



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

MODELOS NUMÉRICO-ESTOCÁSTICOS DE ELEMENTOS
ESTRUCTURALES DE MADERA DE EUCALYPTUS GRANDIS

Diego Alberto García

BAHIA BLANCA

ARGENTINA

2017

PREFACIO

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería durante el período comprendido entre el 18 de Septiembre de 2012 y el 23 de Noviembre de 2016, bajo la dirección de la Dra. Marta Rosales y el Dr. Juan Carlos Piter (Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional).



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el/...../..... , mereciendo la calificación de(.....)

Dedicatoria

En primer lugar, dedico este trabajo de tesis Doctoral a mis padres Alberto y Graciela; y a mis hermanos, Martín y Fernando, quienes forman mi sostén y apoyo fundamental.

También hago extensiva la dedicatoria a mi directora de tesis Dra. Marta Rosales, a quien estoy profundamente agradecido por todo lo que ha hecho por mí en estos años de trabajo en conjunto.

Finalmente, dedico esta tesis a María Pía; por su amor, compañía y apoyo incondicional a lo largo de este trayecto.

Agradecimientos

A la Dra. Marta Rosales.

Al Dr. Juan Carlos Piter.

Al Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

A la Facultad de Ingeniería de Oberá de la Universidad Nacional de Misiones.

Al Dr. Rubens Sampaio.

Al Grupo de Estudio de Maderas (GEMA) de la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional.

RESUMEN

La Madera es un material natural utilizado en elementos estructurales dentro del ámbito de la Ingeniería Civil. Por tratarse de un biomaterial, tiene características complejas y variables. Particularmente, la madera proveniente de la especie *Eucalyptus grandis* cultivado en la Mesopotamia Argentina es una de las aceptadas para el uso estructural en el país por el Reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601. Las piezas de este material presentan una gran variabilidad en sus propiedades en relación a otros materiales de uso estructural, la cual puede ser explicada tanto por las características de su micro y macro estructura, la incidencia del clima y el suelo, los procesos de producción, y la presencia de defectos que afectan su comportamiento mecánico. Dentro de estos últimos, de singular importancia para el uso estructural de este material, se destacan la presencia de médula y los nudos. Ambos, se encuentran limitados en los métodos de clasificación por resistencia de piezas estructurales. Debido a estos factores, la cuantificación de los efectos de la variabilidad de las propiedades materiales en la respuesta estructural es de interés dentro del ámbito del diseño ingenieril. Para ello, en el presente trabajo, se combinaron tres ejes temáticos principales: el material, el modelado estocástico y el modelado numérico. Estos ejes temáticos fueron empleados en la construcción de modelos numérico-estocásticos aplicables a elementos estructurales desarrollados en el entorno del Método de los Elementos Finitos. Estos modelos han sido calibrados y validados con resultados experimentales existentes mediante simulaciones realizadas a través del Método de Monte Carlo. Luego, fueron utilizados para la realización de estudios de propagación de incertidumbres en la respuesta estructural. Se muestra que un modelo estocástico del material que representa la variabilidad longitudinal de las propiedades del mismo provee una respuesta estructural más próxima a la observada en resultados experimentales. Además, como complemento al desarrollo numérico, se realizaron nuevos ensayos experimentales, dinámicos y estáticos, tanto en tablas como en vigas aserradas de dimensiones estructurales. Con el objetivo de validar las hipótesis asumidas para el desarrollo de los modelos estocásticos. Sumado a esto, dado que no se conocen valores precisos para este material se obtuvieron coeficientes de amortiguamiento, los cuales son necesarios para el estudio de la respuesta estructural bajo acciones dinámicas. Finalmente, y a los efectos de aplicar el modelo desarrollado a una estructura, se realizó un estudio numérico sobre un modelo de puente peatonal de madera con vigas laminadas bajo cargas dinámicas determinísticas y estocásticas producidas por peatones. El mismo, se llevó a cabo para el estudio de las condiciones de servicio. La cuantificación de incertidumbre pretende ampliar la información resultante en la predicción de la respuesta así como la sensibilidad de la misma a la variación de uno o más parámetros del sistema. En esta investigación, esto se logra a través del desarrollo y aplicación de modelos numérico-estocásticos aplicables a elementos estructurales y estructuras de madera aserrada.

ABSTRACT

Timber is a natural material employed for structural elements in the field of the Civil Engineering. Being a biomaterial, it has complex and random characteristics. Particularly, the *Eucalyptus grandis* cultivated in the Mesopotamic provinces of Argentine is one of the timber species accepted for the structural use by the Argentinean Standard of Timber Structures CIRSOC 601. The pieces of this material have a high variability in their properties in relation to other materials for structural use, which can be explained by the characteristics of its micro and macro structure, the incidence of the climate and soil, the production processes, and the presence of defects that affect its mechanical behavior. Within the latter, of singular importance for the structural use of this material, the presence of pith and knots are emphasized. Both types of defects are limited in the strength grading classification methods of structural elements. Due to these factors, the quantification of the influence of the timber material properties variability in the structural response is an important issue in the structural design. In order to quantify this influence, three thematic areas are combined: the material, the stochastic modelling and the numerical modelling. These areas were employed in the construction of numerical-stochastic models applicable to structural elements developed in the environment of the Finite Element Method. These models have been calibrated and validated with existing experimental results through simulations performed through the Monte Carlo Method. Then, they were used to carry out uncertainty propagation studies on the structural response. It is shown that a stochastic model of the material which represents the longitudinal variability of the properties provides a structural response closer to the experimental results. In addition, as a complement to the numerical development, new experimental dynamic and static tests were performed in beams and boards of structural dimensions. The aim of these tests is the validation of the assumptions taken into account in the development of the stochastic models. In addition to this, since no precise values are known for this material, damping coefficients were obtained, which are necessary for the study of the structural response under dynamic actions. Finally, and in order to apply the developed model to a structure, a numerical study of the structural behaviour of a timber footbridge under the action of deterministic and stochastic models of walking loads induced by pedestrians was performed. It was carried out in order to evaluate the serviceability conditions. The uncertainty quantification aims to extend the information resulting in the prediction of the response as well as the sensitivity to the variation of one or more parameters of the system. In this work, this is achieved through the development and application of numerical-stochastic models applicable to structural timber elements and structures.

Índice general

Título	I
Prefacio	III
Dedicatoria	V
Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
Lista de contenidos	XIII
Lista de figuras	XXI
Lista de tablas	XXVII
Nomenclatura	XXXI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Importancia del problema	2
1.3. Revisión de la Literatura	3

1.4. Objetivos de la tesis	10
1.5. Alcance del estudio	11
1.6. Metodología	12
1.7. Originalidad y aportes	12
1.8. Organización de la tesis	14
2. Madera Estructural	17
2.1. Madera: Generalidades	18
2.2. Nudos y otras heterogeneidades del material	21
2.3. Eucalyptus grandis	24
2.3.1. Clasificación visual y mecánica	25
2.3.2. Propiedades mecánicas y físicas	27
2.3.3. Vigas Laminadas	31
2.3.4. Consideraciones reglamentarias	33
3. Enfoque estocástico	35
3.1. Construcción de modelos estocásticos	36
3.1.1. Pruebas de Bondad de Ajuste	37
3.1.2. Principio de Máxima Entropía (PME)	38
3.1.3. Determinación de parámetros de distribuciones	39
3.1.3.1. Método de los momentos	39
3.1.3.2. Principio de Máxima Verosimilitud	40
3.1.4. Integración aplicando el MCM y su aplicación al análisis de confiabilidad	41
3.1.5. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias	43
3.2. Simulación de variables aleatorias y campos aleatorios	44
3.2.1. Simulación de variables aleatorias	44

3.2.1.1.	Métodos basados en algoritmos computacionales	44
3.2.1.2.	Transformada inversa	45
3.2.2.	Simulación de campos aleatorios	46
3.2.2.1.	Transformación de Nataf	46
3.2.2.2.	Expansión de Karhunen-Loève	47
3.2.2.3.	Método de Representación Espectral, Spectral Representation Method (SRM)	48
3.3.	Modelos estocásticos aplicados a la madera estructural	50
4.	Enfoque Numérico	53
4.1.	Modelo numérico de la madera	54
4.1.1.	Escalas de modelado	54
4.1.2.	Modelos elásticos	54
4.2.	Ecuaciones de movimiento de elementos estructurales	58
4.2.1.	Elementos viga: formulación Euler-Bernoulli	59
4.2.2.	Elementos viga: formulación Timoshenko	61
4.2.3.	Elementos Placa	62
4.2.4.	Elementos viga laminadas	65
4.3.	Discretización numérica de las ecuaciones gobernantes	67
4.3.1.	Formulación variacional o Débil	67
4.3.2.	Método de Galerkin	69
4.3.3.	Método de los Elementos Finitos (MEF)	70
4.3.4.	Elementos finitos utilizados	71
4.3.4.1.	Elementos viga Euler-Bernoulli	71
4.3.4.2.	Elementos viga Timoshenko	72
4.3.4.3.	Elementos placa	73
4.3.4.4.	Elementos viga laminada	74

4.4.	Discretización de campos aleatorios	75
4.4.1.	Métodos de discretización por puntos (Point discretization methods)	75
4.4.2.	Métodos de discretización basados en promedios (Average discretization methods)	77
4.4.3.	Métodos de discretización basados en expansiones por series (Series expansion methods)	78
5.	Propagación de incertidumbres en elementos estructurales de madera	81
5.1.	Modelado estocástico de elementos estructurales de madera	82
5.1.1.	Variables aleatorias	83
5.1.1.1.	Módulo de Elasticidad (MOE)	83
5.1.1.2.	Densidad de Masa	86
5.1.1.3.	Amortiguamiento	88
5.1.2.	Campos aleatorios	88
5.1.2.1.	Modelos basados en perfiles de rigidez continuos	89
5.1.2.2.	Campos aleatorios: Modelos de zonas débiles	92
5.2.	Propagación de incertidumbres utilizando Perfiles de Rigidez Continuos . .	98
5.2.1.	Deflexiones en vigas	98
5.2.1.1.	Planteo del problema	99
5.2.1.2.	Discretización mediante el Método de los Elementos Finitos	100
5.2.1.3.	Teorías de vigas y propiedades materiales	101
5.2.1.4.	Variabilidad longitudinal del MOE	103
5.2.1.5.	Validación numérica del modelo estocástico	105
5.2.1.6.	Efectos de la variabilidad longitudinal del MOE en la confiabilidad estructural de vigas de madera	111
5.2.1.7.	Conclusiones del estudio de deflexiones en vigas	119
5.2.2.	Vibraciones forzadas de vigas	122

5.2.2.1.	Propiedades mecánicas de los modelos	124
5.2.2.2.	Disipación de energía	124
5.2.2.3.	Función de Respuesta en Frecuencia (FRF)	125
5.2.2.4.	Conclusiones del estudio vibraciones forzadas en vigas . .	132
5.3.	Propagación de incertidumbres utilizando Modelos de Zonas Débiles	133
5.3.1.	Vibraciones libres en vigas y pandeo de columnas	133
5.3.1.1.	Planteo del problema	134
5.3.1.2.	Vibraciones naturales: análisis modal con el primer modelo de Zonas Débiles	136
5.3.1.3.	Vibraciones naturales: análisis modal con modelo definiti- vo de Zonas Débiles	146
5.3.1.4.	Validación numérica del modelo estocástico	148
5.3.1.5.	Influencia del campo aleatorio $I(x)$ en las frecuencias na- turales	150
5.3.1.6.	Influencia de la incertidumbre en la rigidez a flexión $E(x)I(x)$ y en la densidad de masa P en las frecuencias naturales	151
5.3.1.7.	Influencia de los campos aleatorios $I(x)$, $E(x)I(x)$ y de la variable aleatoria P en las formas modales	154
5.3.1.8.	Pandeo de columnas	155
5.3.1.9.	Influencia del campo aleatorio $I(x)$ en la carga de pandeo	155
5.3.1.10.	Influencia de la incertidumbre en la rigidez a flexión $E(x)I(x)$ en la carga de pandeo	158
5.3.1.11.	Influencia de los campos aleatorios $I(x)$ y $E(x)I(x)$ en las formas modales de pandeo	160
5.3.1.12.	Conclusiones del estudio de vibraciones libres en vigas y pandeo de columnas	161
5.4.	Comparación de modelos de variabilidad longitudinal del MOE	164
5.4.1.	Conclusiones de la comparación entre los modelos de campo aleatorio	169

6. Ensayos experimentales en elementos estructurales de madera	171
6.1. Descripción general de los ensayos realizados	172
6.1.1. Ensayo estático	172
6.1.2. Ensayo dinámico	173
6.2. Ensayos estáticos	175
6.2.1. Tablas	175
6.2.2. Vigas	176
6.2.3. Variabilidad longitudinal del MOE	181
6.2.3.1. Influencia de la nudosidad	181
6.2.3.2. Estudio de la estructura de correlación espacial	187
6.3. Ensayos dinámicos	194
6.3.1. Vigas	194
6.3.2. Tablas	198
6.4. Conclusiones de los ensayos experimentales en elementos estructurales	200
7. Estudio del comportamiento dinámico de puentes peatonales de madera	203
7.1. Introducción	204
7.2. Descripción de la estructura	206
7.2.1. Modelado del material	207
7.2.2. Discretización mediante el Método de los Elementos Finitos	208
7.3. Análisis Modal	210
7.4. Vibraciones forzadas: tránsito peatonal	212
7.4.1. Modelos determinísticos de carga peatonal	213
7.4.2. Modelo estocástico de carga peatonal	218
7.4.3. Tránsito de múltiples peatones	225
7.5. Conclusiones del estudio del comportamiento dinámico de puentes peatonales de madera	239

8. Conclusiones y sugerencias de trabajos futuros	243
8.1. Resumen	243
8.2. Aportes y conclusiones	245
8.2.1. Modelado estocástico de las propiedades del material	245
8.2.2. Propagación de incertidumbres en el comportamiento estructural de vigas y columnas	246
8.2.2.1. Deflexiones en vigas	246
8.2.2.2. Vibraciones forzadas en vigas	247
8.2.2.3. Vibraciones libres en vigas y pandeo de columnas	248
8.2.3. Ensayos experimentales	248
8.2.4. Puente peatonal	250
8.2.5. Aportes generales de la tesis	251
8.3. Sugerencias de trabajos futuros	252
A. Apéndice: Enfoque estocástico	265
A.1. Pruebas de Bondad de Ajuste	265
A.1.1. Prueba de Kolmogórov-Smirnov (K-S)	265
A.1.2. Prueba de Anderson-Darling (A-D)	266
A.2. Principio de Máxima Entropía (PME)	267
A.2.1. Variables aleatorias discretas	267
A.2.2. Variables aleatorias continuas	268
A.3. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias	270
A.4. Simulación de campos aleatorios	271
A.4.1. Transformación de Nataf	271
A.4.2. Expansión de Karhunen-Loève	274

Índice de figuras

2.1. Nivel macroscópico, sección transversal del tronco.	22
2.2. Distribución de nudos dentro de la sección transversal de un tronco (izquierda). Influencia del aserrado en la distribución de nudos resultantes en cada tabla (centro). Influencia de un nudo individual dentro de la sección de una tabla (derecha)(Fink, 2014).	23
2.3. Variabilidad de la resistencia a flexión debida a la presencia de defectos en una pieza de madera (Köhler, 2007).	24
2.4. Medición de nudosidad según la norma IRAM 9662-2 (2006).	26
2.5. Desviación de las fibras según la norma IRAM 9662-2 (2006).	27
2.6. Ensayo a flexión con dos cargas puntuales en los tercios de la longitud de la viga, EN 408 (1996).	29
3.1. Estudio de propagación de incertidumbres a través del Método de Monte Carlo.	37
3.2. Relación entre los tipos de convergencia (Rincón, 2007)	44
3.3. Niveles de modelado estocástico de la madera estructural (Köhler, 2007) .	51
4.1. Ortotropía rectangular en una tabla de madera.	57
4.2. Tensiones normales y tangenciales elemento placa.	63
5.1. Nudos en piezas de <i>Eucalyptus grandis</i> , zonas débiles.	93
5.2. Clasificación de los nudos respecto a su forma y variables consideradas en la Función Masa de Probabilidad Conjunta (JPMF).	94

- 5.3. Diferencias porcentuales entre deflexiones medidas en ensayos experimentales y deflexiones numéricas obtenidas a través de las teorías de viga de Euler-Bernoulli y Timoshenko. Gráfico izquierdo: vigas clasificadas visualmente, gráfico derecho: las mismas vigas clasificadas mecánicamente. 102
- 5.4. Convergencia del valor medio $E[V(L/2)]$ y del desvío estándar $\sigma[V(L/2)]$ para las longitudes de correlación d_1 y d_∞ 104
- 5.5. Comparación entre los métodos de Phoon *et al.* (2002) (azul y verde) y Mulani (2006) (rojo) en la aplicación de la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève. 105
- 5.6. Campo aleatorio del MOE. Comparación entre NT y NGKL. Gráfico izquierdo: primeros diez autovalores de la función de covarianza. Gráfico central: comparación entre la función de covarianza prescrita y las obtenidas para diferentes cantidades de términos de la expansión M (número de términos en la expansión NGKL). Gráfico derecho: comparación de la deflexión en el centro del tramo $f(V(L/2))$ obtenida para NGKL y NT. . . 106
- 5.7. Comparación entre las CDFs numéricas y experimentales. Análisis de sensibilidad del parámetro longitud de correlación d 109
- 5.8. Comparación métodos de simulación y discretización de campos aleatorios. 114
- 5.9. Estimador de la Probabilidad de Falla (\hat{PF}) y su respectivo error relativo para $PF= 0.05$ y 0.1 en una viga con MOE constante. 117
- 5.10. Curvas de fragilidad de las muestras S2 ($d = d_1$), S3 ($d = (3/4)d_1$) y S4 ($d = (5/4)d_1$) de izquierda a derecha. Resultados numéricos. 119
- 5.11. Estudio de convergencia de los valores medios y desvíos estándar de $f(W_B)$ y $f(W_S)$, para E y G representados como variables y campos aleatorios. . . 126
- 5.12. Energía potencial (izquierda) y energía disipada (derecha) para los distintos modelos probabilísticos empleados. 127
- 5.13. Estudio de convergencia de los valores medios y desvíos estándar de $f(H(\omega))$, con E y G representados como variables aleatorias y campos aleatorios. 128
- 5.14. Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas para los distintos modelos considerados. 129

5.15. PDFs y CDFs de $H(\omega)$ para las tres zonas de resonancia, obtenidas mediante el modelo probabilístico con E y G variables aleatorias y valores medios y aleatorios de amortiguamiento.	130
5.16. PDFs y CDFs de $H(\omega)$ para las tres zonas de resonancia, obtenidas mediante el modelo probabilístico con $E(x)$ y $G(x)$ campos aleatorios y valores medios y aleatorios de amortiguamiento.	131
5.17. Distribuciones de probabilidad del MOE en las secciones libres de nudos (rojo) y en las secciones con nudos (azul).	137
5.18. Error $e\%$ Ecuación (5.54). Convergencia de los valores medios de $E[F_n]$ para las primeras tres frecuencias naturales (Modelo M1).	138
5.19. PDFs de las primeras tres frecuencias naturales obtenidas con M1.	139
5.20. Histogramas de los modos naturales de vibración obtenidos en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M1.	141
5.21. Convergencia de los valores medios $E[F_n]$ para las primeras tres frecuencias naturales (Modelo M2).	142
5.22. PDFs de las primeras tres frecuencias naturales obtenidas con M2.	143
5.23. Histogramas de los modos naturales de vibración obtenidos en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M2.	144
5.24. Ensayo experimental llevado a cabo para la determinación de la primera frecuencia natural de vibración, Piter (2003).	145
5.25. Comparación entre las PDFs y CDFs numéricas y experimental de F_1 para diferentes valores de longitud de zonas débiles.	146
5.26. Realizaciones de la variabilidad longitudinal del MOE.	147
5.27. Convergencia de $E[F_i]$ (gráficos superiores) y $\sigma[F_i]$ (gráficos inferiores) para d_1 y d_∞	148
5.28. Frecuencia fundamental. Comparación entre CDFs numéricas y experimentales de F_1 para dos valores de longitudes de zonas débiles; gráfico izquierdo: cinco veces la dimensión mayor del nudo y gráfico derecho: siete veces la dimensión mayor del nudo.	149

5.29. Frecuencias naturales. Análisis modal con el campo aleatorio $I(x)$, PDFs de las primeras tres frecuencias naturales F_n y CDFs de las diferencias porcentuales $F_n - F_{0n}$	150
5.30. Análisis modal con el campo aleatorio $E(x)I(x)$ y densidad de masa determinística y aleatoria.	152
5.31. Formas modales. Funciones del valor medio y del desvío estándar ($E[\Phi_{F_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$) del proceso estocástico $\Phi_{F_n}(x)$	156
5.32. PDFs de los procesos estocásticos $\Phi_{F_n}(x)$ en varios puntos de la longitud de la viga (gráficos izquierda) e histogramas obtenidos en dos puntos de la longitud de la viga (gráficos derecha), ambos para cada forma modal y obtenidos a través del campo aleatorio $E(x)I(x)$ y la variable aleatoria P	157
5.33. PDFs de las primeras tres cargas de pandeo P_n y CDFs de las diferencias porcentuales $P_n - P_{0n}$ halladas para el campo aleatorio $I(x)$	158
5.34. Cargas de Pandeo obtenidas con el campo aleatorio $E(x)I(x)$	159
5.35. Formas modales. Funciones de valor medio y desvío estándar ($E[\Phi_{P_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$) del proceso estocástico $\Phi_{P_n}(x)$	161
5.36. Convergencia de $E[P_{cr}]$ obtenida a través de los dos modelos (M1 y M2) para diferentes valores de d	165
5.37. PDFs y CDFs de P_{cr} para diferentes valores de d , M1 y M2.	167
5.38. Comparación de $F[P_{cr}]$ obtenidas con M1 y M2 para diferentes valores de d	168
5.39. Comparación modelos de zonas débiles con resultados experimentales de deflexiones de la muestra S4.	169
6.1. Disposición del ensayo dinámico, Piter (2003).	173
6.2. Ensayo a flexión con dos cargas puntuales en tablas.	175
6.3. Ensayo a flexión con dos cargas puntuales en vigas.	178
6.4. Relación entre 100 valores del MOE global, el índice de nudosidad K y el tipo de nudosidad.	183
6.5. Relación entre los valores del MOE global en cada tabla y la nudosidad.	184
6.6. Relación entre el MOE global y los tipos de nudosidad.	185

6.7. Relación entre 80 valores del MOE global, el índice de nudosidad K y el tipo de nudosidad.	187
6.8. Relación entre los valores del MOE global en cada viga y la nudosidad. . .	188
6.9. Relación entre los valores del MOE global en cada viga y la presencia de médula.	189
6.10. Longitudes de influencia de la función de correlación, Vanmarcke (1998). .	190
6.11. Ensayo dinámico de vigas.	195
6.12. Comparación MOE global dinámico y estático en vigas.	196
6.13. Ensayo para determinación del coeficiente de amortiguamiento. Reconstrucción registro de aceleración CWT.	197
6.14. Comparación MOE global dinámico y estático en tablas.	199
7.1. Puente peatonal de madera con vigas laminadas.	204
7.2. Esquema de vigas laminadas y uniones.	207
7.3. PDFs de la primera frecuencia natural. Vigas laminadas con y sin uniones finger.	211
7.4. Formas modales y frecuencias naturales del modelo medio.	212
7.5. Cargas producidas por los peatones, representaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Primer modelo de carga (gráficos de la izquierda) y segundo modelo de carga (gráficos de la derecha).	215
7.6. Funciones de desplazamiento en el punto medio de la longitud del puente peatonal. Primer modelo de carga (gráficos de la izquierda) y segundo modelo de carga (gráficos de la derecha).	216
7.7. Funciones de aceleración en el punto medio de la longitud del puente peatonal. Primer modelo de carga (gráficos de la izquierda) y segundo modelo de carga (gráficos de la derecha).	217
7.8. Estudio de serviciabilidad del puente peatonal utilizando el segundo modelo de carga determinística.	218
7.9. Estudio de serviciabilidad del puente peatonal utilizando el primer modelo de carga determinística.	219

7.10. Espectro normalizado, Živanović <i>et al.</i> (2007).	224
7.11. Comparación de espectros.	224
7.12. Aceleraciones máximas del puente halladas con modelo de carga estocástica $if_s = F_1$	225
7.13. Diferentes niveles de densidad de peatones en puentes peatonales, Schlaich (2005).	226
7.14. Influencia de la sincronización $if_s = F_1$, peatón individual (azul) y múlti- ples peatones (verde).	227
7.15. Influencia de la cantidad de láminas.	229
7.16. Registro de aceleraciones. Tránsito de múltiples peatones.	231
7.17. Condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas (a_{max}).	232
7.18. Cantidad de peatones al producirse a_{max} en función de la cantidad de lámi- nas. Amortiguamiento 5 % izquierda y 7 % derecha.	233
7.19. Valores medios de a_{max} en función de la cantidad de peatones al producirse a_{max} . Amortiguamiento 5 % izquierda y 7 % derecha.	234
7.20. Cantidad promedio de peatones con f_s influyentes al producirse a_{max} . Com- ponentes armónicos gráfico izquierdo y componentes sub-armónicos gráfico derecho. Amortiguamiento 5 %.	234
7.21. Influencia de la velocidad de arribo al puente peatonal en a_{max}	235
7.22. Condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas (a_{max}), $\lambda=0.1$ peatones/s.	236
7.23. Condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas (a_{max}), $\lambda=0.3$ peatones/s.	237
7.24. Cantidad de peatones al producirse a_{max} en función de la velocidad de arribos. Amortiguamiento 7 %.	238
7.25. Valores medios de a_{max} en función de la cantidad de peatones al producirse a_{max} . Amortiguamiento 7 %.	238
7.26. Cantidad promedio de peatones con f_s influyentes al producirse a_{max} . Componentes armónicos (gráfico izquierdo) y componentes sub-armónicos (gráfico derecho). Amortiguamiento 7 %.	239

Índice de tablas

2.1. Clasificación visual <i>Eucalyptus grandis</i> . Clases resistentes de acuerdo la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006).	26
2.2. Resumen clasificación visual y mecánica de las piezas pertenecientes a las muestras ensayadas en Piter (2003).	30
2.3. Resumen de los resultados de propiedades mecánicas y densidad correspondientes a las muestras ensayadas a flexión, Piter <i>et al.</i> (2004a). Resistencia a flexión (f), MOE global (E_g) y densidad (ρ) ajustados a un contenido de humedad de 12 %.	32
5.1. Resultados de aplicación del PME según las restricciones impuestas.	84
5.2. Resultados de las pruebas de bondad de ajuste K-S y A-D del MOE.	85
5.3. Resultados de las pruebas de bondad de ajuste K-S y A-D de la densidad de masa.	87
5.4. Parámetros de la PDF marginal gamma del MOE para cada valor de K	97
5.5. Parámetros dimensionales.	106
5.6. Diferencias en la predictibilidad de los resultados experimentales obtenidas a través del modelo numérico, muestra S2. MOE como variable aleatoria (homogéneo, d_∞) y MOE como campo aleatorio (variable en la longitud, $d = d_1$).	111
5.7. Diferencias en la predictibilidad de los resultados experimentales obtenidas a través del modelo numérico, muestra S3. MOE como variable aleatoria (homogéneo, d_∞) y MOE como campo aleatorio (variable en la longitud, $d = (3/4)d_1$).	112

5.8. Diferencias en la predictibilidad de los resultados experimentales obtenidas a través del modelo numérico, muestra S4. MOE como variable aleatoria (homogéneo, d_∞) y MOE como campo aleatorio (variable en la longitud, $d = (5/4)d_1$).	113
5.9. \widehat{PF} estimador, Error Relativo (RE) (% de \widehat{PF}) e intervalo de confianza de PF . $N=100000$	117
5.10. \widehat{PF} estimador, Error Relativo (RE) (% de \widehat{PF}) e intervalo de confianza de PF . $N=100000$. Momento constante (\overline{M}), carga distribuida (\overline{Q}) y carga puntual en el centro del tramo (\overline{P}).	118
5.11. Parámetros de la PDF gamma del MOE.	136
5.12. Frecuencias naturales (M1). Valores medios, desvíos estándar y coeficientes de variación de $f[F_n]$	139
5.13. Frecuencias naturales (M1). Diferencias entre vigas con nudos y vigas sin nudos.	140
5.14. Valores medios y desvíos estándar de los modos naturales de vibración en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M1.	141
5.15. Frecuencias naturales (M2). Valores medios, desvíos estándar y coeficientes de variación de $f[F_n]$	142
5.16. Valores medios y desvíos estándar de los modos naturales de vibración en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M2.	143
5.17. Primera frecuencia natural. Comparación entre resultados numéricos y experimentales para diferentes longitudes de zonas débiles.	146
5.18. Intervalos de confianza (CI) del valor medio y el desvío estándar de F_1	147
5.19. Frecuencias naturales, análisis modal con el campo aleatorio $E(x)I(x)$ y la variable aleatoria P . Comparación entre resultados numéricos para dos valores de d	154
5.20. Comparación entre resultados numéricos de las tres primeras cargas de pandeo con diferentes valores de d obtenidas con el campo aleatorio $E(x)I(x)$	160
5.21. Comparación de resultados numéricos obtenidos para los modelos M1 y M2 utilizando diferentes valores de d	168

6.1. Resumen de resultados experimentales del MOE global y densidad en tablas.	177
6.2. Resumen de resultados del MOE global para cada posición en la tabla. . . .	177
6.3. Resumen de resultados ensayo estático de vigas.	179
6.4. Resumen y comparación resultados del MOE local vigas.	180
6.5. Resumen de resultados del MOE global para cada posición en la viga. . . .	180
6.6. Definición del tipo de nudosidad en tablas.	182
6.7. Definición del tipo de nudosidad en vigas.	186
6.8. Definición de la presencia de médula en vigas.	189
6.9. Resultados determinación de función y longitud de correlación.	193
6.10. Comparación MOE dinámico y estático hallados experimentalmente en vigas.	198
6.11. Resumen de los resultados de coeficientes de amortiguamiento hallados experimentalmente en vigas.	198
6.12. Resumen resultados del ensayo dinámico en tablas.	199
7.1. Frecuencias de la fuerza f_s , coeficientes dinámicos α_i y ángulos de fase dinámicos Φ_i . Modelos de carga 1 y 2.	214
7.2. Características del caminar humano.	214
7.3. Definición $DLFs$ armónicos 2 a 5.	221
7.4. Ajuste del espectro. Componentes armónicos.	222
7.5. Ajuste del espectro. Componentes sub-armónicos.	223
7.6. Resultados de la comparación entre los resultados producto de carga de peatones sincronizados y no sincronizados.	228
7.7. Resumen de resultados variando la cantidad de láminas de las vigas.	230
7.8. Influencia de la relación entre f_s y F_1 . Cantidad de frecuencias en cada rango para peatones involucrados en el caso de las aceleraciones máximas. . .	230
7.9. Resumen de resultados del caso con variación de la velocidad de arribo de peatones al puente peatonal.	235

Nomenclatura

Mayúsculas

A	Área sección transversal
$A(x)$	Variación longitudinal del área sección transversal
A_i	Tiempo entre arribos al puente peatonal
A_0	Área sección transversal valor de referencia
A-D	Prueba de bondad de ajuste Anderson-Darling
C	Matriz global de amortiguamiento
$C(x_1, x_2)$	Función de covarianza
CDF	Función Densidad Acumulada
COV	Coefficiente de Variación
CPSM	Modelos Espaciales de Parámetros Continuos
CSPM	Modelos con Perfiles de Rigidez Continuos
CWT	Transformada Continua Wavelet
DLF	Factor Dinámico de Carga
DPSM	Modelos Espaciales de Parámetros Discretos
E	Módulo de elasticidad
$E[]$	Valor medio, valor esperado
$E(x)$	Campo aleatorio módulo de elasticidad
E_f	Módulo de elasticidad ensayo dinámico
E_{global}	Módulo de elasticidad global
E_{local}	Módulo de elasticidad local
$E_{\bar{R}}(r)$	Proceso estocástico de valores medios
E_0	Módulo de elasticidad valor de referencia
E-B	Euler-Bernoulli
F	Carga aplicada

$F(t)$	Función de fuerza en el dominio del tiempo
$F(\phi)$	Operador de fuerza
F_{max}	Fuerza máxima aplicada ensayo estático
F_n	Variable aleatoria frecuencia natural
$F_X(x)$	Función de Distribución Acumulada (CDF)
F_X^{-1}	Inversa de la Función de Distribución Acumulada
F_0	Frecuencia fundamental ensayo dinámico
F_{0n}	Frecuencia natural valor de referencia
F_1	Frecuencia fundamental puente peatonal
FRF	Función de Respuesta en Frecuencia
G	Módulo de corte
$G(x)$	Variación longitudinal módulo de corte
GJ_{eff}	Rigidez a torsión efectiva
$H(\omega)$	Variable aleatoria Función de Respuesta en Frecuencia (FRF)
$\mathbb{H}(x)$	Campo aleatorio
$\hat{\mathbb{H}}(x)$	Campo aleatorio discretizado
I	Segundo momento de área
$I(x)$	Campo aleatorio segundo momento de área
$I_g(\mathbf{x})$	Función indicatriz
I_0	Segundo momento de área valor de referencia
JPMF	Función Masa de Probabilidad Conjunta
K	Índice de nudosidad
\mathbf{K}	Matriz global de rigidez
$K(v, \phi)$	Operador de rigidez
\mathbf{K}^G	Matriz global de rigidez geométrica
K_E	Matriz global de rigidez por flexión
K_G	Matriz global de rigidez por corte
K-S	Prueba de bondad de ajuste Kolmogórov-Smirnov
L	Longitud de la pieza
\hat{L}	Dirección longitudinal
L_e	Longitud del elemento
\mathbf{M}	Matriz global de masa
\bar{M}	Momento flector constante
$M(v, \phi)$	Operador de masa

M_i	Momento flector aplicado
M_{xx}	Momento resultante dirección xx
M_{xy}	Momento resultante dirección xy
M_{yy}	Momento resultante dirección yy
MCM	Método de Monte Carlo
MEF	Método de los Elementos Finitos
MOE	Módulo de Elasticidad
N	Tamaño de la muestra
N_e	Número de elementos
NGKL	Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève
NT	Transformación de Nataf
O	Variable aleatoria posición del nudo en la altura de la sección transversal
P	Densidad de masa variable aleatoria
\bar{P}	Carga puntual en el centro del tramo
P_{cr}	Carga crítica de pandeo
P_n	Variable aleatoria carga de pandeo
P_{0n}	Carga de pandeo valor de referencia
PDF	Función Densidad de Probabilidad
PF	Probabilidad de Falla
\widehat{PF}	Estimador Probabilidad de Falla
PME	Principio de Máxima Entropía
PMF	Función Masa de Probabilidad
POD	Descomposición Ortogonal Propia
Q	Variable aleatoria altura del nudo
\bar{Q}	Carga distribuida
Q_i	Esfuerzo transversal
Q_x	Fuerza transversal resultante dirección x
Q_y	Fuerza transversal resultante dirección y
R	Variable aleatoria profundidad del nudo dentro del ancho de la sección transversal
\bar{R}	Longitud de promedios proceso estocástico de valores medios
\hat{R}	Dirección radial
R_0	Matriz de correlación espacio normal estándar

RE	Error Relativo del estimador \widehat{PF}
$S(f_X)$	Entropía variable aleatoria continua
$S(p)$	Entropía variable aleatoria discreta
$S(w)$	Función de densidad espectral
SLS	Estados Límites de Servicio
SMEF	Método de los Elementos Finitos Estocástico
SRM	Método de Representación Espectral
T	Timoshenko
\dot{T}	Energía cinética
\hat{T}	Dirección tangencial
T_c	Tiempo requerido para cruzar el puente peatonal
T_i	Tiempos de arribo al puente peatonal
U	Variable aleatoria distancia entre nudos
\dot{U}	Energía de deformación elástica
\bar{U}	Variable aleatoria distribución uniforme
U_B	Energía potencial flexión
U_S	Energía potencial corte
ULS	Estados Límites Últimos
V	Variable aleatoria deflexión en el centro del tramo de vigas
\dot{V}	Energía potencial cargas externas
$Var[]$	Varianza
W	Variable aleatoria longitud del nudo
W_B	Energía disipada flexión
W_{nc}	Trabajo realizado por las fuerzas no conservativas
W_S	Energía disipada corte
WZM	Modelos de Zonas Débiles
X	Vector de variables aleatorias

Minúsculas

a	Coefficiente de proporcionalidad amortiguamiento
\bar{a}	Parámetro de forma distribución gamma
a_{max}	Aceleración máxima

a_1	Distancia entre las cargas y el apoyo mas cercano
b	Ancho sección transversal
\bar{b}	Parámetro de escala distribución gamma
c	Valor crítico prueba de bondad de ajuste
d	Longitud de correlación
f	Resistencia a flexión
$f(x)$	Función de carga dependiente de la posición
$f(x, t)$	Función de carga dependiente de la posición y del tiempo
$\mathbf{f}(t, x)$	Vector global de fuerzas nodales
f_f	Frecuencia fundamental de vibración ensayo dinámico
f_s	Frecuencia de paso
f_X	Función de distribución de probabilidad
\hat{f}_L	Transformada de Fourier de la fuerza aplicada en $x = L$
$g(\mathbf{X})$	Función de estado límite
gd	Desviación de las fibras
h	Altura sección transversal
$h(\omega)$	Función de respuesta en frecuencia
i	Radio de giro sección transversal
k	Cantidad de láminas
k_c	Coefficiente de nudosidad zona de corte ensayo estático
k_m	Coefficiente de nudosidad zona de momento constante ensayo estático
k_1	Constante dependiente del modo de vibración
l	Longitud del elemento
l_s	Longitud de paso
l_t	Longitud total ensayo dinámico
l_1	Longitud central de cinco veces la altura de la sección transversal
m_n^4	Constante dependiente del modo de vibración
n_E	Factor de pérdida flexión
n_G	Factor de pérdida corte
$n_i(x)$	Funciones de aproximación
$n_{vi}(x)$	Funciones de aproximación deflexión transversal
$n_{\theta i}(x)$	Funciones de aproximación rotación
p_i	Probabilidad discreta

t	Variable tiempo
t_d	Tiempo de paso puente peatonal
t_k	Espesor de láminas
t_0	Tiempo de arribo
u	Función de desplazamiento dirección x
\ddot{u}	Aceleración ensayo dinámico
\hat{u}_L	Transformada de Fourier del desplazamiento vertical en $x = L$
v	Función de desplazamiento dirección y
$v(x, t)$	Función de desplazamiento dependiente de la posición y del tiempo
v_p	Velocidad del peatón
w	Función de desplazamiento dirección z
$w(x, \theta)$	Proceso estocástico
w_G	Deflexión global ensayo estático
w_L	Deflexión local ensayo estático
$w_m(E)$	Deflexión aleatoria en el centro del tramo
w_n	Frecuencia de discretización función de densidad espectral
w_R	Deflexión admisible
w_u	Frecuencia de corte, función de densidad espectral
$\bar{w}(x)$	Valor medio proceso estocástico
x	Dirección sistema de coordenadas cartesianas
x_i	Valores que asume una variable aleatoria
x_c	Centroide del elemento
$\mathbf{x}(t)$	Vector global de desplazamientos nodales
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Vector global de velocidades nodales
$\ddot{\mathbf{x}}(t)$	Vector global de aceleraciones nodales
y	Dirección sistema de coordenadas cartesianas
$\mathbf{y}(t)$	Vector de desplazamientos coordenadas generalizadas
$\dot{\mathbf{y}}(t)$	Vector de velocidades coordenadas generalizadas
$\ddot{\mathbf{y}}(t)$	Vector global de aceleraciones coordenadas generalizadas
z	Dirección sistema de coordenadas cartesianas
$z_{1-\alpha/2}$	Cuantil $(1 - \alpha/2)$ distribución normal estándar

Letras griegas

α	Nivel de significancia prueba de bondad de ajuste
α_i	Coefficientes dinámicos carga peatonal
$\gamma(\bar{R})$	Función de reducción de varianza
γ_{ij}	Deformación específica transversal
Γ	Función gamma
δ	Coefficiente de variación
δ_{ij}	Función delta de Kronecker
$\delta\dot{T}$	Variación en la energía cinética virtual
$\delta\dot{U}$	Variación de la energía virtual de deformación elástica
$\delta\dot{V}$	Variación en el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas aplicadas
Δt	Discretización del tiempo
Δw	Discretización de la frecuencia
ε_{ij}	Deformación específica longitudinal
ζ	Coefficiente de amortiguamiento modal
ζ_n	Amortiguamiento modal
η	Coordenadas normalizadas dirección y
θ	Parámetro distribución de probabilidad
$\hat{\theta}$	Estimador parámetro de distribución de probabilidad
θ_t	Rotación específica torsional
θ_x	Rotación específica eje y
θ_y	Rotación específica eje x
κ	Coefficiente de corte
λ	Velocidad de arribo proceso de Poisson
λ_i	Valores propios función de covarianza
λ_0	Parámetro distribución exponencial truncada
λ_1	Parámetro distribución normal truncada
μ	Valor medio
$\mu_{E_{\bar{R}}(r)}$	Valor medio proceso estocástico de valores medios
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Coordenadas normalizadas dirección x
ξ_i	Variable aleatoria no correlacionada valor medio cero

ρ	Densidad
$\rho_{i,j}$	Coefficiente de correlación
ρ_{0ij}	Coefficiente de correlación espacio normal estándar
ρ_0	Densidad de masa valor de referencia
ρ_m	Coefficiente de correlación ensayo de variabilidad longitudinal del MOE
ρ_p	Densidad aparente promedio
$\rho(r)$	Función de correlación
$\rho(x)$	Variación longitudinal densidad de masa
σ	Desvío estándar
σ_{ij}	Componente de tensión normal
$\sigma_{E\bar{R}}^2(r)$	Varianza proceso estocástico de valores medios
τ_{ij}	Componente de tensión tangencial
ϕ_x	Rotación específica alrededor eje y
ϕ_y	Rotación específica alrededor eje x
$\phi(x)$	Función de prueba
$\Phi_{F_n}(x)$	Proceso estocástico forma modal de vibración
Φ_i	Ángulo de fase dinámico carga peatonal
Φ_n	Modo natural de vibración
$\Phi_{P_n}(x)$	Proceso estocástico forma modal de pandeo
φ	Relación entre rigidez a flexión y corte
$\varphi(\xi_i)$	Distribución de probabilidad normal estándar
$\varphi_M(\xi; R_0)$	Distribución de probabilidad conjunta normal estándar
ψ	Espacio de las funciones de prueba ϕ
$\hat{\psi}$	Espacio de soluciones v
$\psi_i(x)$	Funciones propias de la función de covarianza
ω	Frecuencia natural circular
Ω_e	Dominio del elemento finito
Ω_n	Frecuencia natural circular

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La madera constituye uno de los materiales para uso estructural más antiguos y uno de los que presenta una mayor variabilidad en sus propiedades debido a su origen natural. Las mejoras introducidas en su procesamiento para la obtención de elementos estructurales hace que tenga un amplio campo de aplicación en la Ingeniería Civil pasando por elementos estructurales que conforman estructuras resistentes, postes para tendido eléctrico, paneles para viviendas prefabricadas con aplicación sismo-resistente, etc. Además, la posibilidad de elaboración de piezas laminadas formadas por elementos individuales de gran calidad permiten la obtención de componentes estructurales que son capaces de resolver muchas situaciones de diseño de forma muy satisfactoria, con aplicaciones en estructuras peatonales, edificaciones con grandes dimensiones y recientemente en edificios de altura construidos en forma íntegra por elementos de madera. Asimismo, este material se destaca respecto a sus competidores inmediatos, hormigón y metal, principalmente por el mayor valor que presenta en la relación entre su rigidez y peso lo que permite obtener estructuras más livianas. Por tratarse de un biomaterial, tiene características complejas y variables. Los modelos de comportamiento deben necesariamente realizar simplificaciones en cuanto a varias de sus propiedades. Por ello, es necesario avanzar en los enfoques para mejorar la comprensión en el comportamiento de estos elementos estructurales. Esta variabilidad en las propiedades materiales hacen que un enfoque estocástico sea necesario para modelar la misma y obtener de esta manera una respuesta estructural más cercana a la real. Particularmente, el *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina

constituye una de las especies renovables para uso estructural más importante del país. Recientemente ha sido establecido y reglamentado en forma oficial su uso estructural en el país a través del Reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601. Por lo tanto, la principal motivación de la presente investigación es el desarrollo de modelos numérico-estocásticos aplicables a piezas estructurales del material que permitan el estudio de las respuestas estructurales estática y dinámica para, de esta forma, contribuir a enriquecer el conocimiento sobre las cualidades del mismo y la extensión de su uso en el ámbito de la Ingeniería Civil Argentina.

1.2. Importancia del problema

Las estructuras de uso civil deben satisfacer dos requerimientos importantes. El primero de ellos es la seguridad, establecido en términos de resistencia de los componentes estructurales y de la estabilidad de la estructura en general. El segundo de ellos lo constituye el desempeño satisfactorio bajo las condiciones de utilización para las cuales son diseñadas. Si bien estas condiciones no conducen al colapso estructural, establecen límites en cuanto al confort de las personas que la utilizan o de tipo operacional. Estos requerimientos están controlados por la interacción entre las acciones a las cuales se someten a las estructuras y las propiedades de los materiales empleados en las mismas. Es por esto último, que una adecuada representación de las propiedades materiales constituye un punto de vital importancia para el estudio del comportamiento estructural. Al constituir la madera un material con propiedades variables, la propagación de las incertidumbres generadas por la mismas conduce a una respuesta estructural con un rango más amplio, de naturaleza estocástica y más cercano al real. El estudio de la variabilidad en las propiedades del material y la posterior representación estocástica de las mismas es una área a la que muchos investigadores han dado importancia y que tiene una amplia aplicación dentro del diseño de estructuras de madera. Más aún, con el desarrollo de los métodos de diseño estructural por estados límites dentro de los cuales la consideración de las incertidumbres juega un papel importante. Tal y como se ha mencionado en la sección anterior, el diseño estructural con madera de *Eucalyptus grandis* ha sido reglamentado recientemente en el país. El uso reglamentado del material en la práctica ingenieril sigue una secuencia lógica de pasos; el primero de ellos lo constituye la caracterización del material, el cual es un proceso llevado a cabo mayormente en forma experimental con el fin de conocer las

propiedades estructurales del mismo. Luego de esta etapa, sigue el desarrollo de modelos que representen las propiedades obtenidas en la etapa anterior, lo cual contribuye al estudio y aplicación del uso estructural del material. En esta instancia, la utilización de herramientas numéricas tiene suma importancia y, en el caso presentado en la presente tesis, más aún dada la combinación de estas últimas con métodos probabilísticos. Estos últimos proporcionan la posibilidad de obtener modelos de elementos estructurales que proveen respuestas más cercanas a las obtenidas en piezas reales y que son aplicables al ámbito del diseño estructural.

1.3. Revisión de la Literatura

Los tres ejes temáticos principales de la presente tesis son el material, el modelado estocástico y el modelado numérico de elementos estructurales de madera. Por lo tanto esta sección se encuentra estructurada en dicho orden. A continuación se presentan los aportes considerados como más relevantes dentro de cada temática.

El *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina constituye una de las especies renovables más importantes del país (INTA, 1995). La caracterización mecánica de piezas aserradas de tamaño estructural y el desarrollo de los métodos empleados para la clasificación visual y mecánica de las mismas son presentados en Piter (2003). Dentro de los resultados más relevantes de este trabajo, se destacan los elevados valores que presenta la relación entre el Módulo de Elasticidad (MOE) y la densidad de masa más cercanos a los encontrados por otros autores en el grupo de especies coníferas que los obtenidos para especies latifoliadas, dentro de las cuales se encuentra la madera proveniente de la especie en estudio; y el desarrollo de métodos de clasificación visual y mecánica de piezas estructurales. Los resultados de la caracterización mecánica son luego adoptados por el Reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601 (2013), mientras que el método de clasificación visual, por la norma IRAM 9662-2 (2006). En la literatura, además de trabajos que involucran elementos con secciones aserradas, también se reportan estudios experimentales en piezas laminadas fabricadas con madera de esta especie (Piter *et al.*, 2007; Saviana *et al.*, 2009), en postes para distribución de energía eléctrica (Torrán *et al.*, 2009) y en uniones (Sosa Zitto *et al.*, 2014) mostrando de esta manera la variedad de aplicaciones estructurales de este material.

En forma general, se pueden distinguir tres niveles de modelado estocástico del material: nivel macro, meso y micro (Köhler, 2007). El primero de ellos considera la variabilidad de las propiedades materiales entre piezas de una misma especie considerando de esta manera la población general, el segundo considera una sub-población dentro de este conjunto y finalmente, el tercer nivel contempla la variabilidad de las propiedades mecánicas dentro de cada pieza. El modelado estocástico de las propiedades materiales considerando el primer nivel de representación se presenta en Köhler *et al.* (2007). La resistencia a flexión y el MOE son representados mediante variables aleatorias con distribución de probabilidad lognormal mientras que la densidad de masa mediante un variable aleatoria con distribución de probabilidad normal. Estas distribuciones de probabilidad son introducidas luego en el ámbito del diseño estructural Europeo a través del Probabilistic Model Code (2006) del Joint Committee on Structural Safety (JCSS). La distribución de probabilidad normal es utilizada frecuentemente para modelar propiedades materiales a pesar de que la aplicación de principios probabilísticos como el Principio de Máxima Entropía (Shannon, 1948 y Jaynes, 1957) sugieren otras distribuciones con dominio positivo. Particularmente, las piezas de madera estructural presentan una importante variabilidad en sus propiedades mecánicas dentro de cada pieza debido a la presencia de defectos. Esto, da lugar al modelado estocástico de la variabilidad longitudinal de las mismas. Uno de los primeros reportes acerca de la disminución de las propiedades de resistencia y rigidez en coincidencia con la presencia de nudos individuales o agrupamientos de los mismos dentro de vigas se presenta en Riberholt y Madsen (1979). Los modelos probabilísticos utilizados para representar la variabilidad longitudinal de las propiedades mecánicas pueden clasificarse en: Modelos Espaciales de Parámetros Discretos (DPSM, en inglés) y Modelos Espaciales de Parámetros Continuos (CPSM, en inglés). Este último grupo puede a la vez dividirse en dos sub-grupos: Modelos de Zonas Débiles (WZM, en inglés) y Modelos con Perfiles de Rigidez Continuos (CSPM, en inglés). Esta clasificación es mencionada en Kandler *et al.* (2015a) y resulta en un agrupamiento bien definido y actualizado de los conjuntos de modelos desarrollados en la literatura. Dicha clasificación está basada tanto en la forma de representación de la variabilidad longitudinal de las propiedades mecánicas como en los mecanismos de discretización aplicados para la resolución generalmente numérica de los problemas en los cuales se aplican. En los DPSM, los elementos de madera se dividen en segmentos de igual tamaño y valores de rigideces individuales son asignados a cada uno de ellos. Dentro de este grupo, uno de los primeros modelos de variabilidad longitudinal de la rigidez y resistencia a flexión en cada lámina de vigas laminadas fue presentado por

Foschi y Barrett (1980). Cada lámina es dividida en segmentos a los que se le asigna aleatoriamente un valor de densidad de masa y un valor de nudosidad, y luego en base a un análisis de regresión, los valores de resistencia y rigidez. La variabilidad longitudinal del MOE flexional es modelada mediante un modelo de Markov de segundo orden en Kline *et al.* (1986). Este método se utilizó para generar valores del MOE con una estructura de correlación en serie en cada segmento de las piezas de madera. Las distribuciones marginales obtenidas de este modo siguen una distribución de probabilidad normal. La variabilidad longitudinal del MOE y de la resistencia a tracción son modeladas partiendo de una distribución de probabilidad normal estándar multidimensional en los trabajos de Taylor y Bender (1991) y de Richburg y Bender (1992), luego la transformación no lineal inversa es utilizada para obtener distribuciones marginales tipo Weibull de tres parámetros. La variación longitudinal de la resistencia a tracción es simulada a través de un proceso de promedios móviles de tercer orden partiendo de variables aleatorias independientes con distribución de probabilidad lognormal en Lam y Varoğlu (1991). Más tarde, Czmocho (1998) presenta un modelo de variación longitudinal del MOE mediante un campo aleatorio Gaussiano estacionario utilizando para la simulación del mismo la Transformación de Nataf (Der Kiureghian y Liu, 1986). Esta herramienta, en combinación con el Método de los Elementos Finitos (FEM, en inglés), es utilizada para estudiar la deflexión en el centro del tramo de vigas simplemente apoyadas. A diferencia de los trabajos anteriores en los que solamente se obtienen coeficientes de correlación en forma experimental y en base a ellos se realizan las simulaciones, en este último trabajo se ajusta una función de correlación en base a los resultados experimentales. El método utilizado para la simulación del campo aleatorio preserva las características de correlación del campo aleatorio en forma más precisa que al aplicar solamente una transformación no lineal inversa. A pesar del hecho de que en este trabajo se empleó un método continuo de simulación del campo, la discretización del campo aleatorio se realizó a través del método del punto medio (Der Kiureghian y Ke, 1988). Esta circunstancia permite clasificarlo al estudio dentro de aquellos que utilizan un DPSM. Los primeros estudios reportados en esta revisión dentro de los DPSM no ajustan funciones de correlación en base a los resultados experimentales de coeficientes de correlación. En el trabajo de Bulleit y Chapman (2004) se ajustan funciones de correlación partiendo de resultados experimentales propios y de otros autores. Distintos tipos de funciones son utilizadas concluyéndose que la función de correlación exponencial es la que mejor se ajusta a los resultados experimentales. La determinación de la función de correlación es fundamental para la simulación de campos aleatorios que representan

la variabilidad de las propiedades del material a través de métodos con dominio espacial, Transformación de Nataf (Der Kiureghian y Liu, 1986) y Expansión No Gaussianna de Karhunen-Loève (Mulani *et al.*, 2007 y Phoon *et al.*, 2002) y métodos en el dominio de la frecuencia a través de la transformada de Fourier de la función de correlación, como por ejemplo el Método de Representación Espectral (Shinozuka y Deodatis, 1991).

En los WZM, las piezas de madera estructural son representadas a través de su longitud como un material compuesto por pequeñas zonas débiles representativas de las zonas con defectos conectadas por secciones de madera libre de defectos, de mayor longitud. En las zonas débiles, las propiedades mecánicas de la pieza sufren una disminución en sus valores relacionada con la presencia de defectos. Estos modelos se utilizan frecuentemente para simular la resistencia a flexión y a tracción y en menor medida, la rigidez ante dichos esfuerzos. Comúnmente, a estos modelos se los denomina como jerárquicos debido a que modelan las categorías de material presentes en las piezas (madera con y sin defectos). Uno de los primeros modelos de zonas débiles empleado para el estudio de la resistencia a flexión es el reportado en Riberholt y Madsen (1979). En dicho modelo, la distancia entre zonas débiles es modelada mediante un proceso de Poisson con el fin de obtener la distribución de probabilidad de la resistencia a flexión general de cada viga. Un proceso no homogéneo de Poisson es considerado para la simulación de las distancias entre zonas débiles puntuales en Czmocho (1998). Un análisis de sensibilidad muestra que la correlación entre la resistencia de las diferentes zonas débiles y entre las distancias entre las mismas no tiene influencia en la distribución de probabilidad de la capacidad de carga pudiendo asumirse una correlación nula para los valores de ambas variables aleatorias. La resistencia a flexión es modelada mediante un modelo jerárquico en Isaksson (1999) considerando la longitud entre zonas débiles a través de una variable aleatoria con distribución gamma y la longitud de las mismas de forma determinística. El modelo jerárquico de la resistencia a flexión de las zonas débiles consiste en una variable aleatoria con distribución lognormal y una estructura de correlación independiente de la distancia entre las mismas; la resistencia a flexión de la zona libre de nudos se asume igual a la mayor resistencia obtenida en las zonas débiles. La adaptación del modelo anterior que considera la posibilidad de que la resistencia a flexión sea obtenida en base a lineamientos de distintas normas es presentada en Köhler *et al.* (2007). En dicho trabajo, además se modela la distancia entre zonas débiles a través de una variable aleatoria de Poisson. La resistencia y rigidez a flexión global de vigas laminadas son obtenidas en base a un modelo jerárquico de cada lámina el cual considera la presencia de zonas débiles y de uniones finger en Fink *et al.* (2015).

La rigidez y resistencia a tracción de cada agrupamiento de nudos son simulados a través de un modelo de regresión que considera el MOE dinámico longitudinal y un indicador de nudosidad presentado en Fink y Köhler (2014). Luego, los parámetros globales de cada viga laminada son obtenidos mediante el FEM. La representación de la variabilidad longitudinal del MOE y del módulo de corte mediante modelos jerárquicos de dos niveles y sistemas en serie y en paralelo, es presentada en Brandner y Schickofer (2015). Los WZM son asociados a los modelos jerárquicos en los cuales frecuentemente se distinguen dos niveles, el primero considera la variabilidad entre piezas estructurales mientras que el segundo nivel representa la variabilidad de las propiedades mecánicas dentro de cada miembro estructural debido a la presencia de nudos. Dichos modelos consideran que los valores del MOE a lo largo de las piezas están equi-correlacionados; esto implica que los mismos están correlacionados de igual manera sin depender de la distancia entre puntos.

Perfiles de rigidez continuos del MOE registrados utilizando ensayos similares a los empleados en la clasificación mecánica de tablas con carga constante deslizando las piezas y obteniendo registros continuos de deformaciones son utilizados en Wang y Foschi (1992) para la simulación de la variabilidad del MOE en tablas que componen vigas laminadas. En Wang *et al.* (1995), se utiliza un CSPM para la simulación de la resistencia a compresión y del MOE en tablas individuales. En ambos casos, los registros son simulados a través del Método de Representación Espectral (Shinozuka y Deodatis, 1991). En el primero de estos trabajos, se estudian las deformaciones máximas mediante el FEM mientras que en el segundo, se presenta el método utilizando factores de ganancias para la determinación del espectro. El modelo de variabilidad longitudinal del MOE presentado en Czmocho (1998) constituye un CSPM ya que el mismo fue determinado bajo una medición rigurosa del MOE en puntos muy cercanos bajo los mismos ensayos mecánicos presentados dentro de este grupo. Sin embargo, su posterior aplicación discreta en una discretización mediante el FEM conduce a una consideración discreta del mismo. Más recientemente, en Kandler *et al.* (2015a), se utiliza un perfil de rigidez continuo obtenido en base a registros generados mediante el modelo de zonas débiles presentado en Fink *et al.* (2015) a través de la Expansión de Karhunen-Loève (Ghanem y Spanos, 1991). El estudio de la influencia de la variabilidad longitudinal de la rigidez de cada lámina de una serie de vigas laminadas encoladas en la rigidez efectiva de las mismas es presentado en Kandler *et al.* (2015b). Los perfiles de rigidez longitudinales de cada lámina fueron obtenidas a través del estudio de las fibras del material y sus desviaciones. La predicción de la rigidez efectiva de cada viga fue realizada a través del FEM.

A lo largo de la revisión de los modelos estocásticos se ha destacado además la influencia del modelado numérico de piezas estructurales de madera. En forma adicional, se destacan una serie de trabajos que estudian la influencia de los nudos en la resistencia a flexión de forma determinística. Los mismos han sido modelados como cilindros huecos en la zona traccionada de la sección transversal de vigas flexionadas para estudiar la influencia de su tamaño y posición en la capacidad de carga de vigas y la distribución de tensiones en la sección transversal en Baño *et al.* (2013). Luego, la influencia de las formas que pueden adoptar los nudos en la sección transversal de vigas en la resistencia a flexión es presentada en Guindos y Guaita (2014). En este trabajo, se han determinado 7 formas características de nudos en la sección transversal, en relación a los métodos de clasificación visual de las piezas, que proveen distintos perfiles de resistencia a flexión y variación de la distribución de tensiones dentro de la sección transversal. Un estudio similar aplicado a tablas que considera un modelo tridimensional de desviación de las fibras es presentado en Lukacevic y Füssl (2014). Los nudos son modelados como conos simétricos partiendo de la simulación de la posición de la médula en la sección transversal del tronco del árbol.

En la presente investigación se considera el comportamiento estático y dinámico de elementos estructurales de madera. Para el estudio del comportamiento dinámico, es necesario determinar el amortiguamiento del material. Según el conocimiento del autor de la presente tesis, no se registran trabajos al respecto que involucren piezas de tamaño estructural en especies similares al *Eucalyptus grandis*. Sin embargo, a continuación se presentan las principales contribuciones relacionadas al estudio de especies coníferas. En Yeh *et al.* (1971), se establece que el amortiguamiento en estructuras de madera esta compuesto por la contribución del material, de los mecanismos de unión entre elementos estructurales y la contribución del adhesivo utilizado en el pegado de las láminas de los elementos laminados. En dicho trabajo, se establece una relación de 1:6:2, respectivamente, para las contribuciones mencionadas en base a ensayos experimentales desarrollados en construcciones tradicionales, determinándose que el coeficiente de amortiguamiento del material que varía entre 0.0025 y 0.01 con un valor medio igual a 0.0035. Un estudio analítico y experimental del amortiguamiento de piezas estructurales se presenta en Nakao *et al.* (1985). En este trabajo, se establece una relación de amortiguamiento de 0.0035 y un modelo analítico aplicado a vigas bajo la formulación teórica de Timoshenko que utiliza coeficientes viscosos para las pérdidas por flexión y corte. En Labonnote *et al.* (2013a) se reportan valores medios del coeficiente de amortiguamiento modal que varían entre 0.0052 y 0.0141 obtenidos en vigas simplemente apoyadas, laminadas y aserradas de

la especie *Picea* de Noruega. En este trabajo, además se reportan las tendencias generales que involucran el incremento del valor medio del amortiguamiento con el aumento en los modos de vibración, con la disminución de la longitud de las piezas y con la posición de las piezas apoyadas sobre la menor dimensión de la sección transversal, presentando la deformación por corte la mayor influencia en las variaciones del amortiguamiento entre las distintas configuraciones ensayadas. Los resultados de este trabajo fueron luego empleados para la determinación analítica de un modelo de amortiguamiento complejo proporcional a la rigidez con factores de pérdida por flexión y corte presentado en Labonnote *et al.* (2013b). El estudio del amortiguamiento en las vigas aserradas de la especie *Castanea sativa Mill* se presenta en Cetrangolo *et al.* (2015) donde se reportan valores medios de coeficientes de amortiguamiento de 0.0121 en vigas suspendidas y de 0.0345 en vigas simplemente apoyadas con conexiones mecánicas similares a las utilizadas en puentes peatonales, estableciendo la influencia de las uniones en el amortiguamiento del sistema. Los valores obtenidos muestran ser bastante mayores que los recomendados en el código de diseño estructural en madera EUROCODE 5 parte 2 (2004) dedicado exclusivamente a puentes de madera.

La parte final de la presente tesis está dedicada al estudio del comportamiento dinámico de puentes peatonales de madera. Tanto estas estructuras como los entrepisos del material son susceptibles de generar, en combinación con las excitaciones inducidas por su uso, condiciones de comportamiento en servicio no admisibles para el confort humano. Estas condiciones de uso se cuantifican en función de las aceleraciones máximas alcanzadas. Una extensiva revisión de literatura y reporte del estado del arte referido al comportamiento dinámico de este tipo estructural es presentado en Živanović *et al.* (2005). Entre muchos de los temas que aborda, sobresalen los modelos de cargas más empleados, requerimientos normativos y referencias a trabajos en donde se estudia el caminar de las personas en forma individual, de multitudes y los modelos de fuerzas dinámicas generados para la simulación de estos casos. Generalmente, las condiciones de servicio se verifican con modelos de cargas determinísticos. Uno de los más recientes es el presentado en Da Silva *et al.* (2007) que incluye el efecto del impacto del talón de los peatones al caminar. Actualmente, desde hace unos años se han comenzado a desarrollar y emplear modelos estocásticos de la carga inducida por peatones debido a que los mismos representan de forma más real el caminar humano. Uno de los primeros modelos estocásticos de carga es el presentado en Brownjohn *et al.* (2004) el cual considera la influencia de cinco componentes armónicos múltiples de la frecuencia de paso, los cuales son capaces de excitar estructuras peatonales tipo puentes

o pasarelas que generalmente presentan frecuencias naturales bajas. Una extensión del modelo anterior, el cual considera la presencia de componentes armónicos y sub-armónicos es presentado en Živanović *et al.* (2007). Estos componentes sub-armónicos aparecen en consecuencia de las variaciones producidas en el ritmo del traslado introducido por cada pie en forma individual, ya que las personas tienen un pie con el cual se realiza más fuerza al caminar. Más recientemente, se ha presentado un modelo estocástico aplicable también a estructuras de alta frecuencia que incluyen variaciones en las características de los desplazamientos en Racic *et al.* (2011) y modelos que incluyen además la interacción entre la estructura y los peatones (Venuti *et al.*, 2016; Caprani y Ahmadi, 2016). En relación a puentes peatonales se presentan ensayos modales en Cantieni y Pietrzko (1993) y en Baño *et al.* (2011). En el primer caso, se trata de un puente peatonal cubierto de importante longitud y tres vanos mientras que en el segundo caso, de varios puentes peatonales de corta longitud y un solo vano. El estudio y comparación de los resultados obtenidos de un modelo numérico y de un modelo físico de menor escala de un puente peatonal es presentado en Segundinho (2010). Mediante el modelo numérico se estudian las condiciones de servicio a través de modelos determinísticos de cargas y considerando los valores límites establecidos en las normas de diseño de este tipo de estructuras. En la mayoría de los casos los límites de aceleración son superados utilizando las propiedades mecánicas medias del material. El modelo a escala es utilizado en la determinación de las frecuencias naturales y coeficientes de amortiguamiento.

Resultados parciales de este trabajo de tesis han sido recientemente publicados por el autor de la tesis y co-autores. El problema de vibraciones de elementos estructurales de madera aserrada fue abordado utilizando un modelo simple de nudos (García *et al.*, 2016b). Otra metodología más eficiente fue empleada para resolver problemas de autovalores de vigas (frecuencias naturales y pandeo) (García *et al.*, 2016c). Recientemente fue aceptado para su publicación, un artículo sobre deflexiones de vigas y estudios de confiabilidad (García y Rosales, 2016a).

1.4. Objetivos de la tesis

El objetivo general del presente trabajo de tesis es el siguiente:

- Desarrollar modelos numérico-estocásticos para el estudio del comportamiento estructural de elementos de madera de *Eucalyptus grandis*.

En torno a dicho objetivo general se encuentran los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar la influencia de las propiedades materiales consideradas en forma estocástica en la respuesta estructural ante acciones dinámicas y estáticas
- Validar las suposiciones establecidas en los modelos estocásticos desarrollados a través de resultados experimentales de la medición de coeficientes de amortiguamiento y de valores del MOE a lo largo de vigas y tablas.
- Estudiar la respuesta dinámica de un sistema estructural compuesto por elementos estructurales con propiedades inciertas.

1.5. Alcance del estudio

Esta investigación se aplica a elementos estructurales obtenidos de madera de la especie *Eucalyptus grandis* cultivada en las provincias de la Mesopotamia Argentina. Al utilizarse elementos de tamaño estructural, el régimen del comportamiento mecánico del material queda definido como elástico lineal debido a que no existen evidencias de comportamiento no lineal en piezas de dicho tamaño. La relación constitutiva del material es reducida en función del elemento utilizado en la discretización numérica de cada problema partiendo del modelo ortótropo rectangular hasta llegar al modelo transversalmente isótropo en placas e isótropo en vigas. La mayor parte de los resultados están enfocados al estudio de elementos estructurales de secciones aserradas con geometría del tipo lineal con predominio de la dimensión longitudinal (vigas y columnas). Los modelos estocásticos del material y los elementos utilizados en la discretización numérica consideran piezas solicitados a esfuerzos de flexión bajo las formulaciones teóricas elementales (Euler-Bernoulli y Timoshenko). El modelo de zonas débiles propuesto, al igual que los modelos de esta familia descritos en la Revisión de la Literatura, solo considera la presencia de nudos pudiendo simular las tres clases resistentes de *Eucalyptus grandis* sin considerar la presencia de médula. Los resultados están principalmente orientados al estudio de las condiciones de servicio. Igualmente, los límites de resistencia fueron verificados en función de las cargas y valores de resistencia a flexión máximas que son reportados en Piter (2003). El estudio del comportamiento dinámico de elementos estructurales solo considera el amortiguamiento propio del material. En el capítulo final, se presenta el estudio de la dinámica de un puente peatonal discretizado numéricamente con elementos viga laminadas y elementos

placa. Este estudio se encuentra restringido a puentes peatonales con niveles bajos de ocupación que permitan un tránsito fluido sin interrupciones. El amortiguamiento es considerado en forma global basado en valores sugeridos en la literatura sin discretización de sus componentes materiales y estructurales (uniones). El enfoque de esta tesis es esencialmente numérico; sin embargo, se utilizan resultados experimentales con dos finalidades, la primera de ellas es la comparación con resultados experimentales existentes (registros de deflexiones y frecuencias naturales de vigas, Piter (2013)) utilizados para validar los resultados numéricos obtenidos de la aplicación de los modelos numérico-estocásticos y la metodología empleada. La segunda finalidad consiste en validar suposiciones utilizadas en la realización de los modelos estocásticos a través de resultados experimentales propios obtenidos en el marco de la realización de la presente tesis.

1.6. Metodología

Tal y como se ha mencionada previamente el enfoque de la tesis es principalmente numérico lo cual define en mayor medida los métodos empleados. Como se dijo, se abordan tres aspectos globales: el material, el modelado numérico y el modelado estocástico. Esta combinación se lleva a cabo dentro del marco del Método de los Elementos Finitos (MEF) introduciendo las propiedades del material y utilizando herramientas de origen probabilístico para el modelado estocástico de las mismas. Los modelos numérico-estocásticos desarrollados son empleados para el estudio del comportamiento estático (deflexiones y pandeo) y dinámico (vibraciones libres y forzadas) de piezas estructurales. Los ensayos experimentales se llevan a cabo de acuerdo a las normas vigentes y aplicando la metodología clásica presentada además por otros autores. En tanto que la respuesta del sistema estructural estudiado, se obtiene aplicando la metodología clásica del análisis dinámico de sistemas lineales de múltiples grados de libertad, a través de superposición modal.

1.7. Originalidad y aportes

La tesis se enfoca en el desarrollo de modelos numérico-estocásticos aplicables al estudio del comportamiento estático y dinámico de piezas estructurales de *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina. El modelado estocástico y la cuantificación de incertidumbres constituyen un área de gran importancia dentro de los

nuevos lineamientos del diseño estructural basado en confiabilidad. El desarrollo de estos modelos contribuye a producir una mayor comprensión del comportamiento estructural de las piezas de este material, el cual es necesario para una utilización más confiable del mismo dentro del ámbito de la Ingeniería Civil. Esto se logra al obtenerse respuestas estructurales más cercanas a las observadas en piezas reales en relación a los tradicionales métodos de modelado. Por lo tanto, la presente investigación ofrece una importante contribución técnica y original en el campo de la modelización de elementos estructurales de *Eucalyptus grandis*. En esta investigación, se presentan las herramientas aplicables al modelado estocástico de las propiedades físicas y mecánicas que intervienen en problemas estructurales estáticos y dinámicos. Particularmente, se desarrollan modelos estocásticos de la variabilidad longitudinal del MOE para los tres grupos de modelos descritos en la revisión de la literatura. Los mismos permiten realizar el estudio de propagación de incertidumbres relacionado a las propiedades del material y obtener de esta manera una apreciación más real de la influencia de las mismas en la respuesta estructural. Los modelos presentados en la presente tesis se diferencian de los anteriores en una selección más estricta de las distribuciones marginales la cual, además de estar apoyada en las pruebas de bondad de ajuste clásicas realizadas sobre resultados experimentales, se fundamenta en la aplicación del Principio de Entropía Máxima. La aplicación de herramientas de simulación de campos aleatorios no Gaussianos en los modelos con perfiles de rigidez continuos es una novedad. Además, el modelo de zonas débiles introduce los nudos de forma individual dentro de cada sección y a lo largo de las piezas con lo cual se logra una representación más realista de su distribución e introduce la variabilidad del MOE en las zonas libres de defectos. La longitud de las zonas débiles es introducida en forma aleatoria y proporcional al tamaño de los nudos o agrupamientos de los mismos. Los valores del MOE en las zonas con defectos son introducidos a partir de distribuciones de probabilidad definidas en función del tamaño de los defectos para cada clase resistente del material. De esta manera, es posible considerar las 3 clases resistentes incluidas dentro de las normas Argentinas generadas por la existencia de nudos, sin considerar la presencia de médula. Los modelos de zonas débiles, reportados en la revisión de la literatura, que incluyen el tamaño de los nudos, asignan las propiedades mecánicas a través de ajustes de regresión lineal, mientras que los demás modelos dentro de este grupo incluyen las propiedades de resistencia y rigidez en base a distribuciones de probabilidad limitadas a una única clase resistente. Generalmente, los modelos estocásticos del material reportados en la revisión de la literatura han sido utilizados para el estudio de deformaciones y de resistencia a

flexión, los cuales son puntos fundamentales dentro del diseño estructural. En la presente tesis, se emplean además para el estudio del comportamiento dinámico y pandeo de piezas estructurales. Particularmente, la implementación de modelos numérico-estocásticos para el estudio de problemas dinámicos constituye una novedad. La determinación experimental de la variabilidad del MOE y de coeficientes de amortiguamiento en piezas de tamaño estructural de esta especie también es un aporte que convalida los parámetros utilizados en el desarrollo de los modelos estocásticos y son aplicables al diseño estructural. El estudio del comportamiento dinámico de un puente peatonal considerando un modelo de carga estocástica, presencia de múltiples peatones y un modelo estocástico de la estructura, constituye otra contribución original de esta tesis al estudio de este tipo de estructuras.

1.8. Organización de la tesis

La presente tesis se construye sobre tres temas principales los cuales tienen asignado su propio capítulo. El Capítulo 2 está dedicado a la madera de *Eucalyptus grandis*. Se comienza con una descripción general del material madera, se prosigue con las propiedades mecánicas de la misma, para terminar con el estado actual de aplicación de estas propiedades en el diseño estructural en Argentina. En el Capítulo 3, se introduce el enfoque estocástico, se describe el Método de Monte Carlo (MCM) utilizado para el estudio de propagación de incertidumbre y las herramientas utilizadas para el modelado estocástico del material. El Capítulo 4 describe las herramientas del modelado numérico utilizadas en forma conjunta con las introducidas en el Capítulo 3 y el MCM para el estudio de propagación de incertidumbre que se desarrolla en los Capítulos 5 y 7. Dentro de los métodos detallados en el Capítulo 4, se destacan aquellos que en forma conjunta a las herramientas del modelado estocástico resultan en lo que se denomina el Método de los Elementos Finitos Estocásticos (SFEM, en inglés). En el Capítulo 5, se presentan y desarrollan los modelos estocásticos de las propiedades del material aplicables a elementos estructurales de madera aserrada. Estos modelos contemplan la descripción de la variación del Módulo de Elasticidad (MOE, en inglés) a lo largo de las piezas a través de representaciones con perfiles de rigidez continuos y de modelos de zonas débiles que consideran la presencia de nudos. Además, se modelan de forma estocástica la densidad del material (ρ) y el amortiguamiento considerando su variación entre las distintas piezas. Luego, en el mismo

capítulo, se aplican los modelos al estudio de propagación de incertidumbre una vez que los mismos son validados con datos experimentales. El Capítulo 6 incluye resultados de ensayos experimentales realizados sobre tablas y vigas aserradas de *Eucalyptus grandis*. Los mismos se llevaron a cabo para estudiar la variabilidad longitudinal del MOE en piezas reales y para determinar coeficientes de amortiguamiento. El Capítulo 7 está dedicado al estudio de estructuras de madera tipo puentes peatonales ante la acción de cargas dinámicas de peatones representadas en forma determinística y estocástica. Finalmente, en el Capítulo 8, se presentan las conclusiones generales del trabajo de tesis así como propuestas para trabajos futuros.

Capítulo 2

Madera Estructural

En este capítulo, se presenta en forma general el material estructural madera, se describen sus características más importantes partiendo de su composición microscópica hasta llegar a sus características macroscópicas, tanto en especies coníferas como latifoliadas. Además, se describe la estructura material en relación a sus bondades para el uso estructural. Luego, se hace especial énfasis en la especie *Eucalyptus grandis*, cultivada en las provincias de la Mesopotamia Argentina y que constituye el material estructural de interés en la presente tesis. Se mencionan las principales referencias y se describe el estado del conocimiento en cuanto a su uso estructural. Finalmente, se presentan sus propiedades mecánicas y físicas, las cuales serán utilizadas más adelante en el estudio presentado en esta tesis.

2.1. Madera: Generalidades

La madera es un material sólido natural, de naturaleza orgánica, compuesto fundamentalmente de celulosa, hemicelulosa y lignina. Debido a la forma alargada de las paredes de las células y a su estructura orientada, así como a las diferencias que presentan por su función y la época y forma de crecimiento, es fuertemente heterogéneo y anisótropo, lo cual motiva que las propiedades se deban analizar según tres direcciones principales, la longitudinal, la radial y la tangencial (Coronel, 1994).

Su obtención proviene de dos categorías de árboles conocidos como angiospermas y gimnospermas. Al primer grupo pertenecen las especies frondosas, provenientes de árboles con hojas caducas y en el segundo se incluyen las especies de coníferas. Las especies frondosas presentan una anatomía más compleja, conteniendo un mayor número de tipos de células que cumplen distintas funciones fisiológicas. Se pueden distinguir a las fibras, que proveen la resistencia mecánica, constituyendo el tejido de sostén, con paredes celulares más gruesas que en las coníferas y longitudes comprendidas entre 1 mm y 1.5 mm. Dentro de este tejido, se distribuye un segundo tipo, los vasos conductores con diámetros variables entre 0.02 mm y 0.5 mm que se extienden verticalmente en el árbol y aparecen con distinta distribución según las especies. Un tercer grupo es el constituido por el tejido de almacenamiento o parénquima que aparece tanto en sentido longitudinal como radial y su número es mayor que en las coníferas. Las especies de coníferas muestran una estructura más simple, con mayoría de fibras traqueidas, de longitud variable entre 2 mm y 5 mm, de esbeltez muy grande ya que el diámetro es aproximadamente la centésima parte de su longitud. Este tejido, que constituye un porcentaje variable entre el 90 % y el 95 % del total, cumple la función de dar resistencia y a su vez de transportar alimentos. Se organiza en filas radiales, presentando paredes más gruesas y menores diámetros en la madera tardía que en la temprana, originando diferentes densidades, y su longitud coincide con la dirección del eje del árbol. El otro grupo es el constituido por el tejido de reserva, el parénquima, que se ocupa de almacenar los elementos nutritivos y se desarrolla fundamentalmente en sentido radial. Los canales de resina son longitudinales y forman cavidades en el tejido.

A pesar de las diferencias existentes, las características fundamentales de las paredes celulares son comunes a la mayoría de las especies. La anatomía de la madera puede ser analizada a través de los siguientes niveles de estudio:

- Nivel microscópico: La madera está formada por una serie de células con forma tubular (traqueidas) las cuales están dispuestas longitudinalmente respecto al eje del árbol. Las mismas tienen de 2 a 5 mm de longitud y el orificio que tienen se denomina lumen. Las paredes celulares están adheridas entre sí por una pared intercelular con alto contenido de lignina y a su vez, trabadas radialmente con otras células, las cuales forman los radios leñosos. Las traqueidas son en realidad irregulares en forma, diámetro y espesor, el cual varía en función de la época de crecimiento. La estructura de las especies coníferas está formada mayormente, entre un 90 y 95 % por estas células. La estructura de las especies frondosas (latifoliadas) resulta más compleja.
- Nivel Ultramicroscópico: La sustancia básica que compone las paredes celulares es la celulosa, que se presenta agregada en unidades largas llamadas fibrillas elementales, las que a su vez se unen para formar las microfibrillas. La capa existente entre las células individuales se denomina laminilla media, la que mantiene la cohesión necesaria para formar el tejido y está compuesta fundamentalmente por lignina y pectina. Entre esta capa y el espacio interior, denominado lumen, se ubica la pared celular que posee tres capas:
 - La pared primaria se encuentra en contacto con la laminilla media y en la misma las microfibrillas se orientan al azar, entrelazándose, siendo su espesor muy delgado.
 - La pared secundaria se puede descomponer en tres partes bien diferenciadas:
 - Una externa muy delgada, con un espesor del orden de décimas de micrómetro que contiene microfibrillas embebidas en lignina y dispuestas helicoidalmente que presenta un promedio de inclinación con respecto al eje de la célula, de entre 50° y 70°.
 - Una parte media que cuenta con un mayor espesor, de varios micrómetros, que contiene microfibrillas orientadas mayoritariamente en la dirección longitudinal y dispuestas helicoidalmente con un ángulo que varía entre los 5° y 20° embebidas en lignina.
 - Finalmente, una parte interna con una capa de poco espesor que contiene microfibrillas dispuestas helicoidalmente con poco ángulo pero careciendo de orden, las mismas están al igual que en las capas anteriores embebidas en lignina.

- La pared terciaria se ubica contra el espacio interior de la célula.

La estructura natural es óptima para el transporte de nutrientes a través de los lúmenes y para el soporte estructural de los árboles. Los tubos pueden asemejarse a un material compuesto en donde la lignina actúa como impermeabilizante y aglomerante, la hemicelulosa como cementante y las microfibrillas como refuerzo. La estructura de la pared celular puede analizarse también, desde el punto de vista de su comportamiento ante los esfuerzos que debe soportar, considerando que la capa media de la pared secundaria, que es la más importante, puede absorber los esfuerzos de tracción, debido a la orientación predominantemente longitudinal de las microfibrillas que la integran. A su vez cuando es sometida a esfuerzos de compresión, la misma es contenida y arriostrada contra su pandeo flexional tanto por la capa externa como por la interna, que tienen una mayor inclinación de las fibras.

- Nivel macroscópico: En dicho nivel se aprecia la sección transversal del tronco (Figura 2.1), en la cual se distinguen las siguientes estructuras:
 - Corteza externa, formada por células muertas.
 - Corteza interna o líber, en donde circula la sabia ascendente.
 - Cábium, que es el tejido que produce madera o xilema hacia el interior y corteza hacia el exterior. Está ubicado en la parte externa, recubierto por la cáscara, o corteza, y es muy delgado.
 - Leño o tejido leñoso, donde se observan las siguientes estructuras:
 - Médula, aparece en la parte central, en general tiene menor calidad que el resto de la madera.
 - Anillos de crecimiento. El crecimiento de las capas periféricas del tronco, responsables por el desarrollo horizontal, da lugar a la formación de los anillos anuales de crecimiento. Si se observa a simple vista la sección transversal del tronco, se puede apreciar que ese desarrollo se produce con dos tipos diferentes de tejidos, que responden a la madera generada en primavera, o leño temprano, y a la formada en el otoño, o leño tardío, respectivamente. Ambos, sumados, constituyen un anillo anual. La diferencia entre ambos tejidos es más nítida en algunas especies que en otras, pero, en general los formados en primavera poseen células de paredes más delgadas y mayor lumen, para facilitar el transporte de savia. Por el contrario, los de otoño tienen células con mayor espesor de paredes y menores huecos,

- confiriendo mayor resistencia al material que conforman.
- Radios leñosos, constituidos por células radiales. Los mismos sirven como trabazón de las fibras longitudinales.
 - Duramen y albura. La albura se sitúa en la parte exterior del tronco, es allí, en la madera más joven, donde circula la sabia bruta desde las raíces hacia el extremo superior. Con el paso del tiempo, las células son modificadas, incrustadas con extractivos orgánicos, pierden esta función biológica de transporte de sabia y se transforma en duramen (parte interna del tronco). Esta madera es generalmente más densa, menos permeable y más resistente a los ataques de insectos y hongos.
 - Madera juvenil, es aquella que se forma entre los 5 a 20 primeros anillos de crecimiento. Tiene menor resistencia y mayores cambios dimensionales. Esta apreciación es más importante en las especies de coníferas, en las cuales la madera juvenil presenta fibras más cortas, con espesores de paredes más delgados y una mediana inclinación de las microfibrillas en la capa media de la pared secundaria. Como consecuencia, la madera juvenil, que se encuentra en este tipo de árboles, comprendida fundamentalmente en el duramen, presenta menor resistencia y rigidez, y mayores tenores de contracción y expansión que la madera adulta.
 - Madera de reacción, se genera por esfuerzos prolongados en el tronco tales como vientos o pendientes.

2.2. Nudos y otras heterogeneidades del material

Como hemos visto, la estructura de la madera consiste en un aglomerado de tubos longitudinales reforzados por microfibrillas helicoidales que se encuentran adheridos transversalmente. Con esta estructura, la mayoría de las propiedades físicas y mecánicas dependen en gran medida de la orientación de estos tubos, que en principio están diseñados para resistir esfuerzos axiales (peso propio del árbol y flexión del viento). En términos generales, aquellos rasgos anatómicos que alteran el orden de la estructura inicial y de esta manera repercuten negativamente en las propiedades finales de la madera, se denominan defectos.

