UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Matemática

Supremo álgebras distributivas: una generalización de las álgebras de Tarski

Ismael María Calomino

Bahía Blanca Argentina

2015

A mis padres

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires durante el período comprendido entre los meses de Julio de 2011 y Octubre de 2015, bajo la dirección del Dr. Sergio Celani, Profesor Titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Agradecimientos

- **A mi familia:** les agradezco profundamente a mis padres por el gran esfuerzo que hicieron para darme una mejor educación. Todo lo que haga en mi vida estará dedicado a ellos primero. A mi abuela y mis hermanos por acompañarme y apoyarme siempre durante todos estos años.

- **Al Dr. Sergio Celani:** por haber dirigido esta tesis y todos estos años de predisposición. Su entusiasmo, dedicación y honestidad intelectual son una inspiración para mi.

- **Al Dr. Ignacio Viglizzo:** por aceptar ser mi supervisor de estudios y tener una respuesta inmediata a cada una de mis consultas.

- **A la Lic. Paula Menchón:** por ser una excelente compañera y brindarme su ayuda desinteresada en cada momento que lo he necesitado.

- **Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur:** por haberme permitido realizar mis estudios de posgrado y hacerme sentir muy cómodo cada vez que vine a Bahía Blanca.

- **Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas:** por el soporte financiero provisto por una beca interna doctoral.

- **A Sol:** por ser exactamente quien sos, porque siempre estas en mi, porque todo tiene que ver con vos.

Resumen

En esta tesis estudiamos una variedad particular de semirretículos con un concepto de distributividad. Dichas estructuras fueron estudiadas por Cornish y Hickman en [29] y [35], donde en este último artículo Hickman las llama supremo álgebras distributivas. Otros autores han llamado a éstas álgebras de diferentes maneras. A lo largo de esta memoria, y para mayor simplicidad, las llamaremos DN-álgebras. Nuestro primer objetivo es obtener una representación topológica a través de ciertos espacios sober con una base distinguida de subconjuntos abiertos, compactos y dualmente compactos satisfaciendo una condición adicional. A dichos espacios los hemos llamados DN-espacios. Extendemos esta representación a una dualidad probando que la categoría cuyos objetos son DN-álgebras y morfismos $\vee$-semi-homomorfismos es dualmente equivalente a la categoría que tiene como objetos DN-espacios y como morfismos ciertas relaciones binarias. También extendemos esta dualidad a la categoría de las DN-álgebras con homomorfismos. Nuestro segundo objetivo es aplicar dicha dualidad para interpretar topológicamente algunos conceptos algebraicos. Caracterizamos los homomorfismos inyectivos y sobreyectivos, los retículos de los filtros, filtros finitamente generados, subálgebras y congruencias. También desarrollamos un nuevo enfoque sobre la existencia de la extensión libre de una DN-álgebra sobre la variedad de los retículos distributivos acotados. Siguiendo la representación dual de los homomorfismos sobreyectivos, presentamos una caracterización de las imágenes homomorfas de una DN-álgebra a través de ciertas familias de subconjuntos saturados básicos irreducibles de su espacio dual dotadas de la menor topología Vietoris. Por otro lado, introducimos una definición alternativa de aniquilador relativo y presentamos algunas nuevas equivalencias de la distributividad. Definimos las clases de las DN-álgebras normales y DN-álgebras p-lineales y estudiamos sus estructuras en término de aniquiladores. Por último, analizamos una clase particular de función entre DN-álgebras para luego estudiar la clase de las DN-álgebras dotadas con un operador modal de necesidad. Obtenemos una representación y dualidad topológica y mostramos algunas aplicaciones.

Abstract

In this thesis we study a particular variety of semilattices with a concept of distributivity. Such structures were studied by Cornish and Hickman in [29] and [35], in this last article Hickman called them distributive join algebras. Others authors have called these algebras in different ways. Throughout this report, and for simplicity, we will call them DN-algebras. Our first objective is to obtain a topological representation through certain sober spaces with distinguished open, compact and dually compact subsets satisfying an additional condition. We have named these spaces DN-spaces. We extend this representation to a duality proving that the category whose objects are DN-algebras and whose morphisms are $\vee$-semi-homomorphisms is dually equivalent to the category whose objects are DN-spaces and whose morphisms are certain binary relations. We also extend this duality to the category of DN-algebras with homomorphisms. Our second objective is to apply this duality to topologically interpreting some algebraic concepts. We characterize injective and surjective homomorphisms, the lattices of filters, finitely generated filters, subalgebras and congruences. We also develop a new approach to the existence of the free extension of a DN-algebra on the variety of bounded distributive lattices. Following the dual representation of surjective homomorphisms, we present a characterization of homomorphic images of a DN-algebra through certain families of irreducible basic saturated subsets from its dual space which have been equipped with the lower Vietoris topology. On the other hand, we introduce an alternative definition of relative annihilator and we present some new equivalences of the distributivity. We define the classes of normal DN-algebras and p-linear DN-algebras and we study their structures in terms of annihilators. Finally, we analyze a particular kind of function between DN-algebras and then we study the class of DN-algebras equipped with a modal operator of necessity. We get a representation and a topological duality and show some applications.

Introducción

Es bien conocido que la distributividad de un retículo puede ser caracterizada a través de distintas propiedades. Por ejemplo, un retículo L es distributivo si y sólo si el retículo de todos sus filtros $\mathrm{Fi}(L)$ es distributivo. Otra importante equivalencia afirma que un retículo es distributivo si y sólo si las nociones de filtro primo y filtro irreducible coinciden. También debemos mencionar la caracterización dada por Mandelker en [38] a través de ciertos subconjuntos especiales llamados *aniquiladores relativos.* Si L es un retículo y $a, b \in L$, el *aniquilador de a relativo a b* se define como el conjunto $\langle a, b\rangle = \{x \in L \ : \ x \wedge a \leq b\}$. Luego, resulta que L es distributivo si y sólo si $\langle a, b\rangle$ es un ideal de L, para cada $a, b \in L$. Un paso muy importante tanto para el desarrollo de la teoría de los retículos distributivos como de la teoría de las álgebras de Boole son los trabajos de Stone sobre representaciones topológicas dados en [48] y [49], donde prueba que las álgebras de Boole y los retículos distributivos acotados pueden ser representados a través de ciertos espacios topológicos compactos llamados *espacios de Stone* o *espacios Booleanos.* Estos trabajos fueron publicados alrededor de 1930 y establecen que estructuras algebraicas asociadas a ciertas lógicas estan estrechamente ligadas a la topología general. Contemporáneo a los trabajos de Stone son los artículos de Birkhoff, donde prueba una dualidad entre las álgebras de Boole finitas y cuerpos de conjuntos finitos. Esta dualidad es en realidad un caso particular de la dualidad desarrollada por Stone. Más tarde, a comienzos de 1970, Priestley desarrolla en [45] y [46] una nueva dualidad topológica para los retículos distributivos acotados utilizando espacios topológicos ordenados compactos y totalmente disconexos en el orden, conocidos como *espacios de Priestley.* A partir de ese momento, las dualidades topológicas se han convertido en una herramienta de gran utilidad en el estudio de varios tipos de álgebras con estructura subyacente de retículos distributivos.

En la teoría de semirretículos existen ciertas subclases que cumplen algunas de las condiciones que definen la propiedad de distributividad en los retículos distributivos. Podemos citar a los *semirretículos primos* introducidos por Balbes en [4]. Un

$\wedge$-semirretículo es primo si el ínfimo se distribuye sobre supremos finitos, siempre que exista dicho supremo. Esta condición extiende la noción usual de distributividad de retículos y es equivalente a una generalización de uno de los resultados más importantes de la teoría de retículos distributivos, que es el *Teorema de Birkhoff-Stone* o *Teorema del Ideal Primo*. Pawar y Thakare enunciaron esta equivalencia en [43] y Hoo y Shum lo demostraron correctamente en [36]. Otra clase de semirretículos con un concepto de distributividad, y quizás la más estudiada hasta el momento, son los *semirretículos distributivos*. Varios autores han estudiado estas estructuras algebraicas en [50], [51], [33], [12], [13], [16], [18], [6], [7] y [8]. Muchos resultados válidos en la teoría de retículos distributivos se pueden extender a la clase de los semirretículos distributivos, por ejemplo, Grätzer en [33] demuestra que un semirretículo es distributivo si y sólo si el conjunto ordenado de todos sus filtros es un retículo distributivo, o Celani en [12] prueba que un semirretículo es distributivo si y sólo si las nociones de filtro irreducible y filtro primo (llamado débilmente irreducible en [12]) coinciden. Además, Grätzer en [33] desarrolla una representación topológica que generaliza la dualidad de Stone, aunque no alcanza a ser una dualidad categórica, ya que no representa a los homomorfismos entre semirretículos distributivos. Más tarde, en [12] y en [18], se completa la dualidad categórica, donde la principal novedad fué mostrar que los duales a los homomorfismos son relaciones binarias. Para ser más precisos, se prueba que la categoría que tiene como objetos semirretículos distributivos y como morfismos homomorfismos entre semirretículos distributivos es dualmente equivalente a la categoría que tiene como objetos ciertos espacios topológicos sober, llamados *DS-espacios*, y como morfismos relaciones binarias entre DS-espacios cumpliendo condiciones adicionales. El artículo [12] también sirvió como punto de partida para poder aplicar estas técnicas en el desarrollo de una dualidad topológica para los semirretículos implicativos en [13] y para los semirretículos distributivos pseudocomplementados en [16]. Otra importante representación topológica para la clase de los semirretículos distributivos ha sido probada recientemente por Bezhanishvili y Jansana en una serie de artículos publicados en [6], [7] y [8]. En estos trabajos se desarrolla una dualidad utilizando ciertos espacios de Priestley dotados de un subconjunto distinguido y algunas propiedades adicionales. A dichos espacios los llamaron *espacios de Priestley generalizados* y se basa en la conocida dualidad de Priestley dada en [45] y [46]. Particularmente en [8], se extienden estos resultados a los semirretículos implicativos, generalizando tanto los resultados dados en [13] como la conocida dualidad de Esakia para las álgebras de Heyting [31].

Otra importante clase de semirretículos con una noción de distributividad, el cual fueron estudiadas por Cornish y Hickman en [29] y [35], son las *N-álgebras.* En principio, éstas álgebras fueron llamadas *supremo álgebras* por Hickman en [35] y posteriormente denominadas *nearlattices* por varios autores en [23] y [26]. Una N-álgebra es un $\vee$-semirretículo con último elemento $\langle S, \vee, 1\rangle$ el cual satisface la condición que para cualquier par de elementos acotados inferiormente, existe su ínfimo. Una manera equivalente de definir dichas álgebras es que para todo elemento $a \in S$, el filtro principal $[a) = \{x \in S \ : \ a \leq x\}$ es un retículo acotado. A diferencia de otras clases de semirretículos, las N-álgebras pueden ser definidas como álgebras ternarias, es decir, como álgebras $\langle S, m, 1\rangle$ de tipo $(3, 0)$ donde S es un conjunto y m es una operación ternaria definida sobre S satisfaciendo determinadas identidades. Luego, poseen una caracterización ecuacional y por lo tanto forman una variedad. Este hecho fué demostrado en una primera instancia por Hickman en [35] y luego, de manera independiente, por Chajda y Kolařík en [26]. Más tarde, en [3], Araújo y Kinyon demuestran que tanto el sistema axiomático dado por Hickman como el sistema axiomático dado por Chajda y Kolařík son redundantes y logran exhibir un sistema ecuacional de dos identidades independientes. Una subvariedad partícular de las N-álgebras, y que son el principal motivo de la presente tesis, son las *DN-álgebras*, es decir, N-álgebras con la condición adicional de que cada filtro principal es un retículo distributivo acotado. Se puede citar la siguiente bibliografía sobre diversos autores que han estudiado esta clase de álgebras: [29], [35], [23], [24], [25], [26], [22], [34] y [3].

Las álgebras de Tarski, o álgebras de implicación, fueron extensamente estudiadas en [40] por Monteiro y en [2] por Abbott. Justamente en [2], Abbott muestra que la clase de las álgebras de Tarski es equivalente a la clase de $\vee$-semirretículos con último elemento donde cada filtro principal es un álgebra de Boole respecto al orden inducido. En relación a la representación topológica para las álgebras de Tarski, una dualidad completa fué desarrollada por Celani y Cabrer en [17], donde los espacios duales son ciertos espacios topológicos dotados de una base distinguida de subconjuntos abiertos y compactos cumpliendo condiciones adicionales. Cabe mencionar que otra dualidad completa para las álgebras de Tarski fué desarrollada por Abad, Díaz Varela y Torrens en [1]. Como las DN-álgebras generalizan tanto a los retículos distributivos acotados como a las álgebras de Tarski, es natural plantearnos si se puede extender tanto la dualidad de Stone como la dualidad de las álgebras de Tarski dada en [17] a la clase de las DN-álgebras. El primer objetivo de este trabajo es responder a este planteo utilizando las técnicas desarrolladas en la dualidad para los semirretículos distributivos por medio de DS-espacios [18]. Veremos que es posible desarrollar una dualidad categórica entre DN-álgebras y ciertos espacios topológicos llamados *DN-espacios*. Presentamos estos resultados en el Capítulo 3 y son de gran importancia, ya que son utilizados durante el resto de la tesis.

Nuestro segundo objetivo es intentar aplicar la dualidad desarrollada para interpretar topológicamente algunos conceptos algebraicos de la teoría de DN-álgebras. Al final del Capítulo 3, logramos caracterizar tanto a los homomorfismos inyectivos y sobreyectivos, como a los retículos de las congruencias, subálgebras y filtros. También damos un nuevo enfoque sobre la existencia de la extensión libre de una DN-álgebra sobre la variedad de los retículos distributivos acotados. Continuamos en el Capítulo 4 con el estudio de las imágenes homomorfas de una DN-álgebra haciendo uso de los resultados dados en el Capítulo 3 y de la conocida menor topología Vietoris sobre una familia de subconjuntos saturados básicos irreducibles de su espacio dual. También proponemos una definición alternativa de aniquilador relativo a la dada en [25] y estudiamos algunas caracterizaciones algebraicas. Por último, en el Capítulo 5, dotamos a las DN-álgebras con un operador modal de necesidad, estudiamos su representación topológica y presentamos algunas aplicaciones.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera.

El Capítulo 1 está dedicado a recordar nociones generales que nos serán de utilidad durante el resto de la tesis. Para ser más específicos, recordamos las definiciones y propiedades básicas de álgebra universal, retículos, semirretículos, álgebras de Boole, álgebras de Tarski, topología general, categorías y también sobre la dualidad de Stone para la clase de los retículos distributivos acotados.

En el Capítulo 2 introducimos las clases de las N-álgebras y DN-álgebras y repasamos los conceptos más importantes [23]. En la Sección 2.1 presentamos la base ecuacional para las N-álgebras dado por Chajda y Kolarik en [26], mostrando así que la clase de las N-álgebras forman una variedad. También mostramos el sistema de axiomas reducido por Araújo y Kinyon en [3]. La Sección 2.2 trata sobre las DN-álgebras y se encuentra dividida en varias subsecciones. Comenzamos probando que la clase de las DN-álgebras admiten una base ecuacional, formando así una subvariedad de la variedad de las N-álgebras. En la Subsección 2.2.1 recordamos algunos resultados sobre diferentes clases de ideales y sobre el retículo de los filtros de una DN-álgebra. Mostramos un resultado análogo al Teorema del Ideal Primo probado por Halaš en [34] y caracterizamos la distributividad de una DN-álgebra en términos de la distributividad de su retículo de filtros y filtros finitamente generados. En la Subsección 2.2.2 introducimos y estudiamos algunas clases especiales de filtros e ideales. Desarrollamos un teorema de separación y presentamos caracterizaciones originales de la distributividad de una DN-álgebra. La Subsección 2.2.3 está dedicada a la presentación de $\vee$-semi-homomorfismos y homomorfismos entre DN-álgebras, y damos algunas caracterizaciones originales que utilizaremos en los capítulos posteriores. En la Subsección 2.2.4 estudiamos las congruencias de una DN-álgebra, definiendo una noción más adecuada a dichas estructuras. También mostramos la existencia de una correspondencia entre las congruencias de una DN-álgebra y las congruencias de el retículo distributivo de sus filtros finitamente generados. Finalizamos el capítulo con la Subsección 2.2.5 probando una representación de las DN-álgebras por medio del conjunto ordenado de sus ideales primos.

En el Capítulo 3 nos centramos en el estudio de una teoría de representación topológica y dos diferentes dualidades para las DN-álgebras. En la Sección 3.1, dividida en las Subsecciones 3.1.1 y 3.1.2, definimos el espacio dual de una DN-álgebra, llamado *DN-espacio*, y mostramos algunas formas equivalentes de poder definir un DN-espacio. Probamos que toda DN-álgebra A es isomorfa a la DN-álgebra dual de algún DN-espacio $\langle X, \mathcal{K} \rangle$, y recíprocamente, que para cualquier DN-espacio $\langle X, \mathcal{K} \rangle$, existe una DN-álgebra A tal que $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es homeomorfo al espacio dual de A. En la Sección 3.2 estudiamos dos diferentes categorías algebraicas que tienen como objetos DN-álgebras pero como morfismos $\vee$-semi-homomorfismos y homomorfismos entre DN-álgebras, y presentamos dos dualidades categóricas diferentes a través de ciertas relaciones binarias definidas sobre sus espacios duales. En la Sección 3.3 presentamos diferentes aplicaciones de la dualidad desarrollada. Comenzamos en la Subsección 3.3.1 caracterizando los homomorfismos inyectivos y sobreyectivos. Definimos la noción de homomorfismo *fuertemente inyectivo*, el cual es un caso especial de homomorfismo inyectivo, y mostramos que los homomorfismos fuertemente inyectivos y sobreyectivos se corresponden a condiciones adicionales sobre las relaciones binarias asociadas. En la Subsección 3.3.2 probamos la existencia de un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de una DN-álgebra y ciertos subespacios especiales, que hemos llamados *DN-subespacios*, de su espacio dual asociado. También, en la Subsección 3.3.3, probamos que el retículo de las subálgebras de una DN-álgebra se corresponde con familias particulares de elementos básicos de su espacio dual. En la Subsección 3.3.4 estudiamos el retículo de los filtros de una DN-álgebra. Probamos que tal retículo tiene estructura de álgebra de Heyting y que se encuentran en correspondencia con el álgebra de co-Heyting de los subconjuntos cerrados de su espacio dual. Por último, en la Subsección 3.3.5, desarrollamos un enfoque topológico diferente a la dada en [29] sobre la existencia de la extensión reticular distributiva libre de una DN-álgebra. Parte de los contenidos de este capítulo aparecen publicados en nuestro artículo [19].

El Capítulo 4 está dividido en dos partes. En la primera parte, teniendo en cuenta los resultados desarrollados en el Capítulo 3 sobre la representación dual de los homomorfismos sobreyectivos, caracterizamos las imágenes homomorfas de una DN-álgebra a través de familias de subconjuntos saturados básicos de su espacio dual dotadas de la menor topología Vietoris. La segunda parte está dividida en varias subsecciones. En principio, proponemos una definición diferente de aniquilador relativo a la dada en [25]. En la Subsección 4.2.1 establecemos una conexión con las álgebras de Tarski y en la Subsección 4.2.2 presentamos algunas equivalencias de la distributividad de una DN-álgebra en términos de dichos aniquiladores. En la Subsección 4.2.3 estudiamos una clase particular de $\vee$-semi-homomorfismos que preservan aniquiladores y los caracterizamos dualmente. En la Sección 4.3 introducimos y damos algunas equivalencias de las clases de las *DN-álgebras normales* y *DN-álgebras p-lineales*, el cual son una generalización de los retículos normales estudiados por Cornish en [27] y [28]. Los resultados que conciernen a este capítulo se desarrollaron en los artículos [11] y [20].

Finalmente, en el Capítulo 5, estudiamos la clase de las *DN-álgebras con un operador modal de necesidad* $\Box$, o simplemente *DN*$\Box$*-álgebras*. Con el fin de estudiar una teoría de representación y una dualidad para la clase de las DN$\Box$-álgebras, estudiamos en la Sección 5.1 una dualidad para la categoría que tiene como objetos DN-álgebras y como morfismos aplicaciones particulares entre DN-álgebras que las hemos llamado $\wedge$-*semi-homomorfismos*. Como caso especial, en la Sección 5.2 presentamos una dualidad topológica para la categoría que tiene como objetos DN$\Box$-álgebras y como morfismos $\wedge$-semi-homomorfismos que conmutan con el operador $\Box$. Finalizamos el capítulo con algunas aplicaciones dadas en la Sección 5.3. En las Subsecciones 5.3.1 y 5.3.2 extendemos los resultados desarrollados en las Subsecciones 3.3.2 y 3.3.3 sobre los retículos de las congruencias y subálgebras de una DN-álgebra, respectivamente, a la clase de las DN$\Box$-álgebras. También, en la Subsección 5.3.3, presentamos la $\Box$-extensión reticular distributiva libre de una DN$\Box$-álgebra extendiendo los resultados dados en la Subsección 3.3.5.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo presentamos las definiciones y propiedades básicas sobre álgebra universal, retículos distributivos acotados, semirretículos, teoría de categorías, topología y espacios de Stone, que utilizaremos durante el resto de la tesis. También fijaremos la notación que vamos a utilizar para facilitar la lectura posterior. Supondremos que el lector posee cierta familiaridad con los conceptos. Un estudio detallado de estas nociones puede verse en [10], [5], [23], [32] y [41].

1.1 Nociones de álgebra universal

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje o tipo de álgebras, entonces un *álgebra de tipo* F es un par $\langle A, F\rangle$, donde A es un conjunto no vacío y F es un conjunto de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$ tal que a cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ le corresponde una operación n-aria f^A sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama *universo* o *soporte* del álgebra $\langle A, F\rangle$. Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos f en lugar de f^A, y si $\mathcal{F}$ es finito, por ejemplo $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, ..., f_k\rangle$. Adoptamos la convención aridad$(f_1) \geq$ aridad$(f_2) \geq ... \geq$ aridad(f_k). Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representaremos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte A.

Sean A y B álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una aplicación $h : A \to B$ se dice un *homomorfismo* si para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$, $h\left(f^A(a_1, ..., a_n)\right) = f^B(h(a_1), ..., h(a_n))$ para cada n-upla $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de A. Si h es inyectiva, entonces h se dice *monomorfismo*. Si h es suryectiva, entonces h se dice *epimorfismo* y en tal caso diremos que B es una *imagen homomorfa* de A. Si h es biyectiva, entonces h se dice un *isomorfismo* y diremos que A es isomorfa a B, en símbolos, $A \cong B$.

Sean A y B álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Diremos que B es una *subálgebra* de A si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, f^B es la restricción de f a B.

Si A es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia, diremos que θ es una *congruencia* sobre A si satisface la relación de *compatibilidad*: si f es un símbolo de función n-ario en $\mathcal{F}$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ y $(a_i, b_i) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., n$, entonces $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \theta$. Si X es un subconjunto de A, entonces la *congruencia generada por* X es la menor congruencia de A que contiene a $X \times X$ y lo denotaremos como $\theta(X)$. Al conjunto de todas las congruencias sobre A lo denotaremos por $\mathrm{Con}(A)$. Luego, para cada $\theta \in \mathrm{Con}(A)$ y $f \in \mathcal{F}$ tenemos definido en el conjunto cociente A/θ una operación n-aria $f^{A/\theta}$ que a cada n-upla de clases de equivalencia de A/θ le asigna el elemento $f^A(a_1, ..., a_n)/\theta$. Así, el *álgebra cociente* es el álgebra cuyo conjunto soporte es A/θ y cuyas operaciones fundamentales satisfacen la condición anterior. Las álgebras cocientes de A tienen el mismo tipo que A.

Una *variedad* es una clase no vacía K de álgebras del mismo tipo que es cerrada bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos. Diremos que K es *ecuacional* si existe un conjunto de identidades Σ tal que un álgebra está en K si y sólo si satisface todas las identidades de Σ. Un importante resultado del álgebra universal dado por Birkhoff nos dice que una clase de álgebras K es ecuacional si y sólo si es una variedad [10].

1.2 Retículos y semirretículos

Sea $\langle L, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y sean $a, b \in L$. Denotaremos el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$, si existen, como $a \vee b$ y $a \wedge b$, respectivamente. Diremos que $\langle L, \leq \rangle$ es un *retículo* si para todo $a, b \in L$ existen $a \vee b$ y $a \wedge b$. Los retículos también pueden definirse como estructuras algebraicas.

Definición 1.2.1. Un *retículo* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ de tipo $(2, 2)$ que satisface las siguientes identidades:

1. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,
2. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
3. $x \vee y = y \vee x$,

4. $x \wedge y = y \wedge x$,

5. $x \vee x = x$,

6. $x \wedge x = x$,

7. $x \vee (x \wedge y) = x$,

8. $x \wedge (x \vee y) = x$.

La relación $\leq$ definida sobre L como $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$ si y sólo si $a \wedge b = a$ es tal que el par $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo. Si existen elementos $0, 1 \in L$ tales que $a \wedge 0 = 0$ y $a \vee 1 = 1$ para cada $a \in L$, diremos que 0 es el *primer elemento* de L y 1 es el *último elemento* de L. Un retículo es *acotado* si tiene primer y último elemento. Diremos que un retículo L es *distributivo* si satisface la identidad $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Es sencillo de comprobar que la identidad anterior es equivalente a $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Luego, un *retículo distributivo acotado* $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que: $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo, 0 y 1 son el primer y último elemento de L, respectivamente, y satisface la propiedad de distributividad. En particular, la clase de los retículos distributivos acotados forman una variedad.

Sea $\langle S, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $\langle S, \leq \rangle$ es un $\vee$-*semirretículo* si para todo $a, b \in S$ existe $a \vee b$. Diremos que $\langle S, \leq \rangle$ es un $\wedge$-*semirretículo* si para todo $a, b \in S$ existe $a \wedge b$. De manera similar a los retículos, tanto los $\vee$-semirretículos como los $\wedge$-semirretículos también pueden definirse como estructuras algebraicas.

Definición 1.2.2. Un *semirretículo* es un álgebra $\langle S, \circ \rangle$ de tipo (2) que satisface las siguientes identidades:

1. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

2. $x \circ y = y \circ x$,

3. $x \circ x = x$.

Sea $\langle S, \circ \rangle$ un semirretículo. Sea la relación binaria $\leq_\vee$ definida sobre S como $a \leq_\vee b$ si y sólo si $a \circ b = b$. De forma análoga, sea la relación $\leq_\wedge$ definida sobre S como $a \leq_\wedge b$ si y sólo si $a \circ b = a$. Entonces el par $\langle S, \leq_\vee \rangle$ es un $\vee$-semirretículo tal que $a \vee b = a \circ b$ para todo $a, b \in S$ y el par $\langle S, \leq_\wedge \rangle$ es un $\wedge$-semirretículo tal que $a \wedge b = a \circ b$ para todo $a, b \in S$. Dado que los semirretículos se definen a partir de identidades, tenemos que tanto la clase de los $\vee$-semirretículos como de los $\wedge$-semírreticulos forman una variedad.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$, diremos que un subconjunto Y de X es *creciente* si para todo $y \in Y$ y para todo $x \in X$, si $y \leq x$ entonces $x \in Y$. Dualmente, Y se dice *decreciente* si para todo $y \in Y$ y para todo $x \in X$, si $x \leq y$ entonces $x \in Y$. Denotaremos al complemento de $Y \subseteq X$ como $X - Y$ o Y^c. Para cada subconjunto Y de X, definimos

$$[Y) = \{x \in X \ : \ \exists y \in Y \ \ (y \leq x)\} \text{ y } (Y] = \{x \in X \ : \ \exists y \in Y \ \ (x \leq y)\}$$

lo cual denominaremos como *conjunto creciente generado por* Y y *conjunto decreciente generado por* Y, respectivamente.

Sea S un $\vee$-semirretículo. Si $F \subseteq S$, diremos que F es un *filtro* de S si satisface las siguientes condiciones: es no vacío, creciente y si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$, siempre que exista $a \wedge b$. Si X es un subconjunto no vacío de S, entonces el *filtro generado por* X es el menor filtro que contiene a X y lo denotaremos como $F(X)$. Un filtro G de S es *finitamente generado* si existe un subconjunto no vacío finito X de S tal que $G = F(X)$. Si $X = \{a\}$ diremos que $F(\{a\})$ es el *filtro principal de* a y lo denotaremos como $[a)$. En particular, $[a) = \{x \in S : a \leq x\}$. Denotaremos al conjunto de todos los filtros y filtros finitamente generados de S como $\mathrm{Fi}(S)$ y $\mathrm{Fi}_f(S)$, respectivamente.

Si $I \subseteq S$, diremos que I es un *ideal* de S si satisface las siguientes condiciones: es no vacío, decreciente y si $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$. Diremos que I es un ideal *propio* de S si $I \neq S$. Un ideal propio I de S es *primo* si para cada $a, b \in S$, si $a \wedge b \in I$, siempre que exista $a \wedge b$, entonces $a \in I$ o $b \in I$. Si X es un subconjunto de S, entonces el *ideal generado por* X es el menor ideal que contiene a X. Lo denotaremos como $I(X)$ y se puede caracterizar como

$$I(X) = \{a \in S \ : \ \exists x_1, ..., x_n \in X \ \ (a \leq x_1 \vee ... \vee x_n)\}.$$

Un ideal propio I de S es *maximal* si para cada ideal J, si $I \subseteq J$, entonces $J = I$ o $J = S$. Por último, diremos que un ideal propio I de S es *irreducible* si para cada par de ideales I_1, I_2 tal que $I = I_1 \cap I_2$, entonces $I = I_1$ o $I = I_2$. Denotaremos al conjunto de todos los ideales, ideales primos, ideales maximales e ideales irreducibles de S como $\mathrm{Id}(S)$, $X(S)$, $\mathrm{Idm}(S)$ e $\mathrm{Irr}(S)$, respectivamente.

Los conceptos de filtro, ideal, ideal primo, ideal maximal e ideal irreducible se extienden de manera análoga a la clase de los retículos.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de retículos distributivos es el *Teorema del Ideal Primo*, o también conocido como el *Teorema de Birkhoff-Stone*. Esencialmente, es un teorema de separación y se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 1.2.3. *Sea L un retículo distributivo. Sea $I \in \mathrm{Id}(L)$ y sea $F \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $I \cap F = \emptyset$. Entonces existe $P \in X(L)$ tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \emptyset$.*

Definición 1.2.4. Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,
2. $x \vee \neg x = 1$,
3. $x \wedge \neg x = 0$.

Las álgebras de Boole fueron introducidas por George Boole a principios del siglo XIX con el objetivo de dar una interpretación algebraica de la Lógica Proposicional Clásica. Existe una clase de álgebras que corresponde al subreducto implicativo de las álgebras de Boole y son también la contrapartida algebraica del fragmento implicativo de la Lógica Proposicional Clásica: las *álgebras de Tarski*, o también conocidas como *álgebras de implicación* [40].

Definición 1.2.5. Un *álgebra de Tarski* es un álgebra $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ de tipo $(2, 0)$ que satisface las siguientes identidades:

1. $1 \rightarrow x = x$,
2. $x \rightarrow x = 1$,
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$,
4. $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$.

Toda álgebra de Boole es un álgebra de Tarski tomando $x \rightarrow y = \neg x \vee y$. Las álgebras de Tarski fueron estudiadas por Monteiro en [40] y por Abbott en [2].

Otra de las generalizaciones de las álgebras de Boole más estudiadas son las *álgebras de Heyting* y corresponden a la contrapartida algebraica de la Lógica Intuicionista. Para ser más precisos, un álgebra de Heyting es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ donde $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado y la operación binaria $\rightarrow$ satisface la condición

$$x \wedge y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq y \rightarrow z$$

para cada $x, y, z \in L$. El *pseudocomplemento* de $x \in L$ se define como el elemento $x^* = x \to 0$. Luego, toda álgebra de Heyting es un retículo distributivo acotado. En particular, la clase de las álgebras de Heyting forma una variedad [5].

Definición 1.2.6. Un *álgebra de Heyting* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,
2. $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$,
3. $x \wedge (y \to z) = x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$,
4. $(x \wedge y) \to x = 1$.

Un *álgebra de co-Heyting* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \rightsquigarrow, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ donde $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y la operación binaria $\rightsquigarrow$ satisface la condición $x \leq y \vee z$ si y sólo si $x \rightsquigarrow y \leq z$.

1.3 Topología

Recordemos algunas nociones topológicas básicas que nos serán de utilidad.

Definición 1.3.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes condiciones:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. La unión de los elementos de cualquier subfamilia de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.
3. La intersección de los elementos de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un *espacio topológico* es un par $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una topología sobre X. Diremos que un subconjunto U de X es un *abierto* si $U \in \mathcal{T}$. Un subconjunto V de X es *cerrado* si su complemento $V^c = X - V$ es abierto. Denotaremos como $\mathcal{C}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados de X. La *clausura* de un subconjunto A de X, la cual denotaremos como $\mathrm{Cl}(A)$, se define como la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Si $A = \{a\}$, escribiremos simplemente $\mathrm{Cl}(\{a\}) = \mathrm{Cl}(a)$. Un subconjunto U es *compacto* si para cada familia de abiertos $\mathcal{F}$ tal que $U \subseteq \bigcup\{F : F \in \mathcal{F}\}$, existe una subfamilia finita $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ tal que $U \subseteq \bigcup\{G \; : \; G \in \mathcal{G}\}$. Diremos que un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es T_0 si dados $x, y \in X$ distintos, existe un abierto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$, o $x \notin U$ e $y \in U$.

Si X es un conjunto, una *base* para una topología sobre X es una colección $\mathcal{K}$ de subconjuntos de X, llamados *elementos básicos*, tal que:

1. Para cada $x \in X$, existe un elemento básico B tal que $x \in B$.
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{K}$ satisface estas condiciones, se define la *topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ generada por $\mathcal{K}$* como sigue: un subconjunto U de X es un abierto de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, si para cada $x \in U$ existe un elemento básico $B \in \mathcal{K}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$. Notemos que cada elemento básico es un abierto. Se prueba que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ generada por $\mathcal{K}$ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{K}$. A un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ con una base $\mathcal{K}$ para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ lo denotaremos como $\langle X, \mathcal{K}\rangle$. Una *subbase* S para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X.

Definición 1.3.2. Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un espacio topológico. Diremos que un subconjunto A de X es *saturado básico* si es intersección de elementos básicos, es decir, si existe una subfamilia $\{U_i \; : \; i \in I\}$ de $\mathcal{K}$ tal que $A = \bigcap\{U_i \; : \; i \in I\}$.

Denotaremos como $\mathcal{S}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos saturados básicos de X. La saturación básica de un subconjunto A de X se define como el menor saturado básico que contiene a A, la cual denotaremos como $\mathrm{Sb}(A)$. Si $A = \{a\}$, escribiremos simplemente $\mathrm{Sb}(\{a\}) = \mathrm{Sb}(a)$.

Si $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un espacio topológico e Y un subconjunto de X, entonces la familia $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \; : \; U \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\}$ es una topología sobre Y denominada *topología de subespacio* o *topología relativa* y el par $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es un *subespacio* de $\langle X, \mathcal{K}\rangle$. Notemos que la colección $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y \; : \; U \in \mathcal{K}\}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$ sobre Y tal que $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$, es decir, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$ es más fina que la topología $\mathcal{T}_Y$. Si $\langle X_1, \mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2\rangle$ son espacios topológicos, diremos que una función $f : X_1 \to X_2$ es *continua* si $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ para cada $U \in \mathcal{T}_2$.

Definición 1.3.3. Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cerrados no vacíos de X.

1. La *menor topología Vietoris* $\mathcal{T}_L$ definida sobre $\mathcal{F}$ es la topología generada por la colección
$$\{X_U \; : \; U \in \mathcal{T}\}$$

como subbase, donde $X_U = \{Y \in \mathcal{F} \ : \ Y \cap U \neq \emptyset\}$.

2. La *topología Vietoris* $\mathcal{T}_V$ definida sobre $\mathcal{F}$ es la topología generada por la colección
$$\{X_U \ : \ U \in \mathcal{T}\} \cup \left\{X^V \ : \ V \in \mathcal{T}\right\}$$
como subbase, donde $X^V = \{Y \in \mathcal{F} \ : \ Y \cap V = \emptyset\}$, es decir, $X^V = \mathcal{F} - X_V$.

Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ una subfamilia de la familia $\mathcal{S}(X)$ de todos los subconjuntos saturados básicos de X. Dado $U \in \mathcal{C}(X)$, consideremos el conjunto
$$M_U = \{Y \in \mathcal{F} : Y \cap U = \emptyset\}$$
y la colección $\mathcal{B}_L = \{M_U \ : \ U \in \mathcal{C}(X)\}$. Observemos que $\mathcal{B}_L$ es una subbase para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L}$ sobre $\mathcal{F}$. En efecto, si $Y \in \mathcal{F}$, entonces existe una famillia $\{U_i \ : \ i \in I\}$ de $\mathcal{K}$ tal que $Y = \bigcap \{U_i \ : \ i \in I\}$. Dado $j \in I$, tenemos el subconjunto básico U_j. Luego, $U_j^c \in \mathcal{C}(X)$ y $\bigcap \{U_i \ : \ i \in I\} \cap U_j^c = \emptyset$, es decir, $Y \cap U_j^c = \emptyset$. Entonces $Y \in M_{U_j^c}$ y por lo tanto $\mathcal{F} = \bigcup \{M_U \ : \ U \in \mathcal{C}(X)\}$. De esta forma aseguramos que $\mathcal{B}_L$ es una subbase para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L}$ sobre $\mathcal{F}$.

1.4 Categorías

Utilizaremos básicamente las definiciones clásicas de la teoría de categorías.

Definición 1.4.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Una colección de *objetos*.

2. Una colección de *morfismos*.

3. Para cada morfismo f, un objeto llamado *dominio* de f y un objeto llamado *codominio* de f. Utilizaremos la notación $f : A \to B$, donde A y B son el dominio y el codominio del morfismo f, respectivamente.

4. Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$, un morfismo $g \circ f$ llamado *composición de f y g*, sujeto a la siguiente condición: si $f : A \to B, g : B \to C$ y $h : C \to D$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

5. Para cada objeto A, un morfismo distinguido id_A llamado *identidad de A*, sujeto a la siguiente condición: si $f : A \to B$ y $g : C \to A$, entonces $f \circ id_A = f$ y $id_A \circ g = g$.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Sean A y B objetos de $\mathcal{C}$ y sea $i : A \to B$ un morfismo. Diremos que i es un *isomorfismo* si existe un morfismo $h : B \to A$ tal que $h \circ i = id_A$ e $i \circ h = id_B$. Definimos la categoría $\mathcal{C}^{op}$ como la categoría cuyos objetos son los mismos de $\mathcal{C}$ pero invierte los morfismos de $\mathcal{C}$. Un *funtor* $\mathbb{F}$ de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, el cual denotaremos como $\mathbb{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, es una asignación el cual envía objetos de $\mathcal{C}$ en objetos de $\mathcal{D}$ y morfismos de $\mathcal{C}$ en morfismos de $\mathcal{D}$ sujeto a las siguientes condiciones:

1. Si $f : A \to B$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, entonces $\mathbb{F}(f) : \mathbb{F}(A) \to \mathbb{F}(B)$ es un morfismo de $\mathcal{D}$.

2. $\mathbb{F}(id_A) = id_{\mathbb{F}(A)}$ para cada objeto A de $\mathcal{C}$.

3. Para cada par de morfismos f y g de $\mathcal{C}$ cuyo dominio de f coincide con el codominio de g, se satisface la condición $\mathbb{F}(f \circ g) = \mathbb{F}(f) \circ' \mathbb{F}(g)$ donde $\circ$ y $\circ'$ denotan la composición de morfismos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente.

A un funtor $\mathbb{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ lo llamaremos *contravariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Denotaremos al funtor identidad como $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, es decir, al funtor que $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(A) = A$ para cada objeto A de $\mathcal{C}$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para cada morfismo f de $\mathcal{C}$. Dados dos funtores $\mathbb{F}, \mathbb{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una *transformación natural* ε de $\mathbb{F}$ en $\mathbb{G}$ es una asignación tal que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ le asocia un morfismo $\varepsilon_A : \mathbb{F}(A) \to \mathbb{G}(A)$ en $\mathcal{D}$ cumpliendo que $\varepsilon_B \circ \mathbb{F}(f) = \mathbb{G}(f) \circ \varepsilon_A$ para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$. Si cada morfismo $\varepsilon_A : \mathbb{F}(A) \to \mathbb{G}(A)$ es un isomorfismo entonces diremos que ε es un *isomorfismo natural* entre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$.

Diremos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes* si existen funtores $\mathbb{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathbb{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y dos isomorfismos naturales ε de $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ en $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}$ y σ de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ en $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}$. Si además para cada objeto C de $\mathcal{C}$ y cada objeto D de $\mathcal{D}$ se tiene que $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}(C) = C$ y $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}(D) = D$, entonces diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *isomorfas*. Por último, diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *dualmente equivalentes* si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}^{op}$ son equivalentes.

1.5 Dualidad topológica de Stone

En 1936, Stone publica su célebre artículo sobre la representación topológica para las álgebras de Boole [48]. Posteriormente, el mismo Stone, generaliza dicha representación a las variedades de los retículos distributivos acotados y de las álgebras de Heyting en [49]. Estos resultados tuvieron un fuerte impacto en el estudio de estructuras algebraicas ordenadas. En esta sección describimos brevemente dicha dualidad siguiendo la presentación dada en [5]. Una presentación alternativa dada por Grätzer puede encontrarse en [33].

Denotemos como $\mathcal{DL}$ a la categoría que tiene como objetos retículos distributivos y como morfismos funciones entre retículos distributivos que preservan todas las operaciones reticulares.

Definición 1.5.1. Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un *espacio de Stone*, o *espacio espectral*, si satisface las siguientes condiciones:

1. $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es T_0.

2. La familia de todos los subconjuntos abiertos y compactos de X forman una anillo de conjuntos y una base para la topología $\mathcal{T}$.

3. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos familias no vacías de subconjuntos abiertos y compactos no vacíos tal que
$$\bigcap \{U \ : \ U \in \mathcal{U}\} \subseteq \bigcup \{V \ : \ V \in \mathcal{V}\},$$
entonces existen subfamilias finitas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, tal que $\bigcap \{S \ : \ S \in \mathcal{S}\} \subseteq \bigcup \{W \ : \ W \in \mathcal{W}\}$.

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2 \rangle$ espacios de Stone y sea $f : X_1 \to X_2$ una aplicación. Diremos que f es una *función de Stone* si $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto y compacto de X_1, para cada subconjunto abierto y compacto U de X_2. Denotaremos como $\mathcal{SS}$ a la categoría que tiene como objetos espacios de Stone y como morfismos funciones de Stone entre espacios de Stone.

A cada retículo distributivo se le puede asociar un espacio de Stone de la siguiente manera: sea L un retículo distributivo y sea $X(L)$ el conjunto de todos los ideales primos de L. Para cada $a \in L$, definimos el conjunto $\varphi_L(a) = \{P \in X(L) \ : \ a \notin P\}$. Se define una topología sobre $X(L)$ considerando a la familia $\mathcal{K}_L = \{\varphi_L(a)^c \ : \ a \in L\}$ como una base para la misma. Resulta que el espacio topológico $\langle X(L), \mathcal{K}_L \rangle$ es un espacio de Stone donde los subconjuntos abiertos y compactos son exactamente los miembros de $\mathcal{K}_L \cup \{\emptyset\}$. Luego, si $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo entre los retículos distributivos L_1 y L_1, entonces la aplicación $X(h) : X(L_2) \to X(L_1)$ dada por $X(h)(P) = h^{-1}(P)$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{SS}$. De esta manera, tenemos definido un funtor contravariante $\mathbb{X} : \mathcal{DL} \to \mathcal{SS}$.

Si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio de Stone, denotemos por $D(X)$ a la colección formada por los complementos de todos los abiertos y compactos de X munido con el conjunto vacío. Así, $D(X)$ es un retículo distributivo y si $f : X_1 \to X_2$ es una función de Stone, entonces la aplicación $D(f) : D(X_2) \to D(X_1)$ dada por $D(f)(U) = f^{-1}(U)$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{DL}$. Por lo tanto, tenemos definido un funtor contravariante $\mathbb{D} : \mathcal{SS} \to \mathcal{DL}$.

Si L es un retículo distributivo, entonces la función $\varphi_L : L \to D(X(L))$ es un isomorfismo en $\mathcal{DL}$. De manera análoga, si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio de Stone, entonces la aplicación $H_X : X \to X(D(X))$ dada por $H(x) = \{U \in D(X) \ : \ x \notin U\}$ es un isomorfismo en $\mathcal{SS}$.

Teorema 1.5.2. ***(Stone)*** *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}$ y $\mathbb{D}$ establecen una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{DL}$ y $\mathcal{SS}$.*

Si L es un retículo distributivo entonces L tiene último elemento si y sólo si $X(L)$ es compacto y L tiene primer elemento si y sólo si el conjunto vacío, $\emptyset$, satisface la siguiente condición: para cada familia no vacía de abiertos y compactos $\mathcal{U}$, si $\bigcap \{U \ : \ U \in \mathcal{U}\} = \emptyset$ entonces existe una subfamilia finita $\mathcal{G}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\bigcap \{G \ : \ G \in \mathcal{G}\} = \emptyset$.

Capítulo 2

N-álgebras

Es un hecho bien conocido que las álgebras de Tarski, o también conocidas como álgebras de implicación [40], son la contrapartida algebraica del fragmento implicativo de la Lógica Proposicional Clásica. Una presentación alternativa a la dada en la Definición 1.2.5 a través de una base ecuacional en términos de la implicación, es utilizando el concepto de filtro principal dado por Abbott en [2]. Para ser más precisos, Abbott establece una correspondencia biyectiva entre la clase de las álgebras de Tarski y la clase de los $\vee$-semirretículos con último elemento donde cada filtro principal es un álgebra de Boole respecto al orden inducido. Existe una estructura que generaliza a las álgebras de Tarski: las *N-álgebras*. Una N-álgebra es un $\vee$-semirretículo con último elemento donde cada filtro principal es un retículo acotado respecto al orden inducido. Exigiendo que cada filtro principal sea un retículo distributivo acotado, obtenemos una clase particular de N-álgebras llamadas *DN-álgebras*. Dichas estructuras fueron estudiadas por diversos autores. En principio por Cornish y Hickman en [29] y [35] y posteriormente por Chajda, Kolařík, Halaš y Kühr en [24], [25], [26], [23] y [34]. También Araújo y Kinyon estudiaron las DN-álgebras en [3] y recientemente Celani y Calomino en [19], [20] y [11].

En este capítulo introducimos las estructuras algebraicas que son motivo de estudio de la presente tesis y exponemos los resultados más importantes. Nos centramos en la clase de los $\vee$-semirretículos con último elemento, o de ahora en más, simplemente semirretículos. Por una cuestión de claridad, primero definimos a las N-álgebras y DN-álgebras en términos no ecuacionales, sin embargo, veremos que estas álgebras admiten una presentación equivalente en términos de una operación ternaria por medio de un conjunto finito de ecuaciones.

Gran parte de las demostraciones de este capítulo se pueden ver en [23] y [29].

2.1 Base ecuacional

Definición 2.1.1. Sea S un semirretículo. Diremos que S es una *N-álgebra* si para cada $a \in S$, el filtro principal $[a) = \{x \in S : a \leq x\}$ es un retículo acotado respecto al orden inducido.

Dado que el ínfimo se encuentra definido solamente en los correspondientes filtros principales de S, podemos indicar este hecho con un subíndice, es decir, $\wedge_a$ denota el ínfimo en $[a)$. Notemos que si $x, y \in [a)$ y $b \leq a$, entonces $x, y \in [b)$ y $x \wedge_a y = x \wedge_b y$ dado que ambos son considerados respecto al orden inducido. El ínfimo no está definido sobre toda el álgebra y así las N-álgebras parecen ser solamente álgebras parciales, sin embargo, pueden ser consideradas como álgebras totales con una operación ternaria m. Observemos que si $a \in S$ y $x, y \in [a)$, entonces el elemento $(x \vee a) \wedge_a (y \vee a)$ se encuentra bien definido, pues $x \vee a, y \vee a \in [a)$ y $[a)$ es un retículo. De esta forma, podemos definir una operación

$$m : S \times S \times S \to S$$

como

$$m(x, y, a) = (x \vee a) \wedge_a (y \vee a) . \tag{2.1}$$

Hickman en [35] y, de manera independiente, Chajda y Kolařík en [26] proponen dos bases ecuacionales por separado y muestran que la clase de las N-álgebras pueden ser tratadas como álgebras totales en términos de la operación ternaria m, formando así una variedad. Más tarde, en [3], los autores muestran la redundancia de ciertas ecuaciones y prueban que la variedad de las N-álgebras pueden caracterizarse con un sistema axiomático más reducido. Expondremos en esta sección solamente la base ecuacional propuesta por Chajda y Kolařík, desarrollándose de forma análoga los resultados obtenidos en [35]. Vale mencionar que Hickman llama a las N-álgebras con el nombre de *supremo álgebras* y trabaja con la noción dual, es decir, con $\wedge$-semirretículos donde todo ideal principal es un retículo y utiliza una notación diferente para ordenar las variables. Nuestra notación $m(x, y, a)$ es para Hickman $j(x, a, y)$. Veamos que la operación m formaliza totalmente a las N-álgebras.

Proposición 2.1.2. *Sea S una N-álgebra. Sea m la operación ternaria 2.1. Entonces se satisfacen las siguientes identidades:*

1. $m(x, y, x) = x$,

2. $m(x, x, y) = m(y, y, x)$,

3. $m\left(m\left(x,x,y\right),m\left(x,x,y\right),z\right)=m\left(x,x,m\left(y,y,z\right)\right)$,

4. $m\left(x,y,z\right)=m\left(y,x,z\right)$,

5. $m\left(m\left(x,y,z\right),w,z\right)=m\left(x,m\left(y,w,z\right),z\right)$,

6. $m\left(x,m\left(y,y,x\right),z\right)=m\left(x,x,z\right)$,

7. $m\left(x,x,m\left(x,y,z\right)\right)=m\left(x,x,z\right)$,

8. $m\left(m\left(x,x,z\right),m\left(y,y,z\right),z\right)=m\left(x,y,z\right)$,

9. $m\left(x,x,1\right)=1$.

Demostración. Probemos únicamente los puntos *2.*,*3.*,*5.* y *6.* Claramente

$$\begin{array}{rcccl} m\left(x,x,y\right) & = & \left(x\vee y\right)\wedge_y\left(x\vee y\right) & = & x\vee y\\ & = & \left(y\vee x\right)\wedge_x\left(y\vee x\right) & = & m\left(y,y,x\right)\end{array}$$

lo cual verifica el punto *2.* Para el punto *3.* notemos que

$$\begin{array}{rcccl} m\left(m\left(x,x,y\right),m\left(x,x,y\right),z\right) & = & m\left(x,x,y\right)\vee z & = & x\vee y\vee z\\ & = & x\vee m\left(y,y,z\right) & = & m\left(x,x,m\left(y,y,z\right)\right).\end{array}$$

El punto *5.* se sigue de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcccl} m\left(m\left(x,y,z\right),w,z\right) & = & \left(m\left(x,y,z\right)\vee z\right)\wedge_z\left(w\vee z\right) & = & m\left(x,y,z\right)\wedge_z\left(w\vee z\right)\\ & = & \left(x\vee z\right)\wedge_z\left(y\vee z\right)\wedge_z\left(w\vee z\right) & = & \left(x\vee z\right)\wedge_z m\left(y,w,z\right)\\ & = & \left(x\vee z\right)\wedge_z\left(m\left(y,w,z\right)\vee z\right) & = & m\left(x,m\left(y,w,z\right),z\right).\end{array}$$

Por último, para el punto *6.* tenemos que

$$\begin{array}{rcccl} m\left(x,m\left(y,y,x\right),z\right) & = & \left(x\vee z\right)\wedge_z\left(m\left(y,y,x\right)\vee z\right) & = & \left(x\vee z\right)\wedge_z\left(x\vee y\vee z\right)\\ & = & x\vee z & = & m\left(x,x,z\right).\end{array}$$

■

Si S es una N-álgebra, denotaremos como $\mathcal{A}\left(S\right)$ al álgebra asociada $\langle S,m,1\rangle$ que tiene como soporte a S, m la operación ternaria 2.1 y a 1 como último elemento. Supongamos ahora que $\langle A,m,1\rangle$ es un álgebra de tipo $(3,0)$ que satisface las identidades *1.*$-$*3.* de la Proposición 2.1.2 y definimos $x\vee y=m\left(x,x,y\right)$. Entonces fácilmente se prueba que A es un semirretículo, pues la operación es idempotente por *1.*, conmutativa por *2.* y asociativa por *3.* Luego, podemos introducir el orden inducido $\leq$ como

$$x \leq y \text{ si y sólo si } m(x, x, y) = y.$$

Se sigue que $x \vee y$ es el supremo de x e y respecto a $\leq$. Denotaremos como $\mathcal{S}(A)$ al semirretículo asociado al álgebra A.

Teorema 2.1.3. *Sea $\langle A, m, 1\rangle$ un álgebra de tipo $(3,0)$ que satisface las identidades* $1.-9.$ *de la Proposición 2.1.2. Si para cada $a \in A$ y $x, y \in [a)$ se define*

$$x \wedge_a y = m(x, y, a),$$

entonces $\mathcal{S}(A)$ es una N-álgebra.

Demostración. Sea $a \in A$. Probemos que la estructura $\langle [a), \vee, \wedge_a, a, 1\rangle$ es un retículo acotado donde el supremo y el ínfimo se definen como

$$x \vee y = m(x, x, y)$$

y

$$x \wedge_a y = m(x, y, a),$$

respectívamente. Dado que $\mathcal{S}(A)$ es un semirretículo, solamente nos queda por demostrar algunos de los puntos de la Definición 1.2.1. Sean $x, y, z \in [a)$. Entonces se sigue que $x \wedge_a x = m(x, x, a) = x \vee a = x$, lo cual muestra la idempotencia del ínfimo. Luego,

$$(x \wedge_a y) \wedge_a z = m(m(x, y, a), z, a) = m(x, m(y, z, a), a) = x \wedge_a (y \wedge_a z)$$

y

$$x \wedge_a y = m(x, y, a) = m(y, x, a) = y \wedge_a x$$

utilizando los puntos *5.* y *4.*, respectivamente. Además,

$$\begin{array}{rcl}
x \wedge_a (x \vee y) & = & m(x, x \vee y, a) \quad = \quad m(x, m(y, y, x), a) \\
& = & m(x, x, a) \qquad\quad\; = \quad x \vee a \\
& = & x
\end{array}$$

por el punto *6.*, y por el punto *7.* tenemos que

$$x \vee (x \wedge_a y) \;=\; x \vee m(x, y, a) \;=\; m(x, x, m(x, y, a)) \;=\; m(x, x, a) \;=\; x.$$

También $x \vee 1 = m(x, x, 1) = 1$ por el punto *9.*, probando así que 1 es el último elemento de $\mathcal{S}(A)$. Entonces resulta que $\langle [a), \vee, \wedge_a, a, 1\rangle$ es un retículo acotado. ■

A cada N-álgebra S le hemos asociado un álgebra ternaria $\mathcal{A}(S)$ y recíprocamente, a cada álgebra ternaria $\langle A, m, 1\rangle$ le hemos asociado una N-álgebra $\mathcal{S}(A)$. Veamos que dichas asignaciones son mutuamente inversas.

Teorema 2.1.4. *Si S es una N-álgebra, entonces $\mathcal{S}(\mathcal{A}(S)) = S$ y si $\langle A, m, 1\rangle$ es un álgebra de tipo $(3, 0)$ que satisface las identidades $1.-9.$ de la Proposición 2.1.2, entonces $\mathcal{A}(\mathcal{S}(A)) = A$.*

Demostración. Denotemos a la operación del supremo de $\mathcal{S}(\mathcal{A}(S))$ como $\vee^*$. Entonces

$$x \vee^* y = m(x, x, y) = (x \vee y) \wedge_y (x \vee y) = x \vee y$$

y por lo tanto $\mathcal{S}(\mathcal{A}(S)) = S$. Por otro lado, sea $\langle A, m, 1\rangle$ un álgebra de tipo $(3, 0)$ que satisface las identidades *1.−9.* de la Proposición 2.1.2. Si denotamos a la operación ternaria de $\mathcal{A}(\mathcal{S}(A))$ como m^*, entonces por el punto *8.* tenemos que

$$m^*(x, y, z) = (x \vee z) \wedge_y (y \vee z) = m(m(x, x, z), m(y, y, z), z) = m(x, y, z),$$

probando así que $\mathcal{A}(\mathcal{S}(A)) = A$. ■

La Proposición 2.1.2 y los Teoremas 2.1.3 y 2.1.4 muestran una equivalencia entre las N-álgebras y álgebras con una operación ternaria satisfaciendo una serie de ecuaciones. Se deduce que la clase de las N-álgebras forman una variedad lo cual denotaremos como $\mathcal{N}$. Tenemos así, dos alternativas para trabajar con las N-álgebras y vamos a usar una u otra respecto a nuestra conveniencia. Como comentamos anteriormente, Araújo y Kinyon en [3] muestran una serie de resultados respecto a la dependencia de los sistemas de axiomas propuestos por Hickman y Chajda-Kolařík. No solamente observan que dichos sistemas son dependientes y los reducen, sino también exhiben una base ecuacional de identidades independientes.

Teorema 2.1.5. *Las siguientes identidades forman una base para la variedad $\mathcal{N}$:*

1. $m(x, y, x) = x$,

2. $m(m(x, y, z), m(y, m(u, x, z), z), w) = m(w, w, m(y, m(x, u, z), z))$,

3. $m(x, x, 1) = 1$.

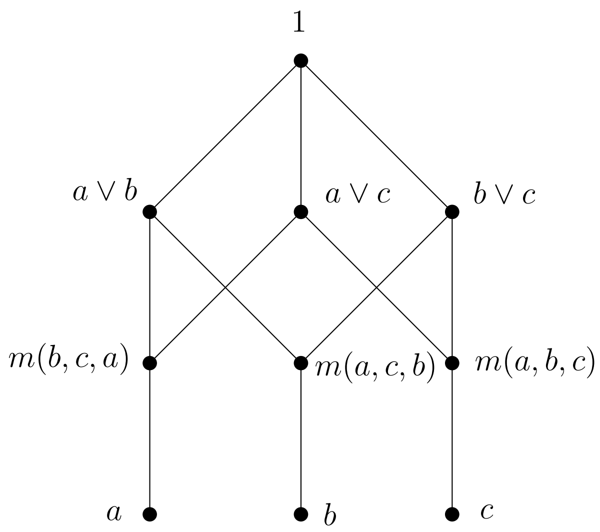
El siguiente ejemplo es crucial en la teoría de representación de las N-álgebras como podremos ver más adelante.

Ejemplo 2.1.1. Si $\langle X, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces la terna $\langle \mathcal{P}_d (X), m, X \rangle$ es una N-álgebra donde la operación ternaria m se encuentra definida como

$$m(A, B, C) = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2.2}$$

para cada $A, B, C \in \mathcal{P}_d (X)$.

Ejemplo 2.1.2. La siguiente figura es un ejemplo de N-álgebra:



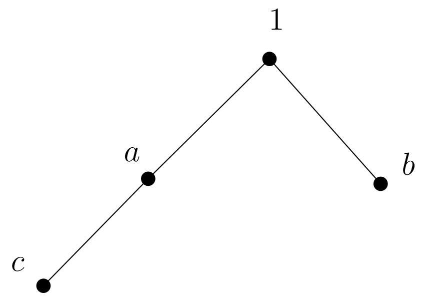
2.2 DN-álgebras

Los retículos distributivos forman una importante subvariedad de la variedad de los retículos y existen varias formas de caracterizarlos. Por ejemplo, un retículo es distributivo si y sólo si el retículo de sus filtros es distributivo o si todo ideal propio puede escribirse como intersección de ideales primos. En esta sección, dividida en varias subsecciones, introducimos la noción de distributividad para la clase de las N-álgebras, lo cual son una generalización de la respectiva noción en retículos, y estudiamos algunas equivalencias. También presentamos algunos resultados relevantes sobre ideales, filtros, homomorfismos y congruencias.

Definición 2.2.1. Sea A una N-álgebra. Diremos que A es una *DN-álgebra* si para cada $a \in A$, el filtro principal $[a)$ es un retículo distributivo acotado.

Observemos que un retículo L con último elemento es distributivo si y sólo si es distributivo como N-álgebra. Sin embargo, una DN-álgebra no necesariamente es un semirretículo distributivo. Se sigue que la N-álgebra del Ejemplo 2.1.2 es una DN-álgebra pero no es un semirretículo distributivo.

Ejemplo 2.2.1. Un ejemplo sencillo de DN-álgebra el cual no es un álgebra de Tarski se puede ver en la siguiente figura:



Tendremos en cuenta este simple ejemplo y lo analizaremos a lo largo de la tesis.

Teorema 2.2.2. *Sea A una N-álgebra. Entonces A es una DN-álgebra si y sólo si satisface algunas de las siguientes identidades:*

1. $m(x, m(y, y, z), w) = m(m(x, y, w), m(x, y, w), m(x, z, w))$,
2. $m(x, x, m(y, z, w)) = m(m(x, x, y), m(x, x, z), w)$.

Demostración. Si A es una DN-álgebra, entonces

$$\begin{aligned} m(x, m(y, y, z), w) &= (x \vee w) \wedge_w (y \vee z \vee w) \\ &= ((x \vee w) \wedge_w (y \vee w)) \vee ((x \vee w) \wedge_w (z \vee w)) \\ &= m(x, y, w) \vee m(x, z, w) \\ &= m(m(x, y, w), m(x, y, w), m(x, z, w)) \end{aligned}$$

probando así el punto *1*. De la misma forma,

$$\begin{aligned} m(x, x, m(y, z, w)) &= x \vee ((y \vee w) \wedge_w (z \vee w)) \\ &= (x \vee w) \vee ((y \vee w) \wedge_w (z \vee w)) \\ &= (x \vee y \vee w) \wedge_w (x \vee z \vee w) \\ &= m(x \vee y, x \vee z, w) \\ &= m(m(x, x, y), m(x, x, z), w) \end{aligned}$$

se prueba el punto *2.* Recíprocamente, supongamos que A satisface el punto *1.* Sea $a \in S$ y $x, y, z \in [a)$. Entonces

$$\begin{aligned} x \wedge_a (y \vee z) &= (x \vee a) \wedge_a (y \vee z \vee a) &&= m(x, m(y, y, z), a) \\ &= m(m(x, y, a), m(x, y, a), m(x, z, a)) &&= m(x, y, a) \vee m(x, z, a) \\ &= (x \wedge_a y) \vee (x \wedge_a z). \end{aligned}$$

Así, $\langle [a), \vee, \wedge_a, a, 1 \rangle$ es un retículo distributivo acotado y A es una DN-álgebra. De manera análoga, si A satisface el punto *2.*, entonces $x \vee (y \wedge_a z) = (x \vee y) \wedge_a (x \vee z)$ para cada $a \in A$ y $x, y, z \in [a)$. ■

Denotaremos como $\mathcal{DN}$ a la variedad de las DN-álgebras. Luego, $\mathcal{DN}$ es una subvariedad de $\mathcal{N}$. A su vez, las álgebras de Tarski forman una subvariedad de $\mathcal{DN}$.

Teorema 2.2.3. *Sea A una DN-álgebra. Entonces A es un álgebra de Tarski si y sólo si existe una operación binaria c sobre A tal que cumple las siguientes identidades:*

1. $m(c(y, x), c(y, x), x) = c(y, x)$,
2. $m(m(y, y, x), m(y, y, x), c(y, x)) = 1$,
3. $m(m(y, y, x), c(y, x), x) = x$.

Demostración. Supongamos que A es un álgebra de Tarski. Como cada filtro principal es un álgebra de Boole, entonces para cada $x \in A$ e $y \in [x)$ existe su complemento en $[x)$ que denotaremos como $c(y, x)$. Claramente se cumple el punto *1.* Además,

$$\begin{aligned} m(m(y, y, x), m(y, y, x), c(y, x)) &= m(y, y, x) \vee c(y, x) \\ &= y \vee c(y, x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m(m(y, y, x), c(y, x), x) &= (m(y, y, x) \vee x) \wedge_x (c(y, x) \vee x) \\ &= y \wedge_x c(y, x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que existe una operación binaria c sobre A que satisface los puntos *1.*,*2.* y *3.* Sea $x \in A$ e $y \in [x)$. Del punto *1.* tenemos que

$$c(y, x) = m(c(y, x), c(y, x), x) = c(y, x) \vee x,$$

es decir, $c(y,x) \in [x)$. De *2.* y *3.* se sigue que $y \vee c(y,x) = 1$ e $y \wedge_x c(y,x) = x$. Entonces $c(y,x)$ es el complemento de y en $[x)$ y A es un álgebra de Tarski. ■

2.2.1 Ideales y filtros

En esta subsección mencionamos algunas propiedades de los ideales, los filtros y los filtros finitamente generados de una DN-álgebra. También extendemos el clásico Teorema del Ideal Primo a la variedad de las DN-álgebras, teniendo así, un importante teorema de representación que nos será de utilidad en los capítulos próximos.

Sea A una DN-álgebra. Si $a \in A$ y $J \in \mathrm{Id}(A)$, es sencillo de comprobar que el ideal generado por $J \cup \{a\}$ es el conjunto

$$J \vee (a] = I(J \cup \{a\}) = \{x \in A \ : \ \exists i \in I \ \ (x \leq i \vee a)\}.$$

Lema 2.2.4. *Sea A una DN-álgebra y sea $P \in \mathrm{Id}(A)$.*

1. *Si P es irreducible, entonces P es primo.*
2. *Si P es maximal, entonces P es primo.*
3. *P es maximal si y sólo si para cada $a \in A$, si $a \notin P$ entonces $I(P \cup \{a\}) = A$.*

Demostración. *1.* Sea P un ideal irreducible. Sean $a, b \in A$ tal que existe $a \wedge b$ y $a \wedge b \in P$. Entonces $(a \wedge b] = (a] \cap (b] \subseteq P$. Probemos que $(P \vee (a]) \cap (P \vee (b]) = P \vee ((a] \cap (b])$. Si $x \in (P \vee (a]) \cap (P \vee (b])$, entonces existen $p_1, p_2 \in P$ tal que $x \leq p_1 \vee a$ y $x \leq p_2 \vee b$. Como P es un ideal, $p = p_1 \vee p_2 \in P$ y $p \vee a, p \vee b \in [x)$. Luego, al ser $[x)$ un retículo distributivo acotado, $x \leq (p \vee a) \wedge_x (p \vee b) = p \vee (a \wedge b)$. Así, $x \in I(P \cup \{a \wedge b\}) = P \vee ((a] \cap (b])$. La otra inclusión es inmediata. Por lo tanto, $P = (P \vee (a]) \cap (P \vee (b])$ y $a \in P$ o $b \in P$, es decir, P es primo.

2. Claramente todo ideal maximal es irreducible. Entonces *2.* se sigue de *1.*

3. Si P es maximal, se sigue fácilmente que $I(P \cup \{a\}) = A$ para cada $a \notin P$. De forma recíproca, supongamos que existe $Q \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $P \subset Q$, es decir, existe $a \in Q - P$. Si $b \in A$, entonces $b \in I(P \cup \{a\})$. Luego, existe $p \in P$ tal que $b \leq p \vee a$, pero como $p \vee a \in Q$ y Q es un ideal, tenemos que $b \in Q$. Por lo tanto $Q = A$ y P es maximal. ■

Observación 2.2.5. Notemos que la condición de primalidad de un ideal I es equivalente a que para todo $x, y, a \in A$, si $m(x,y,a) \in I$ entonces $x \in I$ o $y \in I$.

El Teorema del Ideal Primo es un resultado de gran importancia en la teoría de retículos distributivos y fue extendido a la variedad de las DN-álgebras por Halaš en [34]. A continuación veremos dicho teorema, que es de fundamental relevancia para el desarrollo de una teoría de representación topológica.

Teorema 2.2.6. *Sea A una DN-álgebra. Sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ y sea $F \in \mathrm{Fi}(A)$ tal que $I \cap F = \emptyset$. Entonces existe $P \in X(A)$ tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{H \in \mathrm{Id}(A) \ : \ I \subseteq H \text{ y } H \cap F = \emptyset\}.$$

Como $I \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Es claro que la unión de una cadena de elementos de $\mathcal{F}$ está también en $\mathcal{F}$. Así, por el Lema de Zorn, existe un ideal maximal P tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \emptyset$. Probemos que P es primo. Por la Observación 2.2.5, supongamos que $m(x, y, a) \in P$ pero $x \notin P$ e $y \notin P$. Notemos que $a \in P$. Como $x, y \notin P$ se sigue que $I(P \cup \{x\}) \cap F \neq \emptyset$ e $I(P \cup \{y\}) \cap F \neq \emptyset$, es decir, existen $g, h \in F$ y existen $p, q \in P$ tal que $g \leq p \vee x$ y $h \leq q \vee y$. Así, $p \vee x, q \vee y \in F$ y $m(p \vee x, q \vee y, a) \in F$. Utilizando la distributividad del retículo $[a)$ tenemos que

$$\begin{aligned} m(p \vee x, q \vee y, a) &= (p \vee x \vee a) \wedge_a (q \vee y \vee a) \\ &= ((p \vee a) \wedge_a (q \vee a)) \vee ((p \vee a) \wedge_a (y \vee a)) \vee \\ &\quad \vee ((x \vee a) \wedge_a (q \vee a)) \vee ((x \vee a) \wedge_a (y \vee a)) \\ &= m(p, q, a) \vee m(p, y, a) \vee m(x, q, a) \vee m(x, y, a). \end{aligned}$$

Como $m(x, y, a) \in P$ y $p, q, a \in P$ se tiene que $m(p, q, a), m(p, y, a), m(x, q, a) \in P$. Por lo tanto, $m(p \vee x, q \vee y, a) \in P$ y $m(p \vee x, q \vee y, a) \in P \cap F$, lo cual es una contradicción pues $P \cap F = \emptyset$. Por lo tanto, P es primo. ■

Los siguientes corolarios son consecuencia inmediata del Teorema 2.2.6.

Corolario 2.2.7. *Sea A una DN-álgebra. Para todo $a, b \in A$ tal que $a \nleq b$, existe $P \in X(A)$ tal que $b \in P$ y $a \notin P$.*

Corolario 2.2.8. *Sea A una DN-álgebra. Entonces todo ideal propio de A es intersección de ideales primos.*

Dado un semirretículo, en la Sección 1.2 del Capítulo 1 recordamos el concepto de filtro generado por un subconjunto no vacío. Para el caso de las DN-álgebras, tenemos el siguiente resultado el cual caracteriza a los filtros generados y que puede deducirse de los resultados dados en [29].

Lema 2.2.9. *Sea A una DN-álgebra y sea X un subconjunto no vacío de A. Entonces*

$$F(X) = \{a \in A \ : \ \exists x_1, ..., x_n \in [X) \ \exists x_1 \wedge ... \wedge x_n \ \ (x_1 \wedge ... \wedge x_n = a)\}.$$

Demostración. Sea

$$G = \{a \in A \ : \ \exists x_1, ..., x_n \in [X) \ \exists x_1 \wedge ... \wedge x_n \ \ (x_1 \wedge ... \wedge x_n = a)\}.$$

Claramente $X \subseteq G$ y G es no vacío, pues $1 \in G$. Probemos que G es un filtro de A. Sea $b \in A$ y $a \in G$ tal que $a \leq b$. Entonces existen $x_1, ..., x_n \in [X)$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = a$. Así, $a \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$ y $x_1, ..., x_n, b \in [a)$. Como $[a)$ es un retículo distributivo acotado,

$$b = b \vee a = b \vee (x_1 \wedge ... \wedge x_n) = (b \vee x_1) \wedge ... \wedge (b \vee x_n).$$

Entonces $b \vee x_1, ..., b \vee x_n \in [X)$ y $b \in G$. Sean $a, b \in G$ tal que existe $a \wedge b$. Entonces existen $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in [X)$ tal que existen $x_1 \wedge ... \wedge x_n, y_1 \wedge ... \wedge y_m, x_1 \wedge ... \wedge x_n = a$ e $y_1 \wedge ... \wedge y_m = b$. Se sigue que $a \wedge b = x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge y_1 \wedge ... \wedge y_m$ y $a \wedge b \in G$. Entonces G es un filtro y $F(X) \subseteq G$. Sea $H \in \mathrm{Fi}(A)$ tal que $X \subseteq H$. Sea $a \in G$. Entonces existen $x_1, ..., x_n \in [X)$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = a$. Así, $x_1, ..., x_n \in H$ y como H es un filtro, $x_1 \wedge ... \wedge x_n = a \in H$. Por lo tanto, $G \subseteq H$ y $F(X) = G$. ■

Es bien sabido que la distributividad de un retículo queda caracterizada a través de la distributividad del retículo de sus filtros. Existe un resultado análogo para las DN-álgebras [23].

Teorema 2.2.10. *Sea A una N-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una DN-álgebra.*
2. *$\langle \mathrm{Fi}(A), \vee, \cap, \{1\}, A\rangle$ es un retículo distributivo acotado.*
3. *$\langle \mathrm{Fi}_f(A), \vee, \cap, \{1\}, A\rangle$ es un retículo distributivo acotado.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Por el Lema 2.2.9 tenemos que para cada $F, G \in \mathrm{Fi}(A)$,

$$F \vee G = \{a \in A \ : \ \exists x_1, ..., x_n \in F \cup G \ \exists x_1 \wedge ... \wedge x_n \ \ (x_1 \wedge ... \wedge x_n = a)\}, \quad (2.3)$$

es decir, $F \vee G$ consiste de todos los ínfimos finitos existentes de elementos de $F \cup G$. Sean $F, G, H \in \mathrm{Fi}(A)$. Siempre vale la inclusión $(F \cap G) \vee (F \cap H) \subseteq F \cap (G \vee H)$. Sea $a \in F \cap (G \vee H)$. Entonces $a \in F$ y existen $x_1, ..., x_n \in G \cup H$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = a$. Luego, como $[a)$ es un retículo distributivo acotado,

$$a = a \vee (x_1 \wedge ... \wedge x_n) = (a \vee x_1) \wedge ... \wedge (a \vee x_1)$$

donde cada $a \vee x_i \in F \cap G$ o $a \vee x_i \in F \cap H$. Así, $a \in (F \cap G) \vee (F \cap H)$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Se sigue que el supremo de dos filtros finitamente generados es un filtro finitamente generado. Bastará con probar que la intersección de dos filtros finitamente generados es nuevamente un filtro finitamente generado. Si $G, H \in \mathrm{Fi}_f(A)$, entonces existen $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in A$ tal que $G = F(\{x_1, ..., x_n\})$ y $H = F(\{y_1, ..., y_m\})$. Por la distributividad de $\mathrm{Fi}(A)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F(\{x_1, ..., x_n\}) \cap F(\{y_1, ..., y_m\}) &= ([x_1) \vee ... \vee [x_n)) \cap ([y_1) \vee ... \vee [y_m)) \\ &= \bigvee \{[x_i) \cap [y_j) \ : \ 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m\} \\ &= F(\{x_i \vee y_j \ : \ 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m\}). \end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ *1.* Observemos primero que de 2.3 tenemos el siguiente caso paticular

$$[x) \vee [y) = \{a \in A \ : \ \exists z_1, ..., z_n \in [x) \cup [y) \ \exists z_1 \wedge ... \wedge z_n \ (z_1 \wedge ... \wedge z_n = a)\},$$

y si existe $x \wedge y$, entonces $[x) \vee [y) = [x \wedge y)$.

Sea $a \in A$ y sean $x, y, z \in [a)$. Entonces, de la identidad

$$\begin{aligned} [x \vee (y \wedge z)) &= [x) \cap ([y) \vee [z)) \\ &= ([x) \cap [y)) \vee ([x) \cap [z)) \\ &= [(x \vee y) \wedge (x \vee z)) \end{aligned}$$

se tiene que $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Por lo tanto, $\langle [a), \vee, \wedge_a, a, 1 \rangle$ es un retículo distributivo acotado y A es una DN-álgebra. ■

Observación 2.2.11. Si A es una DN-álgebra, entonces la intersección de un filtro finitamente generado con un filtro principal, es principal. En efecto, sea $G \in \mathrm{Fi}_f(A)$ y $[a)$ un filtro principal de A. Entonces existe un subconjunto no vacío finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de A tal que $G = F(\{x_1, ..., x_n\})$. Se sigue que la intersección es un filtro finitamente generado, es decir, existe un subconjunto $\{y_1, ..., y_m\}$ de A tal que

$$F(\{x_1, ..., x_n\}) \cap [a) = F(\{y_1, ..., y_m\}).$$

Como $F(\{x_1, ..., x_n\}) \cap [a) \subseteq [a)$, tenemos que a es una cota inferior de $y_1, ..., y_m$, lo cual implica que existe $y_1 \wedge ... \wedge y_m$. Luego, $F(\{x_1, ..., x_n\}) \cap [a) = [y_1 \wedge ... \wedge y_m)$.

