



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA

Representación matemática de ondas cerebrales

Juan M. Arriola

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2016

PREFACIO

Esta Tesis es presentada para cumplimentar parte de los requisitos para optar al grado Académico de Magíster en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur. La misma no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. Ésta engloba los resultados obtenidos en investigaciones realizadas en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre abril de 2013 y abril de 2016, bajo la dirección de la Dra. Liliana Raquel Castro y la co-dirección de la Dra. Marcela Patricia Álvarez.

Juan M. Arriola

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../...,
mereciendo la calificación de ... (.....).

A la Universidad Nacional del Sur, por permitirme continuar mi formación.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, mi mayor agradecimiento a mi directora Dra. Liliana R. Castro y a mi co-directora Marcela P. Álvarez, que con confianza absoluta, motivación permanente y seguimiento continuo, fueron mostrandome como allanar y desmalezar el camino conducente a la concreción de este trabajo.

En segundo lugar, quiero agradecer al Dr. Osvaldo Agamennoni por su apoyo, y a todo su grupo de investigación, por promover constantemente espacios de exposición y discusión de resultados y problemas, en los que surgieron las inquietudes iniciales que motivaron esta investigación.

En tercer lugar agradezco a los integrantes del jurado: Dr. Eduardo E. Paolini, Dra. Aurora Rubio y Dr. Eduardo P. Serrano por las correcciones y sugerencias realizadas.

Por último, pero no menos importante, quiero hacer llegar un inconmensurable agradecimiento a mi familia, amigos, compañeros y colegas, muchos a la distancia, que con su apoyo, respaldo y cariño le dieron fuerza al viento que impulsó la nave de este trabajo a un buen puerto.

A todos, mil gracias, posta.

RESUMEN

Las señales electroencefalográficas, o señales EEG, son registros que se obtienen al medir las corrientes eléctricas que viajan a través del cerebro. En ellas es posible encontrar información no sólo sobre la actividad cerebral sino también sobre las zonas del cerebro que intervienen en actividades específicas. Procesar la información presente en estas señales es fundamental para poder comprender en profundidad el funcionamiento del cerebro. En particular, cuando las funciones cerebrales se ven alteradas por el consumo de sustancias psicoactivas, enfermedades degenerativas u otros daños, el procesamiento de las señales EEG permite obtener información sobre qué zonas están dañadas y en qué medida.

En ese sentido, el principal objetivo de esta tesis es procesar la información presente en las señales EEG mediante la utilización de la Transformada Wavelet y, de esta manera, poder cuantificar e identificar las diferencias entre el funcionamiento de un cerebro "sano" y otro dañado, o estudiar de qué manera trabaja el cerebro sometido a diferentes estímulos.

El objetivo secundario es mostrar que la automatización en la identificación y clasificación de la información obtenida podría ser posible mediante redes neuronales artificiales.

Procesando dos bases de datos diferentes, pudimos constatar que las variables cuantitativas obtenidas permiten caracterizar la actividad cerebral, y que dicha caracterización puede ser automáticamente clasificada mediante redes neuronales artificiales. En el primer caso, logramos clasificar una población sujetos en dos grupos, alcohólicos y control, procesando las señales EEG obtenidas a partir de someter a los sujetos a estímulos visuales. En el segundo caso encontramos evidencia de que diferentes emociones evocadas por estímulos audiovisuales producen diferencias detectables en las señales EEG, aunque no logramos automatizar la clasificación de la información. Los resultados obtenidos en la primera aplicación constituyen un aporte en la obtención de mecanismos que contribuyan al diagnóstico de daños ocasionados por consumo de sustancias psicoactivas.

ABSTRACT

Electroencephalographic signals, or EEG signals are signals obtained by measuring the electrical currents that travel through the brain. These signals not only provide information on brain activity but also give an insight of the brain regions involved in specific activities. To fully understand how the brain works, is critical to process that information. In particular, when brain functions are affected by the abuse of psychoactive substances, degenerative diseases or other damages, the processing of EEG signals allows to obtain information about the extent of the damaged areas.

In that sense, the main objective of this thesis is to extract the information from the EEG signals using the Wavelet Transform, and then quantify and identify the differences between the performance of a "healthy" brain and a damaged one, or study how the brain of different subjects perform different to stimuli.

The secondary objective is to show that the identification and classification of the information could be done automatically using artificial neural networks.

The processing of two different databases showed that it is possible to characterize brain activity using the quantitative variables we obtained, and that such characterization can be used to perform an automatic classification using artificial neural networks. In the first case, we successfully classified subjects into two groups, alcoholics and control, using processed EEG signals obtained from subjects exited by visual stimuli. In the second case we found evidence that different emotions evoked by audiovisual stimuli produce detectable differences in EEG signals, although we could not perform an automatic classification of the information.

The results obtained in the first application constitute a contribution in the development of mechanisms that contribute to diagnose the damage produced by psychoactive substance abuse.

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.

Dra. Liliana R. Castro

DIRECTORA

Índice General

Índice de Figuras	xv
Índice de Tablas	xvii
Objetivos y organización de la tesis	1
1 Redes Neuronales Artificiales	3
1.1 Introducción	3
1.2 Reseña Histórica	3
1.3 Características, Componentes y Topología	4
1.4 Perceptrón Multicapa	5
1.4.1 Algoritmo <i>backpropagation</i>	7
1.5 Teorema de Aproximación Universal	11
2 Transformada Wavelet	13
2.1 Introducción	13
2.2 Reseña Histórica	13
2.3 Tranformadas Wavelet Continua y Discreta	17
2.3.1 Transformada de Fourier	18
2.3.2 Transformada de Fourier con Ventana	18
2.3.3 Transformada Wavelet Continua	21
2.3.4 Transformada Wavelet Discreta	23
2.4 Análisis Multirresolución	25
2.4.1 La función de escala y los niveles de resolución V_j	25
2.4.2 La función Wavelet y los espacios de detalle W_j	27
2.4.3 Esquema de descomposición y reconstrucción	28
2.5 Propiedades deseables en las Wavelets	30
2.6 Ejemplos	31
3 Electroencefalografía	35
3.1 Introducción	35
3.2 Reseña Histórica	36
3.3 señales Electroencefalográficas (EEG)	39
3.4 Potenciales Evocados (ERP)	44

4 Aplicaciones	47
4.1 Alcohólicos vs. Control	47
4.2 Emociones y EEG	53
Conclusiones y Trabajo Futuro	57
Bibliografía	59

Índice de figuras

1.1	Modelo de una neurona artificial.	4
1.2	Esquema de clasificación de RNA.	6
1.3	Modelo de un PMC con 3 capas ocultas.	7
1.4	Algoritmo <i>backpropagation</i>	8
1.5	Esquema de propagación hacia adelante.	9
1.6	Esquema de propagación hacia atrás.	11
2.1	Arriba, $h_1(x)$. Centro, $h_2(x)$. Abajo, $h_3(x)$	15
2.2	Esquema plano tiempo-frecuencia TF.	18
2.3	Arriba: función chirp. Centro: funciones gaussianas con diferentes valores de α y corrimientos. Abajo: Resultado del producto entre la función chirp y la gaussiana.	20
2.4	Esquema plano tiempo-frecuencia TFV.	21
2.5	De izquierda a derecha, $\psi_{a,b}$ con $a = 2$, $a = 1$ y $a = 0.5$	22
2.6	Plano tiempo-frecuencia TWC.	22
2.7	Esquema de descomposición de f	29
2.8	Esquema de reconstrucción de f	29
2.9	Funciones de escala (izquierda) y wavelets (derecha) de Daubechies, $N = 2, 4, 6$	32
2.10	Función de escala (izquierda) y wavelet (derecha) de Shannon.	32
3.1	Neurona y conexiones sinápticas.	39
3.2	Lóbulos cerebrales.	40
3.3	Vistas lateral (a) y superior (b) del sistema 10-20 de colocación de electrodos.	40
3.4	Vista bidimensional de 75 electrodos colocados siguiendo el sistema 10-20.	41
3.5	Ritmos característicos clásicos.	42
3.6	Actividad evocada, espontánea e inducida.	43
3.7	Señal ERP y algunos picos P y N	44
4.1	De izquierda a derecha, promedio ME, DS y P_1	50
4.2	De izquierda a derecha, promedio P_2 , P_3 y P_4	51
4.3	De izquierda a derecha, promedio P_5 , P_6 y P_7	52
4.4	De izquierda a derecha, promedio P_8 y P_9	52

Índice de tablas

3.1	Tabla de frecuencias asociadas a los ritmos característicos.	41
4.1	Características de la base de datos.	47
4.2	Bandas frecuenciales asociadas a los distintos niveles de descomposición.	48
4.3	Potencias relativas, bandas frecuenciales asociadas, y nomenclatura de las ondas características asociadas.	49
4.4	Características de la base de datos del experimento emocional.	54
4.5	Niveles de descomposición, Potencias Relativas, nomenclatura de las ondas características y bandas frecuenciales asociadas.	55

Objetivos y Organización de la Tesis

Objetivos

Centramos el presente trabajo en el procesamiento de señales electroencefalográficas mediante la utilización de la Transformada Wavelet y en la capacidad de encontrar mecanismos que permitan automatizar la clasificación de la información obtenida a partir de dicho procesamiento. El análisis de señales electroencefalográficas adquiere vital importancia a la hora de comprender el funcionamiento del cerebro humano, y el impacto que el consumo de sustancias psicoactivas o enfermedades neurodegenerativas tienen sobre él. Poder cuantificar y clasificar automáticamente la información subyacente en las señales cerebrales, constituye un aporte significativo para diseñar test que contribuyan al diagnóstico temprano de daños cerebrales o enfermedades neurodegenerativas. La Transformada Wavelet es una poderosa herramienta para analizar señales no estacionarias, como las señales eléctricas cerebrales, y permite apreciar esas señales en diferentes escalas que guardan una estrecha relación con el contenido espectral de las mismas. Por otro lado, las redes neuronales artificiales tienen la capacidad de procesar grandes cantidades de información y emular comportamientos o patrones, lo que las hace estructuras aptas para fines clasificatorios.

Teniendo en cuenta lo dicho precedentemente, nuestros objetivos son:

- Mostrar cómo la Transformada Wavelet permite obtener variables cuantitativas que caracterizan la actividad eléctrica cerebral.
- Mostrar, mediante el análisis propuesto, que es posible captar las diferencias existentes en la actividad cerebral de sujetos con distintas condiciones clínicas o de sujetos sometidos a diferentes estímulos emocionales.
- Analizar la utilización de redes neuronales artificiales para clasificar exitosamente la información correspondiente a distintas categorías, obtenida a partir del procesamiento de las señales EEG mediante la Transformada Wavelet.

Organización de la tesis

A continuación describiremos la organización de esta tesis.

En el Capítulo 1 abordamos el concepto de redes neuronales artificiales, dando una breve reseña histórica seguida de una descripción de sus características, componentes principales, distintas topologías y arquitecturas. En particular describimos las redes

tipo perceptrón multicapa y el algoritmo de propagación hacia atrás para ajustar los pesos de esas redes. Concluimos el capítulo enunciando el Teorema de aproximación universal. Utilizaremos estas redes en el Capítulo 4 para la clasificación de la información obtenida del procesamiento de las señales EEG.

En el Capítulo 2 presentamos la Transformada Wavelet comenzando con una revisión histórica, para luego abordar algunas nociones previas como la Transformada de Fourier y la Transformada de Fourier con ventana, y definir la Transformada Wavelet Continua y la Transformada Wavelet Discreta. Profundizando sobre la Transformada Wavelet Discreta, definiremos el análisis multirresolución, los esquemas de descomposición y reconstrucción y algunas propiedades deseables de las wavelets. En la última sección exponemos algunos ejemplos de wavelets. En este trabajo, la Transformada Wavelet Discreta es la herramienta que utilizamos en el Capítulo 4 para obtener características cuantitativas de las señales EEG.

En el Capítulo 3 presentamos una breve evolución de la electroencefalografía. Seguimos con una detallada descripción de cómo se obtienen los registros EEG y las características principales de las señales eléctricas cerebrales. En particular describimos las frecuencias características, así como la asociación de cada frecuencia a diferentes funciones del cerebro. Para finalizar dedicamos una sección a describir los potenciales evocados, cómo se obtienen y sus características. Estos potenciales serán utilizados en el Capítulo 4 como una herramienta de preprocesamiento de los registros EEG.

En el Capítulo 4 presentamos los resultados obtenidos al aplicar el procesamiento propuesto a dos bases de datos diferentes. La primera aplicación la realizamos sobre una base de datos electroencefalográficos de sujetos alcohólicos y sujetos control. La segunda aplicación la efectuamos sobre los datos obtenidos al someter a diferentes sujetos a estímulos audiovisuales para evocar distintas emociones.

Finalmente, a continuación del Capítulo 4, damos las conclusiones y propuestas para futuras actividades de investigación.

Capítulo 1

Redes Neuronales Artificiales

En este capítulo abordaremos las nociones básicas sobre redes neuronales, en particular las redes *perceptrón multicapa*.

A tal fin presentaremos sintéticamente la historia detrás de estas estructuras, sus características, componentes y topología, para luego particularizar sobre las redes perceptrón multicapa, y algunas de sus aplicaciones. También expondremos los resultados más importantes, como el Teorema de aproximación universal.

Estas estructuras permiten identificar sistemas no lineales estáticos y las utilizaremos en el Capítulo 4 de esta tesis, para clasificar automáticamente la actividad cerebral de distintos sujetos.

1.1 Introducción

Las *redes neuronales artificiales* (RNA) constituyen estructuras matemáticas que en su arquitectura emulan las conexiones sinápticas de las neuronas presentes en los sistemas nerviosos de animales. Surgieron a partir de la intención de desarrollar mecanismos capaces de llevar a cabo tareas complejas como las que realiza un cerebro. Entre esas tareas complejas, podemos nombrar: la capacidad de “aprender” o copiar comportamientos, reconocer patrones, clasificar información y comprimir información.

1.2 Reseña Histórica

A mediados del siglo pasado las RNA emergieron como resultado en la búsqueda de emular algunas propiedades destacables de sus homólogas biológicas.

Los primeros modelos de RNA se atribuyen a McCulloch y Pitts [29], y continúan siendo el pilar fundacional del estudio de redes neuronales. Hebb [15], Rosenblatt [37] y Widrow [43], contribuyeron posteriormente al crecimiento y desarrollo de nuevos modelos y formulaciones teóricas. El trabajo de este último fue duramente criticado por Minsky y Papert [32], lo que devino en una pérdida de interés por parte de la comunidad científica sobre las investigaciones en RNA.

Gracias a los trabajos de Hopfield [17], Hopfield y Tank [18, 19], Kohonen [24, 25] y otros científicos que desarrollaron nuevos modelos después de una década, se reanudó la atención de la comunidad científica sobre las RNA, atraída por los nuevos

resultados prácticos. Este renovado impulso y las modernas técnicas de integración en electrónica, propiciaron el avance de nuevos modelos de RNA. A partir de entonces las investigaciones se han expandido notoriamente.

1.3 Características, Componentes y Topología

El cerebro humano es capaz de realizar una multiplicidad de tareas sumamente complejas de manera eficiente y a una velocidad muy superior a las computadoras, como la clasificación de patrones, el control motor, la percepción sensorial, la interacción con el medio circundante, entre otros. Esto se debe al trabajo en paralelo de una gran cantidad de neuronas densamente interconectadas, las cuales procesan información que viaja a través de esas conexiones en forma de impulsos eléctricos.

Las RNA se desarrollaron tratando de imitar lo que el cerebro realiza en forma natural. Una RNA es una estructura de procesamiento paralelo formado por unidades simples de procesamiento densamente interconectadas, llamadas *neuronas artificiales*. Una neuronal artificial es la mínima unidad de procesamiento que se encuentra en una RNA. En la Figura 1.1 se puede apreciar el esquema de una neurona artificial siendo:

- x_1, x_2, \dots, x_n : entradas,
- w_1, w_2, \dots, w_n : pesos sinápticos,
- b : valor del *umbral* o *bias*,
- $\Phi(\cdot)$: *función de activación*.

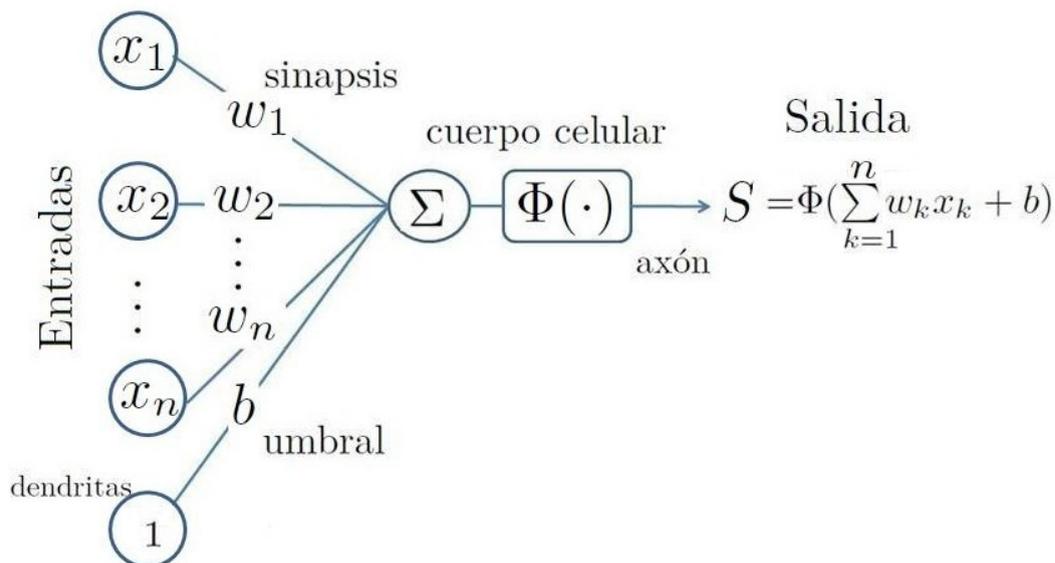


Figura 1.1: Modelo de una neurona artificial.

El esquema de la Figura 1.1 se interpreta de la siguiente manera: cada entrada x_k , $k = 1, \dots, n$, es multiplicada por el peso sináptico w_k al “viajar” a través de la conexión representada por la línea llena. El símbolo Σ dentro del círculo simboliza la suma de las entradas ponderadas por el peso correspondiente. Por último, se calcula el valor de la función Φ en la suma antes calculada y se obtiene la salida de la neurona como

$$S = \Phi \left(\sum_{k=1}^n w_k x_k + b \right). \quad (1.1)$$

La función Φ es, en general, una función no lineal estática que puede ser, por ejemplo, la función signo, sigmoideal, rampa, o de base radial. Cabe mencionar que, generalmente, se considera una función de activación acotada para obtener una salida acotada de la neurona. En esta figura se puede apreciar, además, el parecido entre la neurona artificial y su homóloga biológica, pudiendo establecer una semejanza entre las entradas, los pesos, la sumatoria y la función de activación de la primera, con las dendritas, las sinapsis, el cuerpo celular y el axón de la segunda.

La forma en que las neuronas están conectadas definen en general la *topología*, o arquitectura de la red, y obliga a separar a las RNA en dos grandes grupos, las RNA con realimentación o *recurrentes*, y las que no tienen realimentación o *feedforward*.

A su vez es posible enunciar otra división entre los diferentes tipos de redes, basada en los *algoritmos de aprendizaje* empleados para ajustar los pesos sinápticos de las neuronas. Los pesos sinápticos en una RNA son parámetros a estimar para reproducir un comportamiento deseado, y los mecanismos mediante los cuales la red “aprende” ajustando esos parámetros se denominan *algoritmos de aprendizaje*. Estos algoritmos pueden separarse en dos grupos: los basados en aprendizaje no supervisado y los basados en aprendizaje supervisado. El primer grupo corresponde a ajustar los pesos sin contar con información de salida de un sistema, mientras que para el segundo grupo sí se cuenta con información sobre la salida del sistema que se trata de reproducir o identificar.

Una subestructura neuronal presente en algunas arquitecturas de red son las *capas* de neuronas, que consisten en un conjunto de neuronas que comparten las mismas entradas y no tienen conexión entre ellas. Debemos mencionar que no siempre es posible definir una topología de red, y en algunas arquitecturas tampoco es posible encontrar capas de neuronas. Utilizando la noción de capa se define la estructura de red de tipo *perceptrón multicapa feedforward*, sobre la que profundizaremos más adelante.

En la sección siguiente describimos las redes perceptrón multicapa y el algoritmo *backpropagation* o de propagación hacia atrás, basado en el aprendizaje supervisado.

