



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

Amplificador conmutado con modulación click

Mg. Leandro Stefanazzi

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras durante el período comprendido entre el 15 de Marzo de 2011 y el 7 de Diciembre de 2012, bajo la dirección del Dr. Alejandro Oliva, Profesor Adjunto, Área 3, Electrónica y del Ing. Eduardo Paolini, Profesor Adjunto, Área 1, Campos y Circuitos.

Mg. LEANDRO STEFANAZZI

Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaria General de Posgrado y Educación Continua

La presente Tesis ha sido aprobada el / /, mereciendo la calificación de(.....)

Resumen

La amplificación de señales encuentra diversas aplicaciones en dispositivos de audio, video, instrumentación, entre otras. Existen distintos parámetros que cuantifican el desempeño de un amplificador, aunque la eficiencia en la conversión de potencia es muy importante tanto en dispositivos portátiles como en aplicaciones de alta potencia. Los amplificadores conmutados (clase D) tienen una eficiencia máxima teórica del 100 % y es principalmente por esto que encuentran cada vez más aplicaciones.

Para poder utilizar etapas conmutadas es necesario modular las señales antes del proceso de amplificación propiamente dicho. El esquema de modulación define no sólo la calidad de la señal resultante, sino también parámetros ligados a la etapa de potencia como por ejemplo la velocidad de conmutación y la complejidad del circuito demodulador. La modulación por ancho de pulsos es de fácil implementación y la más usada en los últimos años, sin embargo no es posible obtener señales libres de distorsión en una banda específica. Además la implementación digital introduce importantes productos de distorsión en la banda de interés lo que complica considerablemente el esquema de modulación original para obtener resultados razonables.

Una alternativa a la modulación por ancho de pulsos es la denominada modulación click. Este esquema permite obtener señales binarias, aptas para manejar etapas conmutadas, con alta pureza espectral y libres de distorsión. Sin embargo esta técnica fue desarrollada enteramente para señales de tiempo continuo y tiene problemas difíciles de resolver en su versión de tiempo discreto que, sumados a su alta complejidad, han postergado su uso comercial.

Esta Tesis se centra en el desarrollo de un modulador enteramente discreto. La arqui-

tectura aquí presentada permite obtener señales binarias con banda base separada y libres de distorsión partiendo de señales muestreadas. Aunque la técnica se basa principalmente en el esquema del modulador click de tiempo continuo, se introducen numerosos cambios y mejoras que permiten el desarrollo de una estructura de cálculo íntegramente digital, haciendo que la modulación de señales en tiempo discreto y sin distorsión se convierta en un objetivo alcanzable.

Abstract

Signal amplification has a wide variety of applications ranging from audio, video and even instrumentation devices. Many parameters are used to define the performance of an amplifier, although one of the most important is the efficiency in the energy conversion process for both mobile and high-power devices. Switching amplifiers (class-D) are perfect for this task because of their high efficiency, 100 % theoretically, and that is the main reason that have increased their widespread use over the last years.

The signal has to be modulated to drive a switching-mode amplification stage. The modulation process not only dictates the achievable quality of the modulated signal, it also sets some parameters of the power stage such as the switching rate and the complexity of the demodulation circuit. Pulse width modulation is one of the most widely used modulation techniques because it is very simple to implement, however it is impossible to completely avoid distortion problems on a given frequency band. Moreover, its digital counterpart suffers from intermodulation products in the baseband that are difficult to remove unless additional processing capabilities are added.

Click modulation is an interesting alternative to pulse width modulation. Using this method it is possible to generate binary signals without any distortion components on a user-defined frequency band. Despite its obvious advantage, click modulation was designed to work with continuous-time signals. Its discrete-time version suffers from aliasing and distortion if it is not properly implemented which, added to the fact that it is a complex and computationally-intensive algorithm, has postponed its widespread used over other modulation techniques.

This Thesis focuses on the development of an entirely digital click modulator. The

proposed architecture allows obtaining binary signals with separated baseband and free of distortion, using discrete-time signals and transforms. Although it is based in the continuous-time click modulator, many changes and improvements are added and as a result an entirely digital modulator is presented which makes discrete-time, distortion-free signal modulation an achievable objective.

Índice general

1. Introducción	1
2. Modulador click continuo	7
2.1. Introducción	7
2.2. Señales binarias con banda base separada	8
2.2.1. Representación mediante una onda cuadrada	17
2.3. Relación entre la modulación click y la MAP	21
2.3.1. Derivación de la MAP a partir de la modulación click	21
2.3.2. Espectro de la MAP a partir del espectro de la modulación click .	23
2.4. Profundidad de modulación	24
2.4.1. Intercalado de los ceros y desvío de fase	24
2.4.2. Desvío de fase en función de la frecuencia	25
2.4.3. Variación de los anchos de pulso	28
2.5. Conclusiones	30
3. MEA y filtrado simultáneo	31
3.1. Introducción	31
3.2. Análisis para señales de TC	32
3.3. MEA y filtrado simultáneos	36
3.3.1. Representación ideal con un número finito de términos	40
3.4. Análisis para señales de TD	41
3.4.1. MEAF-TD	46
3.4.2. Representación ideal con un número finito de términos	50

3.5. Conclusiones	50
4. Modulador click discreto	52
4.1. Introducción	52
4.2. Bloques constitutivos del modulador digital	52
4.2.1. Generación de la señal analítica	53
4.2.2. MEAF-TD	56
4.2.3. Detección de cruces por cero	62
4.3. Conclusiones	67
5. Resultados experimentales	69
5.1. Introducción	69
5.2. Hardware utilizado	70
5.2.1. Generación de la señal binaria	71
5.2.1.1. Dithering	74
5.2.1.2. Moldeo de ruido	76
5.2.2. Adición de tiempos muertos	79
5.3. Medidas experimentales	81
5.3.1. Medida de intermodulación	83
5.3.2. Medida de distorsión armónica	87
5.3.3. Comparación entre MAP y click	89
5.3.4. Número de términos para el MEAF-TD	92
5.4. Conclusiones	95
6. Conclusiones y trabajo futuro	97
6.1. Conclusiones	97
6.2. Trabajo futuro	101

Capítulo 1

Introducción

Los amplificadores son utilizados en muchas aplicaciones. No sólo en dispositivos de audio, televisión, etc., sino también en instrumental de medición y caracterización de dispositivos. A veces es común hablar de amplificadores de audio en electrónica de consumo solamente, pero en la mayoría de las aplicaciones es necesario amplificar o adecuar una señal proveniente de un sensor o transductor para poder utilizarla.

Existen diferentes tipos de amplificadores según sea el funcionamiento de los componentes activos. Los amplificadores lineales se dividen normalmente en Clase A, Clase B o Clase AB. Este tipo de dispositivos suele ser de fácil implementación y control, aunque la eficiencia que se obtiene es baja, alcanzando un máximo teórico cercano al 80 % [1]. Los amplificadores conmutados, en cambio, permiten obtener alta eficiencia aunque la implementación es más compleja ya que es necesario modular la señal a ser amplificada [2, 3].

La etapa de modulación permite convertir la señal de entrada (analógica o digital) en un tren de pulsos binario o de dos niveles. La elección del modulador resulta de vital importancia ya que define muchos de los parámetros y características del sistema de amplificación. Las características deseadas para un modulador son:

- Posibilidad de ser implementado de forma digital.
- Baja velocidad de conmutación de la señal binaria.
- Implementación simple del circuito de demodulación.

- Banda base separada para evitar distorsión de la señal amplificada.

El primer punto resulta de importancia ya que permite utilizar dispositivos de almacenamiento digital de la información como fuente de señal, sin la necesidad de reconvertirla al dominio analógico o de tiempo continuo (TC). El segundo punto se debe principalmente a que la eficiencia de los amplificadores conmutados depende en gran medida de la velocidad a la que la señal binaria cambia de estado, y es por eso que si la frecuencia de conmutación es minimizada es de esperar que la eficiencia del sistema sea mayor. El demodulador, por su parte, permite recuperar la señal luego de ser amplificada y trabaja en alta potencia. Es deseable que sea pequeño, fácil de implementar y además que permita recuperar la señal sin distorsión en una banda de frecuencias de interés. En este caso el amplificador conmutado se comporta como un amplificador con una transferencia lineal.

La Modulación por Ancho de Pulsos (MAP) ha sido una de las técnicas más utilizadas en el control de convertidores conmutados en los últimos años principalmente debido a la baja complejidad de implementación del modulador analógico. Su implementación de TC se suele denominar MAP natural o MAPN. El principio de funcionamiento consiste en la comparación de la señal a ser amplificada (moduladora) con otra señal tipo diente de sierra o triangular (portadora). La elección de la portadora sumada a la estrategia de control de las llaves del amplificador conmutado permite disminuir el contenido armónico de la señal binaria resultante [4]. La versión de tiempo discreto (TD) del modulador MAP se obtiene muestreando las señales involucradas en intervalos regulares de tiempo y es por ese motivo que se suele denominar MAP uniforme o MAPU. El inconveniente con la MAPU es la aparición de componentes de distorsión en banda base [5], imposibles de remover utilizando filtros lineales. Estos problemas han sido el objeto de estudio de los moduladores digitales basados en la MAP en los últimos años [6–22]. Técnicas de interpolación y moldeado del ruido [14, 17] y soluciones prácticas para el problema de la resolución finita del ancho de pulso [9, 15, 16, 18, 19] han sido exploradas. En [6] la señal binaria es filtrada para controlar el nivel armónico y en [7, 8] es aplicada una técnica de filtrado dinámico (variante en el tiempo) previo a la interpolación. En [10], las no linealidades son compensadas con una red neuronal entrenada utilizando el modelo del modulador digital

y [13] presenta un método recursivo para calcular la MAPN a partir de la salida generada por la MAPU. Un enfoque completamente diferente es presentado en [23–27], en donde la señal sinusoidal es generada utilizando una representación mediante una cadena de bits y lógica digital. Esquemas alternativos de modulación han sido explorados en [28–30]. Otros autores se centran en la minimización de las pérdidas por conmutación [31, 32] y compensación del tiempo muerto [33]. En [11, 12] se utiliza la salida binaria del amplificador conmutado y se realimenta para linealizar el sistema completo. En todos los casos es posible disminuir las no linealidades del sistema y bajar la distorsión, aunque resulta imposible obtener señales binarias sin distorsión en una banda de frecuencias especificada.

La modulación sigma-delta utilizada en convertidores AD y DA también ha sido aplicada para el control de amplificadores conmutados [34–51]. En [34] se muestran los primeros resultados de simulación de un esquema de control de amplificadores conmutados basado en la modulación sigma-delta, utilizando un factor de sobre muestreo de 16 y tercer orden para el moldeo del ruido. En [35–37] se presenta una técnica que permite agrupar los pulsos a la salida del modulador sigma-delta de 1 bit para disminuir la velocidad de conmutación, aunque se mantiene en un valor alto oscilando entre 700 kHz y 2 MHz. En [39] se presenta un amplificador Clase D con entrada digital y frecuencia de conmutación de aproximadamente 2,5 MHz y [40] introduce un método de diseño que permite elegir el factor de sobre muestreo y el orden utilizando para el moldeo del ruido del modulador sigma-delta en función de la calidad deseada para la señal a la salida del amplificador. Los problemas de linealidad de las etapas conmutadas son estudiados en [43–45], donde se utilizan frecuencias de conmutación de alrededor de 1 MHz cercanas a los valores de funcionamiento de los moduladores sigma-delta. En [50] se varía la frecuencia de conmutación para mitigar los problemas de interferencia electromagnética utilizando una versión modificada de un modulador sigma-delta y en [51] se integra un amplificador estéreo Clase D que utiliza dos moduladores sigma-delta de tiempo continuo. Para disminuir los problemas de distorsión se utilizan además técnicas de realimentación desde la salida de la etapa de potencia (antes del filtro). En todos los casos en los que se utiliza un modulador del tipo sigma-delta, la frecuencia de conmutación es alta variando entre 500

kHz y alcanzando valores de hasta 2,5 MHz. Estas velocidades de conmutación impactan negativamente en la eficiencia de la etapa conmutada.

La modulación click [52] es una alternativa interesante a los esquemas convencionales desarrollada por Logan en los laboratorios Bell en la década del 80. Es una modulación de fase que permite codificar la información de la señal moduladora en los instantes de conmutación de una señal binaria. La propuesta original de Logan está apuntada al procesamiento de señales de TC, y permite generar una señal con la información de banda base separada de los armónicos de alta frecuencia por una banda de guarda elegida por el diseñador. De esta manera se cumple con una de las premisas planteadas antes: la información puede ser recuperada sin distorsión con un demodulador simple, en este caso, un filtro pasabajos (FPB). La banda de guarda permite acomodar la frecuencia de la portadora de manera que la frecuencia de conmutación resultante es mucho menor que para un sistema basado en MAP de similares características espectrales, de manera que la eficiencia de la etapa conmutada es aumentada considerablemente. El mayor inconveniente de la modulación click es su complejidad que dificulta la implementación en hardware [53], o aún su versión fuera de línea [54] utilizando software de codificación corriendo en una PC.

Las primeras implementaciones de TD basadas en las ideas del modulador click propuesto por Logan fueron presentadas en [53, 55–60]. El sistema utiliza tres DSPs con aritmética de punto fijo en 24 bits desarrollando una potencia de cálculo total de 233 MMACs por segundo, un filtro interpolador de orden 8 integrado y dos FPGAs para el formador de pulsos de 10 bits de resolución, aún así resultando en una versión de ancho de banda reducido. En [59] se desarrolla la versión para la banda de audio completa, utilizando cinco DSPs en lugar de tres y aumentando la frecuencia de reloj de los FPGAs. Por otra parte en [61] se utiliza un conversor AD para muestrear las señales y alimentar un DSP que implementa el modulador en tiempo real. De manera similar a [59] el formador de pulsos es implementado en un FPGA. Una versión fuera de línea del modulador click de TD fue presentada por los autores de esta Tesis en [54], que es particularmente útil en aplicaciones de audio portátil o generación de señales. La idea se basa en calcular los

instantes de conmutación de la señal binaria utilizando un software de codificación que corre en una PC e implementa el modulador de TD [62]. La señal binaria es reconstruida a partir de estos tiempos de conmutación utilizando un módulo MAP de alta resolución y demodulada con un FPB.

Todas las implementaciones propuestas en la literatura [53–61] derivan el modulador digital utilizando el esquema exacto propuesto en [52], reemplazando cada una de las operaciones de procesamiento en TC por su equivalente de TD. Aunque algunos bloques pueden ser convertidos sin mayores inconvenientes, el componente clave del modulador click denominado Modulador Exponencial Analítico (MEA) no posee un equivalente exacto en TD debido a problemas de aliasing frecuencial. Aunque es posible plantear una versión aproximada del modulador click utilizando técnicas de interpolación, no se puede obtener el equivalente exacto al esquema de Logan para TC.

El objetivo de esta tesis es desarrollar un algoritmo de modulación que funcione a partir de señales muestreadas y posea las mismas características que el modulador click de TC. Aunque el enfoque está basado en el esquema propuesto por Logan en [52], el desarrollo presentado hace énfasis en implementaciones de TD. Para esto se presentan los problemas que aparecen en la conversión a TD de las operaciones que conforman el modulador click de TC, así como también las soluciones propuestas. Se plantea el marco teórico que permite representar el modulador digital utilizando las herramientas habituales de procesamiento digital de señales. Las características del sistema propuesto son:

- La señal de entrada es una secuencia de muestras o señal de TD.
- La información es mantenida en TD, sin la necesidad de reconvertir la información a TC o utilizar aproximaciones.
- La información frecuencial de la señal original se mantiene separada de los armónicos propios de la modulación. La banda de guarda puede ser elegida para cumplir con los requerimientos de la aplicación particular.
- Baja velocidad de conmutación comparada con esquemas MAP.

- Implementación de hardware muy sencilla utilizando la versión fuera de línea.
- Demodulación con FPB o funcionamiento sin filtro en algunas aplicaciones.
- Posibilidad de utilizar algoritmos de FFT directa e inversa para los cálculos, permitiendo la reducción de costo computacional.

El esquema de la Tesis es el siguiente. En el Capítulo 2 se presenta el esquema de modulación click para señales de TC. Se muestran los bloques constitutivos y se detalla el funcionamiento de cada uno de ellos en el dominio tiempo y frecuencia. Se comenta la estrecha relación que existe entre la modulación click y la MAP, demostrando que esta última es un caso particular de la modulación click que surge de aplicar simplificaciones. Además se analiza la relación entre la amplitud de la señal moduladora y la profundidad de modulación resultante, un aspecto no desarrollado hasta aquí en la literatura. El Capítulo 3 presenta los principales resultados y aportes de la investigación. En él se detalla el funcionamiento del MEA, de donde se ven los problemas que surgen en la implementación discreta. Se desarrolla el método denominado MEAF (MEA y filtrado simultáneo), que permite representar el modulador click de TC de manera ligeramente diferente al esquema original de una forma equivalente, pero eliminando los problemas de tener que representar señales de infinito contenido espectral. El análisis, desarrollado tanto para señales de TC como para señales de TD, dio como resultado una publicación en revista [63]. En el Capítulo 4 se presenta el modulador de TD completo utilizando el MEAF-TD del Capítulo 3 y complementando con los bloques faltantes. Para finalizar se realizan simulaciones y mediciones experimentales en el Capítulo 5, utilizando la implementación fuera de línea del modulador digital propuesto y un amplificador conmutado tipo puente. Se caracteriza el sistema completo con mediciones de distorsión armónica e intermodulación. Además se estudia el problema de la cuantización de los anchos de pulso, y se proponen e implementan los métodos de moldeo del ruido y dithering para mejorar este aspecto.

Capítulo 2

Modulador click continuo

2.1. Introducción

Existen diferentes métodos que pueden ser utilizados para generar señales binarias capaces de manejar etapas de amplificación clase D, siendo la MAP el esquema más utilizado en los últimos años. La principal ventaja de esta forma de modulación radica en la implementación, que consta en la comparación entre la señal moduladora y una portadora del tipo triangular o diente de sierra [4]. Con el advenimiento de los dispositivos portátiles y los medios de almacenamiento digital de la información, es deseable contar con un algoritmo de modulación que permita operar directamente en TD, sin la necesidad de reconvertir las señales a TC. Como se mencionó en el Capítulo 1 la versión de TD del modulador MAP resulta en la aparición de múltiples productos de intermodulación en la banda base difíciles de remover. Esto se debe a que la MAP es un esquema diseñado para operar correctamente en TC, siendo sus versiones de TD meras aproximaciones que intentan reproducir el comportamiento ideal.

La modulación click [52] es una alternativa interesante frente a la MAP. Sus principales características son: baja velocidad de conmutación y banda base libre de distorsión. Aunque el modulador click parece superior al modulador MAP, este también es un esquema que fue desarrollado para procesar señales de TC. La implementación de TD del modulador click resulta normalmente en aproximaciones y problemas de aliasing, difíciles

o imposibles de resolver. Estos inconvenientes han relegado el uso del modulador click, haciendo que se prefieran otros métodos.

El objetivo de este capítulo es explicar el funcionamiento del modulador click de TC. Se analizan cuidadosamente todas las operaciones, identificando los bloques más problemáticos y preparando el camino para la implementación discreta. Además, se estudia la estrecha relación entre la modulación click y la MAP. Se demuestra que la modulación MAP convencional es una simplificación del modulador click que resulta en un reducido costo de implementación, sacrificando la característica de banda base libre de distorsión. Por último se analizan los límites de amplitud que deben imponerse a la señal moduladora para evitar la sobre modulación.

2.2. Señales binarias con banda base separada

La generación de señales utilizando modulación click está basada en los desarrollos de Bedrosian [64] y Logan [65], que están contenidos en una teoría más general de codificación de señales del tipo pasabanda mediante los cruces por cero de funciones auxiliares [66].

En [64] se muestran los aspectos generales de la teoría de modulación y se introduce el concepto de modulación analítica, que se refiere a la utilización de señales cuyo contenido espectral queda contenido en el eje positivo de frecuencias. Estas señales analíticas toman valores en el campo complejo, y poseen todas las propiedades de las funciones analíticas estudiadas en la teoría de funciones de variable compleja [67]. Los fundamentos básicos para desarrollar la modulación click fueron dados por Logan en [52, 68–70].

En la Fig. 2.1 se muestra el diagrama en bloques del modulador click de TC. Es un esquema complicado y de difícil implementación analógica si se lo contrasta con la MAP. Los elementos que dificultan la implementación son: la generación de la señal analítica con el filtro $h_A(t)$, el MEA y la detección de los cruces por cero. Sin embargo, algunas ventajas que serán presentadas a lo largo de este capítulo la convierten en una alternativa interesante frente a la MAP. La verdadera potencialidad de la modulación click aparece cuando se implementa de manera discreta, como se verá en los capítulos siguientes. A

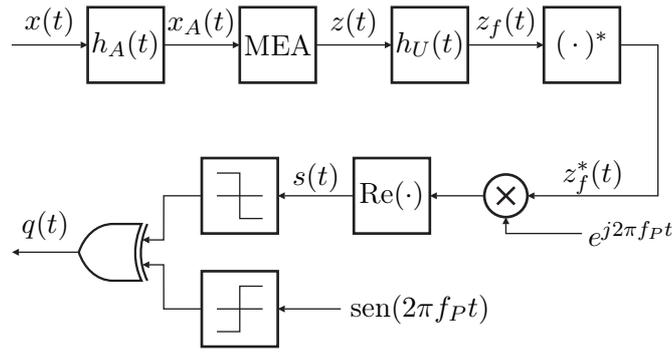
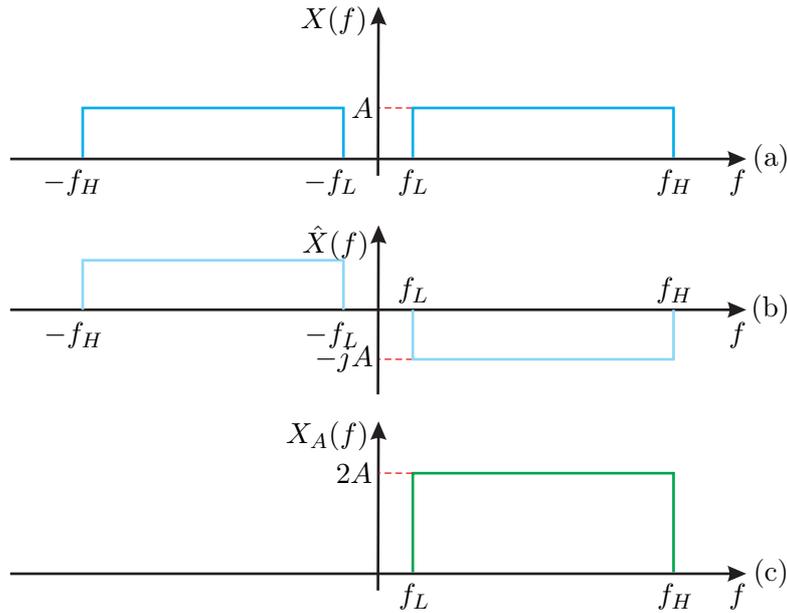


Figura 2.1: Diagrama en bloques del modulador click de TC.


 Figura 2.2: Relación entre los espectros $X(f)$, $\hat{X}(f)$ y $X_A(f)$.

continuación se explora el mecanismo de la modulación click describiendo la operación de cada uno de los bloques de la Fig. 2.1. Para un análisis más detallado es recomendable consultar [52].

La señal moduladora $x(t)$ es acotada y sus componentes frecuenciales están contenidas en el rango $[-f_H, -f_L]$ y $[f_L, f_H]$, donde $0 < f_L < f_H < \infty$. El espectro $X(f)$ de la señal $x(t)$ se muestra en la Fig. 2.2 (a) . Esta señal se filtra con un transformador de Hilbert con respuesta en frecuencia dada por:

$$H_H(f) = \begin{cases} +j, & \text{si } f < 0, \\ 0, & \text{si } f = 0, \\ -j, & \text{si } f > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

y respuesta impulsiva

$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad t \neq 0. \quad (2.2)$$

De esta manera, la transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ de la señal $x(t)$ está dada por la convolución

$$\hat{x}(t) = x(t) * h_H(t), \quad (2.3)$$

o en el dominio frecuencia por el producto

$$\hat{X}(f) = X(f)H_H(f). \quad (2.4)$$

Los espectros $X(f)$ y $\hat{X}(f)$ se muestran en las figuras 2.2 (a) y (b), respectivamente. Combinando la señal de entrada $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ se obtiene la señal analítica:

$$x_A(t) = x(t) + j\hat{x}(t). \quad (2.5)$$

El espectro $X_A(f)$ de la señal analítica $x_A(t)$ es distinto de cero sólo para los valores positivos de frecuencia como puede observarse en la Fig. 2.2 (c). La señal analítica puede ser generada con un único filtro que remueve las componentes de frecuencia negativa. A este filtro se lo denominará $h_A(t)$ y su representación frecuencial puede encontrarse si se escribe el espectro de la señal analítica como:

$$\begin{aligned} X_A(f) &= X(f) + j\hat{X}(f) \\ &= X(f) + jH_H(f)X(f) \\ &= [1 + jH_H(f)] X(f) \\ &= H_A(f)X(f). \end{aligned} \quad (2.6)$$

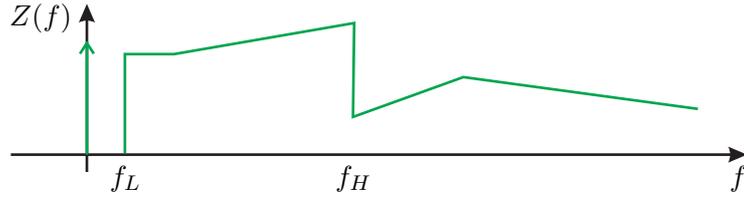


Figura 2.3: Espectro de la señal a la salida del MEA $z(t)$.

El espectro $H_A(f)$ del filtro analítico está dado por

$$H_A(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f < 0, \\ 1, & \text{si } f = 0, \\ 2, & \text{si } f > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

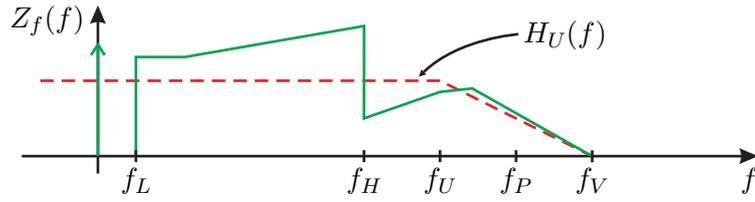
La segunda etapa se denomina modulación exponencial analítica y corresponde al bloque MEA de la Fig. 2.1, con su salida dada por

$$z(t) = e^{-jx_A(t)}. \quad (2.8)$$

La información de la señal de entrada está contenida en la fase de $z(t)$. Esto se puede verificar si se escribe $z(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$, donde la fase $\phi(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \arg \{ e^{-jx_A(t)} \} \\ &= \arg \{ e^{-j(x(t)+j\hat{x}(t))} \} \\ &= \arg \{ e^{\hat{x}(t)-jx(t)} \} \\ &= -x(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como $x_A(t)$ es analítica, el espectro de $z(t)$ tiene componentes solamente en el eje positivo de frecuencias, pero su ancho de banda es ilimitado como sugiere la Fig. 2.3. El hecho de que $z(t)$ se extienda infinitamente sobre el eje positivo de frecuencias resulta problemático al implementar la versión discreta del modulador click. El principal aporte de esta Tesis radica en solucionar este problema. Como se verá en el capítulo siguiente, aunque la señal $z(t)$ no puede ser representada en TD, aún es posible encontrar una implementación del


 Figura 2.4: Espectro de la señal filtrada $z_f(t)$.

modulador click de TD sin utilizar aproximaciones y evitando los problemas de aliasing.

El siguiente bloque en la cadena de modulación es el FPB con respuesta en frecuencia dada por

$$H_U(f) = \begin{cases} 1, & \text{si } |f| < f_U, \\ 0, & \text{si } |f| > f_U, \end{cases} \quad (2.10)$$

y respuesta impulsiva $h_U(t)$, donde $0 < f_L < f_H < f_U < f_V$. La banda de guarda queda definida entre f_H y f_U y sirve para proteger la información contenida en la señal de entrada durante el proceso de modulación y asegurar que no existan componentes de distorsión en el rango de frecuencias $[0, f_U]$ [52]. Aquí es importante mencionar que el filtro $H_U(f)$ es pasabajos, a diferencia del filtro pasabanda utilizado en el trabajo original de Logan sobre modulación click. Aunque en [52] la señal moduladora es pasabanda, este no es un requerimiento necesario para que el modulador click funcione correctamente.

La señal filtrada $z_f(t)$ está dada por la convolución entre $z(t)$ y el filtro $h_U(t)$:

$$z_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \cdot h_U(t - \tau) d\tau, \quad (2.11)$$

y su espectro tiene la forma cualitativa que se muestra en la Fig. 2.4, junto con la respuesta en frecuencia del FPB. Los espectros de las señales $z(t)$ y $z_f(t)$ coinciden en el intervalo de frecuencias $[-\infty, f_U]$.

Ahora se define la señal $u(t)$ como:

$$\begin{aligned} u(t) &= z_f(t) + e^{j2\pi(2f_P)t} z_f^*(t) \\ &= e^{j2\pi f_P t} [z_f(t) e^{-j2\pi f_P t} + z_f^*(t) e^{j2\pi f_P t}], \end{aligned} \quad (2.12)$$

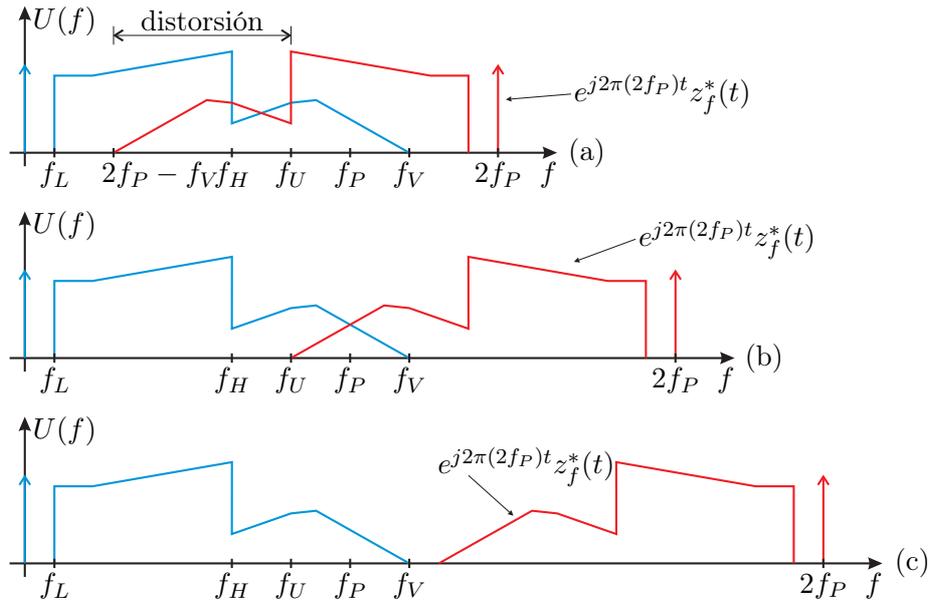


Figura 2.5: Obtención de $u(t)$: (a) f_P muy pequeña, (b) límite inferior para f_P y (c) f_P mayor que el mínimo.

donde $z_f^*(t)$ es el complejo conjugado de $z_f(t)$ y f_P la frecuencia de la portadora dada por:

$$p(t) = \text{sen}(2\pi f_P t). \quad (2.13)$$

Por las propiedades de la transformada de Fourier, el espectro de la señal $z_f^*(t)$ es nulo fuera del rango $[-f_V, 0]$ ya que es la versión espejada del espectro de $z_f(t)$. Por lo tanto el espectro de

$$e^{j2\pi(2f_P)t} z_f^*(t)$$

es distinto de cero para $f \in [2f_P - f_V, 2f_P]$. Para que los espectros de las señales $z(t)$ y $u(t)$ coincidan en $[-\infty, f_U]$ es importante evitar el solapamiento al realizar la operación de corrimiento en frecuencia. En la Fig. 2.5 se muestran los tres casos posibles. En el caso (a) la frecuencia de la portadora es demasiado pequeña. Para esta situación los espectros de $z(t)$ y $u(t)$ serán coincidentes sólo en el intervalo $[-\infty, 2f_P - f_V]$. La señal a la salida del modulador click contendrá componentes de distorsión a partir de $2f_P - f_V$, violando la propiedad de banda base separada. Para el caso de la Fig. 2.5 (b) la portadora toma el mínimo valor posible que asegura que no aparezcan componentes de distorsión en la banda de guarda. El valor de f_P se puede despejar fácilmente observando que se debe cumplir $2f_P - f_V = f_U$, de donde se obtiene $f_P = (f_U + f_V)/2$. El último caso representado en

la Fig. 2.5 (c) corresponde a f_P mayor al mínimo necesario. Claramente no aparecerán componentes de distorsión en la señal modulada. La frecuencia de conmutación de la señal binaria resultante será mayor que en el caso anterior, aunque la banda libre de distorsión será la misma. En definitiva, conviene utilizar siempre $f_P = (f_U + f_V) / 2$ y de ser necesario aumentar la frecuencia de corte del filtro $h_U(t)$. Suponiendo entonces que se cumple $2f_P - f_V \geq f_U$, resulta que los espectros de las señales $z(t)$, $z_f(t)$ y $u(t)$ son idénticos en el intervalo $[-\infty, f_U]$.