2.2.2 Ideales Optimales

Con el objetivo de presentar nuevas caracterizaciones de la distributividad de una DN-álgebra, presentamos, en principio, nuevas clases de ideales y filtros, pero que en el caso de las DN-álgebras ya son conocidas.

Definición 2.2.12. Sea A una N-álgebra.

1. Diremos que un subconjunto F de A es un *filtro de orden* si es no vacío, creciente y para cada $a, b \in F$, existe $c \in F$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$.

2. Diremos que un subconjunto F de A es un *filtro de Frink* si para cada $a_1, ..., a_n \in F$ y cada $a \in A$, si $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq (a]$, entonces $a \in F$.

Denotaremos al conjunto de todos los filtros de orden y filtros de Frink de A como $\mathrm{Fi}_{Or}(A)$ y $\mathrm{Fi}_F(A)$, respectivamente. Todo filtro de orden y filtro de Frink es, en particular, un filtro. Si X es un subconjunto de A, podemos dar una descripción explícita del filtro de Frink generado por X como

$$F_F(X) = \{a \in A \ : \ \exists x_1, ..., x_n \in X \ \ ((x_1] \cap ... \cap (x_n] \subseteq (a])\}.$$

Definición 2.2.13. Sea A una N-álgebra.

1. Diremos que un subconjunto I de A es un *ideal de Frink* si para cada $a_1, ..., a_n \in I$ y cada $a \in A$, si $[a_1) \cap ... \cap [a_n) \subseteq [a)$, entonces $a \in I$.

2. Diremos que un ideal de Frink I es *optimal* si su complemento es un filtro de Frink, es decir, si para cada $a_1, ..., a_n \notin I$ y cada $a \in A$, si $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq (a]$, entonces $a \notin I$.

Denotaremos al conjunto de todos los ideales de Frink e ideales optimales como $\mathrm{Id}_F(A)$ e $\mathrm{Id}_{Op}(A)$, respectivamente. Notemos que los ideales de Frink son justamente los ideales de A y que $\mathrm{Id}_{Op}(A) \subseteq X(A)$. De manera análoga a los filtros de Frink, podemos caracterizar el ideal de Frink generado por un subconjunto X de A de la siguiente manera

$$I_F(X) = \{a \in A \ : \ \exists x_1, ..., x_n \in X \ \ ([x_1) \cap ... \cap [x_n) \subseteq [a))\}.$$

El siguiente resultado generaliza el Teorema del Ideal Primo y nos permite separar ideales de Frink y filtros de orden a través de ideales irreducibles.

Teorema 2.2.14. *Sea A una N-álgebra. Sea $I \in \mathrm{Id}_F(A)$ y sea $F \in \mathrm{Fi}_{Or}(A)$ tal que $I \cap F = \emptyset$. Entonces existe $P \in \mathrm{Irr}(A)$ tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \emptyset$.*

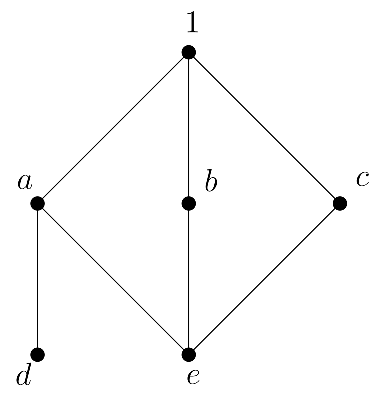
Demostración. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{H \in \mathrm{Id}_F(A) \ : \ I \subseteq H \text{ y } H \cap F = \emptyset\}.$$

Entonces $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y la unión de una cadena de elementos de $\mathcal{F}$ está también en $\mathcal{F}$. Por el Lema de Zorn, existe un ideal de Frink maximal P tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \emptyset$. Probemos que P es irreducible. Sean $I_1, I_2 \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $P = I_1 \cap I_2$. Supongamos que $P \subset I_1$ y $P \subset I_2$, es decir, que existen $a, b \in A$ tal que $a \in I_1 - P$ y $b \in I_2 - P$. Tomemos los ideales de Frink $I_F(P \cup \{a\})$ y $I_F(P \cup \{b\})$. Claramente $I_F(P \cup \{a\}) \cap F \neq \emptyset$ y $I_F(P \cup \{b\}) \cap F \neq \emptyset$, lo cual implica que existen $x, y \in F$ y $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in P$ tal que $[x_1) \cap ... \cap [x_n) \cap [a) \subseteq [x)$ y $[y_1) \cap ... \cap [y_m) \cap [b) \subseteq [y)$. Como F es un filtro de orden, existe $f \in F$ tal que $f \leq x$ y $f \leq y$. Luego, $x_1, ..., x_n, a \in I_1$ y al ser I_1 un ideal, en particular un ideal de Frink, se sigue que $x \in I_1$ y por lo tanto $f \in I_1$. Razonando de manera análoga, $y_1, ..., y_m, b \in I_2$ y al ser I_2 un ideal de Frink, tenemos que $f \in I_1$. Así, $f \in I_1 \cap I_2 = P$ lo cual es una contradicción. Concluimos que P es irreducible. ■

No todo ideal irreducible es necesariamente un ideal optimal en una N-álgebra, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Sea A la N-álgebra de la siguiente figura:



Notemos que $I = \{a, d, e\}$ es un ideal irreducible de A el cual no es un ideal optimal, pues $I^c = \{1, b, c\}$ no es un filtro de Frink ya que $(b] \cap (c] \subseteq (a]$ y $a \notin I^c$.

Lema 2.2.15. *Sea A una DN-álgebra y sea $I \in \mathrm{Id}(A)$. Entonces I es primo si y sólo si es optimal.*

Demostración. Solamente necesitamos probar que todo ideal primo es optimal. Sea $P \in X(A)$, $a \in A$ y $a_1, ..., a_n \notin P$ tal que $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq (a]$. Supongamos que $a \in P$. Como $a \leq a \vee a_i$ para cada $i = 1, ..., n$ y $[a)$ es un retículo distributivo acotado, entonces $a \leq (a \vee a_1) \wedge_a ... \wedge_a (a \vee a_n)$. Como $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq (a]$, se sigue que $a = (a \vee a_1) \wedge_a ... \wedge_a (a \vee a_n)$ y al ser P un ideal primo, existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ y $a \vee a_i \in P$. Luego, $a_i \in P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, P es optimal. ■

Veamos algunas caracterizaciones de la distributividad de una DN-álgebra.

Teorema 2.2.16. *Sea A una N-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una DN-álgebra.*
2. $\mathrm{Irr}(A) \subseteq \mathrm{Id}_{Op}(A)$.

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $I \in \mathrm{Irr}(A)$. Como A es una DN-álgebra, resulta que I es primo. Luego, por el Lema 2.2.15, I es optimal.

2. $\Rightarrow$ *1.* Sea $a \in A$ y sean $x, y, z \in [a)$. Siempre vale que $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Probemos la otra desigualdad. Supongamos lo contrario, es decir, que $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \nleq x \vee (y \wedge z)$. Por el Teorema 2.2.14, existe $P \in \mathrm{Irr}(A)$ tal que $x \vee (y \wedge z) \in P$ y $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \notin P$. Como P es irreducible, entonces es optimal. Luego P es primo y tenemos que $y \in P$ o $z \in P$. Si $y \in P$, entonces $x \vee y \in P$ y al ser decreciente, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \in P$ lo cual es una contradicción. Si $z \in P$, de manera análoga llegamos a una contradicción. Entonces $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$ y A es una DN-álgebra. ■

Sea A una N-álgebra y sea $I \in \mathrm{Id}_F(A)$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Consideremos la siguiente propiedad:

$$\text{si } (a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq I, \text{ entonces } a_i \in I \text{ para algún } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq n. \tag{2.4}$$

Observemos que todo ideal de Frink que satisface la propiedad 2.4 es irreducible. En efecto, sean $I_1, I_2 \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $I = I_1 \cap I_2$. Supongamos que $I \subset I_1$ e $I \subset I_2$.

Entonces existen $a, b \in A$ tal que $a \in I_1 - I$ y $b \in I_2 - I$. Como $(a] \cap (b] \subseteq I_1 \cap I_2 = I$ e I satisface 2.4, tenemos que $a \in I$ o $b \in I$ lo cual es una contradicción.

El siguiente resultado caracteriza a los ideales irreducibles de una N-álgebra.

Lema 2.2.17. *Sea A una N-álgebra y sea $I \in \mathrm{Id}(A)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es irreducible.*
2. *Para cada $a_1, ..., a_n \notin I$, existe $b \notin I$ y existe $c \in I$ tal que $b \leq a_i \vee c$ para cada $i = 1, ..., n$.*

Demostración. *1. $\Rightarrow$ 2.* Sean $a_1, ..., a_n \notin I$. Tomemos los ideales $I_{a_i} = I \vee (a_i]$ para cada $i = 1, ..., n$. Si $I = I_{a_1} \cap ... \cap I_{a_n}$, entonces existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ e $I = I_{a_i}$, es decir, $a_i \in I$ lo cual es una contradicción. Entonces, $I \subset I_{a_1} \cap ... \cap I_{a_n}$ y existe $b \in I_{a_1} \cap ... \cap I_{a_n}$ tal que $b \notin I$. Así, existen $c_1, ..., c_n \in I$ tal que $b \leq a_i \vee c_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Como I es un ideal, se sigue que $c = c_1 \vee ... \vee c_n \in I$ tal que $b \leq a_i \vee c$ para cada $i = 1, ..., n$.

2. $\Rightarrow$ 1. Sean $I_1, I_2 \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $I = I_1 \cap I_2$. Si $I \subset I_1$ e $I \subset I_2$, entonces existen $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \in I_1 - I$ y $a_2 \in I_2 - I$. Luego, existe $b \notin I$ y existe $c \in I$ tal que $b \leq a_1 \vee c$ y $b \leq a_2 \vee c$. Como $a_1 \vee c \in I_1$ y $a_2 \vee c \in I_2$, tenemos que $b \in I_1 \cap I_2 = I$, lo cual es una contradicción. Así, I es irreducible. ■

Teorema 2.2.18. *Sea A una N-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una DN-álgebra.*
2. *Todo ideal irreducible satisface la propiedad 2.4.*
3. *Todo ideal de Frink irreducible es un ideal optimal.*

Demostración. *1. $\Rightarrow$ 2.* Sea $I \in \mathrm{Irr}(A)$ y sean $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq I$. Supongamos que $a_1, ..., a_n \notin I$. Como I es irreducible, por el Lema 2.2.17, existe $b \notin I$ y existe $c \in I$ tal que $b \leq a_i \vee c$ para cada $i = 1, ..., n$. Luego, $(b] \subseteq (a_i \vee c] = (a_i] \vee (c]$ para cada $i = 1, ..., n$ y

$$(b] \subseteq (a_1 \vee c] \cap ... \cap (a_n \vee c] = ((a_1] \cap ... \cap (a_n]) \vee (c] \subseteq I.$$

Así, $b \in I$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ y $a_i \in I$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Sea I un ideal de Frink irreducible y sean $a_1, ..., a_n \notin I$ tal que $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq (a]$. Supongamos que $a \in I$. Entonces $(a_1] \cap ... \cap (a_n] \subseteq I$, y por la propiedad 2.4, existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ y $a_i \in I$, lo cual es una contradicción. Concluimos que I es optimal.

3. $\Rightarrow$ *1.* Sea $a \in A$ y sean $x, y, z \in [a)$. Sabemos que siempre vale la desigualdad $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Si suponemos que $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \nleq x \vee (y \wedge z)$, por el Teorema 2.2.14 existe $P \in \mathrm{Irr}(A)$ tal que $x \vee (y \wedge z) \in P$ y $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \notin P$. Por hipótesis, P es optimal. Luego, P es primo y tenemos que $y \in P$ o $z \in P$. Si $y \in P$, entonces $x \vee y \in P$ y $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \in P$, lo cual es una contradicción. Si $z \in P$ también arribamos a una contradicción. Entonces $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$ y A es una DN-álgebra. ■

Por el Teorema 2.2.18, tenemos que los ideales irreducibles en las DN-álgebras son justamente aquellos ideales que satisfacen la propiedad 2.4.

2.2.3 Homomorfismos

Un homomorfismo entre retículos distributivos acotados es una aplicación que preserva ínfimos, supremos, primer y último elemento. En esta subsección introducimos las nociones de $\vee$-semi-homomorfismo y homomorfismo entre DN-álgebras.

Definición 2.2.19. Sean A y B DN-álgebras y sea $h : A \to B$ una aplicación. Diremos que h es un $\vee$-*semi-homomorfismo* si para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes identidades:

1. $h(1) = 1$,
2. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$.

De manera análoga introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2.20. Sean A y B DN-álgebras y sea $h : A \to B$ un $\vee$-semi-homomorfismo. Diremos que h es un *homomorfismo* si para cada $a, b \in A$ tal que existe $a \wedge b$, $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$.

Notemos que los $\vee$-semi-homomorfismos, y por lo tanto los homomorfismos, preservan el orden natural, es decir, si $a \leq b$ entonces $h(a) \leq h(b)$. Por otro lado, si existe $a \wedge b$ en A, entonces existe $h(a) \wedge h(b)$. En efecto, como $a \wedge b \leq a, b$ entonces $h(a \wedge b) \leq h(a), h(b)$ y $h(a), h(b) \in [h(a \wedge b))$. Como B es una DN-álgebra, entonces el filtro principal $[h(a \wedge b))$ es un retículo distributivo acotado y por lo tanto existe $h(a) \wedge h(b)$.

Denotaremos como $\mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$ y $\mathcal{DNH}[A, B]$ a los conjuntos de todos los $\vee$-semi-homomorfismos y homomorfismos entre las DN-álgebras A y B, respectivamente. Las siguientes caracterizaciones son originales y se pueden ver en [19].

Lema 2.2.21. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$. Entonces h es un homomorfismo si y sólo si $[b) \subseteq [a_1) \vee [a_2)$ implica $[h(b)) \subseteq [h(a_1)) \vee [h(a_2))$, para cada $a_1, a_2, b \in A$.*

Demostración. Supongamos que h es un homomorfismo y sean $a_1, a_2, b \in A$ tal que $[b) \subseteq [a_1) \vee [a_2)$. Entonces, por el Teorema 2.2.10,

$$[b) = [b) \wedge ([a_1) \vee [a_2)) = ([b) \wedge [a_1)) \vee ([b) \wedge [a_2)) = [b \vee a_1) \vee [b \vee a_2).$$

Como existe $(b \vee a_1) \wedge_b (b \vee a_2)$, tenemos que $b = (b \vee a_1) \wedge_b (b \vee a_2)$. Al ser h un homomorfismo y B una DN-álgebra, $h(b) = h(b) \vee (h(a_1) \wedge h(a_2))$ y $[h(b)) \subseteq [h(a_1) \wedge h(a_2))$, es decir, $[h(b)) \subseteq [h(a_1)) \vee [h(a_2))$.

Recíprocamente, sean $a_1, a_2 \in A$ tal que existe $a_1 \wedge a_2$. Como h preserva el orden natural, $h(a_1 \wedge a_2) \leq h(a_1) \wedge h(a_2)$. Sea $z \in B$ tal que $z \leq h(a_1)$ y $z \leq h(a_2)$. Entonces $[h(a_1)) \vee [h(a_2)) \subseteq [z)$. Luego, como existe $a_1 \wedge a_2$, tenemos que $[a_1 \wedge a_2) = [a_1) \vee [a_2)$ y $[h(a_1 \wedge a_2)) \subseteq [h(a_1)) \vee [h(a_2))$. Así, $[h(a_1 \wedge a_2)) \subseteq [z)$, es decir, $z \leq h(a_1 \wedge a_2)$. Por lo tanto, $h(a_1 \wedge a_2) = h(a_1) \wedge h(a_2)$. ■

Teorema 2.2.22. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h : A \to B$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *h es un homomorfismo.*
2. *$h^{-1}(P) \in X(A)$, para cada $P \in X(B)$.*

Demostración. *1. $\Rightarrow$ 2.* Sea $P \in X(B)$. Como h es un homomorfismo y preserva el orden natural, se sigue que $h^{-1}(P) \in \mathrm{Id}(A)$. Si $h^{-1}(P) = A$, entonces $1 \in h^{-1}(P)$ y $h(1) = 1 \in P$, lo cual es una contradicción pues P es propio. Luego, $h^{-1}(P)$ es un ideal propio. Sean $a, b \in A$ tal que existe $a \wedge b$ y $a \wedge b \in h^{-1}(P)$. Entonces $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) \in P$. Como P es primo, $h(a) \in P$ o $h(b) \in P$, es decir, $a \in h^{-1}(P)$ o $b \in h^{-1}(P)$. Por lo tanto $h^{-1}(P) \in X(A)$.

2. $\Rightarrow$ *1.* Veamos primero que h es una aplicación monótona. Sean $a, b \in A$ tal que $a \leq b$ y supongamos que $h(a) \nleq h(b)$. Entonces, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(B)$ tal que $h(b) \in P$ y $h(a) \notin P$. Así, $b \in h^{-1}(P)$ y $a \notin h^{-1}(P)$, lo cual es una contradicción ya que $h^{-1}(P)$ es un ideal. Probemos ahora que h es un homomorfismo. Si $h(1) < 1$, entonces existe $P \in X(B)$ tal que $h(1) \in P$, es decir, $1 \in h^{-1}(P)$ lo cual contradice que $h^{-1}(P)$ es un ideal propio. Así, $h(1) = 1$. Sean $a, b \in A$. Como h es monótona, $h(a) \vee h(b) \leq h(a \vee b)$. Supongamos que $h(a \vee b) \nleq h(a) \vee h(b)$. Por el Teorema 2.2.6, existe $Q \in X(B)$ tal que $h(a) \vee h(b) \in Q$ y $h(a \vee b) \notin Q$. Se sigue que $h(a), h(b) \in Q$ y $a, b \in h^{-1}(Q)$. Como $h^{-1}(Q)$ es un ideal, $a \vee b \in h^{-1}(Q)$ y $h(a \vee b) \in Q$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$. Con un argumento similar se prueba que si existe $a \wedge b$, entonces $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$. Por lo tanto h es un homomorfismo. ■

2.2.4 Congruencias

Una congruencia θ sobre un semirretículo S es una relación de equivalencia compatible con el supremo, es decir, si $(a, b), (c, d) \in \theta$ entonces $(a \vee c, b \vee d) \in \theta$. Claramente no toda congruencia semirreticular de una N-álgebra produce una N-álgebra, pues las congruencias deben cumplir la propiedad adicional que preserven los ínfimos existentes. En esta subsección introducimos una noción de congruencia más restringida pero adecuada a nuestros propósitos. También probaremos que el retículo de las congruencias de una DN-álgebra es isomorfo al retículo de las congruencias de cierto retículo distributivo [23].

Definición 2.2.23. Sea A una N-álgebra y sea $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. Diremos que θ es una $\wedge$-*congruencia* si satisface la siguiente condición: si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \theta$ y existen $a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2$, entonces $(a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \in \theta$.

Teorema 2.2.24. *Sea A una N-álgebra. Entonces las congruencias sobre A son precisamente las $\wedge$-congruencias.*

Demostración. Sea θ una $\wedge$-congruencia y sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in \theta$. Entonces $(a_1 \vee c_1, a_2 \vee c_2), (b_1 \vee c_1, b_2 \vee c_2) \in \theta$ y $(m(a_1, b_1, c_1), m(a_2, b_2, c_2)) \in \theta$. Luego, θ es una congruencia. Recíprocamente, sea θ una congruencia sobre A. Primero probemos la siguiente propiedad sobre θ:

$$\text{si } x \leq y, (x, y) \in \theta \text{ y existe } x \wedge z, \text{ entonces } (x \wedge z, y \wedge z) \in \theta. \tag{2.5}$$

Como $(x,y) \in \theta$, entonces $(m(x,z,x\wedge z), m(y,z,x\wedge z)) \in \theta$, pero

$$m(x,z,x\wedge z) = (x \vee (x\wedge z)) \wedge_{x\wedge z} (z \vee (x\wedge z)) = x\wedge z$$

y

$$m(y,z,x\wedge z) = (y \vee (x\wedge z)) \wedge_{x\wedge z} (z \vee (x\wedge z)) = y\wedge z.$$

Así, $(x\wedge z, y\wedge z) \in \theta$. Probemos ahora que θ es una $\wedge$-congruencia. Sean (a_1,b_1), $(a_2,b_2) \in \theta$ y supongamos que existen $a_1\wedge a_2$ y $b_1\wedge b_2$. Entonces $(a_1, a_1\vee b_1) \in \theta$ y como existe $a_1\wedge a_2$, tenemos que $(a_1\wedge a_2, (a_1\vee b_1)\wedge a_2) \in \theta$ por la propiedad 2.5. Aplicando nuevamente la propiedad 2.5, $(a_2, a_2\vee b_2) \in \theta$ implica que

$$((a_1\vee b_1)\wedge a_2, (a_1\vee b_1)\wedge(a_2\vee b_2)) \in \theta$$

y por transitividad, $(a_1\wedge a_2, (a_1\vee b_1)\wedge(a_2\vee b_2)) \in \theta$. Con un argumento similar se prueba que $(b_1\wedge b_2, (a_1\vee b_1)\wedge(a_2\vee b_2)) \in \theta$ y por lo tanto $(a_1\wedge a_2, b_1\wedge b_2) \in \theta$. Concluimos que θ es una $\wedge$-congruencia. ■

El siguiente resultado nos será de utilidad y su demostración puede verse en [23].

Lema 2.2.25. *Sea A una DN-álgebra. Sean $a,b \in A$ tal que $b \leq a$. Entonces para cada $x,y \in A$, $(x,y) \in \theta(a,b)$ si y sólo si*

$$x\vee a = y\vee a$$

y

$$[x) \vee [b) = [y) \vee [b).$$

Sea A una DN-álgebra y

$$f : \mathrm{Con}(\mathrm{Fi}_f(A)) \to \mathrm{Con}(A)$$

la aplicación definida como

$$(x,y) \in f(\theta) \text{ si y sólo si } ([x),[y)) \in \theta. \tag{2.6}$$

Teorema 2.2.26. *Sea A una DN-álgebra. Entonces los retículos* $\mathrm{Con}(A)$ *y* $\mathrm{Con}(\mathrm{Fi}_f(A))$ *son isomorfos.*

Demostración. Probemos que la aplicación f dada por 2.6 es un isomorfismo. Si $\{\theta_i : i\in I\} \subseteq \mathrm{Con}(\mathrm{Fi}_f(A))$, es claro que $f(\bigcap\{\theta_i : i\in I\}) = \bigcap\{f(\theta_i) : i\in I\}$. Veamos que $f(\bigvee\{\theta_i : i\in I\}) = \bigvee\{f(\theta_i) : i\in I\}$. Sea $(x,y) \in f(\bigvee\{\theta_i : i\in I\})$, es decir, $([x), [y)) \in \bigvee \{\theta_i : i \in I\}$. Entonces existen $F_0, ..., F_n \in \mathrm{Fi}_f(A)$ tal que $F_0 = [x), F_n = [y)$ y $(F_i, F_{i+1}) \in \bigcup \{\theta_i : i \in I\}$ para cada $i = 0, ..., n-1$. Tenemos que $(F_0, F_1) = ([x), F_1) \in \theta_j$ para algún $j \in I$. Como θ_j es una congruencia de $\mathrm{Fi}_f(A)$ y $([x), [x)) \in \theta_j$, $([x), [x) \cap F_1) \in \theta_j$. Por la Observación 2.2.11 se sigue que $[x) \cap F_1$ es un filtro principal, es decir, existe $z_1 \in A$ tal que $[x) \cap F_1 = [z_1)$. Así, $([x), [z_1)) \in \theta_j$. Razonando de la misma manera, tenemos que existen $z_0 = x, z_1, ..., z_n = y$ tal que $F_i = [z_i)$ para cada $i = 0, ..., n$. Luego, $([z_i), [z_{i+1})) \in \bigcup \{\theta_i : i \in I\}$ y por 2.6 $(z_i, z_{i+1}) \in \bigcup \{f(\theta_i) : i \in I\}$. Por lo tanto, $(x, y) \in \bigvee \{f(\theta_i) : i \in I\}$. La recíproca se prueba de manera totalmente análoga. Si $(x, y) \in \bigvee \{f(\theta_i) : i \in I\}$, existen $z_0 = x, z_1, ..., z_n = y \in A$ tal que $(z_i, z_{i+1}) \in \bigcup \{f(\theta_i) : i \in I\}$ para cada $i = 0, ..., n$. Así, $([z_i), [z_{i+1})) \in \bigcup \{\theta_i : i \in I\}$, lo cual implica que $(x, y) \in \bigvee \{\theta_i : i \in I\}$ y $(x, y) \in f(\bigvee \{\theta_i : i \in I\})$. Luego, f es un homomorfismo. Antes de ver que f es biyectiva, probemos la siguiente propiedad:

$$\text{si } b \leq a, \text{ entonces } f(\theta([a), [b))) = \theta(a, b). \tag{2.7}$$

Recordemos que en todo retículo distributivo si $u \leq v$, entonces $(x, y) \in \theta(u, v)$ si y sólo si $x \wedge u = y \wedge u$ y $x \vee v = y \vee v$. Como $[a) \subseteq [b)$ en $\mathrm{Fi}_f(A)$, y aplicando el Lema 2.2.25, se sigue que para cada $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in f(\theta([a), [b))) &\iff ([x), [y)) \in \theta([a), [b)) \\
&\iff [x) \cap [a) = [y) \cap [a) \text{ y } [x) \vee [b) = [y) \vee [b) \\
&\iff x \vee a = y \vee a \text{ y } [x) \vee [b) = [y) \vee [b) \\
&\iff (x, y) \in \theta(a, b).
\end{aligned}$$

Probemos que f es inyectiva. Sean $\theta, \sigma \in \mathrm{Con}(\mathrm{Fi}_f(A))$ tal que $f(\theta) = f(\sigma)$. Como f es un homomorfismo, podemos asumir que $\theta \subseteq \sigma$. Sea $(H, G) \in \sigma$ donde $G = F(\{g_1, ..., g_n\})$. Entonces $(H \cap [a), G \cap [a)) \in \sigma$ para cada $a \in A$, y por la Observación 2.2.11, se sigue que existen $x, y \in A$ tal que $H \cap [a) = [x)$ y $G \cap [a) = [y)$. Tenemos entonces que $(x, y) \in f(\sigma) = f(\theta)$ y $(H \cap [a), G \cap [a)) \in \theta$ para cada $a \in A$. En particular, $(H \cap [g_i), G \cap [g_i)) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., n$. Luego, por el Teorema 2.2.10,

$$(H \cap [g_1)) \vee ... \vee (H \cap [g_n)) = H \cap ([g_1) \vee ... \vee [g_n)) = H \cap G$$

y

$$(G \cap [g_1)) \vee ... \vee (G \cap [g_n)) = [g_1) \vee ... \vee [g_n) = G$$

lo cual implica que $(H \cap G, G) \in \theta$. De manera similar se prueba que $(H \cap G, H) \in \theta$ y por lo tanto $(H, G) \in \theta$.

Por último, veamos que f es sobreyectiva. Por la propiedad 2.7, es fácil de ver que para cada $\sigma \in \operatorname{Con}(A)$, $\sigma = \bigvee \{\theta(a,b) \ : \ (a,b) \in \sigma \text{ y } a \geq b\}$. En efecto, si $(x,y) \in \sigma$, entonces $(x, x \vee y), (x \vee y, y) \in \sigma$ y $(x,y) \in \theta(x, x \vee y) \vee \theta(x \vee y, y)$. Luego,

$$\begin{aligned} \sigma &= \bigvee \{\theta(a,b) \ : \ (a,b) \in \sigma \text{ y } a \geq b\} \\ &= \bigvee \{f(\theta([a],[b])) \ : \ (a,b) \in \sigma \text{ y } a \geq b\} \\ &= f\left(\bigvee \{\theta([a],[b]) \ : \ (a,b) \in \sigma \text{ y } a \geq b\}\right) \end{aligned}$$

y f es sobreyectiva. Así, f es un isomorfismo entre $\operatorname{Con}(A)$ y $\operatorname{Con}(\mathrm{Fi}_f(A))$. ■

Los siguientes resultados pueden encontrarse en [34] y [23].

Corolario 2.2.27. *La única DN-álgebra subdirectamente irreducible es la cadena de dos elementos.*

Corolario 2.2.28. *La variedad $\mathcal{DN}$ está generada por las cadenas de dos elementos.*

2.2.5 Teorema de Representación

Todo retículo distributivo acotado es isomorfo a un subretículo de el retículo distributivo acotado de los subconjuntos decrecientes de un conjunto ordenado. Dicho resultado se extiende de manera natural a las álgebras de Boole. Nos centramos ahora en generalizar este teorema de representación para la clase de las DN-álgebras por medio de conjuntos ordenados.

En el Ejemplo 2.1.1 vimos que si $\langle X, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces la terna $\langle \mathcal{P}_d(X), m, X \rangle$ es una N-álgebra donde m está dada por la ecuación 2.2. En realidad, se sigue que $\langle \mathcal{P}_d(X), m, X \rangle$ es una DN-álgebra. Dicha estructura es de gran importancia, ya que toda DN-álgebra puede sumergirse en una DN-álgebra de conjuntos de esta forma como veremos a continuación.

Sea A una DN-álgebra. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado de los ideales primos $\langle X(A), \subseteq \rangle$ y la aplicación

$$\varphi_A : A \to \mathcal{P}_d(X(A))$$

dada por

$$\varphi_A(a) = \{P \in X(A) \ : \ a \notin P\}.$$

Por otro lado, como $\langle X(A), \subseteq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces

$$\langle \mathcal{P}_d(X(A)), m, X(A) \rangle$$

es una DN-álgebra y tenemos el siguiente teorema de representación [34].

Teorema 2.2.29. *Sea A una DN-álgebra. Entonces φ_A es un homomorfismo inyectivo de A en $\langle \mathcal{P}_d (X(A)), m, X(A) \rangle$.*

Demostración. Claramente tenemos que $\varphi_A(a) \in \mathcal{P}_d(X(A))$, para cada $a \in A$. Luego, por las propiedades de ideal primo, se deduce que $\varphi_A(a \vee b) = \varphi_A(a) \cup \varphi_A(b), \varphi_A(1) = X(A)$ y si existe $a \wedge b$ en A, entonces $\varphi_A(a \wedge b) = \varphi_A(a) \cap \varphi_A(b)$. Por lo tanto, $\varphi_A(m(a,b,c)) = m(\varphi_A(a), \varphi_A(b), \varphi_A(c))$. Probemos que φ_A es inyectiva. Sean $a, b \in A$ tal que $a \neq b$. Supongamos que $a \nleq b$. Por el Corolario 2.2.7, existe $P \in X(A)$ tal que $b \in P$ y $a \notin P$, es decir, $P \in \varphi_A(a)$ y $P \notin \varphi_A(b)$. Entonces $\varphi_A(a) \neq \varphi_A(b)$. De manera análoga, si $b \nleq a$ concluimos que $\varphi_A(a) \neq \varphi_A(b)$. Concluimos que φ_A es un homomorfismo inyectivo. ■

Ejemplo 2.2.2. Siguiendo con el Ejemplo 2.2.1, tenemos que el conjunto parcialmente ordenado de los ideales primos de A esta dado por $X(A) = \{P_1, P_2, P_3\}$, donde $P_1 = \{c\}, P_2 = \{b\}$ y $P_3 = \{a, c\}$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_A(1) & = & \{P_1, P_2, P_3\} \quad = \quad X(A) \\ \varphi_A(a) & = & \{P_1, P_2\} \\ \varphi_A(b) & = & \{P_1, P_3\} \\ \varphi_A(c) & = & \{P_2\} \end{array}$$

y la DN-álgebra de conjuntos resultante es isomorfa a la DN-álgebra inicial A.

Capítulo 3

Representación, dualidades y aplicaciones

El objetivo de este capítulo es desarrollar una teoría de representación topológica para las DN-álgebras. Para elllo, definimos el espacio dual de una DN-álgebra como un cierto espacio topológico $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ llamado *DN-espacio*, donde $\mathcal{K}$ es una base de subconjuntos abiertos, compactos y dualmente compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X, la cual satisface ciertas condiciones adicionales. Ésta representación es más bien estilo Stone, ya que trabajamos con el orden inducido por la topología, es decir, el orden de especialización topológico. Luego, extendemos dicha representación a dos dualidades caracterizando los $\vee$-semi-homomorfismos y homomorfismos entre DN-álgebras a través de ciertas relaciones binarias entre sus espacios duales, teniendo como casos particulares la conocida dualidad de Stone para los retículos distributivos acotados dada en [49] y la dualidad para las álgebras de Tarski desarrollada en [17]. Aplicando la representación topológica, finalizamos el capítulo caracterizando los homomorfismos inyectivos y sobreyectivos, los retículos de las congruencias, subálgebras y filtros, y presentamos un enfoque topológico sobre la extensión reticular distributiva libre de una DN-álgebra. La mayor parte de los resultados que expondremos se encuentran publicados en [19].

3.1 Representación topológica

En esta sección introducimos los *DN-espacios* y probamos que toda DN-álgebra puede ser representada a través de cierto DN-espacio y viceversa, que todo DN-espacio puede ser representado como el espacio dual de alguna DN-álgebra.

3.1.1 DN-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ definida sobre X. Consideremos la familia de $\mathcal{P}(X)$ constituida por los complementos de los elementos básicos, es decir,

$$D_{\mathcal{K}}(X) = \{U \ : \ U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Definición 3.1.1. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico e Y un subconjunto no vacío de X.

1. Diremos que Y es *irreducible* si para cada $U, V \in D_{\mathcal{K}}(X)$, si $U \cap V \in D_{\mathcal{K}}(X)$ e $Y \cap (U \cap V) = \emptyset$, entonces $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$.

2. Diremos que Y es *dualmente compacto* si para toda familia $\mathcal{F}$ de elementos básicos tal que $\bigcap \{U \ : \ U \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$, existe una subfamilia finita $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\bigcap \{S \ : \ S \in \mathcal{S}\} \subseteq Y$.

Notemos que para cada $x \in X$, el subconjunto $\mathrm{Sb}(x)$ es irreducible. Luego, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ induce una relación $\leq_{\mathcal{K}}$ sobre X definida como

$$x \leq_{\mathcal{K}} y \text{ si y sólo si } y \in \mathrm{Sb}(x).$$

Se sigue de la misma definición que $\mathrm{Sb}(x) = [x)$. Es fácil ver que la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es reflexiva y transitiva, pero no necesariamente es un orden.

Lema 3.1.2. *Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico.*

1. *Si cada subconjunto saturado básico irreducible de X es la saturación básica de un único punto, entonces $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden.*

2. *La relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden si y sólo si $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es T_0.*

Demostración. *1.* Es inmediato que $\leq_{\mathcal{K}}$ es reflexiva y transitiva. Sean $x, y \in X$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} y$ e $y \leq_{\mathcal{K}} x$. Entonces $\mathrm{Sb}(x) = \mathrm{Sb}(y)$, y por unicidad, $x = y$.

2. Supongamos que $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden y sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Entonces $x \nleq_{\mathcal{K}} y$ o $y \nleq_{\mathcal{K}} x$. Supongamos que $x \nleq_{\mathcal{K}} y$, ya que el otro caso es análogo. Entonces $y \notin \mathrm{Sb}(x)$, es decir, existe $U \in \mathcal{K}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Luego, $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es T_0. Recíprocamente, supongamos que el espacio $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es T_0. Sean $x, y \in X$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} y$ e $y \leq_{\mathcal{K}} x$. Entonces $y \in \mathrm{Sb}(x)$ y $x \in \mathrm{Sb}(y)$. Si fuese $x \neq y$, entonces existe $U \in \mathcal{K}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$, o $x \notin U$ e $y \in U$. En el caso que $x \in U$ e $y \notin U$,

$y \in \mathrm{Sb}(x)$ e $y \in U$, lo cual es una contradicción. De manera similar llegamos a una contradicción en el caso que $x \notin U$ e $y \in U$. Por lo tanto, $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden. ■

En el caso de que el espacio topológico sea T_0, entonces la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden, llamado el *orden de especialización*. Al orden dual del orden de especialización $\leq_{\mathcal{K}}$ lo denotaremos como $\preceq_{\mathcal{K}}$ y se define de la siguiente manera:

$$x \preceq_{\mathcal{K}} y \text{ si y sólo si } x \in \mathrm{Sb}(y).$$

Tenemos que $x \preceq_{\mathcal{K}} y$ si y sólo si $y \in \mathrm{Cl}(x)$, o lo que es equivalente, $x \in \mathrm{Sb}(y)$ si y sólo si $y \in \mathrm{Cl}(x)$. En efecto, si $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Sb}(y) &\iff x \in \bigcap \{U \in \mathcal{K} \ : \ y \in U\} \\ &\iff \forall U \in \mathcal{K} \, (y \in U \Rightarrow x \in U) \\ &\iff \forall U \in \mathcal{K} \, (x \in U^c \Rightarrow y \in U^c) \\ &\iff y \in \bigcap \{U^c \in D_{\mathcal{K}}(X) \ : \ x \in U^c\} \\ &\iff y \in \mathrm{Cl}(x). \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de definir los espacios topológicos duales a las DN-álgebras. La siguiente definición juega un papel fundamental en la presente tesis.

Definición 3.1.3. Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es un *DN-espacio* si satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{K}$ es una base de subconjuntos abiertos, compactos y dualmente compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ definida sobre X.
2. Para cada $U, V, W \in \mathcal{K}$, $(U \cap W) \cup (V \cap W) \in \mathcal{K}$.
3. Cada subconjunto saturado básico irreducible de X es la saturación básica de un único punto.

Observaciones 3.1.4. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio.

1. La relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden. Por lo tanto, de ahora en más y cuando no haya lugar a confusión, escribiremos $\leq$ en lugar de $\leq_{\mathcal{K}}$. Análogamente, escribiremos $\preceq$ en lugar de $\preceq_{\mathcal{K}}$.
2. Cada $U \in D_{\mathcal{K}}(X)$ es decreciente con el orden de especialización $\leq$ y creciente con el orden dual $\preceq$.

3. Para cada $U, V \in \mathcal{K}$, tenemos que

$$(U \cap V) \cup (U \cap V) = U \cap V \in \mathcal{K}.$$

   Así, $\mathcal{K}$ es cerrado bajo intersecciones finitas y la estructura $\langle D_{\mathcal{K}}(X), \cup, X\rangle$ es un semirretículo.

4. Los DN-espacios son una generalización de los espacios topológicos duales a las álgebras de Tarski introducidos en [17].

