(C5) $\exists_R(\exists_R(U) \cap V) = \exists_R(U) \cap \exists_R(V)$:

La inclusión $\exists_R(\exists_R(U) \cap V) \subseteq \exists_R(U) \cap \exists_R(V)$, es consecuencia de (C2) y (C3). Probemos la otra inclusión, sea $x \in \exists_R(U) \cap \exists_R(V)$, entonces existen $y \in U$ y $z \in V$ tales que $(x, y) \in R$ y $(x, z) \in R$. Como R satisface (qM5), existen $z_1, z_2 \in X$, $z_1 \leq y$ y $z_2 \leq z$ que verifican $(x, z_1) \in R$, $(z_1, x) \in R$, $(x, z_2) \in R$ y $(z_2, x) \in R$, de donde por ser R es una relación transitiva se verifica $(z_2, z_1) \in R$. Por otra parte por ser U y V decrecientes resulta que $z_1 \in U$ y $z_2 \in V$, de donde tenemos que $z_2 \in R^{-1}(U) \cap V$ y por lo tanto $x \in R^{-1}(V \cap R^{-1}(U)) = \exists_R(\exists_R(U) \cap V)$.

Por lo demostrado de (C1) hasta (C5) resulta que $\exists_R$ es un cuantificador y por lo tanto se cumple además $\exists_R(\emptyset) = \emptyset$, con lo que queda demostrado que $(D(X), \exists_R)$ es un qM_3-retículo acotado. $\square$

4.2.3. qM_3-espacio asociado a un qM_3-retículo acotado

Proposición 4.2.3.1 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo,* $R_\exists = \{(P, Q) \in \mathcal{I}_p(L) \times \mathcal{I}_p(L) : \exists^{-1}(P) \subseteq Q\}$ *y* $F_\exists = \{(P, Q) \in X(L) \times X(L) : Q \subseteq \exists^{-1}(P)\}$, *entonces se verifican:*

(i) $(P, Q) \in R_\exists$ *si, y solo si,* $(L \setminus P, L \setminus Q) \in F_\exists$.

(ii) *Sean* $I, P \in \mathcal{I}_p(L)$, $I \in min\, R_\exists(P)$ *si, y solo si,* $L \setminus I \in max\, F_\exists(L \setminus P)$.

(iii) *Para cada* $P \in \mathcal{I}_p(L)$, $R_\exists(P)$ *es un subconjunto cerrado y creciente de* $\mathcal{I}_p(L)$.

(iv) $(P, Q) \in R_\exists$ *si, y solo si,* $P \cap \exists(L) \subseteq Q \cap \exists(L)$.

(v) *Si* $Q \in min\, R_\exists(P)$, *entonces* $P \cap \exists(L) = Q \cap \exists(L)$.

Dem. Consideremos $R_\exists$ y $F_\exists$ definidas como anteriormente.

(i): Resulta de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) $(P, Q) \in R_\exists$,

(2) $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$,

(3) $L \setminus Q \subseteq L \setminus \exists^{-1}(P)$,

(4) $L \setminus Q \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$,

(5) $(L \setminus P, L \setminus Q) \in F_\exists$.

(ii): Sea (1) $I \in min\, R_\exists(P)$, luego $\exists^{-1}(P) \subseteq I$. De la inclusión anterior, resulta que $L \setminus I \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$. Consideremos ahora $Q \in X(L)$ tal que $L \setminus I \subseteq Q \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$. Como $\exists^{-1}(L\setminus P) = L\setminus\exists^{-1}(P)$, resulta que $\exists^{-1}(P) \subseteq L\setminus Q \subseteq I$. Luego $L\setminus Q \in R_\exists(P)$ y $L \setminus Q \subseteq I$, de donde teniendo en cuenta (1), $L \setminus Q = I$ y por lo tanto $L \setminus I = Q$, lo que implica que $L \setminus I \in max\, F_\exists(L \setminus P)$.

Recíprocamente, sea $L \setminus I \in max\, F_\exists(L \setminus P)$. Entonces $L \setminus I \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$ o lo que es equivalente $\exists^{-1}(P) \subseteq I$. Sea $S \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $\exists^{-1}(P) \subseteq S \subseteq I$. Luego $L\setminus I \subseteq L\setminus S \subseteq \exists^{-1}(L\setminus P)$ y por lo tanto $L\setminus S \in F_\exists(L\setminus P)$ y $L\setminus I \subseteq L\setminus S$. Teniendo en cuenta que $L\setminus I$ es un elemento maximal en $F_\exists(L\setminus P)$, resulta que $L\setminus I = L\setminus S$, es decir, $I = S$ y por lo tanto $I \in min\, R_\exists(P)$.

(iii): Sea $Q \in R_\exists(P)$ y $T \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $Q \subseteq T$, entonces se verifica $\exists^{-1}(P) \subseteq Q \subseteq T$ y por lo tanto $T \in R_\exists(P)$. Se tiene así que $R_\exists(P)$ es creciente.

Probremos ahora que $R_\exists(P)$ es cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, lo que es equivalente a probar que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(P)$ es un abierto. Sea $S \in \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(P)$, entonces $\exists^{-1}(P) \not\subseteq S$, luego existe (1) $a \in \exists^{-1}(P)$ tal que $a \notin S$ y por lo tanto $S \in \sigma_L(a)$. Además $\sigma_L(a) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(P)$, pues si (2) $M \in \sigma_L(a) \cap R_\exists(P)$, entonces $\exists^{-1}(P) \subseteq M$ y de (1) tendríamos que $a \in M$ lo que contradice (2).

(iv): Sea $(P, Q) \in R_\exists$, entonces $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$. Supongamos que $x \in P \cap \exists(L)$, luego por el Lema 4.1.1.1, $x = \exists x$ y por lo tanto $\exists x \in P$, es decir, $x \in \exists^{-1}(P)$. De esta última afirmación $x \in Q \cap \exists(L)$.

Recíprocamente, supongamos que $P \cap \exists(L) \subseteq Q \cap \exists(L)$ y consideremos que $x \in \exists^{-1}(P)$. Entonces $\exists x \in P \cap \exists(L)$ y por lo tanto $\exists x \in Q \cap \exists(L)$. Como por (E2), se verifica que $x \leq \exists x$ y Q es un ideal, tenemos que $x \in Q$. Hemos probado así que $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$, lo que implica que $(P, Q) \in R_\exists$.

(v): Sea $Q \in min\, R_\exists(P)$, entonces $(P, Q) \in R_\exists$ y por (iv), se verifica que $P \cap \exists(L) \subseteq Q \cap \exists(L)$. Supongamos que $Q \cap \exists(L) \not\subseteq P \cap \exists(L)$, entonces teniendo en cuenta (iv), se verifica que $\exists^{-1}(Q) \not\subseteq P$, en consecuencia existe $a \in \exists^{-1}(Q)$ tal que $a \notin P$, lo que implica $a \in Q$ y $\exists a \notin P$. Sea I el ideal generado por $\{a\} \cup \exists^{-1}(P)$, entonces $I \cap (L \setminus Q) = \emptyset$. En efecto, si $m \in I \cap (L \setminus Q)$, entonces existe $p \in \exists^{-1}(P)$ tal que $m \leq a \vee p$. Por otro lado, como $L \setminus Q$ es un filtro y $m \in L \setminus Q$ tenemos que $a \vee p \in L \setminus Q$, de donde por ser $L \setminus Q$ primo resulta $p \in Q$ y por lo tanto $a \vee p \in Q$, es decir $m \in Q$, lo que es una contradicción.

$\square$

Lema 4.2.3.2 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo,* $R_\exists = \{(P, Q) \in \mathcal{I}_p(L) \times \mathcal{I}_p(L) : \exists^{-1}(P) \subseteq Q\}$, $F_\exists = \{(P, Q) \in X(L) \times X(L) : Q \subseteq \exists^{-1}(P)\}$ *y* $P \in \mathcal{I}_p(L)$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $min\, R_\exists(P) \subseteq R_\exists^{-1}(P)$,

(ii) $max\, F_\exists(L \setminus P) \subseteq F_\exists^{-1}(L \setminus P)$.

Dem.

(i)$\Rightarrow$ (ii): Sea $Q \in max\, F_\exists(L \setminus P)$, entonces por (ii) de la Proposición 4.2.3.1, resulta que $L \setminus Q \in min\, R_\exists(P)$. De esto último, teniendo en cuenta (i), tenemos que $L \setminus Q \in R_\exists^{-1}(P)$, lo que implica que $(L \setminus Q, P) \in R_\exists$, de donde por (i) de la Proposición 4.2.3.1, podemos afirmar que $Q \in F_\exists^{-1}(L \setminus P)$.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Sea $I \in min\, R_\exists(P)$, entonces por (ii) de la Proposición 4.2.3.1, se sigue que $L \setminus I \in max\, F_\exists(L \setminus P)$. Luego $(L \setminus I, L \setminus P) \in F_\exists$, de donde, teniendo en cuenta (i) de la Proposición 4.2.3.1, $(I, P) \in R_\exists$ y por lo tanto $I \in R_\exists^{-1}(P)$.

$\square$

Lema 4.2.3.3 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo y* $R_\exists = \{(P, Q) \in \mathcal{I}_p(L) \times \mathcal{I}_p(L) : \exists^{-1}(P) \subseteq Q\}$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Para cada* $(P, Q) \in R_\exists$, *existe* $R \in \mathcal{I}_p(L)$ *tal que* $R \subseteq Q$, $(P, R) \in R_\exists$ *y* $(R, P) \in R_\exists$,

(ii) $min\, R_\exists(P) \subseteq R_\exists^{-1}(P)$.

Dem.

(i)$\Rightarrow$ (ii): Sea $S \in min\, R_\exists(P)$, luego $(P,S) \in R_\exists$. Entonces por la hipótesis (i), se verifica que existe $R \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $R \subseteq S$, $(P,R) \in R_\exists$ y $(R,P) \in R_\exists$. En consecuencia $R \in R_\exists(P)$ y $R \subseteq S$, de donde teniendo en cuenta que S es un elemento minimal en $R_\exists(P)$, resulta que $R = S$. Por lo tanto $S \in R_\exists^{-1}(P)$.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Consideremos $(P,Q) \in R_\exists$, por lo tanto $Q \in R_\exists(P)$. Como por la propiedad (iii) de la Proposición 4.2.3.1, $R_\exists(P)$ es cerrado en $\mathcal{I}_p(L)$ y es claro que es no vacío, entonces teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_p(L)$ es un espacio de Priestley, $min\, R_\exists(P) \neq \emptyset$ y existe $R \in min\, R_\exists(P)$ tal que $R \subseteq Q$ (ver 1.3.2, Capítulo 1). Luego por la hipótesis (ii), podemos afirmar que $R \in R_\exists^{-1}(P)$ y en consecuencia existe $R \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $R \subseteq Q$, $(P,R) \in R_\exists$ y $(R,P) \in R_\exists$. $\square$

Proposición 4.2.3.4 *Si* $(L,\exists)$ *un* qM_3-*retículo y* $R_\exists = \{(P,Q) \in \mathcal{I}_p(L) \times \mathcal{I}_p(L) : \exists^{-1}(P) \subseteq Q\}$, *entonces se verifica* $min\, R_\exists(P) \subseteq R_\exists^{-1}(P)$ *para todo* $P \in \mathcal{I}_p(L)$.

Dem. Sea $P \in \mathcal{I}_p(L)$, teniendo en cuenta el Lema 4.2.3.2, para realizar la demostración, es suficiente probar que $max\, F_\exists(L \setminus P) \subseteq F_\exists^{-1}(L \setminus P)$.

Sea $Q \in X(L)$ tal que (a) $Q \in max\, F_\exists(L \setminus P)$, entonces (b) $Q \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$ y por (E5) se verifica $\exists^{-1}(Q) \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$. Veamos que la otra inclusión también vale. Sea (c) $x \in \exists^{-1}(L \setminus P)$, como $\exists$ es un cuantificador, se verifica que el filtro $F = F(Q \cup \{\exists x\})$ es un subconjunto de $\exists^{-1}(L \setminus P)$. En efecto, sea $y \in F(Q \cup \{\exists x\})$, entonces existe $q \in Q$ tal que $q \wedge \exists x \leq y$. Luego por (E8) y (E4), $\exists(q \wedge \exists x) = \exists q \wedge \exists x \leq \exists y$. Por otra parte de (c) y (b), $\exists x \in L \setminus P$ y $\exists q \in L \setminus P$ y como $P \in \mathcal{I}_p(L)$, se verifica que $L \setminus P \in X(L)$. Por lo tanto tenemos que $\exists x \wedge \exists q \in L \setminus P$ y en consecuencia $\exists y \in L \setminus P$, es decir, $y \in \exists^{-1}(L \setminus P)$.

Luego como $\exists$ es un homomorfismo superior, $L \setminus P \in X(L)$ y $F \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$, existe un filtro primo F' tal que $F \subseteq F' \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$ (ver Sección 1.1, Capítulo 1) y por lo tanto $Q \subseteq F \subseteq F' \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$ de donde por (a), obtenemos $Q = F' = F$. En particular como $\exists x \in F$ tenemos que $\exists x \in Q$ y por lo tanto $x \in \exists^{-1}(Q)$. En consecuencia

$\exists^{-1}(Q) = \exists^{-1}(L \setminus P)$ y por ser $F_\exists$ reflexiva, como $L \setminus P \subseteq \exists^{-1}(L \setminus P)$, resulta que $L \setminus P \subseteq \exists^{-1}(Q)$ o lo que es equivalente $Q \in F_\exists^{-1}(L \setminus P)$. □

Proposición 4.2.3.5 *Sea $(L, \exists)$ un qM_3-retículo, entonces la relación $R_\exists = \{(P, Q) \in \mathcal{I}_p(L) \times \mathcal{I}_p(L) : \exists^{-1}(P) \subseteq Q\}$ verifica las siguientes propiedades :*

(i) *$R_\exists$ es un preorden,*

(ii) *$R_\exists(P)$ es un subconjunto cerrado y creciente de $\mathcal{I}_p(L)$, para cada $P \in \mathcal{I}_p(L)$,*

(iii) *si $V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, entonces $R_\exists^{-1}(V) \in D(\mathcal{I}_p(L))$, más precisamente si $V = \sigma_L(a)$, entonces $R_\exists^{-1}(V) = \sigma_L(\exists a)$.*

(iv) *si $(P, Q) \in R_\exists$, entonces existe $T \in \mathcal{I}_p(L)$, $T \subseteq Q$ tal que $(P, T) \in R_\exists$ y $(T, P) \in R_\exists$,*

(v) *$R_\exists^{-1}(\triangle^* U) = \triangle^* R_\exists^{-1}(U)$, para todo $U \in D(X)$,*

(vi) *$R_\exists^{-1}(\neg R_\exists^{-1}(U)) = \neg R_\exists^{-1}(U)$, para todo $U \in D(X)$,*

Dem.

(i) $R_\exists$ es un preorden:

Como $\exists$ es un operador de clausura aditivo sobre L, se verifica que $R_\exists$ es un preorden (ver Sección 1.3.3, Capítulo 1).

(ii) Para cada $P \in \mathcal{I}_p(L)$, $R_\exists(P)$ es un subconjunto cerrado y creciente de $\mathcal{I}_p(L)$:

Sea $Q \in R_\exists(P)$ y $T \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $Q \subseteq T$, entonces se verifica $\exists^{-1}(P) \subseteq Q \subseteq T$ y por lo tanto $T \in R_\exists(P)$. Se tiene así que $R_\exists(P)$ es creciente.

Probremos ahora que $R_\exists(P)$ es cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, lo que es equivalente a probar que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(P)$ es un abierto.

Sea $S \in \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(P)$, entonces $\exists^{-1}(P) \not\subseteq S$, luego existe (1) $a \in \exists^{-1}(P)$ tal que $a \notin S$ y por lo tanto $S \in \sigma_L(a)$. Es claro que $\sigma_L(a) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(P)$, pues si (2) $M \in \sigma_L(a) \cap R_\exists(P)$, entonces $\exists^{-1}(P) \subseteq M$ y de (1) tendríamos que $a \in M$ lo que contradice (2).

(iii) Si $V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, entonces $R_\exists^{-1}(V) \in D(\mathcal{I}_p(L))$:

Si $V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, $V = \sigma_L(a)$ para algún $a \in L$, entonces $R_\exists^{-1}(V) = \sigma_L(\exists a)$. En efecto, si $S \in R_\exists^{-1}(\sigma_L(a))$, existe (1) $R \in \sigma_L(a)$ tal que $(S, R) \in R_\exists$, luego (2) $\exists^{-1}(S) \subseteq R$. Si $S \notin \sigma_L(\exists a)$, entonces $\exists a \in S$ lo cual implica, teniendo en cuenta (2), que $a \in R$, lo que contradice (1). De esta forma hemos probado que $R_\exists^{-1}(\sigma_L(\exists a)) \subseteq \sigma_L(\exists a)$.

Para la otra inclusión consideremos $S \in \sigma_L(\exists a)$, entonces $\exists a \notin S$ y por lo tanto $a \notin \exists^{-1}(S)$. Como $\exists^{-1}(S)$ es un ideal propio, por un corolario del teorema de Birkhoff-Stone, existe $R \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $\exists^{-1}(S) \subseteq R$ y $a \notin R$. Por lo tanto $(S, R) \in R_\exists$ y $R \in \sigma_L(a)$ lo que implica que $S \in R_\exists^{-1}(\sigma_L(a))$.

(iv) Si $(P, Q) \in R_\exists$, entonces existe $T \in \mathcal{I}_p(L)$, $T \subseteq Q$ tal que $(P, T) \in R_\exists$ y $(T, P) \in R_\exists$:

Es consecuencia de lo demostrado en el Lema 4.2.3.3 y la Proposición 4.2.3.4.

(v) $R_\exists^{-1}(\triangle^* U) = \triangle^* R_\exists^{-1}(U)$, para todo $U \in D(X)$:

Sea $U \in D(X)$, entonces $U = \sigma_L(a)$ para algún $a \in L$. Como σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo de L en $D(\mathcal{I}_p(L)$ se verifica que $\triangle^* U = \sigma_L(\triangle a)$, y por (E6) se cumple $\sigma_L(\exists \triangle a) = \sigma_L(\triangle \exists a)$. Por otro lado teniendo en cuenta la propiedad (iii), es fácil demostrar que $\triangle^* R_\exists^{-1}(U) = \sigma_L(\exists \triangle a)$, por lo que para probar (v), solo será suficiente demostrar que $R_\exists^{-1}(\sigma_L(\triangle a)) = \sigma_L(\triangle \exists a)$.

Sea $P \in R_\exists^{-1}(\sigma_L(\triangle a))$, entonces existe (1) $Q \in \sigma_L(\triangle a)$ tal que $(P, Q) \in R_\exists$. Como por (E2) y(M6), $\triangle a \leq \triangle \exists a$, para todo $a \in L$, tenemos que $Q \in \sigma_L(\triangle \exists a)$ y $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$. Supongamos que $\exists \triangle a \in P$, luego $\triangle a \in \exists^{-1}(P) \subseteq Q$, lo que contradice (1). Por lo tanto $P \in \sigma_L(\triangle \exists a)$ y así $R_\exists^{-1}(\sigma_L(\triangle a)) \subseteq \sigma_L(\triangle \exists a)$.

La otra inclusión es consecuencia de lo que sigue. Sea $P \in \sigma_L(\exists \triangle a)$, entonces (2) $\triangle a \notin \exists^{-1}(P)$. Como $\exists$ es un homomorfismo superior, tenemos que $\exists^{-1}(P)$ es un ideal de L. Luego por (2) y el Teorema de Birkhoff-Stone, podemos asegurar que existe $Q \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$ y $\triangle a \notin Q$. En consecuencia, $(P, Q) \in R_\exists$

y $Q \in \sigma_L(\triangle a)$, lo que prueba que $P \in R_\exists^{-1}(\sigma_L(\triangle a))$ y por lo tanto $\sigma_L(\triangle \exists a) \subseteq R_\exists^{-1}(\sigma_L(\triangle a))$.

(vi) $R_\exists^{-1}(\neg R_\exists^{-1}(U)) = \neg R_\exists^{-1}(U)$, para todo $U \in D(X)$:

Por lo demostrado en (i), la relación $R_\exists$ es reflexiva, por lo tanto se verifica $\neg R_\exists^{-1}(U) \subseteq R_\exists^{-1}(\neg R_\exists^{-1}(U))$. Para la otra inclusión, como $U = \sigma_L(a)$ para algún $a \in L$, teniendo en cuenta lo demostrado en (iii), y que σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo de L en $D(\mathcal{I}_p(L)$, se verifica que $\neg R_\exists^{-1}(U) = \sigma_L(\sim \exists a)$ y $R_\exists^{-1}(\neg R_\exists^{-1}(U)) = \sigma_L(\exists \sim \exists a)$, por lo que para demostrar (vi), será suficiente probar que $\sigma_L(\exists \sim \exists a) \subseteq \sigma_L(\sim \exists a)$.

Sea $P \in \sigma_L(\exists \sim \exists a)$, entonces $\sim \exists a \notin \exists^{-1}(P)$. Como $\exists^{-1}(P)$ es un ideal primo de L, entonces por el Teorema de Birkhoff-Stone, existe $Q \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$ y $\sim \exists a \notin Q$. Luego $(P, Q) \in R_\exists$ y $Q \in \sigma_L(\sim \exists a)$, lo que implica, teniendo en cuenta (iii) y (E7), que $P \in R_\exists^{-1}(\sigma_L(\sim \exists a)) = \sigma_L(\exists \sim \exists a) = \sigma_L(\sim \exists a)$.

□

Proposición 4.2.3.6 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo, entonces* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$*, donde* $R_\exists = \{(P, Q) \in \mathcal{I}_p(L) \times \mathcal{I}_p(L) : \exists^{-1}(P) \subseteq Q\}$*, es un* qM_3-*espacio y la aplicación* $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ *definida como en* (A1) (Sección 1.3.2, Capítulo 1)*, es un* $\mathbf{qM_3}-$*isomorfismo.*

Dem. Inmediata de la Proposición 4.2.3.5.

□

4.2.4. Dualidad entre las categorías $q\mathcal{M}_3$ y $q\mathfrak{M}_3$

Las Proposiciones 4.2.2.1 y 4.2.3.6, nos permiten decir que hemos establecido una correspondencia entre los objetos de las categorías $\boldsymbol{q\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$. Con el objetivo de probar que estas categorías son naturalmente equivalentes y definir los funtores correspondientes, probamos a continuación que existe una correspondencia entre los morfismos de dichas categorías.

Lema 4.2.4.1 *Sea* $h : X \longrightarrow X'$ *una* qM_3-*función* (*biyectiva*), *entonces la aplicación* $\Psi(h) : D(X') \to D(X)$ *definida por* $\Psi(h)(V) = h^{-1}(V)$ *para cada* $V \in D(X')$, *es un* $\mathbf{qM_3}-$*homomorfismo* (*isomorfismo*).

Dem. Resulta inmediato por ser h una qM_3-función. $\square$

Lema 4.2.4.2 *Sean* (X, R) *y* (X', R'), qM_3-*espacios y* $h : X \longrightarrow X'$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *h es un isomorfismo en* $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$,

(ii) *h es un isomorfismo en* $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ *y verifica:*

  (a) $(x, y) \in R$ *si, y solo si,* $(h(x), h(y)) \in R'$.

Dem.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $h : X \longrightarrow X'$ un isomorfismo en $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$, entonces h es un morfismo en $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$ y existe $g : X' \longrightarrow X$ morfismo en la misma categoría tal que $h \circ g = 1_{X'}$ y $g \circ h = 1_X$. Luego por ser h y g morfismos en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$, se verifica que h y g son isomorfismos en la categoría $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ y en consecuencia, por el Lema 2.1.3.2, ambos son isomorfismos de orden.

Además por el Lema 4.2.1.5, h verifica:

(a') si $(x, y) \in R$, entonces $h(x), h(y)) \in R'$,

(b') si $h(x), z) \in R$, entonces existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in R$ y $h(y) \leq z$.

Resta probar que si $(h(x), h(y)) \in R'$, entonces $(x, y) \in R$.

Sea $(h(x), h(y)) \in R'$, entonces por (b'), existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in R$ y $h(z) \leq h(y)$. Por ser h es un isomorfismo de orden, se verifica que $z \leq y$ y como $z \in R(x)$ y $R(x)$ es un conjunto creciente, tenemos que $y \in R(x)$ y por lo tanto $(x, y) \in R$.

(ii) $\Leftarrow$ (i): Sea $h : X \longrightarrow X'$ un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ que verifica:

(a) $(x, y) \in R$ si, y solo si, $(h(x), h(y)) \in R'$.

Luego h es un morfismo en $\mathfrak{M}_3$ y existe $g : X' \to X$ morfismo en la misma categoría, tal que $h \circ g = 1_{X'}$ y $g \circ h = 1_X$. Para probar que h y g son morfismos en la categoría $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$, probaremos las condiciones del Lema 4.2.1.5.

Sea $(h(x), z) \in R'$, como h es un isomorfismo de orden, existe $v \in X$ tal que $z = h(v)$, por lo que se verifica que $(h(x), h(v)) \in R'$, entonces por (a), tenemos que $(x, v) \in R$. Luego existe $v \in X$ tal que $(x, v) \in R$ y $h(v) \leq z$, lo cual implica que h es una qM_3-función.

Probemos ahora que g es una qM_3-función. Sea $(u, v) \in R'$, entonces como h es sobre, existen $x, y \in X$ tales que $u = h(x)$ y $v = h(y)$. Luego $(h(x), h(y)) \in R'$ y por (a), se verifica que $(x, y) \in R$. Además $g(u) = x$ y $g(v) = y$, por lo tanto $(g(u), g(v)) \in R$.

Consideremos ahora $(g(u), z) \in R$, como g es sobre existe $v \in X'$ tal que $g(v) = z$. Luego $(g(u), g(v)) \in R$, de donde por (a), tenemos que $(h(g(u), h(g(v)) \in R'$. En consecuencia, existe $v \in X'$ tal que $(u, v) \in R'$ y $g(v) \leq z$.

Finalmente como h y g son qM_3-funciones tales que $h \circ g = 1_{X'}$ y $g \circ h = 1_X$, resulta que h es un isomorfismo en $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$. $\square$

Proposición 4.2.4.3 *Sea (X, R) un qM_3-espacio, $(D(X), \exists_R)$ su qM_3-retículo asociado donde $\exists_R(U) = R^{-1}(U)$ para todo $U \in D(X)$, y $(\mathcal{I}_p(D(X)), R_{\exists_R})$ su espacio dual. Entonces $\epsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{I}_p(D(X))$ definida por $\epsilon_X(x) = \{V \in D(X) : x \notin V\}$, verifica $(x, y) \in R$ si, y solo si, $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\exists_R}$.*

Dem.

Sea (1) $(x, y) \in R$ y supongamos que $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \notin R_{\exists_R}$, entonces $\exists_R^{-1}(\epsilon_X(x)) \nsubseteq \epsilon_X(y)$. Luego existe $U \in D(X)$ tal que $U \in \exists_R^{-1}(\epsilon_X(x))$ y $U \notin \epsilon_X(y)$, lo cual implica que $\exists_R(U) \in \epsilon_X(x)$ o lo que es equivalente $R^{-1}(U) \in \epsilon_X(x)$. Por lo tanto $x \notin R^{-1}(U)$ e $y \in U$, de donde resulta $(x, y) \notin R$, lo que contradice (1).

Recíprocamente, sea $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\exists_R}$, entonces (2) $\exists_R^{-1}(\epsilon_X(x)) \subseteq \epsilon_X(y)$. Si suponemos que $(x, y) \notin R$, entonces por Lema 4.2.1.4, existe $U \in D(X)$ tal que $x \notin \exists_R(U)$ e $y \in U$. Luego $\exists_R(U) \in \epsilon_X(x)$ y por lo tanto $U \in \exists_R^{-1}(\epsilon_X(x))$. Esta afirmación implica teniendo en cuenta (2), que $U \in \epsilon_X(y)$ e $y \in U$, lo que es una contradicción. $\square$

Proposición 4.2.4.4 *Sea (X,R) un qM_3-espacio. Entonces $\epsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{I}_p(D(X))$ definida por $\epsilon_X(x) = \{V \in D(X) : x \notin V\}$ es un $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}-$isomorfismo.*

Dem. Resulta del Lema 4.2.4.2, la Proposición 2.1.6.2 y la Proposición 4.2.4.3. □

Proposición 4.2.4.5 *Sean $(L,\exists)$ y $(L',\exists')$ qM_3-retículos y $h : L \longrightarrow L'$ un* $\mathbf{qM_3}-$*homomorfismo, entonces la aplicación $\Phi(h) : \mathcal{I}_p(L') \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$, definida por $\Phi(h)(I') = h^{-1}(I')$ para cada $I' \in \mathcal{I}_p(L')$, es una qM_3-función.*

Dem. En la Proposición 2.1.6.3, se demostró que $\Phi(h)$ es una M_3-función. Resta probar que para todo $V \in D(\mathcal{I}_p(L)$ se verifica $\Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(V)) = R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(V))$. En efecto, por ser $\Phi(h)$, una función continua, no es difícil probar que (1) $\Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a)) = \sigma_{L'}(h(a))$, para todo $a \in L$. Luego como $V \in D(\mathcal{I}_p(L)$, existe $a \in L$, tal que $V = \sigma_L(a)$, y en consecuencia, $\Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(V)) = \Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(\sigma_L(a)))$. Además por (iii) de la Proposición 4.2.3.5 y (1), $\Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(\sigma_L(a))) = \Phi(h)^{-1}(\sigma_L(\exists a)) = \sigma_{L'}(h(\exists a))$. Por otro lado, en forma análoga resulta que $R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(V)) = R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a))) = R_{\exists'}^{-1}(\sigma_{L'}(h(a))) = \sigma_{L'}(\exists' h(a))$, de donde teniendo en cuenta que h es un $\mathbf{qM_3}-$homomorfismo, tenemos que $\Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(V)) = R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(V))$. □

De la Proposición 4.2.2.1 y el Lema 4.2.4.1 resulta que Ψ es un funtor contravariante de $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$ en $\boldsymbol{q\mathcal{M}_3}$. Por otra parte de las Proposiciones 4.2.3.6 y 4.2.4.5 se deduce fácilmente que Φ es un funtor contravariante de $\boldsymbol{q\mathcal{M}_3}$ en $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$. Estos resultados y la Proposición 4.2.4.4, nos permiten concluir el siguiente:

Teorema 4.2.4.6 *Los funtores $\Psi \circ \Phi$ y $\Phi \circ \Psi$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre $\boldsymbol{q\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{q\mathfrak{M}_3}$ respectivamente y estas dos categorías son naturalmente equivalentes.*

4.3. Congruencias y álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathbf{qM_3}$

En esta sección damos una caracterización del retículo de las congruencias de un qM_3-retículo, en término de ciertos subconjuntos cerrados de su qM_3-espacio asociado. Luego utilizando este resultado, determinamos los qM_3-retículos subdirectamente irreducibles.

4.3.1. Caracterización del retículo de las $\mathbf{qM_3}-$congruencias

Definición 4.3.1.1 *Sea (X, R) un qM_3-espacio. Un subconjunto Y de X es un $R-$cono, si $Y = R(Y)$.*

Indicamos con $R^C(X)$ a la familia de todos los subconjuntos $R-$conos de X.

Algunas propiedades de los $R-$conos están indicadas en el siguiente lema.

Lema 4.3.1.2 *Sea (X, R) un qM_3-espacio. Entonces se verifican:*

(i) *$\emptyset$ y X son $R-$conos.*

(ii) *Para todo $x \in X$, $R(x)$ es un subconjunto cerrado y $R-$cono de X.*

(iii) *Si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R-$conos de X, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ y $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ son $R-$conos.*

Dem.

(i): Resulta inmediato por el hecho de que $R(\emptyset) = \emptyset$ y que por ser R reflexiva, se verifica $R(X) = X$.

(ii): Como (X, R) un qM_3-espacio, entonces para cada $x \in X$, se verifica que $R(x)$ es un conjunto cerrado. Además por ser R reflexiva, tenemos que $R(x) \subseteq R(R(x))$. Probemos la otra inclusión. Sea $z \in R(R(x))$, entonces existe $y \in R(x)$ tal que $(y, z) \in R$. Luego tenemos que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, de donde, por ser R transitiva, $(x, z) \in R$ y por lo tanto $z \in R(x)$. Lo que prueba que $R(x)$ es un $R-$cono de X.

(iii): Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R-$conos de X. Por ser R reflexiva, resulta que $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i \subseteq R(\bigcup\limits_{i\in I} Y_i)$ y $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i \subseteq R(\bigcap\limits_{i\in I} Y_i)$. Sea $y \in R(\bigcup\limits_{i\in I} Y_i)$, entonces existe $x \in \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ tal que $(x,y) \in R$. Luego existe Y_{i_0} tal que $x \in Y_{i_0}$ y $(x,y) \in R$, lo que implica que $y \in R(Y_{i_0}) = Y_{i_0}$ y en consecuencia $y \in \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$. En forma análoga se prueba que $R(\bigcap\limits_{i\in I} Y_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$.

□

Como consecuencia del Lema 4.3.1.2, el conjunto $R^C(X)$ es un subretículo completo de $\mathcal{P}(X)$. En particular, los subconjuntos de X que son cerrados, $\triangle-$involutivos y $R-$conos, ordenados por inclusión, forman un sub-retículo del conjunto $C_\triangle(X)$, de los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos de X. Dicho sub-retículo será denotado $C_{\triangle R}(X)$.

El siguiente teorema muestra que existe una correspondencia biunívoca entre las congruencias de un qM_3-retículo L y ciertos subconjuntos cerrados de su qM_3-espacio asociado.

Teorema 4.3.1.3 *Sean* $(L,\exists) \in \mathbf{qM_3}$ *e* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$, *el* qM_3-*espacio asociado a* $(L,\exists)$. *Entonces el retículo* $C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ *de los subconjuntos cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R_\exists-$*conos de* $\mathcal{I}_p(L)$, *es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$ *de las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{C\triangle R_\exists}$ *definida por la misma prescripción que la dada en* (A3) *del* Teorema 2.2.1.1, *es decir,* $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) = \{(a,b) \in L\times L : \sigma_L(a)\cap Y = \sigma_L(b)\cap Y\}$.

Dem.

(i) $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$:

Sea $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, por la Proposición 2.2.1.6, $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) = \{(a,b) \in L\times L : \sigma_L(a)\cap Y = \sigma_L(b)\cap Y\}$, es una $\mathbf{M_3}-$congruencia, probamos a continuación que esta relación también es compatible con el operador $\exists$.