Para continuar es conveniente escribir (2.12) como la versión desplazada en frecuencia de una señal real. Trabajando con la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= e^{j2\pi f_P t} [z_f(t)e^{-j2\pi f_P t} + z_f^*(t)e^{j2\pi f_P t}] \\
 &= e^{j2\pi f_P t} [z_f(t)e^{-j2\pi f_P t} + (z_f(t)e^{-j2\pi f_P t})^*] \\
 &= e^{j2\pi f_P t} [2\text{Re} \{z_f(t)e^{-j2\pi f_P t}\}] \\
 &= 2e^{j2\pi f_P t} s(t),
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde la señal real $s(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \text{Re} \{z_f(t)e^{-j2\pi f_P t}\} \\
 &= \frac{1}{2} [z_f(t)e^{-j2\pi f_P t} + z_f^*(t)e^{j2\pi f_P t}].
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

La señal $s(t)$ está limitada en banda entre $[-f_P, f_P]$ y sus cruces por cero codifican la información de la señal de entrada $x(t)$. El hecho de que $s(t)$ codifique la información correspondiente a la señal moduladora $x(t)$ en sus cruces por cero no resulta trivial. Se volverá sobre este aspecto cuando se obtenga la representación mediante una onda cuadrada. En la Fig. 2.1 se ven las operaciones necesarias para obtener $s(t)$ y en la Fig. 2.6 se muestra su espectro .

El paso siguiente es comparar los espectros de las señales obtenidas al aplicar la operación inversa a la exponenciación, es decir, el logaritmo natural. La señal $u(t)$ es analítica ya que su contenido frecuencial negativo es nulo. Por lo tanto su continuación analítica $u(w)$, con $w = t + j\sigma$, está libre de singularidades en el semiplano complejo

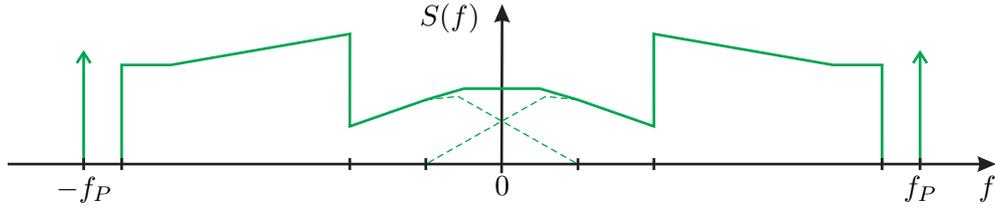


Figura 2.6: Espectro de la señal real $s(t)$.

positivo $\sigma > 0$. Entonces $\ln [u(w)]$ es analítica en el semiplano complejo positivo. Se quiere comparar esta función con $\ln [z(w)] = -jx_A(w)$, que también está libre de singularidades en el semiplano complejo positivo. Como los espectros de $u(t)$ y $z(t)$ coinciden en el rango de frecuencias $[-\infty, f_U]$ y las funciones $\ln [z(w)]$ y $\ln [u(w)]$ no contienen singularidades en el semiplano complejo positivo, resulta que las transformadas de Fourier de estas funciones también coinciden en el intervalo $[-\infty, f_U]$, esto es, los espectros de las funciones

$$x_A(t) = j \ln [z(t)]$$

y

$$j \ln [u(t)]$$

coinciden para $f \in [-\infty, f_U]$. Como se demuestra en [52] es condición necesaria que los ceros de $s(w)$, la continuación analítica de $s(t)$, sean reales y simples. Esta condición se verifica siempre que $z_f(w)$ esté libre de ceros en el semiplano complejo positivo cerrado $\sigma \geq 0$ [71].

Por lo tanto si $z_f(w)$, la continuación analítica de $z_f(t)$ obtenida limitando en banda $z(t)$, no tiene ceros en el semiplano complejo positivo $\sigma \geq 0$, entonces la función $\ln [z_f(w)]$ es analítica en el semiplano complejo positivo y la transformada de Fourier de las funciones

$$x_A(t) = j \ln [z(t)],$$

$$j \ln [u(t)]$$

y

$$j \ln [z_f(t)]$$

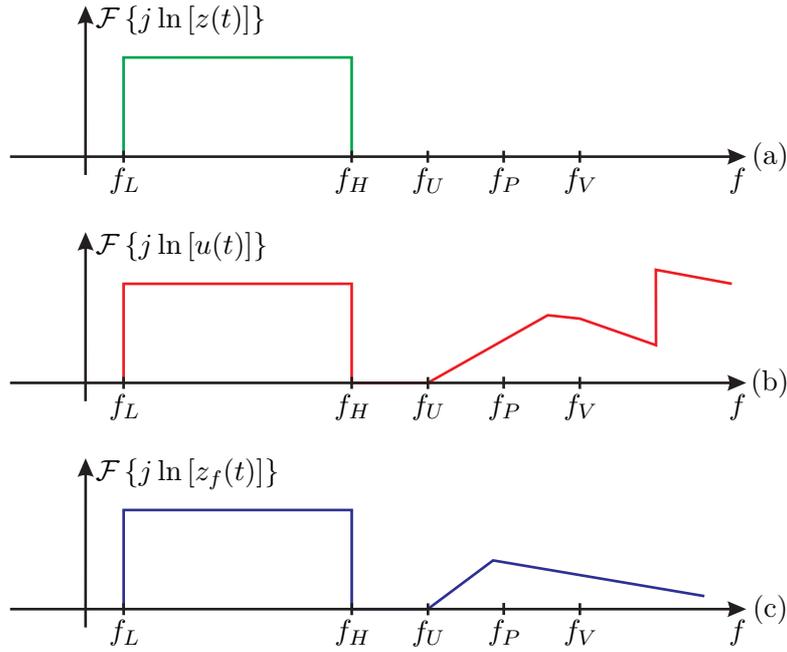


Figura 2.7: Comparación de los espectros: (a) $f_A(t) = j \ln[z(t)]$, (b) $j \ln[u(t)]$ y (c) $j \ln[z_f(t)]$.

coinciden en la banda de frecuencias $[-\infty, f_U]$ como se muestra en la Fig. 2.7. Esto significa que, por las propiedades de las señales analíticas, los espectros de la parte real (o imaginaria) de estas funciones serán idénticos en la banda de frecuencias $[-f_U, f_U]$. La parte real del logaritmo natural de $z(t)$ resulta de particular interés ya que es la señal de entrada:

$$\operatorname{Re}\{j \ln[z(t)]\} = x(t). \quad (2.16)$$

La parte real de $j \ln[u(t)]$ se define como una nueva función $h(t)$ que será utilizada posteriormente para obtener la representación de la modulación click mediante una onda cuadrada. Por lo dicho:

$$\operatorname{Re}\{j \ln[u(t)]\} = h(t). \quad (2.17)$$

Lo mismo puede hacerse con la señal filtrada $z_f(t) = A_f(t)e^{j\phi_f(t)}$. Al aplicar el logaritmo

y extraer la parte real del resultado se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \{j \ln [z_f(t)]\} &= \operatorname{Re} \{j \ln [A_f(t)e^{j\phi_f(t)}]\} \\
 &= \operatorname{Re} \{j (\ln [A_f(t)] + j\phi_f(t))\} \\
 &= \operatorname{Re} \{-\phi_f(t) + j \ln [A_f(t)]\} \\
 &= -\phi_f(t).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

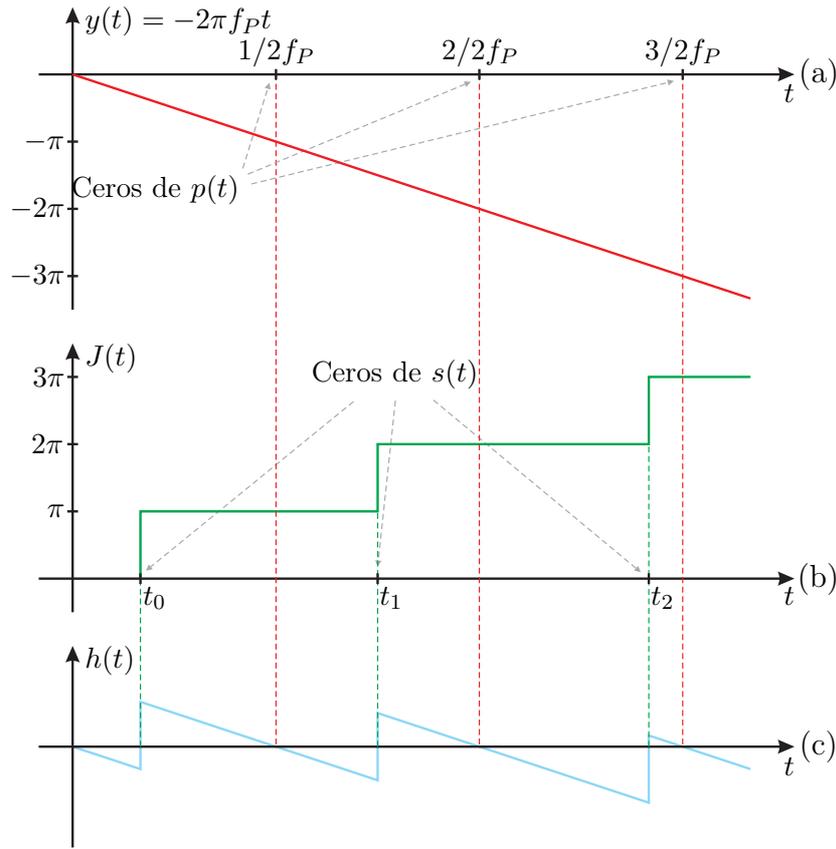
En conclusión, los espectros de las señales reales $x(t)$, $h(t)$ y $-\phi_f(t)$ coinciden en la banda de frecuencias $[-f_U, f_U]$. La representación frecuencial de estas señales se obtiene a partir de las versiones analíticas de la Fig. 2.7, tomando el complejo conjugado y espejando alrededor de 0.

2.2.1. Representación mediante una onda cuadrada

Para derivar la señal binaria cuyo espectro en banda base coincide con el de la señal moduladora $x(t)$, se comienza analizando la forma de la señal real $h(t)$ introducida en la sección anterior (el espectro de la señal de entrada $x(t)$ y el espectro de $h(t)$ coinciden en la banda de frecuencias $[-f_U, f_U]$). Reemplazando $u(t)$ en (2.17) y operando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \operatorname{Re} \{j \ln [2e^{j2\pi f_P t} s(t)]\} \\
 &= \operatorname{Re} \{j \ln [e^{j2\pi f_P t}] + j \ln [2s(t)]\} \\
 &= \operatorname{Re} \{j (\ln |e^{j2\pi f_P t}| + j \arg \{e^{j2\pi f_P t}\}) + j (\ln |2s(t)| + j \arg \{2s(t)\})\} \\
 &= \operatorname{Re} \{-2\pi f_P t - \arg \{2s(t)\} + j \ln |2s(t)|\} \\
 &= J(t) - 2\pi f_P t,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $J(t) = -\arg \{2s(t)\}$ es una función que da saltos de valor π cada vez que la señal real $s(t)$ cruza por cero. Se puede definir sin pérdida de generalidad que tanto $J(t)$ como $h(t)$ valen cero en el instante inicial, es decir, $J(0) = h(0) = 0$. Cuando t crece, $h(t)$ se hace negativa ya que se trata de una recta de pendiente $-2\pi f_P$. En el instante en el que $s(t)$ cruza por cero, la función $J(t)$ da un salto de π haciendo que $h(t)$ también de un salto de π . Los instantes de tiempo en los que $J(t)$ da los saltos dependen de $s(t)$ y por


 Figura 2.8: Ceros de la señal $h(t)$ a partir de la portadora y $s(t)$.

consiguiente de la moduladora $x(t)$, y es por esto que se dice que $s(t)$ codifica en sus cruces por cero la información correspondiente a la señal de entrada. Los otros cruces por cero de $h(t)$ (parte recta descendiendo) son fijos y dependen solamente del valor de f_P , bajo determinadas condiciones de amplitud de $x(t)$. Para encontrar la condición que deben cumplir los ceros de $s(t)$, es de interés analizar los instantes de tiempo en los que la recta $-2\pi f_P t$ cruza las líneas $k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Esta situación se muestra en la Fig. 2.8 (a) para los valores $k = -1, -2$ y -3 . Los instantes de tiempo en los que la recta cruza las líneas $k\pi$ son $t = -k/(2f_P)$. Por otra parte en la Fig. 2.8 (b) se muestra la función $J(t)$ y el resultado de la suma para obtener $h(t)$, representada en la Fig. 2.8 (c). Al realizar la suma para obtener $h(t)$, se puede ver que ahora los cruces por las líneas $k\pi$ son todos convertidos en cruces por cero en los instantes $t = -k/(2f_P)$, siempre que $J(t)$ tenga un solo salto en el intervalo:

$$\frac{-(k+1)}{2f_P} \leq t \leq -\frac{k}{2f_P}. \quad (2.20)$$

Esta condición asegura que el modulador funciona correctamente y que el espectro de la

señal resultante no contiene componentes de distorsión en el rango $[-f_U, f_U]$.

La restricción anterior sobre los ceros de $s(t)$ asegura que $|h(t)| < \pi$, que se puede verificar fácilmente de la figura tomando los valores extremos para los cruces por cero. Aprovechando el hecho de que $h(k/(2f_P)) = 0$ y que $|h(t)| < \pi$, la onda cuadrada buscada $q(t)$ se puede obtener restando de $h(t)$ la señal diente de sierra dada por

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{\pi}{2} - 2\pi f_P t, & 0 < t < \frac{1}{2f_P} \\ \sigma(t) &= \sigma\left(t + \frac{1}{2f_P}\right) \\ \sigma(0) &= 0.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Esta señal no tiene componentes frecuenciales entre $[-2f_P, 2f_P]$ como se puede demostrar fácilmente mediante la expansión en series de Fourier. Si se resta $\sigma(t)$ de $h(t)$ se obtiene una señal cuadrada

$$\begin{aligned}q(t) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\{h(t)\} \\ &= h(t) - \sigma(t) \\ &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\{s(t)\} \operatorname{sgn}\{p(t)\}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Finalmente, como la señal $\sigma(t)$ no contiene componentes frecuenciales entre $[-2f_P, 2f_P]$, los espectros de las señales $h(t)$ y $q(t)$ coinciden entre $[-f_U, f_U]$. La obtención de $q(t)$ a partir de $h(t)$ y $\sigma(t)$ se muestra en las figuras 2.9 (a)–(c).

La tercera expresión en (2.22) sugiere una forma elegante de cómo construir $q(t)$ a partir de $s(t)$. Para derivar $q(t)$ se necesitan calcular los cruces por cero de la señal real $s(t)$ y la portadora. En realidad, esta última no necesita calcularse pues se trata de una señal senoidal y de frecuencia conocida. Como se ve en la Fig. 2.9 (c), $q(t)$ es una onda cuadrada y se construye colocando los flancos de subida en los ceros de $s(t)$ y los flancos de bajada en los ceros de la portadora. La frecuencia de conmutación es $2f_P$ ya que al colocar un flanco en los ceros de la portadora, el período de la onda cuadrada $q(t)$ se corresponde con medio período de la portadora. La obtención de $q(t)$ a partir de los signos de $s(t)$ y de $p(t)$ se representa en las figuras 2.9 (d)–(f).

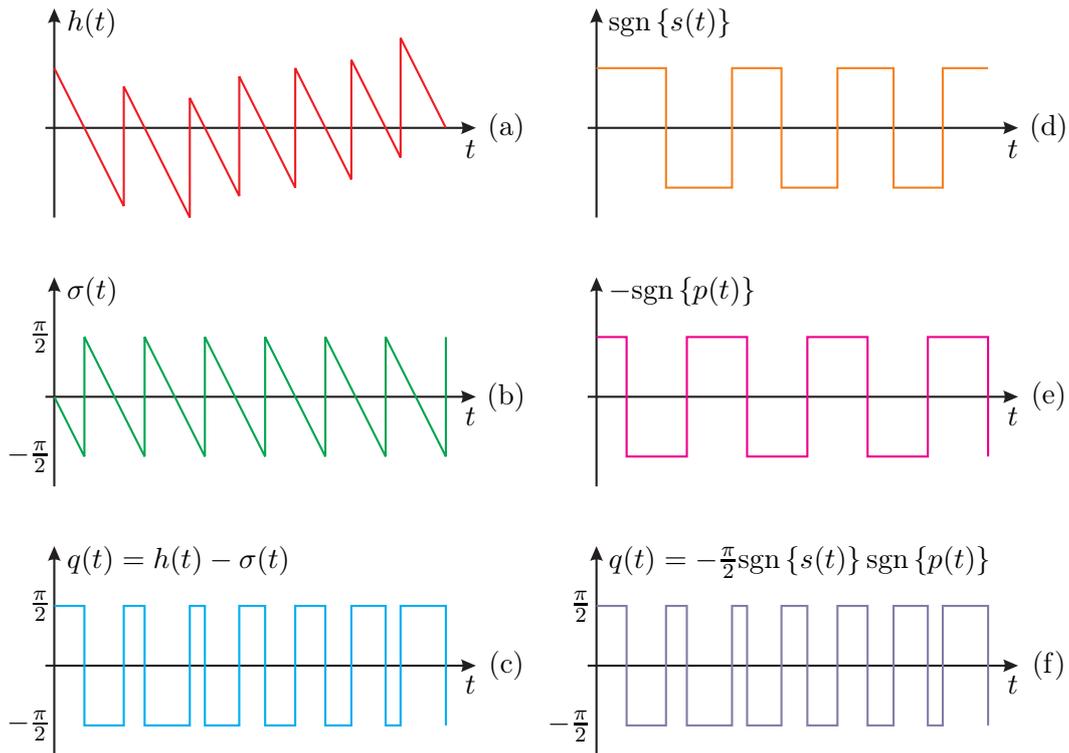


Figura 2.9: Señales que intervienen en el proceso de modulación click.

El espectro $Q(f)$ de la señal cuadrada $q(t)$ se puede ver en la Fig. 2.10, donde se muestra también la respuesta en frecuencia $H_R(f)$ del FPB reconstructor con respuesta impulsiva $h_R(t)$ que permite recuperar la señal de entrada:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) \cdot h_R(t - \tau) d\tau. \quad (2.23)$$

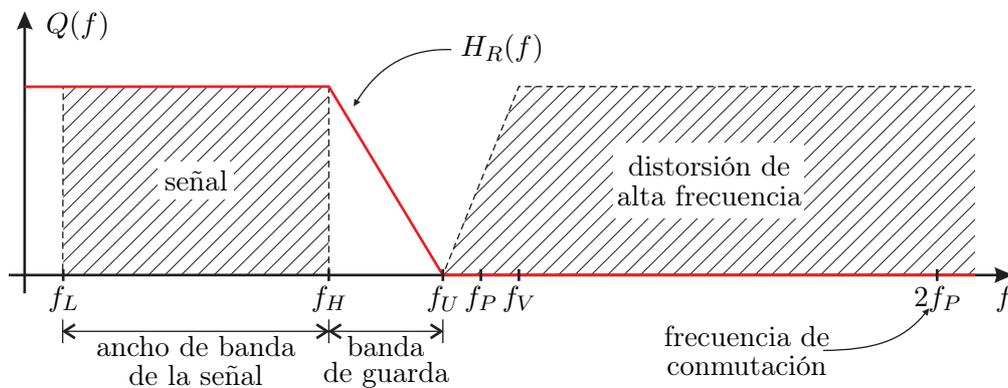


Figura 2.10: Espectro de la señal $q(t)$.

2.3. Relación entre la modulación click y la MAP

Existe una relación estrecha entre la modulación click y la MAP. El objetivo de esta sección es analizar este vínculo, destacando las similitudes y diferencias. Al final de la sección se demostrará que la MAP es una versión simplificada de la modulación click que permite una implementación sencilla, a expensas de la aparición de armónicos espurios en banda base.

2.3.1. Derivación de la MAP a partir de la modulación click

Es posible escribir la señal $s(t)$ como una modulación simultánea de amplitud y fase a partir de (2.15):

$$s(t) = A_f(t) \cos(2\pi f_P t - \phi_f(t)), \quad (2.24)$$

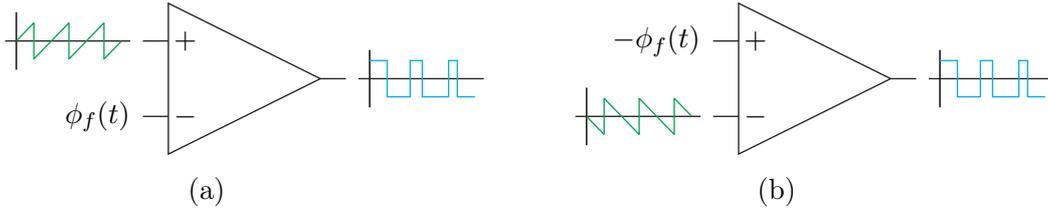
es decir, $A_f(t)$ es la parte de modulación de amplitud y $-\phi_f(t)$ la modulación de ángulo de la portadora $\cos(2\pi f_P t)$. Para la modulación click interesan los cruces por cero de $s(t)$, que concuerdan con los ceros de la señal modulada en fase dada por:

$$\Phi_f(t) = \cos(2\pi f_P t - \phi_f(t)), \quad (2.25)$$

de donde se puede decir que $\text{sgn}\{s(t)\} = \text{sgn}\{\Phi_f(t)\}$. Usando esta nueva función la señal cuadrada $q(t)$ se puede escribir como:

$$q(t) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}\{\cos(2\pi f_P t - \phi_f(t))\} \text{sgn}\{p(t)\}. \quad (2.26)$$

Los ceros de la señal modulada en fase ocurren cuando $2\pi f_P t - \phi_f(t) = (2k + 1)\pi/2$. Es decir que es equivalente calcular los ceros de la señal modulada en fase $\Phi_f(t)$ o encontrar el instante t en el que se cumple:


 Figura 2.11: Generación de $q(t)$ utilizando un modulador MAP convencional.

$$\begin{aligned}
 -\phi_f(t) &= (2k + 1) \frac{\pi}{2} - 2\pi f_P t \\
 -\phi_f(t) &= \sigma(t) \\
 \phi_f(t) + \sigma(t) &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

para $k/(2f_P) < t < (k + 1)/(2f_P)$. La última línea de la ecuación anterior explicita los instantes de tiempo en los que $\phi_f(t) + \sigma(t)$ cruza por cero, que coinciden con los de $\text{sgn} \{ \phi_f(t) + \sigma(t) \}$. Utilizando esta nueva notación se puede escribir $q(t)$ como:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= -\frac{\pi}{2} \text{sgn} \{ \phi_f(t) + \sigma(t) \} \\
 &= \frac{\pi}{2} \text{sgn} \{ -\phi_f(t) - \sigma(t) \},
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

que es la manera convencional de generar una señal modulada por ancho de pulsos. Las dos formas alternativas de la ecuación anterior se muestran esquemáticamente en la Fig. 2.11. En la Fig. 2.11 (a) está implementada la primera línea de (2.28). En este caso $q(t)$ se genera comparando la señal moduladora $\phi_f(t)$ con la portadora $-\sigma(t)$. En esta versión la señal diente de sierra tiene pendiente positiva. En la Fig. 2.11 (b) se muestra la implementación alternativa utilizando la segunda línea de (2.28). Aquí se utiliza como moduladora la señal $-\phi_f(t)$ y como portadora $\sigma(t)$, que es una señal diente de sierra de pendiente negativa. Es importante respetar el orden de las entradas en los comparadores para que las dos formas sean equivalentes y resulten en la misma señal binaria $q(t)$.

El proceso de modulación click puede ser visto entonces como una parte de modulación, para generar la señal $\phi_f(t)$, y una parte de detección de cruces por cero, que se resuelve con un modulador MAP convencional. La sutil diferencia entre la MAP y la

modulación click es el FPB $h_U(t)$ que limita en banda la salida del MEA. Si el filtro $h_U(t)$ es eliminado del esquema de la Fig. 2.1, las señales $z(t)$ y $z_f(t)$ serán exactamente iguales debido a la ausencia del filtro. En este caso, la parte que corresponde a la modulación de fase de la señal $s(t)$ se obtiene directamente a partir de la fase de $z(t)$ dada por (2.9), que no es más que la señal de entrada (multiplicada por -1). Utilizando esta igualdad se puede escribir la señal cuadrada como:

$$q_{\text{MAP}}(t) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn} \{ \cos(2\pi f_P t + x(t)) \} \text{sgn} \{ p(t) \}, \quad (2.29)$$

que se puede escribir también de la forma convencional:

$$\begin{aligned} q_{\text{MAP}}(t) &= -\frac{\pi}{2} \text{sgn} \{ -x(t) + \sigma(t) \} \\ &= \frac{\pi}{2} \text{sgn} \{ x(t) - \sigma(t) \}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

El esquema para generar la señal binaria en este caso es el mismo que en la Fig. 2.11, reemplazando $\phi_f(t)$ por $-x(t)$.

2.3.2. Espectro de la MAP a partir del espectro de la modulación click

El último aspecto que hay que analizar para finalizar el análisis de similitudes y diferencias entre la MAP y la modulación click es el espectro. El espectro de la señal binaria resultante utilizando modulación click ya se mostró en la sección anterior y es el de la Fig. 2.10. La principal característica es que las componentes de la señal quedan separadas de los armónicos de alta frecuencia. Como se comentó al principio de esta sección, esta característica es imposible de obtener para la MAP. Para comprender este hecho hay que observar cuidadosamente los espectros de las señales $z(t)$ y $z_f(t)$, ya que como se probó antes la diferencia entre la MAP y la modulación click radica en el FPB de respuesta impulsiva $h_U(t)$.

Cuando se derivó la señal $u(t)$ dada por (2.12) se encontró el mínimo valor que debe tomar la portadora f_P para evitar el solapamiento entre los espectros de las señales

$z_f(t)$ y $e^{j2\pi(2f_P)t}z_f^*(t)$. Este análisis es válido siempre que la señal $z_f(t)$ sea limitada en banda. Cuando el FPB $h_U(t)$ se elimina de la cadena de modulación $u(t)$ se puede escribir simplemente en función de $z(t)$, la salida del MEA sin filtrar. Para evitar confusión se notará $\tilde{u}(t)$ a esta nueva señal:

$$\tilde{u}(t) = z(t) + e^{j2\pi(2f_P)t}z^*(t). \quad (2.31)$$

El problema es ahora elegir el valor de f_P para que los espectros de $z(t)$ y $\tilde{u}(t)$ sean iguales en $[-\infty, f_U]$. Como $z(t)$ se extiende infinitamente sobre el eje positivo de frecuencias, no existe un valor de f_P que evite el solapamiento. El efecto del solapamiento hace que la señal binaria resultante del proceso de modulación tenga componentes de distorsión en toda la banda base. Se puede disminuir el efecto si se aumenta considerablemente la frecuencia de la portadora f_P . De todas formas, siempre aparecerán armónicos en banda base (aunque estén muy atenuados).

2.4. Profundidad de modulación

Para que el proceso de modulación click funcione correctamente es necesario que los ceros de la señal $s(t)$ y la portadora $p(t)$ estén intercalados. En el artículo de Logan sobre modulación click se menciona que la señal $\phi_f(t)$ debe ser menor (en módulo) a $\pi/2$ para que se cumpla esta propiedad. Sin embargo, no resulta trivial encontrar límites para el máximo valor de amplitud que puede tomar la señal de entrada $x(t)$. El objetivo de esta sección es encontrar el límite máximo teórico de amplitud para una señal de entrada compuesta por un único tono, de frecuencia variable en toda la banda base, respetando la propiedad de intercalado de los ceros para la modulación click.

2.4.1. Intercalado de los ceros y desvío de fase

Para armar la señal binaria $q(t)$ se intercalan los ceros de la señal modulada en fase Φ_f dada por (2.25) (que coinciden con los ceros de $s(t)$) y la portadora $p(t)$ dada por (2.13). Cuando la señal $\phi_f(t)$ es muy pequeña resulta que $\Phi_f(t) \approx \cos(2\pi f_P t)$. En este

caso, los ceros de $\Phi_f(t)$ y $p(t)$ están intercalados por tratarse de dos señales senoidales de la misma frecuencia desfasadas $\pi/2$. Se define el desvío de fase en función del tiempo como la diferencia instantánea entre el ángulo de la señal modulada en fase $\Phi_f(t)$ y el ángulo de la señal $\cos(2\pi f_P t)$:

$$\begin{aligned}\Delta\phi(t) &= 2\pi f_P t - \phi_f(t) - 2\pi f_P t \\ &= -\phi_f(t).\end{aligned}\tag{2.32}$$

De la ecuación anterior se puede definir el desvío de fase máximo:

$$\Delta\phi_M = \text{máx} \{|\phi_f(t)|\}.\tag{2.33}$$

Es fácil ver que si $\Delta\phi_M < \pi/2$, los ceros de $\Phi_f(t)$ y $p(t)$ están intercalados.

2.4.2. Desvío de fase en función de la frecuencia

La obtención de la señal $\phi_f(t)$ que permite calcular el desvío de fase es complicada, ya que es el resultado de aplicar toda la cadena de modulación click a la señal de entrada (salvo los cruces por cero). Sin embargo, se puede hacer un análisis simplificado y encontrar los valores límites que puede tomar la señal $x(t)$ sin violar la propiedad de intercalado de los ceros. Para esto, se supone que la señal de entrada está compuesta por un único tono de frecuencia f_0 y amplitud de pico a_0 , esto es $x(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t)$. En este caso la transformada de Hilbert resulta trivial y está dada por $\hat{x}(t) = a_0 \sin(2\pi f_0 t)$. La señal analítica es $x_A(t) = a_0 e^{j2\pi f_0 t}$. La amplitud a_0 que puede tomar $x(t)$ sin violar la propiedad de intercalado de ceros para la modulación click es una función de la frecuencia, $a_0 = a_0(f)$. Para comprender este hecho es útil expresar la operación de exponenciación

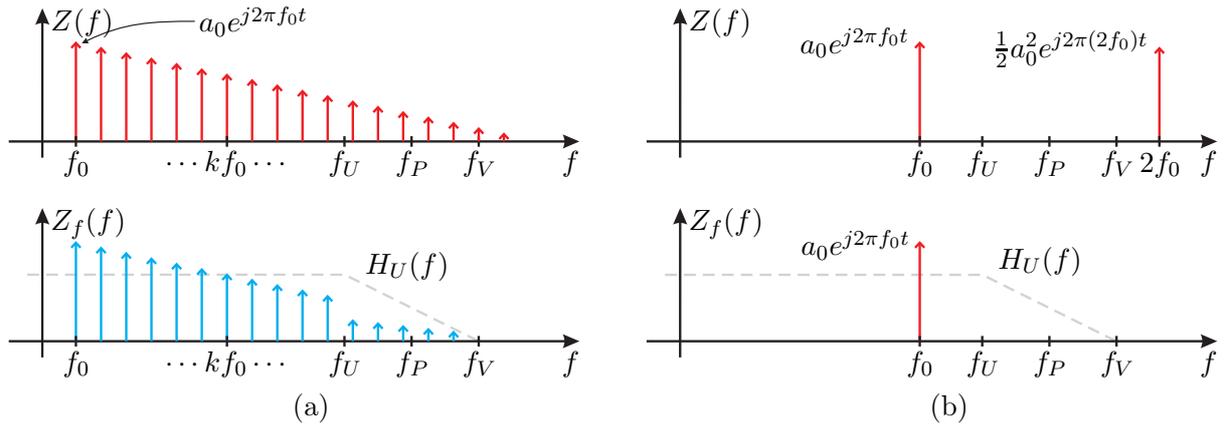


Figura 2.12: Relación entre los espectros de las señales $z(t)$ y $z_f(t)$ para (a) $f_0 \ll f_P$ y (b) $f_0 \approx f_P$.

ejecutada por el MEA como una serie de potencias:

$$\begin{aligned}
 e^{-jx_A(t)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jx_A(t))^k}{k!} \\
 &= 1 + \frac{(-jx_A(t))^1}{1!} + \frac{(-jx_A(t))^2}{2!} + \frac{(-jx_A(t))^3}{3!} + \dots \\
 &= 1 - jx_A(t) - \frac{1}{2}x_A^2(t) + \frac{j}{6}x_A^3(t) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Reemplazando $x_A(t) = a_0 e^{j2\pi f_0 t}$ en la ecuación anterior:

$$e^{-jx_A(t)} = 1 - ja_0 e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2}a_0^2 e^{j2\pi(2f_0)t} + \frac{j}{6}a_0^3 e^{j2\pi(3f_0)t} + \dots \tag{2.35}$$

Los términos de mayor orden agregan armónicos (múltiplos) de la frecuencia fundamental f_0 . Al aplicar el filtro $h_U(t)$ para derivar $z_f(t)$, las componentes que están por encima de f_U son atenuadas, y las que están a partir de f_V se eliminan por completo. Para simplificar el análisis se supone que la frecuencia de la portadora es $f_P = (f_U + f_V)/2$. Haciendo esta suposición, se analizan a continuación los dos casos extremos para la frecuencia de la moduladora: f_0 pequeña comparada con la frecuencia de la portadora y f_0 cercana a la frecuencia de la portadora.

