Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctorado en Matemática

Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas

Inés Beatriz Pascual

Bahía Blanca Argentina

2015

A mi madre Elena,

a mi esposo Juan,

y a mis hijos Ana Inés, Juan Andrés y María Celeste

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctora en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no se ha presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática, durante el período comprendido entre noviembre de 2008 y abril de 2015, bajo la dirección del Dr. Aldo V. Figallo.

27 de abril de 2015 Inés Beatriz Pascual

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Agradecimientos

Quiero dejar constancia de mis agradecimientos:

Al Dr. Aldo V. Figallo, por haber dirigido esta tesis, por su acertada elección del tema, acorde a mis preferencias y a mi formación académica en la que él desempeñó un rol fundamental, por la confianza que depositó en mí, por trasmitirme su interés por esta parte de la Matemática, y por su guía en mis investigaciones.

A la Dra. Alicia Ziliani por sus enseñanzas y sus valiosas sugerencias que sustentaron mejoras en esta presentación.

A todas las personas que integran y han integrado el equipo de investigación del cual formo parte y muy especialmente a mis compañeras María Jimenez, Mónica Gomes, Nora Oliva y Susana Saad, por la amistad, la compañía y la contención que me brindaron en los momentos difíciles que me tocó vivir, en los que me estimularon e incentivaron a no abandonar este trabajo.

Al Dr. Aldo Figallo Orellano, por su atenta disposición para suministrarme bibliografía relacionada con el tema de este trabajo y por su constante aliento para la presentación del mismo.

Al Lic. Mario Videla por sus aportes para dar formato al texto y a los gráficos del presente trabajo usando el procesador LaTex.

A mi madre, que está en mis recuerdos y mi corazón, por su amor, su gran generosidad y por estar presente en todos los momentos que la necesité.

A mi querida familia, por su amor, su inmenso cariño, su comprensión, y por su apoyo incondicional en todo momento.

Introducción

El primer sistema de lógica multiplemente valuada fue formulado por J. Łukasiewicz en 1920. Su motivación fue de naturaleza filosófica ya que él estaba buscando una interpretación de los conceptos de posibilidad y necesidad, íntimamente relacionados con las proposiciones modales que estaba investigando. Desde entonces, se ha desarrollado una importante investigación en esta área.

Para cada número natural, $n \geq 2$, J. Łukasiewicz introdujo un cálculo proposicional $n-$valuado en el que a cada proposición se le asigna n valores diferentes de verdad. En 1940, Gr.C. Moisil introdujo las álgebras de Łukasiewicz $3-$valuadas y $4-$valuadas con el propósito de obtener la contrapartida algebraica (el álgebra de Lindenbaum–Tarski asociada) de las correspondientes lógicas de Łukasiewicz. Un año más tarde las generalizó definiendo las álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas ([55]) y las estudió desde un punto de vista algebraico. Estas álgebras son retículos distributivos con una operación de negación y ciertas operaciones unarias que expresan modalidades.

En 1956, A. Rose dio un ejemplo en el que estableció que la implicación de Łukasiewicz no se puede definir sobre un ágebra de Łukasiewicz $n-$valuada cuando $n \geq 5$ y por lo tanto estas álgebras no son la contrapartida algebraica del cálculo proposicional de Łukasiewicz $n-$valuado para $n \geq 5$ ([13], [18]). De todos modos, las aplicaciones que encontró Moisil de estas álgebras ([56]), entre las que se destaca la aplicación a circuitos eléctricos, y que produjo un avance en la teoría de las mismas desde el punto de vista algebraico, las hace interesantes por sí mismas. Usando una técnica como la de Gentzen, Moisil construyó un cálculo proposicional para el cual las álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas son su contrapartida algebraica. Por otra parte, R. Cignoli ([16], [17]) encontró las contrapartidas algebraicas del cálculo proposicional de Łukasiewicz para $n \geq 5$ y las llamó álgebras de

Łukasiewicz $n-$valuadas propias. En 1997, M. Fidel ([26]) describió un cálculo proposicional que tiene las álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas como su contrapartida algebraica.

En 1968, Gr.C. Moisil ([58]) definió las álgebras de Łukasiewicz $\theta-$valuadas (sin negación), donde θ es el tipo de orden de una cadena. Estas estructuras ya habían sido pensadas por Moisil como modelos de una lógica con infinitos valores de verdad, pero la necesidad de encontrar una fuerte motivación retrasó su anuncio. Moisil encontró la motivación en la teoría de L. Zadeh de conjuntos difusos, en la que vio una confirmación de sus viejas ideas, ya que la relación de pertenencia a un conjunto difuso es un ejemplo de proposición infinito valuada. Estas álgebras fueron estudiadas por numerosos autores, en particular fueron temas de estudio de varias tesis doctorales realizadas por discípulos de Moisil. Varios de los resultados obtenidos se han reproducidos en el importante libro de C. Boisescu, A. Filipoiu, G. Georgescu y S. Rudeanu ([13]).

El desarrollo de los diversos sistemas de lógicas siempre ha estado acompañado del desarrollo de sus contrapartidas algebraicas. En muchos casos llegó a ser preponderante el interés por los aspectos puramente algebraicos, lo que llevó a posicionar a las correspondientes contrapartidas algebraicas como un capítulo del álgebra, teniendo las mismas un interés intrínseco. Esto es precisamente el caso de las álgebras de Łukasiewicz.

Si bien las álgebras de Łukasiewicz, en su origen, tienen una estrecha relación con las lógicas de Łukasiewicz, fue Moisil quien las creó, y la posición que ocupan de ser una de las clases más importantes de retículos en la lógica algebraica se debe a las investigaciones realizadas por él y sus seguidores. Por este motivo, en el importante libro de V. Boisescu y otros, se considera que sería más adecuado llamarlas álgebras de Łukasiewicz–Moisil.

Observemos que Moisil introdujo las álgebras $n-$valuadas que tienen una negación, y las álgebras $\theta-$valuadas (θ infinito) sin negación, bajo el mismo nombre: *álgebras de Łukasiewicz*. Sin embargo, ahora tenemos las álgebras $\theta-$valuadas, con θ finito o infinito, ambas con y sin negación por lo que necesitamos términos diferentes para designarlas. En el libro antes mencionado de V. Boisescu y otros, se reserva el nombre de álgebras $\theta-$valuadas para las álgebras sin negación y las otras se denominan álgebras $\theta-$valuadas con negación. Sin embargo, la terminología convencional en el caso en que θ es un entero n, $n \geq 2$, supone que las álgebras $n-$valuadas tienen negación.

Resumen

En esta tesis investigamos la clase de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas, siendo θ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado.

Al trabajo lo hemos organizado en cinco capítulos.

El Capítulo 1 consta de cuatro secciones y los resultados indicados en ellas son conocidos. Los hemos incluído tanto para facilitar la lectura posterior, como para fijar las definiciones de las álgebras y las dualidades topológicas que utilizamos en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 2 consta de dos secciones. En la primera sección, determinamos una dualidad topológica para las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación ($LM_\theta-$álgebras), equivalente a la dada por A. Filipoiu en 1980 para θ arbitrario. Además, consideramos el caso particular de las $LM_\theta-$álgebras en las que θ es un entero n, $n \geq 2$ (LM_n-álgebras). En la segunda sección, extendemos a las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación ($nLM_\theta-$álgebras) la dualidad anteriormente obtenida para las $LM_\theta-$álgebras y la dualidad de las álgebras de De Morgan determinada por W. Cornish y P. Fowler en [22]. También analizamos el caso particular en el que θ es un entero n, $n \geq 2$ (nLM_n-álgebras). Es un hecho conocido que debido a que el álgebra cociente de una $LM_\theta-$algebra por una congruencia de la misma, en el sentido del álgebra universal, no necesariamente satisface el principio de determinación de Moisil, se introduce un concepto más fuerte de congruencia sobre estas álgebras, a las que se las llama $\theta-$congruencias. En las dos secciones de este capítulo, no solamente caracterizamos el retículo de las congruencias y el de las $\theta-$congruencias de estas álgebras, sino que también describimos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de cada una de esta clase de álgebras con respecto a ambas congruencias y también afirmamos que las álgebras antes mencionados coinciden.

Es más determinamos que el espacio asociado a cada una de estas álgebras es un conjunto totalmente ordenado. A partir de este resultado y usando técnicas topológicas obtenemos estas álgebras, arrivando así, por medio de un razonamiento diferente, a los resultados indicados por R. Cignoli en [15], en el caso de las nLM_n-álgebras y los de V. Boicescu y otros en [13], en otro caso. A partir de la caracterización obtenida de las conguencias maximales probamos que las $LM_\theta-$álgebras y las $nLM_\theta-$álgebras son semisimples. Además establecemos, tanto para las $LM_\theta-$álgebras como para las $nLM_\theta-$álgebras, una correspondencia entre la familia de las $\theta-$congruencias y la familia de ciertos filtros especiales de estas álgebras, a los que se les llama $\theta-$filtros. Finalizamos este capítulo determinando, a través de las dualidades de estas álgebras, condiciones necesarias y suficientes para que las nociones de LM_n-álgebra y nLM_n-álgebra sean equivalentes.

La mayoría de los resultados que se detallan en este capítulo se publicaron en

- A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *A Duality for $\theta-$ Valued Łukasiewicz–Moisil Algebras and Applications*. Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing. Vol. 16 (2010), pp. 303-322.

Estos resultados se expusieron previamente en *XIV Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Parati, Brasil en 2008.

El Capítulo 3 está organizado en cuatro secciones y en él nos dedicamos a estudiar las congruencias y las $\theta-$congruencias de las $LM_\theta-$álgebras y las $nLM_\theta-$álgebras, teniendo en cuenta las dualidades topológicas obtenidas en el Capítulo 2. En la primera sección, logramos una caracterización de las congruencias principales y otra de las $\theta-$congruencias principales. Por medio de esta última caracterización probamos que la intersección de dos $\theta-$congruencias principales de una $LM_\theta-$algebra es una $\theta-$congruencia principal. Además, cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, obtenemos los filtros que determinan las congruencias principales sobre una LM_n-algebra, y a partir de este resultado demostramos que la intersección de dos congruencias principales de dicha álgebra es también una congruencia principal. En los otros casos damos condiciones suficientes para que la intersección de dos congruencias principales de una $LM_\theta-$álgebra no sea principal. En la segunda sección, centramos nuestra atención en las congruencias y las $\theta-$congruencias booleanas de las $LM_\theta-$álgebras. En primer lugar, las caracterizamos por medio de ciertos subconjuntos cerrados y abiertos de su espacio asociado. Usando estas caracterizaciones demostramos que estas congruencias coinciden, y también que son las congruencias principales determinadas por los filtros generados por elementos booleanos de estas álgebras. Este último resultado nos permite establecer condiciones necesarias y suficientes para que una congruencia principal sea booleana, y también determinar que las congruencias booleanas son conmutativas, regulares y uniformes. Además, analizamos el caso particular de las $LM_\theta-$algebras completas.

La mayor parte de los resultados que se indican en las dos primeras secciones de este capítulo se publicaron en

- A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Principal and Boolean Congruences on $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras*. Logic withouth frontiers. Festschrift for Walter Alexandre Carnielli on the occasion of his 60 th Birthday, 17 (2012), pp. 215-237.

Algunos de estos resultados se expusieron previamente en *XIII Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Oaxaca, Méjico, en 2006 y otros de estos resultados, en la *Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina* en 2007.

En la tercera sección de este capítulo, estudiamos las congruencias y las $\theta-$congruencias principales y booleanas de las $LM_\theta-$álgebras que son producto de una familia finita de $LM_\theta-$álgebras totalmente ordenadas. Como consecuencia de ello obtenemos que las congruencias sobre estas álgebras son $\theta-$congruencias y además que son principales y booleanas. A partir de este hecho probamos que el cardinal del álgebra booleana de las congruencias de un álgebra de esta subclase, está dado por el cardinal del álgebra booleana de los elementos complementados de dicha álgebra. Estos resultados se expusieron en la *Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina* en 2006.

En la última sección caracterizamos y analizamos las congruencias y $\theta-$congruencias principales y booleanas de las $nLM_\theta-$álgebras. En todas las secciones consideramos en forma particular el caso en el que θ es un entero n, $n \geq 2$.

El Capítulo 4 está organizado en cuatro secciones. En la primera sección, comenzamos definiendo las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación monádicas o $mLM_\theta-$álgebras y las álgebras de Łukasiewicz $\theta-$valuadas sin negación monádicas fuertes o $smLM_\theta-$álgebras para θ arbitrario y consideramos el caso particular en el que θ es un entero n, $n \geq 2$, a las que las denotamos por mLM_n-álgebras y $smLM_n-$álgebras, respectivamente. Luego, nos dedicamos a determinar una dualidad topológica para cada una de estas clases de álgebras, extendiendo las dualidades topológicas para los $M-$retículos y $sM-$retículos, descriptas en el Capítulo 1 y la dualidad determinada en el Capítulo 2 para las $LM_\theta-$álgebras. A través de estas dualidades obtenemos propiedades de las $mLM_\theta-$álgebras, de las que resulta que toda $mLM_\theta-$álgebra es una $smLM_\theta-$álgebra y consecuentemente que los conceptos de $mLM_\theta-$álgebra y $smLM_\theta-$álgebra son equivalentes. En la segunda sección, también por medio de la dualidad, caracterizamos las congruencias y las $\theta-$congruencias y las congruencias y las $\theta-$congruencias maximales y booleanas sobre una $mLM_\theta-$álgebra, y a partir de estas caracterizaciones realizamos un estudio detallado de las mismas. Luego, en la tercera sección, abordamos el problema de determinar las álgebras subdirectamente irreducibles de esta clase de álgebras con respecto a las congruencias y a las $\theta-$congruencias. En primer lugar, las caracterizaciones anteriores nos permiten afirmar que estas álgebras coinciden y que son también las $mLM_\theta-$álgebras simples con respecto a ambas congruencias. Luego, por medio del espacio topológico cociente por la relación de equivalencia definida en los espacios asociados a las $mLM_\theta-$álgebras, probamos que la imagen del cuantificador de una $mLM_\theta-$álgebra simple es una $LM_\theta-$álgebra simple. Finalmente, a partir de este último resultado y usando conceptos de topología general, determinamos todas las $mLM_\theta-$álgebras simples.

Cabe mencionar que algunos de los temas que se presentan en este capítulo fueron aceptados en el *XVI Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Buenos Aires en 2014.

El Capítulo 5 consta de tres secciones. En la primera sección, desarrollamos una dualidad topológica para las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación monádicas o $qnLM_\theta-$álgebras, con θ infinito y finito. Estas álgebras fueron introducidas por G. Georgescu y C. Vraciu en [42], e investigadas por M. Abad en [1] cuando θ es un entero n, $n \geq 2$ ($qnLM_n-$álgebras). Cuando nos restringimos a la categoría de los $Q-$retículos distributivos y $Q-$homomorfismos, esta dualidad coincide con la obtenida por R. Cignoli en [18]. En la segunda sección, por medio de la dualidad obtenida, logramos una nueva caracterización de las congruencias, las $\theta-$congruencias y de las congruencias y $\theta-$congruencias maximales y booleanas sobre estas álgebras. A partir de la caracterización de las congruencias maximales probamos que las $qnLM_\theta-$álgebras son semisimples. En la tercera sección, usando los resultados de la Sección 2, establecemos que las $qnLM_\theta-$álgebras simples y subdirectamente irreducibles con respecto a ambas congruencias coinciden. Además en esta sección, empleando el mismo método topológico que el que se utilizó para las $mLM_\theta-$álgebras, determinamos todas las $qnLM_\theta-$álgebras simples, las que se caracterizan por el hecho de que la imagen del cuantificador, definido en cada una de estas álgebras, es una $nLM_\theta-$álgebra simple; obteniendo así, de un modo diferente, los resultados establecidos por M. Abad en [1], para el caso en que θ es un entero n, $n \geq 2$.

La dualidad para las $qnLM_n-$álgebras y sus aplicaciones se publicaron en

- Figallo, A. V.; Pascual, I.; Ziliani, A. *Notes On Monadic n-valued Lukasiewicz Algebras.* Math. Bohem. 129 (2004), no. 3, 255–271.

Algunos de los resultados de la dualidad de las $qnLM_\theta-$álgebras, θ infinito, se presentaron y discutieron en la *Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina* en 2005.

Varios de los resultados de esta tesis que todavía no se han publicado, están en vías de publicación ([29], [32]).

Finalizamos este trabajo dando una breve enumeración de los posibles desarrollos futuros.

Abstract

In this thesis, we investigate the class of $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras, where θ is the order type of a totally ordered set. We have organized this volume in five chapters.

Chapter 1 consists of four sections and the results reported in them are well-known. We have included them both to facilitate the subsequent reading and to set the definitions of algebras and topological dualities that we use in the remainder chapters.

Chapter 2 is organized in two sections. In the first one, we determine a topological duality for $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras without negation ($LM_\theta-$algebras) equivalent to the one given by A. Filipoiu in [40]. Furthermore, we consider the particular case of $LM_\theta-$algebras where θ is an integer n, $n \geq 2$ (LM_n-algebras). In the second section, we extend the above duality and the one obtained by W. Cornish and P. Fowler in [22] for De Morgan algebras to the case of $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras with negation ($nLM_\theta-$algebras); and we also analyze the particular case in which θ is an integer n, $n \geq 2$ (nLM_n-algebras). It is well-known that there are congruences in the classes of $LM_\theta-$algebras and $nLM_\theta-$algebras, that the quotient algebra by these congruences, in the sense of universal algebra, does not satisfy the determination principle. That is the reason why the stronger concept of $\theta-$congruence is introduced on these algebras. In these two sections of this chapter, we do not only characterize the lattice of congruences and the lattice of $\theta-$congruences on these algebras, but we also describe the simple and subdirectly irreducible $LM_\theta-$algebras and $nLM_\theta-$algebras regarding both congruences; and we also assert that in each class of these algebras, the above mentioned algebras coincide. What is more, we determine that the space associated with each of these algebras is a totally ordered set. From this last result and using topological techniques, we obtain all these algebras; and so we arrive, through a different reasoning, at the results

indicated by R. Cignoli in [15] in the case of nLM_n-algebras and by V. Boicescu et al in [13], in another case. From the characterization of the maximal congruences, we can set that the $LM_\theta-$algebras and the $nLM_\theta-$algebras are semisimple. In addition to the latter mentioned, we establish for both $LM_\theta-$algebras and $nLM_\theta-$algebras, a correspondence between the family of $\theta-$congruences and the family of certain special filters of these algebras, which are called $\theta-$filters. Bearing in mind the above dualities for these algebras, we conclude this chapter by determining necessary and sufficient conditions so that the notions of LM_n-algebra and nLM_n-algebra are equivalent.

Most of the results obtained in this chapter were published in

- A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *A Duality for $\theta-$ Valued Łukasiewicz–Moisil Algebras and Applications*. Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing. Vol. 16 (2010), pp. 303-322.

They were previously presented and discussed in *XIII Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Parati, Brasil in 2008.

Chapter 3 is organized into four sections and in within this chapter our main interest is to research on the principal and Boolean congruences and $\theta-$congruences on $LM_\theta-$algebras and $nLM_\theta-$algebras. In order to do this, we take into account the topological dualities for these algebras obtained in Chapter 2. In the first section, we achieve a characterization of principal congruences and another of principal $\theta-$congruences on $LM_\theta-$algebras. These last results allow us to prove that the intersection of two principal $\theta-$congruences on an $LM_\theta-$algebra is a principal $\theta-$congruence. Furthermore, whenever θ is an integer n, $n \geq 2$, we obtain the filters which determine principal congruences on an LM_n-algebra and, we are also in a position to show that the intersection of two principal congruences on an LM_n-algebra is a principal one. In other cases, we give sufficient conditions so that the intersection of two principal congruences on an $LM_\theta-$algebra is not a principal one. In Section 2, our attention is focused on Boolean congruences on $LM_\theta-$algebras. Firstly, we characterize them by means of certain closed and open subsets of their associated spaces. Using this characterization, we prove that these congruences are $\theta-$congruences, and also that they are principal congruences associated with filters generated by the complemented elements of these algebras. This last result allows us to set necessary and sufficient conditions so that a principal congruence is a Boolean one, and also to determine that the Boolean congruences are commutative, regular and uniform. Besides, we analyze the particular case of the complete $LM_\theta-$algebras.

Most of the achieved results in the two first sections of this chapter were published in

- A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Principal and Boolean Congruences on $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras*. Logic withouth frontiers. Festschrift for Walter Alexandre Carnielli on the occasion of his 60 th Birthday, 17 (2012), pp. 215-237.

Some of these results were also presented and discussed previously in *XIII Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Oaxaca, Mexico, in 2006 and other of these results, in the *Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina* in 2007.

In Section 3 of this chapter, we study the principal and Boolean congruences on $LM_\theta-$algebras, which are a product of a finite family of totally ordered $LM_\theta-$algebras. As a result, we obtain that the congruences on these algebras are $\theta-$congruences and that they also are principal and Boolean congruences and $\theta-$congruences. From this fact, we prove that the cardinal of the lattice of congruences on an algebra of this subclass is given by the cardinal of the Boolean algebra of the complemented elements of this algebra. These results were presented and discussed in the *Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina* in 2006.

In the last section, we characterize and analyze the principal and Boolean congruences and $\theta-$congruences on $nLM_\theta-$algebra. In all sections, we consider the particular case that θ is an integer n, $n \geq 2$.

Chapter 4 is organized in three sections. In the first section, we start by defining the monadic $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras without negation or $mLM_\theta-$algebras and the strong monadic $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras without negation or $smLM_\theta-$algebras, for θ arbitrary. Also we consider the particular case in which θ is an integer n, $n \geq 2$, and we denote these algebras by mLM_n-algebras and $smLM_n-$algebras, respectively. Then, we dedicate ourselves to determine a topology duality for each of these classes of algebras. To do this, we extend to these algebras the topological dualities for

$M-$lattices and $sM-$lattices, described in Chapter 1, and the duality that we determined in Chapter 2 for $LM_\theta-$algebras respectively. By means of these dualities, we obtain properties of the $mLM_\theta-$algebras, from which it arises the fact that every $mLM_\theta-$algebra is an $smLM_\theta-$algebra and consequently that the concepts of $mLM_\theta-$algebra and $smLM_\theta-$algebra are equivalent. In order to obtain more information about the latter mentioned algebras, in the second section, we characterize congruences and $\theta-$congruences, maximal and Boolean congruences and $\theta-$congruences on an $mLM_\theta-$algebra, taking into account the duality mentioined above; and from these characterizations, we carry out a detailed study of them. Then, in the third section, we deal with the problem of determining the subdirectly irreducible algebras of this class, concerning congruences and $\theta-$congruences. Firstly, the previous characterizationes allow us to assert that these algebras coincide and that they are also the simple $mLM_\theta-$algebras regarding both congruences. Then, through the topological quotient space by the equivalence relation defined in the spaces associated with the $mLM_\theta-$algebras, we prove that the image of the quantifier of a simple $mLM_\theta-$algebra is a simple $LM_\theta-$algebra. Finally, from this last result and while using general topological concepts, we determine all the simple $mLM_\theta-$algebras.

It is worth mentioning that some of the topics presented in this chapter were submitted and accepted at *XVI Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Buenos Aires in 2014.

Chapter 5 consists of three sections. In the first section, we develop a topological duality for monadic $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras with negation or $qnLM_\theta-$algebras, which were introduced by G. Georgescu and C. Vraciu in [42] and they were researched by M. Abad in [1] in the particular case that θ is an integer n, $n \geq 2$ ($qnLM_n-$algebra). When restricted to the category of $Q-$distributive lattices and $Q-$homomorphisms, this duality coincides with the one obtained by R. Cignoli in [18]. In the second section, a new characterization of the congruences and another one of the $\theta-$congruences on a $qnLM_\theta-$algebra by means of certain closed and involutive subsets of the associated space are also obtained. Besides, in the second section, we characterize the maximal and Boolean congruences and $\theta-$congruences on these algebras. The results obtained in this Section allow us, in the third section, to establish that simple and subdirectly irreducible $qnLM_\theta-$algebras regarding congruences and $\theta-$congruences coincide. The characterization of the maximal congruences enables us to prove that every $qnLM_\theta-$algebra is semisimple. Furthermore, in the third section, employing the same topological method as the one used for $mLM_\theta-$algebras, we obtain all the subdirectly irreducible $qnLM_\theta-$algebras, which are characterized by the fact that the image of the quantifier, defined on each of these algebras, is a simple $nLM_\theta-$algebra. And so, we arrive at the results established by M. Abad in [1], in the case of $qnLM_n-$algebra, $n \geq 2$, by a different method.

The duality for $qnLM_n-$algebras and its applications were published in

- Figallo, A. V.; Pascual, I.; Ziliani, A. *Notes On Monadic n-valued Lukasiewicz Algebras.* Math. Bohem. 129 (2004), no. 3, 255–271.

Some of the results of the duality for $qnLM_\theta-$algebras, θ infinite, were presented and discussed in the *Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina* in 2005.

Several of the results achieved in this thesis that have not been published yet will be submitted for publication ([29], [32]).

We conclude this study by giving a brief enumeration of possible future developments.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas nociones y resultados del álgebra universal y de la teoría de categorías, que si bien son conocidos, se necesitan para el desarrollo de este trabajo. Además, hacemos una breve exposición de las nociones y propiedades de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin y con negación y de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin y con negación monádicas. Finalmente, indicamos dualidades topológicas para varias clases de álgebras. En este trabajo suponemos conocida la teoría de retículos, para obtener información de la misma se puede consultar [3, 10].

1.1. Nociones de álgebra universal y categorías

1.1.1. Álgebra universal

Con el objeto de facilitar la lectura del texto y además fijar las notaciones que utilizamos, a continuación repasamos aquellas nociones de álgebra universal que usamos con cierta frecuencia. El lector interesado en profundizar el estudio de estos temas puede consultar [14, 43].

Sea A un conjunto no vacío y n un número natural. Una *operación $n-$aria* sobre A es cualquier función $f : A^n \longrightarrow A$, donde n es la aridad de f. Si $n = 0$, una operación 0–aria es una constante de A. Una *operación finitaria* sobre A es una operación $n-$aria para algún número natural n.

Un *lenguaje o tipo de álgebras* es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman *símbolos de función*, tal que a cada miembro de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural n, llamado *aridad* de f y f se denomina *símbolo de función $n-$ario*.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un *álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{F}$* es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$, le corresponde una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}$ sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama *universo* o *soporte del álgebra* $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribimos f en lugar de $f^{\mathcal{A}}$ y si F es finito, por ejemplo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, escribimos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$. En este caso, si n_i es el rango de f_i para $1 \leq i \leq k$, también decimos que A es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representamos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte A.

1.1.2. Homomorfismos y subálgebras

Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ es un *isomorfismo* de A en B si h es inyectiva, sobreyectiva, y si para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y para toda $n-$upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos

$$\text{(H)}\ h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)).$$

$\mathcal{A}$ es *isomorfa* a $\mathcal{B}$ y escribimos $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ si existe un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si h verifica solo la condición (H) decimos que h es un *homomorfismo* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Si h es inyectiva decimos que h es una *inmersión*. En el caso que h es sobreyectiva, decimos que h es un *epimorfismo* y que $\mathcal{B}$ es una *imagen homomórfica* de $\mathcal{A}$.

Hay diversos métodos para construir nuevas álgebras a partir de álgebras dadas. Los tres fundementales son la formación de subálgebras, imágenes homomórficas y productos directos que indicamos a continuación.

Subálgebras

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una *subálgebra* de $\mathcal{A}$ y lo notamos $\mathcal{B} \lhd \mathcal{A}$ (o simplemente $B \lhd A$) si $B \subseteq A$ y toda operación fundamental de $\mathcal{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, para cada $X \subseteq A$ definimos

$$[X] = \bigcap \{B : X \subseteq B \ \text{ y } \ \mathcal{B} \lhd \mathcal{A}\}.$$

Entonces $[X]$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$, llamada *la subálgebra generada por* X.

Si $X \subseteq A$, decimos que X genera a $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{A}$ está generada por X si $[X] = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es *finitamente generada* si tiene un conjunto finito de generadores.

1.1.3. Productos directos y subdirectos

Productos directos

Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Entonces el *producto directo* $\mathcal{A} = \prod\limits_{i \in I} A_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ a : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i : a(i) \in A_i \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de operación $n-$ario, se define

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), a_2(i), \ldots, a_n(i)),$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \prod\limits_{i \in I} A_i$, es decir $f^{\mathcal{A}}$ se define coordenada a coordenada.

La aplicación $\Pi_j : \prod\limits_{i \in I} A_i \longrightarrow A_j$, definida por $\Pi_j(a) = a(j)$ para cada $j \in I$, se denomina la *proyección sobre la* $j-$*ésima coordenada* y determina un epimorfismo $\Pi_j : \prod\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$.

Variedad

Una clase $\mathbf{V}$ de álgebras del mismo tipo es una *variedad*, si es una clase cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos.

Productos subdirectos

Un álgebra $\mathcal{A}$ es *producto subdirecto* de una familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ de álgebras, si se verifican las siguientes condiciones:

(PS1) existe una inmersión $h : \mathcal{A} \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$,

(PS2) si $\Pi_j : \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es la proyección sobre la $j-$ésima coordenada, entonces la composición $\Pi_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ es sobreyectiva.

Álgebras subdirectamente irreducibles

Un álgebra $\mathcal{A}$ es *subdirectamente irreducible* si tiene más de un elemento y si $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de la familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ de álgebras, entonces existe $j \in I$ tal que $\Pi_j \circ h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es un isomorfismo, donde h es cualquier función que verifica (PS1) y (PS2).

1.1.4. Congruencias y álgebras cociente

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces θ es una *congruencia de* $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in A$, si $a_i\,\theta\,b_i$, para todo i, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\theta\,f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Si $\mathcal{A}$ pertenece a una clase $\mathbf{K}$ de álgebras y θ es una congruencia de $\mathcal{A}$, entonces decimos que θ es una $\mathbf{K}-$congruencia de $\mathcal{A}$.

El conjunto de todas las congruencias de un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotamos por $Con_{\mathbf{K}}(\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ pertenece a una clase $\mathbf{K}$ de álgebras o a veces para simplificar lo notamos por $Con(A)$. Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces el álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por θ, que representamos $\mathcal{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) = |f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y f es un símbolo de función $n-$aria en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. De esta definición resulta que la aplicación canónica $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $Con(\mathcal{A})$, ordenado por la relación de inclusión, es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es la relación id_A, identidad de $\mathcal{A}$, y cuyo último elemento es $A \times A$.

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo en general no lo sea.

El retículo de las congruencias caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles de la siguiente manera:

Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y solo si, $Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$ tiene primer elemento.

Un teorema fundamental debido a G. Birkhoff es el que enunciamos a continuación:

Teorema 1.1.4.1 *Toda álgebra con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles.*

Este teorema está basado en el hecho de que para cualquier álgebra $\mathcal{A}$ y para todo conjunto $\{\varphi_s\}_{s\in S}$ de congruencias de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcap\limits_{s\in S} \varphi_s = \{(a, a) : a \in A\}$, las álgebras cocientes $\mathcal{A}/\varphi_s$ son los factores de un producto subdirecto isomorfo a $\mathcal{A}$ y recíprocamente, toda descomposición subdirecta de $\mathcal{A}$ se puede obtener de esta manera. Luego, uno puede elegir las congruencias φ_s de manera que cumplan la condición anterior y además que cada álgebra $\mathcal{A}/\varphi_s$ sea subdirectamente irreducible. Más aún si $\mathbf{K}$ es una clase ecuacional de álgebras, entonces $\mathcal{A}/\varphi_s \in \mathbf{K}$, por lo tanto se verifica el siguiente resultado debido a G. Birkhoff:

Teorema 1.1.4.2 *Toda álgebra de una clase ecuacional tiene una descomposición subdirecta en factores subdirectamente irreducibles de la clase.*

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde *un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y solo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir id_A y $A \times A$.*

Además, *un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple si la intersección de sus congruencias maximales es la identidad id_A, o equivalentemente si el álgebra es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.*

Propiedad de extensión de congruencias

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de extensión de congruencias* (PEC) si para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ y toda $\theta \in Con(\mathcal{B})$ existe $\Phi \in Con(\mathcal{A})$ tal que $\theta = \Phi \cap (B \times B)$.

Una clase $\mathbf{K}$ tiene la PEC si toda álgebra de $\mathbf{K}$ la tiene.

1.1.5. Congruencias especiales

Congruencias finitamente generadas

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, con $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denotamos la congruencia generada por $\{(a_i, a_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$, es decir, la menor congruencia tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en la misma clase de equivalencia. Llamamos *congruencia principal* a toda congruencia de la forma $\Theta(a_1, a_2)$, y notamos con $Con_P(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias principales de $\mathcal{A}$.

Algunos resultados útiles sobre las congruencias, que se obtienen fundamentalmente como consecuencia que Θ es un operador de clausura algebraico, son los siguientes:

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra, $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in A$ y $\theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces

(CFG1) $\Theta(a_1, a_2) = \Theta(a_2, a_1)$,

(CFG2) $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)) = \Theta(a_1, b_1) \vee \Theta(a_2, b_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n)$, donde $\vee$ es, en este caso, la operación de supremo entre congruencias.

(CFG3) $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Theta(a_1, a_2) \vee \Theta(a_2, a_3) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$,

(CFG4) $\theta = \bigcup\{\Theta(a, b) : (a, b) \in \theta\} = \bigvee\{\Theta(a, b) : (a, b) \in \theta\}$.

Como $Con(\mathcal{A})$ es un retículo algebraico, las *congruencias compactas* de $\mathcal{A}$ son las congruencias de $\mathcal{A}$ finitamente generadas. Notamos con $Con_C(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias compactas de $\mathcal{A}$.

Algebras a congruencias distributivas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias distributivas* si $Con(\mathcal{A})$ es distributivo. Una clase $\mathbf{K}$ de álgebras es a congruencias distributivas si, y solo si, toda álgebra de $\mathbf{K}$ es a congruencias distributivas.

Algebras a congruencias conmutativas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias conmutativas* si se verifica $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$, para toda θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathcal{A})$. Una clase $\mathbf{K}$ de álgebras es a congruencias conmutativas si, y solo si, toda álgebra de $\mathbf{K}$ es a congruencias conmutativas.

Las congruencias conmutativas de un álgebra $\mathcal{A}$ pueden ser caracterizadas de la siguiente manera:

Si $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(CC1) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$,

(CC2) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$,

(CC3) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

Álgebras a congruencias regulares

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias regulares* si para toda θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, $[a]_{\theta_1} = [a]_{\theta_2}$ para algún $a \in A$ implica que $\theta_1 = \theta_2$. Una clase $\mathbf{K}$ de álgebras es a congruencias regulares si, y solo si, toda álgebra de $\mathbf{K}$ es a congruencias regulares.

Variedades aritméticas

Una variedad $\mathbf{V}$ es *aritmética* si es a congruencias distributivas y conmutativas.

Álgebras a congruencias uniformes

Una congruencia θ de un álgebra $\mathcal{A}$ es *uniforme*, si todas la clases de equivalencia por θ tienen el mismo cardinal, es decir para todo x, $y \in A$ se verifica que $|[x]_\theta| = |[y]_\theta|$.

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias uniformes si toda congruencia de $\mathcal{A}$ es uniforme. Una clase $\mathbf{K}$ de álgebras es a congruencias uniformes si, y solo si, toda álgebra de $\mathbf{K}$ es a congruencias uniformes.

Congruencias factores

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, $\theta \in Con(\mathcal{A})$ es una *congruencia factor* si existe $\theta^* \in Con(\mathcal{A})$ tal que:

(CF1) $\theta \cap \theta^* = id_A$,

(CF2) $\theta \vee \theta^* = A \times A$,

(CF3) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$.

El par θ, θ^* se denomina par de congruencias factores.

Entonces se verifica:

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\theta^*,$$

donde el isomorfismo esta dado por

$$\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_{\theta^*}).$$

1.1.6. Diversos ejemplos de álgebras

A continuación damos las definiciones de aquellas clases de álgebras que utilizamos más adelante, y también repasamos las propiedades y conceptos que son necesarios para el desarrollo posterior.

Retículos distributivos acotados

Teniendo en cuenta la caracterización dada por M. Scholander en [75] para los retículos distributivos, un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ es un *retículo distributivo acotado* si se verifican las condiciones siguientes:

(RD1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(RD2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(RD3) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$.

En todo lo que sigue designamos con $\mathbf{L}$ la variedad de los retículos distributivos acotados (o $(0, 1)-$retículos distributivos), y para cada $A \in \mathbf{L}$, denotamos con $X(A)$ a la familia de los filtros primos de A.

Se puede ver un estudio detallado de la teoría de retículos en [3] y [43].

Álgebras de Boole

Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ que satisface las siguientes condiciones:

(B1) $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,

(B2) $x \wedge -x = 0$,

(B3) $x \vee -x = 1$.

Las álgebras de Boole son la contrapartida algebraica de la lógica clásica. Mayor información sobre estas álgebras se encuentra, por ejemplo, en [47].

En adelante notamos con $\mathbf{B}$ a la variedad de estas álgebras.

Álgebras de De Morgan

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ es un *álgebra de De Morgan* (o $DM-$álgebra) si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle \in \mathbf{L}$ y se satisfacen las identidades:

(DM1) $\sim\sim x = x$,

(DM2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

Es bien conocido que en toda $DM-$álgebra A se verifican:

(DM3) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

(DM4) Si A tiene más de elemento, entonces se puede definir la transformación llamada *de Birula-Rasiowa* que a cada filtro primo P de A le asigna el filtro primo de A, $\phi(P) = A \backslash \sim P$, donde $\sim P = \{\sim x : x \in P\}$ ([9]).

Dos propiedades importantes de ϕ son:

(ϕ1) $\phi(\phi(P)) = P$, para cada filtro primo P de A.

(ϕ2) Si P y Q son filtros primos de A tales que $P \subseteq Q$, entonces $\phi(Q) \subseteq \phi(P)$.

Las $DM-$álgebras están relacionadas con la lógica, en particular con la lógica $4-$valuada desarrollada por Belnap en [4]. Se puede ampliar la información sobre las $DM-$álgebras en [3, 9, 49, 61].

En lo que sigue designamos con **DM** la variedad de las $DM-$álgebras y a estas álgebras en algunos casos, cuando no haya lugar a dudas, las notamos con $(A, \sim)$.

$Q-$retículos distributivos

En [18], R. Cignoli introdujo a los $Q-$*retículos distributivos* como álgebras $\langle A, \vee, \wedge, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle \in \mathbf{L}$ y ∇ es un operador unario sobre A, lamado cuantificador, que verifica las siguientes propiedades:

(Q1) $\nabla 0 = 0$, (Q2) $x \wedge \nabla x = x$,
(Q3) $\nabla(x \wedge \nabla y) = \nabla x \wedge \nabla y$, (Q4) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$.

De la definición indicada en ([3, pag. 47]), cada cuantificador es un operador de clausura aditivo.

Indicamos con **Q** la variedad de los $Q-$retículos distributivos y cuando sea conveniente a los elementos de **Q** los representamos por (A, ∇).

Álgebras de Boole monádicas

En 1954, P. Halmos en [45] introdujo las *álgebras de Boole monádicas* para un estudio algebraico del fragmento de una variable de la lógica de predicados. Las definió como pares $(A, \exists)$, donde A es un álgebra de Boole y $\exists$ es una operación unaria sobre A llamada *cuantificador existencial*, tal que se satisfacen las siguientes identidades:

(M1) $\exists\, 0 = 0$, (M2) $x \wedge \exists\, x = x$,

(M3) $\exists, (x \wedge \exists\, y) = \exists\, x \wedge \exists\, y$, (MB1) $\exists - \exists - x = -\exists - x$,

donde $-x$ es el complemento booleano de x.

P. Halmos (ver [45, 46]), mostró que esta noción es el instrumento algebraico adecuado para el estudio del cálculo de predicados monádicos de la lógica clásica.

Además, en toda álgebra de Boole monádica se verifican las siguientes identidades:

(M4) $\exists\,(x \vee y) = \exists\, x \vee \exists\, y$,

(M5) $\exists\,\exists\, x = \exists\, x$.

En estas álgebras se puede definir una operación unaria $\forall$ por medio de la fórmula $\forall x = -\exists - x$, llamada *cuantificador universal*, que verifica las siguientes identidades:

(M6) $\forall\, 1 = 1$, (M7) $x \wedge \forall\, x = \forall\, x$,

(M8) $\forall\,(x \wedge y) = \forall\, x \wedge \forall y$, (M9) $\forall\forall\, x = \forall\, x$,

(M10) $\exists\forall\, x = \forall\, x$, (M11) $\forall\exists\, x = \exists\, x$,

(M12) $\forall\,(x \vee \forall y) = \forall\, x \vee \forall\, y$.

Álgebras de De Morgan monádicas

A. Petrovich en [70, pag.70] definió a las *álgebras de De Morgan mónadicas* como álgebras $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tales que $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle \in \mathbf{DM}$, $\langle A, \vee, \wedge, \nabla, 0, 1\rangle \in \mathbf{Q}$ y se verifica:

(Q5) $\nabla \sim \nabla x = \sim \nabla x$.

Al operador ∇ lo denominó *cuantificador* sobre la $DM-$álgebra A.

Por otra parte este mismo autor observó que dada una $DM-$álgebra A, un *cuan-*

tificador dual Δ sobre A es un cuantificador dual Δ sobre $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ que satisface la siguiente ecuación adicional: $\Delta \sim \Delta x = \sim \Delta x$. Además, si ∇ es un cuantificador sobre una $DM-$álgebra A, definiendo para cada $x \in A$, $\Delta x = \sim \nabla \sim x$ se obtiene un cuantificador dual y recíprocamente, si Δ es un cuantificador dual sobre A, definiendo $\nabla x = \sim \Delta \sim x$, para todo $x \in A$ se obtiene un cuantificador y en ambos casos $\nabla(A) = \Delta(A)$.

Para más detalles sobre esta variedad de álgebras remitirse a [70].

Retículos distributivos monádicos y monádicos fuertes

El hecho que las álgebras de Heyting son retículos distributivos especiales y que los axiomas indicados en [59] que se refieren a los operadores $\exists$ y $\forall$ definidos sobre estas álgebras involucran solamente las operaciones de retículos, hizo que A. V. Figallo y A. Ziliani en [27] consideraran un caso más general, y así introdujeron los *retículos distributivos monádicos* o $M-$*retículos* como álgebras $\langle A, \wedge, \vee, \forall, \exists, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$, donde $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado que satisface las siguientes identidades:

(M1) $\exists\, 0 = 0$, (M2) $x \wedge \exists\, x = x$,

(M3) $\exists\,(x \wedge \exists\, y) = \exists\, x \wedge \exists\, y$, (M4) $\exists\,(x \vee y) = \exists\, x \vee \exists\, y$,

(M5) $\exists\,\exists\, x = \exists\, x$, (M6) $\forall\, 1 = 1$,

(M7) $x \wedge \forall\, x = \forall\, x$, (M8) $\forall\,(x \wedge y) = \forall\, x \wedge \forall\, y$,

(M9) $\forall\,\forall\, x = \forall\, x$, (M10) $\exists\,\forall\, x = \forall\, x$,

(M11) $\forall\,\exists\, x = \exists\, x$.

Cabe mencionar que hay retículos distributivos monádicos que no son álgebras de Heyting monádicas, como se muestra en el siguiente ejemplo. Sea $I\!R$ el conjunto de los números reales dotado de la topología euclídea y $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de $I\!R$. Es bien conocido que $\langle \mathcal{F}, \cap, \cup, \emptyset, I\!R\rangle$ es un retículo distributivo que no es un álgebra de Heyting, ya que para cada $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $F \to 0$ no está definido. Sin embargo, $(\mathcal{F}, \exists, \forall)$ es un retículo distributivo monádico, donde los operadores $\exists, \forall$ están definidos por las prescripciones $\exists\emptyset = \emptyset$ y $\exists F = I\!R$ para cada $F \neq \emptyset$; $\forall I\!R = I\!R$ y $\forall F = \emptyset$ para cada $F \neq I\!R$.

Por otro lado, A. Ziliani en su tesis doctoral ([82]) estudió algunas subvariedades de los $M-$retículos. En particular, definió los *retículos distributivos monádicos fuertes* o *$sM-$retículos* como una generalización de las álgebras de Boole monádicas. Éstos son $M-$retículos que satisfacen la condición adicional:

(M12) $\forall\,(x \vee \forall\, y) = \forall\, x \vee \forall\, y$.

1.1.7. Categorías y funtores

En esta sección repasamos las nociones y los resultados de la teoría de categorías que se usan más adelante.

Categorías

Una *categoría* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ está formada por una clase Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ cuyos miembros se llaman *objetos* de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, dotada con la siguiente estructura:

(i) Para cada A, $B \in$ Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ está definido el conjunto $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ cuyos elementos se llaman *morfismos* tal que:

$(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \neq (A', B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ implica $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \cap (A', B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \emptyset$.

Si $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, indicamos $f : A \longrightarrow B$.

(ii) Para cada A, B, $C \in$ Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, está univocamente determinado el morfismo $g \circ f \in (A, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, llamado *composición* de f con g, tal que si $A, B, C, D \in$ Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $h \in (C, D)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(iii) Para cada $A \in$ Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ existe un morfismo $1_A \in (A, A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, llamado el *morfismo identidad* de A, el cual satisface para cada $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $g \in (C, A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ la condición de que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.

Sea $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ una categoría y A, $B \in$ Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Si $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, llamamos *dominio* de f a A y *codominio* de f a B y escribimos $A = Dom f$ y $B = Codom f$.

Morfismos especiales

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, decimos que el morfismo f es un *monomorfismo* si para todo $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y para todo par de elementos h, $g \in (C,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, decimos que el morfismo f es un *epimorfismo* si para todo $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y para todo par de elementos h, $g \in (B,C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, $h \circ f = g \circ f$ implica $h = g$.

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, decimos que el morfismo f es un *isomorfismo* si existe un morfismo $f^{-1} \in (B,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tal que $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Luego, si f es un isomorfismo, entonces f^{-1} es también es un isomorfismo. Todo isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo. La recíproca no es verdadera.

A, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ son *isomórficos* si existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$, y en este caso lo notamos por $A \simeq B$.

$A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es un *retracto* de $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, si existen dos morfismos $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $g \in (B,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tal que $g \circ f = 1_A$. Notemos que en este caso, f es monomorfismo y g es un epimorfismo.

Categoría dual

Sea $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ una categoría, llamamos *categoría dual* de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y la denotamos por $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$ a la categoría que verifica:

(i) $\mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$.

(ii) Para todo $A, B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$, $(A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^*} = (B,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

(iii) Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^*}$ y $g \in (B,C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^*}$, entonces la composición $g \circ f$ en $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$ está definida como la composición $f \circ g$ en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Subcategorías

Una categoría $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una *subcategoría* de una categoría $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ si se verifican las siguientes condiciones:

(i) $\mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$,

(ii) $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \subseteq (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ para todo A, $B \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$,

(iii) Los morfismos identidad en $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ son los mismos que en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$,

(iv) La composición de morfismos en $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es la misma que en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una *subcategoría plena* de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, si satisface las condiciones (i), (ii), (ii) y (iv) y $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ para todo A,$B \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Funtores

Sean $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos categorías. Un *funtor covariante* o simplemente un *funtor* $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una correspondencia que a cada $A \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ le asocia un elemento $F(A) \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y si $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, entonces $F(f) \in (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ de manera tal que:

(i) $F(1_A) = 1_{F(A)}$,

(ii) para todo A, B, $C \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y para todo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y para todo $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, si la composición $f \circ g$ está definida, entonces $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Un *funtor contravariante* $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una correspondencia que a cada $A \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ le asocia un elemento $F(A) \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y si $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, entonces $F(f) \in (F(B), F(A))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ de manera tal que:

(i) $F(1_A) = 1_{F(A)}$,

(ii) para todo A, B, $C \in \text{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y para todo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y para todo $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, si la composición $f \circ g$ está definida, entonces $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Para toda categoría $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ denotamos por $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ al *funtor identidad* $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$, definido por $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A) = A$ y $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(f) = f$ para todo A, $B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ y para $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

Si $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ son categorías y $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ son ambos funtores covariantes o ambos contravariantes, su *composición* $G \circ F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ está definida por $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ y $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ para todo todo A, $B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ y para todo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

Es fácil ver que la composición de funtores covariantes (contravariantes) es covariante (covariante), la composición es asociativa, y además que $F \circ Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = F$ para todo funtor

$F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \circ G = G$ para todo funtor $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Sean $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos categorías y $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ un funtor. Se dice que

(i) F es *pleno* si la función $F : (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es sobreyectiva, para cualquier A, $B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$,

(ii) F es *fiel* si la función $F : (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es inyectiva, para cualquier A, $B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$,

(iii) F es *plenamente fiel* si la función $F : (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es biyectiva, para cualquier A, $B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$,

(iv) F es un *isomorfismo* si F es covariante y existe un funtor covariante $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tal que $G \circ F = Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $F \circ G = Id_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$.

Equivalencia natural

Sean $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos categorías, $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $G : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos funtores. Una *transformación natural* del funtor F en el funtor G es una familia de morfismos $\{\tau_A\}_{A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, con la siguiente propiedad:

Para cada A, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y cada $h \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ existen morfismos $\tau_A \in (F(A), G(A))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ y $\tau_B \in (F(B), G(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ que verifican: $G(h) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(h)$.

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(A) \arrow[d, "G(h)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

Esto es, a cada A, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y a cada $h \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ le asociamos morfismos $\tau_A \in (F(A), G(A))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ y $\tau_B \in (F(B), G(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ con la condición de que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet A \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] \arrow[dd, "h"] & \\
F(A)\bullet \arrow[rr, "\tau_A"'] \arrow[dd, "F(h)"'] & & \bullet G(A) \arrow[dd, "G(h)"] \\
 & \bullet B \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] & \\
F(B)\bullet \arrow[rr, "\tau_B"'] & & \bullet G(B)
\end{tikzcd}$$

Una transformación natural $\tau = \{\tau_A\}_{A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tal que τ_A es un isomorfismo para todo A, se denomina una *equivalencia natural*. Además decimos que dos funtores son *naturalmente equivalentes* si existe una equivalencia natural entre ellos.

Dos categorías $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ son *naturalmente equivalentes*, si existen dos funtores $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tales que $F \circ G$ y $G \circ F$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidades $Id_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ e $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, respectivamente

1.2. Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas

En esta sección recordamos las definiciones, propiedades y ejemplos de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin y con negación que se usan más adelante.

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal). Siguiendo a Boisescu y otros ([13]):

Definición 1.2.1 *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil θ-valuada o LM_θ-álgebra es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i \in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i \in I}\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0, \{1\}_{i \in I}, \{1\}_{i \in I})$ tal que:*

(i) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado,*

(ii) ϕ_i *y* $\overline{\phi}_i$, $i \in I$, *son operaciones unarias sobre* A *que satisfacen las condiciones siguientes:*

(L1) ϕ_i *es un* 01*-homomorfismo de retículo,*

(L2) $\phi_i x \vee \overline{\phi}_i x = 1, \;\; \phi_i x \wedge \overline{\phi}_i x = 0,$

(L3) $\phi_i \phi_j x = \phi_j x$,

(L4) $i \leq j$ *implica* $\phi_i x \leq \phi_j x$,

(L5) $\phi_i x = \phi_i y$ *para todo* $i \in I$ *implica* $x = y$.

Una pre–álgebra de Łukasiewicz–Moisil θ-valuada (o LM_θ-pre-álgebra) es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 0, 0, \{1\}_{i\in I}, \{1\}_{i\in I})$*, donde* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado y para todo* $i \in I$*,* ϕ_i *y* $\overline{\phi}_i$ *satisfacen* (L1)–(L4).

El axima (L5) se concoce con el nombre de *Principio de determinación de Moisil.*

Denotamos con 0 al primer elemento de J y de A, en el caso en que J tenga último elemento lo notaremos con 1 al igual que el último elemento de A.

El concepto de $LM_\theta-$álgebra se debe a Moisil ([58]). En los trabajos de Moisil y también en otros se adopta el axioma

(L4*) $i \leq j$ implica $\phi_j x \leq \phi_i x$,

en reemplazo de (L4).

Si $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ es una $LM_\theta-$álgebra tal que el conjunto I tiene primer elemento 0 y último elemento 1, entonces se verifica:

(L6) $\phi_0 x \leq x \leq \phi_1 x$ para todo $x \in A$.

La idea de considerar separadamente la parte ecuacional de una $LM_\theta-$álgebra, es decir el concepto de $LM_\theta-$pre–álgebra se debe a Beznea, en 1981, para el caso $\theta = n$, $n \geq 2$. ([8]).

En la definición anterior θ es $\theta + 1$ en la notación de Moisil, ya que se ha elegido como θ al tipo de orden de J, en lugar del de I.

La siguiente caracterización de los elementos booleanos de una $LM_\theta-$álgebra resulta muy útil para el estudio de las congruencias booleanas de estas álgebras, a través de la dualidad topológica que determinamos en este trabajo:

(L7) *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$ *álgebra y* $C(A)$ *el conjunto de los elementos booleanos o complementados de* A*. Entonces para todo* $x \in A$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $x \in C(A)$,

(ii) *existen* $y \in A$, $i \in I$ *tal que* $x = \phi_i y$,

(iii) *existe* $i \in I$ *tal que* $x = \phi_i x$,

(iv) *para todo* $i \in I$, $x = \phi_i x$,

(v) *para todo* i, $j \in I$, $\phi_i x = \phi_j x$.

En una $LM_\theta-$álgebra $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ para todo i, $j \in I$ se verifica:

(L8) $\phi_i\overline{\phi}_j = \overline{\phi}_i\phi_j = \overline{\phi}_j$ y $\overline{\phi}_i\overline{\phi}_j = \phi_j$.

Denotamos por $\boldsymbol{\mathfrak{PLM}_\theta}$ la categoría de las $LM_\theta-$pre-álgebras y sus correspondientes homomorfismos y por $\boldsymbol{\mathfrak{LM}_\theta}$ la categoría de las $LM_\theta-$álgebras, la cual es una subcategoría plena de la primera.

En 1941, Gr. Moisil introdujo la noción de álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas, las cuales tienen una negación. A partir de ese momento se han realizado varias publicaciones sobre estas álgebras. Este concepto fue desarrollado por el mismo Moisil ([56], [57]) y por C. Sicoe ([76], [77], [78], [79]). En 1969, R. Cignoli en [15] realizó un estudio detallado de la estructura de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n-$valuadas con n entero, $n \geq 2$ y consideró la definición que damos a continuación, que es la que tenemos en cuenta en este trabajo.

Definición 1.2.2 *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil* $n-$*valuada es un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \phi_i, \ldots, \phi_{n-1}\rangle$, *de tipo* $(2, 2, 1, 0, 0, 1, \ldots, 1)$ *tal que:*

(i) $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \rangle$ *es un álgebra de De Morgan,*

(ii) *las operaciones unarias* ϕ_i, $1 \leq i \leq n-1$, *satisfacen las siguientes condiciones:*

(L$_n$1) $\phi_i(x \vee y) = \phi_i x \vee \phi_i y$,

(L$_n$2) $\phi_i x \vee \sim \phi_i x = 1$,

(L$_n$3) $\phi_i\phi_j x = \phi_j x$,

(L$_n$4) $\phi_i \sim x = \sim \phi_{n-i} x$,

(L$_n$5) $i \leq j$ *implica* $\phi_i x \leq \phi_j x$,

(L$_n$6) $\phi_i x = \phi_i y$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$, *implica* $x = y$.

En lo sucesivo a estas álgebras las llamamos álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas con negación (o nLM_n-álgebras) y reservamos el nombre álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n-$valuadas (o LM_n-álgebras) a las álgebras de la Definición 1.2.1 cuando θ es un entero n, $n \geq 2$.

En 1984, A. Iorgulescu introdujo en [48] la noción de álgebra de Łukasiewicz–Moisil θ-valuada con negación, generalizando la noción de Łukasiewicz–Moisil $n-$valuada.

Definición 1.2.3 *Una álgebra de Łukasiewicz–Moisil θ-valuada con negación (o $nLM_\theta-$álgebra) es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0, \{1\}_{i\in I})$ tal que:*

(nL1) $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de De Morgan,*

(nL2) $\phi_i(x \vee y) = \phi_i(x) \vee \phi_i(y)$,

(nL3) $\phi_i x \vee \sim \phi_i x = 1$,

(nL4) $\phi_i\phi_j x = \phi_j x$,

(nL5) *existe una involución decreciente $d : I \to I$ tal que $\phi_i \sim x = \sim \phi_{d(i)}x$,*

(nL6) $i \leq j$ *implica* $\phi_i x \leq \phi_j x$,

(nL7) $\phi_i x = \phi_i y$ *para todo $i \in I$, implica $x = y$.*

De la Definición 1.2.3 se sigue que toda $nLM_\theta-$álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ es una $LM_\theta-$álgebra $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$, donde $\overline{\phi}_i = \sim \phi_i$ para cada $i \in I$.

Por otra parte, en [13] se da la siguiente definición de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación, la cual es equivalente a la Definición 1.2.3.

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0 y último elemento 1, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal).

Definición 1.2.4 *Una álgebra (pre-álgebra) de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada con negación (o $nLM_\theta-$álgebra (pre-álgebra)) es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0, \{1\}_{i\in I}, \{1\}_{i\in I})$, donde:*

(NL1) $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de De Morgan,* (NL2) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *es una* $LM_\theta-$*álgebra (pre-álgebra),*

(NL3) $\overline{\phi}_i x = \sim \phi_i x$,

(NL4) *existe una involución decreciente* $d : I \to I$ *tal que* $\phi_i \sim x = \sim \phi_{d(i)} x$.

Se dice que $\sim$ *es la involución interna de* A *y que* d *es la involución externa de* A.

Teniendo en cuenta que en el caso de las $nLM_\theta-$álgebras el conjunto J tiene último elemento 1 y $J = \{0\} + I$ (suma ordinal), se tiene que 1 también es el último elemento de I y que el primer elemento de I es $0^+ = d(1)$, donde 0 es el primer elemento de J. En lo sucesivo a 0^+ lo notamos por 0, pero entendiendo que es el primer elemento de I.

Si $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ es una $nLM_\theta-$álgebra (pre-álgebra) según la Definición 1.2.4, entonces de (Nl3) es claro que las operaciones $\overline{\phi}_i$ quedan perfectamente definidas a partir de las operaciones ϕ_i. Es por ello que de ahora en adelante a una $nLM_\theta-$álgebra (pre-álgebra) la notamos por $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I})$ o simplemente por $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$.

Denotamos por $\boldsymbol{\mathfrak{P}n\mathfrak{LM}_\theta}$ la categoría de las $nLM_\theta-$pre-álgebras y sus correspondientes homomorfismos y por $\boldsymbol{n\mathfrak{LM}_\theta}$ la categoría de las $nLM_\theta-$álgebras, la cual es una subcategoría plena de la primera.

La siguiente caracterización de los elementos booleanos de una $nLM_\theta-$algebra se usa en el desarrollo de este trabajo:

(NL5) *Sea* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ *una* $nLM_\theta-$*álgebra y* $C(A)$ *el conjunto de los elementos booleanos o complementados de* A*. Entonces para todo* $x \in A$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $x \in C(A)$,

(ii) $\sim x \in C(A)$,

(iii) $x \wedge \sim x = 0$,

(iv) $x \vee \sim x = 1$,

(v) $\sim x = -x$, donde $-x$ es el complemento booleano de x.

Es bien conocido que existen congruencias en la clase de las LM_θ-álgebras y de las nLM_θ-álgebras tal que el álgebra cociente no satisface el principio de determinación de Moisil. Por esta razón se define una nueva noción de congruencia como sigue:

Definición 1.2.5 ([12, 48]) *Una $\theta LM_\theta-$congruencia sobre una $LM_\theta-$álgebra A es una congruencia de retículo distributivo acotado ϑ tal que para todo x, $y \in A$,*

$$(x, y) \in \vartheta \text{ si, y solo si, } (\phi_i x, \phi_i y) \in \vartheta, \text{ para todo } i \in I.$$

El concepto de $(n)LM_\theta-$álgebra simple por medio de las $\theta(n)LM_\theta-$congruencias ($\theta(n)LM_\theta-$álgebra simple) y el concepto de $(n)LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible por medio de las $\theta(n)LM_\theta-$congruencias ($\theta(n)LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible) se introducen en la forma habitual.

Ejemplo 1.2.6 *Sean $(L_2, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ el álgebra de Boole con dos elementos, $L_2^{[I]}$ el conjunto de todas las funciones crecientes de I en L_2 y θ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado $\{0\} + I$ con primer elemento 0. Entonces $\langle L_2^{[I]}, \wedge, \vee, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ es una $LM_\theta-$álgebra, donde las operaciones del retículo $\langle L_2^{[I]}, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ se definen puntualmente y para todo $f \in L_2^{[I]}$ y para todo $i, j \in I$,*

$$(\phi_i f)(j) = f(i) \ \text{ y } \ (\overline{\phi}_i f)(j) = -(f(i)),$$

siendo $-x$ el complemento booleano de x.

Si el conjunto I tiene primer elemento 0 y último elemento 1 y existe una involución decreciente $d : I \longrightarrow I$, entonces se puede transformar la $LM_\theta-$algebra $L_2^{[I]}$ en una $nLM_\theta-$álgebra $\langle L_2^{[I]}, \wedge, \vee, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$, donde para todo $f \in L_2^{[I]}$ y para todo $i \in I$,

$$(\sim f)(i) = -(f(d(i))).$$

El interés del ejemplo anterior surge de la siguiente afirmación, probada en [13] y que también se demuestra en los Teoremas 2.1.10.1 y 2.2.3.6 de un modo diferente:

Sea A una $(n)LM_\theta-$álgebra no trivial. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *A es una $(n)LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *A es una $(n)LM_\theta-$álgebra simple,*

(iii) *A es isomorfa a una $(n)LM_\theta-$subálgebra de $L_2^{[I]}$.*

Ejemplo 1.2.7 *Siguiendo a Gr. Moisil* ([56]), *un ejemplo de LM_n-álgebra lo constituye la cadena $L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ de n fracciones racionales, en la cual n es entero, $n \geq 2$, dotada de la estructura natural de retículo y con las operaciones unarias ϕ_i y $\overline{\phi}_i$, $1 \leq i \leq n-1$, definidas para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, como sigue:*

$\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 0$ *si* $i + j < n$ *y* $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 1$ *en otro caso,*
$\overline{\phi}_i(\frac{j}{n-1}) = 1 - \phi_i(\frac{j}{n-1})$.

Definiendo en L_n la operación $\sim$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, por
$\sim(\frac{j}{n-1}) = 1 - \frac{j}{n-1}$,
entonces L_n es una nLM_n-álgebra.

La importancia del ejemplo anterior es consecuencia de la siguiente afirmación, demostrada en [15] para las nLM_n-álgebras y que la probamos de una manera diferente en los Corolarios 2.1.10.2 y 2.2.3.8:

Sea A una $(n)LM_n-$álgebra no trivial. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *A es una $(n)LM_n-$álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *A es una $(n)LM_n-$álgebra simple,*

(iii) *A es isomorfa a una $(n)LM_n-$subálgebra de L_n.*

Cabe mencionar que cuando $\theta = n$, $n \geq 2$, la $(n)LM_\theta-$álgebra $L_2^{[I]}$ es isomorfa a la $(n)LM_\theta-$álgebra L_n.

Las $nLM_\theta-$álgebras construidas en los ejemplos anteriores fueron dadas esencialmente por Moisil en [53] y [58] para el caso $\theta = n$, $n \geq 2$ y θ arbitrario, respectivamente, considerando el caso general del conjunto $B^{[I]}$ de todas las funciones crecientes de I en un álgebra de Boole B.

Moisil ([56, 58]) probó que toda $LM_\theta-$álgebra (LM_n-álgebra) está inmersa en un producto directo de $LM_\theta-$álgebras (LM_n-álgebras) isomorfas a $L_2^{[I]}$ (L_n). Estas propiedades se profundizaron en [13, Therem 1.8, Corollary 1.9, Chapter 6]), las cuales también se demuestran en este trabajo de un modo diferente en los Corolarios 2.1.10.4, 2.1.10.5, 2.2.3.7 y 2.2.3.9, afirmando lo siguiente:

Toda $(n)LM_\theta-$álgebra es un producto subdirecto de $(n)LM_\theta-$subálgebras de $L_2^{[I]}$.

Toda $(n)LM_n-$álgebra es un producto subdirecto de $(n)LM_n-$subálgebras de L_n.

Para mayor información sobre los orígenes y la teoría de las lógicas y las álgebras de Łukasiewicz mútiplemente valuadas el lector puede consultar a [13, 15, 16, 17, 19, 20, 37, 38, 39, 40, 41, 48, 55, 56, 57, 58, 76, 77, 78, 79].

1.3. Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas monádicas

Las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas monádicas y poliádicas ([13]) reflejan algebraicamente las propiedades de la lógica de predicados $\theta-$valuados de la misma manera que las álgebras de Boole monádicas y poliádicas son las estucturas algebraicas impuestas por el estudio del cálculo de predicados clásico.

En esta sección presentamos algunos conceptos y resultados básicos sobre las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas monádicas, siguiendo a V. Boisescu y otros en [13], los que han sido tomados de G. Georgescu y C. Vraciu ([42]), y L. Monteiro ([67]).

Definición 1.3.1 *Sea A un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación. Un cuantificador existencial sobre A es una función $\exists : A \longrightarrow A$ tal que para todo $x, y \in A$ se verifican las siguientes identidades:*

(E1) $\exists\, 0 = 0$,

(E2) $x \wedge \exists\, x = x$,

(E3) $\exists\,(x \wedge \exists\, y) = \exists\, x \wedge \exists\, y$,

(E4) $\exists\, \phi_i x = \phi_i \exists\, x$ *para todo* $i \in I$.

Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación $\exists-$monádica o $\exists LM_\theta-$ álgebra es un par $(A, \exists)$, donde A es una $LM_\theta-$ álgebra y $\exists$ es un cuantificador existencial sobre A.

Definición 1.3.2 *Sea A un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación. Un cuantificador universal sobre A es una función $\forall : A \longrightarrow A$ tal que para todo $x, y \in A$ se verifican las siguientes identidades:*

(U1) $\forall 1 = 1$,

(U2) $\forall x \wedge x = \forall x$,

(U3) $\forall(x \vee \forall y) = \forall x \vee \forall y$,

(U4) $\forall \phi_i x = \phi_i \forall x$ *para todo* $i \in I$.

Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación $\forall-$monádica o $\forall LM_\theta-$ álgebra es un par $(A, \forall)$, donde A es una $LM_\theta-$álgebra y $\forall$ es un cuantificador universal sobre A.

Definición 1.3.3 *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación $\exists\forall-$monádica o $\exists\forall LM_\theta-$álgebra es una terna $(A, \exists, \forall)$, donde $(A, \exists)$ es una $\exists LM_\theta-$álgebra, $(A, \forall)$ es una $\forall LM_\theta-$álgebra y para todo $x \in C(A)$ se verifica:*

(EU1) $\forall x = -\exists - x$,

donde $C(A)$ es el conjunto de los elementos booleanos de A.

Definición 1.3.4 *Sean $(A, \exists)$ $((A, \forall))$ y $(A', \exists')$ $((A', \forall'))$ $\exists LM_\theta-$álgebras ($\forall LM_\theta-$álgebras). Un homomorfismo de $\exists LM_\theta-$álgebras ($\forall LM_\theta-$álgebras), $f : A \longrightarrow A'$, es un homomorfismo de $LM_\theta-$álgebras tal que $f(\exists x) = \exists' f(x)$ $(f(\forall x) = \forall' f(x))$ para todo $x \in A$.*

Definición 1.3.5 *Sean $(A, \exists, \forall)$ y $(A', \exists', \forall')$ $\exists\forall LM_\theta-$álgebras. Un homomorfismo de $\exists\forall LM_\theta-$álgebras, $f : A \longrightarrow A'$, es un homomorfismo de $LM_\theta-$álgebras tal que $f(\exists x) = \exists' f(x)$ y $f(\forall x) = \forall' f(x)$ para todo $x \in A$.*

Lema 1.3.6 *Si A es una $nLM_\theta-$álgebra y $\exists$ es un cuantificador existencial sobre A y se define la operación unaria $\forall$ en A por:*

$$\forall\, x = \sim \exists \sim x \quad \textit{para todo } \; x \in A,$$

entonces $\forall$ es un cuantificador universal sobre A, llamado el cuantificador dual de $\exists$.

Definición 1.3.7 *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada con negación monádica es una terna $(A, \exists, \forall)$, donde $\exists$ es un cuantificador existencial sobre A y $\forall x = \sim \exists \sim x$ para todo $x \in A$.*

Además en [13] se prueban los siguientes resultados:

Si $(A, \exists)$ es una $\exists LM_\theta-$álgebra, entonces para todo $x, y \in A$ se verifican las siguientes propiedades:

(E5) $\exists\,(x \,\vee\, y) = \exists\, x \,\vee\, \exists\, y$,

(E6) $\exists\,\exists\, x = \exists\, x$,

(E7) $\exists\,\overline{\phi}_i\,\exists\, x = \overline{\phi}_i\,\exists\, x$ para todo $i \in I$,

(E8) $\exists\, 1 = 1$,

(E9) $x \in \exists(A)$ si, y solo si, $x = \exists\, x$.

Si $(A, \forall)$ es una $\forall LM_\theta-$ álgebra, entonces para todo $x, y \in A$ se verifican la siguientes propiedades:

(U5) $\forall\,(x \,\wedge\, y) = \forall\, x \,\wedge\, \forall\, y$,

(U6) $\forall\forall\, x = \forall\, x$,

(U7) $\forall\,\overline{\phi}_i\,\forall\, x = \overline{\phi}_i\,\forall\, x$ para todo $i \in I$,

(U8) $\forall\, 0 = 0$,

(U9) $x \in \forall(A)$ si, y solo si, $x = \forall\, x$.

Si $(A, \exists, \forall)$ es una $\exists\forall LM_\theta-$álgebra, entonces para todo $x, y \in A$ se verifican la siguientes propiedades:

(EU2) $\exists\,\forall\, x = \forall\, x$, (EU3) $\forall \exists x = \exists x$,

(EU4) $\exists \overline{\phi}_i \forall x = \overline{\phi}_i \forall x$ para todo $i \in I$,

(EU5) $\forall \overline{\phi}_i \exists x = \overline{\phi}_i \exists x$ para todo $i \in I$,

(EU6) $\forall(A) = \exists(A)$.

1.4. Dualidades topológicas para diversas clases de álgebras

En esta sección describimos la dualidad de Priestley para los retículos distributivos acotados y sus extensiones a diversas clases de álgebras.

1.4.1. Dualidad para los retículos distributivos acotados

Recordemos que $(X, \leqslant, \tau)$ es un *espacio topológico totalmente disconexo en el orden*, si $(X, \leqslant)$ es un conjunto ordenado, (X, τ) es un espacio topológico y dados $x, y \in X$, con $x \nleqslant y$, existe un subconjunto abierto, cerrado y creciente U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Un *espacio de Priestley* (*o $P-$espacio*) es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden.

En lo que sigue, a los $P-$espacios $(X, \leqslant, \tau)$ los representamos por su conjunto soporte X.

Observemos que si X es un $P-$espacio y $D(X)$ es la familia de los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X, entonces $\langle D(X), \cap, \cup, \emptyset, X\rangle$ es un retículo distributivo acotado.

Sea $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ una cadena dotada con la topología discreta. Si A es un retículo distributivo acotado, entonces por el Teorema de Tychonoff , $\mathbf{2}^A$, con la topología producto, es un espacio compacto. Además, si en $\mathbf{2}^A$ se considera el orden natural de funciones ($f \leq g$ si, y solo si, $f(a) \leq g(a)$ para todo $a \in A$), entonces $\mathbf{2}^A$ es un espacio totalmente disconexo en el orden y por lo tanto es un espacio de Priestley. Es fácil probar que si L_2 es el álgebra de Boole con dos elementos, entonces el conjunto $Hom(A, L_2)$ de todos los $(0,1)-$homomorfismo de A en L_2 es un subespacio cerrado de $\mathbf{2}^A$ y por lo tanto es un espacio de Priestley. Por otro lado, si en el conjunto $X(A)$ de los filtros primos de A consideramos el orden de la inclusión y la topología que tiene como familia de subbásicos a los conjuntos

(A1) $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$ y $X(A) \setminus \sigma_A(a)$, para cada $a \in A$,

entonces

(A2) $F : Hom(A, L_2) \longrightarrow X(A)$, definida por la prescripción

$F(h) = Ker\, h = \{a \in A : h(a) = 1\}$,

es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.

También es fácil verificar que la aplicación que a cada filtro primo P de A le asigna su función característica C_P, es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden de $X(A)$ en $Hom(A, L_2)$. Por lo tanto, $X(A)$ es un espacio de Priestley. Lo que nos permite trabajar en un espacio u otro indistintamente, por esta razón a los espacios $X(A)$ y $Hom(A, L_2)$ se los llama *el espacio de Priestley de A o el $P-$espacio asociado a A.*

H. Priestley probó que la función $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$, definida por la prescripción dada en (A1), es un $(0,1)-$isomorfismo de retículos y por lo tanto $\sigma_A(A) = D(X(A))$ es el retículo de todos los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de $X(A)$. También probó que la función $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, definida por

(A3) $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$,

es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.

Luego, de (A1) y (A2) se sigue que existe un isomorfismo de retículos acotados de A en $D(Hom(A, L_2))$, que por abuso de notación lo indicamos con σ_A, definido por la prescripción:

(A4) $\sigma_A(a) = \{h \in Hom(A, L_2) : h(a) = 1\}$.

Además, de (A2) y (A3) se infiere que existe un homeomorfismo e isomorfismo de orden de X en $Hom(D(X), L_2)$, que lo notamos también por ε_X, definido por la prescripción:

$$\text{(A5)} \quad \varepsilon_X(x)(U) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \text{para todo } U \in D(X).$$

En [71, 72] se probó que existe una dualidad entre la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ de los retículos distributivos acotados y los $(0,1)$-homomorfismos y la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ de los $P-$espacios y las funciones continuas y creciente (o $P-$funciones) definiendo los funtores contravariantes $\Psi : \boldsymbol{\mathcal{P}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\Phi : \boldsymbol{\mathcal{L}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}$ como sigue:

(Ψ_1) Si X es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, $\Psi(X) = D(X)$,

(Ψ_2) si $f \in (X_1, X_2)_{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$ y $U \in D(X_2)$, $\Psi(f)(U) = f^{-1}(U)$.

(Φ_1) Si A es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\Phi(A) = X(A)$,

(Φ_2) si $h \in (A_1, A_2)_{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ y $P \in X(A_2)$, $\Phi(h)(P) = h^{-1}(P)$.

Resultando que las composiciones $\Psi \circ \Phi$ y $\Phi \circ \Psi$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad $Id_{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ y $Id_{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$ sobre las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, respectivamente, siendo los isomorfismos σ_A y ε_X las componentes de las transformaciones naturales. Es decir, para todo $A_1, A_2 \in Obj(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ y para todo morfismo $h \in (A_1, A_2)_{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_{A_1}"'] & A_2 \arrow[d, "\sigma_{A_2}"] \\ D(X(A_1)) \arrow[r, "\Psi(\Phi(h))"'] & D(X(A_2)) \end{tikzcd}$$

Además para todo $X_1, X_2 \in Obj(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ y para todo morfismo $f \in (X_1, X_2)_{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_{X_1}"'] & X_2 \arrow[d, "\varepsilon_{X_2}"] \\
X(D(X_1)) \arrow[r, "\Phi(\Psi(f))"'] & X(D(X_2))
\end{tikzcd}
$$

Más precisamente, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet A_1 \arrow[dl, "Id_{\mathcal{L}}"'] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"] \arrow[dd, "h"] & \\
Id_{\mathcal{L}}(A_1) = A_1 \bullet \arrow[rr, "\sigma_{A_1}"'] \arrow[dd, "Id_{\mathcal{L}}(h) = h"'] & & \bullet\, (\Psi \circ \Phi)(A_1) = D(X(A_1)) \arrow[dd, "(\Psi \circ \Phi)(h)"] \\
 & \bullet A_2 \arrow[dl, "Id_{\mathcal{L}}"'] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"] & \\
Id_{\mathcal{L}}(A_2) = A_2 \bullet \arrow[rr, "\sigma_{A_2}"'] & & \bullet\, (\Psi \circ \Phi)(A_2) = D(X(A_2))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet X_1 \arrow[dl, "Id_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dr, "\Phi \circ \Psi"] \arrow[dd, "f"] & \\
Id_{\mathcal{P}}(X_1) = X_1 \bullet \arrow[rr, "\epsilon_{X_1}"'] \arrow[dd, "Id_{\mathcal{P}}(f) = f"'] & & \bullet\, (\Phi \circ \Psi)(X_1)) = X(D(X_1)) \arrow[dd, "(\Phi \circ \Psi)(f)"] \\
 & \bullet X_2 \arrow[dl, "Id_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dr, "\Phi \circ \Psi"] & \\
Id_{\mathcal{P}}(X_2) = X_2 \bullet \arrow[rr, "\epsilon_{X_2}"'] & & \bullet\, (\Phi \circ \Psi)(X_2) = X(D(X_2))
\end{tikzcd}
$$

Por otra parte, H. A. Priestley (ver [71, 72, 73]) caracterizó a las congruencias de los retículos distributivos acotados por medio de ciertos subconjuntos del $P-$espacio asociado de la siguiente manera:

Sean A retículo distributivo acotado y $X(A)$ el $P-$espacio asociado. Si Y es un subconjunto cerrado de $X(A)$, entonces

(A6) $\Theta(Y) = \{(a,b) \in A \times A : \sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y\}$

$$= \{(a,b) \in A \times A : \, (\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \cap Y = \emptyset\},$$

es una congruencia de A, donde $\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)$ es la diferencia simétrica de $\sigma_A(b)$ con $\sigma_A(a)$.

Recíprocamente, si $\vartheta \in Con(A)$ y $h : A \longrightarrow A/\vartheta$ es el epimorfismo canónico, entonces

(A7) $Y = \{ h^{-1}(Q) : Q \in X(A/\vartheta)\}$

es un subconjunto cerrado de $X(A)$ y $\Theta(Y) = \vartheta$.

Además, la correspondencia $Y \longrightarrow \Theta(Y)$ establece un isomorfismo del retículo $\mathcal{C}(X(A))$ de los subconjuntos cerrados de $X(A)$ sobre el dual del retículo $Con(A)$ de las congruencias de A.

Más precisamente, H. A. Priestley formuló el siguiente teorema:

Teorema 1.4.1.1 *Sean A un retículo distributivo y $X(A)$ el espacio de Priestley asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}X(A))$, de todos los subconjuntos cerrados de $X(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con(A)$ de todas las congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ definida por la prescripción dada en* (A6).

Cabe mencionar que también se pueden caracterizar a las congruencias de un retículo distributivo acotado A por medio de los subconjuntos abiertos de su $P-$espacio asociado $X(A)$. En este caso, si G es un subconjunto abierto de $X(A)$, entonces la congruencia de retículo $\Theta_O(G)$ determinada por G es la congruencia de retículo $\Theta(X(A) \backslash G)$ determinada por el subconjunto cerrado $X(A) \setminus G$, es decir para todo $a, b \in A$,

(A8) $(a,b) \in \Theta_O(G)$ si, y solo si, $\sigma_A(a) \cap (X(A) \setminus G) = \sigma_A(b) \cap (X(A) \setminus G)$,

y por lo tanto,

(A9) $(a,b) \in \Theta_O(G)$ si, y solo si, $(\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \subseteq G$.

Luego, la correspondencia $G \longrightarrow \Theta_O(G)$ define un isomorfismo del retículo $\mathcal{O}(X(A))$ de los subconjuntos abiertos de $X(A)$ sobre el retículo $Con(A)$ de las congruencias de A.

Más, precisamente, se verifica:

Teorema 1.4.1.2 *Sean A un retículo distributivo y $X(A)$ el espacio de Priestley asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{O}X(A))$, de todos los subconjuntos abiertos de $X(A)$, es isomorfo al retículo $Con(A)$ de todas las congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_O definida por la prescripción dada en* (A9).

Esta última caracterización es fundamental para el estudio de las congruencias principales de las álgebras de Łukasiecz–Moisil $\theta-$valuadas.

Una clase importante de congruencias en los retículos distributivos acotados es la de las congruencias determinadas por los filtros del retículo, las cuales se definen la siguiente manera:

Sea A un retículo distributivo acotado y $F \subseteq A$ un filtro de A. Entonces

$$\mathbf{\Theta}(F) = \{a, b) \in A \times A : \text{ existe } f \in F \text{ tal que } \ a \wedge f = b \wedge f\}$$

es una congruencia de A que llamamos la *congruencia asociada a F o la congruencia determinada por F.*

Bajo la dualidad de Priestley, el retículo de todos los filtros de un retículo distributivo acotado es isomorfo al dual del retículo de todos los subconjuntos cerrados y crecientes del espacio dual. Bajo tal isomorfismo, a cualquier filtro F de un retículo distributivo acotado A le corresponde el subconjunto cerrado y creciente de $X(A)$,

(A10) $Y_F = \{x \in X(A) : F \subseteq x\} = \bigcap\{\sigma_A(a) : a \in F\}$,

y además se verifica que $\Theta(Y_F) = \mathbf{\Theta}(F)$, donde $\mathbf{\Theta}(F)$ es la congruencia de retículo asociada a F y $\Theta(Y_F)$ es la congruencia de retículo definida por la prescripción dada en (A6).

Recíprocamente, a todo subconjunto cerrado y creciente Y de $X(A)$ le corresponde el filtro,

(A11) $F_Y = \{a \in A : Y \subseteq \sigma_A(a)\} = \bigcap_{x \in Y} x$,

y además $\mathbf{\Theta}(F_Y) = \Theta(Y)$, donde $\mathbf{\Theta}(F_Y)$ es la congruencia de retículo asociada a F_Y y $\Theta(Y)$ es la congruencia de retículo definida por la prescripción dada en (A6).

Luego, de (A6), (A10) y (A11) se infiere:

(A12) $\Theta_C(Y) = \mathbf{\Theta}(F_Y)$ para todo todo subconjunto cerrado y creciente Y de $X(A)$,

donde Θ_C está definido como en (A6) y F_Y es el filtro de A indicado en (A11).

Por lo tanto, se verifica:

Teorema 1.4.1.3 *Sean A un retículo distributivo acotado y $X(A)$ su $P-$espacio asociado. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_C(X(A))$ de los subconjuntos cerrados y crecientes de $X(A)$, es isomorfo el dual del retículo $Con_{\mathcal{F}}(A)$ de las congruencias determinadas por los filtros de A, y el isomorfismo Θ_C está definido por la prescripción dada en* (A6). *Además, para todo $Y \in \mathcal{C}_C(X(A)$ se verifica:*

(A12) $\Theta_C(Y) = \mathbf{\Theta}(F_Y)$, *donde F_Y es el filtro de A indicado en* (A11).

Además, observemos que si A es un retículo distributivo A, entonces por (A1), tenemos que para todo $a \in A$, $\sigma_A(a)$ es un subconjunto cerrado y creciente de $X(A)$. Luego si para cada $a \in A$, $F(a)$ es el filtro principal generado por $\{a\}$, teniendo en cuenta que $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un isomorfismo de orden, obtenemos que

$$F_{\sigma_A(a)} = \{b \in A :\ \sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(b)\} = F(a),$$

$$Y_{F(a)} = \{x \in X(A) :\ F(a) \subseteq x\} = \bigcap \{\sigma_A(b) :\ b \in F(a)\} = \sigma_A(a).$$

Por lo tanto, de estas últimas afirmaciones, (A10) y (A11) inferimos el siguiente resultado:

Proposición 1.4.1.4 *Sean A un retículo distributivo acotado, $X(A)$ su $P-$espacio asociado asociado, $D(X(A))$ el retículo asociado a $X(A)$ y $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ el isomorfismo definido en* (A1). *Entonces, cada $a \in A$ satisface la siguiente propiedad:*

(A13) $\Theta(\sigma_A(a)) = \mathbf{\Theta}(F(a))$,

donde $\Theta(\sigma_A(a))$ es la congruencia de retículo definida por la prescripción dada en (A6) *y $\mathbf{\Theta}(F(a))$ es la congruencia de retículo asociada al filtro principal $F(a)$ generado por $\{a\}$.*

En lo que sigue, si Y es un subconjunto de un conjunto ordenado $(X, \leq)$, notamos con $\uparrow Y$ ($\downarrow Y$) el conjunto de todos los $x \in X$ tal que $y \leq x$ ($x \leq y$) para algún $y \in Y$. Escribimos $\uparrow x$ ($\downarrow$) en lugar de $\uparrow \{x\}$ ($\downarrow \{x\}$) para todo $x \in X$. Además si $y, z \in X$, entonces notamos con $[y, z]$ al conjunto $\{x \in X : y \leq x \leq z\}$.

Teniendo en cuenta que en el caso en que A es un retículo, para cada $a \in A$, el filtro principal $F(a)$ generado por $\{a\}$ coince con $\uparrow a$, entonces también notamos a este filtro por $\uparrow a$.

A continuación enunciamos algunas propiedades de los espacios de Priestley que se usan con frecuencia en este trabajo.

(P1) R es un subconjunto cerrado, abierto y convexo de un $P-$espacio X si, y solo si, existen $U, V \in D(X)$ tales que $V \subseteq U$ y $R = U \setminus V$, donde un subconjunto Y de X es *convexo* si $Y = \downarrow Y \cap \uparrow Y$, o equivalentemente si $x, y \in Y$ implica que $[x, y] \subseteq Y$, donde $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$.

Si A un subconjunto cerrado de un $P-$espacio X, entonces se verifican:

(P2) $min\, A \neq \emptyset$ y $max\, A \neq \emptyset$, donde $min\, A$ es el conjunto de los elementos minimales de A y $max\, A$ es el conjunto de los elementos maximales de A. En particular, $min\, X \neq \emptyset$ y $max\, X \neq \emptyset$,

(P3) para cada $x \in A$ existen $y \in min\, A$ y $z \in max\, A$ tales que $y \leqslant x \leqslant z$,

(P4) $\uparrow A$ y $\downarrow A$ son subconjuntos cerrados de X.

1.4.2. Dualidad para las álgebras de De Morgan

En 1977, W. H. Cornish y P. R. Fowler (ver [22, 23]) construyeron una categoría en términos de espacios de Priestley naturalmente equivalente a la dual de la categoría de las álgebras de De Morgan y sus correspondientes homomorfismos. Para ello introdujeron las siguientes nociones:

Un espacio de De Morgan (o $mP-$espacio) es un par (X, g), donde X es un espacio de Priestley, y $g : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo involutivo y un anti-isomorfismo de *orden.*

Una $mP-$función de un $mP-$espacio (X, g) en otro (X', g') es una función continua y creciente (P–función) f de X en X' que verifican la condición adicional:

(mPf) $f \circ g = g' \circ f$.

Cuando X es un $mP-$espacio definieron sobre $D(X)$ la operación $\sim$ por medio de la fórmula

(B1) $\sim U = X \setminus g^{-1}(U)$ para todo $U \in D(X)$,

y probaron que $(D(X), \sim)$ es una $DM-$álgebra.

Además, si $(A, \sim)$ es una $DM-$álgebra, definieron en el $P-$espacio $X(A)$, asociado a A, el homeomorfismo e isomorfismo de orden g_A de $X(A)$ en $X(A)$ por

(B2) $g_A(P) = X(A) \setminus \{\sim x : x \in P\}$,

y en el $P-$espacio $Hom(A, L_2)$, asociado a A, definieron el homeomorfismo e isomorfismo de orden g_A de $Hom(A, L_2)$ en $Hom(A, L_2)$ por

(B2*) $(g_A(f))(a) = -f(\sim a)$ para todo $a \in A$,
donde $-x$ es el complemento booleano de x,

y mostraron que $(X(A), g_A)$ y $(Hom(A, L_2), g_A)$ son $mP-$espacios.

La correspondencia entre los morfismos de ambas categorías las definieron de la manera habitual. De esta manera probaron que la categoría $\mathcal{MP}$ de los $mP-$espacios y de las $mP-$funciones, es dualmente equivalente a la categoría $\boldsymbol{\mathcal{DM}}$ de las $DM-$álgebras y los homomorfismos de $DM-$álgebras, donde los isomorfismos σ_A y ε_X, definidos en (A1) o (A4) y (A3) o (A5) respectivamente, son las equivalencias naturales correspondientes.