Sea (1) $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ y (2) $Q \in \sigma_L(\exists a)\cap Y$. Como $\exists^{-1}(Q)$ es un ideal de L y $\exists a \notin Q$, entonces existe un ideal primo P tal que (3) $\exists^{-1}(Q) \subseteq P$ y (4) $a \notin P$. Por otro lado de (3), tenemos que $P \in R_\exists(Q)$, y por (qM2), existe (5) $S \in min\, R_\exists(Q)$ tal que

(6) $S \subseteq P$ (ver Sección 1.3.2 del Capítulo 1). Teniendo en cuenta que $Y \in R^C_\exists(\mathcal{I}_p(L))$, de (2) y (5), resulta que $S \in Y$, además de (4) y (6), $a \notin S$. Por lo tanto $S \in \sigma_L(a) \cap Y$, de donde por (1), $S \in \sigma_L(b) \cap Y$. Luego $b \notin S$, y como por (5), $\exists^{-1}(Q) \subseteq S$, resulta que $b \notin \exists^{-1}(Q)$, lo cual implica que $Q \in \sigma_L(\exists b) \cap Y$. Por lo tanto $\sigma_L(\exists a) \cap Y \subseteq \sigma_L(\exists b) \cap Y$. La otra inclusión es análoga y en consecuencia $(\exists a, \exists b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$.

(ii) La aplicación $\Theta_{C\triangle R_\exists} : C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L)) \longrightarrow Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$, definida por $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) = \{(a,b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$, es un isomorfismo dual:

Como $C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ es un subretículo de $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces la aplicación $Y \longrightarrow \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ es inyectiva y un homomorfismo de retículos entre $C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ y el dual de $Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$. Solo resta probar que esta aplicación es sobreyectiva.

Sea $\theta \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$, como $\theta \in Con_{\mathbf{M_3}}(L)$, por la Proposición 2.2.1.7, sabemos que $\theta = \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ con $Y = \{q_\theta^{-1}(Q) : Q \in \mathcal{I}_p(L/\theta)\}$ cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. Para completar la prueba resta probar que $Y \in R^C_\exists(\mathcal{I}_p(L))$, es decir $Y = R_\exists(Y)$. Por ser $R_\exists$ reflexiva, se verifica $Y \subseteq R_\exists(Y)$. Probemos la otra inclusión. Sea $T \in R_\exists(Y)$ y supongamos que (1) $T \notin Y$. Luego existe $P \in Y$ tal que $T \in R_\exists(P)$ y por otra parte, como por (qM2) $R_\exists(P)$ es un cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, existe $Q \in min\, R_\exists(P)$ tal que $Q \subseteq T$. Entonces de (1), teniendo en cuenta que Y es $\triangle-$involutivo, se sigue que $Q \notin Y$. Por otro lado como Y es un subconjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, por la Proposición 2.2.1.2, existen $a, b \in L$ tal que $a \in Q$ y $b \notin Q$ y $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$. Sea F el filtro de L generado por $(L \setminus Q) \cup \{a\}$. Si suponemos que $F \cap \exists^{-1}(P) = \emptyset$, como $\exists^{-1}(P)$ es un ideal de L, entonces por el el Teorema de Birkhoff-Stone, existe un filtro primo S de L tal que $F \subseteq S$ y $S \cap \exists^{-1}(P) = \emptyset$ y por lo tanto $\exists^{-1}(P) \subseteq L \setminus S$ y $L \setminus S \subseteq Q$. Teniendo en cuenta que $L \setminus S$ es un ideal primo de L, inferimos que $L \setminus S \in R_\exists(P)$, lo que contradice que $Q \in min\, R_\exists(P)$. Por lo tanto $F \cap \exists^{-1}(P) \neq \emptyset$ y en consecuencia existe $q \in L \setminus Q$ tal que (2) $\exists(q \wedge a) \in P$. Como además $(a \wedge q, b \wedge q) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ y $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$, entonces $(\exists(a \wedge q), \exists(b \wedge q)) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$, lo que implica que $\sigma_L(\exists(a \wedge q)) \cap Y = \sigma_L(\exists(b \wedge q)) \cap Y$. Luego de (2), podemos asegurar que $P \notin \sigma_L(\exists(a \wedge q)) \cap Y$ y por lo tanto $P \notin \sigma_L(\exists(b \wedge q)) \cap Y$. De esto último, como $P \in Y$, tenemos (3) $\exists(b \wedge q) \in P$. Por otra parte como $Q \in min\, R_\exists(P)$ se sigue, por (v) de la Proposición 4.2.3.1, que $P \cap \exists(L) = Q \cap \exists(L)$, de donde por (3), se verifica $\exists(q \wedge b) \in Q$. Luego por (E2), tenemos que $q \wedge b \in Q$ y por ser Q un ideal primo, resulta que $q \in Q$ o $b \in Q$, lo cual es una contradicción. En consecuencia $T \in Y$ y por lo tanto $Y \in R_\exists^C(\mathcal{I}_p(L))$. $\square$

4.3.2. Otras caracterizaciones del retículo de las $\mathbf{qM_3}-$congruencias

En la sección anterior, logramos caracterizar el retículo de las congruencias de un qM_3-retículo, en término de ciertos subconjuntos cerrados de su qM_3-espacio asociado, más precisamente los subconjuntos cerrados, $\triangle-$involutivos y $R_\exists-$conos.

A continuación probamos que esto también se puede realizar con subconjuntos abiertos y $\triangle-$involutivos del M_3-espacio asociado.

Con $O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, indicamos el retículo de los subconjuntos abiertos, $\triangle-$involutivos y $R_\exists-$conos de $\mathcal{I}_p(L)$.

Lema 4.3.2.1 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$ e $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado. Entonces $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ si, y solo si, $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$.*

Dem.

Sea $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces por el Corolario 2.2.3.2, es claro que $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y \in O_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$. Probemos que $R_\exists(\mathcal{I}_p(L) \setminus Y) = \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$. Por ser $R_\exists$ reflexiva, se verifica que $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y \subseteq R_\exists(\mathcal{I}_p(L) \setminus Y)$. Sea $P \in R_\exists(\mathcal{I}_p(L) \setminus Y)$, entonces existe (1) $Q \in \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ tal que $(Q, P) \in R_\exists$. Luego por (qM5), existe $T \subseteq P$ tal que $(Q, T) \in R_\exists$ y $(T, Q) \in R_\exists$. Supongamos que $P \in Y$. Como Y es $\triangle-$involutivo, entonces $T \in Y$ y en consecuencia, por ser Y un $R_\exists-$cono, $Q \in R_\exists(Y) = Y$, lo que contradice (1). La recíproca es análoga.

$\square$

Teorema 4.3.2.2 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$ e $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado. Entonces el retículo $O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ de los subconjuntos abiertos, $\triangle-$involutivos y $R_\exists-$conos de $\mathcal{I}_p(L)$ es isomorfo al retículo $Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$de las $\mathbf{qM_3}-$congruencias de L, y el isomorfismo lo* *establece la función* $\Theta_{O\triangle R_\exists}$ *definida por:* $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \{(a,b) \in L \times L : (\sigma_L(b)\Delta\, \sigma_L(a)) \subseteq G\}$.

Dem.

Es consecuencia inmediata de los Lemas 2.2.3.3 y 4.3.2.1 y el Teorema 4.3.1.3. □

En forma análoga a lo realizado por A. Petrovich en [36], para caracterizar las congruencias de los retículos modales, introducimos la noción de conjunto $R-$saturado. Esta noción también nos permite caracterizar el retículo de las $\mathbf{qM_3}-$congruencias como mostramos a continuación.

Definición 4.3.2.3 *Sea* (X, R) *un* qM_3-*espacio. Un subconjunto* Y *de* X *es* $R-$*saturado, si* $min\, R(y) \subseteq Y$*, para todo* $y \in Y$.

Indicamos con $Sat_R(X)$ la familia de subconjuntos $R-$saturados de X.

Observación 4.3.2.4 *Si* (X, R) *un* qM_3-*espacio, entonces* $R^C(X) \subseteq Sat_R(X)$*. La otra inclusión no siempre se verifica. El siguiente resultado indica cuando estas nociones son equivalentes.*

Proposición 4.3.2.5 *Sea* (X, R) *un* qM_3-*espacio e* Y *un subconjunto* $\triangle-$*involutivo de* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $Y \in Sat_R(X)$,

(ii) $Y \in R^C(X)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por ser R reflexiva, se verifica $Y \subseteq R(Y)$. Sea $z \in R(Y)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $z \in R(y)$. Como $R(y)$ es cerrado, existe (1) $m \in min\, R(y)$ tal que (2) $m \leq z$ (ver Sección 1.3.2 del Capítulo 1). Por otro lado, como Y es $\triangle-$involutivo, por el Teorema 2.2.1.5, tenemos que Y es creciente. Luego de (i), (1), (2), se verifica que $z \in Y$.

(ii) $\Leftarrow$ (i): Sea $y \in Y$ y $z \in min\, R(y)$. Entonces $z \in R(Y)$ y como por (ii), $R(Y) = Y$, resulta $z \in Y$. Por lo tanto $min\, R(y) \subseteq Y$, para todo $y \in Y$, lo cual implica que Y es $R-$saturado. $\square$

Teorema 4.3.2.6 *Sean* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$ *e* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$*, el* qM_3-*espacio asociado a* $(L, \exists)$*. Entonces el retículo* $C_{\triangle S_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$*, de los subconjuntos cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R_\exists-$*saturados de* $\mathcal{I}_p(L)$*, es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$*, de las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{C\triangle S_\exists}$ *definida por la misma prescripción que la dada en* (A3) *del* Teorema 2.2.1.1.

4.3.3. Algebras simples y subdirectamente irreducibles en $\mathbf{qM_3}$

A continuación, aplicamos el Teorema 4.3.1.3, para caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en $\mathbf{qM_3}$, previamente indicamos algunos resultados que nos fueron de utilidad para cumplir este objetivo.

Proposición 4.3.3.1 *Sea* (X, R) *un* qM_3-*espacio y* $x \in min\, X$*. Si* $y \in R(x)$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $y \in min\, R(x)$,

(ii) $y \in min\, X$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea (1) $y \in min\, R(x)$ y supongamos que $y \notin min\, X$. Por ser X un M_3-espacio se verifica que $y \in max\, X$ y por lo tanto existe $t \in X$ tal que (2) $t < y$. De (1) y (2), $t \notin R(x)$ y por Lema 4.2.1.4, existe $U \in D(X)$ tal que (3) $t \in U$ y (4) $x \notin R^{-1}(U)$. Por otra parte de (1) y por ser R una relación de cuasiequivalencia dual (ver Sección 1.3.3, Capítulo 1 y Observación 4.2.1.2), tenemos que (5) $(y, x) \in R$.

Como $t \in R(t)$, de (2) y (qM2), se verifica (6) $(t, y) \in R$, de donde por (qM5), existe $m \in X$, $m \leq y$ tal que (7) $(m, t) \in R$. Si $m = y$, de (1), (7) y (3), resulta $x \in R^{-1}(U)$, lo que contradice (4). Si $m < y$, entonces por ser X un M_3-espacio, de (2), resulta que $m = t$

y así de (6) y (5) y la propiedad transitiva, tenemos que $(t, x) \in R$. Luego por (qM5), como $x \in min\, X$, resulta que $(x, t) \in R$. De esta última afirmación y (3), concluímos que $x \in R^{-1}(U)$, lo que contradice (4). Por lo tanto $y \in min\, X$.

(ii) $\Leftarrow$ (i): Sea $y \in R(x)$ tal que (1) $y \in min\, X$. Supongamos que $y \notin min\, R(x)$. Entonces existe $t \in R(x) \subseteq X$ tal que $t < y$. Esto último contradice (1), pues el espacio es suma cardinal de cadenas de dos elementos. $\square$

Corolario 4.3.3.2 *Sea (X, R) es un qM_3-espacio y $x \in min\, X$. Entonces $R(x)$ es un $R-$cono, cerrado y $\triangle-$involutivo de X.*

Dem. Por (ii) del Lema 4.3.1.2, tenemos que $R(x)$ es un cerrado y $R-$cono de X. Por otra parte por (qM2), $R(x)$ es creciente. Para probar que es $\triangle-$involutivo de X, solo tenemos que probar que $R(x)$ es decreciente. Sea $z \in R(x)$ y $t \in X$ tal que $t \leq z$. Si $t = z$ es claro que $t \in R(x)$. Sea (1) $t < z$ y supongamos que $t \notin R(x)$, entonces $z \in min\, R(x)$. Luego por la Proposición 4.3.3.1, resulta que $z \in min\, X$, lo que contradice (1). $\square$

Lema 4.3.3.3 *Si X es un M_3-espacio, entonces el único subconjunto cerrado y $\triangle-$involutivo que contiene a $min\, X$, es el propio espacio.*

Dem. Sea Y subconjunto de X, cerrado y $\triangle-$involutivo tal que (1) $min\, X \subseteq Y$. Si $x \in X$, entonces por ser X un M_3-espacio se verifica que (2) $x \in min\, X$ o (3) $x \in max\, X$. Si ocurre (2), entonces por (1), se verifica $x \in Y$. Si es verdadero (3), existe $t \in min\, X$ tal que $t < x$. Luego por (1) $t \in Y$ y como Y es $\triangle-$involutivo, entonces $x \in Y$. Por lo tanto $Y = X$. $\square$

Proposición 4.3.3.4 *Sea (X, R) un qM_3-espacio tal que $(D(X), \exists_R)$ su qM_3-retículo dual, es un qM_3-retículo subdirectamente irreducible. Si Y es un subconjunto de X no vacío, cerrado y $\triangle-$involutivo de X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un $R-$cono de X,*

(ii) *$min\, X \subseteq Y$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por las hipótesis $Y \in C_{\triangle R}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Como $D(X)$ es un qM_3-retículo subdirectamente irreducible, entonces existe $M_0 \in C_{\triangle R}(X)$ máximo no trivial, es decir $M_0 \neq X$ y si $S \in C_{\triangle R}(X)$ y $S \neq X$, entonces $S \subseteq M_0$. Como $M_0 \neq X$, por Lema 4.3.3.3, existe $m \in min\, X$ tal que (1) $m \notin M_0$. Entonces por Corolario 4.3.3.2, se verifica que $R(m) \in C_{\triangle R}(X)$ y es claro que $R(m) \not\subseteq M_0$, pues caso contrario, como $m \in R(m)$, se verificaría que $m \in M_0$, lo que contradice (1). Luego $R(m) = X$. Si $M_0 \neq \emptyset$, entonces por ser M_0 un subconjunto $\triangle-$involutivo de X, podemos asegurar que existe $z \in M_0 \cap min\, X$. En consecuencia, $z \in R(m)$, y por ser m y z minimales de X, se verifica que $m \in min\, R(z)$. Por otra parte, como M_0 es un $R-$cono de X, por la Proposición 4.3.2.5, M_0 un subconjunto $R-$saturado de X y en consecuencia $min\, R(z) \subseteq M_0$. De esto último resulta que $m \in M_0$, lo cual contradice (1). Por lo tanto $M_0 = \emptyset$ y así $Y = X$, de donde $min\, X \subseteq Y$.
(ii) $\Leftarrow$ (i): Es inmediato del Lema 4.3.3.3. $\square$

Corolario 4.3.3.5 *Sea (X, R) un qM_3-espacio y $(D(X), \exists_R)$ su qM_3-retículo dual. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(D(X), \exists_R)$ es un qM_3-retículo simple,*

(ii) *$(D(X), \exists_R)$ es un qM_3-retículo subdirectamente irreducible.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Inmediato.
(ii) $\Leftarrow$ (i): Por las hipótesis existe $M_0 \in C_{\triangle R}(X)$ tal que (1) $M_0 \neq X$ y si $S \in C_{\triangle R}(X)$ y $S \neq X$, entonces $S \subseteq M_0$. Si $M_0 \neq \emptyset$, entonces, por la Proposición 4.3.3.4, $min\, X \subseteq M_0$, lo cual implica por Lema 4.3.3.3, que $M_0 = X$, lo que contradice (1). Por lo tanto $M_0 = \emptyset$ y en consecuencia los únicos elementos de $C_{\triangle R}(X)$ son $\emptyset$ y X. Luego, teniendo en cuenta el Teorema 4.3.1.3, $D(X)$ es un qM_3-retículo simple. $\square$

Lema 4.3.3.6 *Sea (X, R) un qM_3-espacio, $(D(X), \exists_R)$ su qM_3-retículo dual y $U \in D(X)$. Entonces $\exists_R(U) = R^{-1}(U)$ es un $R-$saturado, abierto y cerrado de X.*

Dem. Sea (X, R) un qM_3-espacio y $U \in D(X)$. Por la propiedad (qM3), sabemos que $R^{-1}(U) \in D(X)$, en consecuencia $\exists_R(U)$ es un abierto y cerrado de X. Sea $y \in \exists_R(U)$ y $z \in min\, R(y)$. Luego existe $u \in U$ tal que $(y, u) \in R$ y se verifica que $z \in R^{-1}(y)$ (ver Sección 1.3.3, Capítulo 1). Entonces $(z, u) \in R$ y así $z \in R^{-1}(U)$, es decir $z \in \exists_R(U)$. En consecuencia $min\, R(y) \subseteq \exists_R(U)$, para cada $y \in \exists_R(U)$, y por lo tanto $\exists_R(U)$ es un subconjunto $R-$saturado de X. $\square$

Corolario 4.3.3.7 *Sea (X, R) un qM_3-espacio, $(D(X), \exists_R)$ su qM_3-retículo dual y $U \in D(X)$. Si U es $\triangle-$involutivo, entonces $\exists_R(U)$ es un $R-$cono, abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de X.*

Dem. Si $U \in D(X)$, es un subconjunto $\triangle-$involutivo de X, por Lema 4.3.3.6 y la Proposición 4.3.2.5, se verifica que $\exists_R(U)$ es un subconjunto abierto, cerrado y $R-$cono de X. Por otro lado como $\triangle^* U = U$, teniendo en cuenta la propiedad (E6) en $D(X)$, tenemos que $\triangle^*(\exists_R(U)) = \exists_R(U)$ y por lo tanto $\exists_R(U)$ es $\triangle-$involutivo. $\square$

Proposición 4.3.3.8 *Sea (X, R) un qM_3-espacio y $(D(X), \exists_R)$ su qM_3-retículo dual. Si $x, y \in min\, X$ y $(x, y) \notin R$, entonces existen $U, V \in D(X)$ tales que $x \in \exists_R(\triangle^* V)$, $y \notin \exists_R(\triangle^* V)$, $y \in \exists_R(\triangle^* U)$ y $x \notin \exists_R(\triangle^* U)$.*

Dem. Sean $x, y \in min\, X$ tales que (1) $(x, y) \notin R$. Entonces por el Lema 4.2.1.4, existe $S \in D(X)$ tal que $y \in S$ y $x \notin R^{-1}(S)$, lo cual implica que (2) $x \notin \exists_R(S)$. Por otro lado teniendo en cuenta las propiedades (M11) y (E2) en $D(X)$, se verifica de lo anterior que $y \in \exists_R(\nabla^* S)$, siendo $U = \nabla^* S$ un conjunto $\triangle-$involutivo de X ($\triangle^* U = U$). En consecuencia $y \in \exists_R(\triangle^* U)$. Veamos que $x \notin \exists_R(\triangle^* U)$. Por la propiedad (E3), se verifica que $\exists_R(\nabla^* S) = \exists_R(S) \cup \exists_R(\neg S)$. Si $x \in \exists_R(\triangle^* U)$, entonces $x \in \exists_R(\nabla^* U)$ y por (2), se verifica que $x \in \exists_R(\neg S)$. Por lo tanto existe $s \in \neg S$ tal que $s \in R(x)$ y por la definición de $\neg S$, existe $t \in min\, X \cap S$ tal que (3) $t < s$. Como en este caso $R(x)$ es un conjunto $\triangle-$involutivo (Corolario 4.3.3.2), de (3), tenemos que $t \in R(x)$, de donde $x \in R^{-1}(S)$, lo que contradice (2). Entonces existe $U \in D(X)$ tal que $y \in \exists_R(\triangle^* U)$ y $x \notin \exists_R(\triangle^* U)$. Por otro lado de la hipótesis (1), si tenemos en cuenta la Observación 4.2.1.2, también se verifica que $(y,x) \notin R$ y en forma análoga se puede demostrar que existe $V \in D(X)$ tal que $x \in \exists_R(\triangle^* V)$, $y \notin \exists_R(\triangle^* V)$. $\square$

A continuación analizamos las propiedades de los elementos minimales con respecto a la relación R del qM_3-espacio.

Lema 4.3.3.9 *Sea (X,R) un qM_3-espacio y $(D(X),\exists_R)$ su qM_3-retículo dual. Si $x,y \in min\, X$ y $(x,y) \in R$, entonces:*

(i) *$(y,x) \in R$,*

(ii) *$(z,w) \in R$, siendo $z,w \in max\, X$ tales que $x < z$, $y < w$.*

Dem.

(i): Es inmediato de (qM5), por ser x e y minimales de X.

(ii): Sean $x,y \in min\, X$ tales que (1) $(x,y) \in R$. Por ser X un M_3-espacio se verifica que existen $z,w \in X$ tales que (2) $x < z$ y $y < w$. Supongamos que $(z,w) \notin R$, entonces por Lema 4.2.1.4, existe $U \in D(X)$ tal que $w \in U$ y $z \notin R^{-1}(U)$, es decir $z \notin \exists_R(U)$. Luego como $\triangle^*\exists_R(U) \subseteq \exists_R(U)$, entonces (3) $z \notin \triangle^*\exists_R(U)$. Por otra parte como $w \in U \cap max\, X$ y $y < w$, entonces $y \in \triangle^* U$ y por lo tanto de (1), tenemos que $x \in R^{-1}(\triangle^* U)$, es decir $x \in \exists_R(\triangle^* U)$. De esto último y (2), como $\exists_R(\triangle^* U)$ es un conjunto $\triangle-$involutivo de X (ver Corolario 4.3.3.7), tenemos que $z \in \exists_R(\triangle^* U)$, y por (E6), resulta que $z \in \triangle^*\exists_R(U)$ lo que contradice (3). $\square$

Corolario 4.3.3.10 *Sea (X,R) un qM_3-espacio y $(D(X),\exists_R)$, su qM_3-retículo dual. Si para todo $x,y \in min\, X$, $(x,y) \in R$, entonces $(z,w) \in R$, para todo $z,w \in max\, X$.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Lema 4.3.3.9. $\square$

Proposición 4.3.3.11 *Sea (X,R) un qM_3-espacio y $(D(X),\exists_R)$ su qM_3-retículo dual. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\exists_R(D(X))$ *es un* M_3-*retículo simple,*

(ii) $(x,y) \in R$, *para todo* $x,y \in min\, X$,

(iii) $(D(X),\exists_R)$ *es un* qM_3-*retículo simple.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que existen $x,y \in min\, X$ tales que $(x,y) \notin R$. Entonces por la Proposición 4.3.3.8, existen $U,V \in D(X)$ tales que $x \in \exists_R(\triangle^* V)$, $y \notin \exists_R(\triangle^* V)$, $y \in \exists_R(\triangle^* U)$ y $x \notin \exists_R(\triangle^* U)$. En consecuencia $\exists_R(\triangle^* U) \neq \emptyset$, $\exists_R(\triangle^* V) \neq \emptyset$, $\exists_R(\triangle^* U) \neq X$, $\exists_R(\triangle^* V) \neq X$ y $\exists_R(\triangle^* U) \neq \exists_R(\triangle^* V)$, por lo que concluímos que $\exists_R(D(X))$ no es un M_3-retículo simple.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $Y \in C_{\triangle R}(X) \setminus \{\emptyset\}$, entonces por ser Y un conjunto $\triangle-$involutivo, existe $z \in min\, X \cap Y$. Luego si $x \in min\, X$, entonces por (ii), se verifica que $(z,x) \in R$ y por lo tanto $x \in R(Y)$. Por ser Y un $R-$cono se verifica que $x \in Y$ y así $min\, X \subseteq Y$, entonces por Lema 4.3.3.3, podemos concluir que $Y = X$. Lo anterior implica, teniendo en cuenta el Teorema 4.3.1.3, que $D(X)$ es un qM_3-retículo simple.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sea $(D(X),\exists_R)$ un qM_3-retículo simple y supongamos que $\exists_R(D(X))$ no es un M_3-retículo simple. Luego existen $U,V \in D(X)$ tales que $\exists_R(U) \neq X$, $\exists_R(V) \neq X$, $\exists_R(U) \neq \emptyset$, $\exists_R(V) \neq \emptyset$ y $\exists_R(U) \neq \exists_R(V)$. En consecuencia existen $x,y \in X$ tales que $x \in \exists_R(U)$, $y \in \exists_R(V)$, $x \notin \exists_R(V)$, $y \notin \exists_R(U)$, es decir $(x,y) \notin R$ y $(y,x) \notin R$. Por otro lado observemos que en virtud del Corolario 4.3.3.2, $x \notin min\, X$ o $y \notin min\, X$, pues caso contrario $R(x) \in C_{\triangle R}(X) \setminus \{\emptyset\}$ y $R(x) \neq X$ o $R(y) \in C_{\triangle R}(X) \setminus \{\emptyset\}$ y $R(y) \neq X$, lo que contradice que $(D(X),\exists_R)$ un qM_3-retículo simple. Por lo tanto $x \in max\, X$ e $y \in max\, X$ y en consecuencia por Lema 4.3.3.9, existen $m,n \in min\, X$ tales que $m < x$, $n < y$, $(m,n) \notin R$ y $(n,m) \notin R$, lo que conduce a que $R(n)$ y $R(m)$ sean $R-$conos, cerrados y $\triangle-$involutivos, tales que $R(n) \neq X$, $R(m) \neq X$, $R(n) \neq \emptyset$, $R(m) \neq \emptyset$ y $R(n) \neq R(m)$, lo que contradice que $(D(X),\exists_R)$ un qM_3-retículo simple. $\square$

Corolario 4.3.3.12 *Sea* (X,R) *un* qM_3-*espacio y* $(D(X),\exists_R)$ *su* qM_3-*retículo dual. Si* $(D(X),\exists_R)$ *es un* qM_3-*retículo simple, entonces* $\exists_R(D(X)) = \{\emptyset, min\, X, X\}$.

Dem. Sea $U \in D(X)$. Si $U = \emptyset$, entonces $\exists_R U = \emptyset$. Si $U \neq \emptyset$ se pueden presentar dos casos: (a) $U \cap max\, X \neq \emptyset$ o (b) $U \cap max\, X = \emptyset$.

En el caso (a), existe $u \in max\, X \cap U$ y por tratarse de un M_3-espacio y ser U decreciente, existe $v \in min\, X \cap U$ tal que $v < u$. Sea $x \in X$, si $x \in min\, X$, por (ii) de la Proposición 4.3.3.11, se verifica que $(x, v) \in R$, lo cual implica $x \in R^{-1}(U)$ y por consiguiente $x \in \exists_R U$. Es decir, (1) $min\, X \subseteq \exists_R U$. Por otro lado, si $x \in max\, X$, existe $y \in X$ tal que $y < x$ y se verifica que $(v, y) \in R$. Luego por el Lema 4.3.3.9, tenemos que $(x, u) \in R$ y por lo tanto $x \in R^{-1}(U) = \exists_R U$. Hemos probado así que (2) $max\, X \subseteq \exists_R U$. De (1) y (2), resulta $X = min\, X \cup max\, X \subseteq \exists_R U$ y por consiguiente $\exists_R U = X$.

En el caso (b), tenemos que $U \subseteq min\, X$ y probaremos que $\exists_R U = min\, X$. Como $U \neq \emptyset$, es claro, por la Proposición 4.3.3.11, que $min\, X \subseteq R^{-1}(U)$. Veamos la otra inclusión. Sea $z \in R^{-1}(U)$, luego existe $u \in U$ tal que (1) $(z, u) \in R$. Si $z \in max\, X$, existiría $v \in min\, X$ tal que $v < z$ y se verificaría que (2) $(u, v) \in R$. Por otra parte, por ser $R(v)$ creciente, tendríamos que (3) $(v, z) \in R$. De (2) y (3) y la propiedad transitiva, $(u, z) \in R$. Por consiguiente, de esto último y (1), se verificaría que $R^{-1}(U) = X$, y por lo tanto $\exists(D(X))$ no sería un M_3-retículo simple. Luego $z \in min\, X$, de donde $\exists_R U = min\, X$.

$\square$

Corolario 4.3.3.13 *Si $(L, \exists)$ es un qM_3-retículo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(L, \exists)$ *es un qM_3-retículo subdirectamente irreducible,*

(ii) $(L, \exists)$ *es un qM_3-retículo simple,*

(iii) $\exists(L)$ *es un M_3-retículo simple,*

(iv) $\exists(L)$ *es isomorfa al álgebra $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0 \rangle$, donde T es la cadena con tres elementos $\{0, 1/2, 1\}$ con $0 \leq 1/2 \leq 1$ y las operaciones $\sim$ y $\triangle$ están definidas en la siguiente tabla:*

x	$\sim x$	$\triangle x$
0	0	0
1/2	1	0
1	1/2	1

Dem. Es consecuencia inmediata de la la Proposición 2.1.5.1, el Corolario 4.3.3.5, la Proposición 4.3.3.11 y la propiedad (M33) de los M_3-retículos (ver Sección 1.4, Capítulo 1). $\square$

Corolario 4.3.3.14 *Sea el M_3-retículo $\langle \mathrm{T}^X, \wedge, \vee, \sim \triangle, 0\rangle$ donde* T *es la cadena de tres elementos* $\{0, 1/2, 1\}$ *con* $0 \leq 1/2 \leq 1$*, X es un conjunto no vacío y* T^X *es el conjunto de todas las funciones de X en* T*, donde las operaciones de M_3-retículo se definen puntualmente. Si para cada $f \in \mathrm{T}^X$ se define* $(\exists f)(x) = \bigvee f(X)$*, para todo $x \in X$, donde* $\bigvee f(X)$ *es el supremo del conjunto $f(X)$, entonces* $(\mathrm{T}^X, \exists)$ *es un qM_3-retículo simple.*

Dem. Es claro que por la forma como está definido, $(\mathrm{T}^X, \exists)$ es un qM_3-retículo, donde además se verifica que $\exists(\mathrm{T}^X) = \mathrm{T}$. Luego por el Corolario 4.3.3.13, se verifica que $(\mathrm{T}^X, \exists)$ es un qM_3-retículo simple. $\square$

A continuación probamos una propiedad que tienen la M_3-funciones y que nos resulta muy útil para lograr una caracterización funcional de los qM_3-retículos simples.

Proposición 4.3.3.15 *Sean X y X' dos M_3-espacios y $f : X \longrightarrow X'$ una $P-$función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es una M_3-función,*

(ii) *f verifica las siguientes condiciones:*

 (a) $f(min\, X) \subseteq min\, X'$,

 (b) $f(max\, X) \subseteq max\, X'$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

(a) Sea $t \in f(min\, X)$, luego existe $x \in min\, X$ tal que $f(x) = t$. Supongamos que $t \notin min\, X'$. Por ser X y X' M_3-espacios, se verifica que $t \in max\, X'$ y existen $u \in X$ y $v \in X'$ tales que (1) $x < u$ y (2) $v < t$. Además como $t \not\leq v$ y el espacio X' es disconexo en el orden, existe $V \in D(X)$ tal que (3) $v \in V$ y (4) $t \notin V$. De (2), (3) y (4), se verifica que $t \in \nabla^* V = V \cup \neg V$; y de (1), por ser f una función creciente, tenemos que $f(x) = f(u) = t$, lo que implica (5) $x \in f^{-1}(\nabla^* V)$. De (5), como f es una M_3-función, se verifica que $x \in \nabla^* f^{-1}(V)$, entonces teniendo en cuenta la definición de ∇^*, puede ocurrir que $x \in f^{-1}(V)$, es decir $f(x) = t \in V$ que contradice (4) o bien $x \in \neg f^{-1}(V)$, lo que implica que existe $y \in min\, X \cap f^{-1}(V)$ tal que $y \leq x$, de lo cual resulta, por ser x minimal de X, que $y = x$ y por lo tanto $f(x) = t \in V$, lo que contradice (4).

(b) Sea $t \in f(max\, X)$, luego existe $x \in max\, X$ tal que (1) $f(x) = t$. Supongamos que $t \notin max\, X'$. Por ser X y X' M_3-espacios, se verifica que $t \in min\, X$ y existen $u \in X$ y $v \in X'$ tales que (2) $u < x$ y (3) $t < v$. Como $v \not\leq t$ y el espacio X' es disconexo en el orden, existe $V \in D(X)$ tal que (4) $t \in V$ y (5) $v \notin V$. De (3), (4) y (5), se verifica que $t \notin \triangle^* V$ y en consecuencia (6) $x \notin f^{-1}(\triangle^* V)$. Sin embargo de (1), (2) y (4) se verifica que $x \in f^{-1}(V) \cap max\, X$ y por consiguiente $x \in \triangle^* f^{-1}(V)$ lo que contradice (6), por tratarse f de una M_3-función.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Como f es una $P-$función solo resta probar:

(c) $(M_X f^{-1}(V)] = f^{-1}((M_{X'} V])$:

Sea $x \in (M_X f^{-1}(V)]$, luego existe $y \in M_X f^{-1}(V)$ tal que $x \leq y$. En consecuencia, $f(y) \in max\, X' \cap V$ y como f es una función creciente tenemos que $f(x) \leq f(y)$. Por lo tanto $f(x) \in (M_{X'} V]$ lo que implica que $x \in f^{-1}((M_{X'} V])$. Probemos ahora la otra inclusión. Sea $x \in f^{-1}((M_{X'} V])$, entonces $f(x) \in (M_{X'} V]$. Luego existe

(1) $z \in M_{X'}V$ tal que $f(x) \leq z$. Si $f(x) = z$, entonces $f(x) \in max\, X' \cap V$, lo que implica por la hipótesis que $x \in max\, X$ y $x \in f^{-1}(V)$ y por lo tanto $x \in M_X f^{-1}(V) \subseteq (M_X f^{-1}(V)]$. Si $f(x) < z$, entonces $f(x) \in min\, X'$. Luego $x \in min\, X$ y por ser X un M_3-espacio, existe $u \in X$ tal que (2) $x < u$. Además como f es creciente $f(x) < f(u)$. En consecuencia $f(u) = z$, de donde por (1), $f(u) \in max\, X' \cap V$, es decir $u \in M_X f^{-1}(V)$, y por (2), resulta que $x \in (M_X f^{-1}(V)]$.