Análisis para $f_0 \ll f_P$

Una gran cantidad de componentes armónicos de f_0 caen en banda base. La señal

filtrada $z_f(t)$ resulta casi igual a $z(t)$, como se puede apreciar en la Fig. 2.12 (a). Haciendo la aproximación $z_f(t) \approx z(t)$, resulta que $\phi_f(t) \approx -x(t)$. De esta forma la señal $\Phi_f(t)$ se puede aproximar como una modulación de fase convencional:

$$\Phi_f(t) \approx \cos(2\pi f_P t + x(t)). \quad (2.36)$$

Este hecho no es sorprendente, ya que al ser la frecuencia de la portadora f_P mucho mayor que la frecuencia de la moduladora f_0 el modulador click se comporta como un modulador MAP convencional con portadora diente de sierra. El desvío de fase máximo está dado por (2.33):

$$\begin{aligned} \Delta\phi_M &= \text{máx} |a_0 \cos(2\pi f_0 t)| \\ &= a_0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para respetar la propiedad de intercalado de los ceros este desvío de fase debe ser menor que $\pi/2$, es decir, cuando la señal de entrada $x(t)$ está compuesta por un tono único de frecuencia mucho menor que la portadora, la amplitud máxima admisible para el modulador click es $a_0 = \pi/2$.

Análisis para $f_0 \approx f_P$

En este caso el análisis no es tan directo como antes. Al ser la frecuencia de la moduladora cercana a la frecuencia que delimita la banda de guarda f_U , el filtro $h_U(t)$ elimina muchos componentes de $z(t)$ en la obtención de $z_f(t)$. El caso extremo se representa en la Fig. 2.12 (b). En esta situación el armónico localizado en $2f_0 > f_V$ es eliminado por el filtro. La señal $z_f(t)$ posee un único impulso en f_0 que equivale a retener sólo el termino lineal:

$$\begin{aligned} z_f(t) &= 1 - jx_A(t) \\ &= 1 - j(x(t) + j\hat{x}(t)) \\ &= 1 + \hat{x}(t) - jx(t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

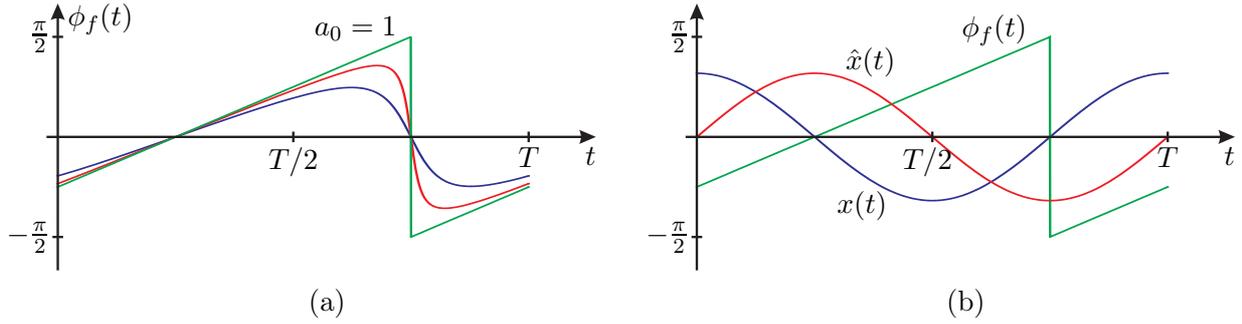


Figura 2.13: (a) Señal $\phi_f(t)$ para distintos valores de a_0 . (b) Valor límite de amplitud para la señal de entrada $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$.

La señal $\phi_f(t)$ es la fase de $z_f(t)$ y puede calcularse como:

$$\begin{aligned}\phi_f(t) &= \arctan\left(\frac{-x(t)}{1 + \hat{x}(t)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{-a_0 \cos(2\pi f_0 t)}{1 + a_0 \sin(2\pi f_0 t)}\right).\end{aligned}\tag{2.39}$$

En la Fig. 2.13 (a) se muestra el gráfico de $\phi_f(t)$ para distintos valores de a_0 . Cuando la amplitud a_0 aumenta el desvío de fase máximo dado por (2.33) aumenta de manera acorde. El caso extremo se da cuando $a_0 = 1$, que resulta en $\Delta\phi_M = \pi/2$. En la Fig. 2.13 (b) se muestra la señal de entrada $x(t)$ junto con su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ y la función $\phi_f(t)$ resultante para $a_0 = 1$.

2.4.3. Variación de los anchos de pulso

Del análisis anterior se puede decir que si la señal moduladora $x(t)$ está compuesta por un único tono, la máxima amplitud admisible que respeta la propiedad de intercalado de los ceros en el modulador click es función de la frecuencia y está dada por:

$$a_0(f_0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } f_0 \ll f_P, \\ 1, & \text{si } f_0 \approx f_P. \end{cases}\tag{2.40}$$

Se puede asegurar que si la amplitud de la señal se limita a 1, el modulador click funcionará correctamente en toda la banda de frecuencias de interés. Con esta restricción no se violará la propiedad de intercalado de los ceros, sin importar la relación entre f_0 y f_P . Los tonos

de alta frecuencia darán un desvío de fase de $\pi/2$ o lo que es equivalente, anchos de pulso para la señal binaria variando entre 0 y 100 %. Sin embargo, los tonos de baja frecuencia quedarán submodulados, o lo que es lo mismo anchos de pulso que no utilizarán todo el rango dinámico entre 0 y 100 %. Esto se debe a que, cuando $f_0 \ll f_P$ la máxima amplitud admisible es $\pi/2 \approx 1,57 > 1$. Como se determinó antes, el desvío máximo de fase en esta situación es $\Delta\phi_M = a_0$. Entonces la profundidad de modulación resulta:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_M [\%] &= \frac{2}{\pi} \times 100 \times 1 \\ &= 63,66 \%. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Para la modulación click, una entrada nula corresponde a anchos de pulso constantes iguales al 50 %. Los anchos de pulso para señales distintas de cero varían desde el centro hacia los costados. Para el caso analizado el mínimo ancho de pulso está dado por:

$$\begin{aligned}D_m [\%] &= 50 - \frac{1}{2}\Delta\phi_M [\%] \\ &= 18,17 \%. \end{aligned} \tag{2.42}$$

De manera similar, el máximo ancho de pulso es:

$$\begin{aligned}D_M [\%] &= 50 + \frac{1}{2}\Delta\phi_M [\%] \\ &= 81,83 \%. \end{aligned} \tag{2.43}$$

El análisis anterior demuestra que si se elige una respuesta en amplitud plana para el modulador click y se limita la amplitud de la señal moduladora a 1, las señales de frecuencias bajas comparadas con la portadora tendrán una profundidad de modulación máxima del 63,66 % y una consecuente disminución de la relación señal a ruido (S/R). Definiendo la relación S/R en decibelios (dB) como

$$S/R [\text{dB}] = 20 \log \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_r} \right), \tag{2.44}$$

donde σ_x^2 es la varianza de la señal y σ_r^2 es la varianza del ruido, se puede calcular (en dB) la disminución de la relación S/R . Utilizando una reducción del 63,66 % de la desviación estándar σ_x , la relación S/R es:

$$\begin{aligned}
 S/R \text{ [dB]} &= 20 \log \left(\frac{0,6366\sigma_x}{\sigma_r} \right) \\
 &= 20 \log \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_r} \right) + 20 \log (0,6366) \\
 &= 20 \log \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_r} \right) - 3,922,
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

es decir una reducción de aproximadamente 3,9 dB.

2.5. Conclusiones

En este capítulo se introdujo la modulación click como alternativa para generar señales binarias con banda base separada. Se mostró el esquema de modulación de TC propuesto por Logan y se analizaron cada uno de sus bloques componentes. Como punto destacable se mencionó que el espectro de la señal a la salida del MEA es de extensión infinita, un punto clave para la implementación discreta y que va a ser el tema principal del siguiente capítulo. También se explicó con detalle la representación de la señal modulada como una onda cuadrada, lo que hace posible la utilización de etapas conmutadas para la amplificación.

Como agregado, se mostró que existe una estrecha vinculación entre la modulación click y la MAP. En definitiva la MAP es una simplificación del esquema de modulación click que siempre contiene distorsión en banda base, aunque sea muy pequeña. Por último, se hizo un análisis de la máxima amplitud que puede tomar la señal de entrada evitando sobre modulación, así como también la disminución de la relación S/R como resultado de la disminución de la amplitud para el caso particular de señales senoidales. Este análisis no se encuentra en la literatura actualmente.

Capítulo 3

Modulación exponencial analítica y filtrado simultáneos

3.1. Introducción

En el Capítulo 2 se introdujo la modulación click como una interesante alternativa frente a la MAP. Las ventajas son notorias pero no es sencillo explotar las características del modulador click debido a los problemas que surgen en la implementación de TD. Aunque el esquema de modulación click es intrincado, se destacan tres operaciones principales que deben ser resueltas para hacer posible la implementación discreta: generación de la señal analítica, modulación exponencial y detección de cruces por cero. Existen soluciones que permiten implementaciones digitales para el transformador de Hilbert y para la detección de los cruces por cero. Sin embargo, no existe hasta el momento un método que permita implementar de manera ideal la modulación exponencial a partir de señales muestreadas. Esto se debe principalmente a que, como se anticipó en la Sección 2.2, el espectro de la señal a la salida del MEA se extiende infinitamente sobre el eje positivo de frecuencias.

El objetivo de este capítulo es desarrollar un método analítico que permita luego la implementación de un modulador click de TD que goce de las características del modulador de TC propuesto por Logan, sin utilizar interpolación de la señal de entrada

ni aproximaciones en los cálculos intermedios. Para lograr este cometido se analiza cuidadosamente la operación que ejecuta el MEA en el dominio frecuencia. Se demostrará que no es necesario computar la señal a la salida del MEA sino que se puede obtener directamente su versión limitada en banda si se introducen algunos cambios al esquema de modulación.

3.2. Análisis para señales de TC

El hecho de que el soporte del espectro de la señal a la salida del MEA sea infinito dificulta la implementación en TD. Para poder desarrollar un método que permita evitar el aliasing en la implementación discreta, es importante comprender detalladamente el funcionamiento de este bloque. Expresando la función exponencial como una expansión en series de potencias

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

se observa que la operación de exponenciación puede pensarse como la suma infinita de potencias de orden creciente sobre la variable x . Cuando se reemplaza la variable real x por la señal $-jx_A(t)$ de la modulación click, la operación del MEA se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= e^{-jx_A(t)} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (-jx_A(t))^\ell \\
 &= 1 + (-jx_A(t)) + \frac{1}{2!} (-jx_A(t))^2 + \frac{1}{3!} (-jx_A(t))^3 + \dots \\
 &= z_0(t) + z_1(t) + \frac{1}{2!} z_2(t) + \frac{1}{3!} z_3(t) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $z_\ell(t) = (-jx_A(t))^\ell$, y $z_0(t) = 1$. Para analizar el contenido espectral de la operación $e^{-jx_A(t)}$ es necesario analizar el espectro de los términos de la forma $(-jx_A(t))^\ell$, con

$\ell \in \mathbb{N}$. El término cuadrático $z_2(t)$ se puede escribir como el producto:

$$z_2(t) = z_1(t) \times z_1(t), \quad (3.3)$$

con su transformada de Fourier $Z_2(f)$ dada por la convolución:

$$\begin{aligned} Z_2(f) &= Z_1(f) * Z_1(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(\nu) Z_1(f - \nu) d\nu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La integral de convolución es analizada para los siguientes casos, dependiendo del valor de la frecuencia de corrimiento f :

- $f < 2f_L$: en este rango de frecuencias no hay solapamiento entre $Z_1(\nu)$ y $Z_1(f - \nu)$. El resultado de la integración (3.4) es cero.
- $2f_L \leq f < f_L + f_H$: el solapamiento es parcial por la izquierda. La integración (3.4) queda definida en el rango de frecuencias $[f_L, f - f_L]$.
- $f = f_L + f_H$: solapamiento completo entre los espectros. El resultado de la convolución toma su máximo valor, con el rango de integración definido entre f_L y f_H .
- $f_L + f_H \leq f \leq 2f_H$: nuevamente se tiene solapamiento parcial, pero esta vez sobre la derecha del espectro $Z_1(\nu)$. La integral (3.4) queda definida en el rango $[f - f_H, f_H]$.
- $f > 2f_H$: no hay solapamiento entre los espectros. $Z_2(f)$ es cero para este caso.

La integral en (3.4) para la obtención de $Z_2(f)$ se puede escribir de manera más compacta teniendo en cuenta todos los casos planteados. De esta manera, $Z_2(f)$ se puede expresar como:

$$Z_2(f) = \begin{cases} \int_{\theta}^{\psi} Z_1(\nu) Z_1(f - \nu) d\nu, & \text{si } 2f_L \leq f \leq 2f_H, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $\theta = \max\{f_L, f - f_H\}$ y $\psi = \min\{f_H, f - f_L\}$. La ecuación confirma que el espectro $Z_2(f)$ de la señal cuadrática $z_2(t)$ es distinto de cero en el rango de frecuencias $[2f_L, 2f_H]$. El análisis anterior se puede continuar para los términos de orden mayor. El término cúbico puede escribirse como:

$$\begin{aligned} z_3(t) &= z_1(t) \times z_1(t) \times z_1(t) \\ &= z_2(t) \times z_1(t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

con su transformada de Fourier dada por

$$\begin{aligned} Z_3(f) &= Z_1(f) * Z_1(f) * Z_1(f) \\ &= Z_2(f) * Z_1(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_2(\nu) Z_1(f - \nu) d\nu. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Analizando los casos como para $Z_2(f)$, se puede escribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

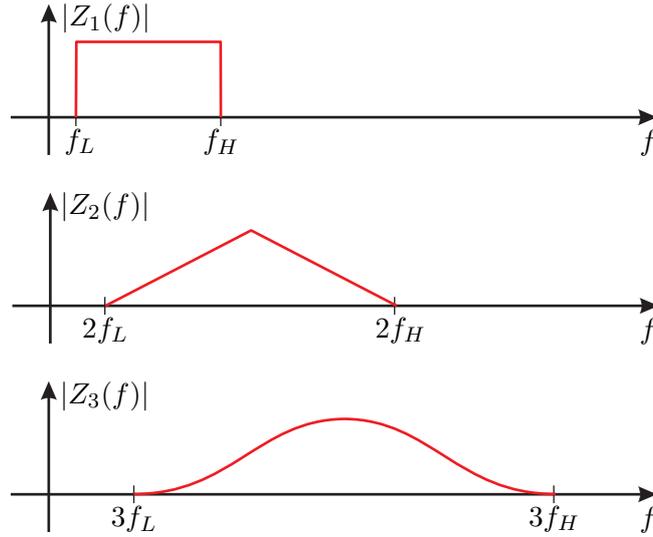
$$Z_3(f) = \begin{cases} \int_{\theta}^{\psi} Z_2(\nu) Z_1(f - \nu) d\nu, & \text{si } 3f_L \leq f \leq 3f_H, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $\theta = \max\{2f_L, f - f_H\}$ y $\psi = \min\{2f_H, f - f_L\}$. Generalizando para un término de orden ℓ :

$$\begin{aligned} z_\ell(t) &= z_1(t) \times z_1(t) \times \cdots \times z_1(t) \\ &= z_{\ell-1}(t) \times z_1(t), \end{aligned} \tag{3.9}$$

cuya transformada de Fourier viene dada por:

$$\begin{aligned} Z_\ell(f) &= Z_1(f) * \cdots * Z_1(f) \\ &= Z_{\ell-1}(f) * Z_1(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\ell-1}(\nu) Z_1(f - \nu) d\nu, \end{aligned} \tag{3.10}$$


 Figura 3.1: Espectro de las señales $z_1(t)$, $z_2(t)$ y $z_3(t)$.

que es la convolución frecuencial entre $Z_1(f)$ y $Z_{\ell-1}(f)$ y puede escribirse de forma general

$$Z_\ell(f) = \begin{cases} \int_{\theta}^{\psi} Z_{\ell-1}(\nu) Z_1(f - \nu) d\nu, & \text{si } \ell f_L \leq f \leq \ell f_H, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.11)$$

El intervalo de integración es $[\theta, \psi]$, siendo estas variables $\theta = \max\{(\ell - 1)f_L, f - f_H\}$ y $\psi = \min\{(\ell - 1)f_H, f - f_L\}$. La expresión anterior revela que si el espectro $Z_1(f)$ de la señal $z_1(t) = -jx_A(t)$ está definido en la banda de frecuencias $[f_L, f_H]$, el espectro $Z_\ell(f)$ de $z_\ell(t) = (-jx_A(t))^\ell$ queda definido en $[\ell f_L, \ell f_H]$. En otras palabras, el espectro de los términos de orden creciente $z_\ell(t)$ se extiende sobre rangos de frecuencia mayores. A modo de ejemplo, en la Fig. 3.1 se muestra el módulo de los tres primeros términos $Z_1(f)$, $Z_2(f)$ y $Z_3(f)$, que son los espectros de $z_1(t) = -jx_A(t)$, $z_2(t) = (-jx_A(t))^2$ y $z_3(t) = (-jx_A(t))^3$, respectivamente, asumiendo que $z_1(t)$ es una señal analítica, de banda limitada con su espectro definido como $Z_1(f) = u(f - f_L) - u(f - f_H)$.

De acuerdo con (3.2), el cálculo de $z(t)$ requiere la suma de infinitos términos $z_\ell(t)$, de ancho de banda creciente en función de ℓ , lo que resulta en $Z(f)$ definido sobre todo el eje de frecuencias positivas con una extensión infinita.

3.3. MEA y filtrado simultáneos

En la sección anterior se demostró que la señal $z(t)$ a la salida del MEA se extiende infinitamente sobre el eje positivo de frecuencias, lo que imposibilita su representación en un sistema de tiempo discreto. Sin embargo, el filtro $h_U(t)$ con respuesta en frecuencia $H_U(f)$ dada por (2.10) limita en banda la salida del MEA, por lo que las operaciones siguientes aplicadas para derivar $s(t)$ que involucran inversión espectral y corrimiento en frecuencia no agregan componentes de distorsión en la banda base. Este proceso de filtrado es la clave y la única diferencia entre la modulación click y la MAP.

El espectro $Z_f(f)$ de la señal filtrada $z_f(t)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 Z_f(f) &= Z(f)H_U(f) \\
 &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} Z_{\ell}(f) \right) H_U(f) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} Z_{\ell}(f) H_U(f) \\
 &= Z_0(f)H_U(f) + Z_1(f)H_U(f) + \frac{1}{2!}Z_2(f)H_U(f) + \dots \\
 &= \tilde{Z}_0(f) + \tilde{Z}_1(f) + \frac{1}{2!}\tilde{Z}_2(f) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

En el dominio tiempo, la señal filtrada $z_f(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
 z_f(t) &= z(t) * h_U(t) \\
 &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} z_{\ell}(t) \right) * h_U(t) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} z_{\ell}(t) * h_U(t) \\
 &= z_0(t) * h_U(t) + z_1(t) * h_U(t) + \frac{1}{2!}z_2(t) * h_U(t) + \dots \\
 &= \tilde{z}_0(t) + \tilde{z}_1(t) + \frac{1}{2!}\tilde{z}_2(t) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aunque el espectro $Z_{\ell}(f)$ del término ℓ -ésimo $z_{\ell}(t)$ se extiende sobre el intervalo de frecuencias $[\ell f_L, \ell f_H]$, el término filtrado correspondiente $\tilde{z}_{\ell}(t) = z_{\ell}(t) * h_U(t)$ con su espectro dado por $\tilde{Z}_{\ell}(f) = Z_{\ell}(f)H_U(f)$ en (3.12) solo ocupa la banda $[\ell f_L, f_V]$. Sin

embargo, los requerimientos de ancho de banda del sistema son aún altos, ya que los espectros filtrados se obtienen a partir de las versiones sin filtrar $Z_\ell(f)$ de ancho de banda creciente en función de ℓ . Es en este punto donde surge la siguiente pregunta: ¿es posible utilizar la señal filtrada $\tilde{z}_{\ell-1}(t)$ de ancho de banda reducido a $[(\ell - 1) f_L, f_V]$ para calcular el término siguiente $\tilde{z}_\ell(t)$? La respuesta a esta pregunta es la clave del método propuesto en esta Tesis, y permite computar $z_f(t)$ sin la necesidad de representar las señales de ancho de banda creciente $z_\ell(t)$.

Para comenzar, hay que observar que el término correspondiente a $\ell = 0$ es $z_0(t) = (-jx_A(t))^0 = 1$, con su espectro dado por $Z_0(f) = \delta(f)$. La señal filtrada es $\tilde{z}_0(t) = z_0(t) * h_U(t) = 1$ en este caso, por lo que $\tilde{Z}_0(f) = \delta(f)$. Para el análisis siguiente se supone que existe una banda de guarda distinta de cero en el modulador, es decir, $f_H < f_U < f_V$. Bajo esta hipótesis, resulta que las señales $z_1(t)$ y $\tilde{z}_1(t) = z_1(t) * h_U(t)$ son iguales ya que el filtro $h_U(t)$ no elimina ninguna componente frecuencial de $z_1(t)$ en la obtención de $\tilde{z}_1(t)$. De esta manera $\tilde{z}_1(t) = z_1(t)$ y $\tilde{Z}_1(f) = Z_1(f)$. El término cuadrático se obtiene de manera análoga a la sección anterior, aunque ahora se agrega el filtro $h_U(t)$:

$$\tilde{z}_2(t) = [\tilde{z}_1(t) \times \tilde{z}_1(t)] * h_U(t). \quad (3.14)$$

Su transformada de Fourier está dada por la convolución:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_2(f) &= [\tilde{Z}_1(f) * \tilde{Z}_1(f)] H_U(f) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_1(\nu) \tilde{Z}_1(f - \nu) d\nu \right] H_U(f). \end{aligned} \quad (3.15)$$

En este caso y debido a que $\tilde{Z}_1(f) = Z_1(f)$, el resultado de la convolución que está entre los corchetes en la ecuación anterior concuerda con $Z_2(f)$ en (3.4) y se extiende sobre el rango de frecuencias $[2f_L, 2f_H]$. Sin embargo, esto no sucede (en general) para los términos de orden superior.

La acción del filtro es atenuar las componentes frecuenciales a partir de f_U y removerlas completamente a partir de f_V . De esta manera, el soporte del espectro $\tilde{Z}_2(f)$ de la señal $\tilde{z}_2(t)$ es $[2f_L, f_V]$. Además los espectros $Z_2(f)$ y $\tilde{Z}_2(f)$ son iguales en el intervalo de

frecuencias de interés $[-\infty, f_U]$, ya que se derivan a partir de señales analíticas y el filtro $H_U(f)$ no modifica las componentes frecuenciales por debajo de f_U .

El término correspondiente a $\ell = 3$ se obtiene de manera similar, usando las señales $\tilde{z}_1(t)$ y $\tilde{z}_2(t)$ calculadas previamente:

$$\tilde{z}_3(t) = [\tilde{z}_2(t) \times \tilde{z}_1(t)] * h_U(t). \quad (3.16)$$

Es importante notar la diferencia con el cálculo de la sección anterior, ya que se ha utilizado $\tilde{z}_2(t)$ (versión filtrada) en lugar de la versión sin filtrar $z_2(t)$. La transformada de Fourier de $\tilde{z}_3(t)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_3(f) &= [\tilde{Z}_2(f) * \tilde{Z}_1(f)] H_U(f) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_2(\nu) \tilde{Z}_1(f - \nu) d\nu \right] H_U(f). \end{aligned} \quad (3.17)$$

La señal $\tilde{z}_1(t)$ tiene su espectro definido entre f_L y f_H . Por otra parte, $\tilde{z}_2(t)$ tiene componentes frecuenciales en $[2f_L, f_V]$. La convolución $\tilde{Z}_2(f) * \tilde{Z}_1(f)$ se extiende entre $3f_L$ y $f_H + f_V$. Luego, la versión filtrada $\tilde{Z}_3(f)$ está definida para $f \in [3f_L, f_V]$. Razonando de manera similar se puede generalizar el cálculo para la obtención del término ℓ -ésimo:

$$\tilde{z}_\ell(t) = [\tilde{z}_{\ell-1}(t) \times \tilde{z}_1(t)] * h_U(t), \quad (3.18)$$

con su espectro dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_\ell(f) &= [\tilde{Z}_{\ell-1}(f) * \tilde{Z}_1(f)] H_U(f) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_{\ell-1}(\nu) \tilde{Z}_1(f - \nu) d\nu \right] H_U(f). \end{aligned} \quad (3.19)$$

El soporte del espectro $\tilde{Z}_\ell(f)$ está limitado a la banda de frecuencias positivas $[f_L, f_V]$. Nuevamente hay que destacar que los espectros $Z_\ell(f)$ y $\tilde{Z}_\ell(f)$ son idénticos en el rango de frecuencias $[-\infty, f_U]$. Más aún, los espectros de las señales $z_\ell(t) * h_U(t)$ y $\tilde{z}_\ell(t)$ son idénticos en todo el rango de frecuencias. Esta propiedad permite utilizar las versiones filtradas y de ancho de banda reducido $\tilde{z}_\ell(t)$ para el cálculo de $z_f(t)$ en vez de requerir

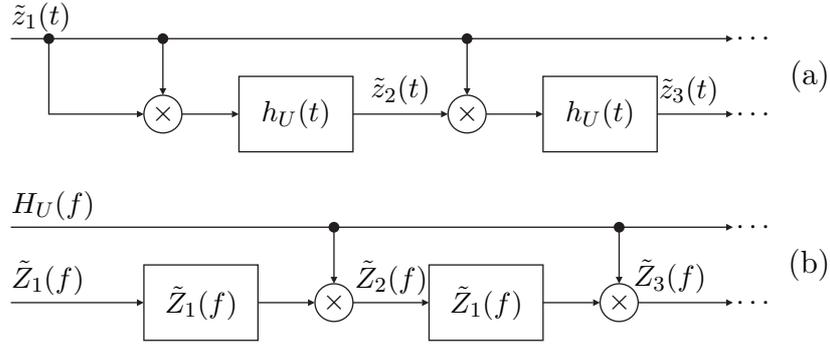


Figura 3.2: Diagrama en bloques para el cálculo de las señales $\tilde{z}_\ell(t)$: (a) dominio tiempo; (b) dominio frecuencia.

las señales $z_\ell(t)$ de ancho de banda creciente en función de ℓ .

En la Fig. 3.2 (a) se muestra el diagrama en bloques para calcular las señales $\tilde{z}_\ell(t)$. En la Fig. 3.2 (b) se ve un diagrama alternativo que permite realizar el cálculo en el dominio frecuencia. Aunque ambos esquemas son equivalentes, se puede optar por la utilización de uno u otro dependiendo de los requerimientos en la implementación. Usando las señales filtradas $\tilde{z}_\ell(t)$ es posible escribir $z_f(t)$:

$$\begin{aligned}
 z_f(t) &= e^{-jx_A(t)} * h_U(t) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \tilde{z}_\ell(t) \\
 &= \tilde{z}_0(t) + \tilde{z}_1(t) + \frac{1}{2!} \tilde{z}_2(t) + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

con su espectro dado por (3.12). A este conjunto de operaciones se lo denominará de ahora en más Modulación Exponencial Analítica y Filtrado de Tiempo Continuo o MEAF-TC. Esta ecuación es muy similar a (3.2) y de hecho se derivó desde allí, pero existe una diferencia importante entre el esquema original de Logan en [52] y la forma de cálculo propuesta. La clave es la distribución del FPB $h_U(t)$ en las señales internas al MEA, lo que hace posible reemplazar el conjunto MEA y FPB por el bloque MEAF-TC como se observa en la Fig. 3.3. La señal resultante $z_f(t)$ es la misma en ambos casos, pero en la implementación propuesta utilizando el MEAF-TC dado por (3.20) no es necesario representar la señal $z(t)$, de infinito contenido espectral. Este aspecto no representa un cambio significativo en el esquema de procesamiento para el caso de señales de TC, aunque

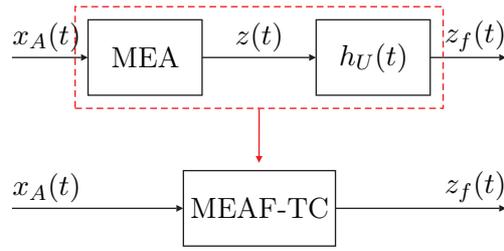


Figura 3.3: Reemplazo de las operaciones en cascada MEA y filtrado por el bloque MEAF-TC.

es de vital importancia ya que permitirá luego derivar un modulador de TD que posea todas las ventajas del modulador click de TC sin la necesidad de utilizar aproximaciones o simplificaciones y eliminando los problemas de aliasing.

3.3.1. Representación ideal con un número finito de términos

El soporte del espectro de la señal $\tilde{z}_\ell(t)$ es $[\ell f_L, f_V]$, siendo f_L la componente de más baja frecuencia presente en la señal de entrada $x(t)$. Es decir, si la señal de entrada es del tipo pasabanda, el espectro $\tilde{Z}_\ell(f)$ de la señal $\tilde{z}_\ell(t)$ se corre hacia las altas frecuencias a medida que se incrementa ℓ . Por este motivo existen un número finito de términos que contribuyen al resultado $z_f(t)$ en (3.20). Los términos para los que se cumple $\ell f_L > f_U$ pueden ser excluidos de la sumatoria sin agregar componentes de distorsión en la banda de guarda. Teniendo en cuenta este aspecto se puede reescribir el MEAF-TC como una suma finita:

$$z_f(t) = \sum_{\ell=0}^{L_U} \frac{1}{\ell!} \tilde{z}_\ell(t), \quad (3.21)$$

donde $L_U = \lfloor f_U/f_L \rfloor^1$. Esta elección de L_U asegura que la señal que resulta del proceso de modulación no contiene componentes de distorsión hasta el valor f_U . El término correspondiente a $L_U + 1$ puede tener componentes frecuenciales en el rango $[f_U, f_V]$, pero caen fuera de la banda de frecuencias de interés. La ecuación anterior es un caso particular que se aplica sólo a señales pasabanda. Si la señal de entrada es del tipo pasabajos, el soporte del espectro $\tilde{Z}_\ell(f)$ es $[0, f_V]$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, teniendo que utilizar un número infinito de términos para la representación ideal como lo sugiere (3.20).

¹ $\lfloor x \rfloor$ es la función piso, es decir, el mayor entero que no es más grande que x .

3.4. Análisis para señales de TD

En la sección anterior se desarrolló un método que permite distribuir el FPB $h_U(t)$ del modulador click en las señales internas al MEA y reemplazar las operaciones MEA y filtrado con un único bloque de cálculo denominado MEAF-TC, evitando la necesidad de representar señales de ancho de banda creciente. Las ventajas de este método no son evidenciadas si se procesan señales de TC, sin embargo su utilización resulta de vital importancia para la implementación del modulador click de TD. En esta sección se deriva el Modulador Exponencial Analítico y Filtrado simultáneo de Tiempo Discreto o MEAF-TD, que resulta en el equivalente exacto del MEAF-TC para señales muestreadas. Este bloque será utilizado más adelante para implementar un modulador click de TD que goce de las ventajas del esquema propuesto por Logan [52].