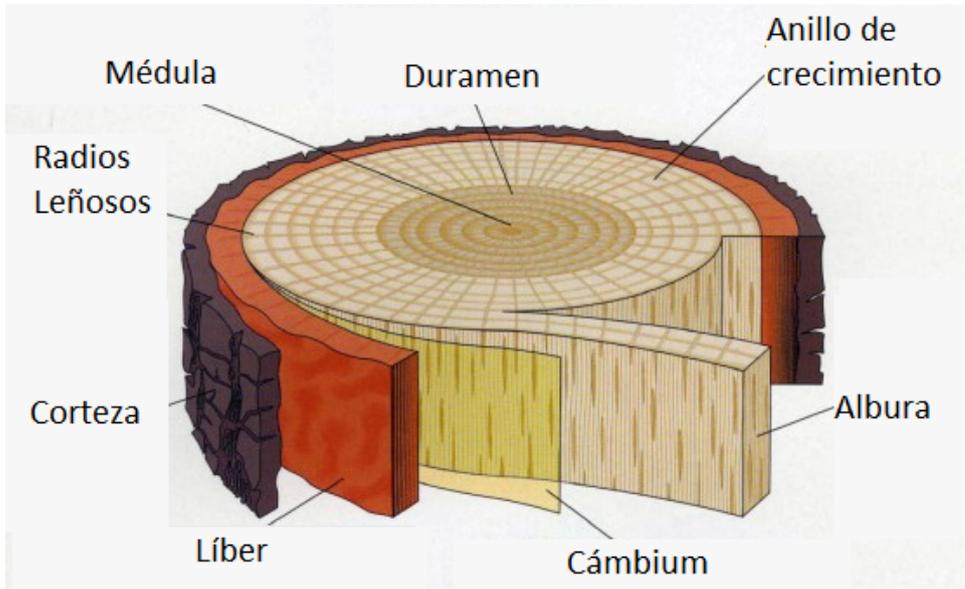


Figura 2.1: Nivel macroscópico, sección transversal del tronco.

Las anomalías de importancia para el uso estructural de la madera provienen tanto de las condiciones de crecimiento del árbol como del proceso de producción de la madera aserrada. Las más significativas debidas al crecimiento son la presencia de nudos y la desviación de las fibras. Los nudos se originan como consecuencia de la existencia de ramas que se desprenden del tronco principal y están conectadas hasta la médula. En la medida que los sucesivos anillos de crecimiento engrosan la parte exterior del árbol, la parte incluida de la rama, la cual también aumenta su diámetro, forma un cono que se desarrolla junto con el tronco. Cuando el corte de la pieza extraída del tronco principal intercepta a ese cono, se encuentra un nudo, el cual en este caso, se denomina nudo fijo. Si la rama se desprende, las sucesivas capas de madera nueva envuelven al cono que ella formaba, el cual no se desarrolla más en conjunto con el árbol ni afecta a los nuevos anillos externos de crecimiento, dando lugar a la formación de un nudo flojo o suelto, que incluso puede contener parte de la cáscara. Una adecuada poda puede provocar que en una sección transversal se encuentre un importante manto exterior de madera sana, ya que la eliminación de las ramas en forma temprana ocasiona que los nudos queden en la zona interior del tronco, cercana a la médula. El patrón de crecimiento de las ramas también varía entre cada especie, en el caso de las especies coníferas las mismas presentan ramas a intervalos regulares, se encuentran espacios sin nudos seguidos luego de grupos de los mismos. Este agrupamiento es más difícil de encontrar en especies frondosas. En

la Figura 2.2 se muestra la influencia conjunta tanto de los nudos propios del árbol como del aserrado de las piezas en los defectos resultantes de cada tabla. Las zonas negras representan los nudos propiamente dichos y las zonas grises las regiones adyacentes a los mismo afectadas por la desviación de las fibras.

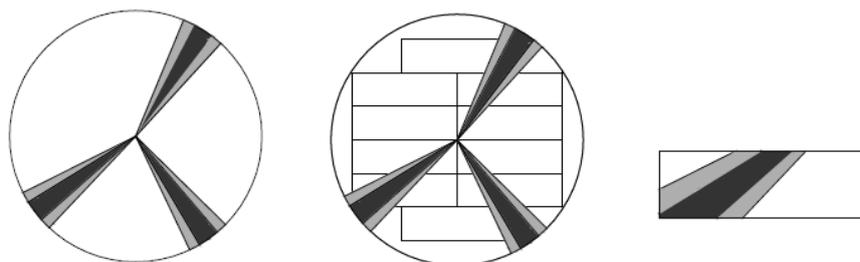


Figura 2.2: Distribución de nudos dentro de la sección transversal de un tronco (izquierda). Influencia del aserrado en la distribución de nudos resultantes en cada tabla (centro). Influencia de un nudo individual dentro de la sección de una tabla (derecha)(Fink, 2014).

Los nudos constituyen un defecto al cual se le atribuye una gran importancia en el uso estructural de la madera debido a la reducción que los mismos producen en las propiedades mecánicas. Teniendo en cuenta la descripción efectuada anteriormente de la microestructura de la pared celular y su comportamiento frente a los esfuerzos, resulta de consideración el paralelismo que las fibras de las piezas presentan con relación a su eje longitudinal. La presencia de nudos produce una desviación de las fibras y la consecuente reducción local de las propiedades mecánicas debido a la pérdida de paralelismo. La nudosidad, el espesor de los anillos anuales de crecimiento y la desviación de la dirección de las fibras son características ligadas al crecimiento del árbol que se encuentran limitadas en las normas de clasificación con fines estructurales. A la anisotropía y heterogeneidad presentes en este material, se debe sumar la variabilidad que sus propiedades experimentan entre distintas especies, también entre regiones de cultivo, entre árboles, dentro de un mismo árbol y de una sección transversal (Coronel, 1994). En la presente tesis se estudiará particularmente la influencia que ejerce la variabilidad longitudinal del Módulo de Elasticidad (MOE, en inglés) debido a la presencia de nudos en la respuesta estructural. En la Figura 2.3, se muestra de forma representativa la influencia de los defectos en la variabilidad de la resistencia a flexión.

Cabe mencionar que además de los nudos, considerados como los defectos más influ-

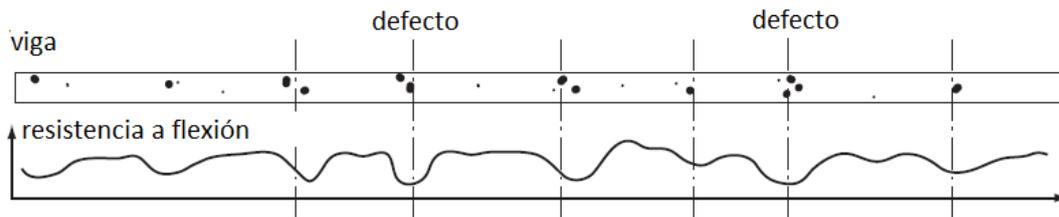


Figura 2.3: Variabilidad de la resistencia a flexión debida a la presencia de defectos en una pieza de madera (Köhler, 2007).

yentes en el comportamiento mecánico, existen una gran variedad de defectos que normalmente se distinguen como particularidades anatómicas del árbol (médula y madera juvenil), anomalías en la forma del tronco (curvatura, conicidad y bifurcaciones), irregularidades en el crecimiento de la capa cambial (anillos irregulares, excentricidad de corazón, acanaladura del tronco), defectos en la disposición de la fibra (fibra ondulada, entrelazada o revirada), alteraciones de origen patológico (de origen biótico ó abiótico) y otras alteraciones o defectos naturales (tensiones de crecimiento, bolsas de resina, acebolladuras). En el presente estudio se incluirán los defectos debidos a la presencia de nudos considerando la desviación de las fibras circundantes a los mismos y no se tendrán en cuenta los demás defectos.

2.3. *Eucalyptus grandis*

El *Eucalyptus grandis* de Argentina es una de las especies renovables más importantes cultivadas en el país (INTA, 1995). Al género *Eucalyptus* pertenecen más de setecientas especies frondosas originarias en su inmensa mayoría de Australia. En regiones tropicales el *Eucalyptus deglupta* y en regiones templadas el *Eucalyptus grandis* y el *Eucalyptus globulus*, entre otras especies, superan holgadamente a los pinos. La introducción de los eucaliptos en la Argentina data de la década de 1850, y se le atribuye a Domingo F. Sarmiento haber dispuesto la siembra de *Eucalyptus globulus* en la Provincia de Buenos Aires. Para la Mesopotamia, se reconocen dos vías de ingreso, una desde Brasil hacia Misiones y la otra desde Australia hacia Entre Ríos. Las primeras plantaciones realizadas en Misiones datan del año 1940, y se realizaron con las especies *Eucalyptus grandis*, *Eucalyptus saligna* y *Eucalyptus wrophylla*. En la Provincia de Entre Ríos, se registran las primeras plantaciones en la misma década, pero el crecimiento importante ocurrió con

posterioridad (INTA, 1995). El *Eucalyptus grandis* de Argentina se encuentra dentro de las especies de eucaliptos consideradas livianas, y presenta un aspecto claro.

2.3.1. Clasificación visual y mecánica

Para lograr un correcto uso de este material en estructuras es necesario conocer sus propiedades físicas y mecánicas más importantes. Los métodos de clasificación por resistencia encuentran su fundamento en la correlación existente entre esas propiedades y las características consideradas, de detección visual o mecánica, con capacidad de predecir la calidad y el comportamiento estructural del material. La resistencia, la rigidez y la densidad aparente constituyen las propiedades físicas y mecánicas más importantes del material ya que definen la calidad del mismo (Piter, 2003; Khöler, 2007).

La clasificación por resistencia conduce a dividir una población de madera en grupos de distinta calidad sobre la base del análisis individual de cada pieza estructural. Esta inspección, que puede ser visual o mecánica, tiene en cuenta el nivel de los parámetros considerados y, en función de los límites establecidos para los mismos, origina la asignación de cada elemento a una determinada clase resistente. La clasificación por resistencia se fundamenta en la influencia que los parámetros ejercen sobre las propiedades mecánicas del material (Piter, 2003). La consideración de una población de madera aserrada sin clasificar conduce a la obtención de valores característicos bajos, como consecuencia de la alta dispersión de sus propiedades. Por el contrario, la división de la población original en clases, que constituyen sub-poblaciones de características más homogéneas, permite sacar provecho de las piezas de mayor calidad y a su vez trabajar con mayor confiabilidad. Razones técnicas y económicas son las que justifican la clasificación por resistencia de este material (Glos, 1995).

La base para la clasificación visual del *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina se encuentra en Piter *et al.* (2004a). La norma IRAM 9662-2 (2006) adopta los resultados del este trabajo determinando los siguientes límites para las tres clases resistentes del *Eucalyptus grandis* de acuerdo a sus características visuales (Tabla 2.1). Esta norma incluye dos clases resistentes (C1 y C2), mientras que la tercera clase (C3) esta compuesta de piezas cuyos defectos exceden los límites establecidos para las clases C1 y C2. La presencia de médula y de nudos (tenidos en cuenta a través de la nudosidad K) están consideradas como los parámetros más importantes en la clasificación

Tabla 2.1: Clasificación visual *Eucalyptus grandis*. Clases resistentes de acuerdo la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006).

Clase resistente	Presencia de médula	Nudosidad	Desviación de las fibras (gd)
C1	No	$K \leq 1/3$	$gd < 1/12$
C2	No	$1/3 < K \leq 2/3$	$gd < 1/9$
C3	Si	$2/3 < K$	$1/9 < gd$

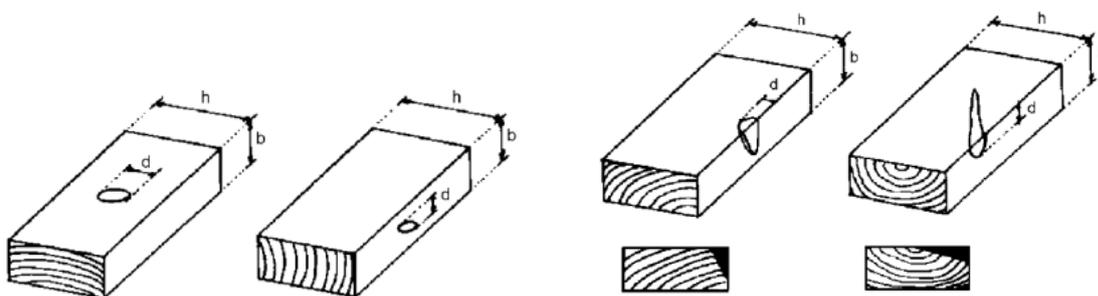
por resistencia de este material (Piter, 2003). De acuerdo a la norma IRAM 9662-2 (2006), las tres clases de defectos considerados en la clasificación visual por resistencia se evalúan a través de los siguientes lineamientos:

- Presencia de Médula:

La presencia de médula se registra tanto en el interior de la pieza como en sus superficies. Se expresa en forma cualitativa su existencia o su ausencia.

- Nudosidad (K):

Para los nudos individuales, la nudosidad se calcula como el cociente entre la medida del nudo mayor y el ancho de la superficie en la cual se manifiesta. La medida del nudo se expresa como la distancia entre las tangentes al mismo que sean paralelas al eje de la pieza, Figura 2.4(a).



(a) Nudosidad nudos individuales.

(b) Nudosidad nudos de arista.

Figura 2.4: Medición de nudosidad según la norma IRAM 9662-2 (2006).

Si un mismo nudo se manifiesta en distintas superficies de la pieza, la nudosidad se calcula en forma independiente en cada una de ellas. En los nudos de arista la nu-

dosidad se expresa como el menor valor de los correspondientes a las dos superficies donde se observa, Figura 2.4(b).

Los nudos que se manifiesten sobre una cara o sobre un canto en la misma sección transversal o en una longitud de la tabla igual a su ancho, se consideran como un agrupamiento de nudos. Si ellos no se solapan al proyectarlos sobre la sección transversal, la nudosidad se expresará como el cociente entre la suma de las medidas individuales de los nudos que conforman el agrupamiento y el ancho de la cara o del canto donde se manifiestan. En el caso de que existan solapamientos, las medidas solapadas se consideran una sola vez.

- **Inclinación de las fibras:**

La dirección de las fibras se mide con relación al eje longitudinal de la pieza. Su desviación se expresa como cociente entre la dimensión que se aparta del eje y la longitud de la pieza sobre la cual se efectúa la medida, Figura 2.5.

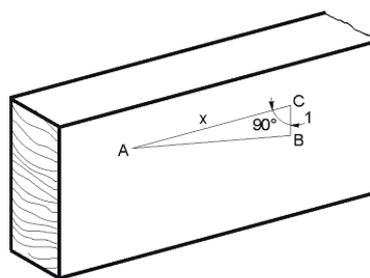


Figura 2.5: Desviación de las fibras según la norma IRAM 9662-2 (2006).

Se considera solamente la dirección general de las fibras. Desviaciones locales, como las que ocurren alrededor de los nudos, no se tienen en cuenta.

La clasificación mecánica de las piezas de este material se realiza mediante la determinación de un parámetro combinado que incluye la influencia de la nudosidad, del MOE y de la densidad (Piter *et al.*, 2004b). Este método de clasificación no es adoptado en la práctica habitual dado que es necesario ensayar previamente los elementos estructurales, lo cual no siempre resulta viable.

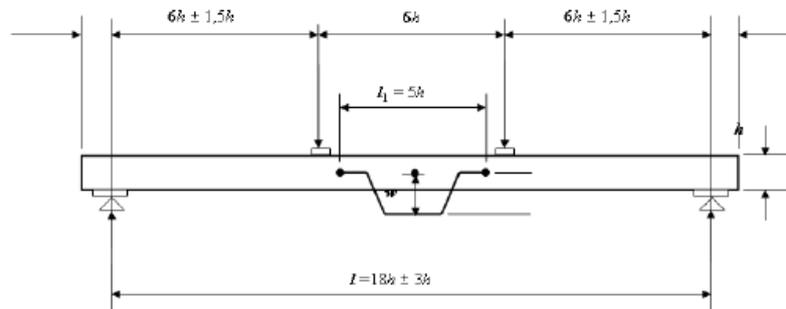
2.3.2. Propiedades mecánicas y físicas

Para caracterizar en forma completa una especie de determinada procedencia, es necesario realizar una serie de ensayos normalizados que proveen resultados para las propieda-

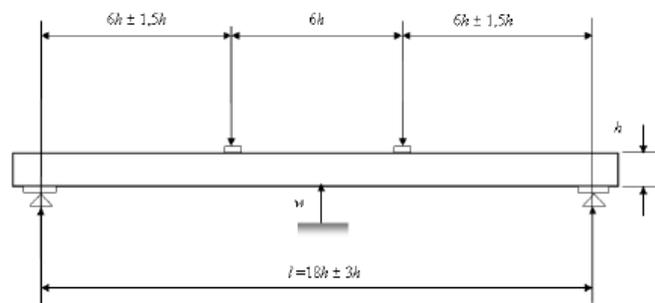
des utilizadas en el diseño estructural. De acuerdo con el criterio de las normas europeas, expresado en la norma EN 384 (1996), es posible calcular la totalidad de las propiedades resistentes y de rigidez a partir del conocimiento de tres valores característicos determinados en el ensayo de flexión estática: la resistencia a flexión, el módulo de elasticidad y la densidad aparente.

Las propiedades físicas más destacadas para el uso estructural de la madera son el contenido de humedad y la densidad aparente. La primera tiene una incidencia directa sobre los fenómenos de contracción y expansión pudiendo ocasionar deformaciones y fisuras. A su vez, para determinados niveles en su contenido, posibilita el desarrollo de agentes biológicos perjudiciales. Su influencia sobre la resistencia y la rigidez es considerada un aspecto fundamental para el uso estructural de este material. La determinación de las propiedades mecánicas se efectúa en general a través de ensayos estáticos. Las piezas de prueba de tamaño estructural se preparan con una longitud relacionada a sus dimensiones transversales; esta disposición controla la incidencia del esfuerzo de corte (ASTM D 198, 2002). En el caso de la prueba de flexión, con aplicación simétrica de las cargas en los tercios de la distancia entre apoyos, se dispone del tramo medio, libre de la influencia del esfuerzo de corte (flexión pura), para determinar el módulo de elasticidad puro, o local. Si se utiliza todo el vano se puede obtener el módulo de elasticidad global, afectado por la acción del esfuerzo de corte en los tramos laterales. Los resultados se obtienen admitiendo un comportamiento mecánico congruente con las hipótesis clásicas de la resistencia de materiales, aceptando que las secciones se mantienen planas durante las deformaciones y que éstas son proporcionales a las tensiones en período elástico.

Resultados de ensayos experimentales en elementos de tamaño estructural de la especie se presentan en el trabajo de Piter (2003). Los mismos son utilizados en la presente tesis en el modelado estocástico de las propiedades materiales. Estos valores fueron obtenidos a través del ensayo a flexión de dos cargas puntuales ubicadas a un tercio de la longitud entre apoyos, Figura 2.6, realizado en 349 piezas aserradas de la especie *Eucalyptus grandis* de Argentina. Los ensayos a flexión fueron realizados de acuerdo a los lineamientos establecidos en la norma EN 408 (1996). La densidad aparente ρ y el contenido de humedad de cada pieza ensayada fueron determinados inmediatamente después de finalizado el correspondiente ensayo estático utilizando un trozo libre de defectos y cortado de un lugar cercano a la zona de rotura. La zona de la viga con el mayor defecto visible fue colocada en la región de momento flector constante entre las dos cargas concentradas y



(a) Determinación MOE local.



(b) Determinación MOE global.

Figura 2.6: Ensayo a flexión con dos cargas puntuales en los tercios de la longitud de la viga, EN 408 (1996).

en la porción de la sección transversal de la pieza sometida a esfuerzos de tracción. Las piezas aserradas de cada muestra tienen las siguientes dimensiones (en mm): muestra 1 (S1) 50 vigas de $50 \times 50 \times 1000$, muestra 2 (S2) 50 vigas de $50 \times 75 \times 1500$, muestra 3 (S3) 50 vigas de $50 \times 100 \times 2000$, muestra 4 (S4) 50 vigas de $50 \times 150 \times 3000$ y la muestra 5 (S5) 149 tablas de $100 \times 25 \times 500$. Las muestras 1 a 4 fueron ensayadas de canto y la muestra 5 de plano. Elementos estructurales de madera de esta especie sujetos a flexión usualmente presentan una altura nominal de la sección transversal que varía entre 25 y 150 mm. La menor medida (25 mm) es representativa de tablas cargadas en su plano, las cuales se utilizan por ejemplo en entrepisos. Piezas estructurales con una altura mayor de 150 mm no son usuales debido al relativamente pequeño diámetro de los troncos los cuales son normalmente obtenidos de plantaciones de rotación corta. Las muestras ensayadas por Piter están compuestas por las cantidades y porcentajes de clases resistentes (C1, C2, C3) establecidas de acuerdo al método de clasificación visual adoptado por la norma IRAM 9662-2 (2006) y a la clasificación mecánica llevada a cabo por Piter *et al.* (2004b)

presentadas en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2: Resumen clasificación visual y mecánica de las piezas pertenecientes a las muestras ensayadas en Piter (2003).

Muestra	Cantidad	Clasificación Visual			Clasificación Mecánica		
		C1 (%)	C2 (%)	C3 (%)	C1 (%)	C2 (%)	C3 (%)
S1	50	8 (16)	20 (40)	22 (44)	16 (32)	16 (32)	18 (36)
S2	50	19 (38)	13 (26)	18 (36)	29 (58)	10 (20)	11 (22)
S3	50	9 (18)	6 (12)	35 (70)	14 (28)	9 (18)	27 (54)
S4	50	12 (24)	3 (6)	35 (70)	18 (36)	4 (8)	28 (56)
S5	149	71 (48)	29 (19)	49 (33)	82 (55)	47 (31)	20 (14)

Los valores obtenidos del Módulo de Elasticidad (MOE, en inglés) fueron calculados teniendo en cuenta la deformación por corte (MOE global E_{global}) en todas las muestras. Además, en la muestra 4 (S4), el MOE local (E_{local}) libre de los efectos producidos por la deformación debida a esfuerzo de corte fue obtenido por Piter. El E_{local} se calcula teniendo en cuenta la deformación producida en la zona del ensayo en la cual las vigas están sometidas a momento flector puro sin esfuerzos de corte. Las expresiones empleadas por Piter para obtener el MOE global y local son:

$$E_{global} = \frac{L^3 (F_2 - F_1)}{4,7bh^3(w_{G2} - w_{G1})} \quad \text{y} \quad E_{local} = \frac{a_1 l_1^2 (F_2 - F_1)}{16I(w_{L2} - w_{L1})}, \quad (2.1)$$

en donde $(F_2 - F_1)$ es el incremento de carga, $(w_{G2} - w_{G1})$ es el incremento de la deformación (deflexión) global correspondiente al incremento de carga, $(w_{L2} - w_{L1})$ es el incremento de la deflexión local medido en la región de momento constante y correspondiente al mismo incremento de carga, b es el ancho de la sección transversal, h es la altura de la sección transversal, a_1 es la distancia entre las cargas y el apoyo más cercano, l_1 es la longitud central de cinco veces la altura de la sección transversal y I es el segundo momento de área de la sección transversal. El incremento de carga se encuentra dentro del rango de comportamiento elástico lineal del material. De acuerdo a la norma Americana ASTM D 198 (2002), el ensayo de flexión con dos cargas puntuales ubicadas en un tercio de la distancia entre apoyos es representativo de la configuración de carga distribuida la cual es frecuente en el diseño estructural. Cuando las cargas se aplican en los tercios de la longitud entre apoyos, la distribución y magnitud del momento flector a lo largo de la viga simula a aquella generada por una carga distribuida.

El *Eucalyptus grandis* proveniente de las provincias de la región Mesopotámica de Argentina presenta una relación MOE/densidad muy alta que a la vez es más similar a aquella adoptada por las normas Europeas para especies coníferas y álamos en lugar de las especies frondosas de la cual proviene. Esta conclusión fue presentada por Piter (2003) como resultado de la caracterización mecánica del material. En dicho trabajo, se establece que esta particularidad indica un comportamiento similar al de las especies de coníferas. Luego, debido a esto, es posible asignar las piezas de mayor calidad de *Eucalyptus grandis* de Argentina a la clase resistente C30, las piezas de calidad intermedia a la clase C24 y las piezas de baja calidad a la clase C18 del sistema internacional de clasificación por resistencia establecido por la norma europea EN 338 (2009).

Los valores del MOE y densidad aparente fueron luego corregidos a un contenido de humedad de 12 % de acuerdo a la norma europea EN 384 (1996). Este contenido de humedad es un valor de referencia establecido en la normativa y corresponde a una temperatura de 20 °C y una humedad relativa del 65 %. Estos valores corregidos son los utilizados por el Reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601 (2013) para determinar valores medios y característicos de ambas propiedades del material. Además, son los valores utilizados durante el desarrollo de esta tesis. En la Tabla 2.3 se muestran los resultados de los ensayos a flexión ajustados a un contenido de humedad de 12 % y una altura de referencia de la sección transversal de 150 mm conforme a EN 384 (1996).

2.3.3. Vigas Laminadas

Este tipo de vigas es muy empleada debido a la posibilidad de obtener elementos estructurales más resistentes y de mayor longitud al unir piezas aserradas de alta calidad. Las mismas están compuestas de varias láminas formadas por la unión de tablas. Las caras superiores e inferiores de las tablas son pegadas a la vez con las tablas superiores e inferiores. Previamente, las mismas son ensambladas mediante uniones tipo “finger” (finger-joints) para formar cada lámina.

En Piter *et al.* (2007), se presenta un estudio relacionado con la determinación de valores característicos de rigidez y resistencia en vigas laminadas de *Eucalyptus grandis* de Argentina siguiendo los lineamientos de las normas Europeas. Los resultados de este trabajo confirman los elevados valores que se obtienen de la relación MOE/densidad para maderas laminadas de esta especie al igual que en el caso de piezas aserradas. Esto su-

Tabla 2.3: Resumen de los resultados de propiedades mecánicas y densidad correspondientes a las muestras ensayadas a flexión, Piter *et al.* (2004a). Resistencia a flexión (f), MOE global (E_g) y densidad (ρ) ajustados a un contenido de humedad de 12 %.

Propiedades mecánicas	Valores estadísticos	S1 50 mm	S2 75 mm	S3 100 mm	S4 150 mm	S5 25 mm
f (N/mm ²)	Mínimo	13.7	19.2	19.7	11.3	18.7
	Valor medio	33.0	45.5	39.8	39.8	41.8
	Máximo	62.0	97.7	59.1	65.9	72.9
	Desvío estándar	9.5	14.3	9.2	13.0	10.5
E_g (N/mm ²)	Mínimo	7066	7567	9232	9039	6427
	Valor medio	11418	13304	12511	12655	12863
	Máximo	15614	22502	16919	16990	20419
	Desvío estándar	2025	2768	1871	1547	2584
ρ (kg/m ³)	Mínimo	415	443	428	428	415
	Valor medio	526	560	519	505	556
	Máximo	692	1065	688	578	726
	Desvío estándar	73	107	64	35	72

pone, al igual que en el caso anterior, una importante ventaja estructural sobre todo en elementos sometidos a cargas estáticas. Un importante porcentaje de las fallas producidas cuando estas vigas fueron sometidas al ensayo de dos cargas concentradas se produjeron en las uniones finger (finger-joints) las cuales constituyen los puntos débiles en cuanto al desempeño estructural de estas piezas. El estudio también revela que la resistencia a flexión puede incrementarse mediante el empleo de técnicas mecánicas de clasificación de las tablas que componen cada lámina y mejorando la calidad de las uniones finger. En Saviana *et al.* (2009) se realiza un estudio similar al anterior y en el mismo, se remarca la relativamente baja variación obtenida tanto en la resistencia a flexión (Coeficiente de Variación, COV = 9 %) como en el módulo de elasticidad (COV = 10 %).

2.3.4. Consideraciones reglamentarias

Dentro de las especies de madera que se consideran en el Reglamento Argentino de Estructuras de Madera (CIRSOC 601, 2013), se encuentra el Eucalipto grandis (*Eucalyptus grandis*) cultivado en las provincias de Corrientes, Entre Ríos y Misiones. En este grupo también se encuentran el Pino Paraná (*Araucaria Angustifolia*) cultivado en la provincia de Misiones y el Pino taeda y elliotti (*Pinus taeda y elliottii*) cultivado en el noreste argentino. Los valores de diseño de referencia de las propiedades correspondientes a la madera aserrada y sus productos derivados, así como para las uniones mecánicas, se indican en los Suplementos de este Reglamento. Los mismos se presentan en forma separada para las distintas combinaciones especie/procedencia y para los distintos grados de calidad (clases resistentes) del material. El reglamento argentino toma como base la norma Norteamericana denominada National Design Specification for Wood Construction (NDS, 2005), adoptando de esta manera los lineamientos del diseño estructural por estados límites.

Los reglamentos mencionados en la presente investigación son los siguientes:

- Reglamentos de origen Europeo:
 - Normas de ensayos:
 - EN 338: Structural timber. Strength classes.
 - EN 384: Structural timber. Determination of characteristic values of mechanical properties and density.
 - EN 408: Timber structures. Structural timber and glued laminated timber. Determination of some physical and mechanical properties.
 - Norma de diseño:
 - EUROCODE 5: Design of timber structures.
- Reglamentos de origen Norteamericano:
 - Normas de ensayos:
 - ASTM D 198: Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes.
 - ASTM D 2915: Standard practice for evaluating allowable properties for grades of structural lumber.

- Norma de diseño:
 - NDS: National Design Specification for Wood Construction.
- Reglamentos Argentinos:
 - Normas de ensayos:
 - IRAM 9662-2: Madera laminada encolada estructural. Clasificación visual de las tablas por resistencia. Parte 2 - Tablas de eucalipto grandis (*Eucalyptus grandis*).
 - Norma de diseño:
 - CIRSOC 601: Reglamento Argentino de Estructuras de Madera.

Capítulo 3

Enfoque estocástico

En este capítulo, se presentan las herramientas probabilísticas utilizadas en la construcción de modelos estocásticos aplicables a la madera estructural. También serán presentados métodos para la simulación de variables aleatorias y campos aleatorios. Se describen varias herramientas como el Método de Monte Carlo (MCM), pruebas de ajuste, Principio de Máxima Entropía (PME), métodos de estimación de parámetros, de simulación de variables y campos aleatorios, y conceptos de confiabilidad. Su fundamentación, aplicación y convergencia son discutidos. Finalmente, se realiza una revisión de literatura y clasificación de los modelos estocásticos aplicables a elementos estructurales de madera.

3.1. Construcción de modelos estocásticos

En el análisis estocástico de un sistema, se pueden utilizar dos tipos de abordajes: el primero considera que la fuente de incertidumbre está presente en los parámetros del modelo. Este abordaje se denomina modelado estocástico paramétrico. Mientras que el segundo enfoque, considera que la fuente de incertidumbre está presente en el modelo utilizado para el sistema. Este enfoque se denomina modelado estocástico no paramétrico. Esta tesis desarrolla el primer enfoque dado que las fuentes de incertidumbres están presentes en las propiedades mecánicas y físicas del material.

La simulación estocástica de un sistema sigue una determinada organización, la cual se presenta a continuación:

1. Construcción de un modelo determinístico del sistema.
2. Construcción de un modelo estocástico del sistema: dentro del abordaje paramétrico, se seleccionan los parámetros escalares o vectoriales del sistema que se considerarán aleatorios y se determinan sus respectivas distribuciones de probabilidad; en el enfoque no paramétrico se determinan las distribuciones de probabilidad de las matrices asociadas al modelo del sistema.
3. Aplicación del Método de Monte Carlo (MCM) para realizar inferencias estadísticas sobre las respuestas del sistema.
4. Realización de un análisis de convergencia de la respuesta, de manera tal de asegurar que los resultados son representativos. Esto se logra determinando la cantidad de realizaciones a partir de la cual las estadísticas de la respuesta permanecen dentro de un margen de error prescrito.

En el Método de Monte Carlo, se generan muestras de los parámetros considerados como aleatorios (modelo estocástico) y para cada muestra generada se calcula una respuesta determinística del sistema (modelo determinístico). Este conjunto de resultados determinísticos forma parte del resultado final a través del cual se realiza la inferencia estadística y pueden obtenerse aproximaciones de la distribución de probabilidad de la respuesta. Estos pasos se pueden dividir en una etapa de simulación y otra etapa de análisis y estudio de las observaciones obtenidas del proceso de simulación, como se observa en la Figura 3.1. El Método de Monte Carlo se fundamenta en los siguientes teoremas:

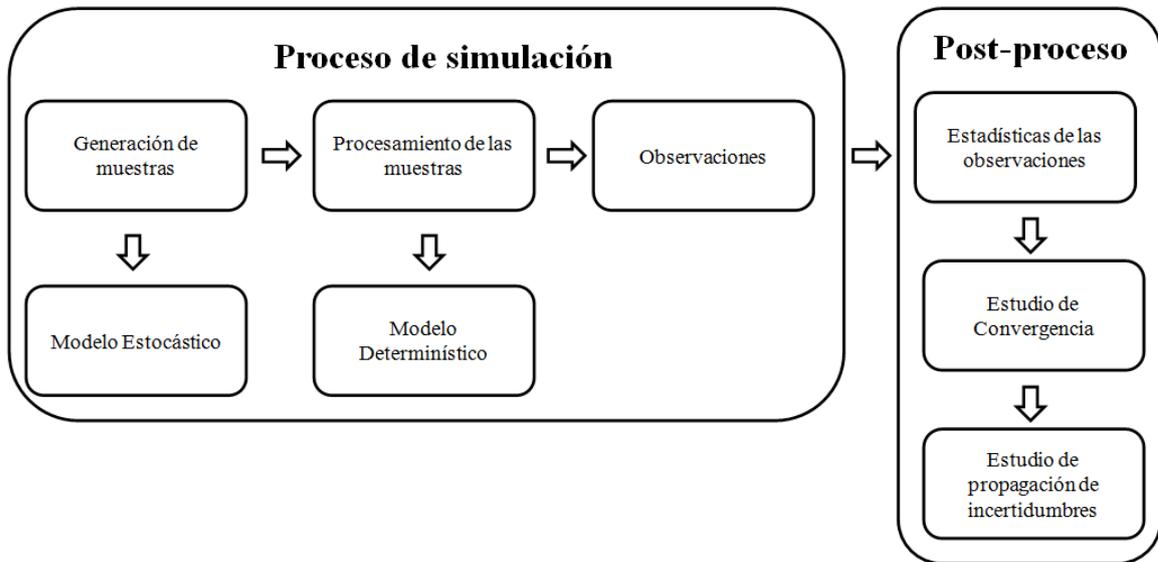


Figura 3.1: Estudio de propagación de incertidumbres a través del Método de Monte Carlo.

- Ley de los grandes números: garantiza la convergencia de las aproximaciones obtenidas.
- Teorema central del límite: especifica la forma de convergencia a través del estudio de la sucesión de variables aleatorias generadas por el MCM.

Las distribuciones de probabilidad de los parámetros considerados aleatorios pueden ser determinados a través de los siguientes métodos:

- Partiendo de la construcción de histogramas utilizando resultados experimentales. Para ello se emplean las pruebas de bondad de ajuste.
- Utilizando el Principio de Máxima Entropía (PME).

En la presente tesis se utilizan y comparan los resultados obtenidos con ambas herramientas.

3.1.1. Pruebas de Bondad de Ajuste

La bondad de ajuste de un modelo estadístico describe lo bien que se ajusta un conjunto de observaciones a una determinada distribución previamente seleccionada. Las

medidas de bondad en general resumen la discrepancia entre los valores observados y los valores esperados en el modelo de estudio.

En la presente tesis se utilizan dos pruebas de bondad de ajuste no paramétricas las cuales son las más utilizadas: prueba de Kolmogórov-Smirnov (K-S) y prueba de Anderson-Darling (A-D). Estas pruebas se denominan no paramétricas debido a que en inicio se desconoce la distribución a la cual pertenecen los datos. De acuerdo a Ang y Tang (2007), estas pruebas de ajuste deberían ser usadas solamente para ayudar a verificar la validez de la adopción de una determinada distribución teórica que ha sido elegida en base a consideraciones previas. En el Apéndice A, se describen las 2 pruebas de bondad de ajuste utilizadas en la presente tesis.

3.1.2. Principio de Máxima Entropía (PME)

El Principio de Máxima Entropía (PME) constituye un método de construcción de modelos probabilísticos para variables aleatorias escalares y vectoriales sean éstas continuas o discretas. Para ello utiliza la información disponible sobre dichas variables aleatorias.

El concepto estadístico de entropía fue introducido por Shannon (1948) en el campo de la teoría de la información y su maximización por Jaynes (1957). La entropía es una medida de la incertidumbre en un experimento aleatorio. La misma cuantifica la incertidumbre a partir de la cantidad de información necesaria para especificar el resultado de un experimento aleatorio (Leon-García, 2008). El Principio de Máxima Entropía (PME) establece que, sujeta a las restricciones conocidas, la distribución de probabilidad que mejor representa el estado del conocimiento es aquella que maximiza la entropía. De esta forma, el PME consiste en maximizar la entropía (incertidumbre) sujeta a restricciones definidas por la información disponible. La maximización de la entropía conduce a un problema de optimización el cual puede resolverse a través de los multiplicadores de Lagrange.

Para el caso de variables aleatorias discretas la medida de la incertidumbre de una variable aleatoria X se define a través de la siguiente expresión:

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i), \quad (3.1)$$

en donde S es la entropía de la variable aleatoria y p_i es la probabilidad asociada a la variable aleatoria discreta X la cual puede asumir n valores diferentes. La entropía de

una variable aleatoria puede definirse como el valor esperado de la incertidumbre en los valores que la misma adopta. En el caso de variables aleatorias continuas, la medida de la incertidumbre de una variable aleatoria X se define a través de la siguiente expresión:

$$S(f_X) = - \int_D f_X(x) \ln(f_X(x)) dx, \quad (3.2)$$

en la cual f_X es la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria X y D es su dominio.

La aplicación del PME bajo diversas restricciones y las distribuciones resultantes pueden encontrarse en Sampaio y De Queiroz Lima (2012) y Kapur (1993). En el Apéndice A se incluye con mayor detalle la aplicación del PME para los casos de variables aleatorias discretas y continuas.

3.1.3. Determinación de parámetros de distribuciones

La estadística provee herramientas que permiten obtener conclusiones a partir de un conjunto limitado, pero a la vez representativo, de datos. El objetivo de la estimación puntual es utilizar la información de la muestra para obtener los parámetros que mejor representan los verdaderos valores reales de los parámetros de interés. De este modo, un estimador puntual de un parámetro θ es un valor que se puede considerar representativo del mismo y se indica generalmente con $\hat{\theta}$. El mismo se obtiene en función de la información obtenida de la muestra. Dentro de los métodos de estimación puntual los más utilizados son: el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud.

3.1.3.1. Método de los momentos

Se trata del método de obtención de parámetros más intuitivo. Básicamente consiste en igualar los momentos poblacionales con los muestrales y despejar el valor del parámetro a estimar. De esta manera la esperanza de una variable aleatoria se estima a través de la media muestral, la varianza de una variable aleatoria mediante la varianza muestral, etc. Sea X una variable aleatoria continua o discreta con una función de probabilidad que depende de m parámetros, los estimadores de momentos de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ son los valores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$ que se obtienen igualando m momentos poblacionales con los correspondientes muestrales. En general se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n} = E[X^k] \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

La principal ventaja de este método es su simplicidad. Sin embargo, aunque los estimadores así obtenidos son consistentes, en general no son centrados (son sesgados) ni eficientes. En algunos casos, cuando se estiman parámetros de una familia conocida de distribuciones de probabilidad, este método es sustituido el método de máxima verosimilitud porque con este último, los estimadores tienen probabilidad más alta de ser cercanos a las cantidades a estimar y son menos sesgados. Las estimaciones por el método de los momentos pueden ser utilizadas como la primera aproximación a las soluciones de las ecuaciones de verosimilitud, y podemos encontrar sucesivas mejoras en las aproximaciones por el método de Newton-Raphson, por ejemplo. De este modo, el método de momentos puede utilizarse de forma complementaria al de máxima verosimilitud.

3.1.3.2. Principio de Máxima Verosimilitud

La idea de este método es el de encontrar primero la función de densidad conjunta de todas las observaciones, que bajo condiciones de independencia se describe como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \cdots f(x_n | \theta). \quad (3.4)$$

Se puede suponer que los valores observados x_1, x_2, \dots, x_n son fijos mientras que θ puede variar libremente. De este modo obtenemos la función de verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta). \quad (3.5)$$

El estimador de máxima verosimilitud se puede definir como el valor del parámetro que mejor representa los valores observados, esto es, el valor que asume el parámetro el cual maximiza la función de verosimilitud sobre el dominio de θ . La función de verosimilitud es una función de probabilidad definida no negativa y por lo tanto alcanzará su máximo en los mismos puntos que su logaritmo. Por esta razón, suele maximizarse el logaritmo de la Ecuación (3.5):

$$\widehat{l}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln \mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \theta). \quad (3.6)$$

Luego, los m parámetros adoptan los valores que se obtienen resolviendo el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(x_i | \theta) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Sin embargo, encontrar la solución del sistema en una forma cerrada no siempre es posible.

3.1.4. Integración aplicando el MCM y su aplicación al análisis de confiabilidad

Uno de los usos clásicos del Método de Monte Carlo consiste en su utilización en el cálculo de integrales multidimensionales en regiones con contornos complicados. Esta aplicación del método es utilizada extensivamente para realizar estudios de confiabilidad en términos de la probabilidad de falla (Melchers, 1999).

El análisis de confiabilidad tiene como objetivo evaluar la Probabilidad de Falla (PF) de un sistema, esto es la probabilidad de que el mismo no pueda satisfacer un criterio de desempeño. La relación funcional entre el criterio establecido y las variables aleatorias se puede expresar como una función de la siguiente manera:

$$Z = g(\mathbf{X}), \quad (3.8)$$

en donde $g(\mathbf{X})$ se conoce como función de estado límite y \mathbf{X} es un vector de variables aleatorias. La superficie de falla o el estado límite se define cuando $Z = 0$, y la falla ocurre cuando $Z \leq 0$. La probabilidad de falla, de no satisfacer el criterio de desempeño, está dada por:

$$PF = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{g(\mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.9)$$

en la cual $f_{\mathbf{X}}$ es la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias \mathbf{X} . La evaluación de la integral presentada en la Ecuación (3.9) conduce a obtener la probabilidad de falla del sistema que se está analizando. En general, la integración de la misma no es fácil de obtener sobre todo cuando se involucran en el cálculo múltiples variables aleatorias. En estos casos, un método de integración numérica debe ser aplicado para obtener una aproximación de PF . Las ventajas que presenta el método de Monte Carlo sobre otros métodos de integración numérica son:

- Simplicidad de implementación.
- Garantía de convergencia de la respuesta (debido a la Ley de los grandes números y al Teorema central del límite).
- Eficiencia en el cálculo de aproximaciones de integrales multidimensionales.

Utilizando el Método de Monte Carlo, la probabilidad de falla se calcula a través de la suma de todas las realizaciones para las cuales la falla ocurre. Se define la siguiente función indicatriz $I_{g(\mathbf{X})}$:

$$I_{g(\mathbf{X})} = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\mathbf{X}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } g(\mathbf{X}) > 0 \end{cases}$$

Luego, la Ecuación (3.9) puede reescribirse como:

$$PF = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \int I_{g(\mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

en donde puede verse que la integral puede interpretarse como el valor esperado de la función indicatriz $I_{g(\mathbf{X})}$:

$$PF = E[I_{g(\mathbf{X})}] = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \int I_{g(\mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.11)$$

y su varianza se define como:

$$Var[I_{g(\mathbf{X})}] = E[I_{g(\mathbf{X})}^2] - \{E[I_{g(\mathbf{X})}]\}^2 = PF(1 - PF). \quad (3.12)$$

Un estimador de $PF = E[I_{g(\mathbf{X})}]$ es la media muestral la cual constituye una aproximación numérica de la Ecuación (3.11):

$$\widehat{PF} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I_{g(\mathbf{x}_i)}). \quad (3.13)$$

Para especificar la precisión del estimador \widehat{PF} a la hora de predecir PF , es necesario determinar un intervalo de confianza. Mediante el Teorema central del límite se sabe que la variable aleatoria \widehat{PF} tiene una distribución aproximadamente normal $N(PF, \sigma^2/N)$, en donde σ^2 es la varianza de $I_{g(\mathbf{X})}$. Esta última puede ser estimada a través de la varianza muestral como:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(I_{g(\mathbf{x}_i)} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I_{g(\mathbf{x}_i)}) \right)^2, \quad (3.14)$$

la cual, por la Ley de los grandes números, tiende a σ^2 en tanto $N \rightarrow \infty$. Consecuentemente, para un valor grande de N se puede ver que \widehat{PF} tiene una distribución normal $N(PF, S^2/N)$. Por lo tanto, el intervalo de confianza de PF se define de la siguiente manera:

$$P\left(\widehat{PF} - z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{N}} \leq PF \leq \widehat{PF} + z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{N}}\right) \approx 1 - \alpha, \quad (3.15)$$

en donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil $(1-\alpha/2)$ de la distribución normal estándar. El Error Relativo (RE) del estimador \widehat{PF} , se define de la siguiente manera:

$$RE = \frac{\sqrt{Var(\widehat{PF})}}{E[\widehat{PF}]} = \frac{\sigma}{PF\sqrt{N}} \approx \frac{S}{\widehat{PF}\sqrt{N}}. \quad (3.16)$$

3.1.5. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Como se mencionó anteriormente al aplicar el MCM, es necesario determinar la cantidad de realizaciones que nos permitirán obtener resultados representativos del problema en estudio. Este número de realizaciones nos garantiza que las estadísticas de la respuesta permanezcan dentro de un margen de error prescrito. En forma general, se pueden establecer cinco niveles de convergencia (Leon-García, 2008) los cuales están relacionados entre sí, a saber:

- Convergencia segura o convergencia puntual.
- Convergencia casi segura.
- Convergencia en media de orden p .
- Convergencia en probabilidad.
- Convergencia en distribución.

En la Figura 3.2 se muestran las relaciones entre los distintos tipos de convergencia y la jerarquía de cada una. Las definiciones de cada nivel de convergencia se incluyen en el Apéndice A. En esta tesis se utilizará la convergencia en media para determinar la cantidad necesaria de realizaciones. Este tipo de convergencia nos asegura alcanzar la convergencia en probabilidad y en distribución. Igualmente debido a que el MCM se encuentra sustentado en Ley de los grandes números y en el Teorema central del límite, podemos decir que las distribuciones obtenidas cumplen también con el criterio de convergencia casi segura dado que este criterio es un ejemplo de aplicación de la ley fuerte de los grandes números (Leon-García, 2008).

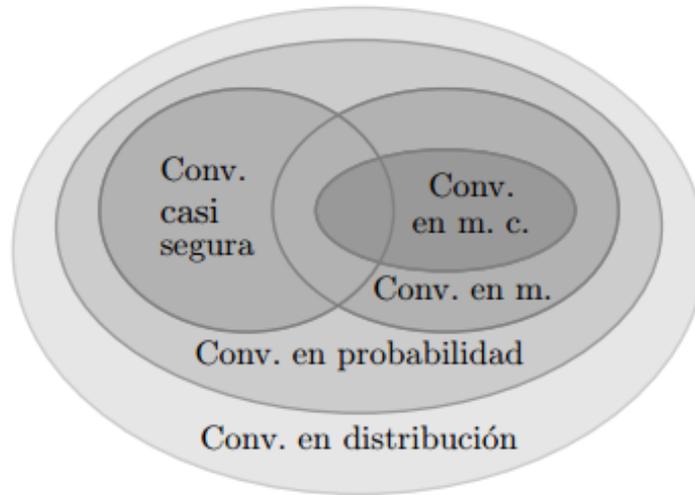


Figura 3.2: Relación entre los tipos de convergencia (Rincón, 2007)

3.2. Simulación de variables aleatorias y campos aleatorios

3.2.1. Simulación de variables aleatorias

La simulación de cualquier fenómeno aleatorio requiere la generación de variables aleatorias mediante una distribución prescrita. Una vez que la función de distribución acumulada que modela estas cantidades aleatorias ha sido elegida, debe emplearse un algoritmo para generar variables aleatorias. En la presente tesis, se utilizan dos métodos para simular variables aleatorias:

- Métodos basados en algoritmos computacionales.
- Método de la transformada inversa.

3.2.1.1. Métodos basados en algoritmos computacionales

En ese sentido, el programa MATLAB (2011) posee funciones que son frecuentemente empleadas para generar variables aleatorias partiendo de las distribuciones conocidas. Estos algoritmos generan resultados que luego de ser evaluados en pruebas estadísticas

de aleatoriedad y de independencia generan variables aleatorias independientes. Estos números se describen generalmente como *pseudo – aleatorios* y *pseudo – independientes* y pueden utilizarse como números aleatorios e independientes.

3.2.1.2. Transformada inversa

Si $F_X(x)$ es la Función de Distribución Acumulada (CDF, en inglés) de la variable aleatoria de la cual estamos interesados en obtener muestras y \bar{U} es una variable aleatoria con una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Definiendo la variable aleatoria $Z = F_X^{-1}(\bar{U})$, la CDF de Z se define como:

$$P[Z \leq x] = P[F_X^{-1}(\bar{U}) \leq x] = P[\bar{U} \leq F_X(x)], \quad (3.17)$$

al ser \bar{U} uniformemente distribuida en $[0, 1]$ y $0 \leq h \leq 1$, entonces $P[\bar{U} \leq h] = h$ (su posición en el intervalo). Entonces se tiene que:

$$P[Z \leq x] = F_X(x), \quad (3.18)$$

y la variable aleatoria $Z = F_X^{-1}(\bar{U})$ proviene de la CDF de la cual estamos interesados en obtener muestras.

Este método puede ser utilizado también para la simulación de variables aleatorias provenientes de una distribución multidimensional la cual queda definida por alguna de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_{X,Y,Z}(x, y, z) &= p_Z(z | x, y)p_Y(y | x)p_X(x) \\ &= P[Z = z | Y = y, X = x]P[Y = y | X = x]P[X = x] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} p_{X,Y,Z}(x, y, z) &= p_Z(z)p_Y(y)p_X(x) \\ &= P[Z = z]P[Y = y]P[X = x]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En la Ecuación (3.19), se admite correlación entre las variables aleatorias mientras que en la Ecuación (3.20), independencia. En ambos casos, la transformada inversa es aplicable dado que se definen distribuciones unidimensionales. Cabe destacar que este método es aplicable tanto a distribuciones de probabilidad discretas como continuas.

3.2.2. Simulación de campos aleatorios

Un campo aleatorio puede definirse como un conjunto de variables aleatorias que evolucionan en función de un parámetro. En esta tesis dicho parámetro es la posición dentro de la longitud de los elementos estructurales de madera. Este conjunto de variables aleatorias cumple con una Función de Distribución de Probabilidad (PDF, en inglés) multidimensional y con un determinado grado de correlación, aunque también pueden ser estadísticamente independientes. En esta sección se presentan las herramientas utilizadas para la simulación de campos aleatorios que serán empleadas más adelante en la tesis.

3.2.2.1. Transformación de Nataf

Desarrollada por Nataf (1962) e introducida en el campo de la ingeniería estructural por Der Kiureghian y Liu (1986), este método permite la construcción de un campo aleatorio o una PDF multidimensional que se ajusta a las distribuciones marginales fijadas $f_{X_i}(x_i)$ y a una matriz de correlación R :

$$f_X(x_1, \dots, x_M) = \prod_{i=1}^M \frac{f_{X_i}(x_i)}{\varphi(\xi_i)} \varphi_M(\xi; R_0), \quad (3.21)$$

en donde $\varphi_M(\xi; R_0)$ es una distribución de probabilidad conjunta (o mutidimensional) normal estándar. La matriz de correlación R_0 , se computa término a término resolviendo la siguiente ecuación que establece la compatibilidad entre los coeficientes de correlación ρ_{ij} :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right) \left(\frac{x_j - \mu_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \right) \varphi_2(\xi_i, \xi_j; \rho_{0ij}) d\xi_i d\xi_j, \quad (3.22)$$

en donde ρ_{ij} y ρ_{0ij} son los elementos a-dimensionales de la matriz de correlación.

Una de las ventajas de este método es que permite la utilización de distintas distribuciones marginales lo cual muestra su flexibilidad además de brindar la posibilidad de determinar la distribución de probabilidad conjunta a través de la Ecuación (3.21). Este es el único método de los presentados en esta tesis que permite estas posibilidades. En el Apéndice A se presenta en detalle la aplicación de la Transformación de Nataf para la simulación de campos aleatorios.

3.2.2.2. Expansión de Karhunen-Loève

La Expansión Gaussiana de Karhunen-Loève de un proceso estocástico que evoluciona en el espacio tiene la siguiente expresión:

$$w(x, \theta) = \bar{w}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \psi_i(x), \quad (3.23)$$

en la cual $\bar{w}(x)$ es el valor medio en función del espacio, λ_i y $\psi_i(x)$ son respectivamente los valores propios y funciones propias de la función de covarianza $C(x_1, x_2)$. Por definición, $C(x_1, x_2)$ es acotada, simétrica y positiva definida. Siguiendo el teorema de Mercer, la misma presenta la siguiente descomposición espectral:

$$C(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \psi_i(x_1) \psi_i(x_2), \quad (3.24)$$

y sus valores propios y funciones propias son la solución de la ecuación integral de Fredholm homogénea de segundo orden dados por:

$$\int_D C(x_1, x_2) \psi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \psi_i(x_1). \quad (3.25)$$

Las funciones propias forman un conjunto ortogonal completo que satisface la siguiente ecuación:

$$\int_D \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad (3.26)$$

en donde δ es la función delta de Kronecker. El parámetro ξ_i constituye un conjunto de variables aleatorias no correlacionadas las cuales pueden ser expresadas como:

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D [w(x, \theta) - \bar{w}(x)] \psi_i(x) dx, \quad (3.27)$$

con un valor medio y una función de covarianza dados por:

$$E[\xi_i(\theta)] = 0 \quad E[\xi_i(\theta) \xi_j(\theta)] = \delta_{ij}. \quad (3.28)$$

Este método descompone un proceso estocástico en una suma infinita de términos (funciones propias $f_i(x)$) y de una secuencia de variables aleatorias (ξ_i). De esta manera permite descorrelacionar el campo aleatorio y representarlo como una sumatoria de componentes independientes.

Si el proceso estocástico es Gaussiano, entonces $\xi_i(\theta)$ son variables aleatorias Gaussianas no correlacionadas con media cero. Las variables aleatorias Normales estándar no correlacionadas son también independientes, por lo tanto la necesidad de independencia no se plantea en la Expansión de Karhunen-Loève de un proceso aleatorio Gaussiano. En el caso de variables aleatorias no Gaussianas, la no correlación de las variables no implica independencia de las mismas. Para obtener las variables aleatorias que forman las bases de la Expansión de Karhunen-Loève de un proceso estocástico no Gaussiano $\xi_i(\theta)$, se debe partir de las distribuciones marginales. Siguiendo el trabajo de Mulani *et al.* (2007) se utiliza para tal propósito el método de la transformación no lineal de variables aleatorias. En Mulani (2006) se presentan varios ejemplos de la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève aplicados a distintas distribuciones marginales. En Ghanem y Spanos (1991) se presentan los valores propios y funciones propias para las funciones de covarianza exponencial y triangular de un campo aleatorio homogéneo y de una única dimensión. Además, se describe un método numérico de aproximación para hallarlos en caso de utilizar otro tipo de función la cual no presente una solución cerrada de la Ecuación (3.25). En Sudret y Der Kiureghian (2000), se reporta la expansión para el caso en el cual las distribuciones marginales son Lognormales. En Phoon *et al.* (2002), se presenta un método que combina la expansión clásica de Karhunen-Loève con un método iterativo que permite simular campos aleatorios estacionarios, no estacionarios, Gaussianos y no Gaussianos. Luego, en Phoon *et al.* (2005) sugieren una mejora del método presentado en el trabajo anterior que permite simular campos aleatorios cuya distribución marginal difiere mucho de una distribución normal (fuertemente no-Gaussiano). En esta tesis, se utiliza el método presentado en Mulani (2006) dado que las distribuciones marginales difieren de la distribución normal en una forma suave o ligera. Igualmente, el mismo se verificará utilizando el método iterativo presentado en Phoon *et al.* (2002). Ambas metodologías empleadas para la aplicación de la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève son presentadas en detalle en el Apéndice A.

3.2.2.3. Método de Representación Espectral, Spectral Representation Method (SRM)

Este método permite obtener una simulación de un proceso estocástico partiendo de su espectro de frecuencias. Esto último se logra como una superposición de funciones armónicas con ángulos de fase aleatorios. Estas funciones se encuentran ponderadas por

coeficientes que representan la importancia de la frecuencia asociada a cada función dentro del espectro. La versión del Método de Representación Espectral utilizada en esta tesis está basada en el trabajo de Shinozuka y Deodatis (1991) en el cual la realización del campo aleatorio esta acotada a un periodo T de simulación. Una versión mas general puede encontrarse en Shinozuka y Jan (1972), la cual no está limitada a un periodo de simulación.

De acuerdo al SRM, un proceso estocástico estacionario $w(t)$ con valor medio igual a cero $E[w(t)] = 0$, función de autocorrelación $R(\tau)$ y una función de densidad espectral $S(w)$ puede ser simulado a través de:

$$w(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{2S(w_n)\Delta w} \cos(w_n t + \Phi_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.29)$$

$$w_n = n\Delta w, \quad \Delta w = w_u/N \quad \text{y} \quad \Delta t \leq 2\pi/2w_u, \quad (3.30)$$

en donde w_u es la frecuencia de corte a partir de la cual la función de densidad espectral $S(w)$ se asume igual a cero y Φ_n son ángulos de fase aleatorios e independientes uniformemente distribuidos entre $[0, 2\pi]$. Bajo las condiciones descritas previamente, el proceso estocástico $f(t)$ resulta periódico con un periodo $T = 2\pi/\Delta w$ y asintóticamente Gaussiano en la medida en que $N \rightarrow \infty$. Al igual que la Expansión de Karhunen-Loève, estos métodos fueron desarrollados en primer lugar para simular procesos Gaussianos. En Yamazaki y Shinozuka (1988), se presenta un método para simular procesos estocásticos no gaussianos a través del SRM. En forma similar al método de Phoon *et al.* (2002), presentado anteriormente, se utiliza un proceso iterativo que actualiza constantemente la función de densidad espectral $S(w)$. En este último trabajo, se ha demostrado que el método presentado en Yamazaki y Shinozuka (1988) resulta en un tiempo computacional mayor dado que son necesarias más iteraciones que en el método utilizado en manera conjunta con la Expansión de Karhunen-Loève para generar procesos no Gaussianos reportado en Phoon *et al.* (2002).

3.3. Modelos estocásticos aplicados a la madera estructural

Debido a su origen natural, la madera estructural se caracteriza por presentar una considerable variabilidad longitudinal en sus propiedades mecánicas. Sin embargo, estas propiedades son usualmente consideradas como variables aleatorias y su variabilidad espacial no es considerada explícitamente en la práctica del diseño estructural. Defectos de crecimiento como la presencia de nudos, frecuentemente relacionados a desviaciones locales de las fibras, son la principal causa de la variabilidad longitudinal en la resistencia y rigidez a flexión de elementos aserrados. Es evidente que una representación estocástica de estas propiedades es necesaria cuando se persigue el objetivo de alcanzar un modelo estructural más realista. En forma general, se distinguen tres niveles de modelado estocástico del material (Köhler, 2007), los cuales se presentan en la Figura 3.3:

- Nivel global o macro:
En este nivel se encuentran los resultados obtenidos de sub-poblaciones que tienen en común pertenecer a una misma especie y grado de calidad. De esta manera se representa la variabilidad general de la población.
- Nivel local o meso:
Este nivel se encarga de modelar las variaciones dentro de una sub-población específica. La cual se puede definir por las condiciones de ensayo, como por ejemplo geometría de las piezas, contenido de humedad, etc.
- Nivel micro:
En este nivel, se representa la variabilidad dentro de cada pieza. Esta variabilidad tiene origen natural debido a la presencia de nudos, desviación de las fibras y otros tipos de defectos.

En cada uno de estos niveles, las herramientas estocásticas utilizadas para el modelado de las propiedades mecánicas de la madera derivan de métodos probabilísticos. Se utilizan tanto variables aleatorias (niveles macro y meso) como procesos estocásticos (nivel micro). Estas herramientas permiten simular las propiedades mecánicas del material con el objetivo de desarrollar análisis estructurales.

Dentro de los modelos de variables aleatorias, en Köhler (2007) se presentan las distribuciones aplicables a las propiedades mecánicas de referencia (MOE, densidad y resis-

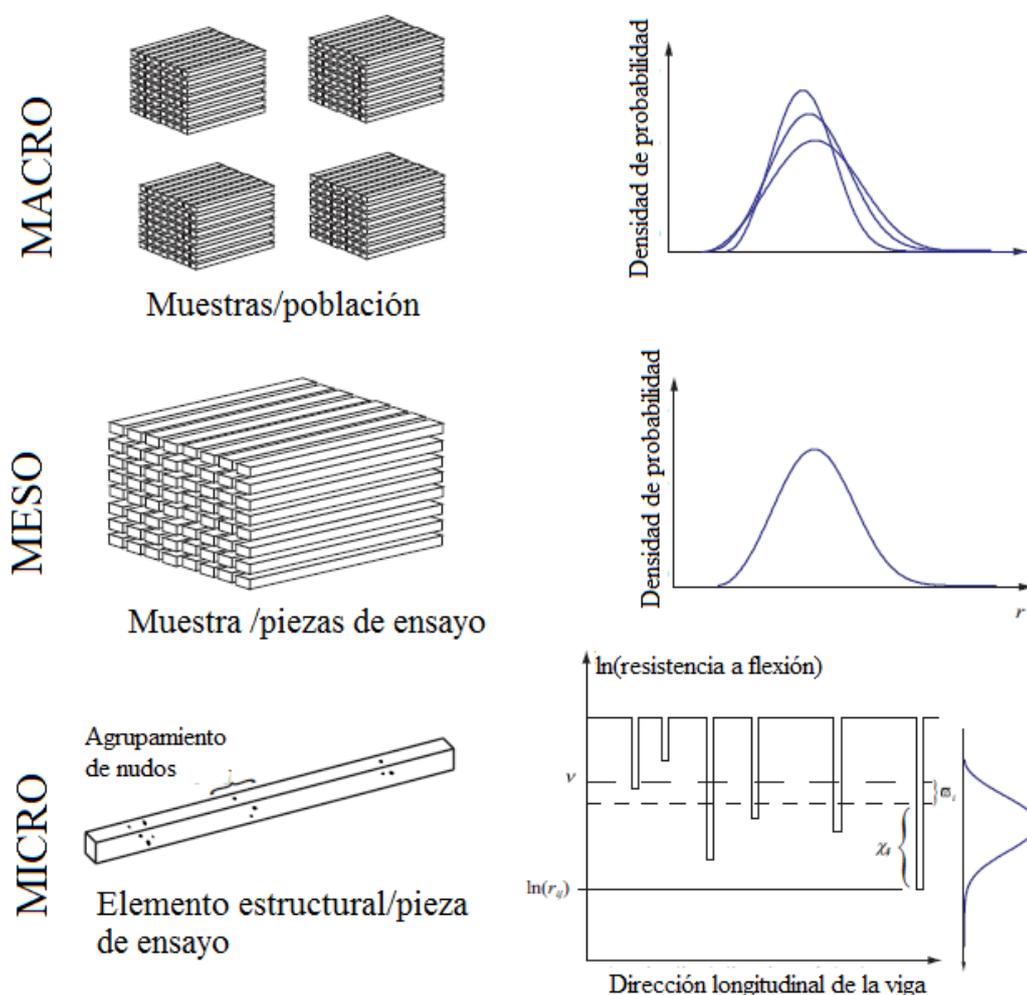


Figura 3.3: Niveles de modelado estocástico de la madera estructural (Köhler, 2007)

tencia a flexión). La resistencia a flexión y el MOE se representan con una distribución lognormal mientras que la densidad de masa con una distribución normal. Estas distribuciones son introducidas en el ámbito del diseño estructural Europeo a través del Probabilistic Model Code (2006).

Los modelos probabilísticos utilizados para representar la variabilidad longitudinal de las propiedades mecánicas pueden clasificarse en:

- Modelos Espaciales de Parámetros Discretos (DPSM, en inglés).
- Modelos Espaciales de Parámetros Continuos (CPSM, en inglés); este grupo puede a la vez dividirse en dos sub-grupos:

- Modelos de Zonas Débiles (WZM, en inglés).
- Modelos con Perfiles de Rigidez Continuos (CSPM, en inglés).

Esta clasificación es mencionada en Kandler et al. (2015a) y resulta en un agrupamiento bien definido y actualizado de los conjuntos de modelos desarrollados en la literatura. En la presente tesis se desarrollarán los tres modelos (DPSM, WZM y CPSM) aplicables a elementos estructurales de *Eucalyptus grandis*.

Capítulo 4

Enfoque Numérico

En este capítulo, se presentan las herramientas numéricas utilizadas en la construcción de modelos numéricos/estocásticos aplicables a la madera estructural. Las mismas serán utilizadas más adelante en la presente tesis para la discretización de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de piezas estructurales del material. En primer lugar, se realiza una descripción del modelado numérico del material partiendo de las escalas del modelado y de los modelos elásticos aplicables. Luego, se describen los elementos utilizados para la discretización numérica y la aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF). Finalmente, se presentan las herramientas que permiten combinar tanto el modelado numérico como el modelado estocástico de piezas estructurales del material. Estas herramientas constituyen lo que algunos autores denominan el Método de los Elementos Finitos Estocásticos (SMEF).

4.1. Modelo numérico de la madera

En esta sección, se presentan las consideraciones generales en cuanto al modelo numérico del material presentando en una primera instancia las posibilidades de representación para luego definir los modelos empleados en la presente tesis.

4.1.1. Escalas de modelado

Las escalas típicas de modelización numérica de la madera pueden clasificarse como siguen:

- Modelos de Dinámica de Partículas. Se corresponden con el estudio a nivel molecular, en donde se modelan principalmente la celulosa, la hemicelulosa y la lignina.
- Modelos Ultramicroscópicos. Simulan las características ultramicroscópicas (paredes celulares y microfibrillas).
- Modelos Microscópicos. Se corresponden con las características microscópicas (células).
- Modelos Mesoscópicos. Modelan las características macroscópicas (también denominadas mesoscópicas), esto es la madera libre de defectos y los anillos de crecimiento.
- Modelos Macroscópicos. Generalmente, se representan piezas individuales de madera estructural y partes del árbol.
- Modelos Estructurales. Se analizan estructuras de madera completas.

Las primeras cinco escalas están fuertemente relacionadas a la ciencia y tecnología de la madera, mientras que los modelos de escala *Estructural* constituyen una categoría de estudio de la Ingeniería Civil y la Arquitectura. En el presente trabajo de tesis, se utiliza la escala de modelado Macroscópica aplicada a piezas individuales de madera estructural.

4.1.2. Modelos elásticos

Las propiedades mecánicas de la madera dependen de la dirección considerada. Si se consideran las tres direcciones principales perpendiculares entre sí, se denomina material ortótropo. El comportamiento mecánico en cada una de estas direcciones se describe a continuación:

- Dirección longitudinal

También es conocida como dirección paralela a las fibras, comúnmente indicada con la letra \hat{L} . La dirección longitudinal se encuentra alineada con el eje del árbol y el eje de las fibras. La resistencia mecánica en esta dirección es mayor que en las dos direcciones restantes. Las piezas de madera se disponen normalmente de tal manera que esta dirección coincida con la dirección axial de los componentes estructurales. El plano perpendicular a esta dirección se denomina plano transversal (plano radial-tangencial $\hat{R}\hat{T}$). Cuando se somete a esfuerzos de tracción en este plano, la rotura producida es muy frágil. En cambio si se ejerce un esfuerzo de compresión, el fallo es dúctil presentando una plasticidad casi ideal. La rigidez tangencial en este plano ($G_{\hat{R}\hat{T}}$) es muy reducida, mientras que la resistencia al esfuerzo de corte es más elevada que en el resto de los planos y también presenta una rotura mucho más frágil. Finalmente, los coeficientes mayor y menor de Poisson ($\nu_{\hat{R}\hat{T}}$ y $\nu_{\hat{T}\hat{R}}$) son similares.

- Dirección radial

Coincidente con la dirección radial del tronco, comúnmente indicada con la letra \hat{R} . Debido a que la proporción de fibras en esta dirección es muy inferior a aquella en la dirección longitudinal, la rigidez ($E_{t,\hat{R}}$ y $E_{c,\hat{R}}$) y la resistencia ($f_{t,\hat{R}}$ y $f_{c,\hat{R}}$) son inferiores que en la dirección longitudinal. El plano perpendicular a esta dirección se denomina plano tangencial (plano longitudinal-tangencial $\hat{L}\hat{T}$). Cuando este plano es sometido a esfuerzos de tracción, se observa una rotura prematura por separación perpendicular de los tubos, la rotura es frágil pero en menor medida que en el plano transversal. Al aplicarse un esfuerzo de compresión, se observa que al superarse el límite elástico, se produce una fase plástica casi ideal debido al pandeo de las paredes celulares, posteriormente se observa un endurecimiento debido a la densificación producida por el contacto de mismas al desaparecer los lúmenes de las células. La rigidez al corte ($G_{\hat{L}\hat{T}}$) es mucho mayor que en el plano transversal, mientras que la resistencia al esfuerzo de corte es menor y menos frágil que en dicho plano. Debido a que la diferencia de rigidez entre los ejes \hat{L} y \hat{R} es elevada, la diferencia entre los coeficientes mayor y menor de Poisson ($\nu_{\hat{L}\hat{T}}$ y $\nu_{\hat{T}\hat{L}}$) también es elevada.

- Dirección tangencial

La dirección tangencial es aquella que resulta perpendicular a la dirección radial y por lo tanto a los radios leñosos, es comúnmente indicada con la letra \hat{T} . Las resistencias a tracción y compresión en esta dirección son similares a las de la dirección radial ($f_{t,\hat{T}}$ y $f_{c,\hat{T}}$), sin embargo resulta menos rígida que la anterior ($E_{t,\hat{T}}$

y $E_{c,\hat{T}}$). El plano perpendicular a esta dirección se denomina plano radial (plano longitudinal-radial $\hat{L}\hat{R}$), el cual tiene una rigidez cortante ($G_{\hat{L}\hat{R}}$) ligeramente mayor que el plano tangencial además de una resistencia y fragilidad al esfuerzo de corte similar al plano mencionado. De igual modo que el plano tangencial, este plano presenta una rotura moderadamente frágil al ser sometido a esfuerzos de tracción y una respuesta elastoplástica con un tramo de pandeo y otro de densificación. Al igual que en el caso anterior la diferencia entre los coeficientes mayor y menor de Poisson ($\nu_{\hat{L}\hat{R}}$ y $\nu_{\hat{R}\hat{L}}$) es elevada.

La estructura anatómica de la madera sugiere una idealización ortótropa con tres ejes perpendiculares entre sí: el eje \hat{L} o eje de las fibras, el eje \hat{R} o eje de los radios leñosos y el eje \hat{T} o perpendicular a los radios leñosos. A pesar de esto, la idealización ortótropa no es siempre conveniente y con frecuencia se utilizan distintos modelos materiales elásticos dependiendo del estudio a realizar. A continuación se describen los diferentes modelos elásticos aplicables a la madera:

- Modelo de ortotropía cilíndrica

Surge debido a la disposición de los ejes \hat{T} y \hat{R} que rotan alrededor del plano transversal del árbol en analogía a un sistema de coordenadas cilíndricas. Este es el modelo elástico más exacto y refinado para definir la madera en la macro-escala. Sin embargo, esta idealización del material se suele utilizar en aquellos problemas que requieren gran exactitud o que necesiten considerar las diferencias de propiedades entre las direcciones \hat{R} y \hat{T} , como es el caso de problemas relacionados con tensiones derivadas de la humedad. Por otro lado, esta idealización no siempre es aplicable debido a que con frecuencia no es conocida la posición exacta del eje del árbol y por lo tanto las direcciones \hat{R} y \hat{T} no pueden ser definidas correctamente.

- Modelo de ortotropía rectangular

En ocasiones las piezas de madera son aserradas de tal modo que los planos de la misma se correspondan con los planos materiales de la madera. Esto ocurre por ejemplo al obtener piezas en troncos de grandes dimensiones, o en tablas. En estos casos se puede modelar la madera sin gran error como un material con ortotropía rectangular.

- Modelo transversalmente isótropo

Consiste en considerar un eje o plano paralelo coincidente con la dirección \hat{L} y dos ejes o planos transversales con valores de propiedades intermedias entre las que se

presentan en las direcciones \hat{R} y \hat{T} . Es el modelo empleado más habitualmente ya que es relativamente exacto, siempre que las diferencias entre las propiedades en las direcciones \hat{R} y \hat{T} no sean importantes. Sumado a esto, es frecuente que la posición de la médula no sea conocida y que los ejes de la pieza no coincidan con los ejes materiales \hat{R} y \hat{T} , por lo tanto en esos casos resulta aplicable este modelo.

■ Modelo isótropo

Es el modelo elástico más sencillo el cual supone que las propiedades del material son idénticas en todas las direcciones. Se utiliza para modelar elementos lineales los cuales están sometidos a esfuerzos axiales.

En este trabajo partiremos de la suposición de ortotropía rectangular. Cada pieza de madera tiene una dirección longitudinal paralela a la dirección de las fibras principales del material coincidente con el eje x , denominada $\hat{L} = x$, una dirección tangencial respecto a los anillos de crecimiento de la sección transversal coincidente con el eje y , denominada $\hat{T} = y$ y finalmente, una dirección radial respecto a los anillos de crecimiento de la sección transversal coincidentes con el eje z , denominada $\hat{R} = z$. La figura 4.1 muestra la descripción previa acerca de las direcciones materiales y la Ecuación (4.1) las relaciones entre tensiones (σ , τ) y deformaciones (ε , γ) del modelo de ortotropía rectangular en tres dimensiones.

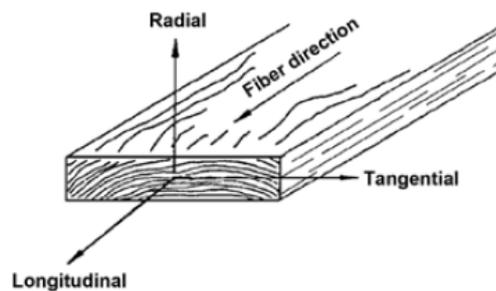


Figura 4.1: Ortotropía rectangular en una tabla de madera.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\hat{L}} \\ \varepsilon_{\hat{R}} \\ \varepsilon_{\hat{T}} \\ \gamma_{\hat{L}\hat{R}} \\ \gamma_{\hat{L}\hat{T}} \\ \gamma_{\hat{R}\hat{T}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\hat{L}}} & -\frac{\nu_{\hat{R}\hat{L}}}{E_{\hat{R}}} & -\frac{\nu_{\hat{T}\hat{L}}}{E_{\hat{T}}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\hat{L}\hat{R}}}{E_{\hat{L}}} & \frac{1}{E_{\hat{R}}} & -\frac{\nu_{\hat{T}\hat{R}}}{E_{\hat{T}}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\hat{L}\hat{T}}}{E_{\hat{L}}} & -\frac{\nu_{\hat{R}\hat{T}}}{E_{\hat{R}}} & \frac{1}{E_{\hat{T}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\hat{L}\hat{R}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\hat{L}\hat{T}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\hat{R}\hat{T}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{L}} \\ \sigma_{\hat{R}} \\ \sigma_{\hat{T}} \\ \tau_{\hat{L}\hat{R}} \\ \tau_{\hat{L}\hat{T}} \\ \tau_{\hat{R}\hat{T}} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Las diferencias que se encuentran entre las propiedades mecánicas del material en las direcciones radial y tangencial suelen ser omitidas debido a que son muy inferiores respecto a las diferencias que se observan en comparación a las dirección longitudinal. Se simplifica así la concepción ortótropa del material al poder asumirlo como un material transversalmente isótropo; esto es un material en el que tan solo existe un eje paralelo a las fibras que se corresponde con la dirección longitudinal y un plano perpendicular con propiedades isótropas formado por las direcciones radial y tangencial. Para el modelado de tablas sometidas a estados planos, el modelo de ortotropía rectangular se reduce al modelo isótropo transversal con dos direcciones principales: la dirección longitudinal también llamada paralela a la dirección de las fibras principales $E_{\hat{L}} = E_x$ y la dirección perpendicular a la anterior que incluye las direcciones radial y tangencial del modelo de ortotropía rectangular $E_{\hat{R}} = E_{\hat{T}} = E_{yz}$. Para el modelado de la madera bajo la suposición de isotropía transversal, el módulo elástico y el de corte se definen como $E_{zy} = E_x/15$, $G_{xy} = G_{xz} = E_x/16$ (UNE-EN 408, 2003). Además, en forma general, los coeficientes de Poisson para especies frondosas son $\nu_{\hat{R}\hat{T}}=0.67$, $\nu_{\hat{L}\hat{T}}=0.46$ y $\nu_{\hat{L}\hat{R}}=0.39$ mientras que para especies coníferas $\nu_{\hat{R}\hat{T}}=0.51$, $\nu_{\hat{L}\hat{T}}=0.43$ y $\nu_{\hat{L}\hat{R}}=0.39$ (Argüelles Álvarez *et al.*, 2000). Para desarrollar la formulación de isotropía transversal, se definen: $\nu_{zy}=\nu_{\hat{R}\hat{T}}=0.67$, $\nu_{xzy}=(\nu_{\hat{L}\hat{T}} + \nu_{\hat{L}\hat{R}})/2=0.425$ y $G_{zy} = E_{zy}/2(1 + \nu_{zy})$.

4.2. Ecuaciones de movimiento de elementos estructurales

El primer paso para el análisis de un elemento estructural es la formulación de las ecuaciones de movimiento del modelo matemático correspondiente. Existen diversos métodos

para el planteo de las mismas; en la presente tesis, utilizamos el principio de Hamilton el cual establece que la función de desplazamiento que satisface la ecuación de movimiento, además debe cumplir con la siguiente condición:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \dot{T} - (\delta \dot{U} + \delta \dot{V}) \right] dt = 0 \quad (4.2)$$

en donde $\delta \dot{U}$, $\delta \dot{V}$ y $\delta \dot{T}$ involucran la variación de la energía virtual de deformación elástica, la variación en el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas aplicadas y la variación en la energía cinética virtual, respectivamente. Estas cantidades se expresan en términos de las tensiones y deformaciones virtuales los cuales dependen de las funciones de desplazamiento y sus variaciones a partir de la solución exacta. En Reddy (1993), se presenta la deducción de la Ecuación (4.2) y su aplicación para la obtención de las ecuaciones de movimiento. A continuación, se presentan las mismas para los elementos estructurales utilizados en la tesis.

4.2.1. Elementos viga: formulación Euler-Bernoulli

La hipótesis cinemática consiste en que las secciones permanecen planas y normales al eje longitudinal de la barra sin variar sus dimensiones transversales. Con esta suposición, la componente del desplazamiento de un punto de la barra se expresa:

$$u(x, y) = -y \frac{dv}{dx}, \quad (4.3)$$

en donde v es la ecuación de la elástica, desplazamiento perpendicular al eje de la viga. Las deformaciones y tensiones resultan, respectivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = -Ey \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (4.4)$$

La energía de deformación elástica se define como:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (4.5)$$

mientras que la energía cinética, considerando la inercia transversal, tiene la siguiente forma:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx. \quad (4.6)$$

La energía potencial de las cargas externas se obtiene como:

$$\dot{V} = - \int_0^l f(x)v(x)dx + M_0 \frac{dv_0}{dx} - M_l \frac{dv_l}{dx} - Q_0 v_0 + Q_l v_l, \quad (4.7)$$

en donde $f(x)$ es la carga distribuida en el sentido transversal de la viga, M_i y Q_i son los momentos flectores y esfuerzos transversales en los extremos inicial ($i = 0$) y final ($i = l$) de la viga, a la vez que v_i y dv_i/dx son los desplazamientos y giros, respectivamente.

Las expresiones en el tiempo de las variaciones de las energías son las siguientes:

$$\delta \dot{U} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \frac{d^2 v}{dx^2} dx dt, \quad (4.8)$$

$$\delta \dot{T} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \frac{dv}{dt} \delta \frac{dv}{dt} dx dt, \quad (4.9)$$

$$\delta \dot{V} = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l f \delta v dx + M_0 \delta \frac{dv_0}{dx} - M_l \delta \frac{dv_l}{dx} - Q_0 \delta v_0 + Q_l \delta v_l \right] dt. \quad (4.10)$$

Integrando por partes respecto de t una vez y de x dos veces obtenemos:

$$\delta \dot{U} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta v dx + \left(- EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \frac{dv}{dx} \Big|_0^l + \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta v \Big|_0^l \right) \right] dt \quad (4.11)$$

$$\delta \dot{T} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v dx dt \quad (4.12)$$

$$\delta \dot{V} = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l f \delta v dx + M_0 \delta \frac{dv_0}{dx} - M_l \delta \frac{dv_l}{dx} - Q_0 \delta v_0 + Q_l \delta v_l \right] dt. \quad (4.13)$$

Introduciendo estas ecuaciones en la ecuación que establece el principio de Hamilton obtenemos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} = f, \quad (4.14)$$

mientras que las condiciones de borde son las siguientes:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 v_l}{dx^2} - M_l &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta \frac{dv_l}{dx} = 0 \\ EI \frac{d^2 v_0}{dx^2} - M_0 &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta \frac{dv_0}{dx} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v_l}{dx^2} \right) - Q_l &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_l = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right) - Q_0 &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.2.2. Elementos viga: formulación Timoshenko

La hipótesis cinemática de la teoría de vigas de Timoshenko consiste en suponer que las secciones permanecen planas durante el movimiento pero no perpendiculares al eje longitudinal debido a las distorsiones por corte.

La sección transversal presenta una traslación transversal v y además experimenta una rotación θ_z y una distorsión uniforme γ_{xy} . El desplazamiento u de un punto es producido por la rotación θ_z , la cual es función de x resulta:

$$u(x, y) = -y\theta_z. \quad (4.16)$$

Las deformaciones resultan:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y\frac{d\theta_z}{dx} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta_z + \frac{dv}{dx}, \quad (4.17)$$

La energía de deformación elástica es la suma de la producida por flexión y corte:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_V (E\varepsilon_x^2 + \kappa G \gamma_{xy}^2) dV. \quad (4.18)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.17) se obtiene:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d\theta_z}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right)^2 dx, \quad (4.19)$$

mientras que la energía cinética, considerando la inercia transversal y la rotacional, tiene la siguiente expresión:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) dV = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l IA \left(\frac{d\theta_z}{dt} \right)^2 dx. \quad (4.20)$$

Integrando por partes respecto de t y de x una vez obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta \dot{U} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[EI \frac{d\theta_z}{dx} \delta \theta_z \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\theta_z}{dx} \right) \delta \theta_z dx + \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \delta v \Big|_0^l \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \right) \delta v dx - \int_0^l \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \delta \theta_z dx \right] dt, \quad (4.21) \end{aligned}$$

$$\delta \dot{T} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho I \frac{d^2 \theta_z}{dt^2} \delta \theta_z dx dt, \quad (4.22)$$

$$\delta\dot{V} = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l f \delta v dx + M_0 \delta \theta_z - M_l \delta \theta_z - Q_0 \delta v_0 + Q_l \delta v_l \right] dt. \quad (4.23)$$

Dado que v y θ_z son variables independientes, los factores $\delta \theta_z$ y δv deben anularse por separado. Por lo tanto, introduciendo estas ecuaciones en la expresión que establece el principio de Hamilton obtenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \right) - \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} &= f \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\theta_z}{dx} \right) + \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) - \rho I \frac{d^2 \theta_z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

mientras que las condiciones de borde son las siguientes:

$$\begin{aligned} EI \frac{d\theta_{zl}}{dx} - M_l &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta \theta_{zl} = 0 \\ EI \frac{d\theta_{z0}}{dx} - M_0 &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta \theta_{z0} = 0 \\ \kappa GA \left(\frac{dv_l}{dx} - \theta_{zl} \right) - Q_l &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_l = 0 \\ \kappa GA \left(\frac{dv_0}{dx} - \theta_{z0} \right) - Q_0 &= 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2.3. Elementos Placa

Los elementos placa utilizados en la presente tesis responden a la teoría de Mindlin equivalente a la teoría de Timoshenko en vigas. Los desplazamientos u y v de un punto de la placa se expresan:

$$u(x, y, z) = z\phi_x, \quad v(x, y, z) = -z\phi_y \quad \text{y} \quad w(x, y, z) = w_0, \quad (4.26)$$

en consecuencia las deformaciones resultan:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Haciendo coincidir los ejes coordenados (x, y, z) con los ejes materiales (1, 2, 3), Figura 4.2, las relaciones entre tensiones y deformaciones se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

denominando a los vectores de tensiones como $\{\sigma\}$ y $\{\tau\}$ y a los vectores de deformaciones correspondientes como $\{\varepsilon\}$ y $\{\gamma\}$, en donde:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad Q_{44} = G_{23} \quad \text{y} \quad Q_{55} = G_{13} \quad (4.29)$$

y κ es el factor de corte. En el caso de material transversalmente isótropo $G_{12} = G_{13}$.