Todo DN-espacio induce una DN-álgebra, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.1.5. *Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio. Entonces la estructura $\langle D_{\mathcal{K}}(X), \cup, X\rangle$ es una DN-álgebra.*

Demostración. Sea $C \in D_{\mathcal{K}}(X)$ y $[C) = \{U \in D_{\mathcal{K}}(X) \ : C \subseteq U\}$ el filtro principal de C. Si $A, B \in [C)$, entonces $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$, pero como $D_{\mathcal{K}}(X)$ es un semirretículo, tenemos que $A \cup B \in [C)$. Por otro lado, por la condición *2.* de la Definición 3.1.3, vale que

$$(A \cup C) \cap_C (B \cup C) = A \cap_C B \in D_{\mathcal{K}}(X).$$

Así, $A \cap_C B \in [C)$. Se sigue que $\langle [C), \cup, \cap_C, C, X\rangle$ es un retículo distributivo acotado y por lo tanto $\langle D_{\mathcal{K}}(X), \cup, X\rangle$ es una DN-álgebra. ■

Si $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un DN-espacio, diremos que $\langle D_{\mathcal{K}}(X), \cup, X\rangle$ es la *DN-álgebra dual* de $\langle X, \mathcal{K}\rangle$. Veamos algunas definiciones equivalentes de la Definición 3.1.3.

Teorema 3.1.6. *Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Supongamos que para cada $U, V, W \in \mathcal{K}$, $(U \cap W) \cup (V \cap W) \in \mathcal{K}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es T_0, y si $A = \{U_j \ : \ j \in J\}$ y $B = \{V_k \ : \ k \in K\}$ son dos familias no vacías de $D_{\mathcal{K}}(X)$ tal que*

$$\bigcap \{U_j \ : \ j \in J\} \subseteq \bigcup \{V_k \ : \ k \in K\},$$

   entonces existen $U_1, ..., U_n \in [A)$ y $V_1, ..., V_m \in B$ tal que $U_1 \cap ... \cap U_n \in D_{\mathcal{K}}(X)$ y $U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq V_1 \cup ... \cup V_m$.

2. *$\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es T_0, cada elemento básico es dualmente compacto y la aplicación $H_X : X \to X(D_{\mathcal{K}}(X))$ dada por*

$$H_X(x) = \{U \in D_{\mathcal{K}}(X) \ : \ x \notin U\}$$

para cada $x \in X$, es sobreyectiva.

3. *Cada elemento básico es dualmente compacto y cada subconjunto saturado básico irreducible de X es la saturación básica de un único punto.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Se sigue fácilmente que cada $U \in \mathcal{K}$ es dualmente compacto y que la aplicación $H_X(x)$ se encuentra bien definida. Sea $P \in X(D_{\mathcal{K}}(X))$. Sea $A = \{U_j \ : \ U_j \notin P\}$ y sea $B = \{V_k^c \ : \ V_k \in P\}$. Probemos que

$$\mathcal{F} = \bigcap \{U_j \ : \ U_j \notin P\} \cap \bigcap \{V_k^c \ : \ V_k \in P\} \neq \emptyset.$$

Si $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces $\bigcap \{U_j \ : \ U_j \notin P\} \subseteq \bigcup \{V_k \ : \ V_k \in P\}$. Luego, tenemos que existen $U_1, ..., U_n \in [A)$ y $V_1, ..., V_m \in B$ tal que $U_1 \cap ... \cap U_n \in D_{\mathcal{K}}(X)$ y $U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq V_1 \cup ... \cup V_m$. Además, existen $\overline{U_1}, ..., \overline{U_n} \in A$ tal que $\overline{U_j} \subseteq U_j$ para cada $j = 1, ..., n$. Como $V_1 \cup ... \cup V_m \in P$ y P es un ideal, $U_1 \cap ... \cap U_n \in P$. Al ser P primo, tenemos que $U_j \in P$ para algún j tal que $1 \leq j \leq n$ y por lo tanto $\overline{U_j} \in P$, lo cual es una contradicción. Entonces existe $x \in \mathcal{F}$ y $P = H_X(x)$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Sea Y un subconjunto saturado básico irreducible de X. Consideremos la familia

$$P_Y = \{U \in D_{\mathcal{K}}(X) \ : \ Y \cap U = \emptyset\}.$$

Es sencillo probar que P_Y es un ideal propio de $D_{\mathcal{K}}(X)$. Veamos que P_Y es primo. Sean $U_1, U_2 \in D_{\mathcal{K}}(X)$ y supongamos que $U_1 \cap U_2 \in D_{\mathcal{K}}(X)$ tal que $U_1 \cap U_2 \in P_Y$. Entonces $Y \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$, pero como Y es irreducible se sigue que $Y \cap U_1 = \emptyset$ o $Y \cap U_2 = \emptyset$, es decir, $U_1 \in P_Y$ o $U_2 \in P_Y$. Así, $P_Y \in X(D_{\mathcal{K}}(X))$. Por otro lado, dado que $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es T_0, la aplicación H_X es inyectiva. Luego, H_X es biyectiva y existe un único punto $y \in X$ tal que $H_X(y) = P_Y$. Finalmente, como Y es un subconjunto saturado básico de X, tenemos que

$$\begin{aligned} x \in Y &\iff \forall U \in \mathcal{K}\,(Y \subseteq U \Rightarrow x \in U) &&\iff \forall U \in \mathcal{K}\,(U^c \in P_Y \Rightarrow x \in U) \\ &\iff \forall U \in \mathcal{K}\,(U^c \in H_X(y) \Rightarrow x \in U) &&\iff \forall U \in \mathcal{K}\,(y \in U \Rightarrow x \in U) \\ &\iff x \in \mathrm{Sb}(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y es la saturación básica de un único punto.

3. $\Rightarrow$ *1.* Por el Lema 3.1.2 sabemos que $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es T_0. Sean $A = \{U_j \ : \ j \in J\}$ y $B = \{V_k \ : \ k \in K\}$ dos familias no vacías de $D_{\mathcal{K}}(X)$ tal que

$$\bigcap \{U_j \ : \ j \in J\} \subseteq \bigcup \{V_k \ : \ k \in K\}.$$

Tomemos $I(B)$ el ideal generado por el subconjunto B y $F(A)$ el filtro generado por el subconjunto A. Si $I(B) \cap F(A) = \emptyset$ entonces, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(D_{\mathcal{K}}(X))$ tal que $I(B) \subseteq P$ y $P \cap F(A) = \emptyset$. Consideremos la familia $Y = \bigcap \{W^c \ : \ W \in P\}$. Se sigue que Y es saturado básico.

Veamos que Y es irreducible. Sean $U, V \in D_{\mathcal{K}}(X)$ tal que $U \cap V \in D_{\mathcal{K}}(X)$ e $Y \cap (U \cap V) = \emptyset$. Entonces $Y \subseteq U^c \cup V^c$, y como $U^c \cup V^c$ es dualmente compacto, existen $W_1, ..., W_n \in P$ tal que $W_1^c \cap ... \cap W_n^c \subseteq U^c \cup V^c$, es decir, $U \cap V \subseteq W_1 \cup ... \cup W_n$. Así, $U \cap V \in P$ y como P es un ideal primo tenemos que $U \in P$ o $V \in P$. Se sigue que $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$. Entonces Y es irreducible, y por hipótesis, existe un único punto $y \in X$ tal que $\mathrm{Sb}(y) = Y$. Probemos que $H_X(y) = P$. Si $U \in H_X(y)$, tenemos que $y \in U^c$ y $\mathrm{Sb}(y) \subseteq U^c$. Entonces $Y \subseteq U^c$, o lo que es equivalente,

$$\bigcap \{W^c \ : \ W \in P\} \subseteq U^c.$$

Como U^c es dualmente compacto, existen $W_1, ..., W_n \in P$ tal que $W_1^c \cap ... \cap W_n^c \subseteq U^c$, es decir, $U \subseteq W_1 \cup ... \cup W_n$. Al ser P un ideal, $W_1 \cup ... \cup W_n \in P$ y $U \in P$. La otra inclusión es análoga. Luego, $I(B) \subseteq H_X(y)$ y $H_X(y) \cap F(A) = \emptyset$ implica que $y \in \bigcap \{U_j \ : \ j \in J\}$ e $y \notin \bigcup \{V_k \ : \ k \in K\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $I(B) \cap F(A) \neq \emptyset$. De esta forma existen $U_1, ..., U_n \in [A)$ y $V_1, ..., V_m \in B$ tales que $U_1 \cap ... \cap U_n \in D_{\mathcal{K}}(X)$ y $U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq V_1 \cup ... \cup V_m$. ■

Observación 3.1.7. Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio. Entonces $X \in \mathcal{K}$ si y sólo si $D_{\mathcal{K}}(X)$ es un retículo distributivo acotado si y sólo si $\mathcal{K}$ es un anillo de conjuntos. Luego, de la condición *2.* de la Definición 3.1.3, $\mathcal{K}$ es un anillo de conjuntos si y sólo si $\mathcal{K}$ es la familia de todos los subconjuntos abiertos y compactos de X. Por lo tanto, como caso particular, obtenemos la bien conocida representación topológica para los retículos distributivos acotados dado por Stone en [49].

3.1.2 Espacio dual de una DN-álgebra

Veamos ahora que a toda DN-álgebra se le puede asociar un DN-espacio. Sea A una DN-álgebra y consideremos sobre $X(A)$ la siguiente familia de conjuntos:

$$\mathcal{K}_A = \{X(A) - \varphi_A(a) = \varphi_A(a)^c \ : \ a \in A\},$$

donde recordemos que $\varphi_A(a) = \{P \in X(A) \ : \ a \notin P\}$. Se sigue fácilmente que

$$X(A) = \bigcup \{\varphi_A(a)^c \ : \ a \in A\},$$

ya que todo ideal primo es no vacío. Además, si $a, b \in A$ y $P \in X(A)$ tal que $P \in \varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(b)^c$, entonces existe $c = a \vee b$ tal que $P \in \varphi_A(c)^c = \varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(b)^c$. De esta forma, la familia $\mathcal{K}_A$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$ definida sobre $X(A)$. Al espacio topológico $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ lo denominaremos *espacio dual* de A.

Observemos que el orden de especialización $\leq_{\mathcal{K}_A}$ de $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ es la relación de inclusión $\subseteq$. Si $P, Q \in X(A)$, entonces

$$\begin{aligned} P \leq_{\mathcal{K}_A} Q &\iff Q \in \mathrm{Sb}(P) \\ &\iff Q \in \bigcap \{\varphi_A(a)^c \ : \ P \in \varphi_A(a)^c\} \\ &\iff \forall a \in A \, (P \in \varphi_A(a)^c \Rightarrow Q \in \varphi_A(a)^c) \\ &\iff \forall a \in A \, (a \in P \Rightarrow a \in Q) \\ &\iff P \subseteq Q. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.8. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Sean $\{\varphi_A(b) \ : \ b \in B\}$ y $\{\varphi_A(c) \ : \ c \in C\}$ dos familias no vacías de $D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ tal que*

$$\bigcap \{\varphi_A(b) \ : \ b \in B\} \subseteq \bigcup \{\varphi_A(c) \ : \ c \in C\}.$$

Entonces existen $b_1, ..., b_n \in [B)$ y $c_1, ..., c_m \in C$ tal que existe $b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y

$$\varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n) \subseteq \varphi_A(c_1) \cup ... \cup \varphi_A(c_m).$$

Demostración. Sea $I(C)$ el ideal generado por el subconjunto C y $F(B)$ el filtro generado por el subconjunto B. Si $I(C) \cap F(B) = \emptyset$ entonces, por Teorema 2.2.6, existe $P \in X(A)$ tal que $I(C) \subseteq P$ y $P \cap F(B) = \emptyset$. Así, $P \notin \varphi_A(c)$ para cada $c \in C$ y $P \notin \bigcup \{\varphi_A(c) \ : \ c \in C\}$. Por otro lado, $P \in \varphi_A(b)$ para cada $b \in B$. Luego, $P \in \bigcap \{\varphi_A(b) \ : \ b \in B\}$ lo cual es una contradicción. Entonces $I(C) \cap F(B) \neq \emptyset$, es decir, existen $b_1, ..., b_n \in [B)$ y $c_1, ..., c_m \in C$ tal que existe $b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y $b_1 \wedge ... \wedge b_n \leq c_1 \vee ... \vee c_m$. Se sigue que $\varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n) \subseteq \varphi_A(c_1) \cup ... \cup \varphi_A(c_m)$. ■

Para cada $I \in \mathrm{Id}(A)$ y $F \in \mathrm{Fi}(A)$ consideremos las siguientes familias:

$$\alpha(I) = \{P \in X(A) \ : \ I \nsubseteq P\} \tag{3.1}$$

y

$$\beta(F) = \{P \in X(A) \ : \ P \cap F = \emptyset\}. \tag{3.2}$$

Claramente $\alpha(I) = \bigcup \{\varphi_A(a) \ : \ a \in I\}$ y $\beta(F) = \bigcap \{\varphi_A(b) \ : \ b \in F\}$. En particular, tenemos el siguiente resultado para los filtros finitamente generados.

Lema 3.1.9. *Sea A una DN-álgebra y sea $G \in \mathrm{Fi}_f(A)$. Entonces existen $b_1, ..., b_n \in A$ tal que $\beta(G) = \varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n)$.*

Demostración. Como G es un filtro finitamente generado, existe un subconjunto no vacío finito $\{b_1, ..., b_n\}$ de A tal que $G = F(\{b_1, ..., b_n\})$. Si $P \in \beta(G)$, entonces $P \cap G = \emptyset$ y $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq P^c$. Así, $b_i \notin P$ para cada $i = 1, ..., n$ y $P \in \varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n)$. Recíprocamente, sea $P \in \varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n)$. Entonces $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq P^c$ y como P es un ideal primo, P^c es un filtro y $F(\{b_1, ..., b_n\}) \subseteq P^c$. Por lo tanto, $P \cap G = \emptyset$ y $P \in \beta(G)$. ■

En la siguiente proposición caracterizamos ciertos subconjuntos especiales del espacio dual de una DN-álgebra en términos de sus ideales, filtros y filtros finitamente generados.

Proposición 3.1.10. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual.*

1. *Un subconjunto Y de $X(A)$ es saturado básico si y sólo si existe $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $Y = \alpha(I)^c$.*
2. *Un subconjunto U de $X(A)$ es abierto si y sólo si existe $F \in \mathrm{Fi}(A)$ tal que $U = \beta(F)^c$.*
3. *Un subconjunto U de $X(A)$ es abierto y compacto si y sólo si existen $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $U = \beta(F(\{a_1, ..., a_n\}))^c$.*
4. *$\mathcal{K}_A$ es una base de subconjuntos abiertos, compactos y dualmente compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$ definida sobre $X(A)$.*
5. *Para cada $a, b, c \in A$, $[\varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(c)^c] \cup [\varphi_A(b)^c \cap \varphi_A(c)^c] \in \mathcal{K}_A$.*

Demostración. *1.* Sea Y un subconjunto saturado básico de $X(A)$. Entonces existe un subconjunto B de A tal que $Y = \bigcap \{\varphi_A(b)^c : b \in B\}$. Sea $J = I(B)$ el ideal generado por el subconjunto B. Entonces $\alpha(J)^c = \bigcap \{\varphi_A(c)^c : c \in J\}$. Veamos que $Y = \alpha(J)^c$. Es inmediato que $\alpha(J)^c \subseteq Y$. Por otro lado, sea $P \in Y$ y sea $c \in J$. Entonces tenemos que existen $b_1, ..., b_n \in B$ tal que $c \leq b_1 \vee ... \vee b_n$ y $\varphi_A(c) \subseteq \varphi_A(b_1) \cup ... \cup \varphi_A(b_n)$. Luego, valen las inclusiones $Y \subseteq \varphi_A(b_1)^c \cap ... \cap \varphi_A(b_n)^c \subseteq \varphi_A(c)^c$ y $P \in \varphi_A(c)^c$. Como esto es cierto para cada $c \in J$, se sigue que $P \in \bigcap \{\varphi_A(c)^c : c \in J\} = \alpha(J)^c$.

2. Sea U un subconjunto abierto de $X(A)$. Al ser $\mathcal{K}_A$ una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$, existe un subconjunto B de A tal que $U = \bigcup \{\varphi_A(b)^c : b \in B\}$. Consideremos

$G = F(B)$ el filtro generado por el subconjunto B y probemos que $U^c = \beta(G)$. Si $P \in U^c$, entonces $b \notin P$ para cada $b \in B$. Veamos que $P \cap G = \emptyset$. En caso contrario, si existe $b \in G$ tal que $b \in P$, entonces existen $b_1, ..., b_n \in [B)$ tal que existe $b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y $b_1 \wedge ... \wedge b_n = b$. Como $b_1, ..., b_n \in [B)$, existen $\overline{b_1}, ..., \overline{b_n} \in B$ tal que $\overline{b_i} \leq b_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Al ser P un ideal primo, tenemos que $b_i \in P$ para algún i tal que $1 \leq i \leq n$ y $\overline{b_i} \in P$. Luego, $\overline{b_i} \in P \cap B$ lo cual es una contradicción. Entonces $P \cap G = \emptyset$ y $P \in \beta(G)$. La recíproca se demuestra de manera análoga.

3. Sea U un subconjunto abierto y compacto de $X(A)$. Por el punto *2.* existe $F \in \mathrm{Fi}(A)$ tal que $U = \beta(F)^c = \bigcup \{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in F\}$. Como U es compacto, existen $b_1, ..., b_n \in F$ tal que

$$\begin{aligned} U &= \varphi_A(b_1)^c \cup ... \cup \varphi_A(b_1)^c \\ &= [\varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_1)]^c \\ &= \beta(F(\{b_1, ..., b_n\}))^c . \end{aligned}$$

La recíproca se sigue del Lema 3.1.9.

4. Para cada $a \in A$, tenemos que $\varphi_A(a)^c = \beta([a))^c$. Luego, por el punto *3.*, cada $\varphi_A(a)^c$ es un subconjunto abierto y compacto. Además, de la Proposición 3.1.8, se sigue que cada subconjunto $\varphi_A(a)^c$ es también dualmente compacto.

5. Sean $a, b, c \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} [\varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(c)^c] \cup [\varphi_A(b)^c \cap \varphi_A(c)^c] &= [\varphi_A(a \vee c)^c] \cup [\varphi_A(b \vee c)^c] \\ &= \varphi_A((a \vee c) \wedge_c (b \vee c))^c , \end{aligned}$$

donde $(a \vee c) \wedge_c (b \vee c)$ existe en $[c)$. Así, $\varphi_A((a \vee c) \wedge_c (b \vee c))^c \in \mathcal{K}_A$. ■

Observación 3.1.11. En la clase de los semirretículos distributivos, la familia de todos los subconjuntos abiertos y compactos forman una base para una topología sobre el espacio dual. En el caso de las DN-álgebras, no todo subconjunto abierto y compacto de la topología es de la forma $\varphi_A(a)^c$. En efecto, si U es un subconjunto abierto de $X(A)$, entonces $U = \bigcup \{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\}$ para algún subconjunto B de A. Si U es compacto, existen $b_1, ..., b_n \in B$ tal que

$$U = \varphi_A(b_1)^c \cup ... \cup \varphi_A(b_n)^c = [\varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n)]^c .$$

Pero la identidad $\varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_n) = \varphi_A(b_1 \wedge ... \wedge b_n)$ es válida únicamente si existe el ínfimo $b_1 \wedge ... \wedge b_n$.

Estamos en condiciones de probar que dado una DN-álgebra, existe un DN-espacio tal que su DN-álgebra dual es isomorfa a la DN-álgebra inicial.

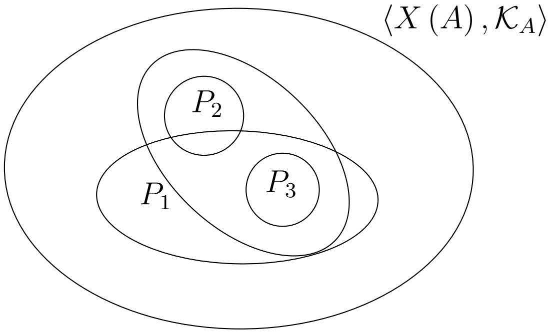
Teorema 3.1.12. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Entonces $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ es un DN-espacio y la aplicación*

$$\varphi_A : A \to D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$$

es un isomorfismo entre DN-álgebras.

Demostración. Como el orden de especialización $\leq_{\mathcal{K}_A}$ de $X(A)$ coincide con la relación de inclusión $\subseteq$, lo cual es un orden, se sigue por el punto *2.* del Lema 3.1.2 que el espacio $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ es T_0. Luego, por el Teorema 3.1.6 y las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.10 tenemos que $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ es un DN-espacio. Por último, $D_{\mathcal{K}_A}(X(A)) = \{\varphi_A(a) \ : \ a \in A\}$ y por el Teorema 2.2.29 la aplicación φ_A es un isomorfismo entre las DN-álgebras A y $D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$. ■

Ejemplo 3.1.1. Retomando los Ejemplos 2.2.1 y 2.2.2, tenemos que la familia $\mathcal{K}_A = \{\varphi_A(1)^c, \varphi_A(a)^c, \varphi_A(b)^c, \varphi_A(c)^c\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$ sobre $X(A)$. Luego, $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} = \{\emptyset, X(A), \{P_2\}, \{P_3\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}\}$. La siguiente figura muestra los abiertos del espacio dual de A.



Teorema 3.1.13. *Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio. Entonces la aplicación*

$$H_X : X \to X(D_{\mathcal{K}}(X))$$

dada por $H_X(x) = \{U \in D_{\mathcal{K}}(X) \ : \ x \notin U\}$ es un homeomorfismo entre DN-espacios.

Demostración. Por los Teoremas 3.1.5 y 3.1.12, el par $\left\langle X(D_{\mathcal{K}}(X)), \mathcal{K}_{D_{\mathcal{K}}(X)} \right\rangle$ es un DN-espacio. Probemos que la aplicación H_X es un homeomorfismo. Por el punto *3.* de la Definición 3.1.3 y el Teorema 3.1.6 se sigue que H_X está bien definida, es inyectiva y sobreyectiva. Veamos que H_X es continua. Dado un subconjunto abierto

U de $X\left(D_{\mathcal{K}}\left(X\right)\right)$, sabemos por la Proposición 3.1.10 que existe $F\in \mathrm{Fi}\left(D_{\mathcal{K}}\left(X\right)\right)$ tal que $U=\beta\left(F\right)^{c}$. Consideremos el subconjunto cerrado $V=\bigcap\{O\ :\ O\in F\}$ en X. Bastará con probar que $H_X^{-1}\left(U\right)=V^{c}$. Si $x\in X$ entonces

$$\begin{aligned} x\notin V &\iff \exists O\in F\left(x\notin O\right) &&\iff \exists O\in F\left(O\in H_X\left(x\right)\right)\\ &\iff H_X\left(x\right)\cap F\neq\emptyset &&\iff H_X\left(x\right)\notin\beta\left(F\right)\\ &\iff H_X\left(x\right)\in U &&\iff x\in H_X^{-1}\left(U\right). \end{aligned}$$

Así, H_X es continua. Ahora probemos que la aplicación H_X es una aplicación abierta, es decir, que para cada $U\in\mathcal{K}$, $H_X\left(U\right)\in\mathcal{K}_{D_{\mathcal{K}}(X)}$. Si $U\in\mathcal{K}$ entonces

$$\begin{aligned} x\notin U &\iff x\in U^{c} &&\iff U^{c}\notin H_X\left(x\right)\\ &\iff H_X\left(x\right)\in\varphi_{D_{\mathcal{K}}(X)}\left(U^{c}\right) &&\iff H_X\left(x\right)\notin\varphi_{D_{\mathcal{K}}(X)}\left(U^{c}\right)^{c}, \end{aligned}$$

donde $\varphi_{D_{\mathcal{K}}(X)}\left(U^{c}\right)^{c}\in\mathcal{K}_{D_{\mathcal{K}}(X)}$. Por lo tanto $H_X\left(U\right)=\varphi_{D_{\mathcal{K}}(X)}\left(U^{c}\right)^{c}$ y H_X es un homeomorfismo entre DN-espacios. ■

3.2 Dualidades topológicas

En la sección previa hemos estudiado la correspondencia entre DN-álgebras y DN-espacios. Ahora, motivados por los resultados desarrollados en [17], vamos a considerar dos categorías algebraicas que tienen como objetos DN-álgebras pero distintos morfismos y probaremos que existen equivalencias duales con las categorías que tienen como objetos DN-espacios y sus morfismos diferentes relaciones binarias, completando de esta forma una dualidad total.

3.2.1 Dualidad para $\mathcal{DNS}_{\vee}$

Denotaremos como $\mathcal{DNS}_{\vee}$ a la categoría que tiene como objetos DN-álgebras y como morfismos $\vee$-semi-homomorfismos entre DN-álgebras. Recordamos brevemente algunos conceptos que nos serán de utilidad.

Sean X_1, X_2 y X_3 conjuntos y sea $R\subseteq X_1\times X_2$ una relación binaria. Para cada subconjunto C de X_1, consideremos

$$R\left(C\right)=\{y\in X_2\ :\ \exists x\in C\left(\left(x,y\right)\in R\right)\}.$$

Si $C=\{x\}$, escribiremos $R\left(x\right)$ en lugar de $R\left(\{x\}\right)$. Diremos que la relación R es *serial* si para cada $x\in X_1$, $R\left(x\right)\neq\emptyset$. Asociada a la relación R definimos la aplicación

$$h_R : \mathcal{P}(X_2) \to \mathcal{P}(X_1)$$

dada por

$$h_R(U) = \{x \in X_1 \ : \ R(x) \cap U \neq \emptyset\}. \tag{3.3}$$

Si $R \subseteq X_1 \times X_2$ y $S \subseteq X_2 \times X_3$ son relaciones binarias, entonces la composición de las relaciones R y S se define como

$$S \circ R = \{(x, z) \in X_1 \times X_3 \ : \ \exists y \in X_2\, ((x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in S)\}.$$

Introducimos las relaciones binarias duales a los $\vee$-semi-homomorfismos.

Definición 3.2.1. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria. Diremos que R es una $\vee$-*relación* si satisface las siguientes condiciones:

1. $h_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$.

2. $R(x)$ es un subconjunto saturado básico de X_2, para cada $x \in X_1$.

3. R es serial.

Denotaremos como $\mathcal{SR}_{\vee}[X_1, X_2]$ al conjunto de todas las $\vee$-relaciones entre los DN-espacios $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$.

Lema 3.2.2. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria. Supongamos que $h_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$R(x)$ es un subconjunto saturado básico de X_2, para cada $x \in X_1$.*

2. *Para cada $(x, y) \in X_1 \times X_2$,*

$$(x, y) \in R \text{ si y sólo si } h_R^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_2}(y).$$

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $(x, y) \in R$ y $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} U \in h_R^{-1}(H_{X_1}(x)) &\iff h_R(U) \in H_{X_1}(x) \\ &\iff x \notin h_R(U) \\ &\iff R(x) \cap U = \emptyset. \end{aligned}$$

Se sigue que $y \notin U$, es decir, $U \in H_{X_2}(y)$. Recíprocamente, sea $(x, y) \in X_1 \times X_2$ y supongamos que $(x, y) \notin R$. Como $R(x)$ es un subconjunto saturado básico de X_2, tenemos que $R(x) = \bigcap \{V \in \mathcal{K}_2 \ : \ R(x) \subseteq V\}$. Entonces existe $V \in \mathcal{K}_2$ tal que $y \in V^c$ y $R(x) \cap V^c = \emptyset$. Así, $V^c \notin H_{X_2}(y)$. Por otro lado, $x \notin h_R(V^c) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ lo que implica que $V^c \in h_R^{-1}(H_{X_1}(x))$. Luego, $h_R^{-1}(H_{X_1}(x)) \nsubseteq H_{X_2}(y)$.

2. $\Rightarrow$ *1.* Probemos que para cada $x \in X_1$,

$$R(x) = \bigcap \{V \in \mathcal{K}_2 \ : \ R(x) \subseteq V\}.$$

Una inclusión es inmediata. Sea $y \in \bigcap \{V \in \mathcal{K}_2 \ : \ R(x) \subseteq V\}$ y supongamos que $y \notin R(x)$. Entonces $h_R^{-1}(H_{X_1}(x)) \nsubseteq H_{X_2}(y)$, es decir, existe $V \in \mathcal{K}_2$ tal que $h_R(V^c) \in H_{X_1}(x)$ y $V^c \notin H_{X_2}(y)$. Así, $y \in V^c$ y $x \notin h_R(V^c)$, o lo que es equivalente, $y \notin V$ y $R(x) \subseteq V$, lo cual es una contradicción. ■

El siguiente lema nos permitirá construir ejemplos de $\vee$-relaciones.

Lema 3.2.3. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $f : X_1 \to X_2$ una aplicación tal que $f^{-1}(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Entonces la relación binaria $R_f \subseteq X_1 \times X_2$ dada por*

$$(x, y) \in R_f \text{ si y sólo si } f(x) \leq_2 y$$

es una $\vee$-relación.

Demostración. Como $R_f(x) = [f(x)) = \mathrm{Sb}(f(x))$, tenemos que $R_f(x)$ es un subconjunto saturado básico de X_2, para cada $x \in X_1$. Por otro lado, claramente $f(x) \in R_f(x)$ y R_f es serial. Por último, si $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$, entonces por el punto *2.* de la Observación 3.1.4 U es decreciente con el orden $\leq_2$ y

$$\begin{aligned} h_{R_f}(U) &= \{x \in X_1 \ : \ R_f(x) \cap U \neq \emptyset\} &&= \{x \in X_1 \ : \ \mathrm{Sb}(f(x)) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X_1 \ : \ f(x) \in U\} &&= f^{-1}(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, R_f es una $\vee$-relación. ■

Por el Lema 3.2.3 y el Teorema 3.1.13, como caso particular tenemos la siguiente $\vee$-relación, la cual será de gran importancia.

Corolario 3.2.4. *Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y sea $H_X : X \to X(D_{\mathcal{K}}(X))$ la aplicación definida en el Teorema 3.1.6. Entonces la relación binaria $H_X^* \subseteq X \times X(D_{\mathcal{K}}(X))$ dada por*

$$(x, P) \in H_X^* \text{ si y sólo si } H_X(x) \subseteq P$$

es una $\vee$-relación.

Similar al caso de los semirretículos distributivos, la composición usual de dos $\vee$-relaciones no necesariamente es una $\vee$-relación. Este hecho motiva a definir una nueva noción de composición entre $\vee$-relaciones. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle, \langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{K}_3\rangle$ DN-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}_\vee[X_2, X_3]$. Definimos la relación binaria $S * R \subseteq X_1 \times X_3$ como

$$(x, z) \in S * R \text{ si y sólo si } \forall U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)\left((S \circ R)(x) \cap U = \emptyset \Rightarrow z \notin U\right).$$

Lema 3.2.5. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle, \langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{K}_3\rangle$ DN-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}_\vee[X_2, X_3]$. Entonces*

$$(x, z) \in S * R \text{ si y sólo si } (h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z).$$

Demostración. Sea $(x, z) \in S * R$. Entonces, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$, si $(S \circ R)(x) \cap U = \emptyset$ implica $z \notin U$, o lo que es equivalente, si $x \notin (h_R \circ h_S)(U)$ entonces $U \in H_{X_3}(z)$. Se sigue que si $U \in (h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x))$, entonces $U \in H_{X_3}(z)$, es decir, $(h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z)$. La recíproca se razona de manera análoga. ■

Observación 3.2.6. Por el Lema 3.2.5, notemos que $(S * R)(x) = \mathrm{Sb}((S \circ R)(x))$ para cada $x \in X_1$. En efecto,

$$\begin{aligned} z \in (S * R)(x) &\iff (h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z) \\ &\iff \forall U \in \mathcal{K}_3\left(x \notin (h_R \circ h_S)(U^c) \Rightarrow z \notin U^c\right) \\ &\iff \forall U \in \mathcal{K}_3\left(x \notin h_{(S\circ R)}(U^c) \Rightarrow z \in U\right) \\ &\iff \forall U \in \mathcal{K}_3\left((S \circ R)(x) \subseteq U \Rightarrow z \in U\right) \\ &\iff z \in \bigcap\{U \in \mathcal{K}_3 : (S \circ R)(x) \subseteq U\} \\ &\iff z \in \mathrm{Sb}((S \circ R)(x)). \end{aligned}$$

Lema 3.2.7. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle, \langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{K}_3\rangle$ DN-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}_\vee[X_2, X_3]$. Entonces $h_{(S*R)}(U) = (h_R \circ h_S)(U)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$.*

Demostración. Si $U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$ y $x \in (h_R \circ h_S)(U)$, entonces $(h_R \circ h_S)(U) \notin H_{X_1}(x)$ y $U \notin (h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x))$. Como $D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$ es una DN-álgebra, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(D_{\mathcal{K}_3}(X_3))$ tal que $(h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq P$ y $U \notin P$. Luego, por el Teorema 3.1.6, existe $z \in X_3$ tal que $P = H_{X_3}(z)$. Entonces $(h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z)$ y por el Lema 3.2.5 tenemos que $(x, z) \in S * R$. Como $U \notin H_{X_3}(z)$, $z \in U$ y por lo tanto $(S * R)(x) \cap U \neq \emptyset$, es decir, $x \in h_{(S*R)}(U)$.

Veamos la recíproca. Si $x \in h_{(S*R)}(U)$, entonces existe $z \in X_3$ tal que $(x, z) \in S * R$ y $z \in U$. Por el Lema 3.2.5, $(h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z)$. Además, como $U \notin H_{X_3}(z)$, se sigue que $U \notin (h_R \circ h_S)^{-1}(H_{X_1}(x))$ y $(h_R \circ h_S)(U) \notin H_{X_1}(x)$. Concluimos que $x \in (h_R \circ h_S)(U)$. ■

Con los lemas desarrollados hasta el momento podemos demostrar el siguiente resultado técnico donde nos garantiza que los DN-espacios junto con las $\vee$-relaciones forman una categoría.

Teorema 3.2.8. *Sean* $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle, \langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ *y* $\langle X_3, \mathcal{K}_3\rangle$ *DN-espacios. Sea* $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$ *y* $S \in \mathcal{SR}_\vee[X_2, X_3]$.

1. $\leq_1 \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_1]$.

2. $R * \leq_1 = R = \leq_2 * R$.

3. $S * R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_3]$.

Demostración. *1.* De la misma definición, $\leq_1$ es serial y $\leq_1(x) = \mathrm{Sb}(x)$ para cada $x \in X_1$. Por último, probemos que si $U \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, entonces $h_{\leq_1}(U) = U$. Sea $x \in U$. Por reflexividad, $x \leq_1 x$. Entonces $\leq_1(x) \cap U \neq \emptyset$ y $x \in h_{\leq_1}(U)$. Recíprocamente, sea $x \in h_{\leq_1}(U)$. Entonces $\leq_1(x) \cap U \neq \emptyset$, es decir, existe $y \in X_1$ tal que $y \in \leq_1(x) \cap U$. Como $x \leq_1 y$ y U es decreciente por la Observación 3.1.4, tenemos que $x \in U$. Por lo tanto $h_{\leq_1}(U) = U$ y $\leq_1$ es una $\vee$-relación.

2. Por los Lemas 3.2.2 y 3.2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}(x, z) \in R * \leq_1 &\iff (h_{\leq_1} \circ h_R)^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z) \\ &\iff h_R^{-1}(H_{X_1}(x)) \subseteq H_{X_3}(z) \\ &\iff (x, z) \in R.\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $R = \leq_2 * R$.

3. Como R y S son $\vee$-relaciones, por el Lema 3.2.7 se sigue que $h_{(S*R)}(U) = (h_R \circ h_S)(U)$ para cada $U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$. Por otro lado, por la Observación 3.2.6, tenemos que $(S * R)(x) = \mathrm{Sb}((S \circ R)(x))$. Finalmente, la serialidad de $S * R$ se sigue de la serialidad de la composición $S \circ R$. Por lo tanto, concluimos que $S * R$ es una $\vee$-relación. ■

Denotaremos como $\mathcal{SR}_\vee$ a la categoría que tiene como objetos DN-espacios y como morfismos $\vee$-relaciones entre DN-espacios.

En la Sección 3.1 estudiamos la relación entre las DN-álgebras y los DN-espacios. Con el fin de completar la dualidad, vamos a analizar la relación que existe entre $\vee$-semi-homomorfismos y $\vee$-relaciones. Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A,B]$. Definimos la relación binaria $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ como

$$(P,Q) \in R_h \text{ si y sólo si } h^{-1}(P) \subseteq Q.$$

Proposición 3.2.9. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A,B]$.*

1. *Para cada $P \in X(B)$ y cada $a \in A$, $h(a) \notin P$ si y sólo si existe $Q \in X(A)$ tal que $(P,Q) \in R_h$ y $a \notin Q$.*

2. *$R_h \in \mathcal{SR}_{\vee}[X(B), X(A)]$.*

3. *Si $C \in \mathcal{DNS}_{\vee}$ y $k \in \mathcal{DNS}_{\vee}[B,C]$, entonces $R_{k\circ h} = R_h * R_k$.*

Demostración. *1.* Sea $P \in X(B)$ y $a \in A$. Si $h(a) \notin P$, entonces $a \notin h^{-1}(P)$. Por otro lado, como h es un $\vee$-semi-homomorfismo, se sigue que $h^{-1}(P) \in \mathrm{Id}(A)$. Entonces $h^{-1}(P) \cap [a) = \emptyset$, y por el Teorema 2.2.6 existe $Q \in X(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q$ y $a \notin Q$, es decir, $(P,Q) \in R_h$ y $a \notin Q$. La recíproca es inmediata.