(d) $[m_X f^{-1}(V)) \setminus M_X f^{-1}(V) = f^{-1}([m_{X'}V) \setminus M_{X'}V)$:

Sea $x \in [m_X f^{-1}(V)) \setminus M_X f^{-1}(V)$. Luego existe $u \in min\, X \cap f^{-1}(V)$ tal que $u \leq x$ y (1) $x \notin max\, X \cap f^{-1}(V)$. Como f es creciente tenemos que $f(u) \leq f(x)$ y además por la hipótesis (a), $f(u) \in min\, X' \cap V$, lo que implica (2) $f(x) \in [m_{X'}V)$. Por otro lado de (1), se verifica (3) $f(x) \notin max\, X \cap V$. En consecuencia, de (2) y (3), $x \in f^{-1}([m_X V) \setminus M_X V)$. Veamos la otra inclusión. Sea $x \in f^{-1}([m_{X'}V) \setminus M_{X'}V)$, entonces $f(x) \in [m_{X'}V) \setminus M_{X'}V$ y por lo tanto existe (4) $v \in min\, X' \cap V$, tal que $v \leq f(x)$ y $f(x) \notin max\, X' \cap V$. Si $v = f(x)$, entonces $f(x) \in min\, X' \cap V$. Luego $x \in min\, X \cap f^{-1}(V)$ y por lo tanto $x \in [m_X f^{-1}(V)) \setminus M_X f^{-1}(V)$. Si $v < f(x)$, entonces $f(x) \in max\, X'$, de donde por la hipótesis (b), tenemos que $x \in max\, X$, lo que implica que existe $u \in X$ tal que (5) $u < x$. Como f es creciente y X' un M_3-espacio, se verifica que $v = f(u) < f(x)$, de donde por (4), $f(u) \in min\, X' \cap V$. Por otro lado, de lo obtenido y la hipótesis (a), resulta que $u \in min\, X \cap f^{-1}(V)$, lo que implica, por (5), que $x \in [m_X f^{-1}(V))$. Observemos por otro lado que como $f(x) \notin max\, X' \cap V$ pero $f(x) \in max\, X'$, se debe verificar que $f(x) \notin V$, de donde $x \notin f^{-1}(V)$ y así $x \notin M_X f^{-1}(V)$. Finalmente $x \in [m_X f^{-1}(V)) \setminus M_X f^{-1}(V)$.

$\square$

Proposición 4.3.3.16 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo simple. Entonces existe una* qM_3-*función sobreyectiva de* $\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})$ *en* $\mathcal{I}_p(L)$*, donde* T *es la cadena de tres elementos* $\{0, 1/2, 1\}$ *con* $0 \leq 1/2 \leq 1$ *y* $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists)$ *es el* qM_3-*retículo simple indicado en el* Corolario 4.3.3.14.

Dem. Por el teorema de representación para los M_3-retículos (ver [14]), existe un $\mathbf{M_3}-$homorfismo inyectivo de $h : L \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}$. Luego se sigue de la dualidad para los M_3-retículos, que existe una M_3-función sobreyectiva $\Phi(h) : \mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}) \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$. Resta probar que (1) $\Phi(h)^{-1}(\exists U) = \exists \Phi(h)^{-1}(U)$, para todo $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$. Como $(L, \exists)$ y $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists)$ son qM_3-retículos simples, entonces por el Corolario 4.3.3.12, tenemos que $\exists(D(\mathcal{I}_p(L))) = \{\emptyset, min\, \mathcal{I}_p(L), \mathcal{I}_p(L)\}$ y
$\exists(D(\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}))) = \{\emptyset, min\, \mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}), \mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})\}$.

Luego teniendo en cuenta Proposición 4.3.3.15 y el hecho de que $\Phi(h)$ es sobreyectiva, inferimos que $\Phi(h)(min\, \mathcal{I}_p(T^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})) = min\, \mathcal{I}_p(L)$, de donde se verifica (1), y por lo tanto la demostración está completa. □

Corolario 4.3.3.17 *Sea* $(L, \exists)$ *un* qM_3-*retículo simple y* $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists)$ *el* qM_3-*retículo indicado en el* Corolario 4.3.3.14. *Entonces existe un* $\mathbf{qM_3}-$*homomorfismo inyectivo de* L *en* $\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}$.

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.3.3.16. □

Corolario 4.3.3.18 *Si* $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo subdirectamente irreducible,*

(ii) $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo simple,*

(iii) $(L, \exists)$ *es isomorfo a un* qM_3-*subretículo del* qM_3-*retículo* $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists)$*, indicado en el* Corolario 4.3.3.14.

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 4.3.3.17. □

Ahora, consideramos el caso de los qM_3-retículos simples finitos.

Corolario 4.3.3.19 *Si* $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo finito, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

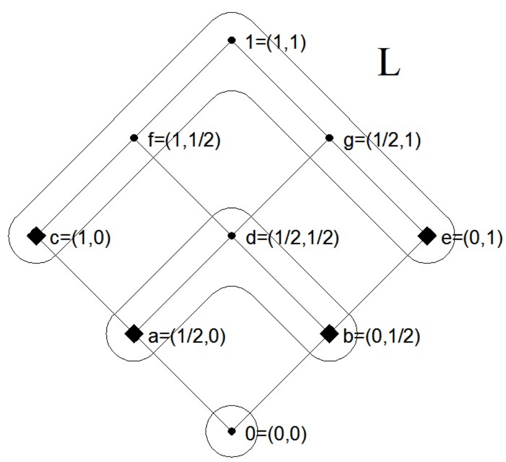
(i) $(L,\exists)$ *es un* qM_3-*retículo subdirectamente irreducible,*

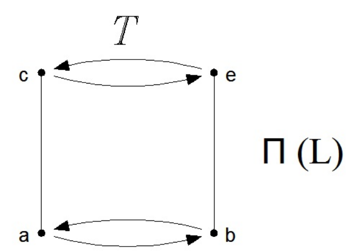
(ii) $(L,\exists)$ *es un* qM_3-*retículo simple,*

(iii) $(L,\exists)$ *es isomorfo a un* qM_3-*subretículo del* qM_3-*retículo* $(\mathrm{T}^n,\exists)$*, indicado en el* Corolario 4.3.3.14*, para algún* $n \in \mathbb{N}$*.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 4.3.3.18. $\square$

Ejemplo 4.3.3.20





El diagrama de Hasse anterior corresponde al qM_3-*retículo simple (subdirectamente irreducible)* $(\mathrm{T}^2,\exists)$ *del* Corolario 4.3.3.19*, para* $n=2$*. Las operaciones correspondientes están dadas en la siguientes tablas:*

x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\sim x$	0	c	e	a	1	b	g	f	d
$\triangle x$	0	0	0	c	0	e	c	e	1
∇x	0	c	e	c	1	e	1	1	1
$\exists x$	0	d	d	1	d	1	1	1	1

Se ha resaltado, en el gráfico, cómo la imagen del cuantificador $\exists$*, es decir* $\exists(L)$*, es isomorfa a* T*, la cadena con tres elementos* $\{0,1/2,1\}$ *con* $0 \leq 1/2 \leq 1$*.*

Si consideramos el automorfismo T, definido en L como sigue:

x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$T(x)$	0	b	a	e	d	c	g	f	1

No es difícil comprobar que T es un automorfismo de período 2. Si ahora consideramos el cuantificador $\exists_T$, definido como en la Proposición 4.1.2.1, tenemos que $\exists_T(x) = x \vee T(x)$. La siguiente tabla muestra la imagen de cada elemento de L, por medio de este cuantificador:

x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\exists_T(x)$	0	d	d	1	d	1	1	1	1

Claramente vemos que ambos cuantificadores coinciden, es decir $\exists x = \exists_T(x)$, para cada $x \in L$.

4.3.4. $\mathbf{qM_3}-$congruencias principales

En esta sección caracterizamos los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos y los subconjuntos abiertos y $\triangle-$involutivos, que corresponden a $q\mathbf{M_3}-$congruencias principales bajo la dualidad.

A continuación exponemos algunos resultados que son necesarios para la determinación de las congruencias principales.

Si L es un qM_3-retículo y $\Theta(a,b)$ es una congruencia principal, podemos suponer que $a \leq b$, pues en caso contrario tomamos $a \wedge b$ y $a \vee b$, ya que $\Theta(a,b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$.

Lema 4.3.4.1 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si Y es un subconjunto de $\mathcal{I}_p(L)$ cerrado y $\triangle-$involutivo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$,

(ii) $(\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)) \cap Y = \emptyset$,

(iii) $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \cap Y = \emptyset$,

(iv) $(a,b) \in \Theta_{O\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L) \setminus Y)$,

Dem.

La demostración es inmediata del Lema 2.2.3.3 y el Teorema 4.3.2.2, teniendo en cuenta que si $a \leq b$, como $\sigma_L : L \longrightarrow D(X(L))$ es un isomorfismo de retículos, entonces $\sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(b)$ y por lo tanto $\sigma_L(b)\Delta\, \sigma_L(a) = \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$. □

Definición 4.3.4.2 *Sea (X,R) un qM_3-espacio y $C_{\triangle R}(X)$ la familia de todos los subconjuntos cerrados, $\triangle-$involutivos y $R-$conos de X . Diremos que $Y \in C_{\triangle R}(X)$ es maximalmente disjunto en $C_{\triangle R}(X)$ con un subconjunto S de X, si $Y \cap S = \emptyset$ y para todo $Z \in C_{\triangle R}(X)$ tal que $Z \cap S = \emptyset$, se verifica que $Z \subseteq Y$.*

Lema 4.3.4.3 *Sea $(L,\exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado y $a,b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) = \Theta(a,b)$,

(ii) *Y es maximalmente disjunto con el conjunto abierto y cerrado $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$ en $C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) = \Theta(a,b)$ con $a \leq b$ y $F \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ disjunto con $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$. Por el Lema 4.3.4.1, sabemos que $Y \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) = \emptyset$ y que $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(F)$. En consecuencia $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) \subseteq \Theta_{C\triangle R_\exists}(F)$ y por tratarse $\Theta_{C\triangle R_\exists}$ de un antiisomorfismo, se verifica que $F \subseteq Y$, quedando probado de esta manera (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si consideramos que Y es maximal en la familia de los subconjuntos de $\mathcal{I}_p(L)$, cerrados, $\triangle-$involutivos, $R_\exists-$conos y disjuntos con $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, entonces por Lema 4.3.4.1 , $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia tal que $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ y por lo tanto $\Theta(a,b) \subseteq \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$. Además, por el Teorema 4.3.1.3, existe F cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$ tal que $\Theta(a,b) = \Theta_{C\triangle R_\exists}(F)$ y por consiguiente tenemos que $\Theta_{C\triangle R_\exists}(F) \subseteq \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$, de donde por ser $\Theta_{C\triangle R_\exists}$ un antiisomorfismo resulta que (1) $Y \subseteq F$. Por otra parte como $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(F)$, entonces se verifica que (2) $F \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) = \emptyset$. Luego de (1) y (2), por la maximalidad de Y, resulta que $Y = F$ y en consecuencia $\Theta(a,b) = \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$. □

Proposición 4.3.4.4 *Sea* $(L,\exists) \in \mathbf{qM_3}$*,* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado. Si* $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$ *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto* R *de* $\mathcal{I}_p(L)$ *abierto y cerrado, tal que* Y *es maximalmente disjunto con* R *en* $C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$.

Dem.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Es inmediato del Lema 4.3.4.3 , siendo $R = \sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $Y \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, tal que existe $R \subseteq \mathcal{I}_p(L)$ que verifica:

(a) R es abierto y cerrado,

(b) $Y \cap R = \emptyset$,

(c) si $F \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ y $F \cap R = \emptyset$, entonces $F \subseteq Y$.

De (a), por la Proposición 2.2.4.5 y la Observación 2.2.4.4, existen $U, V \in D(\mathcal{I}_p(L))$ tales que $U \subseteq V$ y $V \setminus U = R$. Luego existen $a, b \in L$, $a \leq b$ tales que $U = \sigma_L(a)$ y $V = \sigma_L(b)$, de donde por (b) y el Lema 4.3.4.1 , tenemos que (1) $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(Y)$. Sea (2) $\vartheta \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$ tal que (3) $(a,b) \in \vartheta$. Entonces por Teorema 4.3.1.3, existe $F \in C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\vartheta = \Theta_{C\triangle R_\exists}(F)$, lo que implica $(a,b) \in \Theta_{C\triangle R_\exists}(F)$ y en consecuencia por el Lema 4.3.4.1, $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \cap F = \emptyset$. De esto último resulta, por (c), que $F \subseteq Y$, y como $\Theta_{C\triangle R_\exists}$ es un antiisomorfismo tenemos (4) $\Theta_{C\triangle}(Y) \subseteq \Theta_{C\triangle R_\exists}(F) = \vartheta$. Luego de (1), (2), (3) y (4) inferimos que $\Theta_{C\triangle R_\exists}(Y) = \Theta_{C\triangle R_\exists}(a,b)$ y por lo tanto es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia principal. □

Proposición 4.3.4.5 *Sea* $(L,\exists) \in \mathbf{qM_3}$*,* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado y* $a, b \in L$ *tales que* $a \leq b$*. Si* $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) = \Theta(a,b)$,

(ii) *G es el menor subconjunto de $O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $G \in O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L)))$ tal que $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) = \Theta(a,b)$. Como $(a,b) \in \Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$, entonces por el Lema 4.3.4.1, se verifica que (1) $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \subseteq G$.

Por otro lado como $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) = \Theta_{C\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L) \setminus G)$, entonces $\Theta_{C\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L) \setminus G) = \Theta(a,b)$ y por el Lema 4.3.4.3 , $F = \mathcal{I}_p(L) \setminus G$ es maximalmente disjunto con $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$ en $C_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$.

Sea $G' \in O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq G'$, entonces (2) $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus G') = \emptyset$, y (3) $F' = \mathcal{I}_p(L) \setminus G' \in C_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$. Luego de (2) y (3), por la maximalidad de F, resulta que $\mathcal{I}_p(L) \setminus G' \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus G$ y en consecuencia $G \subseteq G'$. Por lo tanto de (1), G es el menor subconjunto de $O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Como por hipótesis $(\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \subseteq G$, entonces por Lema 4.3.4.1 $(a,b) \in \Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$. Por otra parte si $\vartheta \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$ es tal que $(a,b) \in \vartheta$, entonces por el Teorema 4.3.2.2, existe $G' \in O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $\vartheta = \Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G')$ y por Lema 4.3.4.1, $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq G'$. De esto último, teniendo en cuenta que G es el menor conjunto que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, resulta que $G \subseteq G'$ y en consecuencia como $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}$ es un isomorfismo tenemos que $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) \subseteq \Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G')$. De esta forma resulta que $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$ es la menor $\mathbf{M_3}-$congruencia que contiene al par (a,b) y por consiguiente $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) = \Theta(a,b)$. □

Proposición 4.3.4.6 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_{\exists})$ su M_3-espacio asociado. Si $G \in O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$ *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto R de $\mathcal{I}_p(L)$, abierto y cerrado, tal que G es el menor subconjunto de $O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a R.*

Dem.

Es inmediata de las Proposiciones 4.3.4.4, 4.3.4.5 y el Lema 4.3.4.1. □

Lema 4.3.4.7 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado. Si* $G \subseteq \mathcal{I}_p(L)$ *es* $\triangle-$*involutivo y* $R_\exists-$*cono, entonces* $R_\exists^{-1}(G) = G$.

Dem. Como $R_\exists$ es una relación reflexiva, resulta que $G \subseteq R_\exists^{-1}(G)$. Veamos la otra inclusión. Sea $x \in R_\exists^{-1}(G)$, luego existe $y \in G$ tal que $(x, y) \in R_\exists$. Entonces por (qM5), existe $z \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $z \leq y$ y verifica que $(x, z), (z, x) \in R_\exists$. Luego por ser G un conjunto $\triangle-$involutivo, tenemos que $z \in G$ y en consecuencia $x \in R_\exists(G) = G$. □

Observación 4.3.4.8 *En virtud del* Teorema 2.2.1.5, *si un conjunto* G *es* $\triangle-$*involutivo, entonces* G *es suma cardinal de cadenas de dos elementos, es decir* $G = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$, *con* C_i *cadenas maximales (cadenas de dos elementos). De este hecho no es difícil probar que* $R_\exists^{-1}(G) = \bigcup\limits_{i \in I} R_\exists^{-1}(C_i)$.

Lema 4.3.4.9 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado. Entonces cada cadena maximal* C *del espacio* $\mathcal{I}_p(L)$ *verifica que* $R_\exists(C) = R_\exists^{-1}(C)$.

Dem. Sea C una cadena maximal del espacio $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces C es una cadena de dos elementos, digamos $C = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \subset P_2$. Sea $P \in R_\exists(C)$, entonces existe $P_j \in C$ tal que (1) $(P_j, P) \in R_\exists$. Si $P \in min\,\mathcal{I}_p(L)$, por (qM5), se verifica que $(P, P_j) \in R_\exists$ y por lo tanto $P \in R_\exists^{-1}(C)$. Si $P \in max\,\mathcal{I}_p(L)$, entonces por (1) y (qM5), existe $R \subseteq P$ tal que (2) $(P_j, R) \in R_\exists$ y $(R, P_j) \in R_\exists$. Si $R = P$, es claro que $P \in R_\exists^{-1}(C)$. Si $R \subset P$ y $P_j = P_1$, por el Lema 4.3.3.9, podemos asegurar que $(P, P_2) \in R_\exists$ y por lo tanto $P \in R_\exists^{-1}(C)$. Si $R \subset P$ y $P_j = P_2$, como $R_\exists(P_1)$ es un conjunto creciente, entonces $(P_1, P_2) \in R_\exists$ y por (2), resulta en este caso que $(P_1, R) \in R_\exists$. De esto último, considerando que $R \in min\,\mathcal{I}_p(L)$ y la propiedad (qM5), podemos concluir que $(R, P_1) \in R_\exists$. Luego por el Lema 4.3.3.9 tenemos que $(P, P_2) \in R_\exists$, con lo cual $P \in R_\exists^{-1}(C)$. Hemos probado así que $R_\exists(C) \subseteq R_\exists^{-1}(C)$. Para la otra inclusión consideremos $S \in R_\exists^{-1}(C)$, entonces existe $M \in C$ tal que (3) $(S, M) \in R_\exists$. Si $M \in min\,\mathcal{I}_p(L)$, por (qM5), se verifica que $(M, S) \in R_\exists$ y en consecuencia

$S \in R_\exists(C)$. Si $M \in max\, \mathcal{I}_p(L)$, existe $T \in C$ tal que $T \subset M$. Por otra parte, de (3) y (qM5), existe $H \subseteq M$ tal que $(S, H) \in R_\exists$ y $(H, S) \in R_\exists$. Si $H = M$, es claro que $S \in R_\exists(C)$. Si en cambio $H \subset M$, entonces $H = T$ y por lo tanto $S \in R_\exists(C)$. $\square$

Proposición 4.3.4.10 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$*,* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado. Entonces cada cadena maximal* C *del espacio* $\mathcal{I}_p(L)$ *verifica que* $R_\exists^{-1}(C)$ *es un cerrado,* $\triangle-$*involutivo y* $R_\exists-$*cono de* $\mathcal{I}_p(L)$ *y* $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$ *es abierto,* $\triangle-$*involutivo y* $R_\exists-$*cono de* $\mathcal{I}_p(L)$*.*

Dem. Sea C una cadena maximal del espacio $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces C es una cadena de dos elementos, digamos $C = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \subset P_2$.

(i) $R_\exists^{-1}(C)$ es un conjunto $\triangle-$involutivo:

En virtud del Teorema 2.2.1.5, basta con probar que $R_\exists^{-1}(C)$ es un conjunto creciente y decreciente. Sea $P \in R_\exists^{-1}(C)$ y $Q \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $P \subseteq Q$. Entonces existe $T \in C$ tal que $(P, T) \in R_\exists$. Si $P = Q$, entonces $Q \in R_\exists^{-1}(C)$. Si $P \subset Q$, se presentan dos casos, (a) $T \in min\, \mathcal{I}_p(L) \cap C$ o (b) $T \in max\, \mathcal{I}_p(L) \cap C$. En el caso (a), $T = P_1$ y $(P, P_1) \in R_\exists$, de donde por el Lema 4.3.3.9, $(Q, P_2) \in R_\exists$, por lo que resulta que $Q \in R_\exists^{-1}(C)$. En el caso (b), $T = P_2$ y $(P, P_2) \in R_\exists$. Entonces teniendo en cuenta la propiedad (qM5) de los qM_3-espacios, existe $R \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $R \subseteq P_2$, $(P, R) \in R_\exists$ y $(R, P) \in R_\exists$. Luego $R \in C$ y como $R_\exists(P)$ un conjunto creciente, tenemos que $(P, Q) \in R_\exists$, de donde resulta que $(Q, R) \in R_\exists$ y así $Q \in R_\exists^{-1}(C)$. En forma análoga se puede probar que $R_\exists^{-1}(C)$ es decreciente.

(ii) $R_\exists^{-1}(C)$ es un $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$:

Para probarlo deberíamos demostrar que $R_\exists(R_\exists^{-1}(C)) = R_\exists^{-1}(C)$. Pero esto resulta inmediato del Lema 4.3.4.9, pues $R_\exists(R_\exists^{-1}(C)) = R_\exists(R_\exists(C)) = R_\exists(C)$.

(iii) $R_\exists^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$:

Sea C una cadena maximal del espacio $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces C es una cadena de dos elementos, digamos $C = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \subset P_2$. Consideremos $P \in \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$. Luego $P \notin R_\exists^{-1}(C)$ y por lo tanto $(P, P_j) \notin R_\exists$ para $j = 1, 2$. De esto último, teniendo en cuenta el Lema 4.2.1.4, existen $U_j \in D(\mathcal{I}_p(L))$, con $j = 1, 2$, tales que (1) $P_j \in U_j$, $P \notin R_\exists^{-1}(U_j)$, para $j = 1, 2$. Por otro lado como $U_j \in D(\mathcal{I}_p(L))$, existen $x_j \in L$ tales que $U_j = \sigma_L(x_j)$. Entonces teniendo en cuenta la Proposición 4.2.2.1 y el hecho de que σ_L es un $\mathbf{qM_3}-$homomorfismo, tenemos que $P \notin R_\exists^{-1}(\sigma_L(x_1)) \cup R_\exists^{-1}(\sigma_L(x_2) = \exists_{R_\exists}(\sigma_L(x_1)) \cup \exists_{R_\exists}(\sigma_L(x_2)) = \sigma_L(\exists x_1) \cup \sigma_L(\exists x_2) = \sigma_L(\exists(x_1 \vee x_2))$. Por lo tanto $P \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\exists(x_1 \vee x_2))$, siendo $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\exists(x_1 \vee x_2))$ un abierto de $\mathcal{I}_p(L)$. Ahora probaremos que $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\exists(x_1 \vee x_2)) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$, con lo que quedará probado que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$ es un abierto. Sea $Q \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\exists(x_1 \vee x_2))$, entonces (2) $\exists(x_1 \vee x_2) \in Q$. Supongamos que $Q \in R_\exists^{-1}(C)$. Luego $(Q, P_1) \in R_\exists$ o $(Q, P_2) \in R_\exists$ y en consecuencia $\exists^{-1}(Q) \subseteq P_1$ o $\exists^{-1}(Q) \subseteq P_2$. Entonces de (2), resulta que $x_1 \vee x_2 \in P_1$ o $x_1 \vee x_2 \in P_2$, lo que implica que $x_1 \in P_1$ o $x_2 \in P_2$, que contradice (1).

Otra forma: En el Lema 4.3.4.9, hemos probado que cada cadena maximal C del espacio $\mathcal{I}_p(L)$ verifica que $R_\exists(C) = R_\exists^{-1}(C)$. Si $C = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \subset P_2$, entonces $R_\exists(C) = R_\exists(P_1) \cup R_\exists(P_2)$. Como por la propiedad (qM2) de los qM_3-espacios se cumple que $R_\exists(P_i)$ es un cerrado para $i = 1, 2$, resulta que $R_\exists(C)$ es una unión finita de cerrados y en consecuencia es un cerrado.

(iv) $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$ es un abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$:

De lo demostrado en (i) y (iii), es inmediato que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$ es un abierto y $\triangle-$involutivo. Probemos que es un $R_\exists-$cono. Tengamos en cuenta que por el Lema 4.3.4.9, $R_\exists^{-1}(C) = R_\exists(C)$. Sea $P \in R_\exists(\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C))$, entonces existe (1) $Q \in \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$ tal que $(Q, P) \in R_\exists$. Supongamos que $P \in R_\exists^{-1}(C) = R_\exists(C)$. Luego existe $T \in C$ tal que $(T, P) \in R_\exists$. Si $P \in min\,\mathcal{I}_p(L)$, entonces por (qM5), tenemos que $(P, T), (T, P) \in R_\exists$ y por lo tanto $Q \in R_\exists^{-1}(C)$, que contradice (1). Si $P \in max\,\mathcal{I}_p(L)$, entonces, por (qM5), existe $S \subseteq P$ tal que $(S, T), (T, S) \in R_\exists$. Si en este caso fuera $S = P$, es claro que $Q \in R_\exists^{-1}(C)$, que contradice (1). Si ocurriera que $S \subset P$, entonces como S es minimal, y $R_\exists(S)$ es creciente, se verifica que $(S, P) \in R_\exists$ y en consecuencia $Q \in R_\exists^{-1}(C)$, que contradice (1). Hemos verificado así que $R_\exists(\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$. Como la otra inclusión es inmediata, por ser $R_\exists$ reflexiva, resulta que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C)$ es un $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.

$\square$

Observación 4.3.4.11 *De la* Proposición 4.3.4.10 *y el* Lema 4.3.4.9, *podemos afirmar que para toda C cadena maximal del espacio $\mathcal{I}_p(L)$, se verifica que $R_\exists(C)$ es un cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$ y $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists(C)$ es abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.*

Proposición 4.3.4.12 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado y $a, b \in L$ tales que $a \le b$. Si $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) $G = \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$, *con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta(a, b)$, entonces por la Proposición 4.3.4.5, G es el menor subconjunto de $O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$. Como G un conjunto $\triangle-$involutivo y un $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$, por el Lema 4.3.4.7 y la Observación 4.3.4.8, tenemos que $G = \bigcup\limits_{i \in I} R_\exists^{-1}(C_i)$, con C_i cadenas maximales (cadenas de dos elementos), para todo $i \in I$. Por otro lado como $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq G$, existe un conjunto $I_0 \subseteq I$, tal que $R_\exists^{-1}(C_i) \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) \neq \emptyset$, para todo $i \in I_0$ y $\bigcup\limits_{i \in I_0} R_\exists^{-1}(C_i) \subseteq G$. Supongamos que $\bigcup\limits_{i \in I_0} R_\exists^{-1}(C_i) \subset G$, entonces existe (1) $P \in G$ y $j \notin I_0$ tal que $R_\exists^{-1}(C_j) \subseteq G$ verifica que (2) $P \in R_\exists^{-1}(C_j)$ y $R_\exists^{-1}(C_j) \cap (\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)) = \emptyset$. Por la Proposición 4.3.4.10, resulta que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C_j)$ es un subconjunto abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$ tal que $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C_j)$, de donde por la minimalidad de G, tenemos que $G \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C_j)$, o lo que es equivalente (3) $R_\exists^{-1}(C_j) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus G$. Entonces de (2) y (3) tenemos que $P \in \mathcal{I}_p(L) \setminus G$, lo que contradice (1). Por lo tanto $G = \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_j)$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Sea $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que $G = \bigcup\limits_{C_i \cap (U \setminus V) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_j)$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$. Veamos que $V \setminus U \subseteq G$. Sea $P \in V \setminus U$, entonces como el espacio es suma cardinal de cadenas de dos elementos se verifica que $P \in C_P$, siendo

C_P la cadena de dos elementos que contiene a P. Por otro lado, como $R_\exists$ una relación reflexiva, $P \in R_\exists(C_P)$ y $P \in R_\exists(C_P) \cap (V \setminus U)$. Luego, teniendo en cuenta el Lema 4.3.4.9, $P \in R_\exists(C_P) \subseteq \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists(C_i) = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i) = G$.

Sea $G' \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ tal que (1) $V \setminus U \subseteq G'$. Entonces se verifica que $G \subseteq G'$. En efecto, sea $Q \in G = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists(C_j) = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$, entonces existe i_0 tal que $Q \in R_\exists(C_{i_0})$ y (2) $C_{i_0} \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$. Luego de (1) y (2), $C_{i_0} \cap G' \neq \emptyset$ y por ser G' $\triangle-$involutivo se debe verificar $C_{i_0} \subseteq G'$. Luego como G' es un $R_\exists-$cono se verifica que $R_\exists(C_{i_0}) \subseteq R_\exists(G') = G'$, lo cual implica que $Q \in G'$. Hemos probado así que $G \subseteq G'$, por lo tanto G es el menor conjunto de $O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ que contiene a $\sigma_L(b) \setminus \sigma_L(a)$, lo cual implica, por la Proposición 4.3.4.5, que $\Theta_{O\triangle}(G) = \Theta(a, b)$.

□

Proposición 4.3.4.13 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado y* $a, b \in L$ *tales que* $a \leq b$. *Si* $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G)$, *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto* R *de* $\mathcal{I}_p(L)$ *cerrado y abierto, tal que* $G = \bigcup_{C_i \cap R \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$, *con* C_i *cadena maximal en* $\mathcal{I}_p(L)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Inmediato de la Proposición 4.3.4.12.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea R un conjunto tal como plantea la hipótesis. Luego como por la Observación 2.2.4.4, R es un conjunto convexo, la Proposición 2.2.4.5, nos asegura que existen $U, V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, tales que $U \subseteq V$ y $R = V \setminus U$. Por otro lado como σ_L es un $\mathbf{qM_3}-$isomorfismo existen $a, b \in L$ tales que $a \leq b$, $U = \sigma_L(a)$ y $V = \sigma_L(b)$. En consecuencia $G = \bigcup_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$. Luego por la Proposición 4.3.4.12 , podemos asegurar que $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta(a, b)$, y por lo tanto $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia principal. □

La demostración de la siguiente proposición es larga y computacional, por este motivo la haremos en forma detallada.

Proposición 4.3.4.14 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado y* $a, b \in L$ *tales que* $a \leq b$. *Si* $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) $G = R_\exists^{-1}((\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a)))$.

Dem. Sean $U = \sigma_L(a)$ y $V = \sigma_L(b)$. Por lo visto en la Proposición 4.3.4.12, solo debemos probar que $R_\exists^{-1}((\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))) = \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$.

(i) $R_\exists^{-1}((\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))) \subseteq \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$:
En la Proposición 2.2.4.15, se probó que $(\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a)) \subseteq \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i$. Entonces por la Observación 4.3.4.8, resulta que $R_\exists^{-1}((\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))) \subseteq R_\exists^{-1}(\bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} C_i) = \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$.

(ii) $\bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i) \subseteq R_\exists^{-1}((\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a)))$:

(1) $x \in \bigcup\limits_{C_i \cap (V \setminus U) \neq \emptyset} R_\exists^{-1}(C_i)$, con C_i cadena maximal en $\mathcal{I}_p(L)$, [hip.]

(2) existe i_0 tal que $x \in R_\exists^{-1}(C_{i_0})$ y $C_{i_0} \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$, [(1)]

(3) $x \in V \setminus U$ o $x \notin V \setminus U$,

Si en (3)

(4) $x \in V \setminus U$,

pueden presentarse dos casos:

(4.1) (a) $max\, \mathcal{I}_p(L)$ o (b) $x \in min\, \mathcal{I}_p(L)$, [$\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

si en (4.1) tenemos (a)

(4.2) $x \in \triangle^* V$, [(4.1)(a), (D) Lema 2.1.3.1]

(4.3) $x \notin \triangle^* U$, [(4), (MP6) Lema 2.1.3.1]

(4.4) $x \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$, [(4.2), (4.3)]

si en (4.1) ocurre (b)

(4.5) $x \in m_{\mathcal{I}_p(L)} V$, [(4), (4.1)(b)]

(4.6) $x \in \neg V \subseteq \nabla^* V$, [(4.5), (B) Lema 2.1.3.1]

si fuese que

(4.7) $x \in \nabla^* U$, [hip.]

(4.8) $x \in \neg U$, [(4), (4.7)]

(4.9) $x \in m_{\mathcal{I}_p(L)} U$, [(4.8), (4.5), (MP8) Lema 2.1.3.1]

(4.10) $x \in U$, [(4.9)]

(4.11) (4.10) contradice (4),

(4.12) $x \notin \nabla^* U$, [(4.7), (4.11)]

(4.13) $x \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$. [(4.6), (4.12), $\mathcal{I}_p(L)$ es un M_3-espacio]

Como $R_\exists$ es una relación reflexiva, se verifica del paso anterior lo siguiente:

(4.14) $x \in R_\exists^{-1}(\nabla^* V \setminus \nabla^* U) \subseteq R_\exists^{-1}((\nabla^* \sigma_L(b) \setminus \nabla^* \sigma_L(a)) \cup (\triangle^* \sigma_L(b) \setminus \triangle^* \sigma_L(a)))$.

Si en (3)

(5) $x \notin V \setminus U$,

(5.1) $x \in R_\exists^{-1}(C_{i_0})$ y existe $y \in C_{i_0} \cap (V \setminus U)$, [(2), (5)]

(5.2) existe $t \in C_{i_0}$ tal que $(x, t) \in R_\exists$. [(5.1)]

Por otro lado, trabajando en forma análoga al caso (4), de (5.1) tenemos:

(5.3) $y \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$ o $y \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$. [(5.1)]

Como $t, y \in C_{i_0}$, teniendo en cuenta que los conjuntos $\triangle^* Z$ y $\nabla^* Z$, son $\triangle-$involutivos para todo subconjunto Z del espacio, resulta que:

(5.4) $t \in \triangle^* V \setminus \triangle^* U$ o $t \in \nabla^* V \setminus \nabla^* U$, [(5.3)]

(5.5) $t \in (\triangle^* V \setminus \triangle^* U) \cup (\nabla^* V \setminus \nabla^* U)$, [(5.4)]

(5.6) $x \in R_{\exists}^{-1}((\triangle^* V \setminus \triangle^* U) \cup (\nabla^* V \setminus \nabla^* U))$. [(5.2), (5.4)]

□

Corolario 4.3.4.15 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) *$G = R_\exists^{-1}(\sigma_L(d))$ con $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$, donde $\overline{\nabla a}$ y $\overline{\triangle a}$ son el complemento booleano en $K(L)$ de ∇a y $\triangle a$ respectivamente.*

Dem. Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 4.3.4.14 y 2.2.4.6. □

Observación 4.3.4.16 *Como consecuencia del* Corolario 4.3.4.15 *y la* Proposición 4.2.2.1, *el conjunto $G = R_\exists^{-1}(\sigma_L(d))$, con $d \in K(L)$, es un conjunto abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$, puesto que $G = \exists_{R_\exists}(\sigma_L(d)) = \sigma_L(\exists d)$. Por otro lado teniendo en cuenta la* Observación 4.3.4.11, *es un $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$. Además resulta claro que $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\exists d)$ es también un conjunto abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$. Mas aún, como $d \in K(L)$, entonces $d = \triangle d$ y por lo tanto en virtud de la propiedad* (E6), *de los qM_3-retículos, resulta que $\sigma_L(\exists d)) = \sigma_L(\exists \triangle d)) = \sigma_L(\triangle \exists d))$. En consecuencia $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\exists d) = \sigma_L(\overline{\triangle \exists d}) = \sigma_L(\overline{\exists \triangle d}) = \sigma_L(\overline{\exists d})$.*

Corolario 4.3.4.17 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Si $G \in O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) $G = \sigma_L(\exists d)$ *con* $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$, *donde* $\overline{\nabla a}$ *y* $\overline{\triangle a}$ *son el complemento booleano en* $K(L)$ *de* ∇a *y* $\triangle a$ *respectivamente.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 4.3.4.15 y la Observación 4.3.4.16 . □

Proposición 4.3.4.18 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_{\exists})$ *su* M_3-*espacio asociado. Si* $G \in O_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$, *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal,*

(ii) G *es abierto, cerrado,* $\triangle-$*involutivo y* $R_{\exists}-$*cono de* $\mathcal{I}_p(L)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por el Corolario 4.3.4.17, sabemos que si $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia principal, digamos $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G) = \Theta(a, b)$, con $a \leq b$, entonces $G = \sigma_L(\exists d)$ con $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a}) \in K(L)$, de donde se infiere por la Observación 4.3.4.16, que G es abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_{\exists}-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea G es abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo y $R_{\exists}-$cono en $\mathcal{I}_p(L)$. Como G es abierto, cerrado, por la Proposición 2.2.4.5, $G = V \setminus U$, con $U, V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, $U \subseteq V$, $V = \sigma_L(b)$ y $U = \sigma_L(a)$, con $a, b \in L$. Por ser además G es $\triangle-$involutivo, en la Proposición 2.2.4.19, se demostró que $G = (\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$. Luego teniendo en cuenta que G es un $R_{\exists}-$cono en $\mathcal{I}_p(L)$, resulta, por el Lema 4.3.4.7, que $G = R_{\exists}^{-1}(G)$, es decir $G = R_{\exists}^{-1}((\nabla^*\sigma_L(b) \setminus \nabla^*\sigma_L(a)) \cup (\triangle^*\sigma_L(b) \setminus \triangle^*\sigma_L(a))$. Entonces por la Proposición 4.3.4.14, podemos asegurar que $\Theta_{O\triangle R_{\exists}}(G)$, es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia principal. □

Teorema 4.3.4.19 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$ *y* $(\mathcal{I}_p(L), R_{\exists})$ *su* M_3-*espacio asociado. Entonces el retículo* $OC_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$ *de los subconjuntos abiertos, cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R_{\exists}-$*conos de* $\mathcal{I}_p(L)$ *es isomorfo al retículo* $Con_{\mathbf{qM_3}P}(L)$ *de las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales de* L, *y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{OC\triangle R_{\exists}} : OC_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L)) \longrightarrow Con_{\mathbf{qM_3}P}(L)$ *definida por la misma prescripción que la función* $\Theta_{O\triangle}$ *dada en* (A3'), *es decir* $\Theta_{OC\triangle R_{\exists}}(G) = \{(a, b) \in L \times L : (\sigma_L(b) \Delta\, \sigma_L(a)) \subseteq G\}$.