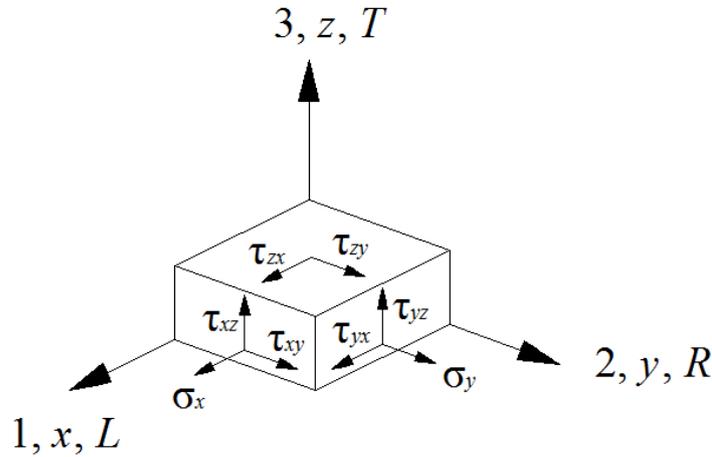


Figura 4.2: Tensiones normales y tangenciales elemento placa.

La energía de deformación elástica es la suma de la producida por flexión y corte:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\tau\}^t \{\gamma\} dV. \quad (4.30)$$

En las cual reemplazando $\{\tau\}$ y $\{\sigma\}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} \int_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 - 2D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right] dA \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \kappa h \left[G_{23} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + G_{13} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x \right)^2 \right] dA, \end{aligned} \quad (4.31)$$

en donde:

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad D_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{y} \quad D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (4.32)$$

La energía cinética del elemento tiene la siguiente forma:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_A \rho \left[\frac{h^3}{12} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + h\dot{w}^2 \right] dA, \quad (4.33)$$

y finalmente, la energía potencial de las cargas externas se obtiene como:

$$\dot{V} = - \int_{\Omega_e} f w dA - \oint_{\Gamma_e} (M_n \theta_n + Q_n w) ds, \quad (4.34)$$

en donde f es la carga distribuida, M_n es el momento flector y Q_n es la fuerza de corte. Los mismos se definen sobre Ω_e y Γ_e los cuales indican, respectivamente, el plano medio y el contorno del elemento placa.

Aplicando el principio de Hamilton obtenemos las tres ecuaciones diferenciales siguientes que definen el movimiento de un elemento placa:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa G_{23} h \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa G_{13} h \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + f = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) - \kappa G_{23} h \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{12} \rho h^3 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \kappa G_{13} h \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{12} \rho h^3 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.2.4. Elementos viga laminadas

Los elementos viga laminados son formulados partiendo de la Teoría de Deformación por Corte de Primer Orden (FSDT, en inglés). Para un elemento viga laminada, el campo de desplazamientos es el siguiente:

$$u(x, y, z) = z\phi_x, \quad v(x, y, z) = -z\phi_y \quad \text{y} \quad w(x, y, z) = w_0, \quad (4.36)$$

en donde ϕ_y y ϕ_x son las rotaciones alrededor de los ejes x e y , respectivamente (Reddy, 2004). Las fuerzas y momentos resultantes sobre el espesor total t de un elemento laminado formado por k láminas de espesor t_k se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz, \quad (4.37)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k dz. \quad (4.38)$$

Las relaciones entre tensiones y deformaciones de cada lámina se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{44}^* & 0 \\ 0 & Q_{55}^* \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (4.39)$$

en donde las deformaciones están dadas por la Ecuación (4.27) y

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad Q_{44} = G_{23} \quad \text{y} \quad Q_{55} = G_{13} \quad (4.40)$$

Reemplazando las expresiones de la Ecuación (4.27) en la Ecuación (4.39) y éstas a su vez en las Ecuaciones (4.37) y (4.38), se obtiene la relación constitutiva del elemento laminado (Barbero, 2010):

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

en donde

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad \text{y} \quad H_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} \left[t_k - \frac{4}{t^2} \left(t_k z_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right]. \quad (4.42)$$

La relación constitutiva del elemento laminado puede reescribirse también como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & \overline{D}_{16} \\ \overline{D}_{12} & \overline{D}_{22} & \overline{D}_{26} \\ \overline{D}_{16} & \overline{D}_{26} & \overline{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{44} & \overline{A}_{45} \\ \overline{A}_{45} & \overline{A}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Para el caso de vigas laminadas, se asume que $M_{yy} = M_{xy} = Q_y = \phi_y = 0$ y las deformaciones son las mismas que las presentadas anteriormente para vigas Timoshenko. Reemplazando los valores nulos se obtiene:

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial x} = \overline{D}_{11} M_{xx} \quad \text{y} \quad \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} = \overline{A}_{55} Q_x \quad (4.44)$$

o de otra manera:

$$\begin{aligned} \frac{12}{\overline{D}_{11} h^3} I_{yy} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} &= E_{xx} I_{yy} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} = b M_{xx} \quad \text{y} \\ \frac{1}{\overline{A}_{55} h} b h \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) &= G_{xz} b h \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = b Q_x \end{aligned} \quad (4.45)$$

Luego, la ecuación de movimiento de la viga laminada se expresa de la siguiente manera (Reddy, 2004):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\kappa G_{xz} b h \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \right) - b h \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= b q \\ \frac{d}{dx} \left(E_{xx} I_{yy} \frac{d\theta_z}{dx} \right) + \kappa G_{xz} b h \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) - \rho \frac{b h^3}{12} \frac{d^2 \theta_z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.3. Discretización numérica de las ecuaciones gobernantes

4.3.1. Formulación variacional o Débil

Un problema puede ser representado en forma general a través de sus ecuaciones diferenciales parciales para cada punto del dominio conjuntamente con sus condiciones iniciales y de contorno. En este caso, hablamos de la Formulación Fuerte del problema, en cambio cuando al problema lo representamos a través de una ecuación variacional y de un espacio de funciones admisibles, la representación del mismo corresponde a la Formulación Débil.

La ecuación variacional incorpora las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno naturales mientras que el espacio de las funciones admisibles incorpora las condiciones de contorno esenciales. El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método de discretización que se aplica a la formulación débil del problema.

Considerando la formulación clásica de un problema compuesta por la ecuación diferencial y condiciones de contorno:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = f(x,t). \quad (4.47)$$

El objetivo es determinar la función $v(x,t)$ que satisface la Ecuación (4.47). Para obtener la formulación débil del problema es necesario desarrollar las siguientes dos etapas:

- Multiplicar la Ecuación (4.47) por una función de prueba e integrar en el dominio del problema:

$$\int_0^L \left[\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) - f(x,t) \right] \phi(x) dx = 0. \quad (4.48)$$

Esto equivale a establecer que la proyección sobre la base formada por las funciones de prueba es nula. Como se mencionó anteriormente, existen dos tipos de condiciones de contorno asociadas a la ecuación diferencial, las esenciales y las naturales. Si la ecuación diferencial considerada es de orden $2n$, el orden de la mayor derivada de la formulación débil es igual a n . Las condiciones de contorno esenciales son aquellas cuyas derivadas tienen un orden de hasta $n - 1$, mientras que las condiciones de

contorno naturales tienen derivadas de orden mayor a n . Definimos a $\widehat{\psi}$ como el espacio de las soluciones v ($v \in \widehat{\psi}$) y ψ es el espacio de las funciones de prueba ϕ ($\phi \in \psi$) que satisfacen las condiciones de contorno esenciales de forma homogénea. En este caso, para una viga simplemente apoyada tenemos:

$$\int_0^L \left[\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) - f(x,t) \right] \phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in \psi, \quad (4.49)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$v(0,t) = 0 \quad y \quad v(L,t) = 0 \quad (4.50)$$

$$E(0)I(0) \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \quad y \quad E(L)I(L) \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.51)$$

- Integrar por partes dos veces de forma tal de distribuir la diferenciación entre la variable dependiente v y la función de prueba ϕ , de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \phi(x) dx + \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L - \\ E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} dx = \\ \int_0^L f(x,t) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \psi \end{aligned} \quad (4.52)$$

Si consideramos que $\widehat{\psi} = \psi$ y a la vez, es igual al espacio de funciones admisibles Adm ,

$$Adm = \{ \phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ es definida por tramos } \mathcal{C}^2 \text{ y acotada, } \phi(0) = 0, \phi(L) = 0 \}. \quad (4.53)$$

Aplicando las condiciones de contorno y considerando los valores que la función de prueba adopta en los extremos de la viga, obtenemos la formulación débil del problema:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \phi(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} dx = \int_0^L f(x,t) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in Adm \quad (4.54)$$

la cual puede ser escrita en forma resumida de la siguiente manera:

$$M(v, \phi) + K(v, \phi) - F(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \psi \quad (4.55)$$

en donde, $M(v, \phi)$, $K(v, \phi)$ y $F(\phi)$ son los operadores de masa, rigidez y fuerza respectivamente, definiéndose los mismos como sigue:

$$M(v, \phi) = \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \phi(x) dx,$$

$$K(v, \phi) = \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} dx,$$

$$F(\phi) = \int_0^L f(x, t) \phi(x) dx. \quad (4.56)$$

Una vez obtenida la formulación débil del problema, se puede obtener una aproximación de la solución del problema. Existen diferentes métodos variacionales de aproximación los cuales se diferencian en la manera en que se escoge la función de prueba: Rayleigh-Ritz, Galerkin, Mínimos cuadrados entre otros. El método de aproximación que aplicaremos es el método de Galerkin.

4.3.2. Método de Galerkin

En el método de Galerkin, la base utilizada para aproximar v es utilizada también como base de la proyección. El mismo consiste en buscar una aproximación para la Ecuación (4.52) que pertenezca a un sub-espacio de dimensión finita Adm^N del espacio de funciones admisibles Adm , de forma tal que $Adm^N \subset Adm$. El espacio Adm es lineal y es de dimensión infinita. La aproximación deseada v^N que pertenece a Adm^N ($v^N \in Adm^N$), tiene la siguiente forma:

$$v^N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j^N(x). \quad (4.57)$$

La base de proyección es la misma base utilizada para aproximar u :

$$\phi_i = \phi_i^N. \quad (4.58)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.57)-(4.58) en la Ecuación (4.52) se desea encontrar $v^N \in Adm^N$:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v^N(x,t)}{\partial t^2} \phi^N(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 v^N(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi^N(x)}{\partial x^2} dx = \int_0^L f(x,t) \phi^N(x) dx \quad \forall \phi^N \in Adm^N, \quad (4.59)$$

siendo ϕ_j^N , $j = 1, 2, \dots, N$, el conjunto de funciones independientes que define el subespacio finito Adm^N . Al aproximarse v con un número finito de términos N , se introduce un error ε^N , de manera tal que $v = v^N + \varepsilon^N$. Sustituyendo v en la Ecuación (4.55), obtenemos:

$$M(v^N + \varepsilon^N, \phi) + K(v^N + \varepsilon^N, \phi) - F(\phi) = 0, \quad (4.60)$$

y operando

$$M(v^N, \phi^N) + K(v^N, \phi^N) - F(\phi^N) = -M(\varepsilon^N, \phi^N) - K(\varepsilon^N, \phi^N). \quad (4.61)$$

En el método de Galerkin, $M(\varepsilon^N, \phi^N)$ y $K(\varepsilon^N, \phi^N)$ son iguales a cero, o sea el error ε^N es ortogonal al espacio Adm^N , lo que permite obtener el siguiente sistema:

$$\begin{cases} M(v^N, \phi_1^N) + K(v^N, \phi_1^N) - F(\phi_1^N) = 0 \\ M(v^N, \phi_2^N) + K(v^N, \phi_2^N) - F(\phi_2^N) = 0 \\ \vdots \\ M(v^N, \phi_N^N) + K(v^N, \phi_N^N) - F(\phi_N^N) = 0 \end{cases}$$

Realizando las sustituciones en la Ecuación (4.59) se obtiene:

$$\ddot{a}_i \int_0^L \rho(x)A(x) \phi_i \phi_j(x) dx + a_i \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} dx = \int_0^L f \phi_j dx \quad \forall \phi \in Adm^N \quad (4.62)$$

que en forma matricial resulta en:

$$[M(\phi_i, \phi_j)] \ddot{a}_i + [K(\phi_i, \phi_j)] a_i = f(\phi_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \forall \phi \in Adm^N. \quad (4.63)$$

4.3.3. Método de los Elementos Finitos (MEF)

El método de los elementos finitos constituye una técnica de resolución de un problema que ha sido descrito previamente por su formulación débil y discretizado por el método

de Galerkin. En este método, el dominio es aproximado por un conjunto de sub-dominios (elementos) los cuales poseen funciones de aproximación. Los parámetros de las funciones de aproximación representan los valores de la solución para un número de puntos llamados nodos. Las funciones de aproximación son también llamadas funciones de interpolación. El grado de estas funciones depende del número de nodos del elemento y del orden de la ecuación diferencial que se busca aproximar. El MEF consiste en las siguientes etapas:

- Aproximación del dominio:
 - Construcción de la malla de elementos finitos
 - Numeración de los nodos y elementos que componen la malla.
- Aproximación de la solución descrita en la formulación débil:
 - Desarrollo de la formulación variacional para un elemento genérico
 - Aproximación de la variable dependiente $v(x, t) \approx \sum_{i=1}^N v_i(t)\phi_i(x)$, la cual, al sustituirse en formulación variacional, resulta en las ecuaciones de cada elemento:

$$[M^e] \ddot{v}^e + [K^e] v^e = f^e. \quad (4.64)$$

- Acoplamiento de las ecuaciones de cada elemento para la obtención de las ecuaciones globales del sistema:
 - Identificación de las condiciones de continuidad entre los elementos, relacionando los grados de libertad locales con los globales.
 - Obtención de las ecuaciones globales del sistema:

$$[M] \ddot{v} + [K] v = f. \quad (4.65)$$

- Obtener la solución del sistema de ecuaciones a través del cálculo de las variables dependientes desconocidas.

4.3.4. Elementos finitos utilizados

4.3.4.1. Elementos viga Euler-Bernoulli

Las formas variacionales se discretizan aplicando la metodología estándar del MEF (*e.g.* Bathe, 1982). Para ello, se utilizan elementos viga Euler-Bernoulli con dos nodos

y dos grados de libertad por nodo (desplazamiento transversal y rotaciones, respectivamente). Polinomios de *Hermite* son utilizados como funciones de aproximación para la interpolación espacial de la deflexión transversal $v(x)$, en términos de los grados de libertad nodales:

$$v(x) = n_1(x)v_1 + n_2(x)\theta_1 + n_3(x)v_2 + n_4(x)\theta_2, \quad (4.66)$$

en donde

$$\begin{aligned} n_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3} & n_3(x) &= \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3} \\ n_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} & n_4(x) &= -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \end{aligned}$$

y L_e es la longitud del elemento.

4.3.4.2. Elementos viga Timoshenko

Si se considera que las funciones de forma del elemento viga Euler-Bernoulli representan la elástica de una barra sin carga en el tramo, al aplicar este concepto a un elemento viga Timoshenko y operando con sus ecuaciones de equilibrio estático, se puede obtener el elemento viga Timoshenko cúbico-cuadrático de dos nodos. Al igual que en el caso anterior, este elemento cuenta con dos grados de libertad por nodo (desplazamiento transversal y rotaciones, respectivamente). Las interpolaciones espaciales de la deflexión transversal $v(x)$ y la rotación $\theta(x)$, en términos de los grados de libertad nodales tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} v(x) &= n_{v1}(x)v_1 + n_{v2}(x)\theta_1 + n_{v3}(x)v_2 + n_{v4}(x)\theta_2, \\ \theta(x) &= n_{\theta1}(x)v_1 + n_{\theta2}(x)\theta_1 + n_{\theta3}(x)v_2 + n_{\theta4}(x)\theta_2, \end{aligned} \quad (4.67)$$

en donde

$$\begin{aligned} n_{v1}(x) &= \frac{1}{1+\varphi} \left(1 - 3\frac{x^2}{L_e^2} + 2\frac{x^3}{L_e^3} + \varphi \left(1 - \frac{x}{L_e} \right) \right), \\ n_{v2}(x) &= \frac{L_e}{1+\varphi} \left(\frac{x}{L_e} - 2\frac{x^2}{L_e^2} + \frac{x^3}{L_e^3} + \frac{\varphi}{2} \left(\frac{x}{L_e} - \frac{x^2}{L_e^2} \right) \right), \\ n_{v3}(x) &= \frac{1}{1+\varphi} \left(3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x^3}{L_e^3} + \varphi \frac{x}{L_e} \right), \\ n_{v4}(x) &= \frac{L_e}{1+\varphi} \left(-\frac{x^2}{L_e^2} + \frac{x^3}{L_e^3} + \frac{\varphi}{2} \left(-\frac{x}{L_e} + \frac{x^2}{L_e^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned}
n_{\theta_1}(x) &= \frac{6}{L_e(1+\varphi)} \left(-\frac{x}{L_e} + \frac{x^2}{L_e^2} \right), \\
n_{\theta_2}(x) &= \frac{1}{1+\varphi} \left(1 - 4\frac{x}{L_e} + 3\frac{x^2}{L_e^2} + \varphi \left(1 - \frac{x}{L_e} \right) \right), \\
n_{\theta_3}(x) &= \frac{-6}{L_e(1+\varphi)} \left(-\frac{x}{L_e} + \frac{x^2}{L_e^2} \right), \\
n_{\theta_4}(x) &= \frac{1}{1+\varphi} \left(-2\frac{x}{L_e} + 3\frac{x^2}{L_e^2} + \varphi \frac{x}{L_e} \right),
\end{aligned} \tag{4.69}$$

en donde el parámetro φ es igual a la relación entre la rigidez a flexión y a corte, y se define de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{12EI}{\kappa_S GAL_e^2}. \tag{4.70}$$

Puede observarse que cuando φ tiende a cero, este elemento se aproxima al elemento viga Euler-Bernoulli. Esta formulación cúbico-cuadrática presenta la ventaja de asegurar que no se produce el bloqueo por corte producto de la rigidización distorsional al disminuir el espesor del elemento.

4.3.4.3. Elementos placa

En esta tesis, se utiliza el elemento placa rectangular conforme de doce grados de libertad (tres grados de libertad por nodo). Los desplazamientos y las rotaciones en este elemento se interpolan por separado a través de la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} v \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 & n_4 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 & n_4 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 & n_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ v_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ v_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ v_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix}$$

en donde las funciones de aproximación tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} n_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) & n_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \\ n_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) & n_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \end{aligned}$$

en las cuales ξ y η constituyen las coordenadas normalizadas respecto del centro geométrico de cada elemento rectangular. Este elemento también se conoce como rectángulo bilineal dado que las funciones de aproximación son el resultado del producto de dos funciones lineales definidas en ξ y η . Este elemento es utilizado dado que posee menos grados de libertad respecto de otros tipos de elementos placa y además permite introducir los efectos propios de la deformación por corte. Este elemento puede presentar bloqueo por corte para relaciones entre el espesor del elemento y lado de la placa menores a 0.01; en estos casos una manera de evitar este efecto es la implementación del método de integración numérica de orden reducido en la matriz de rigidez.

4.3.4.4. Elementos viga laminada

Los elementos vigas laminada son utilizados en la presente tesis como elementos emparrillados con el agregado de grados de libertad torsionales en los extremos. Las interpolaciones espaciales de la deflexión transversal $v(x)$ y la rotación $\theta(x)$ se realizan con las funciones cúbicas y cuadráticas propias del elemento viga Timoshenko previamente presentado. La interpolación de la rotación torsional $\theta_t(x)$ en función de los grados de libertad nodales se realiza a través de la siguiente ecuación:

$$\theta_t(x) = n_1(x)\theta_{t1} + n_2(x)\theta_{t2}, \quad (4.71)$$

en donde

$$n_1(x) = 1 - \frac{x}{L_e} \quad \text{y} \quad n_2(x) = \frac{x}{L_e}, \quad (4.72)$$

La rigidez a torsión de las vigas laminadas se obtuvo según el método presentado en el trabajo de Swanson (1998). En el mismo, se obtiene la función de alabeo en piezas laminadas con múltiples láminas ortótropas. Una vez obtenida la función de alabeo se

calcula la rigidez a torsión efectiva de la sección:

$$GJ_{eff} = \frac{32(b)^3(h)}{\pi^4} \sum_k G_{xy_k} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m^4} \left[\frac{h_k - h_{k-1}}{h} - \frac{A_{km}}{h\beta_{km}} (\sinh \beta_{km} h_k - \sinh \beta_{km} h_{k-1}) - \frac{B_{km}}{h\beta_{km}} (\cosh \beta_{km} h_k - \cosh \beta_{km} h_{k-1}) \right], \quad (4.73)$$

en donde b y h son el espesor y la altura de la sección transversal de la viga, h_k es la posición entre láminas, G_{xy_k} es el módulo de corte de la lámina k th, β_{km} es un coeficiente que considera la relación entre los módulos de corte G_{xz_k}/G_{xy_k} y finalmente A_{km} y B_{km} son coeficientes propios de la función de alabeo de cada capa del laminado.

4.4. Discretización de campos aleatorios

La discretización de un campo aleatorio o proceso estocástico involucra el conjunto de técnicas y herramientas que nos permiten aplicar los modelos estocásticos a un estudio numérico. Dichas técnicas de discretización son las que luego conjuntamente con el método empleado para simular estocásticamente las propiedades del material clasificarán los modelos numéricos-probabilísticos empleados.

El procedimiento de discretización de un campo aleatorio $\mathbb{H}(x)$ consiste en aproximar el mismo a través de $\widehat{\mathbb{H}}(x)$, el cual se define por medio de un conjunto finito de variables aleatorias agrupado en un vector aleatorio. El problema consiste en elegir la mejor aproximación respecto a un determinado margen de error y en general se busca aquella que utiliza la menor cantidad de variables aleatorias y la que resulte en un menor costo computacional. Los métodos de discretización pueden dividirse en tres grupos (Sudret, 2008), como se detalla a continuación.

4.4.1. Métodos de discretización por puntos (Point discretization methods)

Las variables aleatorias son elegidas en determinados puntos del dominio una vez discretizado el mismo. Dentro de esta familia se pueden nombrar los siguientes métodos:

- Método del punto medio (The midpoint method, Der Kiureghian y Ke (1988)):
 Este método consiste en asociar una variable aleatoria al centroide de cada elemento del mallado y de esta manera representar el campo aleatorio. De esta manera la aproximación del campo aleatorio $\widehat{\mathbb{H}}(x)$ se define por el vector aleatorio cuyas componentes son $\mathbb{H}(x_c^1), \mathbb{H}(x_c^2), \dots, \mathbb{H}(x_c^{N_e})$ en donde N_e es el número de elementos del mallado. El valor medio y la matriz de covarianza se obtienen del valor medio, la varianza y la función de autocorrelación de $\mathbb{H}(x)$ evaluada en cada centroide de los elementos. Cada realización de $\widehat{\mathbb{H}}(x)$ se define por tramos en donde las discontinuidades están localizadas en los extremos de los elementos. En el trabajo de Der Kiureghian y Ke (1988) se establecen relaciones entre la longitud de correlación del campo y el tamaño de los elementos del mallado de manera tal obtener una buena representación de la variabilidad del mismo.
- Método de las funciones de forma (The shape function method, Liu et al. (1986)):
 Este método aproxima $\mathbb{H}(x)$ en cada elemento utilizando los valores nodales $\mathbb{H}(x_i)$ y las funciones de forma del elemento de la siguiente forma: $\widehat{\mathbb{H}}(x) = \sum_{i=1}^q N_i(x)\mathbb{H}(x_i)$ en donde q es el número de nodos del elemento.
- Método de los puntos de integración (The integration point method, Brenner y Bucher (1995)):
 Este método asume que cada integral que aparece en la resolución por elementos finitos se resuelve evaluando la misma en cada uno de los *puntos de Gauss* de cada elemento discretizando el campo aleatorio al asociar una variable aleatoria a cada uno de estos puntos. Este método da resultados precisos para valores relativamente bajos de longitud de correlación. Como contraparte, el número total de variables aleatorias se incrementa respecto a los demás métodos.
- Método de la estimación lineal óptima (The optimal linear estimation method, Li y Der Kiureghian (1993)):
 En este método la aproximación del campo aleatorio $\widehat{\mathbb{H}}(x)$ se define a través de una función lineal de los valores nodales $\mathbb{H}(x_1), \mathbb{H}(x_2), \dots, \mathbb{H}(x_q)$ de la siguiente manera: $\widehat{\mathbb{H}}(x) = a(x) + \sum_{i=1}^q b_i(x)\mathbb{H}(x_i)$ en donde q es el número de puntos nodales involucrados en la aproximación. Las funciones $a(x)$ y $b_i(x)$ se determinan minimizando en cada punto x la varianza del error $Var[\mathbb{H}(x) - \widehat{\mathbb{H}}(x)]$ y de manera tal que $\widehat{\mathbb{H}}(x)$ también sea un estimador no sesgado de $\mathbb{H}(x)$, $E[\mathbb{H}(x) - \widehat{\mathbb{H}}(x)] = 0$.

4.4.2. Métodos de discretización basados en promedios (Average discretization methods)

Las variables aleatorias que representan la aproximación del campo aleatorio $\widehat{\mathbb{H}}(x)$ provienen de integrales de peso del campo aleatorio $\mathbb{H}(x)$ sobre un determinado dominio Ω_e . Dentro de esta familia se pueden nombrar los siguientes métodos:

- Método de los promedios espaciales (Spatial average method, Vanmarcke y Grigoriu (1983)):

En este método, una vez definido el mallado del dominio, se define la aproximación del campo en cada elemento de manera constante e igual al promedio del campo original sobre cada elemento del mallado. Puede definirse de la siguiente manera: $\widehat{\mathbb{H}}(x) = \int_{\Omega_e} \mathbb{H}(x) d\Omega_e / |\Omega_e|$. Se ha demostrado que la varianza de $\widehat{\mathbb{H}}(x)$ subestima la varianza del campo aleatorio $\mathbb{H}(x)$.

- Método de la integral de peso (The weighted integral method, Deodatis y Shinozuka (1991)):

Este método fue desarrollado en el contexto de los elementos finitos estocásticos y dentro del campo de la elasticidad lineal. La idea principal del método es considerar la matriz de rigidez de los elementos como las variables aleatorias básicas. Utilizando la notación del MEF, el método puede definirse de la siguiente manera: $k^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} d\Omega_e$ en donde la matriz de elasticidad \mathbf{D} tiene la forma $\mathbf{D}(x, \theta) = \mathbf{D}_0[1 + \mathbb{H}(x, \theta)]$ en donde \mathbf{D}_0 es el valor medio y $\mathbb{H}(x, \theta)$ es un proceso con media cero. Como resultado se obtiene $k^e(\theta) = k_0^e + \int_{\Omega_e} \mathbb{H}(x, \theta) \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega_e$, en donde el segundo término del lado derecho contiene las integrales de peso del campo aleatorio $\mathbb{H}(x)$ sobre cada elemento del mallado. En este método, el campo aleatorio es proyectado en un espacio formado por las funciones de forma de cada elemento. Este método necesita, para la obtención de buenos resultados, que la longitud de correlación sea mayor que el tamaño de los elementos además de que el campo aleatorio no presente cambios muy bruscos.

4.4.3. Métodos de discretización basados en expansiones por series (Series expansion methods)

En esta familia de métodos, el campo aleatorio es representado como una serie que involucra variables aleatorias y funciones espaciales determinísticas. La aproximación $\hat{H}(x)$ se obtiene al truncar la serie en un determinado número de términos. Dentro de esta familia, se encuentran los siguientes métodos:

- Expansión de Karhunen-Loève:

Como se describió en el Capítulo 3, esta expansión está basada en la descomposición espectral de la función de autocovarianza. El conjunto de funciones determinísticas sobre el cual se expanden las realizaciones del campo son halladas a través de un problema de autovalores y autofunciones. Las funciones propias de la función de covarianza constituyen una base óptima en el sentido de que se minimiza el error medio cuadrático respecto a otro tipo de funciones cuando la serie se trunca en un determinado número de términos.
- Expansión en series ortogonales (Orthogonal series expansion, Zhang y Ellingwood (1994)):

Este método surgió como alternativa al anterior para ser utilizado cuando no es posible encontrar la solución al problema de autovalores y autofunciones que plantea la Expansión de Karhunen-Loève para hallar las funciones base. El presente método parte de la selección de un conjunto completo de funciones ortogonales para luego realizar la expansión (por ejemplo, los polinomios de Legendre). La expresión matemática de la expansión es la misma que en el método de Karhunen-Loève tal es así que cuando reemplazamos las funciones bases obtenemos el mismo método.
- Expansión de la estimación lineal óptima (The expansion optimal linear estimation method, Li y Der Kiureghian (1993)):

Este método es una extensión del método presentado anteriormente, en la cual se incorpora la representación espectral del vector de variables nodales para luego desarrollar la expansión. La expresión matemática es similar a las anteriores y al igual que la expansión de Karhunen-Loève tiende a sub-representar la varianza del campo aleatorio.

Una revisión más extensa de los métodos además de la comparación entre los mismos para distintas funciones de correlación, longitudes de correlación y tamaños de elementos

se presentan en Li y Der Kiureghian (1993) y en Sudret y Der Kiureghian (2000). Dentro de la última familia, se podría incluir además el Método de Representación Espectral (Spectral Representation Method, Shinozuka y Deodatis (1991)) el cual es utilizado en mayor medida para simular cargas pero bien podría utilizarse para representar la variabilidad en las propiedades de los materiales como los métodos anteriores. Como corolario de esta sección podemos decir, en base a los estudios presentados en las referencias anteriores, que la familia de métodos que muestra una mayor precisión para representar el campo aleatorio $\mathbb{H}(x)$, es la de los métodos de discretización basados en expansiones por series. Mas aún, dentro de los mismos y para la función de correlación exponencial el método de Karhunen-Loève demuestra ser la mejor elección. Estos métodos (Expansiones por series) son apropiados para modelos estocásticos con Perfiles de Rigidez Continuos (CSPM). Sin embargo, en esta tesis se presentaran además campos aleatorios que no siguen una ley determinada y para ellos los métodos de discretización puntuales son los que mejor se adaptan. Más precisamente, se utilizaran el método del punto medio y el método de los puntos de integración para las relaciones entre tamaños de elementos y longitud de correlación establecidas en Der Kiureghian y Ke (1988). Estos métodos de discretización son los que mejor se adaptan a los Modelos Espaciales de Parámetros Discretos (DPSM) y los modelos de Zonas Débiles (WZ).

Capítulo 5

Propagación de incertidumbres en elementos estructurales de madera

En este capítulo, se presentan los estudios de propagación de incertidumbres en elementos estructurales de madera. En el mismo se combinan los tres ejes temáticos presentados en los capítulos anteriores: la madera estructural, el modelado estocástico y el modelado numérico; con el objetivo del estudio de la respuesta estructural de piezas de *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina. En primer lugar, se describen los modelos estocásticos desarrollados para simular la variabilidad longitudinal del Módulo de Elasticidad (MOE). Luego, se presentan las validaciones de los modelos estocásticos desarrollados para, finalmente, realizar el estudio de propagación de incertidumbres en elementos estructurales. Las validaciones de los resultados numérico-estocásticos se realizan con mediciones experimentales de deflexiones y frecuencias naturales en vigas provistas por Piter (2013). En primer lugar, se estudiarán deflexiones en vigas, siguiendo por problemas de auto-valores (frecuencias naturales y cargas de pandeo) en vigas y columnas; para finalizar con el estudio de vibraciones forzadas en vigas. En todos estos estudios, se muestran las capacidades que presenta un modelo estocástico del material en cuanto a la predicción del rango de la respuesta estructural además del mejoramiento en la predicción de la misma respecto a un enfoque determinístico.

5.1. Modelado estocástico de elementos estructurales de madera

El estudio de propagación de incertidumbres en elementos estructurales de madera de *Eucalyptus grandis* se realizará sobre los siguientes problemas de interés para el uso estructural de piezas de este material:

- Deflexiones en Vigas:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) = f(x). \quad (5.1)$$

- Vibraciones libres de Vigas:

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (5.2)$$

- Pandeo de Columnas:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) - p_{cr} \frac{d^2}{dx^2} (v(x)) = 0. \quad (5.3)$$

- Vibraciones forzadas en Vigas:

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) + c \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = f(x,t). \quad (5.4)$$

Cada uno de estos problemas, se describen mediante una ecuación de movimiento que además de considerar la formulación general del elemento estructural utilizado, también tienen en cuenta las propiedades mecánicas, físicas y geométricas de las piezas involucradas. Teniendo en cuenta estos tres grupos de propiedades, es necesario definir sobre cuales aplicaremos el modelado estocástico para luego propagar las incertidumbres generadas por las mismas en la respuesta estructural de los problemas definidos anteriormente. Las propiedades tanto mecánicas como físicas y geométricas que serán modeladas estocásticamente a lo largo del capítulo son:

- Módulo de Elasticidad (MOE).
- Densidad de Masa.
- Segundo momento de área (debido a la presencia de nudos).
- Amortiguamiento.

Entre todas estas propiedades la que tiene una mayor importancia en la presente tesis y define los modelos probabilísticos aplicables en cada estudio es el MOE. A continuación se definirán en primera instancia los modelos de variables aleatorias para luego definir los modelos de campos aleatorios.

5.1.1. Variables aleatorias

La forma de representación más simple de la variabilidad de un parámetro se realiza a través de la asignación de una distribución de probabilidad. En la siguiente sección se presentan las distribuciones de probabilidad empleadas para el modelado estocástico de las propiedades mecánicas y físicas.

5.1.1.1. Módulo de Elasticidad (MOE)

Para determinar la PDF marginal del MOE, el PME para el caso de variables aleatorias continuas es aplicado en primera instancia. La medida de la incertidumbre de la variable aleatoria continua X está definida por la siguiente expresión:

$$S(f_X) = - \int_D f_X(x) \ln(f_X(x)) dx, \quad (5.5)$$

en donde f_X es la PDF de la variable aleatoria X y D es su dominio. El primer dato conocido acerca de la variable aleatoria que representa el MOE es su dominio el cual debe estar contenido entre $[0, \infty)$; en este caso, con este único dato, el problema de optimización no posee solución (Sampaio y De Queiroz Lima, 2012). Si además de esta restricción, se agregan restricciones adicionales obtenemos las distribuciones indicadas en la Tabla 5.1 presentadas en Kapur (1993). Cuando además del dominio, se conoce el valor medio, el PME conduce a una distribución exponencial, en el caso en que se agregue la restricción de que la varianza tenga un valor acotado, se obtiene la distribución gamma. Todos los otros casos de restricciones presentadas en la tabla equivalen a prescribir la media y la varianza de la variable aleatoria. De las distribuciones sugeridas por la aplicación del PME, se utilizarán las distribuciones gamma, normal truncada y lognormal para la realización de las pruebas de bondad de ajuste. Las mismas son seleccionadas debido a que son distribuciones que proporcionan un fácil manejo y permiten la aplicación de las herramientas presentadas para la simulación de campos aleatorios. Luego, se aplican las

Tabla 5.1: Resultados de aplicación del PME según las restricciones impuestas.

Distribución	Dominio	Primera restricción	Segunda restricción
Exponencial	$[0, \infty)$	$E[X]$	
Gamma	$[0, \infty)$	$E[X]$	$E[\ln(X)] < \infty$
Normal truncada	$[0, \infty)$	$E[X]$	$E[X^2]$
Laplace truncada	$[0, \infty)$	$E[X - \mu]$	$E[(X - \mu)^2]$
Beta tipo 2	$[0, \infty)$	$E[\ln(X)]$	$E[\ln(1 + X)]$
Weibull	$[0, \infty)$	$E[X^n]$	$E[\ln(X)]$
Lognormal	$[0, \infty)$	$E[\ln(X)]$	$E[\ln(X)^2]$

pruebas de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) y de Anderson-Darling (A-D) (*e.g.* Benjamin y Cornell, 1970; Ang y Tang, 2007), para verificar el resultado de la aplicación previa del PME. Estas pruebas han sido empleadas debido al hecho de que la primera de ellas es más sensible a los valores cercanos a la media de la distribución mientras que la segunda brinda un mayor peso a los valores cercanos a las colas de la distribución. El nivel de significancia de la hipótesis paramétrica α se asume igual a 0.05. Para un valor de $\alpha = 0.05$ el valor crítico de la prueba de bondad de ajuste K-S es igual a $c = 1.36$. Las pruebas de bondad de ajuste se realizan sobre las distribuciones seleccionadas de entre las sugeridas por la aplicación del PME a las cuales se añade la distribución normal debido a que es frecuentemente empleada para representar propiedades mecánicas de forma estocástica. La distribución lognormal es propuesta en Köhler *et al.* (2007) para el modelado estocástico del MOE. Los parámetros de la distribuciones de probabilidad empleadas en las pruebas de ajuste fueron estimados con la ayuda del Método de Máxima Verosimilitud (MLM, en inglés) a través de las herramientas del programa MATLAB (2011) empleando para ello los resultados experimentales de las muestras presentadas en la Tabla 2.3 de la Subsección 2.3.2, los cuales han sido reportados en el trabajo de Piter (2003). Los estadísticos de prueba obtenidos, los valores críticos y los resultados de las pruebas de ajustes se presentan en la Tabla 5.2. Como puede apreciarse, las cuatro distribuciones cumplen con los requerimientos de la prueba de ajuste K-S mientras que solo la distribución gamma cumple los requerimientos de la prueba de ajuste A-D. La distribución normal ajusta bien con los datos experimentales en la prueba K-S. Sin embargo, el uso de esta distribución en un modelo probabilístico puede ocasionalmente conducir a valores negativos del MOE. Por lo tanto, las distribuciones gamma y lognormal parecen

Tabla 5.2: Resultados de las pruebas de bondad de ajuste K-S y A-D del MOE.

PDF	Estadístico K-S $D\sqrt{n}$	Prueba de ajuste	Estadístico A-D A^*	Prueba de ajuste
Gamma	0.64	$0.64 < 1.36$	0.23	$0.23 < 0.75$
Lognormal	0.74	$0.74 < 1.36$	0.81	$0.81 > 0.74$
Normal	1.00	$1.00 < 1.36$	1.32	$1.32 > 0.74$
Normal truncada	0.99	$0.99 < 1.36$	1.31	$1.31 > 0.74$

ser las más pertinentes. En base a los resultados expuestos en la prueba de bondad de ajuste sumado a la sugerencia del PME, se adopta la distribución gamma para el modelado estocástico del MOE. La Función de Densidad de Probabilidad (PDF) y la Función de Densidad Acumulada (CDF) del MOE son, respectivamente:

$$f(x | \bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{\bar{b}^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a})} x^{\bar{a}-1} e^{-\frac{x}{\bar{b}}} \quad F(x | \bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{\bar{b}^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a})} \int_0^x t^{\bar{a}-1} e^{-\frac{t}{\bar{b}}} dt, \quad (5.6)$$

en donde $\bar{a} = 28,727$ y $\bar{b} = 0,44$ son los parámetros de forma y de escala, respectivamente. El valor medio, el desvío estándar y el coeficiente de variación de la variable aleatoria que representa el MOE tienen los siguientes valores, respectivamente: $\mu = 12.639$ GPa, $\sigma = 2.358$ GPa y $\delta = \sigma/\mu = 0.186$.

La selección de la distribución de probabilidad del MOE es un punto de interés en este trabajo y se demuestra fácilmente obteniendo el percentil 0.05 de las distribuciones gamma, lognormal y normal con el mismo valor medio y desvío estándar. Estos valores son, para cada una de estas distribuciones, 9.027 GPa, 9.165 GPa. y 8.76 GPa, respectivamente y conducen a valores de deflexiones, por ejemplo, 2.95 % y 4.45 % más bajos para el percentil 0.05 de las distribuciones gamma y lognormal con respecto a considerar el percentil 0.05 de la distribución normal. Este valor de percentil fue elegido porque es utilizado en los códigos de diseño estructural para la verificación de las condiciones de servicio. En situaciones en las cuales es necesario un control de las deformaciones más exhaustivo, los códigos de diseño recomiendan utilizar el percentil 0.05. Esta comparación entre valores de percentiles provenientes de distintas distribuciones se denomina frecuentemente como problema de sensibilidad en los extremos o colas de las distribuciones, *e.g.* Melchers (1999). El mismo consiste en la selección del mejor modelo probabilístico disponible, en particular se trata de elegir aquel que mejor modele los extremos o colas de las

PDF en base a la información disponible. En particular la cola inferior de la distribución (con menores probabilidades acumuladas) es la que presenta una mayor importancia para el modelado de las propiedades mecánicas de resistencia y rigidez en piezas de madera (Faber *et al.*, 2004).

5.1.1.2. Densidad de Masa

En este trabajo, la densidad de masa en las vigas aserradas de *Eucalyptus grandis* es considerada constante a lo largo de la longitud de la viga y la variabilidad longitudinal de la misma debido a la presencia de nudos no es tenida en cuenta. En los elementos estructurales de madera de esta especie, las zonas con nudos están compuestas frecuentemente de material que presenta una densidad similar a aquellas zonas libres de defectos. Esto sin embargo, no significa que la variabilidad longitudinal de la masa no esté presente en elementos estructurales de madera, pero esta característica no es considerada en el presente estudio.

La variabilidad en la densidad de masa entre vigas es considerada a través de su PDF. Para determinar la misma, el PME en su versión para variables aleatorias continuas es aplicado. Las restricciones impuestas son las mismas que en el caso del MOE previamente analizado. Para hallar los parámetros de la PDF de la variable aleatoria densidad de masa (P), se utilizan datos experimentales presentados por Piter (2003), obtenidos mediante mediciones de densidad en probetas tomadas de 349 vigas aserradas de la especie estudiada. Las mediciones experimentales de la densidad de masa en cada uno de estas probetas fueron realizadas de acuerdo a los lineamientos de la norma EN 408 (1996).

En Köhler (2007), se representa la variabilidad de la densidad de masa entre vigas de maderas blandas Europeas con una PDF normal. En este trabajo, los parámetros de la PDF de la densidad de masa son estimados con la ayuda del MLM al igual que en la sección previa. Finalmente, las pruebas de bondad de ajuste K-S y A-D son utilizadas para elegir la PDF que se ajusta mejor a los datos experimentales. De igual modo que que en la sección previa, al utilizar este método se asumió un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, siendo el valor crítico para la prueba de bondad K-S de ajuste igual a $c = 1.36$. Los estadísticos de prueba obtenidos, los valores críticos y los resultados de las pruebas de ajustes se presentan en la Tabla 5.3.

Como puede observarse, las tres PDFs cumplen con el valor crítico de las pruebas, pero las distribuciones lognormal y gamma ajustan mejor los valores experimentales. Por

Tabla 5.3: Resultados de las pruebas de bondad de ajuste K-S y A-D de la densidad de masa.

PDF	Estadístico K-S $D\sqrt{n}$	Prueba de ajuste	Estadístico A-D A^*	Prueba de ajuste
Lognormal	0.65	$0.65 < 1.36$	0.39	$0.39 < 0.74$
Gamma	0.69	$0.69 < 1.36$	0.39	$0.39 < 0.75$
Normal	0.75	$0.75 < 1.36$	0.41	$0.41 < 0.74$
Normal truncada	0.75	$0.75 < 1.36$	0.42	$0.42 < 0.74$

lo tanto, siguiendo el PME y debido a las pequeñas diferencias obtenidas entre las distribuciones lognormal y gamma, esta última es adoptada para introducir la incertidumbre producida por la densidad de masa en el modelo estocástico. La PDF y CDF gamma de la variable aleatoria densidad de masa P son respectivamente:

$$f(x | \bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{\bar{b}^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a})} x^{\bar{a}-1} e^{-\frac{x}{\bar{b}}} \quad F(x | \bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{\bar{b}^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a})} \int_0^x t^{\bar{a}-1} e^{-\frac{t}{\bar{b}}} dt, \quad (5.7)$$

en donde $\bar{a} = 72.179$ y $\bar{b} = 7.659$ son, respectivamente, los parámetros de forma y de escala. El coeficiente de correlación lineal obtenido entre los valores del MOE y de la densidad de masa en cada uno de los 349 cuerpos de prueba es de 0.5. En Köhler *et al.* (2007), se presenta un valor de 0.6 para el coeficiente de correlación obtenido en maderas blandas Europeas. De acuerdo al trabajo de este último autor, el coeficiente de correlación obtenido de las piezas de *Eucalyptus grandis* muestra un nivel de correlación que puede clasificarse como medio/bajo entre estos parámetros. Además, Piter (2003) remarca que no es posible encontrar diferencias sustanciales para propósitos prácticos en los valores de densidad obtenidos en piezas de madera de las dos clases resistentes de mayor calidad de *Eucalyptus grandis*, de acuerdo al método de clasificación visual presentado en su trabajo, mientras que ambas clases exhiben pequeñas diferencias respecto a la tercer clase resistente de peor calidad. Cabe recordar que este método de clasificación visual es ligeramente modificado y luego es adoptado por la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006). El reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601 (2013) toma esta sugerencia y adopta un valor único de densidad de masa para las clases resistentes de madera estructural consideradas y lo aplica en la verificación de las condiciones de servicio. Teniendo en cuenta los resultados anteriores y los estudios efectuados acerca de

la relación entre el MOE y la densidad de masa, estas variables aleatorias se asumen como no correlacionadas en los estudios que siguen.

5.1.1.3. Amortiguamiento

En el caso de esta variable, no se cuentan de valores experimentales para su selección de manera tal que para determinar su PDF aplicaremos solamente el PME. Para ello se propone como restricción que se conoce el valor medio de la variable aleatoria y su intervalo. Para el valor medio, se adoptan los resultados presentados por Labonnote *et al.* (2013b) aplicables a piezas estructurales con frecuencias naturales menores de 35 Hz. Para determinar su intervalo suponemos que esta variable puede adoptar cualquier valor entre cero y dos veces su valor medio. En el caso de que la variable aleatoria continua X tenga un soporte compacto entre $[a, b]$ y su valor medio sea conocido $E[X] = \mu$, las restricciones pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\int_a^b p(x)dx = 1 \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{y} \quad \int_a^b xp(x)dx = \mu. \quad (5.8)$$

En este caso, la distribución densidad de probabilidad que maximiza la entropía de Shannon es la distribución exponencial truncada:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x), \quad (5.9)$$

en donde

$$e^{-\lambda_0} \int_a^b e^{-\lambda_1 x} dx = 1 \quad \text{y} \quad e^{-\lambda_0} \int_a^b x e^{-\lambda_1 x} dx = \mu. \quad (5.10)$$

5.1.2. Campos aleatorios

Un campo aleatorio puede definirse como un conjunto de variables aleatorias que evoluciona en función de un parámetro. En la presente tesis este parámetro es la longitud de la viga. En la presente sección, se describirán los métodos utilizados para el desarrollo de modelos de campos aleatorios aplicables a la representación de la variabilidad longitudinal del MOE en piezas estructurales de *Eucalyptus grandis*. Previamente, fue definida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria que representa dicha propiedad mecánica. La sección siguiente presenta los dos modelos de campos aleatorios desarrollados en la presente tesis:

- Modelos basados en perfiles de rigidez continuos:
 - Transformación de Nataf.
 - Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève
- Modelo de zonas débiles.

Debido a su origen natural, la madera estructural es caracterizada por una considerable variabilidad longitudinal en sus propiedades mecánicas. Sin embargo, estas propiedades tratadas usualmente como variables aleatorias y su variabilidad espacial no es tenida en cuenta explícitamente en la práctica del diseño estructural. El diseñador estructural utiliza las propiedades establecidas en los códigos las cuales son aplicadas en el cálculo de pieza completa sin considerar que los defectos y propiedades materiales (dentro de los límites establecidos por los métodos de clasificación por resistencia) varían a lo largo de la misma. Los defectos del material como por ejemplo los nudos son la principal fuente de variabilidad longitudinal de la resistencia a flexión y de la rigidez en las piezas de madera estructural.

5.1.2.1. Modelos basados en perfiles de rigidez continuos

Los modelos basados en perfiles de rigidez continuos utilizados en la presente tesis se simulan a partir de campos aleatorios utilizando la Transformación de Nataf (Subsección 3.2.2.1) y la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève (Subsección 3.2.2.2). Para la aplicación de ambos métodos es necesario definir la distribución de probabilidad marginal y la función de correlación a utilizar. El primero de estos dos elementos ya ha sido definido en la sección anterior. De manera distinta a los trabajos de referencia utilizados en la presente tesis, la información experimental empleada para la determinación de la distribución del MOE fue obtenida del ensayo de flexión con dos cargas ubicadas en los tercios de las piezas completas. La construcción de un modelo estocástico adecuado partiendo de estos valores experimentales supone una ventaja en comparación con los modelos que emplean una descripción más precisa del material y por lo tanto son mas costosos de desarrollar.

Función de correlación

La estructura del campo aleatorio se describe a través de la función de correlación. Tradicionalmente, dos tipos de estructuras de correlación han sido empleadas en los trabajos de referencia relacionados con la representación de la variabilidad longitudinal de

las propiedades mecánicas de la madera. El primer tipo de estructura de correlación es aquella que ese define como dependiente de la distancia, de la separación de los puntos considerados; y el segundo tipo es el modelo de equi-correlación. En concordancia con los Modelos de Perfiles Continuos de Rigidez (CSPM), los cuales emplean frecuentemente estructuras de correlación con propiedades de Markov, se adopta la función de correlación exponencial propuesta por Czmocho (1998). La misma, esta basada en una serie de ensayos experimentales llevados a cabo en vigas de especies coníferas con un grado de calidad K24 de acuerdo a la norma Sueca SBN 1980 (1981). La función de correlación tiene la siguiente expresión:

$$\rho_{ij} = \exp \left(-2 \frac{|x_c^{(j)} - x_c^{(i)}|}{d} \right), \quad (5.11)$$

en donde d es la longitud de correlación la cual controla el decaimiento de la correlación entre las variables aleatorias a lo largo del espacio. Los valores considerados para este parámetro son $d = 1.34$ m (d_1) y $d \rightarrow \infty$ (d_∞). Cuando se cumple este último, $d \rightarrow \infty$, el campo aleatorio se vuelve totalmente correlacionado y en el límite puede interpretarse como una variable aleatoria. Esto representa un elemento estructural con un valor homogéneo y estocástico del MOE. Este es el caso utilizado comúnmente en el diseño estructural y en algunos estudios de confiabilidad. Czmocho (1998) encontró experimentalmente que la longitud de correlación del MOE en vigas de especies coníferas de tamaño estructural, es aproximadamente 1.4 m para cargas dentro del rango de servicio, y el mismo parámetro llega a un valor cercano a 0.7 m para niveles de carga cercanos a la rotura de la pieza. Estos valores de longitud de correlación fueron determinados en vigas con dimensiones y niveles de carga durante los ensayos similares a los empleados en esta tesis. El *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina presenta un valor muy alto en la relación MOE/densidad, más similar al adoptado en las normas Europeas para las especies coníferas que el correspondiente a las especies latifoliadas, (Pitter, 2003). Por lo tanto, siguiendo los resultados publicados en el trabajo de referencia, es posible asignar un grado resistente C30 a piezas de alta calidad del *Eucalyptus grandis* de Argentina, un grado C24 a piezas de calidad intermedia, y un grado C18 a las piezas de baja calidad de acuerdo al sistema internacional establecido en la norma EN 338 (2009). Estas clases resistentes pertenecen a especies coníferas. A continuación en esta sección, se presentan los métodos utilizados para la simulación de perfiles de rigidez continuos.

Transformación de Nataf

Como hemos especificado anteriormente, las distribuciones marginales en cada punto del espacio corresponden a distribuciones gamma. Por lo tanto para aplicar la transformación de Nataf es necesario transformar los coeficientes de correlación de la matriz de correlación de un espacio con distribuciones marginales normal estándar a uno con distribuciones marginales gamma (Subsección 3.2.2.1). Luego, se aplican los pasos presentados en el Apéndice A. Por lo tanto el valor del coeficiente F que relaciona los coeficientes de correlación en cada espacio probabilístico se define como:

$$F = \frac{\rho_{0ij}}{\rho_{ij}} = 1,022 + 0,022\rho_{ij} - 0,012(\delta_i + \delta_j) + 0,001\rho_{ij}^2 + 0,125(\delta_i^2 + \delta_j^2) - 0,077\rho_{ij}(\delta_i + \delta_j) + 0,014\delta_i\delta_j, \quad (5.12)$$

en donde δ_i y δ_j son los coeficientes de variación. Cuando $\delta_i = \delta_j$ se asume que el campo aleatorio es homogéneo y estacionario.

Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève

Para la implementación de la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève es necesario determinar los valores propios y la funciones de propias de la función de covarianza exponencial de un proceso estocástico w con parámetro x definido para $x \in [-b, b]$. Utilizando la versión normalizada de la función de covarianza, función de correlación, las funciones propias $\psi_i(x)$ y sus correspondientes valores propios λ_i se obtienen de la siguiente integral:

$$\int_{-b}^b \exp(-c|x_1 - x_2|) \psi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \psi_i(x_1), \quad (5.13)$$

en donde $c = 2/d$. La Ecuación (5.13) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\int_{-b}^{x_1} \exp(-c(x_1 - x_2)) \psi_i(x_2) dx_2 + \int_{x_1}^b \exp(-c(x_2 - x_1)) \psi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \psi_i(x_1). \quad (5.14)$$

Diferenciando la Ecuación (5.14) dos veces respecto a x_1 se obtiene una ecuación diferencial en términos de ψ_i . Resolviendo esta Ecuación resultante (*cf.* Ghanem y Spanos, 1991) se obtiene la siguiente expresión para los valores propios λ_i :

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{2d}{1 + d^2 w_i^2} & \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2d}{1 + d^2 v_i^2} & \text{para } i = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

y para las funciones propias $\psi_i(x)$:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \sin(w_i x) / \sqrt{b - \frac{\sin(2w_i b)}{2w_i}} & \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \\ \sin(v_i x) / \sqrt{b + \frac{\sin(2v_i b)}{2v_i}} & \text{para } i = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

en donde w_i y v_i son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} dw + \tan(wb) = 0 & \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \\ 1 - dv \tan(vb) = 0 & \text{para } i = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Luego, serán aplicados y comparados los procedimientos de Mulani (2006) y de Phoon *et al.* (2002) presentados en la Subsección 3.2.2.2 para hallar las variables aleatorias que forman las bases de la Expansión de Karhunen-Loève de un proceso estocástico no Gaussiano $\xi_i(\theta)$.

5.1.2.2. Campos aleatorios: Modelos de zonas débiles

El modelo de representación de la variabilidad en las propiedades mecánicas a través de zonas débiles parte de la simulación de los nudos en piezas de tamaño estructural. Por zona débil se entiende aquellas zonas que incluyen tanto al nudo propiamente dicho como a la zona adyacente al mismo en donde se produce una desviación local de las fibras como se puede observar en la Figura 5.1. Al igual que los modelos de esta familia descritos en la Revisión de la Literatura, el modelo propuesto no considera la presencia de médula. Pudiendo de esta manera simular piezas de *Eucalyptus grandis* de calidad C1, C2 y C3 sin considerar en esta última clase resistente elementos estructurales con presencia de médula. Este modelo permite representar tanto la variabilidad del MOE así como la del segundo momento de área. Es conocido el efecto que tienen los nudos en las propiedades mecánicas del material y la reducción localizada del MOE que se produce en las zonas débiles. Los modelos estocásticos de zonas débiles presentados en las referencias consideran una longitud de zona débil con un valor fijo y tampoco tienen en cuenta la posición del nudo dentro de la sección transversal de la pieza. La influencia de la posición del nudo dentro de la sección transversal solo puede encontrarse en trabajos con modelos determinísticos y por lo tanto con posiciones fijas establecidas previamente. La asignación de los valores del MOE se realizan en función del tamaño de los nudos considerando para

ello el mismo esquema de clases resistentes establecido en el método de clasificación visual del material.



Figura 5.1: Nudos en piezas de *Eucalyptus grandis*, zonas débiles.

Simulación de nudos

En este modelo de campo aleatorio, la asignación de los valores del MOE esta dada en función de los tamaños de los nudos y su posición a lo largo de las piezas estructurales. Para simular los nudos de la madera, se definió la Función Masa de Probabilidad Conjunta (JPMF, en inglés) de los parámetros que determinan las formas de los nudos (O , Q , R) dentro de la sección transversal de los elementos estructurales. Además, las Funciones Masa de Probabilidad (PMF, en inglés) de las distancia entre nudos (U) y de su longitud (W) en la dirección paralela al eje longitudinal del elemento estructural también fueron obtenidas. Para hallar estas distribuciones que definen las características de posición y formas de los nudos, se utilizaron datos experimentales provenientes del relevamiento visual de 25 vigas de *Eucalyptus grandis* de tamaño estructural con 180 nudos. La sección nominal de estas vigas empleadas en el relevamiento visual es de 50 mm x 150 mm y las mismas tienen además una longitud de 3 m. La distancia entre nudos, sus dimensiones en las direcciones perpendicular y paralela al eje longitudinal de las vigas, su profundidad (en los casos posibles) y su posición dentro de la sección transversal de las vigas, fueron las características de los nudos consideradas durante el relevamiento visual.

Considerando los parámetros visuales relevados, los nudos fueron clasificados en cuatro tipos (Figura 5.2):

- I - Nudos con una profundidad igual que el ancho del elemento estructural y con una posición vertical dentro de la altura de la pieza estructural.

- II - Nudos con una profundidad menor que el ancho del elemento estructural y con una posición vertical dentro de la altura de la pieza estructural.
- III - Nudos con una profundidad menor que el ancho del elemento estructural y con una posición vertical cercana a los extremos de la sección transversal de la pieza estructural.
- IV - Nudos con una profundidad igual que el ancho del elemento estructural y con una posición vertical cercana a los extremos de la sección transversal de la pieza estructural.

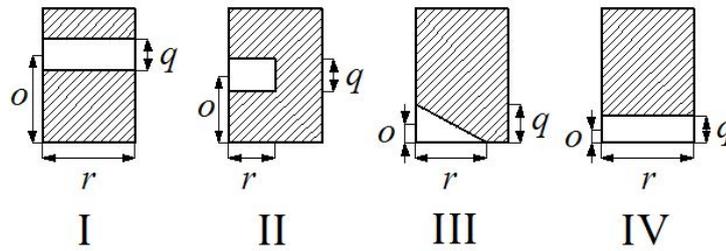


Figura 5.2: Clasificación de los nudos respecto a su forma y variables consideradas en la Función Masa de Probabilidad Conjunta (JPMF).

Teniendo en cuenta los parámetros que definen la posición y las características dimensionales de los nudos dentro de la sección transversal de los elementos estructurales, se construyó la JPMF con el objetivo de simular las dimensiones de los mismos y su posición dentro de la sección transversal de las piezas estructurales:

$$\begin{aligned}
 p_{O,Q,R}(o, q, r) &= p_R(r | o, q)p_Q(q | o)p_O(o) \\
 &= P[R = r | O = o, Q = q]P[Q = q | O = o]P[O = o], \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

en donde las variables aleatorias y sus valores estadísticos son (ver Figura 5.2, letras mayúsculas indican variables aleatorias):

- O es la posición del centro del nudo dentro de la altura de la sección transversal del elemento estructural. Esta variable aleatoria tiene un valor medio $\mu = 61.62$ mm y un desvío estándar $\sigma = 38.77$ mm. El espacio muestral está comprendido entre 10 mm y 136 mm.
- Q es la altura del nudo (dimensión perpendicular al eje longitudinal del elemento estructural). Esta variable aleatoria tiene un valor medio $\mu = 23.95$ mm y un desvío estándar $\sigma = 11.46$ mm. El espacio muestral está comprendido entre 5 mm y 50 mm.

- R es la profundidad del nudo dentro del ancho de la sección transversal del elemento estructural. Esta variable aleatoria tiene un valor medio $\mu = 20.22$ mm y un desvío estándar $\sigma = 11.49$ mm.

En los nudos tipo II, las vigas de madera empleadas para el relevamiento visual no fueron cortadas a través de la sección transversal que contiene el nudo para determinar su profundidad r debido a que esta acción no permitiría disponer de la pieza para realizar otros ensayos mecánicos. Debido a la falta de información sobre esta variable aleatoria, se aplica el Principio de Máxima Entropía (PME) (Shannon, 1948), presentado en la Subsección 3.1.2, para obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria R . La medida de la incertidumbre de la variable aleatoria discreta R esta definida por la siguiente expresión:

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i), \quad (5.16)$$

en donde S es la entropía de la variable aleatoria R la cual puede asumir n valores diferentes y p_i es su probabilidad. Se desea determinar la función masa de probabilidad p de la variable aleatoria R , de manera tal que se cumpla la siguiente restricción:

$$p_1 + \dots + p_n = 1, \quad \text{en donde} \quad p_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.17)$$

Se verifica que para la restricción planteada la función que maximiza la entropía es una función uniforme:

$$p_i = \frac{1}{n} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.18)$$

Las variables aleatorias que definen la distancia entre los nudos y su dimensión en la dirección paralela al eje longitudinal del elemento estructural, son respectivamente:

- U es la distancia entre nudos en la dirección paralela al eje longitudinal de la pieza estructural. Esta variable aleatoria tiene un valor medio $\mu = 288.62$ mm y un desvío estándar $\sigma = 175.52$ mm. El espacio muestral está comprendido entre 15 mm y 1040 mm.
- W es la longitud del nudo (dimensión coincidente con la dirección del eje longitudinal del elemento estructural). Esta variable aleatoria tiene un valor medio $\mu = 40.19$ mm y un desvío estándar $\sigma = 21.36$ mm. El espacio muestral está comprendido entre 8 mm y 105 mm.

La dimensión del nudo en la dirección paralela al eje longitudinal del elemento estructural w esta relacionada con la dimensión del nudo en la dirección perpendicular a dicho eje llamada q . Estas variables aleatorias están definidas por su JPMF $p_{Q,W}(q, w)$. La variable aleatoria U se considera independiente de las otras debido al hecho de que no hay una evidencia fuerte acerca de la relación entre la posición del nudo a lo largo de las piezas y las variables que definen su geometría.

Con el objetivo de validar el modelo numérico con datos experimentales, y debido a que la geometría de los nudos es discreta, las PMFs constituyen una elección natural para modelar estocásticamente las dimensiones de los mismos. Sumado a que la densidad de datos es considerada suficiente para representar estadísticamente estas variables aleatorias, el uso de este tipo de distribución se extiende en todo el estudio. Otra posible opción sería utilizar la Transformación de Nataf (Subsección 3.2.2.1) para la construcción de una Función Densidad de Probabilidad Conjunta (JPDF).

Campo aleatorio del Módulo de Elasticidad (MOE)

Los valores del MOE en el modelo de zonas débiles son asignados en función del coeficiente de nudosidad (K) de cada nudo o de un agrupamiento de nudos, según sea el caso. La dimensión del nudo para el cálculo de la nudosidad (K) se considera como la distancia entre las dos tangentes al mismo, paralelas al eje de la pieza estructural. Determinamos como k_1 a la dimensión del nudo cuando el mismo se encuentra aislado, separado de los nudos cercanos en una distancia mayor que la dimensión mayor de la sección transversal de la pieza. En el caso de que esta distancia sea menor, se define un agrupamiento de nudos (knots cluster, en inglés) el cual incluye a todos los nudos involucrados. La longitud de este agrupamiento de nudos se asume igual a la dimensión mayor de la sección transversal de la pieza. En este último caso, se define el coeficiente de dimensiones de nudos k_2 , el cual considera la suma de todas las dimensiones k_1 (sin solapamientos) de los nudos incluidos dentro del agrupamiento de nudos. Además, se define como k_3 a la dimensión transversal de la superficie sobre la cual aparecen. El coeficiente de nudosidad (K) se obtiene como k_1/k_3 ó k_2/k_3 , dependiendo de las situaciones previamente descritas. Este coeficiente de nudosidad es el adoptado por el método de clasificación visual por resistencia presentado en la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006).

En las secciones de las piezas estructurales con K igual a cero (*i.e.* secciones libres de nudos), los valores del MOE son asignados a través de la Transformación de Nataf. En

las secciones de los elementos estructurales con un valor de K diferente de cero (secciones con nudos), los valores del MOE son variables aleatorias no correlacionadas asignadas a través de su Función Densidad de Probabilidad (PDF) definida para cada valor de K .

El modelo de zonas débiles propuesto es similar al modelo propuesto por Isaksson (1999), para el estudio de la capacidad de cargas en vigas. Pero, a diferencia del modelo citado, el modelo presentado en esta tesis considera la variabilidad longitudinal del MOE en las secciones sin nudos. En el modelos de zonas débiles, la madera estructural es modelada como un elemento formado por secciones débiles de reducida longitud conectadas por secciones de mayor longitud formadas por madera libre de defectos. La longitud de las zonas débiles individuales de cada nudo es proporcional a cinco veces la mayor dimensión de los nudos (q, w). Esta característica fue observada en el relevamiento visual de los nudos más particularmente en la observación de las zonas en las cuales se desvían las fibras a su alrededor. El MOE en estas zonas es constante y asignado de forma aleatoria en función del valor de K . En la Tabla 5.4, se presentan las PDFs marginales del MOE para cada valor de K en donde a y b son los parámetros de forma y escala de la distribución gamma del MOE. Los mismos han sido obtenidos luego de clasificar los resultados presentados en Piter (2003) de acuerdo al criterio establecido en la Tabla.

Tabla 5.4: Parámetros de la PDF marginal gamma del MOE para cada valor de K .

Parámetros	$E(x) \rightarrow$	$E_i \rightarrow$	$E_i \rightarrow$	$E_i \rightarrow$
	$K = 0$	$0 < K \leq 1/3$	$1/3 < K \leq 2/3$	$2/3 < K$
\bar{a}	31.301	42.730	35.370	35.464
\bar{b}	0.508	0.315	0.364	0.328
μ (GPa)	15.89	13.46	12.87	11.63
σ (GPa)	2.83	2.06	2.16	1.95
$\delta = \sigma/\mu$	0.18	0.15	0.17	0.17

5.2. Propagación de incertidumbres utilizando Perfiles de Rigidez Continuos

5.2.1. Deflexiones en vigas

La madera estructural exhibe una importante variabilidad en sus propiedades mecánicas. Por lo tanto, el análisis del comportamiento estructural de vigas de madera requiere la inclusión de esta variabilidad con el objetivo de obtener resultados significativos. El comportamiento estructural de estas piezas debe satisfacer dos requerimientos principales. El primero de ellos es la resistencia, expresada en términos de la capacidad de carga. El otro requerimiento es la serviciabilidad, la cual se refiere a la capacidad del sistema estructural de desenvolverse satisfactoriamente bajo su uso normal. Por esta razón, este requerimiento es muy importante en el diseño estructural. Las reglas del diseño estructural brindan recomendaciones para limitar tanto las deformaciones instantáneas como las totales, las cuales pueden ser utilizadas en ausencia de información mas precisa. Una relación lineal entre la deformación total y la instantánea es usualmente asumida en las reglas de diseño incluidas en los códigos. En dichas normas, las deflexiones instantáneas son obtenidas mediante las soluciones estándar basadas en la teoría elemental de vigas considerando el valor del MOE constante a lo largo de las piezas estructurales.

En la presente sección, se propone un modelo estocástico de la variabilidad longitudinal del MOE aplicable a vigas de madera aserradas de *Eucalyptus grandis* cultivado en la Mesopotamia Argentina que sea capaz de aumentar la predictibilidad de las deflexiones en el centro del tramo con respecto a la suposición tradicional de un MOE constante a lo largo de la longitud de la viga. El modelo estocástico utilizado en esta sección es el de Perfiles de Rigidez Continuos, compuesto de la distribución marginal del MOE y una estructura de correlación. Para presentar el modelo estocástico, en una primera instancia, los resultados obtenidos de los dos modelos teóricos de vigas más conocidos (*i.e.* Euler-Bernoulli y Timoshenko) con las propiedades materiales aplicables a cada una de ellas (MOE global y local, respectivamente), son comparadas con resultados experimentales. A continuación, luego de que la teoría de vigas más apropiada en conjunto con las propiedades materiales correspondientes son elegidas, se presentarán las herramientas utilizadas para la construcción del modelo estocástico. En este caso y para la obtención de un modelo material más realista, se emplean la Transformación de Nataf y la Expansión no Gaussia-

na de Karhunen-Loève y se comparan los resultados obtenidos de las mismas utilizando en conjunto el Método de Monte Carlo (MMC) y el Método de los Elementos Finitos Estocásticos (SFEM). Los resultados numéricos obtenidos son validados con mediciones de deformaciones obtenidas experimentalmente para estudiar la aplicabilidad del modelo. Finalmente, se presenta el estudio de las condiciones de servicio en vigas de madera. Para ello, se contrastan los límites recomendados para las deflexiones instantáneas por el Reglamento Argentino de Estructuras de Madera (CIRSOC 601, 2013). El método de Monte Carlo es empleado para llevar a cabo este análisis. El modelo numérico-estocástico que tiene en cuenta la variabilidad longitudinal del MOE conduce a una predicción más precisa del comportamiento en servicio que el modelo con un MOE constante a lo largo de la longitud de la viga.

5.2.1.1. Planteo del problema

El estudio de las deflexiones en una viga de madera simplemente apoyada es presentado en esta sección. La deflexión en el centro del tramo $v(L/2)$ puede ser evaluada luego de resolver la ecuación de movimiento de vigas bajo la formulación de Euler-Bernoulli (E-B):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(e(x) i(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) = f(x), \quad (5.19)$$

en donde $v(x)$ es el desplazamiento transversal de la viga, $e(x)$ es el MOE, $i(x)$ es el segundo momento de área con respecto al eje z y $f(x)$ es la carga externa aplicada. Esta expresión es ampliamente utilizada en el cálculo de las deflexiones instantáneas y su subsecuente comparación con los límites establecidos en los reglamentos de diseño. A pesar de que la mayoría de los resultados que serán presentados en la sección están basados en la teoría de vigas E-B, también se presentan resultados obtenidos a través de la formulación para vigas de Timoshenko. El sistema de ecuaciones de movimiento en este caso se expresa como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[g(x) a(x) \kappa \left(\psi(x) + \frac{dv(x)}{dx} \right) \right] + f(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(e(x) i(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right) - g(x) a(x) \kappa \left(\psi(x) + \frac{dv(x)}{dx} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

en donde $g(x)$ es el módulo de corte, $a(x)$ es la sección transversal de la viga, κ es el factor de corrección por corte y $\psi(x)$ indica la rotación alrededor del eje z .

La variabilidad longitudinal del MOE es representada mediante el campo aleatorio $E(x)$. En lo que sigue de la sección, el uso de letras mayúsculas se aplicará tanto a campos como a variables aleatorias. Un valor determinístico es asumido para el segundo momento de área i_0 . El MOE modelado como variable aleatoria E , y en consecuencia constante a lo largo de la longitud de la viga, se obtiene como un caso particular del campo aleatorio. La Ecuación (5.19) es reescrita nuevamente considerando los parámetros aleatorios $E(x)$ y $V(x)$ se presenta de la siguiente manera:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)i_0 \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right) = f(x). \quad (5.21)$$

5.2.1.2. Discretización mediante el Método de los Elementos Finitos

Definimos la formulación variacional prescribiendo un conjunto de funciones admisibles ψ :

$$\int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e(x)i(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) - f(x) \right] \phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in \psi. \quad (5.22)$$

Para una viga simplemente apoyada en sus extremos,

$$\psi = \{ \phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ es definida por tramos } \mathcal{C}^2 \text{ y acotada, } \phi(0) = 0, \phi(L) = 0 \}. \quad (5.23)$$

Esta formulación, en conjunto con las condiciones de borde, conducen a la siguiente forma del problema variacional:

$$K(v, \phi) - F(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \psi, \quad (5.24)$$

en donde $F(\phi)$ y $K(v, \phi)$ son los operadores de fuerza y rigidez respectivamente. La Ecuación (5.24) es aproximada numéricamente a través del método de Galerkin. Luego, aplicando la metodología estándar del Método de los Elementos Finitos la forma variacional del problema, es discretizada utilizando elementos viga bajo la formulación E-B presentados en la Subsección 4.3.4.1. Finalmente, después de ensamblar las matrices de rigidez de los elementos y los vectores de fuerzas nodales, la siguiente ecuación matricial es obtenida:

$$[K] \{d\} = \{F\}, \quad (5.25)$$

en donde $[K]$ es la matriz de rigidez global definida positiva de tamaño $n \times n$, $\{d\}$ es el vector global de desplazamientos nodales de tamaño $n \times 1$ y $\{F\}$ es el vector global de fuerzas nodales de tamaño $n \times 1$.

5.2.1.3. Teorías de vigas y propiedades materiales

Comenzaremos esta sección con el estudio de la teoría de Euler-Bernoulli (E-B) y la teoría de Timoshenko (T) y su aplicación al cálculo de deflexiones en vigas de madera. Las propiedades del material utilizadas para el cálculo de deformaciones relacionadas a cada una de ellas se encuentran de manera implícita. El MOE local (E_{local}) el cual se encuentra libre de las influencia de los efectos de corte, es más representativo del comportamiento a flexión pura del material. Este valor del MOE se aplica utilizando la teoría de vigas de Timoshenko considerando el módulo de corte G , el cual es obtenido de las relaciones $G = E_{local}/16$, $G = E_{local}/15.94$ y $G = E_{local}/16.07$ de acuerdo con lo establecido en la norma EN 338 (2009) para las clases resistentes C30, C24 y C18, respectivamente. El MOE global (E_{global}) incluye en su obtención las zonas de las vigas solicitadas por esfuerzo de corte, por lo tanto este valor es representativo de la rigidez a flexión global de la viga. Este valor del MOE se utiliza en la teoría de vigas E-B para el cálculo de deflexiones. Valores analíticos de deflexiones fueron obtenidos de acuerdo a los lineamientos previamente descritos considerando las dimensiones y propiedades mecánicas de la muestra S4. Como resultado de esta comparación, las deflexiones analíticas obtenidas bajo la teoría de E-B utilizando el E_{global} resultaron más cercanas a los resultados experimentales en el 70 % de la muestra. Los resultados de la comparación entre valores experimentales y analíticos utilizando ambas teorías en la muestra S4 se muestran en la Figura 5.3. Los ejes verticales y horizontales indican las desviaciones teóricas de las deformaciones obtenidas partiendo de las teorías de Timoshenko y de Euler-Bernoulli respecto de las deformaciones medidas en forma experimental ($(v(L/2)_T - v(L/2)_{Exp}) \%$ y $(v(L/2)_{E-B} - v(L/2)_{Exp}) \%$), respectivamente. El gráfico izquierdo corresponde a las vigas de la muestra S4 clasificadas visualmente, mientras que el gráfico de la derecha corresponde a las mismas vigas clasificadas de forma mecánica. Como puede observarse, al utilizarse la teoría de E-B se obtiene un mayor ajuste respecto a los resultados experimentales y no se observa una dependencia de la calidad de las vigas bajo ninguno de los métodos de clasificación empleados. Esta comparación fue llevada a cabo debido a que algunos códigos de diseño estructural, como por ejemplo el Eurocode 5 (Porteous y Kermani, 2007) y la norma NDS (2005), incluyen los efectos de la deformación por corte en el cálculo de las deflexiones de manera explícita a través del uso de la teoría de Timoshenko. Sin embargo, de acuerdo a los resultados de esta sección, la teoría de E-B se ajustó mejor a los resultados experimentales.

Un estudio experimental acerca de la relación que existe entre el MOE global y local

en vigas aserradas de *Eucalyptus grandis* de Argentina fue presentado en Piter *et al.* (2003). En dicho trabajo, se reporta que el MOE local presenta un valor medio mayor que el correspondiente al MOE global en un porcentaje que varía entre 6% y 7%.

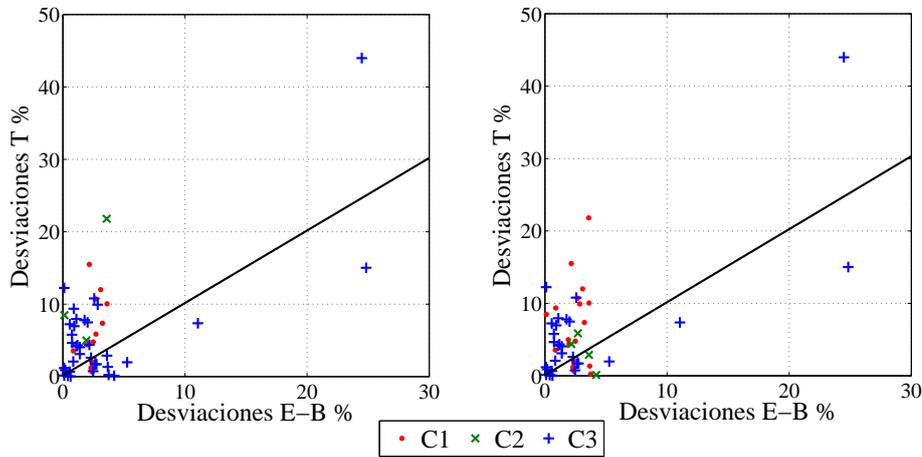


Figura 5.3: Diferencias porcentuales entre deflexiones medidas en ensayos experimentales y deflexiones numéricas obtenidas a través de las teorías de viga de Euler-Bernoulli y Timoshenko. Gráfico izquierdo: vigas clasificadas visualmente, gráfico derecho: las mismas vigas clasificadas mecánicamente.

Debe aclararse que aunque el valor de G empleado en el análisis previo es un valor estimado, no medido experimentalmente, la relación E_{local}/G es utilizada usualmente en la práctica ingenieril. Por lo tanto, las fuentes de discrepancias entre los resultados numéricos y los experimentales puede deberse no solamente a la selección de una determinada teoría (E-B ó T) para el cálculo de deflexiones sino también al valor estimado de G .

A pesar del hecho de que la aplicación de la teoría de vigas E-B utilizando el MOE global constante a lo largo de la viga ha demostrado una precisión relativa en la predicción de las deflexiones en el centro del tramo de la muestra S4, los resultados analíticos obtenidos bajo esta suposición han conducido a resultados satisfactorios en algunas de las vigas de la muestra. Por lo tanto, en lo que sigue, se presentará un mejoramiento en la predicción de las deflexiones en el centro de tramo basado en la aplicación de un enfoque estocástico.

5.2.1.4. Variabilidad longitudinal del MOE

Dos métodos para simular la variabilidad longitudinal del MOE son empleados y comparados. Uno de ellos es la Transformación de Nataf (NT) y el otro es la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève (NGKL). Ambos métodos de modelado estocástico utilizados en combinación con el Método de los Elementos Finitos (FEM) convergen en el Método de los Elementos Finitos Estocásticos (SFEM). Para implementar cada uno de estos métodos, es necesario emplear una técnica de discretización. En el primer caso, el método de discretización puntual utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre con nueve puntos es aplicado, mientras que en el segundo caso, la Expansión de Karhunen-Loève en sí misma conduce a una técnica de discretización (Subsección 4.4.3).

Es evidente que, si la entrada es aleatoria, los resultados también serán aleatorios. En la Figura 5.4, se muestra un estudio de convergencia realizado en base a los valores obtenidos de deflexiones en el centro del tramo de una viga para el campo aleatorio del MOE simulado a través de la NT. En la figura mencionada, ns es el número de simulaciones independientes obtenidas a través del Método de Monte Carlo, $E[V(L/2)]$ es el valor medio de la deflexión en el centro del tramo y $\sigma[V(L/2)]$ es el desvío estándar de la variable aleatoria $V(L/2)$. Debido a la forma simple de la PDF de $V(L/2)$, se adoptó el siguiente criterio de convergencia: $|E[V(L/2)_{ns}] - E[V(L/2)_{ns-200}]| \leq 0,05$ mm, en donde $E[V(L/2)_{ns}]$ es el valor medio de la deflexiones en el centro del tramo para un número de simulaciones igual a ns y $E[V(L/2)_{ns-200}]$ es el valor medio de las deflexiones en el centro del tramo para un número de simulaciones $ns - 200$. Se obtuvo una rápida convergencia tanto para el valor medio ($E[V(L/2)]$) como para el desvío estándar ($\sigma[V(L/2)]$) para los valores de longitud de correlación d considerados. Este estudio se llevo a cabo con el objetivo de determinar el número necesario de simulaciones con el cual se obtiene un grado de precisión prescrito teniendo en cuenta los resultados que se mostrarán más adelante.

Las similitudes y diferencias entre las dos maneras de modelar el MOE (*i.e.*, como una variable aleatoria o como un campo aleatorio) pueden observarse en la Figura 5.4. El valor medio de $V(L/2)$ permanece aproximadamente igual al considerarse ambos modelos. En cambio, las diferencias se hacen evidentes en el desvío estándar de $V(L/2)$, las curvas en la Figura 5.4 (gráfico derecho) se encuentran evidentemente separadas. Esta última observación constituye la diferencia principal que exhibe el modelado estocástico considerando la variabilidad longitudinal del MOE, y su influencia en la respuesta estructural será analizada y discutida en las siguientes sub-secciones.

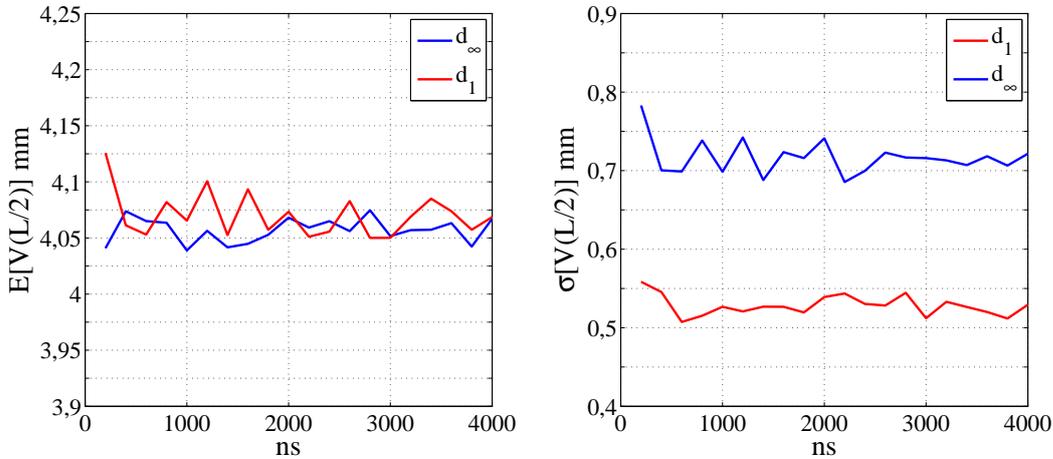


Figura 5.4: Convergencia del valor medio $E[V(L/2)]$ y del desvío estándar $\sigma[V(L/2)]$ para las longitudes de correlación d_1 y d_∞ .

La aplicación de la NGKL requiere la definición del número de términos necesario para una adecuada representación del campo aleatorio y sus propiedades. Además, se requiere la determinación de las variables ξ_i ; para ello, en primera instancia, se comparan los métodos presentados en Mulani (2006) y en Phoon *et al.* (2002). En la Figura 5.5, se presentan los resultados de la comparación de ambos métodos. El procedimiento presentado en el último trabajo de referencia fue aplicado partiendo de una distribución de probabilidad *t de Student* con media cero y varianza uno. En la sexta iteración del método se logra una buena convergencia entre las distribuciones de probabilidad marginales prescrita y simulada (gráfico central) y la función de covarianza prescrita y simulada (gráfico derecha). La distribución de probabilidad de las variables ξ se aproxima a la establecida por el método de Mulani indicada como gamma en todos los gráficos. Al ser la distribución de probabilidad del MOE ligeramente no gaussiana, el último método que no necesita de iteraciones, muestra ser el más adecuado para la aplicación de la Expansión NGKL. Luego, en la Figura 5.6 se muestran los resultados obtenidos utilizando este método, y además, se comparan con la PDF de las deflexiones en el centro del tramo ($f(V(L/2))$) obtenidas utilizando la NT. Como puede observarse en la Figura 5.6, la aproximación de la función de covarianza (gráfico central) mejora en todos los puntos del espacio considerado cuando se consideran más de 20 términos en la NGKL. La comparación entre la PDF de $V(L/2)$ (Figura 5.6, gráfico de la derecha) obtenida a través de la NGKL y de la

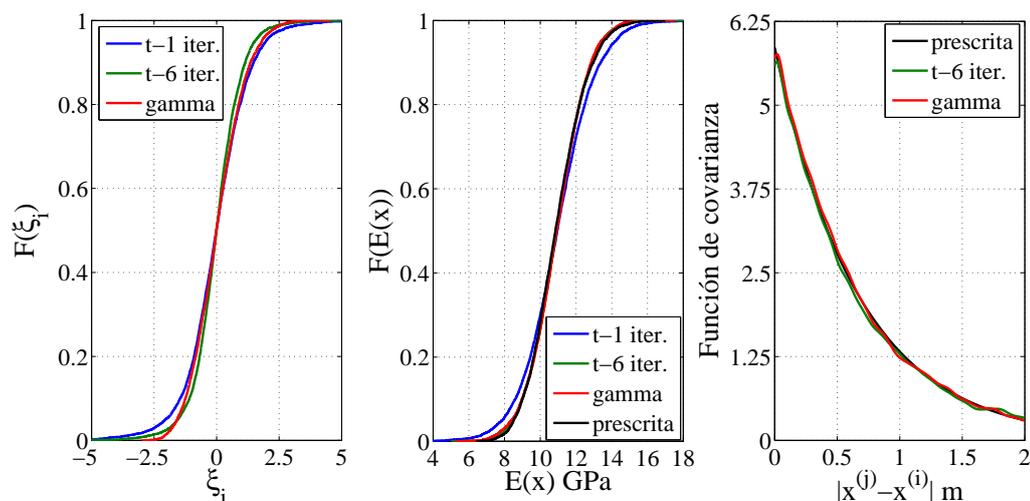


Figura 5.5: Comparación entre los métodos de Phoon *et al.* (2002) (azul y verde) y Mulani (2006) (rojo) en la aplicación de la Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève.