2. Sea $P \in X(B)$. Así, $h^{-1}(P) \in \mathrm{Id}(A)$. Se sigue que $h^{-1}(P)$ es un ideal propio de A, pues si $1 \in h^{-1}(P)$ entonces $h(1) = 1 \in P$, lo cual es una contradicción ya que P es un ideal propio. Luego, por el Teorema 2.2.6, existe $Q \in X(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q$. Tenemos así que $Q \in R_h(P)$ y R_h es serial. Veamos ahora que para cada $P \in X(B)$, $R_h(P)$ es un subconjunto saturado básico de $X(A)$. Probemos que

$$R_h(P) = \bigcap \{\varphi_A(a)^c \ : \ h(a) \in P\}.$$

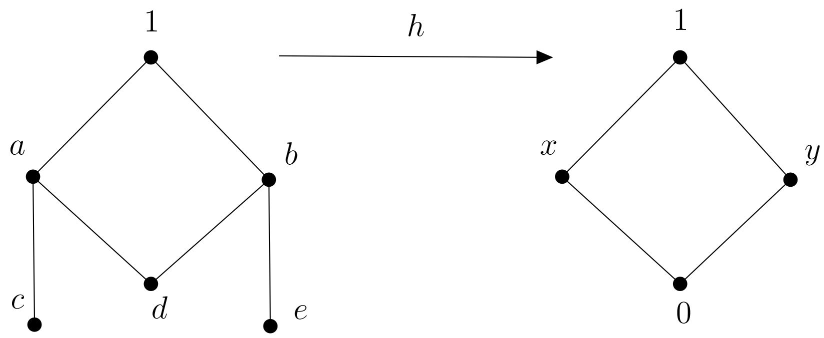
Si $Q \in R_h(P)$, entonces $h^{-1}(P) \subseteq Q$ y para cada $h(a) \in P$, $a \in Q$. Así, $Q \in \varphi_A(a)^c$ para cada $h(a) \in P$, es decir, $Q \in \bigcap \{\varphi_A(a)^c \ : \ h(a) \in P\}$. Recíprocamente, sea $Q \in \bigcap \{\varphi_A(a)^c \ : \ h(a) \in P\}$. Entonces $Q \in \varphi_A(a)^c$ para cada $h(a) \in P$, o lo que es equivalente, $a \in Q$ para cada $a \in h^{-1}(P)$. Luego, $h^{-1}(P) \subseteq Q$ y $Q \in R_h(P)$. Por último, por el punto *1.*, tenemos que $\varphi_B(h(a)) = h_{R_h}(\varphi_A(a))$ para cada $a \in A$. Así, $h_{R_h}(\varphi_A(a)) \in D_{\mathcal{K}_B}(X(B))$ para cada $\varphi_A(a) \in D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ y la relación R_h es una $\vee$-relación.

3. Por la Observación 3.2.6, será suficiente con probar que para cada $P \in X(C)$,

$$(R_{k\circ h})(P) = \mathrm{Sb}((R_h \circ R_k)(P)) = \bigcap \{\varphi_A(a)^c \ : \ (R_h \circ R_k)(P) \subseteq \varphi_A(a)^c\}.$$

Si $Q \in (R_{k \circ h})(P)$, entonces $h^{-1}(k^{-1}(P)) \subseteq Q$. Tomemos $\varphi_A(a)^c \in \mathcal{K}_A$ tal que $(R_h \circ R_k)(P) \subseteq \varphi_A(a)^c$ y veamos que $Q \in \varphi_A(a)^c$, es decir, $a \in Q$. Supongamos que $a \notin Q$. Entonces $a \notin h^{-1}(k^{-1}(P))$. Como $h(a) \notin k^{-1}(P)$, por el Teorema 2.2.6, existe $R \in X(B)$ tal que $k^{-1}(P) \subseteq R$ y $h(a) \notin R$. Nuevamente, como $a \notin h^{-1}(R)$ y por el Teorema 2.2.6, existe $S \in X(A)$ tal que $h^{-1}(R) \subseteq S$ y $a \notin S$. Así, $(P,R) \in R_k$ y $(R,S) \in R_h$. Luego, $(P,S) \in R_h \circ R_k$ y $S \in (R_h \circ R_k)(P)$. Entonces $S \in \varphi_A(a)^c$, o lo que es equivalente, $a \in S$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a \in Q$ y $Q \in \mathrm{Sb}((R_h \circ R_k)(P))$. Para probar la otra inclusión, tomemos $Q \in \mathrm{Sb}((R_h \circ R_k)(P))$. Bastará probar que $(k \circ h)^{-1}(P) \subseteq Q$. Sea $a \in h^{-1}(k^{-1}(P))$. Se sigue que $(R_h \circ R_k)(P) \subseteq \varphi_A(a)^c$. En efecto, si $(P,S) \in R_h \circ R_k$ entonces existe $T \in X(B)$ tal que $(P,T) \in R_k$ y $(T,S) \in R_h$. Luego, $k^{-1}(P) \subseteq T$ y $h^{-1}(T) \subseteq S$ lo cual implica que $h^{-1}(k^{-1}(P)) \subseteq S$ y $a \in S$, es decir, $S \in \varphi_A(a)^c$. Finalmente, por hipótesis, $Q \in \varphi_A(a)^c$ y $a \in Q$. ■

Ejemplo 3.2.1. La siguiente figura nos muestra una aplicación $h : A \to B$ entre DN-algebras definida como $h(1) = 1, h(a) = h(c) = x, h(b) = h(e) = y$ y $h(d) = 0$. Es sencillo de comprobar que h es un $\vee$-semi-homomorfismo sobreyectivo.



Para encontrar la $\vee$-relación R_h asociada al $\vee$-semi-homomorfismo h, debemos primero construir los espacios duales de A y B. De manera similar a como hicimos en los Ejemplos 2.2.2 y 3.1.1, tenemos que $X(A) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, donde $Q_1 = \{c\}, Q_2 = \{e\}, Q_3 = \{a,c,d\}$ y $Q_4 = \{b,d,e\}$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_A(1) &= X(A), & \varphi_A(c) &= \{Q_2, Q_4\}, \\ \varphi_A(a) &= \{Q_1, Q_2, Q_4\}, & \varphi_A(d) &= \{Q_1, Q_2\}, \\ \varphi_A(b) &= \{Q_1, Q_2, Q_3\}, & \varphi_A(e) &= \{Q_1, Q_3\} \end{aligned}$$

y la familia $\mathcal{K}_A = \{\varphi_A(1)^c, \varphi_A(a)^c, \varphi_A(b)^c, \varphi_A(c)^c, \varphi_A(d)^c, \varphi_A(e)^c\}$ forma una base para la topología

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, X(A), \{Q_3\}, \{Q_4\}, \{Q_1, Q_3\}, \{Q_3, Q_4\}, \\ \{Q_2, Q_4\}, \{Q_2, Q_3, Q_4\}, \{Q_1, Q_3, Q_4\} \end{array} \right\}$$

sobre $X(A)$. De forma análoga, tenemos que $X(B) = \{P_1, P_2\}$, donde $P_1 = \{x, 0\}$ y $P_2 = \{y, 0\}$. Se sigue que

$$\begin{array}{rclrcl} \varphi_B(1) & = & X(B), & \varphi_B(y) & = & \{P_1\}, \\ \varphi_B(x) & = & \{P_2\}, & \varphi_B(0) & = & \{P_1, P_2\} \end{array}$$

y la familia $\mathcal{K}_B = \{\varphi_A(1)^c, \varphi_A(x)^c, \varphi_A(y)^c, \varphi_A(0)^c\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_B} = \{\emptyset, X(B), \{P_1\}, \{P_2\}\}$ sobre $X(B)$. Así, $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ y $\langle X(B), \mathcal{K}_B\rangle$ son los espacios duales de A y B, respectivamente. Veamos que la relación $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ dada por $R_h = \{(P_1, Q_3), (P_2, Q_4)\}$ es una $\vee$-relación. Claramente, R_h es serial. También, $R_h(P_1) = \{Q_3\} = \mathrm{Sb}(Q_3)$ y $R_h(P_2) = \{Q_4\} = \mathrm{Sb}(Q_4)$, lo cual implica que $R_h(P)$ es un subconjunto saturado básico de $X(A)$, para cada $P \in X(B)$. Por último, se verifica fácilmente que

$$\begin{array}{rclrcl} h_{R_h}(\varphi_A(1)) & = & \varphi_B(1), & h_{R_h}(\varphi_A(c)) & = & \varphi_B(x), \\ h_{R_h}(\varphi_A(a)) & = & \varphi_B(x), & h_{R_h}(\varphi_A(d)) & = & \varphi_B(0), \\ h_{R_h}(\varphi_A(b)) & = & \varphi_B(y), & h_{R_h}(\varphi_A(e)) & = & \varphi_B(y). \end{array}$$

Concluimos que R_h es una $\vee$-relación.

Observación 3.2.10. Si A es una DN-álgebra e $Id : A \to A$ la aplicación identidad, entonces

$$R_{Id} = \{(P, Q) \in X(A) \times X(A) \ : \ P \subseteq Q\} = \subseteq .$$

Estamos en condiciones de probar la existencia de un funtor contravariante de $\mathcal{DNS}_\vee$ en $\mathcal{SR}_\vee$. Por el Teorema 3.1.12, la Proposición 3.2.9 y la Observación 3.2.10, podemos concluir que

$$\mathbb{X}_\vee : \mathcal{DNS}_\vee \to \mathcal{SR}_\vee$$

dada por

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{X}_\vee(A) & = & \langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle & \text{si } \langle A, \vee, 1\rangle \text{ es una DN-álgebra,} \\ \mathbb{X}_\vee(h) & = & R_h & \text{si } h \text{ es un } \vee\text{-semi-homomorfismo,} \end{array}$$

es un funtor contravariante.

Probemos que también existe un funtor contravariante de $\mathcal{SR}_\vee$ en $\mathcal{DNS}_\vee$.

Teorema 3.2.11. *Sean* $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ *y* $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ *DN-espacios y sea* $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$. *Entonces* $h_R \in \mathcal{DNS}_\vee[D_{\mathcal{K}_2}(X_2), D_{\mathcal{K}_1}(X_1)]$.

Demostración. Como R es una $\vee$-relación, $h_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ y h_R está bien definida. Si $U, V \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$, claramente se sigue que $h_R(U \cup V) = h_R(U) \cup h_R(V)$. Por otro lado, como R es serial, tenemos que $h_R(X_2) = X_1$. Concluimos que h_R es un $\vee$-semi-homomorfismo. ■

Observación 3.2.12. Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio y sea $\leq \subseteq X \times X$ la $\vee$-relación identidad. Por el punto *1.* del Teorema 3.2.8 tenemos que $h_\leq(U) = U$ para cada $U \in D_\mathcal{K}(X)$. Así, $h_\leq : D_\mathcal{K}(X) \to D_\mathcal{K}(X)$ es la aplicación identidad.

Por los Teoremas 3.1.13, 3.2.8, 3.2.11 y la Observación 3.2.12, podemos definir un funtor contravariante

$$\mathbb{D}_\vee : \mathcal{SR}_\vee \to \mathcal{DNS}_\vee$$

como

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{D}_\vee(X) & = & \langle D_\mathcal{K}(X), \cup, X\rangle & \text{si } \langle X, \mathcal{K}\rangle \text{ es un DN-espacio,} \\ \mathbb{D}_\vee(R) & = & h_R & \text{si } R \text{ es una } \vee\text{-relación.} \end{array}$$

Si $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un DN-espacio, entonces por el Teorema 3.1.13 tenemos que la aplicación $H_X : X \to X(D_\mathcal{K}(X))$ dada por $H_X(x) = \{U \in D_\mathcal{K}(X) : x \notin U\}$ es un homeomorfismo. Luego, por el Corolario 3.2.4, $H_X^* \subseteq X \times X(D_\mathcal{K}(X))$ dada por $(x, P) \in H_X^*$ si y sólo si $H_X(x) \subseteq P$ es una $\vee$-relación.

Teorema 3.2.13. H^* *es un isomorfismo natural entre los funtores* $\mathbf{1}_{\mathcal{SR}_\vee}$ *y* $\mathbb{X}_\vee \circ \mathbb{D}_\vee$.

Demostración. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$. Por el Lema 3.2.2,

$$(x, y) \in R \iff (H_{X_1}(x), H_{X_2}(y)) \in R_{h_R}. \tag{3.4}$$

Por el Corolario 3.2.4, tenemos que las relaciones binarias $H_{X_1}^*$ y $H_{X_2}^*$ son $\vee$-relaciones. Probemos que

$$H_{X_2}^* * R = R_{h_R} * H_{X_1}^*.$$

Por la Observación 3.2.6, bastará con probar que $R_{h_R} \circ H_{X_1}^* = H_{X_2}^* \circ R$. Sea $x \in X_1$ y $P \in X(D_{\mathcal{K}_2}(X_2))$. Supongamos que $(x, P) \in H_{X_2}^* \circ R$. Entonces existe $y \in X_2$ tal que $(x, y) \in R$ e $(y, P) \in H_{X_2}^*$. Luego, por 3.4 y el Corolario 3.2.4 tenemos que $(H_{X_1}(x), H_{X_2}(y)) \in R_{h_R}$ y $H_{X_2}(y) \subseteq P$. Al ser H_{X_2} una aplicación biyectiva, entonces existe $z \in X_2$ tal que $H_{X_2}(z) = P$. Así, $H_{X_2}(y) \subseteq H_{X_2}(z)$. Es decir, $(H_{X_1}(x), H_{X_2}(z)) \in (\subseteq \circ R_{h_R}) = R_{h_R}$. Como $(x, H_{X_1}(x)) \in H^*_{X_1}$ se sigue que $(x, P) \in R_{h_R} \circ H^*_{X_1}$.

Recíprocamente, sea $(x, P) \in R_{h_R} \circ H^*_{X_1}$. Entonces existe $Q \in X(D_{\mathcal{K}_1}(X_1))$ tal que $(x, Q) \in H^*_{X_1}$ y $(Q, P) \in R_{h_R}$. Como las aplicaciones H_{X_1} y H_{X_2} son biyectivas, se sigue que existen $y \in X_1$ y $z \in X_2$ tales que $Q = H_{X_1}(y)$ y $P = H_{X_2}(z)$. Por lo tanto, $H_{X_1}(x) \subseteq H_{X_1}(y)$ y $(H_{X_1}(y), H_{X_2}(z)) \in R_{h_R}$, es decir, $(H_{X_1}(x), H_{X_2}(z)) \in (R_{h_R} \circ \subseteq) = R_{h_R}$. Por 3.4 se sigue que $(x, z) \in R$ y $(z, H_{X_2}(z)) \in H^*_{X_2}$. Concluimos que $(x, P) \in H^*_{X_2} \circ R$.

Por el Teorema 3.1.13, H_{X_1} es un homeomorfismo entre X_1 y $(\mathbb{X}_\vee \circ \mathbb{D}_\vee)(X_1)$. Por lo tanto, H^* es un isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{SR}_\vee}$ y $\mathbb{X}_\vee \circ \mathbb{D}_\vee$. ■

Recordemos que si A es una DN-álgebra, entonces por el Teorema 3.1.12 tenemos que la aplicación $\varphi_A : A \to D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ es un isomorfismo entre DN-álgebras.

Teorema 3.2.14. *φ es un isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{DNS}_\vee}$ y $\mathbb{D}_\vee \circ \mathbb{X}_\vee$.*

Demostración. Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_\vee[A, B]$. Probemos que se satisface

$$\varphi_B \circ h = h_{R_h} \circ \varphi_A.$$

Sea $P \in X(B)$ y $a \in A$. Por el punto *1.* de la Proposición 3.2.9 y el Teorema 2.2.6,

$$\begin{aligned} P \in h_{R_h}(\varphi_A(a)) &\iff R_h(P) \cap \varphi_A(a) \neq \emptyset \\ &\iff \exists Q \in X(B)\,(Q \in R_h(P) \cap \varphi_A(a)) \\ &\iff a \notin h^{-1}(P) \\ &\iff P \in \varphi_B(h(a)). \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 3.1.12, φ_A es un isomorfismo entre A y $(\mathbb{D}_\vee \circ \mathbb{X}_\vee)(A)$. Por lo tanto, φ es un isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{DNS}_\vee}$ y $\mathbb{D}_\vee \circ \mathbb{X}_\vee$. ■

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.15. *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}_\vee$ y $\mathbb{D}_\vee$ y los isomorfismos naturales H^* y φ establecen una equivalencia dual entre la categoría de DN-álgebras con $\vee$-semi-homomorfismos y la categoría de DN-espacios con $\vee$-relaciones.*

3.2.2 Dualidad para $\mathcal{DNH}$

Denotaremos como $\mathcal{DNH}$ a la categoría que tiene como objetos DN-álgebras y como morfismos homomorfismos entre DN-álgebras. Con el objetivo de poder describir los homomorfismos, continuamos con el estudio de los $\vee$-semi-homomorfismos. El siguiente lema nos permitirá describir dualmente a los homomorfismos.

Lema 3.2.16. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNH}[A,B]$. Entonces para cada $P \in X(B)$ y $Q \in X(A)$,*

$$R_h(P) = \mathrm{Sb}(Q) \text{ si y sólo si } h^{-1}(P) = Q.$$

Demostración. Sean $P \in X(B)$ y $Q \in X(A)$ tal que $R_h(P) = \mathrm{Sb}(Q)$. Como $Q \in \mathrm{Sb}(Q)$, entonces $Q \in R_h(P)$, es decir, $h^{-1}(P) \subseteq Q$. Probemos la otra inclusión. Por el Teorema 2.2.22, $h^{-1}(P) \in X(A)$ y $h^{-1}(P) \subseteq h^{-1}(P)$. Así, $h^{-1}(P) \in R_h(P) = \mathrm{Sb}(Q)$, es decir,

$$h^{-1}(P) \in \bigcap \{\varphi_A(a)^c \ : \ Q \in \varphi_A(a)^c\}.$$

Luego, $a \in h^{-1}(P)$ para cada $a \in Q$ o lo que es equivalente $Q \subseteq h^{-1}(P)$.

Recíprocamente, supongamos que $h^{-1}(P) = Q$. Entonces

$$\begin{aligned} H \in R_h(P) &\iff Q = h^{-1}(P) \subseteq H \\ &\iff \forall a \in A\,(a \in Q \Rightarrow a \in H) \\ &\iff \forall \varphi_A(a)^c \in \mathcal{K}_A\,(Q \in \varphi_A(a)^c \Rightarrow H \in \varphi_A(a)^c) \\ &\iff H \in \mathrm{Sb}(Q). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R_h(P) = \mathrm{Sb}(Q)$. ■

El Teorema 2.2.22 y el Lema 3.2.16 motivan la siguiente definición.

Definición 3.2.17. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_\vee[X_1, X_2]$. Diremos que R es una *relación funcional* si para cada $x \in X_1$, existe $y \in X_2$ tal que $R(x) = \mathrm{Sb}(y)$.

Denotaremos como $\mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$ al conjunto de todas las relaciones funcionales entre los DN-espacios $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ y como $\mathcal{SR}_f$ a la categoría que tiene como objetos DN-espacios y como morfismos relaciones funcionales entre DN-espacios.

Utilizando el Teorema 3.2.15 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.18. *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}_\vee|_{\mathcal{DNH}}$ y $\mathbb{D}_\vee|_{\mathcal{SR}_f}$ y los isomorfismos naturales H^* y φ establecen una equivalencia dual entre la categoría de DN-álgebras con homomorfismos y la categoría de DN-espacios con relaciones funcionales.*

Veamos que las relaciones funcionales se corresponden con ciertas funciones entre DN-espacios. En la siguiente definición, generalizamos a las funciones de Stone.

Definición 3.2.19. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $f : X_1 \to X_2$ una aplicación. Diremos que f es una *DN-función* si $f^{-1}(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$.

Sea $\mathcal{SF}[X_1, X_2]$ el conjunto de todas las DN-funciones entre los DN-espacios $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$. Como los DN-espacios son una generalización de los espacios de Stone, se sigue que las funciones de Stone son un caso particular de las DN-funciones. Denotaremos como $\mathcal{SF}$ a la categoría que tiene como objetos DN-espacios y como morfismos DN-funciones entre DN-espacios.

Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios. Si $R \in \mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$, definimos la aplicación $f_R : X_1 \to X_2$ dada por

$$f_R(x) = y \text{ si y sólo si } R(x) = \mathrm{Sb}(y).$$

Lema 3.2.20. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$. Entonces $f_R \in \mathcal{SF}[X_1, X_2]$.*

Demostración. Probemos que $f_R^{-1}(U) = h_R(U)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Sea $x \in f_R^{-1}(U)$. Entonces $f_R(x) = y \in U$ y $\mathrm{Sb}(y) \cap U \neq \emptyset$. Así, $R(x) \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto $x \in h_R(U)$. Recíprocamente, si $x \in h_R(U)$ entonces $\mathrm{Sb}(y) \cap U \neq \emptyset$. Luego, existe $z \in \mathrm{Sb}(y) = [y)$ tal que $z \in U$. Como $y \leq z$ y por la Observación 3.1.4 U es decreciente respecto a $\leq$, tenemos que $y = f_R(x) \in U$. Así, $x \in f_R^{-1}(U)$. Finalmente, como $h_R(U) \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ se sigue que f_R es una DN-función. ■

Sea $f \in \mathcal{SF}[X_1, X_2]$. Tomemos la relación $R_f \subseteq X_1 \times X_2$ dada por

$$(x, y) \in R_f \text{ si y sólo si } f(x) \leq_2 y.$$

Lema 3.2.21. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $f \in \mathcal{SF}[X_1, X_2]$. Entonces $R_f \in \mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$.*

Demostración. Por el Lema 3.2.3 sabemos que R_f es una $\mathrm{DN}_\vee$-relación. Solamente nos falta probar que es funcional, lo cual se sigue de manera inmediata ya que para cada $x \in X_1$, $R_f(x) = [f(x)) = \mathrm{Sb}(f(x))$. ■

Teorema 3.2.22. *Las categorías $\mathcal{SR}_f$ y $\mathcal{SF}$ son isomorfas.*

Demostración. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$ y $f \in \mathcal{SF}[X_1, X_2]$. Debemos probar que $R_{f_R} = R$ y $f_{R_f} = f$. En efecto,

$$\begin{aligned}(x,y) \in R_{f_R} &\iff f_R(x) \leq_2 y &&\iff y \in [f_R(x)) \\ &\iff y \in R(x) &&\iff (x,y) \in R.\end{aligned}$$

De manera similar tenemos que

$$f_{R_f}(x) = y \iff R_f(x) = [y) \iff f(x) = y.$$

Por lo tanto, las categorías $\mathcal{SR}_f$ y $\mathcal{SF}$ son isomorfas. ■

Ejemplo 3.2.2. En el Ejemplo 3.2.1 definimos un $\vee$-semi-homomorfismo h entre las DN-álgebras A y B. En realidad, h es un homomorfismo. Por lo tanto, R_h es una relación funcional, pues $R_h(P_1) = \mathrm{Sb}(Q_3)$ y $R_h(P_2) = \mathrm{Sb}(Q_4)$. Luego, la aplicación $f_{R_h} : X(B) \to X(A)$ asociada a la relación funcional R_h dada por

$$f_{R_h}(P) = Q \text{ si y sólo si } R_h(P) = \mathrm{Sb}(Q)$$

es una DN-función, ya que

$$\begin{aligned} f_{R_h}^{-1}(\varphi_A(1)) &= \varphi_B(1), & f_{R_h}^{-1}(\varphi_A(c)) &= \varphi_B(x), \\ f_{R_h}^{-1}(\varphi_A(a)) &= \varphi_B(x), & f_{R_h}^{-1}(\varphi_A(d)) &= \varphi_B(0), \\ f_{R_h}^{-1}(\varphi_A(b)) &= \varphi_B(y), & f_{R_h}^{-1}(\varphi_A(e)) &= \varphi_B(y). \end{aligned}$$

3.3 Aplicaciones

En las siguientes subsecciones presentamos algunas aplicaciones de los resultados desarrollados hasta el momento para caracterizar dualmente varios conceptos algebraicos de la teoría de DN-álgebras como los homomorfismos inyectivos y sobreyectivos, los retículos de las congruencias, subálgebras y filtros, y también sobre la existencia de la extensión reticular distributiva libre.

3.3.1 Homomorfismos

Definimos la noción de homomorfismo fuertemente inyectivo, el cual es un caso particular de homomorfismo inyectivo, y mostramos que los homomorfismos fuertemente inyectivos y sobreyectivos entre DN-álgebras corresponden a DN-relaciones funcionales sobreyectivas e inyectivas, respectivamente.

Definición 3.3.1. Sean A y B DN-álgebras y sea $h : A \to B$ un homomorfismo. Diremos que h es *fuertemente inyectivo* si para cada $a, b_1, ..., b_n \in A$ se satisface la siguiente condición:

$$\text{si } \left[h(a)\right) \subseteq \left[h(b_1)\right) \vee ... \vee \left[h(b_n)\right), \text{ entonces } [a) \subseteq [b_1) \vee ... \vee [b_n).$$

Se prueba fácilmente que todo homomorfismo fuertemente inyectivo es inyectivo, y en el caso de los retículos distributivos acotados, ambas nociones coinciden.

Definición 3.3.2. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$.

1. Diremos que R es *sobreyectiva* si para cada $y \in X_2$, existe $x \in X_1$ tal que $R(x) = \mathrm{Sb}(y)$.

2. Diremos que R es *inyectiva* si para cada $x \in X_1$ y para cada $U \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ con $x \notin U$, existe $V \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $U \subseteq h_R(V)$ y $x \notin h_R(V)$.

Teorema 3.3.3. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNH}[A, B]$.*

1. *h es fuertemente inyectiva si y sólo si R_h es sobreyectiva.*

2. *h es sobreyectiva si y sólo si R_h es inyectiva.*

Demostración. *1.* Supongamos que h es fuertemente inyectiva y sea $Q \in X(A)$. Veamos que $I(h(Q)) \cap F(h(Q^c)) = \emptyset$. Si suponemos lo contrario, existe $x \in B$ tal que $x \in I(h(Q)) \cap F(h(Q^c))$. Luego, existe $a \in Q$ tal que $x \leq h(a)$ y existen $x_1, ..., x_n \in [h(Q^c))$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = x$. Así, $x_1 \wedge ... \wedge x_n \leq h(a)$. Entonces existen $q_1, ..., q_n \in Q^c$ tal que $h(q_i) \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Probemos que $[h(a)) \subseteq [h(q_1)) \vee ... \vee [h(q_n))$. Si $w \in [h(a))$, entonces $h(a) \leq w$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n \leq w$, es decir, $w \in [x_1) \vee ... \vee [x_n)$. Además, como $[x_i) \subseteq [h(q_i))$ para cada $i = 1, ..., n$, se sigue que $[x_1) \vee ... \vee [x_n) \subseteq [h(q_1)) \vee ... \vee [h(q_n))$ y $w \in [h(q_1)) \vee ... \vee [h(q_n))$. Por lo tanto $[h(a)) \subseteq [h(q_1)) \vee ... \vee [h(q_n))$ y al ser h fuertemente inyectiva tenemos que $[a) \subseteq [q_1) \vee ... \vee [q_n)$. Como $q_1, ..., q_n \in Q^c$ y Q^c es filtro, $[q_1) \vee ... \vee [q_n) \subseteq Q^c$. Así, $a \in Q^c$ lo cual es una contradicción. Entonces $I(h(Q)) \cap F(h(Q^c)) = \emptyset$ y por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(B)$ tal que $I(h(Q)) \subseteq P$ y $Q \cap F(h(Q^c)) = \emptyset$. Luego, $h(Q) \subseteq P$ y $P \subseteq h(Q)$, lo que implica que $h(Q) = P$. Se sigue por el Lema 3.2.16 que R_h es sobreyectiva.

De manera recíproca, sean $a, b_1, ..., b_n \in A$ tal que $[h(a)) \subseteq [h(b_1)) \vee ... \vee [h(b_n))$. Supongamos que $a \notin [b_1) \vee ... \vee [b_n)$. Entonces $a \notin F(\{b_1, ..., b_n\})$ y por el Teorema

2.2.6, existe $Q \in X(A)$ tal que $a \in Q$ y $Q \cap F(\{b_1, ..., b_n\}) = \emptyset$. Al ser R_h sobreyectiva, existe $P \in X(B)$ tal que $R_h(P) = \mathrm{Sb}(Q)$, es decir, $h^{-1}(P) = Q$. Entonces $h(a) \in P$ y $h(b_1), ..., h(b_n) \notin P$. Como $[h(a)) \subseteq [h(b_1)) \vee ... \vee [h(b_n)) = F(\{h(b_1), ..., h(b_n)\})$, tenemos que $h(a) \in F(\{h(b_1), ..., h(b_n)\})$, lo que implica que existen $x_1, ..., x_m \in [\{h(b_1), ..., h(b_n)\})$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_m$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_m = h(a)$. Luego, existen $h(b_{k_1}), ..., h(b_{k_m}) \in \{h(b_1), ..., h(b_n)\}$ tal que $h(b_{k_i}) \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Por otro lado, $h(a) \in P$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_m \in P$. Al ser P un ideal primo, existe $x_i \in P$ para algún i tal que $1 \leq i \leq m$. Se sigue que $h(b_{k_i}) \in P$ lo cual es una contradicción. Así, $a \in [b_1) \vee ... \vee [b_n)$ y h es fuertemente inyectiva.

2. Supongamos que h es sobreyectiva. Sea $P \in X(B)$ y $\varphi_B(b) \in D_{\mathcal{K}_B}(X(B))$ tal que $P \notin \varphi_B(b)$. Luego, existe $a \in A$ tal que $h(a) = b$ y por la Proposición 3.2.9, $\varphi_B(b) = \varphi_B(h(a)) = h_{R_h}(\varphi_A(a))$. Así, existe $h_{R_h}(\varphi_A(a)) \in D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ tal que $\varphi_B(b) \subseteq h_{R_h}(\varphi_A(a))$ y $P \notin h_{R_h}(\varphi_A(a))$.

Recíprocamente, sea $b \in B$. Para cada $P \in X(B)$ tal que $b \in P$, $P \notin \varphi_B(b)$. Como R_h es inyectiva, existe $\varphi_A(a_P) \in D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ tal que $\varphi_B(b) \subseteq h_{R_h}(\varphi_A(a_P))$ y $P \notin h_{R_h}(\varphi_A(a_P))$. Entonces

$$\varphi_B(b)^c = \bigcap \{h_{R_h}(\varphi_A(a_P))^c \ : \ P \notin \varphi_B(b)\}.$$

Al ser $\varphi_B(b)^c$ dualmente compacto, tenemos que existen $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $\varphi_B(b)^c = h_{R_h}(\varphi_A(a_1))^c \cap ... \cap h_{R_h}(\varphi_A(a_n))^c$. Así, $\varphi_B(b) = h_{R_h}(\varphi_A(a_1 \vee ... \vee a_n))$. Sea $a = a_1 \vee ... \vee a_n$. Aplicando el Teorema 3.2.14, $\varphi_B(b) = h_{R_h}(\varphi_A(a)) = \varphi_B(h(a))$ y como φ_B es inyectiva, $b = h(a)$ y h es sobreyectiva. ■

Teorema 3.3.4. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_f[X_1, X_2]$.*

1. *R es inyectiva si y sólo si h_R es sobreyectiva.*

2. *R es sobreyectiva si y sólo si h_R es fuertemente inyectiva.*

Ejemplo 3.3.1. El homomorfismo h de los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.2 es sobreyectivo. Se puede verificar sencillamente que la relación funcional R_h es inyectiva.

3.3.2 Congruencias

Siguiendo los resultados dados en [29], en la Subsección 2.2.4 del Capítulo 2 vimos una forma de caracterizar el retículo de las congruencias de una DN-álgebra a través del retículo de sus filtros finitamente generados. Utilizando la representación topológica que hemos desarrollado, en esta subsección presentamos una caracterización diferente.

Definición 3.3.5. Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es un base de subconjuntos abiertos y compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Sea Y un subconjunto de X. Diremos que Y es un $\mathcal{K}$-*subconjunto* si para cada $U \in \mathcal{K}$, $U \cap Y$ es un subconjunto compacto en la topología $\mathcal{T}_Y$ sobre Y.

Lema 3.3.6. *Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es un base de subconjuntos abiertos y compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Sea Y un $\mathcal{K}$-subconjunto de X. Entonces $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y \ : \ U \in \mathcal{K}\}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$ sobre Y tal que $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$.*

Demostración. Es sencillo de comprobar que la colección $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y \ : \ U \in \mathcal{K}\}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$ sobre Y tal que $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$. Pobremos la otra inclusión. Si $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$, entonces existe una familia $\{U_i \cap Y \ : \ i \in I\} \subseteq \mathcal{K}_Y$ tal que $O = \bigcup \{U_i \cap Y \ : \ i \in I\}$. Como Y es un $\mathcal{K}$-subconjunto, tenemos que cada $U_i \cap Y$ es un subconjunto abierto y compacto en $\mathcal{T}_Y$. Entonces $O \in \mathcal{T}_Y$ y por lo tanto $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$. ■

Teorema 3.3.7. *Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio e Y un subconjunto no vacío de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\langle Y, \mathcal{K}_Y\rangle$ es un DN-espacio.*
2. *Y es un $\mathcal{K}$-subconjunto y si $A = \{U_i \cap Y \ : \ i \in I\}$ y $B = \{V_k \cap Y \ : \ k \in K\}$ son dos familias no vacías de $D_{\mathcal{K}_Y}(Y)$ tal que*
$$\bigcap \{U_i \cap Y \ : \ i \in I\} \subseteq \bigcup \{V_k \cap Y \ : \ k \in K\},$$
entonces existen $U_1 \cap Y, ..., U_n \cap Y \in [A)$ y $V_1 \cap Y, ..., V_m \cap Y \in B$ tal que $(U_1 \cap Y) \cap ... \cap (U_n \cap Y) \in D_{\mathcal{K}_Y}(Y)$ y
$$(U_1 \cap Y) \cap ... \cap (U_n \cap Y) \subseteq (V_1 \cap Y) \cup ... \cup (V_m \cap Y).$$

Demostración. *1. ⇒ 2.* Probemos que Y es un $\mathcal{K}$-subconjunto de X, es decir, si $U \in \mathcal{K}$ entonces $U \cap Y$ es un subconjunto compacto en la topología $\mathcal{T}_Y$. Al ser $\mathcal{K}$ una base de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, es suficiente con tomar una familia $\{V_i \ : \ i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ tal que
$$U \cap Y \subseteq \bigcup \{V_i \cap Y \ : \ i \in I\}.$$

Sea $Z = \{V_i^c \cap Y \ : \ i \in I\}$. Como $\langle Y, \mathcal{K}_Y\rangle$ es un DN-espacio, tenemos que $D_{\mathcal{K}_Y}(Y) = \{U^c \cap Y \ : \ U \in \mathcal{K}\}$ es una DN-álgebra. Veamos que $I(U^c \cap Y) \cap F(Z) \neq \emptyset$. En caso contrario, si $I(U^c \cap Y) \cap F(Z) = \emptyset$, entonces por el Teorema 2.2.6 existe $P \in X(D_{\mathcal{K}_Y}(Y))$ tal que $I(U^c \cap Y) \subseteq P$ y $P \cap F(Z) = \emptyset$. Por otro lado, por el Teorema 3.1.6, tenemos que la aplicación $H_Y : Y \to X(D_{\mathcal{K}}(Y))$ es sobreyectiva y existe $y \in Y$ tal que $P = H_Y(y)$. Así, $U^c \cap Y \in H_Y(y)$ y $V_i^c \cap Y \notin H_Y(y)$, es decir, $y \notin U^c \cap Y$ e $y \in V_i^c \cap Y$ para cada $i \in I$. Luego, $y \in U \cap Y$ e $y \notin \bigcup\{V_i \cap Y \ : \ i \in I\}$, lo cual es una contradicción. Entonces $I(U^c \cap Y) \cap F(Z) \neq \emptyset$ y existen $V_1^c \cap Y, ..., V_n^c \cap Y \in [Z)$ tal que $(V_1^c \cap Y) \cap ... \cap (V_n^c \cap Y) \in D_{\mathcal{K}_Y}(Y)$ y $(V_1^c \cap Y) \cap ... \cap (V_n^c \cap Y) \subseteq U^c \cap Y$. Se sigue que $U \cap Y \subseteq (V_1 \cap Y) \cup ... \cup (V_n \cap Y)$ y $U \cap Y$ es compacto en $\mathcal{T}_Y$. Por lo tanto Y es un $\mathcal{K}$-subconjunto de X.

2. $\Rightarrow$ *1.* Dado que Y es un $\mathcal{K}$-subconjunto, por el Lema 3.3.6, tenemos que $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y \ : \ U \in \mathcal{K}\}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$. También, es sencillo de ver que para cada $U \cap Y, V \cap Y, W \cap Y \in \mathcal{K}_Y$,

$$[(U \cap Y) \cap (W \cap Y)] \cup [(V \cap Y) \cap (W \cap Y)] \in \mathcal{K}_Y.$$

Por el Teorema 3.1.6, concluimos que $\langle Y, \mathcal{K}_Y\rangle$ es un DN-espacio. ■

Sea A una DN-álgebra y $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. Tenemos entonces el homomorfismo natural $q_\theta : A \to A/\theta$ que asocia a cada elemento $a \in A$ su clase de equivalencia $q_\theta(a) = a/\theta$. Consideremos el conjunto

$$Y_\theta = \left\{q_\theta^{-1}(P) \ : \ P \in X(A/\theta)\right\}. \tag{3.5}$$

Por el Teorema 2.2.22, se sigue que $q_\theta^{-1}(P) \in X(A)$ para cada $P \in X(A/\theta)$. Estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Proposición 3.3.8. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Sea $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. Entonces $\langle Y_\theta, \mathcal{K}_{Y_\theta}\rangle$ es un DN-espacio.*

Demostración. Sea $\varphi_A(a)^c \in \mathcal{K}_A$ y probemos que $\varphi_A(a)^c \cap Y_\theta$ es un subconjunto compacto en la topología $\mathcal{T}_{Y_\theta}$. Nuevamente, como $\mathcal{K}_A$ es una base de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$, será suficiente con tomar una familia $\{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\} \subseteq \mathcal{K}_A$ tal que $\varphi_A(a)^c \cap Y_\theta \subseteq \bigcup\{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\}$. Consideremos el conjunto $B/\theta = \{b/\theta \ : \ b \in B\}$ y veamos que

$$(a/\theta] \cap F(B/\theta) \neq \emptyset.$$

Si suponemos que $(a/\theta] \cap F(B/\theta) = \emptyset$, por el Teorema 2.2.6 existe $Q \in X(A/\theta)$ tal que $a/\theta \in Q$ y $Q \cap F(B/\theta) = \emptyset$. Luego, tenemos que $q_\theta^{-1}(Q) \in X(A)$ y $q_\theta^{-1}(Q) \in$

$\varphi_A(a)^c \cap Y_\theta \subseteq \bigcup\{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\}$. Así, existe $b_i \in B$ tal que $q_\theta^{-1}(Q) \in \varphi_A(b_i)^c$, es decir, $b_i \in q_\theta^{-1}(Q)$. Entonces $q_\theta(b_i) = b_i/\theta \in Q$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $c \in A$ tal que $c/\theta \in (a/\theta] \cap F(B/\theta)$, lo que implica que existen $b_1/\theta, ..., b_n/\theta \in [B/\theta)$ tal que existe $b_1/\theta \wedge ... \wedge b_n/\theta$ y $b_1/\theta \wedge ... \wedge b_n/\theta = c/\theta \leq a/\theta$. Como $b_1/\theta, ..., b_n/\theta \in [B/\theta)$, existen $\overline{b_1}/\theta, ..., \overline{b_n}/\theta \in B/\theta$ tal que $\overline{b_i}/\theta \leq b_i/\theta$ para cada $i = 1, ..., n$. Veamos que

$$\varphi_A(a)^c \cap Y_\theta \subseteq \left[\varphi_A\left(\overline{b_1}\right)^c \cap Y_\theta\right] \cup ... \cup \left[\varphi_A\left(\overline{b_n}\right)^c \cap Y_\theta\right].$$

Si $P \in \varphi_A(a)^c \cap Y_\theta$, entonces $a \in P$ y $P = q_\theta^{-1}(R)$ para algún $R \in X(A/\theta)$. Se sigue que $q_\theta(a) = a/\theta \in R$ y $b_1/\theta \wedge ... \wedge b_n/\theta \in R$. Al ser R un ideal primo, existe $b_j/\theta \in B/\theta$ tal que $b_j/\theta \in R$. Se sigue que $\overline{b_j}/\theta \in R$, es decir, $\overline{b_j} \in q_\theta^{-1}(R) = P$. Así, $P \in \varphi_A\left(\overline{b_j}\right)^c$ y $P \in \left[\varphi_A\left(\overline{b_1}\right)^c \cap Y_\theta\right] \cup ... \cup \left[\varphi_A\left(\overline{b_n}\right)^c \cap Y_\theta\right]$. Entonces $\varphi_A(a)^c \cap Y_\theta$ es compacto en la topología $\mathcal{T}_{Y_\theta}$ y por lo tanto Y_θ es un $\mathcal{K}$-subconjunto.