En [23] W. H. Cornish y P. R. Fowler caracterizaron a las congruencias de un álgebra de De Morgan, para ello introdujeron la noción de conjunto involutivo de un $mP-$espacio (X, g) como un subconjunto Y de X tal que $g(Y) = Y$. Más precisamente mostraron el siguiente teorema:

Teorema 1.4.2.1 *Si $(A, \sim)$ es una $DM-$álgebra, entonces retículo $\mathcal{C}_I(X(A))$ de los subconjuntos cerrados e involutivos de $X(A)$ es isomorfo al dual del retículo $Con_{DM}(A)$ de todas las $DM-$congruencias de A, donde el isomorfismo es la función Θ_I de $\mathcal{C}_I(X(A))$ en $Con_{DM}(A)$ definida por la misma prescripción que en* (A6).

1.4.3. Dualidad de A. Filipoiu para las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\boldsymbol{\theta}-$valuadas sin y con negación

En 1980 A. Filipoiu (ver [13], [38], [39]) extendió la dualidad de Priestley a las $LM_\theta-$álgebras. Para ello introdujo las siguientes nociones:

*Un espacio de Priestley $\theta-$valuado (o $P_\theta-$*espacio*) es un sistema $(X, \tau, \leqslant, \{f_i\}_{i\in I})$ tal que*

(Pθ1) $(X, \tau, \leqslant)$ *es un espacio de Priestley ($P-$espacio),*

(Pθ2) $f_i : X \to X$ *es una P-función para todo* $i \in I$,

(Pθ3) $f_i \circ f_j = f_i$,

(Pθ4) *si $U \in D(X)$ e $i, j \in I$ son tales que $i \leqslant j$, entonces ${f_i}^{-1}(U) \subseteq {f_j}^{-1}(U)$,*

(Pθ5) $X \setminus {f_i}^{-1}(U) \in D(X)$ *para todo $U \in D(X)$,*

(Pθ6) *si $U, V \in D(X)$ y $f_i^{-1}(U) = f_i^{-1}(V)$ para todo $i \in I$, entonces $U = V$.*

Una $P_\theta-$función de un $P_\theta-$espacio $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ en otro $P_\theta-$espacio $(X', \{{f_i}'\}_{i\in I})$ es una función continua y creciente ($P-$función) f de X en X' que satisface $f'_i \circ f = f \circ f_i$ para todo $i \in I$.

El mismo autor consideró la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}r\theta}$ cuyos objetos son los $P_\theta-$espacios y cuyos morfismos son las $P_\theta-$funciones entre $P_\theta-$espacios y probó que esta categoría es naturalmente equivalente a la categoría dual de $\boldsymbol{\mathfrak{LM}_\theta}$. Para ello demostró los resultados detallados a continuación.

(C1) Si $(X,\{f_i\}_{i\in I})$ es un $P_\theta-$espacio, entonces $\langle D(X),\cap,\cup,\{\phi_i^X\}_{i\in I},\{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I},\emptyset,X\rangle$ $=\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $LM_\theta-$álgebra, donde ϕ_i^X y $\overline{\phi}_i^X$ están definidas respectivamente por las prescripciones $\phi_i^X(U)=f_i^{-1}(U)$, $\overline{\phi}_i^X(U)=X\setminus f_i^{-1}(U)$ para todo $U\in D(X)$.

(C2) Si $(A,\{\phi_i\}_{i\in I},\{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ es una $LM_\theta-$álgebra, entonces $(Hom(A,L_2),\{f_i^A\}_{i\in I})=$ Ł$_\theta(A)$ es un $P_\theta-$espacio, donde para cada $i\in I$, se define la función $f_i^A: Hom(A,L_2)\longrightarrow Hom(A,L_2)$ por la prescripción $f_i^A(g)=g\circ\phi_i$ para todo $g\in Hom(A,L_2)$.

La correspondencia entre los morfismos de estas categorías las definió de la manera habitual, como en la Sección 1.4.1.

A. Filipoiu extendió la dualidad anterior y la determinada por W. Cornish y P. Fowler en [22] para las álgebras de De Morgan a las $nLM_\theta-$álgebras (ver [13], [38], [39]), construyendo la categoría $\boldsymbol{\mathfrak{N}\mathcal{P}r\theta}$ cuyos objetos y morfismos los indicamos a continuación.

Un espacio de Priestley $\theta-$valuado con negación (o $NP_\theta-$espacio) es un sistema $(X,\tau,\leqslant,g,\{f_i\}_{i\in I})$ tal que

(NPθ1) $(X,\tau,\leqslant,g)$ *es un $mP-$espacio,*

(NPθ2) $(X,\tau,\leqslant,\{f_i)\}_{i\in I})$ *es un $P_\theta-$espacio,*

(NPθ3) $f_i\circ g=f_i$,

(NPθ4) $g\circ f_i=f_{d(i)}$, *donde $d:I\to I$ es una involución decreciente.*

Una $NP_\theta-$función entre los $NP_\theta-$espacios $(X,g,\{f_i\}_{i\in I})$ y $(X',g',\{f_i{}'\}_{i\in I})$ es una función continua y creciente ($P-$función) f de X en X' que satisface $f\circ g=g'\circ f$ y $f_i'\circ f=f\circ f_i$ para todo $i\in I$.

Este autor demostró que la categoría $\boldsymbol{\mathfrak{N}\mathcal{P}r\theta}$ es naturalmente equivalente a la categoría dual de $\boldsymbol{n\mathfrak{L}\mathfrak{M}_\theta}$.

1.4.4. Dualidad de Cignoli para los $Q-$retículos distributivos

En [18], R. Cignoli con el propósito de extender la dualidad de Priestley a la categoría $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ de los $Q-$retículos distributivos y los $Q-$homomorfismos, introdujo la categoría $\boldsymbol{q\mathcal{P}}$

cuyos objetos son los $qP-$espacios y cuyos morfismos son las $qP-$funciones, donde:

Un $qP-$espacio es un par (X, E) tal que X es un $P-$espacio y E es una relación de equivalencia sobre X que satisface las dos condiciones siguientes:

(q1) *$E(U) \in D(X)$ para cada $U \in D(X)$,*

donde $E(U) = \{y \in X : (x, y) \in E$ para algún $x \in U\}$,

(q2) *las clases de equivalencia determinadas por E son subconjuntos cerrados de X.*

Una $qP-$función de un $qP-$espacio (X, E) en otro (X', E') es una $P-$función f de X en X' tal que verifica la siguiente condición:

(qf1) *$E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(E'(U))$ para todo $U \in D(X')$.*

En [28] (ver Proposición 5.1.2.5) se caracterizó las $qP-$funciones de la siguiente manera:

Sean (X, E) y (X', E') $qP-$espacios. Una función f de X en X' es una $qP-$función si, y solo si, f es una $P-$función que satisface las siguientes propiedades:

(qf2) *si $(x, y) \in E$, entonces $(f(x), f(y)) \in E'$,*

(qf3) *si $(f(x), z) \in E'$, entonces existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in E$ y $z \leq f(y)$,*

o equivalentemente $E(\downarrow f(x)) \subseteq \downarrow E(f(x))]$ para todo $x \in X$.

En [18] se caracterizaron los isomorfismos de la categoría $\boldsymbol{q\mathfrak{P}}$ como lo indicamos a continuación:

Si (X, E) y (X', E') son objetos en $\boldsymbol{q\mathfrak{P}}$ y f es una función de X en X', entonces f es un isomorfismo en $\boldsymbol{q\mathfrak{P}}$ si, y solo si, f es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo que verifica la condición:

(qf4) *$(x, y) \in E$ si, y solo si, $(f(x), f(y)) \in E'$.*

Además R. Cignoli en [18] demostró:

(E1) Si (X, E) es un $qP-$espacio, entonces $(D(X), \exists_E)$ es un $Q-$retículo distributivo, donde $\exists_E U = E(U)$ para cada $U \in D(X)$, y $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, definido en (A3), es un isomorfismo en $\boldsymbol{q\mathfrak{P}}$.

(E2) Si A es un $Q-$retículo, $X(A)$ es el espacio de Priestley de A y

$$E_{\exists} = \{(P, R) \in X(A) \times X(A) : P \cap \exists(A) = R \cap \exists(A)\},$$

entonces $(X(A), E_{\exists})$ es un $qP-$espacio, y $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$, definida en (A1), es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$.

(E3) Los isomorfismos σ_A y ε_X dan una equivalencia natural entre la categoría $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ y la categoría dual de $\boldsymbol{q\mathcal{P}}$.

Las correspondencias entre los morfismos de las categorías $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ y $\boldsymbol{q\mathcal{P}}$ las definió de la manera habitual, como en (Ψ_2) y (Φ_2) en la Sección 1.4.1.

Por otra parte en [18], R. Cignoli indicó como obtener algunas $Q-$congruencias de un $Q-$retículo a partir de su $qP-$espacio asociado, para ello introdujo la noción de *conjunto saturado de un* $qP-$*espacio* (X, E) *como un subconjunto* Y *de* X *tal que* $E(Y) = Y$, y probó el siguiente resultado:

(E4) *Sea* A *un* $Q-$*retículo. Si* Y *es un subconjunto cerrado y saturado de* $X(A)$ *y* $\Theta(Y) = \{(a, b) \in A \times A : \sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y\}$, *entonces la congruencia de retículo* $\Theta(Y)$ *preserva al operador* $\exists$.

1.4.5. Dualidad para los $M-$retículos distributivos

En 2006 A. V. Figallo, I. Pascual y A. Ziliani ([31]), con el fin de obtener una dualidad para los $M-$retículos distributivos, construyeron la categoría $\boldsymbol{m\mathcal{P}}$ de marcos de Ono perfectos y sus correspondientes morfismos, donde tanto los objetos como los morfismos cumplen ciertas condiciones adicionales y probaron que esa categoría es naturalmente equivalente a la categoría dual de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ de los $M-$retículos distributivos y sus correspondientes homomorfismos. Luego, en 2013, estos autores determinaron otra dualidad para los $M-$retículos distributivos ([35]), para ello introdujeron la categoría $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$ cuyos objetos son los $mqP-$espacios y cuyos morfismos son las $mqP-$funciones, la que describimos a continuación.

Un $qP-$*espacio* (X, E) *es un* $mqP-$*espacio si satisface las siguientes condiciones:*

(mq1) *Si* $(x, y) \in E$ *e* $y \leq z$*, entonces existe* $w \in X$ *tal que* $x \leq w$ *y* $(w, z) \in E$*,*

(mq2) *para todo* $U \in D(X)$*,* $\downarrow E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X*.*

Más precisamente, (X, E) *es un* $mqP-$*espacio si* X *es un* $P-$*espacio y satisface las siguientes condiciones:*

(q1) $E(U) \in D(X)$ *para cada* $U \in D(X)$*,*

(q2) *las clases de equivalencia determinadas por* E *son subconjuntos cerrados de* X*.*

(mq1) *Si* $(x, y) \in E$ *e* $y \leq z$*, entonces existe* $w \in X$ *tal que* $x \leq w$ *y* $(w, z) \in E$*,*

(mq2) *para todo* $U \in D(X)$*,* $\downarrow E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X*.*

Sean (X_1, E_1) *y* (X_2, E_2) $mqP-$*espacios. Una* $mqP-$*función* f *de* X_1 *en* X_2 *es una* $qP-$*función que verifica la siguiente condición:*

(mqf1) $\downarrow E_1(f^{-1}(X_2 \setminus U)) = f^{-1}(\downarrow E_2(X_2 \setminus U))$ *para todo* $U \in D(X_2)$*.*

Es decir, *una* $mqP-$*función* f *de un* $mqP-$*espacio* (X_1, E_1) *en otro* $mqP-$*espacio* (X_2, E_2) *es una función continua y monótona creciente que verifica las siguientes condiciones:*

(qf1) $E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(E'(U))$ *para todo* $U \in D(X_2)$*,*

(mqf1) $\downarrow E_1(f^{-1}(X_2 \setminus U)) = f^{-1}(\downarrow E_2(X_2 \setminus U))$ *para todo* $U \in D(X_2)$*.*

En [35] los autores antes mencionados probaron que la condición (mq1) en la definición de $mqP-$espacio es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:

(mq3) $\uparrow E(x) \subseteq E(\uparrow x)$ para cada $x \in X$,

(mq4) $E(\downarrow x) \subseteq \downarrow E(x)$ para cada $x \in X$.

Además probaron que la condición (mqf1) en la definición de una $mqP-$función f entre $mqP-$espacios (X_1, E_1), (X_2, E_2) es equivalente a la siguiente condición:

(mqf2) $E_2(\uparrow f(x)) = \uparrow f(E_1(x))$ para todo $x \in X_1$.

Más precisamente obtuvieron la siguiente formulación equivalente de una $mqP-$función:

(F1) *Sean* (X_1, E_1), (X_2, E_2) *mqP−espacios y* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es una mqP−función,*

(ii) f *es una función continua y monótona creciente que satisface:*

(qf2) $(x, y) \in E_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in E_2$,

(qf3) $E_2(f(x)) \subseteq\downarrow f(E_1(x))$ *para todo* $x \in X_1$,

(mqf2) $E_2(\uparrow f(x)) =\uparrow f(E_1(x))$ *para todo* $x \in X_1$.

También en [35] se caracterizaron los isomorfismos de la categoría $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$ de la siguiente manera:

(F2) *Sean* (X_1, E_1) *y* (X_2, E_2) *mqP−espacios y* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es un isomorfismo en* $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$,

(ii) f *es un isomorfismo en* $\boldsymbol{q\mathcal{P}}$.

Además, con el objeto de probar que las categorías $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ son dualmente equivalentes, estos autores demostraron los siguientes resultados:

(F3) Si (X, E) es un $mqP-$espacio, entonces $(D(X), \forall_E, \exists_E)$ es un $M-$retículo, donde $\exists_E U = E(U)$ y $\forall_E U = X \setminus \downarrow E(X \setminus U)$ para cada $U \in D(X)$.

(F4) Si $(L, \forall, \exists)$ es un $M-$retículo, entonces $(X(L), E_\exists)$ es un $mqP-$espacio, donde $E_\exists = \{(P, T) \in X(L) \times X(L) : P \cap \exists(L) = T \cap \exists(L)\}$.
Además, la función $\sigma_L : L \longrightarrow D(X(L))$, definida por $\sigma_L(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$ para cada $a \in L$, es un $M-$isomorfismo.

(F5) Si (X, E) un $mk-$marco, entonces $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, definido come en (A3), es un isomorfismo en $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$.

(F6) Los isomorfismos σ_A y ε_X dan una equivalencia natural entre la categoría $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y la categoría dual de $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$.

(F7) La correspondencia entre los morfismos de las categorías $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$ las definieron por las prescripciones dadas en (Ψ_2) y (Φ_2) en la Sección 1.4.1.

También en [35] se construyó la categoría $\boldsymbol{m\mathcal{KF}}$ de los $mk-$marcos y $mk-$funciones, la que describimos a continuación.

Un marco de Kripke ampliado monádico (o mk−marco) es una cuaterna $(X, \Omega, \leq, E)$*, donde* (X, Ω) *es un espacio topológico,* $(X, \leq)$ *es un conjunto no vacío ordenado,* E *es una relación de equivalencia sobre* X *y se verifican las siguientes condiciones:*

(mk1) $(X, \leq, E)$ *es un marco de Kripke ampliado* ([6]) *o equivalentemente,*

(k1) $(X, \leq)$ *es un conjunto ordenado no vacío,*

(k2) E *es una relación de equivalencia sobre* X*,*

(k3) $\leq \circ E \subseteq E \circ \leq$,

(mk2) $(X, \Omega, \leq)$ *es un espacio de Priestley,*

(mk3) E *es una relación cerrada,*

(mk4) *para cada* $U \in D(X)$*,* $E(U)$ *es un subconjunto abierto de* X*,*

(mk5) *para cada* $U \in D(X)$*,* $\downarrow E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X*.*

En lo que sigue, para simplificar, denotamos a un $mk-$marco por (X, E).

Sean (X_1, E_1) *y* (X_2, E_2) *mk−marcos. Una mk−función* f *de* X_1 *en* X_2 *es una función continua y monótona creciente que satisface las siguientes condiciones:*

(mkf1) $(x, y) \in E_1$ implica $(f(x), f(y)) \in E_2$,

(mkf2) $E_2(f(x)) \subseteq \downarrow f(E_1(x))$ para todo $x \in X_1$,

(mkf3) $E_2(\uparrow f(x)) \subseteq \uparrow f(E_1(x))$ para todo $x \in X_1$.

Se probó en [35] que la categoría $\boldsymbol{m\mathcal{KF}}$ coincide con la categoría $\boldsymbol{mq\mathcal{P}}$ y que por lo tanto, $\boldsymbol{m\mathcal{KF}}$ es dualmente equivalente a la categoría $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

G. Bezhanishvili ha realizado una investigación exhaustiva de las álgebras de Heyting monádicas [5, 6, 7]. En particular, en [6] desarrolló una teoría de dualidad para estas álgebras. Para determinar una de estas dualidades, este autor introdujo la categoría $\boldsymbol{p\mathcal{AKF}}$ de los marcos de Kripke ampliados perfectos y sus correspondientes morfismos. En [35] se demostró que la categoría $\boldsymbol{p\mathcal{AKF}}$ es una subcategoría propia de $\boldsymbol{m\mathcal{KF}}$.

Con el propósito de caracterizar el retículo de las congruencias de un $M-$retículo por medio de ciertos subconjuntos cerrados de su $mqP-$espacio asociado los autores antes mencionados introdujeron en [31] la siguiente noción:

Definición 1.4.5.1 *Sea (X, E) un $mqP-$espacio. Un suconjunto Y de X es $E-$saturado si $min\, E(\uparrow y) \cup max\, E(y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$.*

Luego, probaron los siguientes resultados:

Teorema 1.4.5.2 *Sean $L \in Obj(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ y $X(L)$ el $mqP-$espacio asociado a L. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{E_\exists S}(X(L))$, de los subconjuntos cerrados y $E_\exists-$saturados de $X(L)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_M(L)$ de las $M-$congruencias de L y el isomorfismo es la función $\Theta_{E_\exists S}$ definida por la prescripción $\Theta_{E_\exists S} = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$.*

Proposición 1.4.5.3 *Sean $L \in Obj(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ y $X(L)$ el $mqP-$espacio asociado a L. Si Y es un subconjunto $E_\exists-$saturado de $X(L)$, entonces $\overline{Y}$ es también $E_\exists-$saturado, donde $\overline{Y}$ denota la clausura de Y.*

1.4.6. Dualidad para los $sM-$retículos distributivos

En [32] A. V. Figallo, I. Pascual y A. Ziliani determinaron dos dualidades topológicas para los $sM-$retículos distributivos que extienden la dualidades para los $M-$retículos distributivos dadas en [35]. Para obtener una de ellas introdujeron la categoría $\boldsymbol{sm\mathcal{KF}}$ de los $smk-$marcos y las $smk-$funciones, la que detallamos a continuación.

Un marco de Kripke ampliado monádico fuerte ($smk-$marco) es un marco de Kripke ampliado monádico $(X, \Omega, \leq, E)$ que verifica la siguiente condición:

(smk1) $E \circ \leq \, \subseteq \, \leq \circ E$.

Más precisamente, $(X, \Omega, \leq, E)$ *es un marco de Kripke ampliado monádico fuerte si satisface las siguientes condiciones:*

(mk1) $(X, \leq, E)$ *es un marco de Kripke ampliado* ([6]), *o equivalentemente,*

(k1) $(X, \leq)$ *es un conjunto ordenado no vacío,*

(k2) E *es una relación de equivalencia sobre* X,

(k3) $\leq \circ E \subseteq E \circ \leq$,

(mk2) $(X, \Omega, \leq)$ *es un espacio de Priestley,*

(mk3) E *es una relación cerrada,*

(mk4) *para cada* $U \in D(X)$, $E(U)$ *es un subconjunto abierto de* X,

(mk5) *para cada* $U \in D(X)$, $\downarrow E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X,

(smk1) $E \circ \leq \subseteq \leq \circ E$.

En lo que sigue, para simplificar, denotamos a un $smk-$marco por (X, E).

Sean (X_1, E_1) *y* (X_2, E_2) $smk-$*marcos,* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *es una* $smk-$*función, si es una* $mk-$*función.*

Además en [32] se demostró la siguiente equivalencia:

(X, E) *es un* $smk-$*marco si, y solo si,* (X, E) *es un* $mqP-$*espacio que verifica la siguiente condición:*

(smq1) $E(\uparrow x) \subseteq \uparrow E(x)$ *para todo* $x \in X$.

Por esta razón a los $smk-$marcos se los llama también espacios monádicos fuertes o $smqP-$espacios.

Estos autores en [32] obtuvieron dos propiedades de los $smqP-$espacios equivalentes a la propiedad (smq1). Para ello probaron:

Sea $(X, \leq, E)$ tal que $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado no vacío y E es una relación de equivalencia. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(smq1) $E(\uparrow x) \subseteq \uparrow E(x)$ *para cada* $x \in X$,

(smq2) $\downarrow E(x) \subseteq E(\downarrow x)$ *para cada* $x \in X$,

(smq3) *si* x, y, $z \in X$, $(x, y) \in E$ *y* $z \leq y$, *entonces existe* $w \in X$ *tal que* $w \leq x$ *y* $(z, w) \in E$.

Teniendo en cuenta que en un *smqP*$-$espacio $(X, \leq, E)$ se verifican las condiciones (mq3) y (smq1), o las condiciones respectivamente equivalentes (mq4) y (smq2), podemos afirmar:

Un smqP$-$espacio o un smk$-$marco es un mqP$-$espacio (X, E) que verifica la condición adicional:

(smq4) $E(\uparrow x) = \uparrow E(x)$ *para todo* $x \in X$,

o equivalentemente,

(smq4*) $\downarrow E(x) = E(\downarrow x)$ *para todo* $x \in X$.

Además estos autores demostraron en [32]:

Lema 1.4.6.1 *Sea (X, E) un smk$-$marco. Entonces para cada subconjunto abierto, cerrado y creciente U de X, $\downarrow E(X \setminus U) = E(X \setminus U)$.*

Dem. Sean $U \in D(X)$ y $x, y, z \in X$ tales que $z \leq y$, $y \in E(x)$ y (1) $x \in X \setminus U$. Entonces, por (smq3), existe un $w \in X$ tal que (2) $w \leq x$ y (3) $(z, w) \in E$. Como $X \setminus U$ es decreciente, entonces de (1) y (2) se sigue que $w \in X \setminus U$, y por (3) obtenemos que $z \in E(X \setminus U)$, de donde concluimos que $\downarrow E(X \setminus U) \subseteq E(X \setminus U)$ y por lo tanto, $\downarrow E(X \setminus U) = E(X \setminus U)$. $\square$

Del Lema 1.4.6.1 obtenemos la siguiente formulación equivalente de marco de Kripke ampliado monádico fuerte o *smk*$-$marco.

Corolario 1.4.6.2 *Sea $(X, \Omega, \leq, E)$, donde (X, Ω) es un espacio topológico, $(X, \leq)$ es un conjunto no vacío ordenado, E es una relación de equivalencia sobre X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, \Omega, \leq, E)$ *es un marco de Kripke ampliado monádico fuerte o smk−marco,*

(ii) $(X, \Omega, \leq, E)$ *satisface las siguientes condiciones:*

(mk1) $(X, \leq, E)$ *es un marco de Kripke ampliado* ([6]),

(mk2) $(X, \Omega, \leq)$ *es un espacio de Priestley,*

(mk3) E *es una relación cerrada,*

(mk4) $E(U)$ *es un subconjunto abierto de* X *para todo* $U \in D(X)$,

(smq5) $E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X *para todo* $U \in D(X)$,

(smk1) $E \circ \leq \subseteq \leq \circ E$,

(iii) $(X, \Omega, \leq, E)$ *satisface las siguientes condiciones:*

(mk2) $(X, \Omega, \leq)$ es un espacio de Priestley,

(q1) $E(U) \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$,

(q2) las clases de equivalencia determinadas por E son subconjuntos cerrados de X,

(mq1) si $(x, y) \in E$ e $y \leq z$, entonces existe $w \in X$ tal que $x \leq w$ y $(w, z) \in E$,

(smq1) $E(\uparrow x) \subseteq \uparrow E(x)$ *para cada* $x \in X$,

(smq5) $E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X *para todo* $U \in D(X)$.

Del Lema 1.4.6.1 obtenemos la siguiente formulación equivalente de $smqP-$función entre $smqP-$espacios

Corolario 1.4.6.3 *Sean* (X_1, E_1) *y* (X_2, E_2) *smk−marcos. Entonces para cada función monótona creciente y continua* $f : X_1 \longrightarrow X_2$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es una smqP−función,*

(ii) f *satisface las siguientes condiciones:*

(qf1) $E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(E'(U))$ *para todo* $U \in D(X_2)$,

(smqf1) $E_1(f^{-1}(X_2 \setminus U)) = f^{-1}(E_2(X_2 \setminus U))$ *para todo* $U \in D(X_2)$.

Además el Lema 1.4.6.1 les permitió obtener una condición equivalente a la condición (mkf3) en la definición de $mk-$función (Sección 1.4.5) entre $smk-$marcos, como se indica a continuación:

Proposición 1.4.6.4 *Sean (X_1, E_1) y (X_2, E_2) $smk-$marcos. Entonces para cada función monótona creciente y continua $f : X_1 \longrightarrow X_2$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(mkf2) $E_2(\uparrow f(x)) \subseteq \uparrow f(E_1(\uparrow x))$ para todo $x \in X_1$,

(smqf1) $f^{-1}(E_2(X_2 \setminus U)) \subseteq E_1(f^{-1}(X_2 \setminus U))$ para cada $U \in D(X_2)$.

(smkf1) $\uparrow E_2(f(x)) \subseteq \uparrow f(\uparrow E_1(x))$ para todo $x \in X_1$,

Dem. Es consecuencia inmediata de (F1), el Lema 1.4.6.1 y la propiedad (smq4) de los $smk-$marcos. □

Para demostrar que la categoría $\boldsymbol{sm\mathcal{KF}}$ es dualmente equivalente a la categoría $\boldsymbol{s\mathcal{M}}$, estos autores probaron:

(G1) Si (X, E) es un $smk-$marco, entonces $(D(X), \forall_E, \exists_E)$ es un $sM-$retículo, donde $\exists_E U = E(U)$ y $\forall_E U = X \setminus E(X \setminus U)$ para cada $U \in D(X)$.

(G2) Si $(L, \forall, \exists)$ un $sM-$retículo, $X(L)$ es el espacio de Priestley asociado a L, $E_\exists = \{(P, T) \in X(L) \times X(L) : \ P \cap \exists(L) = T \cap \exists(L)\}$, entonces $(X(L), E_\exists)$ es un $smk-$marco. Además $\sigma_L : L \longrightarrow D(X(L))$, definido como en (F4), es un $sM-$isomorfismo.

(G3) Si (X_1, E_1) y (X_2, E_2) son $smk-$marcos y $f : X_1 \longrightarrow X_2$ es una función, entonces, f es un isomorfismo en $\boldsymbol{sm\mathcal{KF}}$ si, y solo si, f es un isomorfismo en la categoría $\boldsymbol{q\mathcal{P}}$ de los $qP-$espacios y las $qP-$funciones (Sección 1.4.4).

(G4) Si (X, E) un $smk-$marco, entonces $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, definido como en (A3), es un isomorfismo en $\boldsymbol{sm\mathcal{KF}}$.

(G5) Los isomorfismos σ_A y ε_X dan una equivalencia natural entre la categoría $\boldsymbol{s\mathcal{M}}$

y la categoría dual de $\boldsymbol{sm\mathcal{KF}}$.

Las correspondencias entre los morfismos de las categorías $\boldsymbol{s\mathcal{M}}$ y $\boldsymbol{sm\mathcal{KF}}$ las definieron por las prescripciones dadas en (Ψ_2) y (Φ_2) en la Sección 1.4.1.

Con el propósito de caracterizar el retículo de las congruencias de un $sM-$retículo por medio de ciertos subconjuntos cerrados de su $smk-$marco asociado, probaron la equivalencia formulada en el siguiente lema.

Lema 1.4.6.5 *Sea (X, E) un smk$-$marco. Si Y es un subconjunto no vacío de X, entonces Y es $E-$saturado según la* Definición 1.4.5.1 *si, y solo si, $min\, E(y) \cup max\, E(y) \subseteq Y$ para cada $y \in Y$.*

Dem. De (smq4) se sigue que para cada $x \in X$, $min\, E(\uparrow x) = min \uparrow E(x)$. Como $min \uparrow E(x) = min\, E(x)$, entonces la demostración está completa. $\square$

Luego, caracterizaron las congruencias de un $sM-$retículo distributivo de la siguiente manera:

Teorema 1.4.6.6 *Sean $L \in Obj(\boldsymbol{s\mathcal{M}})$ y $X(L)$ el smqP$-$espacio asociado a L. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{E_\exists S}(X(L))$, de los subconjuntos cerrados y $E_\exists-$saturados de $X(L)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{sM}(L)$ de las $sM-$congruencias de L y el isomorfismo es la función Θ_S definida por la prescripción $\Theta_S = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$.*

Capítulo 2

Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas

En este capítulo determinamos una dualidad topológica para las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación (o $LM_\theta-$álgebras) equivalente a la dada por A. Filipoiu en 1980. Esta dualidad nos permite obtener, no solamente una caracterización de las congruencias y las $\theta-$congruencias de estas álgebras, sino también describir las $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a las congruencias y a las $\theta-$congruencias. Además, extendemos el estudio anterior a las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación (o $nLM_\theta-$álgebras), arrivando por un método diferente a los resultados indicados por V. Boisescu y otros en [13].

Este capítulo se organiza como se indica a continuación. En la primera sección determinamos una dualidad topológica para las $LM_\theta-$álgebras y analizamos el caso particular en que θ es un entero n, $n \geq 2$ (o LM_n-álgebras). Probamos que el espacio dual de una $LM_\theta-$álgebra es un espacio de Priestley que es la suma cardinal de ciertos subconjuntos cerrados del espacio y que en las LM_n-álgebras, esta suma cardinal es una unión disjunta de sus cadenas maximales, cada una de las cuales tiene a lo sumo $n-1$ elementos. Además, en esta sección a partir de esta dualidad caracterizamos a las congruencias y las $\theta-$congruencias sobre estas álgebras por medio de ciertos subconjuntos del espacio dual. En las LM_n-álgebras encontramos que los subconjuntos cerrados del espacio dual que caracterizan a las congruencias son uniones de cadenas maximales. Como consecuencia de la caracterización de las congruencias hallamos las $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a las congruencias y con respecto a las $\theta-$congruencias y demostramos que estas álgebras coinciden. Además, probamos que el espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible es totalmente ordenado, y por lo tanto, ellas son las subálgebras del álgebra $L_2^{[I]}$, descripta en la Sección 1.2 del Capítulo 1, las cuales son también las $LM_\theta-$álgebras simples. En el caso en que θ es un entero n, $n \geq 2$, la LM_n-álgebra $L_2^{[I]}$ es isomorfa a la cadena L_n de n fracciones racionales $\frac{j}{n-1}$, $0 \leq j \leq n-1$, descripta en la sección anteriormente indicada. En la segunda sección determinamos una dualidad topológica para las $nLM_\theta-$álgebras, extendiendo los resultados obtenidos en la primera sección de este capítulo. A partir de ella caracterizamos las congruencias y las $\theta-$congruencias de estas álgebras y obtenemos las $nLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a ambas congruencias. Al igual que en las $LM_\theta-$álgebras, estas álgebras coinciden y son las subálgebras de la $nLM_\theta-$álgebra $L_2^{[I]}$, que en el caso en que $\theta = n$, $n \geq 2$, son las subálgebras de la nLM_n-álgebra L_n. Finalizamos este capítulo determinando, a través de las dualidades obtenidas, condiciones para que las nociones de LM_n-álgebra y nLM_n-álgebra sean equivalentes.

2.1. Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\boldsymbol{\theta}-$valuadas sin negación

En esta sección nos proponemos describir las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación subdirectamente irreducibles.

2.1.1. Algunas nociones de topología general

Comenzamos recordando algunas nociones y resultados de topología general que se usan con frecuencia más adelante.

Definición 2.1.1.1 *Un conjunto dirigido es un par $(D, \prec)$, donde D es un conjunto no vacío y $\prec$ es un preorden tal que para cada a, $b \in D$, existe $c \in D$ tal que $a \prec c$ y $b \prec c$.*

Para cada $d \in D$, $T_d = \{c \in D : d \prec c\}$ es el conjunto terminal asociado a d.

Definición 2.1.1.2 *Una red en un espacio topológico (X,τ) es una función $\varphi : D \longrightarrow X$, siendo D un conjunto dirigido.*

Si para cada $d \in D$, $\varphi(d) = x_d$, entonces a la red φ la notamos por $(x_d)_{d\in D}$.

Definición 2.1.1.3 *Sean (X,τ) un espacio topológico, $(D,\prec)$ y $(D',\prec')$ conjuntos dirigidos y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red. Si $f : D' \longrightarrow D$ es una función tal que para todo $c', d' \in D'$, $c' \prec' d'$ implica $f(c') \prec f(d')$, entonces a la red $\varphi \circ f : D' \longrightarrow X$ se la llama subred de la red φ.*

Observación 2.1.1.4 *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red tal que para cada $d \in D$, $\varphi(d) = x_d$. Si $\varphi \circ f : D' \longrightarrow X$ es una subred de la red $\varphi : D \longrightarrow X$, tal que para todo $c' \in D'$, $f(c') = d_{c'}$, entonces a la subred $\varphi \circ f$ la notamos por $(x_{d_{c'}})_{c'\in D'}$. En lo sucesivo, cuando escribimos $(x_{d_{c'}})_{c'\in D'} \subseteq (x_d)_{d\in D}$ significa que $(x_{d_{c'}})_{c'\in D'}$ es una subred de $(x_d)_{d\in D}$, esto es que $\{x_{d_{c'}}\}_{c'\in D'} \subseteq \{x_d\}_{d\in D}$ y si $c', e' \in D'$ y $c' \prec' e'$, entonces $d_{c'} \prec d_{e'}$.*

Definición 2.1.1.5 *Sean (X,τ) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red.*

(i) *La red φ converge a $x_0 \in X$ y escribimos $\varphi \to x_0$ si, y solo si, para todo entorno abierto de x_0, $U(x_0)$, existe $d_0 \in D$ tal que si $d \in D$ y $d_0 \prec d$, entonces $\varphi(d) \in U(x_0)$.*

(ii) *La red φ se aglomera en $x_0 \in X$ y escribimos $\varphi \succ x_0$, si, y solo si, para todo entorno abierto de x_0, $U(x_0)$, y para todo $d \in D$ existe $c_d \in D$ tal que $d \prec c_d$ y $\varphi(c_d) \in U(x_0)$.*

Lema 2.1.1.6 *Sean (X,τ) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red. Entonces:*

(i) *$\varphi \to x_0$ si, y solo si, para todo entorno abierto de x_0, $U(x_0)$, existe $d_0 \in D$ tal que $\varphi(T_{d_0}) \subseteq U(x_0)$.*

(ii) *$\varphi \succ x_0$ si, y solo si, para todo entorno abierto de x_0, $U(x_0)$, y para todo $d \in D$, $\varphi(T_d) \cap U(x_0) \neq \emptyset$.*

Lema 2.1.1.7 ([25]) *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si A es un subconjunto de X y $x \in X$, entonces $x \in \overline{A}$ si, y solo si, existe una red $\varphi : D \longrightarrow A$ tal que $\varphi \to x$, donde $\overline{Y}$ es la clausura de $Y \subseteq X$.*

Observación 2.1.1.8 Sean (X,τ) un espacio topológico y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red tal que $\varphi(d) = x_d$ para cada $d \in D$.

(i) Si la red φ converge a algún $x_0 \in X$, lo denotamos por $x_d \rightarrow x_0$. Cuando queremos especificar el conjunto dirigido D, escribimos $x_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} x_0$. En el caso en que la red $(x_d)_{d\in D}$ no converja a x_0, lo notamos por $x_d \not\rightarrow x_0$ o por $x_d \underset{d\in D}{\not\longrightarrow} x_0$.

Luego, $x_d \rightarrow x_0$, para algún $x_0 \in X$ si, y solo si, para todo entorno abierto de x_0, $U(x_0)$, existe $d_0 \in D$ tal que $\{x_d : d \in D,\, d_0 \prec d\} \subseteq U(x_0)$

(ii) Si la red φ se aglomera en algún $x_0 \in X$, escribimos $x_d \succ x_0$ o $(x_d)_{d\in D} \succ x_0$, en caso contrario, lo notamos por $x_d \not\succ x_0$ o $(x_d)_{d\in D} \not\succ x_0$.

Luego, $(x_d)_{d\in D} \succ x_0$ para algún $x_0 \in X$ si, y solo si, para todo entorno abierto de x_0, $U(x_0)$, existe una subred $(x_{d_c})_{c\in D}$ de la red $(x_d)_{d\in D}$ tal que $\{x_{d_c}\}_{c\in D} \subseteq U(x_0)$.

Observación 2.1.1.9 Sea (X,τ) un espacio topológico. Si A es un subconjunto de X y $\varphi : D \longrightarrow A$ es una red tal que $\varphi(d) = x_d$ para cada $d \in D$, entonces lo notamos por $(x_d)_{d\in D} \subseteq A$. Luego, por el Lema 2.1.1.7, $x \in \overline{A}$ si, y solo si, existe una red $(x_d)_{d\in D} \subseteq A$ tal que $x_d \rightarrow x$.

Lema 2.1.1.10 ([25]) *Sean (X,τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red en X. Si $\varphi' : D' \longrightarrow X$ es una subred de φ, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\varphi \rightarrow x$, entonces $\varphi' \rightarrow x$.*

(ii) *Si $\varphi' \succ x$, entonces $\varphi \succ x$.*

Teorema 2.1.1.11 ([25]) *Sean (X,τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red en X. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *$\varphi \rightarrow x$ si, y sólo si, para toda subred φ' de φ existe una subred φ'' de φ' tal que $\varphi'' \rightarrow x$.*

(ii) *$\varphi \succ x$ si, y sólo si, existe una subred φ' tal que $\varphi' \rightarrow x$.*

Teorema 2.1.1.12 ([25]) *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces* (X, τ) *es compacto si, y solo si, toda red* $\varphi : D \longrightarrow X$ *se aglomera en algún elemento* x *de* X.

Corolario 2.1.1.13 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces* (X, τ) *es compacto si, y solo si, toda red* $\varphi : D \longrightarrow X$ *tiene una subred convergente.*

Las redes también resultan útiles para caracterizar las funciones continuas y los espacios de Hausdorff, como lo indicamos a continuación.

Teorema 2.1.1.14 ([25]) *Sean* (X, τ_X), (Y, τ_Y) *espacios topológicos. Una función* $f : X \longrightarrow Y$ *es continua si, y solo si, para todo* $x \in X$, $f(x_d)\underset{d\in D}{\longrightarrow} f(x)$ *para toda red* $(x_d)_{d\in D} \subseteq X$ *tal que* $x_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} x$.

Teorema 2.1.1.15 ([25]) *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces* X *es un espacio de Hausdorff si, y solo si, toda red convergente en* X *converge a un único elemento de* X.

Otra caracterización de las funciones continuas que tenemos en cuenta más adelante es la siguiente:

Teorema 2.1.1.16 ([25]) *Sean* (X, τ_X), (Y, τ_Y) *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es continua,*

(ii) *la imagen inversa de todo cerrado en* Y *es cerrado en* X,

(iii) *la imagen inversa de todo abierto en* Y *es abierto en* X,

(iv) *la imagen inversa de todo subbásico (básico) en* Y *es un abierto en* X.

En lo que sigue usamos la siguiente noción topológica:

Definición 2.1.1.17 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Un subconjunto* D *de* X *es denso en* X *si la clausura de* D *es* X, *es decir* $\overline{D} = X$.

El siguiente lema nos da una formulación equivalente de subconjunto denso de un espacio topológico.

Lema 2.1.1.18 ([25]) *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un subconjunto D de X es denso en X si, y solo si, todo subconjunto básico no vacío del espacio X contiene elementos de D. Esto es, $D \subseteq X$ es denso en X si, y solo si, para toda base $\mathcal{B}$ de τ y para todo $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, $B \cap D \neq \emptyset$.*

2.1.2. Una dualidad topológica para las $LM_\theta-$álgebras

En esta sección obtenemos una caracterización de una categoría dual de la categoría $\mathfrak{LM}_{\theta}$ de las $LM_\theta-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos, en términos de espacios topológicos ordenados, la cual fue publicada en [33].

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal).

Definición 2.1.2.1 *Un pre-espacio de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuado (o $l_\theta P-$pre-espacio) es un sistema $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ tal que*

(lP1) *X es un $P-$espacio,*

(lP2) *$f_i : X \to X$ es una función continua para todo $i \in I$,*

(lP3) *$x \leq y$ implica $f_i(x) = f_i(y)$ para todo $i \in I$,*

(lP4) *$i \leq j$, $i, j \in I$, implica $f_i(x) \leq f_j(x)$,*

(lP5) *$f_i \circ f_j = f_i$ para todo $i, j \in I$.*

Un espacio de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuado (o $l_\theta P-$espacio) es un pre-espacio de Łukasiewicz–Moisil θ–valuado $(X, \{f_i\}_{i\in I})$, que satisface la siguiente propiedad:

(lP6) *$\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)$ es denso en X (es decir $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)} = X$, donde $\overline{Z}$ denota la clausura de $Z \subseteq X$).*

Definición 2.1.2.2 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ y $(X', \{f'_i\}_{i\in I})$ $l_\theta P-$espacios. Una $l_\theta P-$función es una función isótona y continua $f : X \to X'$ que satisface la condición adicional:*

(lPf) *$f'_i \circ f = f \circ f_i$ para todo $i \in I$.*

La categoría $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$ tiene a los $l_\theta P-$espacios como objetos y a las $l_\theta P-$funciones como morfismos y es una subcategoría plena de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}l_\theta \mathcal{P}}$ de los $l_\theta P-$pre–espacios y las $l_\theta P-$funciones.

La Proposición 2.1.2.3 nos da formulaciones equivalentes de la condición (lP6), que nos resultan útiles más adelante.

Proposición 2.1.2.3 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$pre-espacio y $D(X)$ el retículo de todos los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(lP6) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)} = X$,

(lP7) *si $U, V \in D(X)$ y $f_i^{-1}(U) = f_i^{-1}(V)$ para todo $i \in I$, entonces $U = V$,*

(lP8) *para cada $x \in X$, existe una red $(x_d)_{d\in D}$ en X tal que $f_{i_d}(x_d) \xrightarrow[d\in D]{} x$.*

Dem.

(lP6) $\Rightarrow$ (lP7): Sean $U, V \in D(X)$ tales que (1) $f_i^{-1}(U) = f_i^{-1}(V)$ para todo $i \in I$, y supongamos que $U \neq V$. Si $U \setminus V \neq \emptyset$, de (lP6) se sigue que $(U \setminus V) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0}^{-1}(U) \neq f_{i_0}^{-1}(V)$, lo que contradice (1).

(lP7) $\Rightarrow$ (lP6): Supongamos que existe $x_0 \in X \setminus \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)}$. Entonces, existen $U, V \in D(X)$ tales que (1) $x_0 \in U \setminus V$ y $(U \setminus V) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i(X) = \emptyset$. Esta última aseveración implica que $(U \cap V) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i(X) = U \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)$. Por esto, $f_i{}^{-1}(U \cap V) = f_i{}^{-1}(U)$ para todo $i \in I$ y por (lP7), concluimos que $U \subseteq V$, lo que contradice (1).

(lP6) $\Leftrightarrow$ (lP8): Es consecuencia directa del Lema 2.1.1.7. $\square$

Observación 2.1.2.4 Es simple verificar que si $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, entonces la condición (lP7) es equivalente a la siguiente:

(lP7*) si $U, V \in D(X)$ y $f_i^{-1}(U) \subseteq f_i^{-1}(V)$ para todo $i \in I$, entonces $U \subseteq V$.

Es importante mencionar que en el caso en que $\theta = n$, donde n es un entero, $n \geq 2$, podemos considerar el conjunto $I = \{1, \ldots, n-1\}$ y la Proposición 2.1.2.3 se transforma en la siguiente:

Proposición 2.1.2.5 *beginpropo Sea $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ un l_nP-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(lP6) $X = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)}$,

($\mathrm{l_n}$P6) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)$,

($\mathrm{l_n}$P7) $f_i^{-1}(Y) = f_i^{-1}(Z)$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$, *implica* $Y = Z$,

donde Y, Z *son subconjuntos de* X,

($\mathrm{l_n}$P8) *para cada* $x \in X$, *existe* i_0, $1 \leq i_0 \leq n-1$, *tal que* $x = f_{i_0}(x)$.

Dem.

(lP6) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{l_n}$P6): Por (lP1), X es un espacio Hausdorff compacto, de lo que se sigue por (lP2) que para todo i, , $1 \leq i \leq n-1$, $f_i : X \longrightarrow X$ es una función cerrada y por consiguiente, $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)$ es un subconjunto cerrado de X, de donde resulta que $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)$.

($\mathrm{l_n}$P6) $\Rightarrow$ ($\mathrm{l_n}$P8): Sea $x \in X$, entonces por ($\mathrm{l_n}$P6), existen $i \in I$ y $z \in X$ tales que $x = f_i(z)$, luego por (lP5) se tiene que $f_i(x) = f_i(z)$, de donde se sigue que $x = f_i(x)$.

($\mathrm{l_n}$P8) $\Rightarrow$ ($\mathrm{l_n}$P7): Sean Y, Z subconjuntos de X tales que (1) $f_i^{-1}(Y) = f_i^{-1}(Z)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$ y sea $y \in Y$. Luego, por ($\mathrm{l_n}$P8) existe un índice i, $1 \leq i \leq n-1$, tal que (2) $y = f_i(y)$, de donde se sigue que $y \in f_i^{-1}(Y)$. Entonces, de esta afirmación, (1) y (2) inferimos que $y \in Z$, resultando así que $Y \subseteq Z$. En forma análoga se prueba que $Z \subseteq Y$.

($\mathrm{l_n}$P7) $\Rightarrow$ ($\mathrm{l_n}$P6): Es inmediato por (lP5) que $f_j{}^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)\right) = f_j{}^{-1}(X)$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, de lo que concluimos por ($\mathrm{l_n}$P7) que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)$. $\square$

La Proposición 2.1.2.6 nos permite probar que la noción de $P_\theta-$espacio, dada por A. Filipoiu (Sección 1.4.3), es equivalente a la de $l_\theta P-$espacio.

Proposición 2.1.2.6 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio. Entonces para cada* $U \in D(X)$ *se satisfacen las condiciones siguientes:*

(lP9) $X \setminus f_i^{-1}(U) \in D(X)$ *para todo* $i \in I$,

(lP10) $i \leq j$ *implica* ${f_i}^{-1}(U) \subseteq {f_j}^{-1}(U)$.

Dem. (lP9) es una consecuencia directa de (lP2) y (lP3). Además, (lP10) se sigue de (lP4). □

Teorema 2.1.2.7 *Sea* X *un espacio de Priestley y para cada* $i \in I$, *sea* $f_i : X \to X$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio,*

(ii) $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $P_\theta-$*espacio.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Se sigue de la Definición 2.1.2.1 y la Proposición 2.1.2.6.

(ii) $\Rightarrow$ (i): solo resta probar que valen las condiciones (lP3) y (lP4). En efecto, sean x, $y \in X$ tales que (1) $x \leq y$ y $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$ para algún $i_0 \in I$. Entonces, por (7.3) en [12, Definition 7.1, p. 341] tenemos que $f_{i_0}(x) < f_{i_0}(y)$ y teniendo en cuenta que X es un espacio de Priestley, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in X \setminus {f_{i_0}}^{-1}(U)$ e $y \notin X \setminus {f_{i_0}}^{-1}(U)$. De estas últimas afirmaciones y (1), concluimos que $X \setminus {f_{i_0}}^{-1}(U)$ no es un subconjunto creciente de X, lo cual contradice (7.4) en [12, Definition 7.1, p. 341]. Por consiguiente se verifica (lP3).

Por otro lado, supongamos que existen i, $j \in I$ tales que $i \leq j$ y $f_i(x_0) \not\leq f_j(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Entonces, existe $U \in D(X)$ tal que $f_i(x_0) \in U$ y $f_j(x_0) \notin U$. Por lo tanto, ${f_i}^{-1}(U) \not\subseteq {f_j}^{-1}(U)$, lo que contradice (7.3) en [12, Definition 7.1, p. 341] y así, (lP4) se verifica. □

Los siguientes resultados son consecuencias del Teorema 2.1.2.7 y de la dualidad establecida en [13, 38, 39], teniendo en cuenta que $Hom(A, L_2)$ y $X(A)$ son homeomorfos como espacios topológicos e isomorfos como conjuntos ordenados (Sección 1.4.1) y que los morfismos en la categoría $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$ coinciden con los morfismos de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}r\theta}$.

Lema 2.1.2.8 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio y* $D(X)$ *el retículo distributivo asociado a* X. *Entonces,* $\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I})$ *es una* $LM_\theta-$*álgebra, donde* $\phi_i^X(U) = {f_i}^{-1}(U)$ *y* $\overline{\phi}_i^X(U) = X \setminus {f_i}^{-1}(U)$ *para todo* $U \in D(X)$ *y para todo* $i \in I$.

Lema 2.1.2.9 *Sean* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $X(A)$ *el espacio de Priestley asociado a* A. *Entonces,* $Ł_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio, donde para cada* $i \in I$, *la función* $f_i^A : X(A) \longrightarrow X(A)$ *está definida por* $f_i^A(P) = \phi_i^{-1}(P)$ *para todo* $P \in X(A)$. *Además,* $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$, *definida por* $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$, *es un* $LM_\theta-$*isomorfismo.*

Dem. solo probamos la condición (lP2) de la Definición 2.1.2.1. De las definiciones de σ_A y f_i^A se deduce que para cada $a \in A$ y para cada $i \in I$, ${f_i^A}^{-1}(\sigma_A(a)) = \sigma_A(\phi_i a)$. Luego, teniendo en cuenta que la familia $\mathcal{S} = \{\sigma_A(a) : a \in A\} \cup \{X(A) \setminus \sigma_A(a) : a \in A\}$ es una subbase para la topología de $X(A)$, inferimos del Teorema 2.1.1.16 que las funciones f_i^A son continuas para todo $i \in I$. $\square$

En lo que sigue, denotamos por $Ł_\theta(A)$ o por $X(A)$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A y por $\mathbb{L}_\theta(X)$ o $D(X)$ a la $LM_\theta-$álgebra asociada a un $l_\theta P-$espacio X. En el caso en que $\theta = n$, $n \geq 2$, los denotamos por $Ł_n(A)$ y $\mathbb{L}_n(X)$, respectivamente.

Lema 2.1.2.10 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I})$ $l_\theta P-$*espacios y* f *una* $l_\theta P-$*función de* X *en* X'. *Entonces, la aplicación* $\mathbb{L}_\theta(f) : \mathbb{L}_\theta(X') \longrightarrow \mathbb{L}_\theta(X)$, *definida por la prescripción* $\mathbb{L}_\theta(f)(U) = f^{-1}(U)$ *para cada* $U \in D(X')$, *es un* $LM_\theta-$*homomorfismo. Además se verifica que* $\mathbb{L}_\theta(f)$ *es inyectivo (sobreyectivo) si* f *es sobreyectiva (inyectiva).*

Lema 2.1.2.11 *Sean* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *y* $\langle A', \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi'_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}'_i\}_{i\in I}\rangle$ $LM_\theta-$*álgebras y* h *un* $LM_\theta-$*homomorfismo de* A *en* A'. *Entonces, la aplicación* $Ł_\theta(h) : Ł_\theta(A') \longrightarrow Ł_\theta(h)(A)$, *definida por la prescripción* $Ł_\theta(h)(P) = h^{-1}(P)$ *para todo* $P \in X(A')$, *es una* $l_\theta P-$*función. Además se verifica que* $Ł_\theta(h)$ *es inyectiva (sobreyectiva) si* h *es un* $LM_\theta-$*homomorfismo sobreyectivo (inyectivo).*

Proposición 2.1.2.12 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I})$ *objetos en* $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$ *y* f *una función de* X *en* X'. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es un isomorfismo en $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$,*

(ii) *f es un isomorfismo de orden, un homeomorfismo y satisface la condición:*

(lPf) *$f \circ f_i = f'_i \circ f$ para todo $i \in I$.*

Corolario 2.1.2.13 *Sea $X \in \boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$. Entonces, la función ε_X de X en $X(D(X))$, definida por $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$, es un isomorfismo en la categoría $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$.*

Teorema 2.1.2.14 *Los funtores $\mathbb{L}_\theta \circ Ł_\theta$ y $Ł_\theta \circ \mathbb{L}_\theta$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad $Id_{\mathfrak{LM}_\theta}$ e $Id_{l_\theta \mathcal{P}}$ respectivamente, donde $\{\sigma_A : A \in Obj(\mathfrak{LM}_\theta)\}$ y $\{\varepsilon_X : X \in Obj(\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}})\}$ son las transformaciones naturales y por lo tanto, la categoría $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$ es naturalmente equivalente a la categoría dual de $\mathfrak{LM}_\theta$.*

Dem. Del Teorema 2.1.2.7 y la Definición 2.1.2.2 tenemos que la categoría $\boldsymbol{l_\theta \mathcal{P}}$ coincide con la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}r\theta}$. Entonces, teniendo en cuenta los resultados establecidos en [13] concluimos la demostración. $\square$

Observación 2.1.2.15 Cabe aclarar que el Teorema anterior también se puede demostrar aplicando los resultados establecidos en los cuatro lemas precedentes y en el Corolario 2.1.2.13 y con las técnicas habituales.

Como consecuencia directa del Teorema 2.1.2.14 inferimos que:

Corolario 2.1.2.16 *Las categoría $\mathfrak{PLM}_\theta$ es naturalmente equivalente a la dual de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P} l_\theta \mathcal{P}}$.*

La dualidad que hemos obtenido nos permite determinar una propiedad de los $l_\theta P-$espacios, como lo indicamos a continuación.

Proposición 2.1.2.17 *Sean $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i \in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i \in I}\rangle$ una $LM_\theta-$álgebra y $Ł_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i \in I})$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces para todo $P \in X(A)$ y para todo subonjunto K de I, $\bigcap\limits_{i \in K} f_i^A(P) \in X(A)$ y $\bigcup\limits_{i \in K} f_i^A(P) \in X(A)$.*

Dem. Teniendo en cuenta que en I está definida una relación de orden $\leq$ tal que $(I, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y la propiedad (lP4) de los $l_\theta P-$espacios, se sigue que $\{f_i^A(P) : P \in X(A)\}_{i \in K}$ es un conjunto de filtros primos encajados de A y por lo tanto, $\bigcap\limits_{i \in K} f_i^A(P) \in X(A)$ y $\bigcup\limits_{i \in K} f_i^A(P) \in X(A)$ para todo todo $P \in X(A)$ y para todo subonjunto K de I. $\square$

Corolario 2.1.2.18 *Sean $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i \in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i \in I}\rangle$ una $LM_\theta-$álgebra y $Ł_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i \in I})$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces para todo $P \in X(A)$ y para todo subonjunto K de I, existen $\bigwedge\limits_{i \in K} f_i^A(P)$ y $\bigvee\limits_{i \in K} f_i^A(P)$, donde $\bigwedge\limits_{i \in K} f_i^A(P)$ es el ínfimo de $\{f_i^A(P) : i \in K\}$ y $\bigvee\limits_{i \in K} f_i^A(P)$ es el supremo de $\{f_i^A(P) : i \in K\}$, con respecto a la relación inclusión.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 2.1.2.17 y teniendo en cuenta que $\bigcap\limits_{i \in K} f_i^A(P) = \bigwedge\limits_{i \in K} f_i^A(P)$ y $\bigcup\limits_{i \in K} f_i^A(P) = \bigvee\limits_{i \in K} f_i^A(P)$ para todo $P \in X(A)$ y para todo subonjunto K de I. $\square$

Corolario 2.1.2.19 *Sea $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces para todo $x \in X$ y para todo $K \subseteq I$, existen $\bigwedge\limits_{i \in K} f_i(x)$ y $\bigvee\limits_{i \in K} f_i(x)$, donde $\bigwedge\limits_{i \in K} f_i(x)$ y $\bigvee\limits_{i \in K} f_i(x)$ son el ínfimo y el supremo del conjunto $\{f_i(x) : i \in K\}$, respectivamente.*

Dem. Teniendo en cuenta que para todo $x \in X$ y para todo $K \subseteq I$, se verifica que $\{\varepsilon_X(f_i(x)) : i \in K\} \subseteq X(D(X))$, donde ε_X es la $l_\theta P-$función definida en el Corolario 2.1.2.13, entonces de los Lemas 2.1.2.8 y 2.1.2.9 y el Corolario 2.1.2.18 inferimos que existen $\bigwedge\limits_{i \in K} \varepsilon_X(f_i(x))$ y $\bigvee\limits_{i \in K} \varepsilon_X(f_i(x))$. De esta última afirmación y el hecho de que, por el Corolario 2.1.2.13, ε_X es un isomorfismo de orden de X en $X(D(X))$, concluimos que existen $\bigwedge\limits_{i \in K} f_i(x)$ y $\bigvee\limits_{i \in K} f_i(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $K \subseteq I$. $\square$

2.1.3. Propiedades de los $l_\theta P-$espacios

A continuación, determinamos algunas propiedades de los $l_\theta P-$espacios que nos resultan útiles para caracterizar el retículo de las congruencias y el de las $\theta-$congruencias de las $LM_\theta-$álgebras. Luego usamos estas caracterizaciones para obtener las $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles y las $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles por las $\theta-$congruencias

Proposición 2.1.3.1 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces para todo $x \in X$ se verifica:*

(lP11) *$x \leq f_i(x)$ o $f_i(x) \leq x$ para todo $i \in I$.*

Dem. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $x \not\leq f_{i_0}(x)$ y $f_{i_0}(x) \not\leq x$ para algún $i_0 \in I$. En consecuencia, existen $U, V \in D(X)$ tales que (1) $x \in U \setminus V$ y $f_{i_0}(x) \in V \setminus U$. Sea $H = U \cap (X \setminus {f_{i_0}}^{-1}(U)) \cap {f_{i_0}}^{-1}(V)$, entonces de (lP2) y (lP9) concluimos que $H \in D(X)$ y (2) $x \in H$. Además, por (lP5) tenemos que ${f_i}^{-1}(H) = {f_i}^{-1}(U) \cap (X \setminus {f_{i_0}}^{-1}(U)) \cap {f_{i_0}}^{-1}(V)$. Esta última igualdad y (lP10) implican que ${f_i}^{-1}(H) = \emptyset$, si $j \leq i_0$ y ${f_i}^{-1}(H) \subseteq {f_j}^{-1}(V)$, en otro caso. Por lo tanto, ${f_i}^{-1}(H) \subseteq {f_i}^{-1}(V)$ para todo $i \in I$ y así, por (lP7*) inferimos que $H \subseteq V$. De esta aseveración y (2) concluimos que $x \in V$, lo que contradice (1). $\square$

Los resultados anteriores nos permiten describir los $l_\theta P-$espacios como sigue.

Corolario 2.1.3.2 *Si $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, entonces X es la suma cardinal de los subconjuntos cerrados $\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$ para $x \in X$.*

Dem. Por (lP11), tenemos que $X = \bigcup\limits_{x\in X} (\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I})$. Por otro lado, si suponemos que existen $x, y, z \in X$ tales que $z \in (\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}) \cap (\uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I})$ entonces, por (lP3) y (lP5) tenemos que $f_i(x) = f_i(z) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. En consecuencia, $\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I} =\uparrow \{f_i(y)\} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I}$. Además, sean ahora $x, y \in X$ tales que $(\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}) \cap (\uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I}) = \emptyset$. Si $z \in\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$ y $w \in\uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I}$, entonces de (lP3) y (lP5) inferimos que $f_i(x) = f_i(z)$ y $f_i(w) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, por (lP3) concluimos que $z \not\leq w$ y $w \not\leq z$.

Para cada $x \in X$ y cada $i \in I$ se verifica que (1) $\uparrow \{f_i(x)\} \cup \downarrow \{f_i(x)\} =\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$. En efecto, sea $z \in X$ para el cual existe $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0}(x) \leq z$ o existe $i_1 \in I$ tal que $z \leq f_{i_1}(x)$. Entonces, por (lP3) y (lP5), $f_i(z) = f_i(x)$ para todo $i \in I$, de donde se sigue por (lP11) (Proposición 2.1.3.1) que $z \in\uparrow \{f_i(x)\} \cup \downarrow \{f_i(x)\}$

y por lo tanto se verifica (1). Teniendo en cuenta que por (lP1) X es un espacio de Hausdorff, entonces $\{f_i(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X para todo $i \in I$, y por consiguiente, por la propiedad (P4) de los $P-$espacios (Sección 1.4.1), $\uparrow \{f_i(x)\} \cup \downarrow \{f_i(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X, de donde concluimos por (1) que para cada $x \in X$, $\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$ es un subconjunto cerrado de X. □

Corolario 2.1.3.3 *Si* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio, entonces para todo* $x, y \in X$ *se verifica la siguiente condición:*

(lP12) $f_i(x) = f_i(y)$ *para todo* $i \in I$ *o* $f_i(x) \neq f_i(y)$ *para todo* $i \in I$*, pero no ambas.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.1.3.2. □

Lema 2.1.3.4 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio, donde* I *tiene primer elemento* 0 *y último elemento* 1*. Entonces* ${f_0}^{-1}(U) \subseteq U \subseteq {f_1}^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$*.*

Dem. De la hipótesis y (lP10) tenemos que ${f_0}^{-1}(U) \subseteq {f_i}^{-1}(U) \subseteq {f_1}^{-1}(U)$ para todo $i \in I$. Entonces, por (lP5) se sigue que ${f_i}^{-1}({f_0}^{-1}(U)) \subseteq {f_i}^{-1}(U) \subseteq {f_i}^{-1}({f_1}^{-1}(U))$ para todo $i \in I$ y de (lP7*) concluimos la demostración. □

Proposición 2.1.3.5 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio, donde* I *tiene primer elemento* 0 *y último elemento* 1*. Entonces las siguientes condiciones se verifican para cada* $x \in X$*:*

(lP13) $f_0(x) \leq x \leq f_1(x)$*,*

(lP14) $f_0(x)$ *es el único elemento minimal en* X *que precede a* x*,*

(lP15) $f_1(x)$ *es el único elemento maximal en* X *que sucede a* x*.*

Dem.

(lP13): Si $x \in X$ y $f_0(x) \not\leq x$, entonces existe $U \in D(X)$ tal que $x \in {f_0}^{-1}(U)$ y $x \notin U$ y por lo tanto, ${f_0}^{-1}(U) \not\subseteq U$, lo que contradice el Lema 2.1.3.4. En forma análoga se prueba la otra desigualdad.

(lP14): Si $z \in X$ y $z \leq f_0(x)$, en virtud de (lP3) y (lP5) tenemos que $f_0(z) = f_0(x)$. En consecuencia, por (lP13) concluimos que $f_0(x) = z$. Además, si y es un elemento minimal en X e $y \leq x$, entonces por (lP3) y (lP13) inferimos que $f_0(x) \leq y$. Por lo tanto, $y = f_0(x)$ y así, $f_0(x)$ es el único elemento minimal en X que precede a x.

(lP15): Se sigue empleando un razonamiento análogo al usado en la demostración de (lP14). □

Corolario 2.1.3.6 *Sea* $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}_{i \in I})$ *un* $l_n P-$*espacio. Entonces las siguientes condiciones se verifican para cada* $x \in X$*:*

(l$_n$P13) $f_1(x) \leq x \leq f_{n-1}(x)$,

(l$_n$P14) $f_1(x)$ *es el único elemento minimal en* X *que precede a* x,

(l$_n$P15) $f_{n-1}(x)$ *es el único elemento maximal en* X *que sucede a* x.

Dem. Es consecuencia de la Proposición 2.1.3.5, teniendo en cuenta que $I = \{1, \ldots, n-1\}$ cuando $\theta = n$, $n \geq 2$. También las propiedades (l$_n$P13), (l$_n$P14) y (l$_n$P15) se siguen de las propiedades (lP4) y (l$_n$P8). □

Corolario 2.1.3.7 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio, donde* I *tiene primer elemento* 0 *y último elemento* 1. *Entonces el espacio* X *es la suma cardinal de los subconjuntos cerrados* $[f_0(x), f_1(x)] = \{y \in X : \ f_0(x) \leq y \leq f_1(x)\}$*, con* $x \in X$.

Dem. Sea $z \in \uparrow \{f_i(x)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i \in I}$. Entonces, $z \leq f_{i_0}(x)$ o $f_{i_0}(x) \leq z$ para algún $i_0 \in I$, y de (lP3) y (lP5) inferimos que $f_i(z) = f_i(x)$ para todo $i \in I$. Luego, por (lP13) tenemos que $z \in [f_0(x), f_1(x)]$ y por lo tanto, $\uparrow \{f_i(x)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i \in I} \subseteq [f_0(x), f_1(x)]$. La otra inclusión es obvia y así, $\uparrow \{f_i(x)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i \in I} = [f_0(x), f_1(x)]$. De esta última afirmación y el Corolario 2.1.3.2 se completa la demostración. □

Corolario 2.1.3.8 *Sea* $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ *un* $l_n P-$*espacio, Entonces,* X *es la suma cardinal de una familia de cadenas, cada una de las cuales tiene a lo sumo* $n-1$ *elementos.*

Dem. Como $I = \{1, \ldots, n-1\}$, entonces por la Proposición 2.1.3.5 y el Corolario 2.1.3.7 tenemos que X es la suma cardinal de los conjuntos $[f_1(x), f_{n-1}(x)]$. Además, por (lP3), (lP5) y (lP4) obtenemos que $[f_1(x), f_{n-1}(x)] = \{f_i(x) : 1 \leq i \leq n-1\}$, el cual por (lP4) es una cadena. □

Corolario 2.1.3.9 *Sea* $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ *un* l_nP-*espacio, Entonces, un subconjunto* C *de* X *es una cadena maximal en* X *si, y solo si,* $C = \{f_i(x) : 1 \leq i \leq n-1\}$ *para algún* $x \in X$.

Dem. Se sigue de la demostración del Corolario 2.1.3.8. □

En lo sucesivo si $(X, \{f_1, \ldots, f_n\})$ es un l_nP-espacio, entonces denotamos con C_x a la única cadena maximal en X a la cual x pertenece.

Observación 2.1.3.10 *Si* $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ *y* $(X', \{f'_1, \ldots, f'_{n-1}\})$ *son* l_nP-*espacios y* f *es una* l_nP-*función de* X *en* X', *entonces del* Corolario 2.1.3.8 *y la* Definición 2.1.2.2 *deducimos:*

(i) $f(C_x) = C_{f(x)}$ *para todo* $x \in X$,

(ii) f *envía el i–ésimo elemento de la sucesión que representa a* C_x *al* $i-$*ésimo elemento de la sucesión que representa a* $C_{f(x)}$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

2.1.4. $LM_\theta-$congruencias y $\theta LM_\theta-$congruencias

En esta sección, en primer lugar caracterizamos las congruencias de una $LM_\theta-$álgebra a través de la dualidad descripta anteriormente. Para ello, comenzamos introduciendo las siguientes nociones:

Definición 2.1.4.1 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio.*

(i) *Un subconjunto* Y *de* X *es semimodal si* $f_i(Y) \subseteq Y$ *para todo* $i \in I$, *o equivalentemente si* $Y \subseteq f_i^{-1}(Y)$ *para todo* $i \in I$.

(ii) *Un subconjunto* Y *de* X *es modal si* $Y = f_i^{-1}(Y)$ *para todo* $i \in I$.

Lema 2.1.4.2 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio. Entonces el complemento de todo subconjunto modal de* X *es también un subconjunto modal de* X.

Dem. Es consecuencia inmediata de la Definición 2.1.4.1. □

Observación 2.1.4.3 Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio e Y un subconjunto cerrado de X. Entonces, es simple verificar que Y es semimodal si, y solo si, $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \subseteq Y$.

Lema 2.1.4.4 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio. Entonces para cada $x \in X$, $\downarrow x \cup \uparrow x$ es un subconjunto cerrado y semimodal de X.*

Dem. Como X es un espacio de Priestley, entonces $\{x\}$ es cerrado en X para todo $x \in X$. Luego, por la propiedad (P4) (Sección 1.4.1) tenemos que $\downarrow x \cup \uparrow x$ es un subconjunto cerrado. Además, si $y \in \downarrow x \cup \uparrow x$, entonces por (lP3) obtenemos que $f_i(y) = f_i(x)$ para todo $i \in I$. En consecuencia, de (lP11) inferimos que $f_i(y) \in \downarrow x \cup \uparrow x$ para todo $i \in I$ y así, concluimos que $\downarrow x \cup \uparrow x$ es semimodal. □

Los subconjuntos modales del l_nP-espacio asociado a una LM_n-álgebra desempeñan un rol fundamental en la caracterización de sus LM_n-congruencias. Además, los subconjuntos modales del $l_\theta P-$espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra sirven para caracterizar las $LM_\theta-$congruencias determinadas por una cierta clase de filtros del álgebra, cuando el conjunto I tiene primer elemento y último elemento, como se prueba más adelante. Es por ello, que en primer lugar caracterizamos a estos subconjuntos de los $l_\theta P-$espacios y luego en particular a los de los l_nP-espacios, pero antes recordemos la siguiente definición, la que nos sirve para describir una propiedad de los subconjuntos modales de los $l_\theta P-$espacios.

Definición 2.1.4.5 *Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Un subconjunto A de X es convexo si $A = \downarrow A \cap \uparrow A$, o equivalentemente si $x, y \in A$ y $x \leq z \leq y$ implican que $z \in A$.*

Proposición 2.1.4.6 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Para todo subconjunto Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es modal,*

(ii) *Y es creciente y decreciente a la vez,*

(iii) $Y = \bigcup_{y\in Y} (\uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I})$.

Además, si I *tiene primer elemento* 0 *y último elemento* 1*,*

$$Y = \bigcup_{y \in Y} [f_0(y), f_1(y)].$$

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis se sigue que (1) $Y = f_i^{-1}(Y)$ para todo $i \in I$. Sean (2) $y \in Y$ y $x, z \in X$ tales que (3) $y \leq x$ y (4) $z \leq y$. Entonces, de (3), (4) y la propiedad (lP3), obtenemos que (5) $f_i(x) = f_i(y) = f_i(z)$ para todo $i \in I$. Por otra parte de (1) y (2) inferimos que $f_i(y) \in Y$, de donde concluimos, por (1) y (5), que $x \in Y$ y $z \in Y$, lo que nos permite afirmar que se verifica (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) tenemos que $Y = \downarrow Y \cap \uparrow Y$, entonces de (lP11) se sigue que $y \in Y$ si, y solo si, $f_i(y) \in Y$ para todo $i \in I$ y por lo tanto, $Y = f_i^{-1}(Y)$ para todo $i \in I$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Por (lP11) tenemos que $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} (\uparrow \{f_i(y)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i \in I})$. Además, si $z \in \uparrow \{f_i(y)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i \in I}$ para algún $y \in Y$, entonces por (lP3) y (lP5) resulta que $f_i(z) = f_i(y)$ para todo $i \in I$ y así, de la hipótesis (i), concluimos que $z \in Y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): De (lP3), (lP5) y (lP11) obtenemos que $f_i{}^{-1}(\uparrow \{f_i(y)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i \in I})$ $= \uparrow \{f_i(y)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i \in I}$ para todo $i \in I$ y por lo tanto, $Y = f_i{}^{-1}(Y)$ para todo $i \in I$.

En el caso que I tiene primer y último elemento, $\bigcup_{y \in Y} (\uparrow \{f_i(y)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i \in I})$ $= \bigcup_{y \in Y} [f_0(y), f_1(y)]$ y por consiguiente, $Y = \bigcup_{y \in Y} [f_0(y), f_1(y)]$. □

Corolario 2.1.4.7 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio. Entonces, todo subconjunto modal* Y *de* X *es convexo.*

Dem. De la hipótesis y el inciso (ii) de la la Proposición 2.1.4.6, se sigue que $Y = \downarrow Y \cap \uparrow Y$ y por lo tanto, Y es convexo. □

Corolario 2.1.4.8 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio. Entonces,* $\uparrow \{f_i(x)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i \in I}$ *es un subconjunto modal de* X *para todo* $x \in X$*. Además, si* I *tiene primer elemento* 0 *y último elemento* 1*, entonces* $[f_0(x), f_1(x)]$ *es un subconjunto modal para todo* $x \in X$*.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 2.1.4.6. □

En lo que sigue, caracterizamos los subconjuntos modales de los l_nP-espacios.

Corolario 2.1.4.9 *Sea* $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ *un* l_nP-*espacio. Si* Y *es un subconjunto no vacío de* X*, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) Y *es modal,*

(ii) Y *es un subconjunto de* X *creciente y decreciente a la vez,*

(iii) Y *es la suma cardinal de cadenas maximales en* X*.*

Dem. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.4.6 y teniendo en cuenta que si $\theta = n$, $n \geq 2$, el conjunto $I = \{1, \ldots, n-1\}$ y paro todo $x \in X$, por las propiedades (lP3), (lP5), (lP4) y ($\mathrm{l_n}$P13), se verifica que $[f_1(x), f_{n-1}(x)] = \{f_i(x) : 1 \leq i \leq n-1\} = C_x$, donde C_x es la cadena maximal a la que x pertenece. □

Corolario 2.1.4.10 *Toda cadena maximal en un* l_nP-*espacio es modal.*

Dem. Se sigue inmediatamente del Corolario 2.1.4.9. □

La siguiente proposición nos da una nueva descripción de los subconjuntos modales de un l_nP-espacio.

Proposición 2.1.4.11 *Sea* $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ *un* l_nP-*espacio,* $n \geq 2$*. Entonces para todo subconjunto* Y *de* X*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es semimodal,*

(ii) $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(Y)$,

(iii) Y *es modal.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) obtenemos que $\bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(Y) \subseteq Y$. Por otra parte, si $y \in Y$, entonces por ($\mathrm{l_n}$P8) existe i, $1 \leq i \leq n-1$, tal que $y = f_i(y)$ y por lo tanto, $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(Y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De (ii) se sigue que $f_i(Y) \subseteq Y$ para todo $i \in I$ y por consiguiente, $Y \subseteq {f_i}^{-1}(Y)$ para todo $i \in I$. Sean $x \in X$ e $i \in I$ tales que (1) $f_i(x) \in Y$. Por (l_nP8) existe j, $1 \leq j \leq n-1$, tal que (2) $x = f_j(x)$. Además, por (lP5) y (1) obtenemos que $f_j(x) \in f_j(Y)$. De esta última afirmación, (2) y la hipótesis (ii) inferimos que $x \in Y$ y así resulta que ${f_i}^{-1}(Y) \subseteq Y$ para todo $i \in I$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata. $\square$

El conjunto de los subconjuntos cerrados y semimodales del $l_\theta P-$espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra es un retículo con las operaciones de intersección y unión de conjuntos y juega un rol fundamental en la caracterización de las $LM_\theta-$congruencias de estas álgebras, como lo mostramos a continuación.

Teorema 2.1.4.12 *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $Ł_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_S(Ł_\theta(A))$, de todos los subconjuntos cerrados y semimodales de $Ł_\theta(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{LM_\theta}(A)$ de todas las $LM_\theta-$congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_S definida por la prescripción $\Theta_S(Y) = \{(a,b)\in A\times A : \sigma_A(a)\cap Y = \sigma_A(b)\cap Y\}$.*

Dem. En virtud de los resultados establecidos en el Teorema 1.4.1.1 solo resta probar que Θ_S es una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{C}_S(Ł_\theta(A))$ en $Con_{LM_\theta}(A)$. En efecto, sea $Y \in \mathcal{C}_S(Ł_\theta(A))$. Como $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $LM_\theta-$isomomorfismo e Y es un subconjunto semimodal de $X(A)$, se sigue que para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$, $\sigma_A(\phi_i a)\cap Y = f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(a)\cap Y)\cap Y$ y $\sigma_A(\overline{\phi}_i a)\cap Y = f_i^{A^{-1}}((X(A)\setminus\sigma_A(a))\cap Y)\cap Y$, lo que nos permite inferir que $\Theta_S(Y) \in Con_{LM_\theta}(A)$.

Recíprocamente, sean $\vartheta \in Con_{LM_\theta}(A)$ y $h : A \longrightarrow A/\vartheta$ el epimorfismo natural. Como ϑ es una congruencia de retículo de A, por (A7) en la Sección 1.4.1, tenemos que $Y = \{h^{-1}(Q) : Q \in X(A/\vartheta)\}$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$ y ϑ coincide con la congruencia de retículo $\Theta(Y)$. Además, Y es semimodal. En efecto, sea $P = h^{-1}(Q)$, para algún $Q \in X(A/\vartheta)$. Teniendo en cuenta que h es un $LM_\theta-$homomorfismo y el Lema 2.1.2.16, concluimos que la función $Ł_\theta(h)$ del $l_\theta P-$pre-espacio $X(A/\vartheta)$ en el $l_\theta P-$espacio $X(A)$, definida por $Ł_\theta(h)(Q) = h^{-1}(Q)$ para todo $Q \in X(A/\vartheta)$, es una $l_\theta P-$función.

Por lo tanto, $f_i^A(P) = h^{-1}(f_i^{A/\vartheta}(Q))$ y así, $f_i^A(Y) \subseteq Y$ para todo $i \in I$. Finalmente, concluimos que Y es un subconjunto semimodal y cerrado de $X(A)$ y así, $\vartheta = \Theta_S(Y)$. □

Corolario 2.1.4.13 *Sean A una LM_n-álgebra, donde n es un entero, $n \geq 2$, y $Ł_n(A) = (X(A), \{f_1^A, \dots, f_{n-1}^A,\})$ el l_nP-espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_M(Ł_n(A))$, de todos los subconjuntos cerrados y modales de $Ł_n(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{LM_n}(A)$ de las LM_n-congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_M definida como en el* Teorema 2.1.4.12.

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.1.4.12 y la Proposición 2.1.4.11. □

Con el objeto de caracterizar las $\theta LM_\theta-$congruencias de una $LM_\theta-$álgebra introducimos la siguiente noción.

Definición 2.1.4.14 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Un $\theta-$subconjunto es un subconjunto semimodal Y de X tal que $Y \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$, o equivalentemente un subconjunto Y de X es un $\theta-$subconjunto si $\bigcup_{i\in I} f_i(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.*

Lema 2.1.4.15 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces, para todo subconjunto Y de X se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si Y es un subconjunto semimodal de X, entonces $\overline{Y}$ también es semimodal.*

(ii) *Si Y es un $\theta-$subconjunto de X, entonces $\overline{Y}$ también es un $\theta-$subconjunto de X.*

Dem.

(i): De la hipótesis y teniendo en cuenta que f_i es una función continua para todo $i \in I$, obtenemos que $f_i(\overline{Y}) \subseteq \overline{f_i(Y)} \subseteq \overline{Y}$ que todo $i \in I$.

(ii): De la hipótesis tenemos que $\bigcup_{i\in I} f_i(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$, de donde se sigue que $\overline{Y} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ y por lo tanto, (1) $\overline{Y} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(\overline{Y})}$. Por otra parte, de la hipótesis y el inciso (i) inferimos que $\overline{Y}$ es un subconjunto semimodal y cerrado de X, entonces, por la Observación 2.1.4.3, obtenemos que (2) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(\overline{Y})} \subseteq \overline{Y}$. De (1) y (2) concluimos que $\overline{Y} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(\overline{Y})}$. □

En lo que sigue, caracterizamos los $\theta-$subconjuntos cerrados de un $l_\theta P-$espacio.

Proposición 2.1.4.16 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto de X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un $\theta-$subconjunto cerrado,*

(ii) $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$,

(iii) *existe un subconjunto Z de X tal que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): De la Definición 2.1.4.14, tenemos que Y es un $\theta-$subconjunto de X si, y solo si, $\bigcup_{i\in I} f_i(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. Esto nos permite afirmar que Y es un $\theta-$subconjunto cerrado de X si, y solo si, $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis tenemos que (1) $f_j(Y) = f_j\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}\right)$ para todo $j \in I$. Además, de (lP1) y (lP2) obtenemos que f_j es una función continua y cerrada para todo $j \in I$, lo cual implica que $f_j\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}\right) = \overline{f_j(\bigcup_{i\in I} f_i(Z))}$ para todo $j \in J$. Por lo tanto, de (lP5) inferimos que (2) $f_j\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}\right) = \overline{f_j(Z)}$ para todo $j \in J$ y como $\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{f_i(Z)}} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$, concluimos por (1), (2) y (iii) que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. $\square$

Proposición 2.1.4.17 *Sea $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ un $l_n P-$espacio. Entonces para todo subconjunto cerrado Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un $\theta-$subconjunto,*

(ii) *Y es un subconjunto modal.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es una consecuencia inmediata de la Definición 2.1.4.14 y la Proposición 2.1.4.11.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) tenemos que $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(Y)$. Por (lP1) y (lP2) inferimos que para cada i, $1 \leq i \leq n-1$, $f_i : X \longrightarrow X$ es una función cerrada y como Y es un subconjunto cerrado de X, entonces $f_i(Y)$ es cerrado en X, de donde se sigue que $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(Y) = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(Y)}$ y en consecuencia, por la Proposición 2.1.4.16, Y es un $\theta-$subconjunto de X. □

Los $\theta-$subconjuntos cerrados del $l_\theta P-$espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra nos permiten caracterizar las $\theta LM_\theta-$congruencias de estas álgebras como se muestra en el Teorema 2.1.4.18.

Teorema 2.1.4.18 *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $Ł_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A))$, de todos los $\theta-$subconjuntos cerrados de $Ł_\theta(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{\theta LM_\theta}(A)$ de todas las $\theta LM_\theta-$congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_θ definida como en el* Teorema 2.1.4.12.

Dem. Θ_θ es una función sobreyectiva de $\mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A))$ en $Con_{\theta LM_\theta}(A)$. En efecto, sea $Y \in \mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A))$ y supongamos que $\Theta_\theta(Y) \notin Con_{\theta Lk_\theta}(A)$. Entonces, existen $a, b \in A$ tales que (1) $(\phi_i a, \phi_i b) \in \Theta_\theta(Y)$ para todo $i \in I$ y $(a, b) \notin \Theta_\theta(Y)$. Así, podemos asumir que $(\sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)) \cap Y \neq \emptyset$. Como Y es un $\theta-$subconjunto cerrado de $X(A)$, por la Proposición 2.1.4.16, $Y = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(Y)}$. En consecuencia $(\sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(Y) \neq \emptyset$, de donde se sigue que existen $i_0 \in I$ y $Q \in Y$ tales que $\phi_{i_0}(a) \in Q$ y $\phi_{i_0}(b) \notin Q$. Por lo tanto $(\phi_{i_0} a, \phi_{i_0} b) \notin \Theta_\theta(Y)$, lo que contradice (1). Entonces $\Theta_\theta(Y) \in Con_{\theta LM_\theta}(A)$.

Recíprocamente, sea $\vartheta \in Con_{\theta LM_\theta}(A)$, entonces $\vartheta \in Con_{LM_\theta}(A)$. Luego, por el Teorema 2.1.4.12 tenemos que $\vartheta = \Theta_S(Y)$ para algún subconjunto cerrado y semimodal Y de $X(A)$ y por la Observación 2.1.4.3, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i{}^A(Y)} \subseteq Y$. Si suponemos que existe $P \in Y$ tal que $P \notin \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(Y)}$, entonces existen $a, b \in A$ tales que (1) $P \in \sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)$ y (2) $(\sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_A^i(Y) = \emptyset$. De (1) inferimos que $a \wedge b \notin P$, por esto y (1) obtenemos que (3) $(a, a \wedge b) \notin \vartheta$. Además, de (2) se sigue que $\sigma_A(a) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(Y) \subseteq \sigma_A(b)$ y por lo tanto, $\sigma_A(a) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(Y) = \sigma_A(a \wedge b) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_A^i(Y)$. Esta última afirmación implica que $(\phi_i a, \phi_i(a \wedge b)) \in \vartheta$ para todo $i \in I$. Por consiguiente, de (3) tenemos que $\vartheta \notin Con_{\theta LM_\theta}(A)$, lo que contradice la hipótesis. Así, concluimos que $Y \in \mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A))$ y por lo tanto, $\vartheta = \Theta_\theta(Y)$. Además, como $\mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A)) \subseteq \mathcal{C}_S(Ł_\theta(A))$ y Θ_θ es la retricción de la función Θ_S a $\mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A)$, entonces por el Teorema 2.1.4.12, Θ_θ es un isomorfismo de orden de $\mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A)$ en el dual del retículo $Con_{\theta LM_\theta}(A)$, y por consiguiente, $\mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A))$ es un retículo y Θ_θ es un isomorfismo de retículos. □

Corolario 2.1.4.19 *Sea A una LM_n-álgebra. Entonces, toda LM_n-congruencia de A es una θLM_n-congruencia de A.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.1.4.18, el Corolario 2.1.4.13 y la Proposición 2.1.4.17. □

2.1.5. $LM_\theta-$congruencias y $\theta LM_\theta-$congruencias maximales

En esta sección nos proponemos caracterizar las $LM_\theta-$congruencias maximales y las $\theta LM_\theta-$congruencias maximales de las $LM_\theta-$álgebras, a través de la dualidad obtenida, con el objeto de determinar propiedades de las mismas.

En lo que sigue, si $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, denotamos por $\mathcal{C}^0_\theta(X)$ al conjunto de todos los $\theta-$subconjuntos cerrados no vacíos de X y por $\mathcal{C}^0_S(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos cerrados y semimodales no vacíos de X.