NT muestra que ambas herramientas probabilísticas empleadas para la simulación de la variabilidad longitudinal del MOE, conducen a resultados similares. No se han observado diferencias sustanciales en la utilización de ambos métodos, aunque la expansión NGKL exhibe ventajas prácticas en su implementación.

5.2.1.5. Validación numérica del modelo estocástico

En esta sección se presenta la validación del método numérico/estocástico a través de resultados experimentales de la deflexión en el centro del tramo de vigas simplemente apoyadas provistos por Piter (2013). Los datos experimentales fueron obtenidos de ensayos de flexión realizados con las muestras S2, S3 y S4. Las mismas fueron seleccionadas debido al hecho de que la estructura de correlación del campo aleatorio se obtuvo para vigas con dimensiones similares a las que presentan estas muestras. Los parámetros dimensionales empleados en la simulación numérica se listan en la Tabla 5.5. Estos parámetros dimensionales corresponden a valores medios obtenidos de las 50 vigas de cada muestra. Los siguientes valores de cargas fueron considerados [carga inicial, (salto de carga), carga final]: [0.6, (0.6), 2.4] kN para la muestra S2; [0.8, (0.8), 4] kN para la muestra S3; [0.9, (0.9), 3.6] kN para 27 vigas de la muestra S4 y [1.2, (1.2), 2.4] kN para 23 vigas de la misma muestra. La primera sub-muestra de S4 está compuesta por: 7 vigas C1, 2 vigas C2 y 18

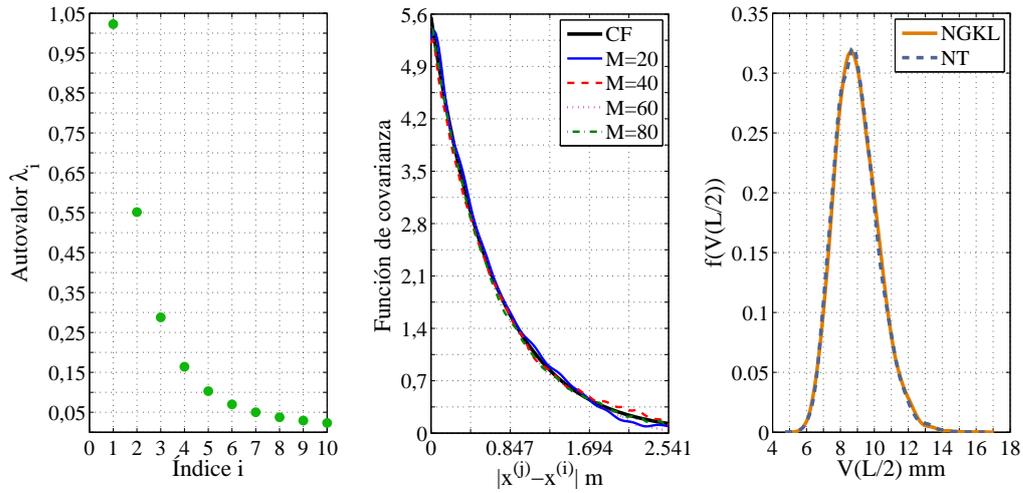


Figura 5.6: Campo aleatorio del MOE. Comparación entre NT y NGKL. Gráfico izquierdo: primeros diez autovalores de la función de covarianza. Gráfico central: comparación entre la función de covarianza prescrita y las obtenidas para diferentes cantidades de términos de la expansión M (número de términos en la expansión NGKL). Gráfico derecho: comparación de la deflexión en el centro del tramo $f(V(L/2))$ obtenida para NGKL y NT.

Tabla 5.5: Parámetros dimensionales.

Parámetros	S2	S3	S4
Altura de la viga (mm)	66.48	92.45	141.17
Ancho de la viga (mm)	41.89	42.03	41.31
Longitud entre apoyos (m)	1.196	1.664	2.541
Longitud entre fuerzas aplicadas (m)	0.398	0.554	0.847

vigas C3 de acuerdo al método de clasificación visual; 9 vigas C1, 3 vigas C2 y 15 vigas C3 de acuerdo al método de clasificación mecánico. La segunda sub-muestra está compuesta por: 5 vigas C1, 1 viga C2 y 17 vigas C3 de acuerdo al método de clasificación visual; 9 vigas C1, 1 viga C2 y 13 vigas C3 de acuerdo al método de clasificación mecánico. Por lo tanto, la proporción de vigas de cada clase en cada sub-muestra es similar. No se reporta una relación significativa entre la calidad de las vigas y los valores de deflexión obtenidos experimentalmente. Algunas vigas de alta calidad en las muestras S2 y S4 presentan los

valores más bajos de deformación y algunas vigas de menor calidad los valores mayores de deflexión en la muestra S3. Pero estas observaciones no son concluyentes respecto a la relación entre la calidad de las vigas y los valores de deflexiones obtenidos.

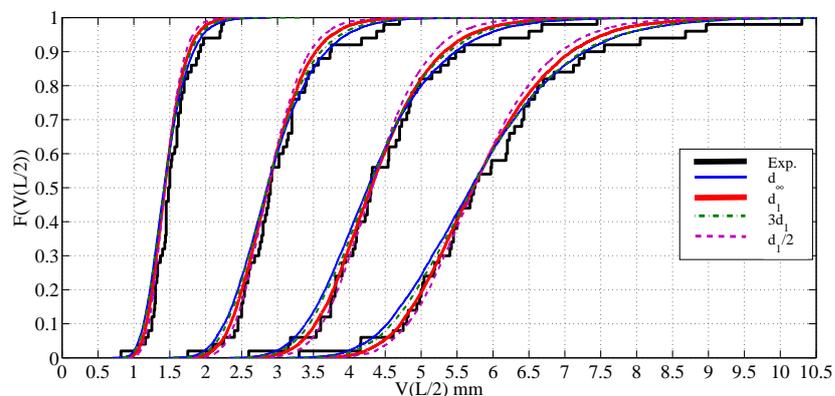
La influencia de la longitud de correlación puede observarse en la Figura 5.4 de la Subsección 5.2.1.4. Los valores medios de la respuesta permanecen aproximadamente iguales tanto para d_1 como para d_∞ . Sin embargo, un incremento de d , produce los mayores valores de desvío estándar en las distribuciones de $f[V(L/2)]$. Esto indica que una viga homogénea presenta valores de deflexión mayores que una viga con propiedades variables o no homogénea y, por lo tanto, también una variación mayor respecto al valor medio de $V(L/2)$. En el ensayo de flexión, las vigas son cargadas gradualmente. Al comienzo del ensayo, las distorsiones en la sección transversal son frecuentes antes de que la viga entera comience a flexionarse normalmente. Este comportamiento se refleja en la curva carga-deformación a través de los cambios en la pendiente de la misma. A medida que el ensayo avanza, la viga exhibe una respuesta lineal y las diferencias decrecen. Sin embargo, dadas las características de la estructura interna del material y de las heterogeneidades presentes debido a los defectos de la madera, la línea recta esperada en el transcurso del ensayo en algunas ocasiones se pierde. Por esta razón, la determinación del MOE global requiere de la selección de los puntos de la curva que sean representativos de un comportamiento lineal.

En la Figura 5.7, se reporta la comparación entre las CDFs numéricas y experimentales de la deflexión en el centro del tramo para cada nivel de carga. Las CDFs numéricas fueron obtenidas con 10000 MCS. En la misma figura, se presenta el análisis de sensibilidad de la longitud de correlación d , que varía entre $3d_1$ y $d_1/2$ con un salto de $d_1/4$. Las CDFs de los resultados numéricos obtenidos para d_∞ , $3d_1$, $d_1/2$ y la CDF obtenida con el valor de longitud de correlación que mejor ajusta los resultados experimentales son presentadas en las figuras. El criterio considerado para la determinación de la longitud de correlación que mejor ajusta los resultados experimentales es la cuantificación de las diferencias entre las CDFs numéricas y experimentales sobre el dominio de las distribuciones ($\sum |F^d - F^{Exp.}|$). En la Figura 5.7(a), se comparan las CDFs de la deflexión en el centro del tramo $F(V(L/2))$ para los niveles de carga considerados en la muestra S2. En la parte inferior de las CDFs (por debajo del 50 %), los resultados experimentales se localizan dentro de las CDFs obtenidas numéricamente. Las deflexiones numéricas de vigas de alta calidad (C1 y C2) se encuentran en esta región. La CDF obtenida numéricamente difiere

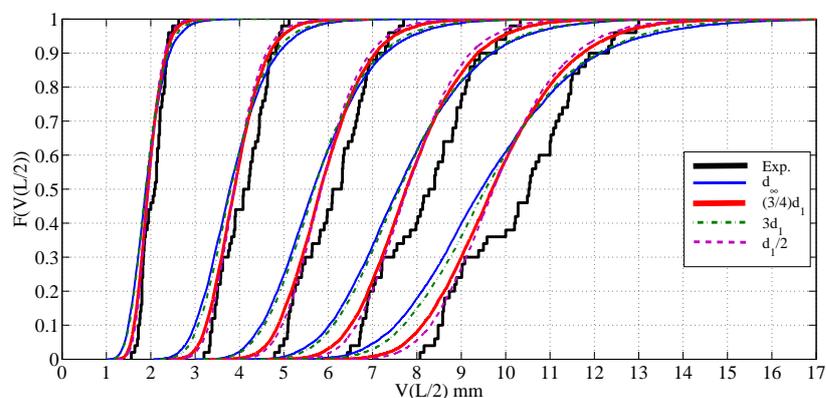
de la experimental en la parte superior del gráfico (por encima del 80 %). Pero de igual manera que en la parte inferior de la CDF, las deflexiones experimentales de vigas de alta calidad también están localizadas en esta región. Para niveles de carga altos, el modelo probabilístico con d_1 ajusta bien la CDF experimental por debajo del percentil 80 %. El modelo numérico con $3d_1$ ajusta bien la parte superior de la CDF experimental (por encima del 80 %). A pesar de ello, con d_1 se alcanza el mejor ajuste en el dominio completo de la distribución.

Las CDFs de la deflexión en el centro del tramo $F(V(L/2))$ obtenidos para los niveles de carga considerados en la muestra S3, son mostradas y comparadas en la Figura 5.7(b). Como puede observarse en la parte superior de la CDF experimental (por arriba del percentil 90 %), los resultados experimentales se encuentran localizados dentro del rango de CDFs numéricas. Mientras que en la parte inferior de la CDF (por debajo del 30 %), los resultados numéricos para el modelo probabilístico con $(3/4)d_1$ y $(1/2)d_1$ se encuentran más cercanos a los resultados experimentales que los casos incluidos entre $(3/4)d_1$ y d_∞ . En la parte central del gráfico (entre los percentiles 30 % y 80 %), la diferencia entre las CDFs experimental y numéricas es mayor. Esta diferencia aumenta con el incremento del nivel de carga. Se observa una falta de resultados experimentales en esa región. Es importante remarcar que la muestra S3 contiene solo 28 % de vigas de alta calidad y constituye la muestra con la menor cantidad de piezas de este grado de calidad. Pero, de forma similar a los casos analizados previamente, no se puede establecer una relación entre la calidad de la madera de las vigas y los valores experimentales de deflexiones en el centro del tramo hallados en cada una de ellas. El modelo numérico/probabilístico con $(3/4)d_1$ alcanza la mejor representación de los resultados experimentales en todo el dominio de la distribución.

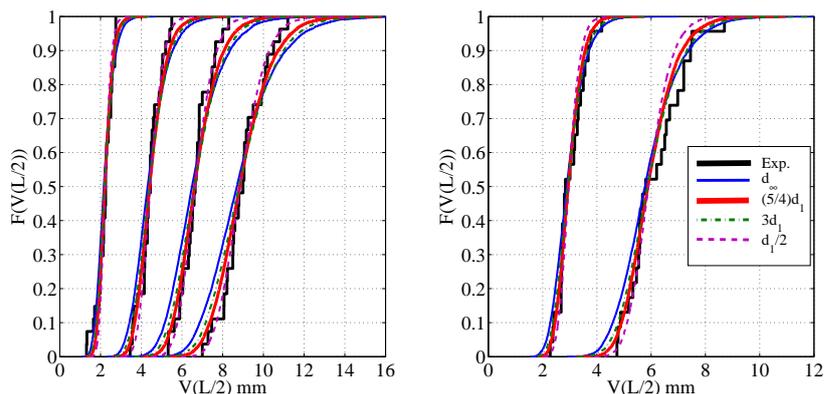
La Figura 5.7(c) muestra las CDFs de la deflexión en el centro del tramo $F(V(L/2))$ obtenidas para los niveles de carga considerados en la muestra S4. La CDF encontrada a partir del modelo probabilístico con $(5/4)d_1$ ajusta bien la CDF obtenida a partir de los datos experimentales en todos los niveles de carga y en ambas sub-muestras. Para $(1/2)d_1$, los resultados experimentales de la primera sub-muestra se ajustan bien por encima del percentil 80 %. Pero el grado de ajuste obtenido en ambas sub-muestras con $(5/4)d_1$ es mayor. Además, como ya se ha mencionado previamente, la proporción de las calidades de vigas en cada sub-muestra es similar. El modelo probabilístico con d_∞ tiende a sobrestimar los valores de deflexiones más bajos y subestimar los mayores. De



(a) Muestra S2 valores de carga [0.6, (0.6), 2.4] kN. Mejor ajuste con $d = d_1$.



(b) Muestra S3 valores de carga [0.8, (0.8), 4] kN. Mejor ajuste con $d = (3/4)d_1$.



(c) Muestra S4a valores de carga [0.9, (0.9), 3.6] kN gráfico izquierdo. Muestra S4b [1.2, (1.2), 2.4] kN gráfico derecho. Mejor ajuste con $d = (5/4)d_1$.

Figura 5.7: Comparación entre las CDFs numéricas y experimentales. Análisis de sensibilidad del parámetro longitud de correlación d .

forma similar a la muestra anterior, las deflexiones experimentales de algunas vigas de alta calidad están localizadas en la parte inferior de la CDF (por debajo del percentil 50 %) para los mayores niveles de carga. El modelo probabilístico con $(5/4)d_1$ es el que mejor predice los resultados experimentales en la totalidad del dominio de la distribución.

El análisis de sensibilidad muestra que los resultados numéricos obtenidos con d_1 son aceptables y resultan en una buena predicción de los valores de deflexiones en el centro del tramo de las piezas ensayadas. El valor de longitud de correlación para cargas de servicio obtenido con muestras de coníferas en Czmocho (1998) es aplicable a elementos estructurales de *Eucalyptus grandis*. A pesar de que los valores de longitud de correlación $(3/4)d_1$ y $(5/4)d_1$ han mostrado el mejor ajuste en las distribuciones de las deflexiones de las muestras S3 y S4, respectivamente, d_1 parece constituir un valor razonable. La información estadística del MOE incluida en su PDF constituye una base sólida a partir de la cual el diseñador estructural puede aproximar la respuesta estructural. Los resultados de las aproximaciones numéricas de las deflexiones en el centro del tramo para ambos modelos de variación del MOE (d_∞ y d) son presentados y comparados en la Tabla 5.6 para la muestra S2, en la Tabla 5.7 para la muestra S3 y en la Tabla 5.8 para la muestra S4. Las diferencias entre los resultados experimentales y numéricos obtenidos con d_∞ se reportan en la sexta columna de cada tabla ($F^{d_\infty} - F^{Exp.}$). De forma similar, para los valores de longitud de correlación que mejor ajustan las CDFs experimentales, se listan en la séptima columna de cada tabla ($F^d - F^{Exp.}$). Además, también se presentan en la tabla el valor medio, el desvío estándar (SD), los percentiles 5th y 95th (P05 y P95, respectivamente). Como puede observarse, la predictibilidad de los resultados experimentales se incrementa con la aplicación del modelo numérico/probabilístico que incluye la variabilidad longitudinal del MOE, denominado F^d , en todas las muestras y para todos los niveles de cargas considerados.

La forma de aplicación más práctica de las herramientas presentadas en esta sección se obtiene discretizando el campo aleatorio a través del Método del Punto Medio, Subsección 4.4.1 (Der Kiureghian y Ke, 1988). En este método, se asigna un valor del MOE a cada elemento en coincidencia con la discretización propia del MEF. De acuerdo al trabajo de referencia, la relación entre el tamaño del elemento y la longitud de correlación d debe ser menor a $1/4$ ($L_e/d < 1/4$). En la Figura 5.8, se presenta la comparación de los resultados de deflexiones en el centro del tramo obtenidos mediante la aplicación de los tres métodos empleados para la simulación del campo aleatorio con su correspondiente

Tabla 5.6: Diferencias en la predictibilidad de los resultados experimentales obtenidas a través del modelo numérico, muestra S2. MOE como variable aleatoria (homogéneo, d_∞) y MOE como campo aleatorio (variable en la longitud, $d = d_1$).

Carga	Parámetro estadístico	Exp.	d_∞	d	$F^{d_\infty} - F^{Exp.}$ %	$F^d - F^{Exp.}$ %
0.6 kN	Mean (mm)	1.52	1.45	1.45	10.41	8.64
	SD (mm)	0.28	0.27	0.24		
	P05 (mm)	1.18	1.07	1.14		
	P95 (mm)	2.08	1.95	1.89		
1.2 kN	Mean (mm)	3.01	2.92	2.91	7.39	5.2
	SD (mm)	0.58	0.56	0.47		
	P05 (mm)	2.31	2.12	2.23		
	P95 (mm)	4.28	3.97	3.77		
1.8 kN	Mean (mm)	4.47	4.36	4.38	5.45	3.95
	SD (mm)	0.89	0.84	0.72		
	P05 (mm)	3.34	3.19	3.34		
	P95 (mm)	6.32	5.91	5.68		
2.4 kN	Mean (mm)	5.97	5.82	5.83	6.01	4.15
	SD (mm)	1.25	1.10	0.95		
	P05 (mm)	4.37	4.26	4.46		
	P95 (mm)	8.39	7.79	7.55		

método de discretización. La transformación de Nataf en combinación con el método de discretización del punto medio proveen los mismos resultados que los métodos empleados anteriormente considerando 18, 24 y 30 elementos viga para las muestras S2, S3 y S4, respectivamente.

5.2.1.6. Efectos de la variabilidad longitudinal del MOE en la confiabilidad estructural de vigas de madera

La comparación entre los resultados experimentales y numéricos obtenidos a través de un modelo probabilístico que tiene en cuenta la variabilidad longitudinal del MOE

Tabla 5.7: Diferencias en la predictibilidad de los resultados experimentales obtenidas a través del modelo numérico, muestra S3. MOE como variable aleatoria (homogéneo, d_∞) y MOE como campo aleatorio (variable en la longitud, $d = (3/4)d_1$).

Carga	Parámetro estadístico	Exp.	d_∞	d	$F^{d_\infty} - F^{Exp.}$ %	$F^d - F^{Exp.}$ %
0.8 kN	Mean (mm)	2.05	1.93	1.97	27.78	13.10
	SD (mm)	0.25	0.37	0.28		
	P05 (mm)	1.70	1.41	1.56		
	P95 (mm)	2.39	2.63	2.47		
1.6 kN	Mean (mm)	4.08	3.88	3.87	27.11	6.28
	SD (mm)	0.52	0.76	0.60		
	P05 (mm)	3.34	2.82	3.15		
	P95 (mm)	4.87	5.27	4.95		
2.4 kN	Mean (mm)	6.11	5.91	5.92	33.08	5.73
	SD (mm)	0.78	1.13	0.86		
	P05 (mm)	5.02	4.21	4.66		
	P95 (mm)	7.34	7.87	7.43		
3.2 kN	Mean (mm)	8.18	7.85	7.87	32.15	6.23
	SD (mm)	1.05	1.47	1.14		
	P05 (mm)	6.70	5.66	6.20		
	P95 (mm)	9.90	10.40	9.91		
4 kN	Mean (mm)	10.33	9.81	9.84	31.16	7.58
	SD (mm)	1.36	1.89	1.42		
	P05 (mm)	8.43	7.05	7.76		
	P95 (mm)	12.42	13.17	12.43		

Tabla 5.8: Diferencias en la predictibilidad de los resultados experimentales obtenidas a través del modelo numérico, muestra S4. MOE como variable aleatoria (homogéneo, d_∞) y MOE como campo aleatorio (variable en la longitud, $d = (5/4)d_1$).

Carga	Parámetro estadístico	Exp.	d_∞	d	$F^{d_\infty} - F^{Exp.}$ %	$F^d - F^{Exp.}$ %
0.9 kN	Mean (mm)	2.21	2.21	2.24	4.90	4.48
	SD (mm)	0.38	0.42	0.34		
	P05 (mm)	1.42	1.59	1.74		
	P95 (mm)	2.73	2.99	2.84		
1.8 kN	Mean (mm)	4.43	4.42	4.47	6.63	2.98
	SD (mm)	0.55	0.85	0.68		
	P05 (mm)	3.56	3.20	3.51		
	P95 (mm)	5.34	5.98	5.69		
2.7 kN	Mean (mm)	6.66	6.65	6.72	9.95	3.19
	SD (mm)	0.75	1.29	1.01		
	P05 (mm)	5.42	4.84	5.27		
	P95 (mm)	7.89	9.02	8.55		
3.6 kN	Mean (mm)	8.99	8.88	8.97	10.17	3.83
	SD (mm)	1.04	1.69	1.34		
	P05 (mm)	7.33	6.50	7.02		
	P95 (mm)	10.71	11.95	11.37		
1.2 kN	Mean (mm)	3.03	2.96	2.98	4.17	2.58
	SD (mm)	0.49	0.58	0.44		
	P05 (mm)	2.38	2.14	2.33		
	P95 (mm)	3.77	4.02	3.76		
2.4 kN	Mean (mm)	6.15	5.92	5.98	5.79	2.66
	SD (mm)	1.02	1.14	0.90		
	P05 (mm)	4.78	4.32	4.68		
	P95 (mm)	7.49	7.95	7.58		

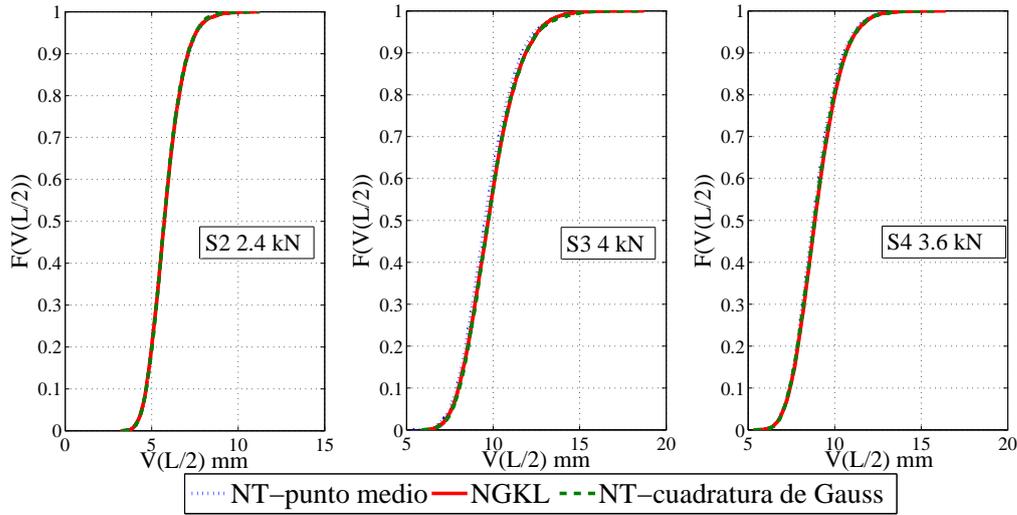


Figura 5.8: Comparación métodos de simulación y discretización de campos aleatorios.

en los elementos de madera fue previamente discutida. En esta subsección, se presenta y discute un estudio relacionado al desempeño estructural de vigas de *Eucalyptus grandis*, teniendo en cuenta la comparación con los límites de deformación recomendados por el reglamento de diseño estructural Argentino (CIRSOC 601, 2013).

Vigas con el MOE representado por una variable aleatoria

La función de estado límite considerada en el estudio de las condiciones de servicio de una viga simplemente apoyada puede expresarse de la siguiente forma:

$$g(E) = w_R - w_m(E), \quad (5.26)$$

en donde w_R es la deflexión admisible de carácter determinístico (valor de referencia) asumido de acuerdo con los requerimientos funcionales del elemento estructural y $w_m(E)$ es la deflexión aleatoria en el centro del tramo. Teniendo en cuenta la deflexión instantánea producida por la configuración de carga considerada en este trabajo (dos cargas puntuales en los tercios de la longitud), la función de estado límite para las condiciones de servicio puede ser expresada de la siguiente forma:

$$g(E) = \frac{L}{360} - \frac{p}{Ei} \frac{23L^3}{648}, \quad (5.27)$$

en donde L es la longitud de la viga, el primer término constituye la expresión aplicada para la verificación de las deflexiones instantáneas producidas por las cargas de acuerdo

al criterio adoptado por el Reglamento Argentino de Estructuras de Madera (CIRSOC 601, 2013) y el segundo término es la deflexión aleatoria en el centro del tramo de la viga. Siguiendo esta norma, la deflexión instantánea puede ser obtenida utilizando el valor medio o el percentil 0.05 de la distribución del MOE, dependiendo de la situación de diseño. Para una condición de diseño más crítica en la cual se requiere un control de las deformaciones más exhaustivo, el percentil 0.05 es recomendado en los códigos de diseño estructural. La probabilidad de exceder la condición de servicio, *i.e.* la probabilidad de que la deflexión aleatoria sea mayor que el valor admisible se define de la siguiente manera:

$$PF = P(g(E) \leq 0) = \int_{g(E) \leq 0} f_E(e) de, \quad (5.28)$$

en la cual f_E es la PDF de la variable aleatoria E . Esta expresión es relativamente simple de resolver en el caso de $d \rightarrow \infty$, *i.e.* MOE homogéneo dentro de la longitud de la viga. Solo es necesario resolver la función de estado límite cuando $g(E) = 0$ para encontrar el valor de la variable dependiente, que puede ser cargas, dimensiones de la sección transversal, longitud de la viga, entre otras. Para valores de $g(E) \leq 0$ ocurre la falla, *i.e.* se supera la deflexión admisible requerida. Se tienen en cuenta los parámetros dimensionales de la muestra S4 y las siguientes propiedades materiales del *Eucalyptus grandis*, correspondientes con la clase resistente C1, $\mu = 13.902$ GPa y $\sigma = 2.364$ GPa. Si previamente definimos un valor de Probabilidad de Falla (PF), se pueden encontrar los valores de carga que producen esa probabilidad de exceder las condiciones de servicio impuestas. Para una PF igual a 0.05 la fuerza aplicada es de 1.33 kN y para una PF igual a 0.1 la fuerza aplicada es de 1.43 kN. Estos valores de carga fueron verificados dentro del rango de comportamiento elástico lineal del material y dentro de las magnitudes de carga que han sido empleadas en los ensayos a flexión.

Cuando se considera la variabilidad longitudinal del MOE en los cálculos, los estudios relacionados al control de las condiciones de servicio conducen a una menor probabilidad de falla (PF) para niveles de carga bajos. De forma inversa, se obtiene una mayor probabilidad de falla para niveles de carga cercanos a la capacidad a flexión de las vigas, siempre en comparación con los resultados obtenidos considerando el MOE constante. Este punto será discutido en la próxima sub-sección. Cuando las propiedades son consideradas constantes a lo largo de los elementos estructurales, el criterio de diseño (percentil 0.05 de la distribución del MOE) se encuentra del lado de la seguridad.

Vigas con variabilidad longitudinal del MOE representada por un campo aleatorio

En esta sección, la PF es aproximada mediante el Método de Monte Carlo (MCM Subsección 3.1.4 y Melchers (1999)) para los valores de cargas determinados previamente en la sección anterior y el MOE representado por un campo aleatorio con longitud de correlación d_1 . El MCM se elige en este caso debido al hecho de que, en esta sección, f_E en la Ecuación (5.28) se vuelve una PDF multidimensional (un campo aleatorio) y la función de estado límite ya no se encuentra definida de forma tan simple como anteriormente. Este método provee una técnica sencilla que nos permite estimar el valor de la PF . El intervalo de confianza de PF se define de la siguiente como sigue:

$$P\left(\widehat{PF} - z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{N}} \leq PF \leq \widehat{PF} + z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{N}}\right) \approx 1 - \alpha, \quad (5.29)$$

en donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil $(1 - \alpha/2)$ de la distribución normal estándar, \widehat{PF} es el estimador no sesgado de PF y S es su desvío estándar. El Error Relativo (RE) del estimador \widehat{PF} , se define como:

$$RE = \frac{\sqrt{Var(\widehat{PF})}}{E[\widehat{PF}]} = \frac{\sigma}{PF\sqrt{N}} \approx \frac{S}{\widehat{PF}\sqrt{N}}. \quad (5.30)$$

La probabilidad de exceder el valor límite de la deflexión instantánea disminuye para niveles de carga de servicio cuando se considera la variabilidad longitudinal del MOE como se muestra en la Tabla 5.9. Además, una probabilidad de falla aproximadamente igual a 0.05 puede alcanzarse para el modelo estocástico con d_1 cuando su caso correspondiente con $d \rightarrow \infty$ presenta una probabilidad de falla igual a 0.1. A continuación, se reportan en la misma tabla, el RE del estimador \widehat{PF} y el intervalo de confianza para una probabilidad de 0.95 obtenido con $N=100000$ simulaciones. El error relativo muestra la precisión del estimador \widehat{PF} . La Figura 5.9 muestra los resultados del estudio de confiabilidad. La variación del estimador \widehat{PF} con su error relativo y el intervalo de confianza para su correspondiente PF en los modelos numéricos cuando $d \rightarrow \infty$. El error relativo del estimador \widehat{PF} es bajo en el caso $d \rightarrow \infty$ y $PF=0.1$ debido a la reducción de la relación entre el desvío estándar del estimador y su valor con respecto al caso $d \rightarrow \infty$ y $PF=0.05$. Adicionalmente, se observa la disminución del ancho absoluto del intervalo de confianza respecto al incremento de la cantidad de simulaciones N . La diferencia en los

Tabla 5.9: \widehat{PF} estimador, Error Relativo (RE) (% de \widehat{PF}) e intervalo de confianza de PF . $N=100000$.

$PF_{d \rightarrow \infty}$	\widehat{PF}_{d_1}	RE	Intervalo de confianza 95 %	
			Límite inferior	Límite superior
0.05	0.0173	2.37	0.0165	0.0181
0.10	0.0515	1.35	0.0501	0.0529

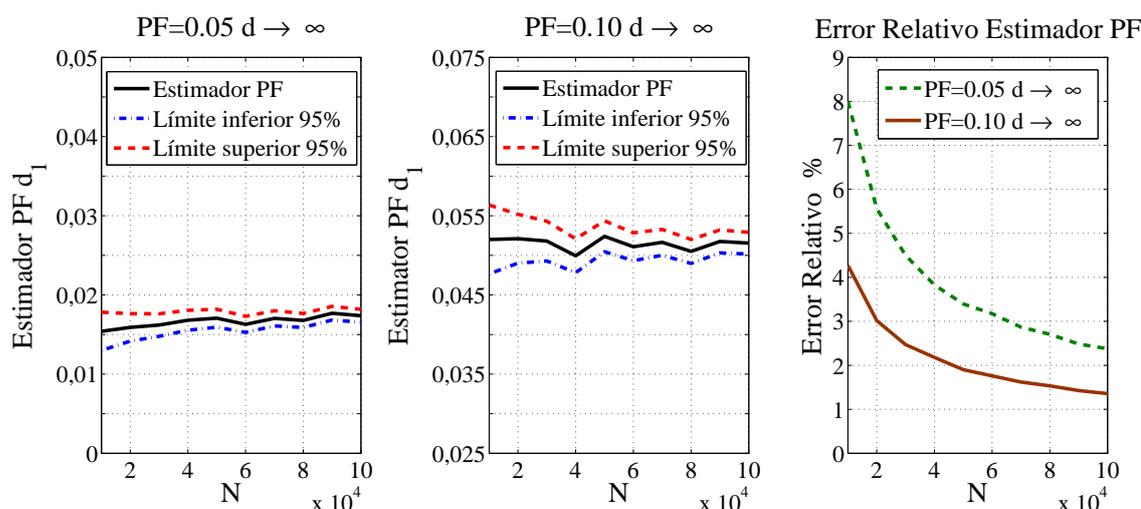


Figura 5.9: Estimador de la Probabilidad de Falla (\widehat{PF}) y su respectivo error relativo para $PF=0.05$ y 0.1 en una viga con MOE constante.

valores de estos parámetros se debe a la variación del desvío estándar de la variable \widehat{PF} que disminuye con el incremento del valor de \widehat{PF} .

En la Tabla 5.10, se presentan los resultados obtenidos para los siguientes casos de carga: momento constante (\overline{M}), carga distribuida (\overline{Q}) y carga puntual en el centro del tramo (\overline{P}). En todos los casos se reduce PF en forma similar al caso de dos cargas puntuales.

Existe variabilidad en las propiedades mecánicas dentro de cada clase resistente establecida por las normas. La clasificación visual en clases resistentes reduce esta variabilidad con respecto a la población total. El diseñador toma las propiedades de la clase resistente y las aplica luego al cálculo de la pieza completa sin considerar (dentro de los límites establecidos) que los defectos y propiedades varían a lo largo de la misma pieza. Siguien-

Tabla 5.10: \widehat{PF} estimador, Error Relativo (RE) (% de \widehat{PF}) e intervalo de confianza de PF . $N=100000$. Momento constante (\overline{M}), carga distribuida (\overline{Q}) y carga puntual en el centro del tramo (\overline{P}).

Carga	$PF_{d \rightarrow \infty}$	\hat{PF}_{d_1}	RE	Intervalo de confianza 95 %	
				Límite inferior	Límite superior
\overline{M}	0.05	0.0139	2.66	0.0132	0.0146
\overline{Q}	0.05	0.0168	2.41	0.0160	0.0176
\overline{P}	0.05	0.0197	2.23	0.0188	0.0205
\overline{M}	0.10	0.0540	1.47	0.0527	0.0552
\overline{Q}	0.10	0.0512	1.36	0.0498	0.0520
\overline{P}	0.10	0.0558	1.30	0.0544	0.0572

do el criterio de cálculo considerado en el reglamento Argentino CIRSOC 601 (2013) sin tener en cuenta su variabilidad longitudinal, si se asume una $PF= 0.05$, *i.e.* existe una probabilidad de 0.05 de que el MOE tome un valor menor. De acuerdo a los resultados presentados en esta sección, la probabilidad de exceder las condiciones de servicio es menor en presencia de la variabilidad longitudinal del MOE que cuando las reglas usuales de cálculo estructural son aplicadas. Las observaciones anteriores son importantes para la práctica del diseño de elementos de madera en donde se adopta una probabilidad de falla de 0.05. La influencia de la variabilidad longitudinal del MOE en el estudio de las condiciones de servicio teniendo en cuenta varios valores de carga puede ser apreciada en una curva de fragilidad. La Figura 5.10 muestra las curvas de fragilidad de las muestras S2, S3 y S4 para los niveles de carga aplicados en los ensayos experimentales. La mismas fueron construidas a través del cálculo de PF para cada nivel de carga. Como puede observarse para niveles bajos de carga, la PF es menor cuando es considerada la variabilidad longitudinal del MOE y de forma contraria para mayores niveles de carga. Por lo tanto, la importancia de obtener una predicción más precisa de las deflexiones es evidente. Otro punto relevante es que para estos niveles de carga, la falla de las piezas producto de haberse alcanzado la resistencia a flexión de las mismas no fue registrada durante el desarrollo de los ensayos experimentales. Este hecho muestra la importancia de las condiciones de servicio en el diseño estructural de piezas de madera y de una predicción mas realista de las deflexiones en el centro del tramo.

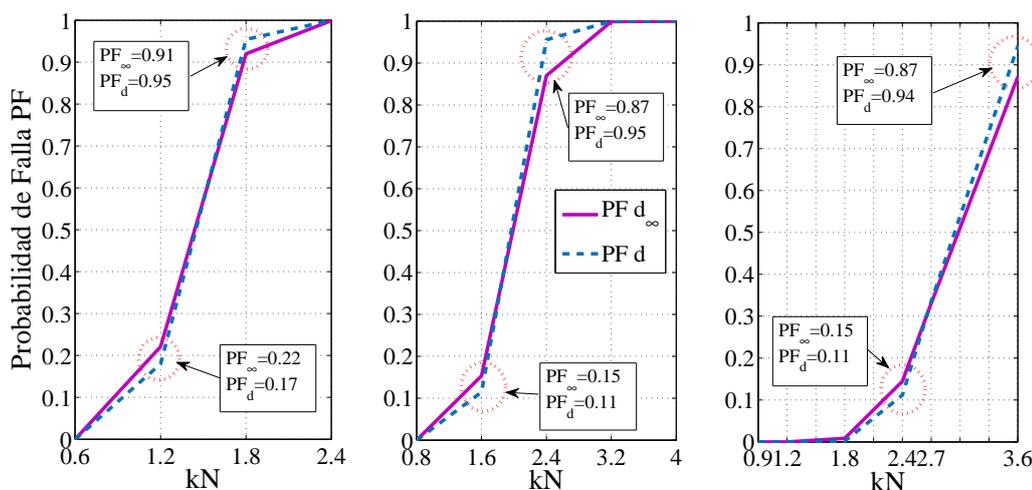


Figura 5.10: Curvas de fragilidad de las muestras S2 ($d = d_1$), S3 ($d = (3/4)d_1$) y S4 ($d = (5/4)d_1$) de izquierda a derecha. Resultados numéricos.

5.2.1.7. Conclusiones del estudio de deflexiones en vigas

- Se estudiaron vigas de tamaño estructural de madera de *Eucalyptus grandis* cultivado en la Mesopotamia Argentina con propiedades materiales inciertas y particularmente, se analizó en detalle la deflexión en el centro del tramo. Fue presentado un modelo estocástico del MOE que mejora la predictibilidad de la respuesta estructural.
- El modelo estocástico está basado en valores experimentales del MOE obtenidos con el ensayo a flexión de dos cargas puntuales colocadas en los tercios de la longitud. Usualmente, la distribución longitudinal del MOE no es conocida. La metodología presentada ha mostrado que, a pesar de esta situación, los resultados numéricos se ajustan muy satisfactoriamente a los datos experimentales.
- Al realizar el ensayo experimental para la determinación del MOE, la distribución del momento en la longitud de la viga y sus valores máximos son similares a los producidos por una carga uniforme. Este tipo de carga es muy frecuente en estructuras. Las dimensiones de cada muestra de vigas son representativas de los elementos utilizados usualmente en estructuras de maderas con piezas aserradas. Vigas con una altura mayor que 150 mm no son muy usuales debido al relativamente pequeño diámetro de los troncos, los cuales son obtenidos normalmente de plantaciones de

árboles de rotación corta. Estos dos aspectos, configuración de cargas del ensayo a flexión y dimensiones de las vigas, constituyen un soporte para la eventual extensión de los resultados presentados en esta sección.

- La formulación teórica para vigas de Euler-Bernoulli con la aplicación del MOE global ha demostrado ser más precisa en la predicción de las deflexiones de vigas de tamaño estructural que la formulación de Timoshenko que emplea el MOE local y el módulo de corte. Sin embargo, la fuente de discrepancias entre los resultados numéricos y experimentales pueden deberse no solamente a la teoría de viga seleccionada sino también a la estimación del módulo de corte usualmente empleado en la práctica ingenieril.
- Se adoptó la estructura de correlación del campo aleatorio y se establecieron valores estimativos de la longitud de correlación, todo esto sustentado en las similitudes mecánicas que el *Eucalyptus grandis* cultivado en la Mesopotamia Argentina muestra en relación a las especies coníferas.
- Dos métodos fueron empleados y comparados con el objetivo de simular la variabilidad longitudinal del MOE a través de un código de SFEM. La aplicabilidad de la NGKL y de la NT fue discutida y se encontró que ambas herramientas conducen a resultados similares. Sin embargo, el primer método es recomendado debido a las ventajas prácticas de su implementación.
- Se realizó una evaluación y clasificación de los valores experimentales de la deflexión en el centro del tramo obtenidas en el ensayo de flexión de acuerdo a los resultados de clasificación visual y mecánicas de las vigas ensayadas. Los resultados de la clasificación mecánica fueron utilizados para mejorar la caracterización de los valores de deflexión en cada muestra. Cabe recordar que solo el primero de los métodos de clasificación es aplicable bajo el código de diseño estructural Argentino. El método de clasificación mecánica no resultó en una consideración decisiva en relación a las deflexiones en vigas. Por lo tanto, no se ha observado una relación clara entre la calidad de las vigas ensayadas y los valores de deflexiones obtenidos experimentalmente.
- La validación de los resultados numéricos con resultados experimentales también fue presentada. Se ha mostrado que los resultados de la simulación numérica con el MOE representado por un campo aleatorio son más cercanos a los resultados experimentales en relación a los obtenidos con la suposición de MOE constante. El valor del parámetro longitud de correlación para un nivel de cargas de servicio obte-

nido de vigas de especies coníferas mostró ser aplicable a elementos de *Eucalyptus grandis*. Resultados del estudio de sensibilidad muestran que el mayor ajuste en la predicción de la deflexión en el centro del tramo se alcanzó con valores de longitud de correlación cercanos al valor de referencia adoptado.

- El modelado de la variabilidad longitudinal del MOE a través de un modelo de parámetro discretos utilizando la NT y la técnica de discretización del punto medio constituyen la forma de aplicación más práctica de los tres modelos presentados en la Sección. Se han determinado los tamaños de los elementos discretizantes para tres dimensiones de vigas aserradas empleadas frecuentemente. Tomando estas relaciones, la metodología puede extenderse a longitudes no consideradas en la presente investigación. Para esta aplicación, debe considerarse la función de correlación exponencial con longitud de correlación $d=1.34$ m y las distribuciones marginales gamma del MOE con los siguientes parámetros de forma \bar{a} y escala \bar{b} dependiendo de la calidad de piezas resultantes de la aplicación del método de clasificación visual establecido en la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006): $\bar{a}=34.582$ y $\bar{b}=0.402$ (C1); $\bar{a}=33.320$ y $\bar{b}=0.407$ (C1 y C2); $\bar{a}=28.727$ y $\bar{b}=0.440$ (C1, C2 y C3).
- El Método de Monte Carlo (MCM) fue aplicado para el estudio del comportamiento en servicio de vigas de madera a través del modelo estocástico empleado. Cuando se considera la variabilidad longitudinal del MOE, la probabilidad de exceder los límites de serviciabilidad es menor en comparación con el uso de un valor constante del MOE a lo largo de la longitud de la viga. Esta suposición es cierta para valores bajos de PF . De acuerdo a los resultados obtenidos a través del modelo con variabilidad longitudinal del MOE, para obtener una probabilidad de falla de 0.05 en ambos casos, el modelo con un valor constante del MOE debería ser empleado considerando el percentil 0.1 de la distribución del MOE. Este es un punto importante relacionado con el diseño por Estados Límites de Servicio (SLS) de elementos de madera de *Eucalyptus grandis*.
- Con el objetivo de estudiar la influencia de la variabilidad longitudinal del MOE para varios valores de carga en el comportamiento estructural, se calcularon las curvas de fragilidad de las vigas ensayadas. Para valores grandes de PF , la probabilidad de exceder el límite de serviciabilidad es mayor para un modelo que considera la variabilidad longitudinal del MOE. Las muestras empleadas en este estudio muestran la importancia del diseño estructural de madera considerando las condiciones de servicio. Las muestras alcanzan altas probabilidades de exceder el límite de ser-

viciabilidad antes de que se presenten las fallas por resistencia a flexión. A pesar de esto, el modelo estocástico presentado en esta sección no tiene influencia en el diseño por Estados Límites Últimos (ULS) de elementos de madera de *Eucalyptus grandis* si se usa una teoría de vigas de primer orden.

- Para los casos analizados en esta sección, se puede inferir que la metodología estocástica/numérica empleada que considera la variabilidad longitudinal del MOE conduce a una predicción más cercana a la observada en resultados experimentales del comportamiento en condiciones de servicio que el modelo con un valor constante del MOE a lo largo de la longitud de la viga.

5.2.2. Vibraciones forzadas de vigas

En esta sección, se presenta el estudio de vibraciones forzadas en vigas de madera bajo la formulación de Timoshenko. Este modelo es elegido para el estudio de la disipación de energía debida a las deformaciones por flexión y por corte. Es conocido que la madera exhibe un valor alto en la relación entre los módulos elásticos de corte y de flexión (G y E , respectivamente) de aproximadamente $1/16$ lo cual induce a deformaciones por corte que son no despreciables. Siguiendo el trabajo de Labonnote *et al.* (2013b), se utilizan los factores de pérdida por flexión y corte que tienen en cuenta la disipación de energía debida a estos dos esfuerzos. Los mismos son introducidos en la ecuación de movimiento de una viga siguiendo las premisas del modelo de amortiguamiento material también conocido como rigidez compleja (Clough, 1975). Este modelo provee una disipación de energía que no es dependiente de la frecuencia de excitación como en el caso del modelo de amortiguamiento viscoso frecuentemente empleado. La aplicación del principio de Hamilton conduce directamente a la ecuación de movimiento. La suma de las variaciones en el tiempo de la diferencia entre las energías cinética y potencial de la viga (\dot{T} y \dot{U} , respectivamente) y el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (W_{nc}) sobre cualquier intervalo de tiempo desde t_1 hasta t_2 es igual a cero.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (\dot{T} - \dot{U}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0. \quad (5.31)$$

El lagrangiano del sistema es determinado como la suma de la energía cinética total de la viga \dot{T} , su energía potencial total \dot{U} debida a las deformaciones por flexión y corte; y el trabajo de las fuerzas no conservativas W_{nc} . La energía potencial total \dot{U} está compuesta

de la contribución de la deformación por flexión y corte:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_0^L E(x) I \theta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa G(x) A \gamma^2 dx, \quad (5.32)$$

en donde $\gamma = v' - \theta$, es el ángulo de corte, v es el desplazamiento transversal, θ es el ángulo de rotación del eje elástico de la viga debido a la deformación flexional. La energía cinética total \dot{T} tiene la siguiente expresión:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \dot{\theta}^2 dx. \quad (5.33)$$

El trabajo virtual total desarrollado por las fuerzas internas no conservativas es:

$$\delta W_{nc,int} = -\frac{n_E}{\omega} \int_0^L E(x) I \dot{\theta}' \delta \theta' dx - \frac{n_G}{\omega} \int_0^L \kappa G(x) A \dot{\gamma} \delta \gamma dx, \quad (5.34)$$

en donde ω es la frecuencia natural circular. El trabajo virtual desarrollado por la fuerza externa es igual a:

$$\delta W_{nc,ext} = \int_0^L f(x, t) \delta v dx. \quad (5.35)$$

Luego de obtenida la ecuación de movimiento y de discretizar el problema a través del Método de los Elementos Finitos se obtiene la siguiente expresión matricial:

$$[M] \{\ddot{\mathbf{x}}\} + \frac{n_E}{\omega} [K_E] \{\dot{\mathbf{x}}\} + \frac{n_G}{\omega} [K_G] \{\dot{\mathbf{x}}\} + [K_E] \{\mathbf{x}\} + [K_G] \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}_0\} e^{i\omega t}, \quad (5.36)$$

en donde:

$$\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{X}_0\} e^{i\omega t} \quad \{\dot{\mathbf{x}}\} = i\omega \{\mathbf{X}_0\} e^{i\omega t} \quad \{\ddot{\mathbf{x}}\} = -\omega^2 \{\mathbf{X}_0\} e^{i\omega t}. \quad (5.37)$$

Finalmente, reemplazando $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{X}_0\} e^{i\omega t}$ y sus derivadas en la Ecuación (5.36), se obtiene la siguiente expresión:

$$(-\omega^2 [M] + [K_E] + [K_G] + i(n_E [K_E] + n_G [K_G])) \{\mathbf{X}_0\} = \{\mathbf{F}_0\}. \quad (5.38)$$

Como puede observarse en la Ecuación (5.38), el amortiguamiento se produce por la rigidez compleja de la viga debida al comportamiento a flexión y a corte, $n_E [K_E]$ y $n_G [K_G]$, respectivamente. n_E y n_G son los factores de pérdida por flexión y corte. La ecuación de movimiento es discretizada a través del MEF con elementos viga Timoshenko con dos nodos y dos grados de libertad por nodo con funciones de forma cúbicas y cuadráticas

(Subsección 4.3.4.2). La principal ventaja de la formulación de Timoshenko y del modelo de disipación de energía utilizado es la posibilidad de discretizar las energías potenciales y disipadas en sus componentes debido al comportamiento por flexión y corte de la viga. Para lograr esto, la energía potencial es obtenida de la siguiente expresión

$$U_B = \frac{1}{2} X' [K_E] X \quad U_S = \frac{1}{2} X' [K_G] X, \quad (5.39)$$

en donde X es el vector de desplazamientos nodales y la energía disipada es obtenida de:

$$W_B = 2\pi n_E U_B \quad W_S = 2\pi n_G U_S, \quad (5.40)$$

en donde los subíndices B y S indican los componentes de flexión y corte de la energía disipada. La Función de Respuesta en Frecuencia (FRF, en inglés) de los desplazamientos verticales en el extremo libre de una viga cantilever se obtiene como:

$$h(\omega) = \frac{\hat{u}_L(\omega)}{\hat{f}_L(\omega)}, \quad (5.41)$$

en la cual \hat{u}_L y \hat{f}_L son las transformadas de Fourier del desplazamiento vertical y de la fuerza aplicada en $x = L$, respectivamente.

5.2.2.1. Propiedades mecánicas de los modelos

El MOE es modelado, alternativamente, como una variable aleatoria y como un campo aleatorio a través de la Transformación de Nataf con una función de correlación exponencial y una PDF marginal gamma con valor medio $\mu=13.52$ GPa y desvío estándar $\sigma=1.94$ GPa. Como una consecuencia de la relación entre el módulo a flexión y corte, este último es obtenido a través de la relación $G = E/16$ para su simulación como variable aleatoria y como campo aleatorio. La densidad de masa es modelada como una variable aleatoria gamma con un valor medio $\mu= 504.79$ kg/m³ y un desvío estándar $\sigma= 34.59$ kg/m³ asumiendo un valor constante a lo largo de la viga (aplicable a las distintas piezas).

5.2.2.2. Disipación de energía

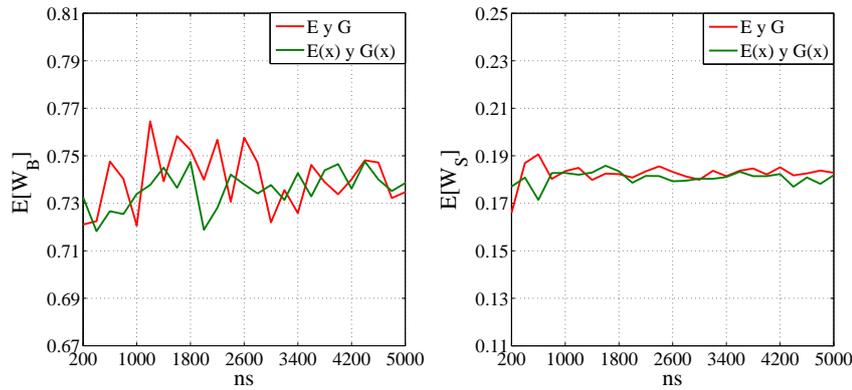
El modelo medio empleado en este estudio consiste en una viga cantilever de *Eucalyptus grandis* solicitada por una fuerza armónica aplicada en su extremo libre con una amplitud de 500 N y una frecuencia de 10 Hz. La viga de madera tienen las

siguientes dimensiones: longitud $L= 2$ m, y una sección transversal de 0.1×0.05 m. Las propiedades materiales consideradas en el modelo medio son: módulo elástico de flexión $E=13.52$ GPa, módulo de corte $G=E/16$, densidad de masa $\rho= 504.79$ kg/m³, factor de pérdida por flexión $n_E = 0.0113$ y factor de pérdida por corte $n_G = 0.2769$. Estos valores medios de factores de pérdida fueron reportados en Labonnote *et al.* (2013b) para piezas estructurales con frecuencias naturales menores a 35 Hz.

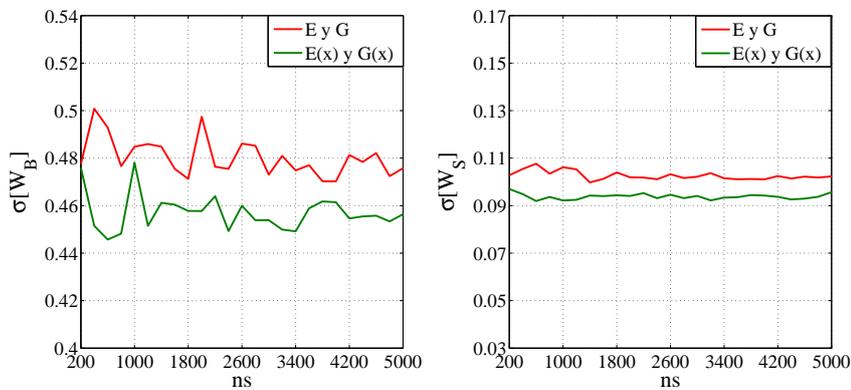
En la Figura 5.11 se presenta un estudio de convergencia, en donde ns es el número de simulaciones independientes del método de Monte Carlo (MC), $E[W_B]$ y $E[W_S]$ son los valores medios de las energías disipadas por flexión y corte, respectivamente. El criterio de convergencia adoptado es el siguiente: $|E[W_{B,S}^{ns}] - E[W_{B,S}^{ns-200}]| \leq 0.02$ J, en donde $E[W_{B,S}^{ns}]$ es el valor medio de la energía disipada para un número de simulaciones ns y $E[W_{B,S}^{ns-200}]$ es el valor medio de la energía disipada para un número de simulaciones $ns - 200$. En la Figura, los valores obtenidos cuando E y G son representados como variables aleatorias y como campos aleatorios son presentados con líneas rojas y verdes, respectivamente. Como puede observarse, el valor medio permanece aproximadamente igual para ambas formas de representación de las propiedades materiales, mientras que el desvío estándar es menor en el caso cuando las mismas son representadas mediante campos aleatorios. La energía potencial total esta dominada por la contribución a flexión, como puede verse en la Figura 5.12, gráficos de la izquierda. Sin embargo, a pesar de ello, es interesante notar que un 11.16% de los resultados exhiben una energía disipada por mecanismos de corte mayor que por los efectos de flexión cuando E y G son modeladas como variables aleatorias, Figura 5.12(a) derecha. Por otro lado, cuando las propiedades materiales son modeladas como un campo aleatorio, este porcentaje se incrementa a un 12.20%, Figura 5.12(b) derecha. La existencia de muestras con una disipación de energía por mecanismos que involucran las deformaciones por corte mayor que la disipación producida por la flexión se debe a los valores que pueden asumir las variables aleatorias n_E y n_G y su combinación con los valores tanto de E como de G .

5.2.2.3. Función de Respuesta en Frecuencia (FRF)

En la Figura 5.13, se reporta un estudio de convergencia de la FRF para la frecuencia de excitación considerada en el modelo medio. Como puede observarse, la variable aleatoria $H(\omega)$ converge rápidamente. Esto puede explicarse debido al hecho de que la frecuencia de excitación es menor al conjunto de frecuencias correspondientes a la primera frecuencia



(a) Convergencia de los valores medios de W_B y W_S .

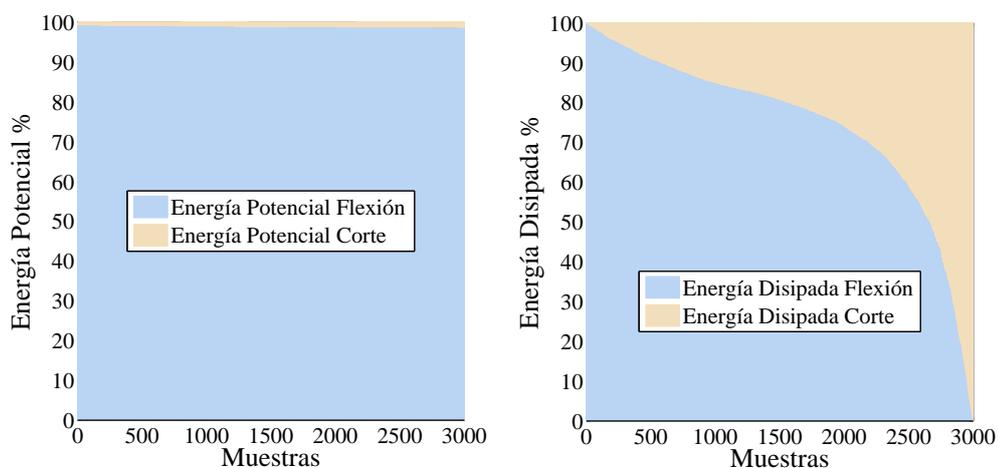


(b) Convergencia de los desvíos estándar de W_B y W_S .

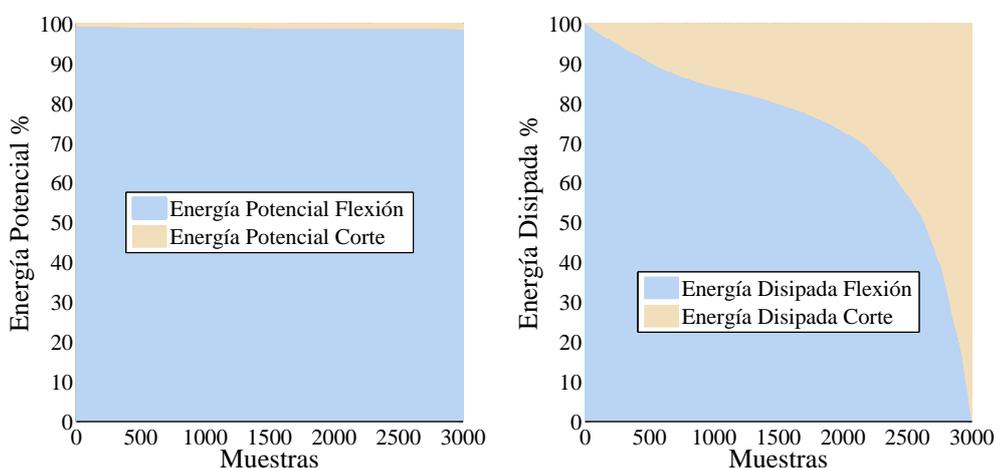
Figura 5.11: Estudio de convergencia de los valores medios y desvíos estándar de $f(W_B)$ y $f(W_S)$, para E y G representados como variables y campos aleatorios.

natural de las vigas simuladas y en consecuencia, la forma de $H(\omega)$ es todavía simple. Este último aspecto, puede observarse en el gráfico derecho de la figura. La influencia de la variabilidad longitudinal de E y G es todavía pequeña y solamente puede ser observada en el desvío estándar, gráfico central de la figura. El gráfico de la izquierda muestra la convergencia del valor medio de la variable aleatoria $H(\omega)$.

En la Figura 5.14, se muestran las FRFs para las distintas combinaciones de modelos probabilísticos de las propiedades del material consideradas. En las mismas se utiliza $f = \omega/2\pi$ Hz. La FRF obtenida considerando solamente los factores de pérdida como variables estocásticas del modelo probabilístico es presentada en la Figura 5.14(a). Puede observarse que para las frecuencias bajas y para aquellas encontradas fuera de la zona de resonancia, la influencia de los factores de pérdida es baja. Los valores máximos y



(a) Modelo probabilístico utilizando las variables aleatorias E , G , ρ , n_E y n_G .



(b) Modelo probabilístico utilizando los campos aleatorios $E(x)$, $G(x)$ y las variables aleatorias ρ , n_E y n_G .

Figura 5.12: Energía potencial (izquierda) y energía disipada (derecha) para los distintos modelos probabilísticos empleados.

mínimos de $H(f)$, líneas azul y roja respectivamente, se encuentran cercanas a la FRF correspondiente al modelo medio. En las zonas de frecuencias cercanas a la segunda y tercera resonancia y anti-resonancia, la influencia de los factores de pérdida estocásticos es más evidente. En la Figura 5.14(b), se presenta la FRF obtenida partiendo del modelo estocástico considerando E y G como variables aleatorias. Las respuestas del sistema considerando alternativamente los factores de pérdida como variables determinísticas o estocásticas son presentadas en la misma Figura. La influencia de los factores de pérdida

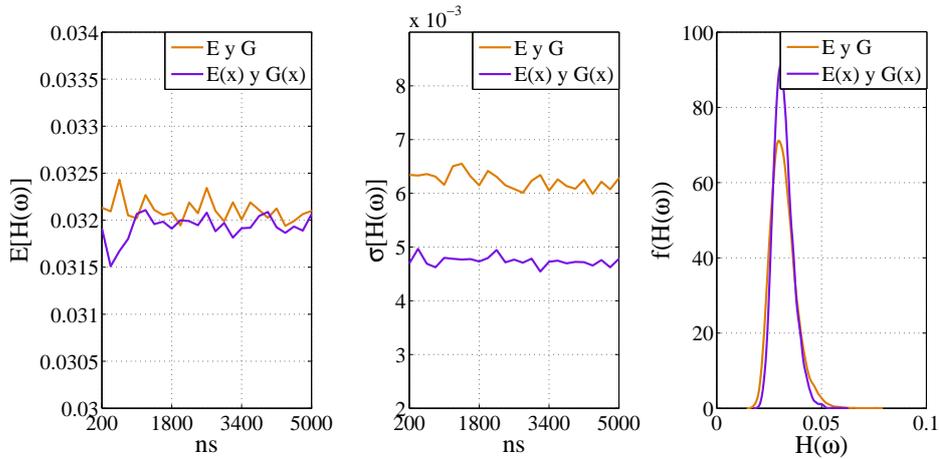
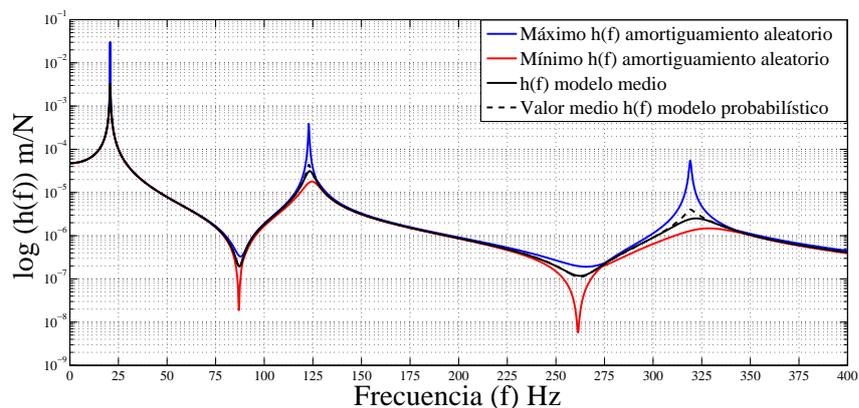


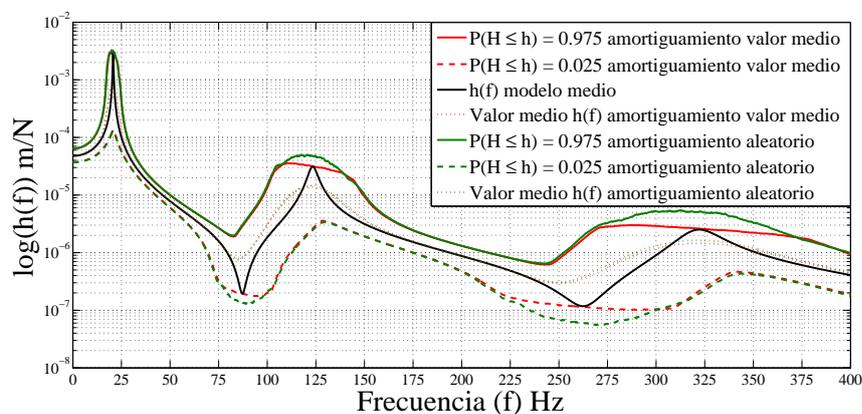
Figura 5.13: Estudio de convergencia de los valores medios y desvíos estándar de $f(H(\omega))$, con E y G representados como variables aleatorias y campos aleatorios.

aleatorios puede observarse para las frecuencias en las zonas de resonancia. Fuera de estas regiones, las diferencias entre ambos métodos utilizados para el modelado de los factores de pérdida, estocásticos o determinísticos, son despreciables. La FRF obtenida para el modelo estocástico considerando $E(x)$ y $G(x)$ como campos aleatorios es presentada en la Fig. 5.14(c). Los factores de pérdida son considerados de la misma manera que en el caso anterior y presentan la misma influencia. La diferencia entre los resultados de las Figuras 5.14(b) y 5.14(c) puede apreciarse en el ancho de banda de frecuencias de resonancia de ambas figuras. En la primera, el rango de frecuencias de resonancia es mayor que en el segundo caso. Este es un efecto producido por la variabilidad longitudinal de $E(x)$ y $G(x)$.

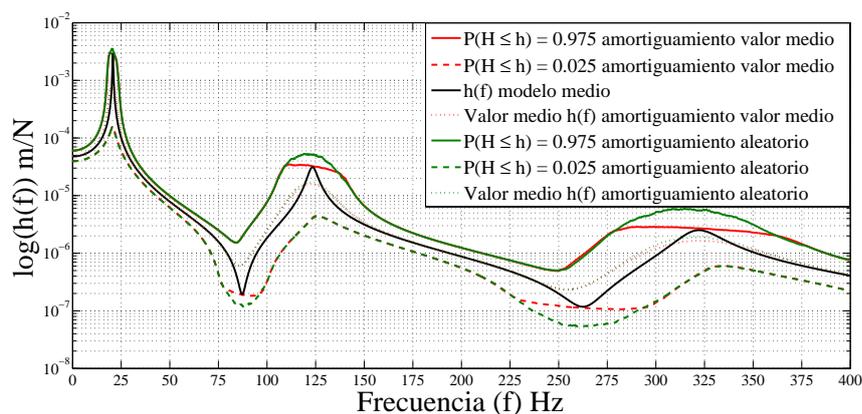
Finalmente, en las Figuras 5.15-5.16 se muestran las PDF y CDF de la variable aleatoria $H(\omega)$ para las primeras tres zonas de resonancia de la Figura 5.14. Los gráficos de la Figura 5.15 se obtuvieron considerando tanto a E y G como variables aleatorias, mientras que los gráficos presentados en la Figura 5.16 fueron obtenidos representando a ambas propiedades mecánicas mediante campos aleatorios, $E(x)$ y $G(x)$. No se observan diferencias apreciables entre ambos modelos estocásticos del material en este caso. Solo se presentan diferencias apreciables en cuanto al modelo del amortiguamiento el cual influye en la forma de las PDFs obtenidas. Sin embargo, como se puede ver en las CDFs, la influencia del amortiguamiento recién se hace visible para valores grandes de $H(\omega)$ que presentan poca probabilidad de ser superados. Por lo tanto el modelado del amortiguamiento utilizando valores medios de los factores de pérdida constituye una opción aceptable para el estudio de la respuesta estructural.



(a) FRF obtenida para el modelo probabilístico con las variables aleatorias n_E y n_G . E y G determinísticos (valor medio).

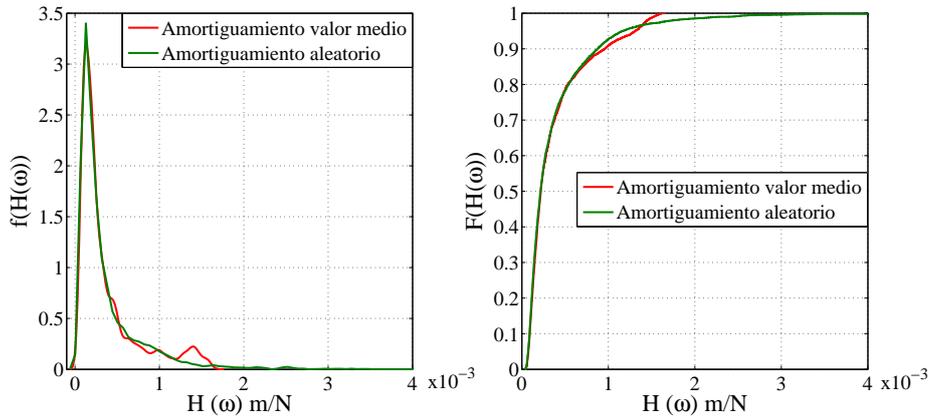


(b) FRF obtenida para las variables aleatorias E y G , con valores determinísticos (valores medios) y aleatorios de los coeficientes de amortiguamiento.

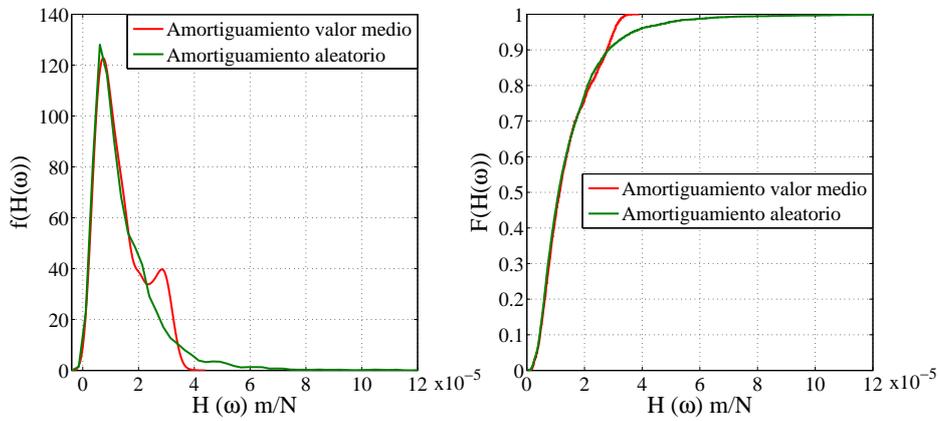


(c) FRF obtenida para los campos aleatorios $E(x)$ y $G(x)$, con valores determinísticos (valores medios) y aleatorios de los coeficientes de amortiguamiento.

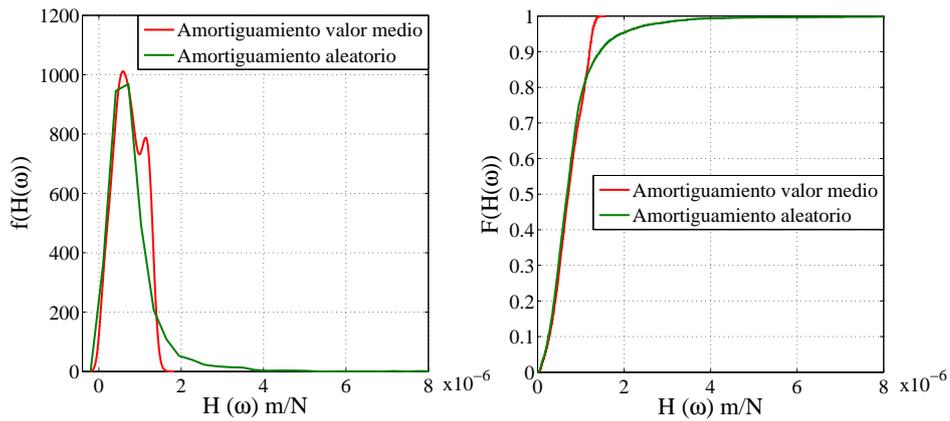
Figura 5.14: Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas para los distintos modelos considerados.



(a) Primera zona de resonancia.

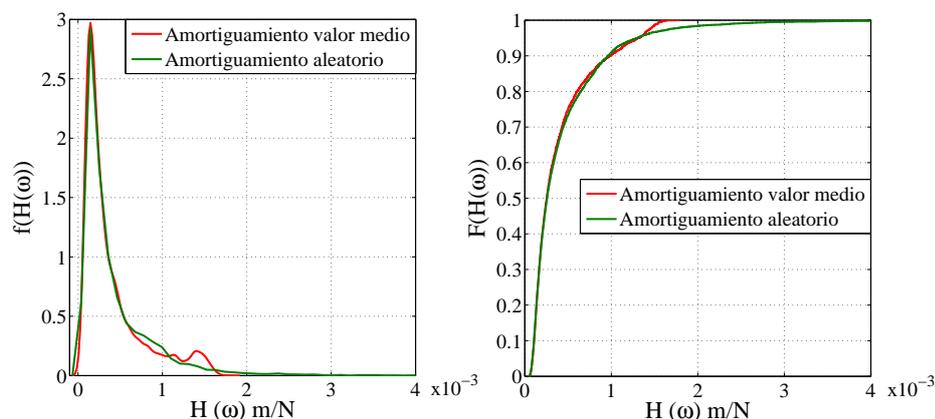


(b) Segunda zona de resonancia.

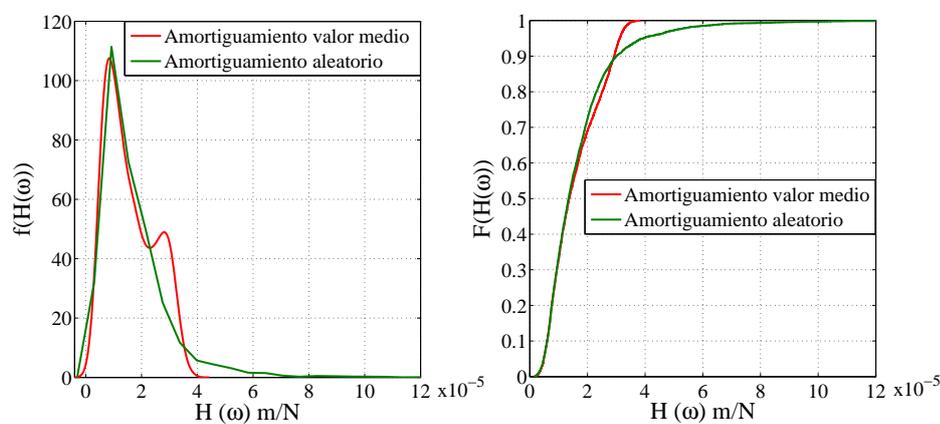


(c) Tercera zona de resonancia.

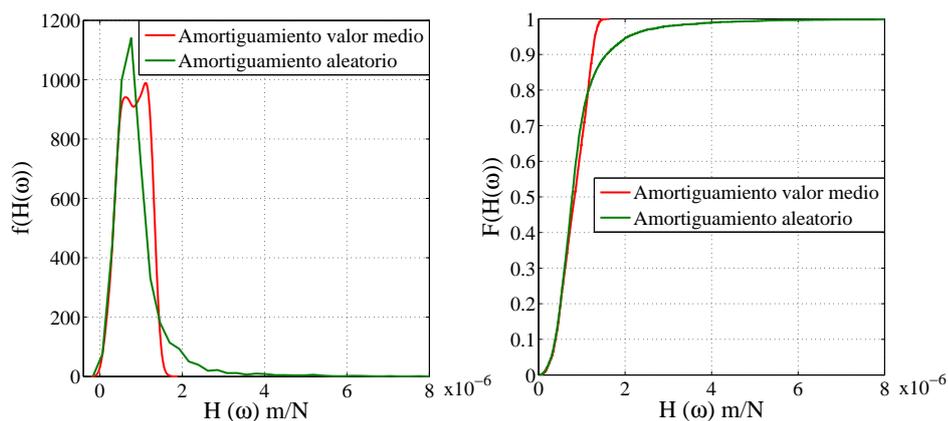
Figura 5.15: PDFs y CDFs de $H(\omega)$ para las tres zonas de resonancia, obtenidas mediante el modelo probabilístico con E y G variables aleatorias y valores medios y aleatorios de amortiguamiento.



(a) Primera zona de resonancia.



(b) Segunda zona de resonancia.



(c) Tercera zona de resonancia.

Figura 5.16: PDFs y CDFs de $H(\omega)$ para las tres zonas de resonancia, obtenidas mediante el modelo probabilístico con $E(x)$ y $G(x)$ campos aleatorios y valores medios y aleatorios de amortiguamiento.

5.2.2.4. Conclusiones del estudio vibraciones forzadas en vigas

- El modelo de amortiguamiento representado a través del método de la rigidez compleja fue introducido a través de los factores de pérdida por flexión y corte.
- Los mecanismos de disipación de energía fueron estudiados dentro del rango de frecuencias en donde este modelo de amortiguamiento es aplicable. Se derivaron las energías potenciales y las energías disipadas debidas al comportamiento a flexión y corte. Del análisis de los resultados surge que a pesar del hecho de que la energía potencial total es dominada por la contribución de los mecanismos de flexión, existen casos en los que la disipación de energía debida a mecanismos de corte es mayor.
- Las FRFs para diferentes configuraciones del modelo probabilístico fueron presentadas. Ellas exhiben la influencia de los módulos elásticos de flexión y corte representados tanto por variables aleatorias como por campos aleatorios. Las FRFs muestran que en la medida en que la frecuencia se incrementa, la predictibilidad de los valores de desplazamiento decrece. A pesar del hecho de que el modelo de amortiguamiento presentado en esta sección no es aplicables a frecuencias naturales mayores a 35 Hz, se encontraron resultados interesantes relacionados con los desplazamientos de la pieza estructural.
- La variabilidad longitudinal del MOE produce una disminución del rango de frecuencias naturales en relación al modelo con MOE homogéneo. Esto se observa en las zonas de resonancia de la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) la cual resulta más angosta en el primer caso y tiene influencia en la consideración de los desplazamientos de vigas con frecuencias naturales contenidas en las zonas que cambian de condición de un modelo a otro. Dentro de la FRF, para una frecuencia determinada, la influencia del modelado del MOE, como variable aleatoria o como campo aleatorio, en los desplazamientos es similar a la resultante en el estudio de deflexiones, presentando el primer caso un mayor desvío estándar.
- Existe una baja influencia del modelado estocástico del amortiguamiento en los desplazamientos a pesar de haber propuesto un amplio rango de variación en la determinación de su distribución de probabilidad a través del PME. Las diferencias entre el modelado determinístico o estocástico del amortiguamiento se observan en la zona de frecuencias de resonancia para valores de desplazamiento con probabilidades bajas de ser superados. Por lo tanto, la consideración de un valor medio de dicho parámetro resulta aceptable para la evaluación de la respuesta estructural.

5.3. Propagación de incertidumbres utilizando Modelos de Zonas Débiles

5.3.1. Vibraciones libres en vigas y pandeo de columnas

Como ya ha sido mencionado en la sección en la que se estudiaron las deflexiones en vigas, el diseño estructural debe satisfacer dos requerimientos importantes, la seguridad y el comportamiento satisfactorio durante su utilización o serviciabilidad. Dentro de este último grupo, uno de los requerimientos está relacionado al comportamiento dinámico de sistemas y elementos estructurales. Además, dentro del primer grupo de requerimientos, se encuentran aquellos casos en los que capacidad de carga de las piezas estructurales puede verse reducida cuando una carga de compresión alcanza los límites de pandeo. Los reglamentos estructurales definen valores límites de las frecuencias naturales con el objetivo de controlar el comportamiento dinámico de pisos de madera, puentes y marcos estructurales además establecen valores límites para cargas de compresión con el objetivo de evitar el pandeo. En esta sección, estos dos problemas estructurales, representados matemáticamente como problemas de autovalores, son abordados a través del estudio del comportamiento dinámico de vigas y el problema de pandeo en columnas aserradas de *Eucalyptus grandis* cultivado en la Mesopotamia Argentina con propiedades inciertas.

En la presente sección, el modelo estocástico de Zonas Débiles es empleado para el estudio de los problemas de autovalores establecidos previamente. Para ello, las primeras tres frecuencias naturales y cargas de pandeo, y sus correspondientes formas modales son obtenidas. Las ecuaciones diferenciales son formuladas partiendo de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (E-B) y luego son discretizadas y aproximadas numéricamente a través del Método de los Elementos Finitos (MEF). A través de Simulaciones de Monte Carlo (MCS), las PDFs de las primeras tres frecuencias naturales y cargas de pandeo son obtenidas. Para la validación de los resultados numéricos, se realiza una comparación con valores experimentales de la primera frecuencia natural de vibración. Luego, la influencia en la respuesta estructural de cada uno de los parámetros estocásticos es estudiada y analizada. En este análisis, los modos de pandeo y de vibraciones son estudiados como procesos estocásticos. El modelo estocástico presentado en esta sección provee, como se verá a continuación, una buena predicción del comportamiento estructural de piezas aserradas de *Eucalyptus grandis*. El análisis estocástico permite obtener un mayor rango de resultados

que el enfoque determinístico y permite una mayor comprensión de la influencia en los resultados de las propiedades mecánicas.

5.3.1.1. Planteo del problema

Esta sección presenta el estudio de problemas de autovalores de elementos estructurales aserrados de madera de *Eucalyptus grandis* cultivado en la Mesopotamia Argentina considerando la presencia de nudos a través del Modelo de Zonas Débiles y utilizando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (E-B). Para el problema de vibraciones libres de una viga simplemente apoyada, la ecuación diferencial es la siguiente:

$$\rho(x)a(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e(x)i(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (5.42)$$

en donde $\rho(x)$ es la densidad del material por unidad de longitud; $a(x)$ es el área de la sección transversal de la viga; $e(x)$ es el MOE; $i(x)$ es el segundo momento de la sección transversal de la viga con respecto al eje z ; $v(x,t)$ es el desplazamiento transversal; x es la posición en la longitud de la viga y t es el tiempo. Para el problema estático de pandeo, la variable tiempo desaparece y las deflexiones $v(x)$ y la carga de pandeo p_{cr} se encuentran relacionadas a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(e(x)i(x)\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - p_{cr} \frac{d^2}{dx^2} (v(x)) = 0. \quad (5.43)$$

En la presente sección, la variabilidad longitudinal del MOE y del segundo momento de área de la sección transversal de la viga son introducidos debido a la presencia de nudos que producen una reducción local de ambos. Variables aleatorias son usadas para este propósito; en lo que sigue de la sección, estas cantidades estocásticas serán indicadas mediante letras mayúsculas. De esta manera, las Ecuaciones diferenciales (5.42) y (5.43), se reescriben, respectivamente, como sigue:

$$Pa\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (5.44)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x)\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right) - P_{cr} \frac{d^2}{dx^2} (V(x)) = 0. \quad (5.45)$$

En este estudio, los nudos de la madera son modelados como huecos que modifican el segundo momento de área de la sección transversal de las piezas y consecuentemente

la rigidez a flexión. Sin embargo, no son considerados como huecos en el término inercial que involucra la densidad de masa ya que la masa del nudo participa en este término desestimando de esta manera un eventual cambio en la densidad. Solamente se considera la variación de la densidad de masa P entre las vigas de la muestra.

Discretización mediante el Método de los Elementos Finitos

Definimos la formulación variacional prescribiendo un conjunto de funciones admisibles ψ :

$$\int_0^L \left[\rho(x)a(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e(x)i(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] \phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in \psi, \quad (5.46)$$

$$\int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(e(x)i(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - p_{cr} \frac{d^2}{dx^2} (v(x)) \right] \phi(x) dx = 0. \quad \forall \phi \in \psi. \quad (5.47)$$

Para piezas simplemente apoyadas en sus extremos,

$$\psi = \{ \phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ es definida por tramos } \mathcal{C}^2 \text{ y acotada, } \phi(0) = 0, \phi(L) = 0 \}. \quad (5.48)$$

Esta formulación, en conjunto con las condiciones de borde, conducen a las siguientes formas de ambos problemas variacionales:

$$M(v, \phi) + K(v, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \psi, \quad (5.49)$$

$$K(v, \phi) = p_{cr} K^G(v, \phi) \quad \forall \phi \in \psi, \quad (5.50)$$

en donde, de la Ecuación (5.49), $M(v, \phi)$ y $K(v, \phi)$ son los operadores de masa y rigidez respectivamente, y, de la Ecuación (5.50), $K(v, \phi)$ y $K^G(v, \phi)$ son los operadores de rigidez y de rigidez geométrica respectivamente. Las Ecuaciones (5.49) y (5.50) son aproximadas numéricamente a través del método de Galerkin. Luego, aplicando la metodología estándar del Método de los Elementos Finitos las formas variacionales son discretizadas. Para ello aplicamos elementos viga bajo la formulación E-B presentados en la Subsección 4.3.4.1. Finalmente, la matriz de rigidez global, la matriz global de masa y la matriz global

de rigidez geométrica son obtenidas mediante el ensamblado usual del método de los elementos finitos. Las frecuencias y modos naturales de vibración son obtenidos resolviendo la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{K} - \Omega_n^2 \mathbf{M}] \Phi_n = 0, \quad (5.51)$$

en donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices globales positivas-definidas de tamaño $n \times n$ de rigidez y de masa, respectivamente, Ω_n es la n^{th} frecuencia natural circular y Φ_n es el modo natural de vibración asociado. La carga de pandeo es obtenida resolviendo la siguiente ecuación:

$$\mathbf{K} - \hat{p}_{cr} \mathbf{K}^G = 0, \quad (5.52)$$

en donde \mathbf{K} y \mathbf{K}^G son las matrices globales positivas-definidas de tamaño $n \times n$ de rigidez y de rigidez geométrica de elementos en compresión, respectivamente, y \hat{p}_{cr} es la carga crítica o de pandeo.

5.3.1.2. Vibraciones naturales: análisis modal con el primer modelo de Zonas Débiles

En una primera instancia, del modelo de Zonas Débiles definitivo presentado en la Sección 5.1.2.2, el MOE en las zonas libres de defectos fue considerado solamente de manera constante. Además, para la asignación del mismo a lo largo de la viga, solo se consideraban secciones con nudos y secciones sin nudos como se indica en la Tabla 5.11 y se grafica en la Figura 5.17. Como puede observarse en la Tabla, las zonas débiles no eran discretizadas según el tamaño de los defectos considerados a través del índice de nudosidad K para la asignación del MOE.