La entrada es la señal real $x[n]$, cuya transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) $X(e^{j\omega})$ es distinta de cero en el intervalo $[\omega_L, \omega_H] \cup [2\pi - \omega_H, 2\pi - \omega_L]$, con $0 \leq \omega_L < \omega_H \leq \pi$. Para calcular la señal analítica es necesaria la transformada de Hilbert $\hat{x}[n]$ de la señal $x[n]$. La TFTD $H_H(e^{j\omega})$ del filtro de Hilbert $h_H[n]$ se define como:

$$H_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & \text{si } 0 < \omega < \pi, \\ 0, & \text{si } \omega = 0, \pi, 2\pi, \\ +j & \text{si } \pi < \omega < 2\pi. \end{cases} \quad (3.22)$$

Si se compara el transformador de Hilbert discreto $H_H(e^{j\omega})$ con su contraparte de tiempo continuo se puede ver que hay una sutil diferencia. En el caso continuo, la respuesta en frecuencia $H_H(f)$ se anula para $f = 0$. Para el caso discreto, $H_H(e^{j\omega})$ se anula para $\omega = 0$ pero también para los valores de frecuencia $\omega = \pi$ y $\omega = 2\pi$ debido a que el espectro es periódico, de período 2π . La transformada de Hilbert de $x[n]$ es

$$\hat{x}[n] = x[n] * h_H[n], \quad (3.23)$$

con su TFTD dada por:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H_H(e^{j\omega}). \quad (3.24)$$

La señal analítica se obtiene combinando la señal original $x[n]$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}[n]$:

$$x_A[n] = x[n] + j\hat{x}[n]. \quad (3.25)$$

El espectro $X_A(e^{j\omega})$ de la señal analítica $x_A[n]$ es distinto de cero sólo para las frecuencias positivas, en este caso para $\omega \in [\omega_L, \omega_H]$.

De manera similar al caso continuo, la señal $x_A[n]$ se puede generar a partir del filtro analítico con respuesta impulsiva $h_A[n]$ y respuesta en frecuencia $H_A(e^{j\omega}) = 1 + jH_H(e^{j\omega})$:

$$H_A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 < \omega < \pi, \\ 1, & \text{si } \omega = 0, \pi, 2\pi, \\ 0, & \text{si } \pi < \omega < 2\pi. \end{cases} \quad (3.26)$$

El siguiente bloque en la cadena de modulación es el MEA, que ejecuta la operación $z[n] = e^{-jx_A[n]}$. Sin embargo, el comportamiento frecuencial del MEA es diferente a su contraparte de TC. Para derivar el espectro de $z[n]$ es útil nuevamente escribir la función exponencial como una expansión en series de potencias:

$$\begin{aligned} z[n] &= e^{-jx_A[n]} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (-jx_A[n])^\ell \\ &= 1 + (-jx_A[n]) + \frac{1}{2!} (-jx_A[n])^2 + \frac{1}{3!} (-jx_A[n])^3 + \dots \\ &= z_0[n] + z_1[n] + \frac{1}{2!} z_2[n] + \frac{1}{3!} z_3[n] + \dots, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $z_\ell[n] = (-jx_A[n])^\ell$. Como en el caso de TC, para analizar el espectro $Z(e^{j\omega})$ de $z[n]$ es necesario conocer el espectro de los términos de la forma $(-jx_A[n])^\ell$, con $\ell \in \mathbb{N}$.

El término cuadrático $z_2[n]$ se puede escribir como el producto

$$z_2[n] = z_1[n] \times z_1[n]. \quad (3.28)$$

El espectro $Z_2(e^{j\omega})$ de $z_2[n]$ se puede hallar utilizando el teorema de modulación o ven-

taneo de la TFTD [72]:

$$\begin{aligned} Z_2(e^{j\omega}) &= Z_1(e^{j\omega}) \circledast Z_1(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_1(e^{j\nu}) Z_1(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu. \end{aligned} \quad (3.29)$$

El símbolo \circledast denota convolución periódica de los espectros. Esta operación es ligeramente diferente a su contraparte de tiempo continuo debido a la naturaleza periódica del espectro de las señales muestreadas. La integral se puede analizar separando los diferentes casos en función de la frecuencia ω :

- $\omega < 2\omega_L$: en este rango de frecuencias no existe solapamiento entre los espectros y la integración (3.29) es nula.
- $2\omega_L \leq \omega < \omega_L + \omega_H$: solapamiento parcial por la izquierda. La integral (3.29) queda definida en el intervalo $[\omega_L, \omega - \omega_L]$.
- $\omega = \omega_L + \omega_H$: solapamiento total. El resultado de la convolución periódica toma su máximo valor, con el rango de integración definido en $[\omega_L, \omega_H]$.
- $\omega_L + \omega_H \leq \omega < 2\omega_H$: para este caso el solapamiento es parcial pero por la derecha. Los límites de la integral (3.29) son $\omega - \omega_H$ y ω_H .
- $\omega \geq 2\omega_H$: la convolución se anula a partir de este valor de ω por no existir ningún solapamiento entre los espectros.

Del análisis anterior se puede decir que si $z_1[n]$ tiene su espectro $Z_1(e^{j\omega})$ definido para $\omega \in [\omega_L, \omega_H]$ con $0 \leq \omega_L < \omega_H \leq \pi$, el espectro del producto $z_2[n] = z_1[n] \times z_1[n]$ es distinto de cero para $\omega \in [2\omega_L, 2\omega_H]$. Como $z_1[n]$ es la versión analítica de una señal real muestreada, el soporte de su espectro estará siempre contenido en el rango $[0, \pi]$. Esto último asegura que en este caso, el término cuadrático nunca sufra de problemas de aliasing.

El término cúbico se obtiene como

$$\begin{aligned} z_3[n] &= z_1[n] \times z_1[n] \times z_1[n] \\ &= z_2[n] \times z_1[n], \end{aligned} \tag{3.30}$$

con su TFTD dada por

$$\begin{aligned} Z_3(e^{j\omega}) &= Z_1(e^{j\omega}) \circledast Z_1(e^{j\omega}) \circledast Z_1(e^{j\omega}) \\ &= Z_2(e^{j\omega}) \circledast Z_1(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_2(e^{j\nu}) Z_1(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu. \end{aligned} \tag{3.31}$$

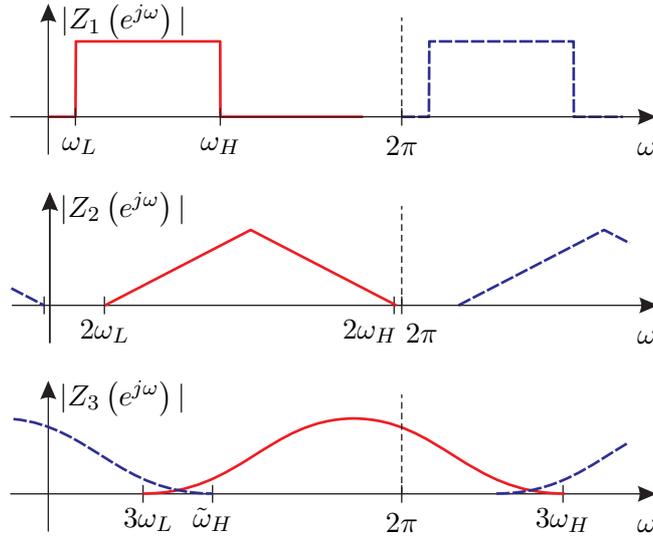
Analizando las regiones de la convolución como en el caso anterior se puede ver que el espectro $Z_3(e^{j\omega})$ es distinto de cero en el rango $[3\omega_L, 3\omega_H]$. Generalizando para el término de orden ℓ :

$$\begin{aligned} z_\ell[n] &= z_1[n] \times z_1[n] \times \cdots \times z_1[n] \\ &= z_{\ell-1}[n] \times z_1[n]. \end{aligned} \tag{3.32}$$

El espectro se puede calcular como:

$$\begin{aligned} Z_\ell(e^{j\omega}) &= Z_1(e^{j\omega}) \circledast Z_1(e^{j\omega}) \circledast \cdots \circledast Z_1(e^{j\omega}) \\ &= Z_{\ell-1}(e^{j\omega}) \circledast Z_1(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_{\ell-1}(e^{j\nu}) Z_1(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu. \end{aligned} \tag{3.33}$$

El soporte del espectro $Z_\ell(e^{j\omega})$ es $[\ell\omega_L, \ell\omega_H]$, pero debido a la naturaleza periódica del espectro de las señales discretas, esto es cierto sólo en el caso en que el espectro $Z_{\ell-1}(e^{j\omega})$ sea nulo en el rango de frecuencias $[0, (\ell-1)\omega_L] \cup [(\ell-1)\omega_H, 2\pi]$, con $(\ell-1)\omega_H \leq \pi$. Esta restricción equivale a pedir que las señales $z_{\ell-1}[n]$ y $z_1[n]$ sean analíticas, es decir, que la parte negativa de los espectros $Z_{\ell-1}(e^{j\omega})$ y $Z_1(e^{j\omega})$ sea nula. Si alguna de las señales intervinientes no cumple con esta restricción, el soporte del espectro $Z_\ell(e^{j\omega})$ ya no será $[\ell\omega_L, \ell\omega_H]$, ocupando toda la banda de frecuencias en el caso más general, y además


 Figura 3.4: Espectro de las señales $z_1[n]$, $z_2[n]$ y $z_3[n]$.

aparecerán componentes de aliasing en $z_\ell[n]$ imposibles de remover. Esta situación está ilustrada en la Fig. 3.4 que muestra el módulo de $Z_1(e^{j\omega})$, $Z_2(e^{j\omega})$ y $Z_3(e^{j\omega})$, que son los espectros de $z_1[n] = -jx_A[n]$, $z_2[n] = (-jx_A[n])^2$ y $z_3[n] = (-jx_A[n])^3$, respectivamente. Aunque el espectro $Z_1(e^{j\omega})$ está contenido en el rango de frecuencias $[0, \pi]$, algunas componentes del espectro $Z_2(e^{j\omega})$ se extienden más allá de π resultando en una señal que no es analítica. Al calcular $Z_3(e^{j\omega})$ utilizando (3.31) resulta que $3\omega_H > 2\pi$, y por lo tanto la parte del espectro contenida en el intervalo $[2\pi, 3\omega_H]$ se replica cada 2π . En particular, aparecen componentes de aliasing en el intervalo $[0, \tilde{\omega}_H]$, donde $\tilde{\omega}_H = 3\omega_H - 2\pi$. Además, debido a la expansión del espectro las réplicas se solapan como se muestra en la figura. Estas componentes de aliasing generan distorsión en la señal modulada, y deben ser eliminadas si se desea un modulador sin distorsión. El caso de los términos de mayor orden $Z_\ell(e^{j\omega})$ dados por (3.33) es aún peor, ya que pueden resultar en múltiples solapamientos, inversión espectral, etc.

Para evitar este problema, algunos trabajos previos [53, 54, 57–61] utilizan una versión interpolada $x_{iA}[n]$ de la señal analítica $x_A[n]$ antes de aplicar (3.27). La operación de interpolación permite reducir el ancho de banda de la señal al intervalo $[\omega_L/M, \omega_H/M]$, siendo M el orden del interpolador [72], y por lo tanto la cantidad de términos que pueden ser sumados en (3.27) sin solapamiento de los espectros es mayor. En otras palabras, la

función exponencial es aproximada con un número finito de términos:

$$z_i[n] = \sum_{\ell=0}^{L_i} \frac{1}{\ell!} z_\ell[n], \quad (3.34)$$

donde L_i se elige para tener $L_i \omega_H / M \leq 2\pi$, es decir, $L_i = \lfloor 2\pi M / \omega_H \rfloor$. Existe una relación de compromiso entre el orden de la interpolación M y el error de aproximación; si el orden M del interpolador es mayor, se incrementa el número de términos L_i que pueden ser utilizados en (3.34) para aproximar (3.27) sin aliasing, que resulta en un error de aproximación más pequeño. De todas maneras, es imposible utilizar un número arbitrariamente grande de términos ya que siempre aparecerán los problemas de aliasing, y sólo se logra una aproximación al modulador ideal.

3.4.1. MEAF-TD

En la sección anterior se demostró que si se aplica la función de exponenciación a una señal discreta (analítica) el resultado es corrompido por los efectos del aliasing. Estos efectos pueden ser minimizados utilizando interpolación de la señal, aunque es imposible reproducir el comportamiento exacto del MEA de TC para señales de TD. La operación conjunta realizada por el MEAF sí puede ser aplicada en un sistema de TD, ya que las señales intervinientes son de banda limitada y pueden ser representadas sin problemas de aliasing. Sin embargo, hay que destacar una importante diferencia entre la versión de TC mostrada en la Fig. 2.1 y la implementación discreta del modulador.

En la Fig. 2.1 el filtro de respuesta impulsiva $h_U(t)$ es un filtro del tipo pasabajos cuya respuesta en frecuencia $H_U(f)$ está dada por (2.10). Este filtro es simétrico alrededor del valor $f = 0$, aunque como la señal analítica $z(t)$ no contiene componentes frecuenciales para $f < 0$, el filtro no remueve componentes frecuenciales en esta parte del espectro. En el caso de señales muestreadas, las frecuencias negativas corresponden a la parte del espectro contenida en los intervalos de frecuencias $[\pi, 2\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$, etc. Para comprender la elección del filtro adecuado en la implementación de tiempo discreto del modulador click, el punto de partida es escribir el espectro $Z_f(e^{j\omega})$ de la señal filtrada $z_f[n] =$

$z[n] * h_U[n]$:

$$\begin{aligned}
 Z_f(e^{j\omega}) &= Z(e^{j\omega}) H_U(e^{j\omega}) \\
 &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} Z_\ell(e^{j\omega}) \right) H_U(e^{j\omega}) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} Z_\ell(e^{j\omega}) H_U(e^{j\omega}) \\
 &= Z_0(e^{j\omega}) H_U(e^{j\omega}) + Z_1(e^{j\omega}) H_U(e^{j\omega}) + \frac{1}{2!} Z_2(e^{j\omega}) H_U(e^{j\omega}) + \dots \\
 &= \tilde{Z}_0(e^{j\omega}) + \tilde{Z}_1(e^{j\omega}) + \frac{1}{2!} \tilde{Z}_2(e^{j\omega}) + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

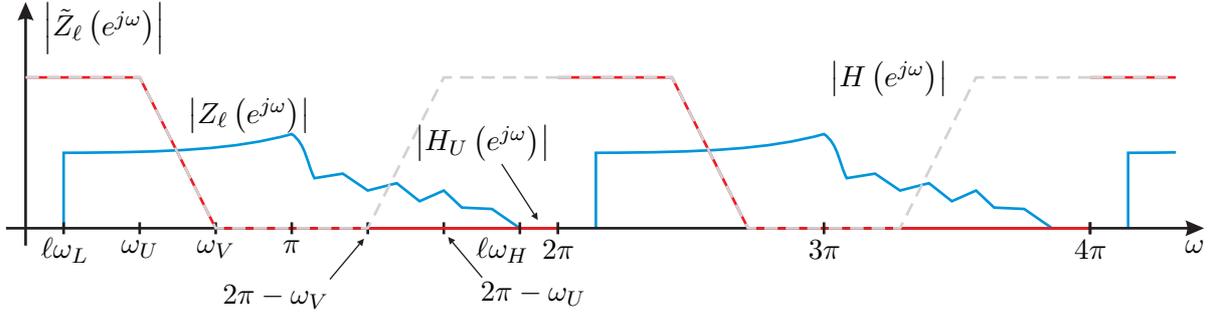
donde la respuesta en frecuencia del FPB analítico $h_U[n]$ está dada por:

$$H_U(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq \omega \leq \omega_U, \\ 0, & \text{si } \omega_V \leq \omega < 2\pi, \end{cases} \tag{3.36}$$

con $0 < \omega_U < \omega_V \leq \pi$. El término ℓ -ésimo $Z_\ell(e^{j\omega})$ ocupa la banda de frecuencias $[\ell\omega_L, \ell\omega_H]$. El término filtrado correspondiente $\tilde{Z}_\ell(e^{j\omega})$ está limitado a la banda $[\ell\omega_L, \omega_V]$ por la acción del filtro, siempre que $\ell\omega_H > \omega_V$. Si se utilizara el equivalente exacto del esquema de la Fig. 2.1, se debería utilizar un FPB con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq \omega \leq \omega_U, \\ 0, & \text{si } \omega_V \leq \omega \leq 2\pi - \omega_V, \\ 1, & \text{si } 2\pi - \omega_U \leq \omega < 2\pi. \end{cases} \tag{3.37}$$

Sin embargo, esto resultaría en señales con componentes distintas de cero en el rango de frecuencias negativas. En la Fig. 3.5 se ve la diferencia de utilizar $H(e^{j\omega})$ y $H_U(e^{j\omega})$. Utilizando un FPB convencional las componentes frecuenciales en el rango $[2\pi - \omega_V, 2\pi]$ no se anulan completamente. Este hecho resulta problemático si se quiere utilizar el término filtrado $\tilde{Z}_{\ell-1}(e^{j\omega})$ para obtener $\tilde{Z}_\ell(e^{j\omega})$ ya que, como se dijo antes, es fundamental que las señales $\tilde{z}_1[n]$ y $\tilde{z}_{\ell-1}[n]$ no tengan componentes frecuenciales para la parte negativa del espectro. Aclarado este detalle, se supone para el análisis siguiente que el filtro que


 Figura 3.5: Diferencia entre $H_U(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$.

limita en banda la salida del MEA está dado por (3.36).

Operando de manera similar al caso de TC, se comienza con el espectro $\tilde{Z}_1(e^{j\omega}) = Z_1(e^{j\omega}) H_U(e^{j\omega})$ ya que $\tilde{Z}_0(e^{j\omega}) = \delta(\omega)$. Se supone que la banda de guarda es distinta de cero, es decir, $\omega_H < \omega_U < \omega_V \leq \pi$. Resulta que $z_1[n] = \tilde{z}_1[n]$ ya que el filtro no remueve componentes de la señal de entrada. Se calcula el término cuadrático como:

$$\tilde{z}_2[n] = [\tilde{z}_1[n] \times \tilde{z}_1[n]] * h_U[n], \quad (3.38)$$

cuyo espectro está dado por

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_2(e^{j\omega}) &= [\tilde{Z}_1(e^{j\omega}) \circledast \tilde{Z}_1(e^{j\omega})] H_U(e^{j\omega}) \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{Z}_1(e^{j\nu}) \tilde{Z}_1(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu \right] H_U(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

En este caso dado que $Z_1(e^{j\omega}) = \tilde{Z}_1(e^{j\omega})$, el término entre corchetes en la ecuación anterior es idéntico a $Z_2(e^{j\omega})$ y está limitado en la banda de frecuencias $[2\omega_L, 2\omega_H]$. En general si la señal $x[n]$ resulta de muestrear $x(t)$ cerca de su límite de Nyquist, resulta que $\omega_H \approx \pi$ y por lo tanto $2\omega_H > \pi$. Es aquí donde la acción del filtro $H_U(e^{j\omega})$ es importante ya que limita en banda el espectro $\tilde{Z}_2(e^{j\omega})$ al intervalo $[2\omega_L, \omega_V]$. El resultado de este proceso de filtrado es una señal analítica $\tilde{z}_2[n]$ que puede ser utilizada en el cálculo del término cúbico:

$$\tilde{z}_3[n] = [\tilde{z}_2[n] \times \tilde{z}_1[n]] * h_U[n], \quad (3.40)$$

con su TFTD dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_3(e^{j\omega}) &= \left[\tilde{Z}_2(e^{j\omega}) \otimes \tilde{Z}_1(e^{j\omega}) \right] H_U(e^{j\omega}) \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{Z}_2(e^{j\nu}) \tilde{Z}_1(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu \right] H_U(e^{j\omega}).\end{aligned}\quad (3.41)$$

La señal $\tilde{z}_1[n]$ está limitada en la banda $[\omega_L, \omega_H]$ y el soporte del espectro de $\tilde{z}_2[n]$ es $[2\omega_L, \omega_V]$, siendo ambos valores ω_H y ω_V menores que π . La convolución periódica $\tilde{Z}_2(e^{j\omega}) \otimes \tilde{Z}_1(e^{j\omega})$ está definida entre $3\omega_L$ y $\omega_H + \omega_V$, con $\omega_H + \omega_V \leq 2\pi$. La última desigualdad confirma que no hay solapamiento entre las réplicas por estar el resultado de la convolución periódica contenido en el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego el filtro $H_U(e^{j\omega})$ deja nuevamente a la señal $\tilde{z}_3[n]$ limitada en la banda de frecuencias $[3\omega_L, \omega_V]$. Generalizando para el término ℓ -ésimo resulta

$$\tilde{z}_\ell[n] = [\tilde{z}_{\ell-1}[n] \times \tilde{z}_1[n]] * h_U[n], \quad (3.42)$$

con su espectro dado por:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_\ell(e^{j\omega}) &= \left[\tilde{Z}_{\ell-1}(e^{j\omega}) \otimes \tilde{Z}_1(e^{j\omega}) \right] H_U(e^{j\omega}) \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{Z}_{\ell-1}(e^{j\nu}) \tilde{Z}_1(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu \right] H_U(e^{j\omega}).\end{aligned}\quad (3.43)$$

El soporte del espectro $\tilde{Z}_\ell(e^{j\omega})$ es $[\ell\omega_L, \omega_V]$. Además, los espectros $Z_\ell(e^{j\omega})$ y $\tilde{Z}_\ell(e^{j\omega})$ son coincidentes en el rango de frecuencias $[0, \omega_U]$. Esta última igualdad es la que permite utilizar las señales filtradas $\tilde{z}_\ell[n]$ para obtener $z_f[n]$ evitando los problemas de aliasing sin la necesidad de interpolar las señales intervinientes, aún cuando la entrada sea muestreada cerca del límite de Nyquist. La señal a la salida del MEA filtrada puede escribirse como:

$$\begin{aligned}z_f[n] &= e^{-jx_A[n]} * h_U[n] \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \tilde{z}_\ell[n] \\ &= \tilde{z}_0[n] + \tilde{z}_1[n] + \frac{1}{2!} \tilde{z}_2[n] + \dots,\end{aligned}\quad (3.44)$$

cuyo espectro está dado por (3.35). Dada su analogía con (3.20), a este conjunto de operaciones se lo denominará MEAF-TD. Es importante destacar que aunque no existe la contraparte de tiempo discreto para la señal a la salida del MEA $z(t)$, el MEAF-TD es el equivalente exacto del MEAF-TC ya que no fueron utilizadas aproximaciones ni operaciones de interpolación sobre las señales. En resumen, a partir de la señal analítica $x_A[n]$ se calcula directamente $z_f[n]$ sin la necesidad de generar la señal intermedia $z[n]$ que posee problemas de aliasing. Utilizando el MEAF-TD es posible realizar la versión de TD del modulador click y obtener señales binarias libres de distorsión en una banda de frecuencias específica.

3.4.2. Representación ideal con un número finito de términos

Como sucedía para señales de TC, si la señal de entrada $x[n]$ es del tipo pasabanda el soporte del espectro de la señal $\tilde{z}_\ell[n]$ es $[\ell\omega_L, \omega_V]$. Por lo tanto, los valores de ℓ para los que se cumple $\ell\omega_L > \omega_V$ pueden ser excluidos ya que no agregan información suplementaria en la banda de frecuencias de interés. Teniendo en cuenta este aspecto se puede reescribir el MEAF-TD como una suma finita:

$$z_f[n] = \sum_{\ell=0}^{L_U} \frac{1}{\ell!} \tilde{z}_\ell[n], \quad (3.45)$$

donde $L_U = \lfloor \omega_V / \omega_L \rfloor$. Sin embargo, si la señal de entrada es del tipo pasabajos, el soporte del espectro $\tilde{Z}_\ell(e^{j\omega})$ es $[0, \omega_V]$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, teniendo que utilizar un número infinito de términos para la representación ideal.

3.5. Conclusiones

En este capítulo se hizo un análisis detallado del MEA, principal bloque que compone el modulador click. Del análisis se pudo ver que la extensión espectral a la salida de este bloque es infinita, lo que impide su implementación directa en sistemas muestreados debido a problemas de aliasing.

Como principal aporte de la Tesis se desarrolló el MEAF-TC, que permite obtener la

señal a la salida del conjunto MEA-filtro. La ventaja del método es que evita la necesidad de representar señales de ancho de banda creciente, sin hacer aproximaciones ni simplificaciones. Como resultado adicional se comentó que para el caso de señales pasabanda, el número de términos para representar de manera ideal MEA y filtrado es finito.

Para abrir el camino hacia la implementación de TD, se analizaron las operaciones realizadas por el modulador click en el caso de señales muestreadas. Se demostró que es imposible aplicar la operación de exponenciación sobre señales de TD. Para extender las ideas incorporadas en el capítulo se derivó el MEAF-TD, que reproduce el comportamiento del MEAF-TC para señales muestreadas. Se destacó la importancia de reemplazar el FPB del esquema original con un nuevo filtro denominado analítico, que permite evitar los problemas de aliasing.

Las ideas presentadas en este capítulo son el principal aporte de este Tesis, especialmente el método denominado MEAF, ya que permite aplicar el esquema de modulación click sobre señales muestreadas.

Capítulo 4

Modulador click discreto

4.1. Introducción

En el capítulo anterior se analizó de manera detallada el comportamiento del MEA, que es el bloque más importante del modulador click. Se demostró que el esquema original planteado por Logan no puede ser implementado en TD debido a problemas de aliasing. Se propuso un método de exponenciación y filtrado simultáneos, que permite evitar estos problemas aún cuando las señales se muestrean cerca del límite de Nyquist.

En este capítulo se describe la implementación de TD del modulador click. Se utilizarán los resultados del capítulo anterior para el MEAF-TD adaptado a señales de longitud finita y se complementará con los bloques restantes. El resultado será un modulador enteramente discreto que funcione a partir de señales muestreadas y permita obtener señales binarias con su banda base libre de distorsión y velocidades de conmutación bajas.

4.2. Bloques constitutivos del modulador digital

En la Fig. 4.1 se muestra el diagrama en bloques del modulador click de tiempo discreto, de donde se destacan tres bloques principales: generación de la señal analítica mediante el transformador de Hilbert (TH), modulación exponencial analítica y filtrado simultáneo (MEAF-TD), y detección de cruces por cero (DCC). Los datos de entrada del modulador son la señal $x[n]$, el índice que especifica el fin de la banda de guarda k_U y el

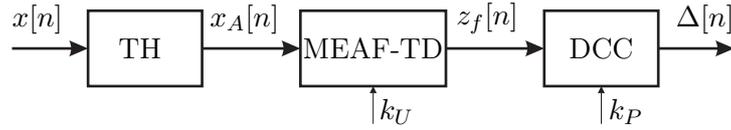


Figura 4.1: Modulador de tiempo discreto.

índice asociado a la frecuencia de la portadora k_P . La salida $\Delta[n]$ del modulador discreto representa los anchos de pulso de la señal binaria resultante. A continuación se describen cada uno de los bloques poniendo énfasis en el caso de señales de longitud finita, ya que se deben tener en cuenta algunos detalles ligados a la implementación.

4.2.1. Generación de la señal analítica

La secuencia de entrada $x[n]$ es de longitud finita N y frecuencia de muestreo f_s . Su espectro $X[k]$ se obtiene a través de la TDF, que equivale a tomar muestras equiespaciadas del espectro $X(e^{j\omega})$:

$$X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}. \quad (4.1)$$

De esta manera, el espectro $X[k]$ de $x[n]$ es distinto de cero en el intervalo $[k_L, k_H] \cup [N - k_H, N - k_L]$, donde $\omega_L = \frac{2\pi}{N}k_L$ y $\omega_H = \frac{2\pi}{N}k_H$. La respuesta en frecuencia $H_H[k]$ del filtro de Hilbert necesario para calcular la transformada de Hilbert de $x[n]$ se obtiene muestreando (3.22). La señal $\hat{x}[n]$ está dada por la convolución lineal (3.23). El espectro $\hat{X}[k]$ se obtiene muestreando $\hat{X}(e^{j\omega})$ en (3.24). Aquí es importante hacer un punto y remarcar algunas diferencias importantes que se dan cuando las secuencias son de longitud finita.

Si la señal de entrada $x[n]$ es de longitud N , es de esperar que su transformada de Hilbert $\hat{x}[n]$ también sea de longitud N ya que ambas deben ser combinadas para calcular la señal analítica $x_A[n]$. Sin embargo, si se utiliza esta longitud para muestrear $\hat{X}(e^{j\omega})$ en la obtención de $\hat{X}[k]$, se obtiene aliasing temporal en la operación de filtrado. Para visualizar este efecto, es útil escribir el espectro de la transformada de Hilbert $\hat{x}[n]$ en

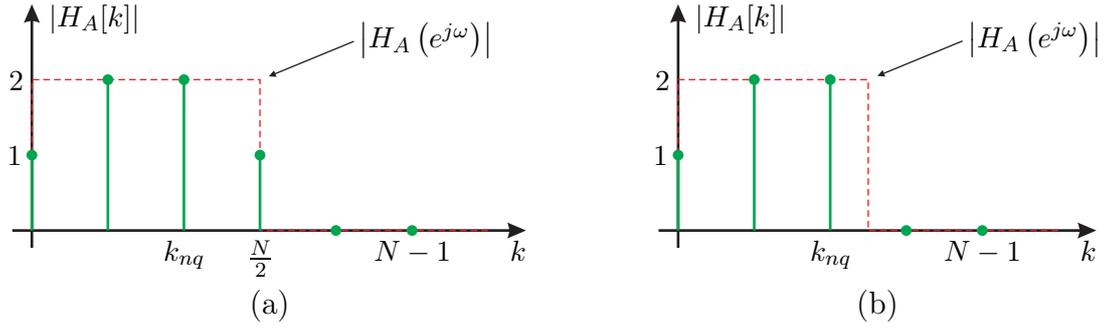


Figura 4.2: Obtención de $H_A[k]$ a partir de $H_A(e^{j\omega})$: (a) N par y (b) N impar.

esta situación:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}[k] &= \hat{X}(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\
 &= X(e^{j\omega}) H_H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\
 &= X[k] H_H[k].
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por las propiedades de la TDF, esta operación corresponde a la convolución circular en el dominio tiempo:

$$\hat{x}[n] = x[n] \circledast h_H[n]. \tag{4.3}$$

Con estas señales se calcula la señal analítica como:

$$\begin{aligned}
 x_A[n] &= x[n] + j\hat{x}[n] \\
 &= x[n] \circledast h_A[n]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

con su TDF dada por:

$$X_A[k] = X[k] H_A[k]. \tag{4.5}$$

La respuesta en frecuencia $H_A[k]$ del filtro analítico de respuesta impulsiva $h_A[n]$ se obtiene muestreando (3.26) en $\omega = \frac{2\pi}{N}k$. Se pueden dar dos casos según el valor de N sea par o impar, como se muestra en la Fig. 4.2. Para el caso en el que N es par, el valor correspondiente a $N/2$ se mapea en $\omega = \pi$ y por lo tanto este valor es muestreado. La

respuesta en frecuencia del filtro es:

$$H_A[k] = \begin{cases} 2, & \text{si } 1 \leq k \leq k_{nq}, \\ 1, & \text{si } k = 0, k_{nq} + 1, \\ 0, & \text{si } k_{nq} + 1 < k \leq N - 1, \end{cases} \quad (4.6)$$

donde k_{nq} es el índice asociado con la frecuencia de Nyquist de la señal de entrada:

$$k_{nq} = \begin{cases} N/2 - 1, & \text{si } N \text{ es par,} \\ (N - 1)/2, & \text{si } N \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Si N es impar la respuesta en frecuencia del filtro $H_A[k]$ es muy similar, la única diferencia es que el valor correspondiente a $\omega = \pi$ no se muestrea como puede apreciarse en la Fig 4.2 (b). De las ecuaciones (4.3) y (4.4) se ve claramente que las señales resultantes $\hat{x}[n]$ y $x_A[n]$ contienen aliasing en el dominio tiempo, ya que provienen de la convolución circular de dos secuencias del mismo largo. De hecho las primeras $N - 1$ muestras del total de N son corrompidas por los efectos del aliasing. Sin embargo, el filtro $H_A[k]$ remueve las componentes de frecuencia negativa de la señal $x[n]$, y pareciera que el resultado de este proceso de filtrado debe ser correcto. Este hecho es mencionado en [73] que trata sobre la generación de señales analíticas usando la TDF. En rigor, una señal analítica es una función compleja de variable continua cuya transformada de Fourier es nula para las frecuencias negativas. Una secuencia compleja, como la señal discreta $x_A[n]$, no puede ser considerada analítica desde un punto de vista formal, ya que es función de una variable entera y además su espectro es periódico, lo que hace imposible que se anule para todo el eje negativo de frecuencias. De todas maneras, el término “señal analítica” es utilizado para señales de tiempo discreto haciendo esta importante distinción. Por lo dicho y para clarificar la acción del filtro $h_A[n]$, para que la señal de tiempo discreto $x_A[n]$ sea analítica se deben cumplir con dos requerimientos básicos. Primero, la parte real debe coincidir

exactamente con la señal real original, esto es:

$$\operatorname{Re} \{x_A[n]\} = x[n]. \quad (4.8)$$

Segundo, las partes real e imaginaria deben ser ortogonales en el intervalo de duración finita $[0, N - 1]$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \{x_A[n]\} \operatorname{Im} \{x_A[n]\} = 0 \quad (4.9)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \hat{x}[n] = 0.$$

El filtro con respuesta en frecuencia $H_A[k]$ aplicado al espectro $X[k]$ de la señal de entrada $x[n]$ permite generar una señal analítica $x_A[n]$ que cumple con las relaciones anteriores.