Sean $\{\varphi_A(b) \cap Y_\theta \ : \ b \in B\}$ y $\{\varphi_A(c) \cap Y_\theta \ : \ c \in C\}$ dos familias no vacías de $D_{\mathcal{K}_{Y_\theta}}(Y_\theta)$ tal que

$$\bigcap\{\varphi_A(b) \cap Y_\theta \ : \ b \in B\} \subseteq \bigcup\{\varphi_A(c) \cap Y_\theta \ : \ c \in C\}.$$

Sea $B/\theta = \{b/\theta \ : \ b \in B\}$ y sea $C/\theta = \{c/\theta \ : \ c \in C\}$. Si $I(C/\theta) \cap F(B/\theta) = \emptyset$, entonces por el Teorema 2.2.6 existe $Q \in X(A/\theta)$ tal que $I(C/\theta) \subseteq Q$ y $Q \cap F(B/\theta) = \emptyset$. Por el Teorema 2.2.22, $q_\theta^{-1}(Q) \in X(A)$. Como $I(C/\theta) \subseteq Q$, $q_\theta^{-1}(Q) \notin \bigcup\{\varphi_A(c) \cap Y_\theta \ : \ c \in C\}$. Por otro lado, como $Q \cap F(B/\theta) = \emptyset$, se sigue que $q_\theta^{-1}(Q) \in \bigcap\{\varphi_A(b) \cap Y_\theta \ : \ b \in B\}$ lo cual es una contradicción. Entonces existe $a \in A$ tal que $a/\theta \in I(C/\theta) \cap F(B/\theta)$, es decir, existen $b_1/\theta, ..., b_n/\theta \in [B/\theta)$ y $c_1/\theta, ..., c_m/\theta \in C/\theta$ tal que existe $b_1/\theta \wedge ... \wedge b_n/\theta$ y $b_1/\theta \wedge ... \wedge b_n/\theta = a/\theta \leq c_1/\theta \vee ... \vee c_m/\theta$. Por último, se prueba fácilmente que

$$[\varphi_A(b_1) \cap Y_\theta] \cap ... \cap [\varphi_A(b_n) \cap Y_\theta] \subseteq [\varphi_A(c_1) \cap Y_\theta] \cup ... \cup [\varphi_A(c_m) \cap Y_\theta].$$

Concluimos por el Teorema 3.3.7 que $\langle Y_\theta, \mathcal{K}_{Y_\theta}\rangle$ es un DN-espacio. ■

La Proposición 3.3.8 motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.9. Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio y sea Y un subconjunto de X. Diremos que Y es un *DN-subespacio* si el par $\langle Y, \mathcal{K}_Y\rangle$ es un DN-espacio.

Denotaremos como $\mathrm{S}_{\mathrm{DN}}(X)$ al conjunto de todos los DN-subespacios de $\langle X, \mathcal{K}\rangle$.

Sea A una DN-álgebra e Y un subconjunto de $X(A)$. Definimos la siguiente relación binaria $\theta(Y) \subseteq A \times A$ dada por

$$(a,b) \in \theta(Y) \text{ si y sólo si } \varphi_A(a)^c \cap Y = \varphi_A(b)^c \cap Y. \tag{3.6}$$

Es sencillo de comprobar que $\theta(Y) \in \mathrm{Con}(A)$.

Teorema 3.3.10. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Entonces la aplicación*

$$F : \mathrm{S_{DN}}(X(A)) \to \mathrm{Con}(A)$$

dada por $F(Y) = \theta(Y)$ es un isomorfismo dual.

Demostración. Veamos que F es inyectiva. Sean $Y_1, Y_2 \in \mathrm{S_{DN}}(X(A))$ tal que $\theta(Y_1) = \theta(Y_2)$. Supongamos que $Y_1 \nsubseteq Y_2$, es decir, que existe $P \in Y_1$ tal que $P \notin Y_2$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \bigcap \left\{ \varphi_A(b) \cap Y_2 \ : \ \varphi_A(b) \notin H_{X(A)}(P) \right\} \cap \bigcap \left\{ \varphi_A(c)^c \cap Y_2 \ : \ \varphi_A(c) \in H_{X(A)}(P) \right\}.$$

Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, entonces existe $Q \in \mathcal{F}$ tal que $H_{X(A)}(Q) = H_{X(A)}(P)$. Al ser $H_{X(A)}$ una aplicación inyectiva, $P = Q \in Y_2$ lo cual es una contradicción. Luego, $\mathcal{F} = \emptyset$ y

$$\bigcap \left\{ \varphi_A(b) \cap Y_2 \ : \ \varphi_A(b) \notin H_{X(A)}(P) \right\} \subseteq \bigcup \left\{ \varphi_A(c) \cap Y_2 \ : \ \varphi_A(c) \in H_{X(A)}(P) \right\}.$$

Sea $B = \left\{ b \ : \ \varphi_A(b) \notin H_{X(A)}(P) \right\}$ y sea $C = \left\{ c \ : \ \varphi_A(c) \in H_{X(A)}(P) \right\}$. Como Y_2 es un DN-subespacio, por la Proposición 3.1.8, existen $b_1, ..., b_n \in [B)$ y $c_1, ..., c_m \in C$ tal que existe $b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y

$$[\varphi_A(b_1) \cap Y_2] \cap ... \cap [\varphi_A(b_n) \cap Y_2] \subseteq [\varphi_A(c_1) \cap Y_2] \cup ... \cup [\varphi_A(c_m) \cap Y_2].$$

Como $b_1, ..., b_n \in [B)$, existen $\overline{b_1}, ..., \overline{b_n} \in B$ tal que $\overline{b_i} \leq b_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Sea $b = b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y sea $c = c_1 \vee ... \vee c_m$. Así, $\varphi_A(b) \cap Y_2 \subseteq \varphi_A(c) \cap Y_2$. Luego, $\varphi_A(c)^c \cap Y_2 \subseteq \varphi_A(b)^c \cap Y_2$ y el par $(b \vee c, c) \in \theta(Y_2) = \theta(Y_1)$, es decir, $\varphi_A(b \vee c)^c \cap Y_1 = \varphi_A(c)^c \cap Y_1$. Como $P \in \varphi_A(c)^c \cap Y_1$, tenemos que $P \in \varphi_A(b \vee c)^c \cap Y_1$. Se sigue que $b \vee c \in P$ y $b = b_1 \wedge ... \wedge b_n \in P$. Al ser P un ideal primo, existe $b_i \in P$ para algún i tal que $1 \leq i \leq n$. Entonces $\overline{b_i} \in P$, o lo que es equivalente, $\varphi_A\left(\overline{b_i}\right) \in H_{X(A)}(P)$. Por otro lado, $\overline{b_i} \in B$ implica que $\varphi_A\left(\overline{b_i}\right) \notin H_{X(A)}(P)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, F es inyectiva.

Probemos que F es sobreyectiva. Sea $\theta \in \mathrm{Con}(A)$ y sea Y_θ el conjunto dado por 3.5. Por la Proposición 3.3.8, el par $\langle Y_\theta, \mathcal{K}_{Y_\theta} \rangle$ es un DN-espacio y $Y_\theta \in \mathrm{S_{DN}}(X(A))$.

Veamos que $\theta(Y_\theta) = \theta$. Sea $(a,b) \in \theta$. Si $Q \in \varphi_A(a) \cap Y_\theta$, entonces $a \notin Q$ y existe $P \in X(A/\theta)$ tal que $Q = q_\theta^{-1}(P)$. Así, $q_\theta(a) = a/\theta \notin P$. Como $a/\theta = b/\theta$, $q_\theta(b) \notin P$. Luego, $b \notin q_\theta^{-1}(P) = Q$ y $Q \in \varphi_A(b) \cap Y_\theta$. De manera análoga, $\varphi_A(b) \cap Y_\theta \subseteq \varphi_A(a) \cap Y_\theta$ y por lo tanto $\varphi_A(b) \cap Y_\theta = \varphi_A(a) \cap Y_\theta$. Se sigue que $\varphi_A(b)^c \cap Y_\theta = \varphi_A(a)^c \cap Y_\theta$ y $(a,b) \in \theta(Y_\theta)$. Recíprocamente, sea $(a,b) \in \theta(Y_\theta)$, es decir, $\varphi_A(b)^c \cap Y_\theta = \varphi_A(a)^c \cap Y_\theta$. Si $P \in X(A/\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} q_\theta(a) \notin P &\iff a \notin q_\theta^{-1}(P) & &\iff q_\theta^{-1}(P) \notin \varphi_A(a)^c \\ &\iff q_\theta^{-1}(P) \notin \varphi_A(a)^c \cap Y_\theta = \varphi_A(b)^c \cap Y_\theta & &\iff q_\theta^{-1}(P) \notin \varphi_A(b)^c \\ &\iff b \notin q_\theta^{-1}(P) & &\iff q_\theta(b) \notin P, \end{aligned}$$

es decir, $q_\theta(a) \in P$ si y sólo si $q_\theta(b) \in P$. Por último, veamos que $q_\theta(a) = q_\theta(b)$. Si $q_\theta(a) \nleq q_\theta(b)$, entonces por el Corolario 2.2.7 existe $Q \in X(A/\theta)$ tal que $q_\theta(b) \in Q$ y $q_\theta(a) \notin Q$, lo cual es una contradicción. Así, $q_\theta(a) \leq q_\theta(b)$. Análogamente se prueba que $q_\theta(b) \leq q_\theta(a)$ y $q_\theta(a) = q_\theta(b)$. Entonces $a/\theta = b/\theta$ y $(a,b) \in \theta$. ■

3.3.3 Subálgebras

Si A es una DN-álgebra, entonces una subálgebra de A es cualquier subconjunto cerrado bajo la operación ternaria m. Nuestro próximo objetivo es interpretar topológicamente el retículo de las subálgebras de A, el cual denotaremos como $\mathrm{Sub}(A)$, a través de ciertas familias de elementos básicos de su espacio dual $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$.

Definición 3.3.11. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio. Diremos que un subconjunto no vacío $\mathcal{L}$ de $\mathcal{K}$ es *DN-básico* si $(U \cap W) \cup (V \cap W) \in \mathcal{L}$, para cada $U, V, W \in \mathcal{L}$.

Dado un DN-espacio $\langle X, \mathcal{K} \rangle$, denotaremos por $\mathrm{Nb}(X)$ a la famillia de todos los subconjuntos DN-básicos de $\mathcal{K}$, es decir,

$$\mathrm{Nb}(X) = \{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} \ : \ \mathcal{L} \text{ es DN-básico}\}.$$

Lema 3.3.12. *Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio. Entonces $\langle \mathrm{Nb}(X), \subseteq \rangle$ es un retículo.*

Sea A una DN-álgebra y sea $B \in \mathrm{Sub}(A)$. Consideremos la familia

$$T(B) = \{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\}.$$

Proposición 3.3.13. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Entonces la aplicación*

$$T : \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Nb}(X(A))$$

preserva el orden.

Demostración. Veamos que T se encuentra bien definida. Si $B \in \mathrm{Sub}(A)$, es claro que $T(B) \subseteq \mathcal{K}_A$. Sean $U, V, W \in T(B)$. Entonces existen $a, b, c \in B$ tal que $U = \varphi_A(a)^c, V = \varphi_A(b)^c$ y $W = \varphi_A(c)^c$. Así,

$$\begin{aligned}(U \cap W) \cup (V \cap W) &= [\varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(c)^c] \cup [\varphi_A(b)^c \cap \varphi_A(c)^c] \\ &= \varphi_A(m(a,b,c))^c .\end{aligned}$$

Como B es una subálgebra de A, $m(a,b,c) \in B$ y $(U \cap W) \cup (V \cap W) \in T(B)$. Así, $T(B)$ es DN-básico. Se sigue fácilmente que T preserva el orden. ■

Si A es una DN-álgebra y $\mathcal{L} \in \mathrm{Nb}(X(A))$, tomemos el subconjunto

$$S(\mathcal{L}) = \{a \in A \ : \ \varphi_A(a)^c \in \mathcal{L}\} .$$

Lema 3.3.14. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Entonces la aplicación*

$$S : \mathrm{Nb}(X(A)) \to \mathrm{Sub}(A)$$

preserva el orden.

Demostración. Si $\mathcal{L} \in \mathrm{Nb}(X(A))$, probemos que $S(\mathcal{L})$ es cerrado bajo la operación m. Sean $a, b, c \in S(\mathcal{L})$. Como $\mathcal{L}$ es DN-básico y $\varphi_A(a)^c, \varphi_A(b)^c, \varphi_A(c)^c \in \mathcal{L}$, tenemos que $[\varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(c)^c] \cup [\varphi_A(b)^c \cap \varphi_A(c)^c] \in \mathcal{L}$. Luego,

$$\begin{aligned}[\varphi_A(a)^c \cap \varphi_A(c)^c] \cup [\varphi_A(b)^c \cap \varphi_A(c)^c] &= \varphi_A(a \vee c)^c \cup \varphi_A(b \vee c)^c \\ &= \varphi_A((a \vee c) \wedge_c (b \vee c))^c \\ &= \varphi_A(m(a,b,c))^c .\end{aligned}$$

De esta forma $m(a,b,c) \in \mathcal{L}$ y $S(\mathcal{L}) \in \mathrm{Sub}(A)$. Se sigue que S preserva el orden. ■

Teorema 3.3.15. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Entonces los retículos* $\mathrm{Sub}(A)$ *y* $\mathrm{Nb}(X(A))$ *son isomorfos.*

Demostración. Sea $B \in \mathrm{Sub}(A)$. Entonces

$$\begin{aligned}a \in S(T(B)) &\iff \varphi_A(a)^c \in T(B) \\ &\iff \exists b \in B\,(\varphi_A(a)^c = \varphi_A(b)^c) \\ &\iff a = b.\end{aligned}$$

Así, $a \in B$ y $S(T(B)) = B$. De manera análoga, si $\mathcal{L} \in \mathrm{Nb}(X(A))$ entonces

$$U \in T(S(\mathcal{L})) \iff \exists a \in S(\mathcal{L})\,(U = \varphi_A(a)^c) \iff U \in \mathcal{L}.$$

Por lo tanto, $T(S(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ y los retículos $\mathrm{Sub}(A)$ y $\mathrm{Nb}(X(A))$ son isomorfos. ■

3.3.4 Filtros

Si A es una DN-álgebra, por el Teorema 2.2.10 la estructura $\langle \mathrm{Fi}(A), \vee, \cap, \{1\}, A\rangle$ es un retículo distributivo acotado. En esta subsección dotamos al retículo de los filtros de una implicación de manera tal que sea un álgebra de Heyting y hallamos una correspondencia con los subconjuntos cerrados del DN-espacio dual de A.

Si $F, H \in \mathrm{Fi}(A)$, definimos el siguiente subconjunto de A:

$$F \to H = \{a \in A \ : \ [a) \cap F \subseteq H\}.$$

Lema 3.3.16. *Sea A una DN-álgebra y sean $F, H \in \mathrm{Fi}(A)$.*

1. $F \to H \in \mathrm{Fi}(A)$.
2. $F \to H = \{a \in A \ : \ \forall f \in F \ \exists h \in H \ \ (h \leq a \vee f)\}$.
3. $\langle \mathrm{Fi}(A), \vee, \wedge, \to, \{1\}, A\rangle$ *es un álgebra de Heyting.*

Demostración. *1.* Sean $F, H \in \mathrm{Fi}(A)$. Como $[1) \cap F = \{1\} \subseteq H$, entonces $1 \in F \to H$. Sean $a, b \in A$ tal que $a \leq b$ y $a \in F \to H$. Así, $[b) \subseteq [a)$ y $[a) \cap F \subseteq H$. Se sigue que $[b) \cap F \subseteq H$ y $b \in F \to H$. Si $a, b \in F \to H$ tal que existe $a \wedge b$, por el Teorema 2.2.10 el retículo $\mathrm{Fi}(A)$ es distributivo y

$$[a \wedge b) \cap F \;=\; ([a) \vee [b)) \cap F \;=\; ([a) \cap F) \vee ([b) \cap F) \;\subseteq\; H.$$

Por lo tanto $a \wedge b \in F \to H$ y $F \to H \in \mathrm{Fi}(A)$.

2. Sean $F, H \in \mathrm{Fi}(A)$ y sea $X = \{a \in A \ : \ \forall f \in F \ \exists h \in H \ \ (h \leq a \vee f)\}$. Sea $a \in X$ y probemos que $[a) \cap F \subseteq H$. Si $x \in [a) \cap F$, entonces $a \leq x$ y $x \in F$. Como $a \in X$ y $x \in F$, existe $h \in H$ tal que $h \leq a \vee x = x$. Al ser H un filtro, se sigue que $x \in H$. Así, $a \in F \to H$. Recíprocamente, sea $a \in F \to H$ y $f \in F$. Entonces $a \vee f \in [a) \cap F$ y $a \vee f \in H$. Luego, $a \in X$ y por lo tanto $F \to H = X$.

3. Por el Teorema 2.2.10, solo falta probar que para cada $F, G, H \in \mathrm{Fi}(A)$, vale que $F \cap G \subseteq H$ si y sólo si $F \subseteq G \to H$. Supongamos que $F \cap G \subseteq H$ y sea $a \in F$. Si $x \in [a) \cap G$, entonces $a \leq x$ y $x \in G$. Por lo tanto, $x \in F \cap G$ y $x \in H$, es decir, $a \in G \to H$. Para probar la recíproca, sea $x \in F \cap G$. Como $F \subseteq G \to H$, tenemos que $x \in G \to H$. Luego, $[x) \cap G \subseteq H$ y $x \in H$. ■

Si $F \in \mathrm{Fi}(A)$, entonces el pseudocomplemento de F es el filtro

$$F^* = F \to \{1\} = \{a \in A \ : \ [a) \cap F = \{1\}\}.$$

Proposición 3.3.17. *Sea A una DN-álgebra y sea $F \in \mathrm{Fi}(A)$. Entonces*

$$F^* = \{a \in A \;:\; \forall f \in F \;\; (a \vee f = 1)\}\,.$$

Demostración. Sea $C = \{a \in A \;:\; \forall f \in F \;\; (a \vee f = 1)\}$ y sea $a \in C$. Veamos que $[a) \cap F = \{1\}$. Sea $x \in A$ tal que $a \leq x$ y $x \in F$. Entonces $x = a \vee x = 1$ y $a \in F^*$. De manera recíproca, sea $a \in F^*$. Entonces $[a) \cap F = \{1\}$. Como $f \leq a \vee f$ para cada $f \in F$ y F es un filtro, se sigue que $a \vee f \in [a) \cap F$. Por lo tanto, $a \vee f = 1$ para cada $f \in F$ y $a \in C$. Concluimos que $F^* = C$. ■

Dado un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, se prueba fácilmente [5] que la familia de todos los subconjuntos cerrados admite naturalmente una estructura de álgebra de co-Heyting $\langle \mathcal{C}(X), \cup, \cap, \rightsquigarrow, \emptyset, X \rangle$, donde la implicación de dos cerrados U, V de X se define como

$$U \rightsquigarrow V = \mathrm{Cl}\,(U \cap V^c)\,.$$

Estamos en condiciones de probar la existencia de un isomorfismo dual entre los retículos de los filtros de una DN-álgebra y los subconjuntos cerrados de su espacio dual.

Teorema 3.3.18. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Entonces el álgebra de Heyting $\mathrm{Fi}(A)$ y el álgebra de co-Heyting $\mathcal{C}(X(A))$ son dualmente isomorfas.*

Demostración. En 3.2 definimos la familia $\beta(F) = \{P \in X(A) \;:\; P \cap F = \emptyset\}$, para cada $F \in \mathrm{Fi}(A)$. Se sigue que $\beta(F) = \bigcap \{\varphi_A(b) \;:\; b \in F\}$ y $\beta(F) \in \mathcal{C}(X(A))$. Así, tenemos definida la aplicación $\beta : \mathrm{Fi}(A) \to \mathcal{C}(X(A))$. Veamos que para cada $F, G \in \mathrm{Fi}(A)$ vale la igualdad $\beta(F \to G) = \beta(G) \rightsquigarrow \beta(F)$, es decir,

$$\beta(F \to G) = \mathrm{Cl}\,(\beta(G) \cap \beta(F)^c)\,.$$

Si $\beta(G) \cap \beta(F)^c \subseteq \beta(F \to G)$, entonces como $\beta(F \to G)$ es cerrado tenemos que $\mathrm{Cl}\,(\beta(G) \cap \beta(F)^c) \subseteq \beta(F \to G)$. Sea $P \in \beta(G) \cap \beta(F)^c$, es decir, $P \cap G = \emptyset$ y $P \cap F \neq \emptyset$. Sea $x \in P$. Al ser $P \cap F \neq \emptyset$, existe $y \in P$ tal que $y \in F$. Así, $y \leq x \vee y$ y $x \vee y \in F$. Por otro lado, al ser P un ideal, $x \vee y \in P$. Como $P \cap G = \emptyset$, entonces $x \vee y \notin G$. Luego, $x \vee y \in [x) \cap F$ y $[x) \cap F \nsubseteq G$. Por lo tanto $x \notin F \to G$ y $P \cap (F \to G) = \emptyset$. Concluimos que $P \in \beta(F \to G)$.

Para probar la otra inclusión, sea $P \in \beta(F \to G)$ y supongamos que

$$P \notin \mathrm{Cl}\,(\beta(G) \cap \beta(F)^c) = \bigcap \{\beta(D) \;:\; D \in \mathrm{Fi}(A) \;\; (\beta(G) \cap \beta(F)^c \subseteq \beta(D))\}\,.$$

Entonces existe $D \in \mathrm{Fi}(A)$ tal que $\beta(G) \cap \beta(F)^c \subseteq \beta(D)$ y $P \cap D \neq \emptyset$. Así, existe $x \in P$ tal que $x \in D$. Además, $P \cap (F \to G) = \emptyset$ y $x \notin F \to G$, es decir, $[x) \cap F \nsubseteq G$. Entonces existe $y \in F$ tal que $x \leq y$ e $y \notin G$, y por el Teorema 2.2.6, existe $Q \in X(A)$ tal que $y \in Q$ y $Q \cap G = \emptyset$. Se sigue que $y \in Q \cap F$ y $Q \in \beta(F)^c$. Por otro lado, $Q \in \beta(G) \cap \beta(F)^c \subseteq \beta(D)$, lo que implica que $Q \cap D = \emptyset$. Dado que $x \leq y$ e $y \in Q$, $x \in Q$. Como $Q \cap D = \emptyset$, entonces $x \notin D$ lo cual es una contradicción. Luego, $P \in \mathrm{Cl}(\beta(G) \cap \beta(F)^c)$ y $\beta(F \to G) = \beta(G) \rightsquigarrow \beta(F)$. ■

3.3.5 Sobre la extensión reticular distributiva libre

En [29] los autores prueban que toda DN-álgebra admite una extensión reticular distributiva libre. En esta subsección, presentamos una construcción diferente utilizando nuestra representación topológica y estudiamos la relación entre los filtros de una DN-álgebra y los filtros de su extensión reticular distributiva libre.

Definición 3.3.19. Sea A una DN-álgebra. Una par $\langle L, e\rangle$ es la *extensión reticular distributiva libre de* A si satisface las siguientes condiciones:

1. L es un retículo distributivo acotado y $e : A \to L$ un homomorfismo inyectivo.
2. Para cada retículo distributivo acotado $\overline{L}$ y cada homomorfismo $h : A \to \overline{L}$, existe un único homomorfismo $\overline{h} : L \to \overline{L}$ tal que $h = \overline{h} \circ e$.

Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Denotemos como $\mathcal{KO}(X(A))$ a la familia de todos los subconjutos abiertos y compactos de $X(A)$. Si $U \in \mathcal{KO}(X(A))$, entonces existen $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $U = \varphi_A(a_1)^c \cup ... \cup \varphi_A(a_n)^c$. Luego, se sigue que $\mathcal{KO}(X(A))$ es un retículo distributivo. Consideremos la familia

$$D_{\mathcal{KO}}[X(A)] = \{U \ : \ U^c \in \mathcal{KO}(X(A))\}.$$

Entonces la estructura $\langle D_{\mathcal{KO}}[X(A)], \cup, \cap, \emptyset, X(A)\rangle$ es un retículo distributivo acotado y tomemos el homomorfismo inyectivo

$$\varphi_A : A \to D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$$

definido por $\varphi_A(a) = \{P \in X(A) \ : \ a \notin P\}$. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.20. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Entonces el par $\langle D_{\mathcal{KO}}[X(A)], \varphi_A\rangle$ es la extensión reticular distributiva libre de A.*

Demostración. Sea $\overline{L}$ un retículo distributivo acotado y sea $h : A \to \overline{L}$ un homomorfismo. Definimos $\overline{h} : D_{\mathcal{KO}}[X(A)] \to \overline{L}$ como

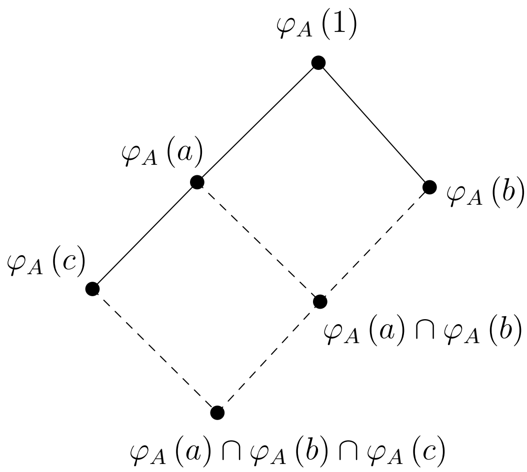
$$\overline{h}[\varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n)] = h(a_1) \wedge ... \wedge h(a_n).$$

Es inmediato que $\overline{h}$ está bien definida. Si $U, V \in D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$, entonces existen $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in A$ tal que $U = \varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n)$ y $V = \varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_m)$. De la misma definición, $\overline{h}[U \cap V] = \overline{h}[U] \wedge \overline{h}[V]$. También,

$$\begin{aligned}
\overline{h}[U \cup V] &= \overline{h}[(\varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n)) \cup (\varphi_A(b_1) \cap ... \cap \varphi_A(b_m))] \\
&= \overline{h}[\varphi_A(a_1 \vee b_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_1 \vee b_m) \cap ... \cap \varphi_A(a_n \vee b_m)] \\
&= h(a_1 \vee b_1) \wedge ... \wedge h(a_1 \vee b_m) \wedge ... \wedge h(a_n \vee b_m) \\
&= (h(a_1) \wedge ... \wedge h(a_n)) \vee (h(b_1) \wedge ... \wedge h(b_m)) \\
&= \overline{h}[U] \vee \overline{h}[V].
\end{aligned}$$

Así, $\overline{h}$ es un homomorfismo. Es fácil de probar que $\overline{h}$ es único y que $h = \overline{h} \circ \varphi_A$. ■

Ejemplo 3.3.2. Teniendo en cuenta los Ejemplos 2.2.2 y 3.1.1, podemos construir la extensión reticular distributiva libre de la DN-álgebra del Ejemplo 2.2.1 como lo podemos ver en la siguiente figura.



Observación 3.3.21. Notemos que si h es sobreyectiva, entonces $\overline{h}$ también es sobreyectiva. En efecto, si $b \in \overline{L}$ entonces existe $a \in A$ tal que $h(a) = b$. Luego, $\varphi_A(a) \in D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$ y $\overline{h}[\varphi_A(a)] = h(a) = b$.

Teorema 3.3.22. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Sea $\langle D_{\mathcal{KO}}[X(A)], \varphi_A\rangle$ su extensión reticular distributiva libre. Entonces los retículos* $\mathrm{Fi}(A)$ *y* $\mathrm{Fi}(D_{\mathcal{KO}}[X(A)])$ *son isomorfos.*

Demostración. Sea $\Psi : \mathrm{Fi}(D_{\mathcal{KO}}[X(A)]) \to \mathrm{Fi}(A)$ la aplicación dada por

$$\Psi(G) = \{a \in A \ : \ \varphi_A(a) \in G\}.$$

Veamos que Ψ está bien definida. Sea $G \in \mathrm{Fi}(D_{\mathcal{KO}}[X(A)])$. Entonces $\varphi_A(1) \in G$ y $1 \in \Psi(G)$. Si $a, b \in A$ tal que $a \leq b$ y $a \in \Psi(G)$, entonces $\varphi_A(a) \subseteq \varphi_A(b)$ y $\varphi_A(a) \in G$. Así, $\varphi_A(b) \in G$ y $b \in \Psi(G)$. Sean $a, b \in \Psi(G)$ tal que existe $a \wedge b$. Entonces $\varphi_A(a), \varphi_A(b) \in G$ y como G es un filtro, $\varphi_A(a) \cap \varphi_A(b) = \varphi_A(a \wedge b) \in G$ y $a \wedge b \in \Psi(G)$. Concluimos que $\Psi(G) \in \mathrm{Fi}(A)$.

Sean $G_1, G_2 \in \mathrm{Fi}(D_{\mathcal{KO}}[X(A)])$ y sea $a \in A$. Es inmediato que $\Psi(G_1 \cap G_2) = \Psi(G_1) \cap \Psi(G_2)$. Si $a \in \Psi(G_1) \vee \Psi(G_2) = F(\Psi(G_1) \cup \Psi(G_2))$, entonces existen $x_1, ..., x_n \in \Psi(G_1) \cup \Psi(G_2)$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = a$. Así, $\varphi_A(x_1), ..., \varphi_A(x_n) \in G_1 \cup G_2$ y $\varphi_A(x_1) \cap ... \cap \varphi_A(x_n) = \varphi_A(a)$. Se sigue que $\varphi_A(a) \in F(G_1 \cup G_2) = G_1 \vee G_2$ y $a \in \Psi(G_1 \vee G_2)$. De manera recíproca, si $a \notin \Psi(G_1) \vee \Psi(G_2) = F(\Psi(G_1) \cup \Psi(G_2))$, entonces para cada subconjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ de $\Psi(G_1) \cup \Psi(G_2)$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$, tenemos que $x_1 \wedge ... \wedge x_n \neq a$. Se sigue que para cada subconjunto $\{\varphi_A(x_1), ..., \varphi_A(x_n)\}$ de $G_1 \cup G_2$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$, tenemos que $\varphi_A(x_1) \cap ... \cap \varphi_A(x_n) \neq \varphi_A(a)$, es decir, $\varphi_A(a) \notin F(G_1 \cup G_2) = G_1 \vee G_2$ y $a \notin \Psi(G_1 \vee G_2)$. Por lo tanto $\Psi(G_1 \vee G_2) = \Psi(G_1) \vee \Psi(G_2)$.

Probemos que Ψ es inyectiva. Sean $G_1, G_2 \in \mathrm{Fi}(D_{\mathcal{KO}}[X(A)])$ tal que $\Psi(G_1) = \Psi(G_2)$. Si $U \in G_1$, entonces existen $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $U = \varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n)$. Así, $\varphi_A(a_i) \in G_1$, es decir, $a_i \in \Psi(G_1) = \Psi(G_2)$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces $\varphi_A(a_i) \in G_2$ para cada $i = 1, ..., n$ y $\varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n) = U \in G_2$. De manera similar se prueba que si $U \in G_2$, entonces $U \in G_1$. Así, $G_1 = G_2$.

Por último, probemos que Ψ es sobreyectiva. Sea $G \in \mathrm{Fi}(A)$ y consideremos el conjunto $\varphi_A(G) = \{\varphi_A(a) \ : \ a \in G\}$. Entonces $F(\varphi_A(G)) \in \mathrm{Fi}(D_{\mathcal{KO}}[X(A)])$. Veamos que $\Psi(F(\varphi_A(G))) = G$. Si $a \in G$, entonces $\varphi_A(a) \in \varphi_A(G)$ y $\varphi_A(a) \in F(\varphi_A(G))$. Así, $a \in \Psi(F(\varphi_A(G)))$. Recíprocamente, si $a \notin G$, entonces $\varphi_A(a) \notin \varphi_A(G)$. Veamos que $\varphi_A(a) \notin F(\varphi_A(G))$. Si $\varphi_A(a) \in F(\varphi_A(G))$, entonces existen $x_1, ..., x_n \in G$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $\varphi_A(x_1) \cap ... \cap \varphi_A(x_n) = \varphi_A(a)$. Por otro lado, como $a \notin G$, existe $P \in X(A)$ tal que $a \in P$ y $P \cap G = \emptyset$, es decir, $P \notin \varphi_A(a)$ y $P \in \varphi_A(x_i)$ para cada $i = 1, ..., n$. Así, $P \in \varphi_A(x_1) \cap ... \cap \varphi_A(x_n)$ lo cual es una contradicción. Entonces $\varphi_A(a) \notin F(\varphi_A(G))$ y $a \notin \Psi(F(\varphi_A(G)))$. ■

Capítulo 4

Familias Vietoris y aniquiladores relativos

En este capítulo introducimos y estudiamos dos nuevos conceptos. El primer concepto es el de *familia Vietoris*. En [7], Bezhanishvili y Jansana prueban que si $\langle X, \mathcal{T}, \leq, X_0 \rangle$ es un espacio de Priestley generalizado, entonces existe una correspondencia entre las imágenes homomorfas de su semirretículo distributivo acotado dual X^* y ciertos espacios de Priestley generalizados de la forma $\langle \mathcal{F}, \mathcal{T}_V, \subseteq, \mathcal{F}_0 \rangle$, donde $\mathcal{T}_V$ es la topología Vietoris definida sobre una familia de subcojuntos cerrados $\mathcal{F}$ de X y $\mathcal{F}_0$ es un subconjunto distinguido de $\mathcal{F}$. Por otro lado, utilizando los resultados desarrollados en [12], se muestra en [18] que las imágenes homomorfas de un semirretículo distributivo también se pueden describir utilizando DS-espacios de la forma $\langle \mathcal{F}, \mathcal{T}_L \rangle$, donde $\mathcal{T}_L$ es la menor topología Vietoris definida sobre una familia de subconjuntos cerrados $\mathcal{F}$ de un DS-espacio $\langle X, \mathcal{K} \rangle$. Inspirados por estos resultados y utilizando la dualidad topológica desarrollada en el Capítulo 3, introducimos la noción de familia Vietoris de un DN-espacio y probamos que las imágenes homomorfas de una DN-álgebra se pueden caracterizar a través de dichas familias.

El segundo concepto que introducimos es el de *aniquilador relativo*. En un retículo L, el *aniquilador de a relativo a b* se define como el conjunto $\langle a, b \rangle = \{x \in L \ : \ a \wedge x \leq b\}$, donde $a, b \in L$. Mandelker estudia en [38] las propiedades de los aniquiladores relativos y caracteriza la distributividad de un retículo en términos de dichos aniquiladores. Para ser más precisos, establece que un retículo L es distributivo si y sólo si $\langle a, b \rangle \in \mathrm{Id}\,(L)$, para cada $a, b \in L$. Estos resultados fueron generalizados por Varlet a la clase de los semirretículos distributivos en [51] y también a la variedad de las DN-álgebras por Chajda y Kolařík en [25]. Nuestro objetivo es proponer una definición alternativa, y a nuestro entender más natural a la estructura del álgebra, de aniquilador relativo a la dada en [25]. Obtenemos nuevas caracterizaciones de la distributividad de una DN-álgebra en términos de sus aniquiladores relativos y estudiamos las clases de las *DN-álgebras normales* y *DN-álgebras p-lineales*, lo cual son una generalización de los retículos normales estudiados por Cornish en [27] y [28]. Lo expuesto en este capítulo se encuentra publicado recientemente en [11] y en un artículo enviado para su publicación [20].

4.1 Imágenes homomorfas

El objetivo de esta sección es probar que las imágenes homomorfas de una DN-álgebra se pueden describir a través de ciertas familias de subconjuntos saturados básicos irreducibles de su espacio dual. De ahora en más, denotaremos como $\mathcal{S}_{\text{Irr}}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos saturados básicos irreducibles de un espacio topológico $\langle X, \mathcal{K} \rangle$.

Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y sea $R \in \mathcal{SR}_f[X, X(A)]$ inyectiva. Consideremos la siguiente familia de subconjuntos

$$\mathcal{F}_R = \{R(x) \ : \ x \in X\}.$$

Claramente, $\mathcal{F}_R \subseteq \mathcal{S}_{\text{Irr}}(X(A))$. Para cada $a \in A$, sea M_a el conjunto dado por

$$M_a = \{R(x) \in \mathcal{F}_R \ : \ R(x) \cap \varphi_A(a) = \emptyset\}.$$

Así, la colección de todos los conjuntos de la forma M_a es una subbase para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_A}$ sobre $\mathcal{F}_R$. Es más, dicha colección forma una base.

Lema 4.1.1. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y sea $R \in \mathcal{SR}_f[X, X(A)]$ inyectiva. Entonces*

$$\mathcal{B}_A = \{M_a : \ a \in A\}$$

es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_A}$ sobre $\mathcal{F}_R$.