Tabla 5.11: Parámetros de la PDF gamma del MOE.

Parámetro	MOE secciones con nudos	MOE secciones libres de nudos
a	42.730	31.301
b	0.315	0.507
μ	13.4879 GPa	15.889 GPa
σ	2.063 GPa	2.84 GPa
COV	0.153	0.178

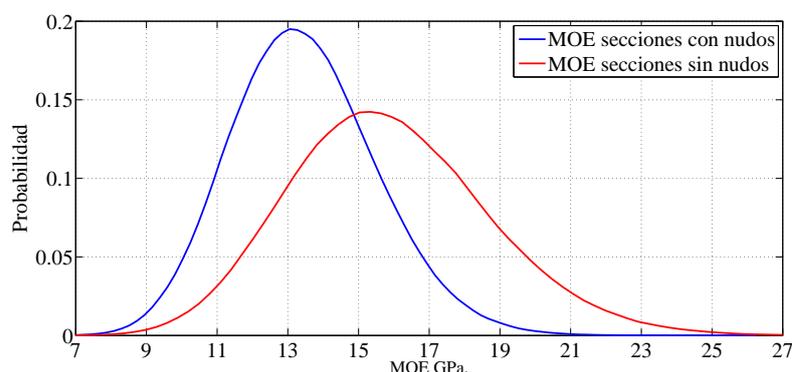


Figura 5.17: Distribuciones de probabilidad del MOE en las secciones libres de nudos (rojo) y en las secciones con nudos (azul).

En este primer modelo además, la asignación de la densidad de masa se realizaba a través de la distribución lognormal, debido al buen ajuste que la misma presenta con los resultados experimentales:

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.53)$$

en donde los parámetros μ y σ son valores iguales a 6.221 y 0.069 respectivamente.

Resultados numéricos

En lo que sigue de la sección, algunos resultados numéricos son presentados. En todas las simulaciones, se usaron 100 elementos finitos viga. Las integrales de los componentes de la matriz de rigidez de los elementos son computados por medio de cuadratura de Gauss de cinco puntos. Los parámetros dimensionales de los nudos de madera son simulados con el método de la transformación inversa.

Primer Modelo (M1)

En el primer modelo, los parámetros dimensionales de los nudos de madera son modelados como variables aleatorias a través de su JPMF previamente presentada. Los valores del MOE en las zonas libres de nudos de la viga y en las zonas con nudos son considerados determinísticos. La longitud de la zona débil es asumida como igual a siete veces la mayor dimensión del nudo. Los datos de la simulación numérica son: longitud 3 m, sección nominal 50×150 mm, MOE_{FKS} 15.889 GPa, MOE_{SWK} 13.489 GPa y densidad

de masa 505 Kg/m^3 . MOE_{FKS} indica el módulo de elasticidad de las secciones libres de nudos y MOE_{SWK} el módulo de elasticidad en las secciones con nudos. Estos parámetros dimensionales corresponden a vigas de madera de tamaño estructural que son frecuentemente utilizados en la práctica de diseño y corresponden a las dimensiones de las vigas de madera utilizadas en el relevamiento visual de los nudos.

Un estudio de convergencia es mostrado en la Figura 5.18 en donde ns es el número de simulaciones independientes del Método de Monte Carlo. El criterio de convergencia adoptado es el siguiente:

$$e \% = \left| \frac{E[F_n^{ns}] - E[F_n^{ns-200}]}{E[F_n^{ns-200}]} \right| \% < 0,2 \%, \quad (5.54)$$

en donde $E[F_n^{ns}]$ es el valor medio para un número de simulaciones ns y $E[F_n^{ns-200}]$ es el valor medio para un número de simulaciones $ns - 200$. Este criterio es adoptado debido a la forma simple de las PDFs de las frecuencias naturales.

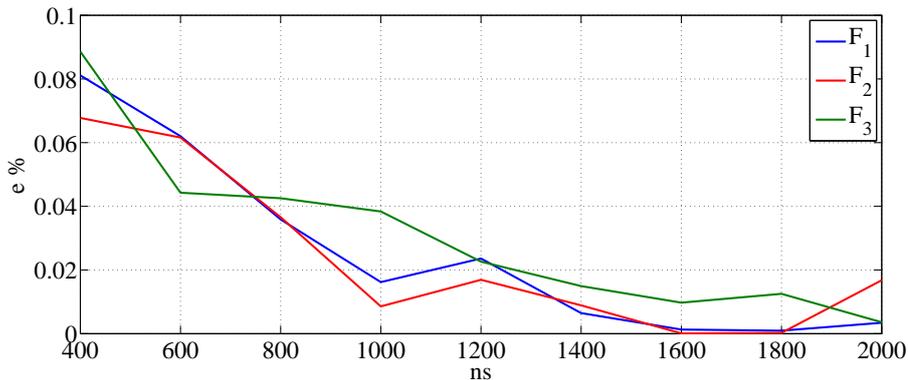


Figura 5.18: Error $e \%$ Ecuación (5.54). Convergencia de los valores medios de $E[F_n]$ para las primeras tres frecuencias naturales (Modelo M1).

Se alcanza rápidamente una convergencia aceptable, cuando $ns=600$, como puede observarse en la Figura 5.18. Luego, para este número de simulaciones independientes del Método de Monte Carlo, las PDFs de las primeras tres frecuencias naturales ($f[F_n]$) son obtenidas (Figura 5.19). Como puede observarse, la forma de las tres PDFs es aproximadamente igual. El rango de variación de cada una de las frecuencias naturales muestra un incremento desde la primera a la tercera frecuencia natural.

En la Tabla 5.12, los valores medios, desvíos estándar y coeficientes de variación de $f[F_n]$ son presentados. Como puede observarse, los valores medios y desvíos estándar

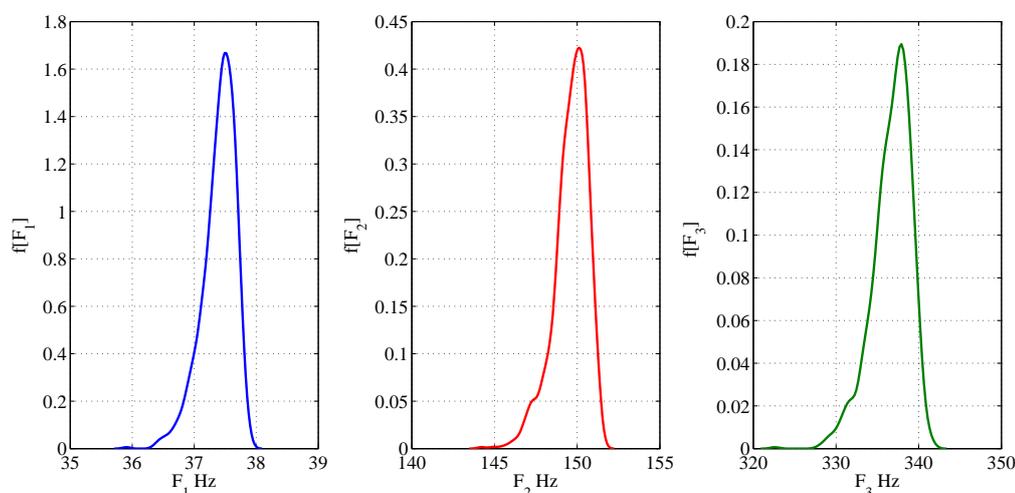


Figura 5.19: PDFs de las primeras tres frecuencias naturales obtenidas con M1.

se incrementan desde la primera hasta la tercera frecuencia natural, mientras que los coeficientes de variación permanecen constantes para las tres PDFs presentadas en la Figura 5.19.

Tabla 5.12: Frecuencias naturales (M1). Valores medios, desvíos estándar y coeficientes de variación de $f[F_n]$.

Frecuencia natural	$E[F_n]$	$\sigma[F_n]$	COV
F_1	37.435 Hz	0.170 Hz	0.004
F_2	149.677 Hz	0.716 Hz	0.004
F_3	336.707 Hz	1.576 Hz	0.004

El propósito de este primer modelo M1 es el de cuantificar la influencia de los nudos de madera sin tener en cuenta la variabilidad del MOE entre vigas, siendo la estocasticidad del modelo generada solamente por los parámetros de los nudos. De manera distinta, en la práctica de diseño, la influencia de los nudos es solo tomada en cuenta en el valor elegido del MOE a través de una clase resistente y no son tenidos en cuenta otras características como la disminución seccional del segundo momento del área o la reducción local del MOE producidos por su presencia. Las diferencias para cada frecuencia entre una viga de madera sin nudos y la misma viga con nudos son mostradas en la Tabla 5.13. Los valores

medios y los desvíos estándar exhiben un pequeño incremento desde la primera hasta la tercera frecuencia natural y las diferencias máximas obtenidas son mostradas en la tercera columna para las tres primeras frecuencias naturales.

Tabla 5.13: Frecuencias naturales (M1). Diferencias entre vigas con nudos y vigas sin nudos.

Frecuencia natural	$E[\text{diferencia}]$	$\sigma[\text{diferencia}]$	Max <i>diferencia</i>
F_1	-0.792 %	0.516 %	-3.794 %
F_2	-1.055 %	0.638 %	-3.847 %
F_3	-1.249 %	0.708 %	-4.369 %

Las frecuencias naturales de la viga de madera sin nudos y con propiedades mecánicas uniformes fueron calculadas a través de la siguiente expresión:

$$f_n = \frac{n^2\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{ei}{\rho a}}, \quad (5.55)$$

en donde ρ es la densidad de masa, a es la sección transversal de la viga, e es el Módulo de Elasticidad (MOE), i es el segundo momento de área de la sección transversal de la viga y n es el orden de la frecuencia natural.

Debido a la variación estocástica de las propiedades mecánicas de la viga en cada sección, los primeros tres modos naturales de vibración son representados por tres procesos estocásticos parametrizados por la posición en la longitud de la viga $\Phi_n(w, x)$. Luego de desarrollar el cálculo mediante el método de los elementos finitos, las formas de los modos de vibración son obtenidas para todas las realizaciones del método de MC. Finalmente, un análisis estadístico permite obtener el valor medio de los modos y otras cantidades así como histogramas. En la Figura 5.20, el proceso estocástico $\Phi_n(w, x)$ es presentado para las primeras tres frecuencias naturales a través de histogramas de Φ_n obtenidos en tres puntos diferentes a lo largo de la longitud de la viga.

En la Tabla 5.14, se listan los valores medios y desvíos estándar de cada uno de los histogramas de la Figura 5.20. Como puede observarse, los valores medios y los desvíos estándar varían con el orden del modo y el punto de la viga en el cual han sido obtenidos.

El modelo propuesto M1 considera la variabilidad de las propiedades en forma diferente a los métodos usuales empleados en la práctica de diseño. Aunque pequeña, se puede observar una variación estadística en las frecuencias.

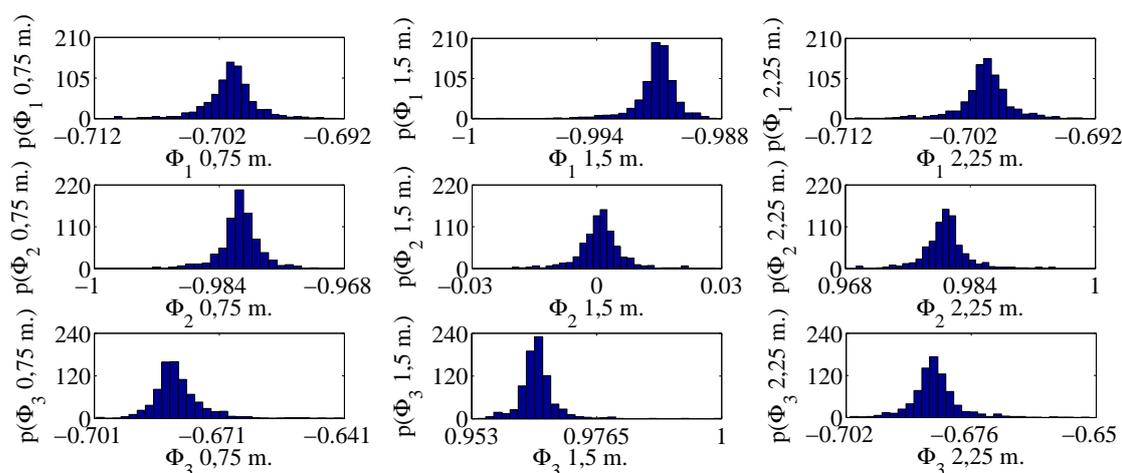


Figura 5.20: Histogramas de los modos naturales de vibración obtenidos en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M1.

Tabla 5.14: Valores medios y desvíos estándar de los modos naturales de vibración en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M1.

Parámetro estadístico	x=0.75 m	x=1.5 m	x=2.25 m
$E[\Phi_1]$	-0.701	-0.991	-0.701
$\sigma[\Phi_1]$	0.0022	0.0011	0.0021
$E[\Phi_2]$	-0.981	$8.44 \cdot 10^{-4}$	0.981
$\sigma[\Phi_2]$	0.0028	0.0056	0.0029
$E[\Phi_3]$	-0.681	0.965	-0.683
$\sigma[\Phi_3]$	0.0061	0.0036	0.0053

Segundo Modelo (M2)

En el segundo modelo, los nudos son modelados como en M1. Adicionalmente, el MOE en las zonas sin nudos de la viga y en las zonas con nudos es modelado a través de las PDFs presentadas en la Tabla 5.11. La condición impuesta para los valores de las variables aleatorias que representan el MOE_{FKS} y el MOE_{SWK} es que $MOE_{FKS} > MOE_{SWK}$. Además, los valores de MOE_{SWK} son variables aleatorias independientes. La longitud de las zonas débiles es asumida como igual a siete veces la mayor dimensión del nudo, de forma similar a M1. La variabilidad de la densidad de masa entre vigas de madera es

introducida por la PDF lognormal presentada previamente.

Los datos de la simulación son los utilizados anteriormente en M1. Un estudio de convergencia es mostrado en la Figura 5.21 en donde n_s es el número de simulaciones independientes de MC. El criterio de convergencia adoptado en este modelo es el mismo que el utilizado para M1, Eq. (5.54).

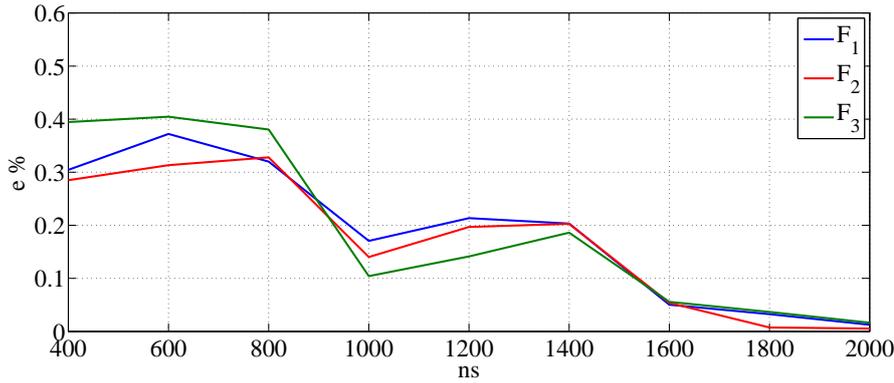


Figura 5.21: Convergencia de los valores medios $E[F_n]$ para las primeras tres frecuencias naturales (Modelo M2).

Se observa una convergencia aceptable para más de $n_s=1800$ simulaciones. Características análogas a las encontradas con M1 son vistas en la Figura 5.22 (*cf.* Figura 5.19), aunque el sesgo es ligeramente diferente.

En la Tabla 5.15, se muestran los valores medios, desvíos estándar y coeficientes de variación de $f[F_n]$. Nuevamente, el comportamiento del valor medio y el desvío estándar es similar al encontrado a través de M1. Una característica distinta consiste en que el desvío estándar y el coeficiente de variación se incrementan respecto a M1. Esto está justificado por la inclusión de las incertidumbres generadas por el MOE y la densidad en M2.

Tabla 5.15: Frecuencias naturales (M2). Valores medios, desvíos estándar y coeficientes de variación de $f[F_n]$.

Frecuencia natural	$E[F_n]$	$\sigma[F_n]$	COV
F_1	41.658 Hz	2.425 Hz	0.058
F_2	166.678 Hz	9.772 Hz	0.058
F_3	375.065 Hz	21.782 Hz	0.058

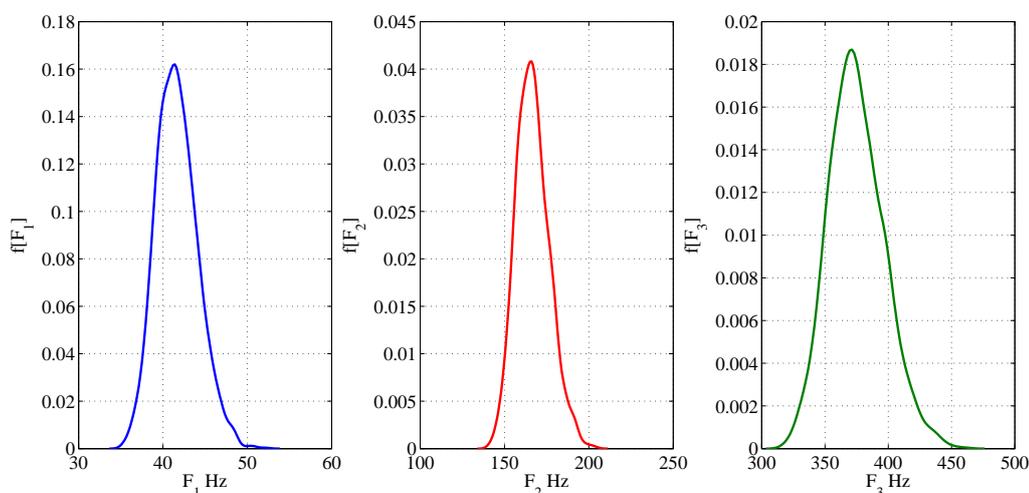


Figura 5.22: PDFs de las primeras tres frecuencias naturales obtenidas con M2.

En la Figura 5.23, el proceso estocástico $\Phi_n(w, x)$ es presentado para las primeras tres frecuencias naturales a través de los histogramas de Φ_n obtenidos en tres puntos de la longitud de las vigas. En comparación con M1 (*cf.* Fig. 5.20), las formas de los histogramas son diferentes, influenciadas por las incertidumbres introducidas por el MOE y la densidad de masa en M2. Por este motivo, se observa una mayor dispersión.

Los valores medios y desvíos estándar de cada histograma correspondiente a la Figura 5.23 son presentados en la Tabla 5.16. De forma similar a M1, los valores medios y desvíos estándar varían con el orden del modo y el punto de la viga analizado.

Tabla 5.16: Valores medios y desvíos estándar de los modos naturales de vibración en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M2.

Parámetro estadístico	x=0.75 m	x=1.5 m	x=2.25 m
$E[\Phi_1]$	-0.633	-0.895	-0.663
$\sigma[\Phi_1]$	0.0221	0.0309	0.0226
$E[\Phi_2]$	-0.880	$-1.85 \cdot 10^{-4}$	0.881
$\sigma[\Phi_2]$	0.0310	0.0127	0.0311
$E[\Phi_3]$	-0.627	0.886	-0.626
$\sigma[\Phi_3]$	0.0251	0.0314	0.0252

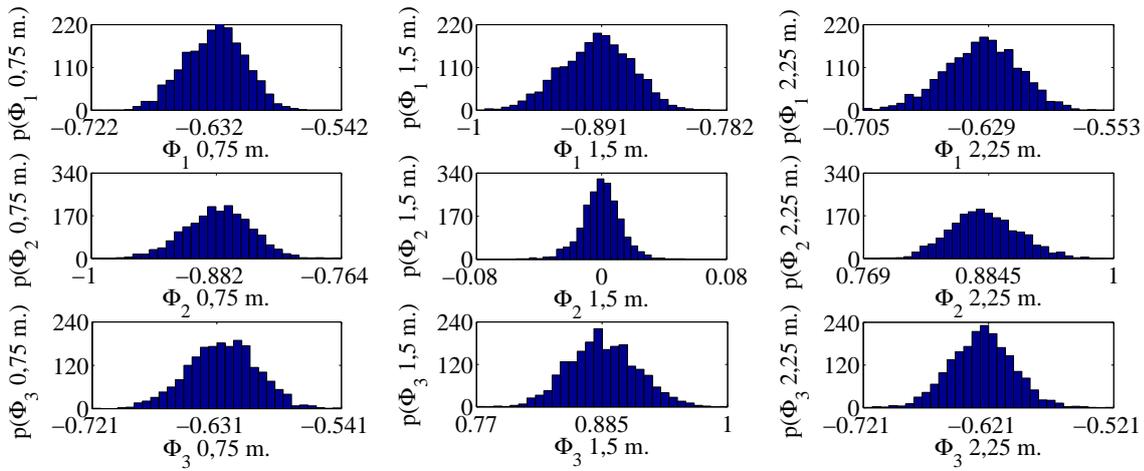


Figura 5.23: Histogramas de los modos naturales de vibración obtenidos en tres puntos de la longitud de la viga utilizando M2.

Simulación numérica del ensayo experimental para obtener la frecuencia fundamental de vibración

En esta sección, se reporta una comparación entre resultados numéricos y experimentales de la primera frecuencia natural. Estos últimos fueron obtenidos mediante el ensayo presentado en la Figura 5.24 y son reportados por Piter (2003). Los mismos corresponden a 50 vigas aserradas de *Eucalyptus grandis*, con una sección nominal de $50 \times 150 \text{ mm}^2$ y una longitud de 3 m. La frecuencia fundamental de vibración fue obtenida excitando mecánicamente las vigas a través de un impacto en uno de sus extremos y colocando un sensor en el centro del cuerpo, en la posición anti-nodal. Un acelerómetro piezoeléctrico tipo Vibrator PZ-10, un osciloscopio tipo Fluke 123 Scopemeter 20 MHz y un software que permite la identificación de la frecuencia fundamental a través de la transformada de Fourier del espectro armónico, fueron empleados por Piter (2003) en el ensayo. Las vigas ensayadas pertenecen a las siguientes clases resistentes: 12 vigas clase C1, 3 vigas clase C2 y 35 vigas clase C3 de acuerdo al método de clasificación visual de la norma IRAM 9662-2 (2006).

Para la simulación numérica, las vigas de madera fueron discretizadas con 100 elementos viga y se usaron 1800 simulaciones independientes de MC. En la Figura 5.25, se muestra una comparación entre las PDFs y CDFs numéricas y experimentales de la primera frecuencia natural. Los resultados corresponden a diferentes longitudes de zonas

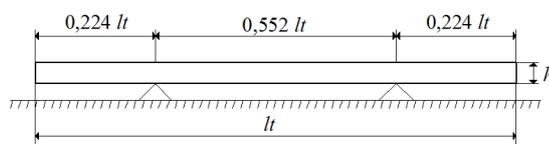


Figura 5.24: Ensayo experimental llevado a cabo para la determinación de la primera frecuencia natural de vibración, Piter (2003).

débiles. Las CDFs obtenidas numéricamente difieren de la curva experimental en la parte inferior del gráfico (por debajo de 50 %). Además, se logra una buena predicción de los valores de los percentiles superiores de la PDF experimental de F_1 con una longitud de zona débil igual a siete veces la dimensión del nudo. En la Tabla 5.17, los resultados numéricos para diferentes valores de longitud de zonas débiles son presentados y comparados. Los mismos muestran una buena predicción del valor medio de la primera frecuencia natural pero los desvíos estándar exhiben un valor menor en los resultados provenientes de los modelos numéricos. Con el objetivo de encontrar la fuente de esta discrepancia, los intervalos de confianza del 95 % de los resultados obtenidos de la muestra experimental y de los resultados de las realizaciones numéricas son establecidos tanto para el valor medio como para el desvío estándar de F_1 (Tabla 5.18). Como puede observarse, solamente los dos casos con la mayor longitud de zona débil (9 y 11 veces la mayor dimensión del nudo) caen dentro del intervalo del valor medio de la muestra experimental. Además, solamente este último caso contiene el valor medio experimental. La longitud del intervalo es más amplia en el caso experimental, probablemente debido al menor número de muestras y al mayor valor de desvío estándar. Si se realiza una inspección cercana de las muestras experimentales, se puede observar que algunos de los casos de vigas con una mayor cantidad de defectos se encuentran en la parte inferior de la CDF. Debido a la simplicidad del modelo numérico presentado en esta sección, algunos de esos defectos (*e.g.* presencia de médula en 26 de las 35 piezas C3 o valores altos de nudosidad) no son tomados en cuenta dando lugar a más discrepancias. El modelo podría ser mejorado para considerar otro tipo de defectos como la presencia de médula y progresando en la valoración de las propiedades del material de acuerdo al tamaño de los nudos.

A modo de ilustración, algunas realizaciones de la variación longitudinal del MOE son mostradas en la Figura 5.26.

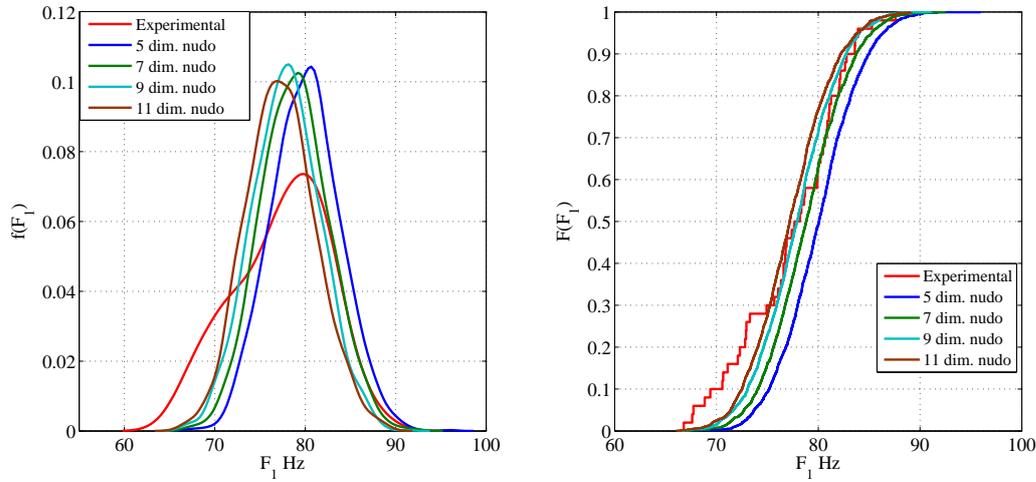


Figura 5.25: Comparación entre las PDFs y CDFs numéricas y experimental de F_1 para diferentes valores de longitud de zonas débiles.

Tabla 5.17: Primera frecuencia natural. Comparación entre resultados numéricos y experimentales para diferentes longitudes de zonas débiles.

Parámetro estadístico	Exp.	5 dim. nudo	7 dim. nudo	9 dim. nudo	11 dim. nudo
$E[F_1]$	77.334 Hz	80.034 Hz	78.843 Hz	77.886 Hz	77.315 Hz
$\sigma[F_1]$	5.037 Hz	3.795 Hz	3.792 Hz	3.77 Hz	3.805 Hz
Min F_1	66.780 Hz	67.131 Hz	66.846 Hz	66.105 Hz	66.052 Hz
Max F_1	87.600 Hz	95.915 Hz	92.510 Hz	91.133 Hz	89.128 Hz

5.3.1.3. Vibraciones naturales: análisis modal con modelo definitivo de Zonas Débiles

Resultados numéricos de las primeras tres frecuencias naturales F_n y modos de vibración Φ_{F_n} de vigas de madera de *Eucalyptus grandis* simplemente apoyadas son reportados en esta sección. En todas las simulaciones, se han utilizado 100 elementos vigas bajo la formulación de Euler-Bernoulli. Las integrales de los componentes de la matriz de rigidez de los elementos son computadas mediante el método de la cuadratura de Gauss de cinco puntos. Los parámetros dimensionales de los nudos de madera son simulados con el método de la transformación inversa (Rubinstein y Kroese, 2007). Los parámetros dimensionales de las vigas de madera empleadas en la simulación numérica son los siguientes: longitud

Tabla 5.18: Intervalos de confianza (CI) del valor medio y el desvío estándar de F_1 .

Datos	CI de μ_{F_1}		CI de σ_{F_1}	
	Límite inferior	Límite superior	Límite inferior	Límite superior
Exp.	75.912 Hz	78.775 Hz	4.201 Hz	6.276 Hz
5 dim. nudo	79.858 Hz	80.209 Hz	3.675 Hz	3.923 Hz
7 dim. nudo	78.667 Hz	79.018 Hz	3.672 Hz	3.92 Hz
9 dim. nudo	77.691 Hz	78.040 Hz	3.651 Hz	3.897 Hz
11 dim. nudo	77.139 Hz	77.491 Hz	3.684 Hz	3.933 Hz

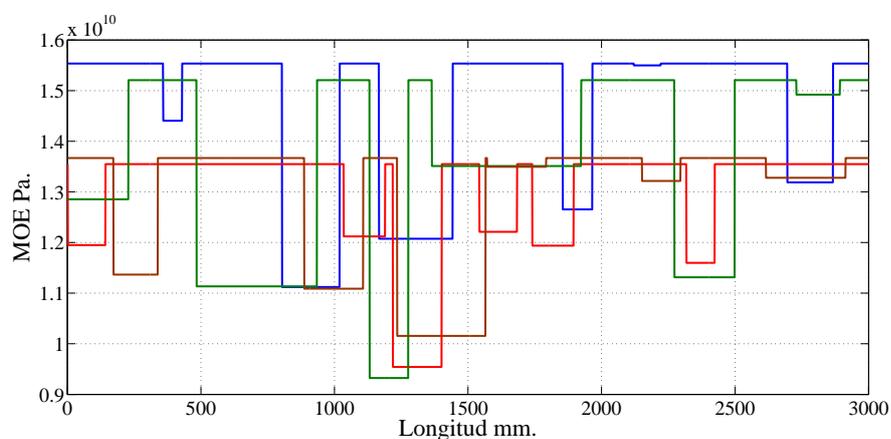


Figura 5.26: Realizaciones de la variabilidad longitudinal del MOE.

de 3 m y una sección nominal de 50 mm \times 150 mm. Estos parámetros dimensionales corresponden a vigas de madera de tamaño estructural, las cuales son frecuentemente empleadas en la práctica de diseño estructural.

La Figura 5.27 muestra un estudio de convergencia. El mismo fue realizado variando el número de simulaciones independientes del método de Monte Carlo (MC) ns y evaluando los resultados de $E[F_1]$ (valor medio de la primera frecuencia natural).

El criterio de convergencia adoptado fue el siguiente: $|E[F_1^{ns}] - E[F_1^{ns-200}]| \leq 0,1$ Hz; en donde $E[F_1^{ns}]$ es el valor medio de la primera frecuencia natural para un número de simulaciones ns y $E[F_1^{ns-200}]$ es el valor medio de la primera frecuencia natural para un número de simulaciones $ns - 200$. El modelo probabilístico con d_∞ presenta valores más altos de $E[F_1]$ que el mismo modelo cuando se utiliza d_1 y un mayor desvío estándar

$\sigma[F_1]$. Este estudio de convergencia fue llevado a cabo con el fin de determinar el número apropiado de simulaciones necesario para alcanzar el grado de precisión prescrito.

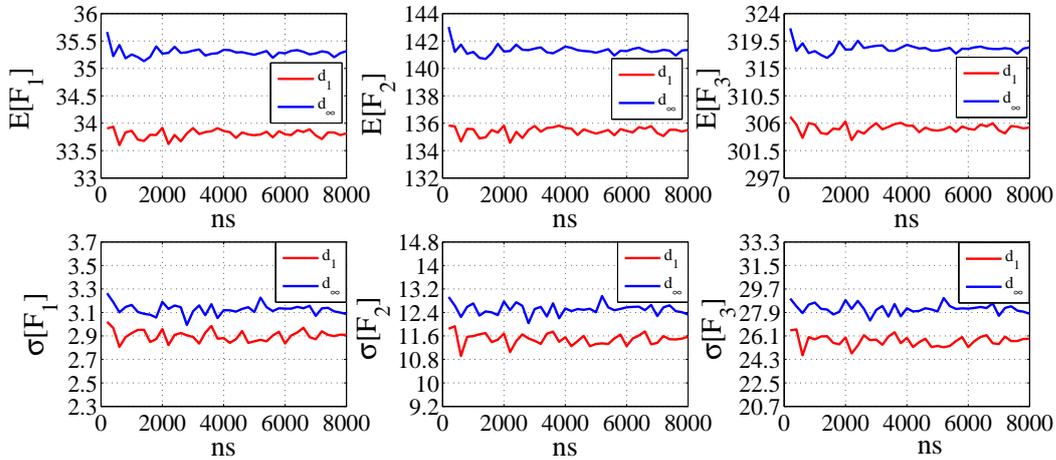


Figura 5.27: Convergencia de $E[F_i]$ (gráficos superiores) y $\sigma[F_i]$ (gráficos inferiores) para d_1 y d_∞ .

5.3.1.4. Validación numérica del modelo estocástico

En esta sección, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos tanto de forma numérica como experimental a través del análisis de la primera frecuencia de vibración. Para ello, se utilizan los datos obtenidos de forma experimental de la sub-sección anterior.

La comparación de la CDF de la primera frecuencia natural obtenida tanto con el método numérico/probabilístico desarrollado como con el método experimental aplicado es presentada en la Figura 5.28. Los resultados numéricos corresponden a dos valores diferentes de longitud de zonas débiles. El primer gráfico fue obtenido para una longitud de zona débil igual a cinco veces la mayor dimensión del nudo ($5 \times \max(q, w)$) mientras que el segundo gráfico corresponde a una longitud de zona débil igual a siete veces la mayor dimensión del nudo ($7 \times \max(q, w)$). Se comparan los resultados numéricos y experimentales para los dos valores de longitud de zonas débiles. Dentro de esta comparación, se puede observar que los resultados numéricos para el primer caso ($5 \times \max(q, w)$) y d_1 son aceptables y muestran una buena predicción de la primera frecuencia natural de las

vigas ensayadas. Los valores estadísticos obtenidos de los resultados experimentales son los siguientes: valor medio $E[F_1] = 77.33$ Hz y desvío estándar $\sigma[F_1] = 5.03$ Hz. Mientras que los valores estadísticos obtenidos de los resultados numéricos con una longitud de zona débil igual a $5 \times \max(q, w)$ y una longitud de correlación d_1 , son los siguientes: valor medio $E[F_1] = 76.47$ Hz y un desvío estándar $\sigma[F_1] = 6.66$ Hz. Los valores medios obtenidos numéricamente son cercanos a los experimentales mientras que los desvíos estándar y coeficientes de variación presentan valores mayores respecto a los resultados experimentales. En forma adicional, las propiedades dinámicas calculadas en cada una de

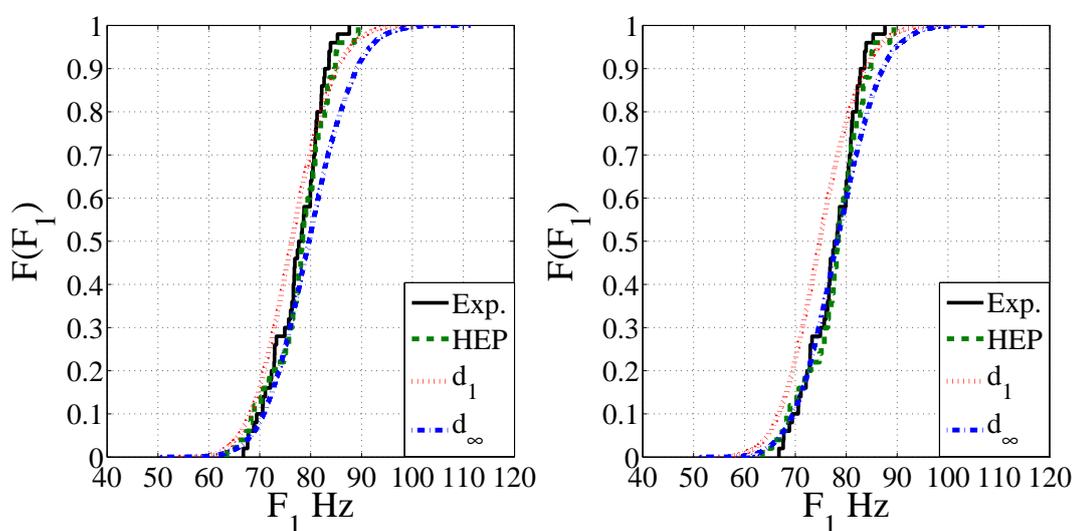


Figura 5.28: Frecuencia fundamental. Comparación entre CDFs numéricas y experimentales de F_1 para dos valores de longitudes de zonas débiles; gráfico izquierdo: cinco veces la dimensión mayor del nudo y gráfico derecho: siete veces la dimensión mayor del nudo.

las vigas ensayadas (consideradas constantes dentro de la longitud de la viga) fueron incluidas en el modelo numérico. Este caso es llamado modelo Homogéneo con Propiedades Experimentales (HEP) y sus resultados son presentados en la misma figura. En la práctica ingenieril, las propiedades de la madera son generalmente consideradas constantes a lo largo del elemento y esta suposición puede conducir a una sobre o sub-evaluación de la respuesta dinámica.

5.3.1.5. Influencia del campo aleatorio $I(x)$ en las frecuencias naturales

La influencia del campo aleatorio $I(x)$ producido por la presencia de nudos en las primeras tres frecuencias naturales F_n es estudiada en esta sección. Para llevarlo a cabo, se supone que el MOE y la densidad de masa asumen un valor determinístico constante a lo largo de la viga. Debido a esta suposición, la única fuente de incertidumbre del modelo numérico-probabilístico es el campo aleatorio del segundo momento del área. Los valores de referencia adoptados son los siguientes: $E_0 = 15.89$ GPa, $\rho_0 = 552.86$ kg/m³, $I_0 = 9.542 \cdot 10^{-6}$ m⁴ y $A_0 = 0.0058$ m². El valor de I_0 corresponde al de una viga sin nudos. Para estos valores de referencia y una longitud de viga $L = 3$ m, las primeras tres frecuencias naturales obtenidas a través de la ecuación clásica para una viga simplemente apoyada con propiedades homogéneas ($f_n = (n^2\pi/2L^2)\sqrt{(E_0I_0)/(A_0\rho_0)}$) son $F_{01} = 37.95$ Hz, $F_{02} = 151.80$ Hz y $F_{03} = 341.56$ Hz, respectivamente. En la Figura 5.29, se grafican las PDFs de las primeras tres frecuencias naturales obtenidas a través de la aplicación de MCS. Las frecuencias naturales obtenidas previamente con los valores de referencia son indicadas con líneas verticales. La CDFs de las diferencias porcentuales entre F_n y F_{0n} también son mostradas en la figura en los gráficos inferiores. Como puede observarse, el rango de

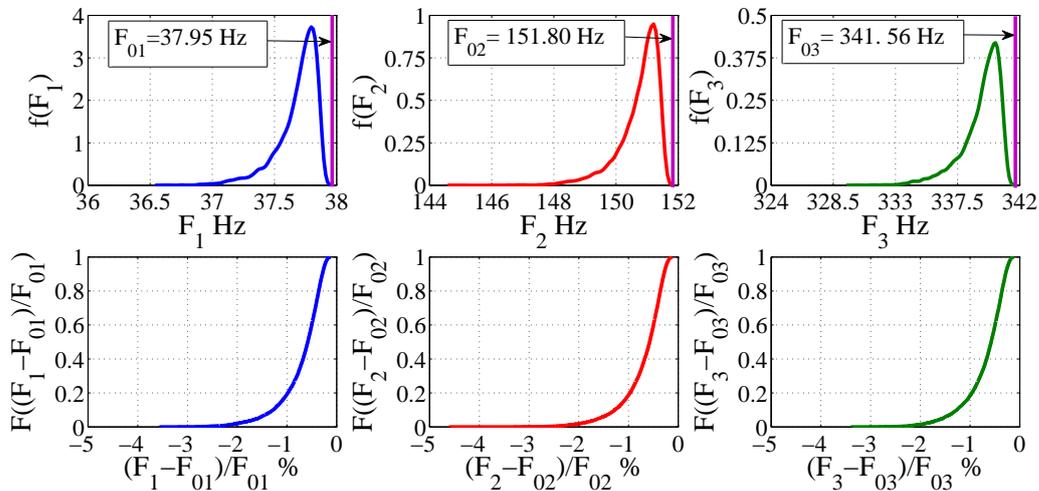


Figura 5.29: Frecuencias naturales. Análisis modal con el campo aleatorio $I(x)$, PDFs de las primeras tres frecuencias naturales F_n y CDFs de las diferencias porcentuales $F_n - F_{0n}$.

los resultados es pequeño y la influencia del campo aleatorio $I(x)$ no es significativa. La probabilidad de que la diferencia sea mayor que 1 % es 0.2 ($P((F_n - F_{0n})/F_{0n} \leq 1\%) = 0,2$)

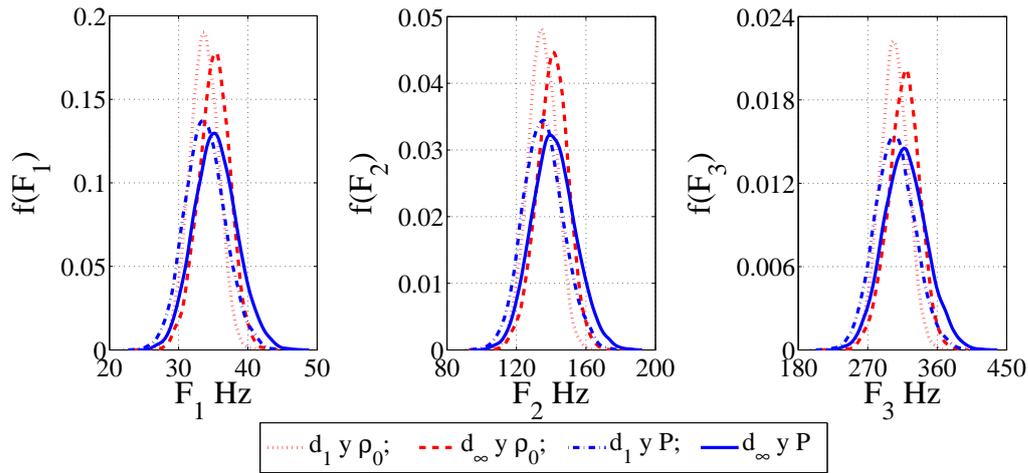
para las primeras tres frecuencias naturales. Este valor indica la baja influencia del campo aleatorio $I(x)$ en las frecuencias naturales. Las diferencias porcentuales del gráfico inferior son negativas debido al hecho de que todas las vigas simuladas tienen nudos y los mismos hacen que se presente un decremento de $I(x)$ con respecto al valor de referencia adoptado I_0 representativo de una sección sin nudos.

5.3.1.6. Influencia de la incertidumbre en la rigidez a flexión $E(x)I(x)$ y en la densidad de masa P en las frecuencias naturales

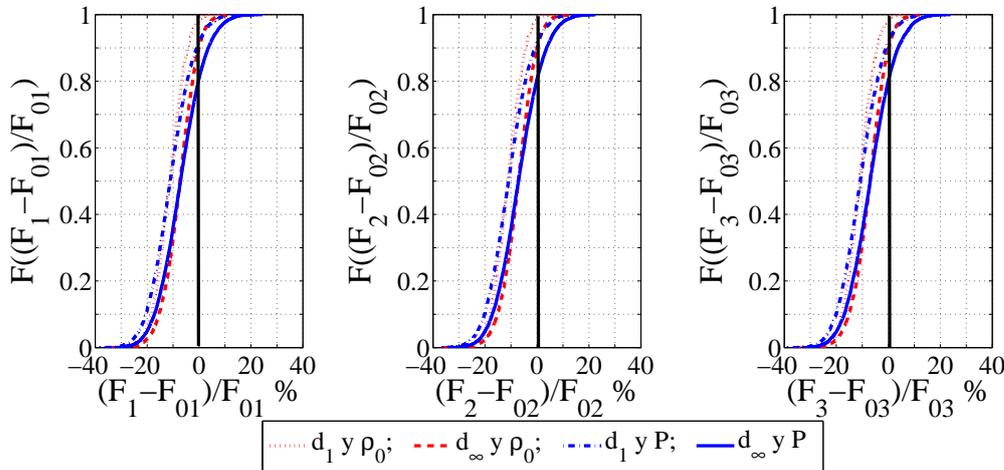
En esta sección, la propagación de la incertidumbres producidas por el campo aleatorio $E(x)I(x)$ y la variable aleatoria P en las tres primeras frecuencias naturales F_n es evaluada. En una primera instancia, la densidad de masa asume un valor determinístico constante a lo largo de la viga. Luego, la misma variable se supone aleatoria y constante a lo largo de la viga adicionando una nueva fuente de incertidumbre al modelo estocástico. Los valores de referencia y sus correspondientes frecuencias naturales son los mismos que en la sección anterior.

Las PDFs de las primeras tres frecuencias naturales y las CDFs de las diferencias porcentuales entre F_n y F_{0n} son mostradas en las Figuras 5.30(a) y 5.30(b) (gráficos con líneas punteadas y de trazos, ambas color rojo). Los resultados fueron encontrados para el caso en el cual la rigidez a flexión es modelada como un campo aleatorio y la densidad de masa por un valor determinístico. La influencia de la longitud de correlación d adoptada para las secciones libres de nudos puede ser también apreciada (d_1 líneas punteadas, d_∞ líneas de trazos cortos). Las PDFs de F_n tienen un punto inicial en común ubicado en la zona de frecuencias bajas para ambos valores de longitud de correlación y conducen a valores de frecuencias naturales que exhiben aproximadamente los mismos valores de probabilidad. En esta región, las vigas simuladas tienen una mayor cantidad de nudos y la variación longitudinal del MOE en las secciones sin nudos no es relevante. Partiendo de este punto inicial hacia los percentiles superiores de $f[F_n]$ para un mismo valor de probabilidad, los valores de F_n se incrementan con el incremento de la correlación en las zonas libres de nudos (incremento de d). Una posible interpretación de este resultado podría ser que las frecuencias naturales de vigas con altos valores de rigidez y una cantidad baja de defectos están localizadas en esta región y en este caso los valores de d son mas relevantes. Además, puede observarse que la introducción de la incertidumbre en los valores del MOE agranda el rango de la respuesta con respecto a los resultados presentados en la sección

previa. Esto es evidente en la Figura 5.30(b), en la que puede apreciarse, además, que el rango de la diferencia porcentual es mayor que el obtenido previamente. Esto indica que la influencia del campo aleatorio $I(x)$ es despreciable respecto a la influencia del campo aleatorio $E(x)$. Las diferencias porcentuales son negativas y positivas debido a que en este caso las vigas simuladas pueden adoptar a lo largo de sus secciones valores de $E(x)I(x)$ más altos o más bajos que el valor de referencia homogéneo adoptado E_0I_0 .



(a) PDFs de las primeras tres frecuencias naturales de vibración



(b) CDFs de la diferencia porcentual $F_n - F_{0n}$

Figura 5.30: Análisis modal con el campo aleatorio $E(x)I(x)$ y densidad de masa determinística y aleatoria.

En lo que sigue de esta sección, y en adición a las propiedades mecánicas inciertas presentadas anteriormente, un valor de densidad de masa aleatorio (P) es introducido en el modelo numérico/probabilístico. La Figura 5.30(a) (gráficos con líneas de trazo y

punto, y líneas sólidas, ambas color azul) muestra las PDFs de las primeras tres frecuencias naturales F_n y la Figura 5.30(b) (con el mismo estilo de líneas) presenta las CDFs de las diferencias porcentuales ente F_n y F_{0n} . La influencia del campo aleatorio $E(x)$ puede apreciarse simplemente en la forma de $f[F_n]$ que exhibe características similares a las descritas previamente en esta sección (d_1 líneas de trazo y punto, d_∞ líneas sólidas). El rango de la diferencia porcentual es mayor que en el caso previo (densidad de masa determinística). Esto indica que el efecto de variable aleatoria P en la respuesta del elemento estructural no es despreciable. Las diferencias porcentuales son mayores que en los resultados presentados previamente en esta misma sección debido al hecho de que la relación $E(x)I(x)/P$ puede adoptar un mayor rango de valores que la relación $E(x)I(x)/\rho_0$ al ser introducida la densidad de masa aleatoria P .

Los valores estadísticos hallados para los dos casos considerados de la variable d y los dos métodos empleados para modelar la densidad de masa en esta sección son presentados en la Tabla 5.19. El valor medio, el desvío estándar y el coeficiente de variación de la variable aleatoria F_n son mostrados. Un incremento en el valor de d produce un aumento en el valor medio y en el desvío estándar de la variable aleatoria F_n . Esto significa que una viga con un valor homogéneo y constante del MOE en las secciones libres de nudos presenta valores mayores de frecuencia natural que una viga con un valor no homogéneo del MOE en las mismas secciones. Además, las frecuencias naturales de estas vigas presentan una mayor dispersión respecto del valor esperado de F_n . La propagación de la incertidumbre en la densidad de masa puede observarse en el incremento del rango de la respuesta. Esto puede apreciarse comparando los valores del desvío estándar $\sigma[F_n]$ cuando la densidad de masa es modelada ya sea como un valor determinístico o como una variable aleatoria. También puede observarse que el coeficiente de variación permanece igual para las frecuencias naturales encontradas con el mismo valor de d .

Alternativamente, si la densidad de masa del nudo fuera considerada diferente que la de las zonas libres de defectos, la misma se hubiera vuelto un campo estocástico de forma análoga a lo que sucede con el MOE. Sin embargo, la densidad fue asumida como constante dentro de cada viga y variable entre diferentes vigas ya que la evidencia experimental muestra que no se han encontrado variaciones significativas en piezas de *Eucalyptus grandis*.

Tabla 5.19: Frecuencias naturales, análisis modal con el campo aleatorio $E(x)I(x)$ y la variable aleatoria P . Comparación entre resultados numéricos para dos valores de d .

Variables estocásticas	Parámetros estadísticos	F_1		F_2		F_3	
		d_1	d_∞	d_1	d_∞	d_1	d_∞
$E(x)I(x)$	$E[F_n]$ Hz	33.64	35.09	134.77	140.58	303.74	316.57
	$\sigma[F_n]$ Hz	2.07	2.30	8.14	9.16	18.08	20.61
	σ/E	0.061	0.065	0.060	0.065	0.060	0.065
$E(x)I(x)$ y P	$E[F_n]$ Hz	33.81	35.31	135.50	141.34	305.27	318.45
	$\sigma[F_n]$ Hz	2.90	3.08	11.57	12.32	25.87	27.80
	σ/E	0.086	0.087	0.085	0.087	0.085	0.087

5.3.1.7. Influencia de los campos aleatorios $I(x)$, $E(x)I(x)$ y de la variable aleatoria P en las formas modales

Debido a la variación estocástica de las propiedades mecánicas de la viga en cada sección, los primeros tres modos naturales de vibración son representados por tres procesos estocásticos parametrizados por la posición en la longitud de la viga x . Las funciones de valor medio y de desvío estándar ($E[\Phi_{F_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$) a lo largo de la viga correspondientes a los primeros tres procesos estocásticos $\Phi_{F_n}(x)$ son presentados en la Figura 5.31 para los tres casos de modelos estocásticos estudiados en la sección previa. En todos los casos la función de desvío estándar $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$ incrementa sus valores con el orden del modo natural de vibración. Además, la variación en la forma de la función $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$ para cada modo natural puede observarse. Resultados similares relacionados al estudio de frecuencias naturales y formas modales de cuerdas con masa y rigidez variables aleatoriamente han sido presentados por Manohar e Iyengar (1994). La función de valor medio no es modificada por los valores de la longitud de correlación. Mientras que, un decremento en el valor de d produce un incremento en la función de desvío estándar $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$ (Figuras 5.31(b) y 5.31(c)). La forma de la función $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$ se mantiene aproximadamente igual incluso cuando sus valores aumentan debido al agregado de las incertidumbres en el MOE y en la densidad de masa. Este comportamiento puede ser observado comparando las Figuras 5.31(b) y 5.31(c) con la Figura 5.31(a). La comparación de las Figuras 5.31(b) y 5.31(c) muestra que la función $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$ es modificada ligeramente con la inclusión de

la incertidumbre en la densidad de masa.

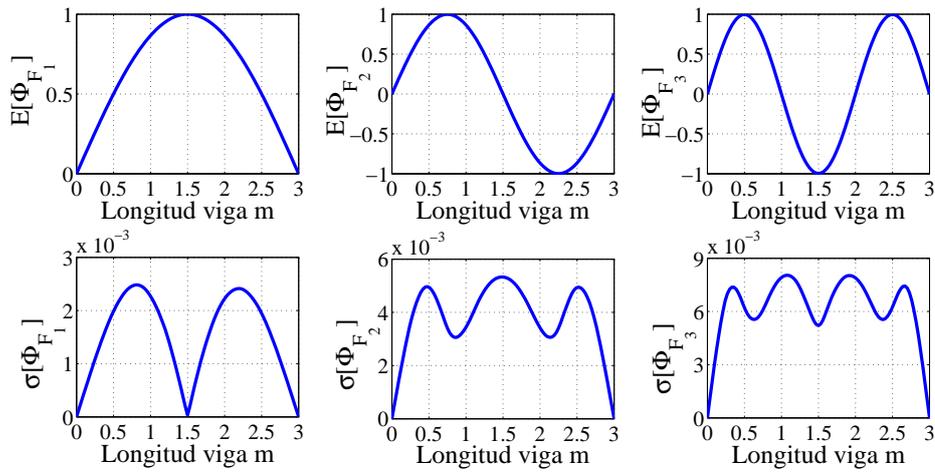
Los procesos estocásticos de las primeras tres formas modales $\Phi_{F_n}(x)$ se muestran en la Figura 5.32, gráficos de la izquierda. En el mismo, para varios puntos a lo largo de la longitud de la viga las PDFs de $\Phi_{F_n}(x)$ ($f(\Phi_{F_n}(x))$) son mostradas. La variación de las características de las PDFs a lo largo de la longitud de la viga se observa en concordancia con las funciones de valor medio y de desvío estándar ($E[\Phi_{F_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$) del proceso estocástico $\Phi_{F_n}(x)$ presentadas anteriormente. Los histogramas de las formas modales obtenidos en dos puntos de la longitud de la viga también se incluyen en la Figura 5.32, gráficos de la derecha. Los mismos muestran la disminución de la frecuencia de valores medios y el incremento del desvío estándar en puntos de la viga que presentan el mismo valor medio de amplitud modal $E[\Phi_{F_n}(x)]$ para cada una de las formas modales.

5.3.1.8. Pandeo de columnas

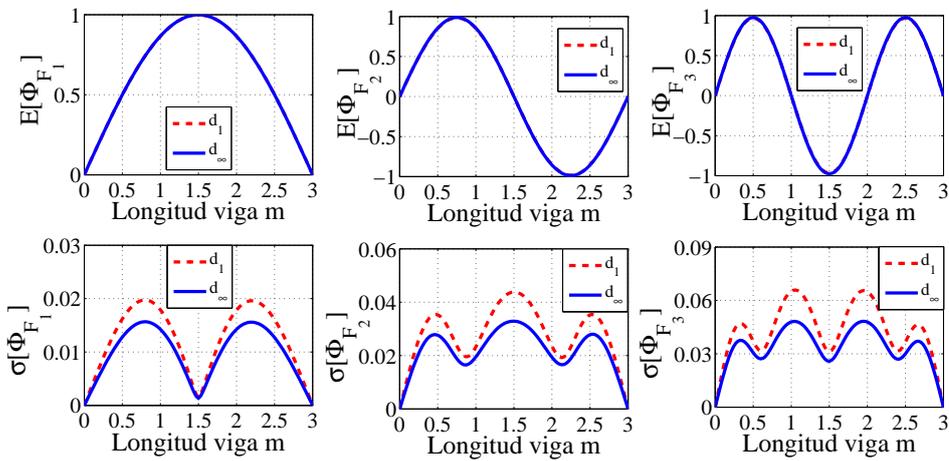
En esta sección, se reportan los resultados numéricos de las primeras tres cargas P_n y modos Φ_{P_n} de pandeo de una columna de madera de *Eucalyptus grandis* con apoyos simples. Los parámetros empleados en la simulación numérica son los siguientes: longitud de columna 2 m y una sección transversal nominal de 50 mm \times 150 mm. La relación entre la longitud de la columna y la dimensión menor de la sección transversal es igual a 40 ($L/b = 40$). Esto es equivalente a una esbeltez de 139 ($\lambda = 139$). Estos parámetros geométricos corresponden a columnas de madera de tamaño estructural, las cuales pueden ser utilizadas en la práctica de diseño.

5.3.1.9. Influencia del campo aleatorio $I(x)$ en la carga de pandeo

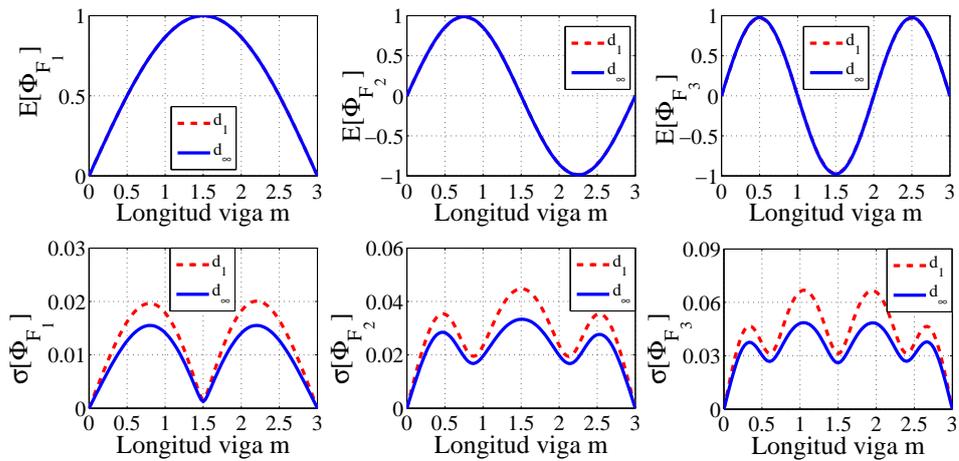
La influencia del campo aleatorio $I(x)$ en las primeras tres cargas de pandeo P_n es evaluada en esta sección. Para ello, el MOE asume un valor determinístico constante a lo largo de la columna. Los valores de referencia adoptados son los siguientes $E_0 = 15.89$ GPa y $I_0 = 8.263 \cdot 10^{-7}$ m⁴. Este valor de I_0 corresponde al de una columna sin nudos. Para estos valores de referencia y una longitud de columna $L = 2$ m, las primeras tres cargas de pandeo obtenidas a través de la ecuación clásica para una columna con apoyos simples y con propiedades homogéneas ($P_n = n^2 \pi^2 E_0 I_0 / L^2$) son $P_{01} = 32.39$ kN, $P_{02} = 129.57$ kN y $P_{03} = 291.55$ kN, respectivamente. Las PDFs de las primeras tres cargas de pandeo obtenidas a través de MCS son presentadas en la Figura 5.33. Las cargas de



(a) Campo aleatorio $I(x)$

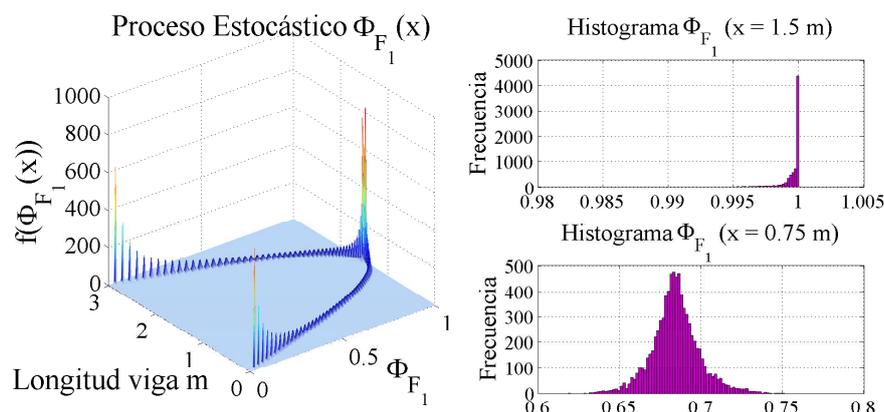


(b) Campo aleatorio $E(x)I(x)$

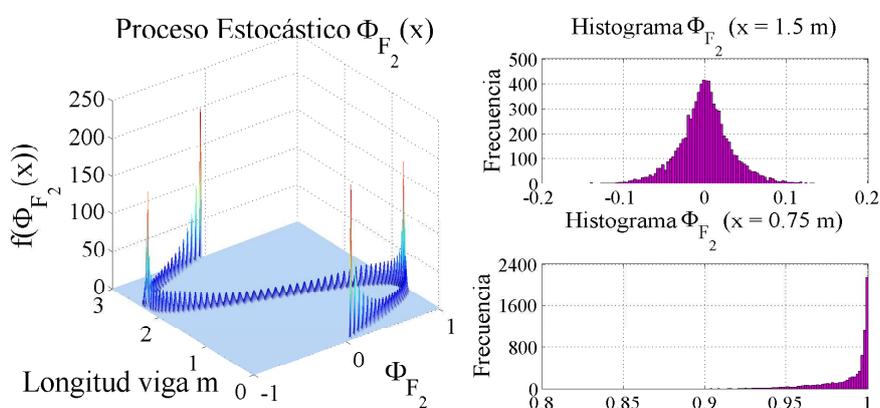


(c) Campo aleatorio $E(x)I(x)$ y variable aleatoria P

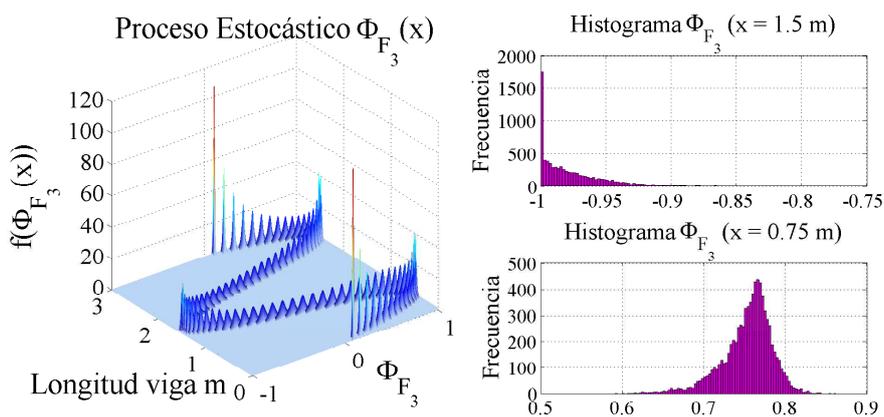
Figura 5.31: Formas modales. Funciones del valor medio y del desvío estándar ($E[\Phi_{F_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{F_n}(x)]$) del proceso estocástico $\Phi_{F_n}(x)$.



(a) Proceso estocastico del primer modo de vibración $\Phi_{F_1}(x)$.



(b) Proceso estocastico del segundo modo de vibración $\Phi_{F_2}(x)$.



(c) Proceso estocastico del tercer modo de vibración $\Phi_{F_3}(x)$.

Figura 5.32: PDFs de los procesos estocásticos $\Phi_{F_n}(x)$ en varios puntos de la longitud de la viga (gráficos izquierda) e histogramas obtenidos en dos puntos de la longitud de la viga (gráficos derecha), ambos para cada forma modal y obtenidos a través del campo aleatorio $E(x)I(x)$ y la variable aleatoria P .

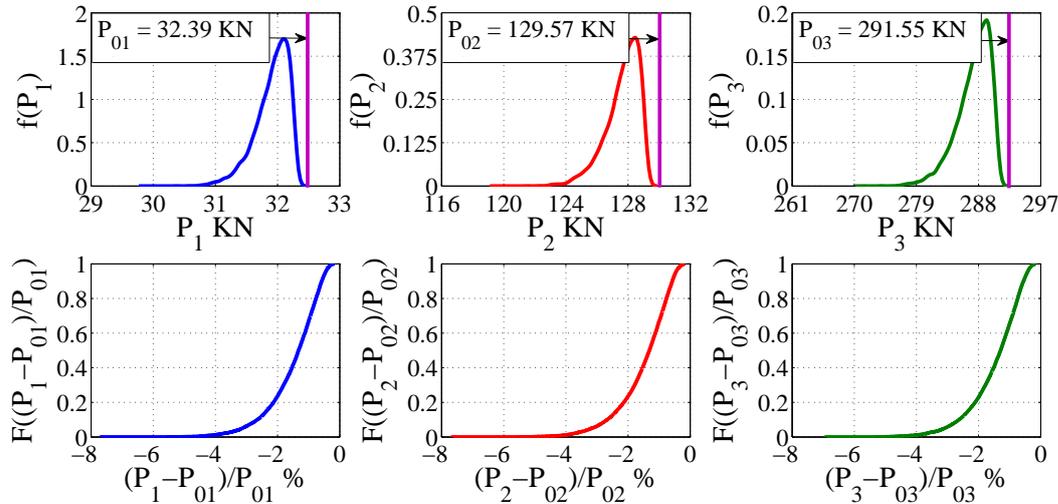


Figura 5.33: PDFs de las primeras tres cargas de pandeo P_n y CDFs de las diferencias porcentuales $P_n - P_{0n}$ halladas para el campo aleatorio $I(x)$.

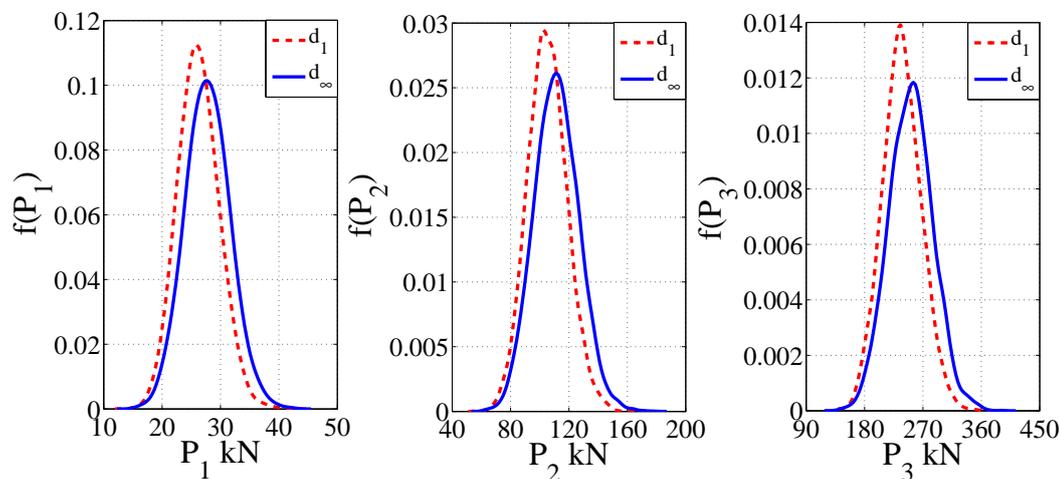
pandeo obtenidas a partir de los valores de referencia también son indicadas. Las CDFs de las diferencias porcentuales entre P_n y P_{0n} son mostradas en los gráficos inferiores de la misma Figura. El rango de los resultados es pequeño y el efecto del campo aleatorio $I(x)$ es despreciable. La probabilidad de que la diferencia porcentual sea mayor que 2 % es 0.2 ($P((P_n - P_{0n})/P_{0n} \leq 2\%) = 0,2$) para las primeras tres cargas de pandeo indicando de esta manera la baja influencia de $I(x)$ en la carga de pandeo. Las diferencias porcentuales son negativas debido al hecho de que todas las columnas simuladas tienen nudos y presentan un decremento longitudinal de $I(x)$ con respecto al valor de referencia adoptado de I_0 .

5.3.1.10. Influencia de la incertidumbre en la rigidez a flexión $E(x)I(x)$ en la carga de pandeo

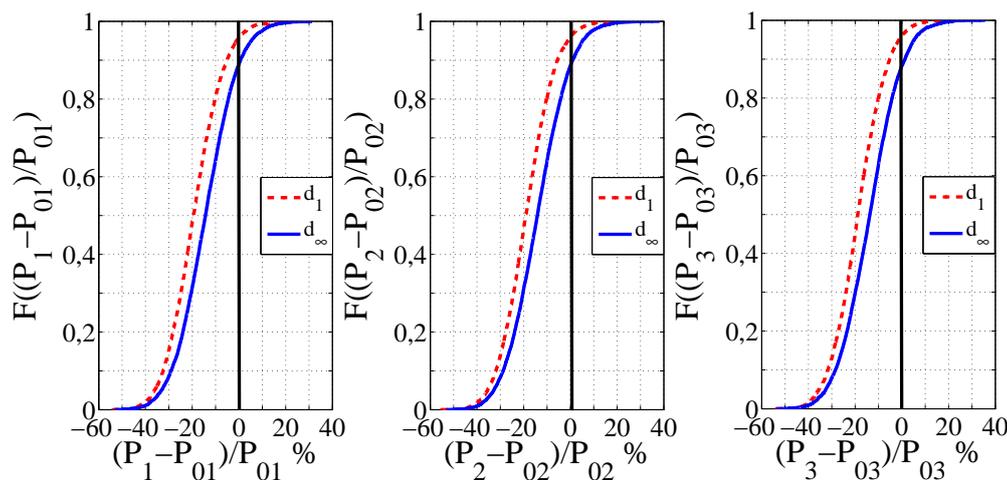
La propagación de la incertidumbre introducida por el campo aleatorio $E(x)I(x)$ en las primeras tres cargas de pandeo P_n es reportada en esta sección. Los valores de referencia y las correspondiente cargas de pandeo son las mismas que en la sección anterior.

La Figura 5.34 muestra las PDFs de las primeras tres cargas de pandeo P_n (Figura 5.34(a)) y las CDFs de las diferencias porcentuales entre P_n y P_{0n} (Figura 5.34(b)). El efecto del campo aleatorio $E(x)$ es apreciado a simple vista en la forma de $f[P_n]$ que

presenta las mismas características que las descritas en la sección de vibraciones naturales. El rango de la diferencia porcentual es mayor que el obtenido en el caso previo de estudio



(a) PDFs de las primeras tres cargas de pandeo.



(b) CDFs de las diferencias porcentuales $P_n - P_{0n}$

Figura 5.34: Cargas de Pandeo obtenidas con el campo aleatorio $E(x)I(x)$.

de las cargas de pandeo. Esto indica que la variación debida al campo aleatorio $I(x)$ es despreciable en comparación a la influencia del campo aleatorio $E(x)$. Las diferencias son negativas y positivas debido al hecho de que las columnas simuladas pueden tener valores mayores o menores de $E(x)I(x)$ que el valor homogéneo de referencia E_0I_0 previamente adoptado.

La Tabla 5.20 presenta el valor medio, el desvío estándar y el coeficiente de variación de las primeras tres cargas de pandeo para los valores considerados de longitud de correlación

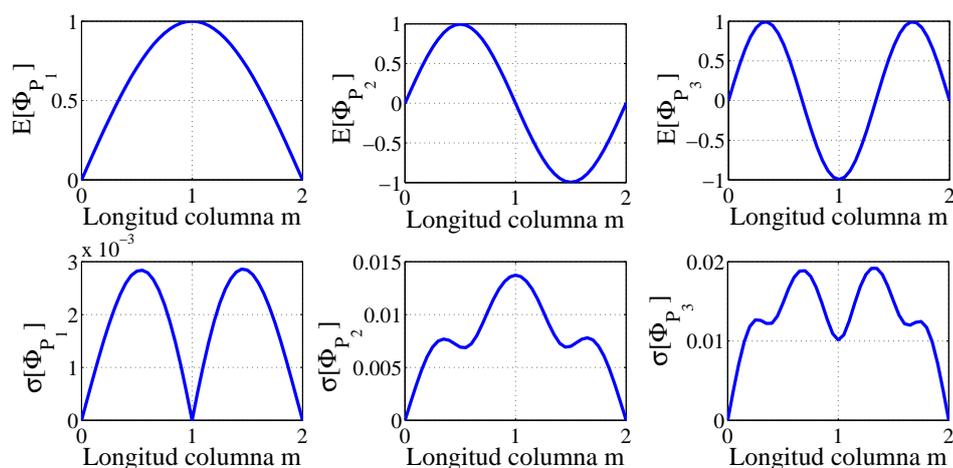
d. Al igual que en el estudio de frecuencias naturales, un incremento en el valor de *d* produce un incremento en el valor medio y en desvío estándar de la variable aleatoria P_n y el coeficiente de variación permanece constante para las diferentes cargas de pandeo obtenidas con el valor correspondiente de *d*.

Tabla 5.20: Comparación entre resultados numéricos de las tres primeras cargas de pandeo con diferentes valores de *d* obtenidas con el campo aleatorio $E(x)I(x)$.

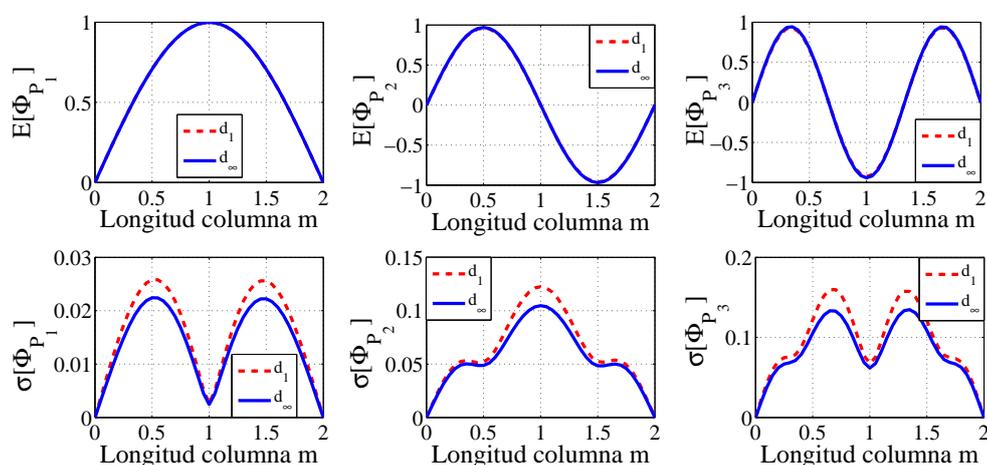
Parámetros estadísticos	P_1		P_2		P_3	
	d_1	d_∞	d_1	d_∞	d_1	d_∞
$E[P_n]$ kN	26.31	27.79	105.21	111.46	237.41	251.60
$\sigma[P_n]$ kN	3.36	3.79	13.50	15.15	30.06	33.77
σ/E	0.127	0.136	0.128	0.135	0.126	0.134

5.3.1.11. Influencia de los campos aleatorios $I(x)$ y $E(x)I(x)$ en las formas modales de pandeo

Las funciones de valor medio y desvío estándar ($E[\Phi_{P_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$) a lo largo de la longitud de la columna de los primeros tres procesos estocásticos de las formas modales de pandeo $\Phi_{P_n}(x)$ son presentadas en la Figura 5.35 para los dos casos presentados previamente de modelos estocásticos aplicados al estudio del pandeo de columnas. La función de desvío estándar $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$ incrementa sus valores con el orden del modo de pandeo. Además, la variación en la forma de la función $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$ para cada modo de pandeo es también observada en la Figura. En comparación con los resultados obtenidos para los modos naturales de vibración, la función $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$ tiene diferente forma pero muestra un comportamiento similar cuando el orden del modo de pandeo aumenta. En la Figura 5.35(b) se puede observar que la función de valor medio no es modificada por los valores de longitud de correlación considerados. Mientras que, un decremento en el valor de *d* produce un incremento en la función de desvío estándar $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$. La no homogeneidad de los valores del MOE en las secciones libres de nudos producen una mayor variación en los modos de pandeo. Adicionalmente, la forma de la función $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$ permanece aproximadamente igual incluso cuando sus valores aumentan debido a la adición al modelo de la incertidumbre producida por el MOE.



(a) Campo aleatorio $I(x)$



(b) Campo aleatorio $E(x)I(x)$

Figura 5.35: Formas modales. Funciones de valor medio y desvío estándar ($E[\Phi_{P_n}(x)]$ y $\sigma[\Phi_{P_n}(x)]$) del proceso estocástico $\Phi_{P_n}(x)$.

5.3.1.12. Conclusiones del estudio de vibraciones libres en vigas y pandeo de columnas

- Se estudiaron elementos estructurales aserrados de *Eucalyptus grandis* cultivado en las Provincias de la Mesopotamia Argentina con propiedades materiales inciertas y, en particular, los problemas de autovalores fueron analizados en detalle. Un estudio estadístico de la influencia de las propiedades mecánicas en los problemas de vibraciones libres y pandeo de columnas fue llevado a cabo utilizando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (E-B). La metodología empleada incluyó herramientas

del Método de los Elementos Finitos Estocástico (SFEM) que nos permiten obtener un abordaje de las propiedades estructurales del material el cual puede representar de forma más próxima el comportamiento de piezas reales de madera.

- La influencia de los nudos en la respuesta estructural no es tenida en cuenta con frecuencia. En el presente estudio, su consideración deriva en una representación mejorada y más real de las piezas estructurales de madera aserrada. El modelo de Zonas Débiles fue utilizado para representar la variabilidad longitudinal del (MOE), el cual, a lo largo de la sección, fue calibrado a través de resultados experimentales comenzando en el primer modelo propuesto hasta lograr el modelo final definitivo. La diferencia entre ambos se radica en tres items:
 - Representación mediante campos aleatorios de la variabilidad del MOE en las zonas libres de nudos.
 - Discretización del tamaño de las Zonas Débiles para la asignación del MOE de acuerdo a los tamaños establecidos en el método de clasificación visual desarrollado por Piter (2003) y luego adoptado por la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006).
 - Utilización de la distribución gamma en la densidad de masa.

Particularmente, de estos tres items, el que parece tener una mayor influencia en el mejor ajuste obtenido entre los resultados numéricos y experimentales con el modelo definitivo de Zonas Débiles es el hecho de una asignación más rigurosa del MOE en las Zonas Débiles de acuerdo al tamaño de los nudos individuales y al tamaño de los agrupamientos de los mismos.

- Las PDFs y CDFs de las primeras tres frecuencias naturales y cargas de pandeo en elementos estructurales con propiedades materiales inciertas fueron obtenidas a través de Simulaciones de Monte Carlo (MCS). Se evaluó la influencia en la respuesta de la longitud de correlación en las secciones libres de nudos. De la observación de las CDF simuladas para los dos valores de d , es posible encontrar que la curva con una menor longitud de correlación (d_1) siempre entrega valores mayores de probabilidad para una frecuencia dada. Por otro lado, el caso homogéneo (d_∞) conduce a valores mayores de desvío estándar, situación que ya fue observada al analizar los problemas anteriores.
- La longitud de las zonas débiles fue calibrada y se ha mostrado que los resultados numéricos obtenidos con el MOE en las secciones libres de nudos representado por

un campo aleatorio, son más cercanos a los valores experimentales empleados en la validación, en la medida en que las vigas de madera sean de calidad superior. El valor de longitud de correlación empleado ha demostrado ser aplicable a elementos de *Eucalyptus grandis*. La diferencia entre resultados numéricos y experimentales está influenciada por defectos de la madera, como la presencia de médula, no incluida en el modelo numérico presentado.

- La propagación de las incertidumbres introducidas por los parámetros mecánicos en las frecuencias naturales y cargas de pandeo fue presentada para diferentes modelos estocásticos. En primer lugar, la influencia del campo aleatorio del segundo momento de área $I(x)$. Luego, el campo aleatorio $E(x)I(x)$ fue introducido con la longitud de correlación (d) para el campo aleatorio $E(x)$ en las secciones libres de nudos. El incremento del valor de la longitud de correlación produce un aumento en el desvío estándar de la respuesta. Finalmente, en el problema de vibraciones libres, se agregó la variable aleatoria densidad de masa P . El efecto del campo aleatorio $I(x)$ es despreciable en comparación con la variabilidad de las demás propiedades mecánicas. Consecuentemente, la presencia de nudos es más importante en relación a la variabilidad del MOE ($E(x)$) que en la variación del segundo momento de área ($I(x)$). La adición de la incertidumbre introducida por la densidad de masa a través de la variable aleatoria P incrementa el rango de la respuesta y modifica ligeramente la forma de las PDFs y CDFs encontradas para el campo aleatorio $E(x)I(x)$.
- Se realizó el estudio de las CDFs de las diferencias porcentuales respecto de valores de referencia de frecuencias naturales y cargas de pandeo de piezas de alta calidad. En los casos analizados, existen altas probabilidades de obtener frecuencias naturales con una diferencia porcentual de hasta un 30 % menor y cargas de pandeo con una diferencia porcentual de hasta un 40 % menor respecto de los valores de referencia, mostrando de esta forma el rango de la respuesta estructural de ambos problemas.
- Se analizaron las formas modales tanto en vibraciones libres como en pandeo. Debido a la estocasticidad del modelo, un proceso estocástico parametrizado por la posición fue obtenido en ambos problemas. La función de valor medio permanece igual en ambos problemas y no es influenciada por los parámetros estocásticos del modelo. Mientras que, la función de desvío estándar cambia su forma de un problema a otro. Por lo tanto, la variación estocástica de las propiedades mecánicas tiene un efecto aparente. En general, la función de desvío estándar incrementa sus valores desde la primera a la tercera frecuencia natural o carga de pandeo y también debido a la

adición de incertidumbres en los parámetros físicos y mecánicos del modelo.

- El modelo numérico/estocástico presentado en la sección constituye un enfoque más realista de modelización del material, que además es factible de ser aplicado en estudios relacionados al comportamiento dinámico y al pandeo de componentes estructurales de madera de *Eucalyptus grandis*.

5.4. Comparación de modelos de variabilidad longitudinal del MOE

En esta sección, se presentará una comparación entre los resultados numéricos obtenidos con los modelos probabilísticos desarrollados con Perfiles de Rigidez Continuos y Modelos de Zonas Débiles. Para ello, se compararán los resultados obtenidos con ambos en un estudio de pandeo de columnas utilizando la misma configuración que en la sección anterior. Ambos modelos ya han sido validados con resultados experimentales, deflexiones y frecuencias fundamentales de vibración, como se describió en las secciones correspondientes. En lo que sigue de la sección se denominará como M1 al modelo probabilístico con Perfiles de Rigidez Continuos y M2 al modelo probabilístico de Zonas Débiles. Ambos modelos estocásticos del material incluyen la longitud de correlación d , para estudiar su influencia en la respuesta se considerarán tres valores del dicho parámetro: $d_1 = 0.672$ m, $d_2 = 1.344$ m y $d_\infty = \rightarrow \infty$.

En primer lugar, un estudio de convergencia de los dos modelos estocásticos se muestra en la Figura 5.36, en donde ns es el número de simulaciones independientes del método de Monte Carlo (MC) y $E[P_{cr}]$ es el valor medio de la carga de pandeo. El criterio de convergencia adoptado es el siguiente: $|E[P_{cr}^{ns}] - E[P_{cr}^{ns-200}]| \leq 0,1$ KN; en donde $E[P_{cr}^{ns}]$ es el valor medio de la carga de pandeo para un número de simulaciones ns y $E[P_{cr}^{ns-200}]$ es el valor medio de la carga de pandeo para un número de simulaciones $ns - 200$. En esta figura, la diferencia en los valores de $E[P_{cr}]$ para ambos modelos puede ser observada. M2 presenta valores más grandes de $E[P_{cr}]$ que M1, y la influencia de la longitud de correlación d es mayor en este modelo, lo que puede apreciarse en la separación de las líneas del gráfico derecho. No se observan grandes diferencias en cuanto a la velocidad de convergencia de uno y otro modelo, aunque el modelo M2 parece presentar menores variaciones a pesar de incluir más parámetros inciertos. Igualmente, a pesar de ello, el

tiempo computacional empleado por M1 para realizar la misma cantidad de simulaciones que M2 es mucho menor.