Dem.

Es inmediato del Teorema 4.3.2.2, la Proposición 4.3.4.18 y el hecho de que $OC_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ es un subretículo de $O_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$. $\square$

Corolario 4.3.4.20 *En todo qM_3-retículo acotado, el retículo de las congruencias principales es un álgebra de Boole.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Teorema 4.3.4.19 , teniendo en cuenta que el retículo de los subconjuntos cerrados, abiertos, $\triangle-$involutivos y $R_\exists-$conos de su qM_3-espacio asociado es un álgebra de Boole. Pues es claro que $OC_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$ es cerrado por uniones e intersecciones finitas y si $G \in OC_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces por ser $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono, $G = R_\exists(G) = \bigcup\limits_{i\in I} R_\exists(C_i) = \bigcup\limits_{i\in I} R_\exists^{-1}(C_i)$, siendo C_i cadenas maximales de $\mathcal{I}_p(L))$, es decir cadenas de dos elementos. En consecuencia $\mathcal{I}_p(L) \setminus G = \bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\exists^{-1}(C_i))$. De esto último, por la Proposición 4.3.4.10 y el Lema 4.3.1.2, podemos afirmar que $\mathcal{I}_p(L) \setminus G \in OC_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$. $\square$

Proposición 4.3.4.21 *Sea $(L, \exists) \in$ $\mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado, $d \in K(L)$ y $\overline{d}$ el complemento booleano de d en $K(L)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para toda $\mathbf{qM_3}-$congruencia φ sobre L:*

(i) $\varphi = \Theta_{O\triangle R_\exists}(\sigma_L(\exists d))$,

(ii) $\varphi = \Theta_{C\triangle R_\exists}(\sigma_L(\overline{\exists d}))$,

(iii) $\varphi = \theta(I(\exists d))$, *donde $\theta(I(\exists d))$ es la congruencia asociada al ideal $I(\exists d)$.*

Dem.

(i)$\Leftrightarrow$(ii): Resulta de los Teoremas 4.3.1.3 y 4.3.2.2, el Lema 4.3.2.1 y la Observación 4.3.4.16 .

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $\varphi = \Theta_{C\triangle R_\exists}(\sigma_L(\overline{\exists d}))$, con $d \in K(L)$. Luego $Y = \sigma_L(\overline{\exists d})$ es un cerrado y creciente de $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces por la Proposición 2.2.4.2, existe el ideal $I = \bigcap\limits_{Q\in Y} Q$ tal que $Y = \sigma(I)$. Veamos que $I = I(\exists d)$. En efecto: Sea $x \in I(\exists d)$ y $Q \in Y$, entonces $Q \in \mathcal{I}_p(L)$

y $\overline{\exists d} \notin Q$. Del hecho de que $0 = \exists d \wedge \overline{\exists d} \in Q$, para todo $Q \in Y$, tenemos que $\exists d \in Q$ para todo $Q \in Y$ y como $x \leq \exists d$, se verifica que $x \in \bigcap\limits_{Q \in Y} Q$. Para la otra inclusión, sea $y \in \bigcap\limits_{Q \in Y} Q$, luego es claro que (1) $y, \exists d \in Q$ para todo $Q \in Y$. Si $y \not\leq \exists d$, entonces por el teorema de Birkhoff-Stone, existe un ideal primo S tal que $\exists d \in S$ y $y \notin S$, esto implica que $S \in \sigma_L(\overline{\exists d}) = Y$ e $y \notin S$, lo que contradice (1). Por lo tanto $y \leq \exists d$ y así $y \in I(\exists d)$. Finalmente por la Proposición 2.2.4.1 tenemos que $\varphi = \theta(I(\exists d))$.

(iii)$\Rightarrow$ (ii): Sea $\varphi = \theta(I(\exists d))$, donde $\theta(I(\exists d))$ es la congruencia asociada al ideal $I(\exists d)$ con $d \in K(L)$. Entonces por la Proposición 2.2.4.1, se verifica que (1) $\varphi = \Theta(\sigma(I(\exists d)))$. Además (2) $\sigma(I(\exists d)) = \sigma_L(\overline{\exists d})$. En efecto: si $I \in \sigma(I(\exists d))$, entonces $I \in \mathcal{I}_p(L)$ e $I(\exists d) \subseteq I$, luego $\exists d \in I$ y como I es un ideal propio por ser primo, se cumple que $\overline{\exists d} \notin I$, por lo tanto $I \in \sigma_L(\overline{\exists d})$. Recíprocamente, si $I \in \sigma_L(\overline{\exists d})$, entonces $I \in \mathcal{I}_p(L)$ y $\overline{\exists d} \notin I$. Como $0 = \exists d \wedge \overline{\exists d}$, tenemos que $\exists d \in I$ y en consecuencia $I(\exists d) \subseteq I$ de donde $I \in \sigma(I(\exists d))$.

Luego de (1), (2) y la Observación 2.2.4.17, resulta que $\varphi = \Theta_{C\triangle}(\sigma_L(\overline{d}))$. □

Finalmente pudimos determinar que las $\mathbf{M_3}-$congruencias principales sobre un M_3-retículo son las congruencias asociadas a los ideales generados por los elementos booleanos del álgebra, ya que obtuvimos el siguiente resultado:

Proposición 4.3.4.22 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado, y* $a, b \in L$ *tales que* $a \leq b$. *Si* $\overline{\nabla a}$ *y* $\overline{\triangle a}$ *son el complemento booleano en* $K(L)$ *de* ∇a *y* $\triangle a$ *respectivamente, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta(a, b) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(G)$,

(ii) $\Theta(a, b) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(\sigma_L(\exists d))$, *con* $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$,

(iii) $\Theta(a, b) = \theta(I(\exists d))$, *con* $d = (\nabla b \wedge \overline{\nabla a}) \vee (\triangle b \wedge \overline{\triangle a})) \in K(L)$, *donde* $\theta(I(\exists d))$ *es la congruencia asociada al ideal* $I(\exists d)$.

Dem. Inmediata del Corolario 4.3.4.17 y la Proposición 4.3.4.21. □

Corolario 4.3.4.23 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado y* φ *una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia sobre* L. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal,*

(ii) $\varphi = \theta(I(\exists d))$ *con* $d \in K(L)$*, siendo* $\theta(I(\exists d))$ *la congruencia asociada al ideal* $I(\exists d)$*.*

Dem. Inmediata del Teorema 4.3.4.19 y la Proposición 4.3.4.22. $\square$

Corolario 4.3.4.24 *Todo* qM_3-*retículo acotado tiene las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales definibles ecuacionalmente* (CPDE).

Dem. Es consecuencia inmediata del Proposición 4.3.4.22. $\square$

Observación 4.3.4.25 *En todo* qM_3-*retículo acotado se verifica:*

(i) *la intersección de un número finito de* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales es también una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal,*

(ii) *las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales son booleanas.*

Proposición 4.3.4.26 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$*,* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado* φ_1 *y* φ_2 *son* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales, tales que* $\varphi_1 = \theta(I(\exists d))$ *y* $\varphi_2 = \theta(I(\exists k))$ *con* $d, k \in K(L)$*, entonces se verifican:*

(i) $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \theta(I(\exists d \vee \exists k))$,

(ii) $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$.

Dem. Sean (1) $\varphi_1 = \theta(I(\exists d))$ y (2) $\varphi_2 = \theta(I(\exists k))$ con $d, k \in K(L)$ congruencias principales. Por la Proposición 4.3.4.22, se verifica que $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \Theta_{O \triangle R_\exists}(\sigma_L(\exists d)) \vee \Theta_{O \triangle R_\exists}(\sigma_L(\exists k))$ y como $\Theta_{O \triangle R_\exists}$ y σ_L son isomorfismos tenemos, (3) $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \theta(I(\exists d \vee \exists k))$. Demostremos ahora que $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$. En efecto: Sea $(x, y) \in \varphi_1 \circ \varphi_2$, entonces existe $z \in L$ tal que $(x, z) \in \varphi_2$ y $(z, y) \in \varphi_1$. Luego teniendo en cuenta (1) y (2) se cumple que $x \vee \exists k = z \vee \exists k$ y $z \vee \exists d = y \vee \exists d$, de donde $x \vee \exists d \vee \exists k = z \vee \exists d \vee \exists k$ y $z \vee \exists d \vee \exists k = y \vee \exists d \vee \exists k$. Por lo tanto $x \vee \exists d \vee \exists k = y \vee \exists d \vee \exists k$, de donde se infiere que $(x, y) \in \theta(I(\exists d \vee \exists k))$ y de (3) tenemos entonces que $(x, y) \in \varphi_1 \vee \varphi_2$. La otra inclusión es inmediata y resulta del hecho de que $\varphi_i \subseteq \varphi_1 \circ \varphi_2$ para $i = 1, 2$ y por lo tanto $\varphi_1 \vee \varphi_2 \subseteq \varphi_1 \circ \varphi_2$. $\square$

Corolario 4.3.4.27 *En la variedad* $\mathbf{qM_3}$*, la composición de congruencias principales es conmutativa.*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.4.32. □

El corolario siguiente proporciona una caracterización de las congruencias en los qM_3-retículos finitos.

Corolario 4.3.4.28 *Las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias sobre un* qM_3-*retículo finito son principales.*

Dem. Sea $(L, \exists)$ un qM_3-retículo finito, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado y φ una $\mathbf{qM_3}-$congruencia sobre L. Entonces por el Teorema 4.3.2.2, existe G un subconjunto abierto $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}p(L)$ tal que $\varphi = \Theta_{O\triangle R_\exists}(G)$. Por otro lado como L es finito, entonces $\mathcal{I}p(L)$ es suma cardinal de un número finito de cadenas de dos elementos y la topología del espacio de Priestley es la discreta. Luego G es abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}p(L)$, en consecuencia la congruencia que determina, en virtud del Teorema 4.3.4.19, es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia principal. □

4.3.5. $\mathbf{qM_3}-$congruencias booleanas

Los siguientes resultados dan una caracterización de las congruencias booleanas en los qM_3-retículos.

Lema 4.3.5.1 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$*,* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado e* Y *un subconjunto abierto,* $\triangle-$*involutivo y* $R_\exists-$*cono de* $\mathcal{I}_p(L)$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y)$ *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia booleana sobre* L*,*

(ii) $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ *es un subconjunto abierto,* $\triangle-$*involutivo y* $R_\exists-$*cono de* $\mathcal{I}_p(L)$*.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y)$ una $\mathbf{qM_3}-$congruencia booleana sobre L, entonces existe $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$, tal que $\Theta_{O\triangle}(Y) \cap \Theta_{O\triangle}(G) = id_L$ y $\Theta_{O\triangle}(Y) \cup \Theta_{O\triangle}(G) = L \times L$, siendo Y y G abiertos, $\triangle-$involutivos y $R_\exists-$conos de $\mathcal{I}_p(L)$. Como $\Theta_{O\triangle R_\exists}$ es un isomorfismo se verifica que $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y \cap G) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(\emptyset)$ y $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y \cup G) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$. De donde resulta que $Y \cap G = \emptyset$ y $Y \cup G = \mathcal{I}_p(L)$, y por lo tanto $G = \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$, lo que implica que $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ es un subconjunto abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $G = \mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ un abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$, entonces $\Theta_{O\triangle R_\exists}(G) \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$. Como Y es también un abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono, por el Teorema 4.3.2.2, tenemos que $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y) \in Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$. Además por ser $\Theta_{O\triangle R_\exists}$ un isomorfismo, se verifica que $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y) \cap \Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(Y \cap G) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(\emptyset) = id_L$ y $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y) \cup \Theta_{O\triangle R_\exists}(G) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(Y \cap G) = \Theta_{O\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L)) = L \times L$, lo que implica $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia booleana. $\square$

Proposición 4.3.5.2 *Sea $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$ e $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ su M_3-espacio asociado. Si Y es subconjunto de $\mathcal{I}_p(L)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia booleana sobre L,*

(ii) *Y es un subconjunto abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Si $\Theta_{O\triangle R_\exists}(Y)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia booleana sobre L, entonces Y es un abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$. Por el Lema 4.3.5.1, se verifica que $\mathcal{I}p(L) \setminus Y$ es también un subconjunto abierto, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$, de donde tenemos que Y es un subconjunto abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea Y es un subconjunto abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$. Entonces por el Corolario 4.3.4.20, $\mathcal{I}_p(L) \setminus Y$ es un subconjunto abierto, cerrado, $\triangle-$involutivo y $R_\exists-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$. Luego, por el Lema 4.3.5.1, podemos afirmar que $\Theta_{O\triangle}(Y)$ es una $\mathbf{qM_3}-$congruencia booleana. $\square$

Corolario 4.3.5.3 *Sea* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia booleana sobre* L,

(ii) φ *es una* $\mathbf{qM_3}-$*congruencia principal sobre* L.

Dem. Inmediato de la Proposición 4.3.5.2 y el Teorema 4.3.4.19. $\square$

Teorema 4.3.5.4 *Sean* $(L, \exists) \in \mathbf{qM_3}$ *e* $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ *su* M_3-*espacio asociado. Entonces el retículo* $OC_{\triangle R_\exists}\mathcal{I}_p(L)$ *de los subconjuntos abiertos, cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R_\exists-$*cono de* $\mathcal{I}_p(L)$, *es isomorfo al retículo* $Con_{\mathbf{qM_3}B}(L)$ *de las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias booleanas sobre* L, *y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{OC\triangle R_\exists} : OC_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L)) \longrightarrow Con_{\mathbf{qM_3}B}(L)$ *definida por la misma prescripción que la función* $\Theta_{O\triangle R_\exists}$, *es decir* $\Theta_{OC\triangle R_\exists}(G) = \{(a, b) \in L \times L : (\sigma_L(b)\Delta\, \sigma_L(a)) \subseteq G\}$.

Dem.

Inmediato del Corolario 4.3.5.3 y el Teorema 4.3.4.19 . $\square$

Corolario 4.3.5.5 *Las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales sobre un* qM_3-*retículo son conmutativas y booleanas, en consecuencia son congruencias factores.*

Dem. Es inmediata de los Corolarios 2.2.5.3 y 4.3.5.3. $\square$

Corolario 4.3.5.6 *Las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias principales y booleanas sobre un* qM_3-*retículo acotado* $(L, \exists)$ *son congruencias regulares y uniformes.*

Dem. Sea φ una $\mathbf{qM_3}-$congruencia principal, entonces por el Corolario 4.3.4.23, $\varphi = \theta(I(\exists a))$, con $a \in K(L)$. Si $|x|_\varphi$ es la clase de equivalencia de x, entonces $f : |x|_\varphi \longrightarrow |0|_\varphi$, definida por $f(z) = z \wedge \exists a$ es una aplicación biyectiva. En efecto, dado $z \in |x|_\varphi$, es claro que $z \wedge \exists a \leq \exists a$ y por lo tanto $z \wedge \exists a \in I(\exists a) = |0|_\varphi$. Por otro lado si $y, z \in |x|_\varphi$ son tales que $y \neq z$, entonces $x \vee \exists a = y \vee \exists a$ y $x \vee \exists a = z \vee \exists a$, de donde (1) $y \vee \exists a = z \vee \exists a$. Si fuera $y \wedge \exists a = z \wedge \exists a$, de (1) por la ley del corte resultaría que $z = y$. Por lo tanto $y \wedge \exists a \neq z \wedge \exists a$

y así $f(y) \neq f(z)$, con lo cual f es inyectiva. Sea ahora $t \in |0|_\varphi$, entonces $t \leq \exists a$. Si consideramos $z = (x \wedge \overline{\exists a}) \vee t$, entonces es fácil probar que $z \vee \exists a = x \vee \exists a$, lo que implica que $z \in |x|_\varphi$ y además $f(z) = t$, de donde resulta que f es sobre. Lo probado nos permite afirmar que cualesquiera sean $|x|_\varphi$ y $|t|_\varphi$ se verifica que $||x|_\varphi| = ||t|_\varphi|$, de donde resulta que las congruencias principales son uniformes. Las congruencias principales son regulares, pues si φ_1 y φ_2 dos congruencias principales tales que $|0|_{\varphi_1} = |0|_{\varphi_2}$, entonces $\varphi_1 = \theta(I(\exists a))$, $\varphi_2 = \theta(I(\exists b))$, con $a, b \in K(L)$, y se verifica que $|0|_{\varphi_1} = I(\exists a)$ y $|0|\varphi_2 = I(\exists b)$ por lo tanto $\varphi_1 = \varphi_2$. Como por el Corolario 4.3.5.3, las congruencias booleanas coinciden con las principales, entonces dichas congruencias también son regulares y uniformes. □

Teorema 4.3.5.7 *La variedad* $\mathbf{qM_3}$ *es una variedad filtral.*

Dem. Resulta por la Observación 2.2.5.10, el hecho de que la variedad $\mathbf{qM_3}$ es semisimple y que por el Corolario 4.3.4.24, todo qM_3-retículo acotado verifica la propiedad (CPDE).

□

Capítulo 5

M_3-retículos monádicos

En este capítulo introducimos los M_3-retículos monádicos como M_3-retículos acotados dotados de dos operadores unarios adicionales y estudiamos algunas propiedades algebraicas de los mismos. También obtenemos una dualidad topológica para estas álgebras, que extiende la dualidad para los M_3-retículos acotados. A partir de esta dualidad caracterizamos las congruencias, y determinamos los M_3-retículos monádicos subdirectamente irreducibles, lo que nos permite probar que la variedad es semisimple. En la última sección, mostramos que si bien no es posible definir de la manera clásica, un cuantificador en función del otro, puesto que la negación no se comporta como una negación de De Morgan, con técnicas topológicas, se puede definir una negación de De Morgan que permite interrelacionar ambos cuantificadores.

5.1. M_3-retículos monádicos

Definición 5.1.0.8 *Un M_3-retículo monádico (o mM_3-retículo) acotado es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, \forall, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ tal que $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ es un M_3-retículo y se satisfacen las siguientes propiedades:*

(E1) $\exists 0 = 0$, (P1) $\forall 1 = 1$,

(E2) $\exists x \wedge x = x$, (P2) $\forall x \wedge x = \forall x$, (E3) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$, (P3) $\forall(x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$,

(E4) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$,

(E5) $\exists\exists x = \exists x$, (P4) $\forall\forall x = \forall x$,

(E6) $\exists\triangle x = \triangle\exists x$, (P5) $\forall\triangle x = \triangle\forall x$,

(E7) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$, (P6) $\forall \sim \forall x = \sim \forall x$,

(Q1) $\exists\forall x = \forall x$, (Q2) $\forall\exists x = \exists x$.

Denotamos con $\mathbf{mM_3}$ a la variedad de los mM_3-retículos y en lo que sigue a los mM_3-retículos los denotados simplemente con $(L, \exists, \forall)$.

Observación 5.1.0.9 *Si $(L, \exists, \forall)$ es un mM_3-retículo, entonces es claro que $(L, \exists)$ es un qM_3-retículo.*

Algunas consecuencias de la definición están contenidas en el siguiente:

Lema 5.1.0.10 *Si $(L, \exists, \forall) \in \mathbf{mM_3}$, entonces se verifican:*

(E8) $x \leq y$ *implica* $\exists x \leq \exists y$,

(E9) $\exists 1 = 1$,

(P7) $x \leq y$ *implica* $\forall x \leq \forall y$.

Dem.

Las propiedades (E8) y (E9), se verifican por ser $(L, \exists)$ un qM_3-retículo (ver Lema 4.1.0.10). Por otro lado la demostración de (P7), es análoga a (E8), usando la propiedad (P3). □

5.1.1. Relación entre las subálgebras y los cuantificadores

Lema 5.1.1.1 *Si* $(L, \exists, \forall) \in \mathbf{mM_3}$*, entonces se verifican:*

(i) $x \in \exists(L)$ *si, y solo si,* $\exists x = x$*,*

(ii) $\exists(L)$ *es una subálgebra de* L*,*

(iii) *para cada* $x \in L$*,* $\exists x$ *es el primer elemento del conjunto* $[x) \cap \exists(L)$*,*

(iv) *si* $z \in [x \wedge \exists y) \cap \exists(L)$*, entonces* $\exists x \wedge \exists y \leq z$*,*

(v) *para cada* $x \in L$*, se verifica que* $\triangle x \leq \triangle\exists x$*,*

(vi) *si* $z \in [\triangle x) \cap S$*, entonces* $\triangle\exists x \leq z$*,*

(vii) $\forall(L) = \exists(L)$*,*

(viii) $x \in \forall(L)$ *si, y solo si,* $\forall(x) = x$*,*

(ix) *para cada* $x \in L$*,* $\forall x$ *es el último elemento del conjunto* $(x] \cap \forall(L)$*,*

(x) *para cada* $x \in L$*, se verifica que* $\triangle\forall x \leq \triangle x$*,*

(xi) *si* $z \in (\triangle x] \cap \forall(L)$*, entonces* $z \leq \triangle\forall x$*,*

(xii) *si* $P \in \mathcal{I}_p(L)$*, entonces* $\exists^{-1}(P)$ *es un ideal de* L*,*

(xiii) *si* P *es un filtro primo de* L*, entonces* $\forall^{-1}(P)$ *es un filtro de* L*,*

(xiv) *si* $x \in K(L)$*, entonces* $\exists x, \forall x \in K(L)$*.*

Dem.

Las propiedades desde (i) hasta (vi) y la propiedad (xii), están demostradas en el Lema 4.1.1.1 y resultan por ser $(L, \exists)$ un qM_3-retículo.

(vii): Si $x \in \forall(L)$, entonces existe $y \in L$ tal que $x = \forall y$, lo que implica que $\exists x = \exists\forall y$, de donde teniendo en cuenta (Q2) tenemos que $\exists x = x$. Por lo tanto $x \in \exists(L)$. La otra inclusión es análoga.

(viii): Es consecuencia inmediata de (vii) y (Q2).

(ix): Por (P2), es claro que $\forall x \in (x] \cap \forall(L)$. Por otro lado si $y \in (x] \cap \forall(L)$, entonces por (P7), $\forall y \leq \forall x$ y como $\forall y = y$, tenemos que $\forall x$ es el último elemento del conjunto $(x] \cap \forall(L)$.

(x): Resulta de (P2) y la propiedad (M17) de los M_3-retículos.

(xi): Por hipótesis $z \leq \triangle x$ y $z \in \forall(L)$, entonces por la propiedad (vii), se verifica que $\forall z = z$. Luego teniendo en cuenta (P2) y (P5), resulta que $z = \forall z \leq \forall \triangle x = \triangle \forall x$.

(xiii): La demostración es análoga a (xii).

(xiv): Es inmediata de (M30), (E6) y (P5).

□

Proposición 5.1.1.2 *Sea L un M_3-retículo acotado y S una subálgebra de L que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *para cada $x \in L$, el conjunto $[x) \cap S$ tiene primer elemento que indicamos con $\exists_S\, x$,*

(ii) *si $z \in [x \wedge \exists_S\, y) \cap S$, entonces $\exists_S\, x \wedge \exists_S\, y \leq z$,*

(iii) *para cada $x \in L$ se verifica que $\triangle x \leq \triangle \exists_S\, x$,*

(iv) *$z \in [\triangle x) \cap S$, implica $\triangle \exists_S\, x \leq z$,*

(v) *para cada $x \in L$, el conjunto $(x] \cap S$ tiene último elemento que indicamos con $\forall_S\, x$,*

(vi) *para cada $x \in L$ se verifica que $\triangle \forall_S\, x \leq \triangle x$,*

(vii) *$z \in (\triangle x] \cap S$, implica $z \leq \triangle \forall_S\, x$.*

Entonces $(L, \exists_S, \forall_S)$ es un mM_3-retículo y $\exists_S(L) = \forall_S(L) = S$.

Dem. En la Proposición 4.1.1.2, se demostró que de las propiedades desde (i) hasta (iv), resulta que la estructura $(L, \exists_S)$ es un qM_3-retículo y $\exists_S(L) = S$. En forma análoga a lo realizado en la mencionada proposición, se puede demostrar que $\forall_S$ es una operación unaria definida en L y que se verifican las propiedades desde (P1) hasta (P6) de la Definición 5.1.0.8. Probaremos a continuación las propiedades (Q1) y (Q2), que ligan ambos operadores y el hecho que $\forall_S(L) = S$, con lo que quedará concluída la demostración.

(Q1) $\exists_S \forall_S x = \forall_S x$: Como $\forall_S x \in [\forall_S x) \cap S$ y además si $z \in [\forall_S x) \cap S$, entonces $\forall_S x \leq z$, podemos concluir que $\forall_S x$ es el primer elemento del conjunto $[\forall_S x) \cap S$, lo que prueba (Q1).

(Q2) $\forall_S \exists_S x = \exists_S x$: Es análoga a la anterior, pues $\exists_S x \in (\exists_S x] \cap S$ y si $z \in (\exists_S x] \cap S$, entonces $z \leq \exists_S x$. Lo que prueba que $\exists_S x$ es el último elemento de $(\exists_S x] \cap S$.

Sea $x \in \forall_S(L)$, entonces existe $y \in L$ tal que $x = \forall_S y$. Como por (v), $\forall_S y \in S$, resulta que $x \in S$. Recíprocamente, si $x \in S$, es claro que $x \in L$ y por (v), existe el último elemento de $(x] \cap S$, que hemos llamado $\forall_S x$, por lo tanto $\forall_S x \leq x$. Por otra parte como $x \in (x] \cap S$, tenemos que $x \leq \forall_S x$. Luego $\forall_S x = x$ y así $x \in \forall_S(L)$. $\square$

5.1.2. Relación entre los mM_3-retículos y los M_3-retículos $k-$cíclicos

En la Proposición 4.1.2.1, probamos que es posible a partir de la estructura $k-$cíclica de un M_3-retículo, definir una estructura de qM_3-retículo, de la siguiente manera; si $(L, T) \in \mathbf{M_{3,k}}$, y definimos $\exists_T x = x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x)$, para cada $x \in L$, entonces $(L, \exists_T) \in \mathbf{qM_3}$. Aprovechando esta estructura, es posible definir un cuantificador universal sobre L de modo que la estructura obtenida sea un mM_3-retículo, como lo muestra a continuación la siguiente proposición.

Proposición 5.1.2.1 *Sea L un M_3-retículo y $T : L \longrightarrow L$ un automorfismo de período k. Entonces $(L, \exists_T, \forall_T)$ donde $\exists_T x = x \vee T(x) \vee \ldots T^{k-1}(x)$ y $\forall_T x = x \wedge T(x) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(x)$ para cada $x \in L$, es un mM_3-retículo.*

Dem. Sabemos que $(L, \exists_T) \in \mathbf{qM_3}$, solo resta probar $\forall_T$ es un operador unario que verifica desde (P1) hasta (P6) y también (Q1) y (Q2) de la Definición 4.1.0.9. Por ser T un automorfismo y por la unicidad del ínfimo, es claro que $\forall_T$ es una operación unaria definida sobre L. Por otro lado, en la Proposición 4.1.2.1, habíamos probado que (1) $T(\exists_T x) = \exists_T x$, en forma análoga, no es difícil probar que (2) $T(\forall_T\, x) = \forall_T\, x$, para cada $x \in L$.

(P1) $\forall_T\, 1 = 1$: Es inmediato por ser T un automorfismo sobre L y 1 el último elemento de L.

(P2) $\forall_T\, x \wedge x = \forall_T\, x$: Es inmediato de la definición de $\forall_T$.

(P3) $\forall_T\, (x \wedge y) = \forall_T\, x \wedge \forall_T\, y$: Por ser T un automorfismo se verifica que $\forall_T\, (x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge T(x \wedge y) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge (T(x) \wedge T(y)) \wedge \ldots \wedge (T^{k-1}(x) \wedge T^{k-1}(y))$, de donde, por asociativa y conmutativa de la operación $\wedge$, tenemos que vale (P3).

(P4) $\forall_T \forall_T\, x = \forall_T\, x$: Por definición del cuantificador y la propiedad (2), tenemos que $\forall_T \forall_T\, x = \forall_T\, x \vee T(\forall_T\, x) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(\forall_T\, x) = \forall_T\, x \wedge \forall_T\, x \wedge \ldots \wedge \forall_T\, x = \forall_T\, x$.

(P5) $\forall_T \triangle x = \triangle \forall_T\, x$: Es inmediata por ser T un automorfismo y la propiedad (M25) de los M_3-retículos. En efecto, $\forall_T \triangle x = \triangle x \wedge T(\triangle x) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(\triangle x) = \triangle x \wedge \triangle T(x) \wedge \ldots \wedge \triangle T^{k-1}(x) = \triangle(x \wedge T(x) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(x)) = \triangle \forall_T(x)$.

(P6) $\forall_T \sim \forall_T\, x = \sim \forall_T\, x$: Se obtiene de la propiedad (2) y el hecho que T es un automorfismo, como se ve a continuación: $\forall_T \sim \forall_T\, x = \sim \forall_T\, x \wedge T(\sim \forall_T\, x) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(\sim \forall_T\, x) = \sim \forall_T\, x \wedge \sim T(\forall_T\, x) \wedge \ldots \wedge \sim T^{k-1}(\forall_T\, x) = \sim \forall_T\, x \wedge \sim \forall_T\, x \wedge \ldots \wedge \sim \forall_T\, x = \sim \forall_T\, x$.

(Q1) $\exists_T \forall_T\, x = \forall_T\, x$: Teniendo en cuenta la definición de $\exists_T$ y la propiedad (2), resulta que $\exists_T \forall_T\, x = \forall_T\, x \vee T(\forall_T\, x) \vee \ldots \vee T^{k-1}(\forall_T\, x) = \forall_T\, x$.

(Q2) $\forall_T \exists_T\, x = \exists_T\, x$: Teniendo en cuenta la definición de $\forall_T$ y la propiedad (1), obtenemos que $\forall_T \exists_T\, x = \exists_T\, x \wedge T(\exists_T\, x) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}(\exists_T\, x) = \forall_T\, x$. □

En forma análoga a lo realizado en el Capítulo 4, para los qM_3-retículos, a partir de un mM_3-retículo finito $(L, \exists, \forall)$, es posible definir en L un automorfismo T, de manera (L, T) sea un M_3-retículo $k-$cíclico. Para ello solo debemos tener en cuenta que por el Lema 5.1.1.1 el conjunto $I(L) = \{x \in L : \exists x = x\} = \exists(L) = \forall(L)$, es decir $I(L) = \{x \in L : \exists x = \forall x = x\}$.

5.2. Dualidad topológica para los mM_3-retículos

En esta sección extendemos la dualidad Priestley para los qM_3-retículos con último elemento, al caso de los mM_3-retículos.

De ahora en adelante con $D(X)$ denotaremos la familia de los subconjuntos abiertos, cerrados y decrecientes de un espacio de Priestley X.

5.2.1. La categoría de los mM_3-espacios y los mM_3-morfismos

Definición 5.2.1.1 *Un mM_3-espacio es una terna $(X, R_\exists, R_\forall)$ tal que:*

(mM1) *X es un M_3-espacio,*

(mM2) *$R_\exists$ y $R_\forall$ son relaciones binarias sobre X reflexivas y transitivas, es decir son preórdenes,*

(mM3) *$R_\exists(x) \in C_i(X)$, $R_\forall(x) \in C_d(X)$, para todo $x \in X$,*

(mM4) *para cada $(x, y) \in R_\exists$ existe $z \in X$ tal que $z \leq y$, $(x, z) \in R_\exists$ y $(z, x) \in R_\exists$,*

(mM5) *$R_\exists = R_\forall^{-1}$,*

(mM6) *$\{x \in X : R_\exists(x) \cap U \neq \emptyset\} \in D(X)$, para cada $U \in D(X)$,*

(mM7) *$\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\} \in D(X)$, para cada $U \in D(X)$.*

(mM8) *$R_\exists^{-1}((M_X U]) = (M_X R_\exists^{-1}(U)]$, para todo $U \in D(X)$,*

(mM9) *$R_\exists^{-1}([m_X R_\exists^{-1}(U)) \setminus M_X R_\exists^{-1}(U)) = [m_X R_\exists^{-1}(U)) \setminus M_X R_\exists^{-1}(U)$, para todo $U \in D(X)$,*

(mM10) *$\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq (M_X U]\} = (M_X\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}]$,*

(mM11) *$\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq [m_X\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}) \setminus M_X\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}\} =$*

$[m_X\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}) \setminus M_X\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}$.

De la definición anterior resulta que si $(X, R_\exists, R_\forall)$ es un mM_3-espacio, entonces $(X, R_\exists)$ es un qM_3-espacio.