1.4 Perceptrón Multicapa

Una red tipo perceptrón multicapa (PMC) consiste en una serie de capas conectadas entre sí. La última capa de la red se denomina *capa de salida*, y las capas que se encuentran entre las entradas y la capa de salida se llaman *capas ocultas*. Dependiendo del propósito, la función de activación de las neuronas de la capa de salida puede ser

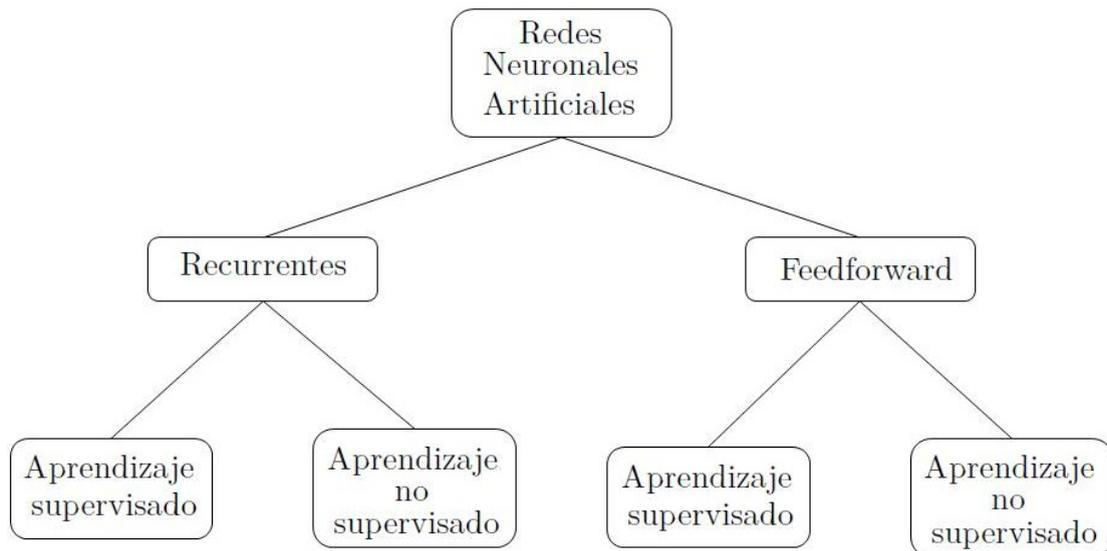


Figura 1.2: Esquema de clasificación de RNA.

lineal o sigmoideal mientras que, por lo general, en las neuronas de las capas ocultas se utiliza una función sigmoideal como función de activación.

Para calcular la salida de una red PMC con \mathbf{N} capas ocultas, comenzaremos por calcular primero la salida de la primera capa oculta C_1 . Llamamos \mathbf{w}_k al vector con los n pesos y el bias correspondientes a la neurona k de las n_1 neuronas de la capa C_1 ; entonces

$$\mathbf{w}_k = [w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}, b_k]^T.$$

Podemos ahora obtener el operador lineal

$$\mathbf{W}_1 = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n_1}]^T,$$

donde están los pesos de las n_1 neuronas de la capa C_1 .

Considerando el vector \mathbf{x} de las entradas, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n, 1]^T$, tenemos que la salida S_1 de la primera capa viene dada en forma matricial por la fórmula

$$S_1 = \Phi(\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{x}).$$

Ahora bien, la salida S_1 de la capa C_1 es la entrada de la capa C_2 , y notando con \mathbf{W}_2 el operador con los pesos de las n_2 neuronas de la segunda capa, la salida S_2 de la capa C_2 está dada por la fórmula

$$S_2 = \Phi(\mathbf{W}_2 \cdot S_1) = \Phi(\mathbf{W}_2 \cdot \Phi(\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{x})).$$

Utilizando la notación anterior, para una red de \mathbf{N} capas ocultas, y una capa de salida con función de activación lineal, tenemos que la salida $\bar{\mathbf{S}}$ de la red está dada por la fórmula

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{W}_s \cdot \Phi(\mathbf{W}_N \cdot \Phi(\mathbf{W}_{N-1} \cdot \dots \cdot \Phi(\mathbf{W}_2 \cdot \Phi(\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{x}))))).$$

Debemos notar que el agregado de capas ocultas no implica mayores dificultades a la hora del cálculo de la salida de la red, aunque puede acarrear problemas de sobreajuste, y aumenta innecesariamente el número de parámetros a ajustar.

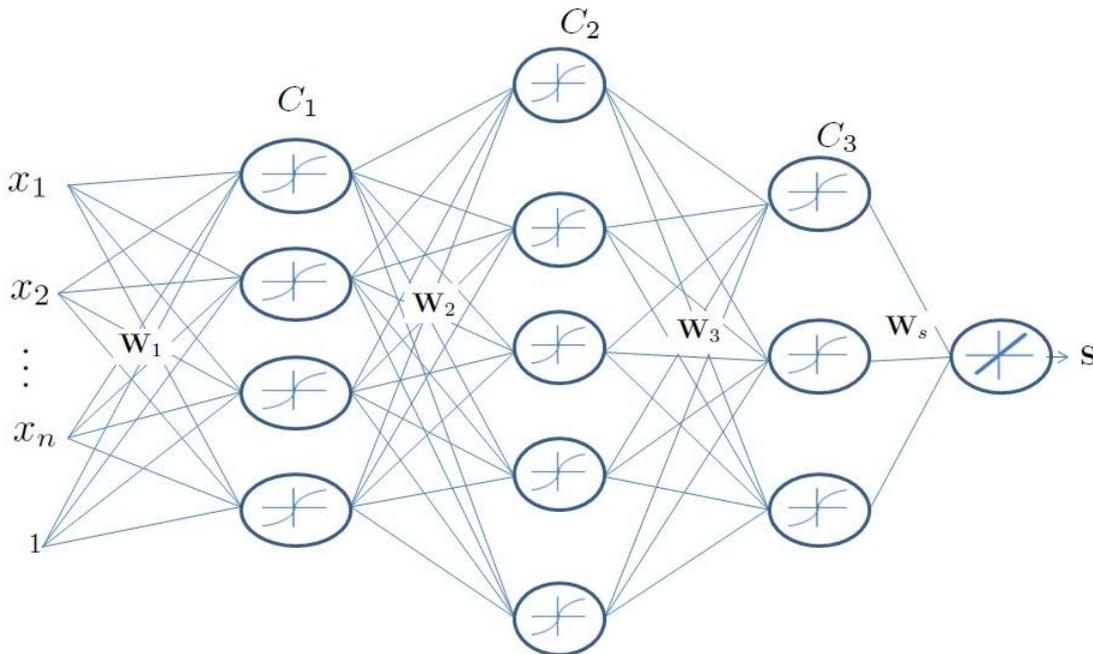


Figura 1.3: Modelo de un PMC con 3 capas ocultas.

En la Figura 1.3 se puede apreciar el esquema de un perceptrón de tres capas ocultas con función de activación sigmoide, y una neurona de salida con función de activación lineal. En ese caso particular, la salida \bar{S} está dada por la fórmula

$$\bar{S} = \mathbf{W}_s \cdot \Phi(\mathbf{W}_3 \cdot \Phi(\mathbf{W}_2 \cdot \Phi(\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{x}))). \tag{1.2}$$

1.4.1 Algoritmo *backpropagation*

El algoritmo de propagación hacia atrás es un algoritmo de aprendizaje supervisado utilizado para ajustar los pesos sinápticos de una red tipo PMC.

El error cuadrático cometido al calcular la salida de la red para un patrón, o par entrada-salida, está dado por la fórmula

$$E(\mathbf{w}, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_s} (\mathbf{S}_i(\tau) - \bar{\mathbf{S}}_i(\tau))^2,$$

donde \mathbf{w} son los pesos de las distintas capas, τ el τ -ésimo conjunto de entrada-salida para entrenamiento ($\tau = 1, 2, \dots, \mathbf{T}$), \mathbf{S} es la salida deseada y $\bar{\mathbf{S}}$ es la salida calculada con la red. Consecuentemente, el error cuadrático promedio $E_{pr}(\mathbf{w})$ cometido por la red, se calcula como el promedio de los errores cuadráticos cometidos al calcular los

errores para los \mathbf{T} pares entrada-salida, en el conjunto de muestras para entrenamiento. Es decir,

$$E_{pr}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\mathbf{T}} \sum_{\tau=1}^{\mathbf{T}} E(\mathbf{w}, \tau).$$

Ambas ecuaciones dependen de los parámetros libres \mathbf{w} que son los pesos a estimar. Para un conjunto $[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{S}(\tau)]_{\tau=1}^{\mathbf{T}}$ de muestras para entrenamiento, E_{pr} simboliza la función costo del proceso de aprendizaje. El objetivo del algoritmo de aprendizaje es minimizar E_{pr} ajustando los parámetros de la red, *i.e.*, los pesos sinápticos. En particular, el algoritmo *backpropagation* actualiza los pesos patrón por patrón hasta la presentación del conjunto completo de muestras para entrenamiento. El ajuste de los pesos se hace utilizando los errores calculados para cada patrón, es decir, para cada par entrada-salida del conjunto de muestras para entrenamiento.

En la Figura 1.4 se presentan sintéticamente los pasos del algoritmo, que describiremos a continuación para una red de \mathbf{L} capas ocultas con función de activación $\Phi(\cdot)$.

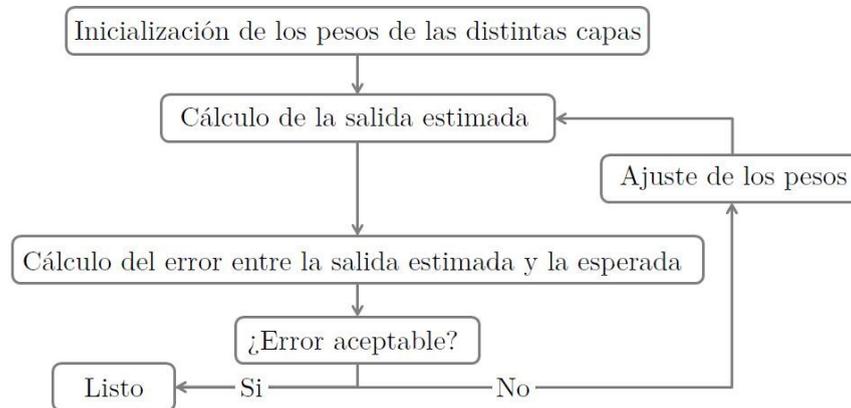


Figura 1.4: Algoritmo *backpropagation*.

1. *Inicialización*: En este paso se les asigna a todos los pesos de las \mathbf{L} capas ocultas y de la capa de salida de la red un peso aleatorio con distribución uniforme, en un intervalo que impida la saturación de la neurona.
2. *Presentación de muestras para entrenamiento*: Se presenta a la red el conjunto $[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{S}(\tau)]_{\tau=1}^{\mathbf{T}}$, donde $\mathbf{x}(\tau)$ es el vector de entradas, $\mathbf{S}(\tau)$ es la salida deseada y τ simboliza el τ -ésimo par entrada-salida del conjunto de muestras para entrenamiento.
3. *Cálculo hacia adelante*: Calculamos la señal de entrada a cada neurona y aplicamos a ellas la función de activación, procediendo hacia adelante, capa por capa, a través de la red.

La entrada $v_j^{(l)}(\tau)$ para la neurona j de la capa C_l , $l = 1, \dots, L + 1$ (la capa de salida será C_{L+1}) es

$$v_j^{(l)}(\tau) = \sum_{i=0}^{n_{l-1}} w_{ji}^{(l)}(\tau) S_i^{(l-1)}(\tau),$$

donde

$S_i^{(l-1)}(\tau)$ es la salida de la neurona i en la capa previa C_{l-1} ante la presentación del τ -ésimo par entrada-salida,

$w_{ji}^{(l)}(\tau)$ es el peso sináptico que asigna la neurona j de la capa C_l a la salida de la neurona i de la capa C_{l-1} ,

y n_{l-1} es la cantidad de neuronas en la capa C_{l-1} .

La salida de la neurona i de la capa C_{l-1} viene dada por la fórmula

$$S_i^{(l-1)} = \Phi(v_i^{(l-1)}).$$

En el caso de la primera capa C_1 , llamamos $S^{(0)}$ al vector de entradas \mathbf{x} . Para el caso que $i = 0$, el peso correspondiente w_{j0} está dado por el umbral b_j de la neurona j y se asocia a 1 como entrada.

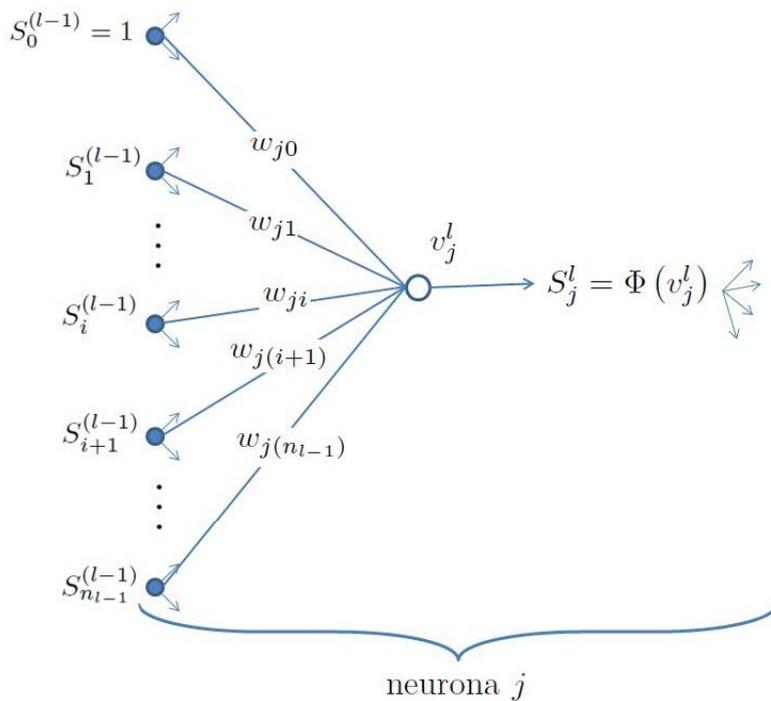


Figura 1.5: Esquema de propagación hacia adelante.

4. *Propagación hacia atrás y ajuste de pesos:* La reproducción del comportamiento deseado implica ajustar iterativamente los pesos inicializados aleatoriamente hasta

obtener una diferencia entre la salida estimada por la red y la salida esperada lo suficientemente pequeña. Este ajuste, cuyo objetivo es minimizar el error cuadrático promedio $E_{pr}(\mathbf{w})$ entre la salida estimada y la deseada, se logra aplicando a cada peso sináptico un factor de corrección, que es proporcional a la derivada parcial del error cuadrático respecto de dicho peso. Llamando

$$E(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_s} (\mathbf{S}_j(\tau) - \bar{\mathbf{S}}_j(\tau))^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_s} e_j^2(\tau),$$

donde $e_j(\tau)$ es el error cometido entre la j -ésima salida de la red y la j -ésima salida deseada para la muestra τ . El factor de corrección Δw_{ji} aplicado al peso sináptico w_{ji} viene dado por la fórmula

$$\Delta w_{ji} = -\eta \cdot \frac{\partial E}{\partial w_{ji}},$$

donde η se denomina *factor de aprendizaje*. El factor de corrección indica la dirección en la que debe “moverse” un determinado peso para minimizar el error.

Realizando los cálculos de las derivadas parciales del error respecto de los pesos sinápticos de las distintas capas de la red podemos obtener la siguiente δ -regla generalizada,

$$\Delta w_{ji}(\tau) = \eta \cdot \delta_j^{(l)}(\tau) \cdot \mathbf{S}_i^{(l-1)}(\tau),$$

donde el cálculo del gradiente local δ_j se realiza mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \delta_j^{(L+1)}(\tau) &= e_j \cdot \Phi'(v_j^{(L+1)}(\tau)) && \text{para la neurona } j \text{ en} \\ & && \text{la capa de salida } C_{L+1}, \\ \delta_j^{(l)}(\tau) &= \Phi'(v_j^{(l)}(\tau)) \cdot \sum_{k=1}^{n_{l+1}} \delta_k^{(l+1)}(\tau) \cdot w_{kj} && \text{para la neurona } j \\ & && \text{en la capa oculta } C_l, \\ & && l = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Debemos notar que la fórmula para el cálculo del gradiente local, en el caso de un peso correspondiente a una neurona en una capa oculta, involucra la suma ponderada por los pesos de los gradientes locales de las neuronas de la capa subsiguiente. Esto es equivalente a calcular el error en la capa de salida y propagarlo hacia atrás en la red, lo que le otorga el nombre al algoritmo. En la Figura 1.6 podemos apreciar el cálculo del gradiente local de la neurona j de la última capa oculta C_N .

Obtenidos los factores de corrección para los pesos sinápticos, estos se ajustan mediante la fórmula

$$w_{ji}^{(l)}(\tau + 1) = w_{ji}^{(l)}(\tau) + \alpha [w_{ji}^{(l)}(\tau) - w_{ji}^{(l)}(\tau - 1)] + \Delta w_{ji}(\tau),$$

donde α es el factor de momento introducido para evitar que el método sea inestable cuando se desea aumentar el factor de aprendizaje η .

Una vez ajustados los pesos para la patrón τ de entrada-salida, se presenta un nuevo patrón entrada-salida y se sigue al paso 3, propagando hacia adelante el

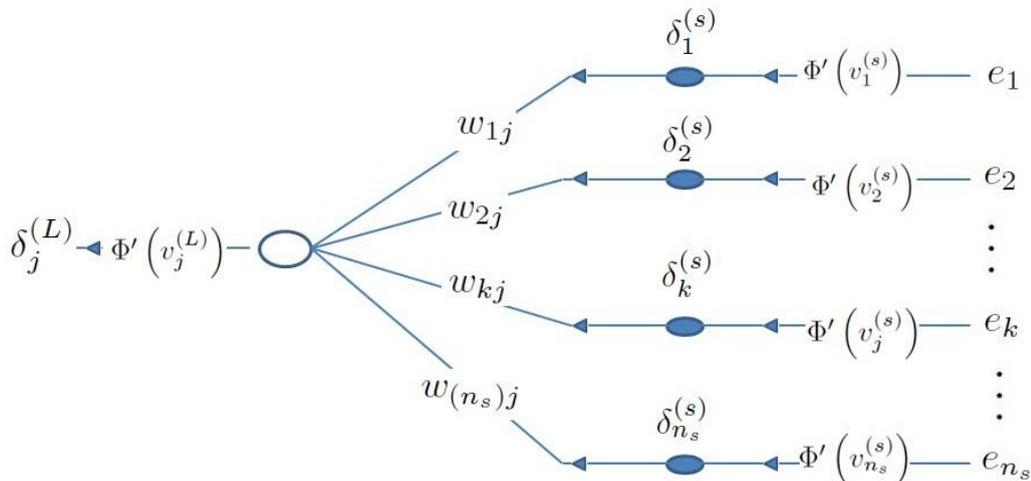


Figura 1.6: Esquema de propagación hacia atrás.

nuevo patrón, propagando hacia atrás el error cometido para este nuevo patrón y los pesos ajustados anteriormente, y se ajustan los pesos nuevamente. Esto se repite con el conjunto entero de muestras para entrenamiento, y hasta que el error cuadrático promedio E_{pr} sea lo suficientemente pequeño.

1.5 Teorema de Aproximación Universal

En esta sección enunciaremos un importante resultado probado por Cybenko en 1989 [8], que nos permite asegurar la capacidad de aproximar cualquier función continua $g : \mathbf{I}_m \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $\mathbf{I}_m \subset \mathbb{R}^m$ el cubo unitario de dimensión m , por medio de una red tipo PMC de una capa oculta, con función de activación sigmoideal en la capa oculta y lineal en la capa de salida.

Teorema 1 Sea $C(\mathbf{I}_m)$ el espacio de funciones continuas definidas en el hipercubo unitario \mathbf{I}_m . Dadas $g \in C(\mathbf{I}_m)$, una función sigmoideal continua ϕ y $\varepsilon > 0$, existe una suma finita de N_0 términos,

$$g_{N_0}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{N_0} (w_2)_k \phi\left((\mathbf{w}_1)_k^T \mathbf{u} + (b_1)_k\right) + b_2,$$

donde $(\mathbf{w}_1)_k^T \in \mathbb{R}^m$, $(b_1)_k, (w_2)_k, b_2 \in \mathbb{R}$ son los parámetros de la red neuronal, para los cuales se verifica que

$$|g_{N_0}(\mathbf{u}) - g(\mathbf{u})| < \varepsilon.$$

Capítulo 2

Transformada Wavelet

En el presente capítulo introduciremos el concepto de transformada wavelet (TW) y algunas de sus aplicaciones al análisis de señales. Previamente daremos una breve reseña histórica, y luego enunciaremos su definición formal, propiedades, características y algunos de los resultados más relevantes. En particular, profundizaremos sobre la transformada wavelet discreta (TWD) y su aplicación al análisis de señales electroencefalográficas (EEG).