Proposición 2.1.5.1 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto cerrado de X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un elemento minimal de $\mathcal{C}^0_\theta(X)$,*

(ii) *existe $x \in X$ tal que $Y = \overline{\{f_i(x)\}_{i\in I}}$,*

(iii) *Y es un elemento minimal de $\mathcal{C}^0_S(X)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis se verfica que $Y \in \mathcal{C}^0_\theta(X)$, entonces por la Proposición 2.1.4.16, $Y = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)}$, de donde se sigue que para cada $y \in Y$, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(y)} \subseteq Y$. Como, por la Proposición 2.1.4.16, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(y)} \in \mathcal{C}^0_\theta(X)$, entonces de (i) concluimos que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i(y)\}} = Y$ para cada $y \in Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la Proposición 2.1.4.16 resulta que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i(x)\}} \in C_\theta{}^0(X)$ para todo $x \in X$. Sean $x \in X$ y $Z \in \mathcal{C}^0_\theta(X)$ tales que $Z \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i(x)\}}$. Por el Corolario 2.1.3.2 tenemos que $\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$ es un subconjunto cerrado de X, entonces se verifica que

$\overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i(x)\}} \subseteq\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$, de donde se sigue que $Z \subseteq\uparrow \{f_i(x)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(x)\}_{i\in I}$, y de (lP3) obtenemos que $f_i(Z) = \{f_i(x)\}$ para todo $i \in I$. De esta última afirmación y la Proposición 2.1.4.16, concluimos que $Z = \overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i(x)\}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sean $Y = \overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}}$ para algún $y \in X$ y $Z \in \mathcal{C}^0_S(X)$ tales que $Z \subseteq Y$. Teniendo en cuenta la Definición 2.1.4.1 y el Lema 2.1.4.4 tenemos que $\overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}} \subseteq \downarrow y \cup \uparrow y$ y entonces, $Z \subseteq\downarrow y \cup \uparrow y$. Luego, por ser Z un subconjunto no vacío de X, de (lP3) resulta que $f_i(Z) = \{f_i(y)\}$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $\overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$, de lo cual se sigue que $Y \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$. Como $Z \in \mathcal{C}^0_S(X)$, entonces por la Observación 2.1.4.3, tenemos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)} \subseteq Z$, lo que implica que $Y \subseteq Z$ y así, $Y = Z$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Por la hipótesis (iii) tenemos que para cada $y \in Y$, $\overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}} \subseteq Y$. Además, de la Definición 2.1.4.14 y la Proposición 2.1.4.16 inferimos que para cada $y \in Y$, $\overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}} \in \mathcal{C}^0_S(X)$, y por la hipótesis (iii) concluimos que $Y = \overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}}$. □

Corolario 2.1.5.2 *Sea $(X, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ un l_nP-espacio. Entonces, un subconjunto Y de X es un elemento minimal del conjunto $\mathcal{C}^0_M(X)$ de todos los subconjuntos cerrados, modales y no vacíos de X si, y solo si, Y es una cadena maximal en X.*

Dem. Por las Proposiciones 2.1.4.11, 2.1.4.17 y 2.1.5.1, Y es un elemento minimal del conjunto $\mathcal{C}^0_M(X)$ si, y solo si, $Y = \overline{\{f_i(y) : 1 \leq i \leq n-1\}}$. De (lP1), (lP2) y (lP6) y el Corolario 2.1.3.8 se sigue que $Y = \{f_i(y) : 1 \leq i \leq n-1\} = C_y$ para todo $y \in Y$, donde C_y es la cadena maximal en X tal que $y \in C_y$. □

Corolario 2.1.5.3 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y su $l_\theta P-$espacio asociado $(X(A), \{f^A_i\}_{i\in I})$. Entonces para toda $LM_\theta-$congruencia φ de A, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A,*

(ii) *φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia maximal de A,*

(iii) *existe $P \in X(A)$ tal que $\varphi = \Theta_S(Y)$, donde $Y = \overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$*

y $\Theta_S(Y)$ está definida como en el Teorema 2.1.4.12.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): En virtud del Teorema 2.1.4.12, ϑ es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A si, y solo si, existe un elemento minimal Y de $\mathcal{C}^0_S(X(A)) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\vartheta = \Theta_S(Y)$. Por la Proposición 2.1.5.1, esta última aseveración es equivalente al hecho de que Y es un elemento minimal de $\mathcal{C}^0_\theta(X(A)) \setminus \{\emptyset\}$. Como $\Theta_S(Y) = \Theta_\Theta(Y)$, por el Teorema 2.1.4.18, concluimos que ϑ es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A si, y solo si, ϑ es una $\theta LM_\theta-$congruencia maximal de A.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia del Teorema 2.1.4.12 y la Proposición 2.1.5.1. $\square$

Corolario 2.1.5.4 *Sean $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ una LM_n-álgebra y su l_nP-espacio asociado $(X(A), \{f_1^A, \ldots f_{n-1}^A\})$. Entonces para toda LM_n-congruencia φ de A, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una LM_n-congruencia maximal de A,*

(ii) *$\varphi = \Theta_M(Y)$, donde Y es un elemento minimal del retículo $\mathcal{C}^0_M(X(A))$ de todos los subconjuntos modales y cerrados y no vacíos de $X(A)$,*

(iii) *$\varphi = \Theta_M(Y)$, donde Y es una cadena maximal de $X(A)$,*

(iv) *existe $P \in X(A)$ tal que $\varphi = \Theta_M(Y)$, donde $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{\phi_i^{-1}(P)\}$,*

(v) *$\varphi = \mathbf{\Theta}(\phi_1^{-1}(P))$ para algún $P \in X(A)$,*

donde la congruencia $\Theta_M(Y)$ está definida como en el Corolario 2.1.4.13 *y* $\mathbf{\Theta}(\phi_1^{-1}(P))$ *es la LM_n-congruencia asociada al filtro $\phi_1^{-1}(P)$.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): En virtud del Corolario 2.1.4.13, ϑ es una LM_n-congruencia maximal de A si, y solo si, existe un elemento minimal Y de $\mathcal{C}^0_M(X(A)) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\vartheta = \Theta_M(Y)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia del Corolario 2.1.5.2.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Resulta del Corolario 2.1.3.9.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Se sigue de (A10) y (A11). $\square$

Corolario 2.1.5.5 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra. Si φ es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A, entonces A/φ es una $LM_\theta-$álgebra simple.*

Dem. Si φ es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A, entonces por el Corolario 2.1.5.3, φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia maximal de A y por lo tanto, el álgebra cociente A/φ es una $LM_\theta-$álgebra simple. □

Corolario 2.1.5.6 *Toda $LM_\theta-$álgebra es semisimple.*

Dem. Sean A una LM$_\theta-$álgebra y ϑ_M una $LM_\theta-$congruencia maximal de A. Teniendo en cuenta los Corolarios 2.1.5.1 y 2.1.5.3, y el Teorema 2.1.4.18 inferimos que $\vartheta_M = \Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\}}\right)$ para algún $x \in X(A)$. Sea (1) $\vartheta = \bigcap_{x\in X} \Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\}}\right)$. Entonces, $\vartheta \in Con_{\theta LM_\theta}(A)$ y por el Teorema 2.1.4.18, existe $F \in \mathcal{C}_\theta(\text{Ł}_\theta(A))$ tal que $\vartheta = \Theta_\theta(F)$. Por lo tanto, de (1) y el Teorema 2.1.4.18, se sigue que $\bigcup_{x\in X(A)} \bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\} \subseteq F$. Como F es un subconjunto cerrado de Ł$_\theta(A)$, $\overline{\bigcup_{x\in X} \bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\}} \subseteq F$ y así, por (lP6) concluimos que $F = X(A)$; por esto, $\vartheta = \{(a,a) : a \in A\}$ y por consiguiente, por un lema de álgebra universal debido a Birkhoff, A es isomorfa al producto subdirecto de las álgebras cocientes ${}^{A}\!\Big/_{\Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\}}\right)}$, con $x \in X(A)$. Por otra parte, por el Corolario 2.1.5.3, $\Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\}}\right)$ es una $LM_\theta-$congruencia maximal para todo $x \in X(A)$, entonces por el Corolario 2.1.5.5, el 'algebra cociente ${}^{A}\!\Big/_{\Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i^A(x)\}}\right)}$ es una $LM_\theta-$álgebra simple para todo $x \in X(A)$, lo que nos permite concluir la demostración. □

2.1.6. $LM_\theta-$congruencias determinadas por $\theta-$filtros

A continuación nos proponemos caracterizar, vía la dualidad, las $LM_\theta-$congruencias de las $LM_\theta-$álgebras que están determinadas por una clase particular de filtros de estas álgebras, llamados $\theta-$filtros.

Definición 2.1.6.1 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Un filtro F de A es un $\theta-$filtro de A si $x \in F$ implica $\phi_i x \in F$ para todo $i \in I$, o equivalentemente si $F \subseteq {\phi_i}^{-1}(F)$ para todo $i \in I$.*

Lema 2.1.6.2 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que el conjunto* I *tiene primer elemento* 0*. Entonces, un filtro* F *de* A *es un* $\theta-$*filtro de* A *si, y solo si,* $x \in F$ *implica* $\phi_0 x \in F$*, o equivalentemente si* $F = {\phi_0}^{-1}(F)$*.*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Definición 2.1.6.1 y la propiedad (L6) de las $LM_\theta-$álgebras. □

Corolario 2.1.6.3 *Sea* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1},)$ *una* LM_n-*álgebra. Entonces, un filtro* F *de* A *es un* $\theta-$*filtro de* A *si, y solo si,* $x \in F$ *implica* $\phi_1 x \in F$*, o equivalentemente si* $F = {\phi_1}^{-1}(F)$*.*

Dem. Se sigue del Lema 2.1.6.2, teniendo en cuenta que $I = \{1, \ldots, n-1\}$ cuando $\theta = n$, $n \geq 2$. □

El concepto de $\theta-$filtro fue introducido por Moisil para las LM_n-álgebras en [53] y más tarde para las $LM_\theta-$álgebras en [58] bajo el nombre de filtros fuertes, a causa de que existen filtros que no son $\theta-$filtros, por ejemplo el único $\theta-$filtro propio de $L_2^{[I]}$ es $\{1\}$. En el caso de las $LM_\theta-$álgebras en las que el conjunto I tiene primer elemento, resulta que los $\theta-$filtros coinciden con los filtros de Stone, introducidos por A. Monteiro en [61] (cf. [65]). A continuación recordamos la definición de filtro de Stone de un retículo acotado y una caracterización de los $\theta-$filtros de las $LM_\theta-$álgebras en las que el conjunto I tiene primer elemento.

Definición 2.1.6.4 *Un filtro de Stone* F *de un retículo (distributivo) acotado* L *es un filtro* F *de* L *tal que para todo* $x \in F$ *existe* $y \in F \cap C(L)$ *tal que* $y \leq x$*, donde* $C(L)$ *es el conjunto de los elementos booleanos de* L*.*

Proposición 2.1.6.5 ([13, Proposition 5.1.4]) *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que el conjunto* I *tiene primer elemento* 0*. Entonces, para todo filtro* F *de* A*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) F *es un* $\theta-$*filtro,*

(ii) F *es un filtro de Stone,*

(iii) *F es el filtro generado por $F \cap C(L)$,*

(iv) $F = \phi_0^{-1}(F)$.

Denotamos con $\mathcal{F}_\theta(A)$ al conjunto de todos los $\theta-$filtros de una $LM_\theta-$álgebra A.

En primer lugar vemos que la congruencia de retículo determinada por un $\theta-$filtro es una $LM_\theta-$congruencia.

Lema 2.1.6.6 ([13]) *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Si F es un $\theta-$filtro de A, entonces la congruencia $\mathbf{\Theta}(F)$ asociada al filtro F es una $LM_\theta-$congruencia de A.*

Dem. Sean a, $b \in A$ tales que $(a, b) \in \mathbf{\Theta}(F)$, entonces existe $f \in F$ tal que $a \wedge f = b \wedge f$, de donde se sigue que para todo $i \in I$, $\phi_i(a)\wedge\phi_i(f) = \phi_i(b)\wedge\phi_i(f)$. Como F es un $\theta-$filtro de A, se verifica que $\phi_i(f) \in F$ para todo $i \in I$ y por lo tanto, $(\phi_i(a), \phi_i(b)) \in \mathbf{\Theta}(F)$ todo $i \in I$. □

Proposición 2.1.6.7 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra, $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P$–espacio asociado y Θ_S el isomorfismo definido en el* Teorema 2.1.4.12.

(i) *Si F es un $\theta-$filtro de A, entonces el conjunto $Y_F = \{P \in X(A) : F \subseteq P\} = \bigcap\limits_{a\in F} \sigma_A(a)$ es un subconjunto cerrado, semimodal y creciente de $X(A)$ y además $\mathbf{\Theta}(F) = \Theta_S(Y_F)$.*

(ii) *Si Y es un subconjunto cerrado, semimodal y creciente de $X(A)$, entonces el conjunto*

$F_Y = \{a \in A : Y \subseteq \sigma_A(a)\}$ *es un $\theta-$filtro de A y $\mathbf{\Theta}(F_y) = \Theta_S(Y)$.*

Dem.

(i): Sea $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$. Entonces, por lo afirmado en (A10) en la Sección 1.4.1, tenemos que Y_F es un subconjunto cerrado y creciente de $X(A)$ y $\mathbf{\Theta}(F) = \Theta(Y_F)$, de lo que se sigue, por el Lema 2.1.6.6, que $\Theta_S(Y_F) \in Con_{LM_\theta}(A)$, donde $\Theta_S(Y_F) = \Theta(Y_F)$. Luego, del Teorema 2.1.4.12 concluimos que Y_F es un subconjunto semimodal de $X(A)$ y $\mathbf{\Theta}(F) = \Theta_S(Y_F)$.

(ii): Sea Y un subconjunto cerrado, semimodal, y creciente de $X(A)$. Luego, teniendo en cuenta el resultado establecido en (A11) en la Sección 1.4.1, obtenemos que el conjunto

$F_Y = \{a \in A : Y \subseteq \sigma_A(a)\}$ es un filtro de A. Sea $a \in F_Y$, entonces $Y \subseteq \sigma_A(a)$, y por ser Y un subconjunto semimodal de X se sigue que $Y \subseteq \ {f_i^A}^{-1}(\sigma_A(a))$ para todo $i \in I$. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo, inferimos que $Y \subseteq \sigma_A(\phi_i(a))$ para todo $i \in I$, de donde obtenemos que $\phi_i(a) \in F_Y$ para todo $i \in I$, resultando así que F_Y es un $\theta-$filtro. Entonces, por el Torema 2.1.4.12 y (A11), concluimos que $\mathbf{\Theta}(F_Y) = \Theta_S(Y)$. □

El Teorema 2.1.4.12 y la Proposición 2.1.6.7 nos permiten obtener la siguiente caracterización de las $LM_\theta-$congruencias determinadas por los $\theta-$filtros de A.

Teorema 2.1.6.8 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces el retículo $\mathcal{C}_{SC}(X(A))$, de los subconjuntos cerrados, semimodales y crecientes de $X(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{\mathcal{F}_\theta}(A)$ de las $LM_\theta-$congruencias determinadas por los $\theta-$filtros de A, y el isomorfismo Θ_{SC} es la restricción a $\mathcal{C}_{SC}(X(A))$ del isomorfismo Θ_S definido en el* Teorema 2.1.4.12.

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.1.4.12 y la Proposición 2.1.6.7. □

Corolario 2.1.6.9 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces el retículo $\mathcal{C}_{SC}(X(A))$, de los subconjuntos cerrados, semimodales y crecientes de $X(A)$, es isomorfo al dual del retículo $\mathcal{F}_\theta(A)$.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 2.1.6.8 y el hecho de que los retículos $\mathcal{F}_\theta(A)$ y $Con_{\mathcal{F}_\theta}(A)$ son isomorfos. □

A continuación consideramos el caso particular en el que el conjunto I tiene primer y último elemento.

Proposición 2.1.6.10 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio asociado tal que el conjunto I tiene primer elemento* 0 *y último elemento* 1*. Entonces para todo subconjunto Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un subconjunto modal,*

(ii) $Y = \bigcup\limits_{y\in Y} [f_0(y), f_1(y)]$,

(iii) *Y es un subconjunto semimodal y creciente,*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Se sigue de la Proposición 2.1.4.6.

(i) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis (i) y la Proposición 2.1.4.6 es inmediato que Y es un subconjunto semimodal y creciente.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (iii) inferimos que $f_0(y) \in Y$ para todo $y \in Y$. Teniendo en cuenta que Y es creciente, se sigue que $[f_0(y), f_1(y)] \subseteq Y$ para todo $y \in Y$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{y \in Y} [f_0(y), f_1(y)] \subseteq Y$. Por otra parte, de (lP11) obtenemos que $Y \subseteq \bigcup\limits_{y \in Y} [f_0(y), f_1(y)]$ y así, $Y = \bigcup\limits_{y \in Y} [f_0(y), f_1(y)]$. □

Corolario 2.1.6.11 *Sea $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ un $l_\theta P-$espacio asociado tal que el conjunto I tiene primer y último elemento. Entonces, un subconjunto Y de X es un elemento minimal del retículo $\mathcal{C}_M(X)$ de los subconjuntos cerrados y modales de X si, y solo si, $Y = [f_0(x), f_1(x)]$ para algún $x \in X$.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 2.1.6.10. □

Corolario 2.1.6.12 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i \in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i \in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que el conjunto I tiene primer y último elemento, $(X(A), \{f_i^A\}_{i \in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado y Θ_S el isomorfismo definido en el* Teorema 2.1.4.12.

(i) *Si F es un $\theta-$filtro de A, entonces $Y_F = \{P \in X(A) : F \subseteq P\} = \bigcap\limits_{a \in F} \sigma_A(a)$ es un subconjunto cerrado y modal de $X(A)$ y $\Theta_S(Y_F) = \Theta(F)$.*

(ii) *Si Y es un subconjunto cerrado y modal de $X(A)$, entonces*

$$F_Y = \{a \in A : Y \subseteq \sigma_A(a)\} \text{ es un } \theta-\text{filtro de } A \text{ y } \boldsymbol{\Theta}(F_y) = \Theta_S(Y).$$

Dem. Es consecuencia de las Proposiciones 2.1.6.7 y 2.1.6.10. □

Los resultados obtenidos nos permiten dar la siguiente caracterización de las $LM_\theta-$congruencias determinadas por los $\theta-$filtros cuando el conjunto I tiene primer y último elemento.

Teorema 2.1.6.13 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que el conjunto* I *tiene primer y último elemento y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces el retículo* $\mathcal{C}_M(X(A))$*, de los subconjuntos cerrados y modales de* $X(A)$*, es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathcal{F}_\theta}(A)$ *de las* $LM_\theta-$*congruencias determinadas por los* $\theta-$*filtros de* A*, y el isomorfismo es la función* Θ_M *definida por la misma prescripción que en el* Teorema 2.1.4.12*.*

Dem. Se sigue del Teorema 2.1.6.8 y la Proposición 2.1.6.10. □

Corolario 2.1.6.14 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que el conjunto* I *tiene primer y último elemento y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces, el retículo* $\mathcal{C}_M(X(A))$*, de los subconjuntos cerrados y modales de* $X(A)$*, es isomorfo al dual del retículo* $\mathcal{F}_\theta(A)$*.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.1.6.8 y la Proposición 2.1.6.10 o del Teorema 2.1.6.13 y el hecho de que los retículos $\mathcal{F}_\theta(A)$ y $Con_{\mathcal{F}_\theta}(A)$ son isomorfos. □

Corolario 2.1.6.15 *Sean* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Entonces para todo* $\varphi \subseteq A \times A$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* LM_n-*congruencia de* A*,*

(ii) *existe* $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$ *tal que* $\varphi = \mathbf{\Theta}(F)$*.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 2.1.4.13 y el Teorema 2.1.6.13. □

2.1.7. Otra caracterización de las $\theta LM_\theta-$congruencias

En esta sección obtenemos una nueva caracterización de las $\theta LM_\theta-$congruencias de las $LM_\theta-$álgebras. Para ello consideramos la siguiente noción.

Definición 2.1.7.1 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Si* φ *es una* $LM_\theta-$*congruencia de* A*, llamamos* $\theta LM_\theta-$*congruencia generada por* φ*, y la notamos por* $\overline{\varphi}_\theta$*, a la menor* $\theta LM_\theta-$*congruencia de* A*, en el sentido de la relación inclusión, que contiene a* φ*.*

Lema 2.1.7.2 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Entonces,* $\overline{\mathbf{\Theta}(F)}_\theta = \overline{\Theta_{SC}(Y_F)}_\theta$ *para todo* $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$*, y cuando* I *tiene primer y último elemento,* $\overline{\mathbf{\Theta}(F)}_\theta = \overline{\Theta_M(Y_F)}_\theta$*, donde* Θ_{SC} *y* Θ_M *son los isomorfismos indicados en los* Teoremas 2.1.6.8 y 2.1.6.13, *respectivamente.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 2.1.6.7 y el Corolario 2.1.6.12. $\square$

Lema 2.1.7.3 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Si* Y *es un subconjunto cerrado y semimodal de* $X(A)$*, entonces* $\overline{\Theta_{SC}(Y)}_\theta = \Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right)$*, donde donde* $\overline{\Theta_{SC}(Y)}_\theta$ *es la* $\theta LM_\theta-$*congruencia generada por* $\Theta_{SC}(Y)$*,* Θ_{SC} *es la restricción de* Θ_S *a* $\mathcal{C}_{SC}(X(A))$*, siendo* Θ_S *y* Θ_θ *los isomorfismos indicados en los* Teoremas 2.1.4.12 y 2.1.4.18*, respectivamente.*

Dem. Los Teoremas 2.1.4.12 y 2.1.4.18 nos permiten afirmar que $\overline{\Theta_{SC}(Y)}_\theta = \overline{\Theta_S(Y)}_\theta = \Theta_\theta(Z)$, donde Z es el mayor $\theta-$subconjunto cerrado contenido en Y. Teniendo en cuenta que es fácil probar que $Z = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$, la demostración está completa. $\square$

Lema 2.1.7.4 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces para todo subconjunto* Y *de* X*,* $\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ *es el menor subconjunto cerrado, semimodal y creciente de* X *que contiene a* $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.

Dem. Es inmediato que $\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ es un subconjunto creciente de X. Teniendo en cuenta que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$ y la propiedad (P4) de los $P-$espacios (Sección 1.4.1), resulta que $\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ es cerrado en X. Por otra parte, por (lP1) y (lP2) tenemos que para todo $j \in I$, f_j es una función cerrada y continua de X en X y por lo tanto, (1) $f_j\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right) = f_j(Y)$ para todo $j \in I$. Además, de (lP5) y (1) obtenemos que $f_j\left(\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right) = f_j(Y)$ para todo $j \in I$, de donde se sigue que $f_j\left(\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right) \subseteq \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ para todo $j \in I$ y por consiguiente, $\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ es semimodal. $\square$

Definición 2.1.7.5 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio asociado. Si* Y *es un* $\theta-$*subconjunto cerrado de* X*, llamamos subconjunto cerrado, semimodal y creciente de* X *generado por* Y *al menor subconjunto cerrado, semimodal y creciente de* X *que contiene a* Y*.*

Lema 2.1.7.6 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo $\theta-$subconjunto cerrado Y de X, $\uparrow Y$ es el subconjunto cerrado, semimodal y creciente de X generado por Y y $\overline{\Theta_{SC}(\uparrow Y)}_\theta = \Theta_\theta(Y)$.*

Dem. Sea Y un $\theta-$subconjunto de X. Luego, por la Proposición 2.1.4.16, tenemos que (1) $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. De esta afirmación y el Lema 2.1.7.4 inferimos que $\uparrow Y$ es el subconjunto cerrado, semimodal y creciente de X generado por Y. Además, de (lP3) obtenemos que $f_i(\uparrow Y) = f_i(Y)$ para todo $i \in I$, entonces del Lema 2.1.7.3 y (1), concluimos que $\overline{\Theta_{SC}(\uparrow Y)}_\theta = \Theta_\theta(Y)$. □

Proposición 2.1.7.7 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo subconjunto Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es el subconjunto cerrado, semimodal y creciente de X generado por algún $\theta-$subconjunto de X,*

(ii) *Y es el subconjunto creciente generado por algún $\theta-$subconjunto de X* ($Y =\uparrow Z$ para algún $\theta-$subconjunto Z de X),

(iii) $Y =\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (ii) se sigue que existe un $\theta-$subconjunto Z de X tal que $\uparrow Z \subseteq Y$, en consecuecia del Lema 2.1.7.6 y la hipótesis (i), obtenemos que $Y =\uparrow Z$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea (1) $Y =\uparrow Z$ para algún $\theta-$subconjunto Z de X, entonces de la Proposición 2.1.4.16 inferimos que (2) $Y =\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$. Por otra parte, de (1) y la propiedad (lP3) obtenemos que $f_i(Y) = f_i(Z)$ para todo $i \in I$, de donde por (2) concluimos que $Y =\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia de la Proposición 2.1.4.16 y el Lema 2.1.7.4. □

Corolario 2.1.7.8 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio asociado tal que el conjunto I tiene ptimer elemento* 0 *y último elemento* 1*. Entonces para todo subconjunto Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es el subconjunto creciente generado por algún $\theta-$subconjunto de X*

($Y =\uparrow Z$ para algún $\theta-$subconjunto Z de X),

(ii) $Y =\downarrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$,

(iii) Y es un subconjunto cerrado y modal de X.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Se sigue inmediatamente de la Proposición 2.1.7.7.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es consecuencia de las Proposiciones 2.1.6.10 y 2.1.7.7.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Proposición 2.1.6.10 se sigue que $\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \subseteq Y$. Además, si $y \in Y$, entonces por (lP13), $f_0(y) \leq y$, de lo que resulta que $y \in\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ y por lo tanto, $Y =\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. □

Teorema 2.1.7.9 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y su $l_\theta P-$espacio asociado $Ł_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$. Entonces el retículo $\mathcal{C}r_{G\theta}(Ł_\theta(A))$, de todos los subconjuntos crecientes de $Ł_\theta(A)$ generados por los $\theta-$subconjuntos cerrados de $X(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{\theta LM_\theta}(A)$ de todas las $\theta LM_\theta-$congruencias de A, donde el isomorfismo F está definido por la prescripción $F(Y) = \overline{\Theta_{SC}(Y)}_\theta = \Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right)$, $\Theta_{SC}(Y) = \Theta_S(Y)$, siendo Θ_S y Θ_θ los isomorfismos definidos en los* Teoremas 2.1.4.12 y 2.1.4.18*, respectivamente.*

Dem. Teniendo en cuenta la Proposición 2.1.7.7, tenemos que el retículo $\mathcal{C}r_{G\theta}(Ł_\theta(A))$ es un subretículo del retículo $\mathcal{C}_{SC}(Ł_\theta(A))$ de los subconjuntos cerrados, semimodales y crecientes de $Ł_\theta(A)$. En virtud de los resultados establecidos en los Teoremas 2.1.4.12 y 2.1.4.18, el Corolario 2.1.7.6 y la Proposición 2.1.7.7, es inmediato que F es un homomorfismo de retículos de $\mathcal{C}r_{G\theta}(Ł_\theta(A))$ en el dual de $Con_{\theta LM_\theta}(A)$.

Además, el homomorfismo $F : \mathcal{C}r_{G\theta}(Ł_\theta(A)) \longrightarrow Con_{\theta LM_\theta}(A)$ es sobreyectivo. En efecto, sea $\varphi \in Con_{\theta LM_\theta}(A)$, entonces por el Teorema 2.1.4.18, existe $Z \in \mathcal{C}_\theta(Ł_\theta(A))$ tal que (1) $\Theta_\theta(Z) = \varphi$. Luego, por la Proposición 2.1.7.7, $\uparrow Z \in \mathcal{C}r_{G\theta}(Ł_\theta(A))$. De esta última afirmación y el Corolario 2.1.7.6 resulta que $\overline{\Theta_{SC}(\uparrow Z)}_\theta = \Theta_\theta(Z)$, de donde concluimos por (1) que $F(\uparrow Z) = \varphi$.

También, el homomorfismo $F : \mathcal{C}r_{G\theta}(\text{Ł}_\theta(A)) \longrightarrow Con_{\theta LM_\theta}(A)$ es inyectivo. En efecto, sean (1) Y, $Z \in \mathcal{C}r_{G\theta}(\text{Ł}_\theta(A))$ tales que(2) $F(Y) = F(Z)$. De (1) y la Proposición 2.1.7.7 inferimos que $Y = \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ y $Z = \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$. De estas afirmaciones y (2) se sigue que $\theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right) = \theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}\right)$, de lo que resulta, por el Teorema 2.1.4.18, que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$ y por lo tanto, $Y = Z$.

Concluimos de esta manera que F es un isomomorfismo de retículo de $\mathcal{C}r_{G\theta}(\text{Ł}_\theta(A))$ en el dual de $Con_{\theta LM_\theta}(A)$. □

Corolario 2.1.7.10 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que el conjunto I tiene primer y último elemento y $\text{Ł}_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces el retículo $\mathcal{C}_M(\text{Ł}_\theta(A))$, de todos los subconjuntos cerrados y modales de $\text{Ł}_\theta(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{\theta LM_\theta}(A)$ de todas las $\theta LM_\theta-$congruencias de A, donde el isomorfismo F está definido por la prescripción $F(Y) = \overline{\Theta_M(Y)}_\theta = \Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}\right)$, $\Theta_M(Y) = \{(a,b) \in A\times A : \sigma_A(a)\cap Y = \sigma_A(b)\cap Y\}$ y Θ_θ es el isomorfismo indicado en el* Teorema 2.1.4.18.

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 2.1.7.8 y el Teorema 2.1.7.9. □

Corolario 2.1.7.11 ([12], [48],[13, Theorem 5.1.13]) *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Entonces, el retículo $\mathcal{F}_\theta(A)$ de todos los $\theta-$filtros de A es isomorfo al retículo $Con_{\theta LM_\theta}(A)$ de todas las $\theta LM_\theta-$congruencias de A, donde el isomorfismo h está definido por la prescripción $h(F) = \overline{\mathbf{\Theta}(F)}_\theta$ para todo $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 2.1.6.7, los Corolarios 2.1.6.12 y 2.1.6.14, el Teorema 2.1.7.9 y el Corolario 2.1.7.10. □

Corolario 2.1.7.12 ([12], [48],[13, Theorem 5.1.13]) *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $\mathcal{F}_\theta(A)$ el retículo de todos los $\theta-$filtros de A. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia de A,*

(ii) *$\varphi = \overline{\mathbf{\Theta}(F)}_\theta$ para algún $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.1.7.11. □

Ahora nos proponenos caracterizar las $\theta LM_\theta-$congruencia maximales.

De ahora en adelante tenemos en cuenta que cuando $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ es el $l_\theta P-$espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$, entonces por el Lema 2.1.2.9, $f_i^A(P) = \phi_i^{-1}(P)$ para todo $P \in X(A)$ y para todo $i \in I$.

Proposición 2.1.7.13 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces se verifican:*

(i) $X(A) \cap \mathcal{F}_\theta(A) = \left\{P \in X(A) : P \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P)\right\} = \left\{P \in X(A) : P \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}(P)\right\},$

(ii) $max\, \mathcal{F}_\theta(A) = \left\{\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) : P \in X(A)\right\} = \left\{\bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}(P) : P \in X(A)\right\} \subseteq X(A),$

donde $max\, \mathcal{F}_\theta(A)$ es el conjunto de los elementos maximales de $\mathcal{F}_\theta(A)$.

Dem.

(i): Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$P \in X(A) \cap \mathcal{F}_\theta(A)$; $P \in X(A)$ y $P \subseteq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$; $P \in X(A)$ y $P \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}(P)$; $P \in X(A)$ y $P \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P)$.

(ii): Sea (1) $F \in max\, \mathcal{F}_\theta(A)$ y (2) $Y_F = \{P \in X(A) : F \subseteq P\}$. Luego, por la Proposición 2.1.6.7, Y_F es semimodal, entonces de (2) inferimos que $F \subseteq f_i^A(P)$ para todo $P \in Y_F$ y para todo $i \in I$ y por consiguiente, (2) $F \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P)$ para todo $P \in Y_F$. Por otra parte, de (lP5) y el Corolario 2.1.2.18, tenemos que para todo $j \in I$, $f_j^A\left(\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P)\right) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P)$ y por lo tanto, $\phi_j^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}(P)\right) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}P)$, de donde resulta que $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) \in \mathcal{F}_\theta(A)$, y en consecuencia de (1) y (2) concluimos que $F = \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) = \bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}(P)$ para todo $P \in Y_F$.

Recíprocamente, es inmediato que (3) $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) \in \mathcal{F}_\theta(A)$ para todo $P \in X(A)$. Sean ahora $P \in X(A)$ y (4) $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$ tales que (5) $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) \subseteq F$ y (6) $Y_F = \{Q \in X(A) : F \subseteq Q\}$. Entonces, de (5) y (6) resulta (7) $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) \subseteq Q$ para todo $Q \in Y_F$. Teniendo en cuenta que, por el Corolario 2.1.2.18, $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) \in X(A)$, inferimos de (lP3), (lP5) y (7) que $f_j^A\left(\bigcap_{i\in I} f_i^A(P)\right) = f_j^A(Q)$ para todo $Q \in Y_F$ y para todo $j \in I$. Además, por la Proposición 2.1.6.7, Y_F es semimodal, entonces $f_j^A\left(\bigcap_{i\in I} f_i^A(P)\right) \in Y_F$ para todo $j \in I$. De esta última aseveración y el hecho de que $f_j^A\left(\bigcap_{i\in I} f_i^A(P)\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f_i^A(P)$ para todo $j \in I$, concluimos que $F \subseteq \bigcap_{i\in I} f_i^A(P)$, y en consecuencia, por (3), (4) y (5), podemos afirmar que $\bigcap_{i\in I} f_i^A(P) \in max\,\mathcal{F}_\theta(A)$. Finalmente, del Corolario 2.1.2.18, concluimos que $max\,\mathcal{F}_\theta(A) \subseteq X(A)$. □

Corolario 2.1.7.14 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo $P \in X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *P es un $\theta-$filtro maximal de A,*

(ii) $P = \bigcap_{i\in I} f_i^A(P) = \bigcap_{i\in I} \phi_i^{-1}(P)$,

(iii) $Y_P = \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I}\{f_i^A(P)\}} = \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}} = \uparrow \overline{\{\phi_i^{-1}(P)\}_{i\in I}}$.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.7.13.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis y el Corolario 2.1.2.18, tenemos que $P \in X(A)$, de donde resulta que (1) $Y_P = \uparrow P$. Además, se verifica que (2) $\uparrow P = \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$. En efecto, teniendo en cuenta que $\uparrow \overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$ es creciente, para probar que $\uparrow P \subseteq \uparrow \overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$ es suficiente demostrar que $P \in \overline{\{\phi_i^{-1}(P)\}_{i\in I}}$. Sea $I^d = (I, \geq)$, donde $\geq$ es la relación dual de la relación de orden $\leq$ definida en I. Luego, por el Corolario 2.1.9.2, existe $R \in X(A)$ tal que (4) $\phi_i^{-1}(P) \xrightarrow[i\in I^d]{} R$ y $R \subseteq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$, y en consecuencia $R \subseteq P$. Si suponemos que $R \subset P$, entonces por (lP1) existe $U \in D(X(A))$ tal que (5) $R \notin U$ y $P \in U$. De esta afirmación y la hipótesis (ii) se sigue que $\phi_i^{-1}(P) \in U$ para todo $i \in I$, de lo que concluimos por (5) que $\phi_i^{-1}(P) \not\xrightarrow[i\in I^d]{} R$, lo que contradice (4) y por ende, $R = P$ y $P \in \uparrow \overline{\{\phi_i^{-1}(P)\}_{i\in I}}$. Por otro lado, si suponemos que existe (6) $R \in \overline{\{\phi_i^{-1}(P)\}_{i\in I}}$ tal que $P \not\subseteq R$, entonces de la hipótesis (ii) y (lP1), existe $U \in D(X(A))$ tal que (7) $R \notin U$

y (8) $\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)\in U$. Luego, por ser U creciente y (8), tenemos que $\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}\subseteq U$, y teniendo en cuenta que U es cerrado, de (7) obtenemos que $R\notin\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$, lo que contradice (6). Consecuentemente, $\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)\subseteq R$ para todo $R\in\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$ y así por la hipótesis (ii), $\uparrow\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}\subseteq\uparrow P$. Por lo tanto se verifica (2), de donde por (1) concluimos la demostración.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Como $P\in X(A)$, entonces $Y_P=\uparrow P$, de donde se sigue, por la hipótesis (iii), que (1) $\uparrow P=\uparrow\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$. Luego, $\phi_i^{-1}(P)\in\uparrow P$ para todo $i\in I$ y por lo tanto, (2) $P\subseteq\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)$. Supongamos, que $P\subset\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)$, entonces por el Corolario 2.1.2.18 y (lP1) existe $U\in D(X(A))$ tal que (3) $P\notin U$ y $\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)\in U$, de donde resulta que (4) $\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}\subseteq U$. Por otro lado, de (1) existe (5) $Q\in\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$ tal que $Q\subseteq P$, entonces de (3) obtenemos que $Q\notin U$, de donde inferimos por (4) que $Q\notin\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$, lo que contradice (5) y por ende $P=\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)$. □

Corolario 2.1.7.15 *Sea* $(A,\{\phi_i\}_{i\in I},\{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Si* $\varphi\subseteq A\times A$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* $\theta LM_\theta-$*congruencia maximal,*

(ii) $\varphi=\overline{\mathbf{\Theta}\left(\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)\right)_\theta}$ *para algún* $P\in X(A)$,

(iii) *existe* $P\in X(A)$ *tal que* $\varphi=\Theta_\theta(Y)$*, donde* $Y=\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$

y $\Theta_\theta(Y)$ *está definida como en el* Teorema 2.1.4.18.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia inmediata de los Corolarios 2.1.7.11 y 2.1.7.14.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea (1) $Q=\bigcap_{i\in I}\phi_i^{-1}(P)$, entonces de la hipótesis (ii) y las Proposiciones 2.1.6.7 y 2.1.7.13, obtenemos que (1) $\varphi=\overline{\Theta_S(Y_Q)}_\theta$. Por otra parte, de (1) y el Corolario 2.1.7.14 resulta que $Y_Q=\uparrow\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$, de donde inferimos que (2) $f_i^A(Y_Q)=\{f_i^A(P)\}=\{\phi_i^{-1}(P)\}$ para todo $i\in I$. Luego, de (1), (2) y el Lema 2.1.7.2, $\varphi=\Theta_\theta\left(\overline{\bigcup_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}\right)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sea (1) $Q = \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) = \bigcap\limits_{i\in I} \phi_i^{-1}(P)$, entonces del Lema 2.1.7.2 y la Proposición 2.1.7.13, obtenemos que (2) $\overline{\mathbf{\Theta}(Q)}_\theta = \overline{\Theta_{SC}(Y_Q)}_\theta$. Por otra parte, de (1) y el Corolario 2.1.7.14, $Y_Q =\uparrow \overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i^A(P)\}} =\uparrow \overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{\phi_i^{-1}(P)\}}$, entonces por los Lemas 2.1.7.3 y 2.1.7.6, concluimos que $\overline{\Theta_S(\uparrow Y_Q)}_\theta = \Theta_\theta(Y_Q)$. $\square$

A continuación analizamos cuando el conjunto I tiene primer y último elemento

Proposición 2.1.7.16 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que el conjunto I tiene primer elemento 0 y último elemento 1 y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado Entonces se verifican:*

(i) $X(A) \cap \mathcal{F}_\theta(A) = min\, X(A)$,

(ii) $min\, X(A) = max\, \mathcal{F}_\theta(A)$,

donde $min\, X(A)$ es el conjunto de los elementos minimales de $X(A)$ y $max\, \mathcal{F}_\theta(A)$ es el conjunto de los elementos maximales de $\mathcal{F}_\theta(A)$.

Dem.

(i): Sea P un filtro primo de A, luego por el Lema 2.1.6.2, P es un $\theta-$filtro si, y solo si, $P = {\phi_0}^{-1}(P)$. Por otra parte, por el Lema 2.1.2.9, $P = {\phi_0}^{-1}(P)$ si, y solo si, $Y = f_0^A(P)$. Además, del Corolario 2.1.3.7 resulta que $Y = f_0^A(P)$ si, y solo si, $P \in min\, X(A)$. También es consecuencia del inciso (i) de la Proposición 2.1.7.13 y teniendo en cuenta que cuando I tiene primer elemento 0, entonces por (lP4) y (lP14), se verifica que $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) = f_0^A(P)$ y $f_0^A(P)$ es el único elemento de $min\, X(A)$ que precede a P, en el sentido de la relación inclusión, para todo $P \in X(A)$.

(ii): Como I tiene primer elemento 0, entonces por el inciso (ii) de la Proposición 2.1.7.13 y las propiedades (lP4) y (lP14) inferimos que $max\, \mathcal{F}_\theta(A) = \left\{ \bigcap\limits_{i\in I} f_i^A(P) : \, P \in X(A) \right\} = \left\{ f_0^A(P) : \, P \in X(A) \right\} = min\, X(A)$. $\square$

Corolario 2.1.7.17 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que el conjunto I tiene primer elemento 0 y último elemento 1 y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo $P \in X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *P es un $\theta-$filtro maximal de A,*

(ii) *P es un $\theta-$filtro primo minimal de A,*

(iii) $P = f_0^A(P) = {\phi_0}^{-1}(P)$,

(iv) $Y_P = [f_0^A(P), f_1^A(P)]$.

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.1.6.12 y las Proposiciones 2.1.4.6 y 2.1.7.16. □

Corolario 2.1.7.18 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que el conjunto I tiene primer elemento 0 y último elemento 1. Si $\varphi \subseteq A \times A$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia maximal,*

(ii) *$\varphi = \overline{\mathbf{\Theta}(\phi_0^{-1}(P))_\theta}$ para algún $P \in X(A)$.*

Dem. Es consecuencia inmediata de los Corolarios 2.1.7.11 y 2.1.7.17. □

Corolario 2.1.7.19 *Sean $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ una $LM_\theta-$álgebra y su l_nP-espacio asociado $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$. Entonces para todo $\varphi \subseteq A \times A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una LM_n-congruencia maximal,*

(ii) *$\varphi = \mathbf{\Theta}(\phi_1^{-1}(P))$ para algún $P \in X(A)$.*

Dem. Se sigue del Corolario 2.1.7.18 y teniendo en cuenta que toda LM_n-congruencia de una $LM_\theta-$álgebra es una θLM_n-congruencia. □

2.1.8. El $l_\theta P-$espacio de las $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

A continuación, aplicamos los resultados obtenidos anteriormente para caracterizar, en primer lugar, el $l_\theta P-$espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible.

Teorema 2.1.8.1 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio y la* $LM_\theta-$*álgebra asociada a* X, $\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I})$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *es un conjunto totalmente ordenado,*

(ii) $\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra simple,*

(iii) $\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $LM_\theta-$*álgebra simple,*

(iv) $\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(v) $\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $Y \in \mathcal{C}_\theta^0(X)$. En consecuencia, por la Proposición 2.1.4.16, tenemos que (1) $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. Como además Y es un subconjunto no vacío, de la hipótesis y (lP3) inferimos que $f_i(X) = f_i(Y)$ para todo $i \in I$. Esta aseveración y (1) implican que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(X)}$ y entonces, por (lP6) tenemos que $X = Y$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_\theta(X) = \{X, \emptyset\}$, de lo cual concluimos, por el Teorema 2.1.4.18, que $\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $\theta LM_\theta-$álgebra simple.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $Y \in \mathcal{C}_S^0(X)$. Entonces, por la Observación 2.1.4.3, tenemos que (1) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \subseteq Y$ y de la Proposición 2.1.4.16 se sigue que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \in {\mathcal{C}_\theta}^0(X)$. Teniendo en cuenta la hipótesis y el Teorema 2.1.4.18, inferimos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} = X$, de lo que resulta por (1) que $Y = X$. Entonces, por el Teorema 2.1.4.12, la demostración está completa.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es obvia.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Por el Teorema 2.1.4.12, $\mathcal{C}_S(X) \setminus \{X\}$ tiene último elemento Y. Sea $H = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. Entonces, de la Observación 2.1.4.3 concluimos que $H \subseteq Y$ y por la Proposición 2.1.4.16, tenemos que $H \in \mathcal{C}_\theta(X)\setminus\{X\}$. Además, si $F \in \mathcal{C}_\theta(X)\setminus\{X\}$, entonces $F \in \mathcal{C}_S(X) \setminus \{X\}$ y por lo tanto, $F \subseteq Y$. Resultando así que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(F)} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$, de donde se sigue, por la Proposición 2.1.4.16, que $F \subseteq H$. Por esto, H es el último elemento de $\mathcal{C}_\theta(X) \setminus \{X\}$ y así del Teorema 2.1.4.18 inferimos (v).

(v) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis y el Teorema 2.1.4.18 tenemos que $\mathcal{C}_\theta(X)\setminus\{X\}$ tiene último elemento Y. Entonces, por (lP6) inferimos que $\bigcup_{i\in I} f_i(X) \not\subseteq Y$ y así, existe $x_0 \in X$ tal que

$f_{i_0}(x_0) \notin Y$ para algún $i_0 \in I$. Más aún, teniendo en cuenta que Y es semimodal y (lP5) resulta que $f_i(x_0) \notin Y$ para todo $i \in I$. Por consiguiente, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i(x_0)\}} \nsubseteq Y$, de donde se sigue, por la Proposición 2.1.4.16 y el Teorema 2.1.4.18, que $X = \overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i(x_0)\}}$. Además, de la Observación 2.1.4.3, el Lema 2.1.4.4 y (lP3), concluimos que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i(x_0)\}} \subseteq \downarrow x_0 \cup \uparrow x_0$ y por lo tanto, $X = \downarrow x_0 \cup \uparrow x_0$. Esta última afirmación y (lP3) implican que $X = \uparrow x \cup \downarrow x$ para todo $x \in X$. Por consiguiente, (i) está probado. □

Corolario 2.1.8.2 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $\mathrm{l}_\theta P-$*espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A *es un conjunto totalmente ordenado,*

(ii) $X(A)$ *es un conjunto totalmente ordenado,*

(iii) A *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra simple,*

(iv) A *es una* $LM_\theta-$*álgebra simple,*

(v) A *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(vi) A *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia del Lema 2.1.2.9, el Teorema 2.1.8.1 y el hecho de que un retículo distributivo A es un conjunto totalmente ordenado si, y solo si, $X(A)$ es un conjunto totalmente ordenado. □

Corolario 2.1.8.3 *El álgebra* $L_2^{[I]}$*, explicitada en el* Ejemplo 1.2.6 *de la* Sección 1.2*, es una* $LM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.1.8.2, teniendo en cuenta que el álgebra ${L_2}^{[I]}$ es una $LM_\theta-$álgebra totalmente ordenada. □

Corolario 2.1.8.4 *Sean* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ *una* LM_n-*álgebra y su* $\mathrm{l}_n P-$*espacio asociado* $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es un conjunto totalmente ordenado,*

(ii) *$X(A)$ es un conjunto totalmente ordenado,*

(iii) *A es una LM_n-álgebra simple,*

(iv) *A es una LM_n-álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.1.4.19 y 2.1.8.2. □

Corolario 2.1.8.5 *Sea la LM_n-álgebra $(L_n, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$, donde L_n es la cadena de n fracciones racionales $\frac{j}{n-1}$, $0 \leq j \leq n-1$, en la cual n es un número entero, $n \geq 2$, dotada de la estructura natural de retículo y las operaciones unarias ϕ_i y $\overline{\phi}_i$ están definidas por $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 0$ si $i+j < n$ y $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 1$ en otro caso y $\overline{\phi}_i(\frac{j}{n-1}) = 1 - \phi_i(\frac{j}{n-1})$, respectivamente. Entonces el álgebra L_n es una LM_n-álgebra subdirectmente irreducible.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.1.8.4 y teniendo en cuenta que el álgebra L_n es una LM_n-álgebra totalmente ordenada. □

2.1.9. Propiedades de los $l_\theta P-$espacios totalmente ordenados

Con el objeto de probar que toda $LM_\theta-$ álgebra subdirectamente irreducible es isomorfa a una $LM_\theta-$subálgebra de $L_2^{[I]}$, estudiamos algunas propiedades de los $l_\theta P-$espacios totalmente ordenados y en particular, del $l_\theta P-$espacio asociado a $L_2^{[I]}$.

Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. En lo que sigue, para cada $x \in X$, consideramos $K_x = \{k \in I : \; f_k(x) < x\}$ y $J_x = \{j \in I : \; x < f_j(x)\}$ con el orden y el orden dual inducido por el orden definido sobre I, respectivamente y las redes $(f_k(x))_{k\in K_x}$ y $(f_j(x))_{j\in J_x}$, las cuales juegan un rol fundamental más adelante.

Lema 2.1.9.1 *Sea X un espacio de Priestley. Si $(x_d)_{d\in D}$ es una red creciente o una red decreciente en X, entonces $(x_d)_{d\in D}$ converge a un único elemento $x \in X$. Además se verifica que si $(x_d)_{d\in D}$ es creciente, entonces $x_d \leq x$ para todo $d \in D$ y si $(x_d)_{d\in D}$ es decreciente, entonces $x \leq x_d$ para todo $d \in D$.*

Dem. Sea $(x_d)_{d\in D}$ una red creciente en X. Como X es un espacio compacto, por el Teorema 2.1.1.11, existe $x_0 \in X$ tal que (1) $x_d \succ x_0$. Luego, $x_d \leq x_0$ para todo $d \in D$. En efecto, si suponemos que existe $d_0 \in D$ tal que $x_0 < x_{d_0}$, entonces existe $U \in D(X)$ tal que (2) $x_{d_0} \in U$ y (3) $x_0 \notin U$. Por ser U un subconjunto creciente de X, de (2) y teniendo en cuenta que $(x_d)_{d\in D}$ es creciente, tenemos que $x_d \in U$ para todo $d \in D$ tal que $d_0 \prec d$ y por esto, $\{x_d : d_0 \prec d\} \cap (X \setminus U) = \emptyset$, y así, (3) y el hecho de que $X \setminus U$ es un subconjunto abierto de X nos permiten aseverar que $x_d \not\succ x_0$, lo cual contradice (1). Por lo tanto (4) $x_d \leq x_0$ para todo $d \in D$. De (1) y (4) inferimos que $x_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} x_0$. En efecto, sean $V, W \in D(X)$ tales que (5) $x_0 \in W \setminus V$ y sea $c_0 \in D$, entonces por (1), existe $d_0 \in D$, $c_0 \prec d_0$ y $x_{d_0} \in W \setminus V$. Como $(x_d)_{d\in D}$ es una red creciente, se verifica que $x_d \in W$ para todo $d \in D$ tal que $d_0 \prec d$, y de (4) y (5), obtenemos que $x_d \notin V$ para todo $d \in D$ tal que $d_0 \prec d$, de donde se sigue que $x_d \in W \setminus V$ para todo $d \in D$ tal que $d_0 \prec d$. Por ser $\mathcal{U}(x_0) = \{U \setminus G : U, G \in D(X) \text{ y } x_0 \in U \setminus G\}$ la familia de entornos básicos de x_0, de la última afirmación concluimos que $x_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} x_0$. La unicidad es consecuencia del Teorema 2.1.1.15. Para una red $(x_d)_{d\in D}$ decreciente el razonaminento es análogo. □

Corolario 2.1.9.2 *Sean $(X, \{f\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio, $\leq$ la relación de orden definida en I y $\leq^d$ la relación dual de $\leq$ en I. Entonces para todo $x \in X$, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$(f_i(x))_{i\in I}$ es una red creciente en X y existe $y \in X$ tal que $f_i(x) \underset{i\in I}{\longrightarrow} y$ y $f_i(x) \leq y$ para todo $i \in I$,*

(ii) *$(f_i(x))_{i\in I^d}$ es una red decreciente en X, donde $I^d = (I, \leq^d)$, y existe $z \in X$ tal que $f_i(x) \underset{i\in I^d}{\longrightarrow} z$ y $z \leq f_i(x)$ para todo $i \in I$.*

Dem. Es consecuencia del Lema 2.1.9.1 y la propiedad (lP4) de los $l_\theta P-$espacios. □

Corolario 2.1.9.3 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Entonces para cada $x \in X$, las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ son decrecientes y crecientes en X, respectivamente, y existen a los sumo dos elementos y, $z \in X$ tales que $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} y$, $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} z$ y $f_k(x) \leq z \leq x \leq y \leq f_j(x)$, para todo $k \in K_x$ y para todo $j \in J_x$.*

Dem. De la hipótesis y la propiedad (lP4) de los $l_\theta P-$espacios tenemos que las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ son decrecientes y crecientes en X, respectivamente. Por el Lema 2.1.9.1, hay a lo sumo dos elementos $y, z \in X$ tales que (1) $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} y$, (2) $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} z$, $y \leq f_j(x)$ para todo $j \in J_x$ y $f_k(x) \leq z$ para todo $k \in K_x$. Por otra parte, como (3) $f_k(x) \leq x$ para todo $k \in K_x$, entonces de (2) se sigue que $z \leq x$. En efecto, si $x < z$, entonces por la propiedad (lP1) de los $l_\theta P-$espacios, existe $U \in D(X)$ tal que $z \in U$ y $x \notin U$, de lo que resulta de (3) que $f_k(x) \notin U$ para todo $k \in K_x$ y por lo tanto $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\not\longrightarrow} z$, lo que contradice (2). En forma análoga se prueba que $x \leq y$. $\square$

Corolario 2.1.9.4 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ para cada $x \in X$. Entonces, se verifica que $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$ y $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$.*

Dem. De la hipótesis y el Corolario 2.1.9.3 hay a lo sumo dos elementos $y, z \in X$ tales que (1) $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} y$, (2) $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} z$, (3) $y \leq f_j(x)$ para todo $j \in J_x$ y (4) $f_k(x) \leq z$ todo $k \in K_x$ para todo $k \in K_x$. Luego, de (3) y el Corolario 2.1.2.19, se sigue que $y \leq \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$. Si suponemos que $y < \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$, entonces por la propiedad (lP1) de los $l_\theta P-$espacios, existe $U \in D(X)$ tal que (1) $\bigwedge_{j\in J_x} f_j(x) \in U$ e (2) $y \notin U$. Teniendo en cuenta que U es un subconjunto creciente de X y (1), obtenemos que $f_j(x) \in U$ para todo $j \in J_x$, de donde, por (2) y el hecho de que U es un subconjunto cerrado de X, inferimos que $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\not\longrightarrow} y$, lo que contradice (1) y por lo tanto, $y = \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$. A partir de (4) y mediante un razonamiento similar obtenemos que $z = \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$. $\square$

Proposición 2.1.9.5 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ para cada $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$. Entonces, $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} x$ o $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} x$.*

Dem. De la hipótesis y el Corolario 2.1.9.3 hay a lo sumo dos elementos $y, z \in X$ tales que (1) $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} y$, (2) $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} z$ y (3) $f_k(x) \leq z \leq x \leq y \leq f_j(x)$ para todo $j \in J_x$ y para todo $k \in K_x$. Supongamos ahora que $z < x < y$. Entonces por (lP1), existen $U, V \in D(X)$ tales que (4) $x \in U$, (5) $z \notin U$, (6) $y \in V$ y (7) $x \notin V$. Por esto, de (3), (5) y (6) inferimos que $f_k(x) \notin U$ para todo $k \in K_x$ y $f_j(x) \in V$ para todo $j \in J_x$. Por otro lado, (lP11) y el hecho que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$ implican que $J_x \cup K_x = I$ y por lo tanto, (8) $(U \setminus V) \cap \{f_i(x)\}_{i\in I} = \emptyset$. Teniendo en cuenta que X es un conjunto totalmente ordenado y la propiedad (lP3) de los $l_\theta P-$espacios, tenemos que $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X) = \{f_i(x)\}_{i\in I}$. De esta última aseveración, (4), (7) y (8) concluimos que $x \notin \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)}$, lo que contradice (lP6). De este modo, $x = z$ o $x = y$ y por consiguiente, de (1) y (2) la demostración está completa. $\square$

Corolario 2.1.9.6 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Entonces, $x = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ o $x = \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)$, para todo $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.1.9.4 y la Proposición 2.1.9.5. $\square$

Corolario 2.1.9.7 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$. Entonces se verifican:*

(i) *x tiene sucesor inmediato si, y solo si, x no tiene antecesor inmediato,*

(ii) $Y_x = \{y \in X :$ para todo $i \in I$, $y \neq f_i(y)$ y $f_i(x) < y$ si, y solo si, $f_i(x) < x\}$, *tiene a lo sumo dos elementos,*

(iii) *$y \in Y_x \setminus \{x\}$ si, y solo si, y es el sucesor inmediato de x, o y es el antecesor inmediato de x,*

(iv) *$\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ tiene último elemento si, y solo si, $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$ no tiene primer elemento,*

(v) *$(f_k(x))_{k\in K_x}$ es constante si, y solo si, $(f_j(x))_{j\in J_x}$ no es constante,*

(vi) *K_x tiene último elemento si, y solo si, J_x no tiene primer elemento.*

Dem. Sea $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$.

(i): Si $y, z \in X$ son tales que y es el antecesor inmediato de x y z es el sucesor inmediato de x, entonces para todo $k \in K_x$ y para todo $j \in J_x$, $f_k(z) \leq y < x < z \leq f_j(x)$, de donde se sigue que $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\not\longrightarrow} x$ y $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\not\longrightarrow} x$, lo que contradice la Proposición 2.1.9.5.

(ii): Sea $y \in Y_x$. Entonces, de (lP3) y (lP5) se sigue que $f_i(x) = f_i(y)$ para todo $i \in I$, $K_y = K_x$ y $J_y = J_x$ y así, $(f_k(x))_{k\in K_x} = (f_k(y))_{k\in K_y}$ y $(f_j(x))_{j\in J_x} = (f_j(y))_{j\in J_y}$. Por lo tanto, por la Proposición 2.1.9.5, $f_j(x) \xrightarrow[j\in J_x]{} x$ o $f_k(x) \xrightarrow[k\in K_x]{} x$, y $f_j(x) \xrightarrow[j\in J_x]{} y$ o $f_k(x) \xrightarrow[k\in K_x]{} y$. Como X es un espacio de Hausdorff, de las últimas afirmaciones y el Teorema 2.1.1.15 concluimos que Y_x tiene a lo sumo dos elementos.

(iii): Sea $y \in Y_x$ tal que $y \neq x$, entonces $y < x$ o $x < y$. Si $y < x$, luego por el inciso (ii), $Y_x = \{y, x\}$, de donde obtenemos, por la definición de Y_x, que y es el antecesor inmediato de x. Si $x < y$, mediante un razonamiento análogo se sigue que y es el sucesor inmediato de x.

(iv): Si suponemos que $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ tiene último elemento k_0 y $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$ tiene primer elemento j_0, entonces (1) $f_{k_0}(x) < x < f_{j_0}(x)$. Además, es inmediato que $f_k(x) \xrightarrow[k\in K_x]{} f_{k_0}(x)$ y $f_j(x) \xrightarrow[j\in J_x]{} f_{j_0}(x)$, lo que implica por (1) que las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ son tales que $f_k(x) \not\xrightarrow[k\in K_x]{} x$ y $f_j(x) \not\xrightarrow[j\in J_x]{} x$, lo que contradice la Proposición 2.1.9.5.

(v): Si las redes $(f_k(x))_{k\in K_x}$ y $(f_j(x))_{j\in J_x}$ son constantes, luego existen $k_0 \in K_x$ y $j_0 \in J_x$ tales que $f_k(x) = f_{k_0}(x)$ para todo $k \in K_x$ tal que $k_0 \leq k$ y $f_j(x) = f_{j_0}(x)$ para todo $j \in K_j$ tal que $j_0 \leq j$. Por lo tanto, $(f_k(x))_{k\in K_x}$ y $(f_j(x))_{j\in J_x}$ son redes tales que $f_{k_0}(x)$ es el último elemento de $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ y $f_{j_0}(x)$ es el primer elemento de $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$, lo que contradice el inciso (iv).

(vi): Si las redes $(f_k(x))_{k\in K_x}$ y $(f_j(x))_{j\in J_x}$ son tales que K_x tiene último elemento k_0 y J_x tiene primer elemento j_0, entonces $f_{k_0}(x)$ es el último elemento de $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ y $f_{j_0}(x)$ es el primer elemento de $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$, lo que contradice el inciso (iv). □

Corolario 2.1.9.8 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$. Entonces se verifican:*

(i) *x tiene sucesor inmediato y si, y solo si, $x = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$, $x \neq \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)$ e $y = \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)$,*

(ii) *x tiene antecesor inmediato y si, y solo si, $x \neq \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$, $x = \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)$ e*

$y = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$,

(iii) *si $Y_x = \{y \in X :$ para todo $i \in I$, $y \neq f_i(y)$ y $f_i(x) < y$ si, y solo si, $f_i(x) < x\}$,* *entonces puede presentarse uno de los siguientes casos:*

(a) $Y_x = \{x\} = \{\bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)\} = \{\bigvee_{k\in K_x} f_k(x)\}$,

(b) $Y_x = \{x\} = \{\bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)\}$ *y* $\bigvee_{k\in K_x} f_k(x) = f_{k_0}(x)$ *es el antecesor inmediato de* x, *con* $f_{k_0}(x)$ *el último elemento de* $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$,

(c) $Y_x = \{x\} = \{\bigvee_{k\in K_x} f_k(x)\}$ *y* $\bigwedge_{j\in J_x} f_j(x) = f_{j_0}(x)$, *es el sucesor inmediato de* x, *con* $f_{j_0}(x)$ *el primer elemento de* $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$,

(d) $Y_x = \{\bigvee_{k\in K_x} f_k(x), \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)\}$, $x = \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$ *o* $x = \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$ *y* $\bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$ *es el sucesor inmediato de* $\bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$,

(iv) $y \in Y_x \setminus \{x\}$ *si, y solo si,* $y = \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$ *y* $x \neq \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$, *o* $y = \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$ *y* $x \neq \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$.

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.1.9.6 y 2.1.9.7. □

Corolario 2.1.9.9 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio totalmente ordenado. Entonces para todo* $i \in I$ *se verifican:*

(i) *Si* i *tiene un antecesor inmediato* i^- *y* $f_{i^-}(x) < f_i(x)$, *entonces* $f_{i^-}(x)$ *es el antecesor inmediato de* $f_i(x)$,

(i) *si* i *tiene un sucesor inmediato* i^+ *y* $f_i(x) < f_{i^+}(x)$, *entonces* $f_{i^+}(x)$ *es el sucesor inmediato de* $f_i(x)$.

Dem.

(i): De la hipótesis y (lP4) se sigue que $f_{i^-}(x) \leq f_i(x)$ para todo $x \in X$. Si $i \in I$ es tal que $f_{i^-}(x) < f_i(x)$ y suponemos que existe $z \in X$ tal que $f_{i^-}(x) < z < f_i(x)$, entonces por la propiedad (lP3) de los $l_\theta P-$espacios inferimos que $z \neq f_i(z)$ para todo $i \in I$, i^- es el último elemento de K_z e i es el primer elemento de J_z, lo que contradice el Corolario 2.1.9.8. Por lo tanto, $f_{i^-}(x)$ es el antecesor inmediato de $f_i(x)$.

(ii): Se obtiene mediante un razonamiento similar al empleado en la demostración del inciso (i). □

Corolario 2.1.9.10 *Sea $(X,\{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado tal que el conjunto I es regular. Entonces para todo $x\in X$ tal que $x\neq f_i(x)$ para todo $i\in I$, las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ son tales que $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$ no tiene primer elemento y $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ no tiene último elemento y por lo tanto, las redes $(f_j(x))_{j\in J_x}$ y $(f_k(x))_{k\in K_x}$ no son constantes, J_x no tienen primer y K_x no tiene último elemento.*

Dem. Dado que el conjunto ordenado I es regular, entonces todo elemento i de I, distinto del primer elemento de I, tiene antecesor inmediato i^-, o equivalentemente todo elemento i de I, distinto del último elemento de I, tiene sucsesor inmediato i^+. Supongamos que existe $x\in X$ tal que tal que (1) $x\neq f_i(x)$ para todo $i\in I$ y $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ tiene último elemento $f_{k_0}(x)$. Por lo tanto $f_{k_0}(x)=\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$, de donde por el Corolario 2.1.9.8, obtenemos que (2) x es el sucesor inmediato de $f_{k_0}(x)$. Por otra parte, por ser I un conjunto regular, k_0 tiene un sucesor inmediato k_0^+. Luego, de esta última aseveración y el hecho de que $f_{k_0}(x)$ es el último elemento de K_x se sigue $k_0^+\notin K_x$, entonces por (lP4) obtenemos que $f_{k_0}(x)<f_{k_0^+}(x)$, de donde inferimos del Corolario 2.1.9.9 que $f_{k_0^+}(x)$ es el sucesor inmediato de $f_{k_0}(x)$ y por lo tanto, de lo afirmado en (2), concluimos que $x=f_{k_0^+}(x)$, lo que contradice (1) y por lo tanto, $\{f_k(x)\}_{k\in K_x}$ no tiene último elemento. La demostración de que $\{f_j(x)\}_{j\in J_x}$ no tiene primer elemento es similar. $\square$

Lema 2.1.9.11 *Sea X un espacio de Priestley totalmente ordenado. Si $U\in D(X)\setminus\{\emptyset,X\}$, entonces esiste un $x\in X$ tal que $U=\uparrow x$.*

Dem. De la hipótesis resulta que $D(X)$ es un retículo totalmente ordenado, entonces $\uparrow U\in X(D(X))$ para todo $U\in D(X)\setminus\{\emptyset,X\}$. Además, la función $\varepsilon_X: X\longrightarrow X(D(X))$, definida por $\varepsilon_X(x)=\{V\in D(X): x\in V\}$, es un homeomorfismo, entonces existe un único $x_0\in X$ tal que $\uparrow U=\varepsilon_X(x_0)$. Por lo tanto, para todo $V\in D(X)$, (1) $x_0\in V$ si, y solo si, $U\subseteq V$. Teniendo en cuenta que U satisface (1), inferimos que $x_0\in U$, y como U es creciente, entonces $\uparrow x_0\subseteq U$. Si suponemos que existe (3) $y\in U$ tal que $x_0\not\leq y$, entonces por (lP1) existe $V\in D(X)$ tal que (4) $x_0\in V$ e (5) $y\notin V$. De (3) y (5) se sigue que (6) $U\not\subseteq V$, y así (4) y (6) contradicen (1). Por lo tanto $U=\uparrow x_0$. $\square$

Proposición 2.1.9.12 *Sean $(X,\{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y para cada $x\in X$, la red $(f_k(x))_{k\in K_x}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\uparrow x \in D(X)$,

(ii) $f_k(x) \not\xrightarrow[k\in K_x]{} x$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por la definición de K_x tenemos que $f_k(x) \notin\uparrow x$ para todo $k \in K_x$, entonces de la hipótesis (i) concluimos que $f_k(x) \not\xrightarrow[k\in K_x]{} x$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): En virtud de la hipótesis existen $U, V \in D(X)$ tales que (1) $x \in U \setminus V$ y (2) $f_k(x) \notin U \setminus V$ para todo $k \in K_x$. Luego, de (1) tenemos que $f_k(x) \notin V$ para todo $k \in K_x$. Como X es un espacio de Priestley totalmente ordenado, por el Lema 2.1.9.11, existe $y \in X$ tal que (3) $U = \uparrow y$. Si suponemos que $\uparrow x \notin D(X)$, entonces de (1) y (3) inferimos que $y < x$. Por lo tanto, existe $W \in D(X)$ tal que $y \notin W$ y (4) $x \in W$. Además, por el Lema 2.1.9.11, $W = \uparrow z$ para algún $z \in X$, de donde concluimos que $y < z < x$ y así, (5) $W \subset U$. También, de (2) y (5) obtenemos que (6) ${f_k}^{-1}(U) = {f_k}^{-1}(W) = \emptyset$ para todo $k \in K_x$. Por otro lado, de (1), (4) y (lP3) resulta que (7) ${f_i}^{-1}(U) = {f_i}^{-1}(W) = X$ para todo $i \in I \setminus K_x$. De este modo, se verifica que ${f_i}^{-1}(U) = {f_i}^{-1}(W)$ para todo $i \in I$ y por (lP7) podemos afirmar que $U = W$, lo que contradice (5). □

Corolario 2.1.9.13 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Entonces para todo $x \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\uparrow x \in D(X)$,

(ii) *x tiene un antecesor inmediato.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Para cada $x \in X$ consideramos la red $(f_k)_{k\in K_x}$. De la hipótesis (i), el Corolario 2.1.9.3 y la Proposición 2.1.9.12, existe $y \in X$ tal que (1) $f_k(x) \xrightarrow[k\in K_x]{} y$ y (2) $f_k(x) \leq y < x$ para todo $k \in K_x$. Sea $z \in X$ tal que (3) $y < z < x$, entonces por (2), (lP3) y teniendo en cuenta la definición de K_x inferimos que (4) $z \neq f_i(z)$ para todo $i \in I$ y $(f_k(x))_{k\in K_x} = (f_k(z))_{k\in K_z}$. De esta última afirmación, (1) y (3) se sigue que (5) $f_k(z) \not\xrightarrow[k\in K_z]{} z$. Si $x = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$, entonces de (3), (4) y el hecho de que $K_x = K_z$ y que i_0 es el primer elemento de J_z, tenemos que (6) $f_j(z) \not\xrightarrow[j\in J_z]{} z$. Luego, (5) y

(6) contradicen la Proposición 2.1.9.5. Supongamos ahora que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$, entonces por (3) y (4) se verifica que $J_z = J_x$. De las Proposiciones 2.1.9.5 y 2.1.9.12 resulta que $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} x$, y por (3) se sigue que (7) $f_j(z) \underset{j\in J_z}{\not\longrightarrow} z$. En consecuencia, (5) y (7) contradicen la Proposición 2.1.9.5. Por lo tanto, y es el antecesor inmediato de x.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) se sigue que $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\not\longrightarrow} x$, entonces por la Proposición 2.1.9.12, concluimos que $\uparrow x \in D(X)$. $\square$

Proposición 2.1.9.14 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Para cada $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$, sea*

$$Y_x = \{y \in X : \text{ para todo } i \in I,\ y \neq f_i(y) \text{ y } f_i(x) < y \text{ si, y solo si, } f_i(x) < x\}.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\uparrow x \in D(X)$,

(ii) *Y_x tiene exactamente dos elementos y además x es el último elemento de Y_x,*

o K_x tiene último elemento y por lo tanto, $Y_x = \{x\}$,

(iii) *se satisfacen una de las siguientes condiciones:*

(a) $Y_x = \{\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x), \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)\}$, $x = \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)$ *y* $\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ *es el antecesor inmediato de x,*

(b) $Y_x = \{\bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)\}$ *y K_x tiene último elemento elemento k_0 y $f_{k_0}(x) = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ es el antecesor inmediato de x.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$ y (1) $\uparrow x \in D(X)$. Luego, por el Corolario 2.1.9.13, x tiene un antecesor inmediato y. Si $y \neq f_i(y)$ para todo $i \in I$, entonces $y \in Y_x$, de donde se sigue, por Corolario 2.1.9.7, que $Y_x = \{y, x\}$ y por lo tanto, x es el último elemento de Y_x. Si $y = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$, entonces $i_0 \in K_x$ y en consecuencia, i_0 es el último elemento de K_x. De esta última afirmación inferimos que $y \notin Y_x$. Considerando las redes $(f_k(x))_{k\in K_x}$ y $(f_j(x))_{j\in J_x}$, de (1) y la Proposición

2.1.9.12 tenemos que $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\not\longrightarrow} x$, entonces por la Proposición 2.1.9.5, $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} x$. De esta última afirmación resulta que para todo $z \in X$ tal que $x < z$, existe $j_0 \in J_x$ tal que $x < f_{j_0}(x) \leq z$, y por lo tanto $z \notin Y_x$, de donde concluimos que $Y_x = \{x\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $x \in X$ tal que (1) $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$. Si x es el último elemento de $Y_x = \{x, y\}$, entonces por el Corolario 2.1.9.13, $\uparrow x \in D(X)$. Por otro lado, si se verifica que $K_x = \{k \in I : f_k(x) < x\}$ tiene último elemento k_0, entonces $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} f_{k_0}(x)$ y además por (1), $f_{k_0}(x) < x$ y por lo tanto, $f_k(x) \underset{k\in K_x}{\not\longrightarrow} x$, de donde, por la Proposición 2.1.9.12, concluimos que $\uparrow x \in D(X)$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia del Corolario 2.1.9.8. □

Corolario 2.1.9.15 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Entonces para todo $x \in X$ tal que $f_i(x) \neq x$ para todo $i \in I$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\uparrow x \in D(X)$,

(ii) $\bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$ *es el antecesor inmediato de x y por lo tanto,* $x = \bigwedge_{j\in J_x} f_j(x)$.

Dem. Es consecuencia de la Proposición 2.1.9.12 y los Corolarios 2.1.9.4 y 2.1.9.6 o de la Proposición 2.1.9.14. □

Proposición 2.1.9.16 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Entonces, para todo $x \in X$ tal que $x = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\uparrow x \in D(X)$,

(ii) *x satisfece alguna de las dos condiciones siguientes:*

  (a) *i_0 tiene un antecesor inmediato i_1 y $f_{i_1}(x) = \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$ es el antecesor inmediato de x,*

  (b) *i_0 es el primer elemento de J_y para algún $y \in X$ tal que $y \neq f_i(y)$ para todo $i \in I$, $y = \bigvee_{k\in K_x} f_k(x)$ es el antecesor inmediato de x y $x = \bigwedge_{j\in K_x} f_j(x)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x \in X$ tal que (1) $x = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$ y (2) $\uparrow x \in D(X)$. Luego, por el Corolario 2.1.9.13, x tiene un antecesor inmediato y y por lo tanto, (3) $\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x) \leq y < x$. De esta última afirmación y (lP3) obtenemos que (4) $f_i(x) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. Como X es un $l_\theta P-$espacio, pueden presentarse que (a) $y = f_{i_1}(y)$ para algún $i_1 \in I$ o (b) $y \neq f_i(y)$ para todo $i \in I$. A continuación analizamos cada uno de estos casos.

(a) Supongamos que (5) $y = f_{i_1}(y)$ para algún $i_1 \in I$, entonces de (3), la propiedad (lP3) y la definición de K_x se sigue que i_1 es el último elemento de K_x, de donde por (1) resulta que i_1 es el antecesor inmediato de i_0 y (6) $f_{i_1}(x) = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$. Luego, de (4), (5) y (6) obtenemos que $y = f_{i_1}(x) = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$. Por lo tanto, $\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ es el antecesor inmediato de x.

(b) Supongamos ahora que $y \neq f_i(y)$ para todo $i \in I$. Teniendo en cuenta que y es el antecesor inmediato de x, (1) y (4), inferimos que $f_{i_0}(y)$ es el sucesor inmediato de y, por consiguiente i_0 es el primer elemento de J_y, y en consecuencia, del Corolario 2.1.9.8 resulta que $y = \bigvee\limits_{k\in K_y} f_k(y)$ y $f_{i_0}(y) = \bigwedge\limits_{j\in J_y} f_j(y)$. De esta última afirmación, (1), (4) y el hecho de que $K_x = K_y$, concluimos que $y = \bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ y $x = \bigwedge\limits_{j\in J_x} f_j(x)$ y así, $\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ es el antecesor inmediato de x.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) se sigue que x tiene un antecesor inmediato, de donde concluimos, por el Corolario 2.1.9.13, que $\uparrow x \in D(X)$. □

Corolario 2.1.9.17 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado. Entonces para todo $x \in X$ tal que $f_i(x) = x$ para algún $i \in I$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\uparrow x \in D(X)$,*

(ii) *$\bigvee\limits_{k\in K_x} f_k(x)$ es el antecesor inmediato de x.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.1.9.6 y la Proposición 2.1.9.16. □

Proposición 2.1.9.18 *Para cada $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$, sean $K_P = \{k \in I : \phi_k^{-1}(P) \subset P\}$ y $J_P = \{j \in I : P \subset \phi_j^{-1}(P)\}$, con el or-*

den y el orden dual inducido por el orden definido sobre I. Entonces, $\phi_j^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} P$ o $\phi_k^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} P$, pero no ambas.

Dem. Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$. Entonces, de la Proposición 2.1.9.5 y el Corolario 2.1.8.3 inferimos que $\phi_j^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} P$ o $\phi_k^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} P$. Si $f : I \longrightarrow L_2$ está definida por $f(i) = 1$ si $i \in J_P$ y $f(i) = 0$ en otro caso, entonces $f \in L_2^{[I]}$. Además, $f \in \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$ y $f \notin \phi_k^{-1}(P)$ para todo $k \in K_P$. Teniendo en cuenta que $X\left(L_2^{[I]}\right)$ es un espacio totalmente ordenado concluimos que (1) $\phi_k^{-1}(P) \subset P \subseteq \uparrow f \subseteq \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$, $k \in K_P$ o (2) $\phi_k^{-1}(P) \subset \uparrow f \subseteq P \subset \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$, $k \in K_P$. Si $P = \uparrow f$, entonces P es el sucesor inmediato de $R = \uparrow f \setminus \{f\}$ y así, por (1) resulta que $\phi_k^{-1}(P) \subseteq R \subset P$ para todo $k \in K_P$. Por lo tanto, $\phi_k^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\not\longrightarrow} P$. Por otra parte, si $\uparrow f \subset P$ entonces de (2), se sigue que $\phi_k^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\not\longrightarrow} P$, y si $P \subset \uparrow f$, entonces de (1) resulta que $\phi_j^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\not\longrightarrow} P$. □

Corolario 2.1.9.19 *Para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$, se verifica que $P = \bigcap\limits_{j\in J_P} \phi_j^{-1}(P)$ o $P = \bigcup\limits_{k\in K_P} \phi_k^{-1}(P)$, pero no ambas.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.1.9.4 y la Proposición 2.1.9.18 y el hecho de que $X\left(L_2^{[I]}\right)$ es un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y que para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, $\bigcap\limits_{j\in J_P} \phi_j^{-1}(P) = \bigwedge\limits_{j\in J_P} f_j^A(P)$ y $\bigcup\limits_{k\in K_P} \phi_k^{-1}(P) = \bigvee\limits_{k\in K_P} f_k^A(P)$. □

Corolario 2.1.9.20 *Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$. Si $(D, \prec)$ es un conjunto dirigido y la red $(\phi_{i_d}^{-1}(P))_{d\in D}$ es tal que $i_d \in I$ para todo $d \in D$ y $\phi_{i_d}^{-1}(P) \underset{d\in D}{\longrightarrow} P$, entonces existe $d_o \in D$ tal que $\{\phi_{i_d}^{-1}(P)\}_{d\in T_{d_0}} \subseteq \{\phi_j^{-1}(P)\}_{j\in J_P}$ o $\{\phi_{i_d}^{-1}(P)\}_{d\in T_{d_0}} \subseteq \{\phi_k^{-1}(P)\}_{k\in K_P}$, pero no ambas, donde para cada $d \in D$, $T_d = \{c \in D : d \prec c\}$ es el conjunto terminal asociado a d.*

Dem. Supongamos que (1) $\phi_{i_d}^{-1}(P) \underset{d\in D}{\longrightarrow} P$ y para cada $c \in D$ existen d_c, $d'_c \in D$ tales que $c \prec d_c$, $c \prec d'_c$, $i_{d_c} \in K_P$ e $i_{d'_c} \in J_P$. Además, si $c \prec c'$, entonces $d_c \prec d_{c'}$ y $d'_c \prec d'_{c'}$. Por consiguiente, para cada $c \in D$, existen $k_c \in K_P$ y $j_c \in J_P$ tales que (2) $k_c = i_{d_c}$ y (3) $j_c = i_{d'_c}$. Considerando las redes $(\phi_{i_{d_c}}^{-1}(P))_{c\in D}$ y $(\phi_{i_{d'_c}}^{-1}(P))_{c\in D}$, tenemos que son subredes de la red $(\phi_{i_d}^{-1}(P))_{d\in D}$, luego de (1) y el Lema 2.1.1.10 inferimos que

(4) $\phi^{-1}_{i_{d_c}}(P) \underset{c\in D}{\longrightarrow} P$ y (5) $\phi^{-1}_{i_{d'_c}}(P) \underset{c\in D}{\longrightarrow} P$. Teniendo en cuenta (2), (3), (4) y (5), obtenemos que si $c \prec c'$, entonces $i_{d_c} \leq i_{d_{c'}}$ e $i_{d'_{c'}} \leq i_{d'_c}$, o equivalentemente si $c \prec c'$, entonces $k_c \leq k_{c'}$ y $j_{c'} \leq j_c$, de donde se sigue que $(\phi^{-1}_{i_{d_c}}(P))_{c\in D} \subseteq (\phi^{-1}_k(P))_{k\in K_P}$ y $(\phi^{-1}_{i_{d'_c}}(P))_{c\in D} \subseteq (\phi^{-1}_j(P))_{j\in J_P}$. Estas últimas afirmaciones, el hecho de que las redes $(\phi^{-1}_j(P))_{j\in J_P}$ y $(\phi^{-1}_k(P))_{k\in K_P}$ son convergentes, (4), (5) y el Lema 2.1.1.10, nos permiten concluir que $\phi^{-1}_j(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} P$ y $\phi^{-1}_k(P) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} P$, lo que contradice la Proposición 2.1.9.18. Por lo tanto, existe $d_0 \in D$ tal que $\{\phi^{-1}_{i_d}(P)\}_{d\in T_{d_0}} \subseteq \{\phi^{-1}_j(P)\}_{j\in J_P}$ o $\{\phi^{-1}_{i_d}(P)\}_{d\in T_{d_0}} \subseteq \{\phi^{-1}_k(P)\}_{k\in K_P}$, pero no ambas. □

Lema 2.1.9.21 *Si $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, entonces $\phi^{-1}_k(P) \neq \phi^{-1}_j(P)$ para todo $k, j \in I$, $k \neq j$.*

Dem. Sean $k, j \in I$ y $k \neq j$. Como I es un conjunto totalmente ordenado podemos suponer que $k < j$. Sea $f : I \longrightarrow L_2$ definida por $f(i) = 1$ si $j \leq i$ y $f(i) = 0$ en otro caso. Entonces, es simple verificar que $f \in \phi^{-1}_j(P)$ y $f \notin \phi^{-1}_k(P)$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$. Por lo tanto, $\phi^{-1}_k(P) \neq \phi^{-1}_j(P)$. □

Proposición 2.1.9.22 *Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$P = \phi^{-1}_{i_0}(P)$ para algún $i_0 \in I$,*

(ii) *$P = \uparrow f$, donde $f : I \longrightarrow L_2$ está definida por $f(i) = 1$ si $i_0 \leq i$ y $f(i) = 0$ en otro caso.*

Dem. Es de rutina. □

Proposición 2.1.9.23 *Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P = \phi^{-1}_{i_0}(P)$ para algún $i_0 \in I$. Si $(\phi^{-1}_{i_d}(P))_{d\in D}$ es una red tal que $\phi^{-1}_{i_d}(P) \underset{d\in D}{\longrightarrow} P$, entonces existe un $d_0 \in D$ tal que $\phi^{-1}_{i_d}(P) = \phi^{-1}_{i_0}(P)$ para todo $d \in T_{d_0}$, donde $T_{d_0} = \{d \in D : d_0 \prec d\}$.*

Dem. Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que (1) $P = \phi^{-1}_{i_0}(P)$ para algún $i_0 \in I$. Por la Proposición 2.1.9.22 tenemos que (2) $P = \uparrow f$, donde $f : I \longrightarrow L_2$ está definida por $f(i) = 1$ si $i_0 \leq i$ y $f(i) = 0$ en otro caso. Además, por la propiedad (lP8), existe una red $(\phi^{-1}_{i_d}(P))_{d\in D}$ tal que (3) $\phi^{-1}_{i_d}(P) \underset{d\in D}{\longrightarrow} P$. Por consiguiente, tenemos los siguientes casos:

(i) Si $({\phi_{i_d}}^{-1}(P))_{d\in D}$ es una red creciente, entonces de (1), (3) y los Lemas 2.1.9.1 y 2.1.9.21, inferimos que (4) $\phi_{i_d}^{-1}(P) \subset P$ para todo $d \in D$, $i_d \neq i_0$. Además, por (2) tenemos que P es el sucesor inmediato de $Q = \uparrow f \setminus \{f\}$, por lo tanto de (4) resulta que $\phi_{i_d}^{-1}(P) \subseteq Q \subset P$ para todo $d \in D$, $i_d \neq i_0$, de donde obtenemos, por (1) y (3), que existe un $d_0 \in D$ tal que $i_d = i_0$ para todo $d \in T_{d_0}$ y así concluimos que ${\phi_{i_d}}^{-1}(P) = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $d \in T_{d_0}$.

(ii) Si $({\phi_{i_d}}^{-1}(P))_{d\in D}$ es una red decreciente, entonces de (1), (3) y los Lemas 2.1.9.1 y 2.1.9.21, se sigue que (4) $P \subset \phi_{i_d}^{-1}(P)$ para todo $d \in D$, $i_d \neq i_0$. Sea (5) $Q = \uparrow g$, donde $g : I \longrightarrow L_2$ está definida por $g(i) = 1$ si $i_0 < i$ y $g(i) = 0$ en otro caso. Como $g < f$ entonces, por (2) y (5) tenemos que (6) $P \subset Q$. Además, (7) $Q \subset \phi_{i_d}^{-1}(P)$ para todo $d \in D$, $i_d \neq i_0$. En efecto, si $d \in D$ e $i_d \neq i_0$, entonces de (1), (4) y (lP4), concluimos que (8) $i_0 < i_d$. Por otro lado, de la Proposición 2.1.9.22, se verifica $\phi_{i_d}^{-1}(P) = \uparrow h_d$, donde $h_d : I \longrightarrow L_2$ está definida por $h(i) = 1$ si $i_d \leq i$ y $h(i) = 0$ en otro caso. Esta última afirmación, (5) y (7) implican que $h_d < g$ y así, $Q \subset \phi_{i_d}^{-1}(P)$ para todo $d \in D$. Por consiguiente, de (6) resulta que $P \subset Q \subset \phi_{i_d}^{-1}(P)$ para todo $d \in D$, $i_d \neq i_0$. Así, de (1) y (3) tenemos que existe un $d_0 \in D$ tal que $i_d = i_0$ para todo $d \in T_{d_0}$ y por lo tanto, $\phi_{i_d}^{-1}(P) = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $d \in T_{d_0}$.

(iii) Existe $c \in D$ tal que $(\phi_{i_d}^{-1}(P))_{d\in T_c}$ es una red creciente (decreciente). Entonces, por (3) tenemos que $(\phi_{i_d}^{-1}(P))_{d\in T_c}$ es una red creciente (decreciente) y $\phi_{i_d}^{-1}(P) \underset{d\in T_c}{\longrightarrow} P$. Por lo tanto, por (i) (por (ii)) existe $d_0 \in T_c$ tal que $\phi_{i_d}^{-1}(P) = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $d \in T_c \cap T_{d_0} = T_{d_0}$.

(iv) Para cada $c \in D$ existen d_c, $d'_c \in T_c$ tales que $({\phi_{i_{d_c}}}^{-1}(P))_{c\in D}$ y $(\phi_{i_{d'_c}}^{-1}(P))_{c\in D}$ son subredes de $({\phi_{i_d}}^{-1}(P))_{d\in D}$ (es decir para todo $b \in T_c$ se verifica que $d_c \prec d_b$, $d'_c \prec d'_b$) y además $({\phi_{i_{d_c}}}^{-1}(P))_{c\in D}$ es una red creciente, $(\phi_{i_{d'_c}}^{-1}(P))_{c\in D}$ es una red decreciente y (4) $\{d_c\}_{c\in D} \cup \{d'_c\}_{c\in D} = D$. Luego, de (3) y el Lema 2.1.1.10 obtenemos que $\phi_{i_{d_c}}^{-1}(P) \underset{c\in D}{\longrightarrow} P$ y $\phi_{i_{d'_c}}^{-1}(P) \underset{c\in D}{\longrightarrow} P$, de donde, por los incisos (i) y (ii), resulta que existen $c_1, c_2 \in D$ tales que (5) $\phi_{i_{d_c}}^{-1}(P) = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $d_c \in T_{d_{c_1}}$ y (6) $\phi_{i_{d'_c}}^{-1}(P) = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $d'_c \in T_{d'_{c_2}}$. Como D es un conjunto dirigido, existe $d_0 \in D$ tal que $d_{c_1} \prec d_0$ y $d'_{c_2} \prec d_0$. Por lo tanto, de (4), (5) y (6), concluimos que $\phi_{i_d}^{-1}(P) = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $d \in T_{d_0}$. $\square$

Corolario 2.1.9.24 *Sean $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para algún $i_0 \in I$, $K_P = \{k \in I : \phi_k^{-1}(P) \subset P\}$ y $J_P = \{j \in I : P \subset \phi_j^{-1}(P)\}$, con el orden y el orden dual inducido por el orden definido sobre I. Entonces se verifican:*

(i) $\phi_k^{-1}(P) \underset{k \in K_P}{\not\longrightarrow} P$ *y* $\phi_j^{-1}(P) \underset{j \in K_P}{\not\longrightarrow} P$,

(ii) $\uparrow P \in D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$,

(iii) $\bigcup\limits_{k \in K_P} \phi_k^{-1}(P) \subset P \subset \bigcap\limits_{j \in J_P} \phi_j^{-1}(P)$ *y* $\bigcup\limits_{k \in K_P} \phi_k^{-1}(P)$ *es el antecesor inmediato de P.*

Dem. Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para algún $i_0 \in I$.

De la Proposición 2.1.9.23 y las definiciones de K_P y J_P, se sigue que $\phi_k^{-1}(P) \underset{k \in K_P}{\not\longrightarrow} P$ y $\phi_j^{-1}(P) \underset{j \in J_P}{\not\longrightarrow} P$.

(iii): Del inciso (i) y la Proposición 2.1.9.12, concluimos que $\uparrow P \in D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$. También, de la hipótesis y la Proposición 2.1.9.22, tenemos que $P = \uparrow f$, donde $f : I \longrightarrow L_2$ está definida por $f(i) = 1$ si $i_0 \leq i$ y $f(i) = 0$ y por lo tanto, $\uparrow P = \sigma_{L_2^{[I]}}(f)$, de donde resulta que $\uparrow P \in D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$.

(iii): Del inciso (i) y la Proposición 2.1.9.4 obtenemos que $P \neq \bigcap\limits_{j \in J_P} \phi_j^{-1}(P)$ y $P \neq \bigcup\limits_{k \in K_P} \phi_k^{-1}(P)$ y por consiguiente, $\bigcup\limits_{k \in K_P} \phi_k^{-1}(P) \subset P \subset \bigcap\limits_{j \in J_P} \phi_j^{-1}(P)$. Además, del inciso (ii) y el Corolario 2.1.9.17, resulta que $\bigcup\limits_{k \in k_P} \phi_k^{-1}(P)$ es el antecesor inmediato de P. Por otro lado, el hecho de que $P = \uparrow f$, donde $f : I \longrightarrow L_2$ está definida por $f(i) = 1$ si $i_0 \leq i$ y $f(i) = 0$ en otro caso, nos permite afirmar que $Q = \uparrow f \setminus \{f\}$ es el antecesor inmediato de P y en consecuencia, $Q = \bigcup\limits_{k \in k_P} \phi_k^{-1}(P)$. □

Proposición 2.1.9.25 *Si $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ es un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado, entonces existe una $l_\theta P-$función sobreyectiva de $X({L_2}^{[I]})$ en X.*

Dem. Sea $F : X\left(L_2^{[I]}\right) \longrightarrow X$ definida por $F(P) = f_i(x)$ si $P = {\phi_i}^{-1}(P)$ para algún $i \in I$, y en otro caso, $F(P)$ es el límite de la imagen de cualquier red en $\bigcup\limits_{i \in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$ que converge a P. Si $P = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para algún $i_0 \in I$, entonces por el Lema 2.1.9.21, i_0 es el único elemento de I que verifica esa condición. Por lo tanto, tenemos que $f_{i_0}(x)$

es el único elemento de X tal que $F(P) = f_{i_0}(x)$. Por otro lado, si $P \neq {\phi_i}^{-1}(P)$ para todo $i \in I$, entonces por (lP8), existe una red en $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$ que converge a P, y por la Proposición 2.1.9.18 y el Corolario 2.1.9.20, podemos considerar que esta red es $({\phi_j}^{-1}(P))_{j\in J_P}$ o $({\phi_k}^{-1}(P))_{k\in K_P}$, pero no ambas. Supongamos ahora que ${\phi_j}^{-1}(P) \to P$. Por (lP4), $(f_j(x))_{j\in J_P}$ es una red decreciente para cada $x \in X$, y el Lema 2.1.9.1 nos permite asegurar que existe un único $z \in X$ tal que $f_j(x) \to z$. Entonces, de la definición de F se sigue que $F(P) = z$. Por lo tanto, concluimos que F está bien definida.