Definición 5.2.1.2 *Sean $(X, R_\exists, R_\forall)$ y $(X', R'_\exists, R'_\forall)$ dos mM_3-espacios. Una mM_3-función de $(X, R_\exists, R_\forall)$ en $(X', R'_\exists, R'_\forall)$ es una M_3-función $h : X \longrightarrow X'$ tal que para cada $V \in D(X')$ se verifican:*

(mMf1) $\{x \in X : R_\exists(x) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset\} = h^{-1}(\{x \in X' : R'_\exists(x) \cap V \neq \emptyset\})$,

(mMf2) $\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq h^{-1}(V)\} = h^{-1}(\{x \in X' : R'_\forall(x) \subseteq V\})$.

Notamos con $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$ la categoría de los mM_3-espacios y las mM_3-funciones; y con $\boldsymbol{m\mathcal{M}_3}$ la categoría de los mM_3-retículos acotados y los $\mathbf{mM_3}-$homomorfismos.

Observación 5.2.1.3 *La condición* (mMf1), *de la* Definición 5.2.1.2, *es equivalente a $R_\exists^{-1}(h^{-1}(V)) = h^{-1}(R'^{-1}_\exists(V))$, para cada $V \in D(X')$.*

5.2.2. Propiedades de los mM_3-espacios y los mM_3-morfismos

Lema 5.2.2.1 *Sea X un espacio de Priestley y R un preorden sobre X. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si para cada $x \in X$, $R(x)$ es un conjunto cerrado y creciente de X, entonces para todo $x, y \in X$ tal que $(x, y) \notin R$, existe $U \in D(X)$ tal que $y \in U$ y $x \notin R^{-1}(U)$.*

(ii) *Si para cada $x \in X$, $R(x)$ es un conjunto cerrado y decreciente de X, entonces para todo $x, y \in X$ tal que $(x, y) \notin R$, existe $U \in D(X)$ tal que $y \notin U$ y $R(x) \subseteq U$.*

(iii) *Si $R(x)$ es un conjunto cerrado para todo $x \in X$, entonces R es una cuasiequivalencia (dual) si, y solo si, para todo $x \in X$, $max\, R(x) \subseteq R^{-1}(x)$ $(min\, R(x) \subseteq R^{-1}(x))$.*

Dem. Sea X un espacio de Priestley y R un preorden sobre X.

(i): Resulta del Lema 4.2.1.4.

(ii): Sea $R(x)$ es un conjunto cerrado y decreciente de X, para todo $x \in X$. Consideremos que $(x,y) \notin R$, entonces $y \notin R(x)$. Como $R(x)$ es decreciente, tenemos que para todo $z \in R(x)$, se verifica que $y \not\leq z$. Por lo tanto como X es un espacio totalmente disconexo en el orden, para cada $z \in R(x)$, existe $U_z \in D(X)$ tal que $y \notin U_z$ y $z \in U_z$, lo cual implica que $R(x) \subseteq \bigcup_{z \in R(x)} U_z$. Por otra parte como $R(x)$ es compacto, existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in R(x)$ tales que $R(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i}$. Luego $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i} \in D(X)$ es tal que $y \notin U$ y $R(x) \subseteq U$.

(iii): Sea R una cuasiequivalencia definida sobre X y consideremos $x \in X$ e $y \in max\, R(x)$. Entonces $(x,y) \in X$ y por lo tanto existe $z \in X$ tal que $y \leq z$, $(x,z) \in R$, y $(z,x) \in R$. Como $z \in R(x)$, por la maximalidad de y, se verifica $y = z$ y en consecuencia $y \in R^{-1}(x)$. De donde resulta $max\, R(x) \subseteq R^{-1}(x)$. Recíprocamente, sea $(x,y) \in R$. Como $R(x)$ es un subconjunto cerrado, existe $z \in X$ tal que $y \leq z$ y $z \in max\, R(x)$, por lo tanto $(x,z) \in R$. Además como $max\, R(x) \subseteq R^{-1}(x)$, tenemos que $(z,x) \in R$. Luego existe $z \in X$ tal que $(x,z) \in R$ y $(z,x) \in R$, lo cual implica, por ser R un preorden, que R es una cuasiequivalencia. El caso dual es análogo.

□

Corolario 5.2.2.2 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si $(x,y) \notin R_\exists$, entonces existe $U \in D(X)$ tal que $y \in U$ y $x \notin R_\exists^{-1}(U)$.*

(ii) *Si $(x,y) \notin R_\forall$, entonces existe $U \in D(X)$ tal que $y \notin U$ y $R_\forall(x) \subseteq U$.*

Dem. Es consecuencia directa de la Definición 5.2.1.1 y el Lema 5.2.2.1. □

Lema 5.2.2.3 *Sea (X, R) tal que X es un espacio de Priestley y R es un preorden sobre X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Para cada $(x,y) \in R$ existe $z \in X$ tal que $z \leq y$, $(x,z) \in R$ y $(z,x) \in R$,*

(ii) *$min\, R(x) \subseteq R^{-1}(x)$, para cada $x \in X$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x \in X$ e $y \in min\, R(x)$. Luego por (i), existe $z \in X$ tal que $z \leq y$, $(x,z) \in R$ y $(z,x) \in R$. Como $z \in R(x)$, entonces por la minimalidad de y en $R(x)$, tenemos que $z = y$ y por lo tanto $y \in R^{-1}(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $(x,y) \in R$. Como $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X e $y \in R(x)$, existe $z \in min\, R(x)$ tal que $z \leq y$ (ver Sección 1.3.2, Capítulo 1). De esto se sigue, por (ii), que $z \in R^{-1}(x)$. Por lo tanto existe $z \leq y$ tal que $(x,z) \in R$ y $(z,x) \in R$. □

Lema 5.2.2.4 *En todo mM_3-espacio $(X, R_\exists, R_\forall)$, se verifican las siguientes condiciones:*

(mM12) *Si $(x,y) \in R_\forall$, entonces existe $z \in X$ tal que $z \leq x$, $(y,z) \in R_\forall$ y $(z,y) \in R_\forall$,*

(mM13) *la relación $R = R_\exists \cap R_\forall$ es una relación de equivalencia,*

(mM14) *si $(x,z) \in R_\exists$ y $(z,x) \in R_\exists$ ($(x,z) \in R_\forall$ y $(z,x) \in R_\forall$), entonces $(x,z) \in R$,*

(mM15) *si $(x,z) \in R_\exists$ y $z \in min\, X$, entonces $(z,x) \in R_\exists$,*

(mM16) *si $(x,z) \in R_\forall$ y $x \in min\, X$, entonces $(z,x) \in R_\forall$,*

(mM17) *$min\, R_\exists(x) \subseteq R_\exists^{-1}(x)$, para cada $x \in X$,*

(mM18) *$min\, R_\exists(x) \subseteq R(x)$, para cada $x \in X$,*

(mM19) *si $y \in R_\exists(x)$, entonces $y \in [R(x))$,*

(mM20) *si $y \in R_\forall^{-1}(x)$, entonces $y \in [R(x))$,*

(mM21) *$max\, R_\forall(x) \subseteq R_\forall^{-1}(x)$, para cada $x \in X$.*

Dem.

(mM12): Se obtiene de (mM4) y (mM5).

(mM13): La relación $R = R_\exists \cap R_\forall$ resulta reflexiva y transitiva de (mM2), y por (mM5) es simétrica.

(mM14): Es inmediata de (mM5) y la definición de R.

(mM15): Es consecuencia (mM4).

(mM16): Resulta de (mM12).

(mM17): Se sigue de (mM2) y el Lema 5.2.2.3.

(mM18): Resulta de (mM5), (mM14) y (mM17).

(mM19): Se obtiene teniendo en cuenta (mM4) y (mM14).

(mM20): Es consecuencia de (mM5) y (mM19).

(mM21): Sea (1) $u \in max\, R_\forall(x)$ y supongamos que $u \notin R_\forall^{-1}(x)$. Luego por el Corolario 5.2.2.2, existe $U \in D(X)$ tal que (2) $x \notin U$ y $R_\forall(u) \subseteq U$. De (1) y (mM12), existe $m \leq x$ tal que (3) $(m, u) \in R_\forall$ y (4) $(u, m) \in R_\forall$. Por lo tanto $m \in R_\forall(u)$, de donde resulta $m \in U$, lo cual implica que $m < x$. Si $u \in min\, X$, por ser X un M_3-espacio, existe $v \in X$ tal que $u < v$. Entonces teniendo en cuenta (3), (4), (mM5) y el Lema 4.3.3.9, resulta que $(x, v) \in R_\forall$ y $(v, x) \in R_\forall$. De donde tenemos que $v \in R_\forall(x)$ y $u < v$ que contradice (1). Si $u \in max\, X$, entonces existe $t \in X$ tal que $t < u$. Por otro lado como $u \in R_\forall(u)$ y $R_\forall(u)$ es decreciente, se verifica que $t \in R_\forall(u)$, de donde por (3), (mM5) y el hecho de que $m \in min\, X$, resulta que $m \in min\, R_\exists(t)$. En consecuencia por (mM17), $m \in R_\exists^{-1}(t)$ y así $(t, m) \in R_\exists$ y $(m, t) \in R_\exists$. Entonces por el Lema 4.3.3.9, $(u, x) \in R_\exists$ y $(x, u) \in R_\exists$, y por lo tanto teniendo en cuenta (mM5), $x \in R_\forall(u)$, lo cual implica que $x \in U$ que contradice (2). □

Lema 5.2.2.5 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(mM21) *$max\, R_\forall(x) \subseteq R_\forall^{-1}(x)$, para cada $x \in X$,*

(mM21') *para cada $(x, y) \in R_\forall$ existe $z \in X$ tal que $y \leq z$, $(x, z) \in R_\forall$ y $(z, x) \in R_\forall$.*

Dem.

(mM21) $\Rightarrow$ (mM21'): Sean x, $y \in X$ tales que $(x, y) \in R_\forall$. Entonces como $R_\forall(x)$ es un cerrado, existe $z \in max\, R_\forall(x)$ tal que $y \leq z$. De esta última afirmación y (mM21), se sigue que $(z, x) \in R_\forall$ y así la demostración está completa.

(mM21') $\Rightarrow$ (mM21): Sea (1) $y \in max\, R_\forall(x)$, entonces por (mM21') existe $z \in X$ tal que $y \leq z$, $(x, z) \in R_\forall$ y (2) $(z, x) \in R_\forall$. Luego tenemos que $z \in R_\forall(x)$ y $y \leq z$. Entonces de (1), obtenemos que $y = z$, de lo que se sigue, por (2), que $y \in R_\forall^{-1}(x)$. □

Lema 5.2.2.6 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio y $R = R_\exists \cap R_\forall$. Entonces para todo $V \in D(X)$ se verifica que $R_\forall^{-1}(X \setminus V) = R(X \setminus V)$.*

Dem. Sean $V \in D(X)$, $y \in R_\forall^{-1}(X \setminus V)$, entonces $R_\forall(y) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe (1) $x \in X \setminus V$ tal que $(y, x) \in R_\forall$. Luego por (M21') existe $w \in X$ tal que (2) $x \leq w$, (3) $(y, w) \in R_\forall$ y (4) $(w, y) \in R_\forall$. De (3), teniendo en cuenta (mM5), obtenemos que (5) $(w, y) \in R_\exists$. Por otro lado como $X \setminus V$ es creciente, entonces de (1) y (2), se sigue que $w \in X \setminus V$. De esta última afirmación, (4) y (5), tenemos que $y \in R(X \setminus V)$, y así $R_\forall^{-1}(X \setminus V) \subseteq R(X \setminus V)$. Recíprocamente, si $z \in R(X \setminus V)$, entonces existe $t \in X \setminus V$ tal que $(t, z) \in R$. Luego por (mM5), $(z, t) \in R_\forall$ y en consecuencia $R_\forall(z) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Por consiguiente $z \in R_\forall^{-1}(X \setminus V)$ y así concluimos que $R(X \setminus V) = R_\forall^{-1}(X \setminus V)$. $\square$

Proposición 5.2.2.7 *Si $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio y $R = R_\exists \cap R_\forall$, entonces para cada $x \in X$, $min\, R_\exists(x) = min\, R(x)$ y $max\, R_\forall(x) = max\, R(x)$.*

Dem.

(i) $min\, R_\exists(x) = min\, R(x)$:

Sea (1) $z \in min\, R_\exists(x)$, entonces por (mM18), se verifica que $z \in R(x)$. Supongamos que $t \in R(x)$ y $t \leq z$. Luego $t \in R_\exists(x)$ y por (1), resulta que $t = z$. En consecuencia $z \in min\, R(x)$. Recíprocamente, sea (2) $t \in min\, R(x)$, entonces $t \in R_\exists(x)$. Por otro lado si $u \in R_\exists(x)$ es tal que $u < t$. Como $u \in min\, X$, por (mM15), tenemos que $u \in R(x)$ con $u < t$, lo que contradice (2). Luego si $u \in R_\exists(x)$ es tal que $u \leq t$, entonces $u = t$, lo que implica que $t \in min\, R_\exists(x)$.

(ii) $max\, R_\forall(x) = max\, R(x)$:

Sea (1) $z \in max\, R_\forall(x)$, entonces por (mM12) y el Lema 5.2.2.5, $z \in R_\forall^{-1}(x)$. Luego por (mM14), se verifica que $z \in R(x)$. Supongamos que existe $s \in X$ tal que $z < s$ y $s \in R(x)$. Luego $s \in R_\forall(x)$ y $z < s$, lo cual contradice (1). Entonces si existe $s \in X$ tal que $z \leq s$ y $s \in R(x)$, se verifica que $z = s$, lo que implica que $z \in max\, R(x)$ y por lo tanto $max\, R_\forall(x) \subseteq max\, R(x)$.

Para la otra inclusión, consideremos (2) $z \in max\, R(x)$ y supongamos que existe $u \in X$ tal que (3) $u \in R_\forall(x)$ y (4) $z < u$. De (2), se verifica que (5) $z \in R_\forall(x)$. Por otro lado de (3) y (mM12), existe $s \in X$ tal que $s \leq x$, (6) $(s, u) \in R_\forall$ y $(u, s) \in R_\forall$. Si $s = x$, entonces $(u, x) \in R_\forall$ y por lo tanto, teniendo en cuenta (mM5), $u \in R_\exists(x)$, de donde tendríamos que $u \in R(x)$ con $z < u$, lo que contradice (2). Si $s < x$, como $u \in R_\forall(u)$ y $R_\forall(u)$ es decreciente, se verifica, de (5), que $z \in R_\forall(u)$, es decir $(u, z) \in R_\forall$. De esto último, por (6) y transitiva, resulta que $(s, z) \in R_\forall$. Como $s \in min\, X$, por (mM16), tenemos que $(z, s) \in R_\forall$, lo cual implica, por (mM5), que $z \in R_\exists(s)$. Luego como $z, s \in min\, X$ se verifica también que $s \in R_\exists(z)$ y por el Lema 4.3.3.9, (7) $u \in R_\exists(x)$. De (3) y (7), resulta que $u \in R(x)$ con $z < u$, que contradice (2).

$\square$

El Corolario 5.2.2.2, nos permite dar una caracterización de las mM_3-funciones en la categoría $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$ de la siguiente forma:

Lema 5.2.2.8 *Sean* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *y* $(X', R'_\exists, R'_\forall)$ *dos* mM_3-*espacios y* $h : X \longrightarrow X'$ *una* M_3-*función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) h *es una* mM_3-*función,*

(ii) h *satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si* $(x, y) \in R_\exists$, *entonces* $(h(x), h(y)) \in R'_\exists$,

(b) *si* $(h(x), y) \in R'_\exists$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x, z) \in R_\exists$ *y* $h(z) \leq y$,

(c) *si* $(x, y) \in R_\forall$, *entonces* $(h(x), h(y)) \in R'_\forall$,

(d) *si* $(h(x), y) \in R'_\forall$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x, z) \in R_\forall$ *y* $y \leq h(z)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea h una mM_3-función.

(a) Sea (1) $(x, y) \in R_\exists$ y supongamos que $(h(x), h(y)) \notin R'_\exists$. Entonces por el Corolario 5.2.2.2, existe $V \in D(X')$ tal que $h(y) \in V$ y $h(x) \notin R'^{-1}_\exists(V)$. Luego teniendo en cuenta (i), resulta (2) $x \notin R_{\exists}^{-1}(h^{-1}(V))$. Por otro lado de (1), como $y \in h^{-1}(V)$ tenemos $x \in R_{\exists}^{-1}(h^{-1}(V))$, lo que contradice (2). Por lo tanto $(h(x), h(y)) \in R'_{\exists}$.

(b) Consideremos (1) $(h(x), y) \in R'_{\exists}$ y supongamos que para todo $z \in R_{\exists}(x)$ se verifica que $h(z) \not\leq y$. Como X' es totalmente disconexo en el orden, para cada $z \in R_{\exists}(x)$, existe U_z tal que $y \in U_z$ y $h(z) \notin U_z$. Entonces para cada $z \in R_{\exists}(x)$, $z \in X \setminus h^{-1}(U_z)$ y así $R_{\exists}(x) \subseteq \bigcup_{z \in R_{\exists}(x)} (X \setminus h^{-1}(U_z))$. Como $R(x)$ es un cerrado de un espacio compacto, es compacto, por lo tanto se verifica que existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in R_{\exists}(x)$ tales que $R_{\exists}(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus h^{-1}(U_{z_i})) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} h^{-1}(U_{z_i}) = X \setminus h^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_{z_i})$. Si $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{z_i}$ se verifica que $U \in D(X)$, (2) $y \in U$ y (3) $R_{\exists}(x) \cap h^{-1}(U) = \emptyset$. Por otro lado de (1), $h(x) \in R'^{-1}_{\exists}(y)$, o lo que es equivalente $x \in h^{-1}(R'^{-1}_{\exists}(y))$, de donde teniendo en cuenta (i) y (2), resulta que $x \in R_{\exists}^{-1}(h^{-1}(U))$ y por lo tanto existe $z \in h^{-1}(U)$ tal que $(x, z) \in R_{\exists}$, lo cual implica que $z \in R_{\exists}(x) \cap h^{-1}(U)$ que contradice (3).

(c) Como $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ y $(X', R'_{\exists}, R'_{\forall})$ son mM_3-espacios, se verifica que $R_{\exists} = R_{\forall}^{-1}$ y $R'_{\exists} = R'^{-1}_{\forall}$. Sea $(x, y) \in R_{\forall}$, entonces $(y, x) \in R_{\exists}$, de donde por (a), resulta que $(h(y), h(x)) \in R'_{\exists}$ y en consecuencia $(h(x), h(y)) \in R'_{\forall}$.

(d) Sea (1) $(h(x), y) \in R'_{\forall}$ y supongamos que para todo $z \in R_{\forall}(x)$ se verifica que $y \not\leq h(z)$. Como X' es totalmente disconexo en el orden, para cada $z \in R_{\forall}(x)$, existe U_z tal que $y \notin U_z$ y $h(z) \in U_z$. Luego para cada $z \in R_{\forall}(x)$, $z \in h^{-1}(U_z)$, de donde resulta que $R_{\forall}(x) \subseteq \bigcup_{z \in R_{\exists}(x)} h^{-1}(U_z)$. Como $R_{\forall}(x)$ es un cerrado de un espacio compacto, es compacto, por lo tanto se verifica que existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in R_{\forall}(x)$ tales que $R_{\forall}(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} h^{-1}(U_{z_i}) = h^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i})$. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i}$, se verifica que $U \in D(X)$, (2) $y \notin U$ y $R_{\forall}(x) \subseteq h^{-1}(U)$, de donde por (i), tenemos que $x \in h^{-1}(\{y \in X' : R'_{\forall}(y) \subseteq U\})$ o lo que es equivalente (3) $R'_{\forall}(h(x)) \subseteq U$. Por otra parte de (1), $y \in R'_{\forall}(h(x))$, y por (3) tenemos $y \in U$, lo que contradice (2).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $h : X \longrightarrow X'$ una M_3-función que verifica (a), (b), (c) y (d).

Para probar que h es una mM_3-función, solo resta probar que para cada $V \in D(X')$ se verifican:

(i) $R_{\exists}^{-1}(h^{-1}(V)) = h^{-1}(R'^{-1}_{\exists}(V))$,

(ii) $\{x \in X : R_{\forall}(x) \subseteq h^{-1}(V)\} = h^{-1}(\{x \in X' : R'_{\forall}(x) \subseteq V\})$.

(i): Sea $x \in R_{\exists}^{-1}(h^{-1}(V))$, entonces existe $y \in h^{-1}(V)$ tal que $(x, y) \in R_{\exists}$. Luego por la condición (a), se verifica que $(h(x), h(y)) \in R'_{\exists}$, y teniendo en cuenta que $h(y) \in V$, tenemos que $h(x) \in R'^{-1}_{\exists}(V)$. Por lo tanto $x \in h^{-1}(R'^{-1}_{\exists}(V))$.

Recíprocamente, si $x \in h^{-1}(R'^{-1}_{\exists}(V))$, entonces $h(x) \in R'^{-1}_{\exists}(V)$, y por lo tanto existe $y \in V$ tal que $(h(x), y) \in R'_{\exists}$. Luego por la propiedad (b), existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in R_{\exists}$ y $h(z) \leq y$. Como V es un decreciente de X, se verifica que $h(z) \in V$, de lo cual resulta que $z \in h^{-1}(V)$ y en consecuencia $x \in R_{\exists}^{-1}(h^{-1}(V))$.

(ii): Sea $x \in h^{-1}(\{x \in X' : R'_{\forall}(x) \subseteq V\})$, entonces $h(x) \in \{x \in X' : R'_{\forall}(x) \subseteq V\}$, lo cual implica que (1) $R'_{\forall}(h(x)) \subseteq V$. Consideremos $z \in R_{\forall}(x)$, luego $(x, z) \in R_{\forall}$. Entonces por la propiedad (c), se verifica que $(h(x), h(z)) \in R'_{\forall}$, y por (1), $h(z) \in V$ o lo que es equivalente $z \in h^{-1}(V)$. Con lo que queda demostrado que $R_{\forall}(x) \subseteq h^{-1}(V)$, y en consecuencia $x \in \{x \in X : R_{\forall}(x) \subseteq h^{-1}(V)\}$.

Recíprocamente, sea $x \in \{x \in X : R_{\forall}(x) \subseteq h^{-1}(V)\}$, luego (2) $R_{\forall}(x) \subseteq h^{-1}(V)$. Sea $z \in R'_{\forall}(h(x))$, entonces $(h(x), z) \in R'_{\forall}$. Teniendo en cuenta la propiedad (d), se verifica que existe $u \in X$ tal que $z \leq h(u)$ y $(x, u) \in R_{\forall}$. Por lo tanto $u \in R_{\forall}(x)$ y por (2), $u \in h^{-1}(V)$, es decir $h(u) \in V$, lo que implica por ser V decreciente que $z \in V$. Por lo tanto $R'_{\forall}(h(x)) \subseteq V$, y en consecuencia $x \in h^{-1}(\{x \in X' : R'_{\forall}(x) \subseteq V\})$.

□

A continuación detallamos los resultados necesarios para demostrar que las categorías $\boldsymbol{m\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$ son dualmente equivalentes.

5.2.3. mM_3-retículo dual de un mM_3-espacio

Proposición 5.2.3.1 *Si* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *es un* mM_3-*espacio, entonces* $(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ *es un* mM_3-*retículo, donde* $\exists_{R_\exists}(U) = \{x \in X : R_\exists(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *y* $\forall_{R_\forall}(U) = \{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}$*, para cada* $U \in D(X)$.

Dem. Como consecuencia de que X es un M_3-espacio, tenemos que $D(X)$ es un M_3-retículo. Por otra parte de (mM6) y (mM7), es claro que $\exists_{R_\exists}$ y $\forall_{R_\forall}$ son operadores unarios sobre $D(X)$. Además como $(X, R_\exists)$, es un qM_3-espacio, entonces, por la Proposición 4.2.2.1, tenemos que $(D(X), \exists_{R_\exists})$ es un qM_3-retículo acotado, por lo tanto, quedan demostradas, las propiedades desde (E1) hasta (E7) de la Definición 5.1.0.8. Probemos ahora que se verifican las restantes identidades de dicha definición.

Sean $U, V \in D(X)$.

(P1) $\forall_{R_\forall}(X) = X$:

Es inmediato de la definición de $\forall_{R_\forall}$, pues si $x \in X$, entonces $R_\forall(x) \subseteq X$.

(P2) $\forall_{R_\forall}(U) \subseteq U$:

Sea $x \in \forall_{R_\forall}(U)$, entonces $R_\forall(x) \subseteq U$. Como $R_\forall$ es reflexiva, se verifica que $x \in R_\forall(x)$ y por lo tanto $x \in U$.

(P3) $\forall_{R_\forall}(U \cap V) = \forall_{R_\forall}(U) \cap \forall_{R_\forall}(V)$:

Es consecuencia de que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $x \in \forall_{R_\forall}(U \cap V)$,

(b) $R_\forall(x) \subseteq U \cap V$,

(c) $R_\forall(x) \subseteq U$ y $R_\forall(x) \subseteq V$,

(d) $x \in \forall_{R_\forall}(U) \cap \forall_{R_\forall}(V)$.

(P4) $\forall_{R_\forall}(\forall_{R_\forall}(U)) = \forall_{R_\forall}(U)$:

Por (P2), se verifica que $\forall_{R_\forall}(\forall_{R_\forall}(U)) \subseteq \forall_{R_\forall}(U)$. Para la otra inclusión, consideremos $x \in \forall_{R_\forall}(U)$, entonces $R_\forall(x) \subseteq U$. Sea $y \in R_\forall(x)$ y $z \in R_\forall(y)$, luego $(x, y) \in R_\forall$ y $(y, z) \in R_\forall$, como $R_\forall$ es transitiva se verifica que $(x, z) \in R_\forall$. Por lo tanto $z \in R_\forall(x) \subseteq U$. Así $R_\forall(y) \subseteq U$, para todo $y \in R_\forall(x)$, en consecuencia $R_\forall(x) \subseteq \forall_{R_\forall}(U)$, lo que implica que $x \in \forall_{R_\forall}(\forall_{R_\forall}(U))$.

(P5) $\forall_{R_\forall}(\triangle^* U) = \triangle^*(\forall_{R_\forall}(U))$:

Se verifica por (mM10).

(P6) $\forall_{R_\forall}(\neg\forall_{R_\forall}(U)) = \neg\forall_{R_\forall}(U)$:

Es consecuencia de (mM11).

(Q1) $\exists_{R_\exists}(\forall_{R_\forall}(U)) = \forall_{R_\forall}(U)$:

Por (C1), tenemos que $\forall_{R_\forall}(U) \subseteq \exists_{R_\exists}(\forall_{R_\forall}(U))$. Probemos la otra inclusión. Sea $x \in \exists_{R_\exists}(\forall_{R_\forall}(U))$, luego existe $y \in \forall_{R_\forall}(U)$ tal que $(x, y) \in R_\exists$. Por lo tanto $R_\forall(y) \subseteq U$ y por (mM5), tenemos que (1) $(y, x) \in R_\forall$. Por otro lado, sea $z \in R_\forall(x)$, entonces (2) $(x, z) \in R_\forall$. De (1) y (2), como $R_\forall$ es transitiva, $(y, z) \in R_\forall$, es decir $z \in R_\forall(y) \subseteq U$. Entonces $R_\forall(x) \subseteq U$, lo que implica que $x \in \forall_{R_\forall} U$.

(Q2) $\forall_{R_\forall}(\exists_{R_\exists}(U)) = \exists_{R_\exists}(U)$:

La inclusión $\forall_{R_\forall}(\exists_{R_\exists}(U)) \subseteq \exists_{R_\exists}(U)$ es inmediata de (P2).

Sea $x \in \exists_{R_\exists}(U)$, luego existe $y \in U$ tal que (1) $(x, y) \in R_\exists$. Consideremos $z \in R_\forall(x)$, luego $(x, z) \in R_\forall$, entonces teniendo en cuenta (mM5), se verifica que $(x, z) \in R_\exists^{-1}$, es decir (2) $(z, x) \in R_\exists$. De (1) y (2), como $R_\exists$ es transitiva, $(z, y) \in R_\exists$ con $y \in U$, de donde tenemos que $z \in \exists_{R_\exists}(U)$. Por lo tanto $R_\forall(x) \subseteq \exists_{R_\exists}(U)$ y en consecuencia $x \in \forall_{R_\forall}(\exists_{R_\exists}(U))$.

$\square$

Corolario 5.2.3.2 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio. Entonces para todo $U, V \in D(X)$ se verifica:*

(P8) $\forall_{R_\forall}(U \cup \forall_{R_\forall}(V)) = \forall_{R_\forall}(U) \cup \forall_{R_\forall}(V)$.

Dem. Sean $U, V \in D(X)$ y $x \in \forall_{R_\forall}(U) \cup \forall_{R_\forall}(V)$. Entonces (a) $x \in \forall_{R_\forall}(U)$ o (b) $x \in \forall_{R_\forall}(V)$. Supongamos (a), entonces teniendo en cuenta la definición de $\forall_{R_\forall}(U)$ en $D(X)$, se verifica que $R_\forall(x) \subseteq U$. Como $U \subseteq U \cup \forall_{R_\forall}(V)$, entonces $x \in \forall_{R_\forall}(U \cup \forall_{R_\forall}(V))$. Si ocurriera (b), $R_\forall(x) \subseteq V$. Vamos a probar que en este caso se verifica $R_\forall(x) \subseteq \forall_{R_\forall}(V)$. Sea $y \in R_\forall(x)$ y $z \in R_\forall(y)$. Entonces $(x, y) \in R_\forall$ e $(y, z) \in R_\forall$. Como $R_\forall$ es transitiva, $(x, z) \in R_\forall$, es decir $z \in R_\forall(x) \subseteq V$. Por lo tanto hemos probado que $R_\forall(y) \subseteq V$, lo que implica que $y \in \forall_{R_\forall}(V)$. En consecuencia $R_\forall(x) \subseteq \forall_{R_\forall}(V) \subseteq U \cup \forall_{R_\forall}(V)$ y así $x \in \forall_{R_\forall}(U \cup \forall_{R_\forall}(V))$.

Por otro lado si $x \notin \forall_{R_\forall}U \cup \forall_{R_\forall}V$, entonces $R_\forall(x) \not\subseteq U$ y $R_\forall(x) \not\subseteq V$. Por lo tanto existen y, $z \in X$ tales que y, $z \in R_\forall(x)$, $y \notin U$ y $z \notin V$. De esta última afirmación y la condición (mM21'), inferimos que existen w, $t \in X$ tales que $y \leq w$, $(w, x) \in R_\forall$, $(x, w) \in R_\forall$, $z \leq t$, $(t, x) \in R_\forall$, $(x, t) \in R_\forall$. Como U y V son decrecientes tenemos que $w \notin U$ y $t \notin V$. Además como $R_\forall$ es un preorden, $(t, w) \in R_\forall$, entonces $R_\forall(t) \not\subseteq U$ y por lo tanto $t \notin \forall_{R_\forall}U \cup V$. Teniendo en cuenta que $t \in R_\forall(x)$, tenemos que $R_\forall(x) \not\subseteq \forall_{R_\forall}U \cup V$, de lo que concluímos que $x \notin \forall_{R_\forall}(\forall_{R_\forall}(U) \cup V)$. $\square$

Corolario 5.2.3.3 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio y $R = R_\exists \cap R_\forall$. Entonces para todo $V \in D(X)$ se verifica que $\forall_{R_\forall}(V) = X \setminus R(X \setminus V)$.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 5.2.3.1 y el Lema 5.2.2.6. En efecto, por la Proposición 5.2.3.1, para cada $V \in D(X)$ se verifica que $x \in \forall_{R_\forall}(V)$ si, y solo si, $R_\forall(x) \subseteq V$, lo que es equivalente a que $x \in X \setminus R_\forall^{-1}(X \setminus V)$. Esta última afirmación, por el Lema 5.2.2.6, es equivalente a que $x \in X \setminus R(X \setminus V)$. $\square$

5.2.4. mM_3-espacio asociado a un mM_3-retículo

Lema 5.2.4.1 *Sea $(L, \exists, \forall)$ un M_3-retículo monádico (o mM_3-retículo), $\mathcal{I}_p(L)$ el conjunto de los ideales primos de L y las relaciones $R_\exists$ y $R_\forall$ definidas en $\mathcal{I}_p(L)$ como siguen:*

(a) $(P, Q) \in R_\exists$, *si, y solo si,* $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$,

(b) $(P,Q) \in R_\forall$ *si, y solo si,* $Q \subseteq \forall^{-1}(P)$.

Entonces para cada $P \in \mathcal{I}_p(L)$ *y cada* $a \in L$, *se verifican*

(i) $\exists a \in P$ *si, y solo si,* $R_\exists(P) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$,

(ii) $\forall a \notin P$ *si, y solo si,* $R_\forall(P) \subseteq \sigma_L(a)$,

(iii) $R_\exists(P) \in C_i(\mathcal{I}_p(L))$, $R_\forall(P) \in C_d(\mathcal{I}_p(L))$.

Dem.

(i) $\exists a \in P$ si, y solo si, $R_\exists(P) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$:

($\Rightarrow$): Sea $a \in L$ tal que $\exists a \in P$, y $Q \in R_\exists(P)$. Entonces $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$, en consecuencia $a \in Q$ y por lo tanto $Q \notin \sigma_L(a)$, es decir $Q \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$. Luego $R_\exists(P) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$.
($\Leftarrow$): Para cada $P \in \mathcal{I}_p(L)$ y cada $a \in L$, se verifica (1) $R_\exists(P) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$. Supongamos que existe $a \in L$ tal que (2) $\exists a \notin P$. Consideremos $F(a)$, el filtro generado por a, entonces $\exists^{-1}(P) \cap F(a) = \emptyset$. En efecto, si existiera $m \in \exists^{-1}(P) \cap F(a)$, se verificaría que $\exists m \in P$ y $\exists a \leq \exists m$, lo que implicaría $\exists a \in P$ que contradice (2). Como $\exists^{-1}(P)$ es un ideal, luego por el teorema de Birkhoff-Stone podemos asegurar que existe $Q \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$ y $F(a) \cap Q = \emptyset$. Por lo tanto $Q \in R_\exists(P)$ y $Q \in \sigma_L(a)$, lo que contradice (1).

(ii) $\forall a \notin P$ si, y solo si, $R_\forall(P) \subseteq \sigma_L(a)$:

($\Rightarrow$): Sea $a \in L$ tal que $\forall a \notin P$, y $Q \in R_\forall(P)$. Entonces $Q \subseteq \forall^{-1}(P)$, en consecuencia $a \notin Q$ y así $Q \in \sigma_L(a)$. Por lo tanto $R_\forall(P) \subseteq \sigma_L(a)$.
($\Leftarrow$): Para cada $P \in \mathcal{I}_p(L)$ y cada $a \in L$, se verifica (1) $R_\forall(P) \subseteq \sigma_L(a)$. Supongamos que existe $a \in L$ tal que $\forall a \in P$. Si consideramos $I(a)$, el ideal generado por a, se verifica que $I(a) \cap \forall^{-1}(L \setminus P) = \emptyset$. Como $\forall^{-1}(L \setminus P) = L \setminus \forall^{-1}(P)$ es un filtro, por el teorema de Birkhoff-Stone existe $Q \in \mathcal{I}_p(L)$ tal que $Q \cap \forall^{-1}(L \setminus P) = \emptyset$ e $I(a) \subseteq Q$. Entonces $Q \subseteq \forall^{-1}(P)$ y $a \in Q$, lo que implica que $Q \in R_\forall(P)$ y $Q \notin \sigma_L(a)$, que contradice (1).