2.1 Introducción

La TW es un concepto relativamente reciente en matemática, y su estudio y aplicaciones han crecido a tasas exponenciales en los últimos 30 años.

Este crecimiento se debe, en parte, a que constituye una síntesis de ideas originadas en los últimos 50 años en ingeniería, física y matemática pura.

Por otra parte, el análisis mediante la TW constituye una herramienta simple y poderosa con aplicaciones en variados campos del conocimiento. Su aplicación al análisis de señales (sonido, imágenes, EEG) y al análisis numérico, han derivado en resultados sumamente útiles para el avance científico.

2.2 Reseña Histórica

Si bien el concepto de wavelet es relativamente nuevo en matemática, es el resultado de una discusión que comenzó hace más de 200 años.

En 1807 J. Fourier enunció que “toda función periódica $f(x)$ de período 2π admite un desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$a_0 + \sum_1^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)''.$$

En ese momento los conceptos de función e integral no eran tan precisos como lo son actualmente, y cuando P. Du Bois-Reymond en 1873 construyó una función de una variable real, continua, de período 2π , cuya serie de Fourier diverge en un punto, se abrieron diferentes caminos buscando salvar el problema de la divergencia de dicha

función. Estos caminos, que condujeron a resultados destacables, los detallaremos a continuación.

Uno de ellos fue el de modificar la noción de función y encontrar una que se adapte, en algún sentido, a las series de Fourier, lo que devino en los conceptos de *medida* y *funciones medibles* atribuidos a H. Lebesgue. Estos conceptos permitieron la definición del espacio $L^2 [0, 2\pi]$, y se probó que las funciones del desarrollo de la serie de Fourier constituyen una base ortonormal de dicho espacio.

Otro camino fue modificar la noción de convergencia de las series de Fourier, para lo cual se consideró la serie de las medias aritméticas de sumas parciales (sumas de César)

$$\sigma_n = \frac{1}{n} (S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}),$$

y entonces ya no existía el problema de la divergencia para la función de Du Bois-Reymond.

El tercer camino fue el de encontrar otros sistemas ortonormales en los cuales el fenómeno de la función de Du Bois-Reymond no sucediera. Este último camino fue el que condujo al concepto de wavelets.

El primero en obtener resultados al problema de encontrar otros sistemas ortonormales para representar funciones fue A. Haar en 1909, quien definió un conjunto ortonormal de funciones en el intervalo $[0, 1]$, tomando como punto de partida la función

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ -1, & x \in [1/2, 1) \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para definir dicha base, Haar tomó $n = 2^j + k$, con $j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $0 \leq k < 2^j$, y definió

$$h_n(x) = 2^{\frac{j}{2}} h(2^j x - k),$$

cuyo soporte es el intervalo diádico $I_n = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ que está contenido en el intervalo $[0, 1)$ cuando $0 \leq k < 2^j$. Para completar el conjunto definió $h_0(x) = 1 \forall x \in [0, 1)$. En la Figura 2.1 se puede apreciar el gráfico de $h_1(x)$, $h_2(x)$ y $h_3(x)$.

Haar probó que el conjunto de funciones $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$ forma una base ortonormal (o base de Hilbert) de $L^2([0, 1])$, *i.e.*, que cualquier función $f(x)$ de energía finita se puede aproximar uniformemente por medio de la serie

$$\langle f, h_0 \rangle h_0(x) + \langle f, h_1 \rangle h_1(x) + \dots + \langle f, h_n \rangle h_n(x) + \dots,$$

donde $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$, y $\overline{g(x)}$ es el conjugado complejo de $g(x)$.

Esta base descubierta por Haar, es la respuesta más simple a la pregunta sobre la existencia de otros sistemas ortonormales en los cuales descomponer una función, y no es más que la aproximación de una función por funciones escalón cuyos valores son los valores medios de la función $f(x)$ en los intervalos diádicos.

Uno de los problemas con la representación a la que arribó Haar es que si uno descompone una función continua, los “átomos” usados para la reconstrucción no son funciones continuas, lo que no parece tener sentido. Por otro lado si la función es de clase C^1 , *i.e.*, con derivadas continuas, entonces la representación de $f(x)$ por medio de la base $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$ es sumamente inapropiada.

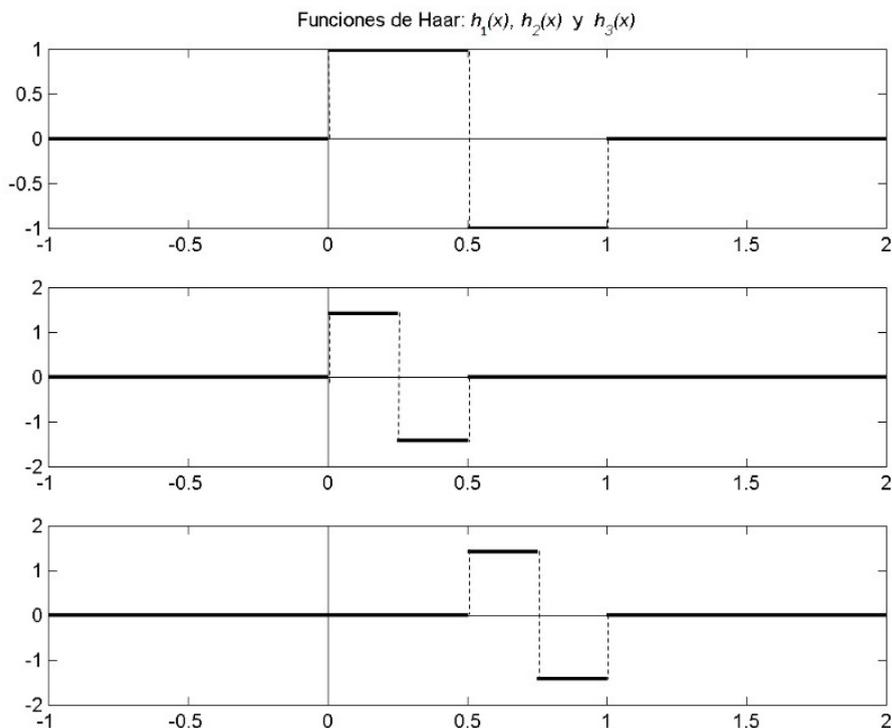


Figura 2.1: Arriba, $h_1(x)$. Centro, $h_2(x)$. Abajo, $h_3(x)$.

Este problema logró ser subsanado por Faber y Schauder, quienes entre 1910 y 1920, crearon una base formada por las primitivas de las funciones $h_n(x)$ del sistema de Haar [31]. Esta nueva base de funciones continuas es una *base de Schauder* del espacio de Banach E de las funciones continuas.

A partir de 1930, diferentes grupos de científicos convergieron a la definición de wavelet tomando diferentes caminos.

Una de estas direcciones está relacionado con estudio del movimiento browniano, que es una señal o movimiento aleatorio que se observa en partículas microscópicas inmersas en un fluido, llevado a cabo por Lévy. Si bien el análisis de Fourier era una buena herramienta que permitía resaltar las propiedades espectrales de este tipo de señales, P. Lévy probó que utilizando la base de Schauder [31], con desplazamientos, se obtenía una representación que revelaba mejor las propiedades de regularidad y la estructura multifractal de la trayectoria del movimiento browniano.

Otro de los caminos tomados surgió a partir del trabajo de J. Littlewood y R. Paley. Así como Lévy puso en evidencia que la representación de Fourier, a diferencia de otras representaciones, no permitía mostrar las propiedades locales de regularidad, Littlewood y Paley trabajaron sobre representaciones que pudieran localizar temporalmente la energía de una señal. Si bien es posible calcular la energía media de una señal sumando los cuadrados de los coeficientes de Fourier, esto no alcanza para determinar si la energía se encuentra distribuida en forma homogénea a lo largo de la señal, o si ésta se encuentra concentrada alrededor de unos pocos puntos.

Para resolver este problema es necesario calcular diferentes p -normas ($p > 2$) de la señal y compararlas con la norma 2 que es la que nos brinda información sobre la energía, ya que si ésta está concentrada alrededor de unos pocos puntos las p -normas de la señal serán de orden de magnitud mayor a la norma 2. El problema reside en que mientras la norma 2 puede obtenerse a partir de los coeficientes de Fourier, para $p > 2$ esto no es posible.

Littlewood y Paley probaron, a partir de la definición de los “bloques diádicos” una desigualdad que relaciona la p -norma de la señal con los coeficientes de Fourier. Hasta aquí el término wavelet no existía, y no fue hasta que un equipo de científicos junto con A. Zygmund en la universidad de Chicago extendieron los resultados de Littlewood y Paley a espacios euclidianos n -dimensionales, que el término “*madre wavelet*” apareció. Se llamó así a una función $\psi(x)$ infinitamente diferenciable, de decrecimiento rápido y con algunas características espectrales que permitían afirmar que el análisis de Littlewood-Paley-Stein conserva la energía. Este análisis consiste en tomar $\psi_j(x) = 2^{nj}\psi(2^jx)$ y reemplazar los bloques diádicos de Littlewood y Paley por convoluciones, de manera que $\delta_j(f) = f * \psi_j$. La función Littlewood-Paley-Stein $g(x)$ se define como

$$g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j(f),$$

y se probó que la energía de f y g coinciden, y que existen constantes reales $C_p \geq c_p \geq 0$ tales que

$$c_p \|g\|_p \leq \|f\|_p \leq C_p \|g\|_p.$$

Esta función g permite realizar un análisis centrado en la capacidad de cambiar las escalas, que varían de acuerdo a j , y no en el contenido frecuencial. Gracias al trabajo posterior de Marr y Mallat, el análisis de Littlewood-Paley constituye una buena herramienta para el procesamiento numérico de imágenes.

Otra de las direcciones de investigación seguidas a partir de 1930 devino en el sistema de P. Franklin, quien obtuvo una base ortonormal a partir de la base de Schauder por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Esto significó avances sobre las bases de Schauder y Haar, ya que la de Franklin permite la descomposición de cualquier función en $L^2([0, 1])$ y la caracterización de los espacios C^r . El problema de la base de Franklin reside en que no cuenta con una estructura algorítmica simple, ya que las funciones que la componen no se obtienen a partir de traslaciones y dilataciones de una función en particular, como en el caso de la base de Schauder o la de Haar, lo que hizo que se perdiera interés en dicho sistema. Afortunadamente, Z. Cekielski probó la existencia de constantes reales $\gamma > 0$ y $C > 0$, tales que las funciones f_n de la base cumplen que

$$|f_n(x)| \leq C 2^j e^{-\gamma |2^j x - k|},$$

si $0 \leq x \leq 1$, $n = 2^j + k$, y $0 \leq k < 2^j$. De esta forma se probó que si las funciones de la base se toman

$$f_n(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k),$$

donde $\psi(x)$ es una función que cumple la condición de Lipschitz y tiene decrecimiento rápido, todo funcionaba correctamente. Varios años después, en 1980, se descubrió que en cierto sentido la base de wavelets ortonormales descubierta por Strömberg “vivía” dentro del sistema de Franklin.

Otro de los caminos seguidos a partir de 1930 condujo a las wavelets de Lusin. Su trabajo, interpretado a la luz de la teoría de wavelets, consistió en el análisis y síntesis de funciones en el espacio de Hardy H^p usando “átomos” o “elementos base”, que son las funciones elementales en dicho espacio. En 1960, G. Weiss y R. Coifman fueron los primeros en interpretar la teoría de Lusin en términos de “descomposiciones atómicas”.

En 1980, A. Grossmann y J. Morlet reinterpretaron la identidad de Calderón (pág. 55,[22]), y definieron las wavelets

$$\psi_{(a,b)}(x) = a^{-n/2} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right),$$

a partir de la wavelet de análisis $\psi(x)$, con $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$, y probaron que una señal arbitraria podía ser analizada a partir de las traslaciones y dilataciones de la función $\psi(x)$ [13]. Durante la misma década Y. Meyer y sus colaboradores por un lado, y M. Frazier y B. Jawerth por otro, encontraron a partir del estudio de la transformada φ , que las representaciones de Littlewood-Paley tenían sus análogas discretizadas, y que podían dar una visión unificada de muchos de los resultados del análisis armónico.

A partir de allí se comenzó a comprender que las representaciones halladas constituían un buen sustituto del análisis de Fourier para aplicaciones numéricas, y el énfasis se puso en hallar los átomos y las reglas que permitieran representar todos los elementos de un espacio funcional a partir de estos átomos. La teoría antes conocida como “Teoría de Littlewood-Paley” empezó a conocerse como “Teoría de Wavelets”, nombre propuesto por Y. Meyer y J. Morlet, que eligieron el término wavelet para designar esos bloques o átomos.

Y. Meyer y P. Lemarié, independientemente de J. Strömberg, construyeron wavelets ortonormales, y Meyer junto con S. Mallat propusieron la noción de análisis multiresolución, a partir de la cual se desarrolló un método sistemático para comprender las expansiones en wavelets ortogonales. Mallat, especialista en señales, descubre la relación entre filtros, algoritmos piramidales y bases ortonormales de wavelets [28], y a partir de sus resultados I. Daubechies crea bases ortonormales de wavelets para $L^2(\mathbb{R})$ [20].

2.3 Transformadas Wavelet Continua y Discreta

La transformada Wavelet constituye una novedosa y eficiente herramienta para el análisis de señales, que consiste en expresar una señal de energía finita como superposición de traslaciones y dilataciones de una función fija llamada *madre wavelet*.

Antes de abordar las definiciones de la Transformada Wavelet Continua (TWC) y la Transformada Wavelet Discreta (TWD), definiremos la Transformada de Fourier (TF), que es necesaria para definir la TWC. También definiremos la Transformada de Fourier con Ventana (TFV), como un avance sobre las posibilidades que brinda la TF y una forma de interpretar la TWC.

2.3.1 Transformada de Fourier

La TF \hat{f} de una función f de cuadrado integrable viene dada por la fórmula

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \langle f(t), e^{i\omega t} \rangle.$$

A su vez, contamos que la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

la cual nos indica que es posible escribir una función como superposición de funciones armónicas. Si bien a través de la TF es posible obtener información espectral de la señal, la información obtenida sólo nos indica qué frecuencias están presentes a lo largo de toda la señal f , pero no nos brinda la posibilidad de localizar temporalmente las frecuencias, ni su evolución en el tiempo. A su vez, para calcular el espectro $\hat{f}(\omega)$ en un único punto ω es necesario conocer la señal en todo el dominio de tiempo, ya que la TF utiliza información pasada y futura para dicho cálculo. En la figura 2.2 se puede apreciar la representación en el plano *tiempo-frecuencia* de la información espectral que obtenemos de una señal a mediante su TF.

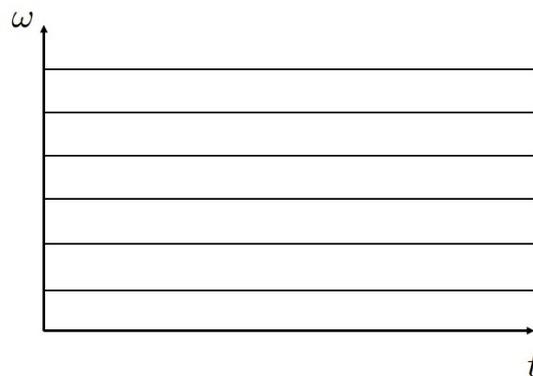


Figura 2.2: Esquema plano tiempo-frecuencia TF.

Un primer avance en el intento de extraer información espectral acerca de f localmente en tiempo y frecuencia, es la TFV, sobre la que profundizaremos en la siguiente sección.

2.3.2 Transformada de Fourier con Ventana

Para definir la TFV, necesitamos definir previamente *ventana en tiempo y frecuencia*.

Definición 1 Una función $h(t)$ no nula tal que

$$th(t) \in L^2(\mathbb{R}), \tag{2.1}$$

se dice una ventana en tiempo. Si $h(t)$ cumple que

$$\omega \widehat{h}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (2.2)$$

donde \widehat{h} es la TF de h , entonces h se dice una ventana en frecuencia.

Observaciones:

1. Si una función h cumple simultáneamente (2.1) y (2.2), decimos que h define una ventana en tiempo y frecuencia.
2. La función B-spline de primer orden

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es una función ventana en tiempo, pero como su TF \widehat{N}_1 no cumple (2.2), N_1 no define una ventana en frecuencia.

La función gaussiana g_α , $\alpha > 0$, definida por

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/4\alpha},$$

verifica (2.1), y a su vez cumple que su TF \widehat{g}_α es también una función gaussiana, por lo que podemos afirmar que esta función define una ventana en tiempo frecuencia.

3. Si h es una ventana en tiempo, la integral dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t-b)dt,$$

indica que estamos mirando la señal f a través de la ventana temporal $h(t-b)$. En la Figura 2.3 se puede apreciar el producto de una función *chirp* y cómo se ve a través de diferentes ventanas gaussianas.

4. La localización de una ventana h en el plano tiempo-frecuencia será mejor cuanto menor sea el área de la ventana, que es igual a $4\Delta_h\Delta_{\widehat{h}}$, donde Δ_h y $\Delta_{\widehat{h}}$ son el ancho y el alto correspondiente a la ventana (pág. 13-15, [3]). Puede probarse, mediante el *principio de incertidumbre* (pág. 56 [6]), que si la función ventana es gaussiana, su área es igual a 2, y cualquier otra función ventana tendrá un área mayor. El mismo principio nos indica que localización óptima en tiempo y localización óptima en frecuencia son mutuamente excluyentes.

Por medio de la definición de ventana, podemos definir la TFV.

Definición 2 Sea $h \in L^2(\mathbb{R})$ una función que define una ventana en tiempo y frecuencia, y $f \in L^2(\mathbb{R})$. La TFV se define como

$$(G_h f)(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} \overline{h(t-b)} dt. \quad (2.3)$$

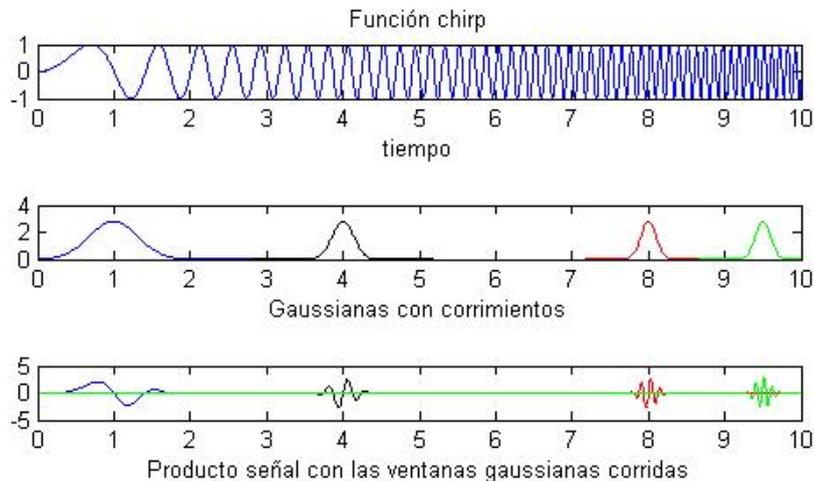


Figura 2.3: Arriba: función chirp. Centro: funciones gaussianas con diferentes valores de α y corrimientos. Abajo: Resultado del producto entre la función chirp y la gaussiana.

Notando

$$H_{b,\xi}(t) = e^{i\xi t} h(t - b),$$

la fórmula (2.3) puede reescribirse como

$$(G_h f)(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{H_{b,\xi}(t)} dt = \langle f(t), H_{b,\xi}(t) \rangle. \quad (2.4)$$

Observaciones:

1. La ventaja de la TFV sobre la TF es que la primera nos brinda la posibilidad analizar una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con una mejor localización en tiempo y frecuencia. Los coeficientes obtenidos mediante la TF nos brindan información espectral de toda la señal, mientras que la TFV nos permite obtener información espectral de la señal en diferentes intervalos temporales, que son regulados por el ancho de la función ventana. En la figura 2.4 se puede apreciar la localización en el plano tiempo-frecuencia de la información obtenida al analizar una señal mediante la TFV.
2. La frecuencia de una señal es inversamente proporcional a la duración de sus ciclos, por lo que para analizar el espectro de una señal es más adecuado un análisis que permita contar con una ventana flexible que se angoste para localizar las frecuencias altas, y se ensanche para localizar las frecuencias bajas. La ventana utilizada en la TFV tiene un ancho fijo, y aunque mejora y amplía las aplicaciones de la TF, resulta insuficiente para localizar temporalmente el espectro de una señal. La TWC brinda la posibilidad de analizar una señal con una ventana flexible.