Además, F es sobreyectiva. En efecto, si $x = f_i(x)$ para algún $i \in I$, entonces $F\left({\phi_i}^{-1}(P)\right) = x$ y $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$. Si $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$, entonces por la Proposición 2.1.9.5, tenemos que $f_j(x) \xrightarrow[j\in J_x]{} x$ o $f_k(x) \xrightarrow[k\in K_x]{} x$. Suponiendo que (1) $f_j(x) \xrightarrow[j\in J_x]{} x$ y teniendo en cuenta que $X\left(L_2^{[I]}\right)$ es una cadena, (lP3), (lP4) y el Lema 2.1.9.21, se sigue que para cada $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, $({\phi_j}^{-1}(P))_{j\in J_x}$ es una red decreciente y no constante en $X\left(L_2^{[I]}\right)$. Entonces, existe un único $Q \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que (2) ${\phi_j}^{-1}(P) \xrightarrow[j\in J_x]{} Q$ y por la Proposición 2.1.9.23, $Q \neq {\phi_i}^{-1}(P)$ para todo $i \in I$. Como para todo $j \in J_x$, $F({\phi_j}^{-1}(P)) = f_j(x)$, entonces de (1), (2) y la definición de F concluimos que $F(Q) = x$. Si suponemos que $f_k(x) \xrightarrow[k\in K_x]{} x$, se sigue en forma similar.

solo resta probar que F es una $l_\theta P-$función. Para este fin, observemos que $F\left(f_i^{L_2^{[I]}}(P)\right) = F({\phi_i}^{-1}(P)) = f_i(x) = f_i(F(P))$ para todo $i \in I$. Por otro lado, es de rutina probar que F es isótona. Además, F es continua. En efecto, sea $U \in D(X)$. Como X es un espacio de Priestley totalmente ordenado, por el Lema 2.1.9.11, existe un $x \in X$ tal que $U =\uparrow x)$. Si se verifica que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$, entonces de las Proposiciones 2.1.9.12 y 2.1.9.5, inferimos que $f_k(x) \not\xrightarrow[k\in K_x]{} x$ y (3) $f_j(x) \xrightarrow[j\in J_x]{} x$. Por lo tanto, de la definición de F, existe $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que (4) $F(P) = x$. Teniendo en cuenta que $Q \in F^{-1}(U)$ si, y solo si, $F(P) \subseteq F(Q)$, (4) y el hecho de que F es isótona tenemos que (5) $F^{-1}(U) =\uparrow P$. Luego, de (3) y (4) se sigue que $J_x = J_P$ y así, ${\phi_j}^{-1}(P) \xrightarrow[j\in J_P]{} P$. Entonces, por la Proposición 2.1.9.18, tenemos que ${\phi_k}^{-1}(P) \not\xrightarrow[k\in K_P]{} P$, de donde se sigue, por la Proposición 2.1.9.12, que (6) $\uparrow P \in D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$. Por otro lado, si $x = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$, entonces $F(R) = f_{i_0}(x)$, donde $R = \phi_{i_0}^{-1}(P)$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, de donde resulta, por el Corolario 2.1.9.24, que (7) $\uparrow R \in D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$. Además se verifica que (8) $F^{-1}(U) =\uparrow R$. Como $\{U \setminus V : U, V \in D(X)\}$ es una base de la topología de X, de (5), (6) (7) y (8) y el Teorema 2.1.1.14, concluimos que F es continua. □

Observación 2.1.9.26 En la demostración de la Proposición 2.1.9.25, se puede definir también la función $F : X\left(L_2^{[I]}\right) \longrightarrow X$ de la siguiente manera: Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado y la función $f : \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right) \longrightarrow X$, definida por $f\left(f_i^{L_2^{[I]}}(P)\right) = f_i(x)$, donde $f_i^{L_2^{[I]}}(P) = {\phi_i}^{-1}(P)$. Entonces, del Lema 2.1.9.21 y la Proposición 2.1.9.23 inferimos que f es una función continua. Además, por la Proposición 2.1.9.18, el Corolario 2.1.9.20 y la Proposición 2.1.9.23, tenemos que para cada $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y para todas las redes en $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$ que convergen a P, las imágenes de ellas son convergentes y convergen al mismo límite. Si para cada $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, $\mathcal{U}(P)$ es la familia de los entornos abiertos de P, entonces la base de filtro $f\left(\mathcal{U}(P) \cap \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)\right)$ converge en X. Como $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$ es denso en $X\left(L_2^{[I]}\right)$ y X es un espacio regular, concluimos, por [25, Teorema 5.5, Capítulo X], que f tiene una única extensión continua, $F : X\left(L_2^{[I]}\right) \longrightarrow X$, definida por $F(P) = x$ si, y solo si, x es el límite de la imagen de cualquier red en $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{L_2^{[I]}}\left(X\left({L_2}^{[I]}\right)\right)$ que converge a P. Si para cada $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, $J_P = \{j \in I : \ P \subseteq {\phi_j}^{-1}(P)\}$ y $K_P = \{k \in I : \ {\phi_k}^{-1}(P) \subseteq P\}$, donde el orden en J_P es el inducido por el orden dual del orden definido en I y el orden sobre K_P es el inducido por el orden en I, podemos definir $F(P) = x$ si, y solo si $f_j(x) \underset{j\in J_x}{\longrightarrow} x$ ($f_k(x) \underset{k\in K_x}{\longrightarrow} x$), cuando ${\phi_j}^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} P$ (${\phi_k}^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} P$).

Por razones didácticas y de comprensión, en la demostración de la Proposición 2.1.9.25 usamos la otra definición de la función F. Si bien es un camino más largo se justifica porque para demostrar la continuidad de la función F usamos las Proposiciones 2.1.9.12 y 2.1.9.14, en las que se caracterizan los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de un l_θP–espacio totalmente ordenado. Esto nos permitió tener más información de las estructuras ordenada y topológica de estos espacios.

2.1.10. $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Finalmente determinamos todas las $LM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles, como se indica a continuación.

Teorema 2.1.10.1 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *A es isomorfa a una $LM_\theta-$subálgebra de ${L_2}^{[I]}$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Del Teorema 2.1.8.1 y la Proposición 2.1.9.25 inferimos que existe una $l_\theta P-$función sobreyectiva h de $X({L_2}^{[I]})$ en $X(A)$. Definiendo $\mathbb{L}_\theta(h)$ de $D(X(A))$ en $D(X({L_2}^{[I]}))$ por la prescripción $\mathbb{L}_\theta(h)(U) = h^{-1}(U)$, entonces por el Lema 2.1.2.10 tenemos que $\mathbb{L}_\theta(h)$ es un LM$_\theta-$homomorfismo inyectivo. Por lo tanto, del Lema 2.1.2.9 se sigue que $\sigma_A \circ \mathbb{L}_\theta(h) \circ \sigma^{-1}_{{L_2}^{[I]}}$ es un LM$_\theta-$homomorfismo inyectivo de A en ${L_2}^{[I]}$, de donde concluimos que A es isomorfa a una LM$_\theta-$subálgebra de ${L_2}^{[I]}$.

La otra implicación es consecuencia directa del Corolario 2.1.8.3. $\square$

Corolario 2.1.10.2 *Sean A una LM_n-álgebra, donde n es un entero positivo, $n \geq 2$ y $L_n = \{\frac{j}{n-1}, 1 \leq j \leq n-1\}$, dotado con la estructura natural de retículo y las operaciones unarias ϕ_i y $\overline{\phi}_i$ definidas por $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 0$ si $i + j < n$ y $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 1$ en otro caso, y $\overline{\phi}_i(\frac{j}{n-1}) = 1 - \phi_i(\frac{j}{n-1})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es una LM_n-álgebra subdirectamente irreducible,

(iii) *A es isomorfa a una LM_n-subálgebra de L_n.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.1.10.1, teniendo en cuenta que si $\theta = n$, entonces la LM_n-álgebra ${L_2}^{[I]}$ es isomorfa a L_n. $\square$

Corolario 2.1.10.3 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $LM_\theta-$álgebra simple,*

(ii) *$C(A) = \{0, 1\}$, donde $C(A) = \{\phi_i(a) : a \in A, i \in I\}$ es el conjunto de los elementos booleanos de A.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia inmediata del Teorema 2.1.10.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por la hipótesis (ii) y el Lema 2.1.2.9, $C(D(X(A))) = \{\emptyset, X(A)\}$, de donde teniendo en cuenta el Lema 2.1.2.8 y la propiedad (L7) de las $LM_\theta-$álgebra, obtenemos que (1) $f_i^{A^{-1}}(U) = \emptyset$ o $f_i^{A^{-1}}(U) = X(A)$ para todo $U \in D(X(A))$. Por otra lado, sea Y un subconjunto de $X(A)$, cerrado, semimodal y no vacío. Entonces, (2) $f_i^{A^{-1}}(Y)$ es un subconjunto no vacío, compacto y creciente de $X(A)$ para todo $i \in I$. En efecto, por la propiedad (lP2) se verifica que para todo $i \in I$, $f_i^{A^{-1}}(Y)$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$, y como $X(A)$ es compacto, resulta que $f_i^{A^{-1}}(Y)$ también lo es. Además, como Y un subconjunto semimodal no vacío, entonces $f_i^{A^{-1}}(Y) \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, y por la propiedad (lP3) tenemos que $f_i^{A^{-1}}(Y)$ es un subconjunto creciente de $X(A)$. Por otra parte, si para algún $i_0 \in I$, existe $x \in X(A) \setminus f_{i_0}^{A^{-1}}(Y)$, entonces $f_{i_0}(x) \in X(A) \setminus f_{i_0}^{A^{-1}}(Y)$, de donde por (2), obtenemos que existe $U \in D(X(A))$ tal que $f_{i_0}(x) \in U$ y $U \cap f_{i_0}^{A^{-1}}(Y) = \emptyset$. De estas afirmaciones existe $U \in D(X(A))$ tal que $f_{i_0}^{A^{-1}}(U) \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^{A^{-1}}(U) \neq X(A)$, lo que contradice (1). Por consiguiente, $f_i^{A^{-1}}(Y) = X(A)$ para todo $i \in I$, lo que implica que $\bigcup_{i \in I} f_i^A(X(A)) \subseteq Y$. Luego, de la propiedad (lP6) y el hecho de que Y es un subconjunto cerrado de $X(A)$, se sigue que $Y = X(A)$, y así los únicos subconjuntos de $X(A)$ cerrados y semimodales son los triviales, de donde el Teorema 2.1.4.12 nos permite concluir que A es una $LM_\theta-$álgebra simple. $\square$

Moisil ([56], [58]) probó que se puede establecer una inmersión de toda $LM_\theta-$álgebra (LM_n-álgebra) en un producto directo de $LM_\theta-$álgebras (LM_n-álgebras) isomorfas a $L_2^{[I]}$ (L_n). Estas propiedades se han profundizado en los siguientes resultados:

Teorema 2.1.10.4 ([13, Theorem 1.8, Chapter 6]) *Toda $LM_\theta-$álgebra es un producto subdirecto de $LM_\theta-$subálgebras de ${L_2}^{[I]}$.*

Dem. Del Corolario 2.1.5.6 se sigue que toda $LM_\theta-$álgebra es un producto subdirecto de $LM_\theta-$álgebras simples y en consecuencia, por el Corolario 2.1.10.2, la demostración está completa. $\square$

Corolario 2.1.10.5 ([13, Corollary 1.8, Chapter 6]) *Toda LM_n-álgebra es un producto subdirecto de LM_n-subálgebras de L_n.*

Dem. Se infiere de los Corolarios 2.1.5.6 y 2.1.10.2. También es consecuencia del Teorema 2.1.10.4 y el hecho de que las LM_n-álgebras L_n y ${L_2}^{[I]}$ son isomorfas cuando $I = \{1, \ldots, n-1\}$. □

2.2. Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación

En esta sección nos abocamos a determinar las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación subdirectamente irreducibles.

2.2.1. Una dualidad topológica para las $nLM_\theta-$álgebras

Teniendo en cuenta los resultados establecidos en [22] extendemos la dualidad topológica obtenida en la Sección 2 de este capítulo para las $LM_\theta-$álgebras al caso de las $nLM_\theta-$álgebras. Esta dualidad, publicada en [33], nos conduce a caracterizar las congruencias y las $\theta-$conguencias de las $nLM_\theta-$álgebras. Con este propósito, introducimos las siguientes nociones:

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0 y último elemento 1, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal).

Definición 2.2.1.1 *Un espacio (pre-espacio) de Łukasiewicz $\theta-$valuado con negación o $Nl_\theta P-$espacio (pre-espacio) es una terna $(X, g, \{f_i)\}_{i\in I})$ que satisface las siguientes condiciones:*

(nlP1) (X, g) *es un $mP-$espacio* (Sección 1.4.2),

(nlP2) $(X, \{f_i)\}_{i\in I})$ *es un $l_\theta P-$espacio (pre-espacio),*

(nlP3) $f_i \circ g = f_i$ *para todo* $i \in I$,

(nlP4) $g \circ f_i = f_{d(i)}$ *para todo* $i \in I$, *donde* $d : I \to I$ *es una involución decreciente,*

(nl$_n$P4) $g \circ f_i = f_{n-i}$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$, *en el caso que* $\theta = n$, $n \geq 2$.

Definición 2.2.1.2 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *y* $(X', g', \{f_i'\}_{i\in I})$ $Nl_\theta P-$*espacios (pre-espacios). Una* $Nl_\theta P-$*función de* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *en* $(X', g', \{f_i'\}_{i\in I})$ *es una función isótona y continua* $f : X \to X'$ *que satisface las condiciones:*

(lPf) $f_i' \circ f = f \circ f_i$ *para todo* $i \in I$,

(mPf) $f \circ g = g' \circ f$.

Esto es, $f : X \to X'$ *es una* $Nl_\theta P-$*función si, y solo si,* f *es una* $l_\theta P-$*función y una* $mP-$*función.*

La categoría $\mathbf{Nl_\theta\mathcal{P}}$ de los $Nl_\theta P-$espacios y las $Nl_\theta P-$funciones es una subcategoría plena de la categoría $\mathbf{\mathcal{P}Nl_\theta\mathcal{P}}$ que tiene como objetos los $Nl_\theta P-$pre-espacios y como morfismos las $Nl_\theta P-$funciones.

Si θ es un entero n, $n \geq 2$, denotamos por $\boldsymbol{\mathcal{N}l_n\mathcal{P}}$ a la categoría de los $\mathrm{Nl}_n P-$espacios y las Nl_nP-funciones.

El Teorema 2.2.1.3 nos permite probar que la noción de $NP_\theta-$espacio, dada por A. Filipoiu (Sección 1.4.3), es equivalente a la de $Nl_\theta P-$espacio.

Teorema 2.2.1.3 *Sean* (X, g) *un* $mP-$*espacio y para cada* $i \in I$, $f_i : X \to X$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $Nl_\theta P-$*espacio,*

(ii) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $NP_\theta-$*espacio.*

Dem. Se sigue de la definición de $NP_\theta-$espacio, dada en la Sección 1.4.3, la Definición 2.2.1.1 y el Teorema 2.1.2.7. □

Teniendo en cuenta que $Hom(A, L_2)$ y $X(A)$ son homeomorfos como espacios topológicos e isomorfos como conjuntos ordenados y que los morfismos de la categoría $\mathbf{Nl_\theta\mathcal{P}}$ coinciden con los morfismos de la categoría $\mathbf{N\mathcal{P}r\theta}$ de los $NP_\theta-$espacios y las $NP_\theta-$funciones, tenemos que los resultados establecidos a continuación son consecuencias del Teorema 2.2.1.3 y de los correspondientes resultados obtenidos en [13, 38, 39].

Lema 2.2.1.4 *Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ un $Nl_\theta P-$espacio y $D(X)$ el retículo distributivo asociado a X. Entonces $n\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \sim_X, \{\phi_i^X\}_{i\in I})$ es una $nLM_\theta-$álgebra, donde para todo $U \in D(X)$, $\sim_X U = X \setminus g(U)$ y $\phi_i^X(U) = f_i^{-1}(U)$ para todo $i \in I$.*

Lema 2.2.1.5 *Sean $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ una $nLM_\theta-$álgebra y $X(A)$ el espacio de Priestley asociado a A. Entonces $N\text{Ł}_\theta(A) = (X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ es un $Nl_\theta P-$espacio, donde para todo $i \in I$, la función $f_i^A : X(A) \longrightarrow X(A)$ y la función $g_A : X(A) \longrightarrow X(A)$ están definidas por $f_i^A(P) = {\phi_i}^{-1}(P)$ y $g_A(P) = X(A)\setminus\{\sim x : x\in P\}$ para todo $P \in X(A)$. Además $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$, definida por $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$, es un $nLM_\theta-$isomorfismo.*

En lo que sigue, denotamos por $N\text{Ł}_\theta(A)$ o por $X(A)$ el $Nl_\theta P-$espacio asociado a A.

Lema 2.2.1.6 *Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ y $(X', g'\{f'_i\}_{i\in I})$ $Nl_\theta P-$espacios y f una $Nl_\theta P-$función de X en X'. Entonces la aplicación $n\mathbb{L}_\theta(f) : n\mathbb{L}_\theta(X') \longrightarrow n\mathbb{L}_\theta(X)$, definida por la prescripción $n\mathbb{L}_\theta(f)(U) = f^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X')$, es un $nLM_\theta-$homomorfismo. Además se verifica que $n\mathbb{L}_\theta(f)$ es inyectivo (sobreyectivo) si f es sobreyectiva (inyectiva).*

Lema 2.2.1.7 *Sean $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ y $\langle A', \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi'_i\}_{i\in I}\rangle$ $nLM_\theta-$álgebras y h un $nLM_\theta-$homomorfismo de A en A'. Entonces la aplicación $N\text{Ł}_\theta(h) : N\text{Ł}_\theta(A') \longrightarrow N\text{Ł}_\theta(h)(A)$, definida por la prescripción $N\text{Ł}_\theta(h)(P) = h^{-1}(P)$ para todo $P \in X(A')$, es una $Nl_\theta P-$función. Además se verifica que $N\text{Ł}_\theta(h)$ es inyectiva (sobreyectiva) si h es un $nLM_\theta-$homomorfismo sobreyectivo (inyectivo).*

Proposición 2.2.1.8 *Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ y $(X', g', \{f'_i\}_{i\in I})$ objetos en $\boldsymbol{Nl_\theta\mathcal{P}}$ y f una función de X en X'. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es un isomorfismo en $\boldsymbol{Nl_\theta\mathcal{P}}$,*

(ii) *f es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo que satisface:*

(lPf) *$f \circ f_i = f'_i \circ f$ para todo $i \in I$,*

(mPf) *$f \circ g = g' \circ f$.*

Corolario 2.2.1.9 *Sea* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *un objeto en* $\boldsymbol{Nl_\theta}\mathfrak{P}$*. Entonces, la función* ε_X *de* X *en* $X(D(X))$*, definida por* $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$*, es un isomorfismo en la categoría* $\boldsymbol{Nl_\theta}\mathfrak{P}$*.*

Teniendo en cuenta los resultados precedentes, es de rutina probar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1.10 *Los funtores* $n\mathbb{L}_\theta \circ N{\L}_\theta$ *y* $N{\L}_\theta \circ n\mathbb{L}_\theta$ *son naturalmente equivalentes a los funtores identidad* $Id_{\boldsymbol{n}\mathfrak{LM}_{\boldsymbol{\theta}}}$ *e* $Id_{\boldsymbol{Nl_\theta}\mathfrak{P}}$*, respectivamente, donde las familias* $\{\sigma_A : A \in Obj(\boldsymbol{n}\mathfrak{LM}_{\boldsymbol{\theta}})\}$ *y* $\{\varepsilon_X : X \in Obj(\boldsymbol{Nl_\theta}\mathfrak{P})\}$ *son las transformaciones naturales y por lo tanto, la categoría* $\mathfrak{N}\boldsymbol{l_\theta}\mathfrak{P}$ *es naturalmente equivalente a la categoría dual de* $\boldsymbol{n}\mathfrak{LM}_{\boldsymbol{\theta}}$*.*

Del Teorema 2.2.1.10 resulta inmediato que las categorías $\mathfrak{P}\boldsymbol{Nl_\theta}\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{P}\boldsymbol{n}\mathfrak{LM}_{\boldsymbol{\theta}}$ son dualmente equivalentes.

2.2.2. $nLM_\theta-$congruencias y $\theta nLM_\theta-$congruencias

Las siguientes propiedades de los $Nl_\theta P-$espacios nos permiten determinar las $nLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles.

Proposición 2.2.2.1 *Todo* $Nl_\theta P-$*espacio* $(X, g, \{f_i)\}_{i\in I})$ *es la suma cardinal de los subconjuntos cerrados, involutivos y modales* $[f_0(x), f_1(x)]$*,* $x \in X$*.*

Dem. Teniendo en cuenta que todo $Nl_\theta P-$espacio $(X, g, \{f_i)\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, donde el conjunto I tiene primer elemento 0 y último elemento 1, entonces de los Corolarios 2.1.3.7 y 2.1.4.8 se sigue que X es la suma cardinal de los subconjuntos cerrados y modales, $[f_0(x), f_1(x)]$, $x \in X$. Además, por las propiedades (nlP1) y (nlP4) de los $Nl_\theta P-$espacios, tenemos que estos subconjuntos son involutivos. □

Lema 2.2.2.2 *Si* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $Nl_\theta P-$*espacio, entonces todo* $\theta-$*subconjunto cerrado de* X *es involutivo.*

Dem. Sea $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. Teniendo en cuenta que g es un homeomorfismo y la propiedad (nlP4) de los $Nl_\theta P-$espacios, obtenemos que $g(Y) = \overline{\bigcup_{i\in I} f_{d(i)}(Y)} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. □

Lema 2.2.2.3 *Sea* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $Nl_\theta P-$*espacio. Si* Y *es un subconjunto involutivo de* X*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es creciente,*

(ii) Y *es decreciente.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x \in X$ e $y \in Y$ tal que $x \leq y$. Entonces (1) $g(y) \leq g(x)$ y teniendo en cuenta que Y es involutivo, tenemos que $g(y) \in Y$. De esta última afirmación, (1) y la hipótesis (i), deducimos que $g(x) \in Y$ y por lo tanto, $x = g(g(x)) \in Y$.

La demostración de (ii) implica (i) es similar. □

A continuación analizamos los subconjuntos modales de los $Nl_\theta P-$espacios.

Proposición 2.2.2.4 *Sea* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $Nl_\theta P-$*espacio. Si* Y *es un subconjunto no vacío de* X*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es modal,*

(ii) Y *es involutivo y creciente,*

(iii) $Y = \bigcup_{y\in Y} [f_0(y), f_1(y)]$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Por la hipótesis (i) y la Proposición 2.1.4.6, Y es un subconjunto creciente de X. Con el objeto de probar que Y es involutivo es suficiente chequear que $g(Y) \subseteq Y$. Sea (1) $z = g(y)$, con (2) $y \in Y$, entonces de (1) y la propiedad (nlP3) de los $Nl_\theta P-$espacios, obtenemos que (3) $f_i(z) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. Luego, de (2), (3) y por ser Y un subconjunto modal, concluimos que $z \in Y$ y por lo tanto, $g(Y) \subseteq Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) y la Proposición 2.1.4.6 se sigue que Y es un subconjunto creciente y decreciente a la vez y consecuentemente, por Proposición 2.1.4.6, Y es modal.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Se sigue de la Proposición 2.1.4.6 y teniendo en cuenta que todo $Nl_\theta P-$espacio es un $l_\theta P-$espacio. □

En lo que sigue, describimos los subconjuntos modales de los $Nl_n P-$espacios.

Corolario 2.2.2.5 *Sea* $(X, g, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\})$ *un* Nl_nP-*espacio. Si* Y *es un subconjunto no vacío de* X*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es modal,*

(ii) Y *es involutivo y creciente,*

(iii) Y *es la suma cardinal de cadenas maximales en* X $(Y = \bigcup_{y \in Y} C_y)$.

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.2.4. □

Teorema 2.2.2.6 *Sean* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ *una* $nLM_\theta-$*álgebra y su* $Nl_\theta P-$*espacio asociado* $N\text{Ł}_\theta(A) = (X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$. *Entonces, se verifican:*

(i) *El retículo* $\mathcal{C}_{IS}(N\text{Ł}_\theta(A))$, *de todos los subconjuntos cerrados, involutivos y semi-modales de* $N\text{Ł}_\theta(A)$, *es isomorfo al dual del retículo* $Con_{nLM_\theta}(A)$ *de todas las* $nLM_\theta-$*congruencias de* A.

(ii) *El retículo* $\mathcal{C}_\theta(N\text{Ł}(A))$, *de todos los* $\theta-$*subconjuntos cerrados de* $N\text{Ł}(A)$, *es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\theta nLM_\theta}(A)$ *de todas las* $\theta nLM_\theta-$*congruencias de* A,

donde en ambos casos, el isomorfismo está definido como en el Teorema 2.1.4.12.

Dem. Se sigue de los Teoremas 1.4.2.1, 2.1.4.12 y 2.1.4.18 y el Lema 2.2.2.2. □

Corolario 2.2.2.7 *Sean* $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ *y* $N\text{Ł}_n(A)$ *su* Nl_nP-*espacio asociado. Entonces, el retículo* $\mathcal{C}_M(N\text{Ł}_n(A))$, *de todos los subconjuntos cerrados y modales de* $N\text{Ł}_n(A)$, *es isomorfo al dual del retículo* $Con_{nLM_n}(A)$ *de todas las* nLM_n-*congruencias de* A, *donde el isomorfismo está definido como en el* Teorema 2.1.4.12.

Dem. Es consecuencia de las Proposiciones 2.1.4.11 y 2.2.2.5 y el Teorema 2.2.2.6. □

Observación 2.2.2.8 *Recordemos que si* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ *es una* $nLM_\theta-$*álgebra, entonces* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *es una* $LM_\theta-$*álgebra, donde para cada* $i \in I$ *y cada* $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) = \sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$.

Corolario 2.2.2.9 *Sean $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ una nLM_n-álgebra y ϑ una relación binaria de A. Entonces ϑ es una nLM_n-congruencia de A si, y solo si, ϑ es una LM_n-congruencia de A.*

Dem. Se sigue de la Observación 2.2.2.8 y los Corolarios 2.1.4.13 y 2.2.2.7. $\square$

Corolario 2.2.2.10 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Si ϑ una relación binaria sobre A, entonces ϑ es una $\theta nLM_\theta-$congruencia de A si, y solo si, ϑ es una $\theta LM_\theta-$congruencia de A.*

Dem. Se sigue de la Observación 2.2.2.8 y los Teoremas 2.1.4.18 y 2.2.2.6. $\square$

Corolario 2.2.2.11 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ es una $\theta nLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible (simple) si, y solo si, $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ es una $\theta LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible (simple), donde para cada $i \in I$ y cada $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) = \sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$.*

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 2.2.2.10. $\square$

Corolario 2.2.2.12 ([12], [48],[13, Theorem 5.1.13]) *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces el retículo $\mathcal{F}_\theta(A)$ de todos los $\theta-$filtros de A es isomorfo al retículo $Con_{\theta nLM_\theta}(A)$ de todas las $\theta nLM_\theta-$congruencias de A, donde el isomorfismo h está definido por la prescripción $h(F) = \overline{\Theta(F)}_\theta$ para todo $F \in \mathcal{F}_\theta(A)$.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.1.7.11 y 2.2.2.10. $\square$

Corolario 2.2.2.13 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Si $\varphi \subseteq A \times A$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $nLM_\theta-$congruencia maximal,*

(ii) *$\varphi = \overline{\Theta(\phi_0^{-1}P)}_\theta$ para algún $P \in X(A)$.*

Dem. Se sigue inmediatamente de los Corolarios 2.1.7.18 y 2.2.2.10. $\square$

Corolario 2.2.2.14 *Sea* $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ *una* $nLM_\theta-$*álgebra. Si* $\varphi \subseteq A \times A$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* nLM_n-*congruencia maximal,*

(ii) $\varphi = \mathbf{\Theta}(\phi_1^{-1}(P))$ *para algún* $P \in X(A)$.

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 2.2.2.13 y de que toda nLM_n-congruencia de una $nLM_\theta-$álgebra es una θLM_n-congruencia. □

Nuestro próximo objetivo es probar que las $nLM_\theta-$álgebras son semisimples.

Lema 2.2.2.15 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i \in I}, g)$ *un* $Nl_\theta P-$*espacio. Entonces la clausura de todo subconjunto involutivo de* X *también es involutivo.*

Dem. Teniendo en cuenta que $Y = g(Y)$ y además que g es un homeomorfismo, obtenemos que $g(\overline{Y}) = \overline{g(Y)} = \overline{Y}$. □

Proposición 2.2.2.16 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i \in I}, g)$ *un* $Nl_\theta P-$*espacio. Entonces para todo subconjunto cerrado* Y *de* X, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es un elemento minimal de* $\mathcal{C}^0_{IS}(X)$,

(ii) Y *es un elemento minimal de* $\mathcal{C}^0_\theta(X)$,

(iii) Y *es un elemento minimal de* $\mathcal{C}^0_S(X)$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como Y es un subconjunto semimodal y cerrado, entonces se verifica que (1) $\overline{\{f_i(y)\}_{i \in I}} \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. Además, de las propiedades (LP5)y (nlP4) y el Lema 2.2.2.15, inferimos que $\overline{\{f_i(y)\}_{i \in I}}$ es un subconjunto involutivo de X, de donde se se sigue, por el Corolario 2.1.5.1, que $\overline{\{f_i(y)\}_{i \in I}} \in \mathcal{C}^0_{IS}(X)$ para todo $y \in Y$. Luego, de la hipótesis y (1) obtenemos que $Y = \overline{\{f_i(y)\}_{i \in I}}$ para todo $y \in Y$. Entonces, por el Corolario 2.1.5.1, Y es un elemento minimal de $\mathcal{C}^0_\theta(X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) y Proposición 2.1.5.1 resulta que Y es un elemento minimal de $\mathcal{C}^0_S(X)$. Como Y es un θ-subconjunto de X, entonces de esta última afirmación y el Lema 2.2.2.2, se sigue que $Y \in \mathcal{C}^0_{IS}(X)$. Sea $Z \in \mathcal{C}^0_{IS}(X)$ tal que $Z \subseteq Y$. Como $\mathcal{C}^0_{IS}(X) \subseteq \mathcal{C}^0_S(X)$, entonces $Z \in \mathcal{C}^0_S(X)$ y por lo tanto, $Z = Y$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Resulta inmediata de la Proposición 2.1.5.1. $\square$

Corolario 2.2.2.17 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces, todo $nLM_\theta-$congruencia de A es una $nLM_\theta-$congruencia maximal si, y solo si, es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A.*

Dem. En virtud del Teorema 2.2.1.10, ϑ es una $nLM_\theta-$congruencia maximal de A si, y solo si, existe un elemento minimal Y de ${C_{IS}}^0(X) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\vartheta = \Theta_{IS}(Y)$. De la Proposición 2.2.2.16, esta última afirmación es equivalente al hecho de que Y es un elemento minimal de ${C_S}^0(X) \setminus \{\emptyset\}$ y $\vartheta = \Theta_{IS}(Y) = \Theta_S(Y)$. Por lo tanto, del Teorema 2.2.1.10, concluimos que ϑ es una $nLM_\theta-$congruencia maximal de A si, y solo si, ϑ es una $LM_\theta-$congruencia maximal de A. $\square$

Corolario 2.2.2.18 *Toda $nLM_\theta-$álgebra es semisimple.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.1.5.6 y 2.2.2.17. $\square$

2.2.3. $nLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Finalmente, obtenemos una descripción de las $nLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles.

Teorema 2.2.3.1 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $\theta nLM_\theta-$álgebra simple,*

(ii) *A es una $\theta nLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible,*

(iii) *$X(A)$ es un conjunto totalmente ordenado,*

(iv) *A es una $nLM_\theta-$álgebra simple,*

(v) *A es una $nLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem.

Del Corolario 2.2.2.10 y el Teorema 2.1.8.1 se deduce la equivalencia de las condiciones (i), (ii) y (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): De la hipótesis y el Teorema 2.1.8.1 se sigue que A es una $LM_\theta-$álgebra simple y por lo tanto, A es una $nLM_\theta-$álgebra simple.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Es trivial.

(v) $\Rightarrow$ (iv): El Teorema 2.2.2.6 nos permite afirmar que $\mathcal{C}_{IS}(X(A)) \setminus \{X(A)\}$ tiene último elemento Y. Entonces, existe $P_0 \in X(A)\backslash Y$ y así por (lP13), $[f_0^A(P_0), f_1^A(P_0)] \not\subseteq Y$. Como, de la Proposición 2.2.2.1, tenemos que $[f_0^A(P_0), f_1^A(P_0)] \in \mathcal{C}_{IS}(X(A))$, se sigue que $X(A) = [f_0^A(P_0), f_1^A(P_0)]$. Por lo tanto, de las propiedades (lP3) y (lP5), resulta que (1) $f_i^A(X(A)) = \{f_i^A(P_0)\}$ para todo $i \in I$. Si suponemos que $Y \neq \emptyset$, entonces de (1) tenemos que $f_i^A(Y) = f_i^A(X(A))$ para todo $i \in I$. Además, por ser Y un subconjunto cerrado y semimodal de X, entonces de la última afirmación, la Observación 2.1.4.3 y (lP6), inferimos que $Y = X(A)$, lo cual es una contradicción. Entonces, $\mathcal{C}_{IS}(X(A))$ $= \{\emptyset, X(A)\}$, y así, del Teorema 2.2.2.6 concluimos que A es una $nLM_\theta-$álgebra simple.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata. □

Corolario 2.2.3.2 *La $nLM_\theta-$álgebra $(L_2^{[I]}, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$, citada en el* Ejemplo 1.2.6, *es una $nLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.2.3.1 ya que el álgebra $L_2^{[I]}$, citada en el Elemplo 1.2.6 en la Sección 1.2, es una $nLM_\theta-$algebra totalmente ordenada. □

Corolario 2.2.3.3 *Sean $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ una $nLM_\theta-$álgebra y su Nl_nP-espacio asociado $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$X(A)$ es un conjunto totalmente ordenado,*

(ii) *$(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ es una nLM_n-álgebra simple,*

(iii) $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ *es una* nLM_n-*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 2.2.3.1 y el Corolario 2.1.4.19. □

Corolario 2.2.3.4 *Sea* L_n *la cadena de* n *fracciones racionales* $\frac{j}{n-1}$, $0 \leq j \leq n-1$, *en la cual* n *es un número entero,* $n \geq 2$, *dotada de la estructura natural de retículo y con las operaciones unarias* ϕ_i *y* $\sim$ *definidas por* $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 0$ *si* $i + j < n$ *y* $\phi_i(\frac{j}{n-1}) = 1$ *en otro caso,* $\sim \frac{j}{n-1} = 1 - \frac{j}{n-1}$. *Entonces, el álgebra* L_n *es una* nLM_n-*álgebra subdirectmente irreducible.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del hecho de que L_n es una $nLM_\theta-$álgebra totalmente ordenada y el Corolario 2.2.3.3. □

Proposición 2.2.3.5 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i \in I})$ *y* $(X', g', \{f'_i\}_{i \in I})$ $Nl_\theta P-$*espacios totalmente ordenados. Si* $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $l_\theta P-$*función, entonces es una* $Nl_\theta P-$*función.*

Dem. Sea $x \in X$ tal que $x = f_i(x)$ para algún $i \in I$. Teniendo en cuenta que $f : X \longrightarrow X'$ es una $l_\theta P-$función y (nlP4), inferimos que $(f \circ g)(x) = f(g(f_i(x))) = f((g \circ f_i)(x)) = f(f_{d(i)})(x) = f'_{d(i)}(f(x)) = (g' \circ f'_i)(f(x)) = g'(f'_i(f(x))) = g'(f(f_i(x))) = g'(f(x)) = (g' \circ f)(x)$. Por lo tanto, si $x = f_i(x)$ para algún $i \in I$, entonces $(f \circ g)(x) = (g' \circ f)(x)$.

Sea ahora $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$. Si $K_x = \{k \in I : \ f_k(x) < x\}$ y $J_x = \{j \in I : \ x < f_j(x)\}$ con el orden y el orden dual inducido por el orden definido sobre I, respectivamente, entonces por la Proposición 2.1.9.5, $f_j(x) \xrightarrow[j \in J_x]{} x$ o $f_k(x) \xrightarrow[k \in K_x]{} x$. Supongamos que (1) $f_j(x) \xrightarrow[j \in J_x]{} x$, como f y g son funciones continuas, (2) $f(g(f_j(x)) \xrightarrow[j \in J_x]{} f(g(x))$. Teniendo en cuenta que f es una $l_\theta P-$función y (nlP4) inferimos que (3) $f(g(f_j(x)) = f(f_{d(j)}(x)) = f'_{d(j)}(f(x)) = (g' \circ f'_j)(f(x)) = g'(f'_j(f(x)))$. De (1) y por ser f una $l_\theta P-$función obtenemos que $f'_j(f(x)) \xrightarrow[j \in J_x]{} f(x)$, en consecuencia, por ser g' continua, $g'(f'_j(f(x))) \xrightarrow[j \in J_x]{} g'(f(x))$. De esta última afirmación, (2), (3), el hecho de que X es un espacio de Hausdorff y el Teorema 2.1.1.15, inferimos que $f(g(x)) = g'(f(x))$. La demostración cuando $f_k(x) \xrightarrow[k \in K_x]{} x$ es análoga. Por consiguiente, si $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$, entonces $(f \circ g)(x) = (g' \circ f)(x)$. Concluimos de esta manera que f es una $Nl_\theta P-$función. □

Teorema 2.2.3.6 *Sea* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ *una* $nLM_\theta-$*álgebra. Si para todo* $i \in I$ *y para todo* $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) =\sim \phi_i(a)$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ *es una* $nLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ *es isomorfa a una* $nLM_\theta-$*subálgebra de* $L_2^{[I]}$,

(iii) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *es isomorfa a una* $LM_\theta-$*subálgebra de* $L_2^{[I]}$,

(iv) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ *es una* $LM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por el Teorema 2.2.3.1 y la Proposición 2.1.9.25, existe una $l_\theta P-$función sobreyectiva F de $X\left({L_2}^{[I]}\right)$ en $X(A)$. Como $X(A)$ y $X\left(L_2^{[I]}\right)$ son $Nl_\theta P-$espacios totalmente ordenados, de la Proposición 2.2.3.5 se sigue que F es una $Nl_\theta P-$función sobreyectiva. Entonces, definiendo $n\mathbb{L}_\theta(F)$ de $D(X(A))$ en $D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$ por $\mathbb{L}_\theta(F)(U) = F^{-1}(U)$ para todo $U \in D(X(A))$, y teniendo en cuenta el Lema 2.2.1.6, tenemos que $n\mathbb{L}_\theta(F)$ es un $nLM_\theta-$homomorfismo inyectivo. De esta última afirmación y el hecho de que las aplicaciones $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ y $\sigma_{L_2^{[I]}} : L_2^{[I]} \longrightarrow D\left(X\left(L_2^{[I]}\right)\right)$ son $nLM_\theta-$isomomorfismos, concluimos que A es isomorfa a una $nLM_\theta-$subálgebra de $L_2^{[I]}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es inmediata

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Por la hipótesis (iii), existe un $LM_\theta-$homomorfismo inyectivo de A en $L_2^{[I]}$. Entonces, definiendo $Ł_\theta(h) : X\left(L_2^{[I]}\right) \longrightarrow X(A)$, por la prescripción $Ł_\theta(h)(P) = h^{-1}(P)$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, y teniendo en cuenta el Lema 2.2.1.7, tenemos que $Ł_\theta(h)$ es una $l_\theta P-$función sobreyectiva. De la hipótesis (iii) inferimos que $X(A)$ es un $Nl_\theta P-$espacio totalmente ordenado y como $X\left(L_2^{[I]}\right)$ es también un $Nl_\theta P-$espacio totalmente ordenado, entonces por la Proposición 2.2.3.5 resulta que $Ł_\theta(h)$ es una $Nl_\theta P-$función sobreyectiva. De esta última afirmación y el Lema 2.2.1.6 se sigue que $n\mathbb{L}_\theta(Ł_\theta(h))$ $= n\mathbb{L}_\theta(NŁ_\theta(h))$ es un $nLM_\theta-$homomorfismo inyectivo. Además, por el Teorema 2.2.1.10, $n\mathbb{L}_\theta \circ NŁ_\theta = Id_{\boldsymbol{n\mathcal{LM}_\theta}}$, y así de la última afirmación concluimos que h es un $nLM_\theta-$homomorfismo inyectivo de A en $L_2^{[I]}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.2.3.2. $\square$

Corolario 2.2.3.7 ([13, Theorem 1.8, Chapter 6]) *Toda $nLM_\theta-$álgebra es producto subdirecto de $nLM_\theta-$subálgebras de $L_2^{[I]}$.*

Dem. Es consecuencia inmediata de los Corolarios 2.2.2.18 y 2.2.3.6. $\square$

Corolario 2.2.3.8 *Sea $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ una nLM_n-álgebra. Si para cada $a \in A$ y cada i, $1 \leq i \leq n-1$, $\overline{\phi}_i(a) = \sim \phi_i(a)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ *es una nLM_n-álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ *es isomorfa a una $nLM_\theta-$subálgebra de L_n,*

(iii) $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ *es isomorfa a una LM_n-subálgebra de L_n,*

(iv) $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ *es una LM_n-álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Resulta del Teorema 2.2.3.6 y el hecho de que cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, las nLM_n-álgebras $L_2{}^{[I]}$ y L_n son isomorfas. $\square$

Corolario 2.2.3.9 ([15], [13, Corollary 1.8, Chapter 6]) *Toda nLM_n-álgebra es un producto subdirecto de nLM_n-subálgebras de L_n.*

Dem. Se infiere de los Corolarios 2.2.2.18 y 2.2.3.8. $\square$

Corolario 2.2.3.10 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i \in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $nLM_\theta-$álgebra simple,*

(ii) *$C(A) = \{0, 1\}$, donde $C(A) = \{\phi_i(a) : a \in A, i \in I\}$ es el conjunto de los elementos booleanos de A.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.2.3.6 y el Corolario 2.1.10.3. $\square$

2.3. Una aplicación de las dualidades topológicas de las LM_n-álgebras y las nLM_n-álgebras

En esta sección, nuestro objetivo es determinar condiciones para que las nociones de LM_n-álgebra y nLM_n-álgebra sean equivalentes. Para ello utilizamos las dualidades topológicas que hemos determinado para estas álgebras.

Teniendo en cuenta las Definiciones 1.2.2 y 1.2.4 podemos afirmar que si $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ es una nLM_n-álgebra, entonces $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ es una LM_n-álgebra, donde para cada i, $1 \leq i \leq n-1$ y para cada $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) =\sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$.

En lo que sigue establecemos las condiciones que debe cumplir una LM_n-álgebra $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ para que se pueda definirse una operación unaria $\sim$ sobre A de manera tal que $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ sea una nLM_n-álgebra.

En primer lugar probamos, a través de las dualidades que determinamos anteriormente, el hecho conocido de que las nociones de LM_2-álgebra, nLM_2-álgebra y álgebra de Boole son equivalentes.

Lema 2.3.1 *Si (X, f_1) es un l_2P-espacio, entonces $f_1 = 1_X$, donde $1_X(x) = x$ para cada $x \in X$.*

Dem. De la hipótesis y ($\mathrm{l_2P8}$) inferimos que para cada $x \in X$, $f_1(x) = x$ y por lo tanto, $f_1 = 1_X$. □

Proposición 2.3.2 *Sean X un espacio de Priestley y $1_X : X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(X, 1_X)$ es un l_2P-espacio,*

(ii) *$(X, 1_X)$ es un Nl_2P-espacio,*

(iii) *X es un espacio booleano.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $g = 1_X$. Entonces, g es un homeomorfismo involutivo y anti-isomorfismo de orden y además verifica las condiciones (nlP3) y (nlP4), de lo que concluimos, por la hipótesis (i), que $(X, 1_X)$ es un Nl_2P-espacio.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Por la hipótesis (i) tenemos que para cada $x \in X$, $C_x = \{x\}$ y por lo tanto, por el Corolario 2.1.3.8, obtenemos que X es una anticadena.

(iii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (iii) resulta inmediato que 1_X verifica las condiciones ($\mathrm{l_2P2}$) a ($\mathrm{l_2P6}$) y por consiguiente, $(X, 1_X)$ es un l_2P-espacio, □

Corolario 2.3.3 *Sea A una LM_2-álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una LM_2-álgebra,*

(ii) *A es una nLM_2-álgebra,*

(iii) *A es un álgebra de Boole.*

Dem. Es consecuencia inmediata de los Lemas 2.2.1.4 y 2.1.2.8, la Proposición 2.3.2 y de la dualidad para las álgebras de Boole. □

El corolario anterior es fundamental porque muestra que la teoría de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $\theta-$valuadas es una generalización de la teoría de las álgebras de Boole. En particular, el álgebra L_n juega un rol similar al del álgebra L_2 en la teoría de las álgebras de Boole.

A continuación determinamos las condiciones para que las nociones de LM_n-álgebra y nLM_n-álgebra sean equivalentes cuando n es un entero, $n > 2$.

Proposición 2.3.4 *Sea $(X, f_1, \ldots, f_{n-1})$ un l_nP-espacio tal que para todo $x \in X$ y para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$, $f_i(x) = f_j(x)$ si, y solo si, $f_{n-i}(x) = f_{n-j}(x)$. Si $g : X \longrightarrow X$ está definida por $g(x) = f_{n-i}(x)$ cuando $x = f_i(x)$ para algún i, $1 \leq i \leq n-1$, entonces $(X, g, f_1, \ldots, f_{n-1})$ es un Nl_nP-espacio.*

Dem. En primer lugar tenemos que g es un homeomorfismo involutivo y anti–isomorfismo de orden de X en X. En efecto, g satisface las condiciones siguientes:

(i) *g está bien definida*: Sea $x \in X$, entonces por (l_nP8) existe i, $1 \leq i \leq n-1$, tal que $x = f_i(x)$, y teniendo en cuenta la defindión de g se sigue que $g(x) = f_{n-i}(x)$. Por otro lado, sean $y, z \in X$ tales que (1) $y = z$, luego por (l_nP8), existen k, j, $1 \leq k$, $j \leq n-1$, tales que (2) $z = f_k(z)$, (3) $y = f_j(y)$, de donde obtenemos por (1) que $f_k(z) = f_j(z) = f_j(y) = f_k(y)$. Entonces, de la hipótesis inferimos que $f_{n-k}(z) = f_{n-j}(z) = f_{n-k}(y) = f_{n-j}(y)$. De esta última afirmación, (2), (3) y la definición de g concluimos que $g(z) = g(y)$.

(ii) *g es una aplicación involutiva*: Sea $x \in X$, entonces por (l_nP8), existe i, $1 \leq i \leq n-1$, tal que $x = f_i(x)$. Luego $g(x) = f_{n-i}(x)$ y por ende, $g(g(x)) = g(f_{n-i}(x)) = f_i(x) = x$.

(iii) *g es una función sobreyectiva*: Sea $x \in X$, entonces por (l_nP8) existe i, $1 \leq i \leq n-1$, tal que $x = f_i(x)$ y por consiguiente, $x = g(f_{n-i}(x))$.

(iv) *g es un anti-isomorfismo de orden*: Sean $x, y \in X$ tales que (1) $x \leq y$, entonces por (lP3) se verifica que (2) $f_i(x) = f_i(y)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. De (1), (2), (lP4) y (l_nP8) inferimos que existen j, k, $1 \leq j \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, tales que (3) $j \leq k$, $y = f_k(x)$ y $x = f_j(x)$. Por consiguiente $g(x) = f_{n-j}(x)$ y $g(y) = f_{n-k}(x)$, de lo que concluimos por (lP4) y (3) que $g(y) \leq g(x)$. Sean ahora $x, y \in X$ tales que $g(y) \leq g(x)$, entonces $g(g(x)) \leq g(g(y))$ y como g es una aplicación involutiva concluimos que $x \leq y$.

(v) *g es una función continua y cerrada*: Sea F un subconjunto cerrado de X. Como por (l_nP6), $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} (F \cap f_i(X))$, entonces $g(F) = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} g(F \cap f_i(X))$. Además, por (lP5) tenemos que $F \cap f_i(X) = \{x \in F : x = f_i(x)\}$, de donde se sigue que (1) $g(F) = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_{n-i}(f_i(X) \cap F)$. Por otra parte, de (lP1) y (lP2) inferimos que para cada i, $1 \leq i \leq n-1$, f_i es una función cerrada de X en X, de donde obtenemos que para cada i, $1 \leq i \leq n-1$, $f_{n-i}(f_i(X) \cap F)$ es un subconjunto cerrado de X. De esta afirmación y (1) resulta que $g(F)$ es un subconjunto cerrado de X y así, g es una función cerrada y como g es una aplicación involutiva, concluimos que g es una función continua.

(vi) *g es un homeomorfismo*: De los incisos (i), (ii), (iii) y (v) obtenemos que g es una función biyectiva, continua y cerrada de X en X y por lo tanto, g es un homeomorfismo.

Teniendo en cuenta que X es un espacio de Priestley, entonces los incisos (ii), (iv) y (vi) nos permiten afirmar que (X, g) es un $mP-$espacio.

Además las condiciones (nlP3) y (nl$_n$P4) son consecuencias directas de la definición de g y las propiedades (lP5) y (l$_n$P8). Así concluimos que $(X, g, f_1, \ldots, f_{n-1})$ es un Nl_nP-espacio. $\square$

Corolario 2.3.5 *Sea $(X, f_1, \ldots, f_{n-1})$ un l_nP-espacio tal que para todo $x \in X$ y para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$, $f_i(x) = f_j(x)$ si, y solo si, $f_{n-i}(x) = f_{n-j}(x)$. Además, sea $g : X \longrightarrow X$, definida por $g(x) = f_{n-i}(x)$ cuando $x = f_i(x)$ para algún i, $1 \leq i \leq n-1$. Si para cada $U \in D(X)$, $\phi_i^X(U) = {f_i}^{-1}(U)$, $1 \leq i \leq n-1$ y $\sim U = X \setminus g(U)$, entonces $(D(X), \sim, {\phi^X}_1, \ldots, {\phi^X}_{n-1})$ es una nLM_n-álgebra.*

Dem. Es consecuencia directa del Lema 2.2.1.4 y la Proposición 2.3.4. $\square$

Corolario 2.3.6 *Sea $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ una LM_n-álgebra tal que para todo $P \in X(A)$ y para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$, $\phi_i^{-1}(P) = \phi_j^{-1}(P)$ si, y solo si, $\phi_{n-i}^{-1}(P) = \phi_{n-j}^{-1}(P)$. Entonces se puede definir una operación unaria $\sim$ sobre A tal que $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ es una nLM_n-álgebra.*

Dem. Es consecuencia directa de los Lemas 2.2.1.4 y 2.2.1.5 y el Corolario 2.3.5. $\square$

A continuación, nuestro objetivo es determinar cómo se puede definir la operación unaria $\sim$ sobre una LM_n-álgebra que cumple las condiciones del Corolario 2.3.6. Para ello, comenzamos trabajando en la LM_n-álgebra dual de un LM_n-espacio.

Proposición 2.3.7 *Sean $(X, f_1, \ldots, f_{n-1})$ un l_nP-espacio, $(D(X), \phi_1^X, \ldots, \phi_{n-1}^X, \overline{\phi}_1^X, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}^X)$ su LM_n-álgebra dual y $C(D(X))$ el conjunto de los elementos booleanos de $D(X)$. Si para cada $x \in X$, $C_x = \{f_i(x) : 1 \leq i \leq n-1\}$, entonces para cada $U \in D(X)$ se verifican:*

(i) $\phi_i^X(U) = \bigcup\limits_{f_i(C_x) \cap U \neq \emptyset} C_x$,

(ii) $\phi^X_{n-1}(U) = \downarrow U = \bigcup\limits_{x \in U} C_x = \bigcup\limits_{C_x \cap U \neq \emptyset} C_x$,

(iii) $\phi^X_1(U) = \emptyset$ *ó* $\phi^X_1(U) = \bigcup\limits_{C_x \subseteq U} C_x$,

(iv) $\overline{\phi}^X_{n-1}(U) = X \setminus \downarrow U = \bigcup\limits_{C_x \cap U = \emptyset} C_x$,

(v) $U \in C(D(X))$ *si, y solo si,* $U = \bigcup\limits_{x \in U} C_x$ *si, y solo si,* U *es un subconjunto modal abierto y cerrado de* X.

Dem.

(i): Sean $U \in D(X)$ e i un entero tal que $1 \leq i \leq n-1$. Entonces para cada $x \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes: $x \in \phi^X_i(U)$; $f_i(x) \in U$; $f_i(C_x) \cap U \neq \emptyset$; $x \in \bigcup\limits_{f_i(C_y) \cap U \neq \emptyset} C_y$.

(ii): Sean $U \in D(X)$ y $x \in \downarrow U$. Entonces $x \leq y$ para algún (1) $y \in U$, de donde se sigue por (lP3) que (2) $f_i(x) = f_i(y)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Además, por (l_nP13) tenemos que $y \leq f_{n-1}(y)$, y teniendo en cuenta que U es un subconjunto creciente de X y (1), obtenemos que $f_{n-1}(y) \in U$. Luego, de (2) concluimos que $x \in f^{-1}_{n-1}(U)$ y así, $x \in \phi^X_{n-1}(U)$. Recíprocamente, si $y \in X$ es tal que $f_{n-1}(y) \in U$, entonces por (l_nP13) inferimos que $y \in \downarrow U$.

Sea ahora $x \in U$, entonces por (l_nP13), $f_{n-1}(x) \in U$ y de (lP4) inferimos que $C_x \subseteq \downarrow U$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{x \in U} C_x \subseteq \downarrow U$. Recíprocamente, sea $y \in \downarrow U$, entonces $y \leq x$ para algún $x \in U$, de donde se sigue por (lP3) que $f_i(x) = f_i(y)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, y por lo tanto $C_x = C_y$, lo que nos permite afirmar que $\downarrow U \subseteq \bigcup\limits_{x \in U} C_x$.

Teniendo en cuenta que $y \in C_x$ si, y solo si, $C_x = C_y$, entonces resulta inmediato que $\bigcup\limits_{x \in U} C_x = \bigcup\limits_{C_x \cap U \neq \emptyset} C_x$.

(iii): Si $U \in D(X)$ es tal que $U \cap f_1(X) = \emptyset$, entonces ${f_1}^{-1}(U) = \emptyset$ y por lo tanto, $\phi^X_1(U) = \emptyset$. Por otro lado, si $U \in D(X)$ verifica que $U \cap f_1(X) \neq \emptyset$, podemos afirmar que existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \in U$, y como U es un subconjunto creciente de X, inferimos que $C_x \subseteq U$ y así $x \in U$. Luego $\{C_x : x \in U \text{ y } C_x \subseteq U\} \neq \emptyset$. Sea $x \in U$ tal que $C_x \subseteq U$, entonces $f_1(x) \in U$, de donde se sigue que $x \in \phi^X_1(U)$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{C_x \subseteq U} C_x \subseteq \phi^X_1(U)$.

Por otra parte, si $y \in X$ es tal que $f_1(y) \in U$, por ser U un subconjunto creciente, resulta que $C_y \subseteq U$ y por consiguiente, $\phi_1^X(U) \subseteq \bigcup\limits_{C_x \subseteq U} C_x$.

(iv): Sean $U \in D(X)$ y (1) $x \in \overline{\phi}_{n-1}^X(U)$. Como, por Lema 2.1.2.8 y la propiedad (L2) de las LM_n-álgebras, $\overline{\phi}_{n-1}^X(U) \cap \phi_{n-1}^X(U) = \emptyset$, entonces de (1) y (ii) obtenemos que $x \in X\setminus \downarrow U$. Recíprocamente, si $x \in X\setminus \downarrow U$, de (ii) se sigue que $x \in X \setminus {f_{n-1}}^{-1}(U)$ y por consiguiente, $x \in \overline{\phi}_{n-1}^X(U)$. Además, de (ii) y la Proposicion 2.1.4.9 tenemos que $\phi_{n-1}^X(U)$ es un subconjunto modal y por lo tanto, del Lema 2.1.4.2 resulta que $\overline{\phi}_{n-1}^X(U)$ es subconjunto modal, de donde concluimos, por (ii) y la Proposicion 2.1.4.9, que $\overline{\phi}_{n-1}^X(U) = X\setminus \downarrow U = \bigcup\limits_{C_x \cap U = \emptyset} C_x$.

(v): De (ii), las propiedades (L3) y (L7) de las LM_n-álgebras y la Proposición 2.1.4.9, inferimos que para todo $U \in D(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

$U = \phi_i^X(U)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$; $U = \phi_{n-1}^X(U)$; $U = \bigcup\limits_{x \in U} C_x$; U es un subconjunto modal, abierto y cerrado de X. $\square$

Proposición 2.3.8 *Sea $(X, f_1, ..., f_{n-1})$ un l_nP-espacio tal que para todo $x \in X$ y para i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$, $f_i(x) = f_j(x)$ si, y solo si, $f_{n-i}(x) = f_{n-j}(x)$, y sea $g : X \longrightarrow X$ definida por $g(x) = f_{n-i}(x)$, donde $x = f_i(x)$ para algún i, $1 \leq i \leq n-1$. Si $(D(X), \sim, \phi_1^X, \ldots, \phi_{n-1}^X)$ es su nLM_n-álgebra dual, entonces para cada $U \in D(X)$ existe un único subconjunto V de X tal que:*

(i) $\sim U = \overline{\phi}_{n-1}^X(U) \cup V$,

(ii) $V \in D(X)$,

(iii) $\phi_i^X(V) = \overline{\phi}_{n-i}^X(U) \cap \phi_{n-1}^X(U) = \overline{\phi}_{n-i}^X(U \cap \overline{\phi}_1^X(U)) \cap \overline{\phi}_1^X(U) \cap \phi_{n-1}^X(U)$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$,

(iv) $\phi_1^X(V) = \emptyset$,

(v) $V \subseteq \phi_{n-1}^X(U) \cap \overline{\phi}_1^X(U)$.

Dem.

(i): Sea $U \in D(X)$, entonces $g(U) \subseteq \downarrow U$. En efecto, sea $y = g(x)$, donde $x \in U$, luego de la definición de g, se sigue que $y \in C_x = \{f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)\}$, y por el inciso (ii) de la Proposición 2.3.7, concluimos que $y \in \downarrow U$. Por lo tanto, $X \setminus g(U) = (X \setminus \downarrow U) \cup (\downarrow U \setminus g(U))$. De esta última afirmación, el inciso (iv) de la Proposición 2.3.7 y la definición de $\sim$ en $D(X)$, podemos afirmar que $\sim U = \overline{\phi}^X_{n-1}(U) \cup V$, con $V = \downarrow U \setminus g(U)$.

(ii): Sean $U \in D(X)$ y $V = \downarrow U \setminus g(U)$. Por el inciso (ii) de la Proposición 2.3.7 se verifica que $\downarrow U \in D(X)$. Como g es una aplicación abierta y cerrada, entonces $g(U)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X, de donde resulta que $\downarrow U \setminus g(U)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X. Además, como g es un anti-isomorfismo de orden y U es un subconjunto creciente de X, entonces $g(U)$ es un subconjunto decreciente de X. Luego, teniendo en cuenta que $\downarrow U$ es un subconjunto modal de X y $g(U) \subseteq \downarrow U$, obtenemos que $\downarrow U \setminus g(U)$ es un subconjunto creciente de X. Por lo tanto, $V = \downarrow U \setminus g(U) \in D(X)$.

(iii): Para cada $x \in X$ se verifica que $f_i(x) \in \downarrow U \setminus g(U)$, $1 \leq i \leq n-1$ si, y solo si, (1) $f_i(x) \in \downarrow U$ y (2) $f_i(x) \notin g(U)$, $1 \leq i \leq n-1$. La condición (2) es equivalente a las siguientes afirmaciones: $g(f_i(x)) \notin U$; $\;f_{n-i}(x) \notin U$; $\;x \in X \setminus f^{-1}_{n-i}(U)$; $\;x \in \overline{\phi}^X_{n-i}(U)$. Por otra parte, por el inciso (ii) de la Proposición 2.3.7, tenemos que la condición (1) es equivalente a afirmar que $x \in \phi^X_{n-1}(U)$. Por lo tanto, $x \in \phi^X_i(\downarrow U \setminus g(U))$ si, y solo si, $x \in \overline{\phi}^X_{n-i}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U)$, resultando de esta manera que $\phi^X_i(V) = \overline{\phi}^X_{n-i}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U)$.

Además se verifica que $\overline{\phi}^X_{n-i}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U) = \overline{\phi}^X_{n-i}(U \cap \overline{\phi}^X_1(U)) \cap \overline{\phi}^X_1(U) \cap \phi^X_{n-1}(U)$. En efecto, por la propiedades (L2) y (L6) de las LM_n-álgebras (Sección 1.2), podemos afirmar que $U = U \cap (\overline{\phi}^X_1(U) \cup \phi^X_1(U)) = (U \cap \overline{\phi}^X_1(U)) \cup \phi^X_1(U)$ y por lo tanto, (3) $\overline{\phi}^X_{n-i}(U) = \overline{\phi}^X_{n-i}((U \cap \overline{\phi}^X_1(U)) \cup \phi^X_1(U))$. Teniendo en cuenta que $\overline{\phi}^X_i$ es un homomorfismo dual de retículo para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, y la propiedad (L8) de las LM_n-álgebras (Sección 1.2), obtenemos que $\overline{\phi}^X_{n-i}((U \cap \overline{\phi}^X_1(U)) \cup \phi^X_1(U)) = \overline{\phi}^X_{n-i}(U \cap \overline{\phi}^X_1(U)) \cap \overline{\phi}^X_1(U)$, de donde se sigue por (3) que $\overline{\phi}^X_{n-i}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U) = \overline{\phi}^X_{n-i}(U \cap \overline{\phi}^X_1(U)) \cap \overline{\phi}^X_1(U) \cap \phi^X_{n-1}(U)$.

(iv): Por (iii) se verifica que $\phi^X_1(V) = \overline{\phi}^X_{n-1}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U)$, y de la propiedad (L2) de las LM_n-álgebras (Sección 1.2), resulta que $\overline{\phi}^X_{n-1}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U) = \emptyset$, lo que nos permite afirmar que $\phi^X_1(V) = \emptyset$.

(v): Por (iii) tenemos que $\phi^X_{n-1}(V) = \overline{\phi}^X_1(U) \cap \phi^X_{n-1}(U)$, de donde se sigue, por la propiedad (L6) de las LM_n-álgebras (Sección 1.2), que $V \subseteq \phi^X_{n-1}(U) \cap \overline{\phi}^X_1(U)$.

La unicidad de V es consecuencia de la condición (iii) y la propiedad (L5) de las LM_n-álgebras (Sección 1.2). En efecto, si existe $V \in D(X)$ que verifique la condición (iii), entonces $\phi^X_i(\downarrow U \setminus g(U)) = \overline{\phi}^X_{n-i}(U) \cap \phi^X_{n-1}(U) = \phi^X_i(V)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Como el conjunto $\downarrow U \setminus g(U) \in D(X)$ y $D(X)$ es una LM_n-álgebra, de la última afirmación y la propiedad (L5), concluimos que $V = \downarrow U \setminus g(U)$. □

Corolario 2.3.9 *Sea $(A, \phi_1, ..., \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, ..., \overline{\phi}_{n-1})$ una LM_n-álgebra tal que para todo $P \in X(A)$ y para todo i, j, $1 \leq j$, $k \leq n-1$, $\phi^{-1}_i(P) = \phi^{-1}_j(P)$ si, y solo si, $\phi^{-1}_{n-i}(P) = \phi^{-1}_{n-j}(P)$. Si para cada $a \in A$, $\sim a = \phi_{n-1}(a) \vee b$, donde b es el único elemento de A tal que $\phi_i(b) = \overline{\phi}_{n-i}(a) \wedge \phi_{n-1}(a) = \overline{\phi}_{n-i}(a \wedge \overline{\phi}_1(a)) \wedge \overline{\phi}_1(a) \wedge \phi_{n-1}(a)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, entonces $(A, \sim, \phi_1, ..., \phi_{n-1})$ es una nLM_n-álgebra.*

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 2.3.6 y la Proposición 2.3.8. Cabe señalar que $\phi_1(b) = 0$ y $b \leq \phi_{n-1}(a) \wedge \overline{\phi}_1(a)$. □

Ahora nuestra atención está centrada en el caso particular de las LM_n-álgebras finitas.

Observación 2.3.10 *Para cada retículo distributivo finito A, el conjunto ordenado de los elementos primos o irreducibles de A y el conjunto de los átomos de A los denotamos por $\Pi(A)$ y $\mathcal{A}t(A)$, respectivamente. La correspondencia $i \longrightarrow \uparrow i$ establece un anti–isomorfismo de $\Pi(A)$ en $X(A)$, que transforma $\mathcal{A}t(A)$ en $max\, X(A)$ y $max\, \Pi(A)$ en $min\, X(A)$.*

Lema 2.3.11 *Si $(A, \phi_1, ..., \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, ..., \overline{\phi}_{n-1})$ es una LM_n-álgebra finita, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *existen $P \in X(A)$, i, j, $1 \leq i$, $j \leq n-1$ tales que $\phi^{-1}_i(P) = \phi^{-1}_j(P)$,*

(i) *existen $p \in \Pi(A)$, i, j, $1 \leq i$, $j \leq n-1$ tales que $\phi^{-1}_i(\uparrow p) = \phi^{-1}_j(\uparrow p)$,*

(ii) *existen* $p \in \Pi(A)$, i, j, $1 \leq i$, $j \leq n-1$ *tales que para todo* $a \in A$, $p \leq \phi_i(a)$ *si, y solo si,* $p \leq \phi_j(a)$.

Dem. Se sigue de la Observación 2.3.11. □

Proposición 2.3.12 *Sean* $(X, f_1, \ldots, f_{n-1})$ *un* l_nP-*espacio finito, la* LM_n-*álgebra* $(D(X), \phi_1^X, \ldots, \phi_{n-1}^X, \overline{\phi}_1^X, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}^X)$ *asociada a* X *y* $C(D(X)) = \{\phi_i^X(U) : U \in D(X),$ $1 \leq i \leq n-1\}$, *el álgebra de los elementos booleanos de* $D(X)$. *Si para cada* $U \in D(X)$, $\Pi(U) = \{W \in \Pi(D(X)) : W \subseteq U\}$, *entonces:*

(i) $\Pi(D(X))$ *es la suma cardinal de un conjunto finito de cadenas de a lo sumo* $n-1$ *elementos,* $max\, \Pi(D(X)) = \mathcal{A}t(C(D(X)))$ *y* $min\, \Pi(D(X)) = \mathcal{A}t(D(X))$.

(ii) *Para todo* $U \in D(X)$ *se verifica:*

(a) $U \in \Pi(D(X))$ *si, y solo si,* $U = \uparrow f_i(x)$, *donde* $x \in X$ *y* $1 \leq i \leq n-1$.

(b) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

$U \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$; $U = C_x = \{f_i(x) : 1 \leq i \leq n-1\}$, *para algín* $x \in X$;

$U = \phi_{n-1}^X(V)$ *para algún* $V \in \Pi(D(X))$.

(c) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

$U \in \mathcal{A}t(D(X))$; $U = \{f_{n-1}(x)\}$ *para algún* $x \in X$; $\phi_i^X(U) = \emptyset$ *para todo* i, $1 \leq i < n-1$ *y* $\phi_{n-1}^X(U) \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$.

(d) *Si* $U \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$, *entonces existe un único* $V \in \mathcal{A}t(D(X))$ *tal que* $V \subseteq U$.

(e) $$\phi_1^X(U) = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X))) \\ V \subseteq U}} V, \qquad \phi_{n-1}^X(U) = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X))) \\ V \cap U \neq \emptyset}} V,$$

$$\overline{\phi}_{n-1}^X(U) = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X))) \\ V \cap U = \emptyset}} V, \qquad \phi_i^X(U) = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X))) \\ f_i(V) \cap U \neq \emptyset}} V.$$

(iii) *Para cada* $V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$, $\Pi(V)$ *es una cadena maximal en* $\Pi(D(X))$ *de a lo sumo* $n-1$ *elementos, tal que si* $\Pi(V) = \{U_j^V \in \Pi(D(X)) : U_j^V \subseteq V,\ 1 \leq j \leq n-1\}$, *entonces se verifica que* $U_1^V \in \mathcal{A}t(D(X))$, $U_{n-1}^V = V$, $U_j^V \subseteq U_i^V$ *si* $j \leq i$, $\phi_i^X(U_j^V) = \emptyset$

si $1 \leq i < n-j$ *y* $\phi_i^X(U_j^V) = V$ *si* $n-j \leq i \leq n-1$. *Además* $\Pi(D(X))$ *es la suma cardinal del conjunto de cadenas* $\Pi(V)$, *con* $V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$.

(iv) *Para cada* $U \in D(X)$ *se verifica:*

(a) $\Pi(U)$ *es la suma cardinal del conjunto de cadenas* $\Pi(U \cap V)$ *tal que* $V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$ *y* $V \cap U \neq \emptyset$. *Además se verifica que*

$$max\,\Pi(U) = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X))) \\ V \cap U \neq \emptyset}} max\,\Pi(U \cap V),$$

(b) $$U = \bigcup_{\substack{U_{j_V}^V \in max\,\Pi(U \cap V) \\ V \in \mathcal{A}t(C(D(X))),\ \emptyset \subset V \cap U \subset V}} U_{j_V}^V \ \cup\ \phi_1^X(U),$$

donde $j_V = max\,\{j : U_j^V \in \Pi(U \cap V),\ 1 \leq j \leq n-1\}$, $\phi_i^X(U_{j_V}^V) = \emptyset$ *si* $1 \leq i < n - j_V$ *y* $\phi_i^X(U_{j_V}^V) = V$ *si* $n - j_V \leq i \leq n-1$, $1 \leq j_V < n-1$,

(v) *Si el espacio* X *es tal que para todo* $x \in X$ *y para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$, $f_i(x) = f_j(x)$ *si, y solo si,* $f_{n-i}(x) = f_{n-j}(x)$, *entonces* $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i \in I}, \sim)$ *es una* nLM_n-*álgebra, donde todo* $U \in D(X)$,

$$\sim U = \Big(\bigcup_{\substack{U_{j_V}^V \in max\,\Pi(U \cap V) \\ V \in \mathcal{A}t(C(D(X))),\ \emptyset \subset V \cap U \subset V}} U_{n-1-j_V}^V \ \cap\ \overline{\phi}_1^X(U)\ \Big) \cup \overline{\phi}_{n-1}^X(U),$$

siendo $\phi_i^X(U_{j_V}^V) = \emptyset$ *si* $1 \leq i < n - j_V$ *y* $\phi_i^X(U_{j_V}^V) = V$ *si* $n - j_V \leq i \leq n-1$,

Dem.

(i): Es consecuencia del Corolario 2.1.3.8 y la Observación 2.3.11.

Cabe aclarar que como X es finito, entonces $D(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X, de donde resulta que

$$\Pi(D(X)) = \{\uparrow f_i(x) : x \in X,\ 1 \leq i \leq n-1\}$$

y por consiguiente, $\Pi(D(X))$ es suma cardinal de un conjunto finito de cadenas $\{\uparrow f_i(x) : 1 \leq i \leq n-1\}$ de a lo sumo $n-1$ elementos y

$$\mathcal{A}t(D(X)) = \{\{f_{n-1}(x)\} : x \in X\} = \{\{x\} : x \in max\,X\} = min\,\Pi(D(X)).$$

Como por la Proposición 2.3.7, tenemos que

$$C(D(X)) = \{V \subseteq X : V \text{ es un subconjunto modal de } X\},$$

entonces

$$\mathcal{A}t(C(D(X))) = \{C_x : x \in X\} = \{\uparrow f_1(x) : x \in X\} = max\, \Pi(D(X)),$$

(ii): Es consecuencia de la Proposición 2.3.7 y el inciso (i).

(iii):

(a): Resulta inmediato del inciso (i) y de las definiciones de $\Pi(U)$ y $\Pi(U \cap V)$. Más aún, si para cada $U \in D(X)$ y cada $V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))$, $j_V = max\,\{j : U_j^V \in \Pi(U \cap V), 1 \leq j \leq n-1\}$, entonces $U_{j_V}^V \in max\,\Pi(U \cap V)$ y por lo tanto, $U_{j_V}^V \in max\,\Pi(U)$.

(b): Teniendo en cuenta la propiedad de que todo elemento de un retículo distributivo finito es supremo de los elementos primos que lo preceden y el inciso (a), resulta que

$$\begin{aligned} U = \bigcup_{W \in \Pi(U)} W &= \bigcup_{W \in max\,\Pi(U) \setminus \mathcal{A}t(C(D(X)))} W \;\cup \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))\\ V \subseteq U}} V \\ &= \bigcup_{\substack{U_{j_V}^V \in max\,\Pi(U \cap V)\\ V \in \mathcal{A}t(C(D(X))),\ \emptyset \subset V \cap U \subset V}} U_{j_V}^V \;\cup\; \phi_1^X(U). \end{aligned}$$

(iv): Por la Proposición 2.3.7, la definición de la función g y el inciso (ii)(d) se sigue que

$$\begin{aligned} \downarrow U \setminus g(U) &= \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))\\ V \cap U \neq \emptyset,\ V \not\subseteq U}} U_{n-1-j_V}^V \setminus \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))\\ V \subseteq U}} V \\ &= \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{A}t(C(D(X)))\\ V \cap U \neq \emptyset,\ V \not\subseteq U}} U_{n-1-j_V}^V \cap \overline{\phi}_1^X(U). \end{aligned}$$

Finalmente, por la definición de $\sim$ en el álgebra $D(X)$ y la Proposición 2.3.8, la demostración está completa. $\square$

Corolario 2.3.13 *Sea* $(A, \phi_1, ..., \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, ..., \overline{\phi}_{n-1})$ *una* LM_n-*álgebra finita. Si* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $C(A) = \{\phi_i(a_j) : a_j \in A, 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n-1\} = \{c_1, \ldots, c_l\}$ *y para cada* $a \in A$, $\Pi(a) = \{p \in \Pi(A) : p \leq a\}$. *Entonces:*

(i) $\Pi(A)$ *es la suma cardinal de un conjunto finito de cadenas de a lo sumo* $n-1$ *elementos,* $max\,\Pi(A) = \mathcal{A}t(C(A))$ *y* $min\,\Pi(A) = \mathcal{A}t(A)$.

(ii) *Para todo* $a \in A$ *se verifica:*

(a) $a \in \mathcal{A}t(A)$ *si, y solo si,* $\phi_i(a) = 0$ *para todo* i, $1 \leq i < n-1$ *y* $\phi_{n-1}(a) \neq 0$.

(b) *Si* $a \in \mathcal{A}t(C(A))$, *entonces existe un único* $p \in \mathcal{A}t(A)$ *tal que* $p \leq a$.

(c) $\phi_1(a) = \bigvee\limits_{\substack{c \in \mathcal{A}t(C(A)) \\ c \leq a}} c, \qquad \phi_{n-1}(a) = \bigvee\limits_{\substack{c \in \mathcal{A}t(C(A)) \\ c \wedge a \neq 0}} c,$

$\overline{\phi}_{n-1}(a) = \bigvee\limits_{\substack{c \in \mathcal{A}t(C(A)) \\ c \wedge a = 0}} c, \qquad \phi_i(a) = \bigvee\limits_{\substack{c \in \mathcal{A}t(C(A)) \\ c \leq \phi_i(a)}} c.$

(iii) *Para cada* $c_k \in \mathcal{A}t(C(A))$, $\Pi(c_k)$ *es una cadena maximal en* $\Pi(A)$ *de a lo sumo* $n-1$ *elementos, tal que si* $\Pi(c_k) = \{p_i^k \in \Pi(A) : p_i^k \leq c_k,\ 1 \leq i \leq n-1\}$, *entonces:*

(a) *si* $i \leq j$, *entonces* $p_i^k \leq p_j^k$ *para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$;

$p_{n-1}^k = c_k$;

$\phi_i(p_j^k) = 0$ *si* $1 \leq i < n-j$ *y* $\phi_i(p_j^k) = c_k$ *si* $n-j \leq i \leq n-1$,

(b) $\Pi(A)$ *es la suma cardinal de las cadenas* $\Pi(c_k)$, *con* $c_k \in \mathcal{A}t(C(A))$.

(iv) *Para cada* $a \in A$,

(a) $\Pi(a)$ *es la suma cardinal del conjunto de cadenas* $\Pi(a \wedge c_k)$, *con* $c_k \in \mathcal{A}t(C(A))$ *tal que* $c_k \wedge a \neq 0$ *y* $max\,\Pi(a) = \bigcup\limits_{\substack{c_k \in \mathcal{A}t(C(D(X))) \\ c_k \wedge a \neq 0}} max\,\Pi(a \wedge c_k)$,

(b) $a = \bigvee\limits_{p \in max\,\Pi(a) \setminus \mathcal{A}t(C(A))} p \ \vee\ \phi_1(a) = \bigvee\limits_{\substack{p_{j_k}^k \in max\,\Pi(a \wedge c_k) \\ c_k \in \mathcal{A}t(C(A)),\ 0 < c_k \wedge a < c_k}} p_{j_k}^k \ \vee\ \phi_1(a).$

(v) *Si el ágebra* A *es tal que para todo* $p \in \Pi(A)$ *y para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$ *se verifica que* $\phi_i^{-1}(\uparrow p) = \phi_j^{-1}(\uparrow p)$ *si, y solo si,* $\phi_{n-i}^{-1}(\uparrow p) = \phi_{n-j}^{-1}(\uparrow p)$, *entonces* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i \in I})$ *es una* nLM_n-*álgebra, donde para cada* $a \in A$ *se define:*

$$\sim a = \Big(\bigvee_{\substack{p_{j_k}^k \in max\,\Pi(a \wedge c_k) \\ c_k \in \mathcal{A}t(C(A)),\ 0 < c_k \wedge a < c_k}} p_{n-1-j_k}^k \ \wedge\ \overline{\phi}_1(a) \Big) \ \vee\ \overline{\phi}_{n-1}(a),$$

siendo $\phi_i(p^k_{j_k}) = 0$ *si* $1 \leq i < n - j_k$ *y* $\phi_i(p^k_{j_k}) = c_k$ *si* $n - j_k \leq i \leq n - 1$.

(vi) *Si el álgebra* A *es tal que para todo* $a \in A$ *y para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n - 1$, $\phi_i(a) = \phi_j(a)$ *si, y solo si,* $\phi_{n-i}(a) = \phi_{n-j}(a)$, *entonces* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i \in I})$ *es una* nLM_n-*álgebra, donde para cada* $a \in A$ *se define* $\sim a$ *como en el inciso* (v).

Dem. Los incisos (i) al (v) son consecuencias directas del Corolario 2.3.9 y la Proposición 2.3.12. Si el el álgebra A satisface la condición impuesta en el inciso (vi), entonces es fácil probar que verifica la condición establecida en el inciso (v) y por lo tanto la demostración está completa. $\square$

Capítulo 3

Congruencias de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas

En este capítulo nuestro principal interés es investigar las congruencias y las $\theta-$congruencias principales y booleanas de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin y con negación. Por ello, en la Sección 3.1 caracterizamos las $LM_\theta-$congruencias y las $\theta LM_\theta-$congruencias principales de una $LM_\theta-$álgebra cuando θ es infinito y finito, por medio de ciertos subconjuntos abiertos de su espacio dual. Este último resultado nos permite probar que la intersección de dos $\theta LM_\theta-$congruencias principales es una $\theta LM_\theta-$congruencia principal. Además, cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, obtenemos el filtro que determina la LM_n-congruencia principal y así estamos en condiciones de demostrar que la intersección de dos LM_n-congruencias principales es una LM_n-congruencia principal. En los otros casos damos condiciones suficientes para que la intersección de dos $LM_\theta-$congruencias principales no sea principal. En la Sección 3.2, nuestra atención se centra en las $LM_\theta-$congruencias y $\theta LM_\theta-$congruencias booleanas de una $LM_\theta-$álgebra. En primer lugar, las caracterizamos por medio de ciertos subconjuntos cerrados y abiertos del espacio asociado a la $LM_\theta-$álgebra y usando estos resultados demostramos que estas congruencias coinciden, y también que son las $LM_\theta-$congruencias principales determinadas por los filtros generados por elementos booleanos de estas álgebras. Usando la caracterización de las $LM_\theta-$congruencias booleanas establecemos condiciones suficientes para que la intersección de dos $LM_\theta-$congruencias principales sea una $LM_\theta-$congruencia principal. La Sección 3.3 está dedicada al estudio de las congruencias en la subclase de las LM_θ-álgebras cuyo espacio asociado es la suma cardinal de un número finito de cadenas. En ella se demuestra que las $LM_\theta-$congruencias de estas álgebras coinciden con las $\theta LM_\theta-$congruencias y que son principales y booleanas. Como consecuencia tenemos que el cardinal de las $LM_\theta-$congruencias de una LM_θ-álgebra de esta subclase, está dado por el cardinal de los elementos booleanos del álgebra. Finalmente, en la Sección 3.4 caracterizamos las $nLM_\theta-$congruencias principales y booleanas de las $nLM_\theta-$álgebras cuando θ es infinito y finito y determinamos propiedades de las mismas. La mayor parte de los resultados de las Secciones 3.1 y 3.2 están en [34].

3.1. Congruencias principales de las $LM_\theta-$álgebras

En esta sección analizamos las congruencias principales y las $\theta-$congruencias principales de una $LM_\theta-$álgebra, con θ infinito y finito, por medio de las dualidades topológicas que obtuvimos para estas álgebras en el Capítulo 2.

3.1.1. $LM_\theta-$congruencias y $\theta LM_\theta-$congruencias principales

Nuestro primer objetivo es caracterizar las $LM_\theta-$congruencias y las $\theta LM_\theta-$congruencias principales de una $LM_\theta-$álgebra por medio de ciertos subconjuntos abiertos de su $l_\theta P-$espacio asociado para obtener algunas propiedades de estas congruencias.

En primer lugar recordemos la siguiente definición, la cual es fundamental para la caracterización de las $LM_\theta-$congruencias y las $\theta LM_\theta-$congruencias principales.

Definición 3.1.1.1 *Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Un subconjunto A de X es convexo si $A = \downarrow A \cap \uparrow A$, o equivalentemente si $x, y \in A$ y $x \leq z \leq y$ implican que $z \in A$.*

De ahora en adelante, si A es una $LM_\theta-$álgebra y a, $b \in A$, notamos con $\Theta(a, b)$ y $\Theta_\theta(a, b)$ a la $LM_\theta-$congruencia principal y la $\theta LM_\theta-$congruencia principal generada por (a, b), respectivamente. En lo sucesivo consideramos $\Theta(a, b)$ y $\Theta_\theta(a, b)$, con $a \leq b$. Esta condición no quita generalidad al problema ya que para todo a, $b \in A$ se verifica que $\Theta(a, b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$ y $\Theta_\theta(a, b) = \Theta_\theta(a \wedge b, a \vee b)$.

Teorema 3.1.1.2 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces:*

(i) *El retículo* $\mathcal{O}_{CS}(X(A))$*, de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos semimodales de* $X(A)$*, es isomorfo al retículo* $Con_{LM_\theta}(A)$ *de las* $LM_\theta-$*congruencias de* A*, y el isomorfismo lo establece la función* Θ_{OS} *definida por la prescripción:* $(a, b) \in \Theta_{OS}(G)$ *si, y solo si,* $(\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \subseteq G$ *para todo* a*,* $b \in A$*.*

(ii) *El retículo* $\mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$*, de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son* $\theta-$*subconjuntos de* $X(A)$*, es isomorfo al retículo* $Con_{\theta LM_\theta}(A)$ *de las* $\theta LM_\theta-$*congruencias de* A*, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{O\theta}$ *definida por la misma prescripción que en el inciso* (i)*.*

Dem. Es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.1.4.12 y 2.1.4.18, teniendo en cuenta que existe una correspondencia biunívoca entre los cerrados y abiertos de un espacio topológico y además que $\Theta_{OS}(G) = \Theta_S(X(A)\backslash G)$ para todo $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ y $\Theta_{O\theta}(G) = \Theta_\theta(X(A)\backslash G)$ para todo $G \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$. También se sigue del Teorema 1.4.1.2 y probando que $\mathcal{O}_{CS}$ es una función sobreyectiva de $\mathcal{O}_{CS}(X(A))$ en Con_{LM_θ} y que $\Theta_{O\theta}$ es una función sobreyectiva de $\mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$ en $Con_{\theta LM_\theta}(A)$. □

Corolario 3.1.1.3 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo* a*,* $b \in A$ *tales que* $a \leq b$*:*

(i) $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ *y* $\Theta_{OS}(G) = \Theta(a, b)$*,*

(ii) G *es el menor elemento de* $\mathcal{O}_{CS}(X(A))$*, en el sentido de inclusión, que contiene a* $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$*.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Teniendo en cuenta que $a \leq b$, entonces por el Teorema 3.1.1.2, tenemos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. Por otro lado, supongamos que existe $H \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ tal que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$. Luego, por el Teorema 3.1.1.2, $(a, b) \in \Theta_{OS}(H)$ y así, por la hipótesis (i), resulta que $\Theta_{OS}(G) \subseteq \Theta_{OS}(H)$. Esta afirmación y el Teorema 3.1.1.2 implican que $G \subseteq H$, lo que nos permite asegurar que se verifica (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii), el hecho de que $a \leq b$ y el Teorema 3.1.1.2 obtenemos que $(a, b) \in \Theta_{OS}(G)$. Además, si $\varphi \in Con_{LM_\theta}(A)$ y $(a, b) \in \varphi$, entonces por el Teorema 3.1.1.2 tenemos que $\varphi = \Theta_{OS}(H)$ para algún $H \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$. De estas últimas afirmaciones inferimos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$ y así, por la hipótesis (ii), concluimos que $G \subseteq H$. Esto significa, por el Teorema 3.1.1.2, que $\Theta_{OS}(G) \subseteq \Theta_{OS}(H) = \varphi$ y por lo tanto, $\Theta_{OS}(G) = \Theta(a, b)$. $\square$

La demostración del siguiente corolario es análoga a la del Corolario 3.1.1.3.

Corolario 3.1.1.4 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra, $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y el $l_\theta P-$espacio $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ asociado a A. Entonces para todo $G \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{O\Theta}(G) = \Theta_\theta(a, b)$,

(ii) *G es el menor elemento $\mathcal{O}_{C\theta}(X(A)$, en el sentido de inclusión, que contiene a*

$\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.

En lo que sigue, teniendo en cuenta los resultados anteriores, obtenemos diferentes descripciones de los elementos de $\mathcal{O}_{CS}(X(A))$ que se corresponden con las $LM_\theta-$congruencias principales por medio de la dualidad, las que nos resultan útiles más adelante.

Proposición 3.1.1.5 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$ tales que $a \leq b$:*

(i) $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ *y* $\Theta_{OS}(G) = \Theta(a, b)$,

(ii) $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$,

(iii) $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por (i) tenemos que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq G$. Además, de las propiedades (lP2) y (lP5) y el Teorema 2.1.1.16, obtenemos que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ y por consiguiente, de (i) y el Corolario 3.1.1.3, concluimos que $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por (lP2) y (lP5) y el Teorema 2.1.1.16, se verifica que $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$. Supongamos ahora que existe $H \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ tal que $\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a) \subseteq H$. Como $X(A)\setminus H$ es semimodal inferimos que $f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq H$ para todo $i \in I$, de donde se sigue que $G \subseteq H$. Entonces, por el Corolario 3.1.1.3, concluimos que $\Theta_{OS}(G) = \Theta(a, b)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia directa del hecho de que $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $LM_\theta-$isomorfismo. □

Corolario 3.1.1.6 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces para todo* $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{OS}(G)$ *es una* $LM_\theta-$*congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto* R *de* $X(A)$ *abierto, cerrado y convexo tal que*

$$G = R \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R).$$

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.1.5, teniendo en cuenta que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$ es un subconjunto abierto, cerrado y convexo de $X(A)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es una consecuencia directa de la Proposición 3.1.1.5 y la propiedad (P1) de los espacios de Priestley (Sección 1.4.1). □

Recordamos ahora una propiedad de las $LM_\theta-$álgebras $m-$completas y completas, siendo m un cardinal infinito, que nos permite obtener propiedades de las $LM_\theta-$congruencias principales de estas álgebras.