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $R(x) \in \mathcal{F}_R$. Como $\mathcal{K}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X, existe $U \in D_{\mathcal{K}}(X)$ tal que $x \notin U$. Al ser R inyectiva, existe $V \in D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ tal que $U \subseteq h_R(V)$ y $x \notin h_R(V)$. Luego, por el Teorema 3.1.12, A es isomorfo a $D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$ y por lo tanto existe $a \in A$ tal que $V = \varphi_A(a)$. Así, $x \notin h_R(\varphi_A(a))$, es decir, $R(x) \cap \varphi_A(a) = \emptyset$. De esta foma, $R(x) \in M_a$

y $\mathcal{F}_R = \bigcup \{M_a \ : \ a \in A\}$. Por otro lado, sean $a, b \in A$ tal que $R(x) \in M_a \cap M_b$. Veamos que $M_{a \vee b} = M_a \cap M_b$. Si $R(x) \in M_{a\vee b}$, entonces $R(x) \cap (\varphi_A(a) \cup \varphi_A(b)) = \emptyset$ lo que implica que $R(x) \cap \varphi_A(a) = \emptyset$ y $R(x) \cap \varphi_A(b) = \emptyset$. Así, $R(x) \in M_a \cap M_b$. La otra inclusión se prueba de manera similar. Entonces existe $M_{a\vee b} \in \mathcal{B}_A$ tal que $R(x) \in M_{a\vee b} \subseteq M_a \cap M_b$ y $\mathcal{B}_A$ es una base. ■

Si definimos el conjunto $H_a = \{R(x) \in \mathcal{F}_R \ : \ R(x) \cap \varphi_A(a) \neq \emptyset\}$, observemos que

$$H_a = \mathcal{F}_R - M_a = M_a^c$$

y

$$H_a \cup H_b = H_{a\vee b}.$$

Por otra parte, como R es una relación serial, tenemos que $H_1 = \mathcal{F}_R$. Así, la estructura

$$\langle D_{\mathcal{B}_A}(\mathcal{F}_R), \cup, \mathcal{F}_R \rangle$$

resulta ser un semirretículo.

Lema 4.1.2. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y sea $R \in \mathcal{SR}_f[X, X(A)]$ inyectiva.*

1. *$\langle \mathcal{F}_R, \mathcal{B}_A \rangle$ es T_0.*

2. *Para cada $a, b, c \in A$, $(M_a \cap M_c) \cup (M_b \cap M_c) \in \mathcal{B}_A$.*

3. *Sean $\{H_b \ : \ b \in B\}$ y $\{H_c \ : \ c \in C\}$ dos familias no vacías de $D_{\mathcal{B}_A}(\mathcal{F}_R)$. Entonces $\bigcap \{H_b \ : \ b \in B\} \subseteq \bigcup \{H_c \ : \ c \in C\}$ si y sólo si*
$$\bigcap \{h_R(\varphi_A(b)) \ : \ b \in B\} \subseteq \bigcup \{h_R(\varphi_A(c)) \ : \ c \in C\}.$$

4. *Un subconjunto Y de $\mathcal{F}_R$ es saturado básico si y sólo si existe $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que*
$$Y = \{R(x) \ : \ R(x) \subseteq \alpha(I)^c\},$$
donde $\alpha(I)$ es el conjunto dado por 3.1.

Demostración. *1.* Sean $x, y \in X$ tal que $R(x) \neq R(y)$. Supongamos que existe $P \in R(x)$ tal que $P \notin R(y)$. Al ser R una $\vee$-relación, $R(y)$ es un subconjunto saturado básico de $X(A)$, es decir, existe un subconjunto B de A tal que

$$R(y) = \bigcap \{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\}.$$

Como $P \notin R(y)$, existe $b_0 \in B$ tal que $P \notin \varphi_A(b_0)^c$. Así, $P \in R(x) \cap \varphi_A(b_0)$ y en consecuencia $R(x) \notin M_{b_0}$. Además, si $S \in R(y)$ entonces $S \in \varphi_A(b)^c$ para cada $b \in B$. En particular, $S \in \varphi_A(b_0)^c$. Entonces $R(y) \cap \varphi_A(b_0) = \emptyset$ y $R(y) \in M_{b_0}$. Con esto hemos probado que $\langle \mathcal{F}_R, \mathcal{B}_A \rangle$ es T_0.

2. Sean $a, b, c \in A$ y sea $M_a, M_b, M_c \in \mathcal{B}_A$. En la demostración de el Lema 4.1.1 probamos que $M_a \cap M_b = M_{a\vee b}$. Así, $(M_a \cap M_c) \cup (M_a \cap M_b) = M_{a\vee c} \cap M_{b\vee c}$. Veamos que

$$M_{a\vee c} \cup M_{b\vee c} = M_{(a\vee c)\wedge_c(b\vee c)}.$$

Sea $R(x) \in M_{(a\vee c)\wedge_c(b\vee c)}$. Como existe $(a \vee c) \wedge_c (b \vee c)$ en $[c)$, se sigue que

$$R(x) \cap \varphi_A((a \vee c) \wedge_c (b \vee c)) = R(x) \cap (\varphi_A((a \vee c)) \cap \varphi_A((b \vee c))) = \emptyset.$$

Entonces, como $R(x)$ es irreducible, tenemos que $R(x) \cap \varphi_A((a \vee c)) = \emptyset$ o $R(x) \cap \varphi_A((b \vee c)) = \emptyset$, es decir, $R(x) \in M_{a\vee c} \cup M_{b\vee c}$. La otra inclusión es inmediata. Por lo tanto, $(M_a \cap M_c) \cup (M_b \cap M_c) \in \mathcal{B}_A$.

3. Supongamos que vale la inclusión $\bigcap \{H_b \ : \ b \in B\} \subseteq \bigcup \{H_c \ : \ c \in C\}$ y sea $x \in X$ tal que $x \in \bigcap \{h_R(\varphi_A(b)) : b \in B\}$. Entonces $x \in h_R(\varphi_A(b))$, es decir, $R(x) \cap \varphi_A(b) \neq \emptyset$, para cada $b \in B$. Así, $R(x) \in \bigcap \{H_b \ : \ b \in B\}$ y por lo tanto $R(x) \in \bigcup \{H_c \ : \ c \in C\}$. Luego, existe $c_0 \in C$ tal que $R(x) \in H_{c_0}$. Se sigue que $x \in h_R(\varphi_A(c_0))$ y $x \in \bigcup \{h_R(\varphi_A(c)) \ : \ c \in C\}$. La recíproca se prueba análogamente.

4. Sea Y un subconjunto saturado básico de $\mathcal{F}_R$. Entonces existe un subconjunto B de A tal que

$$Y = \bigcap \{M_b \ : \ b \in B\}.$$

Sea $J = I(B)$ el ideal generado por el subconjunto B. Si $R(x) \in Y$, entonces $R(x) \in M_b$, es decir, $R(x) \cap \varphi_A(b) = \emptyset$ para cada $b \in B$. Se sigue que $R(x) \subseteq \varphi_A(b)^c$ y $R(x) \subseteq \bigcap \{\varphi_A(b)^c \ : \ b \in B\} = \alpha(I)^c$. La otra inclusión es similar. ■

Por los Lemas 4.1.1 y 4.1.2, cada subconjunto M_a es abierto y compacto de $\mathcal{F}_R$ y el par $\langle \mathcal{F}_R, \mathcal{B}_A \rangle$ es un DN-espacio. Entonces $\langle D_{\mathcal{B}_A}(\mathcal{F}_R), \cup, \mathcal{F}_R \rangle$ es una DN-álgebra.

Teorema 4.1.3. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNH}[A, B]$ sobreyectiva. Entonces $\langle \mathcal{F}_{R_h}, \mathcal{B}_A \rangle$ es un DN-espacio homeomorfo a $\langle X(B), \mathcal{K}_B \rangle$.*

Demostración. Como mencionamos, por los Lemas 4.1.1 y 4.1.2 se sigue que el par $\langle \mathcal{F}_{R_h}, \mathcal{B}_A \rangle$ es un DN-espacio donde $\mathcal{B}_A$ es una base de subconjuntos abiertos, compactos y dualmente compactos. Veamos que $\langle \mathcal{F}_{R_h}, \mathcal{B}_A \rangle$ es homeomorfo al DN-espacio $\langle X(B), \mathcal{K}_B \rangle$. Definimos la aplicación $f : X(B) \to \mathcal{F}_{R_h}$ dada por

$$f(P) = R_h(P).$$

Sean $P, Q \in X(B)$ tal que $R_h(P) = R_h(Q)$. Supongamos que $P \nsubseteq Q$, es decir, que existe $b \in B$ tal que $b \in P$ y $b \notin Q$. Entonces $P \notin \varphi_B(b)$ y $Q \in \varphi_B(b)$. Por el Teorema 3.3.3, R_h es inyectiva. Luego, existe $a \in A$ tal que $\varphi_B(b) \subseteq h_{R_h}(\varphi_A(a))$ y $P \notin h_{R_h}(\varphi_A(a))$. Así, $R_h(P) \cap \varphi_A(a) = \emptyset$. Por otro lado, $Q \in h_{R_h}(\varphi_A(a))$ y $R_h(Q) \cap \varphi_A(a) \neq \emptyset$. Al ser $R_h(P) = R_h(Q)$, tenemos que $R_h(P) \cap \varphi_A(a) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Entonces $P = Q$ y f es inyectiva.

Es claro que f es sobreyectiva y, por ende, biyectiva. Sea $a \in A$ y sea $P \in X(B)$. Entonces

$$\begin{aligned} P \in f^{-1}(M_a) &\iff f(P) \in M_a && \iff R_h(P) \in M_a \\ &\iff R_h(P) \cap \varphi_A(a) = \emptyset && \iff P \notin h_{R_h}(\varphi_A(a)) \\ &\iff P \notin \varphi_B(h(a)) && \iff P \in \varphi_B(h(a))^c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(M_a) = \varphi_B(h(a))^c$ y f es continua.

Ahora, probemos que f es una aplicación abierta. Sea $b \in B$. Dado que h es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $h(a) = b$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\varphi_B(b)^c) &= \{f(P) : P \in \varphi_B(b)^c\} && = \{R_h(P) : P \in \varphi_B(h(a))^c\} \\ &= \{R_h(P) : P \notin \varphi_B(h(a))\} && = \{R_h(P) : P \notin h_{R_h}(\varphi_A(a))\} \\ &= \{R_h(P) : R_h(P) \cap \varphi_A(a) = \emptyset\} && = M_a. \end{aligned}$$

Así, f es una aplicación abierta. Concluimos que f es un homeomorfismo. ■

El Teorema 4.1.3 motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.4. Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio. Diremos que una familia no vacía $\mathcal{F}$ de saturados básicos irreducibles no vacíos de X es una *familia Vietoris* si el par $\langle \mathcal{F}, \mathcal{B}_L \rangle$ es un DN-espacio.

Sea A una DN-álgebra y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}_{\mathrm{Irr}}(X(A))$ una familia Vietoris. Entonces $\langle \mathcal{F}, \mathcal{B}_A \rangle$ es un DN-espacio y definimos la relación $R_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F} \times X(A)$ como

$$(Y, P) \in R_{\mathcal{F}} \text{ si y sólo si } P \in Y.$$

Lema 4.1.5. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ su espacio dual. Si $\mathcal{F}$ es una familia Vietoris de $X(A)$, entonces $R_{\mathcal{F}} \in \mathcal{SR}_f[\mathcal{F}, X(A)]$ tal que $R_{\mathcal{F}}$ es inyectiva.*

Demostración. Veamos que $R_{\mathcal{F}}$ es una relación funcional. Sea $a \in A$. Entonces

$$h_{R_h}(\varphi_A(a)) = \{Y \in \mathcal{F} \; : \; R_{\mathcal{F}}(Y) \cap \varphi_A(a) \neq \emptyset\} = H_a \in D_{\mathcal{B}_A}(\mathcal{F}).$$

Sea $Y \in \mathcal{F}$. De la misma definición, tenemos que $R_{\mathcal{F}}(Y) = Y$. Entonces $R_{\mathcal{F}}(Y)$ es un subconjunto saturado básico irreducible de $X(A)$. Luego, existe $P \in X(A)$ tal que $R_{\mathcal{F}}(Y) = \mathrm{Sb}(P)$. Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es una familia no vacía, $R_{\mathcal{F}}(Y) \neq \emptyset$ y $R_{\mathcal{F}}(Y)$ es serial. Así, $R_{\mathcal{F}}$ es una relación funcional. Por último veamos que $R_{\mathcal{F}}$ es inyectiva. Sea $a \in A$ y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $Y \notin H_a$. Entonces $Y \cap \varphi_A(a) = \emptyset$. Dado que $R_{\mathcal{F}}(Y) = Y$, se sigue que $Y \notin h_{R_{\mathcal{F}}}(\varphi_A(a))$. Por otro lado es claro que $H_a \subseteq h_{R_{\mathcal{F}}}(\varphi_A(a))$. Concluimos que $R_{\mathcal{F}}$ es una relación funcional inyectiva. ■

Lema 4.1.6. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio.*

1. *Si $R \in \mathcal{SR}_f[X, X(A)]$ inyectiva, entonces para cada $x \in X$ y $P \in X(A)$,*

$$(x, P) \in R \text{ si y sólo si } (R(x), P) \in R_{\mathcal{F}_R}.$$

2. *Si $\mathcal{F}$ es una familia Vietoris de $X(A)$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{R_{\mathcal{F}}}$.*

Demostración. *1.* Sea $x \in X$ y sea $P \in X(A)$. Entonces

$$(R(x), P) \in R_{\mathcal{F}_R} \iff P \in R(x) \iff (x, P) \in R.$$

2. Si $Y \in \mathcal{F}_{R_{\mathcal{F}}}$, entonces existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $Y = R_{\mathcal{F}}(G)$. Como $R_{\mathcal{F}}(G) = G$, se sigue que $Y \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{R_{\mathcal{F}}}$. ■

En la Sección 3.3 vimos que las imágenes homomorfas de una DN-álgebra se encuentran en correspondencia con las relaciones funcionales inyectivas sobre su espacio dual. Por el Teorema 3.3.3 y el Lemas 4.1.6 tenemos una nueva caracterización.

Teorema 4.1.7. *Sea A una DN-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$ su espacio dual. Entonces las imágenes homomorfas de A están dualmente caracterizadas por las familias Vietoris de su espacio dual.*

Ejemplo 4.1.1. Siguendo con los Ejemplos 3.2.1, 3.2.2 y 3.3.1, veamos cual es la familia Vietoris que le corresponde a la imágen homomorfa de A a través de h. Tenemos que $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ es una relación funcional inyectiva y

$$\mathcal{F}_{R_h} = \{R_h(P_1), R_h(P_2)\} = \{\mathrm{Sb}(Q_3), \mathrm{Sb}(Q_4)\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathrm{Irr}}(X(A)).$$

Construyamos la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_A}$ sobre $\mathcal{F}_{R_h}$ a través de la base

$$\mathcal{B}_A = \{M_1, M_a, M_b, M_c, M_d, M_e\}\,.$$

Entonces

$$\begin{array}{rclrcl} M_1 & = & \emptyset, & M_c & = & \{R_h(P_1)\}\,, \\ M_a & = & \{R_h(P_1)\}\,, & M_d & = & \mathcal{F}_{R_h} \\ M_b & = & \{R_h(P_2)\}\,, & M_e & = & \{R_h(P_2)\}\,. \end{array}$$

y $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_B} = \{\emptyset, \mathcal{F}_{R_h}, \{R_h(P_1)\}, \{R_h(P_2)\}\}$, donde claramente los DN-espacios $\langle \mathcal{F}_{R_h}, \mathcal{B}_A \rangle$ y $\langle X(B), \mathcal{K}_B \rangle$ resultan ser homeomorfos.

4.2 Aniquiladores relativos

En esta sección proponemos una definición alternativa de aniquilador relativo en DN-álgebras diferente a la dada en [25] y presentamos algunas caracterizaciones de la distributividad. También estudiamos la clase de homomorfismos que preservan aniquiladores.

Definición 4.2.1. Sea A un semirretículo y sean $a, b \in A$. El *aniquilador de a relativo a b* es el conjunto

$$a \circ b = \{x \in A \;:\; b \leq x \vee a\}\,.$$

Sea A un semirretículo. Sean $a, b \in A$, $I \in \mathrm{Id}(A)$ y $F \in \mathrm{Fi}(A)$. Introducimos los siguientes subconjuntos de A dados por

$$\begin{array}{rcl} I \circ b & = & \{x \in A \;:\; \exists i \in I \;\; (b \;\leq\; x \vee i)\}\,, \\ a \circ F & = & \{x \in A \;:\; \exists f \in F \;\; (f \;\leq\; x \vee a)\}\,. \end{array}$$

Si X e Y son dos subconjuntos de A, denotaremos como $X \circ Y$ al conjunto

$$X \circ Y = \bigcup \{a \circ b \;:\; (a, b) \in X \times Y\}\,.$$

Observaciones 4.2.2. Sea A una DN-álgebra.

1. Notemos que $a \circ b = (a] \circ b = a \circ [b) = (a] \circ [b)$, para cada $a, b \in A$.
2. En la Subsección 3.3.4 definimos la operación binaria $\to$ sobre el retículo de los filtros $\mathrm{Fi}(A)$. Como caso particular tenemos que $a \circ b = [a) \to [b)$, pues

$$\begin{array}{rclcl} x \in a \circ b & \Longleftrightarrow & b \leq x \vee a & \Longleftrightarrow & [x \vee a) \subseteq [b) \\ & \Longleftrightarrow & [x) \cap [a) \subseteq [b) & \Longleftrightarrow & x \in [a) \to [b)\,. \end{array}$$

3. Sea $a \in A$ y sea $F \in \mathrm{Fi}(A)$. En [47] se definió la *extensión de F por a* como el conjunto
$$\langle a, F\rangle = \{x \in A \ : \ x \vee a \in F\}\,.$$
Se prueba fácilmente que $a \circ F = \langle a, F\rangle$.

Teorema 4.2.3. *Sea A una N-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una DN-álgebra.*

2. *$a \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$, para cada $a, b \in A$.*

3. *$I \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$, para cada $I \in \mathrm{Fi}\,(A)$ y cada $b \in A$.*

4. *$a \circ F \in \mathrm{Fi}\,(A)$, para cada $F \in \mathrm{Fi}\,(A)$ y cada $a \in A$.*

5. *$I \circ F \in \mathrm{Fi}\,(A)$, para cada $I \in \mathrm{Id}\,(A)$ y cada $F \in \mathrm{Fi}\,(A)$.*

Demostración. *1. $\Rightarrow$ 2.* Sean $a, b \in A$. Es obvio que $1 \in a \circ b$. Sean $x, y \in A$ tal que $x \leq y$ y $x \in a \circ b$. Entonces $x \vee a \leq y \vee a$ y $b \leq x \vee a$. Así, $b \leq y \vee a$ e $y \in a \circ b$. Sean $x, y \in a \circ b$ tal que existe $x \wedge y$. Entonces $b \leq x \vee a$ y $b \leq y \vee a$, es decir, $x \vee a, y \vee a \in [b)$. Dado que $[b)$ es un retículo distributivo acotado, $b \leq (x \vee a) \wedge_b (y \vee a) = (x \wedge y) \vee a$. Por lo tanto $x \wedge y \in a \circ b$ y $a \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $b \in A$ y sea $I \in \mathrm{Id}\,(A)$. Es inmediato que $1 \in I \circ b$ y que $I \circ b$ es creciente. Notemos que $i \circ b \subseteq I \circ b$, para cada $i \in I$. Sean $x, y \in I \circ b$ tal que existe $x \wedge y$. Luego, existen $i_1, i_2 \in I$ tal que $b \leq x \vee i_1$ y $b \leq y \vee i_2$. Sea $i = i_1 \vee i_2 \in I$. Así, $b \leq x \vee i$ y $b \leq y \vee i$, es decir, $x, y \in i \circ b$ y como $i \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$ tenemos que $x \wedge y \in i \circ b \subseteq I \circ b$. Entonces, $I \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$.

3. $\Rightarrow$ 4. Sea $a \in A$ y sea $F \in \mathrm{Fi}\,(A)$. Se sigue que $1 \in a \circ F$ y que $a \circ F$ es creciente. Sean $x, y \in a \circ F$ tal que existe $x \wedge y$. Entonces existen $f_1, f_2 \in F$ tal que $f_1 \leq x \vee a$ y $f_2 \leq y \vee a$. Así, $x \vee a, y \vee a \in F$. También, como $x \vee a, y \vee a \in [a)$, existe $(x \vee a) \wedge_a (y \vee a)$ en A y además $(x \vee a) \wedge_a (y \vee a) \in F$. Luego, $(x \vee a) \wedge_a (y \vee a) \leq x \vee a$ y $(x \vee a) \wedge_a (y \vee a) \leq y \vee a$, es decir, $x, y \in a \circ ((x \vee a) \wedge_a (y \vee a))$. De la Observación 4.2.2, $a \circ ((x \vee a) \wedge_a (y \vee a)) = (a] \circ ((x \vee a) \wedge_a (y \vee a))$ y por hipótesis $(a] \circ ((x \vee a) \wedge_a (y \vee a)) \in \mathrm{Fi}\,(A)$. Entonces $x \wedge y \in a \circ ((x \vee a) \wedge_a (y \vee a))$, pero como $(x \vee a) \wedge_a (y \vee a) \in F$, se sigue que $x \wedge y \in a \circ F$. Así, $a \circ F \in \mathrm{Fi}\,(A)$.

4. $\Rightarrow$ 5. Sea $I \in \mathrm{Id}\,(A)$ y sea $F \in \mathrm{Fi}\,(A)$. Es fácil de probar que $1 \in I \circ F$ y que $I \circ F$ es creciente. Sean $x, y \in I \circ F$ tal que existe $x \wedge y$. Entonces existen $(i_1, f_1), (i_2, f_2) \in I \times F$ tal que $x \in i_1 \circ f_1$ e $y \in i_2 \circ f_2$, o lo que es equivalente,

$f_1 \leq x \vee i_1$ y $f_2 \leq y \vee i_2$. Tomemos $i = i_1 \vee i_1 \in I$. Por otro lado, $x \vee f_1, y \vee f_2 \in F$ y existe $(x \vee f_1) \wedge_{x \wedge y} (y \vee f_2)$ en $[x \wedge y)$. Se sigue que $(x \vee f_1) \wedge_{x \wedge y} (y \vee f_2) \in F$. Consideremos el conjunto $i \circ F$. Al ser $(x \vee f_1) \wedge_{x \wedge y} (y \vee f_2) \leq x \vee i$ y $(x \vee f_1) \wedge_{x \wedge y} (y \vee f_2) \leq y \vee i$ se tiene que $x, y \in i \circ F$. Como $i \circ F \in \mathrm{Fi}(A)$, entonces $x \wedge y \in i \circ F$, es decir, existe $f \in F$ tal que $f \leq (x \wedge y) \vee i$. Así, $x \wedge y \in i \circ f$ y $x \wedge y \in I \circ F$. Concluimos que $I \circ F \in \mathrm{Fi}(A)$.

5. $\Rightarrow$ *1.* Sea $a \in A$ y sean $x, y, z \in [a)$. Siempre vale que $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Probemos la otra desigualdad. Como $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq y \vee x$ y $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq z \vee x$, entonces $y, z \in x \circ ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$. Por la Observación 4.2.2, $x \circ ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = (x] \circ [(x \vee y) \wedge (x \vee z))$ y por hipótesis, $(x] \circ [(x \vee y) \wedge (x \vee z)) \in \mathrm{Fi}(A)$. Luego, $y \wedge z \in (x] \circ [(x \vee y) \wedge (x \vee z))$, es decir, existe $i \in (x]$ y $f \in [(x \vee y) \wedge (x \vee z))$ tal que $y \wedge z \in i \circ f$. Así, $f \leq (y \wedge z) \vee i$. Se sigue que $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$ y por lo tanto A es una DN-álgebra. ■

De la Definición 4.2.1 tenemos como caso particular el siguiente aniquilador relativo

$$a^{\top} = a \circ 1 = \{x \in A \ : \ x \vee a = 1\},$$

llamado el *aniquilador de a*.

Observación 4.2.4. Si A es una DN-álgebra y $a \in A$, notemos que de los resultados desarrollados en la Subsección 3.3.4 tenemos que

$$[a)^{*} = [a) \to \{1\} = \{x \in A \ : \ x \vee a = 1\},$$

es decir, $[a)^{*} = a^{\top}$.

Lema 4.2.5. *Sea A una DN-álgebra. Sean $a, b \in A$ y sea $I \in \mathrm{Id}(A)$.*

1. *$I \cap a \circ b = \emptyset$ si y sólo si existe $Q \in X(A)$ tal que $I \subseteq Q$, $a \in Q$ y $b \notin Q$.*

2. *$I \cap a^{\top} = \emptyset$ si y sólo si existe $Q \in X(A)$ tal que $I \subseteq Q$ y $a \in Q$.*

3. *$I \cap a^{\top} = \emptyset$ si y sólo si existe $U \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $I \subseteq U$ y $a \in U$.*

4. *$U \in \mathrm{Idm}(A)$ si y sólo si para cada $a \in A$, $a \notin U$ si y sólo si $U \cap a^{\top} \neq \emptyset$.*

Demostración. *1.* Sean $a, b \in A$ y sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $I \cap a \circ b = \emptyset$. Tomemos el ideal $H = I \vee (a]$ y probemos que $H \cap [b) = \emptyset$. Si $x \in H \cap [b)$, entonces existe $i \in I$ tal que $x \leq i \vee a$ y $b \leq x$. Así, $b \leq i \vee a$ y por lo tanto $i \in a \circ b$, lo cual es una contradicción. Entonces $H \cap [b) = \emptyset$ y por el Teorema 2.2.6 existe $Q \in X(A)$ tal que $I \subseteq Q, a \in Q$ y $b \notin Q$. De manera recíproca, sea $Q \in X(A)$ tal que $I \subseteq Q$, $a \in Q$ y $b \notin Q$, y supongamos que $I \cap a \circ b \neq \emptyset$. Entonces, existe $i \in I$ tal que $b \leq i \vee a$. Como $i, a \in Q$, se sigue que $i \vee a \in Q$ y $b \in Q$, lo cual es una contradicción.

2. Se sigue del punto *1.*

3. Si $I \cap a^{\top} = \emptyset$, entonces por el punto *2.* existe $Q \in X(A)$ tal que $I \subseteq Q$ y $a \in Q$. Consideremos la familia

$$\mathcal{Z} = \{R \in \mathrm{Id}(A) - \{A\} \ : \ I \subseteq R \text{ y } a \in R\}.$$

Así, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ pues $Q \in \mathcal{Z}$. Luego, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal U en $\mathcal{Z}$. Claramente U es un ideal propio. Veamos que $U \in \mathrm{Idm}(A)$. Sea $b \in A$ tal que $b \notin U$. Si $U \cap b^{\top} = \emptyset$, entonces $H = U \vee (b]$ es un ideal propio, pues de otra forma $1 \in H$ implicaría que existe $p \in U$ tal que $p \vee b = 1$, es decir, $p \in U \cap b^{\top}$ y sería una contradicción. Así, $U \subset H$ y $H \in \mathcal{Z}$, lo cual es una contradicción porque U es maximal en $\mathcal{Z}$. Entonces debe ser $U \cap b^{\top} \neq \emptyset$, es decir, existe $c \in U$ tal que $c \vee b = 1$. Por lo tanto $H = A$ y $U \in \mathrm{Idm}(A)$.

Recíprocamente, supongamos que $I \cap a^{\top} \neq \emptyset$. Entonces existe $i \in I$ tal que $i \vee a = 1$. Así, existe $U \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $I \subseteq Q$ y $a \in Q$. Luego, $i \vee a = 1 \in U$ lo cual es una contradicción, pues U es un ideal propio.

4. Sea $U \in \mathrm{Idm}(A)$. Supongamos que $a \notin U$. Como U es maximal, $U \vee (a] = A$ y $1 \in U \vee (a]$, es decir, existe $p \in U$ tal que $p \vee a = 1$. Así, $p \in a^{\top}$ y $U \cap a^{\top} \neq \emptyset$.

Si $U \cap a^{\top} \neq \emptyset$ y $a \in U$, entonces existe $p \in U$ tal que $p \vee a = 1$. Luego, $1 \in U$ lo cual es una contradicción.

De manera recíproca, sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $U \subset I$. Entonces existe $a \in I$ tal que $a \notin U$ y por lo tanto $U \cap a^{\top} \neq \emptyset$, es decir, existe $p \in U$ tal que $p \vee a = 1$. Como $U \subset I$, tenemos que $p \in I$ y $a \vee p = 1 \in I$. Luego $I = A$ y $U \in \mathrm{Idm}(A)$. ■

4.2.1 Conexión con las álgebras de Tarski

Sea A una DN-álgebra. Veamos que cuando los ideales primos y maximales de A coinciden, entonces A es un álgebra de Tarski.

Teorema 4.2.6. *Sea A una DN-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$[a)$ es un álgebra de Boole, para cada $a \in A$.*

2. *Todo ideal primo de A es maximal.*

3. $[a) \vee a^{\top} = A$*, para cada* $a \in A$.

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $a \in A$ y sea $P \in X(A)$ tal que $a \notin P$. Tomemos el ideal $I(P \cup \{a\})$ y probemos que $I(P \cup \{a\}) = A$. Supongamos que tenemos la inclusión estricta $I(P \cup \{a\}) \subset A$, es decir, que existe $x \in A$ tal que $x \notin I(P \cup \{a\})$. Entonces, por el Teorema 2.2.6, existe $Q \in X(A)$ tal que $P \subseteq Q, a \in Q$ y $x \notin Q$. Sea $p \in P$. Al ser $p \leq p \vee a$ y $[p)$ un álgebra de Boole, existe $z \in [p)$ tal que $(p \vee a) \vee z = 1$ y $(p \vee a) \wedge_p z = p$. Como $(p \vee a) \wedge_p z \in P$ y P es primo, tenemos que $p \vee a \in P$ o $z \in P$. Si $p \vee a \in P$, entonces $a \in P$ lo cual es una contradicción. Si $z \in P$, entonces $z \in Q$. Luego tenemos que $a \vee z = a \vee (z \vee p) = (p \vee a) \vee z = 1 \in Q$ lo que resulta nuevamente una contradicción, pues Q es propio. Por lo tanto $I(P \cup \{a\}) = A$ y P es un ideal maximal.

2. $\Rightarrow$ *3.* Sea $a \in A$. Obviamente $[a) \vee a^{\top} \subseteq A$. Probemos la otra inclusión. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $c \in A$ tal que $c \notin [a) \vee a^{\top}$. Luego, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(A)$ tal que $c \in P$ y $P \cap ([a) \vee a^{\top}) = \emptyset$. Así, $a \notin P$ y $P \cap a^{\top} = \emptyset$. Al ser P un ideal primo, tenemos que P es maximal y como $a \notin P$, por el Lema 4.2.5 se sigue que $P \cap a^{\top} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, $[a) \vee a^{\top} = A$.

3. $\Rightarrow$ *1.* Sea $a \in A$ y sea $b \in [a)$ tal que $b \neq a$ y $b \neq 1$. Veamos que b tiene complemento en $[a)$. Sabemos que $a \in [b) \vee b^{\top} = F([b) \cup b^{\top})$. Si sólo existe $x \in [b)$ tal que $a = x$, entonces $b \leq x = a$. Luego $b = a$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, si sólo existe $x \in b^{\top}$ tal que $a = x$, tenemos que $x \vee b = a \vee b = 1$. Como $a \leq b$, entonces $a \vee b = b$ lo que implica que $b = 1$, lo cual nuevamente es una contradicción. Por lo tanto, existe $x \in [b)$ y existe $y \in b^{\top}$ tal que existe $x \wedge y$ y $x \wedge y = a$. Así,

$$\begin{array}{rclcl} a & = & a \wedge b & = & (x \wedge y) \wedge b \\ & = & (x \wedge b) \wedge y & = & b \wedge y. \end{array}$$

Entonces $b \wedge y = a$. Además $y \in b^{\top}$, es decir, $b \vee y = 1$. Como $y \in [a)$, concluimos que y es el complemento de b en $[a)$. ■

4.2.2 Caracterizaciones de las DN-álgebras

Nuestro próximo objetivo es presentar algunas nuevas caracterizaciones de la distributividad de una DN-álgebra. En la teoría de retículos, es bien sabido que un retículo es distributivo si y sólo si todo ideal propio se puede escribir como intersección de ideales primos. Presentamos una generalización de dicho resultado.

Teorema 4.2.7. *Sea A una N-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una DN-álgebra.*

2. *Todo ideal propio de A es intersección de ideales primos.*

Demostración. *1. $\Rightarrow$ 2.* Sea $I \in \mathrm{Id}(A) - \{A\}$. Para cada $a \notin I$, tenemos que $I \cap [a) = \emptyset$. Entonces por el Teorema 2.2.6, existe $P_a \in X(A)$ tal que $I \subseteq P_a$ y $a \notin P_a$. Así,

$$I = \bigcap \{P_a \in X(A) \ : \ a \notin I\}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Dados $a, b \in A$, probemos que $a \circ b \in \mathrm{Fi}(A)$. Se sigue que $1 \in a \circ b$ y que $a \circ b$ es creciente. Sean $x, y \in a \circ b$ tal que existe $x \wedge y$. Tomemos el ideal $Q = ((x \wedge y) \vee a]$ y supongamos que $b \notin Q$. Así, Q es un ideal propio y por hipótesis tenemos que

$$Q = \bigcap \{P \in X(A) \ : \ Q \subseteq P\}.$$

Luego, existe $P \in X(A)$ tal que $(x \wedge y) \vee a \in P$ y $b \notin P$. Se sigue que $x \wedge y, a \in P$ y al ser P un ideal primo, $x \in P$ o $y \in P$. Si $x \in P$, entonces $x \vee a \in P$ y como $b \leq x \vee a$, tenemos que $b \in P$ lo cual es una contradicción. Análogamente llegamos a una contradicción si suponemos que $y \in P$. Por lo tanto $b \in Q$ and $b \leq (x \wedge y) \vee a$. Así, $x \wedge y \in a \circ b$ y $a \circ b \in \mathrm{Fi}(A)$. Por el Teorema 4.2.3, concluimos que A es una DN-álgebra. ■

Ahora nos concentramos en estudiar una nueva equivalencia de la distributividad en términos de la noción de *ideal maximal relativo*.

Definición 4.2.8. Sea A un semirretículo. Sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ y sea S un subconjunto creciente de A. Diremos que I es un *ideal maximal relativo a* S, si I es maximal respecto a los ideales que son disjuntos a S.

Lema 4.2.9. *Sea A un semirretículo. Sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ y sea $F \in \mathrm{Fi}(A)$. Entonces I es un ideal maximal relativo a F si y sólo si $(H \circ F) \cap I \neq \emptyset$, para cada $H \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $H \nsubseteq I$.*

Demostración. Sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ y sea $F \in \mathrm{Fi}(A)$. Supongamos que I es un ideal maximal relativo a F y sea $H \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $H \nsubseteq I$. Consideremos el ideal $I \vee H$.

Dado que I es ideal maximal relativo a F e $I \subseteq I \vee H$, entonces $(I \vee H) \cap F \neq \emptyset$, es decir, existen $f \in F, i \in I$ y $h \in H$ tal que $f \leq i \vee h$. Así, $i \in h \circ f$. Por lo tanto $i \in H \circ F$ y $(H \circ F) \cap I \neq \emptyset$.

Recíprocamente, asumimos que $(H \circ F) \cap I \neq \emptyset$, para cada $H \in \mathrm{Id}\,(A)$ tal que $H \nsubseteq I$. Supongamos que I no es un ideal maximal relativo a F. Entonces existe $H \in \mathrm{Id}\,(A)$ tal que $I \subset H$ y $H \cap F = \emptyset$. Como $H \nsubseteq I$, tenemos que $(H \circ F) \cap I \neq \emptyset$. Luego, existe $i \in I$ y $(h, f) \in H \times F$ tal que $i \in h \circ f$, es decir, $f \leq i \vee h$. Al ser $i \in I \subset H$ e $i \vee h \in H$, se sigue que $f \in H$ y $H \cap F \neq \emptyset$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Entonces I es un ideal maximal relativo a F. ■

Teorema 4.2.10. *Sea A una N-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una DN-álgebra.*

2. *Todo ideal maximal relativo a $a \circ b$ es primo, para cada $a, b \in A$.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sean $a, b \in A$ y sea $I \in \mathrm{Id}\,(A)$ un ideal maximal relativo a $a \circ b$. Probemos que I es primo. Sean $x, y \in A$ tal que existe $x \wedge y \in I$. En búsqueda de una contradicción, supongamos que $x \notin I$ e $y \notin I$. Consideremos los ideales $I_x = I \vee (x]$ e $I_y = I \vee (y]$. Entonces $I_x \cap a \circ b \neq \emptyset$ e $I_y \cap a \circ b \neq \emptyset$, es decir, existen $f_1, f_2 \in a \circ b$ e $i_1, i_2 \in I$ tal que $f_1 \leq x \vee i_1$ y $f_2 \leq x \vee i_2$. Sea $i = i_1 \vee i_2 \in I$. Así, $x \vee i, y \vee i \in a \circ b$ y existe $(x \vee i) \wedge_i (y \vee i) \in [i)$. Por el Teorema 4.2.3, se sigue que $a \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$ y $(x \vee i) \wedge_i (y \vee i) = (x \wedge y) \vee i \in a \circ b$. Por otro lado, como I es un ideal, $(x \wedge y) \vee i \in I$. Entonces $I \cap a \circ b \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto I es primo.

2. $\Rightarrow$ *1.* Por el Teorema 4.2.3, es suficiente con probar que $a \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$. Se sigue que $1 \in a \circ b$ y que $a \circ b$ es creciente. Sean $x, y \in a \circ b$ tal que existe $x \wedge y$. Si suponemos que $x \wedge y \notin a \circ b$, entonces $(x \wedge y] \cap a \circ b = \emptyset$. Consideremos la familia de ideales

$$\mathcal{F} = \{I \in \mathrm{Id}\,(A) \ : \ (x \wedge y] \subseteq I \text{ e } I \cap a \circ b = \emptyset\}.$$

Luego, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y por el Lema de Zorn existe un elemento maximal M en $\mathcal{F}$. Se prueba fácilmente que M es un ideal maximal relativo a $a \circ b$. Entonces M es un ideal primo y como $x \wedge y \in M$, se tiene que $x \in M$ o $y \in M$. Luego, $M \cap a \circ b \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \wedge y \in a \circ b$ y $a \circ b \in \mathrm{Fi}\,(A)$. ■

4.2.3 $\top$-semi-homomorfismos

A continuación, estudiamos una clase particular de $\vee$-semi-homomorfismos que preservan la noción de aniquilador.

Definición 4.2.11. Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$. Diremos que h *preserva aniquiladores*, o es un $\top$-*semi-homomorfismo*, si $F(h(a^{\top})) = h(a)^{\top}$, para cada $a \in A$.