4.2.2. MEAF-TD

El MEAF-TD dado por (3.44) y (3.35) representa el caso más general para señales de TD, ya que la variable que representa la frecuencia ω es real y puede tomar cualquier valor. En la práctica, la herramienta de cálculo del espectro es generalmente la TDF, que sólo permite representar un número finito de valores frecuenciales de la secuencia de entrada. Es necesario desarrollar el método MEAF-TD para su utilización con secuencias de longitud finita y darle entonces un sentido práctico.

El MEAF-TD para secuencias de longitud finita se calcula a partir de $\tilde{z}_\ell[n]$ dado por (3.42). El espectro $\tilde{Z}_\ell[k]$ se obtiene de (3.43), reemplazando la operación de convolución periódica \circledast por la convolución circular de tamaño adecuado. Las secuencias $\tilde{z}_\ell[n]$ serán, en general, de distinta duración que la secuencia de entrada $x[n]$. La relación entre el largo de la secuencia de entrada N y el largo M de las secuencias $\tilde{z}_\ell[n]$ depende de la definición de la banda de guarda. Para comprender este hecho es importante analizar el proceso de filtrado aplicado sobre la señal analítica para la obtención del primer término del MEAF-TD.

El primer término en la expansión del MEA es la señal $z_1[n] = -jx_A[n]$. Esta señal

es filtrada con el FPB analítico para obtener $\tilde{z}_1[n]$. En el dominio frecuencia $\tilde{Z}_1[k] = Z_1[k]H_U[k]$, donde la respuesta en frecuencia del filtro está dada por:

$$H_U[k] = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq k \leq k_U, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (4.10)$$

donde $k_U = \lceil Nf_U/f_s \rceil$ es el índice que indica el fin de la banda de guarda. Las componentes frecuenciales de la señal $x[n]$ en el intervalo $[0, k_U]$ estarán libres de distorsión luego del proceso de modulación. En la obtención de $\tilde{Z}_1[k]$ a partir de $Z_1[k]$ pueden darse los siguientes casos según la elección de la frecuencia de finalización de la banda de guarda:

- $k_U < k_H$: en este caso la elección de k_U resulta en que algunas componentes frecuenciales de la señal de entrada (entre k_U y k_H) serán distorsionadas por el modulador.
- $k_H < k_U < k_{nq}$: las componentes de banda base de la señal de entrada estarán libres de distorsión. Sin embargo este caso representa el límite operativo si las señales son muestreadas cercanas a su frecuencia de Nyquist porque se requerirá de un filtro reconstructor abrupto para demodular las señales.
- $k_U > k_{nq}$: la banda de guarda finaliza más allá del límite de Nyquist de la señal de entrada. Este caso representa la operación deseada del modulador, ya que no sólo conserva las componentes frecuenciales de la señal libres de distorsión sino que permite la utilización de un filtro reconstructor de bajo orden para demodular las señales.

El último caso es análogo a mover el punto de Nyquist desde k_{nq} a k_U . Es por esto que, en general, la longitud de las secuencias $\tilde{z}_\ell[n]$ será $M \neq N$. El valor de M se elige para evitar aliasing frecuencial en la operación de multiplicación. En este caso, como el punto de Nyquist de la señal filtrada es k_U y se trata de señales analíticas, se puede elegir $M = 2(k_U + 1) - 1$.

La secuencia ℓ -ésima es

$$\tilde{z}_\ell[n] = (\tilde{z}_{\ell-1}[n]\tilde{z}_1[n]) \circledast h_U[n]. \quad (4.11)$$

Su espectro $\tilde{Z}_\ell[k]$ se obtiene a partir de:

$$\tilde{Z}_\ell[k] = \left(\frac{1}{M} \tilde{Z}_{\ell-1}[k] \circledast \tilde{Z}_1[k] \right) H_U[k], \quad (4.12)$$

donde el factor $1/M$ proviene de las propiedades del producto de secuencias de longitud finita, y es análogo al factor $1/2\pi$ en (3.43). Antes de continuar hay que mencionar un detalle importante. Al calcular el espectro $X[k]$ de la señal de entrada $x[n]$ utilizando la TDF de N puntos, se obtiene un espectro con un factor de escala N si se utiliza la definición usual de la TDF, es decir,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (4.13)$$

Los espectros $X_A[k]$ y $Z_1[k]$ de las señales analíticas $x_A[n]$ y $z_1[n] = -jx_A[n]$ poseen el mismo factor de escala N , ya que se derivan directamente a partir de $X[k]$. Dependiendo del valor de k_U seleccionado, se realiza un agregado de ceros en el espectro $Z_1[k]$ para hacer el cálculo del primer término del MEAF-TD mediante $\tilde{Z}_1[k] = Z_1[k]H_U[k]$. Al aplicar la TDF inversa de M puntos para obtener $\tilde{z}_1[n]$, esta señal queda con un factor de escala N/M :

$$\tilde{z}_1[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{Z}_1[k] e^{j\frac{2\pi}{M}kn}. \quad (4.14)$$

Si se utiliza esta secuencia para las sucesivas convoluciones, todos los resultados deberán ser escalados correctamente para corregir el error. En la Tabla 4.1 se muestran los valores de escala correspondientes a las señales intervinientes. La normalización es sencilla si se escribe la ecuación para $\tilde{z}_\ell[n]$ como:

$$\tilde{z}_\ell[n] = \left[\tilde{z}_{\ell-1}[n] \left(\tilde{z}_1[n] \frac{M}{N} \right) \right] \circledast h_U[n]. \quad (4.15)$$

Señal	Escala
$x[n]$	1
$X[k]$	N
$X_A[k]$	N
$Z_1[k]$	N
$\tilde{Z}_1[k]$	N
$\tilde{z}_1[n]$	$\frac{N}{M}$

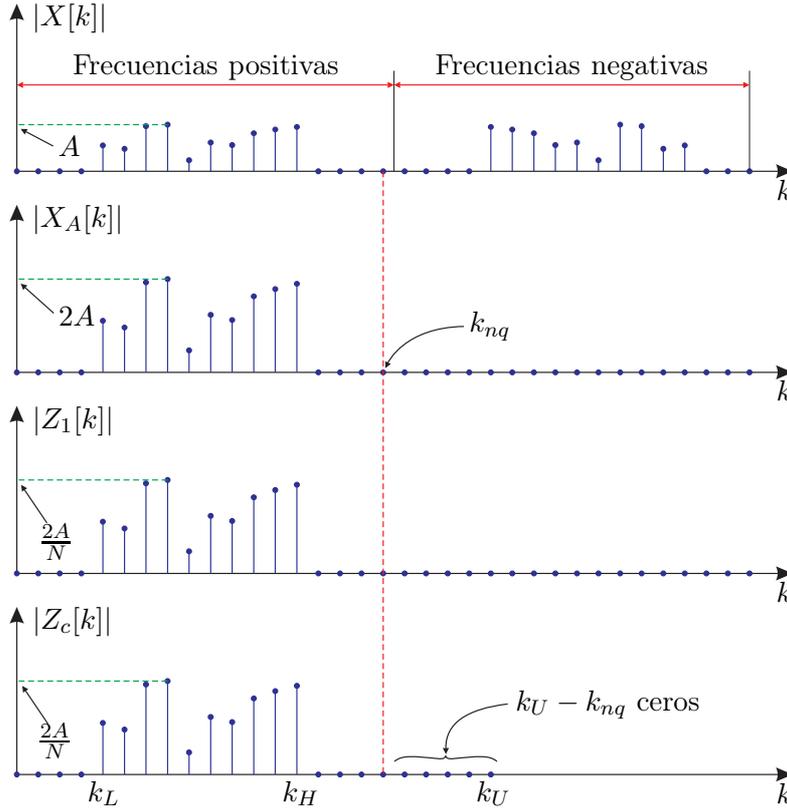
Cuadro 4.1: Valores de escala de las señales intervinientes en el MEAF-TD.

En esta ecuación la secuencia es normalizada multiplicando por M/N para que el resultado tenga la amplitud correcta. La TDF de M puntos de esta señal está dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_\ell[k] &= \left[\frac{1}{M} \tilde{Z}_{\ell-1}[k] \circledast \left(\tilde{Z}_1[k] \frac{M}{N} \right) \right] H_U[k] \\ &= \left[\tilde{Z}_{\ell-1}[k] \circledast \left(\tilde{Z}_1[k] \frac{1}{N} \right) \right] H_U[k].\end{aligned}\tag{4.16}$$

De esta manera y para evitar confusión, se introduce la secuencia $z_c[n]$ con su TDF de M puntos dada por $Z_c[k] = \tilde{Z}_1[k]/N$, que será utilizada en el cálculo de los espectros $\tilde{Z}_\ell[k]$ corregidos al valor de escala apropiado y teniendo en cuenta el cambio de longitud por la selección de k_U . La obtención del espectro $Z_c[k]$ de la señal $z_c[n]$ es muy sencilla ya que sólo se manipulan los índices frecuenciales. En la Fig. 4.3 se muestra la relación entre los espectros $X[k]$, $X_A[k]$, $Z_1[k]$ y $Z_c[k]$. El espectro $X[k]$ se obtiene aplicando una TDF de N puntos a la señal de entrada $x[n]$. La TDF $X_A[k]$ de la señal analítica $x_A[n]$ se deriva utilizando el espectro $X[k]$, multiplicando las amplitudes por 2 salvo para $k = 0$ (y $k = k_{nq}$ si N es par) y haciendo cero la parte negativa del espectro $X[k]$. El filtro $H_U[k]$ en realidad no es necesario, ya que retiene las muestras de $Z_1[k]$ para $k \in [0, k_U]$ y remueve las componentes por encima de k_U . Finalmente, $Z_c[k]$ se obtiene aplicando el factor de normalización $1/N$. Para el algoritmo de cálculo se utilizan las muestras no nulas de los espectros, de manera que las secuencias intervinientes $\tilde{Z}_\ell[k]$ son de longitud $k_U + 1$.

Como último detalle hay que observar que, como las secuencias $\tilde{z}_\ell[n]$ se obtienen de manera recursiva utilizando el resultado anterior, se puede distribuir el término $1/\ell!$ en los sucesivos cálculos. De esta manera, la ecuación que permite calcular la secuencia $\tilde{z}_\ell[n]$


 Figura 4.3: Relación entre $X[k]$, $X_A[k]$, $Z_1[k]$ y $Z_c[k]$.

es:

$$\tilde{z}_\ell[n] = \frac{1}{\ell} (\tilde{z}_{\ell-1}[n] \times z_c[n]) \circledast h_U[n], \quad (4.17)$$

o en el dominio frecuencia:

$$\tilde{Z}_\ell[k] = \frac{1}{\ell} \left[\tilde{Z}_{\ell-1}[k] \circledast Z_c[k] \right] H_U[k]. \quad (4.18)$$

El algoritmo de cálculo se inicializa con $\ell = 1$ y el término correspondiente a $\ell = 0$ dado por:

$$\tilde{Z}_0[k] = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } 1 \leq k \leq k_U, \end{cases} \quad (4.19)$$

que representa un impulso frecuencial en $k = 0$. Aunque la implementación de (4.18) parece complicada, el cálculo es sencillo si se observan cuidadosamente las operaciones intervinientes. La convolución circular es implementada utilizando la FFT, permitiendo la reducción de costo computacional. La longitud M es seleccionada para evitar aliasing

frecuencial en el cálculo. El filtro $H_U[k]$ extrae los valores entre 0 y k_U del resultado, y hace cero el resto. Los pasos para obtener las secuencias son los siguientes:

- Agregar k_U ceros a los espectros $Z_c[k]$ y $\tilde{Z}_{\ell-1}[k]$.
- Calcular la convolución circular de largo $M = 2(k_U + 1) - 1$.
- Descartar las últimas k_U muestras del resultado para que $\tilde{Z}_\ell[k]$ tenga nuevamente una longitud de $k_U + 1$ puntos.
- Dividir el resultado por ℓ .

Las secuencias $\tilde{Z}_\ell[k]$ se suman para obtener $Z_f[k]$:

$$Z_f[k] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{Z}_\ell[k]. \quad (4.20)$$

Esta ecuación es la implementación del MEAF-TD para secuencias de longitud finita, y representa el equivalente exacto del MEAF-TC para señales muestreadas ya que no se han utilizado aproximaciones ni simplificaciones en el proceso de cálculo.

En algunas aplicaciones es deseable utilizar un número limitado de términos para aproximar $z_f[n]$. Esto es posible debido a que la contribución de los términos de mayor orden decrece con $1/\ell!$. La TDF de la señal aproximada se obtiene directamente limitando la cantidad de términos a L en (4.20):

$$Z_L[k] = \sum_{\ell=0}^L \tilde{Z}_\ell[k]. \quad (4.21)$$

Se ha podido verificar experimentalmente que la relación entre el número de términos L utilizados para aproximar $z_f[n]$ y la máxima relación S/R en la banda de interés está dada por:

$$S/R \text{ [dB]} \approx 20 \log(L!), \quad (4.22)$$

donde S/R es la relación señal a ruido definida de manera convencional [74, 75].

4.2.3. Detección de cruces por cero

Para completar el proceso de modulación click hay que intercalar los cruces por cero de la portadora $p(t)$ dada por (2.13) y la señal real $s(t)$ que se obtiene con (2.15) a partir de $z_f(t)$. En el caso del modulador discreto la señal real $s[n]$ se obtiene a partir de $z_f[n]$:

$$s[n] = \text{Re} \{ z_f[n] e^{-j\omega_P n} \}. \quad (4.23)$$

El instante exacto en el que la señal $s[n]$ cruza por cero no está bien definido, salvo que una de las muestras sea exactamente igual a cero. En realidad, lo único que se puede decir con certeza es que entre dos muestras consecutivas el signo de la señal cambia. Para el caso de la modulación click, es de vital importancia encontrar el momento exacto en el que la señal continua $s(t)$ cruza el eje. Es necesario estudiar cuidadosamente la información que brinda la secuencia $s[n]$ para minimizar los errores y mantener baja la distorsión del modulador. En trabajos previos, los cruces por cero se encontraban usando un polinomio interpolador de tercer orden construido utilizando cuatro muestras alrededor de cada uno de los cambios de signo de la señal discreta [54]. Claramente, la detección es mejor cuando se incrementa la frecuencia de muestreo. Sin embargo, la ventaja principal del modulador click discreto propuesto es que no es necesario incrementar la frecuencia de muestreo de la entrada. Un método alternativo para calcular los cruces por cero es presentado aquí.

Se supone que la secuencia $s[n]$ es de longitud N y resulta de muestrear la señal real $s(t)$:

$$s[n] = s(t)|_{t=nT_s}, \quad (4.24)$$

con $T_s = 1/f_s$ el período de muestreo y $n = 0, 1, \dots, N - 1$. La señal $s(t)$ es de período T y su espectro tiene la forma que se muestra en la Fig. 2.6, con $f_P = k_P/T$ la frecuencia de la portadora. Como $s(t)$ es una señal periódica, se puede escribir utilizando la serie de Fourier:

$$s(t) = \sum_{k=-k_P}^{k_P} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \quad (4.25)$$

con C_k sus coeficientes de Fourier. Los instantes en los que $s(t)$ cruza por cero pueden

encontrarse buscando las raíces del polinomio:

$$\sum_{k=-k_P}^{k_P} C_k \sigma^k = 0, \quad (4.26)$$

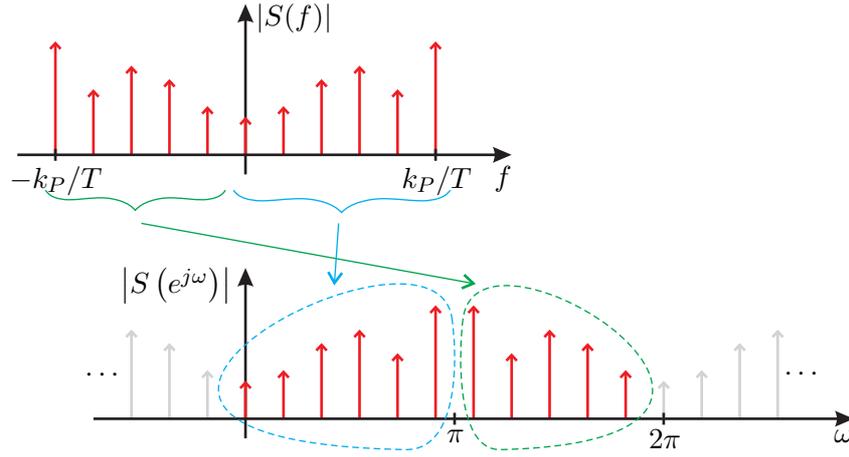
con $\sigma = e^{j\frac{2\pi}{T}t}$ una variable que toma valores complejos. Para evitar las potencias negativas se multiplica la ecuación anterior por σ^{k_P} , que no cambia la ubicación de los ceros. De esta manera pueden buscarse las raíces del polinomio $P(\sigma)$ dado por:

$$\begin{aligned} P(\sigma) &= \sigma^{k_P} s(\sigma) \\ &= \sigma^{k_P} \sum_{k=-k_P}^{k_P} C_k \sigma^k \\ &= \sum_{k=-k_P}^{k_P} C_k \sigma^{k+k_P} \\ &= C_{-k_P} + C_{(-k_P+1)}\sigma + \dots + C_{k_P} \sigma^{2k_P}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En el dominio tiempo la señal $P(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}k_P t} s(t)$ es una señal compleja y sin contenido frecuencial negativo. El polinomio $P(\sigma)$ posee $2k_P$ ceros y todos ellos están ubicados en el círculo unitario en la variable σ . Al aplicar la transformación inversa sobre σ , resulta que los ceros que están ubicados en el círculo unitario se mapean en el eje real y por lo tanto son los cruces por cero buscados de la señal. El hecho de que los ceros estén sobre el círculo unitario se debe a que la señal $s(t)$ es de máxima fase [76, 77].

Ahora el interés es obtener estos cruces por cero a partir de las muestras $s[n]$. Si el período de muestreo T_s es apropiado para evitar los problemas de aliasing, los coeficientes C_k pueden obtenerse a partir de la información de la TDF $S[k]$ de la señal discreta $s[n]$. En la Fig. 4.4 se muestra la relación entre los espectros $S(f)$ y $S(e^{j\omega})$. La TDF $S[k]$ de $s[n]$ corresponde a tomar muestras del espectro $S(e^{j\omega})$ en los valores $2\pi k/N$. Los coeficientes de Fourier correspondientes a la parte positiva del espectro de la señal $s(t)$ se mapean directamente con los valores $S[k]$:

$$C_k = S[k], \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, k_P. \quad (4.28)$$


 Figura 4.4: Relación entre los espectros $S(f)$ y $S(e^{j\omega})$.

Los coeficientes correspondientes a la porción negativa del espectro de $s(t)$ están mapeados en la segunda mitad de $S[k]$, y deben ser espejados para escribir $s(t)$ en función de $S[k]$:

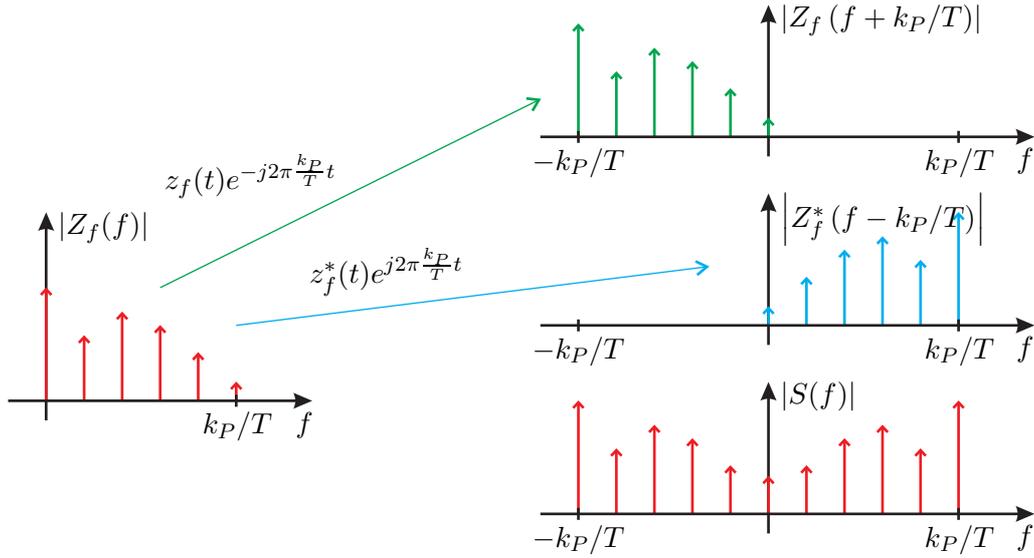
$$C_{-k} = S[N - k], \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, k_P. \quad (4.29)$$

Usando estas igualdades la señal $s(t)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} s(t) &= S[0] + \sum_{k=1}^{k_P} \left(S[N - k]e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} + S[k]e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \right) \\ &= S[0] + \sum_{k=1}^{k_P} \left(S^*[k]e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} + S[k]e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La última línea se obtiene de utilizar la propiedad de conjugado simétrico $C_k = C_{-k}^*$ por tratarse de una señal real.

Lo que resta por hacer es utilizar el espectro de la señal a la salida del MEAF-TD $Z_f[k]$ para escribir $S[k]$ y por lo tanto $s(t)$. En la Fig. 4.5 se muestra la obtención del espectro de la señal $s(t)$ a partir de $z_f(t)$ para el caso planteado, es decir, las señales son periódicas de período T . Al efectuar el corrimiento los valores ubicados en k_P/T quedan solapados y dan lugar al valor de continua $S(0) = Z_f(k_P/T) + Z_f^*(k_P/T)$. La parte positiva del espectro de la señal real $s(t)$ se obtiene utilizando la versión espejada, conjugada y corrida del espectro $Z_f(f)$, es decir, $Z_f^*(f - k_P/T)$. La parte negativa del espectro se obtiene de manera similar, pero sin aplicar el conjugado, y está dada por


 Figura 4.5: Obtención de $S(f)$ a partir de $Z_f(f)$.

$Z_f(f + k_P/T)$. En términos de la TDF $Z_f[k]$ de la señal analítica $z_f[n]$, como la señal no contiene componentes frecuenciales en la parte negativa del espectro, la obtención de los coeficientes C_k es trivial:

$$C_k = Z_f^*[k_P - k], \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, k_P. \quad (4.31)$$

$$C_{-k} = Z_f[k_P - k], \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, k_P. \quad (4.32)$$

La componente de continua es simplemente $S(0) = Z_f[k_P] + Z_f^*[k_P]$. La señal $s(t)$ se puede escribir utilizando estas igualdades:

$$\begin{aligned} s(t) &= Z_f[k_P] + Z_f^*[k_P] + \sum_{k=1}^{k_P} Z_f[k_P - k] e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} + Z_f^*[k_P - k] e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \\ &= \sum_{k=0}^{k_P} Z_f[k_P - k] e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} + Z_f^*[k_P - k] e^{j\frac{2\pi}{T}kt}. \end{aligned}$$

Para obtener el polinomio $P(\sigma)$ resta reemplazar $\sigma = e^{j\frac{2\pi}{T}t}$ y multiplicar por σ^{k_P} para

evitar las potencias negativas de la variable σ :

$$\begin{aligned}
 P(\sigma) &= \sigma^{k_P} s(\sigma) \\
 &= \sigma^{k_P} \sum_{k=0}^{k_P} Z_f[k_P - k] \sigma^{-k} + Z_f^*[k_P - k] \sigma^k \\
 &= \sum_{k=0}^{k_P} Z_f[k_P - k] \sigma^{-k+k_P} + Z_f^*[k_P - k] \sigma^{k+k_P}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

La ecuación anterior se puede reescribir evitando que aparezca el índice negativo con un sencillo cambio de variables:

$$P(\sigma) = \sum_{k=0}^{k_P} Z_f[k] \sigma^k + Z_f^*[k_P - k] \sigma^{k+k_P}. \tag{4.34}$$

Como se dijo antes los ceros de $P(\sigma)$ son complejos y están todos ubicados en el círculo unitario. Para mapear esos ceros al eje real, es necesario aplicar la transformación inversa sobre la variable σ . Hay que notar que la fase de σ_n es $2\pi t_n/T$, donde t_n es uno de los cruces por cero y T el período de la señal $s(t)$. En términos de N y T_s , $T = NT_s$ y el valor de t_n está dado por

$$t_n = \frac{1}{2\pi} \arg(\sigma_n) NT_s. \tag{4.35}$$

Los ceros calculados usando el polinomio $P(\sigma)$ son exactos y no se cometen errores como en el caso de la utilización de la interpolación de las muestras alrededor de los cambios de signo. La frecuencia de la portadora k_P está ubicada en el límite superior del espectro, resultando en la utilización de la mínima frecuencia admisible para representar las señales en TD. Si se utilizara esta frecuencia de muestreo con el método de interpolación de las muestras se obtendría un error muy grande ya que en promedio sólo se cuenta con una muestra entre cambios de signo consecutivos. Además la utilización del polinomio $P(\sigma)$ permite utilizar la información frecuencial $Z_f[k]$ resultante del MEAF-TD, que a su vez realiza todo el cálculo en el mismo dominio. Por lo tanto, una vez que se aplica la TDF para obtener el espectro $X[k]$ de la señal de entrada, todos los cálculos sucesivos se

mantienen en el dominio de la frecuencia, aún el cálculo de los cruces por cero.

La señal binaria $q(t)$ es obtenida utilizando los cruces por cero de $s(t)$ y los de la portadora. Como la portadora es una señal senoidal de frecuencia conocida, sus cruces por cero no necesitan ser calculados ya que ocurren en los instantes de tiempo dados por

$$t_P = \frac{n}{2f_P}, \quad \text{con } n = 0, 1, \dots \quad (4.36)$$

Los anchos de pulso $\Delta[n]$ están dados por la diferencia $t_n - t_P$:

$$\Delta[n] = t_n - \frac{n}{2f_P}, \quad \text{con } n = 0, 1, \dots$$

El método de cálculo de los cruces por cero es útil en la versión fuera de línea del modulador click discreto. El principal problema es que el orden del polinomio $P(\sigma)$ (dado por $2k_P$) tiende a ser grande. Esto se debe a que la frecuencia de la portadora, que especifica el orden del polinomio, depende de la banda de guarda seleccionada. Si se incrementa la banda de guarda, la frecuencia de la portadora debe ser aumentada resultando en un orden mayor para el polinomio $P(\sigma)$ utilizado para calcular los cruces por cero. Se está estudiando actualmente un método más eficiente para calcular los cruces por cero que permita disminuir la complejidad del modulador.

4.3. Conclusiones

En este capítulo se presentó el esquema del modulador de TD propuesto. El proceso se basa principalmente en el MEAF-TD desarrollado en el capítulo anterior. Para simplificar la aplicación del método se describió como un algoritmo, enumerando claramente la secuencia de operaciones que deben ser realizadas para obtener la señal modulada.

Para poder elegir de manera adecuada el número de términos utilizados para la expansión del MEAF-TD, se introdujo una fórmula empírica que permite relacionar este número con la máxima relación S/R esperable a la salida del modulador.

Para complementar el proceso de modulación, se presentó un novedoso método de

cálculo de cruces por cero en el dominio de la frecuencia. Este método permite explotar el hecho de que el MEAF-TD utiliza la señal muestreada cerca de su límite de Nyquist, evitando operaciones de interpolación a la vez que eliminando el aliasing. Además, la salida del MEAF-TD es utilizada directamente para el cálculo de los ceros en el dominio de la frecuencia aplicando simples operaciones de corrimiento (manipulación de índices) y conjugación (cambio de signo de la parte imaginaria).

Capítulo 5

Resultados experimentales

5.1. Introducción

A lo largo del desarrollo de la Tesis se presentó la modulación click como una alternativa a la MAP para generar señales binarias libres de distorsión en una banda de frecuencias específica, útiles para ser utilizadas en etapas de amplificación conmutadas. Se estudiaron los problemas inherentes a la implementación digital del modulador siendo el MEA el bloque más problemático pero a la vez el corazón del modulador click.

En el Capítulo 3 se introdujo el MEAF-TC, que agrupa el MEA y el FPB posterior en un único bloque de cálculo y evita la necesidad de representar señales de ancho de banda creciente. Se presentó también el MEAF-TD que es el equivalente exacto del MEAF-TC para señales de TD. Esta técnica evita los problemas de aliasing del modulador click de TD y permite plantear un modulador digital sin la necesidad de utilizar aproximaciones ni simplificaciones.

En el Capítulo 4 se desarrolló un modulador de TD utilizando el MEAF-TD y complementando con los bloques faltantes. La señal analítica se deriva utilizando información frecuencial, dominio en el cual es posible también implementar el MEAF-TD. Para aprovechar estas ventajas, se desarrolló un método de cálculo de cruces por cero que trabaja con la información que provee la TDF. De esta manera la información es mantenida en el dominio de la frecuencia durante todo el proceso de modulación.

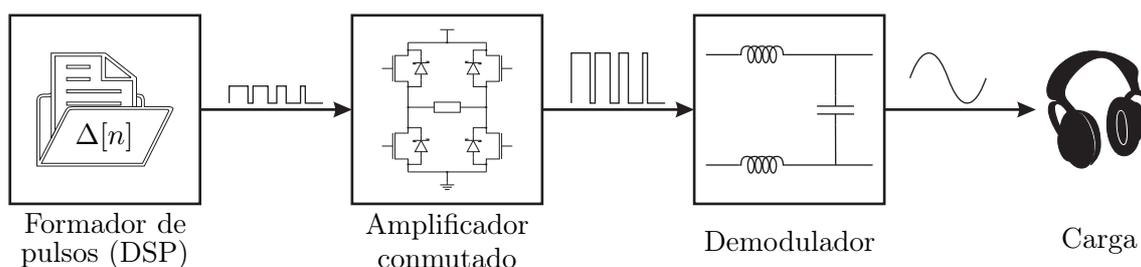


Figura 5.1: Diagrama en bloques del sistema completo.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de simulaciones y mediciones experimentales de un amplificador conmutado basado en la implementación fuera de línea del modulador de TD propuesto en el Capítulo 4. El concepto de modulación fuera de línea fue introducido en [62] y describe al proceso de modulación de manera similar a la codificación de señales, por ejemplo MP3. Utilizando esta idea, la información de la señal moduladora se convierte a un formato especial que contiene los instantes de conmutación de la señal binaria, que luego es reconstruida para ser utilizada de manera directa por una etapa conmutada. Este sistema de codificación/reproducción permite simplificar en gran medida el hardware requerido sin sacrificar la calidad de la señal resultante.