(iii) $R_\exists(P) \in C_i(\mathcal{I}_p(L))$, $R_\forall(P) \in C_d(\mathcal{I}_p(L))$:

En la Proposición 4.2.3.5, se demostró que $R_\exists(P) \in C_i(\mathcal{I}_p(L))$.

Sea $P, S \in \mathcal{I}_p(L)$, tales que $Q \in R_\forall(P)$ y $S \subseteq Q$. Entonces $Q \subseteq \forall^{-1}(P)$ y por lo tanto $S \subseteq \forall^{-1}(P)$, de donde $S \in R_\forall(P)$. Luego $R_\forall(P)$ es un decreciente de $\mathcal{I}_p(L)$.

Si consideramos $S \in \mathcal{I}_p(L) \backslash R_\forall(P)$, entonces se verifica que $S \not\subseteq \forall^{-1}(P)$, por lo tanto existe $a \in S$ tal que $a \notin \forall^{-1}(P)$. Como $\forall a \notin P$, por (ii), se verifica $R_\forall(P) \subseteq \sigma_L(a)$. Además $S \in \mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$, siendo $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a)$ un abierto de $\mathcal{I}_p(L)$ tal que $\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(a) \subseteq \mathcal{I}_p(L) \setminus R_\forall(P)$. Lo anterior implica que $\mathcal{I}_p(L) \setminus R_\forall(P)$ es un abierto de $\mathcal{I}_p(L)$ y por lo tanto $R_\forall(P)$ es un cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$. $\square$

Proposición 5.2.4.2 *Sea $(L, \exists, \forall)$ un M_3-retículo monádico (o mM_3-retículo) acotado. Entonces la estructura $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists, R_\forall)$ es un mM_3-espacio, donde las relaciones $R_\exists$ y $R_\forall$ están definidas como siguen:*

(i) *$(P, Q) \in R_\exists$, si, y solo si, $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$,*

(ii) *$(P, Q) \in R_\forall$ si, y solo si, $Q \subseteq \forall^{-1}(P)$.*

Además la aplicación $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ es un isomorfismo de mM_3-retículos, esto es $\sigma_L(\forall a) = \forall_{R_\forall}(\sigma_L(a))$ y $\sigma_L(\exists a) = \exists_{R_\exists}(\sigma_L(a))$, para todo $a \in L$.

Dem.

Si $(L, \exists, \forall)$ un M_3-retículo monádico, entonces $(L, \exists)$ es un qM_3-retículo. En consecuencia, por la Proposición 4.2.3.6, $(\mathcal{I}_p(L), R_\exists)$ es un qM_3-espacio. Por lo tanto solo resta probar que $R_\forall$ es un preorden, $R_\forall(P) \in C_d(\mathcal{I}_p(L))$ y las propiedades (mM5), (mM7), (mM10) y (mM11) de la Definición 5.2.1.1.

(i) $R_\forall$ es reflexiva y transitiva, es decir es un preórden:

Sea $P \in \mathcal{I}_p(L)$, entonces si $x \in P$, como por (P2), de la Definición 5.1.0.8, $\forall x \leq x$, tenemos que $\forall x \in P$. Por lo tanto $P \subseteq \forall^{-1}(P)$ de donde resulta que $R_\forall$ es reflexiva.

Supongamos ahora que $(P, Q) \in R_\forall$ y $(Q, R) \in R_\forall$, entonces se verifica $Q \subseteq \forall^{-1}(P)$ y $R \subseteq \forall^{-1}(Q)$. Luego $\forall^{-1}(Q) \subseteq \forall^{-1}(\forall^{-1}(P))$ y por lo tanto $R \subseteq \forall^{-1}(\forall^{-1}(P))$. Como por (P4), de la Definición 5.1.0.8, se puede probar que $\forall^{-1}(\forall^{-1}(P)) \subseteq \forall^{-1}(P)$, entonces $R \subseteq \forall^{-1}(P)$ y en consecuencia $(P, R) \in R_\forall$, resultando así que $R_\forall$ es transitiva.

(ii) $R_\forall(P) \in C_d(\mathcal{I}_p(L))$, para todo $P \in \mathcal{I}_p(L)$:

Se verifica por el Lema 5.2.4.1.

(mM5) $R_\exists = R_\forall^{-1}$:

Sea $(P, Q) \in R_\exists$, entonces $\exists^{-1}(P) \subseteq Q$. Consideremos ahora $a \in P$, por (P2), de la Definición 5.1.0.8, tenemos que $\forall a \in P$ y como por (Q2) de la misma definición, se verifica que $\exists\forall a = \forall a$, entonces $\exists\forall a \in P$. Lo anterior implica que $\forall a \in \exists^{-1}(P)$ y por lo tanto $\forall a \in Q$, de donde tenemos que $a \in \forall^{-1}(Q)$. Así $P \subseteq \forall^{-1}(Q)$ y en consecuencia $(P, Q) \in R_\forall^{-1}$. La otra inclusión se prueba de manera análoga teniendo en cuenta (E2) y (Q1) de la Definición 5.1.0.8.

(mM7) $\forall_{R_\forall}(U) = \{P \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(P) \subseteq U\} \in D(\mathcal{I}_p(L))$, para cada $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$:

Sea $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$, entonces existe $a \in L$ tal que $U = \sigma_L(a)$. Por la Proposición 5.2.4.2, $P \in \sigma_L(\forall a)$ si, y solo si, $P \in \forall_{R_\forall}(\sigma_L(a))$. Lo anterior que implica que $\forall_{R_\forall}(U) = \sigma_L(\forall a)$ y por lo tanto $\forall_{R_\forall}(U) \in D(\mathcal{I}_p(L))$.

(mM10) $\{P \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(x) \subseteq (M_X U]\} = (M_X\{P \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(x) \subseteq U\}]$, para todo $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$:

Esta condición es equivalente a $\forall_{R_\forall}(\triangle^*(U)) = \triangle^*(\forall_{R_\forall}(U))$, y resulta de (mM7), la propiedad (P5), de la Definición 5.1.0.8, y el hecho de que σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo de L en $D(\mathcal{I}_p(L)$.

(mM11) $\{P \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(P) \subseteq [m_{\mathcal{I}_p(L)}\{x \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(P) \subseteq U\}) \setminus M_{\mathcal{I}_p(L)}\{x \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(P) \subseteq U\}\} = [m_{\mathcal{I}_p(L)}\{x \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(P) \subseteq U\}) \setminus M_{\mathcal{I}_p(L)}\{x \in \mathcal{I}_p(L) : R_\forall(P) \subseteq U\}$, para todo $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$:

La misma es equivalente a $\forall_{R_\forall}(\neg\forall_{R_\forall}(U)) = \neg\forall_{R_\forall}(U)$, para todo $U \in D(X)$, y resulta de (mM7), la propiedad (P6), de la Definición 5.1.0.8, y el hecho de que σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo de L en $D(\mathcal{I}_p(L)$.

Por otra parte como σ_L es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo de L en $D(\mathcal{I}_p(L)$, de lo demostrado en (mM6) (ver (iii) de la Proposición 4.2.3.5) y (mM7), resulta que es un isomorfismo de mM_3-retículos, esto es $\sigma_L(\forall a) = \forall_{R_\forall}(\sigma_L(a))$ y $\sigma_L(\exists a) = \exists_{R_\exists}(\sigma_L(a))$, para todo $a \in L$.

$\square$

Corolario 5.2.4.3 *Sea $\langle L, \exists, \forall\rangle$ un mM_3-retículo acotado. Entonces para todo a, $b \in L$ se verifica:*

(P8) $\forall(a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b$.

Dem. Sean $a, b \in L$, entonces por la Proposición 5.2.4.2, como σ_L es un isomorfismo, se verifica que $\sigma_L(a), \sigma_L(b) \in D(X(L))$. Además por el Corolario 5.2.3.2, tenemos que $\forall_{R_\forall}(\sigma_L(a)) \cup \forall_{R_\forall}(\sigma_L(b)) = \forall_{R_\forall}(\sigma_L(a) \cup \forall_{R_\forall}(\sigma_L(b)))$ y por lo tanto $\sigma_L(\forall a \vee \forall b) = \sigma_L(\forall(a \vee \forall b))$. De esta igualdad concluimos, por ser σ_L inyectiva, que $\forall(a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b$. $\square$

5.2.5. Dualidad entre las categorías $\boldsymbol{m\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$

Las Proposiciones 5.2.3.1 y 5.2.4.2, nos permiten decir que hemos establecido una correspondencia entre los objetos de las categorías $\boldsymbol{m\mathcal{M}_3}$ y $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$. Con el objetivo de probar que estas categorías son naturalmente equivalentes y definir los funtores correspondientes, probamos a continuación que existe una correspondencia entre los morfismos de dichas categorías.

Lema 5.2.5.1 *Sea $h : X \longrightarrow X'$ una mM_3-función (biyectiva), entonces $\Psi(h) : D(X') \longrightarrow D(X)$ definida por $\Psi(h)(V) = h^{-1}(V)$ para cada $V \in D(X')$, es un mM_3-homomorfismo (isomorfismo).*

Dem. Resulta inmediato por ser h una mM_3-función. $\square$

Lema 5.2.5.2 *Sean $(X, R_\exists, R_\forall)$ y $(X', R'_\exists, R'_\forall)$ dos mM_3-espacios y $h : X \longrightarrow X'$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *h es un isomorfismo en $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$,*

(ii) *h es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ y verifica:*

(a') $(x, y) \in R_\exists$ *si, y solo si,* $(h(x), h(y)) \in R'_\exists$,

(b') $(x, y) \in R_\forall$ *si, y solo si,* $(h(x), h(y)) \in R'_\forall$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sea $h : X \longrightarrow X'$ un isomorfismo en $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$, entonces h es un morfismo en $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$ y existe $g : X' \longrightarrow X$ morfismo en $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$, tal que $h \circ g = Id_X$ y $g \circ h = Id_{X'}$. Luego h y g son M_3-funciones y por lo tanto h es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$. Veamos ahora que se verifican (a') y (b').

(a') Sea $(x, y) \in R_\exists$, entonces por la condición (a) del Lema 5.2.2.5, se verifica que $(h(x), h(y)) \in R'_\exists$. Por otro lado si $(h(x), h(y)) \in R'_\exists$, entonces por (b) del Lema 5.2.2.8, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in R_\exists$ y $h(z) \leq h(y)$. Como h es un isomorfismo de orden, tenemos que $z \leq y$ y por ser $R_\exists(x)$ un conjunto creciente de X, se cumple que $(x, y) \in R_\exists$.

(b') Si $(x, y) \in R_\forall$, entonces por (c) del Lema 5.2.2.8, se verifica que $(h(x), h(y)) \in R'_\forall$. Recíprocamente, si $(h(x), h(y)) \in R'_\forall$, entonces por (d) del Lema 5.2.2.8, existe $t \in X$ tal que $(x, t) \in R_\forall$ y $h(y) \leq h(t)$. Luego por ser h un isomorfismo de orden, se cumple que $y \leq t$ y como $R_\forall(x)$ es un decreciente de X tenemos que $y \in R_\forall(x)$, en consecuencia $(x, y) \in R_\forall$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Sea h es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$ que verifica las condiciones (a') y (b'). Luego h es una M_3-función y existe una M_3-función g, tal que $h \circ g = Id_X$ y $g \circ h = Id_{X'}$. Entonces solo resta probar que h y g son mM_3-funciones, para ello tendremos en cuenta el Lema 5.2.2.8. Las condiciones (a) y (c), de dicho lema, se verifican por (a') y (b'). Probemos ahora (b) y (d).

(b) Sea $(h(x), y) \in R'_\exists$, como h es biyectiva, por ser un isomorfismo de orden, existe $u \in X$ tal que $h(u) = y$. Luego $(h(x), h(u)) \in R'_\exists$, de donde por (b'), se verifica que $(x, u) \in R_\exists$ y $h(u) \leq y$.

(d) Sea $(h(x), y) \in R'_\forall$, por ser h biyectiva, existe $v \in X$ tal que $h(v) = y$. Por lo tanto $(h(x), h(v)) \in R'_\forall$, de donde teniendo en cuenta (b'), inferimos $(x, v) \in R_\forall$ con $y \leq h(v)$.

$\square$

Lema 5.2.5.3 *Sea* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3-*espacio,* $\langle D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall}\rangle$ *su* mM_3-*retículo asociado, donde* $\exists_{R_\exists}(U) = \{x \in X : R_\exists(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *y* $\forall_{R_\forall}(U) = \{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}$, *para cada* $U \in D(X)$. *Entonces* $\epsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{I}_p(D(X))$ *definida por* $\epsilon_X(x) = \{V \in D(X) : x \notin V\}$, *verifica:*

(i) $(x, y) \in R_\exists$ *si, y solo si,* $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\exists_{R_\exists}}$.

(ii) $(x, y) \in R_\forall$ *si, y solo si,* $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\forall_{R_\forall}}$.

Dem.

(i) $(x, y) \in R_\exists$ si, y solo si, $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\exists_{R_\exists}}$:

($\Rightarrow$): Sea (1) $(x, y) \in R_\exists$ y supongamos que $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \notin R_{\exists_{R_\exists}}$, entonces $\exists^{-1}_{R_\exists}(\epsilon_X(x)) \not\subseteq \epsilon_X(y)$. Luego existe $U \in D(X)$ tal que $U \in \exists^{-1}_{R_\exists}(\epsilon_X(x))$ y $U \notin \epsilon_X(y)$, lo cual implica que $\exists_{R_\exists}(U) \in \epsilon_X(x)$ o lo que es equivalente $R^{-1}_\exists(U) \in \epsilon_X(x)$. Por lo tanto $x \notin R^{-1}_\exists(U)$ e $y \in U$, de donde resulta $(x, y) \notin R_\exists$, que contradice (1).

($\Leftarrow$): Sea $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\exists_{R_\exists}}$, entonces (1) $\exists^{-1}_{R_\exists}(\epsilon_X(x)) \subseteq \epsilon_X(y)$. Si suponemos que $(x, y) \notin R_\exists$, por Corolario 5.2.2.2, existe $U \in D(X)$ tal que $x \notin R^{-1}_\exists(U)$ e $y \in U$. Luego $\exists_{R_\exists}(U) \in \epsilon_X(x)$ y por lo tanto $U \in \exists^{-1}_{R_\exists}(\epsilon_X(x))$. Esta afirmación implica, teniendo en cuenta (1), que $U \in \epsilon_X(y)$ e $y \in U$, lo que es una contradicción.

(ii) $(x, y) \in R_\forall$ si, y solo si, $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\forall_{R_\forall}}$:

($\Rightarrow$): Sea $(x, y) \in R_\forall$ y supongamos que $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \notin R_{\forall_{R_\forall}}$. Entonces $\epsilon_X(y)) \not\subseteq \forall^{-1}_{R_\forall}(\epsilon_X(x))$, lo cual implica que existe $U \in \epsilon_X(y))$ tal que $U \notin \forall^{-1}_{R_\forall}(\epsilon_X(x))$. Por lo tanto (1) $y \notin U$ y $\forall_{R_\forall}(U) \notin \epsilon_X(x)$, de donde tenemos $x \in \forall_{R_\forall}(U)$, es decir $R_\forall(x) \subseteq U$. Como por hipótesis $y \in R_\forall(x)$, entonces $y \in U$, lo que contradice (1).

($\Leftarrow$): Sea $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\forall_{R_\forall}}$, entonces (1) $\epsilon_X(y) \subseteq \forall_{R_\forall}^{-1}(\epsilon_X(x))$. Si suponemos que $(x, y) \notin R_\forall$, por el Corolario 5.2.2.2, existe $U \in D(X)$ tal que $y \notin U$ y $R_\forall(x) \subseteq U$. Luego (2) $x \in \forall_{R_\forall}(U)$ y $U \in \epsilon_X(y)$. Por lo tanto de (1) resulta que $U \in \forall_{R_\forall}^{-1}(\epsilon_X(x))$, es decir $\forall_{R_\forall}(U) \in \epsilon_X(x)$, lo cual implica $x \notin \forall_{R_\forall}(U)$ que contradice (2).

$\square$

Proposición 5.2.5.4 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio. Entonces $\epsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{I}_p(D(X))$ definida por $\epsilon_X(x) = \{V \in D(X) : x \notin V\}$ es un $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}-$isomorfismo.*

Dem. Resulta de los Lemas 5.2.5.2 y 5.2.5.3 y el hecho de que ϵ_X es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathfrak{M}_3}$. $\square$

Proposición 5.2.5.5 *Sean $\langle L, \exists, \forall\rangle$ y $\langle L', \exists', \forall'\rangle$ mM_3-retículos y $h : L \longrightarrow L'$ un mM_3-homomorfismo, entonces la aplicación $\Phi(h) : \mathcal{I}_p(L') \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$, definida por $\Phi(h)(I') = h^{-1}(I')$, para cada $I' \in \mathcal{I}_p(L')$, es una mM_3-función.*

Dem. En la proposición 4.2.4.5, demostramos que $\Phi(h)$ es una qM_3-función. Resta probar que para todo $V \in D(\mathcal{I}_p(L))$ se verifican (mMf1) y (mMf2), de la Definición 5.2.1.2.

En primer lugar tengamos en cuenta que si $V \in D(\mathcal{I}_p(L))$, existe $a \in L$ tal que $\sigma_L(a) = V$. Probemos ahora las condiciones requeridas.

(mMf1) $\{P \in \mathcal{I}_p(L') : R_{\exists'}(P) \cap \Phi(h)^{-1}(V) \neq \emptyset\} = \Phi(h)^{-1}(\{Q \in \mathcal{I}_p(L) : R_\exists(Q) \cap V \neq \emptyset\})$:

Esta condición es equivalente a probar que $R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(V)) = \Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(V))$.

Sea $P \in R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(V))$, como $\Phi(h)$ es una función continua, se verifica $\Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a)) = \sigma_{L'}(h(a))$, entonces $P \in R_{\exists'}^{-1}(\sigma_{L'}(h(a)))$. Luego existe $Q \in \sigma_{L'}(h(a))$ tal que $(P, Q) \in R_{\exists'}$, por lo tanto $\exists'^{-1}(P) \subseteq Q$ y $h(a) \notin Q$, de donde resulta $h(a) \notin \exists'^{-1}(P)$ o lo que es equivalente $\exists'(h(a)) \notin P$. Como h es un mM_3-homomorfismo, se verifica entonces que $h(\exists a) \notin P$, es decir $\exists a \notin h^{-1}(P)$, lo que implica $a \notin h^{-1}(P)$. En consecuencia $h^{-1}(P) \in V$ y como $R_\exists$ es reflexiva y $h^{-1}(P)$ es un ideal primo, tenemos que $h^{-1}(P) \in R_\exists^{-1}(V)$, es decir $\Phi(h)(P) \in R_\exists^{-1}(V)$, de donde resulta que $P \in \Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(V))$.

Probemos ahora la otra inclusión. Sea $P \in \Phi(h)^{-1}(R_\exists^{-1}(V))$, entonces $\Phi(h)(P) \in R_\exists^{-1}(V)$, por lo tanto $h^{-1}(P) \in R_\exists^{-1}(\sigma_L(a))$. Luego existe $Q \in \sigma_L(a)$ tal que

$(h^{-1}(P), Q) \in R_{\exists}$, entonces $\exists^{-1}(h^{-1}(P)) \subseteq Q$ y $a \notin Q$, lo que implica que $a \notin \exists^{-1}(h^{-1}(P))$. De lo anterior, como h es un mM_3-homomorfismo, resulta que $\exists(h(a)) \notin P$ y por ser $h^{-1}(P)$ un ideal primo, se verifica que $h(a) \notin P$, o lo que es equivalente $a \notin h^{-1}(P)$, lo cual implica que $P \in \Phi(h)^{-1}(V)$. Finalmente por ser $R_{\exists'}$ reflexiva, inferimos que $P \in R_{\exists'}^{-1}(\Phi(h)^{-1}(V))$.

(mMf2) $\{P \in \mathcal{I}_p(L') : R_{\forall'}(P) \subseteq \Phi(h)^{-1}(V)\} = \Phi(h)^{-1}(\{Q \in \mathcal{I}_p(L) : R_{\forall}(Q) \subseteq V\})$:

Sea $P \in \{P \in \mathcal{I}_p(L') : R_{\forall'}(P) \subseteq \Phi(h)^{-1}(V)\}$, entonces $R_{\forall'}(P) \subseteq \Phi(h)^{-1}(V)$. Como $\Phi(h)$ es una función continua, se verifica $\Phi(h)^{-1}(\sigma_L(a)) = \sigma_{L'}(h(a))$, y por consiguiente $R_{\forall'}(P) \subseteq \sigma_{L'}(h(a))$. Del hecho que $R_{\forall'}$ es reflexiva, podemos concluir que $h(a) \notin P$, es decir $a \notin h^{-1}(P)$. Como $h^{-1}(P)$ es un ideal primo se verifica que $\forall a \notin h^{-1}(P)$ y en consecuencia $a \notin \forall^{-1}(h^{-1}(P))$. Consideremos por otro lado $Q \in R_{\forall}(\Phi(h)(P))$, entonces $(\Phi(h)(P), Q) \in R_{\forall}$, lo que implica que $Q \subseteq \forall^{-1}(\Phi(h)(P))$. Como $a \notin \forall^{-1}(\Phi(h)(P))$, entonces $a \notin Q$ de donde resulta que $Q \in \sigma_L(a) = V$. Por lo tanto $R_{\forall}(\Phi(h)(P)) \subseteq V$ y así $P \in \Phi(h)^{-1}(\{Q \in \mathcal{I}_p(L) : R_{\forall}(Q) \subseteq V\})$.

Recíprocamente, sea $P \in \Phi(h)^{-1}(\{Q \in \mathcal{I}_p(L) : R_{\forall}(Q) \subseteq V\})$, entonces $\Phi(h)(P) \in \{Q \in \mathcal{I}_p(L) : R_{\forall}(Q) \subseteq V\}$, lo que implica que $R_{\forall}(\Phi(h)(P)) \subseteq V = \sigma_L(a)$ y por lo tanto como $R_{\forall}$ es reflexiva y $h^{-1}(P)$ es un ideal primo, concluímos $\forall a \notin h^{-1}(P)$. Por otra parte, si $R \in R_{\forall'}(P)$, entonces $(P, R) \in R_{\forall'}$, y por lo tanto $R \subseteq \forall'^{-1}(P)$. Como $\forall a \notin h^{-1}(P)$ y h es un mM_3-homomorfismo, tenemos que $\forall'(h(a)) \notin P$, es decir $h(a) \notin R$, de donde concluímos que $h^{-1}(R) \in \sigma_L(a)$, o lo que es equivalente $R \in \Phi(h)^{-1}(V)$. Hemos probado así que $R_{\forall'}(P) \subseteq \Phi(h)^{-1}(V)$, de donde resulta que $P \in \{P \in \mathcal{I}_p(L') : R_{\forall'}(P) \subseteq \Phi(h)^{-1}(V)\}$.

$\square$

Las Proposiciones 5.2.3.1, 5.2.4.2, 5.2.5.4 y 5.2.5.5 y el Lema 5.2.5.1, nos permiten concluir el siguiente:

Teorema 5.2.5.6 *Las categorías* $\boldsymbol{m\mathcal{M}_3}$ *y* $\boldsymbol{m\mathfrak{M}_3}$ *son dualmente equivalentes.*

5.3. Congruencias y álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathbf{mM_3}$

Teniendo en cuenta la dualidad obtenida anteriormente, en esta sección damos una caracterización del retículo de las congruencias de un mM_3-retículo, en término de ciertos subconjuntos cerrados de su mM_3-espacio asociado. Luego, utilizando este resultado, determinamos los mM_3-retículos subdirectamente irreducibles.

5.3.1. Caracterización del retículo de las $\mathbf{mM_3}-$congruencias

Definición 5.3.1.1 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio. Diremos que un subconjunto Y de X es un*

(i) *$R_\forall-$cono, si $Y = R_\forall(Y)$,*

(ii) *$R_\exists-$cono, si $Y = R_\exists(Y)$,*

(iii) *$R-$cono, si es un $R_\forall-$cono y un $R_\exists-$cono simultáneamente.*

Con $R^C_\forall(X)$, $R^C_\exists(X)$ y $R^C(X)$indicaremos la familia de todos los $R_\forall-$conos, $R_\exists-$conos y $R-$conos de Xrespectivamente.

Lema 5.3.1.2 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio. Entonces se verifican:*

(i) *$\emptyset$ y X son $R_\forall-$conos y $R_\exists-$conos.*

(ii) *Para todo $x \in X$, $R_\forall(x)$ $(R_\exists(x))$ es un subconjunto cerrado y $R_\forall-$cono $(R_\exists-$cono$)$ de X.*

(ii) *Si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R_\forall-$conos $(R_\exists-$conos$)$ de X, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ y $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ son $R_\forall-$conos $(R_\exists-$conos$)$ de X.*

Dem.

En el Lema 4.3.1.2, se probó que $\emptyset$ y X son $R_\exists-$conos, $R_\exists(x)$ es un subconjunto cerrado y $R_\exists-$cono de X y que si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R_\exists-$conos de X, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ $R_\exists-$conos de X.

(i) $\emptyset$ y X son $R_\forall-$conos:

Como $R_\forall$ es reflexiva, entonces se verifica que $X \subseteq R_\forall(X)$ y por lo tanto $X = R_\forall(X)$. Supongamos que $R_\forall(\emptyset) \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in R_\forall(\emptyset)$, lo que implica que existe $y \in \emptyset$ tal que $(y, x) \in R_\forall$, lo cual es absurdo. Luego $R_\forall(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) Para todo $x \in X$, $R_\forall(x)$ es un subconjunto cerrado y $R_\forall-$cono de X:

Por (mM3), se verifica que $R_\forall(x)$ es un subconjunto cerrado de X. Además como $R_\forall$ es reflexiva, se verifica que $R_\forall(x) \subseteq R_\forall(R_\forall(x))$. Probemos la otra inclusión. Sea $y \in R_\forall(R_\forall(x))$, entonces existe $z \in R_\forall(x)$ tal que $(z, y) \in R_\forall$. Luego $(x, z) \in R_\forall$ y $(z, y) \in R_\forall$, de donde por ser $R_\forall$ una relación transitiva, se verifica que $(x, y) \in R_\forall$, lo que implica que $y \in R_\forall(x)$.

(iii) Si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R_\forall-$conos de X, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ y $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ son $R_\forall-$conos de X:

Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R_\forall-$conos, entonces $Y_i = R_\forall(Y_i)$ para todo $i \in I$.

Por ser la relación $R_\forall$ reflexiva, se verifica que $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i \subseteq R_\forall(\bigcup\limits_{i\in I} Y_i)$ y $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i \subseteq R_\forall(\bigcap\limits_{i\in I} Y_i)$. Por otra parte, si $y \in R_\forall(\bigcup\limits_{i\in I} Y_i)$, entonces existe $z \in \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ tal que $(z, y) \in R_\forall$. Por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que $z \in Y_{i_0} = R_\forall(Y_{i_0})$, lo que implica que existe $t \in Y_{i_0}$ tal que $(t, z) \in R_\forall$. Luego $(t, y) \in R_\forall$ con $t \in Y_{i_0}$, entonces $y \in R_\forall(Y_{i_0}) = Y_{i_0}$ y por lo tanto $y \in \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$. Análogamente, si $y \in R_\forall(\bigcap\limits_{i\in I} Y_i)$, entonces existe $z \in \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ tal que $(z, y) \in R_\forall$. Luego $z \in Y_i = R_\forall(Y_i)$ para todo $i \in I$. Entonces $y \in R_\forall(Y_i) = Y_i$ para todo $i \in I$, lo cual implica que $y \in \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$. $\square$

Como consecuencia del Lema 5.3.1.2, el conjunto $R_\forall^C(X)$ es un subretículo completo de $\mathcal{P}(X)$. En particular, los subconjuntos de X que son cerrados, $\triangle-$involutivos y $R_\forall-$conos, ordenados por inclusión, forman un subretículo del conjunto $C_{\triangle}(X)$ de los subconjuntos cerrados y $\triangle-$involutivos de X. Dicho subretículo será denotado $C_{\triangle R_{\forall}}(X)$.

Observación 5.3.1.3 *En el* Teorema 4.3.1.3*, se demostró que el retículo* $C_{\triangle R_{\exists}}(\mathcal{I}_p(L))$ *de los subconjuntos cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R_{\exists}-$*conos de* $\mathcal{I}_p(L)$*, es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathbf{qM_3}}(L)$ *de las* $\mathbf{qM_3}-$*congruencias o congruencias compatibles con el operador* $\exists$ *y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{C\triangle R_{\exists}}(Y) = \{(a,b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$.

El siguiente teorema muestra que existe una correspondencia biunívoca entre las congruencias de un M_3-retículo L, compatibles con el operador $\forall$, y ciertos subconjuntos cerrados de su mM_3-espacio asociado.

Teorema 5.3.1.4 *Sea* $(L, \exists, \forall)$ *un* mM_3-*retículo e* $(\mathcal{I}_p(L), R_{\exists}, R_{\forall})$ *el* mM_3-*espacio asociado a* L*. Entonces el retículo* $C_{\triangle R_{\forall}}(\mathcal{I}_p(L))$ *de los subconjuntos cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R_{\forall}-$*conos de* $\mathcal{I}_p(L)$*, es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathbf{M_3}}(L, \forall)$ *de las* $\mathbf{M_3}-$*congruencias compatibles con el operador* $\forall$ *y el isomorfismo lo establece la función dada por* $\Theta(Y) = \{(a,b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$.

Dem. Sabemos que $\Theta(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia. Probemos que esta relación es compatible con el operador $\forall$. Sea (1) $(a,b) \in \Theta(Y)$ y (2) $Q \in \sigma_L(\forall a) \cap Y$. Supongamos que $\forall b \in Q$, entonces $b \in \forall^{-1}(Q)$ y por lo tanto $b \notin L \setminus \forall^{-1}(Q)$. Como $L \setminus \forall^{-1}(Q) = \forall^{-1}(L \setminus Q)$ es un filtro, existe un filtro primo P tal que $\forall^{-1}(L \setminus Q) \subseteq P$ y $b \notin P$. Luego existe un ideal primo $R = L \setminus P$ tal que $R \subseteq \forall^{-1}(Q)$, lo cual implica que $(Q, R) \in R_{\forall}$ y en consecuencia $R \in R_{\forall}(Q)$, de donde por ser $R_{\forall}(Q)$ un subconjunto cerrado, podemos afirmar que existe $S \in max\, R_{\forall}(Q)$ tal que $R \subseteq S$. Como $b \in R$, se verifica $b \in S$, luego $S \notin \sigma_L(b) \cap Y$ y por (1) resulta (3) $S \notin \sigma_L(a) \cap Y$. Por otro lado como $S \in R_{\forall}(Q)$ con $Q \in Y$, tenemos que $S \in R_{\forall}(Y)$, de donde por ser Y un $R_{\forall}-$cono, se cumple que $S \in Y$. Entonces de (3), se verifica que $a \in S$ y por lo tanto $a \in \forall^{-1}(Q)$, es decir $\forall a \in Q$, lo que contradice (2). Por lo tanto $\forall b \notin Q$ y así $Q \in \sigma_L(\forall b) \cap Y$. En consecuencia $\sigma_L(\forall a) \cap Y \subseteq \sigma_L(\forall b) \cap Y$. La otra inclusión se demuestra en forma análoga y por lo tanto $(\forall a, \forall b) \in \Theta(Y)$, resultando de este modo que $\Theta(Y)$ es compatible con el operador $\forall$.

Como $C_{\triangle R_\forall}(\mathcal{I}_p(L))$ es un subretículo de $C_\triangle(\mathcal{I}_p(L))$, entonces la aplicación $Y \longrightarrow \Theta(Y)$ es inyectiva y un homomorfismo de retículos entre $C_{\triangle R_\forall}(\mathcal{I}_p(L))$ y el dual de $Con_{\mathbf{M_3}}(L, \forall)$. Solo resta probar que esta aplicación es sobreyectiva. Sea $\theta \in Con_{\mathbf{M_3}}(L, \forall)$, como θ es una congruencia de M_3-retículos, entonces $\theta = \Theta(Y)$ siendo $Y = \{q_\theta^{-1}(Q) : Q \in \mathcal{I}_p(L \setminus \theta)\}$ un conjunto cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$. Para completar la prueba debemos probar que $Y \in R_\forall^C(\mathcal{I}_p(L))$. Por ser $R_\forall$ reflexiva, se verifica $Y \subseteq R_\forall(Y)$. A continución probamos la otra inclusión. Sea $T \in R_\forall(Y)$ y supongamos que (4) $T \notin Y$. Luego existe $P \in Y$ tal que $T \in R_\forall(P)$, es decir $(P, T) \in R_\forall$, lo cual implica $T \subseteq \forall^{-1}(P)$. Como $R_\forall(P)$ es un cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, existe (5) $Q \in max\, R_\forall(P)$ tal que (6) $T \subseteq Q$. Por otra parte como Y es un conjunto $\triangle-$involutivo, de (4) y (6), se verifica que $Q \notin Y$, además por ser un subconjunto cerrado de $\mathcal{I}_p(L)$, existen $a, b \in L$ tales que $a \in Q$, $b \notin Q$ y (7) $(a, b) \in \theta$. Consideremos ahora I, el ideal generado por $\{b\} \cup Q$. Si fuese $I \cap \forall^{-1}(L \setminus P) = \emptyset$, como $\forall^{-1}(L \setminus P)$ es un filtro de L, por el teorema de Birkhoff-Stone, existe un filtro primo R tal que $\forall^{-1}(L \setminus P) \subseteq R$ e $I \cap R = \emptyset$, lo que implica que $R \subseteq L \setminus Q$. Entonces existe un filtro primo R tal que $Q \subseteq L \setminus R \subseteq L \setminus \forall^{-1}(L \setminus P) = \forall^{-1}(P)$. Si llamamos S a $L \setminus R$, se verifica que $S \in \mathcal{I}_p(L)$ y $Q \subseteq S \subseteq \forall^{-1}(P)$, lo que contradice el carácter maximal de Q en $R_\forall(P)$. Luego $I \cap \forall^{-1}(L \setminus P) \neq \emptyset$, entonces existe $m \in I \cap \forall^{-1}(L \setminus P)$, lo que implica que existe $q \in Q$ tal que $m \leq b \vee q$, de donde $\forall m \leq \forall(b \vee q)$. Como $\forall m \in L \setminus P$ y $L \setminus P$ es un filtro primo, entonces $\forall(b \vee q) \in L \setminus P$, lo que implica $P \in \sigma_L(\forall(b \vee q)) \cap Y$, además de (7), se verifica que $(a \vee q, b \vee q) \in \theta = \Theta(Y)$. Por ser la relación compatible con el operador $\forall$, tenemos que $(\forall(a \vee q), \forall(b \vee q)) \in \Theta(Y)$, de donde resulta $P \in \sigma_L(\forall(a \vee q)) \cap Y$ y por lo tanto $\forall(a \vee q) \notin P$. Entonces $a \vee q \notin \forall^{-1}(P)$, de donde por (5), $a \vee q \notin Q$, pero $a \in Q$ y $q \in Q$, lo que contradice que Q es un ideal. Luego $T \in Y$ y de esta forma queda probado que Y es un $R_\forall-$cono de $\mathcal{I}_p(L)$.