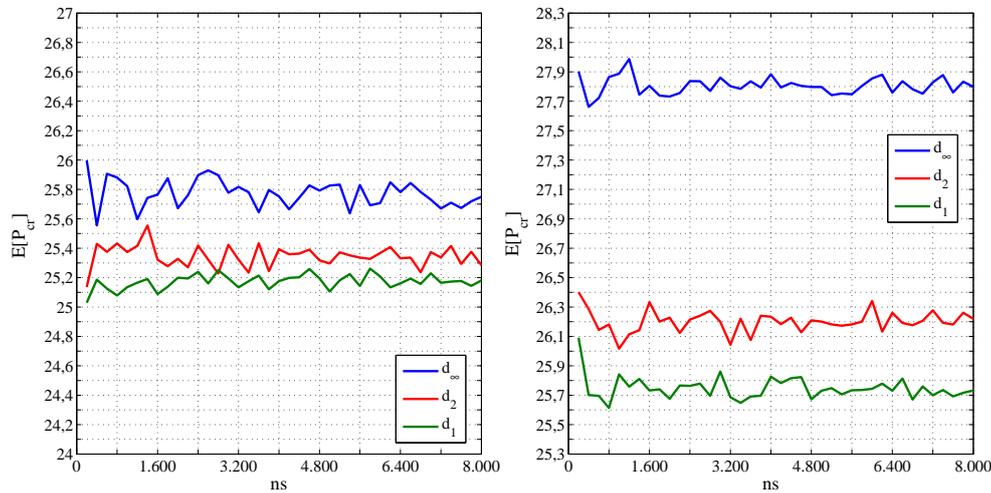


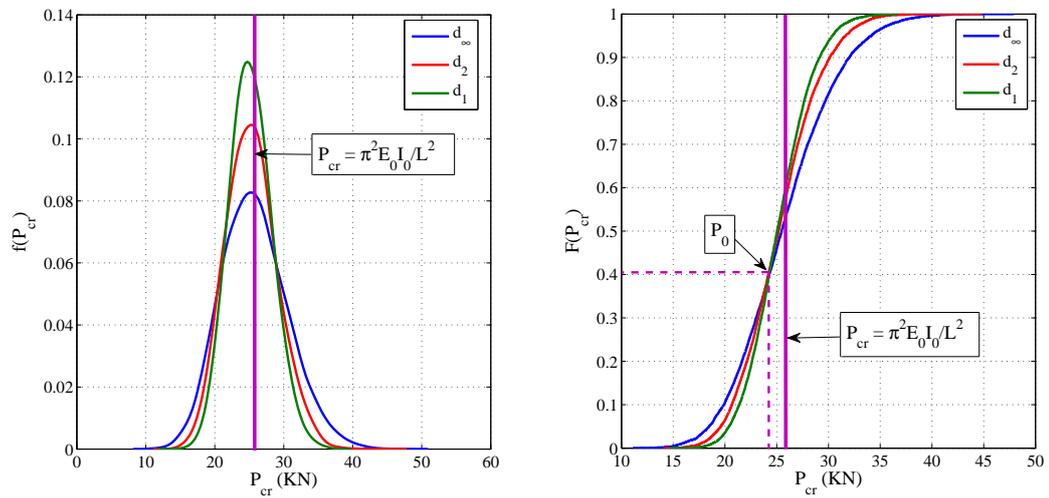
Figura 5.36: Convergencia de $E[P_{cr}]$ obtenida a través de los dos modelos (M1 y M2) para diferentes valores de d .

En las Figuras 5.37(a) y 5.37(b), las PDFs y las CDFs de la carga de pandeo ($f[P_{cr}]$ y $F[P_{cr}]$), para cada uno de los modelos probabilísticos, M1 y M2 respectivamente, son presentadas. Las mismas han sido obtenidas para el número de simulaciones del método de MC que cumplen con el criterio de convergencia establecido. Las diferencias entre las PDFs y CDFs obtenidas con M1 y M2 pueden observarse en la figura. Ambos modelos muestran un incremento del desvío estándar con el aumento del valor de d . La CDF $F[P_{cr}]$ en la Figura 5.37(a) presenta un punto particular en el cual $P(P_{cr} \leq P_0)$ es aproximadamente igual para todos los valores de d . Partiendo de dicho punto hacia los percentiles superiores de $F[P_{cr}]$ y para un mismo valor de probabilidad, los valores de P_{cr} aumentan con el incremento de d , y en forma opuesta en cuanto a los valores de P_{cr} ocurre un efecto similar partiendo de este mismo punto hacia los percentiles más bajos de $F[P_{cr}]$. Una posible explicación de este resultado es que en este punto en particular puedan converger piezas de madera simuladas a partir de M1, con todos los valores de d considerados, que tengan la misma probabilidad de ocurrencia y los mismos valores de carga de pandeo. Una columna con propiedades homogéneas puede presentar tanto el valor más bajo como el más alto de carga de pandeo en comparación con una columna con propiedades no

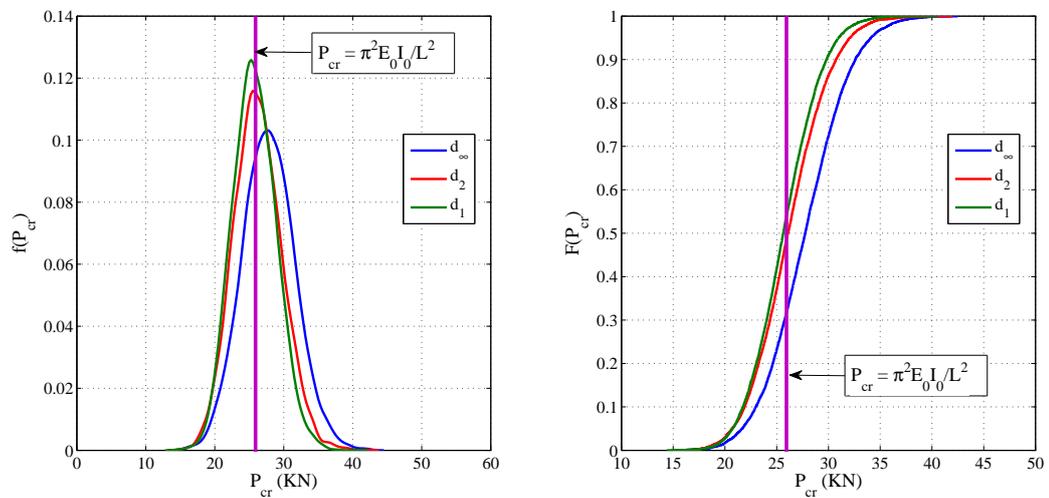
homogéneas, y además, muestra una mayor variación en los resultados con respecto al valor promedio o esperado de P_{cr} . En las PDFs y CDFs ($f[P_{cr}]$ y $F[P_{cr}]$) de M2, Figura 5.37(b), se pueden observar las diferencias respecto a los resultados de la aplicación de M1. Las PDFs y las CDFs tienen un punto inicial en común; en esta región las columnas tienen una gran cantidad de nudos y la variabilidad longitudinal del MOE en las secciones sin nudos no es relevante. Partiendo de este punto inicial hacia los percentiles superiores de $F[P_{cr}]$ y para un mismo valor de probabilidad, los valores de P_{cr} aumentan con el incremento de d . Este comportamiento es similar al que fue mostrado en los percentiles superiores de M1. Una posible explicación de este resultado podría ser que las cargas de pandeo de columnas con mayor rigidez y menor número de nudos está localizada en esta región. Por lo tanto en dicha zona cobra más relevancia el valor de d en la zona libre de defectos.

En la Figura 5.38 y en la Tabla 5.21 los resultados de la comparación entre $F[P_{cr}]$ de los modelos M1 y M2 agrupados según los valores de d utilizados en cada uno son presentados. Como puede observarse, cuando d tiende a cero, *i.e.* el campo aleatorio del MOE se vuelve un conjunto de variables aleatorias no correlacionadas en ambos modelos y las diferencias en los resultados obtenidos de $F[P_{cr}]$ para los modelos M1 y M2 disminuyen a pesar de utilizar distintas distribuciones marginales. En el primer gráfico de la figura, d_{∞} para ambos modelos, las diferencias en los percentiles más bajos puede ser explicada debido a la no correlación de los valores del MOE en las secciones con nudos de M2 y en un menor grado debido a la PDF del MOE en las secciones sin nudos de M2 porque las columnas en esta zona tienen una cantidad considerable de defectos. Pero aun así, M2 sigue incluyendo una combinación de MOEs de bajo valor mientras que M1 incluye valores bajos de MOE uniformes que producen menores cargas de pandeo que las combinaciones de valores de MOEs simuladas en M2. En los percentiles superiores de $F[P_{cr}]$ los modelos se vuelven aproximadamente similares, M2 genera columnas con mayor rigidez y un menor número de defectos y M1 genera columnas de mayor rigidez.

Los modelos probabilísticos M1 y M2 han mostrado resultados similares para columnas de mayor calidad, *i.e.* con una menor cantidad de defectos en M2 y una mayor rigidez en ambos modelos. Al mismo tiempo, M2 genera columnas de menor calidad con una mayor carga de pandeo que M1. Esta diferencia entre los modelos en la región de columnas de menor calidad es reducida cuando d decrece y los componentes del campo aleatorio se vuelven menos correlacionados.



(a) PDFs y CDFs de P_{cr} para diferentes valores de d , M1. $E_0 = 12.639$ GPa, $I_0 = 8.263 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, $P_{cr} = 25.768$ KN.



(b) PDFs y CDFs de P_{cr} para diferentes valores de d , M2. $E_0 = 12.639$ GPa, $I_0 = 8.263 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, $P_{cr} = 25.768$ KN.

Figura 5.37: PDFs y CDFs de P_{cr} para diferentes valores de d , M1 y M2.

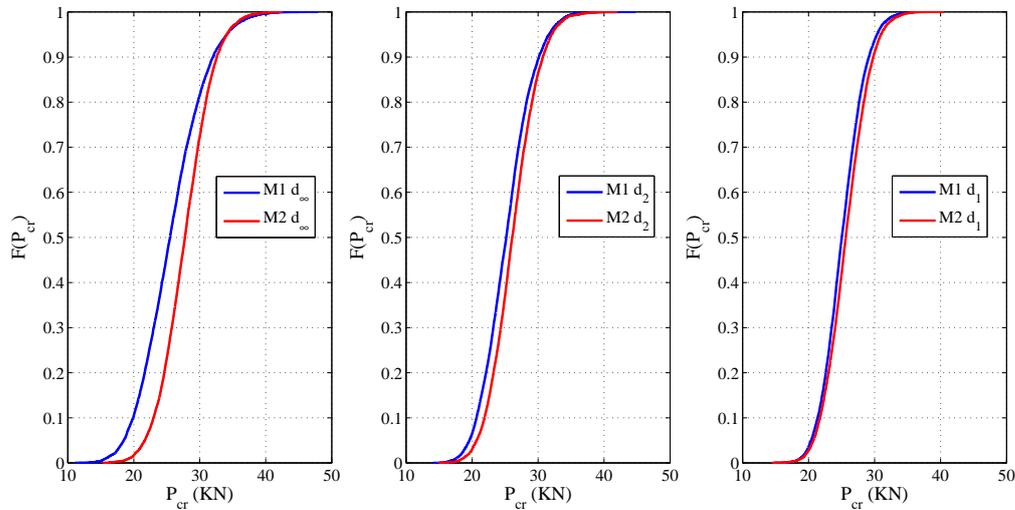


Figura 5.38: Comparación de $F[P_{cr}]$ obtenidas con M1 y M2 para diferentes valores de d .

Tabla 5.21: Comparación de resultados numéricos obtenidos para los modelos M1 y M2 utilizando diferentes valores de d .

Valores	d_{∞}		d_2		d_1	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2
$E[P_{cr}]$ (KN)	25.749	27.798	25.284	26.219	25.180	25.732
$\sigma[P_{cr}]$ (KN)	4.765	3.791	3.664	3.474	3.020	3.146
COV	0.185	0.136	0.144	0.132	0.119	0.122

Finalmente, en la Figura 5.39, se muestra la comparación entre los resultados numéricos obtenidos de deflexiones en el centro del tramo con los modelos de zonas débiles y los resultados experimentales de la muestra S4 provenientes de las piezas sin médula. En el mismo gráfico se presentan también los resultados obtenidos considerando una estructura de equi-correlación, adoptando un coeficiente de correlación constante igual a 0.50 propuesto en Brandner y Schickhofer (2015) para representar la variabilidad longitudinal del MOE en vigas clasificadas visualmente de acuerdo a la norma europea EN 338 (2009) como C30 y C24. Como se puede observar en la figura, el modelo de zonas débiles propuesto ajusta mejor los resultados experimentales en relación al modelo de zonas débiles considerando equi-correlación y aumenta en un 4.84 % la predicción de las deflexiones en

la muestra S4 en comparación al modelo de propiedades constantes.

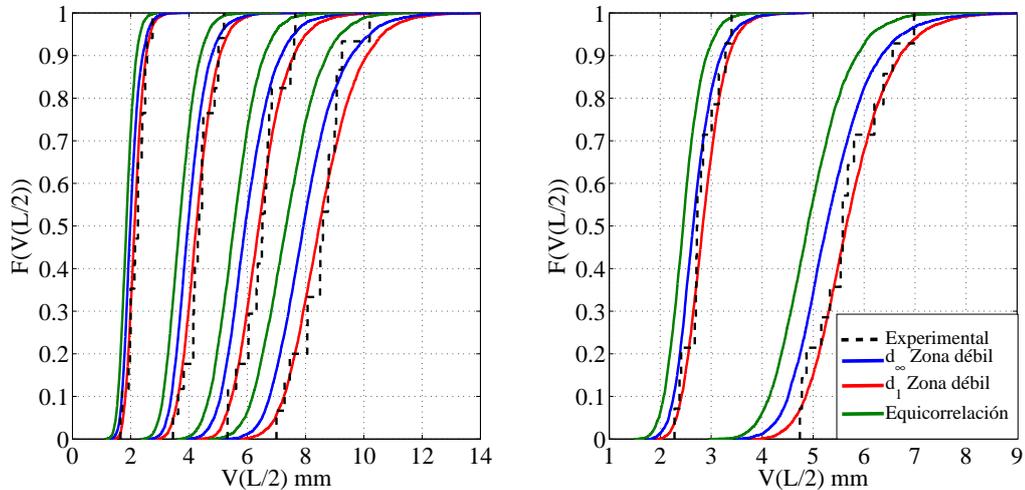


Figura 5.39: Comparación modelos de zonas débiles con resultados experimentales de deflexiones de la muestra S4.

5.4.1. Conclusiones de la comparación entre los modelos de campo aleatorio

- No se observan grandes diferencias en cuanto a la velocidad de convergencia de uno y otro modelo en cuanto a la cantidad de simulaciones necesarias para cumplir con el criterio de convergencia prescrito. Igualmente, a pesar de ello, el tiempo computacional empleado por M1 para realizar la misma cantidad de simulaciones que M2 es mucho menor debido a la menor cantidad de variables estocásticas presentes en el mismo.
- Los resultados numéricos obtenidos con M2 presentan en general valores medios mayores que los obtenidos con M1 y en forma opuesta valores de desvío estándar menores. Ambos modelos conducen a resultados similares para piezas de mayor calidad.
- Ambos modelos, previamente validados con valores experimentales de deflexiones y de frecuencias fundamentales de vibración, presentan resultados similares para el valor de longitud de correlación considerado en forma general en el capítulo $d=1.34$ m. Esto se debe a la variabilidad que presenta el MOE para cada caso de nudosidad

considerado en el modelo de zonas débiles y posiblemente, también puede deberse a la poca influencia de los nudos individuales de las clase C1 en la variabilidad longitudinal del MOE. En general los índices de nudosidad presentan una mayor correlación con la resistencia que con los valores del MOE. Estos dos últimos factores se observan en otros modelos de zonas débiles (Isaksson, 1999; Fink, 2014) que solo consideran el modelado de agrupamientos de nudos en vigas de alta calidad.

- El modelo de zonas débiles propuesto en la presente investigación ajusta mejor los resultados experimentales que al considerar la estructura de equi-correlación propuesta en Brandner y Schickhofer (2015).
- El modelo de Zonas Débiles puede extenderse a dimensiones de vigas menores debido a que los nudos fueron relevados de piezas que presentan las mayores dimensiones obtenibles. Vigas con una altura mayor que 150 mm no son muy usuales debido al relativamente pequeño diámetro de los troncos, los cuales son obtenidos normalmente de plantaciones de árboles de rotación corta.

Capítulo 6

Ensayos experimentales en elementos estructurales de madera

En este capítulo, se presentan resultados de ensayos experimentales realizados en vigas y tablas de *Eucalyptus grandis* de tamaño estructural. Las muestras ensayadas están compuestas de 20 tablas de sección nominal 100×25 mm y 2.25 m de longitud; y 20 vigas de sección nominal 50×100 mm y 4 m de longitud provenientes de arboles cultivados en la Provincia de Entre Ríos. En ambos grupos se realizaron ensayos estáticos y dinámicos. Los ensayos estáticos consistieron en la determinación del Módulo de Elasticidad (MOE) a lo largo de los elementos mediante el ensayo normalizado descrito en el Capítulo 2. Sumado a esto, se llevó a cabo el relevamiento visual de los defectos encontrados con el fin de estudiar la relación MOE-Nudosidad. El objetivo final de los ensayos estáticos es la verificación de las suposiciones utilizadas en la realización de los modelos de variabilidad longitudinal del MOE. Los ensayos dinámicos se llevaron a cabo en primer lugar para la determinación del MOE global de la pieza y la comparación con los resultados provenientes de los ensayo estáticos y finalmente, para la determinación de coeficientes de amortiguamiento los cuales son necesarios para el estudio de la respuesta estructural bajo acciones dinámicas. Esto último, debido a que no se conocen valores ciertos para este material (*Eucalyptus grandis*) con la región de cultivo especificada. Los ensayos fueron realizados en el laboratorio del Grupo de Estudio de Maderas (GEMA) de la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional (FRCU-UTN) y en el Laboratorio de Análisis experimental y computacional de Tensiones del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur (UNS, Bahía Blanca).

6.1. Descripción general de los ensayos realizados

6.1.1. Ensayo estático

Se realizó el ensayo a flexión de dos cargas puntuales ubicadas en el tercio de la longitud entre apoyos, según los lineamientos establecidos en la norma Europea EN 408 (2003) y su actualización FprEN 408 (2010) para la obtención de valores experimentales del Módulo de Elasticidad (MOE). En la Figura 2.6, de la Subsección 2.3.2, se muestra la disposición del ensayo para la obtención del MOE local, Figura 2.6(a), y del MOE global, Figura 2.6(b). En el primer caso, las deformaciones se miden respecto del eje neutro para la obtención del MOE local, libre de la influencia de esfuerzos cortantes y representativo del comportamiento en la zona de flexión pura del material. En el segundo caso, las deformaciones se miden respecto de los apoyos, con la influencia del esfuerzo cortante, aunque las dimensiones establecidas en el ensayo tienden a controlar la influencia del mismo. La norma Americana ASTM D 198 (2002) también presenta el mismo esquema para el ensayo, pero permite variantes tanto en los tipos de cargas aplicadas como en la geometría general del mismo. Los resultados obtenidos bajo condiciones no estandarizadas son después corregidos de acuerdo a lo establecido en la norma ASTM D 2915 (2002) para ser llevados a la condición estándar de dos cargas puntuales ubicadas en los tercios de la longitud. La diferencia entre el grupo de normas Europeas y Americanas radica en el hecho de que en el primer caso, el MOE global puede obtenerse como consecuencia de los valores obtenidos del MOE local. Mientras que en el segundo caso, grupo de normas Americanas, se da la situación inversa. En Piter *et al.* (2003), se demuestra la efectividad del criterio establecido en la norma ASTM D 198 (2002) para obtener valores del MOE local a partir de mediciones del MOE global en vigas de *Eucalyptus grandis* cultivado en las Provincias de la Mesopotamia Argentina.

Las deformaciones en el periodo elástico fueron medidas en el centro del tramo en la parte inferior de las piezas respecto a los apoyos para el cálculo del MOE global. Mientras que para la determinación del MOE local, las mismas se midieron sobre el eje neutro a ambos lados de la viga y en el centro del tramo respecto de puntos equidistantes y separados en una distancia igual a $5h$ entre sí. Las expresiones empleadas para obtener el MOE global y local fueron previamente presentadas en la Subsección 2.3.2 (Ecuación 2.1). La expresión correspondiente al MOE global se encuentra en la norma Americana ASTM D 198 (2002); mientras que la expresión correspondiente al MOE local en la norma Europea

FprEN 408 (2010). Las cargas y sus deformaciones correspondientes, empleadas en ambas expresiones del MOE, fueron seleccionados de manera tal de alcanzar un coeficiente de correlación lineal de 0.99 o mayor dentro del rango de cargas incluido entre $0.1 F_{max}$ y $0.4 F_{max}$ de acuerdo a los requisitos establecidos en FprEN 408 (2010). El valor de F_{max} se obtuvo de datos existentes provistos por Piter (2013) de acuerdo a los lineamientos de esta última norma.

6.1.2. Ensayo dinámico

La frecuencia fundamental de vibración flexional de las piezas ensayadas fue obtenida excitándolas mecánicamente a través de un impacto en su extremo. La misma fue obtenida para el cálculo del MOE mediante el método dinámico y la posterior comparación con los resultados del MOE global obtenidos del ensayo estático. La disposición geométrica del ensayo y las ecuaciones utilizadas para el cálculo del MOE fueron adoptadas basándose en el trabajo presentado en Görlacher (1984) y luego empleadas por Piter *et al.* (2004), Figura 6.1. En este último trabajo, se destaca la efectividad del método dinámico para obtener el MOE debido a la buena correlación obtenida con los valores provenientes del ensayo estático.

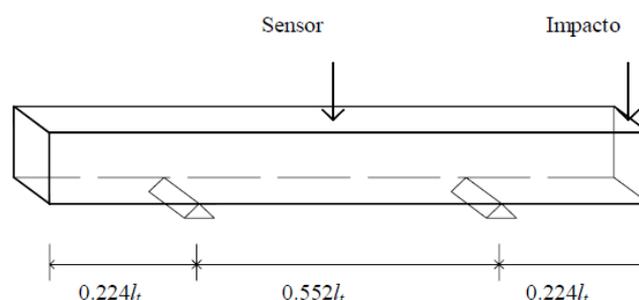


Figura 6.1: Disposición del ensayo dinámico, Piter (2003).

La expresión utilizada para la obtención del MOE dinámico es la siguiente:

$$E_f = \frac{4\pi^2 l_t^4 f_f^2 \rho_p}{m_n^4 i^2} \left(1 + \frac{i^2}{l_t^2} k_1 \right), \quad (6.1)$$

en donde $m_n^4=500.6$ y $k_1=49.48$ son constantes establecidas en Görlacher (1984) para el primer modo de vibración; l_t , f_f , i y ρ_p son la longitud, frecuencia fundamental de

vibración flexional, radio de giro de la sección transversal y la densidad aparente promedio de cada pieza, respectivamente. El valor de ρ_p es obtenido como el cociente entre la masa y el volumen total de la pieza ensayada. La Ecuación (6.1) no incluye la influencia del esfuerzo cortante presente en la ecuación original presentada en Görlacher (1984) debido a que la relación entre la longitud y la altura de las piezas ensayadas es mayor a 15/1.

La frecuencia fundamental de vibración flexional es obtenida al impactar mecánicamente el extremo de la pieza y registrar las aceleraciones en el centro de la misma mediante un acelerómetro y un adquisidor de datos *LabQuest* de la marca *Vernier*. Mediante la transformada de Fourier (*e.g.* Shin *et al.*, 2008) se obtiene el contenido de frecuencias del registro de aceleraciones y la frecuencia fundamental de vibración flexional. El ensayo se realizó 10 veces en cada una de las piezas.

Luego, con el fin de obtener coeficientes de amortiguamiento correspondientes al primer modo natural de vibración, se estudió el decaimiento exponencial de los registros de aceleraciones. Generalmente, la Transformada de Fourier de los mismos indica la influencia (pequeña) de frecuencias no correspondientes a la frecuencia fundamental de vibración pre-estimada de cada pieza. Para obtener un registro de aceleración limpio que incluya solamente a la frecuencia fundamental y de esta manera obtener coeficientes de amortiguamiento más precisos, se recurrió a la Transformada Continua Wavelet (CWT) a través de las herramientas del programa MATLAB (2011). Esta transformada presenta la diferencia respecto a la transformada clásica de Fourier que, además de obtenerse una representación de la señal analizada en el dominio de la frecuencia, la CWT suma una representación en el dominio del tiempo con lo cual la reconstrucción de la señal medida es mucho más eficaz. Esta transformada consiste en la determinación de coeficientes *wavelet* que permiten la representación de una señal en tres dimensiones: el tiempo, la frecuencia y coeficientes *wavelet* que son usados para filtrar la señal alrededor de la frecuencia fundamental de vibración de la pieza. Estos coeficientes *wavelet* constituyen un parámetro indirecto de la medida de la similaridad entre la señal original y la función *wavelet* madre utilizada, en este caso la función Morlet. De este modo, el ruido y las posibles interferencias producidas por otras frecuencias son evitadas. Este método ha sido empleado en Cetrangolo *et al.* (2015) en vigas de madera con el mismo fin que el utilizado en este Capítulo, obteniéndose buenos resultados.

Una vez obtenido el registro de aceleraciones correspondiente a la primera frecuencia natural de vibración, se aplicó el método del decremento logarítmico para medir el

amortiguamiento modal (Chopra, 1995). En cada uno de los registros, dicho decremento es obtenido a través de la siguiente ecuación:

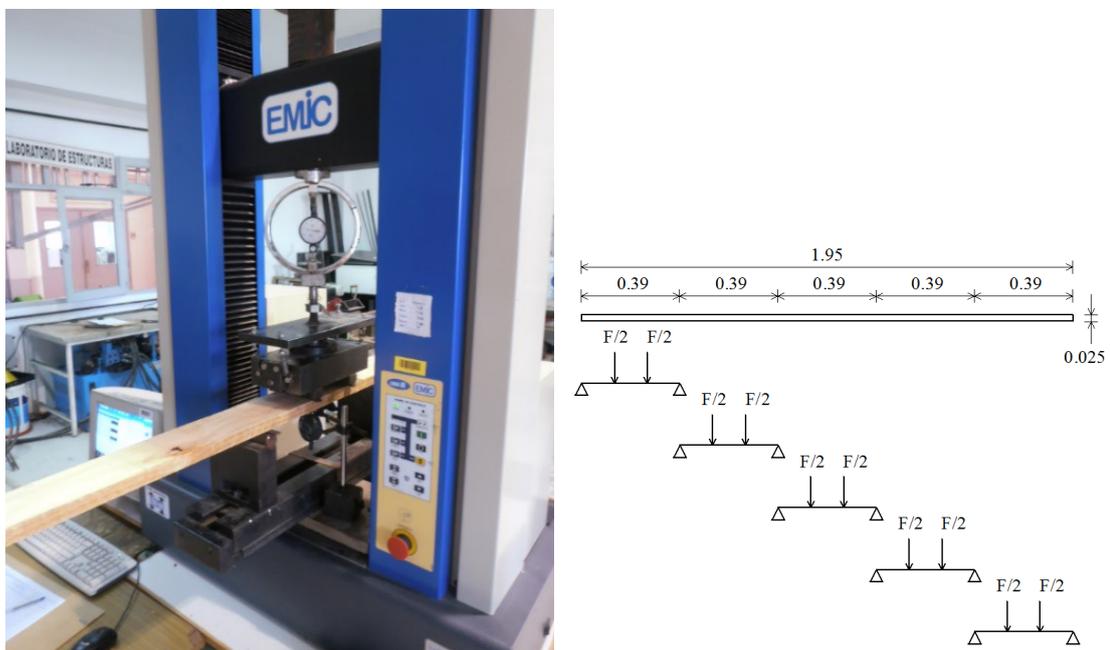
$$\frac{1}{j} \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (6.2)$$

en donde \ddot{u}_i y \ddot{u}_{i+j} son los valores de aceleración registrados en los ciclos i e $i + j$ respectivamente y ζ es el coeficiente de amortiguamiento modal. Este método es aplicable a valores bajos de amortiguamiento ($\zeta < 0.2$) lo cual se verifica en este caso (Chopra, 1995).

6.2. Ensayos estáticos

6.2.1. Tablas

En primer lugar, se llevó a cabo el ensayo estático en tablas con el objetivo de la obtención del MOE global, Figura 6.2(a). Como puede observarse en la imagen durante la realización del ensayo, se obtuvieron mediciones de deflexiones en el centro del tramo correspondiente a la tabla ensayada.



(a) Determinación MOE global.

(b) Esquema de ensayos a lo largo de la tabla.

Figura 6.2: Ensayo a flexión con dos cargas puntuales en tablas.

Cada una de las 20 tablas fueron ensayadas de acuerdo al esquema mostrado en la Figura 6.2(b). El mismo se adoptó con la finalidad de obtener 5 mediciones consecutivas del MOE global en cada una de las 20 tablas. Se consideraron los siguientes valores de cargas totales F : [0.4, (0.4), 2] kN, [carga inicial, (salto de carga), carga final]. En base a los ensayos realizados por Piter (2013) en 50 tablas de la misma sección nominal en los cuales se llevó la carga hasta la rotura de las piezas, para el cálculo del MOE se consideró el rango de cargas comprendido entre [0.4, (0.4), 1.2] kN como el rango de cargas coincidente con $[0.1 \text{ a } 0.4]F_{max}$ de acuerdo a lo establecido en la norma FprEN 408 (2010). Dentro de este rango, se han tenido en cuenta las cargas y deformaciones que garantizan como mínimo una correlación de 0.99 en el diagrama carga-deformación.

En la Tabla 6.1, se presenta un resumen de los resultados obtenidos ajustados a un contenido de humedad de 12 % y la comparación con los resultados publicados en Piter (2003). Los resultados del MOE global corresponden al total de 100 ensayos mientras que la densidad corresponde a 20 valores obtenidos de cada una de las tablas. Los resultados obtenidos del trabajo de referencia corresponden en el caso del MOE global y de la densidad a 50 piezas de la misma sección nominal (100×25 mm). Los resultados del MOE global comparan bien con los resultados presentados en el trabajo de referencia aunque presentan un menor desvío estándar y un menor coeficiente de variación. Esto puede explicarse debido a que la muestra no presenta piezas con médula y la proporción de calidades del material es distinta a la utilizada en el trabajo de referencia. La densidad presenta un valor medio similar al valor de referencia pero un menor desvío, esto último puede estar influenciado por la cantidad de mediciones efectuadas al realizar el ensayo estático. Los parámetros estadísticos de las distribuciones marginales se presentan en la Tabla 6.2 en función de la posición del ensayo a lo largo de la tabla, Figura 6.2(b).

6.2.2. Vigas

El ensayo estático en vigas se realizó para obtener el MOE global y local, Figura 6.3(a). Como puede observarse en la misma, durante la realización del ensayo se obtuvieron mediciones de tres deflectómetros, dos de ellos fueron ubicados a ambos lados de la viga para hallar el MOE local y uno en el centro de la viga para la obtención del MOE global. Cada una de las 20 vigas fueron ensayadas de acuerdo al esquema mostrado en la Figura 6.3(b). El mismo se adoptó con la finalidad de obtener 4 mediciones consecutivas del MOE local debido a que, por las limitaciones geométricas, solamente 2 mediciones

Tabla 6.1: Resumen de resultados experimentales del MOE global y densidad en tablas.

Propiedades mecánicas	Valores estadísticos	Ensayo estático	Piter (2003)
E_{global} (N/mm ²)	Mín.	9962	6427
	Med.	13095	12863
	Máx.	17179	20419
	S	1656	2584
	COV	0.12	0.20
ρ (kg/m ³)	Mín.	481	415
	Med.	595	556
	Máx.	695	726
	S	61	63
	COV	0.10	0.11

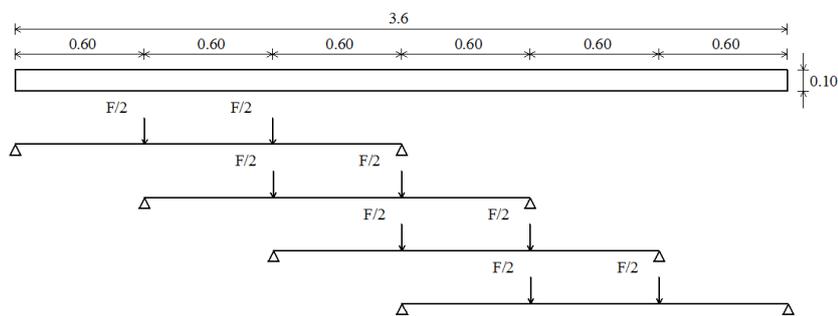
Tabla 6.2: Resumen de resultados del MOE global para cada posición en la tabla.

Valores estadísticos (N/mm ²)	Posición				
	1	2	3	4	5
Mín.	11094	10854	10252	10805	9962
Med.	13354	13274	13333	12724	12791
Máx.	16070	16749	16648	17099	17179
S	1437	1613	1571	1785	1888
COV	0.11	0.12	0.12	0.14	0.15

consecutivas del MOE global son posibles de realizar bajo los lineamientos de la norma utilizada para la realización del ensayo. Por lo tanto, en cada una de las 20 vigas se obtienen 4 mediciones del MOE global y local. Los siguientes valores de cargas totales F fueron considerados: [0.8, (0.8), 4] kN, [carga inicial, (salto de carga), carga final]. En base a los ensayos realizados por Piter (2013) en 50 vigas de la misma sección nominal en los cuales se llevó la carga hasta la rotura de las piezas, para el cálculo del MOE se consideró el rango de cargas comprendido entre [0.8, (0.8), 2.4] kN en coincidencia con el rango de cargas comprendido entre [0.1 a 0.4] F_{max} de acuerdo a lo establecido en la norma FprEN 408 (2010). Dentro de este rango, se han considerado las cargas y deformaciones que garantizan como mínimo una correlación de 0.99 en el diagrama carga-deformación



(a) Determinación MOE local y global.



(b) Esquema de ensayos a lo largo de la viga.

Figura 6.3: Ensayo a flexión con dos cargas puntuales en vigas.

en forma conjunta en cada tramo de cada pieza para el MOE global y local.

En la Tabla 6.3 se presenta un resumen de los resultados obtenidos ajustados a un contenido de humedad de 12 % y la comparación con los resultados publicados en Piter (2003). Los valores del MOE global y local corresponden al total de 80 ensayos mientras que la densidad corresponde a 20 valores obtenidos de cada una de las vigas. Los resultados obtenidos del trabajo de referencia corresponden en el caso del MOE global y de la densidad a 50 piezas de la misma sección nominal (50×100 mm), mientras que el MOE local corresponde a 50 piezas con una sección nominal de (50×150 mm). Los resultados del MOE global se corresponden razonablemente con los resultados presentados por Piter aunque presentan un menor desvío estándar y un menor coeficiente de variación. En cambio, los resultados del MOE local presentan la mayor similitud en el desvío estándar y el coeficiente de variación mientras que los demás parámetros exhiben valores mayores. El valor medio del MOE local obtenido es un 14 % mayor que el MOE global, lo cual es el doble que el reportado en Piter *et al.* (2003). Solamente en 59 de los 80 ensayos se

obtuvo un MOE local mayor al MOE global en un porcentaje cercano al 7 %. La densidad presenta un valor medio similar al valor de referencia pero con un menor desvío, esto último puede estar influenciado por la menor cantidad de mediciones efectuadas al realizar el ensayo estático (20 en comparación con 50).

Tabla 6.3: Resumen de resultados ensayo estático de vigas.

Propiedades mecánicas	Valores estadísticos	Ensayo estático	Piter (2003)
E_{global} (N/mm ²)	Mín.	9819	9232
	Med.	12433	12511
	Máx.	15627	16919
	S	1285	1871
	COV	0.10	0.15
E_{local} (N/mm ²)	Mín.	11694	9621
	Med.	14467	13522
	Máx.	19662	19048
	S	1952	1940
	COV	0.13	0.14
ρ (kg/m ³)	Mín.	461	428
	Med.	525	519
	Máx.	589	688
	S	37	64
	COV	0.07	0.12

Los resultados experimentales del MOE local son comparados con el criterio establecido en la norma ASTM D 198 (2002) el cual permite determinar valores del MOE libre de la influencia del esfuerzo cortante a partir de valores del MOE global. Esta expresión ha sido empleada en Piter *et al.* (2003), mostrando la efectividad de la aplicación de dicha fórmula, la cual se presenta a continuación:

$$E_{local} = \frac{E_{global}}{\left(1 - \frac{l(F_2 - F_1)}{5bhG(w_2 - w_1)}\right)}, \quad (6.3)$$

en donde G es el módulo de corte el cual puede ser estimado como $E_{local}/16$. Puede observarse que, si se reemplaza la Ecuación (2.1) del E_{local} en la Ecuación (6.3), se obtiene una relación constante entre ambos módulos. En este caso, el valor de G se estima como

el valor medio del MOE local presentado en Piter *et al.* (2003) (Tabla 6.3, columna 4). Como resultado de la aplicación del criterio de la norma ASTM D 198, se obtuvieron los resultados para el MOE local que se listan en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4: Resumen y comparación resultados del MOE local vigas.

Valores estadísticos (N/mm ²)	E_{local} ASTM D 198	Piter <i>et al.</i> (2003)	
		ASTM D 198	Experimental
Mín.	10154	9414	9621
Med.	12968	13199	13522
Máx.	16472	17699	19048
S	1394	1614	1940
COV	0.11	0.12	0.14

Los valores estadísticos del MOE local obtenidos de esta forma son más próximos a los presentados en Piter *et al.* (2003). Además la relación entre los valores medios del MOE local y el MOE global resulta más cercana al encontrado en el trabajo de referencia. La disminución en el COV se debe a que al aplicar la corrección sobre los valores del MOE global se copia la dispersión de esta variable. Los parámetros estadísticos de las distribuciones marginales se presentan en la Tabla 6.5 en función de la posición del ensayo a lo largo de la viga, Figura 6.3(b).

Tabla 6.5: Resumen de resultados del MOE global para cada posición en la viga.

Valores estadísticos (N/mm ²)	Posición			
	1	2	3	4
Mín.	10102	10274	10531	9819
Med.	12661	12645	12231	12194
Máx.	15627	14882	14897	14556
S	1488	1222	1185	1246
COV	0.12	0.10	0.10	0.10

El origen de las diferencias entre los valores del MOE local (Tabla 6.3) podrían deberse a errores en las mediciones. Para la sección y cargas utilizadas, las deformaciones empleadas en el cálculo del MOE local, son menores a 1 mm, cualquier imperfección en

las piezas o error cometido ya sea en la medición o en la puesta a punto del ensayo, puede conducir a discrepancias no despreciables.

6.2.3. Variabilidad longitudinal del MOE

6.2.3.1. Influencia de la nudosidad

Tablas

Para estudiar la influencia de los nudos en los valores obtenidos del MOE a lo largo de las tablas, se utilizó el siguiente procedimiento:

- Relevamiento: se relevaron todos los nudos presentes en las caras de cada tabla registrándose sus dimensiones y posiciones.
- Coeficiente de nudosidad k : se obtuvo según uno de los criterios de nudosidad aplicados exclusivamente en tablas utilizado en Piter (2003). Se obtiene como la relación entre la suma de las dimensiones del nudo en todas las superficies en donde se manifiesta y el doble de la dimensión transversal mayor. La dimensión del nudo se considera como la distancia entre las líneas tangentes al mismo y paralelas al eje longitudinal de la pieza. Como cada tramo del diagrama de momentos se divide en segmentos de 130 mm, en el caso de presentarse más de un nudo contenido en esa longitud se considera la suma de las dimensiones no superpuestas de los mismos dividido el doble de la dimensión transversal mayor.
- Índice de nudosidad total K del ensayo: en cada uno de los cinco tramos ensayados, se sumaron todos los valores obtenidos de k previamente ponderados según su posición en el diagrama de momentos generado por la aplicación de las dos cargas puntuales. Los nudos en la zona de momento constante fueron ponderados por un valor igual a uno y en ambas zonas de corte se adoptó una variación lineal de uno a cero.

El índice de nudosidad total K pretende indicar la influencia de la totalidad de los nudos involucrados en el ensayo ponderando su ubicación dentro del mismo. Luego de su obtención, este índice total fue, a su vez, clasificado según las características de las contribuciones que lo componen de acuerdo al diagrama de momentos $K = k_{corte1} + k_{momento} + k_{corte2}$ y la posición de los nudos dentro del mismo, Tabla 6.6. Se indica la cantidad de muestras

Tabla 6.6: Definición del tipo de nudosidad en tablas.

Caso	Descripción			Característica	Cantidad de muestras
	k_{corte1}	$k_{momento}$	k_{corte2}		
1	0	0	0	$K = 0$	48
2	> 0	0	0	k_{c1} o $k_{c2} > 0$	25
3	0	> 0	0		8
4	> 0	> 0	0	k_{c1} o $k_{c2} > 0$ con $k_m > k_{c1}/2$	2
5	> 0	> 0	0	k_{c1} o $k_{c2} > 0$ con $k_m < k_{c1}/2$	6
6	> 0	0	> 0		9
7	> 0	> 0	> 0	$k_m > k_{c1} + k_{c2}$	0
8	> 0	> 0	> 0	$k_m < k_{c1} + k_{c2}$	2

correspondientes a cada categoría. Como puede observarse, el caso 1 (libre de nudos) es el predominante con casi la mitad de las muestras.

En la Figura 6.4, puede observarse la relación entre los valores obtenidos del MOE, el índice de nudosidad K y el caso de nudosidad. Los valores del MOE hallados para el caso de nudosidad 1 (libre de nudos) son los que exhiben mayor dispersión, comprendiendo este caso casi la mitad de las muestras. Los casos restantes si bien cubren un rango similar, tienen su mayor concentración en una zona ubicada por debajo del valor medio total. Otra de las características de los resultados presentados en el gráfico es que todos los valores del MOE hallados en muestras que presentaron nudos en la zona del ensayo con momento constante (casos 3, 4, 5 y 8), se encuentran por debajo del valor medio del MOE (27 muestras). Los valores de MOE obtenidos de piezas con casos de nudosidad tipo 2 y 6 (nudos solamente las zonas de corte) tienen, al igual que en el caso 1, un comportamiento más disperso. Esto indica el efecto que tiene la posición de los defectos en relación a los valores obtenidos del MOE. A medida que el índice de nudosidad K crece, se observa una tendencia de disminución por debajo de la media para los valores del MOE, salvo para algunos casos con nudosidad en ambas zonas de corte (caso 6). Los histogramas y el diagrama de caja de la Figura 6.4 indican la concentración de resultados de los cuales se puede apreciar que la mayor cantidad de resultados se ubica en una zona con un índice de nudosidad $K < 0.1$ y un valor del MOE entre 12 GPa y 13.5 GPa. Del diagrama de caja se puede observar además la existencia de datos atípicos que escapan del límite superior.

El diagrama de caja indica los cuartiles de 25 % ($Q1$) y 75 % ($Q3$) de los datos, los cuales forman los límites de la misma. Dentro de la caja se indica el valor central o mediana ($Q2$). Los bigotes se desprenden una distancia igual a $1.5(Q3 - Q1)$ hasta el último valor incluido, los valores mas lejanos a esta distancia constituyen datos atípicos.

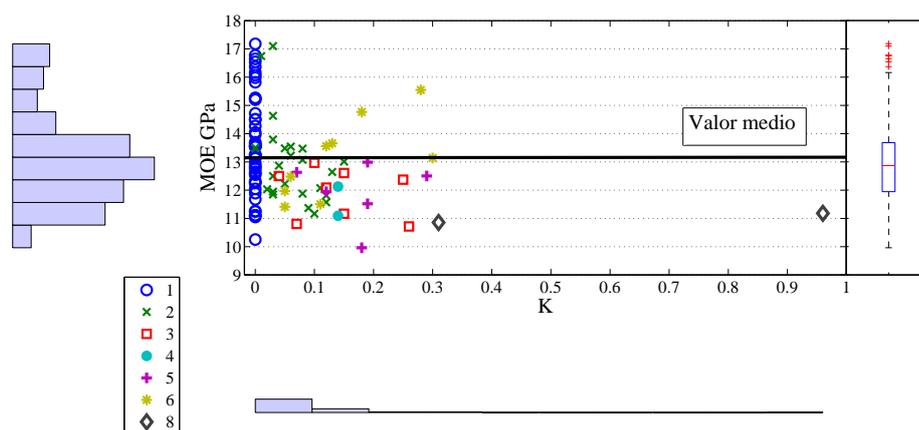
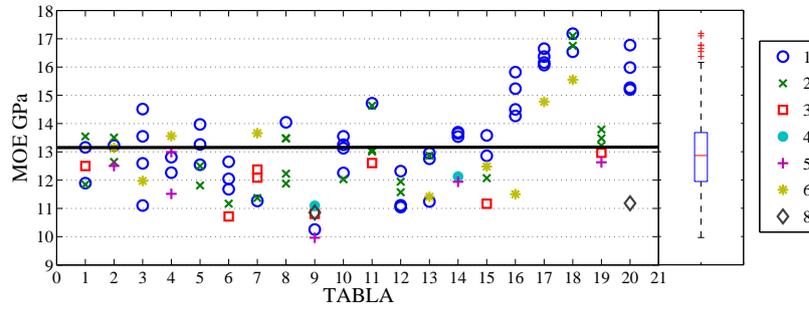
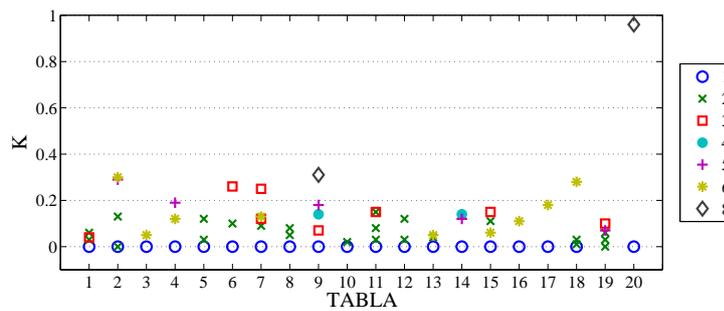


Figura 6.4: Relación entre 100 valores del MOE global, el índice de nudosidad K y el tipo de nudosidad.

En la Figura 6.5 se presentan los datos de la figura anterior en función de la tabla a la que pertenecen. En la Figura 6.5(a), se observan los valores del MOE en función de la tabla de la cual fueron obtenidos y el tipo de nudosidad, mientras que en la Figura 6.5(b) se grafican los valores de nudosidad total K en función de la tabla de la cual fueron hallados y el tipo de nudosidad. Por cada tabla, se observan los cinco puntos correspondientes a los cinco ensayos realizados en cada una de ellas. Como puede observarse para los tipos de nudosidad 3, 4, 5 y 8 (nudos en la zona de momento constante), los valores del MOE son inferiores al valor medio en todas las piezas que presentan estas características. Los casos de nudosidad con presencia de nudos en la zona de momento constante 3, 4, 5 y 8 son los que guardan una mayor relación con los valores del MOE. A estos casos se puede sumar el tipo 2 con índices de nudosidad K mayores a 0.5. Los casos de nudosidad 1 y 6 son los que parecen tener una menor relación con los valores del MOE, aunque en este último caso debería contarse con mayor cantidad de muestras de este tipo de nudosidad para ser concluyentes al respecto. Sin embargo, al estudiar no solo el rango de resultados sino también la frecuencia con que se presentan los mismos surgen las diferencias esperables entre el tipo de nudosidad 1 y el resto, Figura 6.6. Como puede observarse en la misma, el percentil 50 % de los resultados correspondientes al tipo de nudosidad 1 se encuentra por



(a) Relación entre los valores del MOE global en cada tabla y el tipo de nudosidad.



(b) Relación entre los valores del índice de nudosidad en cada tabla y el tipo de nudosidad.

Figura 6.5: Relación entre los valores del MOE global en cada tabla y la nudosidad.

encima del valor medio total. Mientras que para los tipos de nudosidad 2-8 el percentil 50 %, los cuartiles 25 % y 75 % se encuentran por debajo del valor medio. Es necesario aclarar además, que luego de la inspección visual de las piezas y sus secciones se puede concluir que todos los segmentos ensayados de las 20 tablas se encontraron libres de la presencia de médula. Esto es importante debido a que este defecto es el principal causante de valores bajos de resistencia y rigidez.

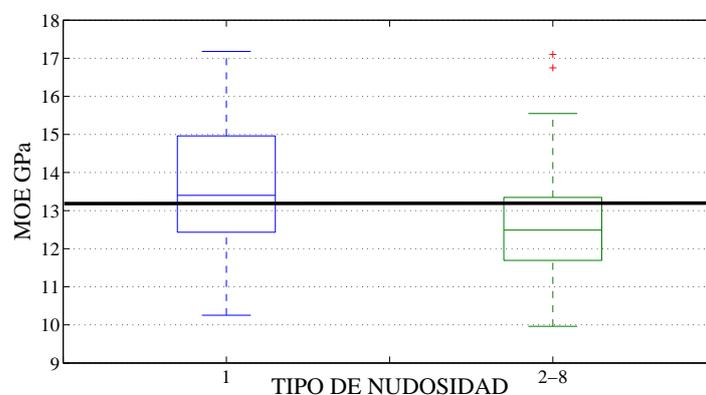


Figura 6.6: Relación entre el MOE global y los tipos de nudosidad.

Vigas

Para estudiar la influencia de los nudos en los valores obtenidos del MOE global y local se utilizó el siguiente procedimiento:

- Relevamiento: se relevaron todos los nudos presentes en las caras de cada viga registrándose sus dimensiones y posiciones.
- Coeficiente de nudosidad k : se obtuvo según los lineamientos establecidos en la norma IRAM 9662-2 (2006), para cada uno de los nudos.
- Índice de nudosidad total K del ensayo: en cada uno de los cuatro tramos ensayados se sumaron todos los valores obtenidos de k previamente ponderados según su posición en el diagrama de momentos generado por la aplicación de las dos cargas puntuales.

El índice de nudosidad total K pretende indicar la influencia de la totalidad de los nudos involucrados en el ensayo ponderando su ubicación dentro del mismo. Luego de su obtención, este índice total fue a su vez clasificado según las características de las contribuciones que lo componen de acuerdo al diagrama de momentos $K = k_{corte1} + k_{momento} + k_{corte2}$ y la posición de los nudos dentro del mismo, Tabla 6.7. En la misma tabla, se indican la cantidad de muestras correspondientes a cada categoría.

Tabla 6.7: Definición del tipo de nudosidad en vigas.

Caso	Descripción			Característica	Cantidad de muestras
	k_{corte1}	$k_{momento}$	k_{corte2}		
1	0	0	0	$K = 0$	3
2	> 0	0	0	k_{c1} o $k_{c2} > 0$	4
3	0	> 0	0		0
4	> 0	> 0	0	k_{c1} o $k_{c2} > 0$ con $k_m > k_{c1}/2$	3
5	> 0	> 0	0	k_{c1} o $k_{c2} > 0$ con $k_m < k_{c1}/2$	5
6	> 0	0	> 0		2
7	> 0	> 0	> 0	$k_m > k_{c1} + k_{c2}$	32
8	> 0	> 0	> 0	$k_m < k_{c1} + k_{c2}$	31

En la Figura 6.7, puede observarse la relación entre los valores obtenidos del MOE global, el índice de nudosidad K y el caso de nudosidad. Los valores del MOE global obtenidos para casos de nudosidad 1 a 6 son en general mayores o cercanos al valor medio del MOE. Mientras que en los casos 7 y 8 se observa una ligera tendencia de disminución del MOE con el aumento de K que se acentúa para valores de este último parámetro mayores a 2. Los histogramas y el diagrama de caja indican la concentración de resultados de los cuales se puede apreciar que para un índice de nudosidad total menor a 0.5 los resultados del MOE son mayores al valor medio de la población y se encuentran por sobre el 50 % de datos contenido en el diagrama de caja. Luego existe una zona de transición entre $K=0.5$ y $K=2$ en la cual la mayoría de los valores se encuentran cercanos al valor medio contenidos dentro del 50 % de datos del diagrama de caja y empiezan a disminuir en forma gradual hasta producirse un descenso mas marcado para $K>2$.

En la Figura 6.8 se presentan los datos anteriores en función de la viga a la que pertenecen. En la Figura 6.8(a), se observan los valores del MOE global en función de la viga de la cual fueron obtenidos y el tipo de nudosidad, mientras que en la Figura 6.8(b) se presentan los valores de nudosidad total K en función de la viga y el tipo de nudosidad. Por cada viga, se observan los cuatro puntos correspondientes a los ensayos realizados en cada una de ellas. Como puede observarse para los tipos de nudosidad 1-6 los valores del MOE son cercanos o superiores al valor medio salvo en la viga 6 en donde se observa un ensayo en una tramo con nudosidad tipo 5 (nudos en una zona de corte y en zona

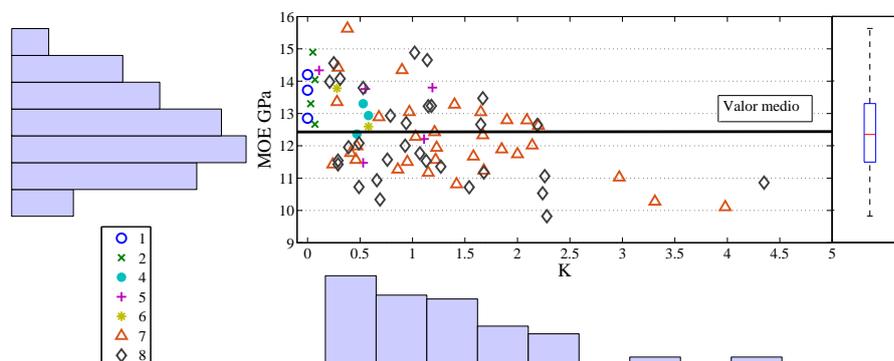


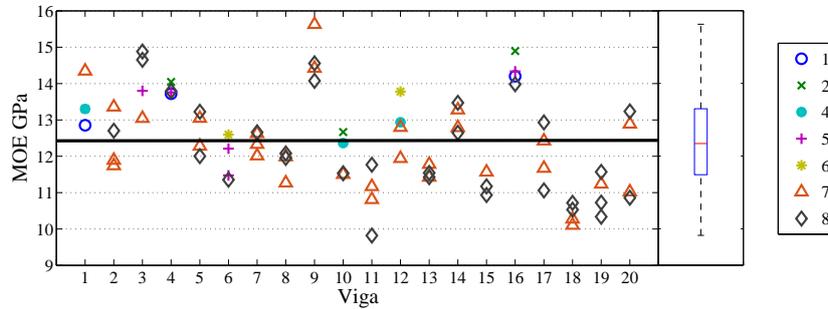
Figura 6.7: Relación entre 80 valores del MOE global, el índice de nudosidad K y el tipo de nudosidad.

de momentos con mayor influencia de los nudos pertenecientes a la zona de corte) que presenta un valor alto de K .

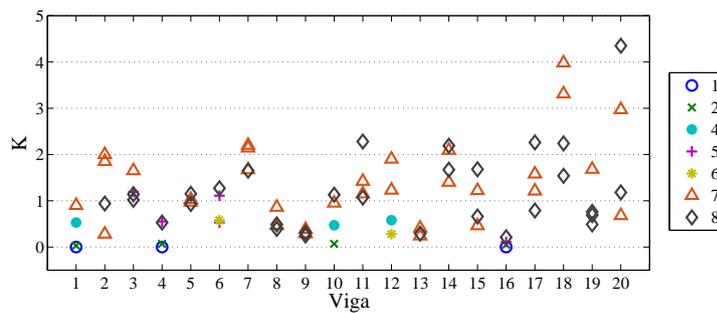
En el caso de las vigas, debido a las dimensiones de las piezas extraídas de los troncos, que en general tienen un pequeño diámetro, es posible que las mismas contengan médula. Este tipo de defecto es considerado como el más crítico en el método de clasificación visual adoptado por la norma IRAM 9662-2 (2006). El relevamiento visual de la médula se realizó indicando su presencia en cada una de las caras de los segmentos de 0.6 m involucrados en cada uno de los cuatro ensayos de flexión global realizados por cada viga. Luego, en base a su posición relativa dentro de cada ensayo, se realizó la clasificación de cada uno de ellos de acuerdo al contenido de médula de cada segmento, Tabla 6.8. Como puede observarse en la tabla los casos predominantes son el 1 y el 6. En la Figura 6.9, se presentan los casos establecidos en la tabla anterior en función de la viga a la cual pertenecen y del valor obtenido del MOE global en el ensayo. Puede observarse que los ensayos con caso 1 (libre de médula) presentan la mayoría de los valores del MOE por arriba del valor medio global mientras que para el caso 6 se produce lo contrario. En general los casos 4 y 6 con médula en la zona de momento constante son los de mayor influencia en los valores bajos del MOE. Sin embargo, se observan algunas excepciones.

6.2.3.2. Estudio de la estructura de correlación espacial

Para el estudio de la estructura de correlación espacial de los resultados obtenidos se utilizó la metodología presentada en Bulleit y Chapman (2004). La misma fue aplicada al



(a) Relación entre los valores del MOE global en cada viga y el tipo de nudosidad.



(b) Relación entre los valores del índice de nudosidad en cada viga y el tipo de nudosidad.

Figura 6.8: Relación entre los valores del MOE global en cada viga y la nudosidad.

estudio de la estructura de correlación de resultados presentados por otros autores (Kline *et al.* 1986; Taylor y Bender 1991; Richburg y Bender 1992) los cuales desarrollan modelos estocásticos clasificados en el Capítulo 3 de la presente tesis como Modelos Espaciales de Parámetros Discretos (DPSM, en inglés). Las piezas se dividen en segmentos de igual longitud y a cada uno de ellos se le asigna una propiedad mecánica respetando una distribución marginal y una estructura de correlación. Las propiedades de cada segmento fueron encontradas con ensayos similares a los realizados en la presente sección, por ejemplo en Kline *et al.* (1986), se calcula el MOE local en cuatro segmentos consecutivos de 50 vigas. En la presente tesis, se realizó el mismo ensayo en 20 vigas. Estas propiedades mecánicas encontradas sobre segmentos de longitud predeterminada constituyen valores

Tabla 6.8: Definición de la presencia de médula en vigas.

Caso	Presencia de Médula			Característica	Cantidad de muestras
	<i>corte1</i>	<i>momento</i>	<i>corte2</i>		
1	0	0	0	Libre de médula	23
2	Si	0	0	<i>corte1</i> o <i>corte2</i>	9
3	0	Si	0		1
4	Si	Si	0	<i>corte1</i> o <i>corte2</i>	14
5	Si	0	Si		3
6	Si	Si	Si		30

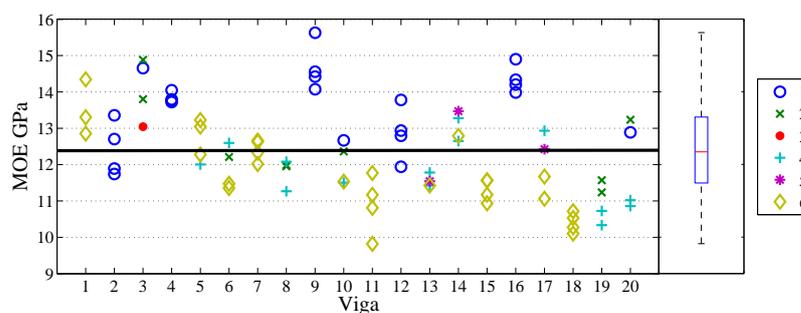


Figura 6.9: Relación entre los valores del MOE global en cada viga y la presencia de médula.

promedio de la variabilidad dentro del segmento; luego, al modelar una viga con valores correspondientes a cada segmento se promedia la variabilidad total de la viga. Este mecanismo constituye una discretización del campo aleatorio real el cual se conoce como método de promedios espaciales de un campo aleatorio homogéneo (Leon-García, 1993; Vanmarcke, 1998).

Si consideramos el campo aleatorio continuo y homogéneo $E(x)$ que representa la variabilidad longitudinal del MOE a lo largo de la pieza, el cual tiene un valor medio $\mu_{E(x)}$ y una varianza $\sigma_{E(x)}$. El mismo puede ser reducido a un proceso formado por valores

medios móviles:

$$E_{\bar{R}(r)} = \frac{1}{\bar{R}} \int_{r-\frac{\bar{R}}{2}}^{r+\frac{\bar{R}}{2}} E(x) dx, \quad (6.4)$$

en donde r indica una posición genérica y \bar{R} la longitud sobre la cual se promedia. Es posible demostrar que el valor medio y la varianza, a lo largo del elemento, de esta reducción del proceso estocástico original son, respectivamente:

$$\mu_{E_{\bar{R}(r)}} = \mu_{E(x)} \quad \text{y} \quad \sigma_{E_{\bar{R}(r)}}^2 = \gamma(\bar{R}) \sigma_{E(x)}^2. \quad (6.5)$$

El valor medio permanece igual al del proceso original mientras que la varianza es modificada por la función $\gamma(\bar{R})$ llamada función de reducción de varianza, Vanmarcke (1998). Esta función se encuentra relacionada con la función de correlación a través de la siguiente ecuación:

$$\gamma(\bar{R}) = \frac{2}{\bar{R}} \int_0^{\bar{R}} \left(1 - \frac{r}{\bar{R}}\right) \rho(r) dr, \quad (6.6)$$

en donde $\rho(r)$ es la función de correlación. Si consideramos a las variables aleatorias E_0 y E_1 como valores promedios del MOE sobre las longitudes L_0 y L_1 , respectivamente (Figura 6.10), el coeficiente de correlación entre estas dos variables aleatorias puede obtenerse como:

$$\rho_{E_0 E_1} = \frac{1}{2L_0 L_1 \sqrt{\gamma(L_0) \gamma(L_1)}} \sum_{k=0}^3 \{(-1)^k L_k^2 \gamma(L_k)\}, \quad (6.7)$$

en donde γ es la función de reducción de varianza.

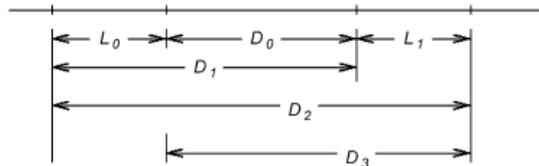


Figura 6.10: Longitudes de influencia de la función de correlación, Vanmarcke (1998).

La función de reducción de varianza está relacionada con la función de correlación. En esta sección se utilizarán dos tipos de funciones de correlación:

- Función de correlación exponencial (Czmocho, 1998)

Dicha función se encuentra asociada a un proceso auto-regresivo de primer orden o proceso de Markov de primer orden:

$$\rho(r) = e^{-\frac{|r|}{a}}, \quad (6.8)$$

y su función de reducción de varianza asociada se expresa como:

$$\gamma(\bar{R}) = 2 \left(\frac{a}{\bar{R}} \right)^2 \left[\frac{\bar{R}}{a} - 1 + e^{-\frac{\bar{R}}{a}} \right]. \quad (6.9)$$

- Función de correlación exponencial de segundo tipo

Este tipo de función se encuentra asociada a un proceso estocástico auto-regresivo de segundo orden:

$$\rho(r) = \left(1 + \frac{|r|}{a} \right) e^{-\frac{|r|}{a}}, \quad (6.10)$$

y su función de reducción de varianza asociada se expresa como:

$$\gamma(\bar{R}) = 2 \left(\frac{a}{\bar{R}} \right)^2 \left\{ 2 + e^{-\frac{\bar{R}}{a}} - 3 \frac{a}{\bar{R}} \left[1 - e^{-\frac{\bar{R}}{a}} \right] \right\}. \quad (6.11)$$

El parámetro a en las ecuaciones anteriores puede remplazarse por $d = 2a$ y $d = 4a$ en el primero y segundo caso, respectivamente. Esta nueva variable d se conoce como escala de fluctuación o longitud de correlación y se define como:

$$d = 2 \int_0^{\infty} \rho(r) dr. \quad (6.12)$$

El procedimiento presentado en Bulleit y Chapman (2004) consiste en comparar los valores de los coeficientes de correlación obtenidos en base a ensayos experimentales con los obtenidos analíticamente al aplicar la Ecuación (6.7) la cual depende de la función de reducción de varianza. Esto se realiza para determinar el parámetro a en cada función de reducción de varianza y de esta manera obtener un valor de longitud de correlación. El parámetro a es elegido de manera tal de minimizar la siguiente ecuación:

$$S(a) = \sum_{m=1}^n (\rho_m - \rho_m(a))^2, \quad (6.13)$$

en donde $\rho_m(a)$ es el coeficiente de correlación obtenido de forma analítica según la Ecuación (6.7) y ρ_m es el coeficiente de correlación obtenido de los datos experimentales para

un determinado valor m que indica la separación entre segmentos considerados (lag m , en inglés). En el caso de las tablas, se cuenta con 5 mediciones consecutivas del MOE en 20 vigas. Para $m = 1$, se considera la correlación entre los segmentos consecutivos 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5; para $m = 2$, entre los segmentos 1-3, 3-5 y 2-4; mientras que para $m = 3$, los segmentos 1-4 y 2-5. En el caso de las vigas, se cuenta con cuatro mediciones consecutivas del MOE local en vigas. Para $m = 1$, se considera la correlación entre los segmentos consecutivos 1-2, 2-3 y 3-4 mientras que para $m = 2$, los segmentos 1-3 y 2-4. Esta configuración para el estudio de la correlación entre segmentos fue presentada en Kline *et al.* (1986) aplicándola al modelado estocástico de variabilidad longitudinal del MOE local mediante procesos de Markov de primer y segundo orden. En el caso de las tablas, los coeficientes de correlación obtenidos de los datos experimentales son: $\rho_1=0.752$ con 80 pares de datos, $\rho_2=0.678$ con 60 pares de datos y $\rho_3=0.609$ con 40 pares de datos. En el caso de las vigas, se consideraron tres conjuntos de datos para la determinación de los coeficientes de correlación según la forma en que fueron obtenidos los valores del MOE local: a través de la aplicación de la norma ASTM D 198 (20 vigas), datos experimentales muestra completa (20 vigas) y datos experimentales considerando las muestras que mejor ajustan una relación entre el MOE local y el global cercana al 7 % (13 vigas). En el primer caso, los coeficientes de correlación considerados son: $\rho_1= 0.851$ obtenido con 60 pares de datos y $\rho_2= 0.740$ obtenido con 40 pares de datos. En el segundo caso, los coeficientes de correlación considerados son: $\rho_1= 0.474$ obtenido con 60 pares de datos y $\rho_2= 0.470$ obtenido con 40 pares de datos. Finalmente, en el tercer caso los coeficientes de correlación considerados son: $\rho_1= 0.463$ obtenido con 39 pares de datos y $\rho_2= 0.345$ obtenido con 26 pares de datos. El MOE global en la tablas presenta valores de correlación espaciales mayores que los casos de MOE local obtenidos de forma experimental. Esto se encuentra influenciado por la menor variación de los valores del MOE dentro de cada una de las piezas pertenecientes a la muestra de tablas en comparación con los valores del MOE local experimental. En general, como se ha visto previamente al analizar la influencia de la nudosidad, las secciones con nudosidad tipo 1 a pesar de presentar las mayores dispersiones globales considerando las 20 tablas, dentro de cada tabla presentan una menor dispersión. Esto se encuentra en línea con observaciones de otros autores que asignan una mayor correlación a las secciones libres de defectos (Brandner, 2012). Además, también se explica por el efecto del tamaño de las piezas, al reducirse las dimensiones en las tablas respecto de las vigas, las primeras tienen, en promedio, una menor cantidad de defectos. Los valores obtenidos del coeficiente de correlación en tablas son menores a los correspondientes al

MOE local hallado según la norma ASTM D 198. Esto puede deberse a que, para hallar los valores del MOE local, en este caso se utilizaron resultados del MOE global en los cuales cada segmento de viga (0.6 m) influye en por lo menos 2 mediciones consecutivas del MOE global debido a la superposición de ensayos, salvo los segmentos de los extremos (sometidos a esfuerzos de corte) que solo influyen en una determinación del MOE global. En la Tabla 6.9 se presentan los resultados de la aplicación de la metodología presentada en esta sección. En todos los casos el menor valor de $S(a)$ (Ecuación 6.13), se obtuvo al aplicar la función de reducción de varianza correspondiente a la función exponencial propuesta por Czmocho (1998). En relación a los valores encontrados para la longitud de correlación, los mismos son mayores en tablas salvo en el caso del MOE local ASTM D 198 y comparan bien con los valores presentados en las referencias para piezas sometidas a flexión (Kandler *et al.*, 2015a; Bulleit y Chapman, 2004; Czmocho, 1998).

Tabla 6.9: Resultados determinación de función y longitud de correlación.

Piezas	MOE	Función	$S(a)$	a	$d(m)$
Tablas	global	1	0.016	1.759	3.518
		2	0.032	0.723	2.892
	local ASTM D 198	1	0.0007	3.239	6.478
		2	0.0035	1.115	4.46
Vigas	local 20 vigas	1	0.045	0.951	1.902
		2	0.070	0.474	1.896
	local 13 vigas	1	0.019	0.733	1.466
		2	0.037	0.382	1.528

Se podrían obtener los coeficientes de correlación ρ_4 y ρ_3 para tablas y vigas, respectivamente, pero debido a que la cantidad de datos serían menores, estos casos no han sido considerados (Benjamin y Cornell, 1970). Las funciones de correlación de tipo exponencial han sido elegidas debido a que se ha demostrado que son las que mejor ajustan los resultados experimentales (Czmocho, 1998; Bulleit y Chapman, 2004; Wang y Foschi, 1992). Esto es debido a que, en el caso de vigas, con solo dos valores de correlación seguramente una función de correlación del tipo triangular (con variación lineal) presenta un mejor ajuste de los datos presentados pero no sería representativa de la estructura de correlación real reportada por otros autores (Brandner, 2012; Kandler, 2015b).

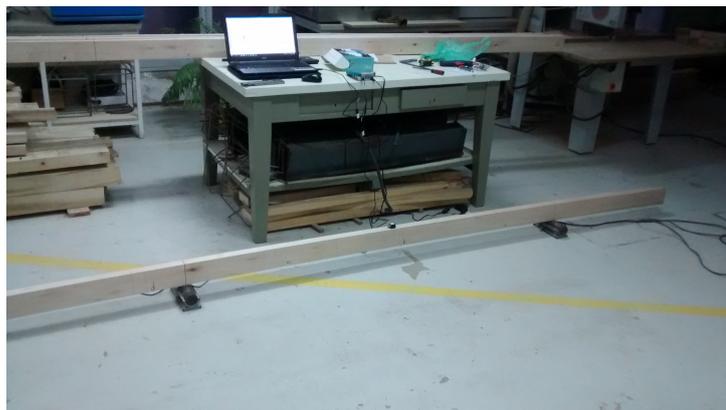
6.3. Ensayos dinámicos

6.3.1. Vigas

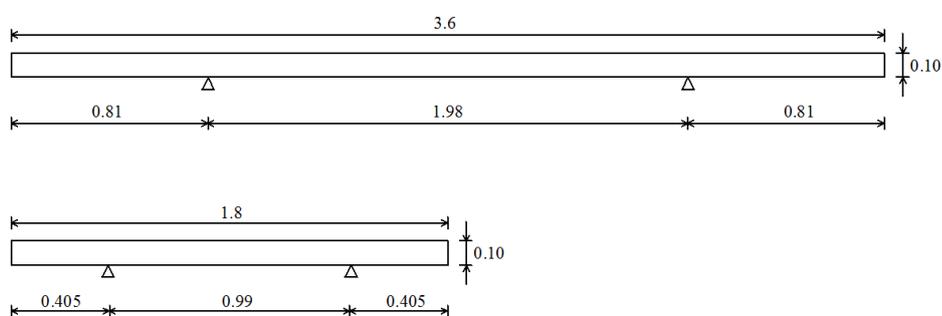
El ensayo dinámico realizado tiene dos objetivos: el primero es la obtención de valores del MOE basados en las frecuencias fundamentales de vibración flexional para su comparación con los valores del MOE global obtenidos del ensayo estático, mientras que el segundo de ellos, es la determinación de los coeficientes de amortiguamiento modal. Tanto la determinación de la frecuencia fundamental como la medición de los coeficientes de amortiguamiento se realizan a través de registros de aceleración obtenidos en el ensayo presentado en la Figura 6.11(a). Las 20 vigas fueron ensayadas en dos instancias: en la primera de ellas el ensayo se realizó sobre la viga completa y luego, sobre ambas mitades de cada una, computándose en el primer caso 20 muestras y en el segundo caso, 40 muestras, Figura 6.11(b).

En la Figura 6.12, se reporta la comparación entre los valores obtenidos del MOE en forma estática y dinámica. En la Figura 6.12(a), se considera para el MOE global estático de cada viga, el promedio de los cuatro valores del MOE global obtenidos sobre la misma y se compara con el MOE dinámico total de la viga (20 muestras). En la Figura 6.12(b), se comparan los resultados del MOE global estático obtenido en ambas mitades de la viga y su correspondiente MOE dinámico (40 muestras). Como puede observarse, se obtienen altos niveles de correlación en ambos casos, similares a los presentados en Piter *et al.* (2004). Las frecuencias fundamentales de vibración y los valores del MOE obtenidos en forma dinámica y estática según la longitud total del ensayo se indican en la Tabla 6.10. Cabe recordar que en el caso de longitud 3.6 m, los valores del MOE estático corresponden a los promedios de las cuatro determinaciones del MOE global en cada viga. Puede observarse que, a pesar de obtenerse un coeficiente de correlación alto, Figura 6.12, los valores estadísticos difieren bastante en el primer caso, mientras que en el segundo son más cercanos.

Para la determinación del coeficiente de amortiguamiento, cada uno de los registros obtenidos (Figura 6.13(a)) fue filtrado mediante la herramienta *cwtft* del programa MATLAB (2011) la cual produce la Transformada Continua Wavelet (CWT) de la señal utilizando un algoritmo empleado en la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Esta herramienta devuelve los coeficientes *wavelet* en función de la frecuencia y del tiempo (Figura 6.13(b)). Los mismos indican los pesos de cada componente de frecuencia a



(a) Ensayo dinámico de vigas.

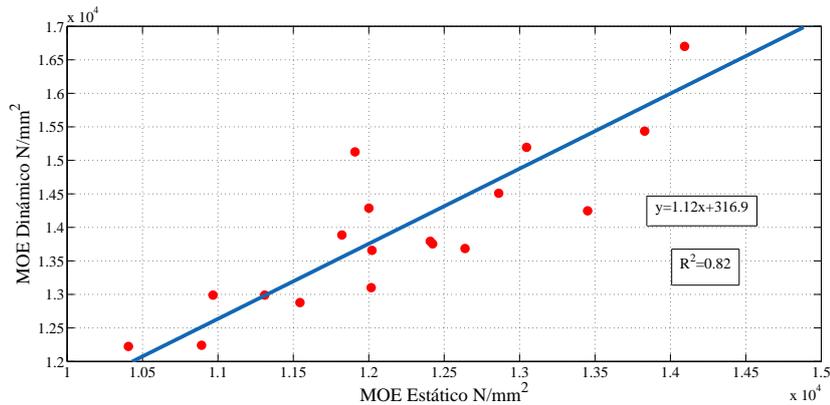


(b) Esquema de ensayo.

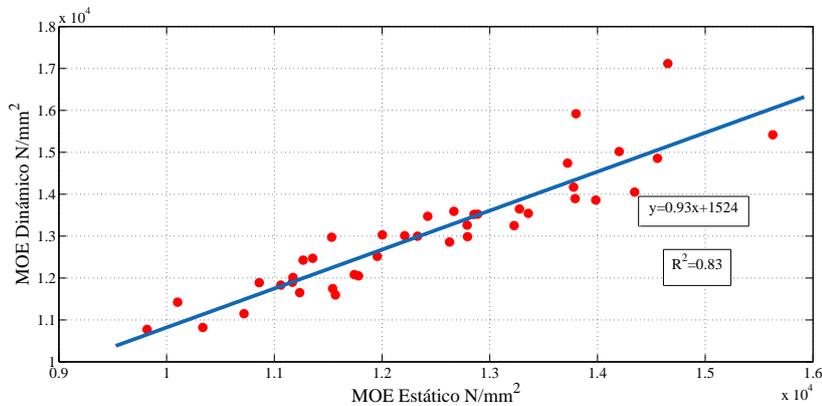
Figura 6.11: Ensayo dinámico de vigas.

través del tiempo en el cual fue registrada la aceleración. Como puede observarse en la Figura 6.13(b), al principio del ensayo, en el ejemplo mostrado, existe influencia en la señal de componentes de frecuencia mayores y menores a la frecuencia fundamental F_0 . Luego, utilizando la función *icwtft* del programa MATLAB aplicada a los coeficientes *wavelet* obtenidos para F_0 se obtiene la señal reconstruida en el dominio del tiempo con la influencia única de F_0 , Figura 6.13(c). Una vez obtenida la señal reconstruida, se utilizó el método del decremento logarítmico para obtener 10 valores de amortiguamiento ζ en cada pieza ensayada. En la Tabla 6.11, se presenta un resumen de los valores encontrados en función de las características de las vigas de las cuales provienen. Los mismos fueron hallados en piezas con una densidad promedio de 516.2 kg/m^3 y un contenido de humedad promedio de 13.9 %.

En Labonnote *et al.* (2013a), se reportan valores medios del coeficiente de amortiguamiento modal que varían entre 0.0052 y 0.0141 hallados en vigas simplemente apoyadas de



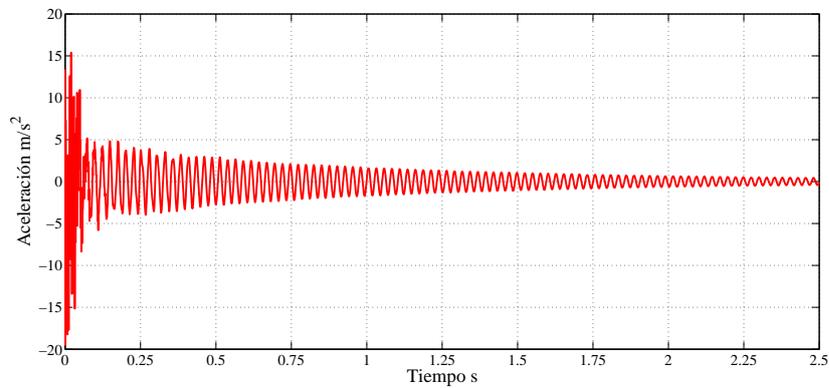
(a) MOE global estático promedio de cada viga y MOE dinámico de la viga completa.



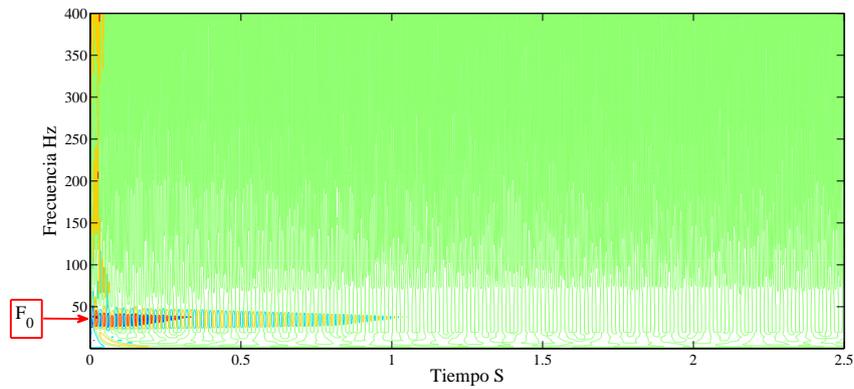
(b) MOE global estático en cada mitad de la viga y MOE dinámico correspondiente.

Figura 6.12: Comparación MOE global dinámico y estático en vigas.

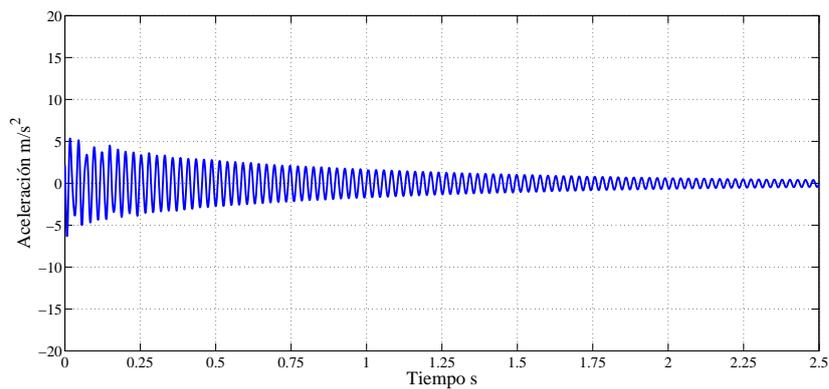
tamaño estructural de la especie *Picea* de Noruega. En la referencia mencionada, también se concluye que el valor medio del coeficiente de amortiguamiento y su COV aumentan a medida que la longitud de las piezas disminuye debido al incremento de las deformaciones por corte. Los coeficiente fueron utilizados luego para la determinación de los factores de pérdida del modelo de amortiguamiento complejo presentado en Labonnote *et al.* (2013b) y utilizado en la Subsección 5.2.2 de la presente tesis. En Cetrangolo *et al.* (2015), se reportan valores medios de coeficientes de amortiguamiento de 0.0121 en vigas suspendidas y de 0.0345 en vigas simplemente apoyadas con conexiones mecánicas de la especie *Castanea sativa Mill.*



(a) Registro de aceleraciones obtenido en el ensayo.



(b) Coeficientes *wavelet* CWT.



(c) Registro reconstruido para la frecuencia fundamental de vibración.

Figura 6.13: Ensayo para determinación del coeficiente de amortiguamiento. Reconstrucción registro de aceleración CWT.

Tabla 6.10: Comparación MOE dinámico y estático hallados experimentalmente en vigas.

Valores estadísticos	3.6 m			1.8 m		
	Frecuencia Hz	MOE (N/mm ²)		Frecuencia Hz	MOE (N/mm ²)	
		Dinámico	Estático		Dinámico	Estático
Mín.	37.05	12224	10406	140.27	10772	9819
Med.	40.54	14241	12433	154.83	13076	12428
Máx.	44.99	17108	14669	168.62	17119	15627
S	1.94	1463	1189	7.62	1396	1375
COV	0.04	0.10	0.09	0.04	0.10	0.11

Tabla 6.11: Resumen de los resultados de coeficientes de amortiguamiento hallados experimentalmente en vigas.

Valores estadísticos	3.6 m	1.8 m
Mín.	0.0039	0.0043
Med.	0.0051	0.0094
Máx.	0.0093	0.0196
S	0.0013	0.0042
COV	0.254	0.444

6.3.2. Tablas

Las 20 tablas fueron ensayadas considerando la misma disposición que en el caso de las vigas, con una distancia entre apoyos de 0.552 m computándose 20 muestras en total. En la Figura 6.14 se presenta la comparación entre los valores obtenidos del MOE en forma estática y dinámica. Se considera para el MOE global estático de cada tabla el promedio de las cinco mediciones realizadas sobre la misma y se compara con el MOE dinámico total de la tabla (20 muestras). Como puede observarse, al igual que en el caso anterior, se obtuvo un alto nivel de correlación similar al presentado en Piter *et al.* (2004). En la Tabla 6.12 se presenta un resumen de los resultados obtenidos en el ensayo dinámico de tablas. En la segunda columna se presentan las frecuencias fundamentales de vibración, en la tercera y cuarta columna se comparan los valores del MOE obtenidos en forma dinámica y estática. Puede observarse que a pesar de obtenerse un coeficiente

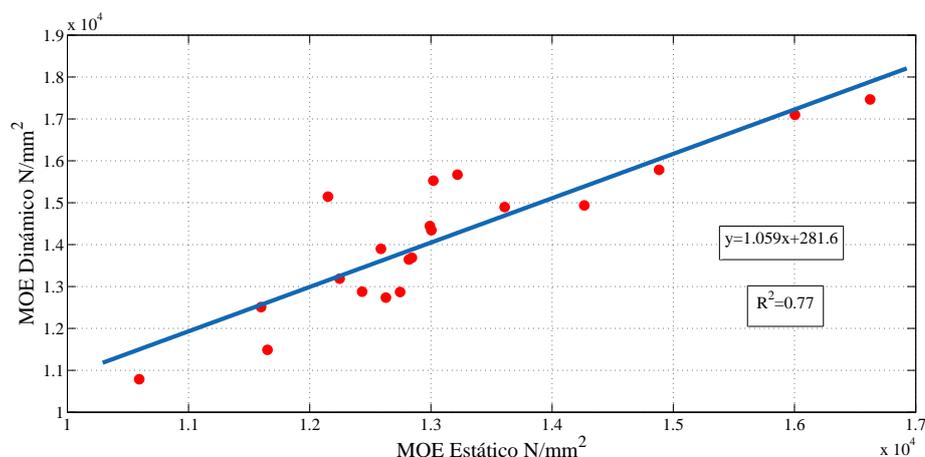


Figura 6.14: Comparación MOE global dinámico y estático en tablas.

de correlación alto los valores estadísticos difieren. Finalmente, en la quinta columna se presentan los coeficientes de amortiguamiento obtenidos de la misma forma que en el ensayo llevado a cabo en vigas. Las piezas al momento de realizarse el ensayo dinámico presentaron un contenido de humedad promedio de 10 %.

Tabla 6.12: Resumen resultados del ensayo dinámico en tablas.

Valores estadísticos	Frecuencia Hz	MOE (N/mm ²)		Amortiguamiento
		Dinámico	Estático	
Mín.	25.89	10786	10593	0.0029
Med.	28.68	14149	13095	0.0037
Máx.	33.46	17464	16623	0.0047
S	2.13	1726	1435	0.0004
COV	0.07	0.12	0.11	0.13

Las frecuencias naturales obtenidas en los ensayos de vigas y tablas presentan un COV similar al obtenido en el Capítulo 5 utilizándose el Modelo de Zonas Débiles. Este parámetro estadístico, en relación a las frecuencias naturales, no presenta grandes diferencias entre las distintas dimensiones de las piezas ensayadas. Sin embargo, los coeficientes de amortiguamiento muestran un incremento de su valor medio y de su COV en relación al aumento de la frecuencia natural de vibración de las vigas y tablas ensayadas. Este aumento en el valor medio y en el COV del amortiguamiento es atribuido en Labonnote

et al. (2013a) a un incremento de las deformaciones por corte producido al disminuirse la longitud de las piezas, lo cual se observa en los resultados de los ensayos en vigas presentados en esta sección.