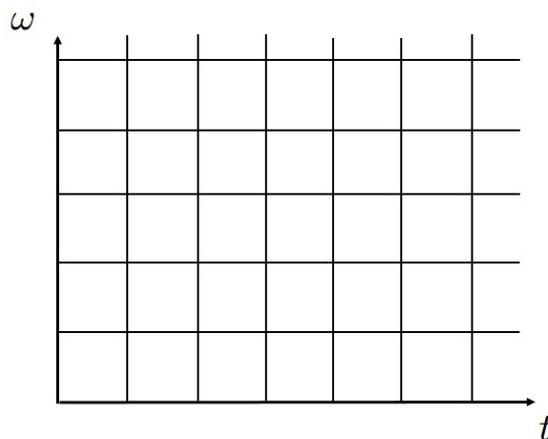


Figura 2.4: Esquema plano tiempo-frecuencia TFV.

2.3.3 Transformada Wavelet Continua

Definición 3 Sea $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, y $\hat{\psi}$ su transformada de Fourier. Si se cumple la condición de admisibilidad

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (2.5)$$

entonces $\psi(x)$ es una wavelet básica o wavelet de análisis, y se define la TWC para una función $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a ψ como:

$$(W_\psi f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (2.6)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Observaciones:

1. La fórmula (2.6) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle, \quad (2.7)$$

donde $\psi_{a,b} = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, a es el parámetro de escalamiento que dilata o comprime la onda ψ , y b es el parámetro de traslación. Cuando se analiza una señal temporal $f(t)$, el parámetro b se interpreta como un corrimiento temporal, y el par (b, a) se puede interpretar como un punto en el plano tiempo-escala. En este caso la representación mediante la TWC suele llamarse representación en tiempo-escala de la señal f .

En la Figura 2.5 se puede apreciar el gráfico de la wavelet “sombbrero mexicano”, $\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{1}{2}t^2}$, y dos de sus escalamientos.

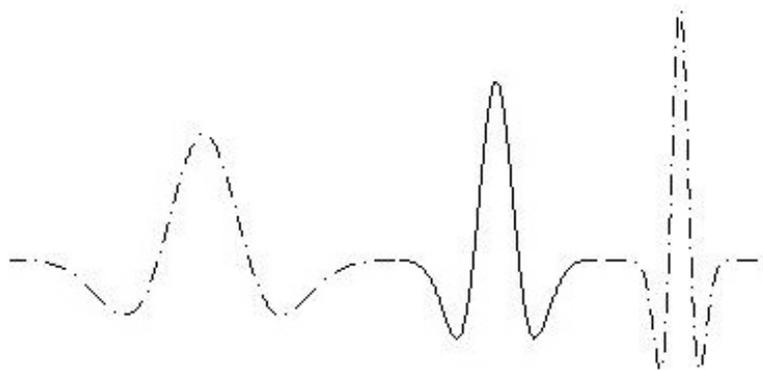


Figura 2.5: De izquierda a derecha, $\psi_{a,b}$ con $a = 2$, $a = 1$ y $a = 0.5$.

2. Si la función ψ cumple además (2.1) y (2.2) entonces decimos que ψ es una ventana en tiempo y frecuencia.

La integral definida en (2.6) puede interpretarse como si “miráramos” la función $f(t)$ a través de la ventana $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. La ventana en este caso tiene la capacidad de enangostarse para captar las frecuencias altas y ensancharse para las frecuencias bajas, por lo que en muchas aplicaciones resulta mejor que la TF y la TFV. En la Figura 2.6 puede apreciarse la distribución en el plano tiempo-frecuencia de la información obtenida mediante el análisis de una señal con la TWC.

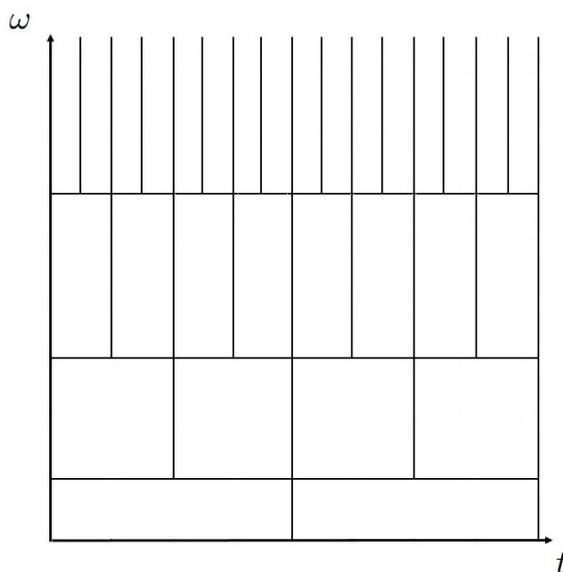


Figura 2.6: Plano tiempo-frecuencia TWC.

3. La TWC cumple las siguientes propiedades (A. Bultheel, D. Huybrechs, “Wavelets

with applications in signal and image processing”, 2011, <http://people.cs.kuleuven.be/adhemar.bultheel/WWW/WAVE/wavelets2011.pdf>:

- Linealidad. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que

$$(W_\psi(\alpha f + \beta g))(a, b) = \alpha (W_\psi f)(a, b) + \beta (W_\psi g)(a, b).$$

- Invarianza en el tiempo. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{R}$, entonces

$$(W_\psi f(t - u))(a, b) = (W_\psi f)(a, b - u).$$

- Dilatación y contracción en la señal. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}$, y $f_v(t) = |v|^{-1/2} f(t/v)$, entonces

$$(W_\psi f_v)(a, b) = (W_\psi f)(va, v^{-1}b).$$

A continuación enunciaremos el teorema de inversión que nos permite asegurar que es posible recuperar la función analizada a partir de su transformada.

Teorema 2 Dadas las funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, y ψ una wavelet de análisis, se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} \frac{dad b}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle, \quad (2.8)$$

donde C_ψ viene dado por (2.5).

Observaciones:

1. La fórmula (2.8) puede reescribirse como

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, \quad (2.9)$$

que puede interpretarse como una forma de escribir a f como una superposición de wavelets, donde los coeficientes de la superposición vienen dados por la TWC de f dada en (2.6). La fórmula anterior también puede interpretarse como una forma de reconstruir f conocida $W_\psi f$.

2.3.4 Transformada Wavelet Discreta

Restringiendo la elección de los coeficientes de escalamiento y traslación podemos definir la Transformada Wavelet Discreta (TWD).

En general, se toma $a = a_0^m$, con $a_0 > 1$, $b = b_0 a_0^m n$, con $b_0 > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$. De esta forma la wavelet discreta viene dada por

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0),$$

y, análogamente como se definió la TWC en 2.6, para una función $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ la TWD queda definida por

$$(W_\psi f)(m, n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(a_0^{-m}t - nb_0)} dt = \langle f, \psi_{m,n} \rangle.$$

La condición de admisibilidad para asegurar la reconstrucción en el caso de la TWD, es que existan constantes A y B , $0 \leq A \leq B < \infty$, tales que cumplan la siguiente desigualdad

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2.$$

Una explicación detallada de lo anterior puede verse en (pág 55, [10]). Cumplida la condición de admisibilidad, decimos que el conjunto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es un *marco*, y es posible construir algoritmos estables para la reconstrucción de f a partir de los coeficientes wavelets $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$. Si, además, se verifica que $A = B$ el marco se denomina *marco ajustado* y vale la igualdad

$$f(t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t).$$

Cabe mencionar que, a pesar de las similitudes entre las fórmulas de reconstrucción para un marco ajustado y para una base ortonormal, un marco puede no ser una base ortonormal. En el siguiente ejemplo (pág. 56, [10]) el conjunto $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{C}^2$, con $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, y $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, es un marco ajustado. En efecto, para cualquier vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |\langle v, e_i \rangle|^2 &= |v_1|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2} [|v_1|^2 + |v_2|^2] \\ &= \frac{3}{2} \|v\|_2^2, \end{aligned}$$

pero no es una base ortonormal, ya que no son linealmente independientes. En efecto, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Si $A = B = 1$ entonces el marco ajustado es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (ver, por ejemplo, pág. 57 [10]).

En casos particulares de ψ , a_0 y b_0 , es posible asegurar que el conjunto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Eligiendo $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, existen wavelets ψ con buena localización en tiempo y frecuencia tales que $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. El ejemplo más sencillo es la base de Haar, con

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2) \\ -1, & t \in [1/2, 1) \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.10)$$

La construcción de otras bases ortonormales para la representación de señales con energía finita se estudia dentro del marco del análisis multirresolución, sobre el cual profundizaremos en la siguiente sección.

2.4 Análisis Multirresolución

El análisis multirresolución (AMR) fue descrito por Mallat y Meyer hacia fines de 1986 [28]. Este análisis otorga un marco natural y consistente para los diferentes métodos empleados en la construcción de familias ortonormales de wavelets para $L^2(\mathbb{R})$.

Resumiendo, un AMR brinda la posibilidad de expresar cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ como un límite de aproximaciones sucesivas, en la que cada aproximación es una versión más detallada de la anterior. A cada aproximación es posible asociarle diferentes escalas o resoluciones, lo que le da el nombre de AMR.

Podemos definir formalmente el AMR de $L^2(\mathbb{R})$ como una sucesión de subespacios $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, que cumplen las siguientes propiedades:

1. $V_j \subset V_{j+1}$,
2. $v(t) \in V_j \iff v(2t) \in V_{j+1}$,
3. $v(t) \in V_0 \iff v(t+1) \in V_0$,
4. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
5. Existe una función $\varphi \in V_0$, llamada *función de escala*, con integral no nula, tal que el conjunto $\{\varphi(t-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz (ver, por ejemplo, [5]) de V_0 .

En adelante nos referiremos a los espacios V_j como niveles de resolución, y diremos que un nivel de resolución V_j es *más grueso* (*más fino*) que otro V_k , cuando $j < k$ ($j > k$).

Observaciones:

1. Las condiciones 2 y 3 de la definición pueden ser escritas de la siguiente manera equivalente (pág. 129-130, [10])
 - $v(t) \in V_j \iff v(2^{-j}t) \in V_0$
 - $v(t) \in V_0 \iff v(t-n) \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z}$.
2. Las condiciones de la definición implican que un AMR es una sucesión de subespacios anidados, cuya unión es densa en $L^2(\mathbb{R})$, disjuntos salvo por la función nula, invariantes por traslaciones enteras, y la dilatación diádica de un elemento en un nivel pertenece al siguiente más fino.
3. Las condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $\{\varphi(t-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ constituya una base ortonormal de V_0 se analizan en [27].

2.4.1 La función de escala y los niveles de resolución V_j

La función φ en la definición de AMR se denomina *función de escala* o *padre wavelet*. Enunciaremos las propiedades de las que goza la función de escala, que se derivan de las condiciones de un AMR.

1. Las propiedades 2 y 5 implican que $\{\varphi_{j,l}(t) = 2^{j/2}(2^j t - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ es una Base de Riesz del nivel de resolución V_j .
2. Descomponer el espacio $L^2(\mathbb{R})$ en subespacios anidados para los cuales contamos con una base, implica que podemos descomponer $f \in L^2(\mathbb{R})$ en proyecciones $f_j \in V_j$ con información cada vez más detallada. Los requerimientos de la condición 4. aseguran, por un lado, que f_j converge en norma a f , y por otro que $\|f_j\| \rightarrow 0$ para $j \rightarrow -\infty$.
3. Por lo anterior y la propiedad 1, como $\varphi(t) \in V_0 \subset V_1$ y $\{\varphi_{1,k} = \sqrt{2}\varphi(2t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de V_1 , existen coeficientes $c_k \in \ell^2$ tales que

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k). \quad (2.11)$$

Esta igualdad se denomina *ecuación de dilatación*, *relación de dos escalas*, o *ecuación de refinamiento* y la sucesión $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se denomina *filtro*.

4. Integrando la ecuación (2.11), y dividiendo por $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$ (no nula por la propiedad 5) tenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = \sqrt{2}.$$

5. Si agregamos la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1,$$

a la ecuación de refinamiento, se puede probar que la función φ está unívocamente determinada [11].

6. No siempre es posible hallar una expresión explícita de φ , pero hay algoritmos que permiten obtener las expresiones gráficas de dichas funciones evaluando los gráficos en los puntos diádicos y utilizando la ecuación de refinamiento [41]. La mayoría de las veces no es necesario conocer la función φ si no que alcanza con obtener el filtro c_k .

La función de escala φ también debe satisfacer que sus traslaciones enteras formen una *partición de la unidad* (ver por ejemplo, [22]), esto es,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t - k) = 1. \quad (2.12)$$

Aplicando la TF a (2.11) obtenemos que la función de escala satisface la ecuación

$$\hat{\varphi}(\omega) = c\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.13)$$

donde c es la función periódica de período 2π , definida por

$$c(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-i\omega k}. \quad (2.14)$$

Aplicando recursivamente a (2.13) la propiedad $\widehat{\varphi}(0) = 1$ obtenemos la fórmula

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} c(2^{-j}\omega), \quad (2.15)$$

que resulta útil para construir φ a partir de c_k . La convergencia de (2.15) y las condiciones para asegurar la regularidad de φ pueden consultarse en [9].

2.4.2 La función Wavelet y los espacios de detalle W_j

Los espacios de detalle W_j se definen como el complemento de V_j en V_{j+1} , entonces se verifica que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.16)$$

donde \oplus simboliza la suma directa. Esta ecuación expresa que W_j contiene el “detalle” para pasar de la resolución j a la $j + 1$.

Los espacios de detalle cumplen que

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_j. \quad (2.17)$$

También heredan la propiedad de dilatación de los niveles de resolución V_j , esto es, que

$$f(t) \in W_j \iff f(2t) \in W_{j+1}. \quad (2.18)$$

Si aplicamos (2.16) a un subespacio V_J , con $J \geq 0$ tenemos que

$$V_{J+1} = V_0 \oplus \sum_{j=0}^J W_j \quad \text{ó} \quad V_{J+1} = \sum_{j=-\infty}^J W_j. \quad (2.19)$$

Llamaremos *wavelet* a una función ψ tal que el conjunto $\{\psi(t-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz del espacio W_0 . Si ψ es una wavelet, teniendo en cuenta (2.17) y (2.18), entonces la familia $\{2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - l)\}_{l, j \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$.

De (2.18) podemos obtener una ecuación analoga a (2.11) que llamamos *relación de dos escalas de wavelets*, dada por

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \varphi(2t - k), \quad (2.20)$$

donde la sucesión $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ se denomina filtro.

Notando V_j^c y W_j^c a los complementos de V_j y W_j en $L^2(\mathbb{R})$, respectivamente, tenemos que

$$V_j^c = \bigoplus_{i=j}^{\infty} W_i \quad \text{y} \quad W_j^c = \bigoplus_{i \neq j} W_i.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, y definiendo P_j al operador proyección sobre V_j paralelo a V_j^c , y Q_j al operador proyección sobre W_j paralelo a W_j^c , podemos reescribir las ecuaciones (2.17) y (2.19) de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j f(t) = \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,l} \psi_{j,l}(t), \quad (2.21)$$

$$P_{J+1}(f) = P_0(f) + \sum_{j=0}^J Q_j(f) \quad \text{ó} \quad P_{J+1}(f) = \sum_{j=-\infty}^J Q_j(f), \quad (2.22)$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

La ecuación (2.22) representa una transformada wavelet inversa discreta, análoga a la expuesta para el caso de la TWC. Si bien formalmente los índices j y l toman todos los valores de \mathbb{Z} , en la práctica esos índices no son infinitos, y la fórmula (2.21) permite obtener una aproximación de f en el nivel de resolución $J + 1$, conociendo la aproximación en un nivel $j < J$.

Es importante destacar que los complementos W_j no son necesariamente únicos. Si el espacio W_j se define como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , se dice que el AMR es *ortogonal*, y los espacios de detalle resultan mutuamente ortogonales, las proyecciones definidas anteriormente son ortogonales y el desarrollo (2.22) es un desarrollo ortogonal.

Además, si el AMR es ortogonal y la base $\{\varphi_{j,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j , es posible hallar una *wavelet ortogonal*, que se define como una función ψ tal que el conjunto $\{\psi_{0,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio de detalle W_0 . Aplicando la propiedad de escalamiento al espacio W_j , tenemos que $\{\psi_{j,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j , y como los espacios W_j son mutuamente ortogonales, tenemos que el conjunto $\{\psi_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ [10].

Contando con un AMR ortogonal y las bases ortonormales $\{\varphi_{j,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_{j,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ para los espacios V_j y W_j , respectivamente, los operadores P_j y Q_j quedan definidos como

$$\begin{aligned} P_j f &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \lambda_{j,l} \varphi_{j,l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,l} \rangle \varphi_{j,l}, \\ Q_j f &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,l} \psi_{j,l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,l} \rangle \psi_{j,l}, \end{aligned}$$

y estos operadores dan la mejor aproximación de la función f en el nivel de resolución V_j y el espacio de detalle W_j . Además, tenemos que dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ podemos obtener un desarrollo ortogonal de la forma

$$f(t) = \sum_{j,l \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,l} \psi_{j,l}(t) = \sum_{j,l \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,l} \rangle \psi_{j,l}(t).$$

Otra manera de construir bases ortonormales de waveletes para $L^2(\mathbb{R})$ es ortonormalizar la base de Riesz de V_0 (condición 5 de la definición de AMR), y el procedimiento puede encontrarse en [10].

2.4.3 Esquema de descomposición y reconstrucción

Desde el punto de vista del AMR, y contando con los espacios V_j y W_j la descomposición de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede pensarse de la siguiente manera:

Suponiendo que la función $f \in V_J$, con $J > 1$, y usando el hecho de que $V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$, sabemos que podemos descomponer de manera única a la función f como

$$f = P_{J-1}(f) + Q_{J-1}(f),$$

donde P_{J-1} y Q_{J-1} son los operadores proyección definidos en el AMR, sobre V_{J-1} y W_{J-1} , respectivamente. Ahora bien, también sabemos que V_{J-1} puede descomponerse

como $V_{J-1} = V_{J-2} \oplus W_{J-2}$, de donde obtendríamos que la función se puede descomponer como

$$f = P_{J-2}(f) + Q_{J-2}(f) + Q_{J-1}(f). \quad (2.23)$$

Aplicando recursivamente lo anterior hasta que la proyección $P_{J-n}(f)$ de f sobre V_{J-n} es lo suficientemente “borrosa”, obtenemos una aproximación a f en los espacios de detalle W_j , con $j = J - n, \dots, J - 1$ y una versión con baja resolución, o más gruesa, en el espacio V_{J-n} . En la Figura 2.7 se puede apreciar el esquema de descomposición detallado anteriormente.

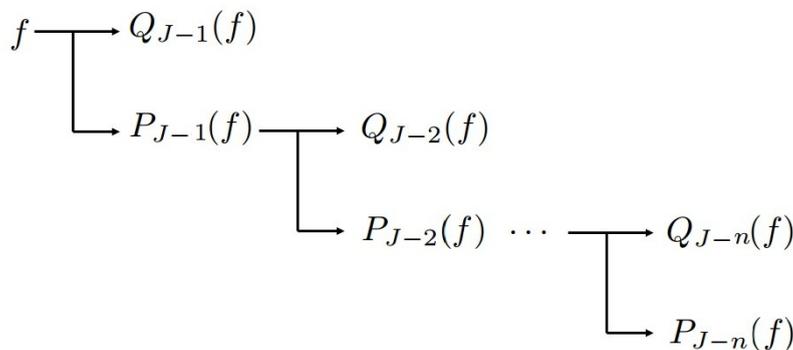


Figura 2.7: Esquema de descomposición de f .

A su vez, contando con las bases $\{\varphi_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{Z}}$ para los espacios V_j y W_j , respectivamente, la descomposición 2.23 puede ser escrita como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{J-n} \varphi_{J-n,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^{J-n} \psi_{J-n,k} + \dots + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^{J-2} \psi_{J-2,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^{J-1} \psi_{J-1,k}.$$

Los coeficientes γ_k^i , con $i = J - n, \dots, J - 1$ nos brindan los detalles de la señal f en diferentes resoluciones de tiempo-frecuencia dados por el factor de escalamiento $2^{-i/2}$, donde las resoluciones van de finas a gruesas a medida que disminuye i .