$\square$

En forma análoga a lo realizado por S. Celani en [9], para caracterizar las congruencias de los $\Box\Diamond-$retículos, introducimos la noción de conjunto $R-$saturado.

Definición 5.3.1.5 *Sea* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3-*espacio. Diremos que un subconjunto* Y *de* X *es un*

(i) $R_\exists-$*saturado, si* $min\, R_\exists(x) \subseteq Y$, *para cada* $x \in Y$,

(ii) $R_\forall-$*saturado, si* $max\, R_\forall(x) \subseteq Y$,*para cada* $x \in Y$,

(iii) $R-$*saturado, si* $M(x) \subseteq Y$, *para cada* $x \in Y$, *siendo* $M(x) = min\, R_\exists(x) \cup max\, R_\forall(x)$.

Con $Sat_{R_\exists}(X)$, $Sat_{R_\forall}(X)$ y $Sat_R(X)$, indicaremos la familia de los subconjuntos $R_\exists-$saturados, $R_\forall-$saturados y $R-$saturados de X respectivamente.

Observación 5.3.1.6 *Si* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3-*espacio, entonces* $R^C_\forall(X) \subseteq Sat_{R_\forall}(X)$. *En efecto, sea* $Y \in R^C_\forall(X)$, *entonces* $Y = R_\forall(Y)$. *Consideremos* $x \in Y$ *y* $z \in max\, R_\forall(x)$. *Luego* $z \in R_\forall(x)$ *con* $x \in Y$, *lo que implica que* $z \in R_\forall(Y)$ *y por lo tanto* $z \in Y$. *Entonces* $max\, R_\forall(x) \subseteq Y$, *para cada* $x \in Y$ *y en consecuencia* $Y \in Sat_{R_\forall}(X)$.

Proposición 5.3.1.7 *Sea* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3-*espacio e* Y *un subconjunto* $\triangle-$*involutivo de* X . *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $Y \in R^C_\forall(X)$,

(ii) $Y \in Sat_{R_\forall}(X)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es inmediato de la Observación 5.3.1.6.

(ii) $\Leftarrow$ (i): Sea $Y \in Sat_{R_\forall}(X)$. Como $R_\forall$ es reflexiva, se verifica que $Y \subseteq R_\forall(Y)$. Probemos la otra inclusión. Sea $z \in R_\forall(Y)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $z \in R_\forall(y)$. Como $R_\forall(y)$ es un subconjunto cerrado de X, existe $t \in max\, R_\forall(y)$ tal que (1) $z \leq t$. Por ser Y un subconjunto $R_\forall-$saturado, se verifica que $t \in Y$, entonces de (1), teniendo en cuenta que Y es $\triangle-$involutivo, resulta que $z \in Y$. Luego $R_\forall(Y) = Y$ y por lo tanto $Y \in R^C_\forall(X)$.

$\Box$

Observaciones 5.3.1.8

(i) *En la* Proposición 4.3.2.5*, se demostró que cuando un conjunto* Y *es un subconjunto* $\triangle-$*involutivo de* X*, entonces* $Y \in R^C_{\exists}(X)$ *si, y solo si,* $Y \in Sat_{R_{\exists}}(X)$.

(ii) *Es fácil verificar que los subconjuntos cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R-$*saturados de un* mM_3-*espacio* X*, ordenados por inclusión, constituyen un subretículo del retículo* $C_{\triangle}(X)$*, de los subconjuntos cerrados y* $\triangle-$*involutivos de* X*. A dicho subretículo lo simbolizaremos con* $C_{\triangle S}(X)$.

Proposición 5.3.1.9 *Sea* $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ *un* mM_3-*espacio e* Y *un subconjunto* $\triangle-$*involutivo de* X *. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es un conjunto* $R-$*saturado,*

(ii) Y *es* $R_{\exists}-$*saturado y* $R_{\forall}-$*saturado,*

(iii) Y *es* $R_{\exists}-$*cono y* $R_{\forall}-$*cono,*

(iv) $R_{\exists}(Y) = Y$ *y* $R_{\forall}(Y) = Y$.

Esta noción de $R-$saturado, nos permite caracterizar el retículo de las $\mathbf{mM_3}-$congruencias como mostramos a continuación.

Teorema 5.3.1.10 *Sea* $(L, \exists, \forall)$ *un* mM_3-*retículo e* $(\mathcal{I}_p(L), R_{\exists}, R_{\forall})$ *el* mM_3-*espacio asociado a* L*. Entonces el retículo* $C_{\triangle S}(\mathcal{I}_p(L))$*, de los subconjuntos cerrados,* $\triangle-$*involutivos y* $R-$*saturados de* $\mathcal{I}_p(L)$*, es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathbf{mM_3}}(L)$*, de las* mM_3-*congruencias, y el isomorfismo lo establece la función definida por* $\Theta_{C\triangle S}(Y) = \{(a,b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$.

Dem. Sea $Y \in C_{\triangle S}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces sabemos que $\Theta_{C\triangle S}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia. Por otro lado como Y es un $R-$saturado de $\mathcal{I}_p(L)$, por la Proposición 5.3.1.9, se verifica que $Y \in R^C_{\forall}(\mathcal{I}_p(L)) \cap R^C_{\exists}(\mathcal{I}_p(L))$, lo que implica que $\Theta_{C\triangle S}(Y)$ es una $\mathbf{M_3}-$congruencia compatible con los operadores $\exists$ y $\forall$ y en consecuencia $\Theta_{C\triangle S}(Y) \in Con_{\mathbf{mM_3}}(L)$. Por otro lado como $C_{\triangle S}(\mathcal{I}_p(L))$ es un subretículo de $C_{\triangle}(\mathcal{I}_p(L))$, entonces la aplicación $Y \longrightarrow \Theta_{C\triangle S}(Y)$ es inyectiva y un homomorfismo de retículos entre $C_{\triangle S}(\mathcal{I}_p(L))$ y el dual de $Con_{\mathbf{mM_3}}(L)$. Solo resta probar que esta aplicación es sobreyectiva. Sea $\theta \in Con_{\mathbf{mM_3}}(L)$, como θ es una congruencia de M_3-retículos, entonces $\theta = \Theta_{C\triangle S}(Y) = \{(a,b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$ con $Y = \{q_\theta^{-1}(Q) : Q \in \mathcal{I}_p(L \backslash \theta)\}$ un conjunto cerrado y $\triangle-$involutivo de $\mathcal{I}_p(L)$ (ver Teorema 2.2.1.8). Para completar la prueba debemos probar que Y es un $R-$saturado de $\mathcal{I}_p(L)$. En la demostración del Teorema 4.3.1.3 se demostró que $Y \in R_\exists^C(\mathcal{I}_p(L))$ y en la demostración del Teorema 5.3.1.4, se probó que $Y \in R_\forall^C(\mathcal{I}_p(L))$. Luego se verifica que $Y \in C_{\triangle R_\forall}(\mathcal{I}_p(L)) \cap C_{\triangle R_\exists}(\mathcal{I}_p(L))$. De esto último, por lo visto en la Proposición 5.3.1.9, Y es un $R-$saturado de $\mathcal{I}_p(L)$ y así $Y \in C_{\triangle S}(\mathcal{I}_p(L))$. En consecuencia la aplicación $\Theta_{C\triangle S}$ es sobreyectiva.

□

5.3.2. Algebras simples y subdirectamente irreducibles en $\mathbf{mM_3}$

A continuación indicamos algunos resultados que nos fueron de utilidad para determinar los mM_3-retículos subdirectamente irreducibles.

Lema 5.3.2.1 *Si $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio, $x \in X$ y $R = R_\exists \cap R_\forall$, entonces $R(x) = R_\exists(x) \cap R_\forall(x)$ es un cerrado y $R-$saturado de X. Si además $x \in min\, X$, se verifica que $R(x)$ es decreciente.*

Dem. Sea $x \in X$, entonces por (mM3) tenemos que $R_\exists(x)$ y $R_\forall(x)$ son subconjuntos cerrados de X, en consecuencia $R(x)$ es un cerrado de X.

Por otro lado sea $y \in R(x)$ y $M(y) = min\, R_\exists(y) \cup max\, R_\forall(y)$. Como por la Proposición 5.2.2.7, se verifica que $min\, R_\exists(y) = min\, R(y)$ y $max\, R_\forall(y) = max\, R(y)$, entonces $M(y) \subseteq R(y)$. Además por ser la relación R transitiva, del hecho que $y \in R(x)$, se verifica que $R(y) \subseteq R(x)$. Luego tenemos que para cada $y \in R(x)$, $M(y) \subseteq R(x)$, lo que implica que $R(x)$ es un $R-$saturado de X.

Supongamos ahora que $x \in min\, X$. Sean $y \in R(x)$ y $u \in X$ tal que $u \leq y$. Como $y \in R_\forall(x)$ y $R_\forall(x)$ es decreciente tenemos que (1) $u \in R_\forall(x)$. Luego $(x, u) \in R_\forall$ y por (mM12), existe $z \leq x$ tal que $(u, z) \in R_\exists$ y $(z, u) \in R_\exists$. Entonces teniendo en cuenta que $x \in min\, X$, se verifica que $x = z$ y por lo tanto $(x, u) \in R_\exists$, lo que implica (2) $u \in R_\exists(x)$. De (1) y (2), $u \in R(x)$ y por lo tanto $R(x)$ es decreciente.

□

Proposición 5.3.2.2 *Si* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3-*espacio,* $R = R_\exists \cap R_\forall$ *y* $x \in min\, X$*, entonces* $[R(x))$ *es un cerrado,* $\triangle-$*involutivo y* $R-$*saturado de* X*.*

Dem.

(i) $[R(x))$ es un cerrado de X: Es consecuencia del Lema 5.3.2.1, pues se verifica $R(x)$ es un cerrado de X y por lo tanto $[R(x))$ es también un cerrado de X.

(ii) $[R(x))$ es un subconjunto $\triangle-$involutivo de X: Para ello vamos a demostrar que $[R(x))$ es creciente y decreciente. Es evidente que $[R(x))$ es creciente. Sean $y \in [R(x))$ y $u \leq y$, entonces existe $z \in R(x)$ tal que $z \leq y$ y se presentan los siguientes casos:

(a) $y = u$: En este caso es evidente que $u \in [R(x))$.

(b) $u < y$ y $z = y$: Como $x \in min\, X$, por el Lema 5.3.2.1, $R(x)$ es decreciente, entonces teniendo en cuenta que $y \in R(x)$, resulta $u \in [R(x))$.

(c) $u < y$ y $z < y$: Por ser X un M_3-espacio, se verifica que $u = z$ y por lo tanto $u \in R(x) \subseteq [R(x))$.

(iii) $[R(x))$ es un $R-$saturado de X: Sea $y \in [R(x))$ y $M(y) = min\, R_\exists(y) \cup max\, R_\forall(y)$. Entonces existe (1) $z \in R(x)$ tal que (2) $z \leq y$. Sea $u \in M(y)$, entonces se presentan dos casos: (a) $u \in min\, R_\exists(y)$ o (b) $u \in max\, R_\forall(y)$. Si ocurre (a), por (mM18), $u \in R(y)$ y por lo tanto (3) $(y, u) \in R$. Por otro lado, como $z \in R_\exists(z)$ y este conjunto es creciente tenemos, de (2), que $y \in R_\exists(z)$, es decir (4) $(z, y) \in R_\exists$. Además de (1), $(x, z) \in R_\exists$. De esto último, (3), (4) y la propiedad transitiva, resulta que $u \in R_\exists(x)$, de donde por (mM19), podemos concluir que $u \in [R(x))$.

Supongamos el caso (b), luego por (mM21), $y \in R_{\forall}^{-1}(v)$, es decir (5) $(u, y) \in R_{\forall}$. Por otro lado como $y \in R_{\forall}(y)$ y $R_{\forall}(y)$ es decreciente, de (2), $z \in R_{\forall}(y)$ es decir (6) $(y, z) \in R_{\forall}$. Finalmente de (1), (5) y (6), $u \in R_{\forall}^{-1}(x)$ y por (mM20), $u \in [R(x))$.

□

Lema 5.3.2.3 *Si $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ un mM_3-espacio, entonces el único subconjunto cerrado y $\triangle-$involutivo que contiene a $min\, X$, es el propio espacio.*

Dem. Sea Y subconjunto de X cerrado y $\triangle-$involutivo tal que (1) $min\, X \subseteq Y$. Si $x \in X$, entonces por ser X un M_3-espacio se verifica que (2) $x \in min\, X$ o (3) $x \in max\, X$. Si ocurre (2), entonces por (1), se verifica $x \in Y$. Si es verdadero (3), existe $t \in min\, X$ tal que $t < x$. Luego por (1), $t \in Y$ y como Y es $\triangle-$involutivo, entonces $x \in Y$. Por lo tanto $Y = X$. □

Proposición 5.3.2.4 *Sea $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ un mM_3-espacio, tal que el mM_3-retículo asociado $(D(X), \exists_{R_{\exists}}, \forall_{R_{\forall}})$ es subdirectamente irreducible. Si Y es un subconjunto no vacío, cerrado y $\triangle-$involutivo de X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $R-$saturado,*

(ii) *$min\, X \subseteq Y$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $Y \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Como $D(X)$ es un mM_3-retículo subdirectamente irreducible, entonces por el Teorema 5.3.1.10, existe $M_0 \in C_{\triangle S}(X)$ máximo no trivial. Luego $M_0 \neq X$ y existe $m \in min\, X$ tal que (1) $m \notin M_0$. Además por la Proposición 5.3.2.2, si $R = R_{\exists} \cap R_{\forall}$, se verifica que $[R(m)) \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset\}$ y $[R(m)) \nsubseteq M_0$, pues caso contrario, como $m \in R(m)$, tendríamos que $m \in M_0$. Esto implica que $[R(m)) = X$.

Si $M_0 \neq \emptyset$, entonces, por ser M_0 un conjunto $\triangle-$involutivo, existe $z \in M_0 \cap min\, X$. Luego $z \in [R(m))$ y por lo tanto existe $s \in R(m)$ tal que $s \leq z$. Como $z \in min\, X$, tenemos que $s = z$, entonces $z \in R(m)$, de donde, por ser R una relación de equivalencia, resulta que $m \in R(z)$. Esto implica, por la Proposición 4.3.3.1, que $m \in min\, R_{\exists}(z)$ y como M_0 es $R-$saturado y $z \in M_0$, se verifica $m \in M_0$, lo que contradice (1). Luego $M_0 = \emptyset$ y por lo tanto $Y = X$, lo que implica que $min\, X \subseteq Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediato, pues si $min\, X \subseteq Y$, como X es $\triangle-$involutivo, tenemos que $Y = X$ y por lo tanto Y es $R-$saturado. □

Corolario 5.3.2.5 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio y $(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ su mM_3-retículo asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ *es un mM_3-retículo simple,*

(ii) $(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ *es un mM_3-retículo subdirectamente irreducible.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Inmediato.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Por hipótesis existe $M_0 \in C_{\triangle S}(X)$ tal que (1) $M_0 \neq X$ y si $S \in C_{\triangle S}(X)$ y $S \neq X$, entonces $S \subseteq M_0$. Supongamos que $M_0 \neq \emptyset$, entonces por la Proposición 5.3.2.4, $min\, X \subseteq M_0$, lo cual implica, por Lema 5.3.2.3, que $M_0 = X$, lo que contradice (1). Por lo tanto $M_0 = \emptyset$ y en consecuencia los únicos elementos de $C_{\triangle S}(X)$ son $\emptyset$ y X, de donde se tiene, por el Teorema 5.3.1.10, que $D(X)$ es un mM_3-retículo simple. □

Lema 5.3.2.6 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio, $R = R_\exists \cap R_\forall$ y $U \in D(X)$. Entonces $\exists_{R_\exists}(U)$ es un abierto, cerrado y $R-$saturado de X.*

Dem.

Como $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio, entonces $(X, R_\exists)$ es un qM_3-espacio y por el Lema 4.3.3.6, $\exists_{R_\exists}(U)$ es un abierto, cerrado y $R_\exists-$saturado de X y en consecuencia $min\, R_\exists(y) \subseteq \exists_{R_\exists}(U)$, para cada $y \in \exists_{R_\exists}(U) = R_\exists^{-1}(U)$.

Por otra parte si $z \in max\, R_\forall(y)$, entonces $(y, z) \in R_\forall$, o lo que es equivalente teniendo en cuenta (mM5), $(z, y) \in R_\exists$. Como $(y, u) \in R_\exists$ para algún $u \in U$, entonces $(z, u) \in R_\exists$, lo que implica que $z \in R_\exists^{-1}(U)$, y por lo tanto $z \in \exists_{R_\exists}(U)$. En consecuencia $M(y) = min\, R_\exists(y) \cup max\, R_\exists(y) \subseteq \exists_{R_\exists}(U)$ para cada $y \in \exists_{R_\exists}(U)$, por lo tanto $\exists_{R_\exists}(U)$ es un subconjunto $R-$saturado de X. □

Corolario 5.3.2.7 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio, $R = R_\exists \cap R_\forall$ y $U \in D(X)$. Si U es $\triangle-$involutivo, entonces $\exists_{R_\exists}(U)$ es un $R-$cono, abierto, cerrado y $\triangle-$involutivo de X.*

Dem. Si $U \in D(X)$, es un subconjunto $\triangle-$involutivo de X, por Lema 5.3.2.6 se verifica que $\exists_{R_\exists}(U)$ es un subconjunto abierto, cerrado y $R-$saturado de X. Por otro lado como $\triangle^* U = U$, teniendo en cuenta la propiedad (E6) en $D(X)$, se verifica $\triangle^*(\exists_{R_\exists}(U)) = \exists_{R_\exists}(U)$ y por lo tanto $\exists_{R_\exists}(U)$ es $\triangle-$involutivo. Luego por las Proposiciones 4.3.2.5 y 5.3.1.7, tenemos que $\exists_{R_\exists}(U)$ es un $R-$cono. $\square$

Proposición 5.3.2.8 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio y $(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ su mM_3-retículo asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\exists_{R_\exists}(D(X))$ es un M_3-retículo simple,*

(ii) *$(x, y) \in R_\exists$, para todo $x, y \in min\, X$,*

(iii) *$(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ es un mM_3-retículo simple.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Inmediato por la Proposición 4.3.3.11.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $Y \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset\}$, entonces por ser Y un conjunto $\triangle-$involutivo, existe $z \in min\, X \cap Y$. Luego si $x \in min\, X$, entonces por (ii), se verifica que $(z, x) \in R_\exists$ y por lo tanto $x \in R_\exists(Y)$. Como Y es $R-$saturado, Y es un $R_\exists-$saturado, entonces por la Proposición 4.3.2.5, Y es un $R_\exists-$cono y en consecuencia $x \in Y$. Esto implica que $min\, X \subseteq Y$, de donde, teniendo en cuenta el Lema 5.3.2.3, se verifica que $Y = X$. Luego por el Teorema 5.3.1.10, $D(X)$, es un mM_3-retículo simple.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sea $D(X)$ un mM_3-retículo simple y supongamos que $\exists_{R_\exists}(D(X))$ no es un M_3-retículo simple. Luego existen $U, V \in D(X)$ tales que $\exists_{R_\exists}(U) \neq X$, $\exists_{R_\exists}(V) \neq X$, $\exists_{R_\exists}(U) \neq \emptyset$, $\exists_{R_\exists}(V) \neq \emptyset$ y $\exists_{R_\exists}(U) \neq \exists_{R_\exists}(V)$. En consecuencia existen $x, y \in X$ tales que $x \in \exists_{R_\exists}(U)$, $y \in \exists_{R_\exists}(V)$, $x \notin \exists_{R_\exists}(V)$, $y \notin \exists_{R_\exists}(U)$, y por lo tanto (1) $(x, y) \notin R_\exists$ y $(y, x) \notin R_\exists$. Supongamos que $x \in min\, X$ o $y \in min\, X$, entonces en virtud de la Proposición 5.3.2.2, se verifica que $[R(x)) \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset\}$ o $[R(y)) \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset\}$, además

$[R(x)) \neq X$ o $[R(y)) \neq X$. En efecto, si $x \in min\, X$ y $[R(x)) = X$, entonces $y \in [R(x))$, lo cual implica que existe $z \in R(x) = R_{\exists}(x) \cap R_{\forall}(x)$, tal que $z \leq y$. Como por (mM3), $R_{\exists}(z)$ es creciente y $z \in R_{\exists}(z)$, entonces se verifica que $y \in R_{\exists}(z)$, de donde por la propiedad transitiva de la relación $R_{\exists}$, tenemos que $(x, y) \in R_{\exists}$ que contradice (1). En forma análoga se prueba que $[R(y)) \neq X$, si $y \in min\, X$. Luego $[R(x)) \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ o $[R(y)) \in C_{\triangle S}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$, lo que contradice que $D(X)$ un mM_3-retículo simple. Por lo tanto $x \in max\, X$ e $y \in max\, X$, entonces teniendo en cuenta que X es un M_3-espacio y el Lema 4.3.3.9, existen $m, n \in min\, X$ tales que $m < x$, $n < y$, $(m, n) \notin R_{\exists}$ y $(n, m) \notin R_{\exists}$. Luego por la Proposición 5.3.2.2, $[R(n))$ y $[R(m))$ son $R-$saturados, cerrados y $\triangle-$involutivos, tales que $[R(n)) \neq X$, $[R(m)) \neq X$, $[R(n)) \neq \emptyset$ y $[R(m)) \neq \emptyset$, lo que contradice, por el Teorema 5.3.1.10, que $D(X)$ es un mM_3-retículo simple.

□

Corolario 5.3.2.9 *Si* $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo subdirectamente irreducible,*

(ii) $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo simple,*

(iii) $\exists(L)$ *es un* M_3-*retículo simple,*

(iv) $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo subdirectamente irreducible,*

(v) $(L, \exists)$ *es un* qM_3-*retículo simple,*

(vi) $\exists(L)$ *es isomorfa al álgebra* $\langle \mathrm{T}, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0 \rangle$, *donde* T *es la cadena con tres elementos* $\{0, 1/2, 1\}$ *con* $0 \leq 1/2 \leq 1$ *y las operaciones* $\sim$ *y* $\triangle$ *están definidas en la siguiente tabla:*

x	$\sim x$	$\triangle x$
0	0	0
$1/2$	1	0
1	$1/2$	1

Dem.

Es consecuencia inmediata del Corolario 5.3.2.5, la Proposición 5.3.2.8, el Corolario 4.3.3.13 y la propiedad (M33) de la Sección 1.4 del Capítulo 1. □

Corolario 5.3.2.10 *Sea el M_3-retículo $\langle \mathrm{T}^X, \wedge, \vee, \sim \triangle, 0\rangle$ donde T es la cadena de tres elementos $\{0, 1/2, 1\}$ con $0 \leq 1/2 \leq 1$, X es un conjunto no vacío y T^X es el conjunto de todas las funciones de X en T, donde las operaciones de M_3-retículo se definen puntualmente. Si para cada $f \in \mathrm{T}^X$ se define $(\exists f)(x) = \bigvee f(X)$, y $(\forall f)(x) = \bigwedge f(X)$, para todo $x \in X$, donde $\bigvee f(X)$ y $\bigwedge f(X)$ son el supremo y el ínfimo del conjunto $f(X)$ respectivamente, entonces $(\mathrm{T}^X, \exists, \forall)$ es un mM_3-retículo simple.*

Dem. Es claro que por la forma como está definido, $(\mathrm{T}^X, \exists, \forall)$ es un mM_3-retículo, donde además se verifica que $\exists(\mathrm{T}^X) = \mathrm{T}$. Luego por el Corolario 5.3.2.9, se verifica que $(\mathrm{T}^X, \exists)$ es un qM_3-retículo simple y por lo tanto $(\mathrm{T}^X, \exists, \forall)$ es un mM_3-retículo simple. □

Proposición 5.3.2.11 *Sea $(L, \exists, \forall)$ un mM_3-retículo simple. Entonces existe una mM_3-función sobreyectiva de $\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})$ en $\mathcal{I}_p(L)$, donde T es la cadena de tres elementos $\{0, 1/2, 1\}$ con $0 \leq 1/2 \leq 1$ y $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists, \forall)$ es el mM_3-retículo simple indicado en el* Corolario 5.3.2.10.

Dem. Sea $(L, \exists, \forall)$ un mM_3-retículo simple.

Por el teorema de representación para los M_3-retículos (ver [14]), existe un $\mathbf{M_3}-$homorfismo inyectivo de $h : L \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}$. Luego se sigue de la dualidad para los M_3-retículos que existe una M_3-función sobreyectiva $\Phi(h) : \mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}) \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$.

Como por el Corolario 5.3.2.9, $(L, \exists)$ es un qM_3-retículo simple, entonces por lo visto en la demostración de la Proposición 4.3.3.16, podemos asegurar que $\Phi(h)$ es una qM_3-función. Resta probar que (1) $\Phi(h)^{-1}(\forall U) = \forall \Phi(h)^{-1}(U)$, para todo $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$. Como $(L, \exists)$ y $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists)$ son qM_3-retículos simples, entonces por el Corolario 4.3.3.12, tenemos que

$\exists(D(\mathcal{I}_p(L))) = \{\emptyset, min\, \mathcal{I}_p(L), \mathcal{I}_p(L)\}$ y

$\exists(D(\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}))) = \{\emptyset, min\,\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}), \mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})\}$.

Por otro lado por ser $(D(\mathcal{I}_p(L)), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ y $(D(\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ mM_3-retículos, se verifica que $\exists(D(\mathcal{I}_p(L))) = \forall(D(\mathcal{I}_p(L)))$ y $\exists(D(\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}))) = \forall(D(\mathcal{I}_p(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})))$.

Entonces teniendo en cuenta Proposición 4.3.3.15 y el hecho de que $\Phi(h)$ es sobreyectiva, inferimos que $\Phi(h)(min\,\mathcal{I}_p(T^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)})) = min\,\mathcal{I}_p(L)$, de donde se verifica (1), y por lo tanto la demostración está completa. □

Corolario 5.3.2.12 *Sea* $(L, \exists, \forall)$ *un* mM_3-*retículo simple y* $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists, \forall)$ *el* mM_3-*retículo dado como en el* Corolario 5.3.2.10. *Entonces existe un* $\mathbf{mM_3}-$*homomorfismo inyectivo de* L *en* $\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}$.

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.3.2.11. □

Corolario 5.3.2.13 *Si* $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo subdirectamente irreducible,*

(ii) $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo simple,*

(iii) $(L, \exists, \forall)$ *es isomorfo a un* mM_3-*subretículo del* mM_3-*retículo* $(\mathrm{T}^{\mathcal{N}\mathcal{I}_p(L)}, \exists, \forall)$, *indicado en el* Corolario 5.3.2.10.

Dem. Es consecuencia inmediata de los Corolarios 5.3.2.9 y 5.3.2.12. □

Ahora, consideramos el caso de los mM_3-retículos simples finitos.

Corolario 5.3.2.14 *Si* $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo finito, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

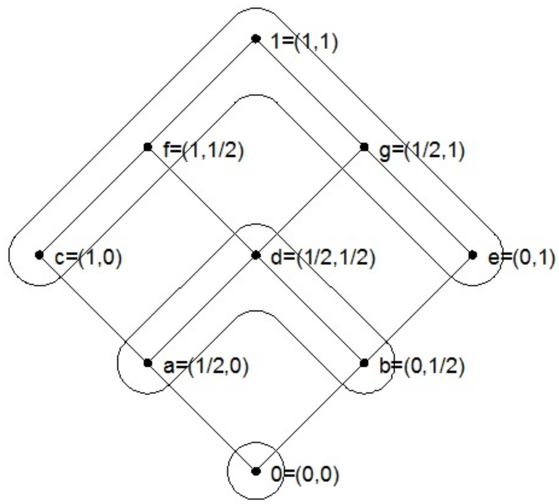
(i) $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo subdirectamente irreducible,*

(ii) $(L, \exists, \forall)$ *es un* mM_3-*retículo simple,*

(iii) $(L, \exists, \forall)$ *es isomorfo a un* mM_3-*subretículo del* mM_3-*retículo* $(\mathrm{T}^n, \exists, \forall)$, *indicado en el* Corolario 5.3.2.10, *para algún* $n \in I\!N$.

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 5.3.2.13. $\square$

Ejemplo 5.3.2.15



El diagrama de Hasse anterior corresponde al mM_3-*retículo simple* (*subdirectamente irreducible*) $(\mathrm{T}^2, \exists, \forall)$ *del* Corolario 5.3.2.10, *las operaciones correspondientes están dadas en la tabla dada a continuación:*

x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\sim x$	0	c	e	a	1	b	g	f	d
$\triangle x$	0	0	0	c	0	e	c	e	1
∇x	0	c	e	c	1	e	1	1	1
$\exists x$	0	d	d	1	d	1	1	1	1
$\forall x$	0	0	0	0	d	0	d	d	1

Se ha resaltado, en el gráfico, como la imagen de los cuantificadores $\exists$ *y* $\forall$, *es decir* $\exists(L)$ *y* $\forall(L)$, *es isomorfa a* T, *la cadena con tres elementos* $\{0, 1/2, 1\}$ *con* $0 \leq 1/2 \leq 1$. *Además vemos que* $\exists(L) = \forall(L) = \{0, d, 1\}$.

Por otro lado, otro hecho importante de destacar, es que en este caso, como la negación $\sim$ *no se comporta como una negación de De Morgan, no es posible definir, con esta negación, un cuantificador en función del otro, de la manera clásica, como se muestra a continuación:* $\sim \exists a = \sim d = 1$ *mientras que* $\forall \sim a = \forall c = 0$*, por lo que resulta que* $\sim \exists a \neq \forall \sim a$.

5.4. Relación entre los M_3−retículos monádicos y los qM_3−retículos

En esta sección, nuestra atención esta focalizada en determinar que en un M_3−retículo monádico $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, \forall, 0, 1\rangle$ se puede definir el cuantificador universal $\forall$ a partir del cuantificador existencial $\exists$, lo que nos va a permitir afirmar que todo qM_3−retículo es un M_3−retículo monádico.

5.4.1. Otra caracterización de los cuantificadores en el mM_3−retículo dual de un mM_3−espacio

Como nuestro objetivo es lograr definir el cuantificador $\forall$ en función del cuantificador $\exists$ en los mM_3−retículos, comenzamos analizando si esto es factible en los mM_3−retículos duales de los mM_3−espacios. Para ello en primer lugar obtenemos otra caracterización de estos cuantificadores en los mM_3−retículos duales de los mM_3−espacios.

Proposición 5.4.1.1 *Sea* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3*-espacio y* $(D(X), \exists_{R_\exists}, \forall_{R_\forall})$ *su* mM_3*-retículo dual, donde* $\exists_{R_\exists}(U) = \{x \in X : R_\exists(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *y* $\forall_{R_\forall}(U) = \{x \in X : R_\forall(x) \subseteq U\}$*, para cada* $U \in D(X)$*. Si* $R = R_\exists \cap R_\forall$*, entonces para cada* $U \in D(X)$ *se verifican:*

(i) $\exists_{R_\exists}(U) = \exists_R(U) = R(U)$,

(ii) $\forall_{R_\forall}(U) = \forall_R(U) = X \setminus R(X \setminus U)$.

Dem. La demostración de (ii), está realizada en el Corolario 5.2.3.3. Probemos ahora (i).

Sea $x \in \exists_{R_\exists}(U)$, entonces $x \in R_\exists^{-1}(U)$ y por lo tanto existe $y \in U$ tal que $(x, y) \in R_\exists$. Luego $y \in R_\exists(x)$, siendo $R_\exists(x)$ un conjunto cerrado de X. Además por (mM17), podemos asegurar que $min\, R_\exists(x) \subseteq R_\exists^{-1}(x)$. Si $y \in min\, R_\exists(x)$, entonces $y \in R_\exists^{-1}(x)$, luego por (mM5), tenemos que $(x, y) \in R_\forall$ y en consecuencia $(x, y) \in R$. Resulta de este modo, por ser R una relación de equivalencia, que $(y, x) \in R$ y por lo tanto $x \in R(U)$. Si fuera que $y \notin min\, R_\exists(x)$, como $R_\exists(x)$ es un conjunto cerrado de X, existe $z \in minR_\exists(x)$ tal que $z < y$. Luego $(x, z) \in R_\exists$ y por otro lado, por (mM17), $z \in R_\exists^{-1}(x)$, de donde obtenemos que $(x, z) \in R_\forall$. Tenemos así que $(x, z) \in R_\exists \cap R_\forall = R$. Además como $y \in U$ y U es decreciente, $z \in U$. Luego $(z, x) \in R$, con $z \in U$ y por lo tanto $x \in R(U)$.

Recíprocamente, si $x \in R(U)$, existe $u \in U$ tal que $(u, x) \in R = R_\exists \cap R_\forall$. Entonces $(u, x) \in R_\forall = R_\exists^{-1}$, de donde tenemos que $(x, u) \in R_\exists$, y por lo tanto $x \in R_\exists^{-1}(U)$.

□

5.4.2. Álgebra de Kleene asociada a un M_3−retículo

A continuación probamos que en un M_3−retículo acotado L se puede definir una negación de De Morgan. Para ello tenemos en cuenta que por la propiedad (MP2), los M_3−espacios son suma cardinal de cadenas de dos elementos y en consecuencia cuando se considera un elemento x de un M_3−espacio X se verifica que $[x) \cap max\, X = \{y\}$ y $(x] \cap min\, X = \{z\}$. Esto nos lleva a enunciar la siguiente proposición:

Proposición 5.4.2.1 *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un* M_3−*espacio y* $\langle D(X), \cap, \cup, \triangle^*, \neg, \emptyset, X\rangle$ *su* M_3−*retículo dual. Entonces la aplicación* $g : X \longrightarrow X$ *dada por*

$$g(x) = \begin{cases} y, & \text{si } x \in min\, X \text{ y } [x) \cap max\, X = \{y\} \\ z, & \text{si } x \in max\, X \text{ y } (x] \cap min\, X = \{z\} \end{cases}$$

es un homeomorfismo involutivo y un antiisomorfismo de orden.