6.4. Conclusiones de los ensayos experimentales en elementos estructurales

- Se ha estudiado la variabilidad longitudinal del MOE en vigas y tablas de forma experimental teniendo en cuenta la influencia de los defectos presentes en los resultados obtenidos. De los ensayos en tablas, se desprende el mayor rango de variación que presentan los resultados provenientes de las zonas libres de defectos y si bien los resultados globales son amplios, dentro de cada tabla la variabilidad de los resultados es más reducida. La mayor variabilidad de los resultados individuales del MOE en las zonas libres de defectos podría estar influenciada por características propias del tronco del cual provienen, las cuales escapan de la presente tesis. Las mismas podrían ser: posición de la pieza en la sección transversal del tronco, el MOE aumenta con el aumento de la distancia de la posición de las piezas a la médula, y ubicación de la pieza en la altura del tronco. En las zonas bajas del tronco es posible obtener más piezas y en las zonas altas, es posible obtener piezas de mayor densidad (Piter, 2003). La influencia de la posición relativa de los nudos dentro del ensayo ha sido cuantificada a través del índice de nudosidad y del tipo de nudosidad. La presencia de nudos en la zona de momento constante del ensayo ha sido claramente la más influyente con valores del MOE por debajo del valor medio global. Los ensayos con nudos solamente en zona de corte muestran resultados más dispersos. El índice de nudosidad empleado muestra que a medida que el mismo aumenta se produce una disminución de los valores del MOE para los casos de nudosidad exceptuando los ensayos en zonas libres de defectos. En general, los coeficientes de nudosidad tienen una mejor correlación con los valores de resistencia que con los de rigidez por lo tanto debido a la variabilidad de las propiedades del material es de esperarse una correlación no tan clara entre los valores bajos del índice de nudosidad total propuesto y los valores del MOE. En las tablas ensayadas, no se reporta la presencia de médula.

- El estudio de los resultados del MOE global en vigas en relación a los índices y tipos de nudosidad muestra una tendencia más marcada de disminución del MOE al aumentar el valor de dicho índice. En las vigas, predominan los ensayos con nudos en ambas zonas de corte y de momento constante, constituyendo esta configuración la que conduce a los valores más bajos del MOE. En los demás casos de tipos de nudosidad, el MOE se mantuvo cercano o por encima del valor medio global. En muchas de las piezas, los valores del MOE por debajo del valor medio global, no solo se debieron al efecto de los nudos sino que también a la presencia de médula.
- El estudio de la correlación entre los valores del MOE obtenidos a lo largo de las tablas y vigas muestra un grado de correlación mayor en tablas. Lo cual concuerda con resultados reportados en trabajos de referencia y se explica por la menor cantidad de defectos que presentan las tablas en relación a las vigas. Si bien los valores del MOE de los ensayos libres de nudos muestran una gran dispersión global, dentro de cada tabla el desvío es menor que en el caso de las vigas. La aplicación del método utilizado para el estudio de estructura de correlación ratifica la adopción de una función de correlación exponencial y los valores de longitud de correlación son similares a los reportados en los trabajos de referencia (Czmoch, 1998; Bulleit y Chapman, 2004) y aplicados en el capítulo 4 de la presente tesis.
- En general, del estudio de la función de reducción de varianza, se puede inferir que, el aplicar un valor único del MOE a una pieza estructural, si bien se representa el valor medio de la variabilidad longitudinal, se disminuye la variación de las propiedades del material a lo largo de la pieza y la respuesta estructural aproximada de este modo muestra una mayor dispersión que la real. Los modelos estocásticos presentados en las secciones anteriores representan de una manera más próxima a la real esta variación dentro del elemento y la dispersión de la respuesta aproximada es más cercana a la real.
- Los ensayos dinámicos en vigas han sido llevados a cabo con el fin de comparar los valores del MOE obtenidos en forma estática con los valores del MOE procedentes de los resultados del ensayo dinámico. En general se obtuvo una buena correlación entre los valores del MOE obtenidos por ambos métodos y un valor medio mayor en el MOE dinámico en forma similar a los resultados presentados en Piter *et al.* (2004). Luego, se han medido valores del coeficiente de amortiguamiento reportándose el aumento del mismo al disminuir la longitud de la viga y aumentar la frecuencia natural de las mismas. Esta tendencia había sido reportada previamente en Labonnote

et al. (2013a) y ha sido adjudicada al efecto de la deformación por corte que, por ejemplo, se incrementa con menores longitudes de vigas, lo cual también ha sido verificado. Los valores del coeficiente de amortiguamiento obtenidos son próximos a los presentados en el trabajo de referencia, en el que se utilizaban para la determinación de los factores de pérdida utilizados en el estudio de vibraciones forzadas de la presente tesis (Labonnote *et al.*, 2013b).

Capítulo 7

Estudio del comportamiento dinámico de puentes peatonales de madera

En este capítulo, se presenta el estudio del comportamiento dinámico de un puente peatonal de madera. Este tipo de estructuras se encuentran sometidas a cargas dinámicas inducidas por los peatones que circulan sobre la misma y, debido a la alta relación rigidez/masa del material, son propensas a alcanzar niveles de aceleración que afectan las condiciones de servicio y por lo tanto el confort de los transeúntes. En primer lugar, se desarrolla un estudio modal con el fin de determinar la influencia de las propiedades del material consideradas de forma estocásticas y del diseño de las vigas principales laminadas en la frecuencia fundamental de vibración y en los modos de vibración. Luego, se procederá al estudio de las aceleraciones máximas. Para ello, en primer lugar, la estructura será excitada por cargas determinísticas generadas por peatones individuales y después, utilizando un modelo de carga estocástica que simula de manera más precisa la variabilidad en el caminar humano. Utilizando este último modelo de carga, se presenta el estudio del tránsito de múltiples peatones en el cual se determinan las condiciones de utilización de la estructura para las cuales se alcanzan las aceleraciones máximas. La influencia de los parámetros del modelo estructural (rigidez y amortiguamiento), y del modelo de tránsito peatonal (frecuencia del paso y la velocidad de arribo de los transeúntes al puente peatonal) son estudiadas dentro del entorno de la propagación de incertidumbres.

7.1. Introducción

Los puentes o pasarelas peatonales (Figura 7.1) constituyen uno de los tipos de estructuras de madera solicitadas por acciones dinámicas más comunes. Esto ocurre debido a la elevada relación entre la rigidez y el peso que este material presenta en comparación con otros materiales de construcción con lo cual se obtienen estructuras más livianas. Esto se ve potenciado debido a la posibilidad de cubrir grandes longitudes mediante el desarrollo e implementación de vigas laminadas. Este tipo de vigas es actualmente muy empleado y permite la obtención de estructuras esbeltas de madera. Los puentes peatonales están compuestos, principalmente, por un tablero principal sobre el cual circulan los peatones y vigas laminadas longitudinales que ofrecen el soporte estructural. En esta sección, la estructura completa esta formada por madera de *Eucalyptus grandis* cultivado en las provincias de la Mesopotamia Argentina.



Figura 7.1: Puente peatonal de madera con vigas laminadas.

Al igual que como se presentó en la sección de elementos estructurales, los puentes peatonales de madera deben satisfacer requerimientos tanto de resistencia como de serviciabilidad. Generalmente, debido al poco peso de este tipo de estructuras, los requerimientos de serviciabilidad en términos de aceleraciones máximas alcanzadas constituyen la condición más restrictiva en el diseño de estas estructuras. El control de las aceleraciones máximas de estos sistemas puede llevarse a cabo, en general, incrementando el amortiguamiento estructural o la masa. Conocer la frecuencia natural de vibración de estas estructuras es también un punto de importancia dado que los valores límites de aceleración están dados en función de la misma y además la intensidad de las fuerzas armónicas, en los modelos determinísticos, generalmente decrece con el incremento de los armónicos. Hoy en día, los criterios de diseño de entresijos y puentes peatonales sometidos a cargas dinámicas producidas por sus ocupantes están basados en estos principios.

Una extensiva revisión de literatura y reporte del estado del arte referido al comportamiento dinámico de este tipo de estructuras es presentado en Živanović *et al.* (2005). Entre muchos de los temas que aborda, sobresalen los modelos de cargas más empleados, requerimientos normativos y referencias a trabajos en donde se estudia el caminar de las personas en forma individual, de multitudes y los modelos de fuerzas dinámicas generados para la simulación de estos casos. En Segundinho (2010) se presenta el estudio paramétrico de las vibraciones inducidas por el tránsito humano en puentes de madera. En dicho trabajo, los resultados numéricos obtenidos son comparados con resultados experimentales provenientes de un modelo a escala. Estudios relacionados a las vibraciones verticales en puentes peatonales existentes construidos con hormigón y acero simulados numéricamente a través de un software de Elementos Finitos son reportados en Da Silva *et al.* (2007) y en Figueiredo *et al.* (2008). En ambos trabajos se incluyen los modelos de cargas determinísticas tradicionales y además un modelo que incluye el efecto del golpe ocasionado con el talón al realizar los pasos. Los modelos de carga determinísticos utilizados en este capítulo son tomados de estos trabajos.

En el presente estudio, las fuentes de incertidumbre en el modelo estructural derivan de las propiedades mecánicas y físicas de la madera. Además, el diseño geométrico de las láminas que componen una viga laminada de madera también es asumido como estocástico a través del modelado aleatorio de la distancia entre uniones finger. Los datos estadísticos utilizados para ello son tomados del relevamiento visual de vigas laminadas de *Eucalyptus grandis* de tamaño estructural. Luego, con esta información, se construye la Función Masa de Probabilidad (PMF) de la distancia entre uniones finger. Entre las piezas de madera, definidas por la distancia entre uniones finger, las propiedades del material varían estocásticamente y de forma no correlacionada. De acuerdo a los lineamientos de la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006) cada tabla de la viga laminada proviene de una clase resistente específica de acuerdo al método de clasificación visual. Dentro de esta clase, las propiedades del material varían de forma estocástica. La propagación de estas fuentes de incertidumbre en la primera frecuencia natural de vibración del puente peatonal es estudiada. La misma constituye uno de los parámetros principales en la determinación del comportamiento en servicio de este tipo de estructuras. Para ello, la PDF de la primera frecuencia natural se halla mediante simulaciones de Monte Carlo (MC).

Otro de los parámetros importantes involucrado en el estudio del comportamiento en servicio de puentes peatonales es la aceleración. Para cuantificar los valores de la misma

la estructura es excitada por dos modelos de carga determinísticos y un modelo de carga estocástica. Dentro del primer grupo, el primero de los modelos es el utilizado en los códigos de diseño (Živanović *et al.*, 2005) y el segundo presenta una representación más realista que incluye el efecto producido por el impacto del talón al caminar. Dos valores límites de aceleraciones pico de acuerdo a las normas EUROCODE 5 (2004) e ISO 10137 (2005) son empleados para ser comparados con los valores numéricos obtenidos. Se consideran dos valores de amortiguamiento. Para cierto rango de la primera frecuencia natural, la condición de excitación puede cambiar resultando en valores altos de aceleración. Por lo tanto, el análisis tradicional con un modelo numérico con propiedades medias puede volverse inadecuado en la zona de frecuencias en la cual el puente peatonal puede ser excitado por un caminar rápido con el tercer armónico o por un caminar normal con el cuarto armónico de la fuerza en concordancia con la frecuencia fundamental de vibración del puente peatonal. De este modo, la variación de las propiedades materiales puede conducir a condiciones de servicio no aceptables para el confort de los transeúntes bajo ciertos escenarios de carga. El modelo de carga estocástico presenta una representación más real de la variabilidad del caminar humano. A través del mismo, se estudiarán las condiciones en las cuales se producen las aceleraciones máximas al considerarse el tránsito de múltiples peatones.

7.2. Descripción de la estructura

La estructura está compuesta de tres vigas laminadas longitudinales con una longitud de 13.2 m y una separación de 0.6 m en la dirección transversal, cinco vigas laminadas transversales con una separación de 3.3 m en la dirección longitudinal y un tablero compuesto por tablas de madera. El ancho de las vigas laminadas y de las tablas de madera está fijado en 0.15 m, y la altura de cada lámina de las vigas y de las tablas de madera del tablero en 0.0375 m (una pulgada y media). La altura total de las vigas fue pre-dimensionada de acuerdo a los criterios de resistencia del Reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601 (2013) y fueron verificados los requerimientos de serviciabilidad de manera tal de obtener una estructura susceptible a la influencia de las cargas dinámicas. Este último criterio de diseño es el principal factor en la estructura analizada. El número de láminas de cada viga fue considerado entre 10 y 16, lo que produce vigas laminadas de 0.375 m y 0.6 m de altura respectivamente, Figura 7.2(a).

Las vigas laminadas están formadas por varias láminas compuestas por la unión de tablas con propiedades mecánicas distintas. Las caras superior e inferior de las tablas son pegadas a las caras superior e inferior de las tablas continuas. Previamente a esto, las tablas de cada lámina son ensambladas con uniones finger. La influencia de la configuración de las uniones finger en la frecuencia fundamental de vibración será estudiada estocásticamente mediante el análisis de propagación de incertidumbres. Las distancias entre las uniones finger obtenidas del relevamiento visual de vigas laminadas (Torrán, 2013) fueron empleadas con el objetivo de simular las diferentes tablas que conforman una viga laminada. Con los resultados de este relevamiento, la Distribución Masa de Probabilidad (PMF) de la distancia entre uniones finger fue construida. El valor medio y el desvío estándar de la distancia entre uniones son 0.865 m y 0.247 m, respectivamente, Figura 7.2(b). Las vigas simuladas fueron verificadas de cumplir con los lineamientos de la norma Argentina IRAM 9662-2 (2006) en cuanto a las distancias mínimas entre uniones tipo finger.

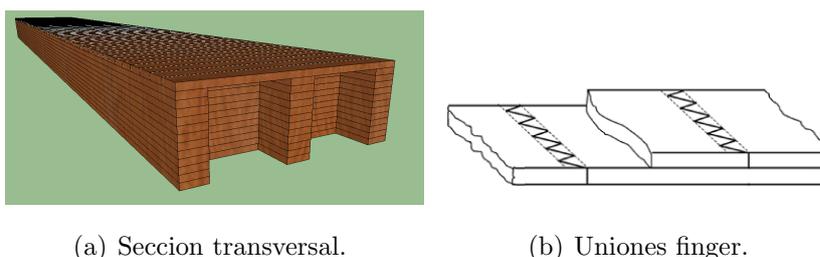


Figura 7.2: Esquema de vigas laminadas y uniones.

7.2.1. Modelado del material

El modelo material está basado en el modelo ortótropo rectangular que luego se reduce a un modelo transversalmente isótropo presentado en la Sección 4.1.2. La propiedad mecánica modelada de forma estocástica en este capítulo es el MOE longitudinal (E_x o E_L), luego las demás constantes elásticas son obtenidas en base a las relaciones establecidas entre las mismas y el MOE longitudinal en la Sección 4.1.2.

El modelado estocástico de las propiedades del material se realiza mediante la PDF y CDF marginal del MOE y de la densidad de masa:

$$f(x | \bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{\bar{b}^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a})} x^{\bar{a}-1} e^{-\frac{x}{\bar{b}}} \quad F(x | \bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{\bar{b}^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a})} \int_0^x t^{\bar{a}-1} e^{-\frac{t}{\bar{b}}} dt, \quad (7.1)$$

en donde \bar{a} y \bar{b} son los parámetros de forma y de escala, respectivamente. Para el MOE, $\bar{a}=34.582$ y $\bar{b}=0.402$ con un valor medio del MOE igual a 13.902 GPa y un desvío estándar de 2.36 GPa. En el caso de la densidad de masa, $\bar{a}=72.179$ y $\bar{b}=7.659$, el valor medio de la densidad de masa es igual a 552.819 kg/m³ y el desvío estándar 65.069 kg/m³. Ambos corresponden a piezas cuya clasificación visual concuerda con las clases resistentes C1 y C2.

7.2.2. Discretización mediante el Método de los Elementos Finitos

La aplicación del principio de Hamilton y la posterior discretización del sistema conduce a la siguiente expresión matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7.2)$$

en donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente; $\mathbf{f}(t, x)$ es el vector global de fuerzas nodales y $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ son los vectores globales de aceleraciones, velocidades y desplazamientos nodales, respectivamente. La ecuación de movimiento es discretizada en el caso de las vigas laminadas con los elementos viga Timoshenko presentados en la Subsección 4.3.4.4. El tablero del puente peatonal es modelado numéricamente con elementos placa bi-lineales rectangulares presentados en la Subsección 4.3.4.3. Luego de realizado un estudio de convergencia, una cuadrícula de 8 por 88 elementos han sido considerados para la discretización de la estructura en las direcciones transversal y longitudinal respectivamente. La matriz de amortiguamiento global de la Ecuación (7.2) se considera proporcional a la matriz de rigidez, considerando relaciones de amortiguamiento iguales a 5 % y 7 % en el primer modo natural de vibración. Estos valores han sido sugeridos por Chopra (1995) para ser aplicados en estudios dinámicos de estructuras de madera con uniones con clavos o bulones. Estudios experimentales llevados a cabo en puentes peatonales de madera reales exhiben valores similares de amortiguamiento (Segundinho, 2010; Schlaich, 2005).

Las frecuencias y modos naturales de vibración del puente peatonal son obtenidos resolviendo la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{K} - \Omega_n^2 \mathbf{M}] \Phi_n = 0 \quad (7.3)$$

en donde Ω_n es la n^{th} frecuencia natural circular y Φ_n es el modo natural de vibración asociado. Luego, para obtener la respuesta dinámica del sistema se aplica el Método de Superposición Modal (Clough y Penzien, 1975) expresando el vector de desplazamientos como el producto entre la matriz de formas modales y el vector de amplitudes modales o coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{y}(t) \quad (7.4)$$

Remplazando la Ecuación (7.4) y sus derivadas en la Ecuación (7.2) se obtiene:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7.5)$$

en donde los componentes del vector $\mathbf{f}(t)$ de fuerzas nodales globales se definen como:

$$f_i(t) = \begin{cases} F(t) & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + t_d \\ 0 & \text{para } t < t_0 \text{ y } t > t_0 + t_d \end{cases}$$

en donde $F(t)$ es la función de fuerza en el dominio del tiempo inducida por un peatón individual simulada con los métodos determinísticos y el procedimiento estocástico que serán presentados en la siguiente sección, t_0 es el tiempo de arribo al nodo i , $t_d = L_e/v_p$ es el tiempo de paso de un nodo de aplicación de carga al siguiente, v_p es la velocidad del peatón y L_e la distancia entre nodos sucesivos con carga. Multiplicando la Ecuación (7.5) por la transpuesta del vector de forma modal Φ_n y en virtud de la propiedad de ortogonalidad de las formas modales se obtiene la siguiente ecuación:

$$\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n \ddot{y}_n(t) + \Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_n \dot{y}_n(t) + \Phi_n^T \mathbf{K} \Phi_n y_n(t) = \Phi_n^T \mathbf{f}(t) \quad (7.6)$$

Remplazando $\mathbf{C} = a\mathbf{K}$, en donde a es el coeficiente de proporcionalidad entre amortiguamiento y rigidez, obtenemos la ecuación de movimiento en coordenadas generalizadas para cada modo n , con la forma de la ecuación de un sistema de un único grado de libertad (SDOF):

$$M_n \ddot{y}_n(t) + C_n \dot{y}_n(t) + K_n y_n(t) = f_n(t) \quad (7.7)$$

en donde $f_n(t) = \Phi_n(v_p t) F(t)$ durante el tiempo comprendido entre $t_0 \leq t \leq t_0 + t_d$. Para el modelo de amortiguamiento adoptado, la relación de amortiguamiento para cada uno de los modos de vibración considerados se expresa como:

$$\zeta_n = \frac{a}{2} \Omega_n \quad (7.8)$$

en la cual se manifiesta una relación lineal entre el amortiguamiento y la frecuencia natural circular de cada modo. El valor del coeficiente a se obtiene al fijar el valor de ζ_n para el primer modo de vibración. Al aplicar el método de superposición modal, se han estudiado los primeros diez modos naturales de vibración para evaluar la influencia en la respuesta total de cada uno de ellos. Finalmente, se han elegido los modos de mayor influencia para la realización del estudio estocástico. Las aceleraciones serán registradas en el centro del tramo del puente; por lo tanto, la aceleración total se obtiene como la siguiente sumatoria sobre los modos considerados:

$$\ddot{x}_{centro}(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_{centro,n} \ddot{y}_n(t) \quad (7.9)$$

El principio de superposición de efectos se aplica en el caso del tránsito de múltiples peatones para la obtención de la respuesta dinámica estructural, en virtud de las condiciones lineales del problema planteado.

7.3. Análisis Modal

Un estudio de convergencia de la frecuencia fundamental de vibración fue realizado debido al hecho de que en los modelos de fuerzas utilizados, varios coeficientes y características de los mismos son considerados en función de la primera frecuencia natural de vibración del puente peatonal. Un número de 3000 simulaciones independientes de Monte Carlo (MC) fue adoptado para el estudio estocástico. En la Figura 7.3, la PDF de F_1 ($f(F_1)$) es mostrada para los casos con vigas laminadas con y sin uniones finger. Esta consideración introduce una variabilidad longitudinal del MOE y de la densidad de masa en cada lámina de las vigas laminadas. Como puede observarse, el valor medio permanece igual en ambos casos, $\mu(F_1) = 6.78$ Hz, mientras que el desvío estándar decrece para el caso en que son consideradas las uniones tipo finger al obtenerse un valor $\sigma(F_1) = 0.06$ Hz en relación a $\sigma(F_1) = 0.12$ Hz para vigas sin uniones finger. Este resultado se explica por la variación de las propiedades efectivas de rigidez y masa a lo largo de las vigas, introducidas por el modelo estocástico de viga laminada con uniones tipo finger. Este efecto es presentado en Brandner y Schickhofer (2015) al describir a las vigas laminadas como un sistema con elementos en paralelo y serie. En el primer caso presentado de la figura la viga laminada es equivalente a un elemento con componentes de rigidez en paralelo

mientras que en el segundo caso es equivalente a un elemento con componentes de rigidez en paralelo considerando las secciones y en serie considerando la longitud del elemento. En ambos casos, el MOE equivalente tiende a su valor medio disminuyéndose la dispersión de la respuesta. Esto también se observa en los resultados experimentales de determinación del MOE en vigas laminadas presentados en Saviana *et al.* (2009) en el cual se reporta una disminución del COV del MOE respecto del encontrado en piezas aserradas.

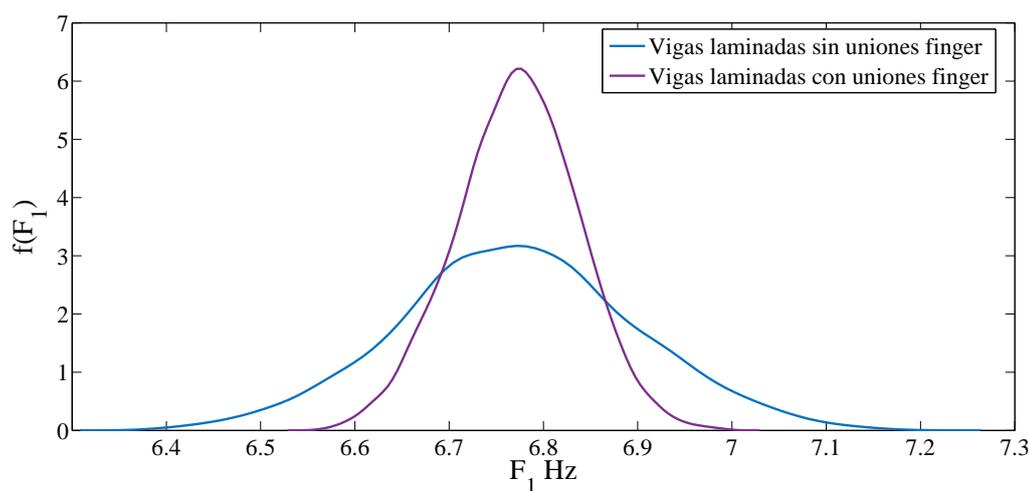


Figura 7.3: PDFs de la primera frecuencia natural. Vigas laminadas con y sin uniones finger.

En la Figura 7.4, se muestran las primeras cinco formas modales y sus frecuencias naturales de vibración correspondientes. Las mismas fueron obtenidas a través de un modelo con valores medios de propiedades físicas y mecánicas. El estudio de las formas modales y el contenido de frecuencia de las fuerzas permiten determinar la cantidad de modos empleados en el método de superposición modal para la resolución de la ecuación matricial del sistema. Para los modelos de carga aplicados en el centro del tablero peatonal, los modos de vibración flexionales tienen la mayor contribución en la respuesta. Los valores de Φ_n obtenidos en el centro del tramo para los 10 primeros modos de vibración ($\Phi_{centro,n}$) son: -0.028 , $3.345 \cdot 10^{-12}$, $-2.062 \cdot 10^{-13}$, $7.240 \cdot 10^{-14}$, 0.028 , $2.467 \cdot 10^{-13}$, $1.086 \cdot 10^{-14}$, $-1.592 \cdot 10^{-15}$, $2.889 \cdot 10^{-9}$ y $-2.928 \cdot 10^{-14}$. Como se puede observar, los coeficiente modales con mayor incidencia en la medición de la aceleración en el centro del tramo son los correspondientes a los modos de vibración 1 y 5 (Figura 7.4).

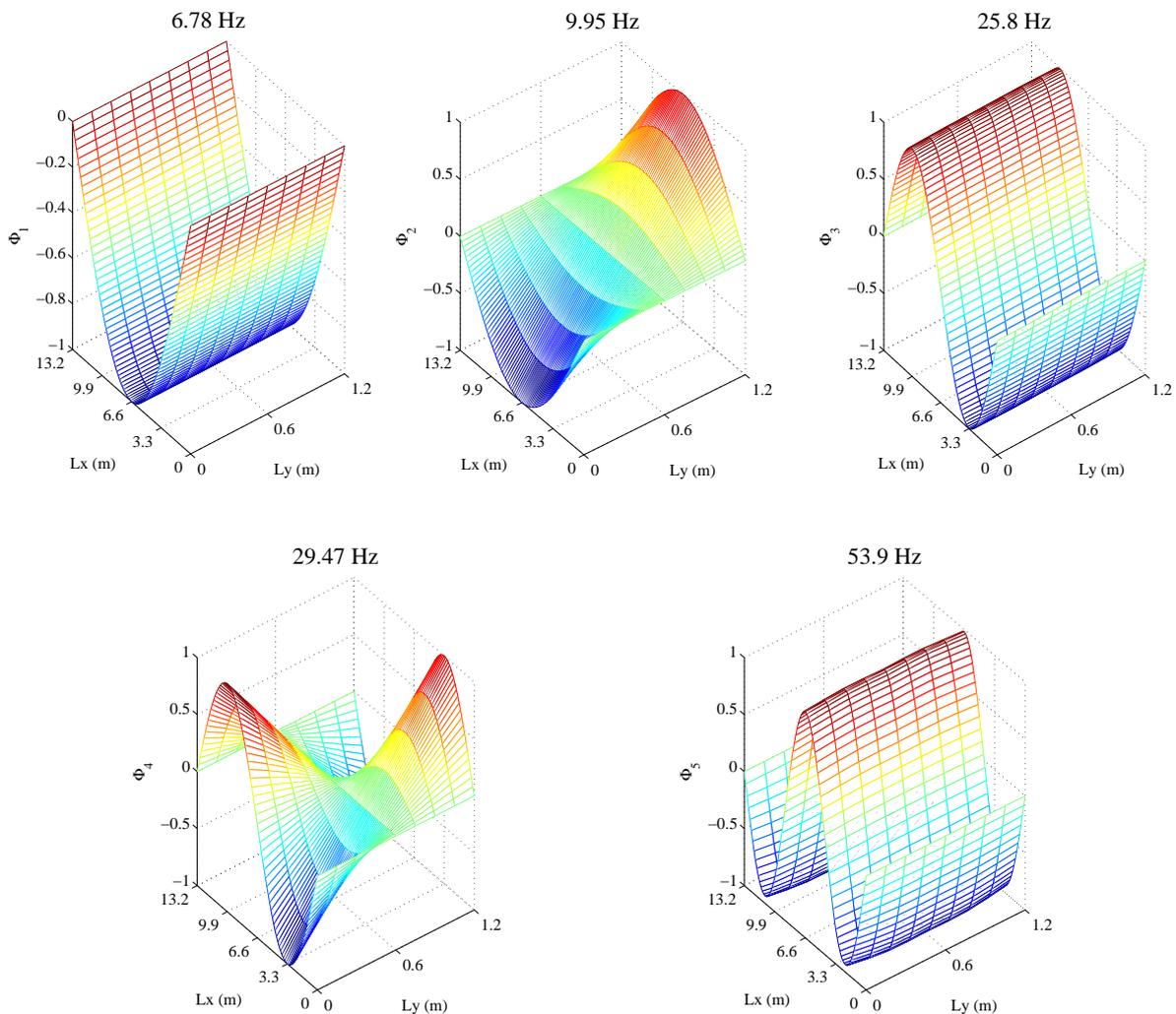


Figura 7.4: Formas modales y frecuencias naturales del modelo medio.

7.4. Vibraciones forzadas: tránsito peatonal

En esta sección se presenta el estudio del tránsito peatonal utilizando en una primera instancia dos modelos de cargas determinísticos para la simulación del tránsito individual. Luego, se presentará un modelo de carga estocástico que representa en forma más real el caminar humano. El mismo será aplicado a la estructura en forma individual y para el estudio del tránsito de múltiples peatones.

7.4.1. Modelos determinísticos de carga peatonal

Dos modelos determinísticos de carga que representan el efecto de una persona caminando son considerados en esta sección. En ambos, la posición de la carga es modificada de acuerdo a la posición del individuo a lo largo del puente peatonal. Las funciones de carga tienen una descripción temporal y una influencia espacial a modelar. El primer modelo de carga está compuesto de la carga estática propia del peso del peatón y una combinación de fuerzas armónicas representadas a través de series de Fourier:

$$F(t) = P \left[1 + \sum \alpha_i \cos(2\pi i f_s t + \Phi_i) \right] \quad (7.10)$$

en donde P es el peso del individuo, considerado frecuentemente como igual a 700 N, α_i es el coeficiente dinámico de la componente i de la fuerza armónica, i es el número de orden del armónico, f_s es la frecuencia del paso y Φ_i es el ángulo de fase del armónico. Los valores considerados para cada uno de estos parámetros son presentados en la Tabla 7.1. Este modelo de carga es frecuentemente empleado en el diseño estructural para la verificación de los requerimientos de serviciabilidad (Živanović *et al.*, 2005).

El segundo modelo de carga constituye una simulación más realista de la misma, dentro de los modelos determinísticos. El mismo incorpora el efecto del impacto del talón al caminar (Figueiredo *et al.*, 2008). La formulación de este modelo de carga es presentada a continuación:

$$F(t) = \begin{cases} \left(\frac{f_{mi} F_m - P}{0,04T_p} \right) t + P & \text{si } 0 \leq t < 0,04T_p \\ f_{mi} F_m \left[\frac{C_1(t-0,04T_p)}{0,02T_p} + 1 \right] & \text{si } 0,04T_p \leq t < 0,06T_p \\ F_m & \text{si } 0,06T_p \leq t < 0,15T_p \\ P \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{nh} \alpha_i \sin [2\pi i f_s (t + 0,1T_p) - \Phi_i] \right\} & \text{si } 0,15T_p \leq t < 0,90T_p \\ 10(P - C_2) \left(\frac{t}{T_p} - 1 \right) + P & \text{si } 0,90T_p \leq t < T_p \end{cases} \quad (7.11)$$

$$F_m = P \left(1 + \sum_{i=1}^{nh} \alpha_i \right) \quad C_1 = \left(\frac{1}{f_{mi}} - 1 \right) \quad \text{y} \quad C_2 = \begin{cases} P(1 - \alpha_2) & \text{si } nh = 3 \\ P(1 - \alpha_2 + \alpha_4) & \text{si } nh = 4 \end{cases} \quad (7.12)$$

en donde F_m es el valor máximo de las series de Fourier, f_{mi} es el factor de impacto del talón (considerado por los autores igual a 1.12), T_p es el periodo del paso, C_1 y C_2

son coeficientes de fuerza. Este modelo tiene los mismos parámetros generales que el primer modelo de carga, pero cambian los ángulos de fase de los armónicos Φ_i (Tabla 7.1). La velocidad de movimiento del individuo así como la distancia y frecuencia de los pasos consideradas en ambos modelos de carga, son presentados en la Tabla 7.2. Las representaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia de ambos modelos de carga son mostrados en la Figura 7.5. La frecuencia de excitación de las cargas se adopta de

Tabla 7.1: Frecuencias de la fuerza f_s , coeficientes dinámicos α_i y ángulos de fase dinámicos Φ_i . Modelos de carga 1 y 2.

Armónico i	if_s Hz	α_i	Φ_i	
			Modelo de carga 1	Modelo de carga 2
1	1.6-2.2	0.5	0	0
2	3.2-4.4	0.2	$\pi/2$	$\pi/2$
3	4.8-6.6	0.1	$\pi/2$	π
4	6.4-8.8	0.05	$\pi/2$	$3\pi/2$

Tabla 7.2: Características del caminar humano.

Ritmo de caminata	Distancia de paso	Frecuencia de paso
	(m)	(Hz)
Caminar lento	0.6	1.60-1.85
Caminar normal	0.75	1.85-2.15
Caminar rápido	0.9	2.15-2.30

manera tal que if_s , segunda columna de la Tabla 7.1, sea igual a la frecuencia fundamental de vibración del puente peatonal (F_1). Por lo tanto, la frecuencia del paso f_s se vuelve una variable aleatoria relacionada con los valores de F_1 . Dependiendo del valor que esta variable puede adoptar, tercera columna de la Tabla 7.2, se define el ritmo y la distancia del paso del modelo de carga aplicado.

La comparación entre los desplazamientos en el punto central del puente peatonal a lo largo del tiempo, obtenido para los modelos de carga considerados y un amortiguamiento de 7 % es presentada en la Figura 7.6. Como puede observarse, la forma de las funciones y su representación en el dominio de la frecuencia cambian de acuerdo al modelo de carga aplicado. El efecto del impacto del talón en el segundo modelo de carga se observa

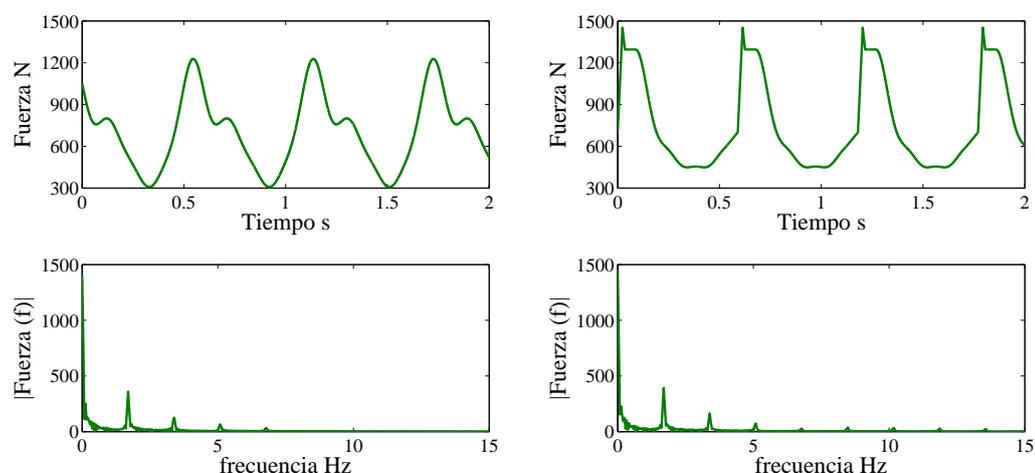


Figura 7.5: Cargas producidas por los peatones, representaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Primer modelo de carga (gráficos de la izquierda) y segundo modelo de carga (gráficos de la derecha).

claramente en los picos de la función de desplazamiento. Un comportamiento similar es obtenido para las aceleraciones medidas en el mismo punto, Figura 7.7. El segundo modelo de carga produce respuestas estructurales en términos de aceleraciones y desplazamientos medidas en el punto medio de la pasarela con un mayor contenido de frecuencias. Valores mayores de estas magnitudes son observados en comparación con los resultados obtenidos cuando el primer modelo de carga es aplicado. En comparación con estructuras de puentes peatonales con similares frecuencias naturales y diferentes materiales (Da Silva *et al.*, 2007 y Figueiredo *et al.*, 2008), las aceleraciones resultantes son importantes y los desplazamientos pequeños. Esto puede explicarse debido a la alta relación entre la rigidez y el peso de este material. En relación a resultados numéricos publicados de estudios dinámicos en puentes de madera, los niveles de aceleración obtenidos en la presente sección son similares (Segundinho, 2010).

De acuerdo al Reglamento Argentino de Estructuras de Madera CIRSOC 601 (2013) cuando la primera frecuencia natural de la estructura de madera es menor a 8 Hz, un estudio dinámico es necesario para el estudio del comportamiento estructural bajo las condiciones de servicio. Por lo tanto, el comportamiento en servicio de este tipo de estructuras debe ser evaluado a través del análisis de las aceleraciones máximas y de las primeras frecuencias naturales, de acuerdo a las disposiciones presentadas en varios códigos de di-

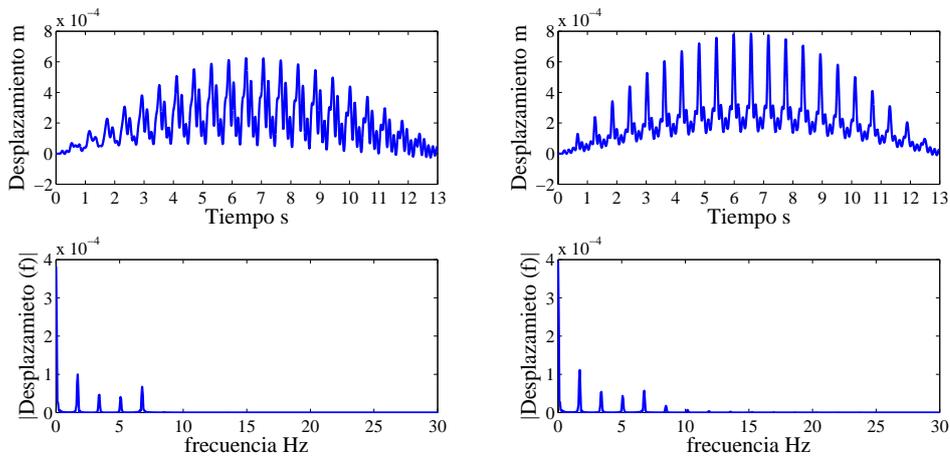


Figura 7.6: Funciones de desplazamiento en el punto medio de la longitud del puente peatonal. Primer modelo de carga (gráficos de la izquierda) y segundo modelo de carga (gráficos de la derecha).

seño estructural (Živanović *et al.*, 2005). En la Figura 7.8, se presenta el comportamiento en servicio de los resultados obtenidos a través del estudio estocástico llevado a cabo con el segundo modelo de carga. Fueron considerados dos valores límites de aceleraciones máximas de acuerdo con las normas EUROCODE 5 (2004) e ISO 10137 (2005) para puentes peatonales emplazados al aire libre. El tercer y cuarto armónico del modelo de fuerza son coincidentes con las primeras frecuencias naturales F_1 de los puentes simulados. Esto puede observarse en el rango de frecuencias cubierto por esta variable aleatoria (Figura 7.8). Como puede apreciarse, para un amortiguamiento de 5 %, las aceleraciones máximas en algunas muestras son mayores que el límite establecido en el EC5 (0.67 %). Esto ocurre cuando la estructura se encuentra solicitada por individuos con un caminar rápido con el tercer componente armónico de las fuerzas coincidente con la primera frecuencia natural del puente peatonal. En estos casos, el coeficiente dinámico α_i es mayor que para el cuarto componente armónico de la fuerza correspondiente a un caminar normal, Tabla 7.1. Cuando el cuarto componente armónico de la fuerza es coincidente con la primera frecuencia natural del puente peatonal, el requerimiento del EC5 se cumple aunque no el de la norma ISO 10137 para un caminar normal (99.33 %). En el caso en el que el amortiguamiento es considerado igual a 7 %, el requerimiento del EC5 se cumple en todas las simulaciones y solo algunos resultados cumplen ambos requerimientos normativos (44.63 %). Los histogramas marginales de las aceleraciones máximas y de las frecuencias funda-

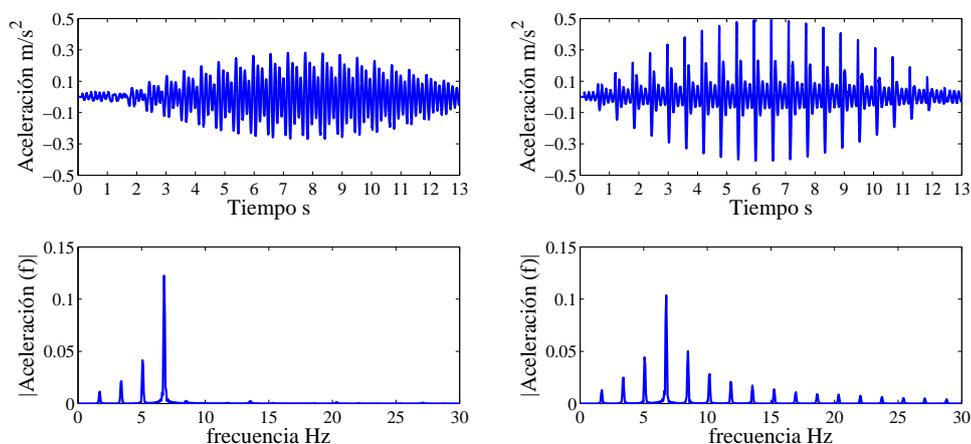
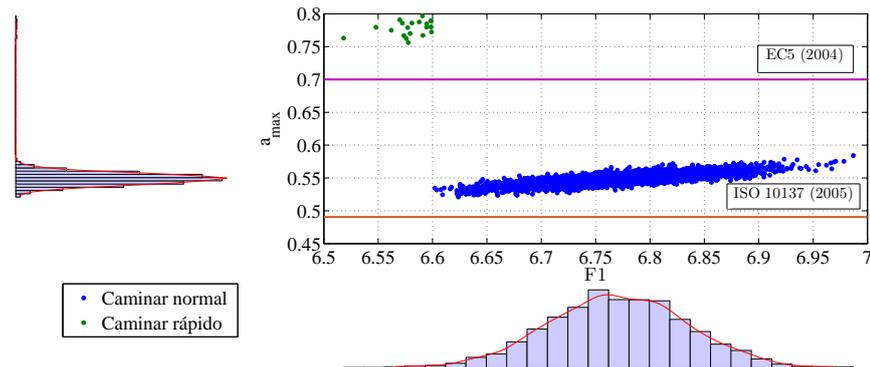


Figura 7.7: Funciones de aceleración en el punto medio de la longitud del puente peatonal. Primer modelo de carga (gráficos de la izquierda) y segundo modelo de carga (gráficos de la derecha).

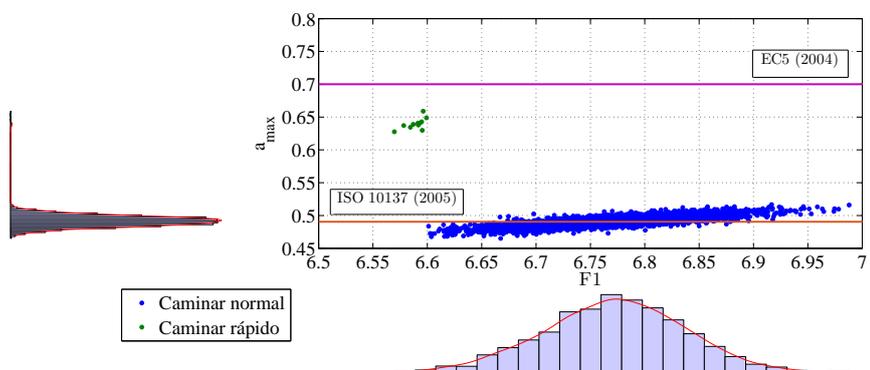
mentales también son presentados en la figura. Como puede verse, el rango de variación de las frecuencias naturales es mayor que el obtenido para las aceleraciones máximas. Por lo tanto, el análisis tradicional considerando un modelo medio podría ser inadecuado en la zona de las frecuencias para las cuales el puente peatonal podría ser excitado o bien por un caminar rápido a través del tercer armónico del modelo de fuerza o por un caminar normal con el cuarto armónico del modelo de fuerza en coincidencia con la frecuencia fundamental del puente peatonal. En estos casos, la variación de las propiedades materiales podrían conducir a un comportamiento en servicio de la estructura no aceptable para el confort de los transeúntes. En la Figura 7.9, se presentan los resultados obtenidos con la aplicación del primer modelo de carga. Como puede observarse en este caso, los requerimientos normativos son cumplidos para ambos valores de amortiguamiento en la mayoría de los casos, existiendo pocas simulaciones en las cuales se producen las condiciones de excitación más desfavorables pero que de igual modo no llegan a producir aceleraciones tan grandes como en el caso del segundo modelo de carga. Respecto al segundo modelo de carga, los resultados de aceleraciones máximas además presentan una menor variación producida por la diferencia de niveles de carga de ambos modelos, Figura 7.9.

Los valores límite de aceleración establecidos en la normas de diseño son muy variados (Segundinho, 2010). En líneas generales se establecen los siguientes niveles de confort respecto a las aceleraciones verticales en puentes peatonales: el nivel máximo se obtiene

para aceleraciones menores a 0.5 m/s^2 , un nivel medio para aceleraciones entre 0.5 m/s^2 y 1 m/s^2 ; y un nivel mínimo para aceleraciones entre 1 m/s^2 y 2.5 m/s^2 . Para aceleraciones mayores los peatones experimentan condiciones de tránsito inaceptables (Heinemeyer *et al.*, 2008). Por lo tanto, en lo que sigue del capítulo se estudiarán con mayor detalle las condiciones de tránsito que producen los valores máximos de aceleración.



(a) Amortiguamiento 5 %.

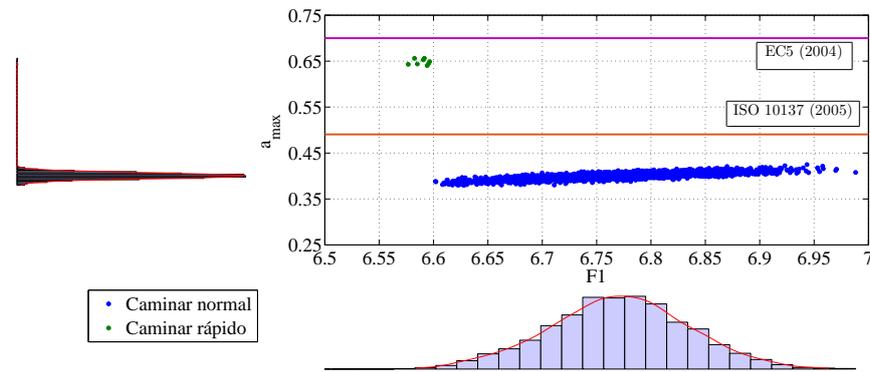


(b) Amortiguamiento 7 %.

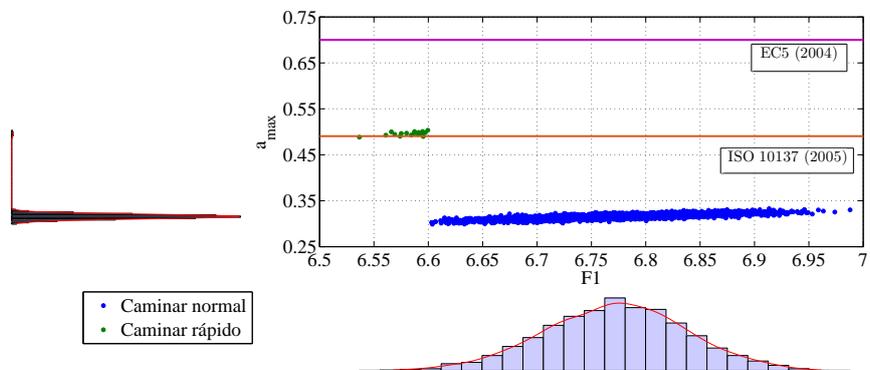
Figura 7.8: Estudio de serviciabilidad del puente peatonal utilizando el segundo modelo de carga determinística.

7.4.2. Modelo estocástico de carga peatonal

Los modelos estocásticos de carga peatonal constituyen el enfoque de representación más real de la variabilidad en el caminar de las personas y de la fuerza inducida por las mismas al trasladarse. En Racic (2009) se presenta una revisión de literatura con los



(a) Amortiguamiento 5%.



(b) Amortiguamiento 7%.

Figura 7.9: Estudio de serviciabilidad del puente peatonal utilizando el primer modelo de carga determinística.

estudios más recientes hasta esa fecha acerca del estudio experimental del caminar humano y la representación de la fuerza generada por el mismo. El modelo de carga estocástica empleado en esta sección es el presentado en Živanović *et al.* (2007). Los modelos de carga empleados en la sección anterior, debido a su naturaleza determinística, no son capaces de modelar adecuadamente la variabilidad en la carga inducida por los peatones. Con el avance de los estudios y de las técnicas de medición empezaron a ser documentadas las características aleatorias del caminar humano y actualmente el modelado determinístico está siendo dejado de lado. Utilizando registros temporales de cargas obtenidos en una cinta de caminar, el contenido de frecuencia de las fuerzas inducidas fue investigado, resultando en el modelo de fuerza multi-armónico presentado en el trabajo de referencia y utilizado en la siguiente sección. Este modelo es capaz de representar la variabilidad

registrada tanto en el caminar propio de cada peatón así como también la variabilidad registrada entre distintos peatones.

La fuerza inducida por el caminar humano no es una función periódica, como las vistas anteriormente; más bien es un proceso estocástico de banda estrecha (Brownjohn *et al.*, 2004). La caracterización de banda estrecha da a entender que la mayor cantidad de energía se divide en los armónicos principales del espectro de la fuerza. Sin embargo, luego de realizar el estudio de los registros temporales en el dominio de la frecuencia, el modelo utilizado en esta sección, también involucra la existencia de sub-armónicos entre los armónicos principales. Dentro de los parámetros de este modelo que describen la variabilidad entre las fuerzas inducidas por distintos individuos se encuentran:

- Frecuencia y longitud del paso:

En este modelo la frecuencia del paso f_s y la longitud del paso l_s son considerados como dos parámetros independientes y el tiempo requerido para cruzar un puente peatonal de longitud L se define como:

$$T_c = \frac{L}{f_s l_s} \quad (7.13)$$

en donde f_s es una variable aleatoria con distribución normal de valor medio $\mu_{f_s} = 1.87$ Hz y desvío estándar $\sigma_{f_s} = 0.186$ Hz, mientras que l_s es una variable aleatoria con distribución normal de valor medio $\mu_{l_s} = 0.71$ m y desvío estándar $\sigma_{l_s} = 0.071$ m.

- Magnitud de la fuerza inducida por el peatón:

La fuerza está compuesta por la contribución de armónicos y sub-armónicos, según el espectro presentado en el trabajo de referencia; entonces es necesario definir la amplitud de cada uno de ellos. Esta amplitud está dada en términos de Factores de Carga Dinámicos (*DLFs*).

- *DLFs* para armónicos principales:

Este modelo de carga considera cinco componentes armónicos ya que se considera que los armónicos de orden superior no tienen una contribución importante en las vibraciones perceptibles en puentes peatonales. Para el primer armónico se toma una expresión presentada por Kerr (1998) en donde establece que el valor medio del *DLF* correspondiente al primer armónico (*DLF1*) el cual depende de la frecuencia del paso f_s :

$$\mu_{DLF1} = -0,2649f_s^3 + 1,3206f_s^2 - 1,7597f_s + 0,7613 \quad (7.14)$$

La distribución de probabilidad de DLF_1 en torno a su valor medio, hallado para una frecuencia f_s en particular, se obtiene multiplicando el valor medio por una variable aleatoria MF con distribución de probabilidad normal con valor medio $\mu_{MF} = 1$ y desvío estándar $\sigma_{MF} = 0.16$.

Los valores de DLF adoptados para el segundo, tercer y cuarto armónico están basados en el trabajo de Kerr (1998) y al igual que el quinto armónico, obtenido de las mediciones realizadas en Brownjohn *et al.* (2004), son independientes de la frecuencia del paso f_s y todos provienen de una distribución de probabilidad normal cuyo valores medios y desvíos estándar se presentan en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3: Definición $DLFs$ armónicos 2 a 5.

Armónico	Valor medio	Desvío estándar
2	0.07	0.03
3	0.05	0.02
4	0.05	0.02
5	0.03	0.015

- $DLFs$ para sub-armónicos:

Los valores de $DLFs$ para cada uno de los cinco sub-armónicos están dados en función del valor de DLF_1 y son expresados según los resultados obtenidos de un ajuste lineal. Las expresiones de los $DLFs$ para cada sub-armónico son:

$$\begin{aligned}
 DLF_1^S &= 0,026DLF_1 + 0,0031 \\
 DLF_2^S &= 0,074DLF_1 + 0,01 \\
 DLF_3^S &= 0,012DLF_1 + 0,016 \\
 DLF_4^S &= 0,013DLF_1 + 0,0093 \\
 DLF_5^S &= 0,015DLF_1 + 0,0072
 \end{aligned}
 \tag{7.15}$$

- Peso de los peatones:

El modelo considera un valor medio del peso de los peatones igual a 750 N dado que no se cuenta con la suficiente información estadística como para relacionar el peso a los valores de DLF .

La fuerza inducida por un peatón no es un proceso perfectamente periódico. Los factores que representan la variabilidad en el caminar humano de una misma persona en un reco-

rido determinado pueden ser representados mediante pequeños cambios en la frecuencia del paso y en la amplitud de cada uno de los mismos. Estos factores son tenidos en cuenta a través de la representación de la fuerza en el dominio de la frecuencia. Para ello, el modelo presenta un espectro de amplitud normalizada para cada uno de los cinco armónicos y sub-armónicos. La amplitud normalizada del espectro en función de la frecuencia para cada armónico se representa a través de la siguiente ecuación:

$$\overline{DLF}_i(\bar{f}_j) = a_{i,1} \exp\left(-\left(\frac{\bar{f}_j - b_{i,1}}{c_{i,1}}\right)^2\right) + a_{i,2} \exp\left(-\left(\frac{\bar{f}_j - b_{i,2}}{c_{i,2}}\right)^2\right) + a_{i,3} \exp\left(-\left(\frac{\bar{f}_j - b_{i,3}}{c_{i,3}}\right)^2\right) \quad (7.16)$$

en donde $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ y $c_{i,k}$ ($k = 1, 2, 3$) son parámetros de ajuste, \bar{f}_j es la relación entre la frecuencia considerada y la frecuencia del paso f_s y pertenece al intervalo $[i - 0,25; i + 0,25]$ con un paso de frecuencia de $1/80$ para cada armónico i . Los parámetros de ajuste se presentan en la Tabla 7.4.

Tabla 7.4: Ajuste del espectro. Componentes armónicos.

Parámetro	1	2	3	4	5
$a_{i,1}$	0.785200	0.513000	0.390800	0.325500	0.280600
$b_{i,1}$	0.999900	2.000000	3.000000	4.000000	4.999000
$c_{i,1}$	0.008314	0.011050	0.009560	0.008797	0.007939
$a_{i,2}$	0.020600	0.133000	0.156700	0.164700	0.158400
$b_{i,2}$	1.034000	1.957000	3.000000	4.001000	5.004000
$c_{i,2}$	0.252400	0.263200	0.055250	0.066410	0.078250
$a_{i,3}$	0.107400	-0.049840	0.068660	0.068880	0.072890
$b_{i,3}$	1.001000	1.882000	2.957000	3.991000	4.987000
$c_{i,3}$	0.036530	0.058070	0.560700	0.375000	0.450100

La amplitud normalizada del espectro en función de la frecuencia para cada sub-armónico se representa a través de la siguiente ecuación:

$$\overline{DLF}_i^S(\bar{f}_j^S) = a_{i,1}^S \exp\left(-\left(\frac{\bar{f}_j^S - b_{i,1}^S}{c_{i,1}^S}\right)^2\right) + a_{i,2}^S \exp\left(-\left(\frac{\bar{f}_j^S - b_{i,2}^S}{c_{i,2}^S}\right)^2\right) \quad (7.17)$$

en donde $a_{i,k}$ y $b_{i,k}$ ($k = 1, 2$) son parámetros de ajuste, \bar{f}_j^S es la relación entre la frecuencia considerada y la frecuencia del paso f_s y pertenece al intervalo $[i - 0,75; i - 0,25]$ con un paso de $1/80$ para cada sub-armónico i . Los parámetros de ajuste se presentan en la Tabla 7.5.

Tabla 7.5: Ajuste del espectro. Componentes sub-armónicos.

Parámetro	1	2	3	4	5
$a_{i,1}^S$	0.340600	0.302400	0.262700	0.234400	0.264500
$b_{i,1}^S$	0.498800	1.500000	2.500000	3.501000	4.499000
$c_{i,1}^S$	0.008337	0.008735	0.009748	0.009898	0.010190
$a_{i,2}^S$	0.280300	0.134500	0.245600	0.235500	0.238900
$b_{i,2}^S$	1.133000	1.532000	0.231200	-1.576000	1.153000
$c_{i,2}^S$	0.638800	0.723300	2.932000	7.050000	4.561000

La reproducción de la fuerza en el dominio del tiempo se realiza a través del Método de Representación Espectral (SRM, Subsección 3.2.2.3) utilizando los espectros normalizados presentados previamente, Figura 7.10. El armónico i , el cual tiene una frecuencia if_s , la fuerza puede reconstruirse en el dominio del tiempo a través de la siguiente formula:

$$F_i(t) = P \times DLF_i \times \sum_{\bar{f}_j=i-0,25}^{\bar{f}_j=i+0,25} \overline{DLF}_i(\bar{f}_j) \cos(2\pi\bar{f}_j f_s t + \theta(\bar{f}_j)) \quad (7.18)$$

mientras que el sub-armónico i , la fuerza en el dominio del tiempo puede representarse través de

$$F_i^S(t) = P \times DLF_i^S \times \sum_{\bar{f}_j^S=i-0,75}^{\bar{f}_j^S=i-0,25} \overline{DLF}_i^S(\bar{f}_j^S) \cos(2\pi\bar{f}_j^S f_s t + \theta(\bar{f}_j^S)) \quad (7.19)$$

en donde i es el armónico o sub-armónico considerado, $\bar{f}_j f_s$ es sub-división del espectro dentro del armónico o sub-armónico analizado y $\theta(\bar{f}_j)$ es el ángulo de fase asignado a cada sub-división. El mismo proviene de una distribución uniforme entre $[-\pi, \pi]$. La fuerza total fluctuante se halla como la suma de las contribuciones los cinco armónicos y sub-armónicos:

$$F(t) = \sum_{i=1}^5 F_i(t) + \sum_{i=1}^5 F_i^S(t) \quad (7.20)$$

En la Figura 7.11, se muestra la comparación entre el espectro obtenido de un registro experimental presentado en Živanović *et al.* (2007) y el espectro obtenido a partir de la Transformada de Fourier de la función de correlación de un registro simulado mediante el método presentado en esta sección. En color violeta, se detallan los componentes

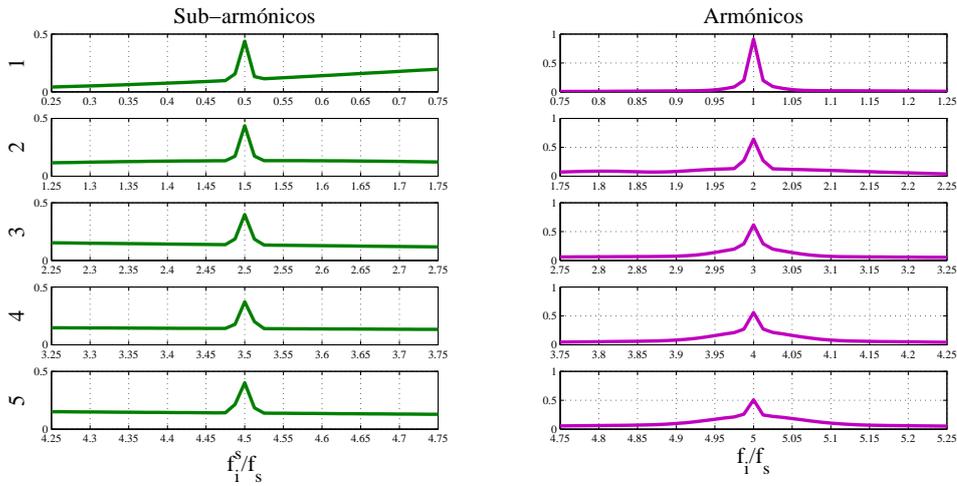
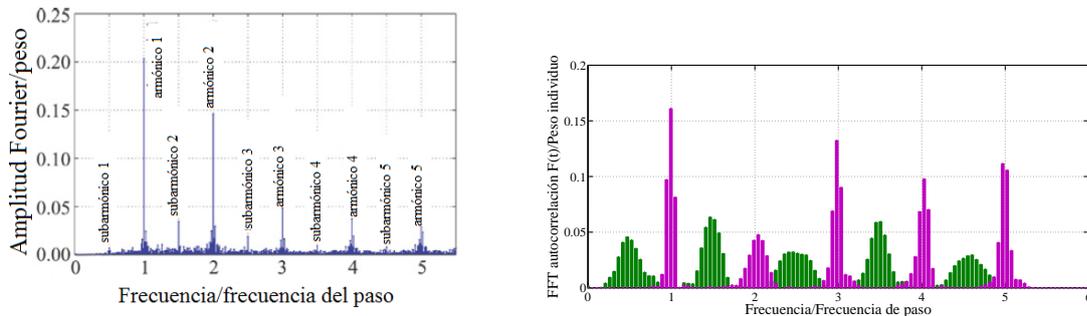


Figura 7.10: Espectro normalizado, Živanović *et al.* (2007).

armónicos del espectro mientras que en verde, los componentes sub-armónicos. En cada realización del proceso estocástico, se obtiene un espectro distinto en cuanto a la intensidad de sus componentes debido a la característica aleatoria de los Factores de Carga Dinámicos (*DLFs*).



(a) Espectro experimental Živanović *et al.* (2007).

(b) Espectro simulado en el presente estudio.

Figura 7.11: Comparación de espectros.

En la Figura 7.12, se muestra el resultado de la aplicación del modelo de carga estocástica, para el puente peatonal con vigas de 16 láminas y 7 % de amortiguamiento modal en el primer modo. En este ejemplo, la frecuencia del paso f_s se ha seleccionado de manera tal de ser múltiplo de la frecuencia natural del puente, al igual que en los modelos determinísticos. Este hecho sumado a la característica aleatoria de los Factores de Carga Dinámicos (*DLFs*) hacen que este modelo exhiba un mayor rango de variación

y valores máximos superiores respecto a los modelos determinísticos. Sin embargo, en la sección siguiente, veremos que la probabilidad de que la frecuencia del paso f_s sea un múltiplo directo de la frecuencia natural del puente es muy reducida, por lo menos para la estructura presentada en este capítulo.

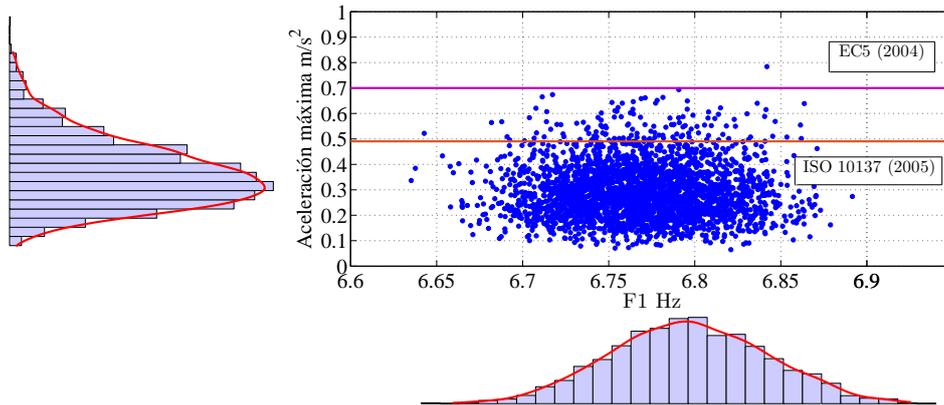


Figura 7.12: Aceleraciones máximas del puente halladas con modelo de carga estocástica $if_s = F_1$.

7.4.3. Tránsito de múltiples peatones

Una situación de carga más real se puede reproducir al considerar la posibilidad de tránsito de múltiples peatones. Para esto, es necesario representar el tiempo de arribo de los transeúntes el cual es aleatorio y suele ser simulado mediante un proceso de Poisson. El proceso de Poisson tiene dos representaciones que son diferentes en su concepción pero resultan equivalentes (Rubinstein 2007). La primera de ellas considera al proceso como un contador de acontecimientos en donde N_t es el número de arribos en un intervalo $[0, t]$. La segunda caracterización, la cual es empleada en esta sección, considera el tiempo entre arribos A_i . En este caso, los tiempos entre arribos N_t siguen una distribución exponencial de parámetro λ y se pueden simular como $A_i = -(1/\lambda) \ln \bar{U}_i$ en donde los valores \bar{U}_i tienen una distribución uniforme entre $[0, 1]$. Usando esta segunda caracterización del proceso se generan los tiempos de arribo $T_i = A_1 + \dots + A_i$ durante el intervalo $[0, T]$.

El tiempo total de análisis considerado para el arribo de peatones T es igual a 30s y la velocidad media de arribos λ es igual a 0.2 peatones/segundo lo que equivale al arribo de 1 peatón cada 5 segundos. El estudio dinámico se realiza hasta que el último

peatón que ingresa al puente peatonal finaliza su recorrido. La velocidad media de arribos λ fue obtenida con el fin de garantizar una densidad baja de peatones acorde con las dimensiones y el uso de la estructura presentada en este Capítulo. Esta densidad baja se logra para valores menores a 0.6 peatones/ m^2 (Schlaich, 2005). Para estos valores de densidad de ocupación, las personas son capaces de transitar libremente manteniendo las características de su caminata (frecuencia, longitud del paso, etc.). Para densidades de ocupación mayores, los peatones ya no son capaces de caminar libremente con su frecuencia del paso y velocidad, y más aún la sincronización del movimiento de peatones puede ocurrir en combinación con el movimiento del puente. Cuando la densidad de peatones se

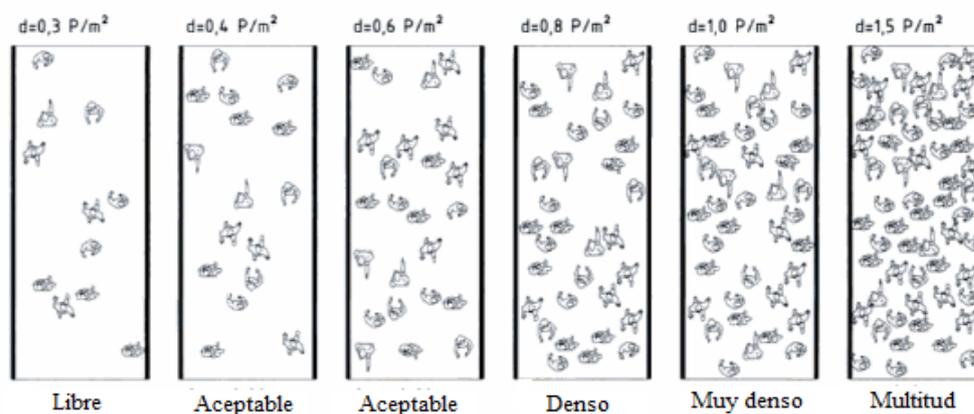


Figura 7.13: Diferentes niveles de densidad de peatones en puentes peatonales, Schlaich (2005).

vuelve alta, las características modales de la estructura pueden verse alteradas debido a un incremento considerable en la masa y en el amortiguamiento (Schlaich, 2005), lo cual no se considera en este estudio porque el mismo está acotado a niveles bajos de densidad de ocupación de la estructura. En la Figura 7.13, se muestran distintos niveles de densidad de peatones. En este Capítulo, debido a la velocidad media de arribos establecido en el proceso de Poisson, se trabaja con niveles de densidad menores a 0.6 peatones/ m^2 .

En el modelo de carga estocástica, se considera un peso medio de los peatones de 750 N. Sin embargo en esta sección para representar la carga de múltiples peatones se utilizará para determinar el peso de cada uno de ellos una variable aleatoria con distribución de probabilidad uniforme que varía entre 650 y 850 N.

De igual manera que en los modelos de carga determinísticos, el mayor efecto sobre la estructura se produce cuando la frecuencia del paso resulta ser un múltiplo directo de la

frecuencia fundamental del puente peatonal. En la Figura 7.14, se presenta la comparación entre la PDF y CDF de la aceleración máxima a_{max} para el caso del tránsito de una persona y de múltiples peatones considerando además la posibilidad o no de sincronización de un múltiplo de la frecuencia del paso f_s con la frecuencia fundamental de la estructura. Al existir la sincronización, resultan valores mayores de aceleración, como es de esperarse. Sin embargo, es de interés conocer cuál es la probabilidad cierta de que un múltiplo de la frecuencia del paso coincida con la frecuencia fundamental de vibración. Para ello, es necesario comparar en primer lugar la distribución de probabilidad de la frecuencia del paso (distribución normal, $\mu_{f_s} = 1.87$ Hz y $\sigma_{f_s} = 0.186$ Hz) con la distribución de probabilidad de la frecuencia fundamental del puente para determinar la probabilidad de que if_s se encuentre contenida dentro del rango de F_1 . Los valores máximos de probabilidad que se obtienen son 0.159 y 0.096 para el cuarto sub-armónico y armónico, respectivamente. Luego, a estas probabilidades hay que afectarlas por la probabilidad de que $if_s = F_1$ con lo cual la consideración general de que f_s sea independiente de F_1 parece ser la opción más real cuando no se trata de estructuras cuya esbeltez y comportamiento dinámico puedan llegar a modificar las características del caminar humano ni de condiciones de alta densidad de tránsito peatonal.

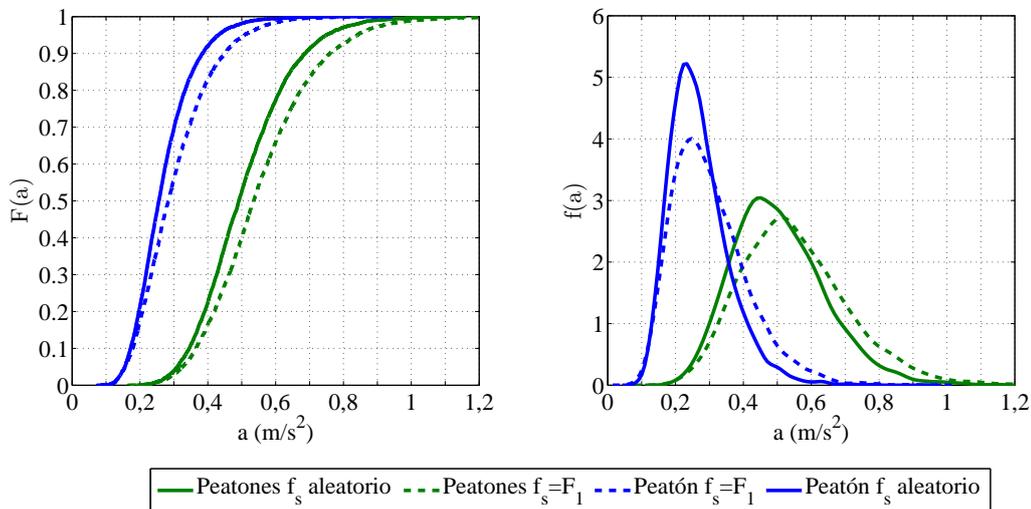


Figura 7.14: Influencia de la sincronización $if_s = F_1$, peatón individual (azul) y múltiples peatones (verde).

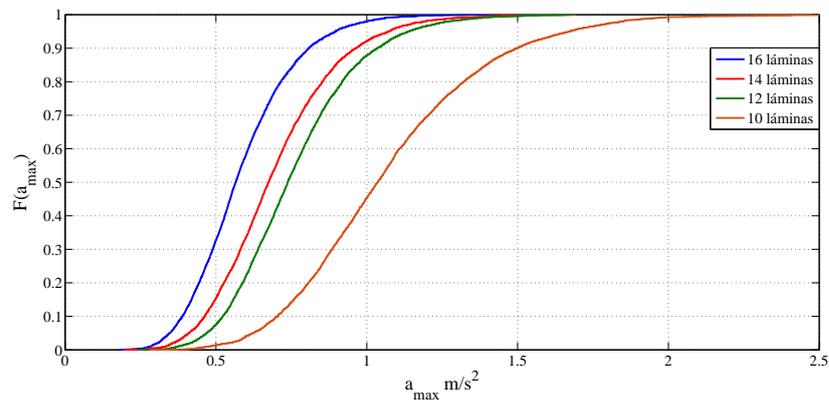
A continuación, se considera la posibilidad de que el puente peatonal esté compuesto por 10, 12, 14 y 16 láminas con el objetivo de estudiar como influyen estos cambios en la

Tabla 7.6: Resultados de la comparación entre los resultados producto de carga de peatones sincronizados y no sincronizados.

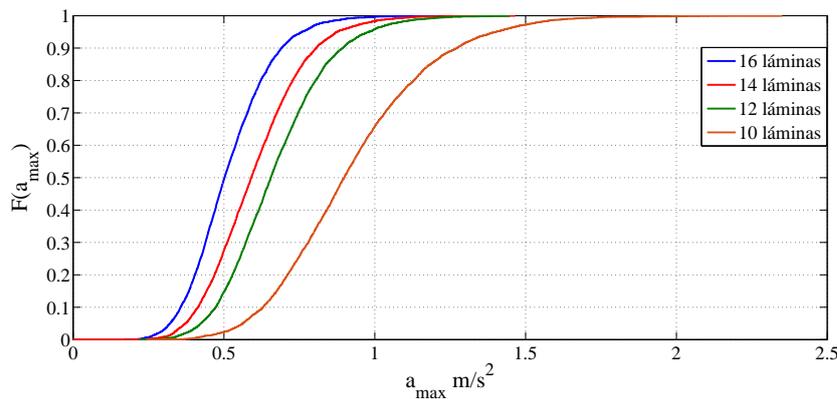
Valores estadísticos	Peatón		Múltiples peatones	
	f_s (no sincronizados)	$if_s = F_s$ (sincronizados)	f_s	$if_s = F_s$
$\mu(a_{max})$	0.269	0.301	0.506	0.553
$\sigma(a_{max})$	0.087	0.110	0.136	0.159
COV	0.32	0.36	0.26	0.29

configuración general del puente en las aceleraciones máximas obtenidas. Al modificar la cantidad de láminas de las vigas, se modifica la frecuencia fundamental de la estructura y por lo tanto, el nivel de carga a la cual la misma está expuesta. En la Figura 7.15, se presentan las CDF de la aceleración máxima a_{max} para un amortiguamiento de 5 % (Figura 7.15(a)) y de 7 % (Figura 7.15(b)). De igual modo, en la Tabla 7.7, se presenta un resumen de los valores estadísticos obtenidos. Como puede observarse en la figura, el mayor salto en la aceleración máxima se produce cuando las vigas están formadas por 10 láminas. Esto se debe al cambio en la relación entre la frecuencia fundamental de la estructura y la frecuencia del paso de los peatones F_1/f_s . Para estudiar este efecto, se estudiaron las condiciones en las cuales se produjeron los valores de aceleración máxima en términos de cantidad de peatones presentes sobre la estructura al momento de producirse la misma y de la frecuencia del paso. Si bien, como se ha mencionado antes, la frecuencia del paso es independiente de la frecuencia fundamental de la estructura, la relación entre las mismas F_1/f_s puede caer en una zona del espectro de fuerza influenciada por un determinado Factor de Carga Dinámico (DLF) y esto es un indicador del nivel de carga al cual se encontraba expuesta la estructura al producirse la aceleración máxima. El espectro de la carga estocástica está compuesto por zonas para cada armónico y sub-armónico, $[i - 0,25, i + 0,25)$ y $[i - 0,75, i - 0,25)$, respectivamente, en donde i es el orden del armónico considerado. A la vez cada Factor de Carga Dinámico (DLF) tiene una distribución de probabilidad. En la Tabla 7.8, se incluye un resumen de los valores de la relación F_1/f_s computados para los peatones presentes en los momentos en que se producen las aceleraciones máximas en cada una de las 5000 simulaciones. En rojo y en azul se resaltan los dos valores más altos, la relación entre estos y los valores medios de los $DLFs$ dan una idea del nivel de carga aplicado a la estructura por cada peatón. Puede observarse que para los casos con 12, 14 y 16 láminas, los niveles de carga son similares

pero las diferencias radican en que en el caso de 12 láminas también hay influencia del segundo armónico en comparación con los otros dos casos, mientras que entre los casos con 14 y 16 láminas, la diferencia se observa en un mayor valor de carga en el tercer armónico en el primer caso.



(a) Amortiguamiento 5 %.



(b) Amortiguamiento 7 %.

Figura 7.15: Influencia de la cantidad de láminas.

En lo que sigue de la sección, se analizarán las condiciones en las cuales se producen las aceleraciones máximas en términos de la cantidad de peatones presentes cuando las mismas se producen y la frecuencia del paso de los mismos. En la Figura 7.16, se muestra uno de los registros obtenidos, en la parte inferior del gráfico en color verde se señalan los arribos de peatones y en rojo en la parte superior el momento en el cual los mismos abandonan el puente peatonal. En el ejemplo presentado, han circulado por el puente peatonal 8 peatones obteniéndose la aceleración máxima cuando se encontraban sobre el puente de forma simultánea, los peatones 1 y 2. En el gráfico además se observa que los

Tabla 7.7: Resumen de resultados variando la cantidad de láminas de las vigas.

Valores estadísticos	16 láminas		14 láminas		12 láminas		10 láminas	
	5 %	7 %	5 %	7 %	5 %	7 %	5 %	7 %
$\mu(a_{max})$	0.586	0.517	0.698	0.603	0.762	0.671	1.074	0.927
$\sigma(a_{max})$	0.168	0.135	0.202	0.158	0.207	0.170	0.321	0.257
COV	0.28	0.26	0.28	0.26	0.27	0.25	0.29	0.27

Tabla 7.8: Influencia de la relación entre f_s y F_1 . Cantidad de frecuencias en cada rango para peatones involucrados en el caso de las aceleraciones máximas.

Armónico/ Sub-armónico	Láminas				μ_{DLF}
	10	12	14	16	
s1	0	0	0	0	0.012
1	0	0	0	0	0.35
s2	58	0	0	0	0.035
2	9280	442	0	0	0.070
s3	5325	8187	912	11	0.020
3	361	5953	8576	1930	0.050
s4	12	604	4760	7211	0.013
4	0	41	875	5047	0.050
s5	0	0	79	904	0.012
5	0	1	6	132	0.030

peatones 5, 6, 7 y 8 también estuvieron simultáneamente en la pasarela pero la aceleración producida por los mismos, si bien fue grande, no fue la mayor registrada. Esto se produce debido a la relación entre el peso de las peatones y las frecuencias del paso de los mismos, lo cual puede producir que determinados peatones produzcan mayores aceleraciones que otros.

En la Figura 7.17, se muestran los resultados obtenidos con vigas de 16 láminas y 5 % de amortiguamiento discretizados en relación a la cantidad de peatones presentes en el puente peatonal al momento de producirse la aceleración máxima en cada una de las 5000 simulaciones realizadas. Como puede observarse en la Figura 7.17(a), la situación que más se repite es aquella en la cual se encuentran sobre el puente peatonal 3 peatones de forma simultánea y con un valor medio de aceleración máxima para este caso muy

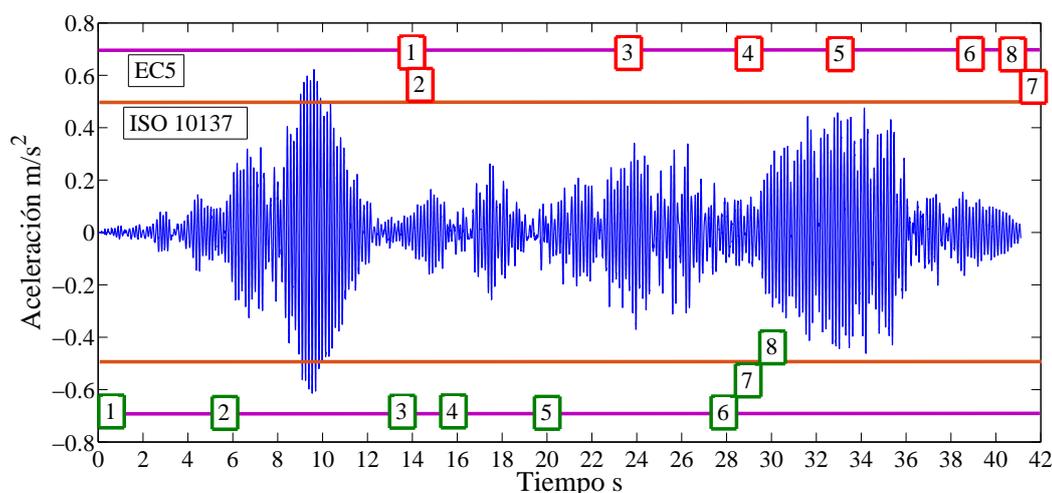
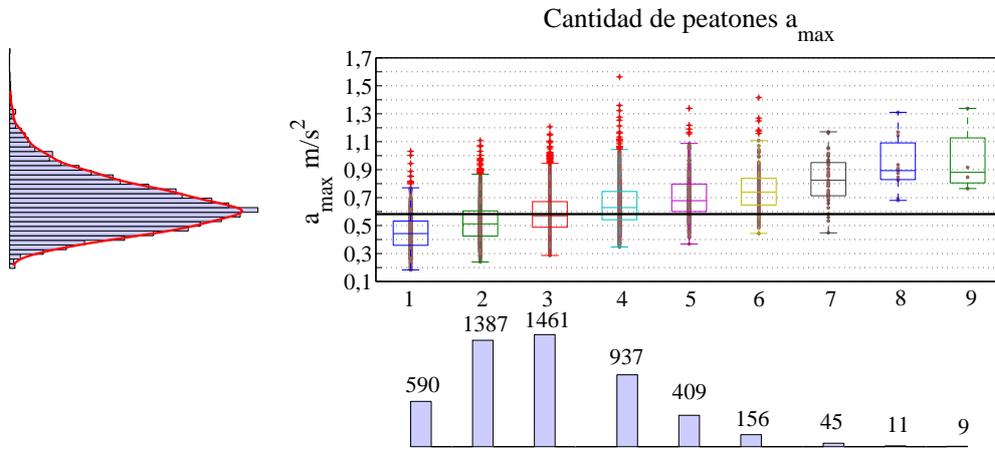


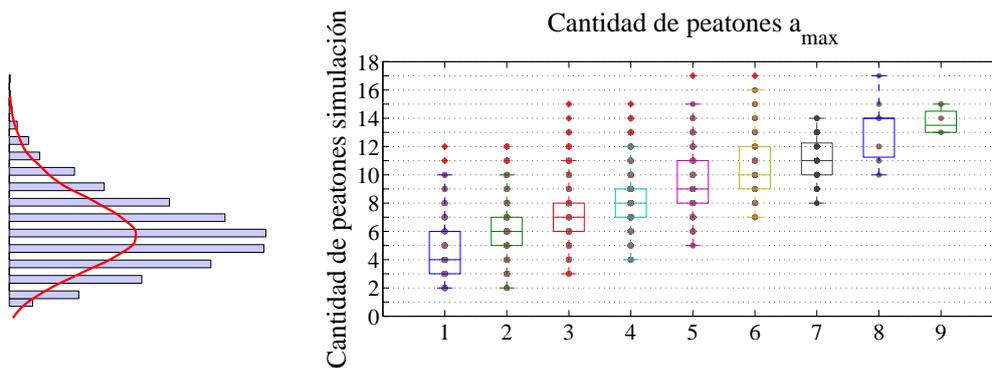
Figura 7.16: Registro de aceleraciones. Tránsito de múltiples peatones.

próximo al valor medio obtenido en forma global. En la Figura 7.17(b), se presenta la cantidad de peatones presentes en la aceleración máxima en relación a la cantidad total de peatones que atravesó el puente peatonal en la simulación correspondiente. La situación que más veces ocurrió fue aquella en la cual 6 peatones cruzan el puente durante el tiempo de análisis y en la aceleración máxima se encuentran simultáneamente 3 de ellos. En el gráfico también se observa que la aceleración máxima se produjo en una situación con 4 peatones sobre el puente en forma simultánea siendo que incluso existen casos de 8 y 9 peatones al momento de producirse la aceleración máxima. Esto indica que los valores máximos ocurren para determinadas configuraciones de peso y frecuencia del paso. Sin embargo, esto constituye un caso aislado y se observa, a través de los diagramas de caja, una tendencia de aumento de los valores medios de aceleración máxima para cada grupo a medida que aumentan los peatones involucrados al producirse la misma en cada registro. Comparando ambos gráficos, puede observarse la similitud entre los histogramas de cantidad de peatones totales, de aceleraciones máximas y de peatones presentes en la aceleración máxima. De hecho, que en la mayor cantidad de simulaciones estén presentes en el puente peatonal 3 peatones, se corresponde con los valores de mayor frecuencia del proceso de Poisson, que presenta en este caso un valor medio igual a $0.2 \text{ peatones/s} \times 30\text{s} = 6 \text{ peatones}$.

En la Figura 7.18, se presenta la cantidad de peatones presentes en el puente peatonal al producirse la aceleración máxima en función de la cantidad de láminas de las vigas



(a) Relación entre a_{max} y la cantidad de peatones al producirse a_{max} .



(b) Relación entre la cantidad de peatones totales y la cantidad de peatones al producirse a_{max} .