5.2. Hardware utilizado

El diagrama en bloques del sistema completo se muestra en la Fig. 5.1. Los valores de ancho de pulso $\Delta[n]$ se cargan en la memoria del DSP, que actúa como un formador de pulsos y reconstruye la señal binaria $q(t)$ obtenida como resultado del proceso de modulación. El DSP es un TMS320F28335 de Texas Instruments que está montado en un kit de desarrollo TMS320F28335 eZdsp de Spectrum Digital. Este dispositivo es de punto flotante y posee varios periféricos especialmente diseñados para trabajar con sistemas conmutados. En particular cuenta con bloques que implementan diferentes variantes de la modulación MAP según la configuración utilizada. Además tiene la posibilidad de ajustar los tiempos muertos para el encendido de las llaves, pudiéndose configurar según los dispositivos utilizados o los requerimientos de la aplicación. Tanto el driver como los transistores del puente son componentes comunes y no poseen características especiales,

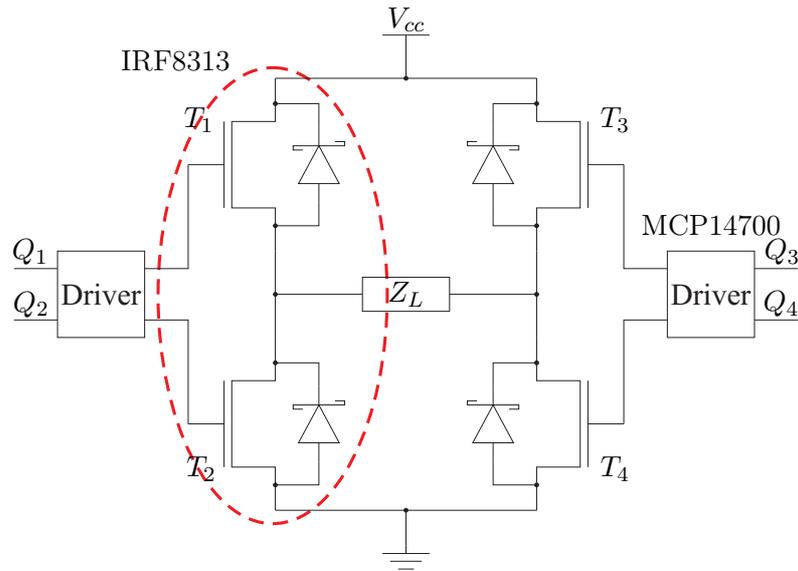


Figura 5.2: Circuito esquemático del amplificador tipo puente.

lo que hace que el hardware sea de bajo costo y fácil de reemplazar para ajustarlo según la aplicación requerida. En la Fig. 5.2 se ve en detalle el circuito esquemático del amplificador tipo puente. Los transistores T_1 y T_2 pertenecen a una pierna y son controlados por el driver MCP14700 a partir de las señales Q_1 y Q_2 provenientes del DSP. La segunda pierna está compuesta por los transistores T_3 y T_4 , comandados por las señales Q_3 y Q_4 que pasan a través de otro driver igual. La señal amplificada es demodulada por un FPB tipo LC. En algunas aplicaciones, como por ejemplo amplificación de señales de audio, este filtro se puede eliminar de manera que la etapa conmutada se conecte directamente a la carga. En este caso el parlante filtra las componentes de alta frecuencia simplificando aún más la implementación. De todas maneras para mantener alta pureza espectral, puede ser necesario elevar la frecuencia de la banda de guarda y por consiguiente la velocidad de conmutación si se desea eliminar la etapa de filtrado. A continuación se describen las etapas con más detalle, especialmente la reconstrucción de la señal binaria a partir de los valores $\Delta[n]$ que resultan del modulador de TD.

5.2.1. Generación de la señal binaria

Los anchos de pulso $\Delta[n]$ son generados en Matlab utilizando la implementación fuera de línea del modulador de la Fig. 4.1. El límite superior de la banda de guarda f_U y

la frecuencia de la portadora f_P se eligen para evitar la aparición de componentes de distorsión en la banda de audio desde 20 Hz hasta 20 kHz. El MEAF-TD dado por (4.21) es aproximado con un número suficiente de términos para asegurar que el piso de ruido está dado por la resolución del formador de pulsos y no por el algoritmo de modulación.

Los valores $\Delta[n]$ se cargan en la memoria del DSP y se recorren de manera cíclica. Por cada período de modulación se lee un valor de la tabla, se acondiciona y se agregan los tiempos muertos necesarios. El módulo MAP del DSP es el encargado de realizar esta tarea. Este módulo es del tipo contador, es decir, con cada pulso de reloj un contador interno se incrementa y su valor es comparado constantemente con un registro que almacena el ancho de pulso deseado. Cuando el contador alcanza el valor almacenado en el registro, la salida cambia de estado. El contador sigue evolucionando hasta alcanzar el valor de período programado. El período está dado por el tiempo entre cruces por cero consecutivos de la portadora $p(t)$. De esta manera la frecuencia de conmutación f_C es el doble de la frecuencia de la portadora f_P , y el período que debe ser programado en el módulo MAP está dado por:

$$T_C = \frac{1}{f_C} = \frac{1}{2f_P}. \quad (5.1)$$

De esta manera e independientemente del valor almacenado en el registro de comparación, la señal binaria cambia de estado (en este caso de “0” a “1”) cada T_C segundos. Esto equivale a calcular los cruces por cero de la portadora de frecuencia f_P y es por esto que en el Capítulo 4 se mencionó que no es necesario hacer el cálculo de forma explícita como ocurre con la señal $s(t)$. El principio de funcionamiento del formador de pulsos obliga a aplicar un proceso de cuantización sobre los anchos de pulso $\Delta[n]$ que resultan del modulador discreto. El número de valores que pueden ser representados está dado por la relación entre la frecuencia de reloj f_{clk} y la frecuencia de conmutación:

$$N_\Delta = \frac{f_{clk}}{f_C}. \quad (5.2)$$

El DSP utilizado trabaja con una frecuencia de reloj ajustable mediante registros de configuración, siendo el máximo $f_{clk} = 150$ MHz. En las medidas que se presentan a

continuación la selección de los parámetros f_U y f_P resulta en $f_C = 40375$ Hz lo que da como resultado $N_\Delta = 3715$. Se puede expresar N_Δ en número efectivo de bits en la cuantización de los anchos de pulso mediante la relación:

$$b = \log_2 \left(\frac{f_{clk}}{f_C} \right), \quad (5.3)$$

que resulta en $b = 11,9$ bits con los valores utilizados. Los efectos de cuantizar los anchos de pulso en la modulación click fueron presentados en [54]. La relación entre el número de bits b y la máxima relación S/R en la banda de frecuencias de interés está dada por:

$$S/R \text{ dB} \approx 6,02 \cdot b + \rho, \quad (5.4)$$

donde $-4,2 < \rho < 19$ dB depende de la amplitud de la señal de entrada. El máximo teórico alcanzable en este caso es $67,39 < S/R < 90,39$ dB, siendo la variación dependiente de la profundidad de modulación. La ventaja del modulador de TD basado en modulación click es que el proceso de cuantización se manifiesta como un incremento del piso de ruido de la señal a la salida del modulador, pero no se agregan picos de distorsión como sucede con esquemas basados en MAP.

El límite expresado en (5.4) se corresponde con el modelo de ruido aditivo para el error de cuantización representado en la Fig. 5.3, en el que la señal cuantizada $\tilde{\Delta}[n]$ es modelada como la adición del valor original $\Delta[n]$ y un proceso aleatorio $\varepsilon[n]$. Para que este modelo sea válido se suponen algunas características de la secuencia de error $\varepsilon[n]$:

- El error $\varepsilon[n]$ está distribuido de manera uniforme.
- El error $\varepsilon[n]$ es un proceso de ruido blanco estacionario, es decir, $\varepsilon[j]$ y $\varepsilon[k]$ no están correlacionados para $j \neq k$.
- La secuencia de error $\varepsilon[n]$ y la señal a cuantizar $\Delta[n]$ no están correlacionados.

Bajo las suposiciones anteriores la densidad espectral de potencia (DEP) $\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(e^{j\omega})$ del

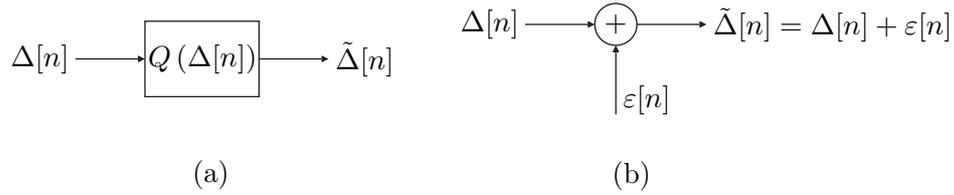


Figura 5.3: Modelo de ruido aditivo para el proceso de cuantización: (a) sistema real y (b) modelo matemático equivalente.

proceso $\varepsilon[n]$ es plana en toda la banda de frecuencias [72]:

$$\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(e^{j\omega}) = \sigma_{\varepsilon}^2, \quad 0 < \omega < 2\pi, \quad (5.5)$$

siendo $\sigma_{\varepsilon}^2 = E\{\varepsilon^2[n]\}$ la varianza del proceso¹. Estas suposiciones no se cumplen en general. Sin embargo son ciertas cuando el paso de cuantización q es pequeño y la señal $\Delta[n]$ atraviesa varios niveles de cuantización entre dos muestras consecutivas. Cuando el proceso de cuantización no es adecuado, el espectro de la señal contendrá picos por encima del límite dado por (5.4) armónicamente relacionados con el tono de entrada. En este caso es necesario aplicar alguna técnica para reemplazar la cuantización directa y evitar la alta correlación entre $\varepsilon[n]$ y $\Delta[n]$.

5.2.1.1. Dithering

Una de las técnicas más utilizadas para disminuir o eliminar la correlación entre la señal y el error de cuantización se denomina *dithering* [75], que consiste en agregar un valor aleatorio $r[n]$ a la señal antes del proceso de cuantización de manera que esta nueva señal y el error de cuantización resulten no correlacionados. El inconveniente de este proceso es que el piso de ruido es incrementado en función de la varianza del proceso $r[n]$. Existe una relación de compromiso entre el efecto de blanqueo del error y el aumento del piso de ruido. Una regla práctica que se aplica en muchos casos es elegir el valor de pico a pico V_{pp}^r del proceso $r[n]$ igual al paso de cuantización $V_{pp}^r = q$ [75], con el valor de q

¹La relación $\sigma_{\varepsilon}^2 = E\{\varepsilon^2[n]\}$ es cierta por ser un proceso de media nula $E\{\varepsilon[n]\} = 0$.

dado por:

$$q = \frac{V_{pp}}{2^b}, \quad (5.6)$$

donde V_{pp} es el rango o valor de pico a pico del valor a cuantizar $\Delta[n]$ y b el número de bits dado por (5.3). En este caso se utiliza un proceso $r[n]$ con distribución uniforme y de media cero, es decir $r[n] \sim \mathcal{U}(-q/2, q/2)$.

En el DSP la implementación es muy sencilla por tratarse de un dispositivo de punto flotante. Para cada nuevo valor $\Delta[n]$ se debe generar un número aleatorio $r[n]$ y sumarlo a $\Delta[n]$ previo a la cuantización. En la práctica el algoritmo de generación de los valores $r[n]$ no da como resultado un proceso genuinamente aleatorio, de manera que existe un período a partir del cuál la secuencia de números se repite. La clave para que el proceso de blanqueo sea adecuado es que el período del generador de números aleatorios sea grande comparado con el período de la señal modulada, y es precisamente por esto que los valores deben ser generados en tiempo real en el DSP y no pueden ser agregados en el proceso de modulación fuera de línea. Si se agregara un valor aleatorio en la modulación fuera de línea, el período del proceso seudo aleatorio sería directamente la longitud de la tabla de anchos de pulso, que a su vez está directamente relacionada con el período de la señal moduladora. Claramente esta técnica resultaría en una alta correlación entre la señal y el error de cuantización.

Para realizar la suma de forma adecuada es importante verificar el rango y los valores de escala de los datos. Los anchos de pulso $\Delta[n]$ a la salida del modulador están normalizados entre 0 y 1, es decir, 0 representa el mínimo ancho de pulso y 1 significa que el ancho de pulso es igual a T_C , el período de la señal binaria. El proceso de cuantización se realiza en tres partes.

- Primero el ancho es expresado como número de cuentas del módulo MAP:

$$\Delta_N[n] = N_\Delta \Delta[n]. \quad (5.7)$$

El rango de $\Delta_N[n]$ es N_Δ , es decir que el valor de pico a pico $V_{pp} = N_\Delta$. Por otra

parte la cantidad de valores representables con b bits es $2^b = N_\Delta$, que resulta en el paso de cuantización $q = 1$ utilizando (5.6).

- El valor aleatorio $r[n] \sim \mathcal{U}(-1/2, 1/2)$ es sumado a $\Delta_N[n]$ para decorrelacionar el error de cuantización con la señal a cuantizar $\Delta[n]$:

$$\Delta_d[n] = \Delta_N[n] + r[n]. \quad (5.8)$$

Este valor es un número de punto flotante y no puede ser asignado al formador de pulsos tipo contador.

- La cuantización que permite obtener el valor buscado $\tilde{\Delta}[n]$ se realiza simplemente haciendo la conversión del valor de punto flotante $\Delta_d[n]$ al formato del registro de comparación del DSP, que en este caso es un entero no signado de 16 bits. Matemáticamente esto equivale a conservar la parte entera de $\Delta_d[n]$ y descartar la parte decimal. Es decir que luego de agregar el ruido $r[n]$ a $\Delta_N[n]$ se realiza la cuantización de manera convencional.

5.2.1.2. Moldeo de ruido

Otra de las técnicas que permite mejorar la cuantización es el moldeo del ruido, que es muy utilizada en un tipo de conversores denominados Sigma-Delta [72]. Como se mencionó previamente, bajo las condiciones adecuadas, el error de cuantización es un proceso de ruido blanco y su DEP resulta ser plana en toda la banda de frecuencias. La técnica de moldeo de ruido le da forma a la DEP del error de cuantización de manera que la mayor cantidad de energía quede ubicada en las altas frecuencias, fuera del rango de interés. Esta técnica se utiliza generalmente en conversores AD acompañada de un proceso de decimación posterior, o en conversores DA agregando una interpolación previa [72, 75]. En este caso se va a utilizar la técnica de moldeo de ruido para aplicar un proceso de recuantización sobre los anchos de pulso $\Delta[n]$ y representarlos utilizando el número b de bits requeridos por el módulo MAP del DSP.

En la Fig. 5.4 se muestra el diagrama en bloques general de la técnica de moldeo de

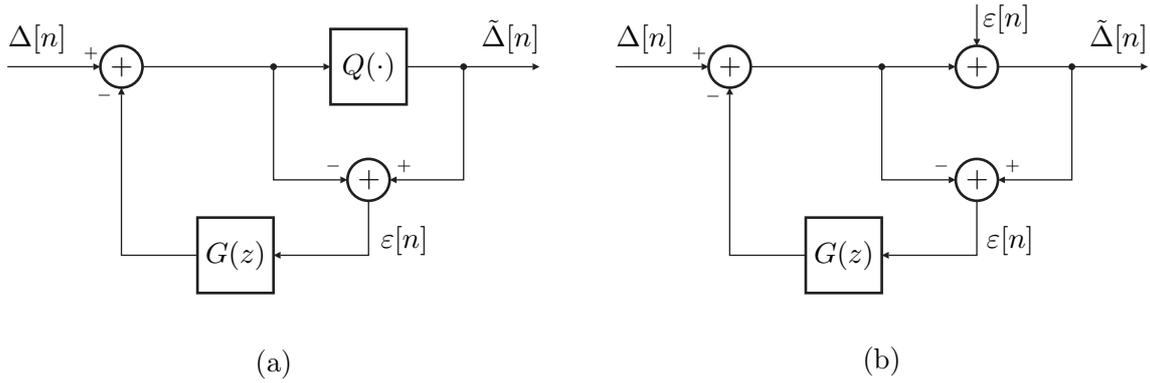


Figura 5.4: Diagrama en bloques utilizado en la técnica de moldeo de ruido: (a) sistema real y (b) sistema lineal reemplazando la cuantización con el modelo de ruido aditivo.

ruido utilizada como proceso de recuantización. La señal de entrada $\Delta[n]$ está representada con un determinado número de bits, en este caso este número es muy grande ya que el modulador fuera de línea es implementado en Matlab utilizando números en punto flotante y cálculos de doble precisión. El cuantizador $Q(\cdot)$ representa la señal utilizando 2^b valores distintos. El error de cuantización $\varepsilon[n]$ es realimentado utilizando el filtro $G(z)$, en lugar de ser descartado como en el caso de la cuantización directa. Para analizar el comportamiento de este esquema es útil una vez más utilizar el modelo de ruido aditivo de la Fig. 5.3 para el proceso de cuantización y transformar el diagrama de la Fig. 5.4 (a) en el de la Fig. 5.4 (b). La salida $\tilde{\Delta}[n]$ se puede escribir utilizando dos componentes:

$$\tilde{\Delta}[n] = \tilde{\Delta}_{\Delta}[n] + \tilde{\Delta}_{\varepsilon}[n]. \quad (5.9)$$

La señal $\tilde{\Delta}_{\Delta}[n]$ es debida a la entrada $\Delta[n]$. La función transferencia $H_{\Delta}(z)$ en este caso se obtiene anulando la fuente de error $\varepsilon[n]$:

$$H_{\Delta}(z) = 1. \quad (5.10)$$

De manera análoga, si se anula la entrada $\Delta[n]$ se puede calcular la función transferencia $H_{\varepsilon}(z)$ debida al error:

$$H_{\varepsilon}(z) = 1 - G(z). \quad (5.11)$$

Es decir que al escribir la salida $\tilde{\Delta}[n]$ como la suma de dos componentes, la entrada

$\Delta[n]$ aparece sin modificarse en la salida, mientras que el error de cuantización $\varepsilon[n]$ es modificado mediante el filtro $H_\varepsilon(z)$. Por lo general esta función transferencia se elige de la forma:

$$H_\varepsilon(z) = (1 - z^{-1})^p, \quad (5.12)$$

siendo p el orden del moldeo de ruido. Para comprender el efecto del filtro $H_\varepsilon(z)$ sobre el proceso de error en la salida, se puede calcular la DEP del proceso filtrado $\tilde{\varepsilon}[n]$, suponiendo que $\varepsilon[n]$ es un proceso de ruido blanco y su DEP está dada por (5.5):

$$\Phi_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}}(e^{j\omega}) = \sigma_\varepsilon^2 |H_\varepsilon(e^{j\omega})|^2, \quad (5.13)$$

con $H_\varepsilon(e^{j\omega}) = H_\varepsilon(z)|_{z=e^{j\omega}}$. Utilizando el filtro $H_\varepsilon(z)$ dado por (5.12) se obtiene la forma general de la DEP en función del orden p :

$$\Phi_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}}(e^{j\omega}) = \sigma_\varepsilon^2 [2\text{sen}(\omega/2)]^{2p}. \quad (5.14)$$

Para la implementación se utiliza el esquema de la Fig. 5.4 (a). El filtro $G(z) = 1 - H_\varepsilon(z)$ se obtiene seleccionando el orden p del filtro $H_\varepsilon(z)$ dado por (5.12). A modo de ejemplo, si se utiliza $p = 4$ se obtiene:

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(z) &= (1 - z^{-1})^4 \\ &= 1 - 4z^{-1} + 6z^{-2} - 4z^{-3} + z^{-4}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

En este caso la función transferencia $G(z)$ está dada por:

$$\begin{aligned} G(z) &= 1 - H_\varepsilon(z) \\ &= 4z^{-1} - 6z^{-2} + 4z^{-3} - z^{-4}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

De esta manera $G(z)$ queda caracterizado mediante una línea de retardos y puede ser implementado con un filtro tipo FIR sencillo. En el DSP se puede seleccionar el orden p variando desde 1 hasta 8.

5.2.2. Adición de tiempos muertos

Para que la señal binaria a la salida del amplificador conmutado tipo puente sea exactamente igual a la señal de control, se debería contar con llaves ideales que permitan el encendido y apagado en tiempo cero. En la práctica, el tiempo en el que los transistores se encienden (apagan) es mayor que cero y generalmente se especifica en la hoja de datos. El inconveniente se presenta si se utiliza como señal de control para las llaves el valor ideal obtenido en el proceso de modulación. Sucede que en el mismo instante de tiempo se comienza a apagar una de las llaves mientras se enciende la otra, causando un cortocircuito en la fuente de alimentación con la corriente limitada solamente por las resistencias de encendido de las llaves. Para evitar este problema se suele agregar un retardo de encendido de las llaves denominado tiempo muerto. El principio de funcionamiento es muy sencillo: aplicar un retardo a las señales de control ideales de manera que el transistor superior (inferior) se apague completamente antes de encender el transistor inferior (superior). La adición de los tiempos muertos evita el problema de conducción cruzada, aunque distorsiona la señal a la salida del puente ya que se modifican los instantes de conmutación. Por esto en la implementación práctica es necesario contar con un circuito que permita el ajuste fino y preciso del tiempo muerto en aplicaciones en las que se busca tener alta calidad y baja distorsión para las señales amplificadas. En muchos casos el tiempo muerto es agregado por el driver de las llaves utilizando un sistema de sensado y asegurando que los dispositivos pertenecientes a una misma pierna no se encuentren encendidos simultáneamente. En este caso el driver utilizado (MCP14700) no cuenta con el circuito de protección por tiempos muertos, y estos deben ser controlados externamente por el DSP.

El módulo de generación de tiempos muertos del DSP utilizado es muy versátil y permite varias configuraciones, incluyendo la selección de las señales de salida complementaria para el funcionamiento tipo puente. En la Fig. 5.5 se muestra la forma de generar las señales de control de las llaves utilizando la configuración complementaria y activo en alto. Activo en alto significa que cuando la señal de control tiene nivel lógico "1" el transistor correspondiente está encendido, y con nivel lógico "0" el transistor está

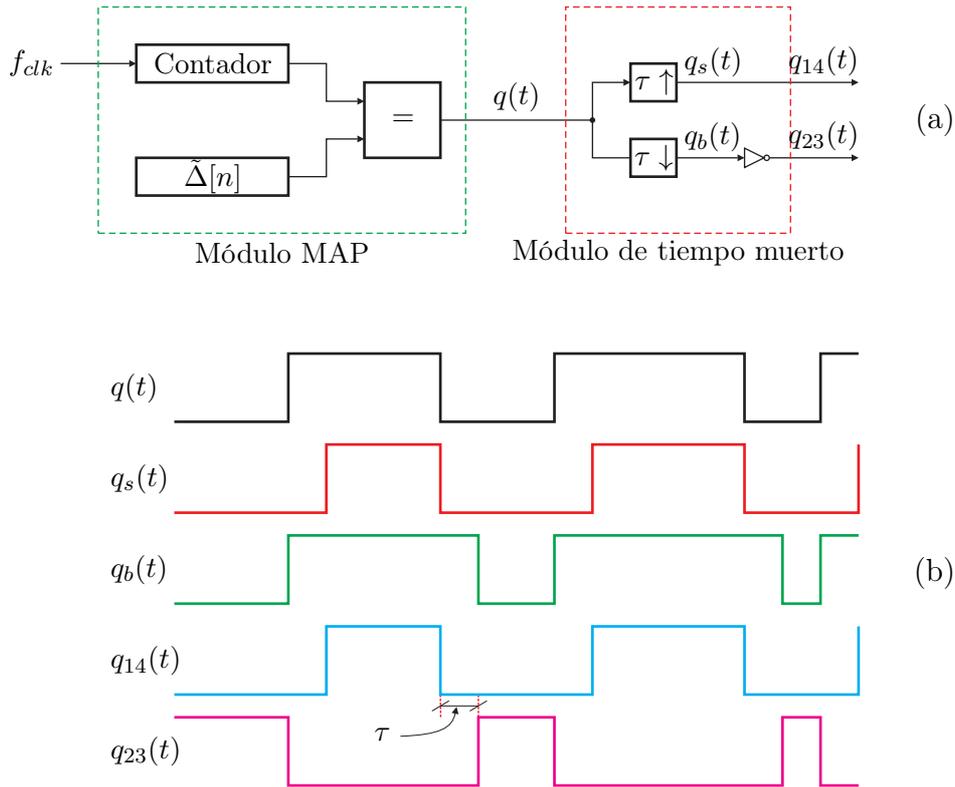


Figura 5.5: Adición del tiempo muerto: (a) módulo del DSP y (b) señales temporales resultantes.

apagado. Por otra parte la configuración complementaria asegura que las llaves nunca se encuentran activas simultáneamente debido al tiempo muerto. El bloque $\tau \uparrow$ de la Fig. 5.5 (a) aplica un retardo de τ segundos al flanco de subida de la señal binaria $q(t)$ proveniente del módulo MAP del DSP, resultando en la señal $q_s(t)$. De la misma manera, la señal $q_b(t)$ a la salida del bloque $\tau \downarrow$ resulta de retrasar en una cantidad τ el flanco de bajada de $q(t)$. La señal de control $q_{14}(t)$ para los transistores T_1 y T_4 se obtiene directamente a partir de $q_s(t)$. En el caso de los transistores T_2 y T_3 , la señal de control $q_{23}(t)$ es la versión negada de $q_b(t)$. En la Fig. 5.5 (b) se representan las formas de onda resultantes de las señales que intervienen en el proceso de adición de tiempos muertos. De la figura se puede apreciar que las señales $q_{14}(t)$ y $q_{23}(t)$ nunca se encuentran en nivel alto de forma simultánea.

El ajuste del tiempo muerto τ es discreto. El mínimo es cero y el paso de aumento es el período T_{clk} del reloj del DSP. En este caso $f_{clk} = 150$ MHz, por lo que resulta $T_{clk} = 6,66$ ns. La hoja de datos de las llaves IRF8313PbF especifica el tiempo de encendido $t_e = 8,3$

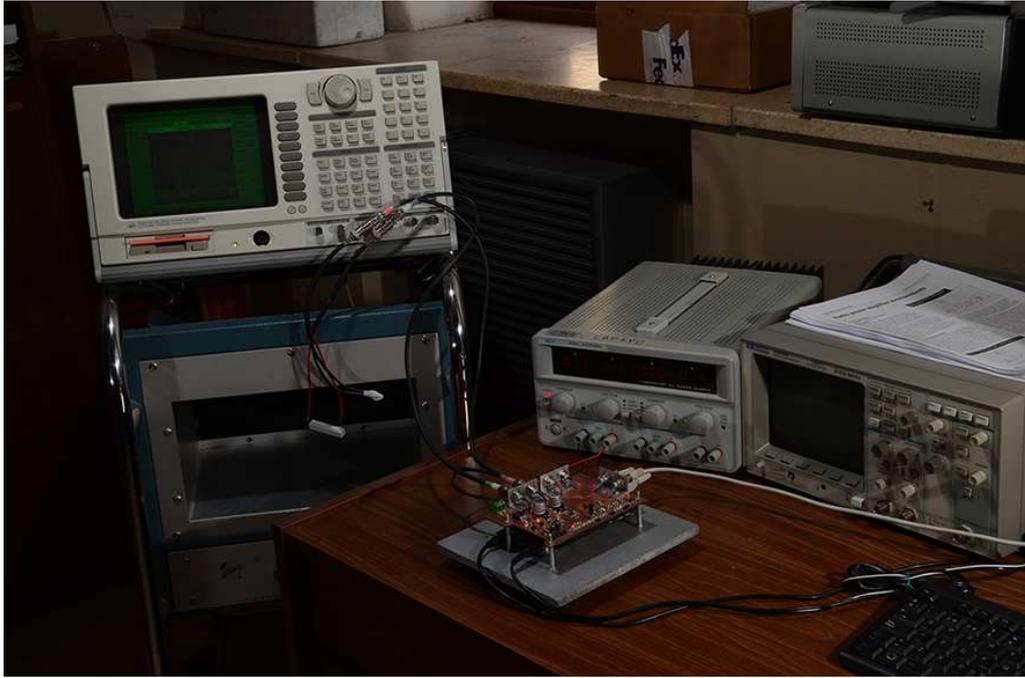


Figura 5.6: Conexionado para las mediciones.

ns y el tiempo de apagado $t_a = 8,5$ ns, es decir que el tiempo muerto mínimo que asegura que las llaves no conducirán de manera simultánea está dado por:

$$\tau = t_e + t_a = 16,8 \text{ ns.} \quad (5.17)$$

Si se utiliza $\tau = 2T_{clk} = 13,32$ ns no se cumple con el tiempo mínimo especificado por el fabricante de las llaves debiéndose seleccionar $\tau \geq 3T_{clk} = 19,98$ ns. Para tener un pequeño margen de seguridad se eligió como valor mínimo $\tau_m = 4T_{clk} \approx 26$ ns. Este valor está configurado en el DSP y cada vez que el usuario cambia el tiempo muerto se efectúa una verificación de seguridad que impide la conducción simultánea de las llaves.

5.3. Medidas experimentales

En la Fig. 5.6 se muestra una fotografía del esquema de conexionado. Para realizar las mediciones del espectro de la señal binaria a la salida del puente se utilizó un analizador espectral Stanford Research SR785, que se puede apreciar a la izquierda de la foto. Este equipo cuenta con un FPB anti aliasing a la entrada, permitiendo la medición del espectro

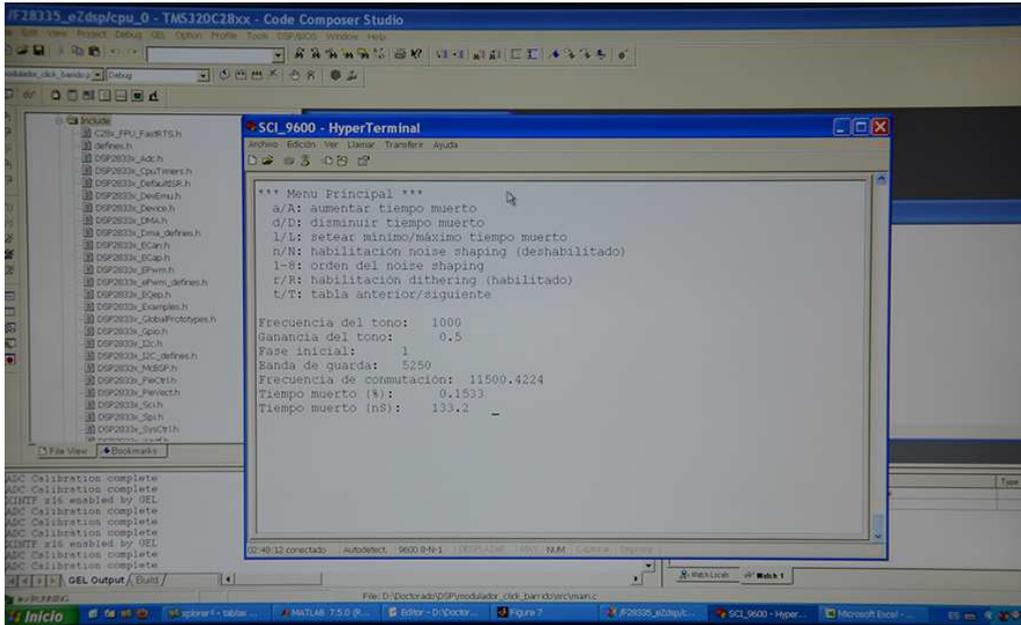


Figura 5.7: Interface con menús para seleccionar los modos de funcionamiento.

de la señal binaria de forma directa. El DSP está conectado debajo de la placa del amplificador conmutado. Para facilitar la interacción y tener versatilidad en el uso del sistema se cuenta con una interface serie entre el DSP y la PC, que permite seleccionar las distintas opciones de funcionamiento mediante la utilización de menús simples. En la Fig. 5.7 se muestra una captura de pantalla de esta interface. Las opciones disponibles son:

- Aumentar el tiempo muerto: aumento fino (a) y aumento grueso (A).
- Disminuir el tiempo muerto: disminución fina (d) y gruesa (D).
- Forzar el mínimo tiempo muerto de seguridad (l) dado por $\tau_m = 4T_{clk}$ y el máximo (L), configurable por software.
- Habilitar (N) o deshabilitar (n) el moldeo del ruido en la cuantización de los anchos de pulso. El orden se puede variar desde $p = 1$ hasta $p = 8$ con las teclas numéricas correspondientes.
- Habilitar (R) o deshabilitar (r) la adición de ruido dithering en la cuantización.
- Reproducir la tabla siguiente (T) o la tabla anterior (t).

La última opción resulta útil en las mediciones, ya que se ahorra mucho tiempo al evitar recargar la memoria del DSP constantemente. Las opciones dithering y moldeo de ruido se pueden utilizar de forma simultánea, de a una a la vez o se pueden deshabilitar completamente. En el caso en que se encuentren deshabilitadas ambas opciones la cuantización es directa. Además se cuenta con información suplementaria respecto a la señal y al modulador, en la parte baja de la pantalla en la Fig. 5.7.