Una vez obtenida la descomposición, la misma fórmula nos permite reconstruir la señal f , siguiendo el esquema de la Figura 2.8.

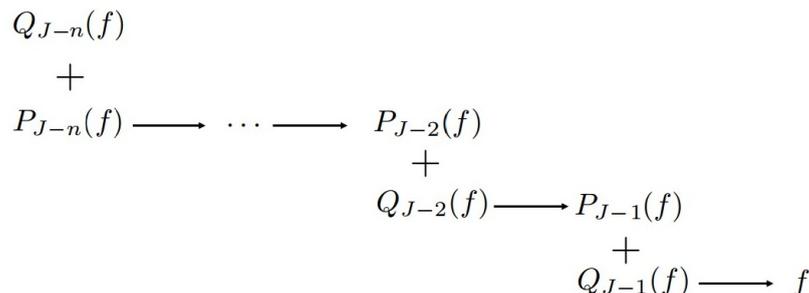


Figura 2.8: Esquema de reconstrucción de f .

2.5 Propiedades deseables en las Wavelets

Para diferentes aplicaciones de la TW, en general se exige a la función ψ que cumpla propiedades que facilitan su uso. Cabe mencionar que no es posible encontrar una función ψ que cumpla simultáneamente todas las propiedades que enunciaremos.

- Ortogonalidad: Contar con una base ortogonal de wavelets nos permite obtener la norma de una función a partir de los coeficientes wavelets $\gamma_{j,l}$ obtenidos en la descomposición. Esta propiedad implica que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{j,l \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,l}^2}. \quad (2.24)$$

Esta propiedad permite definir las potencias relativas de una señal en los diferentes espacios de detalle. Suponiendo que contamos con la descomposición de una función f , definimos potencia total como

$$Pot_T(f) = \sum_{j,l \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,l}^2.$$

y podemos definir la potencia relativa a cada nivel de detalle j como

$$Pot_j(f) = \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,l}^2}{Pot_T(f)}.$$

Estas potencias relativas dan una idea cuantitativa de las diferentes frecuencias presentes en la señal f , y serán utilizadas en el Capítulo 4.

- Soporte compacto: El hecho de que la función de escala φ y la madre wavelet ψ tengan soporte compacto beneficia las aplicaciones, ya que los filtros c y d son filtros de respuesta finita al impulso. Si no se cuentan con una función de escala y una wavelet con soporte compacto, se exige por lo menos que tengan un decrecimiento rápido, de manera que los filtros puedan ser aproximados por unos de respuesta finita.
- Coefficientes racionales: La implementación se ve beneficiada si contamos con coeficientes c_k y d_k racionales, o racionales diádicos, ya que las operaciones son más rápidas.
- Simetría: Si las funciones de escala y la wavelet cuentan con esta propiedad, entonces los filtros c y d tiene fase lineal generalizada, propiedad importante para el procesamiento de señales. En [6], página 160, y en [10], página 254, puede verse que si no contamos con la propiedad de simetría, puede darse una distorsión de fase.
- Suavidad: La suavidad es relevante para las aplicaciones en las que se quiere comprimir información. Por ejemplo, si se quiere comprimir una imagen I , se descartan los coeficientes $\gamma_{j,l}$ pequeños y se obtiene una aproximación

$$\tilde{I} = \sum_{j,l \in S} \gamma_{j,l} \psi_{j,l},$$

donde S es el subconjunto de índices que no se descartan. Cuanto más suave sea la wavelet, menos perceptible será el error $\|I - \tilde{I}\|_2$ cometido al descartar los coeficientes pequeños.

Los *momentos nulos* de una wavelet están asociados a la capacidad de aproximar polinomios y a la suavidad de la wavelet [10]. Decimos que una función ψ tiene P momentos nulos si cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0 \quad , \text{ para } p = 0, \dots, P-1, \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} t^P \psi(t) dt \neq 0.$$

- Expresiones analíticas: Contar con una expresión analítica para la función escala y la wavelet, permiten verificar el cumplimiento de las propiedades. En muchos casos, al no contar con dichas expresiones, la verificación de las propiedades debe hacerse mediante los filtros.

2.6 Ejemplos

1. Wavelet de Haar

Como anteriormente dijimos, el primer ejemplo de una función ψ que constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ es la función de Haar definida en (2.10).

La función de escala φ tal que $\{\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$ es una base (ortonormal) de V_j , es la función $\varphi = \chi_{[0,1]}$, donde χ es la función característica.

La ecuación de refinamiento para la función de escala viene dada por

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1),$$

y la ecuación de refinamiento para la wavelet está dada por

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1).$$

La falta de regularidad de las funciones de este sistema hace que en la práctica no sea muy utilizado. Debemos notar que, como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0,$$

la wavelet solo tiene un momento nulo.

2. Wavelet de Daubechies

Las wavelets de Daubechies son las wavelets ortonormales más utilizadas. La construcción de estas wavelets no comienza por los espacios V_j o con la función de escala, sino que se basa en una factorización de (2.14). Si bien en general no se cuenta con una expresión analítica para estas funciones, es posible realizar sus gráficos con mucha precisión mediante el algoritmo de cascada, los cuales pueden consultarse en [10], capítulo 6.

En la construcción de estas wavelets es posible controlar su regularidad, y para cada $N \in \mathbb{N}$ se construyen la función escala $N\varphi$ y la wavelet $N\psi$, con soporte en el intervalo $[0, 2N - 1]$, donde N es el número de momentos nulos.

Estas funciones no son simétricas ni antisimétricas, y en [10], capítulo 8, Daubechies prueba que no es posible obtener simetría en las bases ortonormales de wavelets con soporte compacto.

Los gráficos de la función de escala y la wavelet de Daubechies, para $N = 2, 4, 6$, pueden verse en la Figura 2.9.

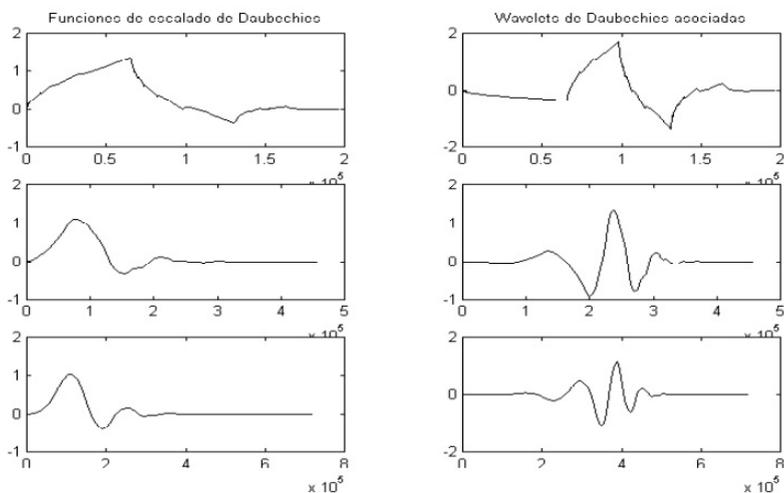


Figura 2.9: Funciones de escala (izquierda) y wavelets (derecha) de Daubechies, $N = 2, 4, 6$.

3. Wavelet de Shannon

La función de escala viene dada por

$$\varphi(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t},$$

y su gráfico puede verse en la Figura 2.10.

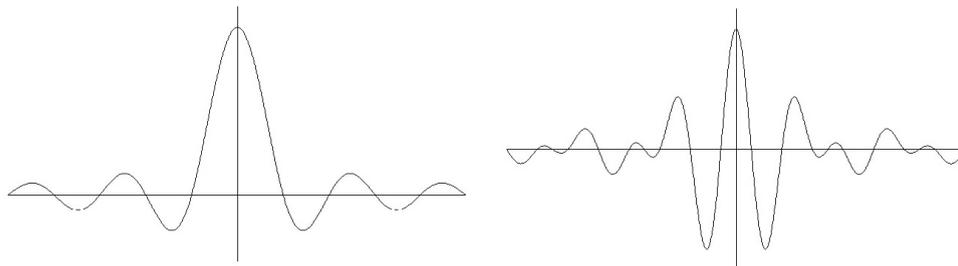


Figura 2.10: Función de escala (izquierda) y wavelet (derecha) de Shannon.

De la ecuación 2.14, tenemos que

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-i\frac{\omega k}{2}} \hat{\varphi}(\omega/2),$$

de donde podemos determinar los coeficientes c_k :

$$c_k = \begin{cases} 1/2 & , \quad k = 0 \\ \frac{1}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) & , \quad k \neq 0. \end{cases}$$

La wavelet de Shannon está dada por la ecuación

$$\psi(t) = \frac{\operatorname{sen}(2k\pi t) - \operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t},$$

y su gráfico puede verse en la Figura 2.10.

Capítulo 3

Electroencefalografía

*EEG signals are the signatures of neural activities.
Saeid Sanei y Jonathon A. Chambers.*

En el presente capítulo abordaremos una de las principales herramientas utilizadas en medicina para obtener información sobre el funcionamiento del cerebro, la *electroencefalografía*. Luego de una breve reseña histórica, expondremos cómo se obtienen los registros electroencefalográficos, las principales frecuencias que se encuentran en las señales eléctricas cerebrales humanas, y algunas de las herramientas utilizadas para su análisis.

Los conceptos y definiciones desarrollados en este capítulo serán utilizados en el Capítulo 4, en el que se analizarán dos bases de datos electroencefalográficos. Una de ellas corresponde a sujetos alcohólicos y sujetos control, y la utilizaremos para clasificar a los sujetos según correspondan a un grupo u otro, en tanto que la otra base de datos es de sujetos sanos sometidos a estímulos audiovisuales y la usaremos con el fin de clasificar emociones.

3.1 Introducción

El cerebro humano está formado por aproximadamente 10^{11} neuronas, desarrolladas entre las semanas 17 a 23 de gestación, densamente interconectadas por uniones a través de las cuales viajan corrientes eléctricas. Estas conexiones, denominadas conexiones sinápticas, crecen con el tiempo mientras que el número de neuronas tiende a decrecer. Los adultos cuentan con alrededor de $5 \cdot 10^{14}$ conexiones. Los procesos mentales, tanto conscientes como inconscientes, se encuentran gobernados por estos impulsos eléctricos, y un entendimiento profundo de estas señales nos permitiría acercarnos un poco más a comprender cómo funciona el cerebro.

El término electroencefalografía se utiliza para definir la medición y el registro de las señales eléctricas producidas en el cerebro, y a las señales registradas se las denomina electroencefalograma (EEG). Estas mediciones pueden ser tomadas en forma invasiva, cuando se insertan electrodos intracranealmente, aunque por lo general son tomadas de forma no invasiva mediante la colocación de electrodos sobre el cuero cabelludo.

Desde el inicio de su utilización ha constituido una herramienta fundamental para la obtención de información acerca del funcionamiento del cerebro, y también para el

diagnóstico de neuropatías, como, por ejemplo, la epilepsia [1] [23].

En los últimos años el análisis de EEG mediante diferentes herramientas como el procesamiento de señales [12] [26], análisis espectral de frecuencias [21] [26] [35] [38] [44] [46], o el cálculo de la entropía [1] [23], han demostrado ser de gran utilidad para diagnosticar enfermedades neurodegenerativas, como la enfermedad de Alzheimer (EA), y rastrear daños ocasionados por el consumo excesivo de sustancias psicoactivas, como el alcohol.

Dado que los procedimientos quirúrgicos sobre el cerebro conllevan grandes riesgos para quienes se someten a ellos, poder obtener información relevante sobre su funcionamiento de manera no invasiva, es una de las principales motivaciones para continuar desarrollando métodos más fieles de obtención de los registros EEG y nuevas herramientas de análisis para poder comprenderlos, descifrarlos y clasificarlos.

En la siguiente sección daremos una breve reseña histórica, desde la génesis de la electroencefalografía hasta la actualidad, resaltando sus principales desarrolladores e investigadores, y sus aportes.

3.2 Reseña Histórica

Los orígenes de la electroencefalografía pueden rastrearse desde año 1770, en el que Luigi Galvani, investigador de cuyo apellido deriva el nombre galvanómetro¹, publicó sus investigaciones sobre la “electricidad animal”. A pesar de que muchos de sus descubrimientos fueron corroborados por su sobrino Luigi Giovanni Aldini en 1794, por Frederick Von Humbolt en 1797 y por Carlo Matteucci en 1830, la disputa que mantuvo con Alessandro Giuseppe A. A. Volta² hizo que por más de 50 años sus observaciones no tuvieran mayor aceptación en la comunidad científica. Volta sostenía que la electricidad animal no era otra que la electricidad que se producía entre metales, y atribuía los resultados de Galvani a errores en los experimentos. Si bien tenía razón en el sentido de que la electricidad no era diferente entre animales y metales, su error fue no considerar que efectivamente se producían fenómenos eléctricos intrínsecos en los animales.

No obstante, los fenómenos de la electricidad intrínseca en los nervios y músculos despertaron el interés de Emil du Bois-Reymond³, quien junto a Carlo Matteucci registraron señales eléctricas de un nervio muscular con un galvanómetro. En los años 1848 y 1849, E. du Bois-Reymond publicó dos volúmenes titulados “Investigaciones sobre la electricidad animal”. En el segundo se podía encontrar una descripción completa del registro de los potenciales eléctricos medidos en músculos sobre la piel, a partir de la cual se establecieron las bases para la electromiografía clínica, que es una técnica para la evaluación y registro de la actividad eléctrica producida por los músculos esqueléticos.

Edouard Hitzig y Gustav Theodore Fritsch, experimentando con perros demostraron que, a través de estimulación eléctrica en ciertas regiones del cerebro, se podían obtener respuestas motoras. Sus resultados y las investigaciones de Reymond, despertaron gran interés en el fisiólogo inglés Richard Caton, quien postulando la hipótesis de que

¹Instrumento que mide la intensidad y sentido de una señal eléctrica mediante una aguja magnética.

²La unidad de fuerza electromotriz, *voltio*, lleva ese nombre en su honor.

³Médico y fisiólogo alemán, hermano del matemático Paul du Bois-Reymond(2).

estímulos periféricos podían evocar respuestas eléctricas cerebrales focales, consiguió financiación de la Asociación Británica de Medicina para confirmarla en 1874. En su publicación en la “British Medical Journal”, en 1875, comparó su trabajo con el realizado por el neurocirujano inglés David Ferrier, quien también había demostrado respuestas motoras tras estimulación eléctrica. Caton fue el primero en observar actividad eléctrica cerebral espontánea y continua, refiriéndose a “corrientes eléctricas en la sustancia gris”.

El fisiólogo ruso Danileski, independientemente de Caton, también realizó estudios galvanométricos en cerebros de perros inyectados con curare⁴ y publicó sus resultados en el año 1891.

Adolf Beck y su mentor Cybulsky, en la Universidad de Cracovia en Polonia 15 años después de los descubrimientos de Caton, aunque sin conocerlos e inspirados por los trabajos de Hitzig y Fritsch, propusieron nuevos métodos para la localización funcional del cerebro. En su tesis doctoral de 1891, Beck se preguntaba si existían corrientes eléctricas en el cerebro y en la médula espinal, y si estas corrientes sufrían modificaciones al realizar diferentes actividades. Si bien los instrumentos utilizados en los experimentos apenas permitían captar actividad electroencefalográfica débil mediante electrodos colocados sobre el cerebro, Beck describe en su tesis la observación de potenciales visuales, y la supresión de la actividad continua de fondo mediante la aplicación de ciertos estímulos sensoriales.

Los primeros en establecer que la actividad eléctrica puede ser medida a través del cráneo intacto fueron los rusos Pavel Kaufman (1912) y Pradvich Neminski (1913), quienes en un comienzo registraron la actividad cerebral de perros a los cuales les habían practicado craneotomías. También fueron los primeros en registrar fotográficamente la actividad electroencefalográfica. Entre otros aportes de Kaufman, podemos citar el que estableció dos períodos bioeléctricos durante la anestesia: el período de excitación (aumento de potenciales) y el período de depresión (disminución de potenciales). Neminski, por su parte, utilizando un galvanómetro de cuerda logró caracterizar los diferentes ritmos captados en la actividad eléctrica en el cerebro de perros, clasificándolos de acuerdo a su frecuencia (10 a 15 Hz, y 20 a 32 Hz), y bautizó a dichos ritmos como “electrocerebrograma”.

A principios del siglo XX, y luego de una serie de estudios, Hans Berger efectuó en 1924 el primer registro de las oscilaciones rítmicas del cerebro de un joven, a través de un orificio de una trepanación descompresiva utilizando un galvanómetro de cuerda. Berger era jefe de la unidad de Psiquiatría de la Universidad de Jena (Alemania), y gracias a sus estudios se lo conoce como el padre de la electroencefalografía. Él estaba convencido de que la relación mente-cuerpo no era tan distante, y que existían procesos que unían de manera muy cercana el uno con el otro. El pobre equipamiento con el que contaba y su limitado conocimiento en electromecánica, hizo que sus primeros experimentos, entre 1902 y 1910, fracasaran. Sin embargo, pudo observar que le era posible registrar mejor la actividad eléctrica cerebral en sujetos que habían sufrido lesiones en el cráneo, como el joven de quien obtuviera registros en 1924. Posteriormente, utilizando diferentes tipos de electrodos colocados en o sobre el cuero cabelludo, fue capaz

⁴anestésico obtenido a partir de extractos de plantas de la familia de Menispermaceae y Loganiaceae, y que actúa bloqueando el impulso nervioso a nivel de la placa motora produciendo parálisis.

de obtener registros de la actividad cerebral a través del cráneo intacto. Logró obtener más de 73 registros utilizando a su hijo como sujeto experimental, y éstos fueron los primeros registros publicados de electroencefalogramas.

Berger registró la actividad eléctrica cerebral, mediante el uso de electrodos de aguja y un galvanómetro de cuerda con un espejo en el cual se reflejaba la luz a la que era expuesta una hoja de papel fotográfico de bromuro de plata, que se movía a una velocidad de 3 centímetros por segundo (la misma velocidad a la que se toman los registros hoy en día). Estos registros fueron bautizados por él como electroencefalogramas (reemplazando el término “electrocerebrograma”). Después de acumular registros y resultados por más de 5 años, sometió sus descubrimientos a publicación en el año 1929, en un artículo en el cual hablaba de la actividad eléctrica cerebral espontánea en humanos, citaba los trabajos de Caton, Beck y Cybulsky, y afirmaba “he descubierto el Electroencefalograma del hombre y lo revelo aquí por primera vez”.

Hasta el año 1938 en que se retiró, se publicaron en “Archiv Für Psychiatric und Nerven Krankheiten”, una serie de trabajos en los cuales se exponen por primera vez las descripciones de los ritmos cerebrales humanos y sus modificaciones, en diferentes condiciones fisiológicas y patológicas. En un segundo trabajo publicado en el año 1930, después de haber registrado 1133 electroencefalogramas, designó con letras griegas los diferentes ritmos que había observado. Los de mayor voltaje y menor frecuencia los designó como *ondas alfa*, y los de menor voltaje y mayor frecuencia fueron designados *ondas beta*. Otro trabajo publicado en el año 1931 se refirió a la frecuencia con la que se observa actividad eléctrica anormal en pacientes con epilepsia.

Los descubrimientos publicados por Berger fueron vistos con escepticismo en el ambiente médico, hasta que el fisiólogo inglés Adrian y su colega Matthews en la Universidad de Cambridge confirmaron sus resultados utilizando amplificadores termoiónicos, observando las ondas alfa descubiertas por Berger en el lóbulo occipital y publicando sus resultados en la revista “Brain” en 1934.

Herbert Jasper, quien se encontraba realizando una pasantía en la Universidad de la Sorbona, se enteró de los estudios de Berger y, en cuanto regresó a Rhode Island, trabajó junto a Leonard Carmichel en la corroboración de todos sus resultados, publicando un artículo en la revista “Science” dos meses después del artículo publicado por Adrian.

El fisiólogo y electroencefalografista Alexander Forbes trabajó en la amplificación mediante tubos de vacío, y los amplificadores comenzaron a utilizarse a escala global en los electroencefalógrafos.

Los doctores Frederick Gibbs, Halowell Davis y William Gordon, en el laboratorio de electroencefalografía del “Boston City Hospital”, demostraron en 1935 la presencia de actividad punta-onda interictal⁵ durante crisis de ausencia. En 1936, Lennox y Gibbs registraron descargas focales en pacientes con epilepsia.