Proposición 3.1.1.7 ([13, Proposition 5.2, Chapter 4]) *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $C(A)$ el conjunto de los elementos booleanos de A. Entonces, un subconjunto de $C(A)$ tiene supremo (ínfimo) en A si, y solo si, tiene supremo (ínfimo) en $C(A)$ y en cada caso los supremos y los ínfimos son iguales.*

Corolario 3.1.1.8 ([13, Corollary 5.3, Chapter 4]) *Sea m un cardinal infinito. Si una $LM_\theta-$álgebra A es $m-$completa, entonces $C(A)$ es un álgebra de Boole $m-$completa. Además si A es completa, entonces $C(A)$ es completa.*

Sin embargo, si una $LM_\theta-$álgebra A es tal que el álgebra de Boole $C(A)$ es completa, no necesariamente A es completa ([15], [13, Example 5.25, Chapter 4]).

Proposición 3.1.1.9 *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado.*

(a) *Si m es un cardinal infinito, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

  (i) *A es $m-$completa y todo filtro primo de A es un m-filtro,*

  (ii) *$D(X(A))$ es una $LM_\theta-$álgebra m-completa y $\bigvee\limits_{U\in S} U = \bigcup\limits_{U\in S} U$ para todo subconjunto S de $D(X(A)$ de cardinalidad a lo sumo m.*

(b) *Si m es un cardinal infinito, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

  (iii) *$C(A)$ es un álgebra de Boole m-completa y todo filtro primo de $C(A)$ es un m-filtro,*

  (iv) *$C(D(X(A)))$ es un álgebra de Boole m-completa y $\bigvee\limits_{U\in S} U = \bigcup\limits_{U\in S} U$ para todo subconjunto S de $C(D(X(A))$ de cardinalidad a lo sumo m.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) y el hecho de que $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $LM_\theta-$isomorfismo se sigue que $D(X(A))$ es una $LM_\theta-$álgebra m-completa. Si S es un subconjunto de $D(X(A))$ de cardinalidad a lo sumo m, entonces para todo $U \in S$ existe $a \in A$ tal que (1) $U = \sigma_A(a)$ y por lo tanto, (2) $\bigvee\limits_{U\in S} U = \bigvee\limits_{a\in {\sigma_A}^{-1}(S)} \sigma_A(a) = \sigma_A(\bigvee\limits_{a\in {\sigma_A}^{-1}(S)} a)$. Por otra parte, como todo filtro primo de A es un m-filtro, entonces (3) $\sigma_A(\bigvee_{a\in{\sigma_A}^{-1}(S)} a) = \bigcup_{a\in{\sigma_A}^{-1}(S)} \sigma_A(a)$. En efecto, como σ_A es una biyección, entonces ${\sigma_A}^{-1}(S)$ tiene la misma cardinalidad que S y por consiguiente, para todo $P \in X(A)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes: $\bigvee_{a\in{\sigma_A}^{-1}(S)} a \in P$; existe $a \in {\sigma_A}^{-1}(S)$ tal que $a \in P$; $P \in \bigcup_{a\in{\sigma_A}^{-1}(S)} \sigma_A(a)$. Luego, de (1), (2) y (3) concluimos que $\bigvee_{U\in S} U = \bigcup_{U\in S} U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) y teniendo en cuenta que ${\sigma_A}^{-1} : D(X(A)) \longrightarrow A$ es un $LM_\theta-$isomorfismo resulta que A es m-completa. Si $P \in X(A)$ y S es un subconjunto de A de cardinalidad a lo sumo m tal que $\bigvee_{a\in S} a \in P$, entonces (1) $P \in \sigma_A(\bigvee_{a\in S} a)$. Como σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo de A en $D(X(A))$, tenemos que (2) $\sigma_A(\bigvee_{a\in S} a) = \bigvee_{a\in S} \sigma_A(a)$. Por otra parte, del hecho de que $\sigma_A(a) \in D(X(A))$ para todo $a \in S$ y la hipótesis (ii) obtenemos que (3) $\bigvee_{a\in S} \sigma_A(a) = \bigcup_{a\in S} \sigma_A(a)$. Además, de (2) y (3) resulta que $\sigma_A(\bigvee_{a\in S} a) = \bigcup_{a\in S} \sigma_A(a)$, de donde por (1) se sigue que existe $a \in S$ tal que $a \in P$ y por lo tanto, P es un m-filtro.

Las demostraciones de las implicaciones (iii) $\Rightarrow$ (iv) y (iv) $\Rightarrow$ (iii) son análogas a las de (i) $\Rightarrow$ (ii) y (ii) $\Rightarrow$ (i), respectivamente, teniendo en cuenta que en estos casos la restricción de σ_A a $C(A)$ es un isomorfismo booleano de $C(A)$ en $C(D(X(A)))$. Además, se verifica que si todo filtro primo de $C(A)$ es un m-filtro, entonces $\sigma_A(\bigvee_{a\in S} a) = \bigcup_{a\in S} \sigma_A(a)$ para todo subconjunto S de $C(A)$ de cardinalidad a lo sumo m y también, que si todo filtro primo de $C(A)$ es completo, entonces $\sigma_A(\bigvee_{a\in S} a) = \bigcup_{a\in S} \sigma_A(a)$ para todo subconjunto S de $C(A)$. $\square$

Corolario 3.1.1.10 *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces:*

(a) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

  (i) *A es completa y todo filtro primo de A es un filtro completo,*

  (ii) *$D(X(A))$ es una $LM_\theta-$álgebra completa y $\bigvee_{U\in S} U = \bigcup_{U\in S} U$ para todo subconjunto S de $D(X(A)$.*

(b) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(iii) *$C(A)$ es un álgebra de Boole completa y todo filtro primo de $C(A)$ es un filtro completo,*

(iv) *$C(D(X(A)))$ es un álgebra de Boole completa y $\bigvee_{U\in S} U = \bigcup_{U\in S} U$ para todo subconjunto S de $C(D(X(A))$.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.1.1.9. $\square$

En lo que sigue denotamos por $|A|$ al cardinal de un conjunto A.

Proposición 3.1.1.11 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra que verifica las condiciones* (i) *o* (ii)*, o sus formulaciones equivalentes de la* Proposición 3.1.1.9 *o del* Corolario 3.1.1.10*, donde m es el número cardinal del conjunto I. Si $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ es el $l_\theta P-$espacio asociado a A, entonces se verifican:*

(i) *φ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A si, y solo si, existe un subconjunto G de $X(A)$ abierto, cerrado y modal tal que $\varphi = \Theta_{OS}(G)$,*

(ii) *la intersección de dos $LM_\theta-$congruencias principales de A es una $LM_\theta-$congruencia principal de A,*

(iii) $\Theta(a,b) = \mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge_{i\in I} \overline{\phi}_i(b) \vee \phi_i(a)\right)$*, $a, b \in A$ y $a \leq b$, donde la última $LM_\theta-$congruencia es la congruencia asociada al filtro principal generado por $\bigwedge_{i\in I} \overline{\phi}_i(b) \vee \phi_i(a)$.*

Dem.

(i): Por la hipótesis, existen $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y $\varphi = \Theta(a,b)$. Luego, de la Proposición 3.1.1.5 obtenemos que $\varphi = \Theta_{OS}(G)$, donde (1) $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$. En ambos casos, por la Proposición 3.1.1.9 o el Corolario 3.1.1.10, tenemos que $\bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a) \in D(X(A))$ y por lo tanto, $((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \setminus \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$ es un subconjunto abierto de $X(A)$. Como $((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \setminus \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A)) = \emptyset$, inferimos por (lP6) que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \setminus \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a) = \emptyset$ y por consiguiente, $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$, de lo que concluimos por (1) que $G = \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$ $= \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ y así, G es un subconjunto, abierto, cerrado y modal de $X(A)$.

Recíprocamente, si G es un subconjunto, abierto, cerrado y modal de $X(A)$, entonces $G = \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(G)$, de lo que resulta $G = G \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(G)$ y como G es convexo (Corolario 2.1.4.7), entonces por el Corolario 3.1.1.6, podemos afirmar que $\Theta_{OS}(G)$ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A.

(ii): Es consecuencia directa del inciso (i) y el Teorema 3.1.1.2, teniendo en cuenta que la intersección finita de subconjuntos, abiertos, cerrados y modales de $X(A)$ es también un subconjunto, abierto, cerrado y modal de $X(A)$.

(iii): Sean a, $b \in A$ tales $a \leq b$, entonces por el inciso (i) tenemos que $\Theta(a,b) = \Theta_{OS}(G)$, donde $G = \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$, de lo que se sigue, por ser σ_A un $LM_\theta-$isomorfismo, que $G = \sigma_A(\bigvee_{i\in I} \phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$ y por lo tanto, (1) $\Theta(a,b) = \Theta_{OS}(\sigma_A(\bigvee_{i\in I} \phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$, donde en esta última congruencia se considera a $\sigma_A(\bigvee_{i\in I} \phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$ como subconjunto abierto de $X(A)$. Teniendo en cuenta la definición del isomorfismo Θ_{OS}, dada en el Teorema 3.1.1.2, y que $\sigma_A|C(A) \longrightarrow C(D(X(A)))$ es un isomorfismo booleano, inferimos que (2) $\Theta_{OS}(\sigma_A(\bigvee_{i\in I} \phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))) = \Theta_S((X(A) \setminus \sigma_A(\bigvee_{i\in I} \phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)) = \Theta_S(\sigma_A(-\bigvee_{i\in I} \phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)) = \Theta_S(\sigma_A(\bigwedge_{i\in I} \overline{\phi}_i b \vee \phi_i a))$, donde por el Teorema 2.1.4.12, $\Theta_S(\sigma_A(\bigwedge_{i\in I} \overline{\phi}_i b \vee \phi_i a))$ es la $LM_\theta-$congruencia asociada a $\sigma_A(\bigwedge_{i\in I} \overline{\phi}_i b \vee \phi_i a)$ como subconjunto cerrado de $X(A)$. De esta última afirmación, (1), (2) y la propiedad (A13) de las congruencias de retículos asociadas a los elementos de $D(X(A))$ (Proposición 1.4.1.4), concluimos que $\Theta(a,b) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \bigwedge_{i\in I} \overline{\phi}_i(b) \vee \phi_i(a))$. □

A continuación caracterizamos los elementos de $\mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$ que se corresponden con las $\theta LM_\theta-$congruencias principales de A por medio de la dualidad, los cuales son muy útiles más adelante.

Proposición 3.1.1.12 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$ tales que $a \leq b$:*

(i) *$H \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$ y $\Theta_{O\theta}(H) = \Theta_\theta(a,b)$,*

(ii) $H = X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$,

donde $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$,

(iii) $H = X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))))}$,

(iv) $H = X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{i\in I} \sigma_A(\phi_i a \vee \overline{\phi}_i b))}$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Observemos que (1) $\Theta(a,b) \subseteq \Theta_\theta(a,b)$. Por consiguiente, por el Teorema 3.1.1.2, existen $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ y $H \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A)$ tales que (2) $\Theta(a,b) = \Theta_{OS}(G)$, (3) $\Theta_\theta(a,b) = \Theta_{O\theta}(H)$ y (4) $G \subseteq H$. Entonces, de la Proposición 3.1.1.5 inferimos que $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. Además, se verifica que $\Theta_\theta(a,b)$ es la menor $\theta LM_\theta-$congruencia de A que contiene $\Theta(a,b)$. Por lo tanto, de (2), (3), (4) y el Teorema 3.1.1.2, tenemos que $X(A) \setminus H$ es el mayor $\theta-$subconjunto cerrado contenido en $X(A) \setminus G$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $X(A) \setminus G$ es semimodal, obtenemos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)} \subseteq X(A) \setminus G$ y además, $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$ es el mayor $\theta-$subconjunto cerrado contenido en $X(A) \setminus G$. Por consiguiente, de las dos últimas afirmaciones concluimos que $X(A) \setminus H = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$ y así, $H = X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es fácil probar que $H \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A)$. Además, como $X(A) \setminus G$ es un subconjunto semimodal, tenemos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)} \subseteq X(A) \setminus G$ y así, $G \subseteq H$. Esta condición y la hipótesis (ii) implican que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$. Por otro lado, si $W \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A)$ y $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq W$, entonces $H \subseteq W$. En efecto, como $X(A) \setminus W$ es semimodal, por la Proposición 3.1.1.5 tenemos que $G \subseteq W$, lo cual implica que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus W)} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$. De esta última aseveración y por ser $X(A) \setminus W$ un $\theta-$subconjunto cerrado de $X(A)$, inferimos que $X(A) \setminus W \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$ y por lo tanto, $H \subseteq W$. Lo probado anteriormente y el Corolario 3.1.1.4 nos permiten concluir la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): A continuación, solamente probamos que para todo $i \in I$ se verifica que $f_i^A((X(A) \setminus (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))) \cap \bigcap_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)))) =$

$f_i^A(\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)\,)\,)\,)$, igualdad de la que se sigue inmediatamente la demostración. En efecto, supongamos que existen $x,\, y \in X(A)$ tales que $y = f_j(x)$ para algún $j \in I$ y que $f_i(x) \notin \sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)$ para todo $i \in I$. Entonces, por (lP5) inferimos que $f_i(y) = f_i(x)$ y $f_i(y) \notin \sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)$ para todo $i \in I$. De estas afirmaciones tenemos que $y \in (X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)))\cap\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a))$ y así, por (lP5) podemos asegurar que $y \in f_j^A((X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)\,)\,)\cap\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)\,)\,)\,)$. Por lo tanto, concluimos que para todo $j \in J$, $f_j^A(\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)\,)\,)\,)$ $\subseteq f_j^A((X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)\,)\,)\cap\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a))\,)\,)$. La otra inclusión es obvia.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Es consecuencia inmediata del hecho de que σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo y que para todo $U \in D(X(A))$ y para todo $i \in I$, $\phi_i^{X(A)}(U) = f_i^{A^{-1}}(U)$ y $\overline{\phi}_i^{X(A)}(U) = X(A)\setminus f_i^{A^{-1}}(U)$. □

Corolario 3.1.1.13 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo $H \in \mathcal{O}_{C\theta}(X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_{O\theta}(H)$ es una $\theta LM_\theta-$congruencia principal de A,*

(ii) *existe un subconjunto abierto, cerrado y convexo R de $X(A)$ tal que*

$$H = X(A)\setminus\overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus R))}.$$

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.1.1.12 y la propiedad (P1) de los espacios de Priestley (Sección 1.4.1). □

Corolario 3.1.1.14 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra. Entonces la intersección de dos $\theta LM_\theta-$congruencias principales de A es una $\theta LM_\theta-$congruencia principal de A.*

Dem. Sean ϑ_1 y ϑ_2 $\theta LM_\theta-$congruencias principales de A. Entonces, por el Corolario 3.1.1.13, existen dos subconjuntos abiertos, cerrados y convexos R_1 y R_2 de $X(A)$ tales que $\vartheta_1 = \Theta_{O\theta}(H_1)$ y $\vartheta_2 = \Theta_{O\theta}(H_2)$, donde $H_1 = X(A)\setminus\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A)\setminus R_1))}$ y

$H_2 = X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus R_2))}$. Luego, del Teorema 3.1.1.2 inferimos que $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 = \Theta_{O\theta}(H_1 \cap H_2)$. Por otro parte, tenemos que

$$\begin{aligned} H_1 \cap H_2 &= X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{j\in I} f_j^{A^{-1}}(X(A) \setminus R_1)} \, \overline{\cup \bigcap_{k\in I} f_k^{A^{-1}}(X(A) \setminus R_2))} \\ &= X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{i\in I}(f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus R_1) \cup f_i^{A^{-1}}(X(A)} \, \overline{\setminus R_2)))} \\ &= X(A) \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(\bigcap_{i\in I}(f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus (R_1 \cap R_2)))}. \end{aligned}$$

De estas igualdades y teniendo en cuenta que $R_1 \cap R_2$ es un subconjunto abierto, cerrado y convexo de $X(A)$, concluimos, por el Corolario 3.1.1.13, que $\vartheta_1 \cap \vartheta_2$ es una $\theta LM_\theta-$congruencia principal de A. □

En lo que sigue, determinamos condiciones suficientes para que la intersección de dos $LM_\theta-$congruencias principales de una $LM_\theta-$álgebra no sea una $LM_\theta-$congruencia principal, en el caso particular de que el $l_\theta P-$espacio asociado al álgebra sea la suma cardinal de un conjunto arbitrario pero no finito de segmentos, o equivalentemente, teniendo en cuenta el Corolario 2.1.5.6 y el Teorema 2.1.10.1, cuando el álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de un conjunto arbitrario pero no finito de subálgebras de la $LM_\theta-$álgebra ${L_2}^{[I]}$.

Proposición 3.1.1.15 *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A. Si φ_1 y φ_2 son $LM_\theta-$congruencias principales de A y $G_1, G_2 \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ son tales que $\Theta_{OS}(G_1) = \varphi_1$, $\Theta_{OS}(G_2) = \varphi_2$, donde $G_1 = R_1 \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)$ y $G_2 = R_2 \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)$, con R_1 y R_2 subconjuntos abiertos, cerrados y convexos de $X(A)$ que satisfacen que $(R_1 \setminus R_2 \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)$ es un subconjunto denso propio en $R_1 \setminus R_2 \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)$, entonces $\varphi_1 \cap \varphi_2$ no es una $LM_\theta-$congruencia principal.*

Dem. En virtud del Teorema 3.1.1.2 tenemos que (1) $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \Theta_{OS}(G_1 \cap G_2)$. Además, de la hipótesis inferimos que $G_1 \cap G_2$ está particionado en conjuntos mutuamente disjuntos como sigue (2) $G_1 \cap G_2 = (R_1 \cap R_2) \cup (((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)) \cup (((R_2 \setminus R_1) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cup (\bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2))$. Supongamos ahora que $\varphi_1 \cap \varphi_2$ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A. Entonces, por (1) y el Corolario 3.1.1.13, existe un subconjunto abierto, cerrado y convexo R

de $X(A)$ tal que (3) $G_1 \cap G_2 = R \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R)$. De (2) y (3) resulta que $((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2) \subseteq R \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R))$ y $((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R)) = \emptyset$, de lo que obtenemos $((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2) \subseteq R$. Por lo tanto, se verifica que (4) $((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2) \subseteq R \cap ((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1))$. De la hipótesis, el hecho de que $R \cap ((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1))$ es un subconjunto cerrado de $(R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)$ y (4), concluimos que $R \cap ((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) = (R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)$ y por lo consiguiente (5) $(R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1) \subseteq R$. Además, como por hipótesis $(R_1 \setminus R_2 \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)$ es un subconjunto propio de $R_1 \setminus R_2 \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)$, entonces existe $x \in X(A)$ tal que (6) $x \in (R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1))$ y (7) $x \notin \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)$. Luego, (5) y (6) implican que $x \in R$ y así de (3) se sigue que (8) $x \in G_1 \cap G_2$. Por otra parte, de (6) inferimos que $x \notin R_1 \cap R_2$, $x \notin \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)$ y $x \notin ((R_2 \setminus R_1) \setminus \bigcup_{i\in I} {f^A}_i^{-1}(R_2)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)$. Además, por (7) tenemos que $x \notin ((R_1 \setminus R_2) \setminus \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_1)) \cap \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R_2)$. Estas cuatro últimas afirmaciones y (2) nos permiten concluir que $x \notin G_1 \cap G_2$, lo que contradice (8). $\square$

3.1.2. LM_n-congruencias principales

En esta sección caracterizamos las congruencias principales de las LM_n-álgebras. Es bien conocido que toda LM_n-congruencia de una LM_n-álgebra es una θLM_n-congruencia. En primer lugar obtenemos una nueva caracterización de las LM_n-congruencias.

Teorema 3.1.2.1 *Sean A una LM_n-álgebra y $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ el l_nP-espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{O}_M(X(A))$, de los subconjuntos abiertos y modales de $X(A)$, es isomorfo al retículo $Con_{LM_n}(A)$ de las LM_n-congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_{OM} definida por la misma prescripción que en el* Teorema 3.1.1.2.

Dem. Es consecuencia del Teorema 1.4.1.2, Corolario 2.1.4.13 y el Lema 2.1.4.2, teniendo en cuenta que existe una correspondencia biunívoca entre los cerrados y abiertos de un espacio topológico y que $\Theta_{OM}(G) = \Theta_M(X(A) \setminus G)$. También se puede considerar como una consecuencia del Lema 2.1.4.2, la Proposición 2.1.4.11 y el Teorema 3.1.1.2. □

La demostración del siguiente corolario es análoga a la del Corolario 3.1.1.3 teniendo en cuenta el Teorema 3.1.2.1.

Corolario 3.1.2.2 *Sean A una LM_n−álgebra y $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su l_nP−espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$, $a \leq b$:*

(i) $\Theta(a, b) = \Theta_{OM}(G)$ *y* $G \in \mathcal{O}_M(X(A))$,

(ii) *G es el menor elemento de $\mathcal{O}_M(X(A))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.*

Proposición 3.1.2.3 *Sean $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ una LM_n−álgebra y $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ el l_nP−espacio asociado a A. Entonces para cada $Y \subseteq X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un subconjunto modal, abierto y cerrado de $X(A)$,*

(ii) *existen $a \in A$, i, $1 \leq i \leq n-1$, tales que $Y = \sigma_A(\phi_i a)$,*

(iii) *existen $a \in A$, i, $1 \leq i \leq n-1$, tales que $Y = \sigma_A(\overline{\phi}_i a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es claro que de la hipótesis (i) y la Proposición 2.1.4.9, $Y \in D(X(A))$. Por consiguiente, existe $a \in A$ tal que (1) $Y = \sigma_A(a)$. Además, de la hipótesis (i) y el Lema 2.1.2.8, obtenemos que para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, $Y = {f_i^A}^{-1}(Y) = {\phi_i}^{D(X(A))} Y$. Teniendo en cuenta que σ_A es un LM_n−isomorfismo, de la última afirmación y (1), concluimos que $Y = \sigma_A(\phi_i a)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis se sigue que $Y \in D(X(A))$. Además, por la propiedad (L3) de las LM_θ−álgebras (Sección 1.2), $\phi_j \phi_i a = \phi_i a$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, y como σ_A es un LM_n−isomorfismo, entonces $\sigma_A(\phi_i a) = \phi_j^{D(X(A))}(\sigma_A(\phi_i a))$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$. Luego, del Lema 2.1.2.8, resulta que $\sigma_A(\phi_i a) = {f_j^A}^{-1}(\sigma_A(\phi_i a))$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, lo que completa la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por la propiedad (L8) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2) se verifica que $\sigma_A(\phi_i a) = \sigma_A(\overline{\phi}_j \overline{\phi}_i a)$ para todo $a \in A$ y para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Por la propiedad (L8), $\sigma_A(\overline{\phi}_i a) = \sigma_A(\phi_j \overline{\phi}_i a)$ para todo $a \in A$ y para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$. □

Corolario 3.1.2.4 *Sea $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ una LM_n-álgebra. Entonces para todo $a \in A$ y para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, $\Theta_{OM}(\sigma_A(\phi_i(a))) = \Theta_M(\sigma_A(\overline{\phi}_i a)) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \overline{\phi}_i a)$.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 1.4.1.4, el Corolario 2.1.4.13, el Teorema 3.1.2.1 y la Proposición 3.1.2.3 y el hecho de que $\sigma_A(\overline{\phi}_i(a)) = X(A) \setminus \sigma_A(\phi_i(a))$, donde esta última igualdad se obtiene de la propiedad (L2) de las LM_n-álgebras y de que la restricción de σ_A a $C(A)$ es un isomorfismo booleano. □

Proposición 3.1.2.5 *Sean $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1})$ una LM_n-álgebra, su l_nP-espacio asociado $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ y $\mathcal{CO}_M(X(A))$ el retículo de los subconjuntos modales, abiertos y cerrados de $X(A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$, $a \leq b$:*

(i) $\Theta(a, b) = \Theta_{OM}(G)$ *y* $G \in \mathcal{O}_M(X(A))$,

(ii) $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$,

(iii) $G = \sigma_A\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)\right)$,

(iv) $G \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ *y* $\Theta_{OM}(G) = \mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\overline{\phi}_i b \vee \phi_i a)\right)$.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): De (l_nP8) inferimos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. Además, por (lP2) y (lP5) y el Teorema 2.1.1.16, tenemos que $\bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \in \mathcal{O}_M(X(A))$. Por otro lado, si $H \in \mathcal{O}_M(X(A))$ y $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$, como H es un subconjunto modal de $X(A)$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$. Por lo tanto, del Corolario 3.1.2.2, concluimos que $\Theta_{OM}(G) = \Theta(a, b)$ si, y solo si, $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Teniendo en cuenta los Lemas 2.1.2.8 y 2.1.2.9 obtenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) = \bigcup_{i=1}^{n-1}(f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b)) \cap (X(A) \setminus f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(a)))$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n-1} (\phi_i^{X(A)}\, \sigma_A(b) \cap \overline{\phi}_i^{X(A)}\, \sigma_A(a)) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\sigma_A(\phi_i b) \cap \sigma_A(\overline{\phi}_i a)) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$$

$= \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$, con lo cual la demostración está completa.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): De la hipótesis (iii), la Proposición 3.1.2.3 y el Lema 2.1.4.2 inferimos que $G \in \mathcal{CO}_M(X(A))$. Además, por las propiedades (L1), (L2) y (L8) de las $LM_\theta-$álgebras obtenemos que $\bigvee_{i=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a) = \phi_j(\bigvee_{i=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$ y $\bigwedge_{i=1}^{n-1} (\overline{\phi}_i b \vee \phi_i a) = \overline{\phi}_j(\bigvee_{i=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$. Estas dos igualdades y el Corolario 3.1.2.4 nos permiten afirmar que $\Theta_{OM}(G) = \mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\overline{\phi}_i b \vee \phi_i a)\right)$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Del Corolario 3.1.2.4 y la hipótesis (iv) se sigue que $\mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\overline{\phi}_i b \vee \phi_i a)\right) = \Theta_{OM}(\sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))) = \Theta_{OM}(G)$ y así, por el Teorema 3.1.2.1, concluimos que $G = \sigma_A(\bigvee_{i=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$. □

Proposición 3.1.2.6 *Sean A una LM_n-álgebra y $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su l_nP-espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *ϑ es una $LM_\theta-$congruencia principal,*

(ii) *$\vartheta = \Theta_{OM}(G)$, donde $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(R)$ y R es un subconjunto abierto, cerrado y convexo de $X(A)$,*

(iii) *$\vartheta = \Theta_{OM}(G)$, donde G es un subconjunto modal, abierto y cerrado de $X(A)$.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.2.5, la propiedad (P1) de los espacios de Priestley (Sección 1.4.1) y el hecho de que σ_A es un isomorfismo de orden.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis y las propiedades (lP2) y (lP5) de un l_nP-espacio y el Teorema 2.1.1.16, obtenemos que G es un subconjunto abierto, cerrado y modal de $X(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Por la Proposición 2.1.4.9 tenemos que G es la suma cardinal de un conjunto de cadenas maximales de $X(A)$ y por lo tanto, G es convexo. Como por hipótesis

G es modal, entonces $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(G)$, y por ser G también un subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$, entonces tomando $R = G$ concluimos la demostración. □

Ahora estamos en condiciones de caracterizar las LM_n-congruencias principales de una LM_n-álgebra.

Teorema 3.1.2.7 *Sean A una LM_n-álgebra y $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su l_nP-espacio asociado. Entonces, el retículo $\mathcal{CO}_M(X(A))$ de todos los subconjuntos modales, abiertos y cerrados de $X(A)$ es isomorfo al retículo $Con_{pLM_n}(A)$ de todas las LM_n-congruencias principales de A, y el isomorfismo es la restricción a $\mathcal{CO}_M(X(A))$ de la función Θ_{OM}, definida en el* Teorema 3.1.2.1.

Dem. Es consecuencia del Teorema 3.1.2.1 y la Proposición 3.1.2.6. □

Corolario 3.1.2.8 *La intersección de dos LM_n-congruencias principales de una LM_n-álgebra A es una LM_n-congruencia principal de A.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.1.2.7. □

Corolario 3.1.2.9 *En una LM_n-álgebra A, toda LM_n-congruencia principal de A es una LM_n-congruencia booleana de A.*

Dem. Si ϑ es una LM_n-congruencia principal de A, entonces por el Teorema 3.1.2.7 existe un subconjunto abierto, cerrado y modal G de $X(A)$, tal que $\vartheta = \Theta_{OM}(G)$, y por el Lema 2.1.4.2, $X(A) \setminus G$ es un subconjunto modal. Además, como $X(A) \setminus G$ es un subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$, del Teorema 3.1.2.7 se sigue que $\varphi = \Theta_{OM}(G)$ es una LM_n-congruencia principal de A. Luego, del Teorema 3.1.2.7 inferimos que $\vartheta \wedge \varphi = \Theta_{OM}(\emptyset) = \{(a, a) : a \in A\}$ y $\vartheta \vee \varphi = \Theta_{OM}(X(A)) = A \times A$, consecuentemente ϑ es una LM_n-congruencia booleana de A. □

Corolario 3.1.2.10 *En una LM_n-álgebra A, el retículo $Con_{pLM_n}(A)$ de las LM_n-congruencias principales de A es un álgebra de Boole.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 3.1.2.7 y por ser el retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados y modales de $X(A)$ un álgebra de Boole. □

3.2. Congruencias booleanas de las $LM_\theta-$ álgebras

En esta sección nuestra atención está focalizada en determinar las $LM_\theta-$congruencias y las $\theta LM_\theta-$congruencias booleanas de las $LM_\theta-$álgebras, mediante las dualidades topológicas establecidas en el Capítulo 2 para las LM_n-álgebras y las $LM_\theta-$álgebras.

3.2.1. $LM_\theta-$congruencias y $\theta LM_\theta-$congruencias booleanas

Para para alcanzar nuestro objetivo, comenzamos caracterizando los subconjuntos abiertos del $l_\theta P-$espacio asociado con una $LM_\theta-$álgebra que se corresponden, vía la dualidad, con las $LM_\theta-$congruencias booleanas y las $\theta LM_\theta-$congruencias booleanas, respectivamente.

Proposición 3.2.1.1 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para cada $Y \subseteq X(A)$ se verifican:*

(i) *$\Theta_{OS}(Y)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A si, y solo si, Y es un subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$ tal que Y y $X(A) \setminus Y$ son subconjuntos semimodales de $X(A)$, donde $\Theta_{OS}(Y)$ está definida como en el* Teorema 3.1.1.2.

(ii) *$\Theta_{O\theta}(Y)$ es una $\theta LM_\theta-$congruencia booleana de A si, y solo si, Y es un subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$ tal que Y y $X(A) \setminus Y$ son $\theta-$subconjuntos de $X(A)$, donde $\Theta_{O\theta}(Y)$ está definida como en el* Teorema 3.1.1.2.

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.1.1.2. □

Proposición 3.2.1.2 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto semimodal, abierto y cerrado de X, entonces $X \setminus Y$ es semimodal.*

Dem. Supongamos que (1) $x \in X \setminus Y$ y (2) $f_{i_0}(x) \in Y$ para algún $i_0 \in I$. Como Y es un subconjunto semimodal, inferimos por (lP5) que (3) $(X \setminus Y) \cap \bigcup_{i\in I} f_i(Y) = \emptyset$. Teniendo en cuenta que Y es cerrado, de (1) se sigue que $X \setminus Y$ es un entorno abierto de x. Luego, por (3) tenemos que $x \notin \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. De esta última afirmación y la propiedad (lP6) concluimos que $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(X \setminus Y)}$, de donde se sigue que existe una red

$(f_{i_d}(x_d))_{d\in D} \subseteq X \setminus Y$ tal que (4) $f_{i_d}(x_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} x$. Por lo tanto, existe un $d_0 \in D$ tal que $\{f_{i_d}(x_d) : d_0 \prec d,\, d \in D\} \subseteq X \setminus Y$, y como Y es un subconjunto semimodal, entonces de (lP5) resulta que $\{f_i(x_d) : d_0 \prec d,\, d \in D,\, i \in I\} \subseteq X \setminus Y$. Por otro lado, de (4), (lP2), (lP5) y el Teorema 2.1.1.14, obtenemos que $f_i(x_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} f_i(x)$ para todo $i \in I$, y por ser $X \setminus Y$ un subconjunto cerrado de X, concluimos que $f_i(x) \in X \setminus Y$ para todo $i \in I$, lo que contradice (2). □

Corolario 3.2.1.3 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para cada $Y \subseteq X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_S(Y)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *Y es un subconjunto abierto, cerrado y semimodal de $X(A)$,*

(iii) *$\Theta_{OS}(Y)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A.*

Dem. Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 3.2.1.1 y 3.2.1.2. □

Proposición 3.2.1.4 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto de X abierto y cerrado, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un $\theta-$subconjunto,*

(ii) *Y es semimodal,*

(iii) *Y es modal.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Se obtiene de la definición de $\theta-$subconjunto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por (lP11), $Y \subseteq \bigcup\limits_{y\in Y} (\uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I})$. Por otra parte, si $z \in \uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I}$ para algún $y \in Y$, luego de (lP3) y (lP5) obtenemos que $f_i(z) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. Además, de la hipótesis inferimos que $f_i(z) \in Y$ para todo $i \in I$, entonces la Proposición 3.2.1.2 nos permite asegurar que $z \in Y$. Por lo tanto,

$Y = \bigcup_{y \in Y} (\uparrow \{f_i(y)\}_{i\in I} \cup \downarrow \{f_i(y)\}_{i\in I})$ y así de la Proposición 2.1.4.6, concluimos que Y es modal.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Se sigue inmediatamente que Y es semimodal. Además, como Y es un subconjunto cerrado y abierto de $X(A)$, de la Proposición 3.2.1.2 obtenemos que $X \setminus Y$ es semimodal, lo que implica que (1) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \subseteq Y$ y (2) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(X \setminus Y)} \subseteq X \setminus Y$. Por otra parte, por (lP6) se verifica que (3) $X = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \cup \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(X \setminus Y)}$. Luego, de (2) y (3) inferimos que $Y \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ y así, por (1) concluimos que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$. □

Corolario 3.2.1.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces todo θ-subconjunto abierto y cerrado Y de X verifica las siguientes condiciones:*

(i) *$X \setminus Y$ es un θ-subconjunto de X,*

(ii) *Y y $X \setminus Y$ son subconjuntos convexos de X.*

Dem.

(i): Resulta del Lema 2.1.4.2 y la Proposición 3.2.1.4.

(ii): Es consecuencia directa del el Corolario 2.1.4.7, la Proposición 3.2.1.4 y el inciso (i) del Corolario 3.2.1.5. □

Corolario 3.2.1.6 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para cada $Y \subseteq X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_\theta(Y)$ es una $\theta LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *Y es un $\theta-$subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$,*

(iii) *$\Theta_{O\theta}(Y)$ es una $\theta LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

donde $\Theta_\theta(Y)$ y $\Theta_{O\theta}(Y)$ están definidas como en el Teorema 2.1.4.18 *y el* Teorema 3.1.1.2, *respectivamente.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.2.1.1 y el Corolario 3.2.1.5. $\square$

Como nuestro interés es estudiar las $LM_\theta-$congruencias booleanas y las $\theta LM_\theta-$congruencias booleanas de una $LM_\theta-$álgebra, entonces en virtud de los Corolarios 3.2.1.3 y 3.2.1.6 y la Proposición 3.2.1.4 nuestro próximo objetivo consiste en caracterizar los subconjuntos modales, abiertos y cerrados del $l_\theta P-$espacio asociado a dicha álgebra.

Proposición 3.2.1.7 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra, $C(A) = \{\phi_i(a) : a \in A,\ i \in I\}$ y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ el $l_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces para cada subconjunto Y de $X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un subconjunto modal, abierto y cerrado,*

(ii) *existe $b \in C(A)$ tal que $Y = \sigma_A(b)$,*

(ii) *existen $a \in A$ e $i \in I$ tales que $Y = \sigma_A(\phi_i a)$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) y el Lema 2.1.4.6 , $Y \in D(X(A))$ y por consiguiente, existe $a \in A$ tal que (1) $Y = \sigma_A(a)$. Teniendo en cuenta que $Y = f_i^{A^{-1}}(Y)$ para todo $i \in I$ y que por el Lema 2.1.2.9, $f_i^{A^{-1}}(Y) = {\phi_i}^{D(X(A))}Y$, entonces de (1) y el hecho de que σ_A un $LM_\theta-$isomorfismo, concluimos que $Y = \sigma_A(\phi_i a)$ para todo $i \in I$ y así, por (1) tenemos que $a = \phi_i(a)$ para todo $i \in I$. Esta afirmación y la propiedad (L7) de las LM$_\theta-$álgebras (Sección 1.2) implican que $a \in C(A)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis se sigue que $Y \in D(X(A))$. Además, por el Lema 2.1.2.9, para todo $i \in I$, $\sigma_A(\phi_i b) = \phi_i^{D(X(A))}(\sigma_A(b))$, de lo que resulta, por el Lema 2.1.2.9, que para todo $i \in I$, $\sigma_A(\phi_i b) = f_i^{A^{-1}}(Y)$. Como $b \in C(A)$, entonces por la propiedad (L7) tenemos que $\phi_i b = b$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $f_i^{A^{-1}}(Y) = Y$ para todo $i \in I$, lo que completa la demostración.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iii): Se sigue de la propiedad (L7) de las $LM_\theta-$álgebras. $\square$

Toda vez que $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ sea un $l_\theta P-$espacio, denotamos por $\mathcal{CO}_M(X)$ al retículo booleano de todos los subconjuntos abiertos, cerrados y modales de X.

Corolario 3.2.1.8 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces, las álgebras booleanas* $\mathcal{CO}_M(X(A))$ *y* $C(A)$ *son isomorfas.*

Dem. Por la Proposición 3.2.1.7 podemos asegurar que la restricción de σ_A a $C(A)$ es un isomorfismo booleano de $C(A)$ en $\mathcal{CO}_M(X(A))$. □

Los resultados anteriores nos permiten obtener la descripción de las congruencias booleanas que estábamos buscando.

Teorema 3.2.1.9 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces, el retículo* $\mathcal{CO}_M(X(A))$ *es isomorfo al retículo (dual del retículo)* $Con_{bLM_\theta}(A)$ *de las* $LM_\theta-$*congruencias booleanas de* A*, donde el isomorfismo* Θ_{OM} (Θ_M) *es la retricción de* Θ_{OS} (Θ_S) *a* $\mathcal{CO}_M(X(A))$*, y estas funciones están definidas como en el* Teorema 3.1.2.1 *y el* Teorema 2.1.2.14*, respectivamente.*

Dem. Si Y es un subconjunto abierto, cerrado y modal de $X(A)$, entonces por el Corolario 3.2.1.3 y la Proposición 3.2.1.4, tenemos que $\Theta_M(Y)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A. Recíprocamente, sea $\varphi \in Con_{bLM_\theta}(A)$. Entonces, por el Corolario 3.2.1.3 y la Proposición 3.2.1.4, inferimos que existe un subconjunto modal, abierto y cerrado Y de $X(A)$ tal que $\varphi = \Theta_{OS}(Y) = \Theta_{OM}(Y)$ y así, por el Teorema 3.1.1.2, concluimos la demostración.

Por otro lado, teniendo en cuenta que se verifica que $Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ si, y solo si, $X(A) \setminus Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ y $\Theta_M(Y) = \Theta_{OM}(X(A) \setminus Y)$, inferimos que Θ_M establece un isomorfismo entre $\mathcal{CO}_M(X(A))$ y el dual de $Con_{bLM_\theta}(A)$. □

Corolario 3.2.1.10 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Si* φ *es una* $LM_\theta-$*congruencia de* A*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* $LM_\theta-$*congruencia booleana,*

(ii) φ *es una* $\theta LM_\theta-$*congruencia booleana.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia directa de la Proposición 3.2.1.4, el Corolario 3.2.1.6 y el Teorema 3.2.1.9.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se sigue inmediatamente. □

Corolario 3.2.1.11 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra. Entonces, toda $LM_\theta-$congruencia booleana de A es una $LM_\theta-$congruencia principal y una $\theta LM_\theta-$congruencia principal.*

Dem. Sea φ una $LM_\theta-$congruencia booleana de A. Entonces, por el Teorema 3.2.1.9, existe un $G \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ tal que $\varphi = \Theta_{OM}(G)$. Además, teniendo en cuenta el Lema 2.1.4.2 y la Proposición 3.2.1.4 resulta que $\mathcal{CO}_M(X(A)) \subseteq \mathcal{O}_{CS}(X(A))$. Por lo tanto, $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ y así, (1) $\Theta_{OM}(G) = \Theta_{OS}(G) = \varphi$. Como G es modal, entonces (2) $G = \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(G) = G \cup \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(G)$, y por el Corolario 2.1.4.7 inferimos que G es convexo. De esta última afirmación, (1), (2) y el Corolario 3.1.1.6 concluimos que φ es una $LM_\theta-$ congruencia principal de A.

Por otro lado, por el Lema 2.1.4.2 y la Proposición 3.2.1.4 tenemos que $\mathcal{CO}_M(X(A)) \subseteq \mathcal{O}_{C\theta}(X(A))$, de lo cual resulta que $\Theta_{OM}(G) = \Theta_{O\theta}(G) = \varphi$. Por consiguiente, de la Proposición 3.2.1.4 se sigue que G es un $\theta-$subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$ y así, del Corolario 3.2.1.5 inferimos que $X(A) \setminus G$ es un $\theta-$subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$. Esta declaración significa que $X(A) \setminus G = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(X(A) \setminus G)}$. Además, como $X(A) \setminus G$ es modal, entonces $X(A) \setminus G = \bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus G)$. Estas últimas afirmaciones implican que $G = X(A) \setminus \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(X(A) \setminus G))}$ y como G es convexo, el Corolario 3.1.1.13 nos permite concluir que φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia principal de A. □

Corolario 3.2.1.12 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra. Entonces, las álgebras booleanas $C(A)$ y $Con_{bLM_\theta}(A)$ son isomorfas y por lo tanto, $|Con_{bLM_\theta}(A)| = |C(A)|$.*

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 3.2.1.8 y el Teorema 3.2.1.9. □

Corolario 3.2.1.13 *Sean A una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces, las $LM_\theta-$congruencias booleanas de A son conmutativas.*

Dem. Sean φ_1, $\varphi_2 \in Con_{bLM_\theta}(A)$. Entonces, por el Teorema 3.2.1.9 existen dos subconjuntos abiertos, cerrados y modales Y_1, Y_2 de $X(A)$ tales que $\theta_S(Y_1) = \varphi_1$ y $\theta_S(Y_2) = \varphi_2$.

Supongamos que $(x, y) \in \varphi_2 \circ \varphi_1$. Por consiguiente, existe $z \in A$ tal que $(x, z) \in \varphi_1$ and $(z, y) \in \varphi_2$ y así, por el Teorema 3.2.1.9 tenemos que $\sigma_A(x) \cap Y_1 = \sigma_A(z) \cap Y_1$ y $\sigma_A(y) \cap Y_2 = \sigma_A(z) \cap Y_2$. Estos declaraciones implican que $\sigma_A(x) \cap (Y_1 \cap Y_2) = \sigma_A(y) \cap (Y_1 \cap Y_2)$. Por otra parte, como $Y_1, Y_2 \in \mathcal{CO}_M(X(A))$, de las Proposiciones 2.1.4.6 y 3.2.1.7 inferimos que $(\sigma_A(x) \cap (Y_1 \cap Y_2)) \cup (\sigma_A(x) \cap (Y_2 \setminus Y_1)) \cup (\sigma_A(y) \cap (Y_1 \setminus Y_2)) \in D(X(A))$ y así, $w = \sigma_A^{-1}((\sigma_A(x) \cap (Y_1 \cap Y_2)) \cup (\sigma_A(x) \cap (Y_2 \setminus Y_1)) \cup (\sigma_A(y) \cap (Y_1 \setminus Y_2))) \in A$. Además, tenemos que $\sigma_A(x) \cap Y_2 = \sigma_A(w) \cap Y_2$ y $\sigma_A(w) \cap Y_1 = \sigma_A(y) \cap Y_1$, por lo tanto $(x, w) \in \varphi_2$ y $(w, y) \in \varphi_1$. Las dos últimas afirmaciones implican que $(x, y) \in \varphi_1 \circ \varphi_2$, de lo que concluimos que $\varphi_2 \circ \varphi_1 \subseteq \varphi_1 \circ \varphi_2$. La otra inclusión se obtiene de manera similar. $\square$

3.2.2. Otra caracterización de las $LM_\theta-$congruencias booleanas

A continuación obtenemos una nueva caracterización de las $LM_\theta-$congruencias booleanas, la cual nos resulta útil para determinar algunas propiedades propiedades de las mismas.

Proposición 3.2.2.1 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para una $LM_\theta-$congruencia φ de A:*

(i) *φ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existen $a \in A$, $i \in I$ tales que $\varphi = \mathbf{\Theta}\,(\uparrow \phi_i a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y el Teorema 3.2.1.9 inferimos que existe $Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ tal que $\varphi = \Theta_M(Y)$. Además, por la Proposición 3.2.1.7 y (L7) (Sección 1.2), existe $a \in A$ tal que $Y = \sigma_A(\phi_i(a))$ para algún $i \in I$. Teniendo en cuenta el Teorema 3.2.1.9 y la Proposición 1.4.1.4 se sigue que $\Theta_M(\sigma_A(\phi_i(a))) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i(a))$, de donde concluimos que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i(a))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por la Proposición 1.4.1.4 tenemos que $\mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i a) = \Theta(\sigma_A(\phi_i(a))$ para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$. Por ota parte, de la Proposición 3.2.1.7 resulta que $\sigma_A(\phi_i(a))$ es un subconjunto modal, abierto y cerrado de $X(A)$ y por lo tanto, por el Teorema 3.2.1.9,

$\Theta_M(\sigma_A(\phi_i(a)) = \Theta(\sigma_A(\phi_i(a))$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A, lo que completa la demostración. □

Corolario 3.2.2.2 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra. Entonces las* $LM_\theta-$*congruencias booleanas de* A *son regulares y uniformes.*

Dem. Sea φ una $LM_\theta-$congruencia booleana de A. Entonces, por la Proposición 3.2.2.1, existen $a \in A$ e $i \in I$ tales que $\varphi = \Theta(\uparrow \phi_i a)$. Además, para cada $b \in A$ tenemos que $[b]_\varphi = \{(b \wedge \phi_i a) \vee c : \ c \in \downarrow \overline{\phi}_i a\}$, donde $[b]_\varphi$ es la clase de equivalencia de b módulo φ. De esta última afirmación inferimos que $[0]_\varphi = \downarrow \overline{\phi}_i a$ y por lo tanto, para todo $b \in A$ se verifica que $[b]_\varphi = \{(b \wedge \phi_i a) \vee c : \ c \in \overline{0}_\varphi\}$ y $|[b]_\varphi| = |[0]_\varphi|$, lo que nos permite concluir la demostración. □

En lo que sigue obtenemos condiciones necesarias y suficentes para que una $LM_\theta-$congruencia principal de una $LM_\theta-$álgebra sea booleana, las cuales son también condiciones suficientes para que la interesección de dos $LM_\theta-$congruencias principales sea una $LM_\theta-$congruencia principal.

Proposición 3.2.2.3 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), \{f^A{}_i\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para todo* $a, b \in A$ *tales que* $a \leq b$*:*

(i) $\Theta(a, b)$ *es una* $LM_\theta-$*congruencia booleana,*

(ii) $\bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ *es un subconjunto cerrado de* $X(A)$*,*

(iii) $\bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$ *es un subconjunto cerrado de* $X(A)$*.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Proposición 3.1.1.5 tenemos que $\Theta(a, b) = \Theta_{OS}(G)$, donde $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$, y teniendo en cuenta el Teorema 3.2.1.9 inferimos que G es un subconjunto abierto, cerrado y modal de $X(A)$. Esta última afirmación nos permite concluir que $G = \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ y así, la demostración está completa.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea (1) $G = \bigcup\limits_{i \in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. Entonces, de la hipótesis (ii), (lP2), (lP5) y el Teorema 2.1.1.16, tenemos que (2) $G \in \mathcal{CO}_M(X(A))$, y en consecuencia, del Teorema 3.2.1.9, resulta que $\Theta_{OM}(G)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A. Por otro lado, de (2), el Lema 2.1.4.2 y la Proposición 3.2.1.4, se sigue que $G \in \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ y así, (3) $\Theta_{OM}(G) = \Theta_{OS}(G)$. Además, $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. En efecto, supongamos que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \setminus G \neq \emptyset$. Como G es un subconjunto cerrado de $X(A)$, por (lP6) tenemos que $((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \setminus G) \cap \bigcup\limits_{i \in I} f_i^A(X(A)) \neq \emptyset$, lo que nos permite afirmar que existen (4) $x \in (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \setminus G$, $y \in X(A)$ tales que $x = f_{i_0}(y)$ para algún $i_0 \in I$. Entonces, por (lP5), $x = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$. Este enunciado, (1) y (4) implican que $x \in G$, lo que contradice (4). Por otra parte, se sigue inmediatamente que G es el menor elemento de $\mathcal{O}_{CS}(X(A))$, ordenado por la relación inclusión, tal que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. Luego, del Corolario 3.1.1.3 y (3), concluimos que $\Theta(a, b) = \Theta_{OM}(G)$ y por lo tanto, $\Theta(a, b)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia directa del hecho de que σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo. $\square$

Corolario 3.2.2.4 *Sea A una $LM_\theta-$álgebra tal que A es $|I|$-completa (completa) y todo filtro primo de A es un $|I|$-filtro (filtro completo), o que el álgebra booleana $C(A)$ es $|I|$-completa (completa) y todo filtro primo de $C(A)$ es un $|I|$-filtro (filtro completo). Entonces toda $LM_\theta-$congruencia principal de A es una $LM_\theta-$congruencia booleana.*

Dem.: Si φ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A, entonces existen $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y $\varphi = \Theta(a, b)$. Por el Corolario 3.1.1.11 tenemos que $\bigcup\limits_{i \in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$, de lo que concluimos, por la Proposición 3.2.2.3, que $\Theta(a, b)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana. $\square$

Lema 3.2.2.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si $R \subseteq X$ es tal que $R \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} {f_i}^{-1}(R)$, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} {f_i}^{-1}(R) = \downarrow R \cup \uparrow R$.*

Dem. Supongamos que $f_i(x) \in R$ para algún $i \in I$. Por consiguiente, por (lP11) tenemos que $x \in \downarrow R$ o $x \in \uparrow R$. Recíprocamente, sea $x \in \downarrow R \cup \uparrow R$. Entonces, existe $y \in R$ tal que $x \leq y$ o $y \leq x$, y así, por (lP4), inferimos que $f_i(x) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. Esta afirmación y el hecho de que por la hipótesis, $f_{i_0}(y) \in R$ para algún $i_0 \in I$, nos permite concluir que $x \in \bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R)$. $\square$

Lema 3.2.2.6 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio y R un subconjunto abierto y cerrado de X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R)$,

(ii) $\bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R)$ *es cerrado.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y el Lema 3.2.2.5 se sigue que $\bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R) = \downarrow R \cup \uparrow R$. Como R es un subconjunto cerrado de X, entonces por la propiedad (P3) de los espacios de Priestley (Sección 1.4.1) se verifica que $\downarrow R \cup \uparrow R$ es un subconjunto cerrado de X, lo que completa la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis y el hecho de que R es un subconjunto abierto de X inferimos que $R \setminus \bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R)$ es subconjunto abierto de X. Supongamos ahora que $R \setminus \bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R) \neq \emptyset$. Entonces, por la propiedad (lP6) existen $x \in X$ e $i_0 \in I$ tales que $f_{i_0}(x) \in R \setminus \bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R)$, y por la propiedad (lP5) concluimos que $f_{i_0}(x) \in R$ y $f_i(x) \notin R$ para todo $i \in I$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $R \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} {f_i}^{-1}(R)$. $\square$

Proposición 3.2.2.7 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Si φ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existe un subconjunto abierto, cerrado y convexo R de $X(A)$ tal que*

$$\varphi = \Theta_{OM}(G), \text{ donde } G = \bigcup_{i\in I} {f_i^A}^{-1}(R).$$

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): En virtud de la hipótesis y el Teorema 3.2.1.9 existe un subconjunto modal, abierto y cerrado G de $X(A)$ tal que $\varphi = \Theta_{OM}(G)$. Como G es modal, entonces $G = \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(G)$. Además, del Corolario 2.1.4.7, tenemos que G es convexo.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) y la propiedad (lP3) inferimos que el conjunto G es convexo. Además, por el Lema 3.2.2.6, G es cerrado. Por otra parte, como R es un subconjunto abierto de X, de la hipótesis (ii), la propiedad (lP2) y el Teorema 2.1.1.16, resulta que G es abierto en X. Entonces, del Teorema 3.2.1.9 concluimos que φ es una LM$_\theta-$congruencia booleana de A. □

Proposición 3.2.2.8 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para $a, b \in A$ tales que $a \leq b$:*

(i) $\Theta(a, b)$ *es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existen $n \in I\!N$, $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$ tales que* $\Theta(a, b) = \Theta_{OM}(\sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a)))$,

(iii) *existen $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$ tales que* $\Theta(a, b) = \mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge_{j=1}^{n}(\overline{\phi}_{i_j} b \vee \phi_{i_j} a)\right)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por la Proposición 3.1.1.5 se verifica que (1) $\Theta(a, b) = \Theta_{OS}(G)$, donde $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. De la hipótesis y la Proposición 3.2.2.3 inferimos que $\bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a))$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$. Luego, del Lema 3.2.2.6 se sigue que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ y por lo tanto se verifica que $G = \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. Para completar la demostración notemos que el conjunto $\{f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de G. Entonces, un simple argumento compacto muestra que existen $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$ para algún $n \in I\!N$ tales que $G = \bigcup_{j=1}^{n} f_{i_j}^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$, y como σ_A es un LM$_\theta-$isomorfismo, obtenemos que (2) $G = \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a))$. El hecho de que $\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a) \in C(A)$, la igualdad (2) y la Proposición 3.2.1.7 implican que G es un subconjunto abierto, cerrado y modal de $X(A)$, y teniendo en cuenta que $\mathcal{CO}_M(X(A)) \subseteq \mathcal{O}_{CS}(X(A))$, tenemos que (3) $\Theta_{OM}(G) = \Theta_{OS}(G)$. De (1), (2) y (3) concluimos que $\Theta(a, b) = \Theta_{OM}(\sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por la Proposición 3.2.1.7, $\sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)) \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ y como $\mathcal{CO}_M(X(A)) \subseteq \mathcal{O}_{CS}(X(A))$, entonces de los Teoremas 3.1.1.2 y 3.2.1.9 obtenemos que $\Theta_{OM}(\sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))) = \Theta_S(X(A) \setminus \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$. Además, como σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo, inferimos que $X(A) \setminus \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a)) = \sigma_A(\bigwedge_{j=1}^{n}(\overline{\phi}_{i_j} b \vee \phi_{i_j} a))$. Entonces, de la hipótesis, las dos últimas igualdades y (A13) (Proposición 1.4.1.4), concluimos que $\Theta(a,b) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \bigwedge_{j=1}^{n}(\overline{\phi}_{i_j} b \vee \phi_{i_j} a))$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Como $\bigwedge_{j=1}^{n}(\overline{\phi}_{i_j} b \vee \phi_{i_j} a) \in C(A)$, entonces de la hipótesis y la Proposición 3.2.2.1 concluimos que $\Theta(a,b)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A. □

Corolario 3.2.2.9 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para $a, b \in A$ tales que $a \leq b$:*

(i) $\Theta(a,b)$ *es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existen $n \in I\!N$, $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$ tales que para todo $P \in X(A)$, si $b \in P$ y $a \notin P$, entonces $\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a) \in P$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis, la Proposición 3.2.2.8 y el Teorema 3.2.1.9 inferimos que existen $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$ para algún $n \in I\!N$ tales que $\Theta_{OS}(\sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))) = \Theta(a,b)$. Por otra parte, de la Proposición 3.1.1.5 tenemos que la congruencia $\Theta(a,b) = \Theta_{OS}((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)))$, de lo que obtenemos, por el Teorema 3.1.1.2, que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) = \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$ y por lo tanto, $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a))$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de σ_A, la demostración está completa.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) y por ser σ_A un $LM_\theta-$isomorfismo inferimos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq \bigcup_{j=1}^{j=n} {f^A}_{i_j}^{-1}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$, de donde se sigue, por la propiedad (lP5), que $\bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) = \bigcup_{j=1}^{n} {f^A}_{i_j}^{-1}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ y por lo tanto se verifica que

$\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. Entonces, por el Lema 3.2.2.6, tenemos que $\bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$, de lo que concluimos, por la Proposición 3.2.2.3, que $\Theta(a,b)$ es una $LM_\theta-$congruencia booleana. □

Observación 3.2.2.10 Si un subconjunto Y de un $l_\theta P-$espacio X es abierto y modal, entonces del Lema 2.1.4.2 inferimos que Y es un subconjunto abierto cuyo complemento es semimodal. Por lo tanto el retículo $\mathcal{O}_M(X)$ de los subconjuntos abiertos y modales de X es un subretículo del retículo $\mathcal{O}_{CS}(X)$. Luego, por el Teorema 3.2.1.9, $\Theta_{OM}(Y) = \Theta_{OS}(Y)$ para todo $Y \in \mathcal{O}_M(X)$.

Proposición 3.2.2.11 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo subconjunto Y de $X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$Y \in \mathcal{O}_M(X(A))$ y $\Theta_{OS}(Y)$ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A,*

(ii) *$Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y el Corolario 3.1.1.6 inferimos que existe un subconjunto R de $X(A)$ abierto, cerrado y convexo tal que (1) $Y = R \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R)$. Como Y es modal, entonces de la última igualdad y (lP5) obtenemos que (2) $Y = \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R)$ y por consiguiente, de (1) y (2), resulta que $R \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R)$. De esta última afirmación, el Lema 3.2.2.6 y (2) concluimos que Y es cerrado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis, el Teorema 3.2.1.9 y la Observación 3.2.2.10 se sigue que $\Theta_{OS}(Y)$ es una LM$_\theta-$congruencia booleana de A y consecuentemente, por Corolario 3.2.1.11, $\Theta_{OS}(Y)$ es una LM$_\theta-$congruencia principal de A. □

Corolario 3.2.2.12 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $Y \in \mathcal{O}_M(X(A))$:*

(i) *$\Theta_{OM}(Y)$ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A,*

(ii) $\Theta_{OM}(Y)$ *es una* $LM_\theta-$*congruencia booleana de* A.

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.2.1.9 y la Proposición 3.2.2.11. □

3.2.3. LM_n-congruencias booleanas

Finalmente, completamos esta sección estableciendo una caracterización de las congruencias booleanas de las LM_n-álgebras.

Teorema 3.2.3.1 *Sean* A *una* LM_n-*álgebra y* $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ *el* l_nP-*espacio asociado a* A. *Entonces, el retículo* $\mathcal{CO}_M(X(A))$ *de los subconjuntos modales, abiertos y cerrados de* $X(A)$ *es isomorfo al retículo* $Con_{bLM_n}(A)$ *de las* LM_n-*congruencias booleanas de* A *y el isomorfismo es la función* Θ_{OM} *definida como en el* Teorema 3.2.1.9.

Dem. Es consecuencia del Lema 2.1.4.2 y el Teorema 3.1.2.1. También es consecuencia directa del Teorema 3.2.1.9. □

Corolario 3.2.3.2 *Sea* A *una* LM_n-*álgebra. Entonces las* LM_n-*congruencias booleanas y principales de* A *coinciden.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 3.1.2.7 y el Teorema 3.2.3.1. □

Corolario 3.2.3.3 *En toda* LM_n-*álgebra, la composición de* LM_n-*congruencias principales es conmutativa.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 3.2.1.13 y 3.2.3.2. □

Proposición 3.2.3.4 *Sean* A *una* LM_n-*álgebra y* $(X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ *su* l_nP-*espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $Con_{LM_n}(A) = Con_{bLM_n}(A)$, *o equivalentemente el retículo* $Con_{LM_n}(A)$ *es un álgebra de Boole,*

(ii) $\mathcal{C}_M(X(A)) = \mathcal{CO}_M(X(A))$, *o equivalentemente el retículo* $\mathcal{C}_M(X(A))$ *es un álgebra de Boole,*

(iii) $X(A)$ *es un conjunto finito,*

(iv) A *es un conjunto finito.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia directa de los Teoremas 3.1.2.1 y 3.2.3.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supongamos que $X(A)$ es un conjunto infinito, entonces por la Proposición 2.1.3.8, $X(A)$ es la suma cardinal de un conjunto infinito de cadenas maximales de a lo sumo $n-1$ elementos y por lo tanto, existe un subconjunto infinito numerable $\{x_n : n \in I\!N\} \subseteq X(A)$ tal que $C_{x_n} \cap C_{x_m} = \emptyset$ para todo $n, m \in I\!N$ tal que $n \neq m$, donde para cada $x \in X(A)$, $C_x = \{f_i^A(x) : 1 \leq i \leq n-1\}$ es la cadena maximal en $X(A)$ a la que x pertenece. Luego $(f_1^A(x_n))_{n \in I\!N}$ es una sucesión en $X(A)$ tal que (1) $f_1^A(x_n) \neq f_1^A(x_m)$ para todo $n, m \in I\!N$ tal que $n \neq m$. Teniendo en cuenta que $X(A)$ es compacto y además que $f_1^A(X(A))$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$, inferimos que existe $x \in X(A)$ tal que (2) $(f_1^A(x_n))_{n \in I\!N} \succ f_1^A(x)$. Esta última afirmación y (1) implican que $f_1^A(x) \neq f_1^A(x_n)$ para todo $n \in I\!N$, de lo que se sigue por (l_nP5) que (3) $\{f_1^A(x_n) : n \in I\!N\} \cap C_{f_1^A(x)} = \emptyset$. Por otra parte, como $C_{f_1^A(x)}$ es un subconjunto finito de $X(A)$ y $X(A)$ es un espacio de Hausdorff, entonces $C_{f_1^A(x)}$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$. Además, por el Corolario 2.1.4.10, $C_{f_1^A(x)}$ es un subconjunto modal de X y por lo tanto $C_{f_1^A(x)} \in \mathcal{C}_M(X(A))$, de lo que obtenemos de la hipótesis (ii) que $C_{f_1^A(x)} \in \mathcal{CO}_M(X(A))$. Luego, $C_{f_1^A(x)}$ es un entorno abierto de $f_1^A(x)$, entonces por (2) existe una subsucesión $(f_1^A(x_{n_k}))_{k \in I\!N}$ tal que $\{f_1^A(x_{n_k})\}_{k \in I\!N} \subseteq C_{f_1^A(x)}$, lo que contradice (3). Por lo tanto, $X(A)$ es finito.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Es trivial

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sea $X(A)$ un conjunto finito. Como el l_nP-espacio $X(A)$ es un espacio de Hausdorff, entonces la topología de Priestley para $X(A)$ es la topología discreta y por consiguiente, todo subconjunto de $X(A)$ es abierto y cerrado, de lo que concluimos que se verifica (ii). $\square$

3.3. Congruencias de las $LM_\theta-$álgebras que son producto de un número finito de cadenas

En esta sección estudiamos las $LM_\theta-$congruencias de una $LM_\theta-$álgebra cuyo $l_\theta P-$espacio asociado es la suma cardinal de un número finito de segmentos o equivalentemente si la $LM_\theta-$álgebra es un producto finito de $LM_\theta-$álgebras totalmente ordenadas. En lo que sigue con el objeto de facilitar la presentación de los resultados utilizamos la hipótesis adicional de que el conjunto I tiene primer y último elemento, pero es fácil de comprobar que esta hipótesis es superflua.

Proposición 3.3.1 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *un* $l_\theta P-$*espacio tal que* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n}[f_0(x_j), f_1(x_j)]$ *y* $[f_0(x_j), f_1(x_j)] \cap [f_0(x_{)}, f_1(x_j)] = \emptyset$, *para todo* k, j, $k \neq j$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$. *Entonces para todo* j, $1 \leq j \leq n$, $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$ *es un subconjunto abierto, cerrado y totalmente ordenado de* X.

Dem. De la hipótesis y la Proposición 2.1.4.8 inferimos que para todo j, $1 \leq j \leq n$, (1) $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$ es un subconjunto abierto y cerrado de X.

Supongamos que existen j, $1 \leq j \leq n$, z, $y \in [f_0(x_j), f_1(x_j)]$ tales que (2) $y \not\leq z$ y (3) $z \not\leq y$, entonces por (lP3) tenemos que (4) $f_i(z) = f_i(y) = f_i(x)$ para todo $i \in I$, de lo que se sigue de (2), (3) y (lP11) que $f_i(x) \neq y$ y $f_i(x) \neq z$ para todo $i \in I$ y así, de (2), (3), (4) y (lP11) resulta que (5) $f_i(x) < y$ si, y solo si, $f_i(x) < z$ para todo $i \in I$. Además se verifica que (6) $y < f_i(x)$ si, y solo si, $z < f_i(x)$ para todo $i \in I$. En efecto, si existe $i \in I$ tal que $f_i(x) < z$ y $f_i(x) \not< y$, entonces de (4) y (lP11) obtenemos que $y < f_i(x)$ y por consiguiente, $y < z$, lo que contradice (2), y por lo tanto vale (6). Además, de (2) y (3) podemos asegurar que existen U, $V \in D(X)$ tales que $y \in U$, $z \notin U$, $y \notin V$ y $z \in V$. Estas últimas afirmaciones y (1) implican que (7) $U \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)] \in D(X)$, (8) $V \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)] \in D(X)$ y (9) $U \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)] \neq V \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)]$. Por otra parte, de (5) y (6) tenemos que ${f_i}^{-1}(U \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)]) = {f_i}^{-1}(V \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)]) = [f_0(x_j), f_1(x_j)]$ para todo $i \in I$ tal que $y < f_i(x)$, y además que ${f_i}^{-1}(U \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)])= {f_i}^{-1}(V \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)]) = \emptyset$ para todo $i \in I$ tal que $f_i(x) < y$. Consecuentemente, ${f_i}^{-1}(U \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)]) = {f_i}^{-1}(V \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)])$ para todo $i \in I$, entonces de (7), (8) y la propiedad (lP7) de los $l_\theta P-$espacios (Proposición 2.1.2.3), inferimos que $U \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)] = V \cap [f_0(x_j), f_1(x_j)]$, lo que contradice (9). De esta manera concluimos que $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$ es un subconjunto totalmente ordenado de X para todo j, $1 \leq j \leq n$. □

Corolario 3.3.2 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si X es la suma cardinal de un número finito de segmentos $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$, $x_j \in X$, $1 \leq j \leq n$, entonces todo subconjunto modal de X es abierto y cerrado.*

Dem. Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.1.4.6 y 3.3.1. □

Observación 3.3.3 Teniendo en cuenta la Proposición 3.3.1 podemos decir que en esta sección consideramos las $LM_\theta-$álgebras cuyo $l_\theta P-$espacio asociado es la suma cardinal de un número finito de cadenas y por consiguiente por los Teoremas 2.1.8.1 y 2.1.10.1 y el Corolario 2.1.10.2, estas álgebras son las $LM_\theta-$álgebras isomorfas a un producto directo de un número finito de subálgebras de la $LM_\theta-$álgebra ${L_2}^{[I]}$ o de la LM_n-álgebra $L_n = \{\frac{j}{n-1} : 1 \leq j \leq n-1\}$ cuando θ es un entero n, $n \geq 2$.

Proposición 3.3.4 *Si un $l_\theta P-$espacio, $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es la suma cardinal de un número finito de segmentos $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$, $1 \leq j \leq n$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo subconjunto cerrado Y de X:*

(i) *Y es un $\theta-$subconjunto,*

(ii) *Y es semimodal,*

(iii) *Y es modal.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es inmediata.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Como Y es un subconjunto semimodal y cerrado, entonces $\overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}} \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. Además, por ser X la suma cardinal de un número finito de segmentos, de las Proposiciones 2.1.4.8 y 3.3.1 y (lP6) inferimos que $\overline{\{f_i(y)\}_{i\in I}} = [f_0(y), f_1(y)]$ para todo $y \in Y$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{y\in Y} [f_0(y), f_1(y)] \subseteq Y$. Por otro lado, por la propiedad (lP13) de los $l_\theta P-$espacios (Proposición 2.1.3.5) tenemos que $Y \subseteq \bigcup_{y\in Y}[f_0(y), f_1(y)]$, y de la Proposición 2.1.4.6, concluimos que Y es modal.

(iii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (iii) y el Corolario 3.3.2 se sigue que Y es un subconjunto modal, abierto y cerrado de X, entonces por la Proposición 3.2.1.4, Y es un $\theta-$subconjunto. $\square$

Corolario 3.3.5 *Si un $l_\theta P-$espacio $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es la suma cardinal de un número finito de segmentos $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$, $1 \leq j \leq n$, entonces todo subconjunto semimodal ($\theta-$subconjunto) cerrado de X es un subconjunto abierto de X. Además, se verifica que todo subconjunto abierto de X tal que su complemento es un subconjunto semimodal ($\theta-$subconjunto) de X es un subconjunto cerrado de X.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 3.3.4 y el Corolario 3.3.2. $\square$

Corolario 3.3.6 *Si un $l_\theta P-$espacio $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es la suma cardinal de un número finito de segmentos $[f_0(x_j), f_1(x_j)]$, $1 \leq j \leq n$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo subconjunto Y de X:*

(i) *Y es un subconjunto abierto tal que $X \setminus Y$ es semimodal,*

(ii) *Y es un subconjunto abierto tal que $X \setminus Y$ es un $\theta-$subconjunto de X,*

(iii) *Y es un subconjunto modal.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por la hipótesis (i) y el Corolario 3.3.5 tenemos que $X\setminus Y$ es un subconjunto semimodal, abierto y cerrado de X, entonces por la Proposición 3.2.1.4 resulta que $X \setminus Y$ es un $\theta-$subconjunto.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata.

(i) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis (i) y el Corolario 3.3.5 inferimos que $X \setminus Y$ es un subconjunto semimodal, abierto y cerrado de X, entonces de la Proposición 3.2.1.4 se sigue que $X \setminus Y$ es modal, y por lo tanto, del Lema 2.1.4.2, Y es modal.

(iii) $\Rightarrow$ (i): La hipótesis (iii) y el Corolario 3.3.2 nos permiten afirmar que $X \setminus Y$ es un subconjunto modal, abierto y cerrado de X, entonces por la Proposición 3.2.1.4, concluimos que $X \setminus Y$ es semimodal. $\Box$

En lo que sigue si $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, entonces denotamos por $\mathcal{M}(X)$ al retículo de los subconjuntos modales de X, $\mathcal{CO}_M(X)$ al retículo de los subconjuntos modales, abiertos y cerrados de X, $\mathcal{O}_{CS}(X)$ al retículo de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos semimodales de X y $\mathcal{O}_{C\Theta}(X)$ al retículo de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son $\theta-$subconjuntos de X.

Corolario 3.3.7 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra, tal que su $l_\theta P-$espacio asociado $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ es la suma cardinal de un número finito de cadenas. Entonces, $\mathcal{M}(X(A)) = \mathcal{CO}_M(X(A)) = \mathcal{O}_{CS}(X(A)) = \mathcal{O}_{C\Theta}(X(A))$.*

Dem. Es consecuencia inmediata de los Corolarios 3.3.2 y 3.3.6. $\Box$

Corolario 3.3.8 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que su $l_\theta P-$espacio asociado $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ es la suma cardinal de un número finito de cadenas. Entonces para toda relación binaria φ de A, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia de A,*

(ii) *φ es una $LM_\theta-$congruencia de A,*

(iii) *φ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(iv) *φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(v) *φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia principal de A,*

(vi) *φ es una $LM_\theta-$congruencia principal de A.*

Dem. Por el Corolario 3.3.7 tenemos que $\mathcal{M}(X(A)) = \mathcal{CO}_M(X(A)) = \mathcal{O}_{CS}(X(A))$ $= \mathcal{O}_{C\Theta}(X(A))$, de donde se sigue, por los Teoremas 3.1.1.2 y 3.2.1.9, que las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes. La equivalencia de las condiciones (iii) y (iv) es consecuencia del Corolario 3.2.1.10.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Se sigue de los Corolarios 3.2.1.10 y 3.2.1.11.

(iii) $\Rightarrow$ (vi): Resulta del Corolario 3.2.1.11

(v) $\Rightarrow$ (i) y (vi) $\Rightarrow$ (ii): Son triviales. □

Corolario 3.3.9 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que su* $l_\theta P-$*espacio asociado* $(X(A),\ \{f_i^A\}_{i\in I})$ *es la suma cardinal de un número finito de cadenas. Entonces, el retículo booleano* $\mathcal{M}(X(A))$ *es isomorfo al (dual del) retículo* $Con_{LM_\theta}(A)$ *de las* $LM_\theta-$*congruencias de* A*, donde el isomorfismo está definido como en el* Teorema 3.1.1.2 (Teorema 2.1.4.12).

Dem. Es consecuencia de los Teoremas 3.2.1.9 y 3.1.1.2 y el Corolario 3.3.7. □

Corolario 3.3.10 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que su* $l_\theta P-$*espacio asociado* $(X(A),\ \{f_i^A\}_{i\in I})$ *es la suma cardinal de un número finito de cadenas. Entonces, la intersección de dos* $LM_\theta-$*congruencias principales de* A *es una* $LM_\theta-$*congruencia principal.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 3.3.8. □

Corolario 3.3.11 *Sea* **V** *la subclase de las* $LM_\theta-$*álgebras tal que el espacio* $l_\theta P-$*espacio asociado a cada una de ellas es la suma cardinal de un conjunto finito de cadenas. Entonces,* **V** *es a* $LM_\theta-$*congruencias conmutativas, distributivas, uniformes, regulares y compactas, y tiene la propiedad de extensión de congruencias.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 3.2.1.13, 3.2.2.2 y 3.3.8. □

Proposición 3.3.12 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra tal que su* $l_\theta P-$*espacio asociado* $(X(A), \{f_i^A)\}_{i\in I})$ *es la suma cardinal de* n *cadenas maximales, con* n *un entero positivo. Entonces,* $|Con_{LM_\theta}(A)| = |C(A)| = 2^n$.

Dem. Los Corolarios 3.2.1.8 y 3.3.9 nos permiten afirmar que $|C(A)| = |\mathcal{M}(X(A))|$ $= |Con_{LM_\theta}(A)|$. Además, de la Proposición 2.1.4.6 obtenemos que $|\mathcal{M}(X)A)| = \sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$ $= 2^n$. Por lo tanto, $|C(A)| = |Con_{LM_\theta}(A)| = 2^n$. □

Proposición 3.3.13 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que su $l_\theta P-$espacio asociado $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ es la suma cardinal de n cadenas, con n un entero positivo. Entonces, para cada $a \in A$, $|\{\phi_i a\}_{i\in I}| \leq n + 1$ y $|\{\overline{\phi}_i a\}_{i\in I}| \leq n + 1$.*

Dem. Teniendo en cuenta que σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo, resulta que para cada $a \in A$, (1) $|\{\phi_i(a) \;:\; i \in I\}| = |\{\sigma_A(\phi_i(a)) : i \in I\}|$. Además, por las Proposiciones 2.1.4.6, 3.2.1.7 y 3.3.1 tenemos que para cada $i \in I$, $\sigma_A(\phi_i(a))$ es la suma cardinal de m cadenas maximales, donde m es un entero positivo, $0 \leq m \leq n$. Supongamos que existen $i, j \in I$ tales que (2) $\sigma_A(\phi_i(a))$ y $\sigma_A(\phi_j(a))$ son la suma cardinal de m cadenas maximales, $0 \leq m \leq n$. Por ser σ_A un $LM_\theta-$isomorfismo, entonces de la propiedad (L4) de las $LM_\theta-$álgebra obtenemos que $\sigma_A(\phi_i(a)) \subseteq \sigma_A(\phi_j(a))$ si $i \leq j$ o $\sigma_A(\phi_j(a)) \subseteq \sigma_A(\phi_i(a))$ si $j \leq i$, de lo que inferimos por (2) que $\sigma_A(\phi_i(a)) = \sigma_A(\phi_j(a))$. Por lo tanto, para cada $a \in A$ y para cada entero positivo m, $0 \leq m \leq n$, el número cardinal del conjunto

$$\{\sigma_A(\phi_i(a)) : \sigma_A(\phi_i(a))\, \text{es la suma cardinal de m cadenas maximales}, \; i \in I\}$$

es a lo sumo 1. De esta última afirmación, (1) y la propiedad (L2) de las $LM_\theta-$álgebras, concluimos que $|\{\phi_i a\}_{i\in I}| \leq n + 1$ y $|\{\overline{\phi}_i a\}_{i\in I}| \leq n + 1$ para todo $a \in A$. □

Proposición 3.3.14 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra tal que su $l_\theta P-$espacio asociado es la suma cardinal de un número finito de cadenas. Si $a, b \in A$ y $a \leq b$, entonces $\Theta(a, b) = \mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge\limits_{i\in I}(\phi_i a \vee \overline{\phi}_i b)\right)$.*

Dem. Por la Proposición 3.3.13 se verifica que $\bigwedge\limits_{i\in I}(\phi_i a \vee \overline{\phi}_i b) \in A$. Teniendo en cuenta el Corolario 3.3.8 y la Proposición 3.2.2.8 podemos afirmar que existen $n \in I\!N$, $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$, tales que (1) $\Theta(a, b) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \bigwedge\limits_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} a \vee \overline{\phi}_{i_j} b))$. Además de la Proposición 3.2.1.7, el Teorema 3.2.1.9, el Corolario 3.3.9 y (A13) en la Proposición 1.4.1.4, inferimos que $\Theta_{OS}(\sigma_A(\bigvee\limits_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a))) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \bigwedge\limits_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} a \vee \overline{\phi}_{i_j} b))$, de lo que obtenemos por (1) que (2) $\Theta(a, b) = \Theta_{OS}(\sigma_A(\bigvee\limits_{j=1}^{n}(\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a)))$. Por otra parte, de la Proposición 3.1.1.5 tenemos que (3) $\Theta(a,b) = \Theta_{OS}((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a))$. Las igualdades (2) y (3) y el Teorema 3.2.1.9 nos aseguran que $(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} \sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a) = \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n} (\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a))$ y por lo tanto para todo $i \in I$, $\sigma_A(\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a) \subseteq \sigma_A(\bigvee_{j=1}^{n} (\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a))$. Además, como σ_A es un $LM_\theta-$isomorfismo, se sigue que $\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a \leq \bigvee_{j=1}^{n} (\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a)$ para todo $i \in I$. Por consiguiente, $\bigvee_{i\in I} (\phi_i b \wedge \overline{\phi}_i a) = \bigvee_{j=1}^{n} (\phi_{i_j} b \wedge \overline{\phi}_{i_j} a)$ y así por la propiedades (L2) y (L7) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2) resulta que que $\bigwedge_{i\in I} (\phi_i a \vee \overline{\phi}_i b) = \bigwedge_{j=1}^{n} (\phi_{i_j} a \vee \overline{\phi}_{i_j} b)$, de lo que concluimos por (1) que $\Theta(a,b) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \bigwedge_{i\in I} (\phi_i a \vee \overline{\phi}_i b))$. □

3.4. Congruencias principales y booleanas de las $nLM_\theta-$álgebras

En esta sección analizamos las congruencias principales y las $\theta-$congruencias principales de las $nLM_\theta-$álgebras, con θ infinito y finito, por medio de las dualidades topológicas que obtuvimos para estas álgebras en el Capítulo 2.

Es importante recordar que en la Sección 2.2.2 probamos que las $\theta nLM_\theta-$congruencias y las $\theta LM_\theta-$congruencias de una $nLM_\theta-$álgebra coinciden. Como en las Secciones 3.1.1 y 3.1.2 caracterizamos las $\theta LM_\theta-$congruencias principales y booleanas, respectivamente, ahora solo es necesario caracterizar las $nLM_\theta-$congruencias principales y booleanas.

3.4.1. $nLM_\theta-$congruencias principales

En primer lugar caracterizamos las $nLM_\theta-$congruencias de una $nLM_\theta-$álgebra por medio de ciertos subconjuntos abiertos de su $Nl_\theta P-$espacio asociado, lo que nos permite determinar algunas propiedades de estas congruencias.

Teorema 3.4.1.1 *Sean A una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces el retículo $\mathcal{O}_{CIS}(X(A))$ de los subconjuntos abiertos de $X(A)$ cuyos complementos son subconjuntos involutivos y semimodales de $X(A)$ es isomorfo al retículo*

$Con_{nLM_\theta}(A)$ de las $nLM_\theta-$congruencias de A, y el isomorfismo lo establece la función Θ_{OSI} definida por la prescripción: $(a,b) \in \Theta_{OSI}(G)$ si, y solo si, $(\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \subseteq G$.

Dem. Es consecuencia inmediata de los Teoremas 1.4.1.2 y 2.2.2.6, teniendo en cuenta que existe una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos cerrados y abiertos de un espacio topológico y que $\Theta_{OIS}(G) = \Theta_{IS}(X(A) \setminus G)$. □

El siguiente corolario se demuestra mediante un razonamiento análogo al de la demostración del Corolario 3.1.1.3, usando en este caso el Teorema 3.4.1.1.

Corolario 3.4.1.2 *Sean A una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$, $a \leq b$:*

(i) *$G \in \mathcal{O}_{CIS}(X(A))$ y $\Theta_{OIS}(G) = \Theta_n(a,b)$,*

(ii) *G es el menor elemento de $\mathcal{O}_{CIS}(X(A))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.*

A continuación establecemos una caracterización de las $nLM_\theta-$congruencias principales de una $nLM_\theta-$álgebra, teniendo en cuenta la caracterización de las $LM_\theta-$congruencias principales de una $LM_\theta-$álgebra, obtenida en la Sección 3.1, y la de las congruencias principales de un álgebra de De Morgan, determinada en [2].

Proposición 3.4.1.3 *Sean A una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f^A{}_i\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$, $a \leq b$:*

(i) *$G \in \mathcal{O}_{CIS}(X(A))$ y $\Theta_{OIS}(G) = \Theta_n(a,b)$,*

(ii) *$G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) y el Corolario 3.4.1.2 inferimos que (1) $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. Como $X(A) \setminus G$ es un subconjunto involutivo y semimodal de $X(A)$, entonces de (1) obtenemos que (2) $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq G$.

Teniendo en cuenta que g_A es un homeomorfismo involutivo, (lP2), (lP5) y (nlP3), se sigue que (3) $(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b)\setminus\sigma_A(a)) \in \mathcal{O}_{CIS}(X(A))$. Luego, de (1), (2), (3), la hipótesis (i) y el Corolario 3.4.1.2, concluimos que $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De (ii) obtenemos que (1) $G \in \mathcal{O}_{CIS}(X(A))$ y (2) $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. Sea (3) $H \in \mathcal{O}_{CIS}(X(A))$ tal que (4) $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$. Teniendo en cuenta que $X(A) \setminus H$ un subconjunto involutivo y semimodal de $X(A)$, resulta que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq H$ y por consiguiente, $G \subseteq H$. Esta última afirmación, (1), (2), (3), (4) y el Corolario 3.4.1.2, nos permiten concluir que $\Theta_{OIS}(G) = \Theta_n(a, b)$. □

Proposición 3.4.1.4 *Sean A una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces para todo $G \in \mathcal{O}_{CLS}(X(A))$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_{OIS}(G)$ es una $nLM_\theta-$congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto abierto, cerrado y convexo R de $X(A)$ tal que*

$$G = R \cup g(R) \cup \bigcup_{i\in I} f_i^{A^{-1}}(R).$$

Dem.: Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.4.1.3, la propiedad (P1) de los espacios de Priestley (Sección 1.4.1) y el hecho de que σ_A es un nLM$_\theta-$isomorfismo. □

3.4.2. $nLM_\theta-$congruencias booleanas

En lo que sigue caracterizamos los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos involutivos y semimodales del $Nl_\theta P-$espacio asociado a una $nLM_\theta-$álgebra, los cuales se corresponden con las $nLM_\theta-$congruencias booleanas por medio de esta dualidad.

Proposición 3.4.2.1 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces para cada $Y \subseteq X(A)$, $\Theta_{OSI}(Y)$ es una $nLM_\theta-$*

congruencia booleana de A si, y solo si, Y es un subconjunto abierto y cerrado de $X(A)$ tal que Y y $X(A)\setminus Y$ son subconjuntos involutivos y semimodales de $X(A)$, donde $\Theta_{OSI}(Y)$ está definida como en el Teorema 3.4.1.1.

Dem. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.4.1.1. □

Lema 3.4.2.2 *Sea $(X, g, \{f_i)\}_{i\in I})$ un $Nl_\theta P-$espacio. Si Y es subconjunto involutivo de X, entonces el complemento de Y es también involutivo.*

Dem. De la hipótesis y teniendo en cuenta que g es una función biyectiva obtenemos que $g(X\setminus Y) = X\setminus g(Y) = X\setminus Y$ y por lo tanto, $X\setminus Y$ es involutivo. □

Lema 3.4.2.3 *Sea $(X, g, \{f_i)\}_{i\in I})$ un $Nl_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto semimodal, abierto y cerrado de X, entonces Y es involutivo.*

Dem. Por la hipótesis y la Proposición 3.2.1.4 tenemos que Y es un $\theta-$subconjunto de X y así, por el Lema 2.2.2.2, concluimos que Y es involutivo. □

Proposición 3.4.2.4 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra y $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $Nl_\theta P-$espacio asociado. Entonces para cada $Y\subseteq X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_{OSI}(Y)$ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *Y es un subconjunto abierto, cerrado y semimodal de $X(A)$,*

(iii) *Y es un subconjunto abierto, cerrado y modal de $X(A)$,*

(iv) *$\Theta_{SI}(Y)$ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana de A,*

donde las congruencias $\Theta_{OSI}(Y)$ y $\Theta_{SI}(Y)$ están definidas como en el Teorema 3.4.1.1 *y el* Teorema 2.2.2.6, *respectivamente.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Se sigue inmediatamente de la Proposición 3.4.2.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii), la Proposición 3.2.1.2 y los Lemas 3.4.2.2 y 3.4.2.3, obtenemos que Y es un subconjunto abierto, cerrado de $X(A)$ tal que Y y $X(A)\setminus Y$ son subconjuntos involutivos y semimodales. Entonces, por la Proposición 3.4.2.1, concluimos $\Theta_{OSI}(Y)$ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana de A.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia de la Proposición 3.2.1.4.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Teniendo en cuenta que $\Theta_{SI}(Y) = \Theta_{OSI}(X(A)\setminus Y)$, entonces de la hipótesis (iv) y la Proposición 3.4.2.1 inferimos que Y es un subconjunto abierto, cerrado y semimodal de $X(A)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): De la hipótesis (ii), la Proposición 3.2.1.2 y los Lemas 3.4.2.2 y 3.4.2.3, obtenemos que Y y $X(A)\setminus Y$ son subconjuntos abiertos, cerrados involutivos y semimodales de X, de donde, por la Proposición 3.4.2.1, se sigue que $\Theta_{OSI}(X(A)\setminus Y)$ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana, y como $\Theta_{OSI}(X(A)\setminus Y) = \Theta_{SI}(Y)$, la demostración está completa. $\square$

Teorema 3.4.2.5 *Sean* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ *una* $nLM_\theta-$*álgebra y* $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $Nl_\theta P-$*espacio asociado. Entonces, el retículo* $\mathcal{CO}_M(X(A))$ *es isomorfo al retículo (dual del retículo)* $Con_{bnLM_\theta}(A)$ *de las* $nLM_\theta-$*congruencias booleanas de* A*, donde el isomorfismo* Θ_{OM} (Θ_{CM}) *es la retricción de* Θ_{OSI} (Θ_{SI}) *a* $\mathcal{CO}_M(X(A))$ *y estas funciones están definidas como en el* Teorema 3.1.2.1 *y el* Teorema 2.1.2.14*, respectivamente.*

Dem. Si Y es un subconjunto abierto, cerrado y modal de $X(A)$, entonces por la Proposición 3.4.2.4 tenemos que $\Theta_{OM}(Y)$ es una $\mathrm{nLM}_\theta-$congruencia booleana de A. Recíprocamente, si $\varphi \in Con_{bnLM_\theta}(A)$, entonces el Teorema 3.4.1.1 y la Proposición 3.4.2.4 nos permiten asegurar que existe un subconjunto modal, abierto y cerrado Y de $X(A)$ tal que $\varphi = \Theta_{OSI}(Y) = \Theta_{OM}(Y)$. Luego, por el Teorema 3.4.1.1, concluimos que Θ_{OM} es un isomorfismo de $\mathcal{CO}_M(X(A))$ en $Con_{bnLM_\theta}(A)$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que se verifica que $Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ si, y solo si, $X(A)\setminus Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ y además que $\Theta_{CM}(Y) = \Theta_{OM}(X(A)\setminus Y)$, inferimos que Θ_{CM} establece un isomorfismo entre $\mathcal{CO}_M(X(A))$ y el dual de $Con_{bLM_\theta}(A)$. $\square$

Corolario 3.4.2.6 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para toda $nLM_\theta-$congruencia φ de A:*

(i) *φ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *φ es una $LM_\theta-$congruencia booleana de A.*

Dem. Es consecuencia inmediata de los Teoremas 3.2.1.9 y 3.4.2.5. □

Corolario 3.4.2.7 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para toda $nLM_\theta-$congruencia φ de A:*

(i) *φ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana,*

(ii) *φ es una $\theta nLM_\theta-$congruencia booleana.*

Dem. Es consecuencia directa de los Corolarios 2.2.2.10, 3.2.1.10 y 3.4.2.6. □

Corolario 3.4.2.8 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Toda $nLM_\theta-$congruencia booleana de A es una $nLM_\theta-$congruencia principal y una $\theta nLM_\theta-$congruencia principal.*

(ii) *Las $nLM_\theta-$congruencias booleanas de A son conmutativas.*

(iii) *Las álgebras booleanas $Con_{bnLM_\theta}(A)$ y $C(A)$ son isomorfas y por lo tanto,*

$$|Con_{bnLM_\theta}(A)| = |C(A)|.$$

(iv) *Las $nLM_\theta-$congruencias booleanas de A son regulares y uniformes.*

Dem.