5.3.1. Medida de intermodulación

La forma más utilizada para medidas de distorsión por intermodulación (IM) utiliza dos señales senoidales sumadas como estímulo del amplificador. Con dos señales senoidales de frecuencia f_1 y f_2 , el comportamiento no lineal del amplificador se manifiesta mediante la aparición de infinitos componentes de IM en el espectro de salida dados por $m \times f_1 \pm n \times f_2$, con m y n números enteros. El orden de un producto de IM particular se designa mediante la suma $m + n$. Los dos estándares más utilizados son el CCIF (tonos gemelos) y el SMPTE/DIN [74]. El estándar CCIF especifica dos tonos de alta frecuencia e igual amplitud (13/14 kHz o 19/20 kHz). Utilizando esta señal es usual medir la componente que aparece en $f_2 - f_1$. Los otros productos de más alto orden caen fuera de la banda de frecuencias de audio. El estándar SMPTE/DIN especifica un tono de alta amplitud y baja frecuencia combinado con otro tono de frecuencia más alta y relación de amplitud de 1/4 con respecto al tono de baja frecuencia (-12,04 dB). La ventaja en la utilización de este método es que más productos de IM caen en la banda de frecuencias de interés. La especificación DIN permite varias selecciones para las frecuencias de los tonos involucrados, siendo 250 Hz y 8 kHz una elección común.

En la Fig. 5.8 se muestra el espectro de la señal de prueba a la salida del modulador de tiempo discreto sin cuantizar (azul) y su versión cuantizada (rojo) que resulta de una simulación computacional. Esta imagen revela que el proceso de cuantización de los anchos de pulso es el que domina la relación S/R resultante para el modulador. De todas maneras, no existen componentes armónicas por encima del piso de ruido y la señal se mantiene libre de componentes de distorsión hasta la finalización de la banda

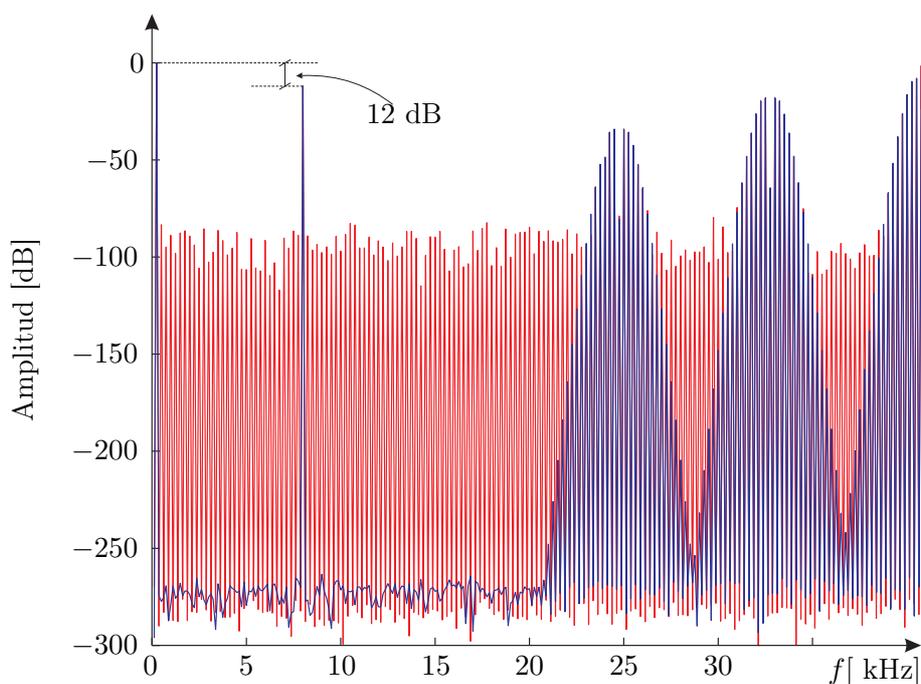


Figura 5.8: Espectro de la señal para la prueba de IM sin cuantizar (azul) y cuantizada (rojo).

de guarda. Para la obtención de los espectros hay que decir que, al tratarse de señales binarias con infinito contenido espectral, el cálculo del espectro mediante la TDF resulta en una importante cantidad de aliasing. Para evitar este problema se utiliza una técnica denominada Fourier por saltos [78, 79], que permite obtener los coeficientes de Fourier de señales definidas por tramos. La señal debe ser periódica para que el método arroje resultados correctos.

El espectro de la señal medida a la salida del amplificador conmutado se puede ver en la Fig. 5.9 (a). Aquí no se encuentra habilitada ninguna de las opciones que permiten blanquear el error de cuantización. El resultado es la aparición de pequeños picos armónicamente relacionados con los tonos presentes en la señal moduladora y sus combinaciones, revelando el efecto de deterioro que tiene la cuantización directa de los anchos de pulso. De todas maneras no se ven componentes de distorsión apreciables respecto a la medida de IM.

Las ventajas de la utilización de la técnica de dithering se visualizan en la Fig. 5.9 (b) que muestra el espectro de la misma señal (la misma tabla de valores $\Delta[n]$) pero utilizando dithering en la cuantización para la obtención de $\tilde{\Delta}[n]$. El piso de ruido ahora es plano y

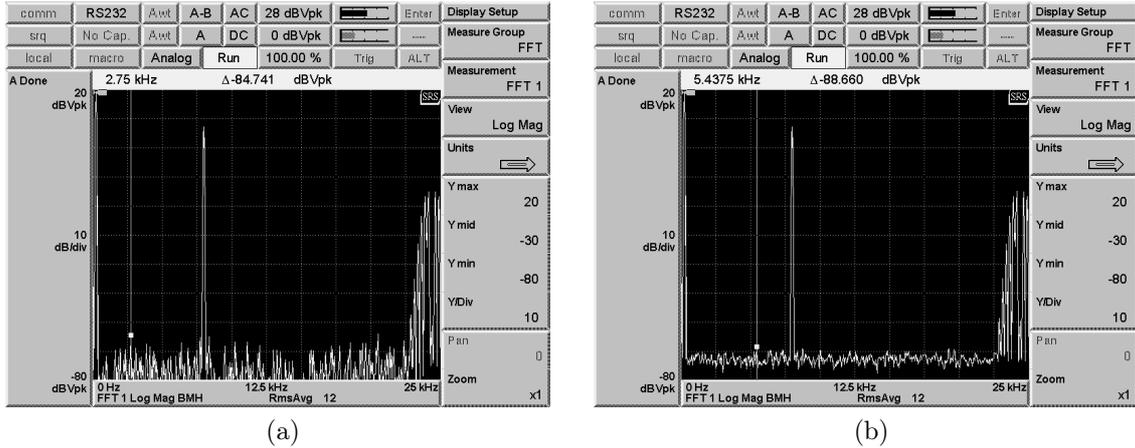
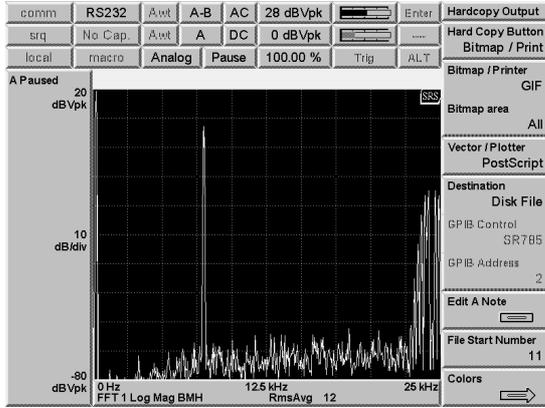


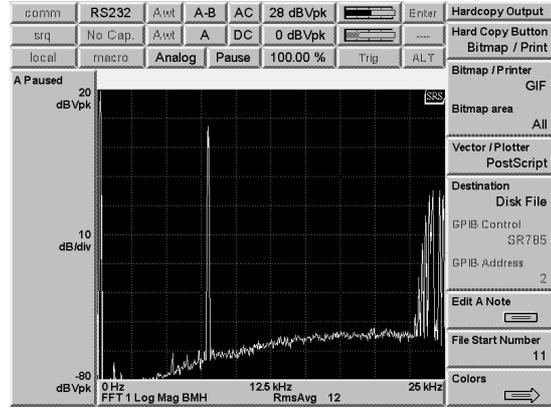
Figura 5.9: Espectro de la señal del test IM a la salida del amplificador: (a) cuantización directa y (b) dithering habilitado.

no hay picos como en el caso anterior, con un límite máximo teórico de 90,39 dB cuando la señal está a escala completa (los valores de $\Delta[n]$ varían en todo el rango entre 0 y 1). En este caso y para evitar la sobre modulación como se mencionó en la Sección 2.4, la amplitud de la señal es escalada resultando en los valores de $\Delta[n]$ variando entre 2,2 y 97,8 % o lo que es lo mismo una profundidad de modulación del 95,6 %. Con esta profundidad de modulación la máxima relación S/R se reduce en 0,39 dB. Además el piso de ruido teórico es aumentado debido a la utilización de la técnica de dithering como se mencionó antes. El valor leído en el instrumento es 88,66 dB, lo que da una diferencia de 1,73 dB entre el valor teórico dado por (5.4) y la medición.

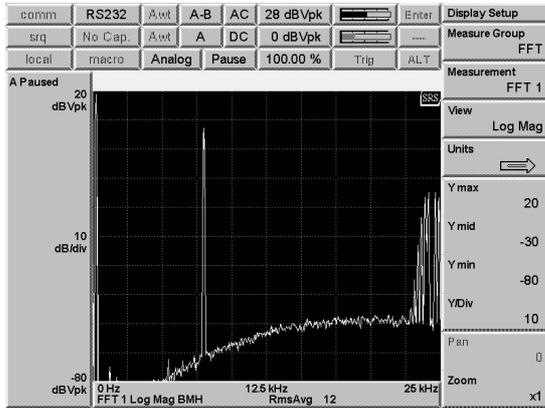
Es interesante también explorar las ventajas de utilizar moldeo de ruido en la etapa de cuantización de los anchos de pulso. Para que la comparación sea válida, se utiliza una vez más la misma tabla de valores $\Delta[n]$ para la medida de IM anterior. En la Fig. 5.10 se muestra el espectro resultante de la señal binaria a la salida del amplificador conmutado utilizando diferentes ordenes p para el moldeo del ruido . Si se compara el espectro de la Fig. 5.9 (a) y el de la Fig. 5.10 (a), se ve que el piso de ruido disminuye notablemente para las frecuencias bajas y tiende a subir levemente a medida que la frecuencia aumenta. Este comportamiento es esperable por el análisis que se hizo sobre la forma resultante del ruido al aplicar esta técnica. Cuando el orden es $p = 2$ el espectro resultante es el de la Fig. 5.10 (b). Nuevamente el piso de ruido disminuye considerablemente en las



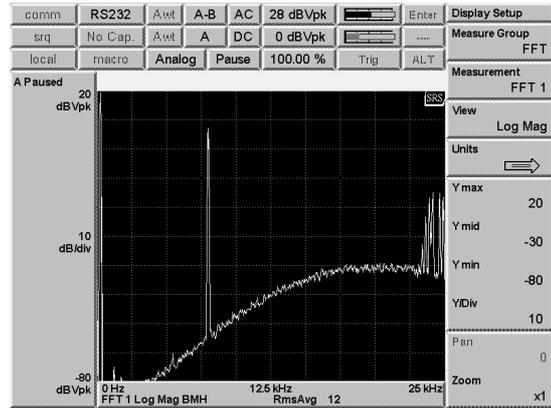
(a)



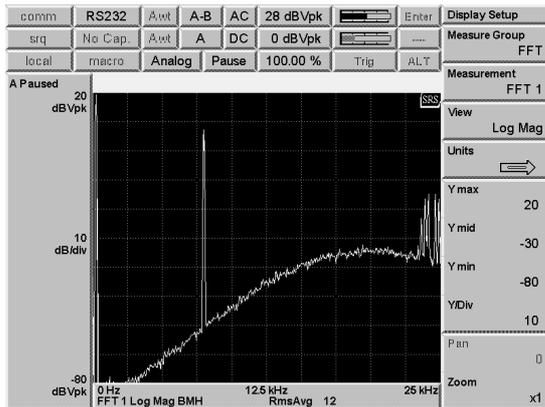
(b)



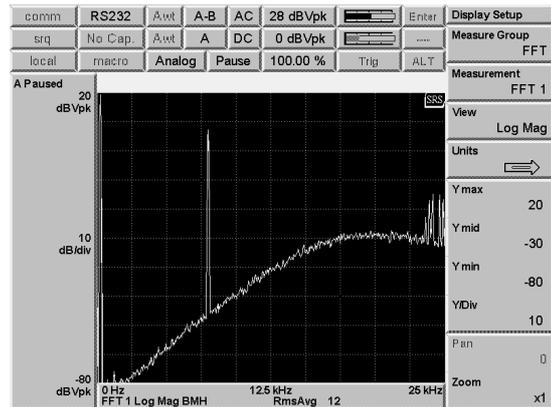
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.10: Espectro de la señal para la medida de IM usando moldeo del ruido: (a) $p = 1$, (b) $p = 2$, (c) $p = 3$, (d) $p = 6$, (e) $p = 7$ y (f) $p = 8$.

frecuencias bajas y prácticamente no se alcanza a apreciar en el rango de 100 dB de la figura. Sin embargo el ruido resultante es más alto que en el caso para $p = 1$, aunque se mantiene siempre por debajo de 85 dB. Los casos para $p = 3$, $p = 6$, $p = 7$ y $p = 8$ se muestran en las figuras 5.10 (c)–(f), respectivamente. El análisis es muy similar y se ve que a medida que se aumenta el orden p el piso de ruido en las bajas frecuencias disminuye, aunque no demasiado con respecto al valor $p = 2$. Por contrapartida, el ruido aumenta considerablemente en la parte alta del espectro llegando a 50 dB por debajo de la amplitud del tono de referencia para el caso $p = 8$. Hay otro aspecto que merece ser mencionado. A medida que el orden p aumenta, el espectro luce más suave y no aparecen tantos picos como en el caso de la Fig. 5.10 (a). Este hecho no es sorprendente, y está relacionado justamente con el efecto de blanqueo que resulta del proceso de moldeo de ruido. Además de darle la forma característica al ruido como se aprecia en las figuras, se puede decir que el error de cuantización se aproxima cada vez más al modelo de ruido blanco aditivo al aumentar el orden p .

Como conclusión se puede decir que la técnica de moldeo de ruido es particularmente útil si el límite de la banda de guarda es corrido hacia las altas frecuencias. Esto equivale a aplicar un factor de sobre muestreo importante en la señal de entrada, que no es necesario si se utiliza el modulador discreto presentado en esta Tesis. Por lo dicho existe una relación de compromiso entre la frecuencia de conmutación deseada (banda de guarda) y el orden máximo del moldeo de ruido que puede ser utilizado sin deteriorar considerablemente el espectro de la señal en banda base.

5.3.2. Medida de distorsión armónica

Otra técnica muy utilizada para analizar y caracterizar las no linealidades del amplificador es la Distorsión Armónica Total (DAT) [74]. La señal de estímulo está compuesta por un tono único, de alta pureza espectral. El comportamiento no lineal del dispositivo es revelado por la aparición de componentes armónicos en el espectro de salida. La DAT se define como el cociente entre la potencia total de las componentes armónicas y la potencia del tono de referencia. Esta medida es particularmente complicada, ya que es necesario

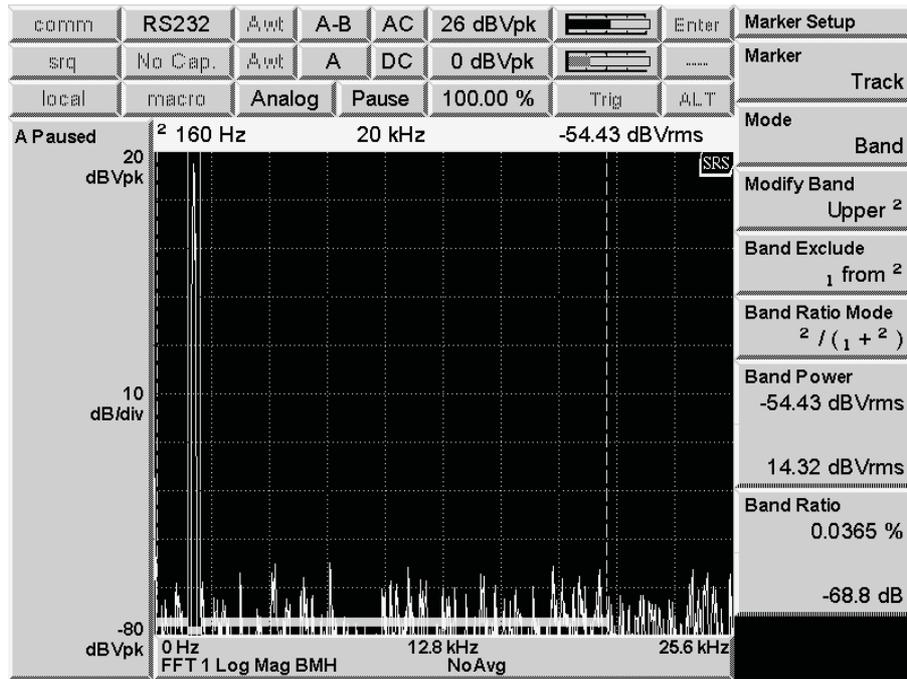


Figura 5.11: Espectro de uno de los tonos utilizados para la medida de DAT+R.

contar con un equipo que tenga la capacidad de separar las componentes utilizando filtros muy angostos, y de medir la potencia de cada componente por separado. Una medida más sencilla utilizada en la práctica es la DAT + R, en el que se mide también la energía que aporta el ruido en la banda de análisis. Para efectuar la medición se define una banda angosta B_1 alrededor del tono de prueba. Una segunda banda denominada B_2 se define de manera que incluya todo el ancho de banda del amplificador, con la excepción del rango de frecuencias abarcado por B_1 . La DAT + R es directamente el cociente entre la potencia en B_2 y la potencia en B_1 . El equipo utilizado para la medición espectral cuenta con la posibilidad de realizar esta medición.

Para especificar la DAT + R en toda la banda de frecuencias de funcionamiento del amplificador, se utiliza como señal moduladora un tono puro de frecuencia variable. Una tabla de anchos de pulso $\Delta[n]$ es generada para cada una de las frecuencias en las que se desea realizar la medición. La distorsión se mide definiendo las bandas B_1 y B_2 en el analizador espectral como se explicó antes. En la Fig. 5.11 se muestra el espectro obtenido para una señal sinusoidal de 1792 Hz, sintetizada a partir de una de las tablas de valores $\Delta[n]$. La banda más pequeña B_1 se puede ver en línea sólida alrededor de los límites del tono de prueba (esta banda se denomina *Lower* y con el número 1 en

el analizador). La banda más grande B_2 se muestra en líneas punteadas. Se extiende desde un valor cercano a 0 hasta 20 kHz, excluyendo la porción correspondiente a B_1 (esta banda se denomina *Upper* y con el número 2). El valor resultante de DAT + R se observa en la parte inferior derecha de la figura, siendo 0,0365 % (-68,8 dB) en este caso. Aunque parecería útil utilizar dithering para obtener un piso de ruido plano en la medición, resulta que la medida DAT + R empeora si se utiliza esta opción. La explicación de este comportamiento es sencilla. Aunque el espectro de la Fig. 5.11 contiene los picos característicos que indican correlación entre la señal a cuantizar y el error de cuantización, estos picos son muy angostos y no aportan mucha energía en la medición de DAT + R. Sin embargo si se utiliza dithering se obtiene un piso de ruido plano en toda la banda B_2 que aumenta la energía debida al ruido en la medición. Es decir, aunque no se agregan componentes armónicos se aumenta la energía del ruido con un consiguiente aumento de la medición DAT + R. Es por esto que no se utilizó la opción de blanqueo del ruido para las mediciones de DAT + R.

El procedimiento de medición se repitió utilizando señales sinusoidales de diferentes frecuencias, cada una correspondiente a una tabla de valores $\Delta[n]$. Para esta medición resultó útil la opción agregada en el programa del DSP que permite reproducir diferentes tablas, sin la necesidad de reescribir la memoria del dispositivo. Como es habitual se presentan los resultados en un gráfico que muestra la DAT + R en función de la frecuencia del tono, expresando los valores de DAT + R en porcentaje. En la Fig. 5.12 se condensan los resultados de las mediciones realizadas en la banda de audio. El valor de DAT + R se mantiene cercano al 0,04 % para todo el rango de frecuencias.

5.3.3. Comparación entre MAP y click

Para mostrar la potencialidad del modulador de TD propuesto se realizó una comparación con la modulación MAP de TC, habitualmente denominada natural (MAPN). Es importante destacar que la versión de tiempo continuo de la MAP no tiene los errores que provienen del efecto de muestreo uniforme. En realidad se debería utilizar la versión muestreada denominada MAP uniforme (MAPU), pero se eligió la versión MAPN justa-

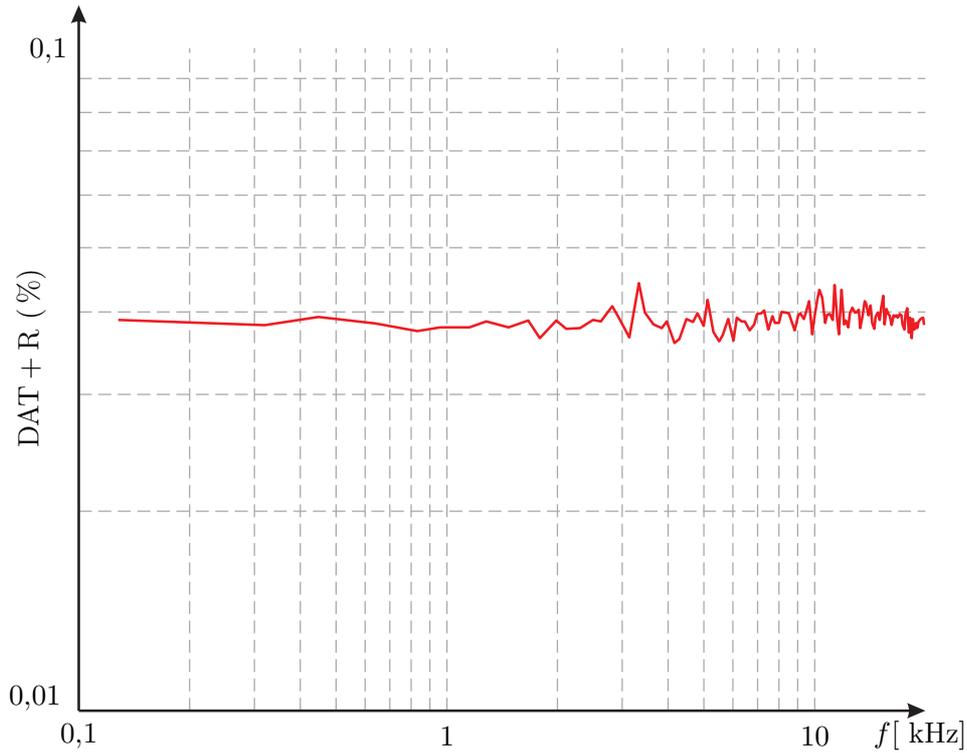


Figura 5.12: DAT + R en función de la frecuencia del tono de la señal moduladora.

mente para hacer énfasis en las ventajas del modulador propuesto que trabaja a partir de señales muestreadas.

La moduladora es la señal multitono definida como:

$$x(t) = 0,7\cos(2\pi 1000t) + 0,3\cos(2\pi 3000t) + 0,5\cos(2\pi 6000t). \quad (5.18)$$

La señal de TD utilizada para el modulador digital se obtiene muestreando $x(t)$ en los instantes de tiempo $t = nT_s$. Para evitar problemas de ventaneo en la implementación y representar un número entero de períodos de la señal moduladora se eligió $f_s = 60$ kHz. De esta manera $x[n] = x(t)|_{t=nT_s}$, con $0 \leq n \leq N - 1$. La longitud $N = 60000/1000 = 60$ muestras permite representar un único período de la señal $x(t)$.

Con respecto al modulador click se utilizó la frecuencia de finalización de la banda de guarda igual a la frecuencia de la portadora, siendo $f_U = f_P = 30$ kHz. Esto significa que la señal binaria $q(t)$ tendrá una frecuencia de conmutación $f_C = 60$ kHz. El número de términos utilizados para implementar el MEAF-TD en (4.21) es $L = 12$, que resulta en una relación S/R máxima de aproximadamente 180 dB a partir de (4.22). Como se

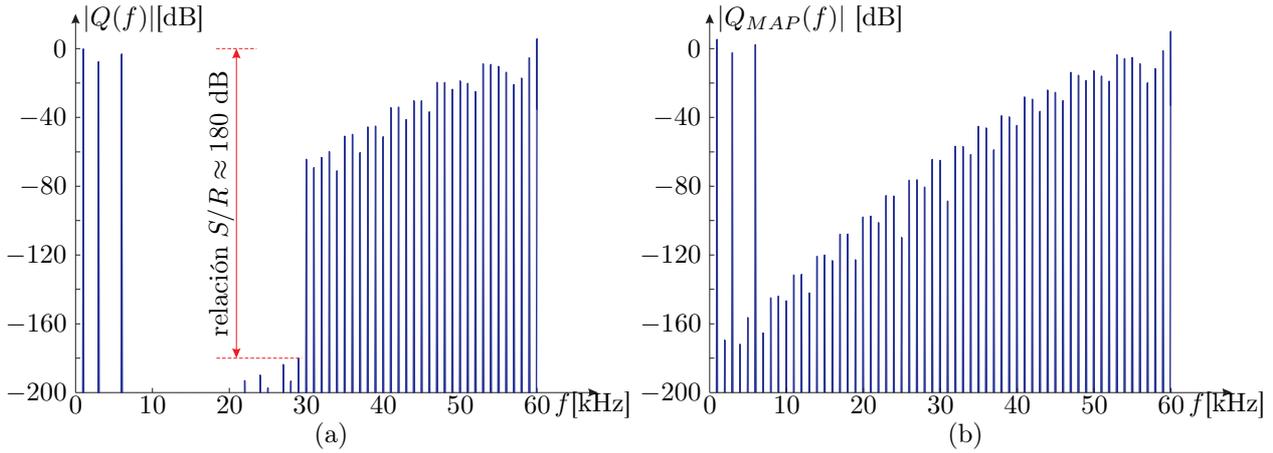


Figura 5.13: Comparación entre los espectros para la modulación click de tiempo discreto (a) y la modulación MAP de tiempo continuo (b).

hizo antes el espectro de la señal binaria se computa utilizando la técnica de Fourier por saltos.

En el caso de la MAPN se obtuvieron los anchos de pulso comparando $x(t)$ con una portadora tipo diente de sierra. Para que la comparación sea adecuada la frecuencia de la diente de sierra se eligió igual a 60 kHz, es decir, las señales binarias que resultan de los procesos de modulación click de TD y MAPN tienen la misma frecuencia de conmutación $f_C = 60$ kHz. La señal binaria $q_{MAP}(t)$ se obtuvo mediante manipulación matemática simbólica y no contiene errores numéricos.

En la Fig. 5.13 (a) se muestra el módulo del espectro $Q(f)$ de la señal $q(t)$ obtenida mediante la modulación click de TD y en la Fig. 5.13 (b) el módulo del espectro $Q_{MAP}(f)$ de la señal $q_{MAP}(t)$ obtenida utilizando la MAPN. De la figura se destaca que la modulación MAPN no agrega considerable contenido armónico por encima de 100 dB en la banda definida entre 0 y 30 kHz. Sin embargo es imposible obtener un espectro completamente libre de distorsión, aún utilizando la implementación ideal de TC. Por otra parte el espectro de la señal $q(t)$ que resulta de aplicar el modulador click de TD mantiene la señal libre de distorsión en la banda de guarda especificada. En realidad los armónicos que aparecen a 180 dB cercanos a los 20 kHz se deben a que se utilizaron $L = 12$ términos para implementar el MEAF-TD y concuerdan con el máximo teórico dado por (4.22). En la práctica este número L puede ser disminuído aún más, ya que

como se exploró antes el proceso de cuantización de los anchos de pulso ubicará el piso de ruido de la señal binaria bastante por encima de este valor.

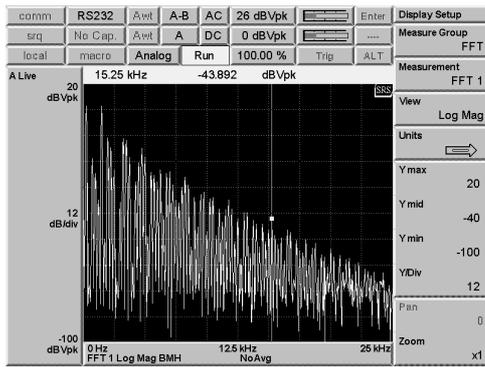
5.3.4. Número de términos para el MEAF-TD

Como se mencionó en la Sección 4.2.2 el número L de términos utilizados para implementar el MEAF-TD en (4.21) puede ser limitado en la práctica. Utilizando el límite teórico dado por (4.22) es posible elegir el número L en función de los requerimientos de la aplicación.

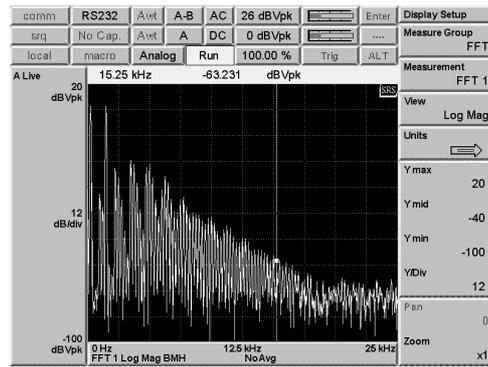
Para comprobar la utilidad de esta ecuación en la práctica, se utilizó una señal compuesta por dos tonos de igual amplitud y frecuencia 250 y 1500 Hz, respectivamente. La elección de esta señal permite que aparezcan productos de intermodulación y enfatizar el efecto del aumento del valor L en el espectro de la señal modulada. Con respecto a la implementación del modulador, se eligieron los valores de f_U y f_P de manera tal que no aparezcan componentes armónicas en la banda de frecuencias entre 0 y 20 kHz. El número de términos para implementar el MEAF-TD en (4.21) se varía desde $L = 2$ hasta $L = 9$ y en cada caso se genera una tabla de valores $\Delta[n]$ utilizados luego para sintetizar la señal. Aquí se desea estudiar el efecto de L aislado y es por esto que no se utilizan las técnicas de dithering o moldeo del ruido, es decir que la cuantización de los anchos de pulso $\Delta[n]$ para obtener $\tilde{\Delta}[n]$ es directa. El espectro se mide a la salida del amplificador conmutado como antes.

En las figuras 5.14 (a)–(h) se muestran los resultados de las mediciones, con el número de términos variando desde $L = 2$ hasta $L = 9$, respectivamente. Aunque el MEAF-TD es no lineal, es fácil explicar el impacto que tiene el aumento de L en el espectro de la señal binaria con la ayuda de las mediciones prácticas realizadas.