Los primeros en estudiar matemáticamente los registros EEG fueron A. L. Loomis, E. N. Harvey y G. A. Hobart, y lo utilizaron para estudiar los patrones y etapas del sueño.

La multiplicación de las publicaciones sobre estudios en electroencefalografía hizo que en el año 1941 el Index de Literatura Científica colocara dichas publicaciones en una lista aparte.

⁵Relativo o perteneciente al período de tiempo entre los ataques de un trastorno.

En el año 1947 se fundó la “American EEG Society” y también se llevó a cabo el primer Congreso Internacional de EEG en Londres.

En 1960 los transistores que habían sido inventados en 1947, reemplazaron los amplificadores con tubos de vacío en los electroencefalógrafos logrando un mejor registro gráfico. Los mismos transistores hicieron posible el manejo computarizado de todos los aspectos de la electroencefalografía.

Como hemos visto, la historia de la electroencefalografía ha sido un proceso continuo que comenzó a principios de 1800, y desde entonces a contribuido constantemente con estudio clínicos, experimentales y computacionales para reconocer, diagnosticar, tratar y seguir una gran cantidad de anomalías fisiológicas y neurológicas, tanto en el cerebro como en todo el sistema nervioso central.

3.3 señales Electroencefalográficas (EEG)

Las señales EEG son registros discretos de los impulsos eléctricos que viajan entre las conexiones sinápticas de las neuronas (Figura 3.1) y son tomadas, en general, a partir de la colocación de electrodos adheridos al cuero cabelludo.

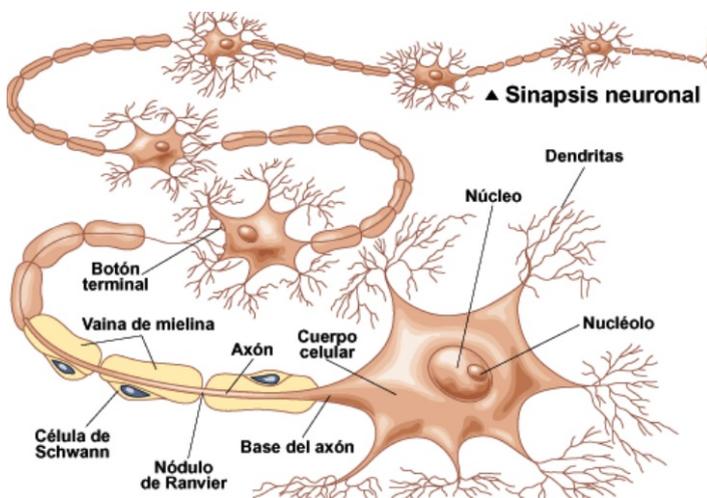


Figura 3.1: Neurona y conexiones sinápticas.

Los impulsos eléctricos provienen de la excitación sináptica de las dendritas de varias células piramidales en la corteza cerebral. Cuando se activan las neuronas, una corriente sináptica se produce entre las dendritas, genera un campo magnético medible mediante un electromiograma (EMG) y una tensión eléctrica sobre el cuero cabelludo, que es medible mediante los equipos de EEG. Cabe mencionar que el cráneo atenúa la tensión, por lo cual los aparatos de EEG son capaces de captar sólo la actividad producida por un gran número de células interconectadas.

Los equipos de EEG tienen la capacidad de grabar la actividad cerebral mediante varios electrodos (o canales) simultáneamente, a los cuales se los denomina de acuerdo a la zona del cuero cabelludo a la que se conectan. Las zonas en las que se divide el cuero cabelludo son la fronto-polar, frontal, central, parietal, temporal y occipital,

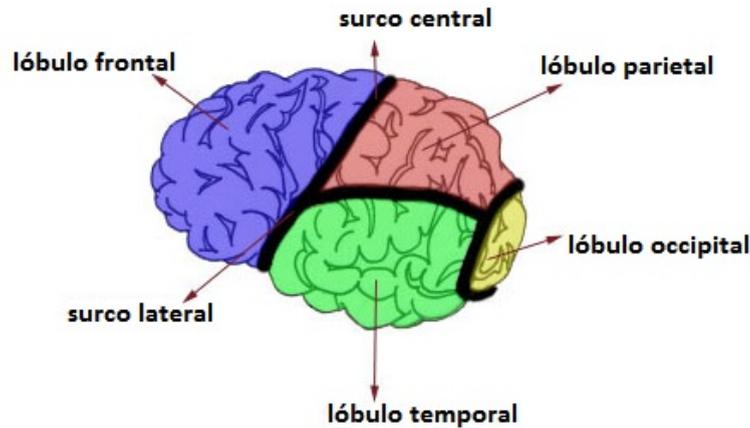
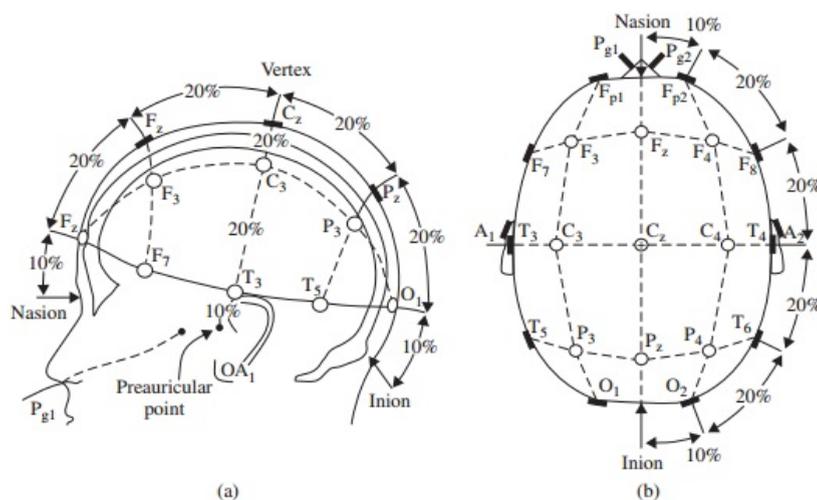


Figura 3.2: Lóbulos cerebrales.

como se ve en la Figura 3.2. Los canales que se posicionan sobre una determinada zona se denominan, en general, con la primera letra mayúscula correspondiente al nombre de la zona conectada y un número par para el lado izquierdo, impar para el derecho, o una z para el centro. En la Figura 3.3 se puede apreciar las medidas internacionales de posicionamiento de electrodos en tres dimensiones, mientras que en la Figura 3.4 se encuentra el esquema bidimensional de posicionamiento para 75 electrodos. Vale la pena mencionar que existen otros sistemas de posicionamiento de electrodos, por ejemplo para mejorar la medición durante un ataque epiléptico ([34]). Otros sistemas de posicionamientos de los electrodos pueden verse en [2] y [14].



Ondas	γ	β	α	θ	δ
Frecuencia (Hz)	30-80	12-30	8-12	4-8	0.5-4

Tabla 3.1: Tabla de frecuencias asociadas a los ritmos característicos.

la actividad eléctrica cerebral, también se graban los potenciales eléctricos de la piel o músculos superficiales, y a estas señales se las denomina “artefactos”.

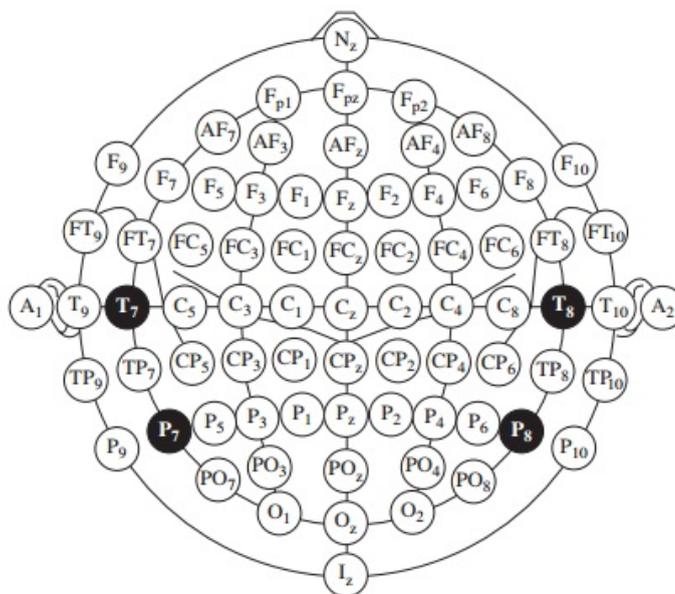


Figura 3.4: Vista bidimensional de 75 electrodos colocados siguiendo el sistema 10-20.

En las señales EEG es posible distinguir 5 ritmos característicos clásicos con diferentes frecuencias, que se denominan ritmos *gamma*, *beta*, *alfa*, *theta*, y *delta*. En la Tabla 3.1 se pueden ver las frecuencias a las que se asocia cada ritmo característico, y en la Figura 3.5 se puede apreciar su aspecto. Cabe mencionar que diferentes investigadores han nombrado nuevos ritmos asociados a diferentes frecuencias, regiones y/o actividades, y éstos pueden consultarse en [39], pág. 13.

A continuación describiremos brevemente cada ritmo característico clásico.

- Ritmos γ : Los ritmos gamma son los de mayor frecuencia, también suelen ser nombrados como ondas beta rápidas, y por lo general es posible localizarlas en la zona fronto-central. Estas ondas se han asociado a movimientos motores. La amplitud de estas ondas suele ser pequeña, y no ocurren con frecuencia; su estudio y localización a menudo se utilizan para confirmar ciertas neuropatías o enfermedades mentales.
- Ritmos β : Los ritmos beta fueron los segundos ritmos caracterizados en los estudios de EEG, y tienen una amplitud de alrededor de $30 \mu V$. Están asociados al pensamiento activo, la atención, la concentración, la conciencia del mundo circundante, y la resolución de problemas concretos. Es posible detectarlos en

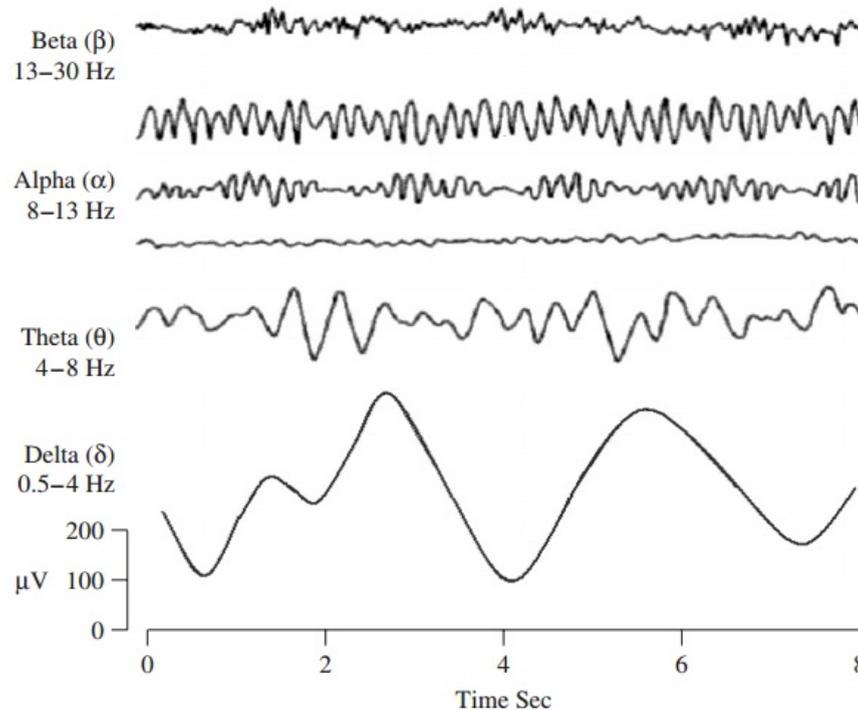


Figura 3.5: Ritmos característicos clásicos.

adultos sanos, en las zonas frontal y central, por lo que también se las relaciona con las funciones motoras.

- **Ritmos α** : Estas ondas fueron las primeras en ser caracterizadas, de ahí que se las nombre con la primera letra del alfabeto griego, y constituyen el ritmo más prominente. Suelen aparecer con mayor amplitud, alrededor de $50 \mu V$, en la zona occipital del cerebro. Están asociadas a un estado de conciencia relajada pero no necesariamente a procesos de atención o concentración. La mayoría de los sujetos muestran actividad alfa con los ojos cerrados, por lo que se ha concluido que es un patrón de espera producido por las regiones del cerebro asociadas a la vista. Las ondas se reducen en cuanto el sujeto abre los ojos, escucha sonidos no familiares, o experimenta estados de ansiedad, concentración o atención.
- **Ritmos θ** : Las ondas theta reciben su nombre por su asociación a su origen en el tálamo. Estas ondas suelen aparecer en la transición entre la conciencia y la somnolencia; se las relaciona con el acceso al inconsciente, la inspiración creativa y la meditación profunda. Se ha encontrado evidencia de que estas ondas son sumamente importantes en la infancia por lo que los cambios en estos ritmos son estudiados en contextos madurativos y emocionales. En adultos, el predominio de estas ondas está asociado con diferentes problemas patológicos. A su vez, también se ha encontrado evidencia de relación entre ondas theta y la memoria de trabajo, y también con ondas gamma de alta frecuencias.
- **Ritmos δ** : Los ritmos delta son los de menor frecuencia, y están asociados con el

sueño profundo, aunque también pueden apreciarse en sujetos despiertos. Estos ritmos pueden ser confundidos con artefactos producidos por potenciales eléctricos provenientes de los músculos del cuello y la mandíbula, ya que éstos están cerca de la superficie de la piel y producen campos magnéticos fuertes, mientras que los ritmos delta de interés son producidos en zonas profundas del interior del cerebro, y suelen ir perdiendo potencia al atravesar el cráneo. Sin embargo, mediante diferentes métodos de análisis, es posible determinar cuándo los ritmos delta detectados provienen del movimiento excesivo o corresponden a potenciales cerebrales.

En las investigaciones de las señales eléctricas cerebrales se han distinguido, a grandes rasgos, tres tipos de actividad asociados a la presentación de estímulos sensoriales [16].

El primer tipo se conoce como *actividad espontánea* y se refiere a la actividad eléctrica que no está asociado a la presentación de estímulos. Desde el punto de vista experimental también se la conoce como actividad de fondo o ruido, ya que es la actividad eléctrica de todos los procesos llevados a cabo al interior del cerebro, pero que están completamente no correlacionados con el estímulo presentado.

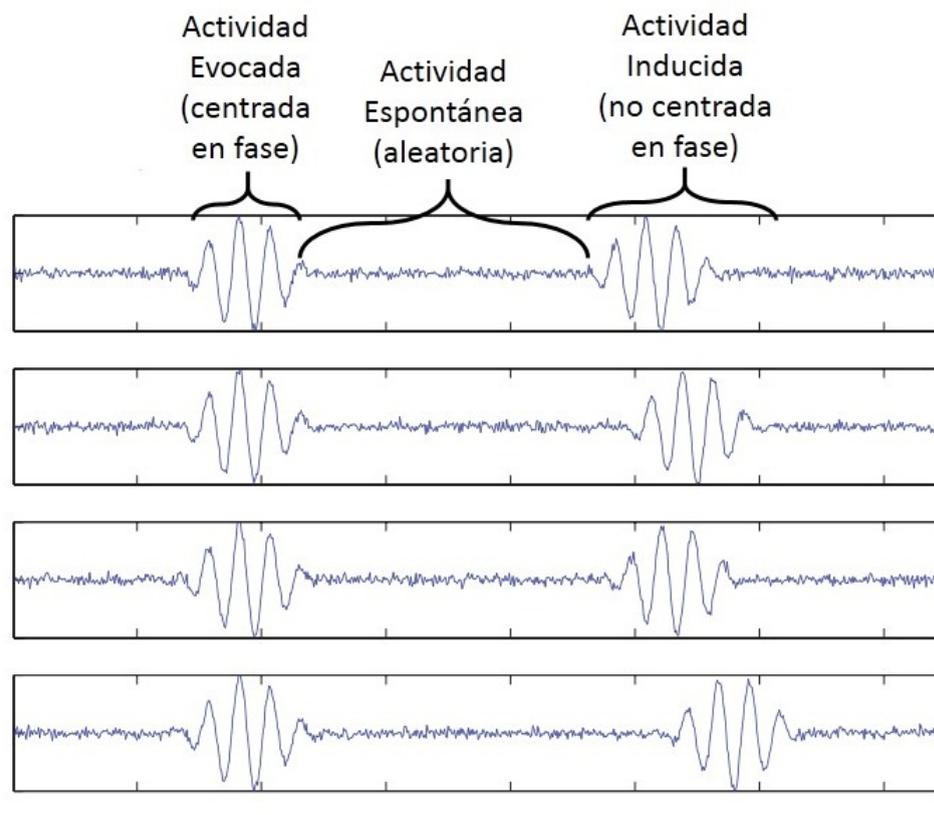


Figura 3.6: Actividad evocada, espontánea e inducida.

También se puede distinguir la *actividad inducida*. Este tipo de actividad, si bien se encuentra correlacionada con la presentación de estímulos o condiciones experimentales,

no está centrada en fase. Su aparición en las mediciones no siempre se presenta al mismo tiempo, por lo que tampoco se considera como portadora de información relevante desde el punto de vista experimental.

El último tipo de actividad se conoce como *actividad evocada*, y es aquella que muestra correlación con la presentación del estímulo y está centrada en fase. Este tipo de actividad es la que arroja la información más importante para analizar desde el punto de vista experimental. Su procesamiento resulta en las señales llamadas Potenciales Evocados (ERP, **E**vent **R**elated **P**otentials) y sobre ellas profundizaremos en la siguiente sección. En la Figura 3.6 se pueden apreciar los tres tipos de actividad.

3.4 Potenciales Evocados (ERP)

En la búsqueda de asociar a qué actividades específicas se aboca cada región del cerebro, o lograr establecer qué ritmos característicos responden a funciones mentales determinadas, se diseñan experimentos en los cuales se somete a los sujetos a estímulos sensoriales, y se toman los registros EEG. En estos registros no sólo encontramos evidencia de la respuesta eléctrica del cerebro ante el estímulo, sino que además podemos encontrar información sobre todos los procesos cerebrales que funcionan en paralelo pero no responden a él. Es decir, en la señal EEG grabada se encuentra la actividad espontánea, la inducida y la evocada, siendo sólo la evocada la portadora de información relevante para analizar cómo responde al cerebro ante ciertos estímulos. Para

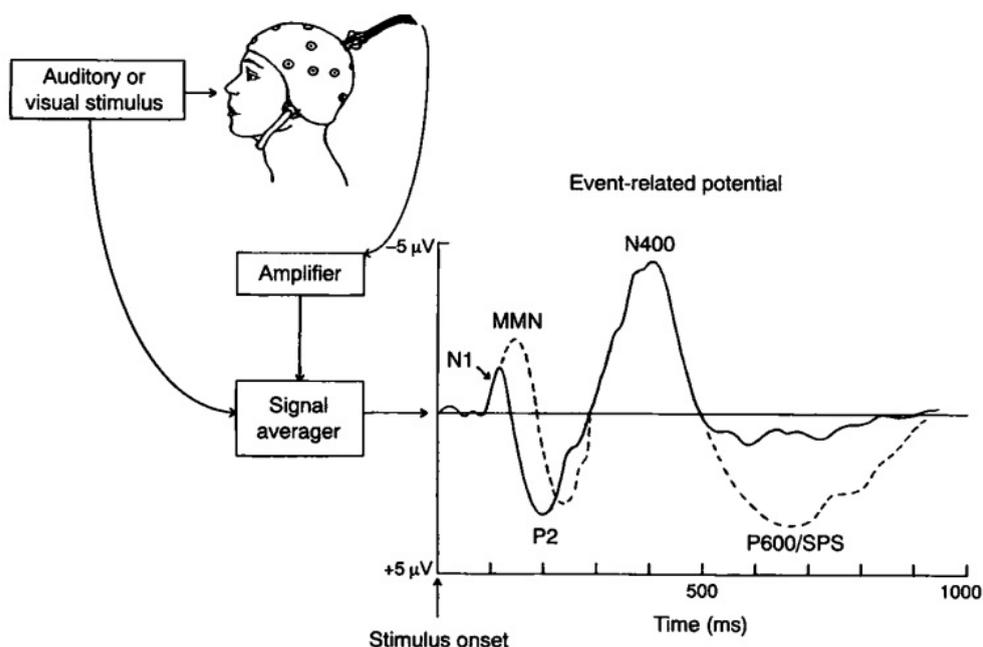


Figura 3.7: Señal ERP y algunos picos *P* y *N*.

lograr “limpiar” la señal de la actividad que no responde específicamente a la presentación del estímulo, se obtienen las señales ERP, que consisten en promediar las señales EEG obtenidas mediante presentaciones sucesivas de un mismo estímulo a un

determinado sujeto. Tanto la actividad espontánea como la inducida no se encuentran correlacionadas con la presentación del estímulo, y no están centradas en fase ni en un determinado intervalo temporal, por lo cual se pueden considerar aleatorias desde el punto de vista experimental. De esta manera, promediar una cantidad considerable de registros EEG obtenidos ante la presentación de un mismo estímulo, tiende a disminuir la actividad aleatoria y resaltar sólo la actividad evocada, la cual está centrada en fase y en un determinado período temporal.