Dem. Del hecho que X, es un M_3−espacio, es suma cardinal de cadenas de dos elementos, y por lo tanto si $x \in X$, entonces $x \in C_{xy}$ donde C_{xy} es la cadena de dos elementos que contiene a x y ($x < y$ o $y < x$). Luego en ambos casos tenemos que $g(x) = y$, siendo esta aplicación, biyectiva, un antiisomorfismo de orden y tal que $g(g(x)) = x$. Para probar que g es un homeomorfismo, como g es una biyección y $g = g^{-1}$, es suficiente probar que g es continua. Además, teniendo en cuenta que la familia $\Sigma = \{U : U \in D(X)\} \cup \{X \setminus U : U \in D(X)\}$ es una subbase de la topología τ, es suficiente probar que para todo $U \in D(X)$, $g^{-1}(U) \in \tau$ y $X \setminus g^{-1}(U) \in \tau$, o lo que es equivalente en este caso $g(U) \in \tau$ y $X \setminus g(U) \in \tau$, para todo $U \in D(X)$. Para ello probaremos que (I) $X \setminus g(U) = (X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U))$.

(i) $X \setminus g(U) \subseteq (X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U))$:

Supongamos que existe (1) $x \in X \setminus g(U)$ tal que $x \in \nabla^* U)$ y $x \notin U \cap (X \setminus \triangle^* U)$. Es decir (2) $x \in \nabla^* U$ y ((3) $x \notin U$ o (4) $x \in \triangle^* U$). Si vale (2) y (3), $x \in \neg U$ y por lo tanto existe $y \in min\, x \cap U$ tal que $y < x$. Entonces $g(x) = y \in U$ y tenemos que $g(y) = x \in g(U)$, lo que contradice (1). Por otra parte si se verifica (2) y (4), $C_x = \{x, g(x)\}$, la cadena que contiene a x, es tal que $C_x \subseteq U$ y por lo tanto $x \in g(U)$, lo que contradice (1).

(ii) $(X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U)) \subseteq X \setminus g(U)$:

Sea (1) $x \in (X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U))$ y supongamos que $x \in g(U)$. Luego existe $u \in U$ tal que $x = g(u)$. se pueden presentar entonces los siguientes casos: (a) $u \in max\, X$ o (b) $u \in min\, X$. En el caso (a), $u \in \triangle^* U \subseteq U \subseteq \nabla^* U$, lo que implica que $x \notin (X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U))$, que contradice (1). Si ocurre (b), se pueden presentar dos subcasos (b1) $g(u) \in U$ o (b2) $g(u) \notin U$. Si fuese (b1), $g(u) = x \in max\, X \cap U \subseteq \triangle^* U$, lo que implica que $x \notin U \cap (X \setminus \triangle^* U)$. Por otro lado como $g(u) = x \in U \subseteq \nabla^* U$, entonces $x \notin X \setminus \nabla^* U$. en consecuencia $x \notin (X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U))$, lo que contradice (1). Si se verifica (b2), es claro que $x \in \nabla^* U$ y además como $x \notin U$, se verifica que $x \notin U \cap (X \setminus \triangle^* U)$. Por lo tanto $x \notin (X \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (X \setminus \triangle^* U))$, que contradice (1).

De (I), tenemos que $X \setminus g(U) \in D(X)$, para todo $U \in D(X)$. En consecuencia $X \setminus g(U)$ es abierto y cerrado en X, para todo $U \in D(X)$, lo que nos permite afirmar que $X \setminus g(U) \in \tau$ y $g(U) \in \tau$ para todo $U \in D(X)$ y por lo tanto g es un homeomorfismo. □

Corolario 5.4.2.2 *Sean* $(X,\tau,\leq)$ *un* M_3-*espacio y la aplicación* $g : X \longrightarrow X$ *dada por*

$$g(x) = \begin{cases} y, & \text{si } x \in min\, X \text{ y } [x) \cap max\, X = \{y\} \\ z, & \text{si } x \in max\, X \text{ y } (x] \cap min\, X = \{z\} \end{cases}$$

Entonces $(X,\tau,\leq,g)$ *es un espacio de Kleene, según W. Cornish y P. Fowler en* [12] y [13].

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.4.2.1 y el hecho de que para todo $x \in X$ se verifique que x y $g(x)$ son comparables. $\square$

Corolario 5.4.2.3 *Sea* $(X,\tau,\leq)$ *un* M_3-*espacio. Si en* $D(X)$ *definimos* $\sim^* U = X \setminus g(U)$, *para cada* $U \in D(X)$, *donde* g *es la aplicación definida en el* Corolario 5.4.2.2, *entonces* $\langle D(X),\cap,\cup,\sim^*,\emptyset,X\rangle$ *es un álgebra de Kleene.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 5.4.2.2 y de la dualidad para las álgebras de De Morgan, más precisamente $\langle D(X),\cap,\cup,\sim^*,\emptyset,X\rangle$ es un álgebra de Kleene, según lo establecido en [12] y [13]. $\square$

Corolario 5.4.2.4 *Sea* $L \in \mathbf{M_3}$ *e* $\mathcal{I}_p(L)$ *su* M_3-*espacio asociado. Si para cada* $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$ *definimos* $\sim^* U = \mathcal{I}_p(L) \setminus g(U)$, *donde* $g : \mathcal{I}_p(L) \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$ *es la aplicación definida como en el* Corolario 5.4.2.2, *entonces* $\langle D(\mathcal{I}_p(L)),\cap,\cup,\sim^*,\emptyset,\mathcal{I}_p(L)\rangle$ *es un álgebra de Kleene, y además* $\sim^* U = (\mathcal{I}_p(L) \setminus \nabla^* U) \cup (U \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus \triangle^* U)$, *para todo* $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$.

Dem. Inmediata del Corolario C 5.4.4 y lo visto en la demostración de la Proposición 5.4.2.1. $\square$

Teorema 5.4.2.5 *Sea* $L \in \mathbf{M_3}$, $\mathcal{I}_p(L)$ *su* M_3-*espacio asociado y* $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ *definida como en* (A1). *Si para cada* $a \in L$ *definimos* $\approx a = \overline{\nabla a} \vee (a \wedge \overline{\triangle a})$, *donde* $\overline{\nabla a}$ *y* $\overline{\triangle a}$ *son el complemento booleano en* $K(L)$ *de* ∇a *y* $\triangle a$ *respectivamente, entonces se verifica que* $\langle L,\wedge,\vee,\approx,0,1\rangle$ *es un álgebra de Kleene.*

Dem. Por ser L un M_3-retículo acotado, se verifica que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado. Además por la Proposición 2.2.4.6, el Corolario 5.4.2.4 y el hecho de que la función $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_P(L))$ es un $\mathbf{M_3}-$isomorfismo tenemos que $\sigma_L(\approx a) = \sigma_L(\overline{\nabla a} \vee (a \wedge \overline{\triangle a})) = \sigma_L(\overline{\nabla a}) \cup \sigma_L(a \wedge \overline{\triangle a}) = (\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\nabla a)) \cup (\sigma_L(a) \cap \sigma_L(\overline{\triangle a})) = (\mathcal{I}_p(L) \setminus \sigma_L(\nabla a)) \cup (\sigma_L(a) \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus (\sigma_L(\triangle a))) = (\mathcal{I}_p(L) \setminus \nabla^* \sigma_L(a)) \cup (\sigma_L(a) \cap (\mathcal{I}_p(L) \setminus \triangle^*(\sigma_L(a))) =\sim^* \sigma_L(a)$

Teniendo en cuenta lo anterior resulta que

(i) $\sigma_L(\approx\approx a) =\sim^* \sigma_L(\approx a) =\sim^*\sim^* \sigma_L(a) = \sigma_L(a)$.

(ii) $\sigma_L(\approx (a \wedge b)) =\sim^* \sigma_L(a \wedge b) =\sim^* (\sigma_L(a) \cap \sigma_L(b)) =\sim^* \sigma_L(a) \cap \sim^* \sigma_L(a) = \sigma_L(\approx a) \cap \sigma_L(\approx a) = \sigma_L(\approx a \wedge \approx b)$.

De (i), (ii) y la inyectividad de la función σ_L, obtenemos que $\approx\approx a = a$ y $\approx (a \wedge b) =\approx a \wedge \approx b$, lo que prueba que (1) $\langle L, \wedge, \vee, \approx, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan.

Por otra parte si $a, b \in L$, como $\langle D(X), \cap, \cup, \sim^*, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de Kleene, entonces se verifica que

(iii) $\sigma_L(a \wedge \approx a) = \sigma_L(a) \cap \sim^* \sigma_L(a) \subseteq \sigma_L(b) \cup \sim^* \sigma_L(b) = \sigma_L(b \vee \approx b)$, de donde por ser σ_L un isomorfismo entre dos álgebras de De Morgan, es un isomorfismo de orden y por lo tanto tenemos que (2) $a \wedge \approx a \leq b \vee \approx b$, para todo $a, b \in L$.

Luego de (1) y (2), $\langle L, \wedge, \vee, \approx, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Kleene. □

5.4.3. Relación entre los cuantificadores de un mM_3-retículo

Los siguientes lemas nos dan algunas propiedades de la relación $R = R_\exists \cap R_\forall$, definida en los mM_3-espacios que nos serán útiles más adelante.

Lema 5.4.3.1 *Sea $(X, R_\exists, R_\forall)$ un mM_3-espacio y $R = R_\exists \cap R_\forall$. Si $x, m \in min\, X$ y $s, u \in X$ son tales que $x < s$ y $m < u$, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$(x, m) \in R$, implica que $(s, u) \in R$,*

(ii) *si $(s, u) \in R$, entonces $(x, m) \in R$.*

Dem.

(i): Por la hipótesis, como $(x,m) \in R$, tenemos que $(x,m) \in R_{\exists}$. Entonces por el Lema 4.3.3.9, como $x, m \in min\, X$, resulta que $(m,x) \in R_{\exists}$, $(s,u) \in R_{\exists}$ y $(u,s) \in R_{\exists}$. Por lo tanto $(s,u) \in R_{\forall}$ y en consecuencia $(s,u) \in R$.

(ii): Sea $(s,u) \in R$, entonces $(s,u) \in R_{\forall}$. Como $R_{\forall}(u)$ es decreciente, tenemos que $(u,m) \in R_{\forall}$. Luego por transitiva se verifica que $(s,m) \in R_{\forall}$ y por consiguiente $(m,s) \in R_{\exists}$. Entonces por (mM4), existe $t \leq s$ tal que $(t,m) \in R_{\exists}$ y $(m,t) \in R_{\exists}$. Por lo tanto puede ocurrir que $t = s$ o $t = x$. En el primer caso, es evidente que $(s,m) \in R$. En el segundo caso, como $(m,s) \in R_{\forall}$ y $(s,x) \in R_{\forall}$, resulta que $(m,x) \in R_{\forall}$. De esto último, por (mM16), $(x,m) \in R_{\forall}$, de donde $(x,m) \in R$. □

Lema 5.4.3.2 *Sean* $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ *un* mM_3-*espacio y las aplicaciones* $f_1 : X \longrightarrow X$, *definida por* $f_1(x) = y$ *si, y solo si,* $y \in (x] \cap min\, X$ *para todo* $x \in X$, *y* $f_2 : X \longrightarrow X$, *definida por* $f_2(x) = y$ *si, y solo si,* $y \in [x) \cap max\, X$ *para todo* $x \in X$. *Entonces* f_1 *y* f_2 *son funciones continuas y constantes sobre las cadenas maximales de* X *y satisfacen las condiciones* (mMf1)*y* (mMf2) *de la* Definición 5.2.1.2, *es decir para* $i = 1, 2$ *se verifican:*

(mMf1) $\{x \in X : R_{\exists}(x) \cap f_i^{-1}(V) \neq \emptyset\} = f_i^{-1}(\{x \in X' : R'_{\exists}(x) \cap V \neq \emptyset\})$,

(mMf2) $\{x \in X : R_{\forall}(x) \subseteq f_i^{-1}(V)\} = f_i^{-1}(\{x \in X' : R'_{\forall}(x) \subseteq V\})$.

Dem.

De la definición de f_1 y f_2 se sigue que para todo $x, y \in X$, $x < y$ implica que $f_1(x) = f_1(y)$ y $f_2(x) = f_2(y)$.

Además es simple de verificar que para todo $V \in D(X)$ $f_1^{-1}(V) = \nabla^* V$ y $f_2^{-1}(V) = \triangle^* V$. Como $\nabla^* V \in D(X)$ y $\triangle^* V \in D(X)$ se sigue que $f_1^{-1}(V)$, $f_1^{-1}(X \setminus V)$, $f_2^{-1}(V)$, $f_2^{-1}(X \setminus V)$ son abiertos en X. Estas últimas afirmaciones y el hecho de que la familia $\{V \in D(X)\} \cup \{X \setminus V\}$ es una subbase de τ, nos permiten asegurar que las funciones f_1 y f_2 son continuas.

Teniendo en cuenta que para cada $V \in D(X)$ se verifican que $f_1^{-1}(V) = \nabla^* V$ y que $(D(X), \exists_{R_{\exists}}, \forall_{R_{\exists}})$ es un mM_3-retículo, entonces f_1 satisface las siguientes condiciones:

(mMf1) $\{x \in X : R_\exists(x) \cap f_1^{-1}(V) \neq \emptyset\} = f_1^{-1}(\{x \in X : R_\exists(x) \cap V \neq \emptyset\})$:

En efecto,

$\{x \in X : R_\exists(x) \cap f_1^{-1}(V) \neq \emptyset\} = \{x \in X : R_\exists(x) \cap \nabla^* V \neq \emptyset\}$

$= \exists_{R_\exists}(\nabla^* V) = \nabla^*(\exists_{R_\exists} V) = f_1^{-1}(\exists_{R_\exists} V) = f_1^{-1}(\{x \in X : \ R_\exists(x) \cap V \neq \emptyset\})$.

(mMf2) $\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq f_1^{-1}(V)\} = f_1^{-1}(\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq V\})$:

En efecto,

$\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq f_1^{-1}(V)\} = \{x \in X : R_\forall(x) \subseteq \nabla^* V\}$

$= \forall_{R_\forall}(\nabla^* V) = \nabla^*(\forall_{R_\forall} V) = f_1^{-1}(\forall_{R_\forall} V)$

Por otro lado, se prueba de manera análoga que f_2 satisface las siguientes condiciones:

(mMf1) $\{x \in X : R_\exists(x) \cap f_2^{-1}(V) \neq \emptyset\} = f_2^{-1}(\{x \in X : R_\exists(x) \cap V \neq \emptyset\})$,

(mMf2) $\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq f_1^{-1}(V)\} = f_1^{-1}(\{x \in X : R_\forall(x) \subseteq V\})$. $\square$

El siguiente lema se prueba en forma análoga al Lema 5.2.2.8

Lema 5.4.3.3 *Sean* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *y* $(X', R'_\exists, R'_\forall)$ *dos* mM_3-*espacios y* $h : X \longrightarrow X'$ *una función continua y creciente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) h *verifica las condiciones* (mMf1)*y* (mMf2) *de la* Definición 5.2.1.2,

(ii) h *satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si* $(x, y) \in R_\exists$, *entonces* $(h(x), h(y)) \in R'_\exists$,

(b) *si* $(h(x), y) \in R'_\exists$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x, z) \in R_\exists$ *y* $h(z) \leq y$,

(c) *si* $(x, y) \in R_\forall$, *entonces* $(h(x), h(y)) \in R'_\forall$,

(d) *si* $(h(x), y) \in R'_\forall$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x, z) \in R_\forall$ *y* $y \leq h(z)$.

Corolario 5.4.3.4 *Sean* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3-*espacio y las aplicaciones* $f_1 : X \longrightarrow X$, *definida por* $f_1(x) = y$ *si, y solo si,* $y \in (x] \cap min\, X$ *para todo* $x \in X$, *y* $f_2 : X \longrightarrow X$ *definida por* $f_2(x) = y$ *si, y solo si,* $y \in [x) \cap max\, X$ *para todo* $x \in X$. *Entonces:*

(i) f_1 *satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si* $(x,y) \in R_\exists$, *entonces* $(f_1(x), f_1(y)) \in R_\exists$,

(b) *si* $(f_1(x), y) \in R_\exists$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x,z) \in R_\exists$ *y* $f_1(z) \leq y$,

(c) *si* $(x,y) \in R_\forall$, *entonces* $(f_1(x), f_1(y)) \in R_\forall$,

(d) *si* $(f_1(x), y) \in R_\forall$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x,z) \in R_\forall$ *e* $y \leq f_1(z)$.

(ii) f_2 *satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si* $(x,y) \in R_\exists$, *entonces* $(f_2(x), f_2(y)) \in R_\exists$,

(b) *si* $(f_2(x), y) \in R_\exists$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x,z) \in R_\exists$ *y* $f_2(z) \leq y$,

(c) *si* $(x,y) \in R_\forall$, *entonces* $(f_2(x), f_1(y)) \in R_\forall$,

(d) *si* $(f_2(x), y) \in R_\forall$, *entonces existe* $z \in X$ *tal que* $(x,z) \in R_\forall$ *e* $y \leq f_2(z)$.

Dem. Es consecuencia de los Lemas 5.4.3.2 y 5.4.3.3 . □

Lema 5.4.3.5 *Sean* $(X, R_\exists, R_\forall)$ *un* mM_3*-espacio,* $R = R_\exists \cap R_\forall$ *y* $g : X \longrightarrow X$ *la aplicación definida en la* Proposición 5.4.2.1. *Entonces* g *satisface las siguientes propiedades para todo* x, $y \in X$*:*

(i) *si* $x \in max\, X$ *y* $(x,y) \in R$, *entonces* $y \in max\, X$,

(ii) *si* $x \in min\, X$ *y* $(x,y) \in R$, *entonces* $y \in min\, X$,

(iii) $(x,y) \in R$, *si y solo si,* $(g(x), g(y)) \in R$.

Dem.

De las definiciones de las funciones f_1 y f_2 tenemos que se verifican:
(a) $min\, X = f_1(X)$ y $max\, X = f_2(X)$,
(b) $x \in min\, X$ si, y solo si, $x = f_1(x)$,
(c) $x \in max\, X$ si, y solo si, $x = f_2(x)$.

Además teniendo en cuenta la definición de g dada en Proposición 5.4.2.1, resulta que

(d) $g(min\,X) = max\,X$,

(e) $g(max\,X) = min\,X$.

Por lo tanto

(f) $g(max\,X) = f_1(X)$,

(g) $g(min\,X) = f_2(X)$,

de donde se sigue que g está dada por

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in max\,X \\ f_2(x), & \text{si } x \in min\,X \end{cases}$$

(i): Sean x, $y \in X$ tales que (1) $x \in max\,X$ y (2) $(x, y) \in R$. Entonces de (1) y (c) tenemos que $x = f_2(x)$, de lo que se sigue por (2), que $(f_2(x), y) \in R_\exists \cap R_\forall$. Por lo tanto $(f_2(x), y) \in R_\exists$, entonces del Corolario 5.4.3.4, podemos afirmar que existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in R_\exists$ y $f_2(z) \leq y$. Como $f_2(z) \in max\,X$, de la última afirmación concluimos que $y = f_2(z)$ y por consiguiente de (a), $y \in max\,X$.

(ii): Es consecuencia inmediata de (i). En efecto, sean x, $y \in X$ tales que (1) $x \in min\,X$ y (2) $(x, y) \in R$. Si suponemos que $y \notin min\,X$, entonces por ser X un M_3-espacio se sigue que $y \in max\,X$, de lo que inferimos de (2) y el inciso (i), que $x \in max\,X$, lo que contradice (1).

(iii): Sean x, $y \in X$ tales que (1) $(x, y) \in R$, entonces de los incisos (i) y (ii), tenemos que (2) x, $y \in min\,X$ o (3) x, $y \in max\,X$. Si vale (2), entonces $x < g(x)$ y $y < g(y)$, de donde se sigue por el Lema 5.4.3.1, que $(g(x), g(y)) \in R$. Si se verifica (3), entonces $g(x) < x$ y $g(y) < y$, de donde se sigue por el Lema 5.4.3.1, que $(g(x), g(y)) \in R$.

La recíproca es inmediata, teniendo que g es una involución. En efecto, sean x, $y \in X$ tales que $(g(x), g(y)) \in R$, entonces $(g(g(x), g(g(y))) \in R$, y como g es una involución concluimos que $(x, y) \in R$.

□

Corolario 5.4.3.6 *Sea* $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ *un* mM_3-*espacio. Si* g *es la aplicación de la* Proposición 5.4.2.1*, entonces para todo* $x \in X$*,* $g(R(x)) = R(g(x))$*.*

Dem. Es consecuencia inmediata del inciso (iii) del Lema 5.4.3.5. $\square$

Lema 5.4.3.7 *Sea* $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ *un* mM_3*-espacio y* $R = R_{\exists} \cap R_{\forall}$*. Si* g *es la aplicación de la* Proposición 5.4.2.1*, entonces* $R(g(U)) = g(R(U))$*, para cada* $U \in D(X)$*.*

Dem. Del Corolario 5.4.3.6, obtenemos que para cada $U \in D(X)$,

$$R(g(U)) = \bigcup_{u \in U} R(g(u)) = \bigcup_{u \in U} g(R(u)) = g(\bigcup_{u \in U} R(u)) = g(R(U)). \qquad \square$$

Teorema 5.4.3.8 *Sea* $(X, R_{\exists}, R_{\forall})$ *un* mM_3-*espacio y* $(D(X), \exists_{R_{\exists}}, \forall_{R_{\forall}})$ *su* mM_3-*retículo asociado, donde* $\exists_{R_{\exists}}(U) = \{x \in X : R_{\exists}(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *y* $\forall_{R_{\forall}}(U) = \{x \in X : R_{\forall}(x) \subseteq U\}$*, para cada* $U \in D(X)$*. Si en* $(D(X)$*, definimos* $\sim^* U = X \setminus g(U)$*, siendo* g *la aplicación de la* Proposición 5.4.2.1 *y* $\forall^* U = \sim^* \exists_{R_{\exists}} \sim^* U$*, para cada* $U \in D(X)$*, entonces se verifica que* $\forall_{R_{\forall}}(U) = \forall^* U$*.*

Dem. Teniendo en cuenta la Proposición 5.4.1.1 y la forma como están definidos los operadores tenemos que $\forall^* U = X \setminus g(R(X \setminus g(U)))$ y $\forall_{R_{\forall}}(U) = X \setminus R(X \setminus U)$, donde $R = R_{\exists} \cap R_{\forall}$. Como g es una aplicación biyectiva, se verifica que $X \setminus g(U) = g(X \setminus U)$ y por lo tanto $R(X \setminus g(U)) = R(g(X \setminus U))$. Entonces por el Lema 5.4.3.7, podemos asegurar que $g(R(g(X \setminus U))) = g(g(R(X \setminus U)))$. De esto último, como g es una involución, obtenemos que $g(R(g(X \setminus U))) = R(X \setminus U)$ y en consecuencia $\forall_{R_{\forall}}(U) = \forall^* U$. $\square$

Corolario 5.4.3.9 *Sea* $(L, \exists, \forall) \in \mathbf{mM_3}$ *e* $(\mathcal{I}_p(L) R_{\exists}, R_{\forall})$ *su* mM_3-*espacio asociado. Si para cada* $U \in D(\mathcal{I}_p(L)$ *definimos* $\sim^* U = \mathcal{I}_p(L) \setminus g(U)$*, donde* $g : \mathcal{I}_p(L) \longrightarrow \mathcal{I}_p(L)$ *es la aplicación definida como en la* Proposición 5.4.2.1 *y* $\forall^* U = \sim^* \exists_{R_{\exists}} \sim^* U$*, entonces se verifica que* $\forall_{R_{\forall}}(U) = \forall^* U$*, para cada* $U \in D(\mathcal{I}_p(L))$*.*

Dem. Inmediata del Teorema 5.4.3.8. $\square$

Teorema 5.4.3.10 *Sea* $(L, \exists, \forall) \in \mathbf{mM_3}$*,* $(\mathcal{I}_p(L) R_\exists, R_\forall)$ *su* mM_3-*espacio asociado y* $\sigma_L : L \longrightarrow D(\mathcal{I}_p(L))$ *definida como en* (A1)*. Si para cada* $a \in L$ *definimos* $\approx a = \overline{\nabla a} \vee (a \wedge \overline{\triangle a})$ *, donde* $\overline{\nabla a}$ *y* $\overline{\triangle a}$ *son el complemento booleano en* $K(L)$ *de* ∇a *y* $\triangle a$ *respectivamente, entonces se verifica que* $\forall(a) =\approx \exists \approx a$*.*

Dem. Como σ_L es un $\mathbf{mM_3}-$isomorfismo, para cada $a \in L$ existe $U \in D(\mathcal{I}_p(L)$ tal que $U = \sigma_L(a)$. Luego por el Corolario 5.4.3.9 y el Teorema 5.4.3.8, podemos asegurar que $\sigma_L(\forall a) = \forall_{R_\forall} \sigma_L(a) = \forall^* \sigma_L(a) =\sim^* \exists_{R_\exists} \sim^* \sigma_L(a) =\sim^* \exists_{R_\exists} \sigma_L(\approx a) =\sim^* \sigma_L(\exists \approx a) = \sigma_L(\approx \exists \approx a)$. De donde por la inyectividad de σ_L se verifica que $\forall a =\approx \exists \approx a$. $\square$

Observación 5.4.3.11 *En un* mM_3-*retículo monádico* $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, \forall, 0, 1\rangle$ *los cuantificadores* $\exists$ *y* $\forall$ *se relacionan entre sí mediante las operaciones* $\wedge, \vee, \sim$ *y* $\triangle$ *de este sistema algebraico, puesto que si* $x \in K(L)$*, entonces* $\overline{x} = \triangle \sim (x \vee \sim 1)$ *es su complemento booleano y* ∇a *es una abreviatura del alemento* $a \vee \sim a$*, para todo* $a \in L$*.*

Corolario 5.4.3.12 *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, 0, 1\rangle$ *un* qM_3-*retículo. Si para cada* $a \in L$*, se define* $\forall a =\approx \exists \approx a$*, donde* $\approx a = \overline{\nabla} a \vee (a \wedge \overline{\Delta a})$*, entonces la operación* $\forall$ *satisface las propiedades* (P1), (P2), (P3), (P4), (P5), (Q1) y (Q2).

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 5.4.3.10. $\square$

Corolario 5.4.3.13 *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, 0, 1\rangle$ *un* qM_3-*retículo. Si para cada* $a \in L$*, se define* $\approx a = \overline{\nabla} a \vee (a \wedge \overline{\Delta a})$ *para todo* $a \in L$*. Entonces* $\langle L, \wedge, \vee, \approx, \exists, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de De Morgan monádica y por lo tanto para todo* $a \in L$*,* $\exists \approx \exists a = \approx \exists a$*.*

Dem. Es consecuencia directa del el Corolario 5.4.3.12 y lo establecido por A. Petrovich en [36]. $\square$

Los resultados demostrados anteriormente nos permiten probar la siguiente equivalencia:

Teorema 5.4.3.14 *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0, 1\rangle$ *un* M_3*-retículo acotado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, 0, 1\rangle$ *un* qM_3-*retículo acotado,*

(ii) $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, \forall, 0, 1\rangle$ *un* mM_3*-retículo,*

donde $\forall a = \approx \exists \approx a$ *y* $\approx a = \overline{\nabla a} \vee (a \wedge \overline{\triangle a})$*, para cada* $a \in L$*, siendo* $\overline{\nabla a}$ *y* $\overline{\triangle a}$ *el complemento booleano en* $K(L)$ *de* ∇a *y* $\triangle a$ *respectivamente.*

Conclusiones y estudios futuros

En los estudios realizados en esta tesis podemos decir que en algunos temas hemos empleado técnicas puramente algebraicas, como es el caso de todo lo realizado en el Capítulo 3, para estudiar el sistema determinante, los automorfismos y epimorfismos en M_3-retículos finitos y la estructura de los M_3-retículos $k-$cíclicos. Mostrando que esta última variedad es semisimple, finitamente generada y localmente finita. También con estas técnicas abordamos, en los Capítulos 4 y 5, la relación entre los qM_3-retículos (mM_3-retículos) y los M_3-retículos $k-$cíclicos, demostrando que en esta clase de álgebras es posible definir una estructura de qM_3-retículo (mM_3-retículo), a partir de la estructura k-cíclicla, y en el caso finito, podemos en una estructura de qM_3-retículo (mM_3-retículo) definir un M_3-retículo k-cíclico. Asimismo determinamos cómo una familia especial de subálgebras de un M_3-retículo, nos permite obtener un cuantificador existencial (universal) de modo que lo tranforme en un qM_3-retículo (mM_3-retículo).

Otra de las técnicas empleadas son las topológicas. La dualidad de tipo Priestley obtenida para los M_3-retículos, nos fue muy útil para caracterizar las congruencias, entre ellas las principales, de esta clase de álgebras, como así también, mediante una extensión de esta dualidad, las de los qM_3-retículos y los M_3-retículos monádicos. Pudiendo posteriormente determinar las álgebras subdirectamente irreducibles en cada caso.

Cuando se pensó cuantificar la clase de los M_3-retículos con dos cuantificadores, como la negación de esta clase de álgebras, no es una negación de De Morgan, al principio no se sospechó que ambos operadores pudieran tener alguna relación, pues los intentos vía algebraica para obtenerla fracasaron. Por ese motivo se trabajó en el Capítulo 5 en forma independiente con ambos. Las características del mM_3-espacio asociado a un M_3-retículo monádico, nos permitió más adelante, con técnicas topológicas, definir una negación de De Morgan que permite interrelacionar ambos cuantificadores en los mM_3-retículos duales de los mM_3-espacios y posteriormente trasladar estos resultados al álgebra. Esto resalta la importancia de este tipo de representaciones topológicas y la eficacia de los procedimientos utilizados, puesto que pueden ser empleados en otra clases de álgebras de la lógica.

Con respecto a los estudios futuros podemos decir que nuestro interés estará focalizado en estudiar el álgebra libre en la clase de los qM_3-retículos y determinar el cardinal del álgebra libre finitamente generada, como así también abocarnos al estudio de los M_3-retículos temporales.

Bibliografía

[1] M Abad, *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Lukasiewicz n-valente*, Notas de Lógica Matemática 36, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1988. (Tesis de Doctorado)

[2] R. Balbes and Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.

[3] A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa, *On the representation of Quasi–Boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronim. Phys. 5 (1957), 259–261.

[4] N. D. Belnap, Jr. *A useful four–valued logic*, Modern uses of multiple–valued logic, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Holland, Boston–U.S.A., 1975.

[5] C. Bergman, *Satured algebras in filtral varieties*, Algebra Universalis, 24 (1987) 101-110.

[6] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 3nd. edition. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., vol 25, Providence 1967.

[7] W. J. Blok and D. Pigozzi, *On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I*, Algebra Universalis, 15 (1982) 195-227.

[8] S. Burris and H.P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics vol. 78, Springer, Berlin, 1981.

[9] S. Celani, *Simple and subdirectly irreducibles baunded distributive lattices with unary operators*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2006, Article ID 21835, Pages 1-20.

[10] R. Cignoli, *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math. 96 (1991), 183–197.

[11] R. Cignoli, S. Lafalce and A. Petrovich, *Remarks on Priestley duality for distributive lattices*, Order 8 (1991), pp.299-315.

[12] W. H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproducts of De Morgan algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., 16 (1977), pp. 1-13.

[13] W. H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproducts of Kleene algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. (Series A), 27 (1979), pp. 209-220.

[14] A. V. Figallo, *Los M_3-Reticulados*, Rev. Colombiana de Matemática, 21 (1987), 95-106.

[15] A. V. Figallo, *M_3-Reticulados finitos*, Rev. de la Unión Matemática Argentina, 36 (1990), 21-26.

[16] A. V. Figallo, *Una nota sobre M_3-Reticulados*,Rev. Colombiana de Matemática, 24 (1990).

[17] A. V. Figallo, *Free monadic Tarski algebras*, Algebra Universalis, 35, 1(1996), 141-150.

[18] A. V. Figallo, *Algebras Implicativas de Lukasiewicz $(n+1)$-valuadas con diversas operaciones adicionales*, Tesis Doctoral, Univ. Nac. del Sur (1990).

[19] G. Grätzer, *Universal Algebra*, 2nd. edition, Springer–Verlag, New York, 1979.

[20] P. R. Halmos, *Algebraic Logic. I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Math. 12 (1955), 217–249.

[21] P. R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebra*, van Nostrand, Princeton, 1963.

[22] P. R. Halmos, *Algebraic Logic*, Chelsea, New York, 1962.

[23] A. I. Mal'cev, *On the general theory of algebraic systems*, Mat. Sb. (N.S) 35 (1954), 3–20.

[24] G. C. Moisil, *Recherches sur les logiques non chrysippiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Jassy 26 (1940), 431–466.

[25] A. Monteiro, *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer*, Rev. de la Unión Mat. Argentina 17 (1955), 149–160.

[26] A. Monteiro, *Algebras de De Morgan*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, 1er Semestre de 1962, Bahía Blanca, Argentina.

[27] A. Monteiro, *Sur la definition des algebres e Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys, R. P. Roum. 7(55), (1963), 3-12.

[28] A. Monteiro, *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[29] A. Monteiro, *Algèbres de Boole Cycliques*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tome XXIII, 1(1978), 71-76.

[30] A. Monteiro, *Notas del curso: Algebras de Boole involutivas*, Universidad Nacional del Sur, Argentina. 1969. Reprinted as Algebras de Boole Algebras de Boole Involutivas, Informe Técnico Interno Nro. 78, Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2002.

[31] A. Monteiro y O. Varsavsky, *Algebras de Heyting monádicas*, Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca, (1957), 52-62. (A French translation is published as Notas de Lógica Matemática 1, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1974), 1-16.)

[32] L. Monteiro, *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine 7 (55) (1963), 199–202. (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 22 (1964), Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca).

[33] L. Monteiro, *Algèbres de Boole monadiques libres*, Algebra Universalis 8 (1978), 374–380.

[34] H.H. O'Brien, *Estructuras Algebraicas III* (*Grupos finitos*), Serie de Matemática. Monografía Nº 14, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Departamento de Asuntos Científicos, O.E.A, Washington, DC (1973).

[35] A. Petrovich, *Distributive lattices with an operator*, Studia Logica 56 (1996), 205–224.

[36] A. Petrovich, *Reticulados distributivos con un operador y álgebras de De Morgan monádicas*, tesis doctoral.

[37] A. F. Pixley, *The ternary discriminator function in universal algebra*, Math. Ann. 191 (1971), 167–180.

[38] H. A. Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 186–190.

[39] H. A. Priestley, *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc. 4 (3) (1972), 507–530.

[40] H. A. Priestley, *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Ann. Discrete Math. 23 (1984), 39–60.

[41] H. A. Priestley, *Stone lattices: a topological approach*, Fund. Math. 84 (1974), pp. 127-143.

[42] M. Sholander, *Postulates for distributive lattices*, Can. J. Math. 3 (1951), 28–30.

[43] R. Sikorski, *Boolean Algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiele, Band 25, Springer–Verlag, Berlin, 1964.

[44] M. E. Valentinuzzi, *Three valued propositional calculus of Lukasiewicz and three-position double switches*, IEEE, Frans. on Electronic computers, Vol. Ec-16 N°1 (1967).

[45] H. Werner, *Discriminator-Algebras*, Akademie - Verlag, Berlin, 1978.