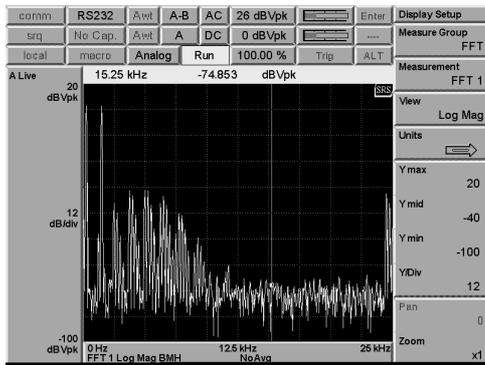
El espectro de la Fig. 5.14 (a) corresponde a $L = 2$. En este caso es imposible afirmar qué componentes del espectro corresponden a la señal moduladora y cuáles son productos de intermodulación. Aquí no se cumple con la principal característica del modulador click que es mantener la información de banda base libre de distorsión. El número L es demasiado bajo y debe ser aumentado. El caso para $L = 3$ que se muestra en la



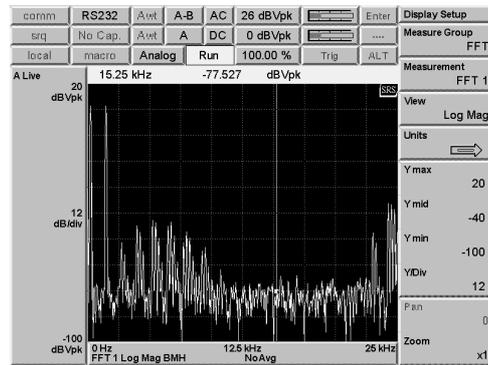
(a)



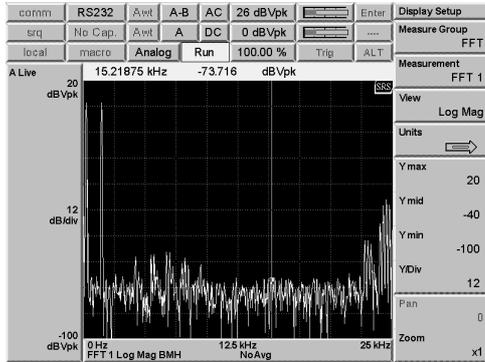
(b)



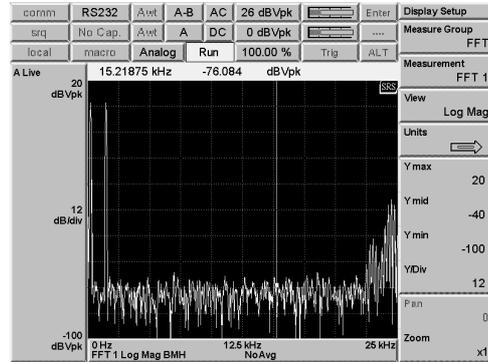
(c)



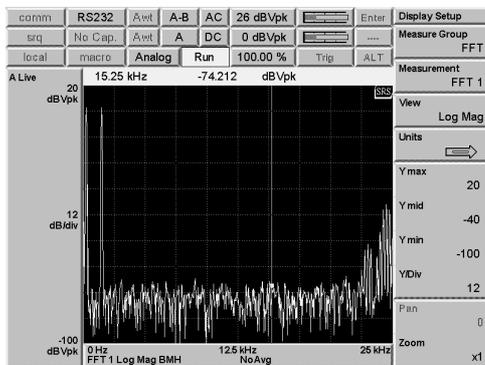
(d)



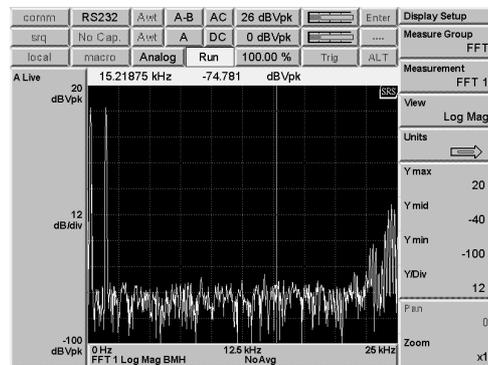
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.14: Variación de el número de términos para el MEAF-TD desde $L = 2$ a $L = 9$.

Fig. 5.14 (b) es bastante similar y la mejora no es significativa. Cuando el número de términos se aumenta a $L = 4$ como se muestran en la Fig. 5.14 (c) la distorsión comienza a bajar y se hace cada vez más fácil identificar los tonos correspondientes a la señal moduladora. Con $L = 5$ se observa que no existen componentes de distorsión hasta el punto 2500 Hz, correspondientes al primer cuadro de la grilla en la Fig. 5.14 (d). Este es justamente el efecto del valor de L en la señal modulada. Si la componente de más baja frecuencia de la señal moduladora es f_1 y se utilizan L términos, el espectro de la señal binaria estará libre de distorsión hasta $f_1 L$. Después de este punto aparecerán componentes armónicos por debajo del límite definido por (4.22). Siguiendo con el análisis al aumentar a $L = 6$ se ve que las componentes armónicas cercanas a 2500 Hz que existían para $L = 5$ desaparecen del espectro de la Fig. 5.14 (e). Sin embargo aparecen algunas componentes importantes a partir de 4500 Hz. Este comportamiento es esperable ya que la banda libre de distorsión en este caso sólo está asegurada hasta $6 \times 500 = 3000$ Hz. Con $L = 7$ (Fig. 5.14 (f)) prácticamente no se distingue ningún producto de intermodulación y el espectro está limpio hasta la finalización de la banda de guarda. Los casos para $L = 8$ en la de la Fig. 5.14 (g) y $L = 9$ en la de la Fig. 5.14 (h) también cumplen con la premisa de banda base libre de distorsión, sin embargo los espectros lucen muy similares y no se distingue una mejora apreciable respecto a la elección $L = 7$. Utilizando (4.22) para $L = 7$ se obtiene 74 dB de relación S/R máxima teórica. Para los casos $L = 8$ y $L = 9$ se obtiene 92,11 y 111,19 dB, respectivamente. En este caso y debido a los límites que impone la cuantización de los anchos de pulso, se puede decir que $L = 7$ es una opción razonable. Inclusive se puede elegir $L = 8$ para tomar un pequeño margen de seguridad. De todas maneras esta elección asegura que la señal binaria no contendrá ninguna componente de distorsión hasta $L \times f_L$, siendo f_L la componente de más baja frecuencia presente en la señal. El piso de 92,11 dB es para las componentes que caen más allá de ese punto en frecuencia.

5.4. Conclusiones

En este capítulo se ensayó el modulador de TD propuesto, el que se implementó como una versión fuera de línea. Se presentó un prototipo de hardware basado en un DSP que permite reproducir las señales moduladas, manteniendo bajos los requerimientos de complejidad de implementación.

Se analizaron los efectos de cuantización en la ubicación de los flancos de la señal cuadrada resultante, y se implementaron dos métodos que permiten mejorar este aspecto en la práctica: dithering y moldeo del ruido. Como hecho destacable hay que mencionar que la cuantización se manifiesta como un aumento del piso de ruido para el modulador de TD propuesto, manteniendo libre de distorsión la señal hasta un punto de frecuencia determinado y respetando la premisa principal del modulador click original de TC.

Se realizaron dos tipos de mediciones para caracterizar la calidad del sistema de modulación y reproducción. La medida de intermodulación no mostró componentes de distorsión como era de esperar y además confirmó que el piso de ruido está dominado por los efectos de la cuantización de los anchos de pulso. Utilizando esta misma señal de prueba se analizaron los efectos de los métodos de dithering y moldeo de ruido. Se concluyó que la técnica de moldeo de ruido resulta útil cuando la frecuencia de la portadora utilizada es mucho mayor que la finalización de la banda de guarda.

Con respecto a la distorsión armónica del sistema, la medida de DAT + R se mantuvo con un valor cercano al 0,04 % para todo el rango de audio y confirmó que el modulador propuesto no agrega distorsión a la señal.

Se realizó una comparación entre el espectro del modulador propuesto y el que se obtiene al modular la señal con una MAP convencional de TC. Se confirmó que en el caso de la MAP de TC aparece distorsión que no puede ser removida, mientras que la versión de TD del modulador propuesto no aparecen productos de distorsión en una banda especificada.

Por último, se corroboró mediante medidas experimentales la validez de la ecuación que permite seleccionar el número de términos utilizados para implementar el MEAF-TD y la máxima relación S/R esperable a la salida del modulador. Este fórmula resulta

útil ya que permite elegir el número de términos de forma adecuada dependiendo de la aplicación.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un método de modulación que permite obtener señales binarias libres de distorsión en una banda de frecuencias específica. El modulador propuesto es enteramente de TD, donde la señal de entrada es una secuencia de muestras y los bloques de procesamiento aplicados para modularla son de TD.

En el Capítulo 2 se revisó de forma detallada el modulador click de TC. Se analizó el funcionamiento de cada uno de los bloques que componen este esquema en los dominios tiempo y frecuencia. Al derivar la representación de la señal modulada mediante una onda cuadrada, se pudo demostrar que la modulación MAP es un caso particular de la modulación click que surge de aplicar alguna simplificación sobre esta última. De esta forma se escribió la ecuación que define a la modulación MAP como una modulación de fase y se argumentó por qué es imposible de obtener una señal sin distorsión en banda base a partir de la MAP. Otro aspecto que se desarrolló es la relación entre la amplitud de la señal moduladora y la profundidad de modulación resultante para el modulador click para el caso de señales senoidales. Este estudio no se encuentra desarrollado en la literatura existente, y sólo algunas condiciones generales son mencionadas en el trabajo original de Logan sobre modulación click.

El Capítulo 3 condensa los resultados más importantes del trabajo de Tesis y el prin-

cial aporte de la investigación: el desarrollo del MEAF-TD. Para lograr este desarrollo se comenzó con un estudio del MEA para señales de TC, con especial atención a la representación frecuencial de las señales involucradas. Utilizando una expansión en series de potencias y propiedades de la transformada de Fourier, se derivó la forma general del espectro de los términos que componen el MEA. Se demostró que el contenido espectral de la señal a la salida del MEA es infinito, lo que permitió concluir que el esquema original de modulación click no puede ser implementado en TD.

A partir del análisis realizado y utilizando las propiedades de las señales analíticas se desarrolló el método de cálculo denominado MEAF-TC. Esta técnica equivale a agrupar los bloques MEA y FPB del modulador click original en un único paso de procesamiento. La clave del método radica en la representación de la función exponencial como una serie de potencias y la distribución del filtro en los términos internos. Se demostró que las señales filtradas pueden ser utilizadas para calcular los términos siguientes de la expansión, sin agregar distorsión en la banda de interés. Esta idea permite utilizar señales de ancho de banda reducido y elimina el problema principal del modulador click original.

Como punto destacable se desarrolló el método MEAF-TD, que reproduce el comportamiento del MEAF-TC para señales muestreadas. Se presentó el marco teórico más general utilizando la TFTD y analizando cuidadosamente cada una de las operaciones que conforman el modulador. En el desarrollo del MEAF-TD se demostró que el FPB que limita en banda la salida del MEA en el modulador click de TC no permite obtener el equivalente en TD. Este filtro se reemplazó por un filtro denominado FPB analítico, que permite remover la parte negativa del espectro (de señales discretas) y elimina los problemas de aliasing. Es este nuevo filtro que se distribuye en los términos del MEA para obtener el MEAF-TD. El método desarrollado representa el marco teórico necesario para implementar un modulador de TD con las mismas características que el modulador click de TD. Adicionalmente se demostró que en el caso especial de señales pasabanda, el número de términos necesarios para representar el MEAF-TD ideal es finito.

El modulador de TD completo se desarrolló en el Capítulo 4. Para que el esquema de modulación tenga sentido práctico, se planteó el caso de una secuencia de muestras de

longitud finita como señal moduladora. Se describieron detalladamente los pasos necesarios para modular la señal y obtener los instantes de conmutación de la señal binaria. La generación de la señal analítica se realiza en el dominio de la frecuencia utilizando la información de la TDF. El MEAF-TD es especializado para el caso de secuencias de longitud finita utilizando la TDF como herramienta de cálculo. Se demostró que es posible muestrear la señal de entrada cerca del límite de Nyquist, aún así pudiendo definir la banda de guarda más allá de este límite sin la necesidad de aplicar técnicas de interpolación sobre las señales. Se desarrolló un algoritmo que permite calcular el MEAF-TD en el dominio de la frecuencia utilizando convoluciones circulares que admiten la implementación a partir de la FFT, permitiendo ahorrar costo computacional.

La principal ventaja del MEAF-TD es que no se necesita interpolar la señal y es posible trabajar cerca del límite de Nyquist. Para explotar esta ventaja en toda la cadena de modulación, se desarrolló un método de cálculo de los cruces por cero a partir de la información espectral. El método explota las relaciones que existen entre la serie de Fourier de señales periódicas (TC) y la TDF para señales periódicas y de TD. El método radica en utilizar un polinomio de variable compleja para calcular los ceros y luego mapear esos ceros al eje de tiempo. El método fue presentado para el caso especial de la señal real que resulta del MEAF-TD, pero la idea puede ser generalizada para encontrar los cruces por cero de señales de TC a partir de sus muestras utilizando la TDF. Aunque esta técnica demostró ser de gran utilidad en la versión fuera de línea del modulador digital, resulta que el orden del polinomio utilizado tiende a ser grande y es función de la frecuencia de la portadora.

Para verificar los resultados y técnicas presentadas a lo largo de la tesis, se realizaron medidas experimentales que fueron presentadas y comentadas en el Capítulo 5. Se utilizó un amplificador conmutado tipo puente para efectuar las mediciones en un sistema completo. El principal componente de hardware es el DSP que actúa como formador de pulsos. Utilizando la versión fuera de línea del modulador de TD se generaron los anchos de pulsos que describen a la señal modulada. Los datos fueron almacenados en la memoria del DSP y utilizados para reconstruir la señal binaria, que luego es acondicionada por un

driver para manejar los transistores de potencia.

La cuantización de los anchos de pulso resulta de suma importancia, ya que es este efecto el que domina la relación S/R a la salida del amplificador. Se implementaron dos técnicas que mejoran este aspecto y permiten blanquear el error de cuantización. La técnica de dithering consiste en agregar un valor aleatorio a la señal a ser cuantizada y permite obtener un piso de ruido plano en la banda de frecuencias de interés. Es la elección deseada si la frecuencia de conmutación (y la banda de guarda) es baja. El costo computacional es la generación de un número aleatorio por cada ancho de pulso, que luego es sumado antes de la cuantización final. La desventaja es que el piso de ruido es aumentado en función de la varianza del proceso aleatorio. El funcionamiento fue comprobado experimentalmente donde se pudo verificar el efecto de blanqueo del error de cuantización.

Otra técnica que fue explorada fue el moldeo de ruido. En este caso la respuesta en frecuencia del ruido no es plana y toma una forma senoidal elevada a una potencia que es función del orden utilizado. Se verificó mediante mediciones experimentales que utilizando orden 2 o 3 el efecto de blanqueo es notable. La desventaja de esta técnica es que si la frecuencia de la portadora no es lo suficientemente alta, la forma senoidal del ruido contamina la parte alta del espectro de la señal modulada. Sin embargo, si la aplicación permite elevar la frecuencia de conmutación de la señal binaria, el moldeo de ruido resulta la técnica elegida. El costo computacional equivale a implementar un filtro FIR del orden requerido para el moldeo del ruido, que en las medidas se varió entre 1 y 8.

Para caracterizar el sistema de modulación y amplificación se llevaron a cabo dos medidas estándares: IM y DAT + R. En el caso de la medida de IM no se detectaron componentes apreciables en la banda base definida para el modulador. Se pudo comprobar de esta manera que el algoritmo de modulación permite generar señales binarias sin distorsión en una banda de frecuencias específica, aún cuando la señal moduladora está compuesta por varios tonos. La distorsión armónica fue caracterizada con la medida de DAT + R, que permite no sólo caracterizar las no linealidades del amplificador sino el

ruido presente en la salida. Las medidas mostraron que la DAT + R se mantiene alrededor del 0,04 % en todo el rango de audio.

Se mostró la diferencia entre la MAPN y el modulador propuesto de TD. Para el caso de la MAPN los anchos de pulso se obtuvieron mediante manipulación matemática simbólica. Se pudo comprobar que aunque el MAPN se comporta bien, es imposible obtener señales libres de distorsión como se demostró en el Capítulo 2.

Como último resultado de medición se analizó el impacto que tiene el número de términos utilizados para implementar el MEAF-TD en el espectro de la señal binaria a la salida del modulador. Se pudo verificar de forma práctica la fórmula empírica desarrollada en el Capítulo 4 que permite elegir el número de términos en función de la máxima relación S/R deseada.

6.2. Trabajo futuro

A partir de los resultados obtenidos se plantean algunas líneas posibles de investigación para el futuro. Gracias al desarrollo del Capítulo 2 que muestra las similitudes entre la MAP y la click, se pudo escribir una fórmula que describe a la MAP como una modulación de fase. En la literatura la MAP se describe como la comparación entre la moduladora y la portadora, y el principal problema consiste en efectuar este cálculo cuando se utilizan señales muestreadas. Utilizando la ecuación introducida en esta Tesis sería posible utilizar las muestras de la señal moduladora para efectuar la modulación de fase y luego, de la misma forma que para la modulación click, se podrían encontrar los cruces por cero de esta señal modulada en fase e intercalarlos con la portadora senoidal. Este método serviría para obtener una implementación de TD de la modulación MAPN convencional, que puede resultar de utilidad en algunas aplicaciones en las que se pueda tolerar cierto nivel de distorsión para la señal modulada.

El punto más importante a desarrollar en el futuro es la implementación en línea del modulador propuesto. Aunque los fundamentos teóricos fueron presentados a lo largo del desarrollo de la Tesis, no parece trivial aplicar el método de modulación a una señal de

duración infinita. Además el cálculo de los cruces por cero utilizando la información de la TDF resulta en la resolución de una ecuación polinómica de alto orden y complica la implementación. La solución a estos problemas permitiría ampliar el campo de aplicaciones del modulador digital en los casos en los que se requiera modificar la señal moduladora en tiempo real.

La etapa de potencia no es ideal e introduce no linealidades que aumentan los niveles de distorsión de la señal. Los tiempos muertos definen en gran medida la máxima frecuencia de conmutación que puede ser utilizada sin estropear considerablemente el espectro. En el futuro sería de importancia trabajar sobre este aspecto para minimizar los efectos adversos con técnicas de realimentación o pre distorsión de los anchos de pulso. Para el caso de la modulación click y nuevamente haciendo referencia a su similitud con la MAP, es de esperar que las técnicas de linealización aplicadas a la MAP resulten útiles también para el modulador digital propuesto. Sin embargo, en este caso sería necesario resolver el problema de la implementación en línea planteada antes.

Bibliografía

- [1] A. S. Sedra and K. C. Smith. *Microelectronic Circuits*. Oxford, 2009.
- [2] N. Mohan, T. M. Undeland, and W. P. Robbins. *Power Electronics: Converters, Applications, and Design, 2nd Edition*. John Wiley & Sons, 2 edition, 1995.
- [3] A. R. Oliva. *Topics on Switching Audio Amplifiers*. Ph. D. Thesis, University of Arkansas, May 2004.
- [4] D. G. Holmes and T. A. Lipo. *Pulse Width Modulation for Power Converters: Principles and Practice*. Wiley-IEEE Press, 1 edition, October 2003.
- [5] Z. Song and D. V. Sarwate. The Frequency Spectrum of Pulse Modulated Signals. *Signal Processing*, 83:2227–2258, July 2003.
- [6] D. M. Divan. Optimum PWM Waveform Synthesis—A Filtering Approach. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, IA-21(5):1199–1205, September/October 1985.
- [7] M. O. J. Hawksford. Dynamic Model-Based Linearization of Quantized Pulse-Width Modulation for Applications in Digital-to-Analog Conversion and Digital Power Amplifier Systems. *J. Audio Eng. Soc.*, 40(4):235–252, April 1992.
- [8] M. O. J. Hawksford. Linearization of multilevel, multiwidth digital pwm with applications in digital-to-analog conversion. *J. Audio Eng. Soc.*, 43, October 1995.
- [9] C. H. Yang, C. W. Mu, and C. H. Tsai. Synthesizable Wide Range DPWM with All-Digital PLL for Digitally-Controlled Switching Converter. In *Proceedings of the IEEE Annual Conference on Industrial Electronics (IECON)*, pages 1626–1630, 2011.

- [10] M. Yang and J. H. Oh. Adaptive Predistortion Filter for Linearization of Digital PWM Power Amplifier using Neural Networks. In *Proceedings of the 113th AES Convention*, page 8, October 2002.
- [11] P. Midya, B. Roeckner, and S. Bergstedt. Digital Correction of PWM Switching Amplifiers. *IEEE Power Electron. Lett.*, 2(2):68–72, June 2004.
- [12] P. Midya, B. Roeckner, and T. Paulo. High Performance Digital Feedback for PWM Digital Audio Amplifiers. In *Proceedings of the 121st AES Convention*, page 11, October 2006.
- [13] P. Midya, B. Roeckner, and T. Paulo. Recursive Natural Sampling for Digital PWM. In *Proceedings of the 123rd AES Convention*, October 2007.
- [14] S. Saponara, L. Fanucci, and P. Terreni. Oversampled and Noise-Shaped Pulse-Width Modulator for High-Fidelity Digital Audio Amplifier. In *Proceedings of the 13th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, pages 830–833, 2006.
- [15] L. Peng, Y. Kang, X. Pei, and J. Chen. A Novel PWM Technique in Digital Control. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 54(1):338–346, February 2007.
- [16] S. C. Huerta, A. de Castro, O. Garcia, and J. A. Cobos. FPGA-Based Digital Pulse-width Modulator With Time Resolution Under 2 ns. *IEEE Trans. Power Electron.*, 23(6):3135–3141, November 2008.
- [17] M. Norris, L. M. Platon, E. Alarcon, and D. Maksimovic. Quantization Noise Shaping in Digital PWM Converters. In *Proceedings of the IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC)*, pages 127–133, 2008.
- [18] M. G. Batarseh, W. Al-Hoor, L. Huang, C. Iannello, and I. Batarseh. Window-Masked Segmented Digital Clock Manager-FPGA-Based Digital Pulsewidth Modulator Technique. *IEEE Trans. Power Electron.*, 24(11):2649–2660, November 2009.

- [19] A. De Castro and E. Todorovich. High Resolution FPGA DPWM Based on Variable Clock Phase Shifting. *IEEE Trans. Power Electron.*, 25(5):1115–1119, May 2010.
- [20] H. Ihs and C. Dufaza. Digital-input Class-D Audio Amplifier. In *Proceedings of the 128th AES Convention*, page 12, May 2010.
- [21] G. M. Sung, C. P. Yu, T. W. Hung, and H. Y. Hsieh. Mixed-Mode Chip Implementation of Digital Space SVPWM With Simplified-CPU and 12-Bit 2.56 Ms/s Switched-Current Delta-Sigma ADC in Motor Drive. *IEEE Trans. Power Electron.*, 27(2):916–930, February 2012.
- [22] C. Buccella, C. Cecati, and H. Latafat. Digital Control of Power Converters - A Survey. *IEEE Trans. Ind. Informat.*, 8(3), August 2012.
- [23] N. D. Patel and U. K. Madawala. A Bit-Stream Based PWM Technique for Variable Frequency Sinewave Generation. In *Proceedings of the 13th IEEE Power Electronics and Motion Control Conference (EPE-PEMC)*, pages 139–143, 2008.
- [24] N. Patel and U. Madawala. A Bit-Stream Based Scalar Control of an Induction Motor. In *Proceedings of the 34th IEEE Annual Conference on Industrial Electronics (IECON)*, pages 1071–1076, 2008.
- [25] N. D. Patel and U. K. Madawala. Sinewave Generation Using Bit-Streams. In *Proceedings of the 34th IEEE Annual Conference on Industrial Electronics (IECON)*, pages 1391–1396, 2008.
- [26] N. D. Patel and U. K. Madawala. A Bit-Stream-Based PWM Technique for Sine-Wave Generation. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 56(7):2530–2539, July 2009.
- [27] J. Bradshaw, U. Madawala, and N. Patel. Techniques for Conditioning High-Speed Bit-Stream Signals for Power Electronic Applications. In *Proceedings of the 35th IEEE Annual Conference on Industrial Electronics (IECON)*, pages 142–147, 2009.
- [28] E. R. C. Da Silva, E. C. Dos Santos Jr., and C. B. Jacobina. Pulsewidth Modulation Strategies. *IEEE Ind. Electron. Mag.*, 5(2):37–45, June 2011.

- [29] C. A. Yeh and Y. S. Lai. Digital Pulsewidth Modulation Technique for a Synchronous Buck DC/DC Converter to Reduce Switching Frequency. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 59(1):550–561, January 2012.
- [30] Y. M. Chen, Y. C. Chen, and T. F. Wu. Feedforward Delta Modulation for Power Converters. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 57(12):4126–4136, December 2010.
- [31] T. D. Nguyen, J. Hobraiche, N. Patin, G. Friedrich, and J. P. Vilain. A Direct Digital Technique Implementation of General Discontinuous Pulse Width Modulation Strategy. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 58(9):4445–4454, September 2011.
- [32] A. K. Rathore, J. Holtz, and T. Boller. Synchronous Optimal Pulsewidth Modulation for Low-Switching-Frequency Control of Medium-Voltage Multilevel Inverters. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 57(7):2374–2381, July 2010.
- [33] Y. Wang, Q. Gao, and X. Cai. Mixed PWM for Dead-Time Elimination and Compensation in a Grid-Tied Inverter. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 58(10):4797–4803, October 2011.
- [34] J. M. Goldberg and M. B. Sandler. Noise shaping and pulse-width modulation for an all-digital audio power amplifier. *J. Audio Eng. Soc.*, 39(6):449–460, June 1991.
- [35] A. J. Magrath and M. B. Sandler. Power digital-to-analog conversion using sigma-delta pulse inversion techniques. In *Proceedings of the 99th AES Convention*, page 21, October 1995.
- [36] A. J. Magrath and M. B. Sandler. Hybrid pulse width modulation/sigma-delta modulation power digital-to-analogue converter. *IEE Proc. Circuits, Devices Syst.*, 143:149–156, June 1996.
- [37] A. J. Magrath and M. B. Sandler. Digital power amplification using sigma-delta modulation and bit flipping. *J. Audio Eng. Soc.*, 45(6):476–487, June 1997.

- [38] E. Dallago and G. Sassone. Advances in high-frequency power conversion by delta-sigma modulation. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, 44(8):712–721, August 1997.
- [39] J. Klugbauer-Heilmeyer. A Sigma-Delta Power Amplifier for Digital Input Signals. In *Proceedings of the 102nd AES Convention*, March 1997.
- [40] R. Kok and D. M. Weber. On designing sigma-delta converter systems for class-d power amplifiers. In *IEEE 5th Africon Conference*, pages 715–718, October 1999.
- [41] J. A. S. Angus. Effective dither in high order sigma-delta modulators. In *Proceedings of the 111th AES Convention*, number 5478, page 9, New York, NY, USA, September 2001.
- [42] J. A. S. Angus. The practical performance limits of multi-bit sigma-delta modulation. In *Proceedings of the 110th AES Convention*, number 5394, page 5, Amsterdam, The Netherlands, May 2001.
- [43] R. Esslinger, G. Gruhler, and R.W. Stewart. Digital audio power amplifiers using sigma delta modulation: Linearity problems in the class-d power stage. In *Proceedings of the 110th AES Convention*, number 5400, page 12, Amsterdam, The Netherlands, May 2001.
- [44] R. Esslinger, G. Gruhler, and R.W. Stewart. Sigma-delta modulation in digital class-d power amplifiers: Methods for reducing the effective pulse transition rate. In *Proceedings of the 112th AES Convention*, number 5634, page 16, Munich, Germany, May 2002.
- [45] R. Esslinger, G. Gruhler, and R.W. Stewart. Distortions by switching errors in digital power amplifiers using sigma delta coded signals. In *Proceedings of the 112th AES Convention*, number 5633, page 14, Munich, Germany, May 2002.
- [46] G. Luckjiff and I. Dobson. Hexagonal $\Sigma\Delta$ Modulators in Power Electronics. *IEEE Trans. Power Electron.*, 20(5):1075–1083, September 2005.

-
- [47] M.O.J. Hawksford. Noise shaping in time-domain quantized lfm. In *Proceedings of the 119th AES Convention*, number 6617, page 19, New York, N. Y., USA, October 2005.
- [48] M Hawksford. Modulation and system techniques in pwm and sdm switching amplifiers. *J. Audio Eng. Soc.*, 54(3):107–139, March 2006.
- [49] M. Hawksford. Sdm versus pwm power digital-to-analogue converters (pdac) in high-resolution digital audio applications. In *Proceedings of the 118th AES Convention*, number 6471, page 24, Barcelona, Spain, May 2005.
- [50] P. Midya. Generation of variable frequency digital pwm. In *Proceedings of the 123rd AES Convention*, number 7227, page 10, New York, NY, USA, October 2007.
- [51] E. Gaalaas, B. Y. Liu, N. Nishimura, R. Adams, K. Sweetland, and R. Morajkar. Integrated stereo $\Sigma\Delta$ class d amplifier. In *Proceedings of the 118th AES Convention*, number 6452, page 10, Barcelona, Spain, May 2005.
- [52] B. F. Logan Jr. Click Modulation. *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, 63(3):401–423, March 1984.
- [53] M. Streitenberger and H. Bresch. First Implementation of a Class-D Amplifier with Separated Baseband. In *Proceedings of the 0th International Symposium on Theoretical Electrical Engineering*, pages 157–163, September 1999.
- [54] L. Stefanazzi, E. Paolini, and A. Oliva. Click modulation: an off-line implementation. In *Proceedings of the 51st Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*, pages 946–949, 2008.
- [55] M. Streitenberger, H. Bresch, and W. Mathis. A New Concept for High Performance Class-D Audio Amplification. In *Proceedings of the 106th AES Convention*, May 1999.
- [56] M. Streitenberger, H. Bresch, and W. Mathis. Theory and Implementation of a New Type of Digital Power Amplifier for Audio Applications. In *Proceedings of the IEEE*

-
- International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pages 511–514, May 2000.
- [57] M. Streitenberger, F. Felgenhauer, H. Bresch, and W. Mathis. Zero-Position Coding with Separated Baseband in Low-Power Class-D Audio Amplifiers for Mobile Communications. In *IEEE International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service (TELSIKS)*, volume 2, pages 567–570, September 2001.
- [58] M. Streitenberger, F. Felgenhauer, H. Bresch, and W. Mathis. Zero Position Coding (ZePoC)—A Generalised Concept of Pulse-Length Modulated Signals and its Application to Class-D Audio Power Amplifiers. In *Proceedings of the 110th AES Convention*, page 9, Amsterdam, The Netherlands, May 2001.
- [59] M. Streitenberger and W. Mathis. A Novel Coding Topology for Digital Class-D Audio Power Amplifiers with Very Low Pulse-Repetition Rate. In *Proceedings of the 28th European Solid-State Circuits Conference (ESSCIRC)*, pages 515–518, September 2002.
- [60] M. Streitenberger, F. Felgenhauer, H. Bresch, and W. Mathis. Class-D Audio Amplifiers with Separated Baseband for Low-Power Mobile Applications. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Circuits and Systems for Communications (ICCSC)*, pages 186–189, June 2002.
- [61] K. P. Sozanski. A Digital Click Modulator for a Class-D Audio Power Amplifier. In *Proceedings of the Signal Processing Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications*, pages 121–126, 2009.
- [62] A. R. Oliva, E. Paolini, and S. S. Ang. A New Audio File Format For Low-Cost, High-Fidelity, Portable Audio Amplifiers. *Texas Instrument Incorporated, white paper, SPRY076*, October 2005.
- [63] L. Stefanazzi, A. Oliva, and E. Paolini. Alias-free digital click modulator. *IEEE Trans. Ind. Informat.*, 99:1, 2012.

-
- [64] E. Bedrosian. The Analytic Signal Representation of Modulated Waveforms. *Proc. IRE*, 50(10):2071–2076, 1962.
- [65] B. F. Logan Jr. Theory of Analytic Modulation Systems. *B. S. T. J.*, 57(3):491–576, March 1978.
- [66] R. Kumaresan and Y. Wang. On representing signals using only timing information. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(5):2421–2439, 2001.
- [67] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, 5 edition, August 1989.
- [68] B. F. Logan Jr. Signals Designed for Recovery After Clipping—I. Localization of Infinite Products. *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, 63(2):261–285, February 1984.
- [69] B. F. Logan Jr. Signals Designed for Recovery After Clipping—II. Fourier Transform Theory of Recovery. *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, 63(2):287–306, February 1984.
- [70] B. F. Logan Jr. Signals Designed for Recovery After Clipping—III: Generalizations. *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, 63(3):379–399, March 1984.
- [71] B. F. Logan Jr. Information in the Zero Crossings of Bandpass Signals. *B. S. T. J.*, 56(4):487–510, April 1977.
- [72] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 3 edition, 2009.
- [73] S. L. Marple. Computing the discrete-time “analytic” signal via FFT. *IEEE Trans. Signal Process.*, 47(9):2600–2603, September 1999.
- [74] B. Metzler. *Audio Measurement Handbook*. Audio Precision, 2 edition, 1993.
- [75] Analog Devices. *The Data Conversion Handbook*. Newnes, 2004.
- [76] H. B. Voelcker. Toward a Unified Theory of Modulation—Part I: Phase-Envelope Relationships. *Proc. IEEE*, 54(3):340–353, March 1966.

- [77] H. B. Voelcker. Toward a Unified Theory of Modulation—Part II: Zero Manipulation. *Proc. IEEE*, 54(5):735–755, May 1966.
- [78] M. A. Slonim. Harmonic Analysis of Periodic Discontinuous Functions (New Method). Part I—Exponential Functions. *Proc. IEEE*, 67(6):952–953, June 1979.
- [79] M. A. Slonim. Harmonic Analysis of Periodic Discontinuous Functions (New Method). Part II—Polynomial Functions. *Proc. IEEE*, 67(6):953–954, June 1979.