Diferentes experimentos han mostrado sobrada evidencia de que los ritmos característicos presentes en las señales EEG también pueden encontrarse en las señales ERP, y el análisis frecuencial de los ERP ha probado ser de gran utilidad para lograr caracterizar las respuestas cerebrales a diferentes estímulos y procesos.

Además de estudiar las componentes frecuenciales de los ERP, también es de interés analizar los picos que estas señales presentan y, por lo general, a estos picos se los identifica con una letra *P* o *N*, según sea un pico de máximo o mínimo, respectivamente (ver Figura 3.7). Diferentes investigaciones han demostrado que la amplitud y momento en que estos picos se producen están fuertemente relacionados con la naturaleza del estímulo presentado (visual, somatosensorial, auditivo, etc.). También se ha encontrado evidencia de que diferentes patologías pueden modificar la amplitud y momento de presentación de estos picos [42].

Capítulo 4

Aplicaciones

Este capítulo lo dedicaremos a exponer los resultados obtenidos al procesar registros EEG, utilizando lo desarrollado en el Capítulo 2 para el análisis de las señales y la obtención de características cuantitativas de las mismas. A su vez, mostraremos cómo el análisis propuesto permite una clasificación automática de la actividad cerebral, utilizando lo desarrollado en el Capítulo 1.

4.1 Alcohólicos vs. Control

La base de datos que utilizamos para desarrollar este ejemplo se encuentra disponible en la red¹, y su génesis fue motivada por un estudio para determinar la correlación entre los registros EEG y la predisposición genética al alcoholismo.

La base de datos está compuesta por señales EEG correspondientes a dos grupos de sujetos, el grupo control (GC) y el grupo de alcohólicos (GA). El GC está conformado por 45 sujetos, en tanto que el GA está compuesto por 77 sujetos. Cada sujeto fue sometido al mismo estímulo visual 120 veces, aunque algunos registros no se encuentran en la base de datos. Los estímulos fueron imágenes obtenidas del conjunto de imágenes de Snodgrass and Vanderwart ([40]). Se registró la actividad eléctrica cerebral un segundo después de presentado el estímulo, con una frecuencia de muestreo a 256Hz, utilizando 64 electrodos o canales posicionados en forma estándar (Cap. 3, Sec. 3.3). Una descripción más detallada de la recolección de datos puede verse en [45]. En la Tabla 4.1 se puede observar un resumen de los atributos de la base de datos.

	Grupo Control	Grupo Alcohólico
Cantidad de sujetos	45	77
Ensayos por sujeto	≤ 120	
Cantidad electrodos	64 en posición estándar	
Frecuencia de muestreo	256 Hz	
Duración registro	1 segundo	

Tabla 4.1: Características de la base de datos.

¹<http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/EEG+Database>

Con el fin de obtener variables cuantitativas que permitan recoger la información representativa presente en cada canal de cada sujeto, procesamos los datos de la siguiente manera.

1. Para cada sujeto, promediamos las señales obtenidas en cada ensayo, por cada uno de los canales. De esta manera obtuvimos 64 señales ERP (Cap. 3, Sec. 3.4) para cada sujeto.
2. Calculamos la componente continua (promedio de la señal, ME), y el desvío estándar (DS) de cada señal ERP en cada canal, para cada sujeto.
3. Descompusimos las señales ERP obtenidas, luego de sustraerles la componente continua correspondiente, utilizando la TW discreta, usando como wavelet madre (Cap. 2, Sec. 2.3) la wavelet de Daubechies de orden 2. La elección de la madre wavelet la hicimos teniendo en cuenta que la wavelet de Daubechies es capaz de captar correctamente los cambios en el EEG (ver, por ejemplo, [7][16][26]). Considerando la frecuencia de muestreo de la señal, utilizamos 8 niveles de descomposición, obteniendo así 8 señales de detalle (D_1, \dots, D_8) y una aproximación final suave (A_8). Cada nivel de detalle y la aproximación suave está asociada a una banda frecuencial, como se puede apreciar en la Tabla 4.2.

Nivel	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	A_8
Frecuencia (Hz)	64-128	32-64	16-32	8-16	4-8	2-4	1-2	0.5-1	0-0.5

Tabla 4.2: Bandas frecuenciales asociadas a los distintos niveles de descomposición.

4. Calculamos las Potencias Relativas (Cap. 2, Sec. 2.5) de los niveles de detalle y la aproximación suave, obteniendo así 9 variables cuantitativas (P_1, \dots, P_9) para cada uno de los ERP de cada canal, para cada sujeto. Estas potencias relativas están asociadas a la energía de la señal en cada banda frecuencial detallada en la Tabla 4.2.

Cabe mencionar que la descomposición utilizada no permite una correspondencia exacta entre las bandas frecuenciales asociadas a las potencias relativas y las bandas frecuenciales características de un EEG (ver Tabla 3.1, Cap. 3). No obstante, consideramos que las bandas frecuenciales no difieren lo suficiente en magnitud como para forzar diferentes nomenclaturas, por lo que utilizamos las mismas letras griegas para designar los ritmos asociados a las bandas frecuenciales obtenidas en la descomposición. Asimismo, para aquellas bandas frecuenciales características que en la descomposición utilizada se encuentran divididas en diferentes niveles (como las ondas δ), las denominamos con la misma letra y un subíndice creciente a medida que disminuye la frecuencia, que llamamos orden. De esta manera, cada potencia relativa puede asociarse con un ritmo característico, o con un ritmo característico de algún orden, como se detalla en la Tabla 4.3.

Luego del procesamiento, la cantidad de variables por sujeto es de 11×64 , 11 cuantitativas contando las 9 potencias relativas, la ME y el DS, por cada uno de los

Potencia	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
Frecuencia (Hz)	64-128	32-64	16-32	8-16	4-8	2-4	1-2	0.5-1	0-0.5
Denominación	ruido	γ	β	α	θ	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4

Tabla 4.3: Potencias relativas, bandas frecuenciales asociadas, y nomenclatura de las ondas características asociadas.

64 canales, para cada sujeto. Excluimos del análisis la información de un sujeto del GC, el paciente cuyo registro lleva el nombre “co2c0000392”, por no presentar mediciones en uno de los canales.

Para la clasificación utilizamos una RNA (Cap. 1, Sec. 1.4) de una capa oculta, y una neurona de salida, con tasa de aprendizaje adaptativa. Para estimar los parámetros de la red, utilizamos el 80% de los sujetos (65 del GA, y 32 del GC), y se seleccionaron aleatoriamente 12 sujetos de cada grupo para validar el ajuste de la clasificación. Utilizando el marco de datos de entrada para la RNA (red neuronal artificial) con 704 filas por 121 columnas (todos los datos de los 121 sujetos), la red clasifica satisfactoriamente a los sujetos según pertenezcan al GC o al GA, con 3 neuronas en la capa oculta.

La cantidad de parámetros a estimar en la RNA viene dado por

$$NN \times (N + 2) + 1, \quad (4.1)$$

donde NN es la cantidad de neuronas en la capa oculta, y N es la cantidad de datos de entrada². Por ello, si bien la cantidad de neuronas no parece ser un número excesivamente grande, la cantidad de parámetros es 2119, por lo que resulta importante lograr reducir el conjunto de datos para disminuir el costo computacional, pero sin perder la capacidad de clasificar correctamente.

Para lograr disminuir las dimensiones del marco de datos de entrada para la RNA, decidimos utilizar sólo los canales que mostraran diferencias muy significativas en al menos 5 variables cuantitativas, y las variables en las que al menos 10 canales mostraran diferencias muy significativas. Para establecer el grado de significatividad de las diferencias que ambos grupos muestran en las variables cuantitativas, realizamos un análisis ANOVA, promediando cada variable de cada canal, entre los sujetos de cada grupo. Esquematizamos la información obtenida en imágenes. Generamos una imagen para cada variable cuantitativa, y en ellas se puede observar cada canal, en su posición estándar con su nombre en el interior, donde:

- El color interior del círculo representa el promedio de la variable asociada, la mitad izquierda corresponde al GA y la derecha al GC. La escala de color se puede observar a la derecha de cada imagen.
- El borde del círculo representa cuán significativa es la diferencia entre los promedios de la variable asociada a la imagen, entre ambos grupos. El círculo sin borde indica que el análisis no arrojó diferencias significativas (p -valor mayor a 0.05). El borde punteado indica una diferencia significativa (p -valor entre 0.05 y 0.01).

²Los parámetros a estimar son los pesos y el “bias” de las neuronas de la capa oculta y la neurona de salida

El borde continuo indica una diferencia muy significativa (p -valor menor a 0.01). El p -valor arrojado por el ANOVA se puede ver debajo del nombre de cada canal.

En la Figura 4.1 se pueden observar las imágenes para la componente continua, el desvío estándar y la primera potencia relativa. Podemos apreciar que estas tres variables cuantitativas mostraron en más de 10 canales diferencias muy significativas, por lo que las consideramos para el nuevo marco de datos. En particular también se puede observar que:

ME El promedio de la componente continua en ambos grupos es mayor en la zona centro-parietal, y disminuye hacia el exterior, siendo menor en la región occipital. Las mayores diferencias las encontramos en la zona frontal y fronto-polar de la izquierda, siendo mayor en el GA.

DS El promedio del desvío estándar en ambos grupos crece desde los canales centrales, siendo mayor en las regiones fronto-polar, occipital y parieto-occipital. A su vez, las diferencias significativas o muy significativas las hallamos en casi todos los canales, siendo el GC el que arrojó los mayores valores.

P₁ El promedio de la potencia relativa P_1 es considerablemente pequeño en casi todos los canales, para ambos grupos. Las diferencias significativas o muy significativas las determinamos en casi todos los canales, con mayores valores para el GA.

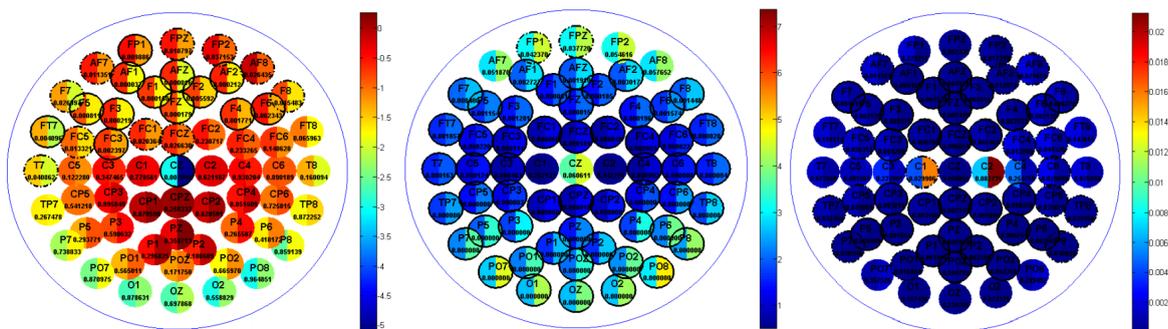


Figura 4.1: De izquierda a derecha, promedio ME, DS y P_1 .

En la Figura 4.2 se pueden ver las imágenes correspondientes a las potencias relativas P_2 , P_3 y P_4 , referidas a la energía del “ruido”, y las ondas γ y β , respectivamente. Como podemos apreciar en las imágenes, la potencia relativa P_4 mostró diferencias muy significativas en menos de 10 canales, por lo que no utilizamos esos datos en el nuevo marco. A su vez, en la figura podemos observar que:

P₂ El promedio de la potencia P_2 en ambos grupos es mayor en el surco central, y crece a medida que nos alejamos de la zona media, siendo mayor para el GA. También vemos que las diferencias significativas y muy significativas se encuentran en la zona parietal, parieto-occipital, fronto-central y central, donde los mayores valores también corresponden al GA.

P₃ El promedio de la energía correspondiente a las ondas β mostró mayores valores en el GA en todos los canales, y, para ambos grupos los mayores valores también se concentraron en el surco central. Encontramos las mayores diferencias en la zona fronto-central, frontal, centro-parietal y parietal.

P₄ El promedio de la potencia relativa P_4 correspondiente a la energía de las ondas α mostró mayores valores para ambos grupos en las zonas central, parietal y parieto-occipital. En la región central el GC mostró valores superiores, mientras que en la región posterior los mayores valores corresponden al GA.

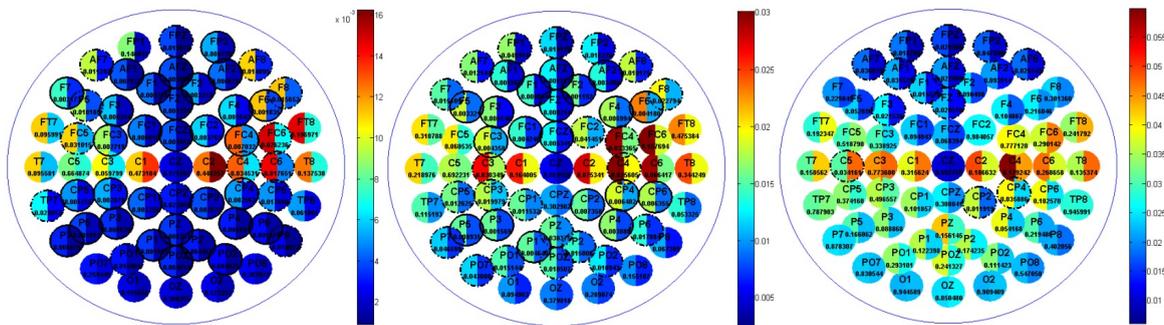


Figura 4.2: De izquierda a derecha, promedio P_2 , P_3 y P_4 .

En la Figura 4.3 se encuentran las imágenes referidas a las potencias relativas P_5 , P_6 y P_7 , correspondientes a la energía de las ondas θ , δ_1 y δ_2 respectivamente. Para el nuevo marco de datos tuvimos en cuenta los datos relativos a las ondas θ , ya que fueron las que mostraron diferencias muy significativas en al menos 10 canales. A su vez, en las imágenes podemos observar que:

P₅ El promedio de potencia P_5 mostró ser mayor para el GC en las zonas central y fronto-central, mientras que en la región posterior los mayores valores los evidenció el GA. Las diferencias significativas y muy significativas las encontramos en las zonas parietal y parieto-occipital.

P₆ El promedio de la energía correspondiente a las ondas δ_1 mostró mayores valores para el GA en casi todos los canales, salvo en los del surco central de la derecha. No observamos diferencias significativas ni muy significativas.

P₇ El promedio de la potencia relativa P_7 correspondiente a la energía de las ondas δ_2 mostró mayores valores para el GA en la mayoría de los canales, salvo en algunos canales centrales a la derecha, y otros frontales y fronto-centrales. Si bien algunos canales evidenciaron diferencias significativas, no consideramos esta información para el nuevo marco de datos.

En la Figura 4.4 se pueden ver las imágenes correspondientes a los promedios de energía de las ondas δ_3 y δ_4 , respectivamente. En ellas podemos observar que:

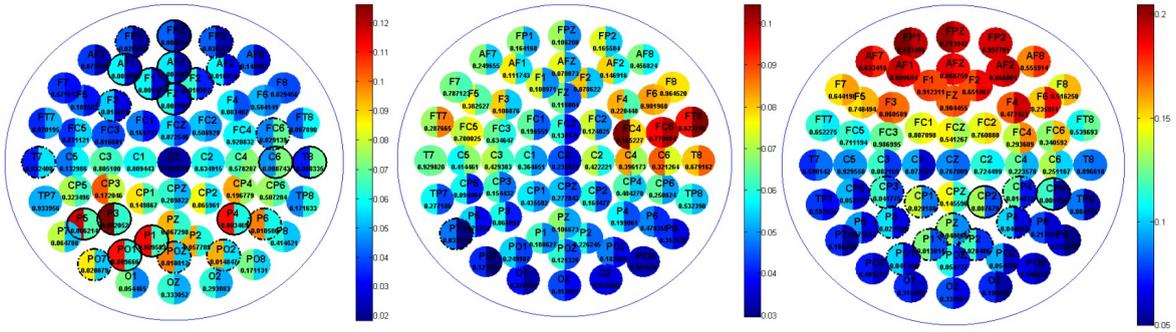


Figura 4.3: De izquierda a derecha, promedio P_5 , P_6 y P_7 .

P₈ El promedio de la potencia P_8 fue mayor para el GC en todos los canales, concentrando las diferencias significativas y muy significativas en la región posterior. Utilizamos esta potencia para el nuevo marco de datos.

P₉ El promedio de la energía correspondiente a las ondas δ_4 mostró mayores valores para el GA en los canales periféricos, salvo por algunos de la región fronto-polar, y en la región posterior. Sin embargo, al no arrojar diferencias muy significativas, no se tuvieron en cuenta para el armado del nuevo marco de datos.

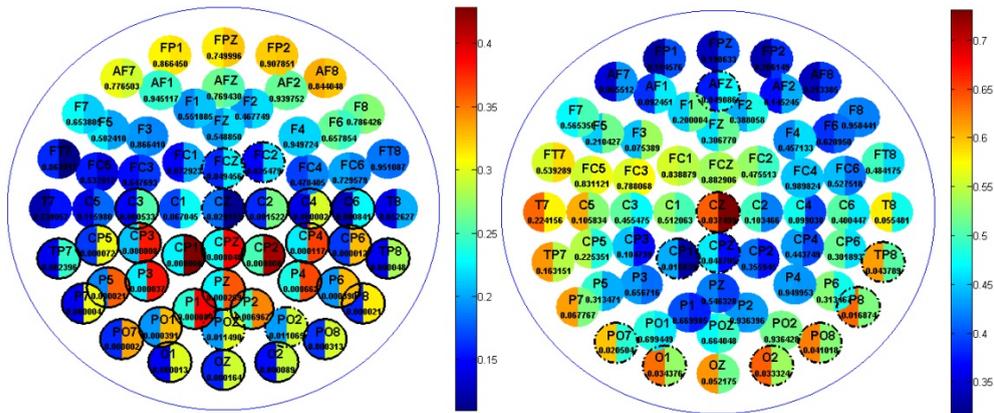


Figura 4.4: De izquierda a derecha, promedio P_8 y P_9 .

De los resultados obtenidos a partir del análisis ANOVA, confeccionamos el nuevo marco de datos utilizando las variables ME, DS, P_1 , P_2 , P_3 , P_5 y P_8 (potencias de ondas “ruido”, γ , β , θ y δ_3), de los canales AF1, FZ, F4, F3, CP2, P3, P4, F6, FC3, F2, F1, AFZ, CP4, P5 y P1, de cada sujeto. De esta manera, redujimos la información relevante para el nuevo marco de datos, resultando una matriz de 7×15 filas y 121 columnas (sujetos), lo que constituye una reducción del 85 % en la cantidad de datos. A su vez, con este nuevo marco de datos, la red neuronal es capaz de clasificar satisfactoriamente a los sujetos, con 4 neuronas en la capa oculta, demandando sólo la estimación de

429 parámetros, menos del 75 % que los demandados por la red utilizando el conjunto completo de datos.

Conclusiones

En primer lugar, podemos concluir que el procesamiento llevado a cabo mediante la utilización de la TWD nos permitió obtener información representativa y cuantitativa sobre las señales eléctricas neuronales registradas. También pudimos comprobar que mediante una RNA es posible la automatización en la clasificación de la información obtenida mediante este procesamiento. Esto reviste una importancia fundamental a la hora de construir y diseñar herramientas capaces de procesar y clasificar información de manera eficiente, acertada y automática. En especial cuando se trata de realizar diagnósticos de enfermedades neurodegenerativas que, por lo general, demandan prácticas quirúrgicas sumamente riesgosas, o el análisis de médicos expertos mediante inspección directa.