Figura 7.17: Condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas (a_{max}).

laminadas y del amortiguamiento (5 % gráfico izquierdo y 7 % gráfico derecho). Tal y como se ha mencionado previamente, los niveles de aceleración obtenidos son función de la relación entre las frecuencias por lo tanto la cantidad de peatones presentes al momento de producirse la aceleración máxima, prácticamente no varía en forma significativa al disminuirse la cantidad de láminas y varían muy poco con el amortiguamiento. Esto es debido a que el proceso estocástico de carga es el mismo y solo se modifica el nivel de carga al que se encuentra sometida la estructura al modificarse las frecuencias naturales del puente y por lo tanto su relación con las frecuencias de paso.

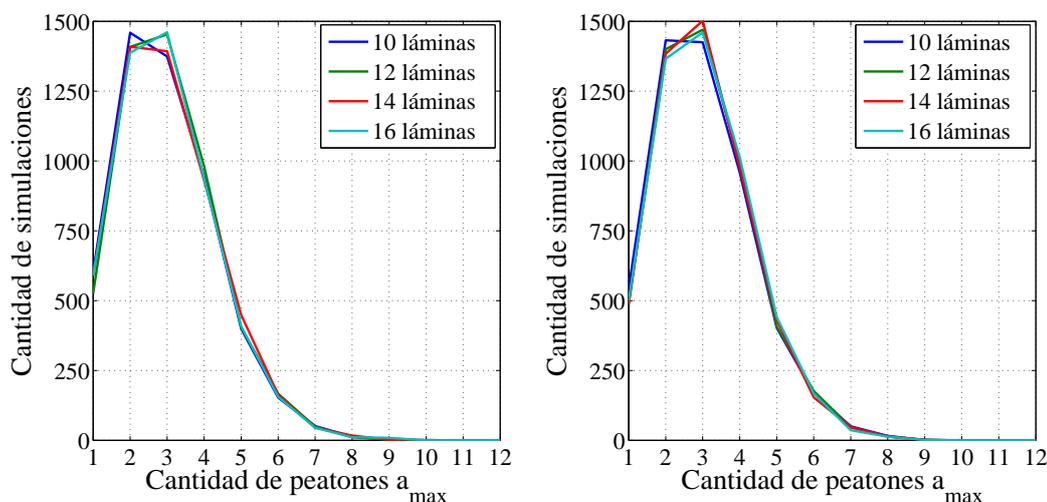


Figura 7.18: Cantidad de peatones al producirse a_{max} en función de la cantidad de láminas. Amortiguamiento 5 % izquierda y 7 % derecha.

En la Figura 7.19, se muestran los valores medios de las aceleración máxima (a_{max}) en función de la cantidad de peatones presentes en la pasarela cuando la misma se produce, la cantidad de láminas de las vigas y del amortiguamiento (5 % gráfico izquierdo y 7 % gráfico derecho). Como puede observarse, los niveles de aceleración son modificados por el amortiguamiento en cada grupo y se observa el salto descrito previamente en el caso de 10 láminas influenciado por la relación entre F_1 y f_s .

Previamente, en la Tabla 7.8, se mostró la influencia de la relación entre F_1 y f_s en la respuesta estructural al modificar la frecuencia natural del puente peatonal. En dicha tabla, se marcan los armónicos y sub-armónicos más influyentes para cada configuración. En la Figura 7.20, se grafica la cantidad promedio de peatones con frecuencias dentro de la zona de armónicos más influyentes (gráfico izquierdo) y dentro de la zona de sub-armónicos más influyentes (gráfico derecho) para un amortiguamiento de 5 % en función de la cantidad de peatones presentes durante la aceleración máxima. Del gráfico, se observa que la cantidad promedio de peatones con frecuencias de paso influyentes aumenta con la cantidad de peatones presentes al producirse la aceleración máxima lo que provoca mayores niveles de aceleración (Figura 7.19), o dicho de otro modo, las aceleraciones mayores resultaron con varios peatones durante la aceleración máxima con frecuencias en las zonas más influyentes para cada configuración. En los casos de 10 y 14 láminas, la influencia de las frecuencias dentro de la zona de los armónicos principales es mayor

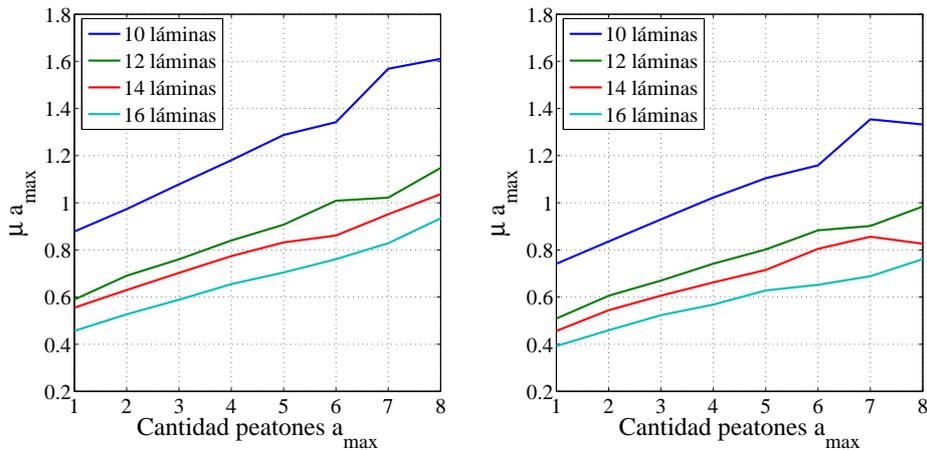


Figura 7.19: Valores medios de a_{max} en función de la cantidad de peatones al producirse a_{max} . Amortiguamiento 5% izquierda y 7% derecha.

que en los sub-armónicos mientras que en los casos de 12 y 16 tablas hay una mayor influencia de las frecuencias en zona de sub-armónicos, en concordancia con los resultados presentados en la Tabla 7.8. Esto último puede observarse al comparar las pendientes de las curvas, que, en algunos casos, son más pronunciadas en un gráfico que en otro.

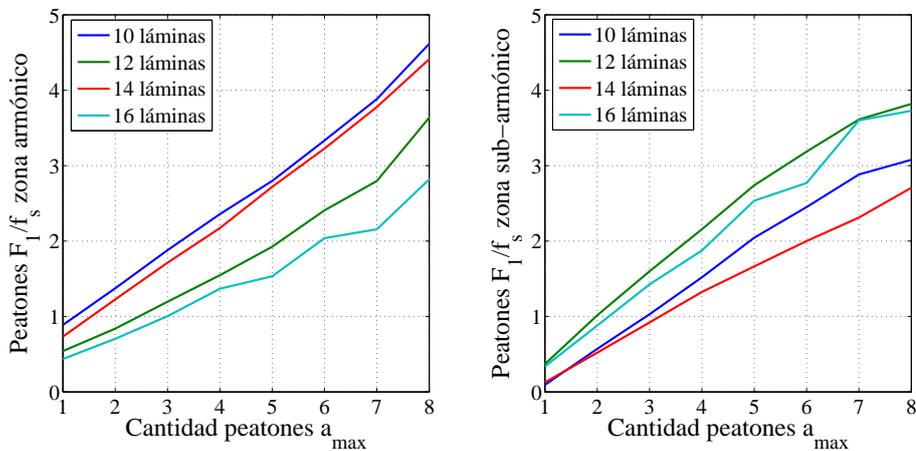


Figura 7.20: Cantidad promedio de peatones con f_s influyentes al producirse a_{max} . Componentes armónicos gráfico izquierdo y componentes sub-armónicos gráfico derecho. Amortiguamiento 5%.

En la Figura 7.21, se muestra la variación de la Función Densidad Acumulada (CDF) de las aceleraciones máximas ($F(a_{max})$) cuando se modifica la velocidad de arribo de peatones en el proceso de Poisson entre 0.10 y 0.30 peatones/s para el caso del puente peatonal

con vigas laminadas de 16 láminas y 7 % de amortiguamiento. Como puede observarse al aumentarse la velocidad de arribos, se obtienen aceleraciones mayores debido a un aumento en la cantidad de peatones. En la Tabla 7.9, se presentan los valores estadísticos hallados en donde, además del aumento del valor medio de a_{max} , también se reporta un crecimiento en su desvío estándar.

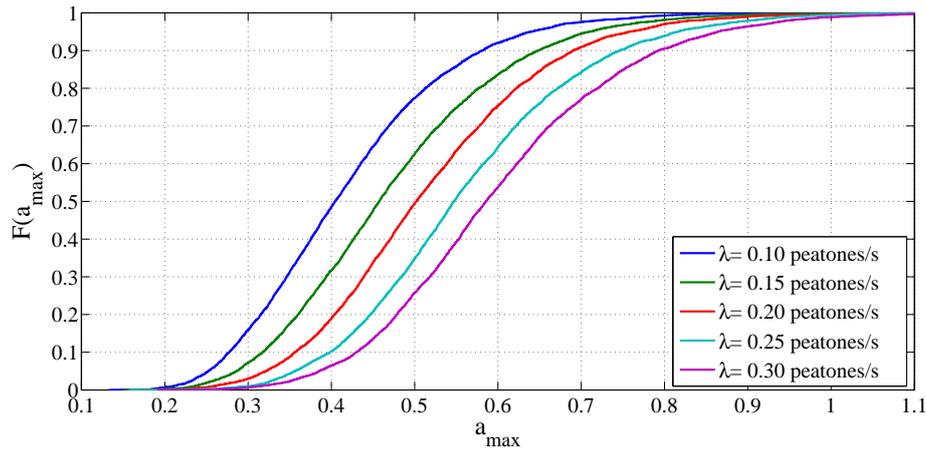
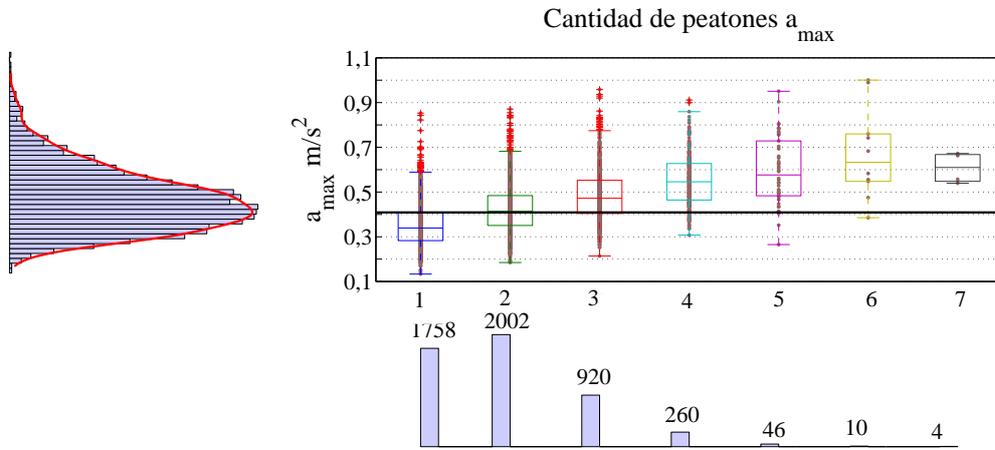


Figura 7.21: Influencia de la velocidad de arribo al puente peatonal en a_{max} .

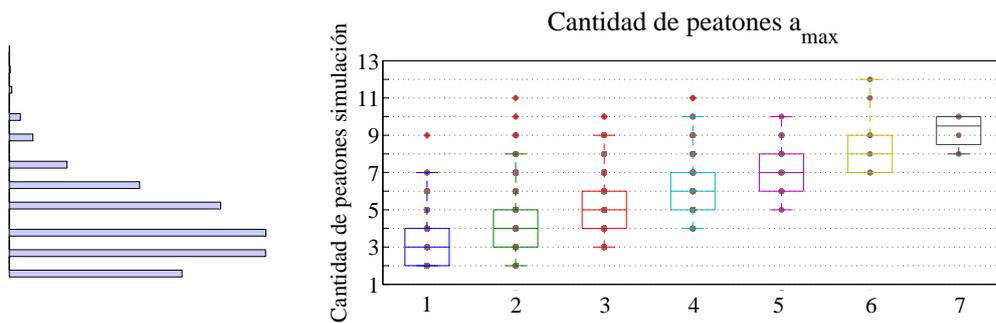
Tabla 7.9: Resumen de resultados del caso con variación de la velocidad de arribo de peatones al puente peatonal.

Valores estadísticos	Velocidad de arribo de peatones (peatones/s)				
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\mu(a_{max})$	0.419	0.472	0.517	0.563	0.601
$\sigma(a_{max})$	0.121	0.132	0.135	0.139	0.147
COV	0.28	0.27	0.26	0.24	0.24

En las Figuras 7.22-7.23, se muestran los resultados obtenidos para los casos extremos de 0.1 y 0.3 peatones/s. Como puede observarse en las Figuras 7.22(a) y 7.23(a), la forma de los histogramas de a_{max} se modifica asemejándose a los histogramas correspondientes a la cantidad de peatones en cada simulación (Figuras 7.22(b) y 7.23(b)). A medida que se aumenta la velocidad de arribos el proceso de Poisson, se aproxima a un proceso normal y se obtiene una distribución más simétrica de la cantidad de peatones involucrados en las aceleraciones máximas respecto al valor medio de la cantidad total de peatones simulados $0.3 \text{ peatones/s} \times 30 \text{ s} = 9 \text{ peatones}$. En la Figura 7.24, se muestra cómo se modifica la



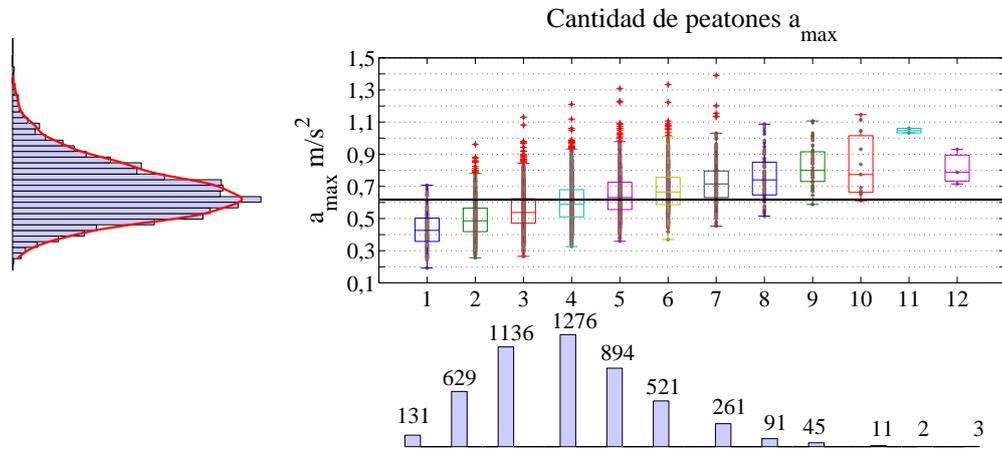
(a) Relación entre a_{max} y la cantidad de peatones al producirse a_{max} .



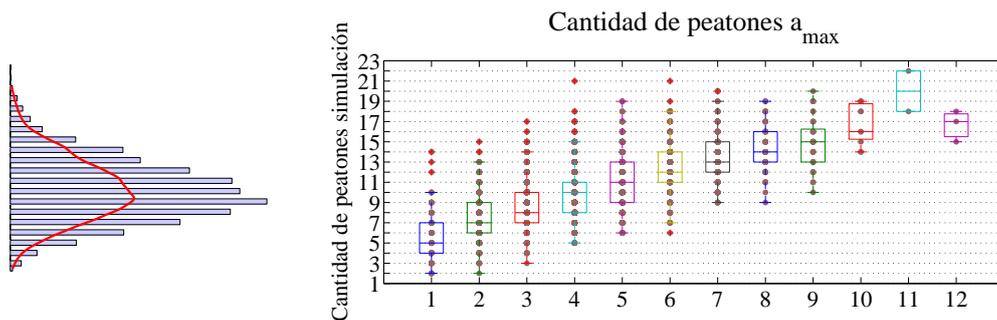
(b) Relación entre la cantidad de peatones totales y la cantidad de peatones al producirse a_{max} .

Figura 7.22: Condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas (a_{max}), $\lambda=0.1$ peatones/s.

cantidad de simulaciones obtenidas para cada cantidad de peatones presentes en el puente peatonal al producirse la aceleración máxima en función de la velocidad de arribo de los peatones. Como puede verse, la cantidad de peatones durante a_{max} copia el proceso de Poisson de arribos tendiendo a obtenerse una distribución más simétrica al aumentarse la velocidad de arribos. Esta modificación en la velocidad de arribos modifica los valores medios de a_{max} para cada valor de cantidad de peatones presentes cuando la misma se produce, Figura 7.25. Los valores medios en cada grupo aumentan con el aumento en la velocidad de arribo. Esto se produce debido al cambio en la distribución marginal de a_{max}



(a) Relación entre a_{max} y la cantidad de peatones al producirse a_{max} .



(b) Relación entre la cantidad de peatones totales y la cantidad de peatones al producirse a_{max} .

Figura 7.23: Condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas (a_{max}), $\lambda=0.3$ peatones/s.

para cada valor de peatones presentes cuando la misma se produce, lo cual también se observa comparando los diagramas de caja de las Figuras 7.22(a) y 7.23(a).

En la Figura 7.26, se muestra el contenido de frecuencias del paso f_s para cada valor de cantidad de peatones presentes en el puente peatonal al momento de producirse a_{max} , tanto para el armónico (4) como para el sub-armónico (s4) más influyente en la respuesta dinámica (gráfico de la izquierda y de la derecha, respectivamente). En la Tabla 7.8, se indicó que para la configuración de 16 láminas el componente de la fuerza con mayor

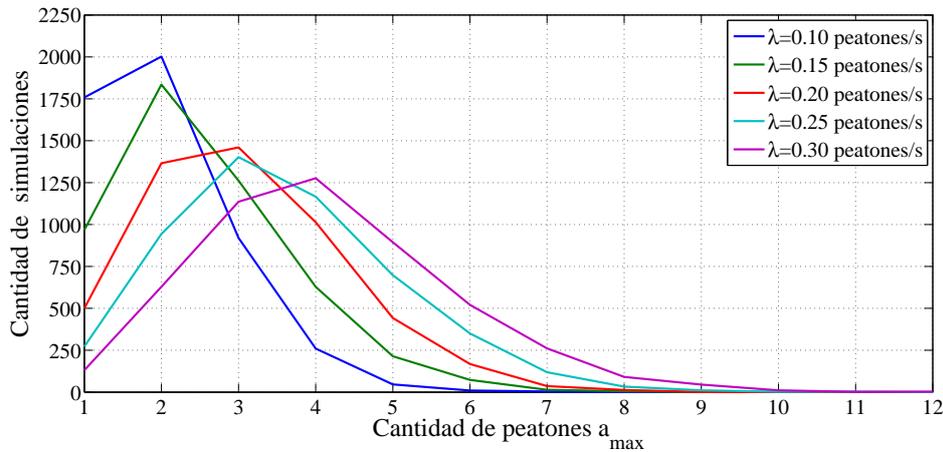


Figura 7.24: Cantidad de peatones al producirse a_{max} en función de la velocidad de arribos. Amortiguamiento 7 %.

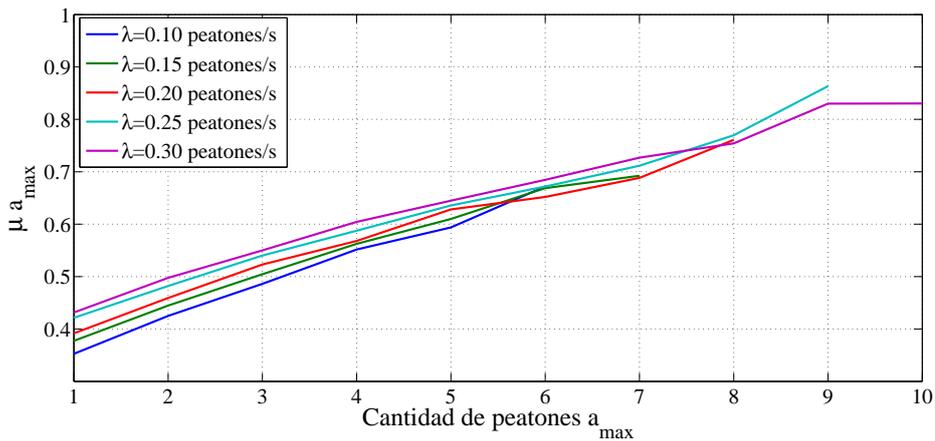


Figura 7.25: Valores medios de a_{max} en función de la cantidad de peatones al producirse a_{max} . Amortiguamiento 7 %.

incidencia debido a la relación F_1/f_s es el correspondiente al cuarto sub-armónico (s4), evidente en la mayor pendiente de los gráficos de la derecha que indican que, en promedio, hay una cantidad mayor de peatones con frecuencias en este rango al elevarse los valores de a_{max} y de peatones involucrados. También se puede apreciar que no existen diferencias sustanciales al modificarse la velocidad de arribo. Esto es debido a que, si bien hay un aumento de peatones, las frecuencias del paso introducidas al sistema y su relación con la frecuencia fundamental del puente, se mantienen ya que se siguen simulando partiendo de una misma distribución. El aumento de las aceleraciones se debe exclusivamente al

aumento de la carga inducido por una mayor velocidad de arribo.

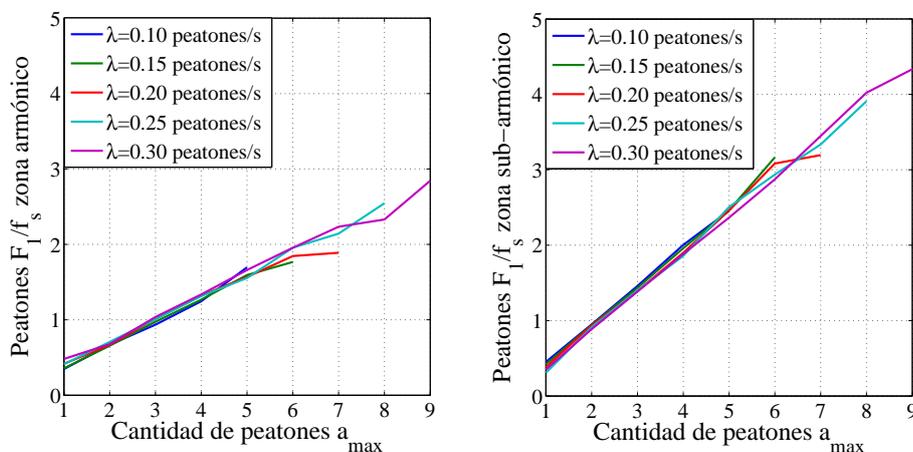


Figura 7.26: Cantidad promedio de peatones con f_s influyentes al producirse a_{max} . Componentes armónicos (gráfico izquierdo) y componentes sub-armónicos (gráfico derecho). Amortiguamiento 7%.

7.5. Conclusiones del estudio del comportamiento dinámico de puentes peatonales de madera

- El análisis estocástico permitió extender el rango de la respuesta partiendo de un modelo con propiedades materiales con valores medios. La influencia de las distancias entre uniones finger en las frecuencias naturales fue presentada partiendo de un modelo estadístico de dicho parámetro obtenido a partir del relevamiento visual de vigas laminadas de tamaño estructural. La variación en la rigidez y densidad efectiva a lo largo de las vigas producida por la unión de tablas con diferentes propiedades produce una disminución en el desvío estándar de las frecuencias naturales en comparación al caso donde las uniones finger no son consideradas, manteniéndose el valor medio en ambos casos igual y no siendo influenciado por el modelo de viga laminada.
- Dentro de los modelos de cargas determinísticos utilizados, el segundo de ellos que incluye el efecto del impacto del talón, conduce a los valores mayores de desplazamiento y aceleraciones. En comparación con puentes peatonales que presentan frecuencias naturales similares pero están construidos con distintos materiales, los

valores de aceleración obtenidos son significativos y los desplazamientos pequeños, esto se explica en la alta relación entre la rigidez y el peso que presenta el material.

- Si bien, un modelo de amortiguamiento proporcional a la rigidez fue utilizado, se ha verificado (mediante resultados no presentados) que la utilización de otro modelo (proporcional a la masa o proporcional a la rigidez y masa) no tiene influencia en la respuesta estructural para el caso analizado, debido a que la misma está gobernada por la contribución del primer modo de vibración.
- Utilizando los modelos determinísticos de carga, dos valores límites de aceleraciones máximas se han considerado para el estudio de los estados límites de servicio. En general, las aceleraciones máximas fueron mayores a los estados límites en aquellos casos en los cuales el cuarto armónico de la fuerza producida por los peatones coincidió con la frecuencia natural del puente peatonal. Utilizando el modelo de carga determinístico, el rango de variación de las frecuencias naturales es bastante superior al de las aceleraciones máximas. Para cierto rango de la frecuencia fundamental de vibración, la condición de excitación cambia y se obtienen valores grandes de aceleración. El análisis tradicional que considera solamente el modelo con propiedades medias podría ser inadecuado en la zona de frecuencias en las cuales el puente peatonal puede ser excitado por un caminar rápido o por un caminar normal. El análisis estocástico demuestra que la variabilidad en las propiedades del material pueden conducir a niveles de aceleraciones que no cumplen con el estado límite de servicio.
- Un modelo de carga estocástico que representa en forma más real el caminar humano ha sido implementado. A través del mismo se estudiaron las aceleraciones máximas producidas tanto por el tránsito de peatones individuales como por el tránsito de múltiples peatones simulando su arribo mediante un proceso de Poisson. El rango de aceleraciones máximas se incrementa respecto a los modelos determinísticos y aún en el caso en el que se considera la frecuencia del paso como múltiplo de la frecuencia fundamental del puente, los niveles de aceleración son menores a los obtenidos con el segundo modelo de carga determinística y más similares a los obtenidos al aplicar el primero de ellos.
- Al introducirse las frecuencias del paso en forma aleatoria, se determinó que la probabilidad de sincronización entre algún múltiplo de la frecuencia del paso y la frecuencia fundamental del puente peatonal es muy baja; por lo tanto, imponer esta condición puede sobrestimar los niveles de aceleración.

- A través del tránsito de múltiples peatones, se han estudiado las condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas al variar la rigidez de las vigas laminadas y la velocidad de arribo de los peatones. En ambos casos, se registra que los peatones presentes en el puente peatonal al producirse las aceleraciones máximas no siempre coincide con la mayor cantidad de peatones simulados debido a la influencia de las frecuencias del paso introducidas y del peso de los peatones. Los casos que más se repiten de cantidad de peatones simultáneos sobre la estructura al producirse las aceleraciones máximas en cada estudio, se corresponden aproximadamente con la mitad del valor medio de peatones esperados en cada tiempo de análisis introducidos por el proceso de Poisson de simulación de arribos y conducen a valores medios de aceleraciones máximas. En general, al variar la rigidez de las vigas, las aceleraciones máximas están controladas por la relación entre las frecuencias de los peatones y la frecuencia fundamental del puente mientras que al aumentar la velocidad de arribo las aceleraciones máximas están controladas por la variación en la cantidad de peatones.

Capítulo 8

Conclusiones y sugerencias de trabajos futuros

8.1. Resumen

La presente investigación se ha centrado en el desarrollo de modelos numérico-estocásticos que permitan representar la variabilidad de las propiedades del material en elementos estructurales de madera de *Eucalyptus grandis*. Luego, se ha estudiado el comportamiento estático y dinámico de piezas estructurales con propiedades físicas y mecánicas modeladas de forma estocástica. En una primera instancia, se consideraron elementos estructurales simples (vigas y columnas) y finalmente una estructura sometida a cargas dinámicas. Particularmente, en el caso del Módulo de Elasticidad (MOE), la variabilidad longitudinal del mismo en elementos estructurales fue representada a través de tres modelos, a saber: modelo con perfiles de rigidez continuos, modelo de parámetros discretos (obtenido como un caso de discretización del anterior) y modelo de zonas de débiles. Los modelos han sido implementados en el estudio de propagación de las incertidumbres consideradas en las propiedades materiales en problemas estáticos (deflexiones y pandeo) y dinámicos (vibraciones libres y forzadas). La descripción de la metodología empleada en el desarrollo de los modelos ha sido descrita y la respuesta de los mismos en cada uno de los problemas abordados fue analizada en detalle. La validación de los resultados provistos por los modelos computacionales respaldan su aplicabilidad y las ventajas de su implementación en la búsqueda de una respuesta estructural más cercana a la obtenida en resultados experimentales, demostrándose de esta forma que el desarrollo de

los modelos presentados en la presente tesis ofrece una importante contribución técnica en el campo de la modelización de elementos estructurales de *Eucalyptus grandis*.

Los ensayos experimentales en vigas y tablas han permitido validar y confirmar las suposiciones de los modelos estocásticos de variabilidad longitudinal del MOE y de amortiguamiento. La relación entre los defectos relevados (nudos y presencia de médula) y los valores de MOE obtenidos mediante ensayos estáticos a lo largo de cada tabla y viga ha sido estudiada. Se han desarrollado ensayos dinámicos en tablas y vigas con el primer objetivo de la obtención de la frecuencia fundamental de vibración, la cual es empleada en el cálculo del MOE dinámico y su posterior comparación con los valores obtenidos del ensayo estático. Los registros de aceleración obtenidos para la determinación de la frecuencia fundamental de vibración también han sido empleados para la medición de coeficientes de amortiguamiento a través del método del decremento logarítmico.

Finalmente, se ha presentado el estudio del comportamiento dinámico vertical de un puente peatonal sometido a las cargas inducidas por el tránsito de peatones. La finalidad de este capítulo fue el estudio de las condiciones de servicio. El modelo estructural está constituido por elementos estructurales con propiedades físicas, mecánicas y geométricas (por ejemplo, distancia entre uniones finger en vigas laminadas) inciertas. En una primera instancia, se ha estudiado la propagación de las incertidumbres presentes en estos parámetros en las vibraciones libres de la estructura. Luego, se ha estudiado la respuesta dinámica de la misma al ser excitada por cargas peatonales. Para el modelado de las mismas, se han utilizado dos modelos determinísticos, el modelo clásico presentado en los códigos de diseño estructural y un modelo que incluye el efecto del golpe del talón al caminar. Además, se ha empleado un modelo de carga estocásticas el cual simula de forma más cercana a la real, las cargas inducidas por el caminar humano. El tránsito de múltiples peatones fue simulado a través de un proceso de Poisson con velocidades de arribo establecidas de forma tal de mantener una densidad de ocupación de la estructura media tendiendo a baja permitiendo el tránsito libre de los peatones. La influencia en la respuesta dinámica de los valores de amortiguamiento considerados, la velocidad de arribo de los peatones y la rigidez de las vigas laminadas ha sido estudiada. Asimismo, se han determinado las condiciones de tránsito peatonal bajo las cuales se producen las máximas aceleraciones.

Estos estudios se han realizado de forma integra a través de la implementación del modelado estocástico y numérico del material y de los elementos estructurales en códigos

propios desarrollados dentro del entorno del programa MATLAB (2011).

8.2. Aportes y conclusiones

La principal contribución de la presente investigación es el desarrollo de modelos numérico-estocásticos aplicables al estudio del comportamiento estructural de piezas de *Eucalyptus grandis*. A continuación se presentan en forma sintética las observaciones y aportes realizados a través de la aplicación de los mismos y de los estudios adicionales realizados.

8.2.1. Modelado estocástico de las propiedades del material

- Las propiedades del material se han modelado de forma estocástica llegando a los siguientes resultados:
 - La distribución de probabilidad gamma resulta la más adecuada para el modelado estocástico del MOE.
 - Las distribuciones de probabilidad gamma y lognormal resultan las más adecuadas para el modelado estocástico de la densidad de masa.
- Los modelos estocásticos con variabilidad longitudinal del MOE muestran una mejora en la predicción de la respuesta estructural observada en resultados experimentales en relación a la suposición de propiedades constantes.
- La Expansión no Gaussiana de Karhunen-Loève (NGKL) no ha sido empleada aún en el modelado estocástico de piezas de madera y resulta en ventajas computacionales.
- El modelado de la variabilidad longitudinal del MOE a través de un modelo de parámetro discretos utilizando la Transformación de Nataf (NT) y la técnica de discretización del punto medio constituyen la forma de aplicación más práctica de los tres modelos presentados en la tesis. Se han determinado los tamaños de los elementos discretizantes para tres dimensiones de vigas aserradas empleadas frecuentemente. Tomando estas relaciones, la metodología puede extenderse a longitudes no consideradas en la presente investigación.
- El modelo de zonas débiles introduce los nudos de forma individual logrando una simulación más precisa de su posición dentro la sección y a lo largo de las piezas. El

mismo permite la simulación de las tres clases resistentes del material (sin considerar la presencia de médula). Al haber sido los nudos relevados de piezas que presentan las mayores dimensiones obtenibles, es posible extender el modelo a elementos estructurales con menores dimensiones. La comparación del modelo de zonas débiles propuestos con el modelo de zonas débiles con equi-correlación presentado por otros autores muestra que el primero resulta en una mayor predicción de los resultados experimentales en los casos evaluados en la presente tesis.

- La validación de los modelos con resultados experimentales obtenidos de piezas estructurales constituyen un soporte para la eventual extensión de los resultados presentados en esta investigación tanto al estudio del comportamiento estático como dinámico de piezas del material.

8.2.2. Propagación de incertidumbres en el comportamiento estructural de vigas y columnas

Los modelos estocásticos desarrollados han sido implementados en el estudio del comportamiento estructural de piezas de *Eucalyptus grandis* en los puntos descritos a continuación.

8.2.2.1. Deflexiones en vigas

- La aplicación de la teoría de Euler-Bernoulli con sus propiedades materiales correspondientes, la determinación de una distribución de probabilidad marginal del MOE y el establecimiento de una estructura de correlación adecuada son los factores que contribuyen a lograr un aumento en la predicción de las deflexiones respecto del modelo con MOE constante.
- El valor del parámetro longitud de correlación para un nivel de cargas de servicio obtenido de vigas de especies coníferas mostró ser aplicable a elementos de *Eucalyptus grandis*.
- Cuando la variabilidad longitudinal del MOE es considerada, la probabilidad de exceder los límites de serviciabilidad es menor en comparación con el uso de un valor constante del MOE a lo largo de la longitud de la viga. Esta suposición es cierta para valores bajos de Probabilidad de Falla (PF). De acuerdo a los resultados obtenidos a través del modelo con variabilidad longitudinal del MOE, para obtener

una probabilidad de falla de 5 %, el modelo con un valor constante del MOE debería ser empleado considerando el percentil 10 % de la distribución de probabilidad del MOE. Este es un punto importante relacionado con el diseño por Estados Límites de Servicio (SLS) de elementos de madera de *Eucalyptus grandis* el cual ha sido además demostrado para los tipos de cargas más usuales.

- De las curvas de fragilidad de las vigas ensayadas se observa que para valores grandes de PF, la probabilidad de exceder el límite de serviciabilidad es mayor para un modelo que considera la variabilidad longitudinal del MOE. Las muestras empleadas en este estudio alcanzan altas probabilidades de exceder el límite de serviciabilidad mucho antes de que se presenten las fallas por resistencia a flexión. Esto tiene una injerencia importante en el diseño estructural de elementos tipo vigas los cuales están más condicionados por los Estados Límites de Servicio (SLS) que por los Estados Límites Últimos (ULS).

8.2.2.2. Vibraciones forzadas en vigas

- Del análisis de los resultados del estudio de disipación de energía, surge que a pesar del hecho de que la energía potencial total es dominada por la contribución de los mecanismos de flexión, existen casos en los que la disipación de energía debida a mecanismos de corte es mayor.
- La variabilidad longitudinal del MOE produce una disminución del rango de frecuencias naturales en relación al modelo con MOE homogéneo. Lo cual tiene influencia en la consideración de los desplazamientos de vigas con frecuencias naturales contenidas en las zonas que cambian de condición de un modelo a otro. Dentro de la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF), para una frecuencia determinada, la influencia del modelado del MOE, como variable aleatoria o como campo aleatorio, en los desplazamientos es similar a la resultante en el estudio de deflexiones.
- Existe una baja influencia del modelado estocástico del amortiguamiento en los desplazamientos. Las diferencias entre el modelado determinístico o estocástico del amortiguamiento se observan en la zona de frecuencias de resonancia para valores de desplazamiento con probabilidades bajas de ser superados. Por lo tanto, la consideración de un valor medio de dicho parámetro resulta aceptable para la evaluación de la respuesta estructural.

8.2.2.3. Vibraciones libres en vigas y pandeo de columnas

- Se realizó el estudio de las CDFs de las diferencias porcentuales respecto de valores de referencia de frecuencias naturales y cargas de pandeo de piezas de alta calidad. En los casos analizados, existen altas probabilidades de obtener frecuencias naturales con una diferencia porcentual de hasta un 30 % menor y cargas de pandeo con una diferencia porcentual de hasta un 40 % menor respecto de los valores de referencia, mostrando de esta forma el rango de la respuesta estructural de ambos problemas.
- El efecto del campo aleatorio del segundo momento de área es despreciable en comparación con la variabilidad de las demás propiedades mecánicas introducidas por el modelo de Zonas Débiles. Consecuentemente, la presencia de nudos es más importante en relación a la variabilidad del MOE que en la variación del segundo momento de área. La adición de la incertidumbre introducida por la densidad de masa incrementa el rango de la respuesta y modifica ligeramente la forma de las PDFs y CDFs encontradas para el campo aleatorio de la rigidez a flexión.
- Se analizaron las formas modales tanto en vibraciones libres como en pandeo. La estocasticidad del modelo, deriva en un proceso estocástico parametrizado por la posición, en ambos problemas. La función de valor medio permanece igual en ambos problemas y no es influenciada por los parámetros estocásticos del modelo. Mientras que, la función de desvío estándar cambia su forma de un problema a otro. En general, la función de desvío estándar incrementa sus valores desde la primera a la tercera frecuencia natural o carga de pandeo y también debido a la adición de incertidumbres en los parámetros físicos y mecánicos del modelo.

8.2.3. Ensayos experimentales

Ensayos estáticos variabilidad longitudinal del MOE:

- En las tablas, el MOE presenta un mayor rango de variación en las zonas libres de defectos, considerando los resultados de forma individual, y si bien los resultados globales muestran una mayor dispersión, dentro de cada pieza la variabilidad de resultados es más reducida, indicando la existencia de una estructura de correlación.
- La presencia de nudos en la zona de momentos constante del ensayo ha sido claramente la más influyente con valores del MOE por debajo del valor medio global. Los

ensayos con nudos solamente en zona de corte muestran resultados más dispersos. En las tablas ensayadas, no se reporta la presencia de médula.

- Los valores altos del índice de nudosidad empleado muestran una mayor correlación con los valores bajos del MOE. Para valores bajos de dicho índice, la correlación con el MOE se reduce y se acentúa aún más este comportamiento en las zonas libres de defectos.
- El estudio de los resultados del MOE global en vigas muestra una tendencia más marcada de disminución del mismo al aumentar el valor del índice de nudosidad. En las vigas predominan los ensayos con nudos en ambas zonas de corte y de momento constituyendo esta configuración la que conduce a los valores mas bajos del MOE. En los demás casos de tipos de nudosidad el MOE se mantuvo cercano o por encima del valor medio global. En muchas de las piezas, los valores del MOE por debajo del valor medio global, no solo se debieron al efecto de los nudos sino que también a la presencia de médula.
- El estudio de la correlación entre los valores del MOE obtenidos a lo largo de las tablas y vigas muestra un grado de correlación mayor en tablas. La aplicación del método utilizado para el estudio de estructura de correlación ratifica la adopción de una función de correlación exponencial. Los valores de longitud de correlación hallados de los ensayos de vigas son similares a los reportados en los trabajos de referencia y que fueron además ajustados en el estudio de deflexiones de la presente tesis. El grado de correlación mayor en los resultados experimentales de variabilidad longitudinal del MOE en tablas se tradujo en un valor mayor de longitud de correlación respecto al obtenido en vigas. Esto hace que la consideración de propiedades constantes en las tablas que forman vigas laminadas (generalmente de menor longitud que las ensayadas) sea aplicable al estudio de sistemas estructurales.

Ensayos dinámicos:

- Los ensayos dinámicos en vigas y tablas han sido llevados a cabo con el fin de comparar los valores del MOE obtenidos en forma estática con los valores del MOE procedentes de los resultados del ensayo dinámico. En general, se obtuvo una buena correlación entre los valores del MOE obtenidos por ambos métodos y un valor medio mayor en el MOE dinámico.
- Se han determinado valores del coeficiente de amortiguamiento reportándose el aumento del mismo al disminuir la longitud de la viga y aumentar la frecuencia natural

de las piezas. De igual manera, al aumentar la frecuencia natural de los elementos ensayados se produce un aumento del coeficiente de variación (COV) del amortiguamiento. Estas tendencias se deben al efecto de la deformación por corte. Los valores del coeficiente de amortiguamiento son próximos a los presentados en el trabajo de referencia los cuales fueron utilizados en el estudio de vibraciones forzadas de la presente tesis.

8.2.4. Puente peatonal

- La variación en la rigidez y densidad efectiva a lo largo de las vigas producida por la unión de tablas con diferentes propiedades produce una disminución en el desvío estándar de las frecuencias naturales en comparación al caso en el cual las uniones finger no son consideradas manteniéndose el valor medio en ambos casos iguales.
- Los valores de aceleración obtenidos son significativos ($>0.5 \text{ m/s}^2$) y los desplazamientos pequeños ($L/360 \gg$). Esto se explica en la alta relación entre la rigidez y el peso que presenta el material.
- El análisis tradicional que considera solamente el modelo con propiedades medias podría ser inadecuado en la zona de frecuencias en las cuales el puente peatonal puede ser excitado por un caminar rápido o por un caminar normal. El análisis estocástico demuestra que la variabilidad en las propiedades del material pueden conducir a niveles de aceleración que no cumplen con el estado límite de servicio impuesto.
- A través del modelo de carga estocástica, el rango de aceleraciones máximas se incrementa respecto a los modelos determinísticos y aún en el caso en el que se considera la frecuencia de paso como múltiplo de la frecuencia fundamental del puente, los niveles de aceleración son menores a los hallados con el segundo modelo de carga determinística (impacto del talón) y más similares a los obtenidos al aplicar el primero de ellos el cual es considerado en los lineamientos de diseño.
- Al introducirse las frecuencias de paso en forma aleatoria, se determinó que la probabilidad de sincronización entre algún múltiplo de la frecuencia de paso y la frecuencia fundamental del puente peatonal es muy baja. Por lo tanto, imponer esta condición al diseño de este tipo de estructuras puede sobrestimar los niveles de aceleración.
- A través del tránsito de múltiples peatones, se han estudiado las condiciones en las que se producen las aceleraciones máximas al variar la rigidez de las vigas laminadas

y la velocidad de arribo de los mismos. En ambos casos, se registra que los peatones presentes en el puente peatonal al producirse las aceleraciones máximas no siempre coinciden con la mayor cantidad de peatones simultáneos en cada simulación debido a la influencia de las frecuencias de paso introducidas y del peso de los peatones. Los casos que más se repiten de cantidad de peatones simultáneos sobre la estructura al producirse las aceleraciones máximas en cada estudio, se corresponden aproximadamente con la mitad del valor medio de peatones esperados en cada tiempo de análisis introducidos por el proceso de Poisson de simulación de arribos y conducen a valores medios de aceleraciones máximas. En general, al variar la rigidez de las vigas, las aceleraciones máximas están controladas por la relación entre las frecuencias de los peatones y la frecuencia fundamental del puente, sin modificarse las condiciones de tránsito en las cuales se producen las aceleraciones máximas. Mientras que al aumentar la velocidad de arribo, las aceleraciones máximas están controladas por la variación en la cantidad de peatones modificándose en este caso las condiciones de tránsito en las cuales se producen las aceleraciones máximas debido al cambio en el proceso de arribos.

- Los resultados presentados en el estudio de las condiciones bajo las cuales se producen las aceleraciones máximas tienen el potencial de ser aplicados a la verificación de puentes peatonales, de baja densidad de ocupación, cuando las condiciones de diseño requieren la realización de estudios dinámicos para la evaluación de las condiciones de servicio. En particular, es posible elegir la cantidad de peatones necesarias y las frecuencias de paso aplicables para la verificación de la estructura y de esta manera lograr un diseño con determinado nivel de confiabilidad en relación al nivel de aceleraciones máximas obtenibles.

8.2.5. Aportes generales de la tesis

En resumen, los principales aportes del trabajo de tesis desarrollado se pueden sintetizar en los siguientes tres puntos:

- Se desarrollaron, implementaron y validaron (con resultados experimentales existentes) modelos numérico-estocásticos de piezas estructurales de *Eucalyptus grandis* que mejoran la predicción de la respuesta estructural en condiciones de servicio y son aplicables a estudios estáticos y dinámicos.

- Se validó con resultados experimentales propias suposiciones previas relevantes establecidas en el desarrollo de los modelos (por ej.: correlación y amortiguamiento).
- Se aplicó el modelado numérico-estocástico del material a una estructura peatonal con propiedades materiales aleatorias y cargas estocásticas.

8.3. Sugerencias de trabajos futuros

Sobre el modelado estocástico de las propiedades del material

- Extender los modelos estocásticos desarrollados para piezas aserradas a elementos estructurales laminados para el estudio del comportamiento estructural de este tipo de piezas.
- Partiendo del modelo de zonas débiles desarrollar un modelo estocástico de la variabilidad de la resistencia a flexión aplicable al estudio de la capacidad de carga estática en vigas.
- Combinar el modelado estocástico de nudos con el modelado numérico a través de softwares comerciales de elementos finitos que permitan emplear modelos materiales más sofisticados para el estudio de la influencia de nudos individuales o agrupamientos de los mismos en una escala menor de estudio.
- Desarrollar un modelo estocástico de amortiguamiento partiendo de los datos experimentales obtenidos en la presente investigación.

Sobre ensayos experimentales en elementos estructurales

- Determinar la variabilidad longitudinal del MOE global en vigas aserradas y laminadas.
- Determinar la variabilidad longitudinal del MOE mediante ensayos con cargas constantes y deslizando las piezas de manera tal de obtener registros continuos de deformaciones.
- Estudiar la influencia del contenido de humedad en el amortiguamiento.
- Estudiar el amortiguamiento de piezas laminadas.
- Estudiar la influencia de las uniones en la disipación de energía.

Sobre puentes peatonales

- Introducir modelos de carga que incluyan la interacción entre el peatón y la estructura. Los mismos consideran la adición de masa y amortiguamiento al sistema por parte de los peatones.
- Desarrollar la posibilidad de verificación de resultados numéricos en estructuras físicas reales.
- Evaluar experimentalmente el amortiguamiento en un puente peatonal real.
- Extender los estudios realizados a otras configuraciones de puentes considerando además la posibilidad de mayores densidades de ocupación.
- Extender los modelos presentados al estudio de vibraciones laterales y acoples.
- Obtener un modelo de orden reducido a través del Método de Descomposición Ortogonal Propia (POD) (Bases de Karhunen-Loève).

Bibliografía

Ang AHS, Tang W (2007) Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering. John Wiley and Sons, New York.

Argüelles Álvarez R, Arriaga Martitegui F, Martínez Calleja J (2000) Estructuras de madera. Diseño y cálculo. Asociación de Investigación Técnica de las Industrias de Madera AITIM, Madrid.

ASTM D 198 (2002) Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes. American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, United States.

ASTM D 2915 (2002) Standard practice for evaluating allowable properties for grades of structural lumber. American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, United States.

Baño V, Santos J, Vivas J, Rodriguez S, Vega A, Crews K (2011) A study of the influence of different types of timber footbridges on the natural frequency of vibration. In: Proceedings 17th international nondestructive testing and evaluation of wood symposium.

Baño V, Arriaga F, Guaita M (2013) Determination of the influence of size and position of knots on load capacity and stress distribution in timber beams of *Pinus sylvestris* using finite element model. *Biosystems Engineering* 114(3):214–222.

Barbero EJ (2010) Introduction to composite materials design. CRC press.

Bathe KJ (1982) Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, New Jersey.

Benjamin RJ, Cornell CA (1970) Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers. McGraw-Hill, New York.

- Brandner R (2012) Stochastic system actions and effects in engineered timber products and structures. PhD thesis, Graz University of Technology.
- Brandner R, Schickhofer G (2015) Probabilistic models for the modulus of elasticity and shear in serial and parallel acting timber elements. *Wood Sci Technol* 49(1):121–146.
- Brenner C, Bucher C (1995) A contribution to the SFE-based reliability assessment of non linear structures under dynamic loading. *Prob Eng Mech* 10(4):265–273.
- Brownjohn JM, Pavic A, Omenzetter P (2004) A spectral density approach for modelling continuous vertical forces on pedestrian structures due to walking. *Canadian Journal of Civil Engineering* 31(1):65–77.
- Bulleit WM, Chapman RA (2004) Characterization of the correlation structure of lumber strength properties. *Wood science and technology* 38(4):285–296.
- Cantieni R, Pietrzko S (1993) Modal testing of a wooden footbridge using random excitation. In: *Proceedings 11th International Modal Analysis Conference*.
- Caprani CC, Ahmadi E (2016) Formulation of human–structure interaction system models for vertical vibration. *Journal of Sound and Vibration* 377:346–367.
- Cetrangolo G, Rodriguez S, Rodríguez A, Baño V (2015) Influence of boundary conditions on the natural frequencies and damping of timber beams of sweet chestnut. *Construction and Building Materials* 94(1):613–619.
- Chopra A (1995) *Dynamics of structures*. Prentice Hall, New Jersey.
- CIRSOC 601 (2013) *Proyecto de Reglamento Argentino de Estructuras de Madera*. Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI)- Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles (CIRSOC), Buenos Aires.
- Clough RW, Penzien J (1975) *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, New York.
- Coronel O (1994) *Fundamentos de las propiedades físicas y mecánicas de las maderas*. Parte 1: fundamentos de las propiedades físicas de las maderas. Instituto de Tecnología de la Madera, Facultad de Ciencias Forestales, Universidad Nacional de Santiago del Estero.

- Czmoch I (1998) Influence of structural timber variability on reliability and damage tolerance of timber beams. PhD thesis, Luleå Tekniska Universitet, Luleå.
- Da Silva J, Vellasco P, De Andrade S, De Lima L, Figueiredo F (2007) Vibration analysis of footbridges due to vertical human loads. *Computers & Structures* 85(21):1693–1703.
- Deodatis G, Shinozuka M (1991) The weighted integral method, ii: response variability and reliability. *J Eng Mech* 117(8):1865–1877.
- Der Kiureghian A, Ke JB (1988) The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Eng Mech* 3(2):83–91.
- Der Kiureghian A, Liu PL (1986) Structural reliability under incomplete probability information. *J Eng Mech-ASCE* 112:85–104.
- Ditlevsen O, Madsen HO (1996) *Structural reliability methods*. Wiley, Chichester.
- EN 338 (2009) *Structural timber. Strength classes; German version*. European Committee for Standardization (CEN). DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin.
- EN 384 (1996) *Structural timber. Determination of characteristic values of mechanical properties and density (In Spanish)*. AENOR-Asociación Española de Normalización y Certificación, Madrid.
- EN 408 (1996) *Timber structures. Structural timber and glued laminated timber. Determination of some physical and mechanical properties (In Spanish)*. AENOR-Asociación Española de Normalización y Certificación, Madrid.
- EN 408 (2003) *Timber structures. Structural timber and glued laminated timber. Determination of some physical and mechanical properties*. European Committee for Standardization, Bruselas.
- EUROCODE 5 (2004) *Design of timber structures. Part 2: Bridges*. European Committee for Standardization, London, UK.
- Faber MH, Köhler J, Sorensen JD (2004) Probabilistic modeling of graded timber material properties. *Structural safety* 26(3):295–309.
- Figueiredo F, Da Silva J, De Lima L, Vellasco P, De Andrade S (2008) A parametric study of composite footbridges under pedestrian walking loads. *Engineering Structures* 30(3):605–615.

- Fink G (2014) Influence of varying material properties on the load-bearing capacity of glued laminated timber. PhD thesis, ETH Zürich.
- Fink G, Frangi A, Kohler J (2015) Probabilistic approach for modelling the load-bearing capacity of glued laminated timber. *Engineering Structures* 100:751–762.
- Foschi RO, Barrett JD (1980) Glued-laminated beam strength: a model. *Journal of the Structural Division* 106(8):1735–1754.
- FprEN 408 (2010) Timber structures. Structural timber and glued laminated timber. Determination of some physical and mechanical properties. European Committee for Standardization, Bruselas.
- García DA, Rosales MB (2016a) Deflections in sawn timber beams with stochastic properties. *European Journal of Wood and Wood Products* DOI 10.1007/s00107-016-1124-0.
- García DA, Sampaio R, Rosales MB (2016b) Vibrational problems of timber beams with knots considering uncertainties. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 38(8):2661–2673.
- García DA, Sampaio R, Rosales MB (2016c) Eigenproblems in timber structural elements with uncertain properties. *Wood Science and Technology* 50(4):807–832.
- Ghanem RG, Spanos PD (1991) *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer, New York.
- Glos P (1995) Strength grading. In *Timber Engineering STEP 1*, pp. A6/1–A6/8.. Centrum Hout, The Netherlands.
- Görlacher R (1984) Ein neues Meßverfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Holz. *Holz als Roh-und Werkstoff* 42(6):219–222.
- Guindos P, Guaita M (2014) The analytical influence of all types of knots on bending. *Wood Sci Technol* 48(3):533–552.
- Heinemeyer C, Feldmann M (2008) European design guide for footbridge vibration. *Proceedings of Footbridge 2008 Third International Conference*
- INTA (1995) *Manual para productores de eucaliptos de la Mesopotamia Argentina*. Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria, Grupo Forestal EEA Concordia, Argentina.

- IRAM 9662-2 (2006) Madera laminada encolada estructural. Clasificación visual de las tablas por resistencia. Parte 2 - Tablas de eucalipto grandis (*Eucalyptus grandis*). Instituto Argentino de Normalización y Certificación (IRAM), Buenos Aires.
- Isaksson T (1999) Modeling the variability of bending strength in structural timber: Length and load configuration effects. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund.
- ISO 10137 (2005) Bases for design of structures: Serviceability of buildings and pedestrian walkways against vibration. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland.
- Jaynes E (1957) Information theory and statistical mechanics. *The Physical Review* 106(4):620–630.
- Kandler G, Füssl J, Eberhardsteiner J (2015a) Stochastic finite element approaches for wood-based products: theoretical framework and review of methods. *Wood Sci Technol* 49(5):1055–1097.
- Kandler G, Füssl J, Serrano E, Eberhardsteiner J (2015b) Effective stiffness prediction of glt beams based on stiffness distributions of individual lamellas. *Wood Sci Technol* 49(6):1101–1121.
- Kapur JN (1993) Maximum-entropy models in science and engineering. Wiley, New York.
- Kerr S (1998) Human induced loading on staircases. PhD thesis, University of London.
- Kline DE, Woeste FE, Bendtsen B (1986) Stochastic model for modulus of elasticity of lumber. *Wood Fiber Sci* 18(2):228–238.
- Köhler J (2007) Reliability of timber structures. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.
- Köhler J, Sørensen JD, Faber MH (2007) Probabilistic modeling of timber structures. *Struct Saf* 29(4):255–267.
- Labonnote N, Rønnquist A, Malo KA (2013a) Experimental evaluations of material damping in timber beams of structural dimensions. *Wood science and technology* 47(5):1033–1050.

- Labonnote N, Rønquist A, Malo KA (2013b) Modified hysteretic damping model applied to timoshenko timber beams. *Computers & Structures* 121:22–31.
- Lam F, Varoğlu E (1991) Variation of tensile strength along the length of lumber. Part 2: Model development and verification. *Wood Sci Technol* 25(6):449–458.
- Leon-Garcia A (2008) Probability, statistics, and random processes for electrical engineering. Pearson/Prentice Hall.
- Li C, Der Kiureghian A (1993) Optimal discretization of random fields. *J Eng Mech* 119(6):1136–1154.
- Liu W, Belytschko T, Mani A (1986) Random field finite elements. *Int J Numer Meth Engng* 10(23):1831–1845.
- Lukacevic M, Füssl J (2014) Numerical simulation tool for wooden boards with a physically based approach to identify structural failure. *European Journal of Wood and Wood Products* 72(4):497–508.
- Manohar C, Iyengar R (1994) Free vibration analysis of stochastic strings. *J Sound Vib* 176(1):35–48.
- Mathworks (2011) MATLAB R2011b.
- Melchers RE (1999) Structural reliability: analysis and prediction. Wiley, New York.
- Mulani S (2006) Uncertainty quantification in dynamic problems with large uncertainties. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.
- Mulani S, Kapania R, Walters R (2007) Karhunen-Loève expansion of non-gaussian random process. 48 th AJAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.
- Nakao T, Okano T, Asano I (1985) Theoretical and experimental analysis of flexural vibration of the viscoelastic timoshenko beam. *Journal of applied mechanics* 52(3):728–731.
- Nataf A (1962) Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Académie des Sciences* 255:42–43.

- NDS (2005) National Design Specification for Wood Construction. American Forest & Paper Association (AF&PA) - American Wood Council (AWC).
- Phoon K, Huang S, Queck S (2002) Simulation of second-order processes using karhunen-loève expansion. *Computers and Structures* 80(12):1049–1060.
- Phoon K, Huang H, Queck S (2005) Simulation of strongly non gaussian processes using karhunen-loève expansion. *Prob Eng Mech* 20(2):188–198.
- Piter J (2003) Strength grading of sawn timber as structural material: development of a method for the Argentinean *Eucalyptus grandis* (In Spanish). PhD thesis, Universidad Nacional de la Plata, La Plata.
- Piter J (2013) Private Communication, *Eucalyptus grandis* samples bending test results. Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Concepción del Uruguay.
- Piter J, Zerbino R, Blaß H (2003) Relationship between global and local modulus of elasticity in beams of argentinean eucalyptus grandis. *Maderas Ciencia y Tecnología* 5(2):107–116.
- Piter J, Zerbino R, Blaß H (2004) Effectiveness of fundamental resonant frequency for determining the elastic properties of argentinean eucalyptus grandis in structural sizes. *Holz als Roh-und Werkstoff* 62(2):88–92.
- Piter J, Zerbino R, Blaß H (2004a) Visual strength grading of Argentinean *Eucalyptus grandis*. *Holz Roh Werkst* 62(1):1–8.
- Piter J, Zerbino R, Blaß H (2004b) Machine strength grading of argentinean eucalyptus grandis: Main grading parameters and analysis of strength profiles according to european standards. *Holz Roh Werkst* 62(1):9–15.
- Piter J, Cotrina A, Zitto MS, Stefani P, Torrán E (2007) Determination of characteristic strength and stiffness values in glued laminated beams of argentinean eucalyptus grandis according to european standards. *Holz als Roh-und Werkstoff* 65(4):261–266.
- Porteous J, Kermani A (2007) Structural timber design to Eurocode 5. John Wiley & Sons.
- Probabilistic Model Code (2006) Part 3: Resistance models. Properties of timber. Joint Committee on Structural Safety (JCSS). Technical University of Denmark.

- Racic V, Brownjohn JMW (2011) Stochastic model of near-periodic vertical loads due to humans walking. *Advanced Engineering Informatics* 25(2):259–275.
- Racic V, Pavic A, Brownjohn J (2009) Experimental identification and analytical modelling of human walking forces: Literature review. *Journal of Sound and Vibration* 326(1):1–49.
- Reddy JN (1993) *An introduction to the finite element method*, vol 2. McGraw-Hill, New York.
- Reddy JN (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- Riberholt H, Madsen PH (1979) *Strength Distribution of Timber Structures: Measured Variation of the Cross Sectional Strength of Structural Lumber*. Afdelingen for Barendes Konstruktioner, Danmarks Tekniske Hojskole.
- Richburg BA, Bender DA (1992) Localized tensile strength and modulus of elasticity of e-related laminating grades of lumber. *Wood and fiber science* 24(2):225–232.
- Rincón L (2007) *Curso intermedio de probabilidad*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Rubinstein RY, Kroese DP (2007) *Simulation and the Monte Carlo Method*, 2nd edn. Wiley, New Jersey.
- Sampaio R, De Queiroz Lima R (2012) *Stochastic modelling and generation of samples of random variables and vectors (In Portuguese)*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos, SP, Brasil.
- Saviana J, Zitto S, Piter JC (2009) Bending strength and stiffness of structural laminated veneer lumber manufactured from fast-growing argentinean eucalyptus grandis. *Maderas Ciencia y tecnología* 11(3):183–190.
- SBN 1980 (1981) *Swedish Building Code (In Swedish)*. National Swedish Board of Physical Planning and Building, Stockholm.
- Schlaich M (2005) *Guidelines for the design of footbridges: Guide to good practice*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL).

- Segundinho P (2010) Estudo das vibrações induzidas por pedestres em passarelas de madeira. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Shannon C (1948) A mathematical theory of communication. *Bell Sys Technol J* 27:379–423.
- Shin K, Hammond J (2008) *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. John Wiley & Sons.
- Shinozuka M, Deodatis G (1991) Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Appl Mech Rev* 44(4):191–204.
- Shinozuka M, Jan C (1972) Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of sound and vibration* 25(1):111–128.
- Sosa Zitto M, Köhler J, Piter J (2014) Load-carrying capacity of timber-to-timber joints of fast-growing argentinean eucalyptus grandis with nails of small diameter laterally loaded in double shear: analysis according to the criterion adopted by european standards. *European Journal of Wood and Wood Products* 72(1):21–31.
- Sudret B (2008) Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models. contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. PhD thesis, Université Blaise Pascal. École Doctorale Sciences pour l' Ingénieur.
- Sudret B, Der Kiureghian A (2000) *Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.
- Swanson SR (1998) Torsion of laminated rectangular rods. *Composite structures* 42(1):23–31.
- Taylor SE, Bender DA (1991) Stochastic model for localized tensile strength and modulus of elasticity in lumber. *Wood and fiber science* 23(4):501–519.
- Torrán E (2013) Private Communication, Visual survey of finger joint unions in *Eucalyptus grandis* laminated beams. Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Concepción del Uruguay.
- Torrán E, Zitto S, Cotrina A, Piter JC (2009) Bending strength and stiffness of poles of argentinean eucalyptus grandis. *Maderas Ciencia y tecnología* 11(1):71–84.

- Vanmarcke E (1998) Random fields: analysis and synthesis. MIT Press, Cambridge.
- Vanmarcke E, Grigoriu M (1983) Stochastic finite element analysis of simple beams. *J Eng Mech* 109(5):1203–1214.
- Venuti F, Racic V, Corbetta A (2016) Modelling framework for dynamic interaction between multiple pedestrians and vertical vibrations of footbridges. *Journal of Sound and Vibration* 379:245–263.
- Wang Y, Foschi R (1992) Random field stiffness properties and reliability of laminated wood beams. *Struct Saf* 11(3-4):191–202.
- Wang Y, Lam F, Barrett J (1995) Simulation of correlated modulus of elasticity and compressive strength of lumber with gain factor. *Probab Eng Mech* 10(2):63–71.
- Yamazaki F, Shinozuka M (1988) Digital generation of non-gaussian stochastic fields. *J Eng Mech* 114(7):1183–1197.
- Yeh CT, Hartz B, Brown C (1971) Damping sources in wood structures. *Journal of Sound and Vibration* 19(4):411–419.
- Zhang J, Ellingwood B (1994) Orthogonal series expansion of random fields in reliability analysis. *J Eng Mech* 120(12):2660–2677.
- Živanović S, Pavić A, Reynolds P (2005) Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. *Journal of sound and vibration* 279(1):1–74.
- Živanović S, Pavić A, Reynolds P (2007) Probability-based prediction of multi-mode vibration response to walking excitation. *Engineering Structures* 29(6):942–954.

Apéndice A

Apéndice: Enfoque estocástico

A.1. Pruebas de Bondad de Ajuste

A.1.1. Prueba de Kolmogórov-Smirnov (K-S)

La premisa básica de esta prueba consiste en comparar las frecuencias acumuladas experimentales con la CDF de la distribución teórica asumida. Si la diferencia máxima entre la frecuencia experimental y la teórica es mayor que la esperada para un determinado tamaño de la muestra, entonces la distribución acumulada no es aceptada. De manera contraria, si la diferencia es menor que un valor crítico determinado, la distribución teórica es aceptada para un nivel de significancia prescrito α .

Para realizar esta prueba en una muestra de tamaño n , se ordenan los datos en orden creciente. Luego se arma una función de frecuencias experimentales acumuladas, definida por tramos, de la siguiente manera:

$$S_n(x) \begin{cases} = 0 & x < x_1 \\ = \frac{k}{n} & x_k \leq x < x_{k+1} \\ = 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

en donde x_1, x_2, \dots, x_n son los valores observados dentro del conjunto de datos ordenados y n es el tamaño de la muestra. En esta prueba, la diferencia mayor entre $S_n(x)$ y $F_x(x)$ sobre todo el rango de x es la medida de discrepancia entre el modelo teórico asumido y

los datos observados. Esta diferencia máxima puede expresarse como:

$$D_n = \max_x |F_X(x) - S_n(x)|. \quad (\text{A.1})$$

Para un nivel de significancia α , la prueba K-S compara la diferencia máxima observada D_n con el valor crítico D_n^α el cual cumple que:

$$P(D_n \leq D_n^\alpha) = 1 - \alpha. \quad (\text{A.2})$$

Los valores críticos D_n^α para varios valores de α y tamaños de muestras se encuentran en Ang y Tang (2007) y en Benjamin y Cornell (1970). Si el valor obtenido de D_n es menor que el valor crítico D_n^α , la distribución teórica propuesta es aceptable para el nivel de significancia α . De no ser así, la distribución teórica asumida no es representativa del conjunto de datos.

La prueba de bondad de ajuste K-S tiene ciertas ventajas sobre el test chi-cuadrado. No es necesario dividir los datos observados en intervalos, por lo tanto no se presentan los problemas asociados con valores pequeños de frecuencias teóricas y/o con un reducido número de intervalos. Esta prueba además es más sensible a los valores cercanos a la mediana que a los extremos de la distribución.

A.1.2. Prueba de Anderson-Darling (A-D)

En la prueba K-S, la máxima diferencia entre las distribuciones teóricas y experimental muy pocas veces ocurre en las colas de las distribuciones. Por otro lado, en la prueba chi-cuadrado, las frecuencias empíricas de las colas se agrupan y las diferencias son pequeñas. Como resultado, ambas pruebas de bondad de ajuste no son eficientes para revelar las discrepancias entre la distribución empírica y la teórica en las colas de las distribuciones. La prueba Anderson-Darling (A-D) proporciona un mayor peso a los valores extremos ubicados en las colas de las distribuciones. Esto es importante en aquellos casos en los cuales las colas de las distribuciones teóricas son de importancia práctica. El procedimiento para aplicar la prueba A-D se describe en los siguientes pasos:

- Ordenar los datos observados en orden creciente: x_1, x_2, \dots, x_n .
- Obtener la CDF de la distribución teórica propuesta para cada uno de los valores observados. Esto es hallar $F_X(x_i)$ para los x_i $i = 1, 2, \dots, n$.

- Calcular el estadístico la prueba (A-D):

$$A^2 = - \sum_{i=1}^n \{(2i - 1) [\ln F_X(x_i) + \ln (1 - F_X(x_{N+1-i}))] / n\} - n. \quad (\text{A.3})$$

- Calcular el estadístico de prueba ajustado A^* el cual tiene en consideración el tamaño de la muestra n y la distribución teórica sobre la cual se realiza la prueba (Ang y Tang, 2007).
- Determinar el valor crítico c_α para un nivel de significancia α y para la distribución teórica seleccionada (Ang y Tang, 2007).
- Comparar A^* con el valor crítico c_α . Si A^* es menor que c_α la distribución teórica propuesta es aceptable para el nivel de significancia α .

Debido a que el estadístico de la prueba A-D se expresa en términos del logaritmo de las probabilidades, éste puede recibir una mayor contribución de las colas de una distribución.

A.2. Principio de Máxima Entropía (PME)

A.2.1. Variables aleatorias discretas

Para el caso de variables aleatorias discretas la medida de la incertidumbre de una variable aleatoria X se define a través de la siguiente expresión:

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i), \quad (\text{A.4})$$

en donde S es la entropía de la variable aleatoria y p_i es la probabilidad asociada a la variable aleatoria discreta X la cual puede asumir n valores diferentes. El objetivo del PME es determinar la función masa de probabilidad p de la variable aleatoria X , de manera tal que se maximice la Ecuación (A.4). Se desea determinar la función masa de probabilidad p de la variable aleatoria X , de manera tal que se cumpla la siguiente restricción:

$$p_1 + \cdots + p_n = 1, \quad \text{en donde} \quad p_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad (\text{A.5})$$

la cual constituye una condición necesaria para una función masa de probabilidad y además sujeta a m restricciones adicionales expresadas de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^m p_i g_{r,i}(x_1, \dots, x_n) = a_r \quad r = 1, \dots, m. \quad (\text{A.6})$$

En este caso, la maximización de la entropía S se encuentra sujeta a $m+1$ restricciones. Para descubrir la expresión de la función p que pertenece al espacio de las funciones que cumplen las restricciones ($p \in \mathcal{C}_{adm}$) que maximiza la entropía S (Ecuación A.4), se debe resolver un problema de optimización. Este problema se transforma en un problema sin restricciones que puede ser resuelto, por ejemplo, a través de $m+1$ multiplicadores de Lagrange:

$$L(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) = S(p) - (\lambda_0 - 1) \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \sum_{r=1}^m \lambda_r \left(\sum_{i=1}^n p_i g_{r,i} - a_r \right), \quad (\text{A.7})$$

en donde $(\lambda_0 - 1)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los $m+1$ multiplicadores de Lagrange. Operando la Ecuación (A.7) se obtiene:

$$\frac{\partial L(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m)}{\partial p_i} = -\ln(p_i) - \lambda_0 - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_{r,i} = 0, \quad (\text{A.8})$$

de donde

$$p_i = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 g_{1,i} - \dots - \lambda_m g_{m,i}) \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.9})$$

Los multiplicadores $(\lambda_0 - 1)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se calculan al sustituir p_i (Ecuación (A.9)) en las Ecuaciones (A.5) y (A.6) de las cuales se obtienen:

$$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{j,i}\right) = 1 \quad (\text{A.10})$$

y

$$\sum_{i=1}^n g_{r,i} \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{j,i}\right) = a_r \quad r = 1, \dots, m. \quad (\text{A.11})$$

A.2.2. Variables aleatorias continuas

En el caso de variables aleatorias continuas, la medida de la incertidumbre de una variable aleatoria X se define a través de la siguiente expresión:

$$S(f_X) = - \int_D f_X(x) \ln(f_X(x)) dx, \quad (\text{A.12})$$

en la cual f_X es la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria X y D es su dominio. En este caso, el objetivo es determinar la función densidad de probabilidad $f(x)$ de la variable aleatoria X , de manera tal que se maximice la Ecuación (A.12) sujeta a la siguiente restricción:

$$\int_D p(x)dx = 1 \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D, \quad (\text{A.13})$$

la cual constituye una condición necesaria para una función densidad de probabilidad y además sujeta a m restricciones adicionales expresadas de la siguiente manera:

$$\int_D p(x)g_r(x)dx = a_r \quad r = 1, \dots, m. \quad (\text{A.14})$$

En este caso utilizando los multiplicadores de Lagrange se obtiene:

$$L(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) = S(p) - (\lambda_0 - 1) \left(\int_D p(x)dx - 1 \right) - \sum_{r=1}^m \lambda_r \left(\int_D p(x)g_r(x)dx - a_r \right), \quad (\text{A.15})$$

en donde $(\lambda_0 - 1), \lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los $m + 1$ multiplicadores de Lagrange. Reescribiendo la Ecuación (A.15) se obtiene:

$$L(p, \lambda_0) = u(\lambda_0, \dots, \lambda_m) - \int_D h(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) dx, \quad (\text{A.16})$$

en donde:

$$u(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = (\lambda_0 - 1) + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_r, \quad (\text{A.17})$$

y:

$$h(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) = p(x) \left[\ln p(x) + (\lambda_0 - 1) + \sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x) \right]. \quad (\text{A.18})$$

Operando la Ecuación (A.18) se obtiene, para el cálculo de máximos y mínimos:

$$\frac{\partial h(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m)}{\partial p(x)} = 0, \quad (\text{A.19})$$

obteniéndose de esta forma como extremo la función de densidad de probabilidad

$$p(x) = \mathbb{1}_D(x) \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_m g_m(x)). \quad (\text{A.20})$$

Los multiplicadores $(\lambda_0 - 1), \lambda_1, \dots, \lambda_m$ se calculan al sustituir $p(x)$ (Ecuación (A.20)) en las Ecuaciones (A.13) y (A.14) de igual manera que en el caso de variables discretas.

A.3. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

En forma general, se pueden establecer cinco niveles de convergencia (Leon-García, 2008) los cuales están relacionados entre sí:

- Convergencia segura o convergencia puntual:

Al evaluar una sucesión de variables aleatorias en un elemento w del espacio muestral Ω , se obtiene una sucesión numérica $X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)$ que converge a un cierto número real $X(w)$. Si esto se cumple para todos y cada uno de los elementos en Ω , entonces se dice que la sucesión de variables aleatorias converge puntualmente. La sucesión de variables aleatorias $X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)$ converge puntualmente a X si para cada w en Ω se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w). \quad (\text{A.21})$$

- Convergencia casi segura:

Establece una condición menos estricta que la convergencia segura al establecer que la convergencia se verifique en todo el espacio excepto en un subconjunto de probabilidad cero. Es decir, se permite que para algunos valores de w la sucesión numérica pueda no converger, sin embargo el subconjunto en donde esto sucede debe tener una probabilidad igual a cero. La sucesión de variables aleatorias $X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)$ converge casi seguramente a X si:

$$P\left(w \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w)\right) = 1. \quad (\text{A.22})$$

- Convergencia en media de orden p :

Este tipo de convergencia utiliza la esperanza para determinar la cercanía entre dos variables aleatorias. La sucesión de variables aleatorias $X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)$ converge en media de orden p a X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X|^p = 0. \quad (\text{A.23})$$

Cuando $p = 1$ se denomina convergencia en media y se demuestra a través de la desigualdad de Jensen que la misma implica que $E(X_n) \rightarrow E(X)$.

Cuando $p = 2$ se denomina convergencia en media cuadrática la cual implica la convergencia en media. En este tipo de convergencia se presupone que las variables aleatorias tienen segundo momento finito.

- Convergencia en probabilidad:

Constituye un tipo menos restrictivo que la convergencia casi segura. La misma establece que la sucesión de variables aleatorias $X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)$ converge en probabilidad a X si para cada $\epsilon > 0$ se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(w \in \Omega : |X_n(w) - X(w)| > \epsilon) = 0. \quad (\text{A.24})$$

- Convergencia en distribución:

Este es el tipo de convergencia menos restrictiva y también se suele denominar como convergencia débil. La misma establece que la sucesión de variables aleatorias $X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)$ converge en distribución a X si para todo punto x en donde la función $F_X(x)$ es continua se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x). \quad (\text{A.25})$$

Para este tipo de convergencia se hace uso solamente de las funciones de distribución y por lo tanto las variables aleatorias pueden estar definidas en distintos espacios de probabilidad.

A.4. Simulación de campos aleatorios

A.4.1. Transformación de Nataf

Los fundamentos de la transformación se describen a continuación: un vector aleatorio X tiene asociado distribuciones marginales para cada componente, $F_{X_i}(x_i)$ para $i = 1, \dots, M$ y una matriz de correlación R . Entonces es posible transformar los componentes de X en variables aleatorias normales estandarizadas ξ_i , $i = 1, \dots, M$:

$$\xi_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)). \quad (\text{A.26})$$

La transformación de Nataf asume que $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_M\}^T$ es un vector cuyos componentes son variables aleatorias normales estandarizadas y correlacionadas cuya función de probabilidad conjunta se define como:

$$f_{\Xi}(\xi_1, \dots, \xi_M) = \varphi_M(\xi; R_0), \quad (\text{A.27})$$

en donde $\varphi_M(\xi; R_0)$ es una distribución de probabilidad conjunta (o mutidimensional) normal:

$$\varphi_M(\xi; R_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det R_0}} \exp \left[-\frac{1}{2} \xi^T R_0^{-1} \xi \right], \quad (\text{A.28})$$

y R_0 es una matriz de correlación (correspondiente con la PDF multidimensional normal) la cual debe ser compatible con la matriz de correlación prescrita R (correspondiente al campo aleatorio de la distribuciones marginales prescritas). De la ecuación anterior, se puede obtener:

$$f_X(x_1, \dots, x_M) = f_{\Xi}(\xi_1, \dots, \xi_M) |det \mathcal{J}_{\Xi, X}|, \quad (\text{A.29})$$

en donde el Jacobiano de la transformación es una matriz diagonal:

$$\mathcal{J}_{\Xi, X} = \text{diag} \left(\frac{f_{X_1}(x_1)}{\varphi(\xi_1)}, \dots, \frac{f_{X_M}(x_M)}{\varphi(\xi_M)} \right), \quad (\text{A.30})$$

la cual conduce a la transformación de Nataf:

$$f_X(x_1, \dots, x_M) = \prod_{i=1}^M \frac{f_{X_i}(x_i)}{\varphi(\xi_i)} \varphi_M(\xi; R_0). \quad (\text{A.31})$$

La matriz de correlación R_0 , se computa término a término resolviendo la siguiente ecuación que establece la compatibilidad entre los coeficientes de correlación ρ_{ij} :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right) \left(\frac{x_j - \mu_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \right) \varphi_2(\xi_i, \xi_j; \rho_{0ij}) d\xi_i d\xi_j, \quad (\text{A.32})$$

en donde ρ_{ij} y ρ_{0ij} son los elementos a-dimensionales de la matriz de correlación. La transformación anterior es válida si se cumplen las siguientes condiciones:

- Los mapeos en la Ecuación (A.32) se realizan de a pares, lo cual es posible si cada distribución marginal $F_{X_i}(x_i)$ es continua y estrictamente creciente.
- El valor de ρ_{0ij} proveniente de la Ecuación (A.32) debe encontrarse entre -1 y 1.

Para determinadas distribuciones marginales y coeficientes de correlación ρ_{ij} de dos variables aleatorias X_i y X_j , la ecuación de compatibilidad puede resolverse de forma iterativa para hallar ρ_{0ij} . Para evitar ese tedioso cálculo, un conjunto de formulas establecidas para obtener la relación $F = \rho_{0ij}/\rho_{ij}$ han sido tabuladas para varios pares de distribuciones $(f_{X_i}(x_i), f_{X_j}(x_j))$ en Der Kiureghian y Liu (1986) y en Ditlevsen y Madsen (1996). Estas fórmulas están basadas en las siguientes propiedades de la variable F :

- F es en general una función de ρ_{ij} y de los parámetros de las dos distribuciones marginales.
- $F \geq 1$ para un valor de ρ_{ij} y distribuciones marginales de X_i y X_j arbitrarias.
- F es independiente de ρ_{ij} , si una de las variables tiene una distribución normal.
- F es invariante para transformaciones lineales de X_i y X_j .
- Para distribuciones con dos parámetros, F es independiente de los parámetros de la distribución de X_i , si la distribución es reducible a una forma estándar a través de una transformación lineal. F es función del coeficiente de variación $\delta_i = \sigma_i/\mu_i$ si la distribución de X_i no puede ser reducida a una forma estándar a través de una transformación lineal.

Para la simulación de un campo aleatorio a través de la transformación de Nataf se aplican los siguientes pasos:

- Obtención de la matriz de correlación prescrita R (correspondiente al campo aleatorio de la distribuciones marginales prescritas).
- Obtención de la matriz de correlación de la distribución multidimensional normal estándar R_0 la cual debe ser compatible con la matriz anterior. Los componentes de esta matriz se obtienen a través de $F = \rho_{0ij}/\rho_{ij}$.
- Generación de muestras partiendo de una distribución multidimensional normal a través del procedimiento presentado en Rubinstein y Kroese 2007, el cual se resume, a su vez, en los siguientes pasos:
 - Aplicación de la descomposición de Cholesky a la matriz R_0 para obtener la matriz triangular inferior de la descomposición. Esto es posible porque esta matriz es positiva definida.
 - Multiplicación de la matriz triangular inferior con vectores cuyos componentes son variables aleatorias normales estándar. Esto produce vectores cuyos componentes son variables aleatorias normales estándar con las propiedades de covarianza definidas en R_0 .
- Finalmente para obtener muestras del campo aleatorio que cumple con las propiedades de correlación establecidas en R y las distribuciones marginales prescritas $f_{X_i}(x_i)$ se aplica la siguiente transformación:

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(\xi_i)). \quad (\text{A.33})$$

A.4.2. Expansión de Karhunen-Loève

Para obtener las variables aleatorias que forman las bases de la Expansión de Karhunen-Loève de un proceso estocástico no Gaussiano $\xi_i(\theta)$, se debe partir de las distribuciones marginales.

Siguiendo el trabajo de Mulani *et al.* (2007) se utiliza para tal propósito el método de la transformación no lineal de variables aleatorias. Para ello, se establecen los siguientes pasos para la obtención de las variables aleatorias que forman las bases de la Expansión de Karhunen-Loève de un proceso estocástico no Gaussiano $\xi_i(\theta)$:

- Calcular el desvío estándar y obtener la Función de Distribución Acumulada (CDF) de la distribución marginal.
- Calcular una nueva CDF de tal manera que:

$$F_{nm} \left(\frac{X_m}{\sigma_m} \right) = F_m (X_m), \quad (\text{A.34})$$

en donde F_m y F_{nm} son, respectivamente, la CDF marginal de los parámetros de entrada (m) y la CDF marginal normalizada (nm) utilizando el desvío estándar σ_m . Esta transformación no lineal permite obtener variables aleatorias que poseen una varianza igual a uno y un valor medio que puede ser distinto de cero.

- Generar muestras independientes de F_{nm} utilizando el método de transformación inversa. Luego, calcular el valor medio de F_{nm} . Si el valor medio es distinto de cero, restar este valor a las muestras generadas anteriormente y obtener de esta manera la nueva CDF F_{nm}^* . Esta última es la CDF de las variables aleatorias que forman las bases de la Expansión de Karhunen-Loève de un proceso estocástico no Gaussiano ξ_i .

Para una implementación práctica de la Expansión, ésta puede ser aproximada por un número finito de términos M , expresándose como

$$w(x, \theta) = \bar{w}(x) + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \psi_i(x). \quad (\text{A.35})$$

La determinación de la cantidad de términos necesaria M se realiza estudiando los valores propios λ_i de la función de covarianza los cuales decrecen a medida que aumenta el índice i . Cuanto menor sea el valor de λ_i , menor será su influencia en la serie.

El procedimiento anterior se verificará utilizando el método iterativo presentado en Phoon et al. (2002), el cual se describe a continuación:

- Generar las variables $\xi_i(\theta)$ a partir de una distribución con media cero y varianza unitaria. En el trabajo que se hace mención, estas variables son obtenidas partiendo de una distribución de probabilidad F sin mayores explicaciones.
- Generar N realizaciones del campo aleatorio utilizando la expansión clásica de Karhunen-Loève, Ecuación (A.35).
- Computar la función de covarianza y las distribuciones marginales generadas.
- A partir de las distribuciones marginales obtenidas con el método de la transformación inversa, simular las variables $\xi_i^*(x, \theta)$:

$$\xi_i^*(x, \theta) = F^{-1}\hat{F}(w(x, \theta)), \tag{A.36}$$

donde \hat{F} es la distribución marginal simulada y F la distribución marginal buscada.

- Generar las nuevas variables $\xi_i(\theta)$ a través de:

$$\xi_i^N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D [\xi_i^*(x, \theta) - \bar{\xi}_i^*(x)] \psi_i(x) dx, \tag{A.37}$$

donde $\bar{\xi}_i^*(x)$ es el valor medio de $\xi_i^*(x, \theta)$. Estas variables corregidas deben cumplir con la Ecuación (3.28). Para ello se aplica un proceso de ortogonalización y estandarización. El mismo esta basado en el método de muestreo *Latin Hypercube*, a través del cual se reduce la correlación entre las variables aleatorias a través de un re-ordenamiento de las realizaciones de las mismas sin modificar sus distribuciones.

A continuación, se resume la aplicación de esta técnica:

- Crear una matriz \mathbf{R} con una cantidad de filas igual al numero de realizaciones del campo N y con una cantidad de columnas igual a la cantidad de términos de la expansión M . Cada columna contiene el numero de rango de 1 a N de las variables $\xi_i^N(\theta)$, en donde $i = 1, \dots, M$; respetando el orden en que fueron simuladas.
- La correlación entre las columnas i y j de \mathbf{R} se define por una matriz \mathbf{T} de dimensiones $M \times M$ cuyos elementos son los coeficientes de correlación de Spearman obtenidos de la siguiente ecuación:

$$T_{i,j} = 1 - \frac{6 \sum_N^{m=1} (R_{mi} - R_{mj})^2}{N(N-1)(N+1)}. \tag{A.38}$$

\mathbf{T} es definida positiva y simétrica. Se aplica la descomposición de Cholesky para obtener $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$.

- Obtener la matriz \mathbf{R} actualizada a través de $\mathbf{R}' = \mathbf{R}\mathbf{Q}^{-1}$. Se calcula nuevamente la matriz \mathbf{T} de la matriz \mathbf{R}' a través de la Ecuación (A.38) y se repite el procedimiento anterior de re-ordenamiento hasta que la matriz \mathbf{T} de \mathbf{R}' sea igual a la matriz identidad. Este método reduce la correlación sin cambiar las distribuciones de las variables con el sólo re-ordenamiento de su orden de simulación.
- Se generan las nuevas variables ξ_i^N actualizadas de manera iterativa repitiendo los pasos anteriores a partir del segundo ítem general. Para ello, se utilizan las ξ_i^N generadas en el paso anterior, hasta que se obtenga la distribución marginal deseada.