(i): Sea φ una $nLM_\theta-$congruencia booleana de A, entonces por los Corolarios 3.2.1.11 y 3.4.2.6, φ es una $LM_\theta-$congruencia principal y una $\theta LM_\theta-$congruencia principal. De esta última afirmación, la hipótesis y el Corolario 2.2.2.10 inferimos que φ es una $nLM_\theta-$congruencia principal y una $\theta nLM_\theta-$congruencia principal de A

(ii): Es consecuencia de los Corolarios 3.2.1.13 y 3.4.2.6.

(iii): Se sigue de los Corolarios 3.2.1.12 y 3.4.2.6.

(iv): Resulta de los Corolarios 3.2.2.2 y 3.4.2.6. □

A continuación, obtenemos condiciones necesarias y suficientes para que una $nLM_\theta-$congruencia principal de una $nLM_\theta-$álgebra sea booleana, las cuales son también condiciones suficientes para que la intersección de dos $nLM_\theta-$congruencias principales sea una $nLM_\theta-$congruencia principal.

Corolario 3.4.2.9 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para $a, b \in A$tales que $a \leq b$:*

(i) *$\Theta_n(a,b)$ es una $nLM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existen $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$, tales que $\Theta_n(a,b) = \Theta_{OM}(\sigma_A(\bigvee\limits_{j=1}^{n}(\phi_i b \wedge \phi_{d(i_j)} \sim a)))$,*

(iii) *existen $i_j \in I$, $1 \leq j \leq n$ tales que $\Theta_n(a,b) = \mathbf{\Theta}\left(\uparrow \bigwedge\limits_{j=1}^{n}(\phi_{d(i_j)} \sim b \vee \phi_{i_j} a\right)$, donde $d : I \longrightarrow I$ es la involución externa definida de A.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 3.2.2.8, el Corolario 3.4.2.6 y las condiciones (NL3) y (NL4) de la Definición 1.2.4 en la Sección 1.2. □

3.4.3. nLM_n-congruencias principales y booleanas

En esta sección caracterizamos las congruencias principales y booleanas de las nLM_n-álgebras a través de la dualidad que determinamos para estas álgebras en el Capítulo 2. En primer lugar, obtenemos una nueva caracterización de las congruencias de estas álgebras.

Teorema 3.4.3.1 *Sean A una nLM_n-álgebra y $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su Nl_nP-espacio asociado. Entonces, el retículo $\mathcal{O}_M(X(A))$ de todos los subconjuntos abiertos y modales de $X(A)$ es isomorfo al retículo $Con_{nLM_n}(A)$ de todas las nLM_n-congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_{OM} definida por la misma prescripción que en el* Teorema 3.1.1.2.

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.2.2.9 y el Teorema 3.1.2.1. □

Corolario 3.4.3.2 *Sean A una nLM_n-álgebra y $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su Nl_nP-espacio asociado. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$ tales que $a \leq b$:*

(i) $\Theta(a,b) = \Theta_{OM}(G)$ *y* $G \in \mathcal{O}_M(X(A))$,

(ii) G *es el menor elemento de* $\mathcal{O}_M(X(A))$*, en el sentido de inclusión, que contiene a* $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.2.2.9 y 3.1.2.2. □

Proposición 3.4.3.3 *Sean $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ una nLM_n-álgebra y su Nl_nP-espacio asociado $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$. Entonces para cada $Y \subseteq X(A)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es un subconjunto modal, abierto y cerrado de* $X(A)$,

(ii) *existen* $a \in A$*,* i*,* $1 \leq i \leq n-1$*, tal que* $Y = \sigma_A(\phi_i a)$,

(iii) *existen* $a \in A$*,* i*,* $1 \leq i \leq n-1$*, tal que* $Y = \sigma_A(\sim \phi_i a)$.

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.2.2.9, la Proposición 3.1.2.3 y el hecho de que para cada $a \in A$ y cada i, $1 \leq i \leq n-1$, $\sim \phi_i a = \overline{\phi}_i a$. □

Corolario 3.4.3.4 *Sea $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ una nLM_n-álgebra. Entonces para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, y para todo $a \in A$, $\Theta_{OM}(\sigma_A(\phi_i(a))) = \Theta_M(\sigma_A(\sim \phi_i a)) = \Theta\,(\uparrow\sim \phi_i a)$.*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 2.2.2.9 y 3.1.2.4, teniendo en cuenta que para cada $a \in A$ y cada i, $1 \leq i \leq n-1$, $\sim \phi_i a = \overline{\phi}_i a$. □

Proposición 3.4.3.5 *Sean $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ una nLM_n-álgebra y su Nl_nP-espacio asociado $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $a, b \in A$ tales que $a \leq b$:*

(i) $\Theta(a,b) = \Theta_{OM}(G)$ *y* $G \in \mathcal{O}_M(X(A))$,

(ii) $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$,

(iii) $G = \sigma_A(\bigvee_{i=1}^{n-1} (\phi_i b \wedge \sim \phi_i a))$,

(iv) $\Theta_{OM}(G) = \mathbf{\Theta} \left(\uparrow \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\sim \phi_i b \vee \phi_i a) \right)$.

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.2.2.9, la Proposición 3.1.2.5 y el hecho de que para cada $x \in A$ y cada i, $1 \leq i \leq n-1$, $\sim \phi_i x = \overline{\phi}_i x$ para todo $x \in A$. □

Proposición 3.4.3.6 *Sean A una nLM_n-álgebra y $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su Nl_nP-espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *ϑ es una $nLM_\theta-$congruencia principal,*

(ii) *$\vartheta = \Theta_{OM}(G)$, donde $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i^{A^{-1}}(R)$ y R es un subconjunto abierto, cerrado y convexo de $X(A)$,*

(iii) *$\vartheta = \Theta_{OM}(G)$, donde G es un subconjunto modal, abierto y cerrado de $X(A)$.*

Dem. Resulta del Corolario 2.2.2.9 y la Proposición 3.1.2.6. □

Corolario 3.4.3.7 *La intersección de dos nLM_n-congruencias principales de una nLM_n-álgebra A es una nLM_n-congruencia principal de A.*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.4.3.6 y el Teorema 3.4.3.1. También es consecuencia de los Corolarios 2.2.2.9 y 3.1.2.8. □

Corolario 3.4.3.8 *En una nLM_n-álgebra A, toda nLM_n-congruencia principal de A es una nLM_n-congruencia booleana de A.*

Dem. Se sigue de los Corolarios 2.2.2.9 y 3.4.3.8. □

Corolario 3.4.3.9 *En una nLM_n-álgebra A, el retículo $Con_{pnLM_n}(A)$ de las nLM_n-congruencias principales de A es un álgebra de Boole.*

Dem. Se sigue de la Proposición 3.4.3.6, teniendo en cuenta que el retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados y modales de $X(A)$ es un álgebra de Boole. También es consecuencia de Corolarios 2.2.2.9 y 3.1.2.10. □

Proposición 3.4.3.10 *Sean A una nLM_n-álgebra y $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\})$ su Nl_nP-espacio asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $Con_{nLM_n}(A) = Con_{bnLM_n}(A)$, *o equivalentemente el retículo* $Con_{nLk_n}(A)$ *es un álgebra de Boole,*

(ii) $\mathcal{C}_M(X(A)) = \mathcal{CO}_M(X(A))$, *o equivalentemente el retículo* $\mathcal{C}_M(X(A))$ *es un álgebra de Boole,*

(iii) $X(A)$ *es un conjunto finito,*

(iv) A *es un conjunto finito.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.2.3.4 y el Corolario 2.2.2.9. □

Capítulo 4

Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación monádicas y monádicas fuertes

En este capítulo introducimos la noción de álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica y la de álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica fuerte, y determinamos una dualidad topológica para cada una de estas clases de álgebras. A partir de estas dualidades obtenemos propiedades de las mismas y describimos las álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a las congruencias y con respecto a las $\theta-$congruencias.

Este capítulo se organiza como se indica a continuación. En la primera sección introducimos la noción de álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica o $mLM_\theta-$álgebra y la de álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica fuerte o $smLM_\theta-$álgebra, extendiendo las nociones de retículos distributivos monádicos y retículos distributivos monádicos fuertes, respectivamente. En el caso particular en que θ es un entero n, $n \geq 2$ las llamamos álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n-$valuadas monádicas o mLM_n-álgebras y monádicas fuertes o $smLM_n-$álgebras. Luego hallamos una dualidad topológica para las $mLM_\theta-$álgebras y otra para las $smLM_\theta-$álgebras, usando las dualidades descriptas en la Sección 1.4.5 para los $M-$retículos y en la Sección

1.4.6 para los $sM-$retículos y las obtenidas para las LM_n-álgebras y las $LM_\theta-$álgebras en el Capítulo 2. En esta sección, a través de las dualidades determinamos propiedades de estas álgebras, las que nos permiten afirmar que las nociones de $mLM_\theta-$álgebra y $smLM_\theta-$álgebras son equivalentes. En la segunda sección estudiamos las congruencias y las $\theta-$congruencias de las $mLM_\theta-$álgebras a través de la dualidad obtenida para estas álgebras. En la tercera sección, usando técnicas topológicas, hallamos las $mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a la congruencias y con respecto a las $\theta-$congruencias ($\theta mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles), obteniendo que estas álgebras coinciden y que la imagen por el cuantificador de las mismas es una LM_θ-álgebra simple y por lo tanto, ellas son las subálgebras del álgebra funcional ${L_2^{[I]}}^X$ y cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, son las subálgebras del álgebra funcional L_n^X, donde estas álgebras funcionales están descriptas en la primera sección de este capítulo.

4.1. $mLM_\theta-$algebras y $smLM_\theta-$álgebras

En esta sección comenzamos introduciendo las nociones de álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica o $mLM_\theta-$álgebra y álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica fuerte o $smLM_\theta-$álgebra de la siguiente manera:

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal).

Definición 4.1.1 *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica (o para abreviar $mLM_\theta-$álgebra) es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0, \{1\}_{i\in I}, \{1\}_{i\in I}, 1, 1)$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación, $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \exists, \forall\rangle$ es un retículo monádico y para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$ se satisfacen las siguientes identidades:*

(mL1) $\exists\, \phi_i a = \phi_i \exists\, a$,

(mL2) $\forall\, \phi_i\, a = \phi_i \forall\, a$.

Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin negación monádica fuerte (o para abreviar una $smLM_\theta-$álgebra) es un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada sin ne-

gación monádica tal que el reducto $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \exists, \forall\rangle$ *es un retículo monádico fuerte.*

Más precisamente, una $mLM_\theta-$*álgebra es un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 0, 0, \{1\}_{i\in I}, \{1\}_{i\in I}, 1, 1)$ *que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado,*

(i) ϕ_i *y* $\overline{\phi}_i$, $i \in I$, *son operaciones unarias sobre* A *tal que para todo* i, $j \in I$*:*

(L1) ϕ_i *es un* 01*-homomorfismo de retículo,* (L2) $\phi_i x \vee \overline{\phi}_i x = 1,\ \phi_i x \wedge \overline{\phi}_i x = 0,$

(L3) $\phi_i\phi_j x = \phi_j x,$ (L4) $i \leq j$ *implica* $\phi_i x \leq \phi_j x,$

(L5) $\phi_i x = \phi_i y$ *para todo* $i \in I$ *implica* $x = y,$

(ii) $\exists$ *y* $\forall$ *son operaciones unarias sobre* A *tal que:*

(M1) $\exists\, 0 = 0,$ (M2) $x \wedge \exists\, x = x,$

(M3) $\exists\,(x \wedge \exists\, y) = \exists\, x \wedge \exists\, y,$ (M4) $\exists\,(x \vee y) = \exists\, x \vee \exists\, y,$

(M5) $\exists\exists\, x = \exists\, x,$ (M6) $\forall\, 1 = 1,$

(M7) $x \wedge \forall\, x = \forall\, x,$ (M8) $\forall\,(x \wedge y) = \forall\, x \wedge \forall\, y,$

(M9) $\forall\forall\, x = \forall\, x,$ (M10) $\exists\forall\, x = \forall\, x,$

(M11) $\forall\exists\, x = \exists\, x,$

(iii) *para todo* $a \in A$ *y para todo* $i \in I$ *se satisfacen las siguientes identidades:*

(mL1) $\exists\,\phi_i a = \phi_i \exists\, a,$

(mL2) $\forall\,\phi_i a = \phi_i \forall\, a.$

$\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall\rangle$ *es una* $smLM_\theta-$*álgebra si es una* $mLM_\theta-$*álgebra que satisface la condición adicional:*

(M12) $\forall\,(a \vee \forall\, b) = \forall\, a \vee \forall\, b$, *para todo* a, $b \in A$.

La noción de homomorfismo entre $LM_\theta-$álgebras y $smLM_\theta-$álgebras tiene el significado usual en el álgebra universal. Es decir, los $LM_\theta-$homomorfismos y los $sLM_\theta-$homomorfismos son funciones entre $LM_\theta-$álgebras y $smLM_\theta-$álgebras, respectivamente, que preservan la estructura de $LM_\theta-$álgebra y $sLM_\theta-$álgebra subyacente, respectivamente.

Denotamos por $\boldsymbol{m\mathfrak{LM}_\theta}$ a la categoría de las $LM_\theta-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos, y por $\boldsymbol{sm\mathfrak{LM}_\theta}$ a la categoría de las $sLM_\theta-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

Recordemos la siguiente definición:

Definición 4.1.2 *Una $LM_\theta-$álgebra $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ es completamente chrysippiana si para todo $\{a_s\}_{s\in S} \subseteq A$ se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:*

(i) *si $\bigwedge\limits_{s\in S} a_s$ existe, entonces $\phi_i(\bigwedge\limits_{s\in S} a_s) = \bigwedge\limits_{s\in S} \phi_i(a_s)$,*

(s) *si $\bigvee\limits_{s\in S} a_s$ existe, entonces $\phi_i(\bigvee\limits_{s\in S} a_s) = \bigvee\limits_{s\in S} \phi_i(a_s)$.*

Ejemplo 4.1.3 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra completa y completamente chrysippiana, X un conjunto no vacío y $A^X = \{f : X \longrightarrow A\}$. Entonces el álgebra $(A^X, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ es una $mLM_\theta-$álgebra funcional, donde las operaciones de la $LM_\theta-$álgebra $(A^X, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ se definen puntualmente y las operaciones unarias $\exists$ y $\forall$ se definen por la fórmulas: $(\exists f)(x) = \bigvee f(X)$ para todo $x \in X$, y $(\forall f)(x) = \bigwedge f(X)$ para todo $x \in X$, donde $\bigvee f(X)$ es el supremo del conjunto $f(X)$ y $\bigwedge f(X)$ es el ínfimo del conjunto $f(X)$.*

Los ejemplos típicos son ${L_2^{[I]}}^X$ y L_n^X cuando $\theta = n$, $n \geq 2$, ya que $L_2^{[I]}$ es una $LM_\theta-$álgebra completa y completamente chrysippiana y L_n es una LM_n-álgebra finita. La importancia de estos ejemplos se debe a que las subálgebras de la $smLM_\theta-$álgebra ${L_2^{[I]}}^X$ son esencialmente las únicas $smLM_\theta-$álgebras simples y cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, las subálgebras de la $smLM_n-$álgebra L_n^X son las únicas $smLM_n-$álgebras simples.

4.1.1. Dualidades topológicas para las $LM_\theta-$álgebras y las $sLM_\theta-$álgebras

En esta sección explicitamos una dualidad topológica para las $mLM_\theta-$álgebras. Luego extendemos la dualidad obtenida a las $smLM_\theta-$álgebras.

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal).

Definición 4.1.1.1 $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un espacio de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuado monádico o $mql_\theta P-$espacio si verifica las siguientes condiciones:*

(mqlP1) (X, E) *es un* $mqP-$*espacio,*

o equivalentemente un $mk-$*marco* (Sección 1.4.5),

(mqlP2) $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio (Definición 2.1.2.1),

(mqlP3) $f_i^{-1}(E(U)) = E(f_i^{-1}(U))$,

(mqlP4) $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) = \downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ para todo $U \in D(X)$

y para todo $i \in I$.

Observación 4.1.1.2 De la Definición 4.1.1.1 y las definiciones de $qP-$espacio (Sección 1.4.4), $mqP-$espacio (Sección 1.4.5) y $l_\theta P-$espacio (Definición 2.1.2.1) se sigue que $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio si, y solo si, para cada* $i \in I$*,* f_i *es una función de* X *en* X*,* E *es una relación de equivalencia sobre* X *y se satisfacen las siguientes propiedades:*

(lP1) X *es un espacio de Priestley,*

(lP2) $f_i : X \longrightarrow X$ *es continua para todo* $i \in I$*,*

(lP3) $x \leq y$*, implica* $f_i(x) = f_i(y)$ *para todo* $i \in I$*,*

(lP4) $i \leq j$*, implica* $f_i(x) \leq f_j(x)$ *para todo* $x \in X$*,*

(lP5) $f_i \circ f_j = f_i$ *para todo* $i, j \in I$*,*

(lP6) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(X)} = X$ *o* (l_nP6) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} f_i(X)$*, cuando* $\theta = n$*,* $n \geq 2$*,*

(q1) $E(U) \in D(X)$ *para todo* $U \in D(X)$*,*

(q2) $E(x)$ *es un subconjunto cerrado de* X *para todo* $x \in X$*,*

(mq1) $(x, y) \in E$ *e* $y \leq z$ *implican que existe* $w \in X$ *tal que* $x \leq w$ *y* $(w, z) \in E$*,*

(mq2) $\downarrow E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X *para todo* $U \in D(X)$*,*

(mqlP3) $f_i^{-1}(E(U)) = E(f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$*,*

(mqlP4) $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) = \downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$

y para todo $i \in I$.

Por lo probado en [35] y que está enunciado en la Sección 1.4.5, tenemos que *si* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio, entonces la condición* (mq1) *en la definición de* $mql_\theta P-$*espacio es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:*

(mq3) $\uparrow E(x) \subseteq E(\uparrow x)$ *para cada* $x \in X$,

(mq4) $E(\downarrow x) \subseteq \downarrow E(x)$ *para cada* $x \in X$.

Lema 4.1.1.3 $(X, \leq, \Omega, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio si, y solo si, para cada* $i \in I$, f_i *es una función de* X *en* X, E *es una relación de equivalencia sobre* X *y se satisfacen las propiedades* (lP1), (lP2), (lP3), (lP4), (lP5), (lP6) *y las siguientes propiedades:*

(mk1) $(X, \leq, E)$ *es un marco de Kripke ampliado* ([6]), *o equivalentemente,*

(k1) $(X, \leq)$ *es un conjunto ordenado no vacío,*

(k2) E *es una relación de equivalencia sobre* X,

(k3) $\leq \circ E \subseteq E \circ \leq$,

(mk2) $(X, \leq, \Omega)$ *es un espacio de Priestley,*

(mk3) E *es una relación cerrada,*

(mk4) $E(U)$ *es un subconjunto abierto de* X *para todo* $U \in D(X)$,

(mk1) $\downarrow E(X \setminus U)$ *es un subconjunto abierto de* X *para todo* $U \in D(X)$,

(mqlP3) $f_i^{-1}(E(U)) = E(f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$ *y para todo* $i \in I$,

(mqlP4) $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) = \downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$

y para todo $i \in I$.

Dem. Se sigue de la Definición 4.1.1.1, la definición de $mk-$marco y la equivalencia de las nociones de $mqP-$espacio y $mk-$marco (Sección 1.4.5). $\square$

El Lema 4.1.1.3 nos sugiere llamarlos también marcos de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuados monádicos o $mkl_\theta-$marcos a los $mql_\theta P-$espacios.

Definición 4.1.1.4 *Si* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ *son* $mql_\theta P-$*espacios, entonces* $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $mql_\theta P-$*función si* f *es una* $l_\theta P-$*función y una* $mqP-$*función.*

Observación 4.1.1.5 De la Definición 4.1.1.4 y las definiciones de $qP-$función (Sección 1.4.4) y $mqP-$función (Sección 1.4.5) se sigue que *si* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ *son* $mql_\theta P-$*espacios, entonces* $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $mql_\theta P-$*función si, y solo si,* f *es una función continua e isótona que satisface las siguientes condiciones:*

(lPf) $f'_i \circ f = f \circ f_i$ *para todo* $i \in I$,

(qf1) $E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(E'(U))$ *para cada* $U \in D(X')$,

(mqf1) $\downarrow E(f^{-1}(X' \setminus U)) = f^{-1}(\downarrow E'(X' \setminus U))$ *para cada* $U \in D(X')$.

Además, por la formulación equivalente (F1) de $mqP-$función (Sección 1.4.5), $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $mql_\theta P-$*función si, y solo si,* f *es una función continua e isótona que satisface las siguientes condiciones:*

(lPf) $f'_i \circ f = f \circ f_i$ *para todo* $i \in I$,

(qf2) $(x, y) \in E$ *implica* $(f(x), f(y)) \in E'$,

(qf3) $E'(f(x)) \subseteq \downarrow f(E(x))$ *para todo* $x \in X$,

(mqf4) $E'(\uparrow f(x)) = \uparrow f(E(x))$ *para todo* $x \in X$.

Denotamos por $\boldsymbol{mql_\theta \mathcal{P}}$ la categoría de los $mql_\theta P-$espacios y las $mql_\theta P-$funciones, en el caso en que $\theta = n$, $n \geq 2$, la denotamos por $\boldsymbol{mql_n \mathcal{P}}$.

Observación 4.1.1.6 De las propiedades (lP2), (lP3), (mqlP3) y (mqlP4) es inmediato que *si* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio, entonces* $f_i : X \longrightarrow X$ *es una* $mqP-$*función para todo* $i \in I$.

Lema 4.1.1.7 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *tal que* X *es un espacio de Priestley,* E *es una relación de equivalencia sobre* X *y para cada* $i \in I$, f_i *es una función de* X *en* X. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio,*

(ii) $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *satisface las siguientes condiciones:*

(mqlP1) (X, E) *es un* $mqP-$*espacio,*

(mqlP2) $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio,*

(mqlP5) $(x, y) \in E$ *implica* $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ *para todo* $i \in I$*,*

(mqlP6) *si* $(f_i(x), z) \in E$*, entonces existe* $y \in X$ *tal que* $(x, y) \in E$ *y* $z \leq f_i(y)$*,*

(mqlP7) $E(\uparrow f_i(x)) = \uparrow f_i(E(\uparrow x))$ *para todo* $x \in X$ *y para todo* $i \in I$*.*

Dem. Es consecuencia de la Definición 4.1.1.1, las Observaciones 4.1.1.5 y 4.1.1.6 y la equivalencia de las condiciones (mqlP6) y (qf3). □

Observación 4.1.1.8 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces de* (mqlP5) *y* (lP5) *deducimos que para todo* $x, y \in X$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *existe* $i \in I$ *tal que* $(f_i(x), f_i(y)) \in E$*,*

(ii) $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ *para todo* $i \in I$*.*

Definición 4.1.1.9 $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un espacio de Łukasiewicz–Moisil* $\theta-$*valuado monádico fuerte o* $smql_\theta P-$*espacio si* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio que satisface la siguiente propiedad:*

(smq1) $E(\uparrow x) \subseteq \uparrow E(x)$ *para cada* $x \in X$*,*

o equivalentemente, si satisface:

(smq1*) $\downarrow E(x) \subseteq E(\downarrow x)$ *para cada* $x \in X$*.*

Teniendo en cuenta la equivalencia de las nociones de $smqP-$espacio y $smk-$marco, a los espacios de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuados monádicos fuertes también los podemos llamar marcos de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuados monádicos fuertes o $smkl_\theta-$marcos.

Definición 4.1.1.10 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ $smql_\theta P-$*espacios. Una función* $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $smql_\theta P-$*función si* f *es una* $mql_\theta P-$*función, esto es, si* f *es una* $l_\theta P-$*función y una* $mqP-$*función.*

Lema 4.1.1.11 $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $smql_\theta P-$*espacio si, y solo si,* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio que satisface la siguiente propiedad:*

(smq4) $E(\uparrow x) = \uparrow E(x)$ para todo $x \in X$,

o equivalentemente, si satisface:

(smq4*) $\downarrow E(x) = E(\downarrow x)$ para todo $x \in X$.

Dem. Se sigue de (smq1) y el hecho, probado en [35], de que la condición (mq1) en la definición de $mqP-$espacio es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:

(mq3) $\uparrow E(x) \subseteq E(\uparrow x)$ para cada $x \in X$,

(mq4) $E(\downarrow x) \subseteq \downarrow E(x)$ para cada $x \in X$. □

Proposición 4.1.1.12 $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $smql_\theta P-$*espacio si, y solo si,* (X, E) *es un* $smqP-$*espacio,* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio y para todo* $U \in D(X)$ *y para todo* $i \in I$*, se verifican las siguientes propiedades:*

(mqlP3) $f_i^{-1}(E(U)) = E(f_i^{-1}(U))$,

(smqlP4) $f_i^{-1}(E(X \setminus U)) = E(X \setminus (f_i^{-1}(U)))$.

Dem. Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $smql_\theta P-$espacio. De la Definición 4.1.1.9 resulta que $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio y (X, E) es un $smqP-$espacio. Además, de la Observación 4.1.1.5 y el Corolario 1.4.6.3, inferimos que se verifican las condiciones (mqlP3) y (smqlP4). Recíprocamente, si $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es tal que (X, E) es un $smq-$espacio, entonces satisface la condición (smq1). Como (X, E) es un $smq-$espacio, entonces es un $smk-$marco y por lo tanto, por el Lema 1.4.6.1, $\downarrow E(X \setminus U) = E(X \setminus U)$ para todo $U \in D(X)$. Teniendo en cuenta que $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ satisface (smqlP4) y (lP2), de la última afirmación se sigue que $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) = \downarrow E(X \setminus (f_i^{-1}(U)))$ para todo $U \in D(X)$ y para todo $i \in I$ y por lo tanto se verifica (mqlP4). Además $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio y satisface la condición (mqlP3), lo que nos permite concluir que $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $smql_\theta P-$espacio. □

Corolario 4.1.1.13 $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $smql_\theta P-$*espacio si, y solo si,* (X, E) *es un* $smk-$*marco,* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio y se verifican las siguientes propiedades:*

(mqlP5) $(x, y) \in E$ *implica* $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ *para todo* $i \in I$, (mqlP6) *si* $(f_i(x), z) \in E$, *entonces existe* $y \in X$ *tal que* $(x, y) \in E$ *y* $z \leq f_i(y)$,

(mqlP7) $E(\uparrow f_i(x)) =\uparrow f_i(E(\uparrow x))$ *para todo* $x \in X$, *para todo* $i \in I$,

(smqlP5) $\uparrow E(f_i(x)) =\uparrow f_i(\uparrow E(x))$ *para todo* $x \in X$.

Dem. Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $smql_\theta P-$espacio. De la Proposición 4.1.1.12 se sigue que (X, E) es un $smqP-$espacio, y como las nociones de $smqP-$espacio y $smk-$marco son equivalentes (Sección 1.4.6), obtenemos que (X, E) es un $smk-$marco. De la Observación 4.1.1.5 y (F1) de la Sección 1.4.5 inferimos que se verifican las condiciones (mqlP5), (mqlP6) y (mqlP7). Además, de las Proposiciones 1.4.6.4 y 4.1.1.12, obtenemos que vale la condición (smqlP5). Recíprocamente, si $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es tal que (X, E) es un $smk-$marco, entonces (X, E) es un $smqP-$espacio (Sección 1.4.6). Como (X, E) es un $smk-$marco, entonces la Observación 4.1.1.5, el Corolario 1.4.6.3 y la Proposición 1.4.6.4, nos permiten afirmar que se verifican las condiciones (mqlP3) y (smqlP4). Por hipótesis, $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, entonces de la Proposición 4.1.1.12 concluimos que $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $smql_\theta P-$espacio. $\square$

Observación 4.1.1.14 Es inmediato del Corolario 4.1.1.13 que si $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $smql_\theta P-$ espacio, entonces satisface:

(smk1) $E \circ \leq \subseteq \leq \circ E$,

(mk1) $\leq \circ E \subseteq E \circ \leq$.

Por lo tanto, en un $smql_\theta P-$ espacio $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ se verifica la siguiente propiedad:

(smk4) $E \circ \leq = \leq \circ E$.

Denotamos por $\boldsymbol{smql_\theta\mathfrak{P}}$ la categoría de los $smql_\theta P-$espacios y las $smql_\theta P-$funciones, en el caso en que $\theta = n$, $n \geq 2$, la denotamos por $\boldsymbol{smql_n\mathfrak{P}}$.

Ahora enunciamos una serie de resultados que son necesarios para probar que las categorías $\boldsymbol{mql_\theta\mathfrak{P}}$ y $\boldsymbol{m\mathfrak{LM}_\theta}$ y las categorías $\boldsymbol{smql_\theta\mathfrak{P}}$ y $\boldsymbol{sm\mathfrak{LM}_\theta}$ son dualmente equivalentes.

Lema 4.1.1.15 *Si* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $(s)mql_\theta P-$*espacio, entonces* $(s)m\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, , \{\overline{\phi}_i^{\,X}\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_E)$ *es una* $(s)mLM_\theta-$*álgebra, donde para todo* $U \in D(X)$,

$\phi_i^X(U)= f_i^{-1}(U)$, $\overline{\phi}_i^{\,X}(U) = X \setminus f_i^{-1}(U)$, $\exists_E U = E(U)$ y $\forall_E U = X \setminus \downarrow E(X \setminus U)$ $(\forall_E U = X \setminus E(X \setminus U))$.

Dem. Por el Lema 2.1.2.8, $(D(X), \{\phi_i{}^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i{}^X\}_{i\in I})$ es una $LM_\theta-$álgebra y por (F3) de la Sección 1.4.5, $(D(X), \exists_E, \forall_E)$ es un $M-$retículo. Si $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $sml_\theta P-$espacio, entonces por (G1) de la Sección 1.4.6, $(D(X), \exists_E, \forall_E)$ es un $sM-$retículo. Resta probar que el álgebra $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, , \{\overline{\phi}_i{}^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_E,)$ verifica las condiciones (mL1) y (mL2) de la Definición 4.1.1. Las mismas son consecuencias de que para todo $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow X$ es una $mqP-$función y por lo tanto, por (F7) de la Sección 1.4.5, para todo $i \in I$, $D(f_i) : D(X) \longrightarrow D(X)$ es un $M-$homomorfismo, donde $D(f_i) = \phi_i^X$. $\square$

Lema 4.1.1.16 *Si* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, 0, 1, \exists, \forall)$ *es una* $(s)mLM_\theta-$*álgebra, entonces* $(s)mqL_\theta(A) = (X(A), \{f_A^i\}_{i\in I}, E_\exists)$ *es un* $(s)mql_\theta P-$*espacio, donde para cada* $P \in X(A)$, $f_i^A(P) = \phi_i{}^{-1}(P)$ *y* $E_\exists = \{(P, Q) \in X(A) \times X(A) : P \cap \exists(A) = Q \cap \exists(A)\}$. *Además, la función* σ_A *es un* $(s)mLM_\theta-$*isomorfismo de* A *en* $D(X(A))$, *donde para cada* $a \in A$, $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$.

Dem. Por el Lema 2.1.2.9, $(X(A), \{f_A^i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio y $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $LM_\theta-$isomorfismo. Por (F4) de la Sección 1.4.5, $(X(A), E_\exists)$ es un $mk-$marco y $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $M-$isomorfismo. Si A es una $smLM_\theta-$álgebra, entonces por (G2) de la Sección 1.4.6, $(X(A), E_\exists)$ es un $smk-$marco y $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $sM-$isomorfismo. Resta probar que el espacio $(X(A), \{f_A^i\}_{i\in I}, E_\exists)$ verifica las condiciones (mqlP3) y (mqlP4) de la Definición 4.1.1.1, las cuales resultan teniendo en cuenta que para todo $i \in I$, $\phi_i : A \longrightarrow A$ es un $M-$homomorfismo, y por lo tanto, por (F7) de la Sección 1.4.5, $X(\phi_i) : X(A) \longrightarrow X(A)$ es una $mqP-$función para todo $i \in I$, donde $X(\phi_i) = f_i^A$. $\square$

En lo que sigue, denotamos por $(s)mq\text{Ł}_\theta(A)$ o por $X(A)$ el $(s)mql_\theta P-$espacio asociado a A y por $(s)m\mathbb{L}_\theta(X)$ o $D(X)$ a la $(s)mLM_\theta-$álgebra asociada a un $(s)mql_\theta P-$espacio.

Los siguientes resultados son consecuencias directas de las dualidades determinadas en la Sección 2.1.2 para las $LM_\theta-$álgebras, con θ finito e infinito, y de las dualidades para los $M-$retículos y los $sM-$retículos detalladas en las Secciones 1.4.5 y 1.4.6, respectivamente.

Lema 4.1.1.17 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, 0, 1, , \exists, \forall)$ *y* $(A', \{\phi'_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}'_i\}_{i\in I}, 0, 1, \exists', \forall')$ *(s)*$mLM_\theta-$*álgebras y* h *un (s)*$mLM_\theta-$*homomorfismo de* A *en* A'. *Entonces la aplicación (s)*$mq\L_\theta(h)$ *de (s)*$mq\L_\theta(A')$ *en (s)*$mq\L_\theta(A)$, *definida por la prescripción (s)*$mq\L_\theta(h)(P) = h^{-1}(P)$ *para todo* $P \in X(A')$, *es una (s)*$mql_\theta P-$*función. Además, se verifica que la función (s)*$mq\L_\theta(h)$ *es inyectiva (sobreyectiva) si el homomorfismo* h *es sobreyectivo (inyectivo).*

Lema 4.1.1.18 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ *(s)*$mql_\theta P-$*espacios y* f *una (s)*$mql_\theta P-$*función de* X *en* X'. *Entonces la aplicación (s)*$m\mathbb{L}_\theta(f)$ *de (s)*$m\mathbb{L}_\theta(X')$ *en (s)*$m\mathbb{L}_\theta(X)$, *definida por la prescripción (s)*$m\mathbb{L}_\theta(f)(U) = f^{-1}(U)$ *para cada* $U \in D(X')$, *es un (s)*$mLM_\theta-$*homomorfismo. Además, se verifica que el homomorfismo (s)*$m\mathbb{L}_\theta(f)$ *es inyectivo (sobreyectivo) si la función* f *es sobreyectiva (inyectiva).*

Teniendo en cuenta la Definición 4.1.1.10 resulta que un morfismo en la categoría $\boldsymbol{smql_\theta\mathcal{P}}$ es un isomorfismo si, y solo si, es un isomorfismo en la categoría $\boldsymbol{mql_\theta\mathcal{P}}$. De la Definición 4.1.1.4 y (F2) de la Sección 1.4.5 se sigue que un morfismo en la categoría $\boldsymbol{mql_\theta\mathcal{P}}$ es un isomorfismo si, y solo si, es un isomorfismo en las categorías $\boldsymbol{q\mathcal{P}}$ y $\boldsymbol{l_\theta\mathcal{P}}$, luego las demostraciones de la Proposición 4.1.1.19 y el Corolario 4.1.1.20 son inmediatas.

Proposición 4.1.1.19 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ *objetos de* $\boldsymbol{mql_\theta\mathcal{P}}$ $(\boldsymbol{sml_\theta\mathcal{P}})$ *y* f *una función de* X *en* X'. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es un isomorfismo en* $\boldsymbol{mql_\theta\mathcal{P}}$ $(\boldsymbol{sml_\theta\mathcal{P}})$,

(ii) f *es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo tal que:*

(lPf) $f \circ f_i = f'_i \circ f$ *para todo* $i \in I$,

(qf2) $(x, y) \in E$ *si, y solo si,* $(f(x), f(y)) \in E'$.

Corolario 4.1.1.20 *Sea* $X \in Obj(\boldsymbol{mql_\theta\mathcal{P}})$ $(X \in Obj(\boldsymbol{smql_\theta\mathcal{P}}))$. *Entonces, la función* ε_X *de* X *en* $X(D(X))$, *definida por* $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$, *es un isomorfismo en la categoría* $\boldsymbol{mql_\theta\mathcal{P}}$ $(\boldsymbol{smql_\theta\mathcal{P}})$.

La demostración del Teorema 4.1.1.21 es de rutina.

Teorema 4.1.1.21 *Los funtores* $(s)m\mathbb{L}_\theta \circ (s)mqL_\theta$ *y* $(s)mqL_\theta \circ (s)m\mathbb{L}_\theta$ *son naturalmente equivalentes a los funtores identidad* $Id_{(s)m\mathfrak{LM}_\theta}$ *e* $Id_{(s)mql_\theta\mathfrak{P}}$*, respectivamente, donde* $\{\sigma_A : A \in Obj((s)m\mathfrak{LM}_\theta)\}$ *y* $\{\varepsilon_X : X \in Obj((s)mql_\theta\mathfrak{P})\}$ *son las transformaciones naturales y por lo tanto, las categorías* $\boldsymbol{m\mathfrak{LM}_\theta}$ *y* $\boldsymbol{mql_\theta\mathfrak{P}}$ *y las categorías* $\boldsymbol{sm\mathfrak{LM}_\theta}$ *y* $\boldsymbol{smql_\theta\mathfrak{P}}$ *son dualmente equivalentes.*

4.1.2. Propiedades de los $mql_\theta P-$espacios y los $smql_\theta P-$espacios

A continuación describimos algunas propiedades de los $mql_\theta P-$espacios, que nos resultan útiles para obtener propiedades de las $mLM_\theta-$álgebras.

Lema 4.1.2.1 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Si* $x,\ y \in X$ *y* $(f_i(x), y) \in E$ *para algún* $i \in I$*, entonces* $y \leq f_i(y)$*.*

Dem. Si $(f_i(x), y) \in E$, entonces por (mqlP6) existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in E$ e $y \leq f_i(z)$, de lo cual se sigue, por las propiedades (lP3) y (lP5), que $f_i(y) = f_i(z)$ y por lo tanto, $y \leq f_i(y)$. □

Proposición 4.1.2.2 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces, para todo* $x \in X$ *y para todo* $y \in X$ *se verifica:*

(mlqP9) *Si* $(f_i(x), y) \in E$ *para algún* $i \in I$*, entonces* $y = f_i(y)$*.*

Dem. Si (1) $(f_i(x), y) \in E$, entonces por el Lema 4.1.2.1, (2) $y \leq f_i(y)$. Por otra parte, por (mqlP7) se verifica que $E(\uparrow f_i(x)) =\uparrow f_i(E(\uparrow x))$, de donde se sigue por (1) que $y \in\uparrow f_i(E(\uparrow x))$. Luego, existe $w \in E(\uparrow x)$ tal que $f_i(w) \leq y$, de lo que inferimos por (lP3) y (lP5) que $f_i(y) = f_i(w)$ y por lo tanto, $f_i(y) \leq y$. Esta última afirmación y (2) nos permiten concluir que $y = f_i(y)$. □

Corolario 4.1.2.3 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces para todo* $x \in X$ *y para todo* $i \in I$*,* $max\, E(f_i(x)) = min\, E(f_i(x)) = E(f_i(x))$*.*

Dem. Sea (1) $y \in E(f_i(x))$. Por (q2), $E(f_i(x))$ es un subconjunto cerrado de X, entonces por la propiedad (P3) de los $P-$espacios (Sección 1.4.1) existen (2) $z \in max\, E(f_i(x))$ y (3) $w \in min\, E(f_i(x))$ tales que (4) $w \leq y \leq z$. Luego, de (1), (2), (3) y (mqlP9) tenemos que $y = f_i(y)$, $z = f_i(z)$ y $w = f_i(w)$. De (4) y (lP3) obtenemos que $f_i(y) = f_i(z) = f_i(w)$ y por lo tanto, $y = z = w$, de lo que concluimos, por (1), (2) y (3), que $max\, E(f_i(x)) = min\, E(f_i(x)) = E(f_i(x))$. □

Corolario 4.1.2.4 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $smql_\theta P-$espacio. Entonces para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$, $E(f_i(x))$ es un subconjunto $E-$saturado de X tal que para todo $y \in E(f_i(x))$, $max\, E(y) = min\, E(y)) = E(f_i(x))$.*

Dem. Es consecuencia del Lema 1.4.6.5 y el Corolario 4.1.2.3. □

Corolario 4.1.2.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces se verifica:*

(mqlP10) $f_i(E(x)) = E(f_i(x))$ *para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$.*

Dem. Si $y = f_i(z)$ para algún $z \in E(x)$, entonces por (mqlP5), $(f_i(x), y) \in E$ y así, $f_i(E(x)) \subseteq E(f_i(x))$. Recíprocamente, si (1) $(f_i(x), w) \in E$, entonces de (mqlP9) resulta que (2) $w = f_i(w)$. Además, por (1) y (mqlP6) existe $t \in X$ tal que (3) $(x, t) \in E$ y (4) $w \leq f_i(t)$. De (2), (3), (4), (lP3) y (lP5) inferimos que $w = f_i(t) \in f_i(E(x))$. Por lo tanto, $f_i(E(x)) = E(f_i(x))$. □

Lema 4.1.2.6 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces se verifica:*

(mqlP11) $\uparrow f_i(E(\uparrow x)) = \uparrow f_i(E(x))$ *para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$.*

Dem. Es inmediato que $\uparrow f_i(E(x)) \subseteq \uparrow f_i(E(\uparrow x))$. Si $y \in \uparrow f_i(E(\uparrow x))$, entonces existen $z, w \in X$ tales que $f_i(z) \leq y$, $x \leq w$ y $(w, z) \in E$. De estas afirmaciones, (lP3), (lP5) y (mqlP5) inferimos que $f_i(z) = f_i(y)$, $f_i(x) = f_i(w)$ y $(f_i(w), f_i(z)) \in E$, de donde resulta que $(f_i(x), f_i(z)) \in E$ y por lo tanto, $y \in \uparrow E(f_i(x))$. □

Corolario 4.1.2.7 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces, para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$, se verifican:*

(mqlP12) $E(\uparrow f_i(x)) = \uparrow f_i(E(x))$,

(mqlP13) $E(\uparrow f_i(x)) = \uparrow E(f_i(x))$.

Dem.

(mqlP12): Se sigue de las propiedades (mqlP7) y (mqlP11) de los $mql_\theta P-$espacios.

(mqlP13): Es consecuencia inmediata de las propiedades (mqlP10) y (mqlP12) de los $mql_\theta P-$espacios. □

Corolario 4.1.2.8 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $smql_\theta P-$espacio. Entonces satisface las siguientes propiedades para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$:*

(smqlP11) $\uparrow f_i(\uparrow E(x)) = \uparrow f_i(E(x))$,

(smqlP12) $E(\uparrow f_i(x)) = \uparrow f_i(\uparrow E(x)) = \uparrow f_i(E(\uparrow x))$.

Dem.

(smqlP11): Se sigue de la propiedad (smq4) de los $smqP-$espacios y la propiedad (mqlP11) de los $mql_\theta P-$espacios.

(smqlP12): Es consecuencia de la propiedad (mqlP12) de los $mqP-$espacios y las propiedades (smq4) y (smqlP11) de los $smql_\theta P-$espacios. □

Corolario 4.1.2.9 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ tal que (X, E) es un $mqP-$espacio y $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $mql_\theta P-$espacio,*

(ii) *$(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ satisface las condiciones* (mqlP1), (mqlP2), (mqlP5), (mqlP10) *y* (mqlP13).

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia del Lema 4.1.1.7 y los Corolarios 4.1.2.5 y 4.1.2.7.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por el Lema 4.1.1.7 solo resta probar la condiciones (mqlP6) y (mqlP7).

(mqlP6): Si x, $z \in X$ y $(f_i(x), z) \in E$, entonces $z \in E(f_i(x))$, de lo cual se sigue por la propiedad (mqlP10) que $z \in f_i(E(x))$. Por lo tanto, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in E$ y $z = f_i(y)$.

(mqlP7): Por (mqlP13) y (mqlP10) se verifica que $E(\uparrow f_i(x)) = \uparrow f_i(E(x))$ para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$, entonces de la propiedad (mqlP11) (la que es consecuencia de (lP3), (lP5) y (mqlP5)) se sigue que $E(\uparrow f_i(x)) = \uparrow f_i(E(\uparrow x))$. $\square$

Corolario 4.1.2.10 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ tal que (X, E) es un $mqP-$espacio y $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $smql_\theta P-$espacio,*

(ii) *$(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ satisface las condiciones* (mqlP1), (mqlP2), (mqlP5), (mqlP10), (mqlP13), (smqP4) *y* (smqlP12).

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia del Lema 4.1.1.11 y los Corolarios 4.1.2.8 y 4.1.2.9.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por el Corolario 4.1.2.9, $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $mql_\theta P-$espacio. Además como se verifica la propiedad (smqP4), entonces por el Lema 4.1.1.11, $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $smql_\theta P-$espacio. $\square$

La siguiente propiedad de las clases de equivalencias de los $qP-$espacios nos permite obtener más información sobre los elementos de las clases de equivalencias de los $mql_\theta P-$espacios.

Lema 4.1.2.11 *Sea (X, E) un $qP-$espacio. Entonces $E(x)$ es un subconjunto convexo de X para todo $x \in X$.*

Dem. Sean $y, z \in X$ tales que (1) $z \in E(x)$ y (2) $x \leq y \leq z$. Supongamos que $(x, y) \notin E$. Entonces, por [18, Lemma 2.5] existe $U \in D(X)$ tal que (3) $y \in E(U)$ y (4) $x \notin E(U)$ ó (5) $x \in E(U)$ e (6) $y \notin E(U)$. Asumimos que se verifica (3). Luego, teniendo en cuenta que por (q1) $E(U)$ es un subconjunto creciente de X, de (2) y (3) se sigue que $z \in E(U)$ y así, por (1), concluimos que $x \in E(U)$, lo que contradice (4). Si suponemos que se verifica (5), por medio de una demostración similar probamos que no vale (6). Por lo tanto, $y \in E(x)$, resultando así, de (1) y (2), que $E(x)$ es un subconjunto convexo de X. $\square$

Corolario 4.1.2.12 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Si* $x, y \in X$ *son tales que* $x < y$, $(x, y) \in E$ *y para todo* $i \in I$, $x \neq f_i(x)$ *e* $y \neq f_i(x)$, *entonces* $\{f_i(x)\}_{i\in I} \cap [x, y] = \emptyset$, *donde* $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$.

Dem. Sean $x, y \in X$ tales que $x < y$, $(x, y) \in E$ y para todo $i \in I$, $x \neq f_i(x)$ e $y \neq f_i(x)$. Si existe $i_0 \in I$ tal que $x \leq f_{i_0}(x) \leq y$, entonces por el Lema 4.1.2.11 se verifica que $(x, f_{i_0}(x)) \in E$, de lo que se sigue por (mqlP9) que $x = f_{i_0}(x)$, lo que contradice la hipótesis. □

Lema 4.1.2.13 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Si* $x, y \in X$ *y* $(x, y) \in E$, *entonces para todo* $i \in I$, $f_i(x) \leq x$ *si, y solo si,* $f_i(y) \leq y$.

Dem. Sean $x, y \in X$ tales que (1) $(x, y) \in E$. Si $x = f_{i_0}(x)$ para algún $i_0 \in I$, entonces por (1) y (mqlP9), $y = f_{i_0}(y)$ y por lo tanto, por (lP3) podemos afirmar que $f_i(x) \leq x$ si, y solo si, $f_i(y) \leq y$. Sea ahora $x \in X$ tal que $x \neq f_i(x)$ para todo $i \in I$, entonces por (1) y (mqlP9), $y \neq f_i(y)$ para todo $i \in I$. Si $x \leq y$ o $y \leq x$, entonces por el Corolario 4.1.2.12, $\{f_i(x)\}_{i\in I} \cap [x, y] = \emptyset$ y así tenemos que $f_i(x) \leq x$ si, y solo si, $f_i(y) \leq y$. Si $y \not\leq x$ y $x \not\leq y$, entonces por (1) y (mqlP5) se verifica que (2) $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ para todo $i \in I$. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que (3) $f_{i_0}(x) \leq x$ y (4) $f_{i_0}(y) \not\leq y$. Luego, de (1) y (3) obtenemos que $y \in E(\uparrow f_{i_0}(x))$, de donde por (mqlP7) resulta que $y \in \uparrow f_{i_0}(E(\uparrow x))$, y por las propiedades (lP3)y (lP5) concluimos que $f_{i_0}(y) \leq y$, lo que contradice (4). □

4.1.3. Propiedades de las $mLM_\theta-$álgebras

En esta sección comenzamos determinando propiedades de la $mLM_\theta-$álgebra asociada a un $mql_\theta P-$espacio.

Lema 4.1.3.1 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Si* $U \in D(X)$ *es modal, entonces* $E(U)$ *es modal.*

Dem. Como U es un subconjunto modal de X, entonces por la Definición 2.1.4.1, (1) $U = {f_i}^{-1}(U)$ para todo $i \in I$. Teniendo en cuenta que $U \in D(X)$ y (mqlP3) resulta que $E(f_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(E(U))$ para todo $i \in I$, de lo que se sigue por (1) que $E(U) = {f_i}^{-1}(E(U))$ para todo $i \in I$, y por consiguiente, $E(U)$ es modal. □

Proposición 4.1.3.2 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces, para todo* $i \in I$ *y para todo* $U \in D(X)$*, se verifican las siguientes propiedades:*

(mqlP14) $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) = f_i^{-1}(E(X \setminus U))$,

(mqlP15) $\downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = E(X \setminus f_i^{-1}(U))$.

Dem.

(mqlP14): solo debemos probar que $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) \subseteq f_i^{-1}(E(X \setminus U))$. Sea $y \in X$ tal que $f_i(y) \in \downarrow E(X \setminus U)$, entonces existen $z, w \in X$ tales que (1) $f_i(y) \leq z$, (2) $(z, w) \in E$ y (3) $w \notin U$. Luego, por (1), (lP3) y (lP5), tenemos que (4) $f_i(y) = f_i(z)$. Por otro lado, de (2) y (mqlP5), obtenemos que (5) $(f_i(z), f_i(w)) \in E$ y por lo tanto, (6) $(f_i(y), f_i(w)) \in E$. Además, de (1) y (4) resulta que $f_i(z) \leq z$. De esta última afirmación, (2) y el Lema 4.1.2.13, inferimos que $f_i(w) \leq w$, y teniendo en cuenta que U es creciente y (3), se sigue que $f_i(w) \notin U$. Por consiguiente, por (6) concluimos que $y \in f_i^{-1}(E(X \setminus U))$. Así, $f_i^{-1}(\downarrow E(X \setminus U)) = f_i^{-1}(E(X \setminus U))$.

(mqlP15): Por las propiedades (lP9)(Proposición 2.1.2.6) y (lP5) de los $l_\theta P-$espacios tenemos que para todo $i \in I$, $X \setminus f_i^{-1}(U) \in D(X)$ y $X \setminus f_i^{-1}(U)$ es un subconjunto modal de X . Entonces, por el Lema 4.1.3.1, $E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ es un subconjunto modal de X y consecuentemente del Corolario 2.1.4.7, se sigue que $E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ es un subconjunto creciente y decreciente de X. Por lo tanto, $\downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = E(X \setminus f_i^{-1}(U))$. □

Corolario 4.1.3.3 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces la condición* (mqlP4) *es equivalente a la siguiente condición:*

(mqlP4*) $f_i^{-1}(E(X \setminus U)) = E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$ *y para todo* $i \in I$.

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.3.2. □

Proposición 4.1.3.4 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces para todo* $i \in I$ *y para todo* $U \in D(X)$*, se verifican las siguientes identidades:*

(i) $\forall_E\, \phi_i^X U = X \setminus \exists_E\, \overline{\phi}_i^X U$, (ii) $\exists_E\, \phi_i^X U = X \setminus \forall_E\, \overline{\phi}_i^X U$,

(iii) $\exists_E\, \overline{\phi}_i^X U = \overline{\phi}_i^X \forall_E\, U$, (iv) $\forall_E\, \overline{\phi}_i^X U = \overline{\phi}_i^X \exists_E\, U$,

(v) $\exists_E\, \overline{\phi}_i^X \exists_E\, U = \overline{\phi}_i^X \exists_E\, U$, (vi) $\forall_E \overline{\phi}_i^X \forall_E\, U = \overline{\phi}_i^X \forall_E\, U$,

(vii) $\exists_E\, \overline{\phi}_i^X \forall_E U = \overline{\phi}_i^X \forall_E\, U$, (viii) $\forall_E\, \overline{\phi}_i^X \exists_E\, U = \overline{\phi}_i^X \exists_E\, U$, *donde las operaciones* $\exists_E$, $\forall_E$, ϕ_i^X *y* $\overline{\phi}_i^X$ *están definidas como en el* Lema 4.1.1.15.

Dem. Sea $U \in D(X)$.

(i): Por la propiedad (mqlP4*) de los $mql_\theta P-$espacios (Corolario 4.1.3.3), tenemos que (1) $X \setminus \exists_E \overline{\phi}_i^X U = X \setminus E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = X \setminus f_i^{-1}(E(X \setminus U))$. Por otra parte, de la propiedad (mqlP15) (Proposición 4.1.3.2) y la propiedad (mqlP4*), obtenemos que (2) $\forall_E(\phi_i^X U) = X \setminus \downarrow E(X \setminus \phi_i^X U) = X \setminus \downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = X \setminus E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = X \setminus f_i^{-1}(E(X \setminus U))$. De (1) y (2) concluimos que $\forall \phi_i^X U = X \setminus \exists_E \overline{\phi}_i^X U$.

(ii): De la propiedad (mqlP3) de los $mql_\theta P-$espacios (Definición 4.1.1.1) inferimos que (1) $\exists_E \phi_i^X U = E(f_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(E(U))$. Por otro lado, por ser $f_i^{-1}(U)$ un subconjunto modal de X y el Lema 4.1.3.1, resulta que (2) $X \setminus \forall_E \overline{\phi}_i^X U = X \setminus \forall_E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = X \setminus (X \setminus \downarrow E(f_i^{-1}(U))) = \downarrow E(f_i^{-1}(U)) = E(f_i^{-1}(U))$. Por lo tanto, de (1) y (2) podemos afirmar que $\exists_E \phi_i^X U = X \setminus \forall_E \overline{\phi}_i^X U$.

(iii): De la propiedad (mqlP4*) de los $mql_\theta P-$espacios se sigue que (1) $\exists_E \overline{\phi}_i^X U = E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(E(X \setminus U))$. Por otra parte, por la propiedad (mqlP14) (Proposición 4.1.3.2), tenemos que (2) $\overline{\phi}_i^X \forall_E U = X \setminus f_i^{-1}(\forall_E U) = X \setminus f_i^{-1}(X \setminus \downarrow E(X \setminus U)) = X \setminus f_i^{-1}(X \setminus E(X \setminus U)) = f_i^{-1}(X \setminus (X \setminus E(X \setminus U))) = f_i^{-1}(E(X \setminus U))$. De (1) y (2), concluimos que $\exists_E \overline{\phi}_i^X U = \overline{\phi}_i^X \forall_E U$.

(iv): De las propiedades (mqlP14) (Proposición 4.1.3.2) y (mqlP4*) de los $mql_\theta P-$espacios, obtenemos que $\forall_E \overline{\phi}_i^X U = \forall_E(X \setminus f_i^{-1}(U)) = X \setminus \downarrow E(X \setminus (X \setminus f_i^{-1}(U))) = X \setminus \downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(X \setminus U)) = X \setminus E(X \setminus f_i^{-1}(X \setminus U)) = X \setminus f_i^{-1}(E(X \setminus (X \setminus U))) = X \setminus f_i^{-1}(E(U)) = \overline{\phi}_i^X \exists_E U$.

(v): Como $E(U) \in D(X)$, entonces de la propiedad (mqlP4*) de los $mql_\theta P-$espacios, se sigue que $\exists_E \overline{\phi}_i^X \exists_E U = E(X \setminus f_i^{-1}(E(U))) = f_i^{-1}(E(X \setminus E(U))) = f_i^{-1}(X \setminus E(U)) = X \setminus f_i^{-1}(E(U)) = \overline{\phi}_i^X \exists_E U$.

(vi): Por el Lema 4.1.1.15 se verifica que $\forall_E U \in D(X)$. Entonces, teniendo en cuenta la Proposición 4.1.3.2, la propiedad (mqlP3) de los $mql_\theta P-$espacios y la propiedad (M10) de los $M-$retículos, inferimos que $\forall_E \overline{\phi}_i^X \forall_E U = \forall_E(X \setminus f_i^{-1}(\forall_E U)) = X \setminus \downarrow E(f_i^{-1}(\forall_E U))) = X \setminus E(f_i^{-1}(\forall_E U)) = X \setminus f_i^{-1}(E(\forall_E U)) = \overline{\phi}_i^X \exists_E \forall_E U = \overline{\phi}_i^X \forall_E U$.

(vii): Por el Lema 4.1.1.15 tenemos que $\forall_E U \in D(X)$. Luego, de las propiedades (mqlP4*) y (mqlP14) (Proposición 4.1.3.2) de los $mql_\theta P-$espacios y la propiedad (M9) de los $M-$retículos, obtenemos que $\exists_E \overline{\phi}_i^X \forall_E U = E(X \setminus f_i^{-1}(\forall_E U)) = f_i^{-1}(E(X \setminus \forall_E U)) = X \setminus (X \setminus f_i^{-1}(E(X \setminus \forall_E U))) = X \setminus f_i^{-1}(X \setminus E(X \setminus \forall_E U)) = X \setminus f_i^{-1}(\downarrow X \setminus E(X \setminus \forall_E U)) = \overline{\phi}_i^X \forall_E \forall_E U = \overline{\phi}_i^X \forall_E U$.

(viii): Por el Lema 4.1.1.15, $\exists_E U \in D(X)$. Entonces, de las propiedades (mqlP15) (Proposición 4.1.3.2), (mqlP4*) y (M5), se sigue que $\forall_E \overline{\phi}_i^X \exists_E U = X \setminus \downarrow E(X \setminus \overline{\phi}_i^X \exists_E U) = X \setminus \downarrow E(X \setminus (X \setminus f_i^{-1}(\exists_E U))) = X \setminus \downarrow E(X \setminus f_i^{-1}(X \setminus \exists_E U)) = X \setminus E(X \setminus f_i^{-1}(X \setminus \exists_E U)) = X \setminus \overline{\phi}_i^X \exists_E \exists_E U = \overline{\phi}_i^X \exists_E U$. □

Corolario 4.1.3.5 *Sea A una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$, se verifican las siguientes identidades:*

(mL3) $\forall\, \phi_i a = -\exists\, \overline{\phi}_i a$,	(mL4) $\exists\, \phi_i a = -\forall\, \overline{\phi}_i a$,
(mL5) $\forall\, \overline{\phi}_i a = \overline{\phi}_i \exists\, a$,	(mL6) $\exists\, \overline{\phi}_i a = \overline{\phi}_i \forall a$,
(mL7) $\exists\, \overline{\phi}_i \exists\, a = \overline{\phi}_i \exists\, a$,	(mL8) $\forall\, \overline{\phi}_i \forall\, a = \overline{\phi}_i \forall\, a$,
(mL9) $\exists\, \overline{\phi}_i \forall a = \overline{\phi}_i \forall\, a$,	(mL10) $\forall\, \overline{\phi}_i \exists\, a = \overline{\phi}_i \exists\, a$.

Dem. Es consecuencia del Lema 4.1.1.16 y la Proposición 4.1.3.4 . □

Corolario 4.1.3.6 *Sea A una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$ se satisface la siguiente identidad:*

(mL11) $\forall\, \phi_i a = \overline{\phi}_i \exists\, \overline{\phi}_i a$.

Dem. Sean $i \in I$ y $a \in A$, entonces por la propiedad (L8) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2), $\phi_i \overline{\phi}_j = \overline{\phi}_i \phi_j = \overline{\phi}_j$ para todo $j \in I$, y así, $\exists\, \overline{\phi}_i a = \exists(\phi_i \overline{\phi}_i a)$. Por otra parte, por la propiedad (mL1) de las $mLM_\theta-$álgebras (Definición 4.1.1) se verifica que $\exists(\phi_i \overline{\phi}_i a) = \phi_i \exists\, \overline{\phi}_i a$ y por lo tanto, $\exists\, \overline{\phi}_i a = \phi_i \exists \overline{\phi}_i a$, de lo que se sigue por (L3) que $-\exists\, \overline{\phi}_i a = \overline{\phi}_i \exists\, \overline{\phi}_i a$. De esta identidad y la propiedad (mL3) de las $mLM_\theta-$álgebras (Corolario 4.1.3.5) concluimos que $\forall\, \phi_i a = \overline{\phi}_i \exists\, \overline{\phi}_i a$ para todo $i \in I$ y para todo $a \in A$. □

Corolario 4.1.3.7 *Sean A una $mLM_\theta-$álgebra y $C(A)$ el conjunto de los elementos booleanos de A. Entonces,* (mL12) $\forall b = -\exists - b$ *para todo* $b \in C(A)$.

Dem. Por la propiedad (L7) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2) tenemos que $b \in C(A)$, si y solo si, (1) $b = \phi_i b$ para todo $i \in I$, y de la propiedad (L2) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2) se sigue que (2) $-b = \text{-}\phi_i b$. Además, del Corolario 4.1.3.6, (1) y (2) inferimos que $\forall\, b = \overline{\phi}_i \exists - b$. Como $-b \in C(A)$, entonces por las propiedades (mL1) (Definición 4.1.1) y (L7) tenemos que $\exists - b \in C(A)$. De esta última afirmación y la propiedad (L2) concluimos que $\overline{\phi}_i \exists - b = -\exists - b$ y por lo tanto, $\forall b = -\exists - b$. □

Corolario 4.1.3.8 *Sea* A *una* $mLM_\theta-$*álgebra. Entonces* $\langle C(A), \vee, \wedge, -, 0, 1, \exists\rangle$ *es un álgebra de Boole monádica, donde* $C(A)$ *el conjunto de los elementos booleanos de* A.

Dem. Es inmediato que $\langle C(A), \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole. Además, por la Definición 4.1.1 tenemos que el álgebra $\langle C(A), \vee, \wedge, -, 0, 1, \exists, \forall\rangle$ satisface las condiciones (M1) a (M11). Por otra parte, del Corolario 4.1.3.7 y la propiedad (M10), se sigue que $\exists - \exists - b = -\exists - b$ para todo $b \in C(A)$ y por lo tanto $\langle C(A), \vee, \wedge, -, 0, 1, \exists\rangle$ satisface las condiciones (M1), (M2), (M3) y (MB1) (Sección 1.1.6), lo que nos permite para afirmar que es un álgebra de Boole monádica. □

Corolario 4.1.3.9 *Toda* $mLM_\theta-$*álgebra es una* $smLM_\theta-$*álgebra.*

Dem. solo resta probar que $\forall\,(a \vee \forall\, b) = \forall\, a \vee \forall\, b$, para todo $a,\, b \in A$. Teniendo en cuenta que para cada $i \in I$, $\overline{\phi}_i$ es un endomorfismo dual de A en A, la propiedad (mL6) de las $mLM_\theta-$álgebra (Corolario 4.1.3.5) y la propiedad (M4) de los $M-$retículos, inferimos que para todo $a,\, b \in A$ y para todo $i \in I$, $\overline{\phi}_i(\forall a \vee \forall b) = \overline{\phi}_i \forall a \wedge \overline{\phi}_i \forall b = \exists\overline{\phi}_i a \wedge \exists\overline{\phi}_i b = \exists(\overline{\phi}_i a \wedge \exists\overline{\phi}_i b) = \exists(\overline{\phi}_i a \wedge \overline{\phi}_i \forall b) = \exists\overline{\phi}_i(a \vee \forall b) = \overline{\phi}_i \forall(a \vee \forall b)$. De esta última identidad obtenemos que para todo $j \in I$, $\phi_j(\overline{\phi}_i(\forall a \vee \forall b)) = \phi_j(\overline{\phi}_i(\forall(a \vee \forall b))$, y de la propiedad (L8) de las $LM_\theta-$álgebras, se sigue que todo $j \in I$, $\phi_j(\forall a \vee \forall b) = \phi_j(\forall(a \vee \forall b)$. Entonces, por la propiedad (L6) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2), concluimos que $\forall\,(a \vee \forall\, b) = \forall\, a \vee \forall\, b$, para todo $a,\, b \in A$. □

Corolario 4.1.3.10 *Sea* A *una* $mLM_\theta-$*álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \exists, \forall)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra,*

(ii) $(A, \exists, \forall)$ *es una* $smLM_\theta-$*álgebra,*

(iii) $(A, \exists, \forall)$ *es una* $\exists\forall-$*álgebra de Łukasiewicz–Moisil* $\theta-$*valuada monádica según* [13, Chapter 8, Definition 1.4].

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia del Corolario 4.1.3.9.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es consecuencia del Corolario 4.1.3.7.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Es inmediata. □

Corolario 4.1.3.11 *Si* A *es una* $mLM_\theta-$*álgebra, entonces su* $mql_\theta P-$*espacio asociado* $mqL_\theta(A)$ *es un* $smql_\theta P-$*espacio.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Lema 4.1.1.16 y el Corolario 4.1.3.10. □

Corolario 4.1.3.12 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, 0, 1, , \exists, \forall)$ *y* $(A', \{\phi'_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi'}_i\}_{i\in I}, 0, 1, \exists', \forall')$ $mLM_\theta-$*álgebras. Si* $h : A \longrightarrow A'$ *es un* $LM_\theta-$*homomorfismo y un* $q-$*homomorfismo, entonces* h *es un* $mLM_\theta-$*homomorfismo.*

Dem. Solo resta probar que $h(\forall a) = \forall' h(a)$ para todo $a \in A$. Teniendo en cuenta la propiedad (mL6) de las mLM$_\theta-$álgebras y que $h : A \longrightarrow A'$ es un $LM_\theta-$homomorfismo y un $q-$homomorfismo, inferimos que para cada $a \in A$ y cada $i \in I$, $\overline{\phi'}_i\forall'\, h(a) = \exists'\,\overline{\phi'}_i h(a) = \exists'\, h(\overline{\phi}_i a) = h(\exists\,\overline{\phi}_i a) = h(\overline{\phi}_i \forall\, a) = \overline{\phi'}_i h(\forall\, a)$. De esta identidad y la propiedad (L2)(Sección 1.2) obtenemos que $\phi'_i\forall'\, h(a) = \phi'_i h(\forall\, a)$ para todo $i \in I$. Entonces, por la propiedad (L6) (Sección 1.2), concluimos que $h(\forall\, a) = \forall'\, h(a)$ para todo $a \in A$. □

Corolario 4.1.3.13 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *tal que* (X, E) *es un* $mqP-$*espacio, o equivalentemente un* $mk-$*marco y* $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $mql_\theta P-$*espacio,*

(ii) $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $smql_\theta P-$*espacio.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i), los Lemas 4.1.1.15 y 4.1.1.16 y el Corolario 4.1.3.11, inferimos que $(X(D(X)), \{f_i^{D(X)}\}_{i\in I}, E_{\exists_E})$ es un $smql_\theta P-$espacio, de donde concluimos, por el Corolario 4.1.1.20, que $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $smql_\theta P-$espacio.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata. $\square$

4.2. Congruencias y $\theta-$congruencias de las $mLM_\theta-$álgebras

En esta sección nuestro objetivo es investigar las congruencias y las $\theta-$congruencias de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación monádicas.

4.2.1. $mLM_\theta-$congruencias y $\theta mLM_\theta-$congruencias

En primer lugar nos abocamos a estudiar las $mLM_\theta-$congruencias y las $\theta mLM_\theta-$congruencias de una $mLM_\theta-$álgebra a través de la dualidad que hemos determinado para estas álgebras, a fin de obtener las $mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a ambas congruencias. Para ello, comenzamos considerando las nociones de subconjunto $E-$saturado y subconjunto saturado de un $mql_\theta P-$espacio, introducidas en los $mqP-$espacios en [35] y en los $q-$espacios en [18], respectivamente y a continuación determinamos propiedades de estos subconjuntos.

Definición 4.2.1.1 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Un suconjunto* Y *de* X *es* $E-$*saturado si* $min\, E(\uparrow y) \cup max\, E(y) \subseteq Y$ *para todo* $y \in Y$.

Definición 4.2.1.2 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Un suconjunto* Y *de* X *es saturado si* $E(Y) = Y$.

Lema 4.2.1.3 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces para todo subconjunto no vacío* Y *de* X *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $E-$saturado,*

(ii) *para cada $y \in Y$, $min\, E(y) \cup max\, E(y) \subseteq Y$.*

Dem. De (smq4) se sigue que para cada $x \in X$, $min\, E(\uparrow x) = min \uparrow E(x)$. Teniendo en cuenta que $min \uparrow E(x) = min\, E(x)$, la demostración está completa. □

Corolario 4.2.1.4 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces, todo subconjunto saturado de X es $E-$saturado.*

Dem. Sea $Y \subseteq X$ tal que $Y = E(Y)$. Entonces, $min\, E(y) \cup max\, E(y) \subseteq Y$ para cada $y \in Y$, de lo que concluimos, por el Lema 4.2.1.3, que Y es $E-$saturado. □

Proposición 4.2.1.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto modal de X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un subconjunto $E-$saturado de X,*

(ii) *Y es un subconjunto saturado de X.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sean y, $z \in X$ tales que (1) $y \in Y$ y (2) $z \in E(y)$. Por (q2), $E(y)$ es un subconjunto cerrado de X, entonces por (2) y la propiedad (P3) de los subconjuntos cerrados de un $P-$espacio (Sección 1.4.1), existe (3) $w \in max\, E(y)$ tal que (4) $z \leq w$. De (1), (3) y la hipótesis (i) se sigue que (5) $w \in Y$. Como además Y es un subconjunto modal de X, entonces del Corolario 2.1.4.7, (4) y (5) concluimos que $z \in Y$ y por lo tanto, $E(Y) = Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia del Corolario 4.2.1.4. □

Observación 4.2.1.6 A continuación damos otra demostración de la implicación (ii) $\Rightarrow$ (i), enunciada en la Proposición 4.2.1.5, en la que no tenemos en cuenta que la noción de $mql_\theta P-$espacio es equivalente a la de $smql_\theta P-$espacio.

(ii) $\Rightarrow$ (i) (Proposición 4.2.1.5): Es inmediato de la hipótesis (ii) que (1) $max\,(E(y)) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. Por otro lado, como Y es un subconjunto modal y saturado de X, entonces por el Corolario 2.1.4.7, $E(\uparrow y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$ y por consiguiente, (2) $min\, E(\uparrow y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. De (1) y (2) concluimos que Y es un subconjunto $E-$saturado de X.

Esta observación se debe a que más adelante indicamos otro camino diferente al de la Sección 4.1.3 para demostrar que las nociones de $mql_\theta P-$espacio y $smql_\theta P-$espacio son equivalentes.

Corolario 4.2.1.7 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces, un subconjunto Y de X es modal y $E-$saturado si, y solo si, $X \setminus Y$ es modal y $E-$saturado.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 2.1.4.7, la Proposición 4.2.1.5 y el hecho de ser E una relación de equivalencia sobre X. □

El conjunto de los subconjuntos cerrados, semimodales y $E_\exists-$saturados del $mql_\theta P-$espacio asociado a una $mLM_\theta-$álgebra es un retículo con las operaciones de intersección y unión de conjuntos, y juega un rol fundamental en la caracterización de las $mLM_\theta-$congruencias de estas álgebras, como lo mostramos a continuación.

Teorema 4.2.1.8 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ una $mLM_\theta-$álgebra y $mqL_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$ el $mql_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{SE_\exists}(mqL_\theta(A))$, de los subconjuntos cerrados, semimodales y $E_\exists-$saturados de $mqL_\theta(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{mLM_\theta}(A)$ de las $mLM_\theta-$congruencias de A, y el isomorfismo es la función $\Theta_{SE_\exists}$, definida por la prescripción: $\Theta_{SE_\exists}(Y) = \{(a,b) \in A \times A : \sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y\}$ para cada $Y \in \mathcal{C}_{SE_\exists}(\mathrm{mq}L_\theta(A))$.*

Dem. Es consecuencia directa de los Teoremas 1.4.5.2 y 2.1.4.12, teniendo en cuenta que para toda relación $\varphi \subseteq A \times A$ se verifica que φ es una $mLM_\theta-$congruencia de A si, y solo si, φ es una $LM_\theta-$congruencia y una $M-$congruencia de A. □

Corolario 4.2.1.9 *Sean $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall)$ una mLM_n-álgebra y $mqL_n(A) = (X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\}, E_\exists)$ el $mql_n P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{MS}(mqL_n(A))$, de los subconjuntos cerrados, modales y saturados de $mqL_n(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{mLM_n}(A)$ de las mLM_n-congruencias de A, y el* *isomorfismo es la función* Θ_{MS}*, definida por la misma prescripción que en el* Teorema 4.2.1.8.

Dem. Es consecuencia de las Proposiciones 2.1.4.11 y 4.2.1.5 y el Teorema 4.2.1.8. $\square$

Los $\theta-$subconjuntos $E_\exists-$saturados del $mql_\theta P-$espacio asociado a una $mLM_\theta-$álgebra nos permiten caracterizar las $\theta mLM_\theta-$congruencias de estas álgebras como se muestra en el Teorema 4.2.1.10.

Teorema 4.2.1.10 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra y* $mqŁ_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$ *el* $mql_\theta P-$*espacio asociado a* A*. Entonces, el retículo* $\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(mŁ_\theta(A))$*, de los* $\theta-$*subconjuntos* $E_\exists-$*saturados de* $mqŁ_\theta(A)$*, es isomorfo al dual del retículo* $Con_{m\theta LM_\theta}(A)$ *de las* $m\theta LM_\theta-$*congruencias de* A*, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{\theta E_\exists}$ *definida por la misma prescripción que en el* Teorema 4.2.1.8.

Dem. Es consecuencia directa de los Teoremas 1.4.5.2 y 2.1.4.18 y el hecho de que para toda relación $\varphi \subseteq A \times A$, φ es una $\theta mLM_\theta-$congruencia de A si, y solo si, φ es una $\theta LM_\theta-$congruencia y una $M-$congruencia de A. $\square$

También los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos semimodales y $E_\exists-$saturados y los subconjuntos abiertos cuyos complementos son $\theta-$subconjuntos $E_\exists-$saturados del $mql_\theta P-$espacio asociado a una $mLM_\theta-$álgebra, nos sirven para caracterizar las $mLM_\theta-$congruencias y las $\theta mLM_\theta-$congruencias de estas álgebras, respectivamente.

Teorema 4.2.1.11 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra y* $mqŁ_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$ *el* $mql_\theta P-$*espacio asociado a* A*. Entonces:*

(i) *El retículo* $\mathcal{O}_{CSE_\exists}(mqŁ_\theta(A))$*, de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos semimodales y* $E_\exists-$*saturados de* $mqŁ_\theta(A)$*, es isomorfo al retículo* $Con_{mLM_\theta}(A)$ *de las* $mLM_\theta-$*congruencias de* A*, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{OSE_\exists}$ *definida por la prescripción:*

$(a, b) \in \Theta_{OSE_\exists}(G)$ *si, y solo si,* $(\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \subseteq G$ *para todo* $a, b \in A$.

(ii) *El retículo* $\mathcal{O}_{C\theta E_\exists}(mq\text{Ł}_\theta(A))$*, de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son* $\theta-$*subconjuntos* $E_\exists-$*saturados de* $mq\text{Ł}_\theta(A)$*, es isomorfo al retículo* $Con_{\theta LM_\theta}(A)$ *de las* $\theta LM_\theta-$*congruencias de* A*, y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{O\theta E_\exists}$ *definida por la misma prescripción que en el inciso* (i).

Dem. Es una consecuencia inmediata de los Teoremas 4.2.1.8 y 4.2.1.10, teniendo en cuenta que existe una correspondencia biunívoca entre los cerrados y abiertos de un espacio topológico y además que $\Theta_{OSE_\exists}(G) = \Theta_{SE_\exists}(X(A) \setminus G)$ para todo $G \in \mathcal{O}_{CSE_\exists}(mq\text{Ł}_\theta(A))$ y $\Theta_{O\theta E_\exists}(G) = \Theta_{\theta E_\exists}(X(A) \setminus G)$ para todo $G \in \mathcal{O}_{C\theta E_\exists}(mq\text{Ł}_\theta(A))$. □

Corolario 4.2.1.12 *Sean* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall)$ *una* mLM_n-*álgebra y* $mq\text{Ł}_n(A) = (X(A), \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\}, E_\exists)$ *el* mql_nP-*espacio asociado a* A*. Entonces, el retículo* $\mathcal{O}_{MS}(mq\text{Ł}_n(A))$*, de los subconjuntos abiertos, modales y saturados de* $mq\text{Ł}_n(A)$*, es isomorfo al retículo* $Con_{mLM_n}(A)$ *de las* mLM_n-*congruencias de* A*, y el isomorfismo lo establece la función* Θ_{OMS} *definida por la prescripción:* $(a, b) \in \Theta_{OMS}(G)$ *si, y solo si,* $(\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \subseteq G$ *para todo* a*,* $b \in A$*.*

Dem. Es consecuencia del Lema 2.1.4.2, las Proposiciones 2.1.4.11 y 4.2.1.5 y el Teorema 4.2.1.11. □

4.2.2. $mLM_\theta-$congruencias y $\theta mLM_\theta-$congruencias maximales

A continuación caracterizamos las $mLM_\theta-$congruencias maximales y las $\theta mLM_\theta-$congruencias maximales de una $mLM_\theta-$álgebra. Para ello, en primer lugar caracterizamos los $\theta-$subconjuntos cerrados y $E-$saturados de un $mql_\theta P-$espacio.

Lema 4.2.2.1 *Sea* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio. Entonces para todo* $x \in X$ *y para todo* $i \in I$*,* $E(f_i(x))$ *es un subconjunto* $E-$*saturado de* X*, y para todo* $y \in E(f_i(x))$*,* $max\, E(y) = min\, E(y) = min\, E(\uparrow y) = E(f_i(x))$*.*

Dem. Es inmediato que $E(f_i(x))$ es un subconjunto saturado de X y por lo tanto, por el Corolario 4.2.1.4, Y es $E-$saturado. Sea (1) $y \in E(f_i(x))$, entonces del Corolario 4.1.2.5 se sigue que $max\, E(y) = E(f_i(x))$ y (2) $min\, E(y) = E(f_i(x))$. Por otro lado, de la propiedad (smqP4) tenemos que $E(\uparrow y) = \uparrow E(y)$, y como además $min \uparrow E(y) = min\, E(y)$, concluimos de (1) y (2) que $min\, E(\uparrow y) = E(f_i(x))$ para todo $y \in E(f_i(x))$. □

Observación 4.2.2.2 Damos otra demostración del Lema 4.2.2.1 sin usar que las nociones de $mql_\theta P-$espacio y $smql_\theta P-$espacio son equivalentes.

Sea (1) $y \in E(f_i(x))$. Entonces, del Corolario 4.1.2.5 resulta que (2) $max\, E(y) = E(f_i(x))$. Además, por la propiedad (mqlP9) y (1) tenemos que (3) $y = f_i(y)$ y por lo tanto, $E(\uparrow y) = E(\uparrow f_i(y))$. De esta última afirmación y la propiedad (mqlP13) se sigue que $min\, E(\uparrow y) = E(f_i(y))$. Además, de (1) y (3) obtenemos que $E(f_i(y)) = E(f_i(x))$, entonces (4) $min\, E(\uparrow y) = E(f_i(x))$. Y así, por (1), (2) y (4) la demostración está completa.

Proposición 4.2.2.3 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto de X, entonces:*

(i) $E(f_i(Y)) = f_i(E(Y))$ *para todo* $i \in I$,

(ii) $f_i(E(Y))$ *es un subconjunto* $E-$*saturado de* X *para todo* $i \in I$,

(iii) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$ *es un* $\theta-$*subconjunto, cerrado y* $E-$*saturado de* X.

Dem.

(i): Es consecuencia de (mqlP10).

(ii): Del inciso (i) es inmediato que $f_i(E(Y))$ es un subconjunto saturado para todo $i \in I$ y por lo tanto, del Corolario 4.2.1.4 obtenemos que $f_i(E(Y))$ es un subconjunto $E-$saturado de X para todo $i \in I$.

(iii): Del inciso (ii) y teniendo en cuenta que la unión de subconjuntos $E-$saturados de X es un subconjunto $E-$saturado de X, se sigue que $\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))$ es un subconjunto $E-$saturado de X. Entonces, por las Proposiciones 1.4.5.3 y 2.1.4.16, concluimos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$ es un $\theta-$subconjunto, cerrado y $E-$saturado de X. □

Observación 4.2.2.4 Damos otra demostración del inciso (ii) de la Proposición 4.2.2.3, en la que no usamos la equivalencia de las nociones de $mql_\theta P-$espacio y $smql_\theta P-$espacio.

(ii) (Proposición 4.2.2.3): Por el inciso (i) de la Proposición 4.2.2.3 se verifica que $f_i(E(Y)) = \bigcup\limits_{y\in Y} E(f_i(y))$, entonces del Lema 4.2.2.1 y el hecho de que la unión de subconjuntos $E-$saturados de X un subconjunto $E-$saturado de X, inferimos que $f_i(E(Y))$ es un subconjunto $E-$saturado de X para todo $i \in I$.

Proposición 4.2.2.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto cerrado, semimodal y $E-$saturado de X, entonces:*

(i) $f_i(Y) = f_i(E(Y))$ *y* $f_i(Y)$ *es un subconjunto $E-$saturado de X,*

(ii) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(Y))} \subseteq Y$,

(iii) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)}$ *es un $\theta-$subconjunto, cerrado y $E-$saturado de X.*

Dem.

(i): Por ser Y un subconjunto semimodal de X se verifica que (1) $f_i(Y) \subseteq Y$ para todo $i \in I$. Además del Lema 4.2.2.1 resulta que $max\, E(f_i(y)) \cup min\, E(f_i(y)) = max\, E(f_i(y)) \cup min\, E(\uparrow f_i(y)) = E(f_i(y))$ para todo $y \in Y$ y para todo $i \in I$. Entonces, teniendo en cuenta (1) y que Y es $E-$saturado, se sigue que $E(f_i(Y)) \subseteq Y$ para todo $i \in I$. Por consiguiente, del inciso (i) de la Proposición 4.2.2.3, obtenemos que $f_i(E(Y)) \subseteq Y$ para todo $i \in I$. De esta última afirmación y (lP5) inferimos que $f_i(E(Y)) = f_i(Y)$ para todo $i \in I$ y así, por el inciso (ii) de la Proposición 4.2.2.3, concluimos que $f_i(Y)$ es un subconjunto $E-$saturado de X para todo $i \in I$.

(ii): Del inciso (i) resulta que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(Y))} = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)}$, y como Y es un subconjunto semimodal y cerrado de X, entonces por la Observación 2.1.4.3 la demostración está completa.

(iii): Del inciso (i) obtenemos que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)} = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(Y))}$, entonces por el inciso (iii) de la Proposición 4.2.2.3 concluimos la demostración. □

Lema 4.2.2.6 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto cerrado de X, entonces Y es un $\theta-$subconjunto $E-$saturado de X si, y solo si, $Y = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(Y))}$*

Dem. Si Y es un $\theta-$subconjunto cerrado, entonces por la Proposición 2.1.4.16, $Y = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)}$. Además, como Y es un subconjunto semimodal y $E-$saturado, se sigue de la Proposición 4.2.2.5 que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))} \subseteq Y$ y por consiguiente, $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$. Recíprocamente, si $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$, entonces del inciso (iii) de la Proposición 4.2.2.3, concluimos que Y es un $\theta-$subconjunto $E-$saturado de X. □

Corolario 4.2.2.7 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un $\theta-$subconjunto cerrado de X, entonces Y es $E-$saturado si, y solo si, $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))} = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.*

Dem. Es consecuencia de las Proposiciones 2.1.4.16 y 4.2.2.3 y el Lema 4.2.2.6. □

Proposición 4.2.2.8 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces para todo subconjunto Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un $\theta-$subconjunto cerrado y $E-$saturado de X,*

(ii) $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$,

(iii) *$Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ y además Y es un subconjunto $E-$saturado de X,*

(iv) *existe un subconjunto Z de X semimodal y $E-$saturado tal que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$,*

(v) *existe un subconjunto W de X tal que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(W))}$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es inmediato del Lema 4.2.2.6.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis (ii) y el Lema 4.2.2.6 se sigue que Y es un subconjunto semimodal y $E-$saturado de X, entonces por la Proposición 4.2.2.5, $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es inmediata, considerando $Y = Z$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): De la hipótesis (iv) y la Proposición 4.2.2.5 tenemos que $f_i(Z) = f_i(E(Z))$ para todo $i \in I$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Resulta del inciso (iii) de la Proposición 4.2.2.3. □

Proposición 4.2.2.9 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces para todo subconjunto cerrado Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un elemento minimal del conjunto $\mathcal{C}^0_{\theta E}(X)$ de todos los $\theta-$subconjuntos cerrados, $E-$saturados y no vacíos de X,*

(ii) *existe $x \in X$ tal que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(x))}$,*

(iii) *Y es un elemento minimal del conjunto $\mathcal{C}^0_{SE}(X)$ de todos los subconjuntos semimodales, cerrados, $E-$saturados y no vacíos de X.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) tenemos que $Y \in \mathcal{C}^0_{\theta E}(X)$, entonces por la Proposición 4.2.2.8, $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$, de lo cual se sigue que (1) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(y))} \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. Además, por la Proposición 4.2.2.8, $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(y))} \in \mathcal{C}^0_{\theta E}(X)$, de donde por (1) y la hipótesis (i), concluimos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(y))} = Y$ para todo $y \in Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por la Proposición 4.2.2.8, (1) $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(x))} \in \mathcal{C}^0_{\theta E}(X)$ para todo $x \in X$. Sean $x \in X$ y (2) $Z \in {\mathcal{C}_{\theta E}}^0(X)$ tales que (3) $Z \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(x))}$. De la Proposición 4.2.2.8 se sigue que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(z))} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(x))}$ para cada $z \in Z$, entonces por (mqlP10), $\bigcup_{i\in I} E(f_i(z)) \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} E(f_i(x))}$ para cada $z \in Z$ y por lo tanto, $f_i(z) \in \overline{\bigcup_{i\in I} E(f_i(x))}$ para todo $i \in I$ y todo $z \in Z$, lo que nos permite asegurar que para cada $i \in I$ y cada $z \in Z$, existe una red $(y_d)_{d\in D}$ tal que (4) $y_d \in E(f_{i_d}(x))$ y (5) $y_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} f_i(z)$. De (4) y (mqlP9) inferimos que $y_d = f_{i_d}(y_d)$ y por consiguiente, de (5) tenemos que $f_{i_d}(y_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} f_i(z)$, de donde se sigue, por (lP2), (lP5) y el Teorema 2.1.1.14, que (6) $f_i(y_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} f_i(z)$. Además, de (4), (mqlP10) y (lP5), resulta que $f_i(y_d) \in E(f_i(x))$, entonces de (q2) y (6) obtenemos que $f_i(z) \in E(f_i(x))$ y así, $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(z))} = \overline{\bigcup_{i\in I} \{f_i(E(x))\}}$ para todo $z \in Z$. Esta última afirmación y (2) implican que $Z = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(x))}$. Luego, de (1), (2) y (3) concluimos la demostración.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sea $Z \in \mathcal{C}^0_{SE}(X)$ tal que (1) $Z \subseteq Y$. Por la Proposición 4.2.2.5 tenemos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(z))} \subseteq Z$ para todo $z \in Z$, de donde por (1) se sigue que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(z))} \subseteq Y$ para todo $z \in Z$. De esta úlima afirmación, la hipótesis (ii) y la Proposición 4.2.2.9 resulta que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(z))}$ para todo $z \in Z$ y por lo tanto, $Y = Z$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (iii) tenemos que $Y \in \mathcal{C}^0_{SE}(X)$, entonces de la Proposición 4.2.2.5 resulta que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(y))} \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. Además, por el Corolario 4.2.2.3 se verifica que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(y))} \in {\mathcal{C}_{SS}}^0(X)$ para todo $y \in Y$, de donde concluimos, por la hipótesis (iii), que $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(y))}$ para todo $y \in Y$. □

Corolario 4.2.2.10 *Sea A una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces, toda $mLM_\theta-$congruencia ϑ de A es una $mLM_\theta-$congruencia maximal si, y solo si, ϑ es una $\theta mLM_\theta-$congruencia maximal de A.*

Dem. En virtud del Teorema 4.1.1.21, ϑ es una $mLM_\theta-$congruencia maximal de A si, y solo si, existe un elemento minimal Y de $\mathcal{C}^0_{SE_\exists}(X(A)) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\vartheta = \Theta_{SE_\exists}(Y)$. Por la Proposición 4.2.2.9, esta última afirmación es equivalente a que Y sea un elemento minimal de $\mathcal{C}^0_{\theta E_\exists}(X(A))\setminus\{\emptyset\}$. Como $\Theta_{SE_\exists}(Y) = \Theta_{\Theta E_\exists}(Y)$, por el Teorema 4.2.1.8, concluimos que ϑ es una $mLM_\theta-$congruencia maximal si, y solo si, ϑ es una $\theta mLM_\theta-$congruencia maximal de A. □

Corolario 4.2.2.11 *Sea A una $mLM_\theta-$álgebra. Si φ es una $mLM_\theta-$congruencia maximal de A, entonces el álgebra cociente A/φ es una $mLM_\theta-$álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia del Corolario 4.2.2.10 ya que que las álgebras cocientes por $\theta mLM_\theta-$congruencias son $mLM_\theta-$álgebras. □

Corolario 4.2.2.12 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ una $mLM_\theta-$álgebra y su $mql_\theta P-$espacio asociado $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$. Entonces para todo $mLM_\theta-$congruencia φ de A, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $mLM_\theta-$congruencia maximal,*

(ii) *existe $P \in X(A)$ tal que $\varphi = \Theta_{SE_\exists}(P)$, donde $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} E_\exists(\phi_i^{-1}(P))}$,*

$\Theta_{SE_\exists}(Y)$ *está definida como en el* Teorema 4.2.1.8 *y la relación $E_\exists$ como en el* Lema 4.1.1.16.