Por otro lado, podemos concluir que existe evidencia de que el consumo excesivo de alcohol durante un tiempo prolongado, genera cambios en la forma y en la energía de los campos eléctricos medibles a través del cráneo. El análisis estadístico que realizamos sobre las variables cuantitativas obtenidas al procesar las señales EEG de ambos grupos de sujetos, arrojan como resultado que, efectivamente, en ciertas zonas y frecuencias precisas detalladas en las imágenes, las señales eléctricas neuronales son significativamente diferentes entre ambos grupos.

4.2 Emociones y EEG

La base de datos que usamos para desarrollar este ejemplo está disponible en la red ³, y fue utilizada por sus creadores para analizar las respuestas fisiológicas a diferentes estados emocionales en personas.

En la base de datos se encuentran los registros de EEG de 32 sujetos, además de los registros de otras variables fisiológicas periféricas, como la respuesta galvánica de la piel, el pulso y la presión sanguínea. Los registros EEG se midieron con 32 electrodos en posición estándar con una frecuencia de muestreo de 128 Hz. Fueron tomados mientras a cada sujeto se lo sometió a estímulos audiovisuales que consistieron en 40 fragmentos de 1 minuto de diferentes videos musicales. A su vez, a los sujetos se les solicitó que puntuaran los videos musicales según tres variables psicológicas (PAD emotional state model [30]) relativas a emociones, que son *valencia*, *excitación* y *dominación*, que describiremos a continuación.

- **Valencia:** En psicología, y en especial cuando se discute sobre las emociones, la valencia (valence) se refiere al atractivo intrínseco de la emoción. La valencia con mayor valor se asocia a emociones placenteras, como la alegría, el gozo, el disfrute, por ejemplo. La valencia con menor valor está asociada a emociones displacenteras, como la ira y el miedo, por ejemplo.

³<http://www.eecs.qmul.ac.uk/mmv/datasets/deap/>

- **Excitación:** La excitación (arousal) está relacionada con el estado de alerta y la atención frente a diferentes estímulos. En un estado de excitación, el Sistema Reticular de Activación conecta el tronco primitivo del cerebro con la corteza, fomentando la capacidad de respuesta frente a una amenaza. El sistema endócrino estimula ciertas glándulas, en especial las suprarrenales a segregar adrenalina para incrementar el flujo de sangre y oxígeno, dilatar las pupilas y suprimir funciones no urgentes, como la digestión y el sistema inmune. En psicología, y en especial en el contexto emocional, se refiere a la intensidad con la que se siente una emoción. Por ejemplo la alegría, la ira y la frustración son emociones con alta excitación, mientras que la tristeza, la confusión y la vergüenza son emociones con baja excitación.
- **Dominación:** En lo relativo a emociones, la dominación (dominance) se refiere a la naturaleza dominante o sumisa de una emoción. Por ejemplo, si bien tanto el miedo como la ira tienen en común valencia pequeña (o negativa) por ser emociones displacenteras, la ira es una emoción dominante en tanto que el miedo es una emoción sumisa.

Para construir la base de datos, se les solicitó a los sujetos que puntuaran los segmentos de videos utilizando un valor numérico continuo entre 1 y 9 para las tres variables. Además, se les pidió que puntuaran los segmentos según su gusto usando la misma escala.

Los atributos de la base de datos pueden verse en la Tabla 4.4.

BASE DE DATOS				
Cantidad de sujetos	32			
Videos				
Cantidad de Videos	40			
Duración	60 segundos			
Puntuación escala	Valencia 1-9	Excitación 1-9	Dominación 1-9	Gusto 1-9
EEG				
Electrodos	32 posición estándar			
Frecuencia de muestreo	128 Hz			

Tabla 4.4: Características de la base de datos del experimento emocional.

Las emociones despertadas por los diferentes videos en los sujetos modifican las señales eléctricas cerebrales registradas por el EEG. Desde este punto de vista, nuestro objetivo es analizar si esas diferencias en las señales EEG se ven reflejadas en las variables cuantitativas que obtenemos a partir del análisis propuesto y clasificar la información cuantitativa obtenida del procesamiento según a qué video corresponden. Para ello, procedimos de la siguiente manera:

1. Para cada uno de los sujetos, calculamos la media (ME) y el desvío estándar (DS) de cada señal EEG, para todos los videos.
2. Teniendo en cuenta la frecuencia de muestreo y las frecuencias características (Tabla 3.1, Cap. 3), descompusimos mediante la TWD cada señal EEG en 4 niveles. Utilizamos como madre wavelet la wavelet de Daubechies de orden 8, y dicha elección la hicimos teniendo en cuenta que otros trabajos han encontrado evidencia de que esa madre wavelet tiene buen desempeño en estudios relativos a emociones humanas ([36]). Obtuvimos así las señales de detalle D_1, D_2, \dots, D_4 y la señal de aproximación suave A_4 , cada una asociada a una banda frecuencial, como se puede ver en la Tabla 4.5.
3. Calculamos las potencias relativas de cada nivel de descomposición y obtuvimos las variables cuantitativas P_1, P_2, \dots, P_5 asociadas a los niveles D_1, D_2, \dots, D_4 y A_4 respectivamente, y a las ondas características $\gamma, \beta, \alpha, \theta, \delta$, como se puede ver en la Tabla 4.5.

Nivel	D_1	D_2	D_3	D_4	A_4
Potencia	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Denominación	γ	β	α	θ	δ
Frecuencia (Hz)	32-64	16-32	8-16	4-8	0-4

Tabla 4.5: Niveles de descomposición, Potencias Relativas, nomenclatura de las ondas características y bandas frecuenciales asociadas.

4. Para obtener información representativa de cada uno de los videos, promediamos los puntajes que cada sujeto asignó a las variables valencia, excitación y dominación. Estas variables las denominamos prV , prE y prD , para el promedio de valencia, el promedio de excitación y el promedio de dominación, respectivamente.

De esta forma obtuvimos, para cada sujeto, 9 variables cuantitativas para cada uno de los 32 electrodos, que son la ME, el DS y las potencias P_1, P_2, \dots, P_5 . Para cada uno de los 40 videos obtuvimos 3 variables cuantitativas asociadas, que son prV , prE y prD .

Para clasificar la información, utilizamos una RNA tipo perceptrón multicapa que fuera capaz de asociar la actividad neuronal de cada sujeto para cada video, a los promedios de las variables emocionales. Usamos los datos de 24 pacientes para ajustar los parámetros de la red, mientras que los 8 restantes los usamos para validación del ajuste de la red. Comenzamos con una red con 10 neuronas en la capa oculta y 3 neuronas en la capa de salida, ya que la salida es tridimensional. Con esa cantidad de neuronas en la capa oculta obtuvimos un sobreajuste de los datos. Es decir, después de entrenar la red, logramos una clasificación aceptable para la mayoría de los 24 pacientes utilizados para entrenamiento, pero no logramos clasificar exitosamente ningún paciente de los 8 utilizados para validación del modelo. Para subsanar el problema del sobreajuste, disminuimos paulatinamente la cantidad de neuronas en la capa oculta. Sin embargo, y en contra del objetivo buscado, al disminuir la cantidad de neuronas en

la capa oculta obtuvimos una red que no era capaz de arribar a un nivel de clasificación satisfactorio, ni siquiera para los pacientes usados en el entrenamiento de la red.

Nuestra primera conjetura sobre los motivos que impedían construir una red neuronal capaz de clasificar los datos, fue que al promediar los valores de las variables emocionales entre los sujetos para cada video, perdíamos información que era necesaria para lograr una clasificación exitosa. Es por esto que decidimos utilizar como salida de la red, en lugar del promedio de cada variable, el valor que cada sujeto asignó al video según las tres variables emocionales, y usar, además, el ranqueo de gusto. De esta manera, construimos una RNA con una capa oculta y 4 neuronas de salida, con la intención de lograr ajustar la salida de la red al ranqueo que cada sujeto asignó a cada video. No obstante, nuevamente encontramos que la red construida sobreajustaba los datos de entrenamiento no pudiendo clasificar los sujetos utilizados para validación, y disminuyendo la cantidad de neuronas en la capa oculta la red pasaba a no lograr un ajuste aceptable de la totalidad de los datos.

Ante la imposibilidad de lograr una clasificación exitosa utilizando las variables obtenidas procesando los 60 segundos de registros, procedimos a verificar si podíamos lograr una clasificación aceptable mediante el cálculo de las variables de un segundo en particular. Si bien el desempeño de la red en algunos segundos fue superior que en otros, no logramos una clasificación y ajuste aceptable.

Conclusiones

De lo expuesto anteriormente, podemos afirmar que mediante el procesamiento propuesto pudimos obtener información representativa y cuantitativa de las señales EEG. Sin embargo, la imposibilidad de clasificar la información mediante una RNA, no nos permite afirmar que existe evidencia de la relación entre las variables cuantitativas extraídas y el ranqueo emocional con el que cada sujeto puntuó los segmentos de videos musicales.

Diferentes trabajos han logrado una clasificación exitosa de las emociones mediante la extracción de características de las señales EEG utilizando la TW. Por ejemplo en [4] se muestra que es posible clasificar emociones utilizando el procesamiento de señales electromiográficas mediante la TWD y una RNA con varias capas ocultas. Por otra parte, en [33] se observa que utilizando el método estadístico de K-vecinos más cercanos (K-Nearest Neighbor-KNN) se logra clasificar la información obtenida a través del procesamiento de señales EEG mediante la TWD.

El hecho de no haber logrado clasificar las emociones mediante la metodología propuesta lejos de ser un resultado desalentador, y teniendo en cuenta que otras herramientas y procesamientos han logrado encontrar evidencia de la relación entre las emociones y las señales EEG, nos motivan a continuar trabajando y explorando nuevas herramientas que permitan mejorar el rendimiento del análisis sobre esta base de datos.

Conclusiones y Trabajo futuro

Conclusiones

En las últimas décadas se ha registrado, en la mayoría de los países, un incremento en la esperanza de vida. A su vez, si bien en algunos de ellos no es posible encontrar datos oficiales, el consumo de sustancias psicoactivas (legales e ilegales) ha aumentado, así como también se ha multiplicado la variedad de sustancias que se consumen. Estos factores impactan sobre el funcionamiento del cerebro humano y motivan que el esfuerzo por desarrollar herramientas para analizar y procesar las señales EEG sean redoblados.

El estudio en profundidad y la difusión del efecto nocivo que tienen las sustancias psicoactivas debería motivar la concientización sobre las consecuencias que dicho consumo produce. En este sentido, el procesamiento de las señales EEG ayudaría a comprender cuáles son las zonas cerebrales que sufren daños cuando se abusa de diferentes sustancias, y cómo esos daños repercuten en el desempeño cognitivo y las distintas capacidades de los sujetos abusadores.

Los resultados obtenidos en esta tesis, descritos en el Capítulo 4, reafirman las hipótesis de que el análisis mediante la Transformada Wavelet permite obtener características cuantitativas de las señales EEG, y que en algunos casos las RNA son capaces de procesar y clasificar esa información. Teniendo en cuenta estos resultados podemos concluir que los objetivos propuestos en el trabajo fueron alcanzados, pudiendo establecer diferencias entre la actividad cerebral de sujetos alcohólicos y sujetos control, y también entre la actividad cerebral que diferentes estímulos emocionales evocan. En cuanto a la posibilidad de clasificar la información obtenida a partir del procesamiento propuesto, podemos decir que el objetivo fue parcialmente alcanzado. En el primer caso, una RNA nos permitió clasificar exitosamente a los sujetos utilizando la información cuantitativa obtenida según su pertenencia al grupo control o al grupo alcohólico, aún descartando parte de la información mediante un análisis estadístico. En el segundo caso, si bien las variables cuantitativas derivadas del análisis propuesto exhibieron diferencias para los distintos segmentos de videos musicales, estas diferencias no pudieron ser relacionadas exitosamente mediante una RNA con las valoraciones que los propios sujetos hicieron sobre los estímulos.

Trabajo futuro

El incremento en la expectativa vital conlleva necesariamente un deterioro natural del tejido cerebral, deterioro que puede devenir en diferentes enfermedades neurodegenerativas, como la enfermedad de Alzheimer (EA), por ejemplo. Por lo general, las

enfermedades neurodegenerativas demandan procedimientos quirúrgicos sumamente invasivos para ser diagnosticados certeramente, y estos procedimientos se llevan adelante cuando se han descartado otras posibilidades y los síntomas son muy evidentes. Es por esto que lograr procesar y analizar las señales EEG para rastrear de qué forma estas enfermedades afectan el cerebro y poder desarrollar exámenes o test menos invasivos y más certeros, es de vital importancia para poder contribuir a arribar a un diagnóstico temprano de la enfermedad.

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente y lo expuesto en las Conclusiones, nuestro trabajo futuro se centrará en:

- Ahondar sobre las diferentes herramientas utilizadas para clasificar información, como los Modelos Lineales Mixtos o los K-vecinos más cercanos, para realizar estudios estadísticos sobre las variables obtenidas al procesar las señales EEG de experimentos emocionales.
- Aplicar el análisis propuesto a bases de datos de EEG correspondientes a personas con enfermedades neurodegenerativas.
- Diseñar experimentos para obtener bases de datos propias y estudiar problemas específicos.
- Explorar otros métodos y mecanismos, además de la electroencefalografía, que son utilizados actualmente para contribuir al estudio del impacto que las enfermedades neurodegenerativas tiene sobre el cerebro y para el diseño de marcadores que colaboren con el diagnóstico temprano de dichas enfermedades.

Bibliografía

- [1] R. Acharya, F. Molinari, S. V. Sree, S. Chattopadhyay, K. H. Ng, y J. S. Suri. Automated diagnosis of epileptic EEG using entropies. *Biomedical Signal Processing and Control*, 7, 2012.
- [2] G. Barrett, L. Blumhardt, A. M. Halliday, E. Halliday, y A. Kriss. A paradox in the lateralization of the visual evoked responses. *Nature*, págs. 253–255, 1976.
- [3] L. Boscardín. Wavelets definidas sobre volúmenes. Tesis de Magister, Universidad Nacional del Sur, 2001.
- [4] B. Cheng y G. Y. Liu. Emotion recognition from surface EMG signal using wavelet transform and neural network. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering (ICBBE)*, págs. 1363–1366, 2008.
- [5] O. Christensen. *An introduction to frames and Riesz bases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104, 2003.
- [6] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*, volume 1 of *Wavelet Analysis and its Applications*. Academic Press, New York, 1992.
- [7] R.R. Coifman, Y. Meyer, y M.V. Wickerhauser. *Wavelet Analysis and Signal Processing*, volume 36 of *Wavelets and their Applications*, págs. 153–178. M.B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer and L. Raphael (Eds.), Jones and Bartlett, Boston, 1992.
- [8] G. Cybenko. Approximation by superposition of sigmoidal functions. *Mathematics of Control Signal and Systems*, págs. 303–314, 1989.
- [9] I. Daubechies. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 41(7):909–996, October 1988.
- [10] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [11] I. Daubechies y J. Lagarias. Two scale difference equation I:existence and global regularity of solutions. *SIAM J. on Mathematical Analysis*, 22(1):1388–1410, 1991.
- [12] O. Faust, R.U. Acharya, A.R. Allen, y C.M. Lin. Analysis of EEG signals during epileptic and alcoholic states using AR modeling techniques. *IRBM*, 29(1):44–52, 2008.

- [13] A. Grossmann y J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Math. Anal.*, 15:723–736, 1984.
- [14] A. M. Halliday. *Evoked potentials in neurological disorders*, págs. 197–210. Academic Press, New York, 1978.
- [15] D. O. Hebb. *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory*. Wiley, New York, 1949.
- [16] C. S. Herrmann, M. Grigutsch, y N. A. Busch. 11 eeg oscillations and wavelet analysis. *Event-related potentials: A methods handbook*, pág. 229, 2005.
- [17] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational activities. In *Proceedings of the National Academy of Science*, 1982.
- [18] J. J. Hopfield y J. W. Tank. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics*, 52:141–152, 1985.
- [19] J. J. Hopfield y J. W. Tank. Computing with neural circuits: A model. *Science*, 233:625–633, 1986.
- [20] S. Jaffard, Y. Meyer, y R.D. Ryan. *Wavelets: Tools for Science and Technology*. EngineeringPro collection. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001.
- [21] P. Jahankhani, V. Kodogiannis, y K. Revett. EEG signal classification using wavelet feature extraction and neural networks. In *IEEE John Vincent Atanasoff 2006 International Symposium on Modern Computing*, volume 1, págs. 52–57, 2006.
- [22] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [23] N. Kannathala, M. L. Choo, U. R. Acharya, y P.K. Sadasivan. Entropies for detection of epilepsy in EEG. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 80:187–194, 2005.
- [24] T. Kohonen. Self organized formation of topologically correct feature maps. *Biological Cybernetics*, 43:59–69, 1982.
- [25] T. Kohonen. The ‘neural’ phonetic typewriter. *Computer*, 21:11–22, 1988.
- [26] R. Ksiezzyk, K. Blinowska, y P. Durka. Neural Networks with Wavelet Preprocessing in EEG Artifact Recognition. In *Abstract of Medicon Conference*, págs. 23–95.
- [27] S. Mallat. Multiresolutions aproximations and wavelet orthonormal basis for $l^2(\mathbb{R})$. *Trans. of the American Math. Society*, 315(1):69–88, 1989.
- [28] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 11:674–693, 1989.

- [29] W. McCulloch y W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133, 1943.
- [30] A. Mehrabian. *Basic dimensions for a general psychological theory*. Greenwood Press, 1980.
- [31] Yves Meyer. *Wavelets: Algorithms and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, 1993.
- [32] M. Minsky y S. Papert. *Perceptrons: an Introduction to Computational Geometry*. The MIT Press, Cambridge, Ma, 1969.
- [33] M. Murugappan. Human emotion classification using wavelet transform and KNN. In *International Conference on Pattern Analysis and Intelligent Robotics*, 2011.
- [34] D. Nayak, A. Valentín, G. Alarcón, J. J. García Seoane, F. Brunnhuber, J. Juler, C. E. Polkey, y C. D. Binnie. Characteristics of scalp electrical fields associated with deep medial temporal epileptiform discharges. *Clinical Neurophysiology*, 115:1423–1435, 2004.
- [35] R. Quian Quiroga y M. Schürmann. Functions and sources of event-related EEG alpha oscillations studied with the wavelet transform. *Clinical Neurophysiology*, 110:643–654, 1999.
- [36] M. Rizon. Discrete Wavelet Transform Based Classification of Human Emotions Using Electroencephalogram Signals. *American Journal of Applied Sciences*, 7(7):865–872, 2010.
- [37] F. Rosenblatt. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65:386–408, 1958.
- [38] V. J. Samar, A. Bopardikar, R. Rao, y K. Swartz. Wavelet Analysis of Neuroelectric Waveforms: A Conceptual Tutorial. *Brain and Language*, 66:7–60, 1999.
- [39] S. Sanei y J. A. Chambers. *EEG Signal Processing*. John Wiley and Sons Inc, 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA, 2007.
- [40] J. G. Snodgrass y M. Vanderwart. A standardized set of 260 pictures: Norms for name agreement, image agreement, familiarity, and visual complexity. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 6(2):174–215, 1980.
- [41] G. Strang y T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 1996.
- [42] N. Tanei, A. Funase, H. Nakatani, T. Yagi, A. Cichocki, y I. Takumi. Relationship between saccade to EEG signals in time-frequency domain. In *Proceedings of the 3rd International IEEE EMBS Conference on Neural Engineering*, volume 1, págs. 362–365, Kohala Coast, Hawaii, USA, 2007.

- [43] B. Widrow. *Generalization and Information Storage in Networks of Adaline 'Neurons'*, págs. 453–461. Self-Organizing Systems. M. C. Yovitz and G. T. Jacobi and G. D. Goldstein (Eds.). Sparta, Washington D.C., 1962.
- [44] G. Winterer, B. Klöppel, A. Heinz, M. Ziller, P. Dufeu, L. G. Schmidt, y W. M. Herrmann. Quantitative EEG (QEEG) predicts relapse in patients with chronic alcoholism and points to a frontally pronounced cerebral disturbance. *Psychiatry Research*, 78:101–113, 1998.
- [45] X. L. Zhang, H. Begleiter, B. Porjesz, W. Wang, y A. Litke. Event Related Potentials During Object Recognition Tasks. *Brain Research Bulletin*, 38(6):531–538, 1995.
- [46] Z. Zhang, H. Kawabata, y Z. Q. Liu. Electroencephalogram analysis using fast wavelet transform. *Computers in Biology and Medicine*, 31:429–440, 2001.