Dem. En consecuencia inmediata de los Teoremas 4.2.1.8 y 4.2.1.10, la Proposición 4.2.2.9 y el Corolario 4.2.2.10. □

Corolario 4.2.2.13 *Sean* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall)$ *una* mLM_n-*álgebra y* $(X(A), \{f_1^A, \ldots f_{n-1}^A\}, E_\exists)$ *su* mql_nP-*espacio asociado. Entonces para todo* mLM_n-*congruencia* φ *de* A*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* mLM_n-*congruencia maximal,*

(ii) $\varphi = \Theta_{MS}(Y)$*, donde* Y *es un elemento minimal del retículo* $\mathcal{C}^0_{MS}(X(A))$ *de todos los subconjuntos modales, cerrados, saturados y no vacíos de* $X(A)$*,*

(iii) $\varphi = \Theta_{MS}(Y)$*, donde* $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} E_\exists({\phi_i}^{-1}(P))$ *para algún* $P \in X(A)$*,*

(iv) $\varphi = \Theta_{MS}(Y)$*, donde* Y *es la unión de cadenas maximales de* $X(A)$ *equivalentes,*

(v) $\varphi = \mathbf{\Theta}(F), \quad F = \bigcap\limits_{\substack{Q \in X(A) \\ Q \cap \exists(A) = P \cap \exists(A)}} {\phi_1}^{-1}(Q)$ *para algún* $P \in X(A)$*,*

donde $\mathbf{\Theta}(F)$ *es la* mLM_n-*congruencia asociada al filtro* F *y* $\Theta_{MS}(Y)$ *está definida como en el* Corolario 4.2.1.9.

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): De las Proposiciones 2.1.4.11 y 4.2.1.5 inferimos que $\mathcal{C}^0_{SE_\exists S}(X(A)) = \mathcal{C}^0_{MS}(X(A))$, entonces por la Proposición 4.2.2.9 la demostración está completa.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Se sigue del Corolario 4.2.2.12.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Es consecuencia de la propiedades (mlqP5) (Lema 4.1.1.7) y (mlqP9) (Proposición 4.1.2.2).

(iii) $\Rightarrow$ (v): De la hipótesis (iii) y las propiedades (mlqP5), (mlqP9) y (q2) de los mql_nP-espacios, inferimos que Y es un subconjunto modal, cerrado y saturado de $X(A)$ y por la tanto, Y es un subconjunto cerrado y creciente de $X(A)$. Entonces, de (A11) (Sección 1.4.1) se sigue que $\varphi = \Theta_{MS}(Y) = \mathbf{\Theta}(F)$, donde $F = \bigcap\limits_{Q \in Y} Q = \bigcap\limits_{Q \in Y} {\phi_1}^{-1}(Q) = \bigcap\limits_{\substack{Q \in X(A) \\ Q \cap \exists(A) = P \cap \exists(A)}} {\phi_1}^{-1}(Q)$.

(v) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis (iii) y (A10) (Sección 1.4.1) obtenemos que $\varphi = \mathbf{\Theta}(F) = \Theta_{MS}(Y)$, donde $Y = \{P \in X(A) : F \subseteq P\}$. De esta última afirmación y las propiedades (mlqP5) y (mlqP9) concluimos que $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} E_\exists({\phi_i}^{-1}(P))$. $\square$

Corolario 4.2.2.14 *Toda $mLM_\theta-$álgebra es semisimple.*

Dem. Sean A una $mLM_\theta-$álgebra y ϑ_M una $mLM_\theta-$congruencia maximal de A, entonces por el Corolario 4.2.2.12, $\vartheta_M = \Theta_{SE_\exists}\left(\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(E_\exists(x))}\right)$ para algún $x \in X(A)$. Sea (1) $\vartheta = \bigcap\limits_{x\in X(A)} \Theta_{SE_\exists}\left(\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(E_\exists(x))}\right)$. Luego, $\vartheta \in Con_{mLM_\theta}(A)$ y por el Teorema 4.2.1.8 existe $F \in \mathcal{C}_{SE_\exists}(mq\text{Ł}_\theta(A))$ tal que $\vartheta = \Theta_{SE_\exists}(F)$. Por lo tanto, de (1) y el Teorema 4.2.1.8 se sigue que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(E_\exists(x))} \subseteq F$ para todo $x \in X(A)$. Como $\bigcup\limits_{i\in I}\{f_i^A(x)\} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} E_\exists(f_i^A(x)) = \bigcup\limits_{i\in I} f_i^A(E_\exists(x))$, entonces $\bigcup\limits_{x\in X(A)} \bigcup\limits_{i\in I}\{f_i^A(x)\} \subseteq F$, y por ser F un subconjunto cerrado de $mq\text{Ł}_\theta(A)$, tenemos que $\overline{\bigcup\limits_{x\in X(A)} \bigcup\limits_{i\in I}\{f_i^A(x)\}} \subseteq F$ y así, por (lP6) concluimos que $F = X(A)$; por esto, $\vartheta = \{(a,a) : a \in A\}$. Por consiguiente, A es isomorfa al producto subdirecto de las álgebras cocientes $A/_{\Theta_{SE_\exists}(\overline{\bigcup_{i\in I} f_i^A(E_\exists(x))})}$, con $x \in X(A)$, las cuales por el Corolario 4.2.2.11 son $mLM_\theta-$álgebras simples, lo que nos permite concluir la demostración. □

4.2.3. $mLM_\theta-$congruencias y $\theta mLM_\theta-$congruencias booleanas

El retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados, modales y saturados del $mql_\theta P-$espacio asociado a una $mLM_\theta-$álgebra desempeña un rol fundamental en la caracterización de las $mLM_\theta-$congruencias booleanas de estas álgebras, como lo probamos a continuación.

Teorema 4.2.3.1 *Sean $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ una $mLM_\theta-$álgebra y $mq\text{Ł}_\theta(A) = (X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$ el $mql_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ de los subconjuntos abiertos, cerrados, modales y saturados de $mq\text{Ł}_\theta(A)$ es isomorfo al retículo (dual del retículo) $Con_{bmLM_\theta}(A)$ de las $mLM_\theta-$congruencias booleanas de A, donde el isomorfismo Θ_{OMS} (Θ_{MS}) es la retricción del isomorfismo $\Theta_{OSE_\exists}$ ($\Theta_{SE_\exists}$) a $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ definido en el* Teorema 4.2.1.11 (Teorema 4.2.1.8).

Dem. Por el Lema 2.1.4.2 y la Proposición 4.2.1.5, $\mathcal{CO}_{MS}(X(A)) \subseteq \mathcal{C}_{SE_\exists}(X(A))$ y $\mathcal{CO}_{MS}(X(A)) \subseteq \mathcal{O}_{CSE_\exists}(X(A))$ y por lo tanto, (1) $\Theta_{MS} = \Theta_{SE_\exists}|\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ y (2) $\Theta_{OMS} = \Theta_{OSE_\exists}|\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$. Además, del Corolario 4.2.1.7 tenemos que para todo $Y \subseteq X(A)$ se verifica que $Y \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ si, y solo si, $X(A)\backslash Y \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$. Luego, si $Y \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$, de la última afirmación, (1), (2), los Teoremas 4.2.1.8 y 4.2.1.11, inferimos que $\Theta_{MS}(Y) \in Con_{mLM_\theta}(A)$, $\Theta_{MS}(X(A) \setminus Y) \in Con_{mLM_\theta}(A)$ y además que $\Theta_{OMS}(Y) \in Con_{mLM_\theta}(A)$ y $\Theta_{OMS}(X(A) \setminus Y) \in Con_{mLM_\theta}(A)$. Luego, por los Teoremas 4.2.1.8 y 4.2.1.11, concluimos que $\Theta_{MS}(Y) \in Con_{mLM_\theta}(A)$ y $\Theta_{OMS}(Y) \in Con_{mLM_\theta}(A)$.

Recíprocamente, sea $\varphi \in Con_{bmLM_\theta}(A)$. Entonces $\varphi \in Con_{bLM_\theta}(A)$, de donde se sigue, por el Teorema 3.2.1.9, que existe (5) $Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ tal que $\varphi = \Theta_M(Y)$ y existe (6) $Z \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ tal que $\varphi = \Theta_{OM}(Z)$ $(Z = X(A) \setminus Y)$. Además, como $\varphi \in Con_{mLM_\theta}(A)$, entonces de los Teoremas 4.2.1.8 y 4.2.1.11 obtenemos que Y y Z son subconjuntos $E_\exists-$saturados de $X(A)$, de donde inferimos, de (5), (6) y la Proposición 4.2.1.5, que $Y, Z \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$. Por lo tanto, Θ_{MS} y Θ_{OMS} son funciones sobreyectivas de $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ en $Con_{bmLM_\theta}(A)$, y así por los Teoremas 4.2.1.8 y 4.2.1.11, concluimos que Θ_{MS} es un anti–isomorfismo de retículo y Θ_{OMS} es un isomorfismo de retículo, de $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ en $Con_{bmLM_\theta}(A)$. □

Corolario 4.2.3.2 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra. Entonces, las* $mLM_\theta-$*congruencias booleanas de* A *son conmutativas.*

Dem. Se sigue del Teorema 4.2.3.1 por medio de un razonamiento análogo al usado en la demostración del Corolario 3.2.1.13. □

A continuación obtenemos otra caracterización de las $mLM_\theta-$congruencias booleanas, la cual nos resulta útil para determinar algunas propiedades propiedades de las mismas.

Proposición 4.2.3.3 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra y su* $mql_\theta P-$*espacio asociado* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$. *Entonces para todo subconjunto* Y *de* $X(A)$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es un subconjunto abierto, cerrado, modal y saturado de* $X(A)$,

(ii) *existe* $a \in \exists(C(A))$ *tal que* $Y = \sigma_A(a)$,

(iii) *existen* $i \in I$ *y* $a \in A$ *tales que* $Y = \sigma_A(\exists\phi_i a) = \sigma_A(\phi_i \exists a)$,

(iv) *existen* $i \in I$ *y* $a \in A$ *tales que* $Y = \sigma_A(\forall\phi_i a) = \sigma_A(\phi_i \forall a)$,

(v) *existe* $a \in \forall(C(A))$ *tal que* $Y = \sigma_A(a)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por la hipótesis (i) y la Proposición 3.2.1.7, existe $a \in C(A)$ tal que (1) $Y = \sigma_A(a)$. Además, como Y es saturado, entonces $Y = E(\sigma_A(a))$, y así de los Lemas 4.1.1.15 y 4.1.1.16 se sigue que (2) $Y = \sigma_A(\exists a)$. Luego, de (1) y (2) obtenemos que $a = \exists a$ y por lo tanto, $a \in \exists(C(A))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se deduce de las propiedades (L7) (Sección 1.2) y (mL1) (Definición 4.1.1).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Por el Lema 4.1.1.16 y la propiedad (mqlP3) de los $mql_\theta P-$espacios, $\sigma_A(\exists\phi_i a) = E_\exists(f_i^{A^{-1}}(\sigma_A(a))) = f_i^{A^{-1}}(E_\exists(\sigma_A(a)))$ para todo $i \in I$ y por lo tanto, Y es un subconjunto abierto, cerrado, modal y saturado de $X(A)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv): Es consecuencia del Corolario 4.1.3.10 y las propiedades (L7) (Sección 1.2), (EU6) (Sección 1.3) y (mL2) (Definición 4.1.1).

(ii) $\Leftrightarrow$ (v): Resulta del Corolario 4.1.3.10 y la propiedad (EU6) (Sección 1.3). $\square$

Corolario 4.2.3.4 *Sea A una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces, las álgebras booleanas $\exists\, C(A)$ y $Con_{bmLM_\theta}(A)$ son isomorfas y por lo tanto, $|Con_{bmLM_\theta}(A)| = |\exists\, C(A)|$.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.2.3.1 y la Proposición 4.2.3.3. $\square$

Corolario 4.2.3.5 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$, $\mathbf{\Theta}(\uparrow \exists\phi_i a\,)$ y $\mathbf{\Theta}(\uparrow \forall\phi_i a\,)$ son $mLM_\theta-$congruencias booleanas.*

Dem. Por (A13) (Proposición 1.4.1.4) se verifica que (1) $\mathbf{\Theta}(\uparrow \exists\,\phi_i a\,) = \Theta(\sigma_A(\exists\,\phi_i a))$ y (2) $\mathbf{\Theta}(\uparrow \forall\,\phi_i a\,) = \Theta(\sigma_A(\forall\,\phi_i a))$. Además, la Proposición 4.2.3.3 nos permite establecer que $\sigma_A(\exists\,\phi_i a) \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ y $\sigma_A(\forall\,\phi_i a) \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$, entonces del Teorema 4.2.3.1 se sigue que $\Theta(\sigma_A(\exists\,\phi_i a)) = \Theta_{CMS}(\sigma_A(\exists\,\phi_i a))$ y $\Theta(\sigma_A(\forall\,\phi_i a)) = \Theta_{CMS}(\sigma_A(\forall\,\phi_i a))$ son $mLM_\theta-$congruencias booleanas de A. Por lo tanto, de estas últimas afirmaciones, (1) y (2) concluimos la demostración. $\square$

Corolario 4.2.3.6 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces para toda relación $\varphi \subseteq A \times A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $mLM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existen $i \in I$ y $a \in A$ tales que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow \exists\, \phi_i a) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i \exists\, a)$,*

(iii) *existen $i \in I$ y $a \in A$ tales que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow \forall\, \phi_i a) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i \forall\, a)$,*

(iv) *existe $a \in \exists(C(A))$ tal que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow a)$,*

(v) *existe $a \in \forall(C(A))$ tal que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow a)$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) y el Teorema 4.2.3.1 inferimos que existe un subconjunto Y de $X(A)$ abierto, cerrado, modal y saturado tal que (1) $\varphi = \Theta_M(Y)$. Además, por la Proposición 4.2.3.3, existen $a \in A$ e $i \in I$, tales que (2) $Y = \sigma_A(\exists\, \phi_i a) = \sigma_A(\phi_i \exists\, a)$. Luego, de (1), (2) y (A13) (Proposición 1.4.1.4) concluimos que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow \exists\, \phi_i a) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i \exists\, a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Resulta del Corolario 4.2.3.5.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia del Corolario 4.1.3.10 y las propiedades (EU2), (EU3) (Sección 1.3), (mL1) y (mL2) (Definición 4.1.1).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv): Se sigue del Corolario 4.1.3.10 y las propiedades (L7) (Sección 1.2) y (E9) (Sección 1.3).

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Se obtiene del Corolario 4.1.3.10 y la propiedad (EU6) (Sección 1.3). $\square$

Corolario 4.2.3.7 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ una $mLM_\theta-$álgebra. Entonces las $mLM_\theta-$congruencias booleanas de A son regulares y uniformes.*

Dem. Sea φ una $mLM_\theta-$congruencia booleana de A. Entonces, por el Corolario 4.2.3.6, existen $a \in A$ e $i \in I$ tales que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow \exists\, \phi_i a) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i \exists\, a)$. Además, para cada $b \in A$ tenemos que $[b]_\varphi = \{(b \wedge \phi_i \exists\, a) \vee c :\ c \in \downarrow \overline{\phi}_i \exists\, a\}$, donde $[b]_\varphi$ es la clase de equivalencia de b módulo φ. De esta última afirmación inferimos que $[0]_\varphi = \downarrow \overline{\phi}_i \exists\, a$ y por lo tanto, para todo $b \in A$ se verifica que $[b]_\varphi = \{(b \wedge \phi_i \exists\, a) \vee c :\ c \in [0]_\varphi\}$ y en consecuencia, $|[b]_\varphi| = |[0]_\varphi|$, lo que nos permite concluir la demostración. $\square$

Proposición 4.2.3.8 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto de X abierto y cerrado, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es un* $\theta-$*subconjunto* $E_\exists-$*saturado de* $X(A)$,

(ii) Y *es un subconjunto modal y saturado.*

Dem.: Es consecuencia de las Proposiciones 3.2.1.4 y 4.2.1.5. □

Proposición 4.2.3.9 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra y su* $mql_\theta P-$*espacio asociado* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$. *Entonces para cada* $Y \subseteq X(A)$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{\theta SS}(Y)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*congruencia booleana de* A,

(ii) Y *es un* $\theta-$*subconjunto abierto, cerrado y* $E_\exists-$*saturado de* $X(A)$,

(iii) Y *es un subconjunto modal, abierto, cerrado y saturado de* $X(A)$,

(iv) $\Theta_{OSS\theta}(Y)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*congruencia booleana de* A,

donde $\Theta_{\theta SS}(Y)$ *y* $\Theta_{OSS\theta}(Y)$ *están definidas como en el* Teorema 4.2.1.10 *y el* Teorema 4.2.1.11*, respectivamente.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) y el Teorema 4.2.1.10 inferimos (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Resulta de la Proposición 4.2.3.8.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): De la hipótesis (iii) y la Propsosición 4.2.3.8 obtenemos que Y y $X(A)\setminus Y$ son $\theta-$subconjuntos cerrados y $E_\exists-$saturados de $X(A)$, entonces por el Teorema 4.2.1.11 concluimos que se verifica (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (iv) y los Teoremas 4.2.1.10 y 4.2.1.11 reulta que se verifica (i). □

Corolario 4.2.3.10 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra. Si* φ *es una* $mLM_\theta-$*congruencia de* A, *entonces* φ *es una* $mLM_\theta-$*congruencia booleana si, y solo si,* φ *es una* $\theta mLM_\theta-$*congruencia booleana.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.2.3.1 y la Proposición 4.2.3.9. □

4.3. Las $mLM_\theta-$álgebras y las $\theta mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Nuestro objetivo es describir las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas sin negación monádicas subdirectamente irreducibles con respecto a las congruencias y con respecto a las $\theta-$congruencias.

4.3.1. Propiedades de las $mLM_\theta-$álgebras y las $\theta mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Las propiedades que demostramos en primer lugar las usamos posteriormente para hallar una caracterización de las $mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles y de las $\theta mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles.

Proposición 4.3.1.1 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mq_\theta P-$espacio. Si $x \in X$ y $x = f_i(x)$ para algún $i \in I$, entonces:*

(i) *$f_i^{-1}(E(x))$ es un subconjunto cerrado, modal y saturado de X tal que*

$x \in f_i^{-1}(E(x))$,

(ii) *$f_i^{-1}(E(x))$ es un subconjunto $E-$saturado de X,*

(iii) *si $E(y) = E(x)$, entonces $y \in max\, E(x) \cup min\, E([x))$,*

(iv) *$\overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))}$ es un $\theta-$subconjunto cerrado y $E-$saturado de X tal que*

  (a) *$x \in \overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))}$,*

  (b) *$f_i(z) \notin \overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))}$ para todo $z \in X$ tal que $(f_i(z), f_i(x)) \notin E$.*

Dem.

(i): De las hipótesis es inmediato que $x \in f_i^{-1}(E(x))$. Por otra parte, de las propiedades (q2), (lP2), (lP5) y el Teorema 2.1.1.16 se sigue que $f_i^{-1}(E(x))$ es un subconjunto cerrado y modal de X. Además $f_i^{-1}(E(x))$ es saturado. En efecto, si $y \in E({f_i}^{-1}(E(x)))$, entonces existe $z \in X$ tal que $(y, z) \in E$ y $(f_i(z), x) \in E$. De las dos últimas afirmaciones, la propiedad (mqlP5) y por ser E una relación de equivalencia, inferimos que $(f_i(y), x) \in E$ y por lo tanto, $E({f_i}^{-1}(E(x))) = {f_i}^{-1}(E(x))$.

(ii): Es consecuencia del inciso (i) y el Lema 4.2.1.3 o de el inciso (i) y la Proposición 4.2.1.5.

(iii): Como $x = f_i(x)$, entonces por el Corolario 4.1.2.3 y el Lema 4.2.2.1, $E(x) = max\, E(x) \cup min\, E(\uparrow x)$, de donde se sigue que $E(y) = E(x)$ implica que $y \in max\, E(x) \cup min\, E(\uparrow x)$.

(iv): Por la Proposición 4.2.2.8, $\overline{\bigcup\limits_{j \in I} f_j(E(x))}$ es un $\theta-$subconjunto cerrado y $E-$saturado de X.

(a): Es inmediato que $x \in \overline{\bigcup\limits_{j \in I} f_j(E(x))}$.

(b): Sea $z \in X$ tal que (1) $(f_i(z), f_i(x)) \notin E$ y supongamos $f_i(z) \in \overline{\bigcup\limits_{j \in I} f_j(E(x))}$, luego existe una red (2) $(x_d)_{d \in D} \subseteq E(x)$ tal que $f_{j_d}(x_d) \underset{d \in D}{\longrightarrow} f_i(z)$. Por (lP5), (lP2) y el Teorema 2.1.1.14 se sigue que (3) $f_i(x_d) \underset{d \in D}{\longrightarrow} f_i(z)$. Teniendo en cuenta que (4) $x = f_i(x)$, entonces de (2) y (mqlP9), obtenemos que $x_d = f_i(x_d)$ para todo $d \in D$ y por lo tanto, por (3) tenemos que $x_d \underset{d \in D}{\longrightarrow} f_i(z)$. De esta última afirmación, (2), (4), el Lema 2.1.1.7 y por ser $E(x)$ es un subconjunto cerrado de X, concluimos que $f_i(z) \in E(f_i(x))$, lo que contradice (1). $\square$

Lema 4.3.1.2 *Sea $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto de X no vacío y semimodal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f_i(X) \subseteq Y$ *para todo* $i \in I$,

(ii) $f_i(X) \subseteq Y$ *para algún* $i \in I$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si Y es un subconjunto semimodal de X tal que $f_{i_0}(X) \subseteq Y$ para algún $i_0 \in I$, entonces por (lP5) se verifica que $f_i(X) \subseteq Y$ para todo $i \in I$. $\square$

Lema 4.3.1.3 *Sea $(X, \{f_i\}_{i \in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces el único subconjunto de X cerrado y semimodal que contiene a $f_i(X)$ para algún $i \in I$ es el propio espacio.*

Dem. Si Y es un subconjunto semimodal de X tal que $f_i(X) \subseteq Y$ para algún $i \in I$, entonces por el Lema 4.3.1.2, $f_i(X) \subseteq Y$ para todo $i \in I$. Si además Y es cerrado, entonces $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(X)} \subseteq Y$, de donde concluimos, por (lP6), que $Y = X$. □

Corolario 4.3.1.4 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ un $l_\theta P-$espacio. Entonces el único $\theta-$subconjunto cerrado de X que contiene a $f_i(X)$ para algún $i \in I$ es el propio espacio.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Lema 4.3.1.3 y teniendo en cuenta que todo $\theta-$subconjunto de X es un subconjunto semimodal de X. □

Lema 4.3.1.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Si Y es un subconjunto cerrado, semimodal y $E-$saturado propio de X, entonces para cada $i \in I$, $f_i^{-1}(Y)$ es un subconjunto cerrado, modal y saturado de X que contiene a Y.*

Dem. Sea $i \in I$. Como por hipótesis, Y es un subconjunto cerrado de X, entonces por (lP2) y y el Teorema 2.1.1.16, $f_i^{-1}(Y)$ es subconjunto cerrado de X. Por otro lado, de (lP5) obtenemos que $f_i^{-1}(Y)$ es un subconjunto modal de X, y por ser Y un subconjunto semimodal de X se verifica que $Y \subseteq f_i^{-1}(Y)$. Además $f_i^{-1}(Y)$ es saturado. En efecto, sean $z, w \in X$ tales que (1) $(z, w) \in E$ y $f_i(w) \in Y$. Como Y es $E-$saturado, entonces $max\, E(f_i(w)) \subseteq Y$, de donde se sigue, por (1) y (mqlP5), que $max\, E(f_i(z)) \subseteq Y$ y por lo tanto, del Corolario 4.1.2.3, concluimos que $f_i(z) \in Y$. □

Corolario 4.3.1.6 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio, Si Y es un elemento maximal del conjunto $\mathcal{C}_{SS}(X)\backslash\{X\}$ de todos los subconjuntos cerrados, semimodales y $E-$saturados propios de X, entonces Y es un subconjunto modal y saturado de X.*

Dem. Del Lema 4.3.1.5 tenemos que para cada $i \in I$, (1) $Y \subseteq f_i^{-1}(Y)$ y $f_i^{-1}(Y)$ es un subconjunto cerrado, modal y saturado de X. Luego, $f_i^{-1}(Y)$ es $E-$saturado y por lo tanto $f_i^{-1}(Y) \in \mathcal{C}_{SES}(X)$. Como Y es un elemento maximal de $\mathcal{C}_{SES}(X) \setminus \{X\}$, entonces de (1) se sigue que para cada $i \in I$, (2) $f_i^{-1}(Y) = X$ o (3) $Y = f_i^{-1}(Y)$. Si se verifica (2), entonces $f_i(X) \subseteq Y$, de donde obtenemos, por el Corolario 4.3.1.4, que $Y = X$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto se verifica (3), lo que nos permite concluir que Y es modal. □

Proposición 4.3.1.7 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio tal que $m\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $mLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible. Si Y es un subconjunto de X, no vacío, cerrado y semimodal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $E-$saturado,*

(ii) *$f_i(X) \subseteq Y$ para algún $i \in I$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $f_i(X) \nsubseteq Y$ todo $i \in I$, entonces $Y \in \mathcal{C}_{SES}(X)\setminus\{\emptyset, X\}$. Como $m\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $mLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible, por el Teorema 4.2.1.8 inferimos que el conjunto $\mathcal{C}_{SES}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ tiene último elemento Z. Luego, los Lemas 4.3.1.2 y 4.3.1.3 nos permiten afirmar que existe (1) $x \in f_i(X) \setminus Z$ para algún $i \in I$, de donde obtenemos por (lP5) que (2) $x = f_i(x)$. Entonces, por la Proposición 4.3.1.1, $f_i^{-1}(E(x)) \in \mathcal{C}_{SES}(X) \setminus \{\emptyset\}$, de lo que se sigue de (1) que $f_i^{-1}(E(x)) = X$ y así, $f_i(X) \subseteq E(x)$. De (2) y (mqlP10) resulta que $E(x) \subseteq f_i(X)$ y por consiguiente, (3) $E(x) = f_i(X)$. Por otra parte del Corolario 4.3.1.6 tenemos que Z es un subconjunto no vacío, modal y saturado y por lo tanto, $E(f_i(Z)) \subseteq Z$. Además, de (3) y (mqlP9) obtenemos que $E(f_i(Z)) = f_i(X)$. De las dos últimas aseveraciones concluimos que $f_i(X) \subseteq Z$, lo que contradice (1).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia del Lema 4.3.1.3. □

Proposición 4.3.1.8 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio tal que $m\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $m\theta LM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible. Si Y es un $\theta-$subconjunto cerrado de X no vacío, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $E-$saturado,*

(ii) *$f_i(X) \subseteq Y$ para algún $i \in I$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $f_i(X) \nsubseteq Y$ todo $i \in I$, entonces $Y \in \mathcal{C}_{\theta ES}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Como $m\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $\theta mLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible, por el Teorema 4.2.1.10 inferimos que el conjunto $\mathcal{C}_{\theta ES}(X) \setminus \{X\}$ tiene último elemento Z. Entonces, por el Corolario 4.3.1.4 podemos afirmar que existe (1) $x \in f_i(X) \setminus Z$ para algún $i \in I$, de lo que obtenemos por (lP5) que (2) $x = f_i(x)$. Entonces, por la Proposición 4.3.1.1, $\overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))} \in \mathcal{C}_{\theta ES}(X)$, (3) $x \in \overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))}$ y (4) $f_i(z) \notin \overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))}$ para todo $z \in X$ tal que $(f_i(z), f_i(x)) \notin E$. Por lo tanto, de (1) y (3) tenemos que $\overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))} \not\subseteq Z$, de donde se sigue que (5) $\overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))} = X$. Como Z es un $\theta-$subconjunto no vacío de X, $Z \cap f_i(X) \neq \emptyset$, entonces por (lP5) existe $z \in Z$ tal que (6) $z = f_i(z)$. Además, de (5) obtenemos que $f_i(z) \in \overline{\bigcup_{j\in I} f_j(E(x))}$, de lo que resulta de (4) que $(f_i(z), f_i(x)) \in E$. Entonces, de (2) y (6) tenemos que (7) $E(z) = E(x)$. Luego, de (6), (7) y el Lema 4.2.2.1, se sigue que $x \in max\, E(z) \cup \min\ E(z) = max\, E(z) \cup \min\ E([z))$, y así por (1), existe $z \in Z$ tal que $max\, E(z) \cup \min\ E([z)) \not\subseteq Z$. Esta última afirmación nos permite concluir que Z no es un subconjunto $E-$saturado de X, lo que contradice que $Z \in \mathcal{C}_{\theta ES}(X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se sigue inmediatamente del Corolario 4.3.1.4. $\square$

A continuación utilizamos los resultados que acabamos de obtener para determinar las $mLM_\theta-$álgebras y las $\theta mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles.

Proposición 4.3.1.9 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio y su* $mLM_\theta-$*álgebra asociada* $m\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_E)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.2.1.8, el Lema 4.3.1.3 y la Proposición 4.3.1.7. $\square$

Proposición 4.3.1.10 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio y su* $mLM_\theta-$*álgebra asociada* $m\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_E)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.2.1.10, el Corolario 4.3.1.4 y la Proposición 4.3.1.8. □

Proposición 4.3.1.11 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio y* $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *la* $mLM_\theta-$*álgebra asociada a* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra simple,*

(ii) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea Y un subconjunto no vacío, semimodal y $E-$saturado de X. Entonces, por la Proposición 4.2.2.5 tenemos que (1) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)}$ es un $\theta-$subconjunto no vacío, cerrado y $E-$saturado tal que (2) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)} \subseteq Y$. De (1), la hipótesis (ii) y el Teorema 4.2.1.10 inferimos que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Y)} = X$, y así de (2) obtenemos que $Y = X$. Luego, por el Teorema 4.2.1.8, concluimos que $m\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $mLM-$álgebra simple. □

Corolario 4.3.1.12 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio y* $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *la* $mLM_\theta-$*álgebra asociada a* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iii) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iv) $m\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposiciones 4.3.1.9, 4.3.1.10 y 4.3.1.11. □

4.3.2. Espacio cociente de un $mql_\theta P-$espacio

Nuestro siguiente objetivo es probar que si $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio, entonces el conjunto cociente X/E se puede transformar en un $l_\theta P-$espacio isomorfo al $l_\theta P-$espacio asociado a la LM_θ-álgebra $\exists_E(D(X))$. Para ello usamos técnicas similares a las usadas en [36].

Teorema 4.3.2.1 *Sean* $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $mql_\theta P-$*espacio,* $X/E = \{[x]_E : x \in X\}$, *donde para cada* $x \in X$, $[x]_E = E(x)$, $q : X \longrightarrow X/E$ *la aplicación canónica (es decir* $q(x) = [x]_E$*) y* $\tau_q = \{U \subseteq X/E : q^{-1}(U)$ *es abierto en* $X\}$*. Si para todo* $x, y \in X$ *se definen:*

(i) $[x]_E \leq [y]_E$ *si, y solo si, para todo subconjunto, abierto, cerrado, creciente y saturado* U *de* X, $x \in U$ *implica* $y \in U$,

(ii) $\overline{f}_i([x]_E) = [f_i(x)]_E$ *para todo* $i \in I$,

entonces $(X/E, \leq, \tau_q, \{\overline{f}_i\}_{i\in I})$ *es un* $l_\theta P-$*espacio y* $q : X \longrightarrow X/E$ *es una función isótona, continua y sobreyectiva.*

Dem. Como τ_q es la topología de identificación determinada por q, es decir τ_q es la topología cociente de X/E, entonces $q : X \longrightarrow X/E$ es una función continua.

A continuación probamos que $(X/E, \leq, \tau_q, \{\overline{f}_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio. Más precisamente,

(a) $(X/E, \leq)$ *es un conjunto ordenado*: De acuerdo a como está definida la relación $\leq$ en X/E resulta que la relación $\leq$ es reflexiva y transitiva, y de [18, Lema 2.5] y [81, Lema 1.6] se sigue que $\leq$ es antisimétrica y por lo tanto, $\leq$ es un orden para X/E.

Ahora estamos en condiciones de probar que q es una función isótona. En efecto, de la definición de $\leq$ en X/E se sigue que si $x, y \in X$ son tales que $x \leq y$, entonces $[x]_E \leq [y]_E$. En efecto, si U es un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado de X tal que $x \in U$, entonces $y \in U$, de lo que se sigue de la definición de $\leq$ en X/E que $[x]_E \leq [y]_E$ y por lo tanto, $q(x) \leq q(y)$, lo que nos permite afirmar que q es una función isótona.

(b) $(X/E, \tau_q)$ *es un espacio compacto*: Como X es un espacio compacto y q es una función continua y sobreyectiva de X en X/E, entonces $(X/E, \tau_q)$ es un espacio compacto.

(c) $(X/E, \leq, \tau)$ *es un espacio totalmente disconexo en el orden*: Sean $[x]_E$, $[y]_E \in X/E$ tales que $[x]_E \nleq [y]_E$. Luego, por la hipótesis (i), existe un subconjunto, abierto, cerrado, creciente y saturado U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Como $U = E(U)$, entonces $E(x) \subseteq U$ y $E(y) \cap U = \emptyset$ y por consiguiente, $q(x) \in q(U)$, $q(y) \notin q(U)$ y $U = q^{-1}(q(U))$. Por ser U un subconjunto abierto y cerrado en X y τ_q la topología cociente, tenemos que $q(U)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X/E. Además como q es una función isótona y sobreyectiva y U es un subconjunto creciente de X se verifica que $q(U)$ es un subconjunto creciente de X/E. Luego, si $V = q(U)$, entonces $V \in D(X/E)$, $[x]_E \in V$ y $[y]_E \notin V$, de donde concluimos que $(X/E, \leq, \tau_q)$ es un espacio totalmente disconexo en el orden.

(lP1): De (a), (b) y (c) resulta que $(X/E, \leq, \tau_q)$ es un espacio de Priestley.

(lP2): Sea F un subconjunto cerrado de X/E. Teniendo en cuenta que cada una de las cuatro siguientes condiciones es equivalente a la que le sigue: $\overline{f}_i([x]_E) \in F$; $[f_i(x)]_E \in F$; $q(f_i(x)) \in F$; $x \in (q \circ f_i)^{-1}(F)$, se sigue que (1) $\overline{f}_i^{-1}(F) = (q \circ f_i)^{-1}(F)$. Por otra parte, como q es una función continua de X en X/E y para cada $i \in I$, por (lP2), f_i es una función continua de X en X, entonces para cada $i \in I$, $q \circ f_i$ es una función continua de X en X/E. De esta última afirmación y por ser F un subconjunto cerrado de X/E, obtenemos del Teorema 2.1.1.16 que $(q \circ f_i)^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado de X, entonces por (1), $\overline{f}_i^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado de X. Esta última afirmación y el Teorema 2.1.1.16 nos permiten concluir que para cada $i \in I$, $\overline{f}_i$ es una función continua.

(lP3), (lP4) y (lP5): Estas propiedades son consecuencias de la definición de las funciones $\overline{f}_i$ y el hecho de que las funciones $f_i : X \longrightarrow X$ las satisfacen.

(lP6): De la definición de las funciones $\overline{f}_i$ inferimos que para cada $i \in I$, $\overline{f}_i(X/E) = q(f_i(X))$. Luego, (1) $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} \overline{f}_i(X/E)} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} q(f_i(X))} = \overline{q(\bigcup\limits_{i \in I} f_i(X))}$. Además, $q : X \longrightarrow X/E$ es una función continua, X es un espacio compacto y X/E es un espacio de Hausdorff, entonces q es una función cerrada y por ende, (2) $q(\overline{A}) = \overline{q(A)}$ para todo $A \subseteq X/E$. Por (1) y (2) tenemos que $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} \overline{f}_i(X/E)} = q(\overline{\bigcup\limits_{i \in I} f_i(X)})$, y teniendo en cuenta que q una función sobreyectiva y (lP6), se sigue que $\overline{\bigcup_{i\in I}\overline{f}_i(X/E)} = X/E$.

Concluimos así que $(X/E, \leq, \tau_q, \{\overline{f}_i\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio. $\square$

Proposición 4.3.2.2 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio y el $l_\theta P-$espacio asociado a la $LM_\theta-$álgebra $\exists_E(D(X))$, $(X(\exists_E(D(X))), \{f_i^{\exists_E(D(X))}\}_{i\in I})$. Entonces, $(X/E, \{\overline{f}_i\}_{i\in I})$ y $(X(\exists_E(D(X))), \{f_i^{\exists_E(D(X))}\}_{i\in I})$ son $l_\theta P-$espacios isomorfos.*

Dem. Sea $i : \exists_E(D(X)) \longrightarrow D(X)$ la función inclusión. Como i es un $LM_\theta-$homomorfismo inyectivo, entonces por el Corolario 2.1.2.11, $Ł_\theta(i) : X(D(X)) \longrightarrow X(\exists_E(D(X))$ es una $l_\theta P-$función sobreyectiva, donde $Ł_\theta(i)(x) = i^{-1}(x) = x \cap \exists_E(D(X))$ para todo $x \in X(D(X))$. Además, por el Corolario 2.1.2.13 se verifica que $\epsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ es una $l_\theta P-$función biyectiva y por lo tanto, $h = Ł_\theta(i) \circ \epsilon_X$ es una $l_\theta P-$función sobreyectiva de X en $X(\exists_E D(X))$, de donde se sigue que la función h es continua. Luego, por ser X un espacio compacto y $X(\exists_E D(X))$ un espacio de Hausdorff, concluimos que h es una función cerrada.

Además, $q : X \longrightarrow X/E$ es una identificación y h es constante en $q^{-1}([x]_E)$ para cada $[x]_E \in X/E$ (es decir h es constante sobre las fibras de q), entonces por [25, VI, Theorem 3.2], podemos afirmar que $h \circ q^{-1} : X/E \longrightarrow X(\exists_E D(X))$ es continua y el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & X/E \arrow[d, "h \circ q^{-1}"] \\
 & X(\exists_E(D(X)))
\end{tikzcd}$$

donde $(h \circ q^{-1})([x]_E) = h(x)$. En efecto, como h es constante en $q^{-1}([x]_E)$, entonces $(h \circ q^{-1})([x]_E) = h(E(x)) = h(x)$.

Por otra parte, como h es una función cerrada, entonces por [25, VI, Theorem 3.2] se verifica que $h \circ q^{-1} : X/E \longrightarrow X(\exists_E D(X))$ es una función cerrada.

También $h \circ q^{-1} : X/E \longrightarrow X(\exists_E D(X))$ es una función biyectiva. En efecto, sean $[x]_E$, $[y]_E \in X/E$ tales que $(h \circ q^{-1})([x]_E) = (h \circ q^{-1})([y]_E)$, entonces $h(q^{-1}([x]_E)) = h(q^{-1}([y]_E))$. Como h es constantes sobre las fibras de q, resulta que $h(x) = h(y)$ y así, $\epsilon_X(x) \cap \exists_E(D(X)) = \epsilon_X(y) \cap \exists_E(D(X))$. De esta última afirmación obtenemos que $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in E_{\exists_E}$. Como $\epsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ es un $ml_\theta P-$isomorfismo, inferimos que $(x, y) \in E$ y por consiguente, $[x]_E = [y]_E$. Sea ahora $z \in X(\exists_E D(X))$, entonces existe $x \in X(D(X))$ tal que $z = x \cap \exists_E(D(X))$. Además, si $y = \epsilon_X^{-1}(x)$, se verifica que $y \in X$ y $z = \epsilon_X(y) \cap \exists_E(D(X)))$, de donde concluimos que $h(y) = z$ y por lo tanto, $(h \circ q^{-1})(\overline{y}) = z$.

Luego $h \circ q^{-1} : X/E \longrightarrow X(\exists_E(D(X)))$ es una biyección continua y cerrada y por ende, $h \circ q^{-1}$ es un homemorfismo.

Teniendo en cuenta que la función $h \circ q^{-1} : X/E \longrightarrow X(\exists_E D(X))$ está definida por $(h \circ q^{-1})([x]_E) = h(x)$, la función $h : X \longrightarrow X(\exists_E D(X))$ es un homomorfismo de orden sobreyectivo y que $E = E(\text{mod } h)$, donde para todo x, $y \in X$, $(x, y) \in E(\text{mod } h)$ si, y solo si, $h(x) = h(y)$, podemos asegurar que $h \circ q^{-1}$ es un isomorfismo de orden.

Además, para todo $i \in I$ y para todo $x \in X$ se verifica que $((h \circ q^{-1}) \circ \overline{f}_i)([x]_E) = (h \circ q^{-1})(\overline{f}_i([x]_E)) = (h \circ q^{-1})([f_i(x)]_E) = h(f_i(x)) = f_i^{\exists(D(X))}(h(x)) = f_i^{\exists(D(X))}((h \circ q^{-1})([x]_E)) = (f_i^{\exists(D(X))} \circ (h \circ q^{-1}))([x]_E)$, y por consiguiente, $(h \circ q^{-1}) \circ \overline{f}_i = f_i^{\exists(D(X))} \circ (h \circ q^{-1})$ para todo $i \in I$.

Concluimos así que $h \circ q^{-1}$ es un $l_\theta P-$isomorfismo de X/E en $X(\exists_E(D(X)))$. $\square$

Proposición 4.3.2.3 *Sea $(X, \{f_i\}_{i \in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(f_i(x), f_i(y)) \in E$ para todo $x, y \in X$ y para todo $i \in I$,*

(ii) *$(X/E, \{\overline{f}_i\}_{i \in I})$ es un $l_\theta P-$espacio totalmente ordenado,*

(iii) *$\exists_E(D(X))$ es una $LM_\theta-$álgebra simple.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De (i) se sigue que para todo $i \in I$ y para todo $x \in X$, $\overline{f}_i([x]_E) = [f_i(x)]_E = [f_i(y)]_E = \overline{f}_i([y]_E)$. De esta última afirmación y el Corolario 2.1.3.2 resulta que $X/E = \uparrow \{\overline{f}_i([x]_E)\}_{i \in I} \cup \downarrow \{\overline{f}_i([x]_E)\}_{i \in I}$ para todo $x \in X$. Entonces, por la Proposición 3.3.1, X/E es totalmente ordenado.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis (ii) y (lP3) obtenemos que $\overline{f}_i([x]_E) = \overline{f}_i([y]_E)$ para todo $x, y \in X$ y para todo $i \in I$. Por lo tanto, $[f_i(x)]_E = [f_i(y)]_E$ para todo $x, y \in X$ y para todo $i \in I$, de donde concluimos que $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ para todo $x, y \in X$ y para todo $i \in I$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia directa del Teorema 2.1.8.1 y la Proposición 4.3.2.2. $\square$

4.3.3. Descripción de las $\boldsymbol{mLM_\theta}-$álgebras subdirectamente irreducibles

Finalmente, en esta sección logramos describir las $mLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles, que por lo probado en la Sección 4.3.1 son las $mLM_\theta-$álgebras simples. En primer lugar, caracterizamos la imagen por el cuantificador de una $mLM_\theta-$álgebra simple.

Teorema 4.3.3.1 *Sean $(X, \{f_i\}_{i \in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio y su $mLM_\theta-$álgebra asociada $m\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \{\phi_i^X\}_{i \in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i \in I}, \exists_E, \forall_E)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$m\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $mLM_\theta-$álgebra simple.*

(ii) *$\exists_E(D(X))$ es una $LM_\theta-$álgebra simple.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Si suponemos que $\exists_E(D(X))$ no es una $LM_\theta-$álgebra simple, entonces por la Proposición 4.3.2.3 y la Observación 4.1.1.8, existen $x, y \in X$ tales que $(f_i(x), f_i(y)) \notin E$ para algún $i \in I$. Luego, por la Proposición 4.3.1.1, se verifica que $f_i^{-1}(E(f_i(x)))$ es un subconjunto de X cerrado, semimodal y $E-$saturado no trivial, de donde concluimos, por el Teorema 4.2.1.8, que $m\mathbb{L}_\theta(X)$ no es una $mLM_\theta-$álgebra simple.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si $m\mathbb{L}_\theta(X)$ no es una $mLM_\theta-$álgebra simple, entonces por el Teorema 4.2.1.8, existe un subconjunto Y de X no trivial, cerrado, semimodal y $E-$saturado. Luego, el Lema 4.3.1.3 nos permite afirmar que existe (1) $x \in f_i(X) \setminus Y$ para algún $i \in I$, de donde, por (lP5) y (1), obtenemos que que (2) $x = f_i(x)$. Además, por ser Y un subconjunto de X semimodal y no vacío tenemos que $\emptyset \subset f_i(Y) \subseteq Y$. Teniendo en cuenta que Y es un subconjunto $E-$saturado, de la última afirmación, (1), (2) y el Lema 4.2.2.1, se sigue que $(f_i(x), f_i(y)) \notin E$ para todo $y \in Y$, y así de la Proposición 4.3.2.3, resulta que $\exists_E(D(X))$ no es una $LM_\theta-$álgebra simple. $\square$

Corolario 4.3.3.2 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *es una* $mLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iii) $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iv) $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(v) $(\exists(A), \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *es una* $LM_\theta-$*álgebra simple,*

(vi) $(\exists(A), \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ *es una* $\theta LM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.1.8.1, el Lema 4.1.1.16, el Corolario 4.3.1.12 y el Teorema 4.3.3.1. $\square$

Corolario 4.3.3.3 *El álgebra funcional* $\langle {L_2^{[I]}}^X, \wedge, \vee, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall\rangle$*, descripta en el* Ejemplo 4.1.3*, es una* $smLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem. $\exists((L_2^{[I]})^X)$ es un conjunto totalmente ordenado. En efecto, sean $f, g \in \exists\left({L_2^{[I]}}^X\right)$, entonces existen $h_f \in L_2^{[I]}$ y $h_g \in L_2^{[I]}$ tales que $f(x) = h_f$ y $g(x) = h_g$ para todo $x \in X$. Como $L_2^{[I]}$ es totalmente ordenado, entonces $h_f \leq h_g$ o $h_g \leq h_f$ y por consiguiente, $f(x) \leq$

$g(x)$ para todo $x \in X$ ó $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, de lo que se sigue que $\exists\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ es un conjunto totalmente ordenado. Luego, por el Teorema 2.1.8.1, $\exists\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ es una $LM_\theta-$álgebra simple, y por el Corolario 4.3.3.2 resulta que ${L_2^{[I]}}^X$ es una $mLM_\theta-$álgebra simple. Además, para todo $f,\, g \in {L_2^{[I]}}^X$ se verifica que $\forall(f \vee \forall g) = \forall f \vee \forall g$ y por lo tanto, ${L_2^{[I]}}^X$ es una $smLM_\theta-$álgebra. Teniendo en cuenta que ϑ es una $LM_\theta-$conguencia de ${L_2^{[I]}}^X$ si, y solo si, ϑ es una $sLM_\theta-$conguencia de ${L_2^{[I]}}^X$, concluimos que el álgebra ${L_2^{[I]}}^X$ es una $smLM_\theta-$álgebra simple. $\square$

Corolario 4.3.3.4 *El álgebra funcional* $\langle L_n^X, \vee, \wedge, 0, 1, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall\rangle$, *descripta en el* Ejemplo 4.1.3, *es una $smLM_\theta-$álgebra simple.*

Dem. Por la forma en que está definida la operación $\exists$ en L_n^X resulta que $\exists\left(L_n^X\right)$ es una cadena y por lo tanto, por el Corolario 2.1.8.4, $\exists\left(L_n^X\right)$ es una LM_n-álgebra simple y así, por el Corolario 4.3.3.2, L_n^Xes una mLM_n-álgebra simple. Como L_n^X es una $smLM_n-$álgebra y además, ϑ es una LM_n-conguencia de L_n^X si, y solo si, ϑ es una $sLM_\theta-$conguencia de L_n^X, concluimos que L_n^X es una $smLM_n-$álgebra simple. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es probar que las $smLM_\theta-$álgebras simples, a menos de isomorfismos, son las $smLM_\theta-$subálgebras del álgebra funcional ${L_2^{[I]}}^X$, y cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, son las $smLM_n-$subálgebras del álgebra funcional L_n^X.

Lema 4.3.3.5 *Sea $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $mql_\theta P-$espacio. Entonces para todo $U \in D(X)$ y para todo $i \in I$ se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $f_i^{-1}(\exists_E U)$ *es un subconjunto cerrado, modal y $E-$saturado,*

(ii) $f_i^{-1}(\forall_E U)$ *es un subconjunto cerrado, modal y $E-$saturado,*

donde $\exists_E U = E(U)$ *y* $\forall_E U = X \setminus \downarrow E(X \setminus U)$.

Dem.

(i): Sean $U \in D(X)$ e $i \in I$, entonces por (lP5), $f_i^{-1}(\exists_E U)$ es un subconjunto modal de X. Además, del Lema 4.1.1.15 tenemos que $\exists_E U \in D(X)$, de donde sigue por (lP2) y el Teorema 2.1.1.16 que $f_i^{-1}(\exists_E U)$ es un subconjunto cerrado. Por (mqlP3) se verifica que $f_i^{-1}(\exists_E U) = E(f_i^{-1}(U))$ y por lo tanto, $f_i^{-1}(\exists_E U) = E(f_i^{-1}(\exists_E U))$. Entonces, de la Proposición 4.2.1.5 concluimos que $f_i^{-1}(\exists_E U)$ es un subconjunto $E-$saturado de X.

(ii): Sean $U \in D(X)$ e $i \in I$, entonces por (lP5), $f_i^{-1}(\forall_E U)$ es un subconjunto modal de X. Además, el Lema 4.1.1.15 nos permite afirmar que $\forall_E U \in D(X)$, de donde inferimos por (lP2) y el Teorema 2.1.1.16 que $f_i^{-1}(\forall_E U)$ es un subconjunto cerrado de X. Teniendo en cuenta que $\forall_E U = X \setminus \downarrow E(X \setminus U)$, entonces de la Proposición 4.1.3.2 y el Corolario 4.1.3.3 obtenemos que $X \setminus f_i^{-1}(\forall_E U) = E(X \setminus f_i^{-1}(U))$ y por lo tanto $X \setminus f_i^{-1}(\forall_E U)$ es saturado. Además, como $X \setminus f_i^{-1}(\forall_E U)$ es un subconjunto modal de X, entonces de la última afirmación, la Proposición 4.2.1.5 y el Corolario 4.2.1.7, concluimos que $f_i^{-1}(\forall_E U)$ es un subconjunto $E-$saturado de X. □

Proposición 4.3.3.6 *Sean $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ y $(X', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ $mql_\theta P-$espacios tales que $m\mathbb{L}_\theta(X)$ y $m\mathbb{L}_\theta(X')$ son $mLM_\theta-$álgebras simples. Si $f : X \longrightarrow X'$ es una $l_\theta P-$función sobreyectiva, entonces es una $mql_\theta P-$función.*

Dem. Como f es una $l_\theta P-$función, entonces $f_i^{-1}(f^{-1}(\exists_{E'} U)) = f^{-1}({f_i'}^{-1}(\exists_{E'} U))$ y $f_i^{-1}(f^{-1}(\forall_{E'} U)) = f^{-1}({f_i'}^{-1}(\forall_{E'} U))$ para todo $U \in D(X')$ y para todo $i \in I$. Además, por el Lema 4.3.3.5 para todo $i \in I$, ${f_i'}^{-1}(\exists_{E'} U)$ y ${f_i'}^{-1}(\forall_{E'} U)$ son subconjuntos cerrados, modales y $E-$saturados de X'. Por ser $m\mathbb{L}_\theta(X')$ una $mLM_\theta-$álgebra simple, entonces del Teorema 4.2.1.8 y el Corolario 4.1.1.20 resulta que para todo $i \in I$, ${f_i'}^{-1}(\exists_{E'} U) = \emptyset$ ó ${f_i'}^{-1}(\exists_{E'} U) = X'$ y para todo $i \in I$, ${f_i'}^{-1}(\forall_{E'} U) = \emptyset$ ó ${f_i'}^{-1}(\forall_{E'} U) = X'$. Por lo tanto para todo $i \in I$, $f_i^{-1}(f^{-1}(\exists_{E'} U)) = \emptyset$ ó $f_i^{-1}(f^{-1}(\exists_{E'} U)) = X$ y para todo $i \in I$, $f_i^{-1}(f^{-1}(\forall_{E'} U)) = \emptyset$ ó $f_i^{-1}(f^{-1}(\forall_{E'} U)) = X$.

Por otra parte, siguiendo un razonamiento análogo podemos demostrar que para todo $i \in I$ se verifica que $f_i^{-1}(\exists_E f^{-1}(U)) = \emptyset$ ó $f_i^{-1}(\exists_E f^{-1}(U)) = X$ y para todo $i \in I$, $f_i^{-1}(\forall_E f^{-1}(U)) = \emptyset$ ó $f_i^{-1}(\forall_E f^{-1}(U)) = X$.

Teniendo en cuenta que f es sobreyectiva, resulta que las condiciones (a), (b) y (c) son equivalentes y que las condiciones (d), (e), (f) son equivalentes:

(a) $f_i^{-1}(f^{-1}(\exists_{E'} U)) = \emptyset$,	(d) $f_i^{-1}(f^{-1}(\forall_{E'} U)) = \emptyset$,
(b) ${f'_i}^{-1}(U) = \emptyset$,	(e)${f'_i}^{-1}(U) = \emptyset$,
(c) $f_i^{-1}(\exists_E f^{-1}(U)) = \emptyset$.	(f) $f_i^{-1}(\forall_E f^{-1}(U)) = \emptyset$.

Entonces inferimos que $f_i^{-1}(f^{-1}(\exists_{E'}U)) = f_i^{-1}(\exists_E f^{-1}(U))$ y $f_i^{-1}(f^{-1}(\forall_{E'}U)) = f_i^{-1}(\forall_E f^{-1}(U))$ para todo $i \in I$, de donde por (lP7), $f^{-1}(\exists_{E'}U) = \exists_E f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(\forall_{E'}U) = \forall_E f^{-1}(U)$. $\square$

Teniendo en cuenta el Lema 4.1.1.18, el Corolario 4.3.3.3 y la Proposición 4.3.3.6, ahora nuestro objetivo es obtener un cierto conjunto X no vacío y una $l_\theta P-$función sobreyectiva del $mql_\theta P-$espacio asociado a ${L_2^{[I]}}^X$ en el $mql_\theta P-$espacio asociado a una $mLM_\theta-$álgebra simple. Para ello comenzamos determinado algunas propiedades del $mql_\theta P-$espacio $X\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ y su relación con el $mql_\theta P-$espacio asociado a una $LM_\theta-$álgebra.

En lo que sigue, consideramos las $LM_\theta-$álgebras $(L_2^{[I]}, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ y $({L_2^{[I]}}^Y, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$, dadas en los Ejemplos 1.2.6 y 4.1.3 y sus $l_\theta P-$espacios asociados, $\left(X\left(L_2^{[I]}\right), \left\{f_i^{L_2^{[I]}}\right\}_{i\in I}\right)$ y $\left(X\left({L_2^{[I]}}^Y\right), \left\{f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\right\}_{i\in I}\right)$, respectivamente.

Lema 4.3.3.7 *Sea* ${L_2^{[I]}}^Y$ *la* $LM_\theta-$*álgebra descripta en el* Ejemplo 4.1.3 *y* $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ *su* $P-$*espacio asociado. Si* $\mathcal{D} = \left\{P \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}} : P \in X\left(L_2^{[I]}\right), y \in Y\right\}$, *donde para cada* $y \in Y$, ${L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}} = \left\{f : Y \setminus \{y\} \longrightarrow L_2^{[I]}\right\}$, *entonces* $\mathcal{D}$ *es un subconjunto denso de* $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$.

Dem. En lo que sigue al conjunto $\left(L_2^{[I]}\right)^Y$ lo notamos por ${L_2^{[I]}}^Y$ y al conjunto $\left(L_2^{[I]}\right)^{Y\setminus\{y\}}$ por ${L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}}$. Es inmediato que (1) $\mathcal{D} \subseteq X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$. Si Y es un conjunto finito, entonces $\mathcal{D} = X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$. Si Y es un conjunto infinito, teniendo en cuenta que el conjunto $\mathcal{B} = \left\{\sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h) \setminus \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(g) : h, g \in {L_2^{[I]}}^Y\right\}$ es una base de la topología de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ y que $\sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}$ es un isomorfismo de orden, inferimos que para cada $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, existen $h, g \in {L_2^{[I]}}^Y$ tales que $h \not\leq g$ y $B = \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h) \setminus \sigma_{\left(L_2^{[I]}\right)^Y}(g)$. De esta última afirmación se sigue que $h(y) \not\leq g(y)$ para algún $y \in Y$, y como $h(y), g(y) \in L_2^{[I]}$, entonces existe $i \in I$ tal que $h(y)(i) = 1$ y $g(y)(i) = 0$. Si consideramos la función $1 : I \longrightarrow L_2$, definida por $1(i) = 1$ para todo $i \in I$, tenemos que $\{1\} \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y por consiguiente, $\{1\} \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}} \in \mathcal{D}$. Además, $h \in \{1\} \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}}$ y $g \notin \{1\} \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}}$, de lo cual obtenemos que $\{1\} \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{y\}} \in \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h) \setminus \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(g)$. Por lo tanto, $(\sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h) \setminus \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(g)) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, lo que nos permite afirmar que todo subconjunto básico no vacío del espacio $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$

tiene intersección no vacía con $\mathcal{D}$, resultando por el Lema 2.1.1.18 que $\mathcal{D}$ es denso en $X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$. $\square$

Proposición 4.3.3.8 *Sean* $(A, \{\phi_i^A\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^A\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra,* $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ *su* $l_\theta P-$*espacio asociado,* $Y = max\, X(A)$ *y* $\mathcal{D} = \left\{P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}} : P \in X\left(L_2^{[I]}\right) \text{ y } Q \in Y\right\}$. *Para cada* $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ *tal que* $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ *para todo* $i \in I$*, sean* $K_P = \{k \in I : \phi_k^{-1}(P) \subseteq P\}$ *y* $J_P = \{j \in I : P \subseteq \phi_j^{-1}(P)\}$ *con el orden y el orden dual inducido por el orden definido sobre* I*, respectivamente y las redes* $(\phi_j^{-1}(P))_{j\in J_P}$ *y* $(\phi_k^{-1}(P))_{k\in K_P}$*. Si* $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ *está definida de la siguiente manera, para cada* $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$*:*

(i) $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = \phi_i^{A^{-1}}(Q)$*, si* $P = \phi_i^{-1}(P)$ *para algún* $i \in I$*,*

(ii) $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = R$*, donde* $R \in X(A)$ *es tal que* $\phi_k^{A^{-1}}(Q) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} R$*, si* $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ *para todo* $i \in I$ *y* $\phi_k^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} P$*,*

(iii) $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = S$*, donde* $S \in X(A)$ *es tal que* $\phi_j^{A^{-1}}(Q) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} S$*, si* $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ *para todo* $i \in I$ *y* $\phi_j^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} P$*,*

entonces f *es una función continua.*

Dem. Con el objeto de mostrar que f es continua, a continuación probamos que para todo $a \in A$, $f^{-1}(\sigma_A(a)) = \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a) \cap \mathcal{D}$, donde $h_a : Y \longrightarrow L_2^{[I]}$ está definida para cada $Q \in Y$ por:

$$h_a(Q)(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_i^A(a) \in Q, \\ 0 & \text{si } \phi_i^A(a) \notin Q. \end{cases}$$

Es inmediato que $h_a \in L_2^{[I]^Y}$ y por lo tanto, $\sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a) = \left\{S \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right) : h_a \in S\right\}$, de donde resulta

(1) $\sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a) \cap \mathcal{D} = \left\{P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}} : P \in X\left(L_2^{[I]}\right), Q \in Y \text{ y } h_a \in P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right\}$.

Además, de la definición de h_a se sigue que para cada $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y cada $Q \in Y$,

(2) $h_a \in P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}$ si, y solo si, $h_a(Q) \in P$.

Como $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, entonces satisface solamente una de las tres siguientes condiciones:

(i) $P = \phi_i^{-1}(P)$ para algún $i \in I$,

(ii) $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$ y $\phi_j^{-1}(P) \underset{j \in J_P}{\longrightarrow} P$,

(iii) $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$ y $\phi_k^{-1}(P) \underset{k \in K_P}{\longrightarrow} P$.

A continuación probamos, en cada uno de los casos anteriores, que para todo $Q \in Y$ se verifica que

(3) $h_a(Q) \in P$ si, y solo si, $a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{X \setminus \{Q\}}}\right)$.

(i) Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P = \phi_i^{-1}(P)$ para para algún $i \in I$. Entonces lo establecido en (3) es consecuencia de que las siguientes seis afirmaciones son equivalentes para todo $Q \in Y$:

$h_a(Q) \in P$; $h_a(Q) \in \phi_i^{-1}(P)$; $\phi_i(h_a(Q)) \in P$; $h_a(Q)(i) = 1$; $\phi_i^A a \in Q$;
$a \in \phi_i^{A^{-1}}(Q)$; $a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{X \setminus \{Q\}}}\right)$.

(ii) Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$ y (4) $\phi_j^{-1}(P) \underset{j \in J_P}{\longrightarrow} P$. Entonces para todo $Q \in Y$, (5) $h_a(Q) \in P$ si, y solo si, $h_a(Q) \in \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$. En efecto, como $P \subseteq \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$, entonces $h_a(Q) \in P$ implica que $h_a(Q) \in \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$. Por otro lado, si $h_a(Q) \in \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$ y suponemos que $h_a(Q) \notin P$, entonces $P \in X\left(L_2^{[I]}\right) \setminus \sigma_{L_2^{[I]}}(h_a(Q))$, de donde se sigue por (4) que existe $j_0 \in J_P$ tal que $\phi_j^{-1}(P) \in X\left(L_2^{[I]}\right) \setminus \sigma_{L_2^{[I]}}(h_a(Q))$ para todo $j \in J_P$, $j \leq j_0$ y por lo tanto, $h_a(Q) \notin \phi_j^{-1}(P)$ para todo $j \in J_P$, $j \leq j_0$, lo que contradice lo anteriormente afirmado. Además se verifica que las siguientes condiciones son equivalentes:

$\phi_j(h_a(Q)) \in P$ para todo $j \in J_P$; $h_a(Q)(j) = 1$ para todo $j \in J_P$;

$a \in \phi_j^{A^{-1}}(Q)$ para todo $j \in J_P$; $a \in R$, donde $R \in X(A)$ es tal que $\phi_j^{A^{-1}}(Q) \underset{j \in J_P}{\longrightarrow} R$;

$a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}}\right)$.

Por lo tanto, (6) $\phi_j(h_a(Q)) \in P$ para todo $j \in J_P$ si, y solo si, $a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}}\right)$. Luego, de (5) y (6) concluimos que $h_a(Q) \in P$ si, y solo si, $a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}}\right)$.

(iii) Sea $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ tal que $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$ y $\phi_k^{-1}(P) \underset{k \in K_P}{\longrightarrow} P$. Entonces para todo $Q \in Y$, (7) $h_a(Q) \in P$ si, y solo si, existe $k_0 \in K_P$ tal que $h_a(Q) \in \phi_k^{-1}(P)$ para todo $k \in K_P$, $k_0 \leq k$. En efecto, como $\phi_k^{-1}(P) \subseteq P$, entonces $h_a(Q) \in \phi_k^{-1}(P)$ para todo $k \in K_P$, $k_0 \leq k$, implica $h_a(Q) \in P$. Por otro lado, si $h_a(Q) \in P$ y suponemos que para todo $k' \in K_P$ existe $k_{k'} \in K_P$, $k' \leq k_{k'}$ y $h_a(Q) \notin \phi_{k_{k'}}^{-1}(P)$, luego $P \in \sigma_{L_2^{[I]}}(h_a(Q))$ y para todo $k' \in K_P$ existe $k_{k'} \in K_P$, $k' \leq k_{k'}$ y $\phi_{k_{k'}}^{-1}(P) \notin \sigma_{L_2^{[I]}}(h_a(Q))$ y por lo tanto, $\phi_k^{-1}(P) \not\xrightarrow[k \in K_P]{} P$, lo que contradice la hipótesis. Además se verifica que cada una de las condiciones, que enunciamos a continuación, es equivalente a la siguiente:

$\phi_k(h_a(Q)) \in P$; $h_a(Q)(k) = 1$ para todo $k \in K_P$; $a \in \phi_k^{A^{-1}}(Q)$ para todo $k \in K_P$; $a \in R$, donde $R \in X(A)$ es tal que $\phi_k^{A^{-1}}(Q) \xrightarrow[k \in K_P]{} R$; $a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}}\right)$.

De (1), (2) y (3) obtenemos que para todo $a \in A$,

$$\sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a) \cap \mathcal{D} = \left\{P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}} : h_a(Q) \in P\right\} = \left\{P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}} : a \in f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)\right\}$$

$$= \left\{P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}} : f\left(P \times L_2^{[I]^{X\setminus\{Q\}}}\right) \in \sigma_A(a)\right\} = f^{-1}(\sigma_A(a)).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(\sigma_A(a))$ es un subconjunto abierto y cerrado en $\mathcal{D}$ para todo $a \in A$. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que el conjunto $\{\sigma_A(a) : a \in A\}$ $\cup \{X(A) \setminus \sigma_A(a) : a \in A\}$ es una subbase de la topología de $X(A)$, concluimos por el Teorema 2.1.1.16 que f es continua. $\square$

Proposición 4.3.3.9 *Sean $(A, \{\phi_i^A\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^A\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra y $(X(A), \{f_i^A\}_{i\in I})$ su $l_\theta P-$espacio asociado, $Y = max\, X(A)$, $\mathcal{D} = \left\{P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}} : P \in X\left(L_2^{[I]}\right) \text{ y } Q \in Y\right\}$ y $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ definida como en la* Proposición 4.3.3.8. *Entonces:*

(i) *Si $(R_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ es una red tal que $R_d \xrightarrow[d\in D]{} R$ para algún $R \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \setminus \mathcal{D}$, entonces la red $(f(R_d))_{d\in D}$ es convergente en $X(A)$.*

(ii) *Si $(R_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ y $(S_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ son redes tales que convergen a un mismo elemento $R \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \setminus \mathcal{D}$, entonces las redes imágenes $(f(R_d))_{d\in D}$ y $(f(S_d))_{d\in D}$ convergen a un mismo elemento de $X(A)$.*

Dem.

(i): Sea $(R_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que (1) $R_d \xrightarrow[d\in D]{} R$ para algún $R \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \setminus \mathcal{D}$. Entonces $(f(R_d))_{d\in D}$ es una red en $X(A)$ y como $X(A)$ es compacto, se sigue del Teorema 2.1.1.12 que $(f(R_d))_{d\in D} \succ R$ para algún $R \in X(A)$. Supongamos que existe $S \in X(A)$ tal que $S \neq R$ y $(f(R_d))_{d\in D} \succ S$. Luego $R \not\subseteq S$ o $S \not\subseteq R$. Si $R \not\subseteq S$, entonces existe $a \in A$ tales que $a \in R$ y $a \notin S$. Por lo tanto, $R \in \sigma_A(a)$ y $S \in X(A) \setminus \sigma_A(a)$. Como $\sigma_A(a) \in D(X(A))$, entonces de estas últimas afirmaciones inferimos que existen dos subredes $(f(R_{d_c}))_{c\in D}$ y $(f(R_{d_b}))_{b\in D}$ de la red $(f(R_d))_{d\in D}$ tales que $\{f(R_{d_c})\}_{c\in D} \subseteq \sigma_A(a)$ y $\{f(R_{d_b})\}_{b\in D} \subseteq X(A) \setminus \sigma_A(a)$ y por consiguiente, (2) $\{R_{d_c}\}_{c\in D} \subseteq f^{-1}(\sigma_A(a))$ y (3) $\{R_{d_b}\}_{b\in D} \subseteq f^{-1}(X(A)\setminus \sigma_A(a))$.

Para cada $a \in A$, sea $h_a : Y \longrightarrow L_2^{[I]}$ definida para cada $Q \in Y$ por:

$$h_a(Q)(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_i^A(a) \in Q, \\ 0 & \text{si } \phi_i^A(a) \notin Q. \end{cases}$$

Entonces, por lo demostrado en la Proposición 4.3.3.8 se verifica que

$$f^{-1}(\sigma_A(a)) = \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a) \cap \mathcal{D} \quad \text{y} \quad f^{-1}(X(A) \setminus \sigma_A(a)) = \mathcal{D} \cap \left(X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \setminus \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a)\right),$$

de donde inferimos de (2) y (3) que

(4) $\{R_{d_c}\}_{c\in D} \subseteq \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a)$ y (5) $\{R_{d_b}\}_{b\in D} \subseteq X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \setminus \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a)$.

Por otra parte, de (1) y el Lema 2.1.1.10 tenemos que $R_{d_c} \underset{c\in D}{\longrightarrow} R$ y como $\sigma_{\left(L_2^{[I]}\right)^Y}(h_a)$ es un subconjunto cerrado de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$, entonces de (4) y el Lema 2.1.1.7 resulta que (6) $R \in \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a)$. Además, de (1) y el Lema 2.1.1.10, obtenemos que $R_{d_b} \underset{b\in D}{\longrightarrow} R$ y teniendo en cuenta (5), el Lema 2.1.1.10 y el hecho de que $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \setminus \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a)$ es un subconjunto cerrado de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$, podemos afirmar que $R \notin \sigma_{{L_2^{[I]}}^Y}(h_a)$, lo que contradice (6). En forma análoga se llega a una contradicción si $S \not\subseteq R$. Por lo tanto $R = S$, de donde concluimos que $(f(R_d))_{d\in D}$ es una red en $X(A)$ que tiene un único punto de aglomeración y por consiguiente es convergente en $X(A)$.

(ii): Sean $(R_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ y $(S_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ redes tales que convergen a un mismo elemento $R \in X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \setminus \mathcal{D}$. Entonces, por el inciso (i), $(f(R_d))_{d\in D}$ y $(f(S_d))_{d\in D}$ son redes convergentes en $X(A)$. Si suponemos que existen R, $S \in X(A)$ tales que $S \neq R$, $f(R_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} R$ y $f(S_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} S$, entonces mediante un razonamiento análogo al realizado en la demostración del inciso (i) llegamos a una contradicción y por lo tanto, $R = S$. $\square$

En lo que sigue necesitamos tener en cuenta el siguiente teorema de extensión de funciones continuas.

Teorema 4.3.3.10 (*Teorema de extensión de funciones continuas,* [25]) *Sean* (X,τ_X) *un espacio topológico,* $D\subseteq X$ *denso en* X*,* (Y,τ_Y) *un espacio regular* (T_3) *y* $f:D\to Y$ *una función continua, entonces* f *tiene una extensión continua* $F:X\to Y$ *si, y sólo si, para cada* $x\in X$ *y para todas las redes* $(x_i)_{i\in I}\subseteq D$ *que convergen a* x*, las redes* $(f(x_i))_{i\in I}$ *convergen al mismo límite. Si* F *existe, entonces* F *es la única extensión continua de* f*.*

El teorema anterior es una formulación equivalente del enunciado en [25] ya que en este último se usan bases de filtros en lugar de redes, pero para nuestro propósito nos resultan más útiles las redes.

Proposición 4.3.3.11 *Sean* $(A,\{\phi_i^A\}_{i\in I},\{\overline{\phi}_i^A\}_{i\in I})$ *una* $LM_\theta-$*álgebra,* $Y=max\,X(A)$*,* $\left({L_2^{[I]}}^Y,\{\phi_i\}_{i\in I},\{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}\right)$ *la* $LM_\theta-$*álgebra descripta en el* Ejemplo 4.1.3, $\left(X(A),\{f_i^A\}_{i\in I}\right)$ *y* $\left(X\left({L_2^{[I]}}^Y\right),\left\{f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\right\}_{i\in I}\right)$ *los* $l_\theta P-$*espacios asociados a* A *y a* ${L_2^{[I]}}^Y$*, respectivamente. Entonces, existe una* $l_\theta P-$*función sobreyectiva de* $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ *en* $X(A)$*.*

Dem. Para probar la existencia de una $l_\theta P-$función sobreyectiva F de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ en $X(A)$, demostramos lo establecido en los incisos (I) al (IV) que indicamos a continuación.

(I) *Existe una función continua* F *de* $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ *en* $X(A)$*:*

Sean $\mathcal{D}=\left\{P\times\left(L_2^{[I]}\right)^{Y\setminus\{Q\}}:\,P\in X\left(L_2^{[I]}\right)\text{ y }Q\in Y\right\}$ y $f:\mathcal{D}\longrightarrow X(A)$ definida como en la Proposición 4.3.3.8. Teniendo en cuenta que todo espacio de Priestley es un espacio regular, entonces por las Proposiciones 4.3.3.8 y 4.3.3.9 y el Teorema 4.3.3.10 podemos afirmar que f tiene una extensión continua $F:X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)\longrightarrow X(A)$. Además, de la demostración del Teorema 4.3.3.10 tenemos que para todo $R\in X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)\setminus\mathcal{D}$, $F(R)=S$ si, y solo si, $f(R_d)\underset{d\in D}{\longrightarrow}S$ para cualquier red $(R_d)_{d\in D}\subseteq\mathcal{D}$ tal que $R_d\underset{d\in D}{\longrightarrow}R$.

(II) F *es una función sobreyectiva:*

Sea $S\in X(A)$ tal que $S={\phi_i^A}^{-1}(S)$ para algún $i\in I$. Por el Lema 2.1.2.9 se verifica que $(X(A),\{f_i^A\}_{i\in I})$ es un $l_\theta P-$espacio, entonces por la propiedad (P3) de los $P-$espacios (Sección 1.4.1) existe $Q\in max\,X(A)$ tal que $S\subseteq Q$, de donde sigue, por (lP3) y la definición de la función f_i^A, $i\in I$, que $S={\phi_i^A}^{-1}(Q)$. Si consideramos $P\in X({L_2}^{[I]})$ tal que $P = \phi_i^{-1}(P)$, entonces de la Proposición 4.3.3.8, tenemos que $P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}} \in \mathcal{D}$ y $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}}\right) = S$, y por el inciso (I), concluimos que $F\left(P \times L_2^{[I]^{Y \setminus \{Q\}}}\right) = S$.

Sea ahora $S \in X(A)$ tal que $S \neq \phi_i^{A^{-1}}(S)$ para todo $i \in I$. Entonces, la propiedad (LP8) y la definición de las funciones $f_i^A : X(A) \longrightarrow X(A)$, $i \in I$, nos permiten afirmar que existe una red $(S_d)_{d \in D} \subseteq X(A)$ tal que tal que $\phi_{i_d}^{A^{-1}}(S_d) \underset{d \in D}{\longrightarrow} S$. Por lo probado en el párrafo anterior tenemos que para cada $d \in D$, existe $P_d \in \mathcal{D}$ tal que $F(P_d) = \phi_{i_d}^{A^{-1}}(S_d)$ y por consiguiente, (1) $F(P_d) \underset{d \in D}{\longrightarrow} S$. Como $(P_d)_{d \in D}$ es una red en $X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$ y el espacio $X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$ es compacto, entonces por el Teorema 2.1.1.12 existe $P \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$ tal que $(P_d)_{d \in D} \succ P$ y por lo tanto, por el Teorema 2.1.1.11, existe una subred $(P_{d_c})_{c \in D}$ tal que $P_{d_c} \underset{c \in D}{\longrightarrow} P$, de donde se sigue, por ser F continua y el Teorema 2.1.1.14, que (2) $F(P_{d_c}) \underset{c \in D}{\longrightarrow} F(P)$. Por otra parte, como $(F(P_{d_c}))_{c \in D}$ es una subred de $(F(P_d))_{d \in D}$, entonces de (1) y el Lema 2.1.1.10, resulta que $F(P_{d_c}) \underset{c \in D}{\longrightarrow} S$. De esta última afirmación, (2), el hecho de que $X(A)$ es un espacio de Hausdorff y el Teorema 2.1.1.15, concluimos que $S = F(P)$.

(III) F *es una función isótona:*

Con el objeto de mostrar que F es isótona, a continuación probamos que para todo $a \in A$, $F^{-1}(\sigma_A(a)) = \sigma_{\left(L_2^{[I]}\right)^Y}(h_a)$, donde $h_a : Y \longrightarrow L_2^{[I]}$ está definida por

$$h_a(Q)(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_i^A(a) \in Q, \\ 0 & \text{si } \phi_i^A(a) \notin Q. \end{cases}$$

Por lo demostrado en la Proposición 4.3.3.8, tenemos que

(1) $R \in \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a) \cap \mathcal{D}$ si, y solo si, $R \in f^{-1}(\sigma_A(a))$.

Sea $S \in \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a) \cap \left(X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \setminus \mathcal{D}\right)$, entonces por el Lema 4.3.3.7, hay una red (2) $(S_d)_{d \in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que (3) $S_d \underset{d \in D}{\longrightarrow} S$. Por lo tanto, existe $d_o \in D$ tal que para todo $d \in D$, $d_o \prec d$, $S_d \in \sigma_{\left(L_2^{[I]}\right)^Y}(h_a) \cap \mathcal{D}$, de lo que se sigue por (1) que $S_d \in f^{-1}(\sigma_A(a))$ para todo $d \in D$, $d_o \prec d$. En consecuencia, de (1) y teniendo en cuenta que $F|\mathcal{D} = f$, tenemos que $S_d \in F^{-1}(\sigma_A(a))$ para todo $d \in D$, $d_o \prec d$. Además, por el inciso (I), $F^{-1}(\sigma_A(a))$ es un subconjunto cerrado de $X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$, entonces de la última afirmación, (3) y el Lema 2.1.1.7, inferimos que $S \in F^{-1}(\sigma_A(a))$.

Recíprocamente, si $T \in F^{-1}(\sigma_A(a)) \cap \mathcal{D}$, entonces $F(T) = f(T)$ y por lo tanto, $T \in f^{-1}(\sigma_A(a))$, de donde obtenemos por (1) que $T \in \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$.

Consideremos ahora (4) $P \in F^{-1}(\sigma_A(a)) \cap \left(X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \setminus \mathcal{D}\right)$, entonces por los Lemas 2.1.1.7 y 4.3.3.7, existe una red $(P_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que (5) $P_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} P$. Además, por el inciso (I) y el Teorema 2.1.1.16, $F^{-1}(\sigma_A(a))$ es un subconjunto abierto de $X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$, entonces de (4) y (5) podemos asegurar que existe $d_o \in D$ tal que $P_d \in F^{-1}(\sigma_A(a))$ para todo $d \in D$, $d_o \prec d$ y por consiguiente, $P_d \in f^{-1}(\sigma_A(a)) \cap \mathcal{D}$ para todo $d \in D$, $d_o \prec d$. De esta última afirmación y (1) resulta que $P_d \in \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$ para todo $d \in D$, $d_o \prec d$, y en consecuencia de (5), el Lema 2.1.1.7 y por ser $\sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$ un subconjunto cerrado de $X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$, se sigue que $P \in \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$.

Concluimos así que (6) $F^{-1}(\sigma_A(a)) = \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$.

Ahora estamos en condiciones de probar que F es isótona. Sean $P, R \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$ tales que $P \subseteq R$. Si $F(P) \not\subseteq F(R)$, entonces existe $a \in A$ tal que $F(P) \in \sigma_A(a)$ y $F(R) \notin \sigma_A(a)$ y en consecuencia de (6) obtenemos que $P \in \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$ y $R \notin \sigma_{L_2^{[I]^Y}}(h_a)$. Por lo tanto, $h_a \in L_2^{[I]^Y}$ es tal que $h_a \in P$ y $h_a \notin R$, de donde inferimos que $P \not\subseteq R$, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, $F(P) \subseteq F(R)$.

(IV) $F \circ f_i^{L_2^{[I]^Y}} = f_i^A \circ F$ *para todo* $i \in I$:

En primer lugar tenemos que (1) $f \circ f_i^{L_2^{[I]^Y}} = f_i^A \circ f$ para todo $i \in I$. En efecto, de la definición de la función $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ inferimos que $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) \subseteq Q$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y para todo $Q \in Y$, entonces por (lP3) obtenemos que
(2) $f_i^A\left(f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)\right) = f_i^A(Q)$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y para todo $Q \in Y$.

Teniendo en cuenta la definición de las funciones $f_i^{L_2^{[I]^Y}} : X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \longrightarrow X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$, $i \in I$, dada en el Lema 2.1.2.9, y que en el álgebra funcional $L_2^{[I]^Y}$ (Ejemplo 4.1.3) las operaciones ϕ_i, $i \in I$, se definen puntualmente, resulta inmediato que para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y para todo $Q \in Y$, $f_i^{L_2^{[I]^Y}}\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = f_i^{L_2^{[I]}}(P) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}$, en consecuencia tenemos que (3) $\left(f \circ f_i^{L_2^{[I]^Y}}\right)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = f\left(f_i^{L_2^{[I]}}(P) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y todo $Q \in Y$. Además, de las definiciones de la funciones $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$, dada en la Proposición 4.3.3.8, $f_i^{L_2^{[I]^Y}} : X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \longrightarrow X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$ y $f_i^A : X(A) \longrightarrow X(A)$, $i \in I$, dadas en el Lema 2.1.2.9, obtenemos que para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y para todo $Q \in Y$ se verifica que (4) $f\left(f_i^{L_2^{[I]}}(P) \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q\}}\right) = f\left({\phi_i}^{-1}(P) \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q\}}\right) = \phi_i^{A^{-1}}(Q) = f_i^A(Q)$. Por lo tanto, (2), (3) y (4) nos permiten afirmar que se verifica (1).

Sea ahora $T \in X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$, entonces por el Lema 4.3.3.7 existen una red $(P_d)_{d\in D} \subseteq X\left(L_2^{[I]}\right)$ y una red $(Q_d)_{d\in D} \subseteq Y$ tales que (5) $P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}} \underset{d\in D}{\longrightarrow} T$. Teniendo en cuenta que para todo $i \in I$, $f_i^{{L_2^{[I]}}^Y} : X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \longrightarrow X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ y $F : X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \longrightarrow X(A)$ funciones continuas, entonces de (5) y el Teorema 2.1.1.14, inferimos que para todo $i \in I$, (6) $F\left(f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{X\setminus\{Q_d\}}\right)\right) \underset{d\in D}{\longrightarrow} F(f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}(T))$. Por otra parte, se verifica que para todo $i \in I$, $f_i^{{L_2^{[I]}}^X}\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right) \in \mathcal{D}$ para todo $d \in D$, entonces para todo $i \in I$, $F\left(f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right)\right) = f\left(f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right)\right)$ para todo $d \in D$, de donde obtenemos por (1) que (7) $F\left(f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right)\right) = f_i^A\left(f\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right)\right)$ para todo $d \in D$ y para todo $i \in I$. De (5) y la definición de F, dada en el inciso (I), tenemos que $f\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right) \underset{d\in D}{\longrightarrow} F(T)$. Como para todo $i \in I$, $f_i^A : X(A) \longrightarrow X(A)$ es continua, entonces por el Teorema 2.1.1.14, resulta que $f_i^A\left(f\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right)\right) \underset{d\in D}{\longrightarrow} f_i^A(F(T))$ para todo $i \in I$. De esta última afirmación y (7) se sigue que para todo $i \in I$, (8) $F\left(f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\left(P_d \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q_d\}}\right)\right) \underset{d\in D}{\longrightarrow} f_i^A(F(T)$. De (6), (8), el hecho de que $X(A)$ un espacio de Hausdorff y el Teorema 2.1.1.15, inferimos que $\left(F \circ f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\right)(T) = \left(f_i^A \circ F\right)(T)$ para todo $i \in I$ y para todo $T \in X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$. Por lo tanto, $F \circ f_i^{{L_2^{[I]}}^Y} = f_i^A \circ F$ para todo $i \in I$.

De los incisos (I), (II), (III) y (IV) concluimos que F es una $l_\theta P-$función sobreyectiva de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ en $X(A)$. □

Corolario 4.3.3.12 ([56], [58]) *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I})$ una $LM_\theta-$álgebra. Entonces A es isomorfa a una $LM_\theta-$subálgebra de ${L_2^{[I]}}^X$, donde $X = max\, X(A)$.*

Dem. Los Lemas 2.1.2.9 y 2.1.2.10 y la Proposición 4.3.3.11 nos permiten afirmar que existe un $LM_\theta-$homomorfismo inyectivo de A en la $LM_\theta-$álgebra ${L_2^{[I]}}^X$, donde $X = max\, X(A)$ y por lo tanto, A es isomorfa a una $LM_\theta-$subálgebra de ${L_2^{[I]}}^X$. □

Observación 4.3.3.13 En el Corolario 4.3.3.12, se puede considerar $X = X(C(A))$, donde $X(C(A))$ es el conjunto de los filtros primos del álgebra booleana $C(A)$ de los elementos complementados de A. Es conocido que $max\, X(A)$ es isomorfo, como conjunto ordenado, a $X(C(A))$, donde ambos son anticadenas.

Finalmente, describimos las $mLM_\theta-$álgebras simples.

Teorema 4.3.3.14 *Sea* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ *una* $mLM_\theta-$*álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $mLM_\theta-$álgebra simple,*

(ii) *A es isomorfa a una $mLM_\theta-$subálgebra del álgebra funcional ${L_2^{[I]}}^X$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Como A es una $LM_\theta-$álgebra, entonces por por el Corolario 4.3.3.12, existe un $LM_\theta-$homomorfismo inyectivo h de A en la $LM_\theta-$álgebra ${L_2^{[I]}}^X$. Si consideramos la $mLM_\theta-$álgebra $\left({L_2^{[I]}}^X, \exists, \forall\right)$, entonces por el Lema 2.1.2.11, $Ł_\theta(h)$ es una $l_\theta P-$función sobreyectiva de $mqŁ_\theta\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ en $mqŁ_\theta(A)$, donde $mqŁ_\theta\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ y $mqŁ_\theta(A)$ son los $mql_\theta P-$espacios asociados a ${L_2^{[I]}}^X$ y a A, respectivamente. Teniendo en cuenta que A y ${L_2^{[I]}}^X$ son $mLM_\theta-$álgebras simples y $mqŁ_\theta(h) = Ł_\theta(h)$, por la Proposición 4.3.3.6, tenemos que $mqŁ_\theta(h)$ es una $mql_\theta P-$función de $mqŁ_\theta\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ en $mqŁ_\theta(A)$. Por lo tanto, del Lema 4.1.1.18, obtenemos que $(m\mathbb{L}_\theta \circ mqŁ_\theta)(h)$ es un $mLM_\theta-$homomorfismo inyectivo de $(m\mathbb{L}_\theta \circ mqŁ_\theta)(A)$ en $(m\mathbb{L}_\theta \circ mqŁ_\theta)\left({L_2^{[I]}}^X\right)$. Como, por el Teorema 4.1.1.21, $m\mathbb{L}_\theta \circ mqŁ_\theta$ es naturalmente equivalente al funtor identidad $Id_{\boldsymbol{m\mathcal{LM}_\theta}}$, entonces de la última afirmación concluimos que h es un mLM_θ-homomorfismo inyectivo de A en ${L_2^{[I]}}^X$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia directa del Corolario 4.3.3.3. □

Corolario 4.3.3.15 *Sea* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall)$ *una* mLM_n-*álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una mLM_n-álgebra simple,*

(ii) *A es isomorfa a una mLM_n-subálgebra de L_n^X.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.3.3.14, teniendo en cuenta que cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, la mLM_n-álgebra L_n^X es isomorfa a ${L_2^{[I]}}^X$. $\square$

Cabe mencionar que el resultado enunciado en el Teorema 4.3.3.14 se obtiene aun sin tener en cuenta que las nociones de $mql_\theta P-$espacio y $smql_\theta P-$espacio son equivalentes y por ende, que las nociones de $mLM_\theta-$álgebra y $smLM_\theta-$álgebra son equivalentes, como lo hemos indicado en las demostraciones de los resultados previos a dicho teorema. Es por ello, que a partir del Teorema 4.3.3.14 probamos nuevamente que las nociones de $mLM_\theta-$álgebra y $smLM_\theta-$álgebra son equivalentes, pero de un modo diferente al de la Sección 4.1.3 de este capítulo (Corolario 4.1.3.10).

Corolario 4.3.3.16 *Toda $mLM_\theta-$álgebra simple es una $smLM_\theta-$álgebra simple.*

Dem. Se sigue del Corolario 4.3.3.3, el Teorema 4.3.3.14 y el hecho de que para toda $smLM_\theta-$álgebra A, una relación $\varphi \subseteq A \times A$ es una $smLM_\theta-$congruencia de A si, y solo si, φ es una $mLM_\theta-$congruencia. $\square$

Corolario 4.3.3.17 *Sea $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i \in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i \in I}, \exists, \forall\rangle$ un álgebra de tipo $(2, 2, 0, 0, \{1\}_{i \in I}, \{1\}_{i \in I}, 1, 1)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $mLM_\theta-$álgebra,*

(ii) *A es una $smLM_\theta-$álgebra.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (i) y los Corolarios 4.2.2.14 y 4.3.3.16, inferimos que el álgebra A es un producto subdirecto de un conjunto de $smLM_\theta-$álgebras simples y por lo tanto, A es una $smL_\theta-$álgebra.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata. $\square$

Capítulo 5

Álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\boldsymbol{\theta}-$valuadas con negación monádicas

En este capítulo determinamos una dualidad topológica para las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación monádicas o $qnLM_\theta-$álgebras. A partir de esta dualidad describimos las $qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles y las $qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles por medio de las $\theta-$congruencias (o $\theta qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles), arrivando por un método diferente a los resultados indicados por M. Abad en [1], en el caso en que θ es un entero n, $n \geq 2$.

Este capítulo se organiza como se indica a continuación. En la primera sección determinamos una dualidad topológica para las $qnLM_\theta-$álgebras cuando θ es infinito y finito, que extiende la dualidad obtenida por R. Cignoli en [18] para los $Q-$retículos distributivos y la dualidad descripta en la Sección 2.1 para las $nLM_\theta-$álgebras. En la segunda sección, a partir de esta dualidad caracterizamos las congruencias y las $\theta-$congruencias de estas álgebras. Como consecuencia de ello hallamos que las $qnLM_\theta-$álgebras son semisimples. En la tercera sección probamos que las $qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles con respecto a la congruencias y con respecto a las $\theta-$congruencias coinciden y además, que la imagen por el cuantificador de una $qnLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible es una nLM_θ-álgebra simple y por lo tanto, ellas son las subálgebras del álgebra funcional ${L_2^{[I]}}^X$ cuando θ es infinito, y las subálgebras del álgebra funcional L_n^X cuando θ es un entero n, $n \geq 2$, donde estas álgebras son las descriptas en la Sección 1.3.

5.1. $qnLM_\theta-$álgebras

Nuestro primer objetivo es determinar una dualidad topológica las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación monádicas.

5.1.1. Propiedades de las $qnLM_\theta-$álgebras

De los definiciones y propiedades enunciadas en la Sección 1.3 podemos observar que toda $nLM_\theta-$álgebra con negación monádica es un $Q-$retículo distributivo según [18]. Esto nos sugiere considerar en este trabajo la siguiente definición:

Definición 5.1.1 Un álgebra de Łukasiewicz $\theta-$valuada con negación monádica (*o* $qnLM_\theta-$álgebra) *es un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists\rangle$ *que verifica las siguientes condiciones:*

(qnL1) $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ *es una* $nLM_\theta-$*álgebra,*

(qnL2) $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \exists\rangle$ *es un* $Q-$*retículo distributivo,*

(qnL3) $\exists\phi_i x = \phi_i\exists x$ *para todo* $x \in A$ *y para todo* $i \in I$.

En el caso que θ es un entero n, $n \geq 2$, entonces $I = \{1, \ldots, n-1\}$ y decimos que $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \exists\rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz $n-$valuada con negación monádica o una $qnLM_n-$álgebra.

Denotamos por $\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta}$ a la categoría de las $qnLM_\theta-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos. En el caso particular en que $\theta = n$, $n \geq 2$, la denotamos por $\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_n}$.

En lo que sigue a las álgebras de Łukasiewicz $\theta-$valuadas con negación monádicas en algunos casos, cuando no haya lugar a dudas, las notamos con $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ o simplemente por A.

Ejemplo 5.1.2 Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra completamente chrysippiana, X un conjunto no vacío y $A^X = \{f : X \longrightarrow A\}$ tales que para todo $f \in A^X$ existe el supremo del conjunto $f(X)$, al cual lo denotamos por $\bigvee f(X)$. Entonces, $(A^X, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \exists)$ es una $qnLM_\theta-$álgebra funcional, donde la operación unaria $\exists$ se define por la fórmula:

$(\exists f)(x) = \bigvee f(X)$ y las operaciones de la $nLM_\theta-$álgebra $(A^X, \sim, \{\phi\}_{i\in I})$ se definen puntualmente.

Los ejemplos típicos son ${L_2^{[I]}}^X$ y L_n^X cuando $\theta = n$, $n \geq 2$, ya que $L_2^{[I]}$ es una $nLM_\theta-$álgebra completa y completamente chrysippiana y L_n es una nLM_n-álgebra finita. Estas álgebras son importantes más adelante para determinar las $qnLM_\theta-$álgebras y $qnLM_n-$álgebras subdirectamente irreducibles, respectivamente.

Proposición 5.1.1.1 *Sea* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists\rangle$ *una* $qnLM_\theta-$*álgebra. Si para todo* $x \in A$, $\forall x = \sim\exists \sim x$*, entonces* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists, \forall\rangle$ *es una* $sLM_\theta-$*álgebra.*

Dem. Por el Lema 1.3.6 tenemos que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \exists, \forall\rangle$ es un $sM-$retículo. Además, de la Definición 5.1.1 se sigue que $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}\rangle$ es una $LM_\theta-$álgebra que satisface la condición (mL1) de la Definición 4.1.1. Resta probar la condición (mL2).

(mL2): Para cada $x \in A$, $\phi_i \forall x = \phi_i \sim \exists \sim x$. Teniendo en cuenta que por (nL5), $\phi_i \sim x = \sim \phi_{d(i)} x$, se sigue que $\phi_i \forall x = \sim \phi_{d(i)} \exists \sim x$. Además, por (qnL3) obtenemos que $\sim \phi_{d(i)} \exists \sim x = \sim \exists \phi_{d(i)} \sim x$, de donde resulta de (nL5) que $\sim \exists \phi_{d(i)} \sim x = \sim \exists \sim \phi_i x$. Luego, como $\sim \exists \sim \phi_i x = \forall \phi_i x$, concluimos que $\phi_i \forall x = \forall \phi_i x$ para todo $x \in A$ y para todo $i \in I$. □

Proposición 5.1.1.2 *Sea* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists\rangle$ *una* $qnLM_\theta-$*álgebra. Entonces satisface la siguiente identidad:*

(qnL4) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$ *todo* $x \in A$.

Dem. Por (qnL3) y (nL3) se verifica que para todo $i \in I$ y para todo $x \in A$, $\phi_i \exists \sim \exists x = \exists \phi_i \sim \exists x = \exists \sim \phi_{d(i)} \exists x = \exists \sim \exists \phi_{d(i)} x$. Teniendo en cuenta que $\exists \phi_{d(i)} x$, $\phi_{d(i)} x \in C(A)$, la definición de la operación unaria $\forall$ y la propiedad (EU2) de las $qnLM_\theta-$álgebras (Sección 1.3), se sigue que $\exists \sim \exists \phi_{d(i)} x = \exists - \exists - -\phi_{d(i)} x = \exists \forall - \phi_{d(i)} x = \forall - \phi_{d(i)} x = -\exists \phi_{d(i)} x = \sim \exists \phi_{d(i)} x$. Por lo tanto, (1) $\phi_i \exists \sim \exists x = \sim \exists \phi_{d(i)} x$ para todo $i \in I$ y para todo $x \in A$. Por otra parte, por (qnL3) y (nL3) tenemos que (2) $\phi_i \sim \exists x = \sim \phi_{d(i)} \exists x = \sim \exists \phi_{d(i)} x$ para todo $i \in I$ y para todo $x \in A$. De (1) y (2) y la propiedad (L6) de las $LM_\theta-$álgebras (Sección 1.2), concluimos que $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$ todo $x \in A$. □

Corolario 5.1.1.3 *Sea* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists\rangle$ *una* $qnLM_\theta-$*álgebra. Entonces* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \exists, \rangle$ *es un álgebra de De Morgan monádica.*

Dem. Es consecuencia de la Definición 5.1.1, la Proposición 5.1.1.2 y la definición de álgebra de De Morgan monádica ([70]). □

5.1.2. Una dualidad topológica para las $qnLM_\theta-$álgebras

En esta sección comenzamos explicitando una dualidad topológica para las $qnLM_\theta-$álgebras, con θ finito e infinito. La dualidad para las $qnLM_n-$álgebras fue publicada en [28].

Sea $\theta \geq 2$ el tipo de orden de un conjunto totalmente ordenado J con primer elemento 0 y último elemento 1, siendo $J = \{0\} + I$ (suma ordinal).

Definición 5.1.2.1 $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un espacio de Łukasiewicz–Moisil* $\theta-$*valuado con negación monádico o* $qNl_\theta P-$*espacio si satisface las siguientes condiciones:*

(qnlP1) (X, E) *es un* $qP-$*espacio,*

(qnlP2) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $Nl_\theta P-$*espacio,*

(qnlP3) $f_i^{-1}(E(U)) = E(f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$ *y para todo* $i \in I$,

donde $E(U) = \{y \in X : (x, y) \in E,$ *para algún* $x \in U\}$.

Observación 5.1.2.2 De las Definiciones 2.2.1.1, 5.1.2.1 y de la definición de $qP-$espacio dada en [18] se tiene que $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un* $qNl_\theta P-$*espacio si, y solo si, para cada* $i \in I$, f_i *es una función de* X *en* X, $g : X \longrightarrow X$ *es un homeomorfismo involutivo y un anti–isomorfismo de orden,* E *es una relación de equivalencia, y se satisfacen las siguientes condiciones:*

(lP1) X *es un espacio de Priestley,*

(lP2) $f_i : X \longrightarrow X$ *es continua para todo* $i \in I$,

(lP3) $x \leq y$, *implica* $f_i(x) = f_i(y)$ *para todo* $i \in I$, (lP4) $i \leq j$, *implica* $f_i(x) \leq f_j(x)$ *para todo* $x \in X$,

(lP5) $f_i \circ f_j = f_i$ *para todo* $i, j \in I$,

(lP6) $\overline{\bigcup_{i \in I} f_i(X)} = X$ *o* ($\mathrm{l_n}$P6) $X = \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(X)$, *cuando* $\theta = n$, $n \geq 2$,

(nlP3) $f_i \circ g = f_i$ *para todo* $i \in I$,

(nlP4) $g \circ f_i = f_{d(i)}$, $d : I \to I$ *es una involución decreciente para todo* $i \in I$ *o*

($\mathrm{nl_n}$P4) $g \circ f_i = f_{n-i}$, $1 \leq i \leq n-1$ *cuando* $\theta = n$, $n \geq 2$,

(q1) $E(U) \in D(X)$ *para todo* $U \in D(X)$,

(q2) $E(x)$ *es un subconjunto cerrado de* X *para todo* $x \in X$,

(qnlP3) $f_i^{-1}(E(U)) = E(f_i^{-1}(U))$ *para todo* $U \in D(X)$ *y para todo* $i \in I$.

Definición 5.1.2.3 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i \in I}, E)$ *y* $(X', g', \{f'_i\}_{i \in I}, E')$ $qNl_\theta P-$*espacios. Una función* $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $qNl_\theta P-$*función si* f *es una* $Nl_\theta P-$*función y una* $qP-$*función.*

Más precisamente, $f : X \longrightarrow X'$ *es una* $qNl_\theta P-$*función si es una función isótona y continua que satisface:*

(lPf) $f'_i \circ f = f \circ f_i$ *para todo* $i \in I$,

(mPf) $f \circ g = g' \circ f$,

(qf1) $E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(E'(U))$ *para cada* $U \in D(X')$.

Observación 5.1.2.4 De las propiedades (qnlP2) y (qnlP3), se sigue inmediatamente que *si* $(X, g, \{f_i\}_{i \in I}, E)$ *es un* $qNl_\theta P-$*espacio, entonces para todo* $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow X$ *es una* $qP-$*función.*

A continuación mostramos una caracterización de las $qP-$funciones, la que nos permite probar más adelante una formulación equivalente de la Definición 5.1.2.1 que nos resulta de gran utilidad.

Proposición 5.1.2.5 ([28]) Sean (X, E) y (X', E') $qP-$espacios y f una $P-$función de X en X'. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es una $qP-$función,

(ii) f satisface las propiedades:

(qf2) si $(x, y) \in E$, entonces $(f(x), f(y)) \in E'$,

(qf3) si $(f(x), z) \in E'$, entonces existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in E$ y $z \leq f(y)$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): La propiedad (qf2) es inmediata de la hipótesis y de [18, Lemma 2.8]. Entonces, solo resta probar la propiedad (qf3). Sean $x \in X$ y $z \in X'$ tales que (1) $(f(x), z) \in E'$. Si $z \leq f(x)$, eligiendo $y = x,$ se obtiene (qf3). En caso contrario, existe $U \in D(X')$ tal que $z \in U$ y $f(x) \notin U$, de donde por (i) y (1) obtenemos que $x \in E(f^{-1}(U))$. De esta última afirmación, se sigue que $f^{-1}(U) \cap E(x) \neq \emptyset$. Además, como f es continua y cerrada, $K = f(f^{-1}(U) \cap E(x))$ es un subconjunto cerrado de X' y por lo tanto es compacto. Si asumimos que $z \not\leq f(y)$ para todo $y \in f^{-1}(U) \cap E(x)$, entonces $z \not\leq k$ para todo $k \in K$. Teniendo en cuenta que K es compacto, podemos afirmar que existen conjuntos $V_i \in D(X')$, con $1 \leq i \leq m$, tales que $z \in V_i$ y $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} X' \setminus V_i$. Si $V = \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i$, entonces (2) $V \cap K = \emptyset$. Por otra parte, si $W = U \cap V$, se sigue que $z \in W$. De (i) y (1) obtenemos que $f^{-1}(W) \cap E(x) \neq \emptyset$, de donde concluimos que $V \cap K \neq \emptyset$, lo que contradice (2). Luego, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in E$ y $z \leq f(y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): La hipótesis (qf2) y [18, Lemma 2.8] nos permiten afirmar que para cada $V \in D(X')$, $E(f^{-1}(V)) \subseteq f^{-1}(E'(V))$. Sea ahora $x \in X$ tal que $(f(x), v) \in E'$, para algún $v \in V$, entonces por la hipótesis (qf3) existe $y \in X$ tal que (1) $(x, y) \in E$ y (2) $v \leq f(y)$. Como V es un subconjunto creciente de X', entonces de (2) tenemos que $f(y) \in V$, de donde concluimos por (1) que $x \in E(f^{-1}(V))$. $\square$

Corolario 5.1.2.6 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i \in I}, E)$ tal que X es un espacio de Priestley, E es una relación de equivalencia sobre X, $g : X \longrightarrow X$ y $f_i : X \longrightarrow X$, $i \in I$, funciones. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio,*

(ii) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *satisface las siguientes condiciones:*

(qnlP1) (X, E) *es un* $qP-$*espacio,*

(qnlP2) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *es un* $Nl_\theta P-$*espacio,*

(qnlP4) $(x, y) \in E$ *implica* $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ *para todo* $i \in I$,

(qnlP5) *si* $(f_i(x), z) \in E$, *entonces existe* $y \in X$ *tal que* $(x, y) \in E$ *y* $z \leq f_i(y)$.

Dem. Es consecuencia directa de la Definición 5.1.2.1, la Observación 5.1.2.4 y la Proposición 5.1.2.5. □

Observación 5.1.2.7 Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio y $x, y \in X$. Teniendo en cuenta (qnlP4) y (lP5), deducimos que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) existe $i \in I$ tal que $(f_i(x), f_i(y)) \in E$,

(ii) $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ para todo $i \in I$.

Lema 5.1.2.8 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', g', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ $qNl_\theta P-$*espacios y* f *una función de* X *en* X'. *Entonces,* f *es una* $qNl_\theta P-$*función si, y solo si,* f *es una función isótona y continua que satisface:*

(lPf) $f'_i \circ f = f \circ f_i$ *para todo* $i \in I$,

(mPf) $f \circ g = g' \circ f$,

(qf2) *si* $(x, y) \in E$, *entonces* $(f(x), f(y)) \in E'$,

(qf3) *si* $(f(x), z) \in E'$, *entonces existe* $y \in X$ *tal que* $(x, y) \in E$ *y* $z \leq f(y)$.

Dem. Es consecuencia de la Proposición 5.1.2.5. □

Denotamos por $\boldsymbol{qNl_\theta\mathcal{P}}$ a la categoría de los $qNl_\theta P-$espacios y las $qNl_\theta P-$funciones. En el caso particular en que θ es un entero n, $n \geq 2$, denotamos por $\boldsymbol{qNl_n\mathcal{P}}$ a la categoría de los qNl_nP-espacios y las qNl_nP-funciones.

Ahora enunciamos una serie de resultados que se necesitan para probar que las categorías $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$ y $\boldsymbol{qn\mathfrak{L}\mathfrak{M}_\theta}$, con θ infinito y finito, son dualmente equivalentes.

Lema 5.1.2.9 *Si* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *es un objeto de* $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$, *entonces* $qn\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $qnLM_\theta-$*álgebra, donde para todo* $U \in D(X)$, $\sim U = X \setminus g^{-1}(U)$, $\exists_E U = E(U)$ *y* $\phi_i^X(U) = {f_i}^{-1}(U)$ *para todo* $i \in I$.

Dem. Se concluye del Lema 2.2.1.4, (E1) de la Sección 1.4.4 y la propiedad (qnlP3). □

Lema 5.1.2.10 *Si* $(A, \sim, \exists, \{\phi_i\}_{i\in I}, 0, 1)$ *es un objeto de* $\boldsymbol{qn\mathfrak{L}\mathfrak{M}_\theta}$, *entonces* $qNL_\theta(A) = (X(A), g_A, \{f_A^i\}_{i\in I}, E_\exists)$ *es un* $qNl_\theta P-$*espacio, donde para cada* $P \in X(A)$, $g_A(P) = A \setminus \{\sim x : x \in P\}$, $f_i^A(P) = {\phi_i}^{-1}(P)$ *y* $E_\exists = \{(P, Q) \in X(A) \times X(A) : P \cap \exists(A) = Q \cap \exists(A)\}$. *Además, la función* σ_A *es un* $qnLM_\theta-$*isomorfismo de* A *sobre* $D(X(A))$, *donde para cada* $a \in A$, $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$.

Dem. Si $(A, \sim, \exists, \{\phi_i\}_{i\in I}, 0, 1)$ es una $qnLM_\theta-$álgebra, entonces de (E2) de la Sección 1.4.4 y del Lema 2.2.1.5 obtenemos las condiciones (qnlP1) y (qnlP2) de la Definición 5.1.2.1 y que $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $qnLM_\theta-$isomorfismo, donde las operaciones $\phi_i^{X(A)}$ y $\exists_{E_\exists}$ se definen en $D(X(A))$ como en el Lema 5.1.2.9. Además, de la hipótesis y el hecho de que σ_A es un $qnLM_\theta-$isomorfismo se deduce fácilmente que para todo $a \in A$ y para todo $i \in I$, $\exists_{E_\exists} \phi_i^{X(A)} \sigma_A(a) = \phi_i^{X(A)} \exists_{E_\exists} \sigma_A(a)$, y esto implica que $E_\exists({f_i^A}^{-1}(U)) = {f_i^A}^{-1}(E_\exists(U))$ para todo $U \in D(X(A))$ y para todo $i \in I$. □

Los Lemas 5.1.2.11 y 5.1.2.12 son consecuencias inmediatas de los Lemas 2.2.1.6 y 2.2.1.7, respectivamente y de los resultados obtenidos en [18].

Lema 5.1.2.11 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', g', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ *objetos de* $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$ *y* f *una* $qNl_\theta P-$*función de* X *en* X'. *Entonces, la aplicación* $qn\mathbb{L}_\theta(f)$, *definida como en el* Lema 2.2.1.6, *es un* $qnLM_\theta-$*homomorfismo de* $D(X')$ *en* $D(X)$. *Además, se verifica que el* $qnLM_\theta-$*homomorfismo* $qn\mathbb{L}_\theta(f)$ *es inyectivo (sobreyectivo) si la* $qNl_\theta P-$*función* f *es sobreyectiva (inyectiva).*

Lema 5.1.2.12 *Sean* $(A, \sim, \exists, \{\phi_i\}_{i\in I}, 0, 1)$ *y* $(A', \sim', \exists', \{\phi'_i\}_{i\in I}, 0, 1)$ *objetos de* $\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta}$ *y* h *un* $qnLM_\theta-$*homomorfismo de* A *en* A'. *Entonces, la aplicación* $qN\text{Ł}_\theta(h)$, *definida como en el* Lema 2.2.1.7 , *es una* $qNl_\theta P-$*función de* $X(A')$ *en* $X(A)$. *Además, se verifica que la* $qNl_\theta P-$*función* $qN\text{Ł}_\theta(h)$ *es inyectiva* (*sobreyectiva*) *si el* $qnLM_\theta-$*homomorfismo* h *es sobreyectivo* (*inyectivo*).

De la Definición 5.1.2.3 resulta que un morfismo en la categoría $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$ es un isomorfismo si, y solo si, es un isomorfismo en las categorías $\boldsymbol{q\mathfrak{P}}$ y $\boldsymbol{\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$, luego las demostraciones del Lema 5.1.2.13 y el Corolario 5.1.2.14 son inmediatas.

Lema 5.1.2.13 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *y* $(X', g', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ *objetos de* $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$ *y* f *una función de* X *en* X'. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es un isomorfismo en* $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$,

(ii) f *es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo tal que:*

(mPf) $f \circ g = g' \circ f$,

(lPf) $f \circ f_i = f'_i \circ f$ *para todo* $i \in I$,

(qf4) $(x, y) \in E$ *si, y solo si,* $(f(x), f(y)) \in E'$.

Corolario 5.1.2.14 *Sea* $X \in Obj(\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}})$. *Entonces, la función* $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, *definida por* $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$, *es un isomorfismo en la categoría* $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$.

La demostración del Teorema 5.1.2.15 es de rutina.

Teorema 5.1.2.15 *Los funtores* $qn\mathbb{L}_\theta \circ qN\text{Ł}_\theta$ *y* $qN\text{Ł}_\theta \circ qn\mathbb{L}_\theta$ *son naturalmente equivalentes a los funtores identidad* $Id_{\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta}}$ *e* $Id_{\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}}$, *donde* $\{\sigma_A : A \in Obj(\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta})\}$ *y* $\{\varepsilon_X : X \in Obj(\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}})\}$ *son las transformaciones naturales y por lo tanto, la categoría* $\boldsymbol{q\mathfrak{N}l_\theta\mathfrak{P}}$ *es naturamente equivalente a la categoría dual de* $\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta}$.

5.1.3. Propiedades de los $qNl_\theta P-$espacios

En esta sección obtenemos algunas propiedades de los $qNl_\theta P-$espacios que nos resultan útiles para caracterizar el retículo de las congruencias y el retículo de las $\theta-$congruencias de una $qnLM_\theta-$álgebra.

Proposición 5.1.3.1 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E) \in Obj(\boldsymbol{qNl_\theta}\mathcal{P})$. Entonces para todo x, $y \in X$ se verifica la siguiente propiedad:*

(qnlP7) *Si $(x, y) \in E$, entonces $(g(x), g(y)) \in E$.*

Dem. Sean $x, y \in X$ tales que (1) $(x, y) \in E$. Si $(g(x), g(y)) \notin E$, entonces por [18, Lema 2.5], podemos suponer que existe $U \in D(X)$ tal que (2) $g(x) \in \exists_E U$ y $g(y) \notin \exists_E U$. Luego $y \in X \setminus g^{-1}(\exists_E U)$. Teniendo en cuenta la definición de $\sim$ en $D(X)$, dada en el Lema 5.1.2.9, tenemos que $y \in \sim \exists_E U$ y en concecuencia de (1) resulta que $x \in \exists_E \sim \exists_E U$. Por el Lema 5.1.2.9, $D(X)$ es una qnLM$_\theta$-álgebra, entonces de la propiedad (qnL4) (Proposición 5.1.1.2) obtenemos que $\exists_E \sim \exists_E U = \sim \exists_E U$ y por lo tanto, $x \in \sim \exists_E U$, de donde se sigue que $g(x) \notin \exists_E U$, lo que contradice (2). □

Proposición 5.1.3.2 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces, $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $smql_\theta P-$espacio.*

Dem. Por el Lema 5.1.2.9, $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ es una qnLM$_\theta$-álgebra. Luego, si $\forall_E U = \sim \exists_E \sim U$ para todo $U \in D(X)$, entonces de la Proposición 5.1.1.1 se sigue que $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_E)$ es una $sLM_\theta-$álgebra y por lo tanto, del Lema 5.1.2.10 obtenemos que $(X(D(X)), \{f_i^{D(X)}\}_{i\in I}, E_{\exists_E})$ es un $smql_\theta P-$espacio, de donde concluimos, por el Corolario 5.1.2.14, que $(X, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ es un $smql_\theta P-$espacio. □

Corolario 5.1.3.3 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces, para todo $x \in X$, se verifican las siguientes propiedades:*

(qnlP8) *$max\, E(f_i(x)) = E(f_i(x))$,*

(qnlP9) *$f_i(E(x)) = E(f_i(x))$ para todo $i \in I$.*

Dem.

(qnlP8): Es consecuencia de la Proposición 5.1.3.2 y el Corolario 4.1.2.3.

(qnlP9): Es consecuencia de la Proposición 5.1.3.2 y el Corolario 4.1.2.5 (propiedad (mqlP10)). □

Corolario 5.1.3.4 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ tal que $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ es un $Nl_\theta P-$espacio y (X, E) es un $qP-$espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un $qNl_\theta P-$espacio,*

(ii) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *satisface las siguientes propiedades:*

(qnlP1) (X, E) *es un $qP-$espacio,*

(qnlP2) $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ *un $Nl_\theta P-$espacio,*

(qnlP4) $(x, y) \in E$ *implica* $(f_i(x), f_i(y)) \in E$ *para todo* $i \in I$,

(qnlP9) $f_i(E(x)) = E(f_i(x))$ *para todo* $i \in I$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia de los Corolarios 5.1.2.6 y 5.1.3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por el Corolario 5.1.2.6 solo resta probar la condición (qnlP5), la que es consecuencia de la condición (qnlP9). En efecto, si x, $z \in X$ y $(f_i(x), z) \in E$, entonces $z \in E(f_i(x))$, de donde sigue por (qnlP9) que $z \in f_i(E(x))$, y así existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in E$ y $z = f_i(y)$. □

Proposición 5.1.3.5 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces satisface la siguiente propiedad:*

(qnlP10) $g(max\, E(x)) = min\, E(g(x))$ *para todo* $x \in X$.

Dem. Sean (1) $y \in \max E(x)$ y (2) $z = g(y)$. Entonces, de (1), (2) y (qnlP7) resulta que $z \in E(g(x))$. Sea (3) $w \in E(g(x))$ tal que (4) $w \leq z$. Luego, de (3), (qnlP7) y por ser g involutivo, obtenemos que (5) $g(w) \in E(x)$. Además, de (1) y (2) y teniendo en cuenta que g es un anti–isomorfismo involutivo, inferimos que $y \leq g(w)$. Luego, de esta última afirmación, (1) y (5) se sigue que $y = g(w)$, así por (2) tenemos que $z = w$, y en consecuencia de (3) y (4), $z \in min\, E(g(x))$.

Recíprocamente, si (1) $z \in min\, E(g(x))$, entonces de (qnlP7) y por ser g un anti–isomorfismo involutivo obtenemos que $z \in g(E(x))$. Luego, existe (2) $y \in E(x)$ tal que (3) $z = g(y)$. Sea (4) $w \in E(x)$ tal que $y \leq w$, entonces $g(w) \in E(g(x))$ y $g(w) \leq z$, de donde inferimos por (1) que $g(w) = z$. Por lo tanto, (5) $w = y$ y así, de (2), (4) y (5) resulta que $y \in max\, E(x)$, y por (3) concluimos que $z \in g(max\, E(x))$. □

5.2. Congruencias y $\boldsymbol{\theta}-$congruencias de las $\boldsymbol{qnLM_\theta}-$álgebras

En esta sección estudiamos las congruencias y las $\theta-$congruencias de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuadas con negación monádicas.

5.2.1. $\boldsymbol{qnLM_\theta}-$congruencias y $\boldsymbol{\theta qnLM_\theta}-$congruencias

Con el objeto de caracterizar el retículo de las congruencias de una $qnLM_\theta-$álgebra en término de ciertos subconjuntos cerrados de su $qNl_\theta P-$espacio asociado, comenzamos caracterizando los subconjuntos $E-$saturados de los $qNl_\theta P-$espacios.

Lema 5.2.1.1 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces para todo subconjunto no vacío Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $E-$saturado* (Definición 4.2.1.1),

(ii) *$min\, E(y) \cup max\, E(y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$.*

Dem. Es consecuencia del Lema 4.2.1.3 y la Proposición 5.1.3.2. □

Proposición 5.2.1.2 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces para todo subconjunto involutivo y no vacío Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es E-saturado,*

(ii) *$max\, E(y) \cup min\, E(y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$,*

(iii) *$max\, E(y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia del Lema 5.2.1.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es inmediata.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Como Y es involutivo, entonces de la hipótesis (iii) y la Proposición 5.1.3.5 se sigue que $max\, E(y) \cup min\, E(y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. □

En lo que sigue caracterizamos los subconjuntos modales y $E-$saturados de un $qNl_\theta P-$espacio.

Lema 5.2.1.3 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ un $Nl_\theta P-$espacio. Entonces todo subconjunto modal de X es involutivo.*

Dem. Sea $Y \subseteq X$ tal que $Y = f_i^{-1}(Y)$ para todo $i \in I$. De esta afirmación, la propiedad (nlP3) de los $Nl_\theta P-$espacios (Definición 2.2.1.1) y el hecho de que g es una involución, inferimos que $g(Y) = g(f_i^{-1}(Y)) = g^{-1}(f_i^{-1}(Y)) = (f_i \circ g)^{-1}(Y) = f_i^{-1}(Y) = Y$. □

Proposición 5.2.1.4 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces para todo subconjunto modal Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $E-$saturado,*

(ii) *Y es saturado ($E(Y) = Y$),*

(iii) *$max\, E(y) \subseteq Y$ para todo $y \in Y$.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia de las Proposiciones 4.2.1.5 y 5.1.3.2.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Se sigue teniendo en cuenta que Y es un subconjunto modal de X, la Proposición 5.2.1.2 y el Lema 5.2.1.3. □

El retículo de los subconjuntos cerrados, semimodales, involutivos y $E_\exists-$saturados del $qNl_\theta P-$espacio asociado a una $qnLM_\theta-$álgebra cumple un rol fundamental en la caracterización de las $qnLM_\theta-$congruencias de estas álgebras, como lo mostramos a continuación.

Teorema 5.2.1.5 *Sean $A \in Obj(\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta})$ y $qNŁ_\theta(A)$ el $qNl_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{SIE_\exists}(qNŁ_\theta(A))$, de los subconjuntos cerrados, semimodales, involutivos y $E_\exists-$saturados de $qNŁ_\theta(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{qnLM_\theta}(A)$ de las $qnLM_\theta-$congruencias de A, y el isomorfismo es la función $\Theta_{SIE_\exists}$, definida por la prescripción $\Theta_{SIE_\exists}(Y) = \{(a,b) \in A \times A : \sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y\}$ para cada $Y \in \mathcal{C}_{SIE_\exists S}(qNŁ(A))$.*

Dem. Sea $Y \in \mathcal{C}_{SIE_\exists}(qNŁ_\theta(A))$. Como $\mathcal{C}_{SIE_\exists}(qNŁ_\theta(A)) \subseteq \mathcal{C}_{SI}(NŁ_\theta(A))$, entonces del Teorema 2.2.2.6 se sigue que $\Theta_{SIE_\exists}(Y) \in Con_{nLM_\theta}(A)$. Además, del Teorema 4.2.1.8 inferimos que $\Theta_{SIE_\exists}(Y)$ preserva la operación $\exists$ y por lo tanto, $\Theta_{SIE_\exists}(Y) \in Con_{qnLM_\theta}(A)$.

Recíprocamente, sea (1) $\vartheta \in Con_{qnLM_\theta}(A)$. Teniendo en cuenta que $Con_{qnLM_\theta}(A)$ es un subretículo de $Con_{nLM_\theta}(A)$, entonces por el Teorema 2.2.2.6, existe un subconjunto Y de $X(A)$ cerrado, semimodal, involutivo tal que $\vartheta = \Theta_{SI}(Y)$. De (1) y la Proposición 5.1.1.1 resulta que $\vartheta \in Con_{mLM_\theta}(A)$ y en consecuencia, por el Teorema 4.2.1.8, Y es $E_\exists-$saturado. Así, $Y \in \mathcal{C}_{SIE_\exists}(qNŁ_\theta(A))$ y $\vartheta = \Theta_{SIE_\exists}(Y)$. Por ser $\Theta_{SIE_\exists}$ la retricción a $\mathcal{C}_{SIE_\exists}(qNŁ_\theta(A))$ del isomorfismo Θ_{SI}, definido en el Teorema 2.2.2.6, la demostración está completa. $\square$

En el caso en que θ es un entero n, $n \geq 2$, entonces el retículo de los subconjuntos cerrados, modales y saturados del qNl_nP-espacio asociado a una $qnLM_n-$álgebra caracteriza el retículo de las $qnLM_n-$congruencias de estas álgebras, como lo demostramos en el siguiente corolario.

Corolario 5.2.1.6 *Sean $A \in Obj(\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_n})$ y $qNŁ_n(A)$ el qNl_nP-espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{MS}(qNŁ_n(A))$ de los subconjuntos cerrados, modales y saturados de $qNŁ_n(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{qnLM_\theta}(A)$ de las $qnLM_n-$congruencias de A, y el isomorfismo es la función Θ_{MS}, definida por la misma prescripción que en el Teorema 5.2.1.5.*

Dem. De las Proposiciones 2.1.4.11 y 5.2.1.4 obtenemos que cuando $\theta = n$, $n \geq 2$, se verifica que $\mathcal{C}_{SIE_\exists}(qN\text{Ł}_n(A)) = \mathcal{C}_{MS}(qN\text{Ł}_n(A))$ y en consecuencia, por el Teorema 5.2.1.5, concluimos la demostración. $\square$

Los $\theta-$subconjuntos cerrados y $E_\exists-$saturados del $qNl_\theta P-$espacio asociado a una $qnLM_\theta-$álgebra nos permiten caracterizar a las $\theta qnLM_\theta-$congruencias de estas álgebras, como lo mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1.7 *Sean $A \in Obj(\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta})$ y $qN\text{Ł}_\theta(A)$ el $qNl_\theta P-$espacio asociado a A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))$, de los $\theta-$subconjuntos cerrados y $E_\exists-$saturados de $qN\text{Ł}_\theta(A)$, es isomorfo al dual del retículo $Con_{\theta qnLM_\theta}(A)$ de las $q\theta nLM_\theta-$congruencias de A, y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{\theta E_\exists}$, definida por la misma prescripción que en el* Teorema 5.2.1.5.

Dem. Teniendo en cuenta que $\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))$ es un subretículo de $\mathcal{C}_\theta(N\text{Ł}_\theta(A))$ y (1) $\Theta_\theta|\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A)) = \Theta_{\theta E_\exists}$, entonces por el Teorema 2.2.2.6, solo resta probar que $\Theta_\theta(\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))) = Con_{\theta qnLM_\theta}(A)$. Sea $Y \in \mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))$, luego de (1) y el Teorema 2.2.2.6, se sigue que $\Theta_{\theta E_\exists}(Y) \in Con_{\theta nLM_\theta}(A)$. Además, por ser el retículo $\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))$ un subretículo de $\mathcal{C}_{SIE_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))$ y $\Theta_{SIE_\exists}|\mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A)) = \Theta_{\theta E_\exists}$, del Teorema 5.2.1.5, inferimos que $\Theta_{\theta E_\exists}(Y)$ preserva la operación $\exists$ y por lo tanto, $\Theta_{\theta E_\exists}(Y)$ es una $\theta qnLM_\theta-$congruencia.

Recíprocamente, sea $\vartheta \in Con_{\theta qnLM_\theta}(A)$. Como $Con_{\theta qnLM_\theta}(A)$ es un subretículo de $Con_{\theta nLM_\theta}(A)$, entonces por el Teorema 2.2.2.6, existe un $\theta-$subconjunto cerrado Y de $X(A)$ tal que $\vartheta = \Theta_\theta(Y)$. Además, por ser $Con_{\theta qnLM_\theta}(A)$ un subretículo de $Con_{qnLM_\theta}(A)$ y $\Theta_\theta(Y) = \Theta_{SIE_\exists}(Y)$, se sigue del Teorema 5.2.1.5 que Y es un subconjunto $E_\exists-$saturado de $X(A)$, de donde concluimos que $Y \in \mathcal{C}_{\theta E_\exists}(qN\text{Ł}_\theta(A))$ y $\vartheta = \Theta_{\theta E_\exists}(Y)$. $\square$

Corolario 5.2.1.8 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra y la $mLM_\theta-$álgebra, $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$, donde para todo $i \in I$ y para todo $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) =\sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$ y $\forall(a) =\sim \exists \sim a$. Entonces para toda relación $\varphi \subseteq A \times A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\theta qnLM_\theta-$congruencia de $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$,*

(ii) φ *es una* $\theta mLM_\theta-$*congruencia de* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$.

Dem. Es consecuencia directa de los Teoremas 4.2.1.10 y 5.2.1.7. □

También los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos semimodales y $E_\exists-$saturados, y los subconjuntos abiertos cuyos complementos son $\theta-$subconjuntos $E_\exists-$saturados del $qNl_\theta P-$espacio asociado a una $qnLM_\theta-$álgebra, nos sirven para caracterizar las $qnLM_\theta-$congruencias y las $\theta qnLM_\theta-$congruencias de estas álgebra, respectivamente, como lo demostramos en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1.9 *Sean* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \sim, \exists)$ *una* $qnLM_\theta-$*álgebra y su* $qNl_\theta P-$*espacio asociado* $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$. *Entonces:*

(i) *El retículo* $\mathcal{O}_{CSIE_\exists}(X(A))$, *de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son subconjuntos semimodales, involutivos y* $E_\exists-$*saturados de* $X(A)$, *es isomorfo al retículo* $Con_{qnLM_\theta}(A)$ *de las* $qnLM_\theta-$*congruencias de* A, *y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{OSIE_\exists}$ *definida por la prescripción:* $(a, b) \in \Theta_{OSIE_\exists}(G)$ *si, y solo si,* $(\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a)) \subseteq G$ *para todo* a, $b \in A$.

(ii) *El retículo* $\mathcal{O}_{C\theta E_\exists}(X(A))$, *de los subconjuntos abiertos cuyos complementos son* $\theta-$*subconjuntos* $E_\exists-$*saturados de* $X(A)$, *es isomorfo al retículo* $Con_{\theta qnLM_\theta}(A)$ *de las* $\theta qnLM_\theta-$*congruencias de* A, *y el isomorfismo lo establece la función* $\Theta_{O\theta E_\exists}$, *definida por la misma prescripción que en el inciso* (i).

Dem.

(i): Es consecuencia inmediata del Teorema 5.2.1.5 y teniendo en cuenta que existe una correspondencia biunívoca entre los cerrados y abiertos de un espacio topológico y que $\Theta_{OSIE_\exists}(G) = \Theta_{SIE_\exists}(X(A) \setminus G)$ para todo $G \in \mathcal{O}_{CSIE_\exists}(X(A))$.

(ii): Se infiere del Teorema 4.2.1.11 y el Corolario 5.2.1.8. □

Corolario 5.2.1.10 *Sean* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \sim, \exists)$ *una* $qnLM_n-$*álgebra y su* qNl_nP-*espacio asociado,* $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\}, E_\exists)$. *Entonces el retículo* $\mathcal{O}_{MS}(X(A))$, *de los subconjuntos abiertos, modales y saturados de* $X(A)$, *es isomorfo al retículo* $Con_{qnLM_n}(A)$

de las $qnLM_n-$congruencias de A, y el isomorfismo lo establece la función Θ_{OMS}, definida por la misma prescripción que en el Teorema 5.2.1.9.

Dem. Es consecuencia del Lema 2.1.4.2, las Proposiciones 2.1.4.11, 2.2.2.5 y 4.2.1.5 y el Teorema 5.2.1.9. □

5.2.2. Congruencias y $\theta-$congruencias maximales

A continuación caracterizamos las $qnLM_\theta-$congruencias maximales y las $\theta qnLM_\theta-$congruencias maximales de una $qnLM_\theta-$álgebra. Para ello, en primer lugar caracterizamos los $\theta-$subconjuntos cerrados y $E-$saturados de un $qNl_\theta P-$espacio.

Proposición 5.2.2.1 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces para todo subconjunto Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es un $\theta-$subconjunto cerrado y $E-$saturado de X,*

(ii) $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(Y))}$,

(iii) $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ *y además Y es un subconjunto $E-$saturado de X,*

(iv) *existe un subconjunto Z de X semimodal y $E-$saturado tal que* $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Z)}$,

(v) *existe un subconjunto W de X tal que* $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(W))}$.

Dem. Es consecuencia de las Proposiciones 4.2.2.8 y 5.2.1.4. □

Proposición 5.2.2.2 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para todo subconjunto cerrado Y de X:*

(i) *Y es un elemento minimal del retículo $\mathcal{C}^0_{\theta E_\exists S}(X)$ de todos los $\theta-$subconjuntos cerrados, $E_\exists-$saturados y no vacíos de X,*

(ii) *existe $x \in X$ tal que* $Y = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(E(x))}$,

(iii) *Y es un elemento minimal del retículo $\mathcal{C}^0_{SE_\exists S}(X)$ de todos los subconjuntos cerrados, semimodales y $E_\exists-$saturados y no vacíos de X,*

(iv) *Y es un elemento minimal del retículo $\mathcal{C}^0_{SIE_\exists S}(X)$ de todos los subconjuntos cerrados, semimodales, involutivos, $E_\exists-$saturados y no vacíos de X.*

Dem.

La equivalencia de las condiciones (i), (ii) y (iii) se sigue de las Proposiciones 4.2.2.8, 4.2.2.9 y 5.2.2.1.

(i) $\Rightarrow$ (iv): De la hipótesis (i), la Definición 2.1.4.14, el Lema 2.2.2.2 y la Proposición 5.2.2.1, inferimos que (1) $Y \in \mathcal{C}^0_{SIE_\exists S}(X)$. Sea (2) $Z \in \mathcal{C}^0_{SIE_\exists S}(X)$ tal que (3) $Z \subseteq Y$. Entonces, de la Proposición 4.2.2.5 se sigue que (4) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Z)} \in \mathcal{C}^0_{\theta E_\exists S}(X)$ y (5) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Z)} \subseteq Z$, de donde por (3) y (5), obtenemos que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Z)} \subseteq Y$. De esta última afirmación, la hipótesis (i) y (4) tenemos que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(Z)} = Y$, en consecuencia, de (3) y (5) resulta que $Y = Z$, y así, por (1), (2), (3), la demostración está completa.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis (iv) y la Proposición 4.2.2.5 se sigue que $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(Y))} \subseteq Y$. Entonces, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(y))} \subseteq Y$ para todo $y \in Y$. Del Lema 2.2.2.2 y la Proposición 5.2.2.1 obtenemos que para todo $y \in Y$, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(y))} \in \mathcal{C}^0_{SIE_\exists S}(X)$, de lo cual concluimos, por la hipótesis (iv), que $Y = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} f_i(E(y))}$ para todo $y \in Y$. □

Corolario 5.2.2.3 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra, $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$ su $qNl_\theta P-$espacio asociado y $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$ la $mLM_\theta-$álgebra, donde para todo $i \in I$ y para todo $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) =\sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$ y $\forall(a) =\sim \exists \sim a$. Entonces para toda relación $\varphi \subseteq A \times A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $qnLM_\theta-$congruencia maximal de $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$,*

(ii) *φ es una $\theta qnLM_\theta-$congruencia maximal de $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$,*

(iii) *φ es una $\theta mLM_\theta-$congruencia maximal de $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$,*

(iv) *φ es una $mLM_\theta-$congruencia maximal de $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$,*

(v) *existe $P \in X(A)$ tal que $Y = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} E_\exists(\phi_i^{-1}(P))}$ y $\Theta_{SIE_\exists}(Y) = \varphi$,*

donde la congruencia $\Theta_{SIE_\exists}(Y)$ está definida como en el Teorema 5.2.1.5 *y la relación $E_\exists$ es la dada en el* Lema 5.1.2.10.

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 4.2.2.10, 4.2.2.12 y 5.2.1.8 y la Proposición 5.2.2.2. □

Corolario 5.2.2.4 *Sean* $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \exists)$ *una* $qnLM_n-$*álgebra, su* qNl_nP-*espacio asociado* $(X(A), g_A, \{f_1^A, \ldots, f_{n-1}^A\}, E_\exists)$ *y* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall)$ *la* mLM_n-*álgebra, donde para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$ *y para todo* $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) = \sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$ *y* $\forall(a) = \sim \exists \sim a$. *Entonces para toda relación* $\varphi \subseteq A \times A$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) φ *es una* $qnLM_n-$*congruencia maximal de* $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \exists)$,

(ii) φ *es una* mLM_n-*congruencia maximal de* $(A, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_{n-1}, \exists, \forall)$,

(iii) $\varphi = \Theta_{MS}(Y)$, *donde* Y *es un elemento minimal del retículo* $\mathcal{C}^0_{MS}(X(A))$ *de todos los subconjuntos modales, cerrados, saturados y no vacíos de* $X(A)$,

(iv) *existe* $P \in X(A)$ *tal que* $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_\exists(\phi_i^{-1}(P))$ *y* $\Theta_{MS}(Y) = \varphi$,

(v) $\varphi = \Theta_{MS}(Y)$, *donde* Y *es la unión de cadenas maximales de* $X(A)$ *equivalentes,*

(vi) $\varphi = \mathbf{\Theta}(F), \quad F = \bigcap_{\substack{Q \in X(A) \\ Q \cap \exists(A) = P \cap \exists(A)}} {\phi_1}^{-1}(Q)$ *para algún* $P \in X(A)$,

donde $\mathbf{\Theta}(F)$ *es la* LM_n-*congruencia asociada al filtro* F *y* $\Theta_{MS}(Y)$ *está definida como en el* Corolario 5.2.1.6.

Dem. Resulta inmediato de los Teoremas 4.2.1.8 y 5.2.1.5 y las Proposiciones 4.2.2.9 y 5.2.2.2. □

Corolario 5.2.2.5 *Toda* $qnLM_\theta-$*álgebra es semisimple.*

Dem. Se infiere de los Corolarios 4.2.2.14 y 5.2.2.3. □

5.2.3. Congruencias y $\theta-$congruencias booleanas

El retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados, modales y saturados del $qNl_\theta P-$espacio asociado a una $qnLM_\theta-$álgebra juega un rol fundamental en la caracterización de las $qnLM_\theta-$congruencias booleanas de estas álgebras, como lo indicamos a continuación.

Teorema 5.2.3.1 *Sean* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ *una* $qnLM_\theta-$*álgebra y su* $qNl_\theta P-$*espacio asociado,* $(X(A), g_A, \{f_i^A\}_{i\in I}, E_\exists)$. *Entonces, el retículo* $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$, *de los subconjuntos abiertos, cerrados, modales y saturados de* $X(A)$, *es isomorfo al retículo (dual del retículo)* $Con_{bqnLM_\theta}(A)$ *de las* $qnLM_\theta-$*congruencias booleanas de* A, *donde el isomorfismo* Θ_{OMS} (Θ_{MS}) *está definido como en el* Teorema 5.2.1.9 (Teorema 5.2.1.5).

Dem. Teniendo en cuenta que todo $qNl_\theta P-$espacio es un $Nl_\theta P-$espacio y que, por la Proposición 5.1.3.2, también es un $smql_\theta P-$espacio, entonces de las Proposiciones 2.2.2.4 y 4.2.1.5 obtenemos que $\mathcal{CO}_{MS}(X(A)) \subseteq \mathcal{C}_{SIE_\exists}(X(A))$ y $\mathcal{CO}_{MS}(X(A)) \subseteq \mathcal{O}_{CSIE_\exists}(X(A))$ y por lo tanto, (1) $\Theta_{OMS} = \Theta_{OSIE_\exists}|\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ y (2) $\Theta_{MS} = \Theta_{SIE_\exists}|\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$. Además, del Corolario 4.2.1.7 tenemos que para todo $Y \subseteq X(A)$, $Y \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ si, y solo si, $X(A) \setminus Y \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$. Luego, si $Y \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$, de la última afirmación, (1), (2) y los Teoremas 5.2.1.5 y 5.2.1.9, inferimos que $\Theta_{MS}(Y) \in Con_{qnLM_\theta}(A)$, $\Theta_{MS}(X(A) \setminus Y) \in Con_{qnLM_\theta}(A)$ y además que $\Theta_{OMS}(Y) \in Con_{qnLM_\theta}(A)$ y $\Theta_{OMS}(X(A) \setminus Y) \in Con_{qnLM_\theta}(A)$, lo que implica, por los Teoremas 5.2.1.5 y 5.2.1.9, que $\Theta_{MS}(Y) \in Con_{bqnLM_\theta}(A)$ y $\Theta_{OMS}(Y) \in Con_{bqnLM_\theta}(A)$.

Recíprocamente, sea $\varphi \in Con_{bqnLM_\theta}(A)$, entonces $\varphi \in Con_{bnLM_\theta}(A)$. Luego, el Teorema 3.4.2.5 nos permite afirmar que existe (3) $Y \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ tal que (4) $\varphi = \Theta_M(Y)$ y existe (5) $Z \in \mathcal{CO}_M(X(A))$ tal que (6) $\varphi = \Theta_{OM}(Z)$ $(Z = X(A) \setminus Y)$. Además, como $\varphi \in Con_{qnLM_\theta}(A)$, de los Teoremas 5.2.1.5 y 5.2.1.9 se sigue que Y y Z son subconjuntos $E_\exists-$saturados de $X(A)$, y en consecuencia de (3), (5) y la Proposición 4.2.1.5, resulta que Y, $Z \in \mathcal{CO}_{MS}(X(A))$. Como $\Theta_{MS} = \Theta_M|\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ y $\Theta_{OMS} = \Theta_{OM}|\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$, de (4) y (6) concluimos que $\varphi = \Theta_{MS}(Y) = \Theta_{OMS}(Z)$. Por consiguiente, Θ_{MS} y Θ_{OMS} son funciones sobreyectivas de $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ en $Con_{bqnLM_\theta}(A)$, de donde concluimos, por los Teoremas 4.2.1.8 y 5.2.1.9, que Θ_{MS} es un anti–isomorfismo de retículo y Θ_{OMS} es un isomorfismo de retículo, de $\mathcal{CO}_{MS}(X(A))$ en $Con_{bqnLM_\theta}(A)$. □

Corolario 5.2.3.2 *Sean* $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ *una* $qnLM_\theta-$*álgebra y la* $mLM_\theta-$*álgebra* $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$, *donde para todo* $i \in I$ *y para todo* $a \in A$, $\overline{\phi}_i(a) = \sim \phi_i(a) = -\phi_i(a)$ *y* $\forall(a) = \sim \exists \sim a$. *Si* $\varphi \subseteq A \times A$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $qnLM_\theta-$congruencia booleana de $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$,*

(ii) *φ es una $mLM_\theta-$congruencia booleana de $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$,*

(iii) *φ es una $\theta mLM_\theta-$congruencia booleana de $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i\}_{i\in I}, \exists, \forall)$,*

(iv) *φ es una $\theta qnLM_\theta-$congruencia booleana de $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$.*

Dem. Es consecuencia de los Teoremas 4.2.3.1 y 5.2.3.1 y el Corolario 4.2.3.10. $\square$

Corolario 5.2.3.3 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \sim, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra. Entonces, las $qnLM_\theta-$congruencias booleanas de A son conmutativas.*

Dem. Se sigue de los Corolarios 4.2.3.2 y 5.2.3.2. $\square$

Corolario 5.2.3.4 *Sea A una $qnLM_\theta-$álgebra. Entonces, las álgebras booleanas $\exists(C(A))$ y $Con_{bqnLM_\theta}(A)$ son isomorfas y por lo tanto, $|Con_{bqnLM_\theta}(A)| = |\exists(C(A))|$.*

Dem. Es consecuencia directa de los Corolarios 4.2.3.4 y 5.2.3.2. $\square$

Corolario 5.2.3.5 *Sea $(A, \{\phi_i\}_{i\in I}, \sim, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra. Entonces para toda relación $\varphi \subseteq A \times A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $qnLM_\theta-$congruencia booleana de A,*

(ii) *existen $a \in A$ e $i \in I$, tales que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow \exists\phi_i a\,) = \mathbf{\Theta}(\uparrow \phi_i \exists a\,)$,*

(iii) *existe $a \in \exists(C(A))$ tal que $\varphi = \mathbf{\Theta}(\uparrow a\,)$.*

Dem.: Se sigue inmediatamente de los Corolarios 4.2.3.6 y 5.2.3.2. $\square$

Corolario 5.2.3.6 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra. Entonces las $qnLM_\theta-$congruencias booleanas de A son regulares y uniformes.*

Dem.: Se infiere de los Corolarios 4.2.3.7 y 5.2.3.2. $\square$

5.3. Las $qnLM_\theta-$álgebras y las $\theta qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Nuestro objetivo es describir las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $\theta-$valuada con negación monádicas subdirectamente irreducibles con respecto a las congruencias y a las $\theta-$congruencias, respectivamente.

5.3.1. Caracterización de las $qnLM_\theta-$álgebras y las $\theta qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Con el propósito de determinar las $qnLM_\theta-$álgebras y las $\theta qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles comenzamos esta sección con una caracterización de los subconjuntos semimodales, involutivos, cerrados y $E-$saturados de un $qNl_\theta P-$espacio cuya $qnLM_\theta-$álgebra asociada es subdirectamente irreducible. Luego, obtenemos una caracterización de los $\theta-$subconjuntos cerrados y $E-$saturados de un $qNl_\theta P-$espacio cuya álgebra asociada es una $\theta qnLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible.

Proposición 5.3.1.1 *Sea* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio tal que su* $qnLM_\theta-$*álgebra asociada,* $qn\mathbb{L}_\theta(X)$*, es subdirectamente irreducible. Si* Y *es un subconjunto semimodal, involutivo y cerrado de* X *no vacío, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es* $E-$*saturado,*

(ii) $max\, X \subseteq Y$.

Dem. Es consecuencia directa de las Proposiciones 4.3.1.7 y 5.2.1.2, la propiedad (lP5) de los $l_\theta P-$espacios y el hecho de que $f_1(X) = max\, X$ en todo $qNl_\theta P-$espacio X. □

Proposición 5.3.1.2 *Sea* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio tal que su* $qnLM_\theta-$*álgebra asociada,* $qn\mathbb{L}_\theta(X)$*, es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible. Si* Y *es un* $\theta-$*subconjunto cerrado de* X *no vacío, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es $E-$saturado,*

(ii) *$max\, X \subseteq Y$.*

Dem. Se sigue de las Proposiciones 4.3.1.8 y 5.2.1.2, la propiedad (lP5) de los $l_\theta P-$espacios y el hecho de que $f_1(X) = max\, X$ en todo $qNl_\theta P-$espacio X. □

Lema 5.3.1.3 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ un Nl_θ-Pespacio. Entonces, el único subconjunto de X cerrado y semimodal que contiene a $max\, X$ es el propio espacio.*

Dem. Si Y es un subconjunto de X tal que $max\, X \subseteq Y$, entonces por (lP15) se verifica que (1) $f_1(X) \subseteq Y$, de donde concluimos, por el Lema 4.3.1.3, que $Y = X$. □

Corolario 5.3.1.4 *Sea $(X, g, \{f_i\}_{i\in I})$ un $Nl_\theta P-$espacio. Entonces, el único $\theta-$subconjunto cerrado de X que contiene a $max\, X$ es el propio espacio.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Lema 5.3.1.3, teniendo en cuenta que todo $\theta-$subconjunto de X es también un subconjunto semimodal de X. □

A continuación utilizamos los resultados que acabamos de obtener para determinar las $qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles y las $\theta qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles.

Proposición 5.3.1.5 *Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio y $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ la $qnLM_\theta-$álgebra asociada a X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$qn\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $qnLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *$qn\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $qnLM_\theta-$álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 5.2.1.5, la Proposición 5.3.1.1 y el Lema 5.3.1.3. □

Proposición 5.3.1.6 *Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ un $qNl_\theta P-$espacio y $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ la $qnLM_\theta-$álgebra asociada a X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$qn\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $\theta qnLM_\theta-$álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 5.2.1.7, la Proposición 5.3.1.2 y el Corolario 5.3.1.4. □

Proposición 5.3.1.7 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio y* $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ *la* $qnLM_\theta-$*álgebra asociada a* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $qnLM_\theta-$*álgebra simple,*

(ii) $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ *es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si Y es un subconjunto no vacío, semimodal y $E-$saturado de X, entonces de la Proposición 5.2.2.1 se sigue que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)}$ es un $\theta-$subconjunto cerrado y $E-$saturado tal que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} \subseteq Y$. De esta última afirmación, la hipótesis (ii) y el Teorema 5.2.1.7, inferimos que $\overline{\bigcup_{i\in I} f_i(Y)} = X$ y por lo tanto, $Y = X$. Así, por el Teorema 5.2.1.5, concluimos que $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ es una $qnLM_\theta-$álgebra simple. □

Corolario 5.3.1.8 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio y la* $qnLM_\theta-$*álgebra asociada a* X*,* $qn\mathbb{L}_\theta(X) = (D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $qnLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $qnLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iii) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iv) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia directa de las Proposiciones 5.3.1.5, 5.3.1.6 y 5.3.1.7. □

Proposición 5.3.1.9 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio,* $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *la* $qnLM_\theta-$*álgebra asociada a* X *y* $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I} \exists_E, \forall_\exists)$ *la* $mLM_\theta-$*álgebra asociada a* X*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra simple,*

(ii) $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_\exists)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iii) $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_\exists)$ *es una* $\theta mLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible,*

(iv) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $\theta qnLM_\theta-$*álgebra subdirectamente irreducible.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es consecuencia del Corolario 5.2.1.8.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Se sigue del Corolario 4.3.1.12.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Resulta del Corolario 5.2.1.8. □

Teorema 5.3.1.10 *Sean* $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ *un* $qNl_\theta P-$*espacio y* $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *la* $qnLM_\theta-$*álgebra asociada a* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ *es una* $qnLM_\theta-$*álgebra simple,*

(ii) $(\exists_E(D(X)), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I})$ *es una* $nLM_\theta-$*álgebra simple,*

(iii) $(\exists_E(D(X)), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I})$ *es una* $\theta nLM_\theta-$*álgebra simple.*

Dem.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Sea $(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I}\exists_E, \forall_\exists)$ la $mLM_\theta-$álgebra asociada a X. Luego, de los los Teoremas 2.2.3.6 y 4.3.3.1, la Proposición 5.3.1.9, y el hecho de que $\exists_E D(X)$ es una $nLM_\theta-$álgebra inferimos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$(D(X), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \exists_E)$ es una $qnLM_\theta-$álgebra simple;
$(D(X), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I}, \exists_E, \forall_\exists)$ es una $mLM_\theta-$álgebra simple;
$(\exists_E(D(X)), \{\phi_i^X\}_{i\in I}, \{\overline{\phi}_i^X\}_{i\in I})$ es una $LM_\theta-$álgebra simple,
$(\exists_E(D(X)), \sim, \{\phi_i^X\}_{i\in I})$ es una $nLM_\theta-$álgebra simple.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es consecuencia del Teorema 2.2.3.1. □

Corolario 5.3.1.11 *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ *es una $qnLM_\theta-$álgebra sudirectamente irreducible,*

(ii) $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ *es una $qnLM_\theta-$álgebra simple,*

(iii) $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ *es una $\theta qnLM_\theta-$álgebra simple,*

(iv) $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ *es una $\theta qnLM_\theta-$álgebra sudirectamente irreducible,*

(v) $(\exists(A), \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ *es una $nLM_\theta-$álgebra simple,*

(vi) $(\exists(A), \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ *es una $\theta nLM_\theta-$álgebra simple.*

Dem. Es consecuencia directa de los Teoremas 2.2.3.1 y 5.3.1.10, el Lema 5.1.2.10 y el Corolario 5.3.1.8. □

Corolario 5.3.1.12 $\langle {L_2^{[I]}}^X, \wedge, \vee, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists, 0, 1\rangle$ *es una $qnLM_\theta-$álgebra simple, donde ${L_2^{[I]}}^X = \{f : X \longrightarrow L_2^{[I]}\}$, las operaciones de* $\mathrm{nLM}_\theta-$*álgebra se definen puntualmente y para cada $f \in {L_2^{[I]}}^X$, $(\exists f)(x) = \bigvee f(X)$ para todo $x \in X$, siendo $\bigvee f(X)$ el supremo de $f(X)$.*

Dem. Por los Corolarios 4.3.3.2 y 4.3.3.3 tenemos que $\exists\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces por el Teorema 2.2.3.1, $\exists\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ es una $nLM_\theta-$álgebra simple. Como $\langle {L_2^{[I]}}^X, \wedge, \vee, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists, 0, 1\rangle$ es una $qnLM_\theta-$álgebra, entonces por el Corolario 5.3.1.11, concluimos que ${L_2^{[I]}}^X$ es una $qnLM_\theta-$álgebra simple. □

Corolario 5.3.1.13 $\left(L_n^X, \wedge, \vee, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \exists\right)$ *es una $qnLM_n-$álgebra simple, donde $L_n^X = \{f : X \longrightarrow L_n\}$, las operaciones de* $\mathrm{nLM}_\theta-$*álgebra se definen puntualmente y para cada $f \in L_n^X$, $(\exists f)(x) = \bigvee f(X)$ para todo $x \in X$.*

Dem. Es consecuencia inmediata del Corolario 5.3.1.12 y teniendo en cuenta que las qnLM_n-álgebras funcionales $\left(L_2^{[I]}\right)^X$ y L_n son isomorfas cuando $I = \{1, \ldots, n-1\}$. □

5.3.2. Descripción de las $qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles

Finalmente, en esta sección describimos las $qnLM_\theta-$álgebras subdirectamente irreducibles que, por lo establecido en la Sección 5.3.1, son las $qnLM_\theta-$álgebras simples. Para ello probamos la existencia de un $nLM_\theta-$homomorfismo inyectivo de cualquier $nLM_\theta-$álgebra en la $nLM_\theta-$álgebra ${L_2^{[I]}}^X$, de un modo diferente al determinado en [13, Theorem 3.6, Chapter 5].

La demostración de la siguiente proposición es análoga a la de la Proposición 4.3.3.6.

Proposición 5.3.2.1 *Sean $(X, g, \{f_i\}_{i\in I}, E)$ y $(X', g', \{f'_i\}_{i\in I}, E')$ $qNl_\theta P-$espacios tales que $qn\mathbb{L}_\theta(X)$ y $qn\mathbb{L}_\theta(X')$ son $qnLM_\theta-$álgebras simples. Si $f : X \longrightarrow X'$ es una $Nl_\theta P-$función sobreyectiva, entonces es una $qNl_\theta P-$función.*

Proposición 5.3.2.2 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i^A\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra, $Y = max\, X(A)$, $\left({L_2^{[I]}}^Y, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}\right)$ la $nLM_\theta-$álgebra descripta en el Ejemplo 5.1.2, $\left(X(A), g_A, \left\{f_i^A\right\}_{i\in I}\right)$ y $\left(X\left({L_2^{[I]}}^Y\right), g_{{L_2^{[I]}}^Y} \left\{f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\right\}_{i\in I}\right)$ los $Nl_\theta P-$espacios asociados a A y a ${L_2^{[I]}}^Y$, respectivamente. Entonces, existe una $Nl_\theta P-$función sobreyectiva de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ en $X(A)$.*

Dem. Sean $\mathcal{D} = \left\{P \times {L_2^{[I]}}^{Y\setminus\{Q\}} : P \in X\left(L_2^{[I]}\right) \text{ y } Q \in Y\right\}$, $Y = max\, X(A)$, $L_2^{[I]}$ la $nLM_\theta-$álgebra, dada en el Ejemplo 1.2.6, ${L_2^{[I]}}^Y$ la $nLM_\theta-$álgebra, descripta en el Ejemplo 5.1.2, $\left(X\left(L_2^{[I]}\right), g_{L_2^{[I]}}, \left\{f_i^{L_2^{[I]}}\right\}_{i\in I}\right)$ y $\left(X\left({L_2^{[I]}}^Y\right), g_{{L_2^{[I]}}^Y} \left\{f_i^{{L_2^{[I]}}^Y}\right\}_{i\in I}\right)$ los $Nl_{\theta P}-$espacios asociados a $L_2^{[I]}$ y ${L_2^{[I]}}^Y$, respectivamente. Si la función $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ está definida como en la Proposición 4.3.3.11, entonces la Proposición 4.3.3.11 nos permite afirmar que existe una $l_\theta P-$función sobreyectiva F de $X\left({L_2^{[I]}}^Y\right)$ en $X(A)$, que extiende a la función f y además, para todo $R \in X\left({L_2^{[I]}}^Y\right) \setminus \mathcal{D}$, $F(R) = S$ si, y solo si, $f(R_d) \underset{d\in D}{\longrightarrow} S$ para cualquier red $(R_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que $R_d \underset{d\in D}{\longrightarrow} R$. Luego, resta probar que $F \circ g_{{L_2^{[I]}}^Y} = g_A \circ F$.

En primer lugar tenemos que la función $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ satisface la condición: (a) $f \circ g_{{L_2^{[I]}}^Y} = g_A \circ f$. En efecto, teniendo en cuenta las definiciones de la función

$g_{L_2^{[I]^Y}} : X\left(L_2^{[I]^Y}\right) \longrightarrow X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$, en el Lema 2.2.1.4 y de la operación $\sim$ en $L_2^{[I]^Y}$, en el Ejemplo 5.1.2, resulta inmediato que $g_{L_2^{[I]^Y}}\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = g_{L_2^{[I]}}(P) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, entonces (1) $\left(f \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = f\left(g_{L_2^{[I]}}(P) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)$ para todo $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$. Como $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$, entonces pueden presentarse solamente uno de los tres siguientes casos:

(i) $P = \phi_i^{-1}(P)$ para algún $i \in I$,

(ii) $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$ y $\phi_j^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} P$,

(iii) $P \neq \phi_i^{-1}(P)$ para todo $i \in I$ y $\phi_k^{-1}(P) \underset{k\in K_P}{\longrightarrow} P$.

A continuación analizamos cada uno de estos casos para todo $P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}$, $Q \in Y$.

Supongamos que $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ satisface (i). Entonces, $g_{L_2^{[I]}}(P) = \phi_{d(i)}^{-1}(P)$, de donde se sigue que $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = \phi_i^{A^{-1}}(Q)$ y $f\left(g_{L_2^{[I]}}(P) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = \phi_{d(i)}^{A^{-1}}(Q)$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $f_i^A(R) = \phi_i^{A^{-1}}(R)$ para todo $R \in X(A)$ y la propiedad (nLP4) de los $NlP_\theta-$espacios, obtenemos que $\phi_{d(i)}^{A^{-1}}(Q) = f_{d(i)}^A(Q) = g_A(f_i^A(Q))$ $= g_A(\phi_i^{A^{-1}}(Q))$. Por lo tanto, $f\left(g_{L_2^{[I]}}(P) \times \left(L_2^{[I]}\right)^{Y\setminus\{Q\}}\right) = g_A\left(f\left(P \times \left(L_2^{[I]}\right)^{Y\setminus\{Q\}}\right)\right)$, de donde por (1) resulta que $\left(f \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = (g_A \circ f)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)$.

Supongamos que $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ satisface (ii). Sea $R \in X(A)$ tal que (2) $\phi_j^{A^{-1}}(Q) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} R$. Entonces, de (ii), (2) y la definición de f, obtenemos que $f\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = R$ y por lo tanto, (3) $(g_A \circ f)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = g_A(R)$. Por otra parte, como $g_{L_2^{[I]}}$ es continua, de (ii) y el Teorema 2.1.1.14, inferimos que $g_{L_2^{[I]}}(\phi_j^{-1}(P)) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} g_{L_2^{[I]}}(P)$, y de la definición de $f_j^{L_2^{[I]}}$, $j \in I$, y la propiedad (nLP4) se sigue que (4) $\phi_{d(j)}^{-1}(P) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} g_{L_2^{[I]}}(P)$. Además, como g_A es continua, entonces de (2) y el Teorema 2.1.1.14, tenemos que $g_A(\phi_j^{A^{-1}}(Q)) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} g_A(R)$. De esta última afirmación, la definición de f_j^A y la propiedad (nLP4), resulta que (5) $\phi_{d(j)}^{A^{-1}}(Q) \underset{j\in J_P}{\longrightarrow} g_A(R)$. Luego, de (4), (5) y la definición de la función f, se sigue que (6) $f\left(g_{L_2^{[I]}}(P) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = g_A(R)$. Finalmente, de (1), (3) y (6), concluimos que $\left(f \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right) = (g_A \circ f)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)$.

Si $P \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ satisface (iii), entonces mediante un razonamiento análogo al empleado en el caso en que P satisface la condición (ii), se prueba que $\left(f \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)$ $= (g_A \circ f)\left(P \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q\}}}\right)$. De esta manera concluimos que se verifica (a).

A continuación probamos que $F \circ g_{L_2^{[I]}} = g_A \circ F$. Sea ahora $R \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$, entonces los Lemas 2.1.1.7 y 4.3.3.7 nos permiten asegurar que existe una red (1) $(R_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que (2) $R_d \xrightarrow[d\in D]{} R$, y como $g_{L_2^{[I]^Y}}$ continua, por el Teorema 2.1.1.14 se verifica que (3) $g_{L_2^{[I]^Y}}(R_d) \xrightarrow[d\in D]{} g_{L_2^{[I]^Y}}(R)$. Por otro lado, de (1) tenemos que para cada $d \in D$ existen $P_d \in X\left(L_2^{[I]}\right)$ y $Q_d \in Y$ tales que $R_d = P_d \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q_d\}}}$, de donde se sigue que $g_{L_2^{[I]^Y}}(R_d) = g_{L_2^{[I]}}(P_d) \times L_2^{[I]^{Y\setminus\{Q_d\}}}$ y por lo tanto, (4) $g_{L_2^{[I]^Y}}(R_d) \in \mathcal{D}$ para todo $d \in D$. Como F es continua y $F|\mathcal{D} = f$, entonces de (3) y (4) y el Teorema 2.1.1.14, obtenemos que $\left(f \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)(R_d) \xrightarrow[d\in D]{} \left(F \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)(R)$ y así, por (a) podemos afirmar que (5) $(g_A \circ f)(R_d) \xrightarrow[d\in D]{} \left(F \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)(R)$. Por otra parte, de (2) y teniendo en cuenta que F y g_A son funciones continuas, $F|\mathcal{D} = f$ y el Teorema 2.1.1.14, inferimos que (6) $(g_A \circ f)(R_d) \xrightarrow[d\in D]{} (g_A \circ F)(R)$. Por ser $X(A)$ un espacio de Hausdorff, entonces de (5), (6) y el Teorema 2.1.1.15, concluimos que $\left(F \circ g_{L_2^{[I]^Y}}\right)(R) = (g_A \circ F)(R)$ para todo $R \in X\left(L_2^{[I]^Y}\right)$ y por consiguiente, $F \circ g_{L_2^{[I]^Y}} = g_A \circ F$. □

Corolario 5.3.2.3 ([56], [58]) *Sea $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I})$ una $nLM_\theta-$álgebra. Entonces A es isomorfa a una $nLM_\theta-$subálgebra de $L_2^{[I]^X}$, donde $L_2^{[I]^X}$ es la $nLM_\theta-$álgebra dada en el* Ejemplo 5.1.2 *y $X = max\, X(A)$.*

Dem. Los Lemas 2.2.1.5 y 2.2.1.6 y la Proposición 5.3.2.2, nos permiten afirmar que existe un $nLM_\theta-$homomorfismo inyectivo h de A en la $nLM_\theta-$álgebra $L_2^{[I]^X}$, donde $X = max\, X(A)$. □

Finalmente, describimos las $qnLM_\theta-$álgebras simples.

Teorema 5.3.2.4 *Sean $(A, \sim, \{\phi_i\}_{i\in I}, \exists)$ una $qnLM_\theta-$álgebra y $X = max\, X(A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $qnLM_\theta-$álgebra simple,*

(ii) *A es isomorfa a una $qnLM_\theta-$subálgebra de $L_2^{[I]^X}$.*

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por el Corolario 5.3.2.3, existe un $nLM_\theta-$homomorfismo inyectivo h de A en ${L_2^{[I]}}^X$. Luego, por el Lema 2.2.1.6, la función $N\text{Ł}_\theta(h)$ de $N\text{Ł}_\theta\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ en $N\text{Ł}_\theta(A)$ es una $Nl_\theta P-$función sobreyectiva. Como A y ${L_2^{[I]}}^X$ son $qnLM_\theta-$álgebras simples y $N\text{Ł}_\theta(h) = qN\text{Ł}_\theta(h)$, entonces por la Proposición 5.3.2.1, $qN\text{Ł}_\theta(h)$ es una $qNl_\theta P-$función sobreyectiva de $qN\text{Ł}_\theta\left({L_2^{[I]}}^X\right)$ en $qN\text{Ł}_\theta(A)$ y así, del Lema 5.1.2.11, se sigue que $(qn\mathbb{L}_\theta \circ qN\text{Ł}_\theta)(h)$ es un $qnLM_\theta-$homomorfismo inyectivo de $(qn\mathbb{L}_\theta \circ qN\text{Ł}_\theta)(A)$ en $(qn\mathbb{L}_\theta \circ qN\text{Ł}_\theta)\left({L_2^{[I]}}^X\right)$. Además, por el Teorema 5.1.2.15, $qn\mathbb{L}_\theta \circ qN\text{Ł}_\theta$ es naturalmente equivalente al funtor identidad $Id_{\boldsymbol{qn\mathfrak{LM}_\theta}}$, entonces de la última afirmación, concluimos que h es un $qnLM_\theta$-homomorfismo inyectivo de A en ${L_2^{[I]}}^X$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia directa del Corolario 5.3.1.12. $\square$

Corolario 5.3.2.5 ([1]) Sean $(A, \sim, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \exists)$ una $qnLM_n-$álgebra y $max\, X(A) = X$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es una $qnLM_n-$álgebra simple,

(ii) A es isomorfa a una $qnLM_n-$subálgebra de L_n^X.

Dem. Se sigue del Teorema 5.3.2.5 y teniendo en cuenta que las $qnLM_\theta-$álgebras ${L_2^{[I]}}^X$ y L_n^X son isomorfas cuando $\theta = n$, $n \geq 2$, donde $I = \{1, \ldots, n-1\}$. $\square$

Conclusiones y estudios futuros

En este trabajo hemos abordado el estudio de las álgebras de Lukasiewicz-Moisil $\theta-$valuadas aplicando técnicas topológicas, obteniendo en primer lugar, para cada una de las categorías de las álgebras de Lukasiewicz-Moisil $\theta-$valuadas sin negación, con negación, monádicas sin negación y monádicas con negación, una categoría dualmente equivalente, siendo sus objetos en todas ellas espacios de Priestley y sus morfismos funciones isótonas y continuas, donde tanto los objetos como los morfismos cumplen condiciones adicionales. El estudio de los objetos y los morfismos en cada una de estas categorías, nos permitió describir propiedades de estas álgebras y de sus congruencias y determinar las álgebras subdirectamente irreducibles de cada una de estas clases de álgebras, poniendo de esta forma en evidencia la eficacia de los procedimientos topológicos utilizados. Es por ello que aspiramos a aplicar los métodos usados en este trabajo, especialmente los indicados en las Secciones 2.1.9, 4.3.3 y 5.3.2, al estudio de las álgebras que estamos interesados en investigar, entre ellas las álgebras de Ockhan–Nelson enriquecidas con operadores adicionales, las $BL-$álgebras y en particular las $MV-$álgebras.

Bibliografía

[1] M. Abad, *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Łukasiewicz $n-$valente.* Notas de Lógica Matemática 36. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1988.

[2] M. E. Adams, *Principal congruences in De Morgan algebras*, Eidimburgh Mathematical Society (1987) 30, 415–421.

[3] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.

[4] N. D. Belnap, Jr. *A useful four–valued logic*, Modern uses of multiple–valued logic, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Holland, Boston–U.S.A., 1975.

[5] G. Bezhanishvili, *Varieties of monadic Heyting algebras.* Part I, Studia Logica 61(1998), No. 3, 367–402.

[6] G. Bezhanishvili, *Varieties of monadic Heyting algebras. Part* II: *Duality theory*, Studia Logica 62 (1999), No. 1, 21–48.

[7] G. Bezhanishvili, *Varieties of monadic Heyting algebras.* Part III, Studia Logica 64(2000), No. 2, 215–256.

[8] L. Beznea, *$\theta-$valued Moisil algebras and dual categories* (Romanian), Master Thesis, University of Bucharest, 1981.

[9] A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa, *On the representation of Quasi–Boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronim. Phys. 5, 259–261.

[10] G. Birkhoff, *Lattice Theory*. Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967.

[11] C. Boicescu, *Contributions to the study of Łukasiewicz algebras*, (Romanian). Ph.D. Thesis. Univ. of Bucharest, 1984.

[12] V. Boicescu, *Contributions to the study of Łukasiewicz algebras*, (Romanian). Ph.D. Thesis. Univ. of Bucharest, 1984.

[13] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz–Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North–Holland, Amsterdam, 1991.

[14] S. Burris and H.P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 78, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[15] R. Cignoli, *Moisil Algebras*, Notas de Lógica Matemática, No. 27, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Baha Blanca, 1970.

[16] R. Cignoli, *Some algebraic aspects of many-valued logics*, Brazilian Conference on Mathematical Logic 3 (1980), 49–69.

[17] R. Cignoli, *Proper $n-$valued Łukasiewicz algebras as $S-$algebras of Łukasiewicz valued propositional calculi*, Studia Logica 41 (1982), 3-16.

[18] R. Cignoli, *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math. 96 (1991), 183–197.

[19] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz*, Campinas, UNICAMP - CLE, Volumen 12, 1995.

[20] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer, 2000.

[21] R.Cignoli, S. Lafalce and A. Petrovich, *Remarks on Priestley duality for distributive lattices*. Order 8 (1991), No. 3, 299–315.

[22] W. Cornish and P. Fowler, *Coproducts of De Morgan algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977), 1–13.

[23] W. Cornish and P. Fowler, *Coproducts of Kleene algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. (Serie A), 27 (1979), 209–220.

[24] A. Day, *A note on the congruence extension property*, Algebra Universalis 1 (1971), 234–235.

[25] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.

[26] M. Fidel, *Semantic models of modal logic in $n-$valued logics*, Actas del Cuarto Congreso Dr. Antonio A.R. Monteiro, 167–177 (1997).

[27] A.V. Figallo A and A. Ziliani, *Notes on monadic distributive lattices*, Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, U. N. de San Juan, Argentina, No. 2 (1997), 19–35.

[28] A.V. Figallo A, I. Pascual and A. Ziliani, *Notes On Monadic n-valued Lukasiewicz Algebras*. Mathematica Bohemica 129 (2004), No. 3, 255–271.

[29] A.V. Figallo A, I. Pascual and A. Ziliani, *Álgebras de Łukasiewicz $\theta-$valuadas con negación monádicas subdirectamente irreducibles*. Actas de la XLV Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Salta (2005).

[30] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Sobre una subclase de las álgebras de Łukasiewicz $\theta-$valuadas sin negación*. Actas de la XLVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional del Sur (2006).

[31] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Monadic Distributive Lattices*. Logic Journal of IGPL, Oxford University Press, Inglaterra, 15 (2007) No. 5-6, 535–551.

[32] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Strong Monadic Distributive Lattices*. 7th. Panhellenic Logic Simposium. Patras. Grecia. (2009).

[33] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *A Duality for $\theta-$Valued Łukasiewicz–Moisil Algebras and Applications*. Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing. Vol. 16 (2010), pp. 303-322.

[34] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Principal and Boolean Congruences on $\theta-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras*. Logic withouth frontiers. Festschrift for Walter Alexandre Carnielli on the occasion of his 60 th Birthday, 17 (2012), pp. 215-237.

[35] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Monadic Distributive Lattices and Monadic Augmented Kripke Frames*, Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing, 22 (2014), No. 1-2, 189-216.

[36] A. Figallo Orellano, *Un estudio algebraico y topológico en variedades de álgebras de De Morgan con operadores*, Tesis de Doctorado en Matemática, Univesidad Nacional del Sur, 2014.

[37] A. Filipoiu, *Representation theorems for Łukasiewicz algebras*. Discrete Math., 27 (1979), 107–110.

[38] A. Filipoiu, *Representation of Łukasiewicz algebras by means of ordered Stone spaces*. Discrete Math., 30 (1980), 111–116.

[39] A. Filipoiu, *θ valued Łukasiewicz–Moisil algebras and logics* (Romanian). Ph.D. Thesis, Univ. of Bucharest, 1981.

[40] A. Filipoiu, *Representation theorems for θ valued Łukasiewicz algebras.* Discrete Math., 33 (1981), 21–27.

[41] A. Filipoiu, *Some remarks on the representation theorem of Moisil.* Discrete Math., 33 (1981), 163–170.

[42] G. Georgescu, C. Vraciu, *Monadic Boolean algebras and monadic Łukasiewicz algebras*. (Romanian). Stud. Cerc. Mat. 23 (1971), 1025–1048.

[43] G. Grätzer, *Universal Algebra*, 2nd. edition, Springer–Verlag, New York (1979).

[44] G. Grätzer, *General lattice theory*. Second edition. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille. Birkhuser Verlag, Basel, 1998.

[45] P. R. Halmos, *Algebraic Logic. I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Math. 12 (1955), 217–249.

[46] P. R. Halmos, *Algebraic Logic*, Chelsea, New York (1962).

[47] P. R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebra*, Van Nostrand Mathematical Studies, No. 1, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J. (1963).

[48] A. Iorgulescu, $(1+\theta)-$*valued Łukasiewicz–Moisil algebras with negation* (Romanian). Ph.D. Thesis. Univ. of Bucharest, 1984.

[49] J. A. Kalman, *Lattices with involution*, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 485–491.

[50] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Springer–Verlag, Berlin, 1971.

[51] A. I. Mal'cev, *On the general theory of algebraic systems*, Mat. Sb. (N.S) 35 (1954), 3–20.

[52] W. Marek and T. Traczyck, *Generalized Łukasiewicz algebras*, Bull. Acad. Polonaise Sci. sér. Math. Asttronom. Phys., 17 (1969), 789–792.

[53] Gr. C. Moisil, *Recherches sur les logiques non chrysippiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Jassy 26 (1940), 431–466.

[54] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non–chrysipiennes*, ditions de l'Acadmie de la Rpublique Socialiste de Roumanie, Bucharest, 1972.

[55] Gr. C. Moisil, *Notes sur les logiques non-chrysippiennes*, (French) Ann. Sci. Univ. Jassy, Sect. I, 27 (1941), 86–98.

[56] Gr. C. Moisil, *Le algèbre di Łukasiewicz*, (French) An. Univ. Bucuresti Ser. Acta Logica 6 (1963), 97–135.

[57] Gr. C. Moisil, *Sur las logiques de Łukasiewicz a un nombre fini de valuers.* Rev. Roum. Math. Pures Appl., 9 (1964), 905–920.

[58] Gr. C. Moisil, *Łukasiewiczian algebras*. Computing Center, Univ. Bucharest (preprint)(1972), 311–324.

[59] A. Monteiro, *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer*, Rev. de la Unión Mat. Argentina 17 (1955), 149–160.

[60] A. Monteiro y O. Varsavsky, *Algebras de Heyting monádicas*, Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca, (1957), 52–62. (A French translation is published as Notas de Lógica Matemática 1, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1974), 116.

[61] A. Monteiro, *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques*. Segundo Symp. Mat., Centro di Cooperacion. UNESCO para América Latina, Monteviseo, No. 30 (1954), 129–172.

[62] A. Monteiro, *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine 7 (55) (1963), 3–12.

[63] A. Monteiro, *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[64] A. Monteiro, *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques*, Math. Japon. 12 (1967), 1–23.

[65] A. Monteiro, *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques*, I–II. Notas de Lógica Mat., Inst. de Mat. Univ. Nac. del Sur, No. 29–30 (1974).

[66] A. Monteiro, *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine 7 (55) (1963), 199–202. (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 22 (1964), Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca).

[67] L. Monteiro, *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32 (1974). Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[68] L. Monteiro and L. Gonzalez Coppola, *Sur une construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Portugaliae Math. 23 (1964), 157–167.

[69] L. Monteiro, S. Savini and J. Sewald, *Construction of monadic three–valued Lukasiewicz algebras*, Studia Logica 3/4 (1991), 473–483.

[70] A. Petrovich, *Distributive lattices with an operator*, Studia Logica 56 (1996), 205–224.

[71] H. A. Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc., 2 (1970), 186–190.

[72] H. A. Priestley, *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc. 3 (1972), 507–530.

[73] H. A. Priestley, *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Ann. Discrete Math., 23 (1984), 39–60.

[74] H. P. Sankappanavar, *Distributive lattices with a dual endomorphism*. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 31 (1985), No. 5, 385–392

[75] M. Sholander, *Postulates for distributive lattices*, Can. J. Math. 3 (1951), 28–30.

[76] C. Sicoe, *Sur les ideaux des algèbres Łukasiewicziennes polivalentes*, Rev. Roum. Math. Pures. Appl., 12 (1967), 391–401.

[77] C. Sicoe, *Note supra algebrelor Łukasiewicziene polivalente*, Stud. si Cerc. Mat., 19 (1967), 1203–1207.

[78] C. Sicoe, *On many–valued Łukasiewicz algebras*, Proc. Japan Acad., 43 (1967), 725–728.

[79] C. Sicoe, *Sur la définition des algèbres Łukasiewicziennes polivalentes*, Rev. Roum. Math. Pures. Appl., 13 (1968), 1027–1030.

[80] O. Varsavsky, *Quantifiers and equivalence relations*, Rev. Matem. Cuyana 2 (1956), 29–51.

[81] L. Vrancken-Mawet, *The lattice of R-subalgebras of a bounded distributive lattice*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 25(1984), No. 1, 1–17.

[82] A. Ziliani, *Álgebras de De Morgan modales cuatro–valuadas monádicas*, Ph.D. thesis, Univesidad Nacional del Sur, 2000.