Observación 4.2.12. Siempre vale la inclusión $F(h(a^{\top})) \subseteq h(a)^{\top}$, para cada $a \in A$. Si $x \in F(h(a^{\top}))$, entonces existen $x_1, ..., x_n \in [h(a^{\top}))$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = x$. Como $x_1, ..., x_n \in [h(a^{\top}))$, existen $y_1, ..., y_n \in h(a^{\top})$ tal que $y_i \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Así, existen $t_1, ..., t_n \in a^{\top}$ tal que $h(t_i) = y_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Luego, $t_1 \vee a = ... = t_n \vee a = 1$ y como h es un $\vee$-semi-homomorfismo, tenemos que $h(t_1) \vee h(a) = ... = h(t_n) \vee h(a) = 1$. Entonces $x \vee h(a) = [(y_1 \vee x_1) \wedge ... \wedge (y_n \vee x_n)] \vee h(a)$ y al ser $[x)$ un retículo distributivo, $x \vee h(a) = (y_1 \vee x_1 \vee h(a)) \wedge ... \wedge (y_n \vee x_n \vee h(a)) = 1$. Por lo tanto, $x \vee h(a) = 1$ y $x \in h(a)^{\top}$.

Denotemos como $\mathcal{DNS}_{\top}[A, B]$ al conjunto de todos los $\top$-semi-homomorfismos entre las DN-álgebras A y B. Si $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$ en general $h^{-1}(P) \notin X(A)$, para cada $P \in X(B)$. Veamos que si P es un ideal maximal y h un $\top$-semi-homomorfismo, entonces $h^{-1}(P)$ es un ideal maximal y por lo tanto primo.

Lema 4.2.13. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\top}[A, B]$. Entonces $h^{-1}(P) \in \mathrm{Idm}(A)$, para cada $P \in \mathrm{Idm}(B)$.*

Demostración. Sea $P \in \mathrm{Idm}(B)$. Al ser h un $\vee$-semi-homomorfismo, se sigue que $h^{-1}(P)$ es un ideal. Además, $h(1) = 1 \notin P$ y $h^{-1}(P)$ es propio. Sea $a \in A$ tal que $a \notin h^{-1}(P)$. Entonces $h(a) \notin P$ y como P es maximal, $P \cap h(a)^{\top} \neq \emptyset$ por el Lema 4.2.5. Como h es $\top$-semi-homomorfismo, $P \cap F(h(a^{\top})) \neq \emptyset$, es decir, existen $x_1, ..., x_n \in [h(a^{\top}))$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = x$. Luego, existen $y_1, ..., y_n \in h(a^{\top})$ tal que $y_i \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Se sigue que existen $t_1, ..., t_n \in a^{\top}$ tal que $h(t_i) = y_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Tenemos entonces que $t_1 \vee a = ... = t_n \vee a = 1$ y al ser h un $\vee$-semi-homomorfismo, $h(t_1) \vee h(a) = ... = h(t_n) \vee h(a) = 1$. Como

$$x = x_1 \wedge ... \wedge x_n = (y_1 \vee x_1) \wedge ... \wedge (y_n \vee x_n) \in P$$

y P es primo, existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ e $y_i \vee x_i \in P$, lo que implica que $y_i = h(t_i) \in P$, es decir, $t_i \in h^{-1}(P)$. Así, $h^{-1}(P) \cap a^{\top} \neq \emptyset$. Recíprocamente, es fácil de probar que si $h^{-1}(P) \cap a^{\top} \neq \emptyset$, entonces $a \notin h^{-1}(P)$. Por lo tanto, por el Lema 4.2.5, tenemos que $h^{-1}(P) \in \mathrm{Idm}(A)$. ■

Teorema 4.2.14. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $h \in \mathcal{DNS}_{\top}[A, B]$.
2. *Para cada $P \in X(B)$ y cada $Q \in X(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q$, existe $D \in X(B)$ tal que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq h^{-1}(D)$.*
3. $\mathrm{Idm}(A) \cap [h^{-1}(P)) \subseteq h^{-1}[X(B) \cap [P)]$ *para cada $P \in X(B)$.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $P \in X(B)$ y sea $Q \in X(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q$. Tomemos el ideal $J = I(P \cup h(Q))$. Observemos que J es un ideal propio, pues en caso contrario $1 \in J$, es decir, existe $p \in P$ y $q \in Q$ tal que $p \vee h(q) = 1$. Como $p \in h(q)^{\top} = F(h(q^{\top}))$, existen $x_1, ..., x_n \in [h(q^{\top}))$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = p$. Así, existen $y_1, ..., y_n \in h(q^{\top})$ tal que $y_i \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Se sigue que existen $t_1, ..., t_n \in q^{\top}$ tal que $h(t_i) = y_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces $t_1 \vee q = ... = t_n \vee q = 1$. Como $p = x_1 \wedge ... \wedge x_n = (y_1 \vee x_1) \wedge ... \wedge (y_n \vee x_n) \in P$ y P es un ideal primo, existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ e $y_i \vee x_i \in P$. Así, $y_i = h(t_i) \in P$, es decir, $t_i \in h^{-1}(P) \subseteq Q$ y como $q \in Q$, $t_i \vee q = 1 \in Q$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto J es un ideal propio de A. Se sigue que existe $D \in X(B)$ tal que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq h^{-1}(D)$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Sea $P \in X(B)$ y sea $Q \in \mathrm{Idm}(A) \cap [h^{-1}(P))$. Entonces tenemos que $Q \in X(A)$ y $h^{-1}(P) \subseteq Q$. Luego, por hipótesis, existe $D \in X(B)$ tal que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq h^{-1}(D)$. Dado que $h^{-1}(D)$ es un ideal y Q es maximal, resulta ser $Q = h^{-1}(D)$. Se sigue que $Q \in h^{-1}[X(B) \cap [P)]$ y por lo tanto vale la inclusión $\mathrm{Idm}(A) \cap [h^{-1}(P)) \subseteq h^{-1}[X(B) \cap [P)]$.

3. $\Rightarrow$ *1.* Sea $a \in A$. Por la Observación 4.2.12 solamente tenemos que probar la inclusión $h(a)^{\top} \subseteq F(h(a^{\top}))$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $x \in h(a)^{\top}$ tal que $x \notin F(h(a^{\top}))$. Luego, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(B)$ tal que $x \in P$ y $P \cap F(h(a^{\top})) = \emptyset$, lo que implica que

$$P \cap h(a)^{\top} \neq \emptyset \text{ y } P \cap h(a^{\top}) = \emptyset.$$

Así, $h^{-1}(P) \cap a^{\top} = \emptyset$ y $h^{-1}(P) \in \mathrm{Id}(A)$. Por el Lema 4.2.5, existe $U \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq U$ y $a \in U$. Entonces

$$U \in \mathrm{Idm}(A) \cap \left[h^{-1}(P)\right) \subseteq h^{-1}[X(B) \cap [P)]$$

y por lo tanto existe $D \in X(B)$ tal que $P \subseteq D$ y $U = h^{-1}(D)$. Como $a \in U$, $h(a) \in D$ lo que implica que $D \cap h(a)^{\top} = \emptyset$. Por otro lado, $P \cap h(a)^{\top} \neq \emptyset$ y $P \subseteq D$. Entonces $D \cap h(a)^{\top} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $h(a)^{\top} \subseteq F(h(a^{\top}))$ y h es un $\top$-semi-homomorfismo. ■

Teniendo en cuenta el Teorema 4.2.14 y la dualidad desarrollada en en Capítulo 3, podemos definir las relaciones duales a los $\top$-semi-homomorfismos.

Definición 4.2.15. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_{\vee}[X_1, X_2]$. Diremos que R es una $\top$-*relación* si para cada $x \in X_1$ y cada $y \in X_2$ tal que $y \in R(x)$, se satisface la siguiente condición:

$$\text{existe } z \in X_1 \text{ tal que } x \leq z \text{ y } R(z) \subseteq [y).$$

Proposición 4.2.16. *Sean A y B DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$. Entonces h es un $\top$-semi-homomorfismo si y sólo si R_h es una $\top$-relación.*

Si denotamos como $\mathcal{DNS}_{\top}$ a la categoría que tiene como objetos DN-álgebras y como morfismos $\top$-semi-homomorfismos y como $\mathcal{SR}_{\top}$ a la categoría que tiene como objetos DN-espacios y como morfismos $\top$-relaciones entre DN-espacios, tenemos el siguiente resultado aplicando el Teorema 3.2.15.

Teorema 4.2.17. *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}_{\vee}|_{\mathcal{DNS}_{\top}}$ y $\mathbb{D}_{\vee}|_{\mathcal{SR}_{\top}}$ y los isomorfismos naturales H^* y φ establecen una equivalencia dual entre la categoría de DN-álgebras con $\top$-semi-homomorfismos y la categoría de DN-espacios con $\top$-relaciones.*

4.3 DN-álgebras normales

Un retículo distributivo acotado es *normal* si cada ideal primo contiene un único ideal primo minimal. Dicho concepto fué introducido por Cornish en [27] y extendido a la clase de los semirretículos distributivos en [42]. En esta sección introducimos las DN-álgebras normales y obtenemos algunas equivalencias utilizando aniquiladores.

Definición 4.3.1. Sea A una DN-álgebra.

1. Diremos que A es *normal* si cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal.

2. Diremos que A es *p-lineal* si la familia de los ideales primos que contienen a un ideal primo es una cadena.

Es inmediato que toda DN-álgebra p-lineal es normal. Por otro lado, si L es un retículo distributivo acotado, entonces la definición de normalidad es equivalente a que todo filtro primo contiene un único filtro minimal, el cual es un concepto dual a la definición dada por Cornish en [27].

Teorema 4.3.2. *Sea A una DN-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es normal.*
2. *Para cada $P \in X(A)$ y cada $a, b \in A$ tal que $a \vee b = 1$, $P \cap a^{\intercal} \neq \emptyset$ o $P \cap b^{\intercal} \neq \emptyset$.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $P \in X(A)$ y sean $a, b \in A$ tal que $a \vee b = 1$. Supongamos que $P \cap a^{\intercal} = \emptyset$ y $P \cap b^{\intercal} = \emptyset$. Entonces, por el Lemma 4.2.5, existen $U_1, U_2 \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $P \subseteq U_1, P \subseteq U_2, a \in U_1$ y $b \in U_2$. Como A es normal, $U_1 = U_2$. Luego, $a, b \in U_1$ pero $a \vee b = 1 \in U_1$, lo cual es una contradicción.

2. $\Rightarrow$ *1.* Sea $P \in X(A)$ y sean $U_1, U_2 \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $P \subseteq U_1$ y $P \subseteq U_2$. Si $U_1 \neq U_2$, entonces existe $a \in U_1$ tal que $a \notin U_2$. Al ser U_2 maximal, $I(U_2 \cup \{a\}) = A$ y $1 \in I(U_2 \cup \{a\})$, es decir, existe $b \in U_2$ tal que $a \vee b = 1$. Por otro lado, por el Lema 4.2.5, $P \cap a^{\intercal} = \emptyset$ y $P \cap b^{\intercal} = \emptyset$ lo cual contradice nuestra hipótesis. ■

Teorema 4.3.3. *Sea A una DN-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es normal.*
2. *Para cada $a, b \in A$, $(a \vee b)^{\intercal} = F(a^{\intercal} \cup b^{\intercal})$.*
3. *Para cada $a, b \in A$ tal que $a \vee b = 1$, $a^{\intercal} \vee b^{\intercal} = A$.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sean $a, b \in A$. Siempre vale que $F(a^{\intercal} \cup b^{\intercal}) \subseteq (a \vee b)^{\intercal}$. Probemos la otra inclusión. Supongamos que existe $x \in (a \vee b)^{\intercal}$ tal que $x \notin F(a^{\intercal} \cup b^{\intercal})$. Entonces, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(A)$ tal que $x \in P$ y $P \cap F(a^{\intercal} \cup b^{\intercal}) = \emptyset$. Como $a^{\intercal}, b^{\intercal} \subseteq F(a^{\intercal} \cup b^{\intercal})$, $P \cap a^{\intercal} = \emptyset$ y $P \cap b^{\intercal} = \emptyset$, por el Lema 4.2.5 existen $U_1, U_2 \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $P \subseteq U_1, P \subseteq U_2, a \in U_1$ y $b \in U_2$. Al ser A normal, $U_1 = U_2$ y $a, b \in U_1$. También, $x \in U_1$ lo que implica que $x \vee (a \vee b) = 1 \in U_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(a \vee b)^{\intercal} = F(a^{\intercal} \cup b^{\intercal})$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Es una consecuencia inmediata.

3. $\Rightarrow$ *1.* Sea $P \in X(A)$ y sean $U_1, U_2 \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $P \subseteq U_1$ y $P \subseteq U_2$. Supongamos que existe $a \in U_1$ tal que $a \notin U_2$. Como U_2 es maximal, tenemos que $1 \in A = I(U_2 \cup \{a\})$ y existe $b \in U_2$ tal que $a \vee b = 1$. Entonces $a^{\intercal} \vee b^{\intercal} = A$. Sea $x \in P$. Al ser $x \in a^{\intercal} \vee b^{\intercal}$, existen $x_1, ..., x_n \in a^{\intercal} \cup b^{\intercal}$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = x$. Así, $x_1 \wedge ... \wedge x_n \in P$ y como P es un ideal primo, existe $x_i \in P$ para algún i tal que $1 \leq i \leq n$. Si $x_i \in a^{\intercal}$, entonces $x_i \in U_1$ y $x_i \vee a = 1 \in U_1$, lo cual es una contradicción porque U_1 es propio. Si $x_i \in b^{\intercal}$ también arribamos a una contradicción. Así, $U_1 \subseteq U_2$ y por lo tanto $U_1 = U_2$. ■

Como consecuencia inmediata del Teorema 4.3.3 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3.4. *Sea A una DN-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es normal.*

2. *La aplicación $\rho : A \to \mathrm{Fi}(A)$ dada por $\rho(a) = a^{\intercal}$ es un homomorfismo entre DN-algebras.*

Teorema 4.3.5. *Sea A una DN-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es p-lineal.*

2. *Para cada $P \in X(A)$ y cada $a, b \in A$, $P \cap a \circ b \neq \emptyset$ o $P \cap b \circ a \neq \emptyset$.*

3. *Para cada $a, b \in A$, $(a \circ b) \vee (b \circ a) = A$.*

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $P \in X(A)$ y sean $a, b \in A$. Supongamos que $P \cap a \circ b = \emptyset$ o $P \cap b \circ a = \emptyset$. Por el Lema 4.2.5, existen $Q_1, Q_2 \in X(A)$ tal que $P \subseteq Q_1, a \in Q_1, b \notin Q_1, P \subseteq Q_2, b \in Q_2$ y $a \notin Q_2$. Como A es p-lineal, $Q_1 \subseteq Q_2$ o $Q_2 \subseteq Q_1$. Si $Q_1 \subseteq Q_2$, entonces $a \in Q_2$ lo cual arribamos a una contradicción. En el caso que $Q_2 \subseteq Q_1$, llegamos también a una contradicción. Luego, $P \cap a \circ b \neq \emptyset$ o $P \cap b \circ a \neq \emptyset$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Supongamos que existen $a, b \in A$ tal que $(a \circ b) \vee (b \circ a) \neq A$. Entonces existe $c \in A$ tal que $c \notin (a \circ b) \vee (b \circ a)$. Dado que $(a \circ b) \vee (b \circ a) \in \mathrm{Fi}(A)$, por el Teorema 2.2.6 existe $P \in X(A)$ tal que $c \in P$ y $P \cap (a \circ b) \vee (b \circ a) = \emptyset$. Así, $P \cap a \circ b = \emptyset$ y $P \cap b \circ a = \emptyset$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $(a \circ b) \vee (b \circ a) = A$.

3. $\Rightarrow$ *1.* Sean $P, Q_1, Q_2 \in X(A)$ tal que $P \subseteq Q_1$ y $P \subseteq Q_2$. Si Q_1 y Q_2 son incomparables, entonces existen $a, b \in A$ tal que $a \in Q_1 - Q_2$ y $b \in Q_2 - Q_1$. Sea $x \in P$. Como $A = (a \circ b) \vee (b \circ a)$, existen $x_1, ..., x_n \in (a \circ b) \cup (b \circ a)$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = x$. Luego, $x_1 \wedge ... \wedge x_n \in P$ y al ser P un ideal primo, existe $x_i \in P$ para algún i tal que $1 \leq i \leq n$. Si $x_i \in a \circ b$, entonces $b \leq x_i \vee a$. Como $x_i, a \in Q_1$, $x_i \vee a \in Q_1$ y $b \in Q_1$ lo cual es una contradicción. Si $x_i \in b \circ a$, arribamos también a una contradicción. Así, Q_1 y Q_2 son comparables y A es p-lineal. ■

Utilizando el concepto de DN-álgebra normal, es posible dar otra caracterización de los $\top$-semi-homomorfismos.

Teorema 4.3.6. *Sean A y B dos DN-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\vee}[A, B]$. Supongamos que B es normal. Entonces h es un $\top$-semi-homomorfismo si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $P \in X(B)$ y cada $Q_1, Q_2 \in \mathrm{Idm}(A)$, si $h^{-1}(P) \subseteq Q_1 \cap Q_2$ entonces $Q_1 = Q_2$.*
2. *$h^{-1}(P) \in \mathrm{Idm}(A)$, para cada $P \in \mathrm{Idm}(B)$.*

Demostración. Supongamos que h es un $\top$-semi-homomorfismo. Por el Lema 4.2.13 debemos probar solamente la primera condición. Sea $P \in X(B)$ y sean $Q_1, Q_2 \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q_1 \cap Q_2$. Supongamos que existe $a \in Q_1$ tal que $a \notin Q_2$. Como Q_2 es maximal, $1 \in A = I(Q_2 \cup \{a\})$ y existe $b \in Q_2$ tal que $a \vee b = 1$. Luego, $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) = h(1) = 1$. Al ser B normal, por el Teorema 4.3.2, tenemos que $P \cap h(a)^{\top} \neq \emptyset$ o $P \cap h(b)^{\top} \neq \emptyset$ y al ser h un $\top$-semi-homomorfismo, $P \cap F(h(a^{\top})) \neq \emptyset$ o $P \cap F(h(b^{\top})) \neq \emptyset$. Si $P \cap F(h(a^{\top})) \neq \emptyset$, entonces existe $x \in P$ tal que $x \in F(h(a^{\top}))$, es decir, existen $x_1, ..., x_n \in [h(a^{\top}))$ tal que existe $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ y $x_1 \wedge ... \wedge x_n = x$. Así, existen $y_1, ..., y_n \in h(a^{\top})$ tal que $y_i \leq x_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Se sigue que existen $t_1, ..., t_n \in a^{\top}$ tal que $h(t_i) = y_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces $t_1 \vee a = ... = t_n \vee a = 1$ y al ser h un $\vee$-semi-homomorfismo, $h(t_1) \vee h(a) = ... = h(t_n) \vee h(a) = 1$. Por otra parte, como

$$x = x_1 \wedge ... \wedge x_n = (y_1 \vee x_1) \wedge ... \wedge (y_n \vee x_n) \in P$$

y P es un ideal primo, $y_i \vee x_i \in P$ para algún i tal que $1 \leq i \leq n$. Así, $y_i = h(t_i) \in P$ y $t_i \in h^{-1}(P) \subseteq Q_1 \cap Q_2$. Luego, $a, t_i \in Q_1$ y $t_i \vee a = 1 \in Q_1$ lo cual es una contradicción, pues Q_1 es un ideal propio. Si $P \cap F(h(b^{\top})) \neq \emptyset$, razonando de manera similar llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $Q_1 \subseteq Q_2$ y $Q_1 = Q_2$.

Sea $a \in A$. Por la Observación 4.2.12 bastará con probar que $h(a)^{\top} \subseteq F(h(a^{\top}))$. Supongamos que existe $x \in h(a)^{\top}$ tal que $x \notin F(h(a^{\top}))$. Entonces, por el Teorema 2.2.6, existe $P \in X(B)$ tal que $x \in P$ y $P \cap F(h(a^{\top})) = \emptyset$, es decir, $h(a)^{\top} \cap P \neq \emptyset$ y $P \cap F(h(a^{\top})) = \emptyset$. Como B es normal, existe un único $Q \in \mathrm{Idm}(B)$ tal que $P \subseteq Q$. Notemos que $h(a) \notin Q$. En efecto, si $h(a) \in Q$ entonces $h(a)^{\top} \cap Q \neq \emptyset$ y existe $x \in Q$ tal que $h(a) \vee x = 1 \in Q$, lo cual es una contradicción por ser Q un ideal propio. Luego, como $a \notin h^{-1}(Q)$, tenemos por *2.* que $h^{-1}(Q) \in \mathrm{Idm}(A)$ y por el Lema 4.2.5 se sigue que $h^{-1}(Q) \cap a^{\top} \neq \emptyset$, es decir, $Q \cap F(h(a^{\top})) \neq \emptyset$. Por otro lado, como $P \cap F(h(a^{\top})) = \emptyset$, se tiene que $h^{-1}(P) \cap a^{\top} = \emptyset$ y nuevamente por el Lema 4.2.5 existe $U \in \mathrm{Idm}(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq U$ y $a \in U$. Por lo tanto $h^{-1}(P) \subseteq h^{-1}(Q) \cap U$ y por *1.* se tiene que $h^{-1}(Q) = U$, lo cual es una contradicción pues $a \in U$ y $a \notin h^{-1}(Q)$. Luego, $h(a)^{\top} = F(h(a^{\top}))$ y h es un $\top$-semi-homomorfismo. ■

Capítulo 5

DN$\Box$-álgebras

Una Lógica Modal es una Lógica Proposicional dotada de nuevos conectivos llamados *operadores modales* y que cumplen ciertos axiomas que regulan el comportamiento de los operadores en relación con el resto de los conectivos proposicionales. Por ejemplo, una Lógica Modal Normal definida sobre el Cálculo Proposicional Clásico **CPC** o sobre la Lógica Proposicional Intuicionista **Int** cuenta con los siguientes axiomas básicos:

- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
- $\top \to \Box\top$.

El primer axioma también puede ser expresado en términos de conjunciones por medio de los siguientes axiomas:

- $\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$,
- $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$.

Detalles sobre Lógicas Modales se pueden consultar en [9]. Las motivaciones para estudiar dichas lógicas, tanto desde el punto de vista semántico como sintáctico, son variadas y provienen de distintos campos. Además, en las últimas tres décadas han proliferado las aplicaciones de las Lógicas Modales a la Computación Teórica, la Inteligencia Artificial y hasta la Linguística. Esto hace que la Lógica Modal sea un área de gran interés y en permanente crecimiento.

Para un estudio semántico de la Lógica Proposicional Modal se puede recurrir a diferentes estructuras matemáticas. Desde el punto de vista algebraico, los anteriores axiomas se pueden expresar en álgebras de Boole, álgebras de Heyting o en retículos distributivos acotados a través de dos ecuaciones. Si L es un retículo distributivo acotado, entonces un *operador modal de necesidad* definido sobre L es una función unaria

$$\Box : L \to L$$

tal que para cada $a, b \in L$ se satisfacen las siguientes identidades:

1. $\Box 1 = 1$,

2. $\Box (a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

Las ecuaciones anteriores expresan que el operador modal $\Box$ es una aplicación que respeta el último elemento y preserva ínfimos. Sin embargo, notemos que $\Box$ no necesariamente tiene que preservar el supremo. Por otro lado, en el caso de las álgebras de Boole, es posible definir a partir del operador $\Box$ el operador dual $\Diamond$ como $\Diamond a = \neg \Box \neg a$, donde $\neg$ es la negación booleana. Este operador, llamado *operador modal de posibilidad*, cumple con condiciones duales al operador $\Box$, es decir, para cada $a, b \in B$ se satisfacen las siguientes identidades:

1. $\Diamond 0 = 0$,

2. $\Diamond (a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.

Podemos tomar el operador $\Diamond$ como primitivo y definir el operador $\Box$ como operador derivado por medio de la siguiente ecuación $\Box a = \neg \Diamond \neg a$. Claramente, por el principio de dualidad, en las álgebras de Boole es indistinto con que operador comenzamos a trabajar, pero en el caso de los retículos distributivos e incluso en las álgebras de Heyting es bastante más complejo ya que no tenemos negación o la negación intuicionista no permite una interdefinición entre los dos operadores. Este tipo de análisis se pueden trasladar a otras estructuras algebraicas más débiles que los retículos distributivos o álgebras de Heyting. En particular, nos podemos preguntar por el comportamiento de este tipo de funciones en las DN-álgebras.

En este capítulo vamos a dar los primeros pasos en el estudio de los operadores modales en las DN-álgebras. Este estudio es relativamente preliminar, ya que solo nos hemos centrado en definir operadores modales tipo $\Box$ en DN-álgebras. Las *DN-álgebras con un operador de necesidad* $\Box$, o *DN$\Box$-álgebras* que definiremos más adelante, generalizan tanto a los retículos distributivos acotados con un operador necesidad [15], [44] como a las álgebras de Tarski modales estudiadas en [14]. Teniendo en cuenta los resultados desarrollados en el Capítulo 3, el objetivo principal es estudiar una teoría de representación y una dualidad topológica para la clase de las DN$\Box$-álgebras que nos permita ser la base para un estudio semántico de lógicas más débiles que las lógicas modales y que se encuentren asociadas a las DN$\Box$-álgebras. Contar con una buena teoría de representación es un paso importante. Para ello, introducimos la noción de *DN$\Box$-espacio* y definimos una noción dual para caracterizar el operador modal $\Box$. Como una aplicación de la dualidad, caracterizamos algunos conceptos algebraicos.

Los resultados presentados en este capítulo servirán de base para posteriores estudios tanto desde el punto de vista semántico como lógico, de lógicas asociadas a las DN-álgebras con operadores modales.

5.1 $\wedge$-semi-homomorfismos

Si A y B son álgebras de Boole, recordemos que una aplicación $h : A \to B$ es un *semi-homomorfismo* si $h(1) = 1$ y $h\,(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$ para cada $a, b \in A$. Luego, un *álgebra modal* es un par $\langle A, \Box \rangle$ donde A es un álgebra de Boole y $\Box : A \to A$ es un semi-homomorfismo. En otras palabras, un álgebra modal es un álgebra de Boole junto a una aplicación unaria que respeta el último elemento y preserva ínfimos. Las álgebras modales se generalizan naturalmente tanto a la clase de los retículos distributivos acotados como a la clase de las álgebras de Tarski.

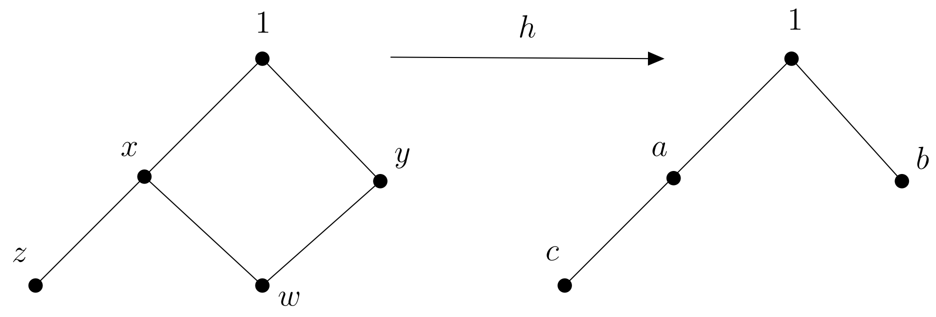
Como nuestra intención es estudiar un operador modal necesidad en la clase de las DN-álgebras, necesitamos previamente analizar una noción particular de función que introducimos a continuación.

Definición 5.1.1. Sean A y B DN-álgebras y sea $\Box : A \to B$ una aplicación monótona. Diremos que $\Box$ es un *$\wedge$-semi-homomorfismo* si para cada $a, b \in A$ tal que existe $a \wedge b$, se satisfacen las siguientes identidades:

1. $\Box 1 = 1$,
2. $\Box\,(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

Observemos que como los $\wedge$-semi-homomorfismos son aplicaciones monótonas y B es una DN-álgebra, si existe $a \wedge b$ en A, entonces existe $\Box a \wedge \Box b$ en B. Denotaremos como $\mathcal{DNS}_{\wedge}\,[A, B]$ al conjunto de todos los $\wedge$-semi-homomorfismos entre las DN-álgebras A y B y como $\mathcal{DNS}_{\wedge}$ a la categoría que tiene como objetos DN-álgebras y como morfismos $\wedge$-semi-homomorfismos.

Ejemplo 5.1.1. La siguiente figura nos muestra una aplicación h entre DN-álgebras finitas definida como $h(1) = 1, h(x) = a, h(y) = a, h(z) = c$ y $h(w) = a$. Notemos que h es un ejemplo sencillo de $\wedge$-semi-homomorfismo el cual no es un $\vee$-semi-homomorfismo.



Lema 5.1.2. *Sean A y B DN-álgebras y sea $\Box \in \mathcal{DNS}_\wedge[A, B]$. Si $P \in X(B)$, entonces $\Box^{-1}(P)^c \in \mathrm{Fi}(A)$.*

Demostración. Sean $a, b \in A$ tal que $a \leq b$ y $a \in \Box^{-1}(P)^c$. Entonces $a \wedge b = a$ y $\Box a \notin P$. Como $\Box a \leq \Box b$ y P es ideal, $\Box b \notin P$. Así, $b \in \Box^{-1}(P)^c$ y $\Box^{-1}(P)^c$ es creciente. Sean $a, b \in \Box^{-1}(P)^c$ tal que existe $a \wedge b$. Entonces $\Box a, \Box b \notin P$ y como existe $a \wedge b$, $\Box a \wedge \Box b = \Box(a \wedge b)$. Si $\Box a \wedge \Box b \in P$, entonces como P es primo $\Box a \in P$ o $\Box b \in P$, lo cual es una contradicción. Luego, $\Box a \wedge \Box b \notin P$ y $a \wedge b \in \Box^{-1}(P)^c$. Por lo tanto, $\Box^{-1}(P)^c \in \mathrm{Fi}(A)$. ■

Sean X_1 y X_2 conjuntos y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria. Consideremos la aplicación

$$\Box_R : \mathcal{P}(X_2) \to \mathcal{P}(X_1)$$

dada por

$$\Box_R(U) = \{x \in X_1 \ : \ R(x) \subseteq U\}. \tag{5.1}$$

Definimos la contrapartida topológica de los $\wedge$-semi-homomorfismos.

Definición 5.1.3. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria. Diremos que R es una $\wedge$-*relación* si satisface las siguientes condiciones:

1. $\Box_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$.

2. $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X_2, para cada $x \in X_1$.

Sea $\mathcal{SR}_{\wedge}[X_1, X_2]$ el conjunto de todas las $\wedge$-relaciones entre los DN-espacios $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$. Tenemos las siguientes equivalencias de la Definición 5.1.3.

Lema 5.1.4. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria. Supongamos que $\Box_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para cada $(x, y) \notin R$, existe $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$.*
2. *$R(x)$ es un subconjunto cerrado de X_2, para cada $x \in X_1$.*
3. *Para cada $(x, y) \in X_1 \times X_2$,*
$$(x, y) \in R \text{ si y sólo si } H_{X_2}(y) \subseteq \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x)).$$

Demostración. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Sea $x \in X_1$. Probemos que

$$R(x) = \bigcap \{U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2) \ : \ R(x) \subseteq U\}.$$

Una inclusión es trivial. Sea $y \in \bigcap \{U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2) \ : \ R(x) \subseteq U\}$ y supongamos que $y \notin R(x)$. Luego, existe $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$, lo cual es una contradicción. Entonces vale la igualdad y por lo tanto $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X_2.

2. $\Rightarrow$ *3.* Sea $(x, y) \in R$ y sea $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $U \in H_{X_2}(y)$. Entonces $y \notin U$ y $R(x) \nsubseteq U$, es decir, $x \notin \Box_R(U)$. Se sigue que $U \in \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x))$ y $H_{X_2}(y) \subseteq \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x))$. De manera recíproca, sea $(x, y) \in X_1 \times X_2$ tal que $H_{X_2}(y) \subseteq \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x))$ y supongamos que $(x, y) \notin R$. Como $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X_2, tenemos que $R(x) = \bigcap \{U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2) \ : \ R(x) \subseteq U\}$ y por lo tanto existe $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$. Se sigue que $U \in H_{X_2}(y)$ y $U \notin \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x))$, lo cual es una contradicción.

3. $\Rightarrow$ *1.* Sea $(x, y) \in X_1 \times X_2$ tal que $(x, y) \notin R$. Así, $H_{X_2}(y) \nsubseteq \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x))$. Entonces existe $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $U \in H_{X_2}(y)$ y $U \notin \Box_R^{-1}(H_{X_1}(x))$. Luego, tenemos que $\Box_R(U) \notin H_{X_1}(x)$ y $x \in \Box_R(U)$. Concluimos que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$. ■

Observación 5.1.5. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y $R \in \mathcal{SR}_{\wedge}[X_1, X_2]$. Si $x, y \in X_1$, notemos que $x \preceq_1 y$ implica $R(y) \subseteq R(x)$. Sea $z \in R(y)$ y supongamos que $z \notin R(x)$. Entonces, por el Lema 5.1.4, existe $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$ tal que $R(x) \subseteq U$

y $z \notin U$. Luego, $x \in \Box_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$. Por la Observacion 3.1.4, $\Box_R(U)$ es creciente con el orden dual $\preceq_1$ y así $y \in \Box_R(U)$, es decir, $R(y) \subseteq U$. Entonces $z \in R(y)$ y $z \in U$, lo cual es una contradicción.

Lema 5.1.6. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $f : X_1 \to X_2$ una aplicación tal que $f^{-1}(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$, para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Entonces la relación binaria $R_f \subseteq X_1 \times X_2$ dada por*

$$(x, y) \in R_f \text{ si y sólo si } f(x) \preceq_2 y$$

es una $\wedge$-relación.

Demostración. De la misma definición, $R_f(x) = \mathrm{Cl}(f(x))$ para cada $x \in X_1$. Sea $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Por la Observación 3.1.4, U es creciente con el orden dual $\preceq_2$ y

$$\begin{aligned} \Box_{R_f}(U) &= \{x \in X_1 : R_f(x) \subseteq U\} = \{x \in X_1 : \mathrm{Cl}(f(x)) \subseteq U\} \\ &= \{x \in X_1 : f(x) \in U\} = f^{-1}(U). \end{aligned}$$

Luego, $f^{-1}(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ y R_f es una $\wedge$-relación. ■

Por el Lema 5.1.6 y el Teorema 3.1.13 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.7. *Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio y sea $H_X : X \to X(D_{\mathcal{K}}(X))$ la aplicación definida en el Teorema 3.1.6. Entonces la relación binaria $H_X^{\bullet} \subseteq X \times X(D_{\mathcal{K}}(X))$ dada por*

$$(x, P) \in H_X^{\bullet} \text{ si y sólo si } P \subseteq H_X(x)$$

es una $\wedge$-relación.

A diferencia de las $\vee$-relaciones estudiadas en la Subsección 3.2.1, la composición usual de $\wedge$-relaciones es una $\wedge$-relación. Es una consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 5.1.8. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_{\wedge}[X_1, X_2]$. Entonces $R(C)$ es un subconjunto cerrado de X_2, para cada subconjunto cerrado C de X_1.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de X_1. Como $\mathcal{K}_1$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}$ sobre X_1, existe una familia $\{V_i : i \in I\}$ de $\mathcal{K}_1$ tal que $C = \bigcap\{V_i^c : i \in I\}$. Bastará con probar que para cada $y \notin R(C)$, existe $U \in \mathcal{K}_2$ tal que $y \in U$ y $R(C) \subseteq U^c$. Si $y \notin R(C)$, entonces para cada $x \in C$ se tiene que $y \notin R(x)$. Como $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X_2, existe $U_x \in \mathcal{K}_2$ tal que $y \in U_x$ y $R(x) \subseteq U_x^c$. Así, $x \in \Box_R(U_x^c)$. Consideremos las familias $A = \{V_i^c : i \in I\}$ y $B = \{\Box_R(U_x^c) : x \in \Box_R(U_x^c)\}$ de $D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$. Entonces $C \subseteq \bigcup\{\Box_R(U_x^c) : x \in \Box_R(U_x^c)\}$, es decir,

$$\bigcap\{V_i^c : i \in I\} \subseteq \bigcup\{\Box_R(U_x^c) : x \in \Box_R(U_x^c)\}.$$

Como X_1 es un DN-espacio, por el Teorema 3.1.6 tenemos que existen $V_1^c, ..., V_n^c \in [A)$ y $x_1, ..., x_m \in X_1$ tal que $V_1^c \cap ... \cap V_n^c \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ y $V_1^c \cap ... \cap V_n^c \subseteq \Box_R\left(U_{x_1}^c\right) \cup ... \cup \Box_R\left(U_{x_m}^c\right)$. Luego, $C \subseteq \Box_R(U^c)$ donde $U^c = U_{x_1}^c \cup ... \cup U_{x_n}^c \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Así, $C \subseteq \Box_R(U^c)$ y existe $U \in \mathcal{K}_2$ tal que $y \in U$ y $R(C) \subseteq U^c$. ■

Teorema 5.1.9. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle, \langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{K}_3\rangle$ DN-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}_\wedge[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}_\wedge[X_2, X_3]$.*

1. $\preceq_1 \in \mathcal{SR}_\wedge[X_1, X_1]$.
2. $R\circ \preceq_1 = R = \preceq_2 \circ R$.
3. $S \circ R \in \mathcal{SR}_\wedge[X_1, X_3]$.

Demostración. *1.* De la definición del orden dual, $\preceq_1(x) = \mathrm{Cl}(x)$ para cada $x \in X_1$. Veamos que $\Box_{\preceq_1}(U) = U$ para cada $U \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$. Sea $U \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ y $x \in \Box_{\preceq_1}(U)$. Entonces $\preceq_1(x) \subseteq U$ y $\mathrm{Cl}(x) \subseteq U$. De esta forma, $x \in U$. De manera recíproca, si $x \in U$ entonces $\mathrm{Cl}(x) \subseteq U$, pues U es un subconjunto cerrado. Así, $\preceq_1(x) \subseteq U$ y $x \in \Box_{\preceq_1}(U)$. Por lo tanto, $\preceq_1$ es una $\wedge$-relación.

2. Claramente $R \subseteq R\circ \preceq_1$. Probemos la otra inclusión. Si $(x, z) \in R\circ \preceq_1$, entonces existe $y \in X_1$ tal que $(x, y) \in \preceq_1$ e $(y, z) \in R$. Luego, $x \preceq_1 y$ y $z \in R(y)$. Por la Observación 5.1.5, $R(y) \subseteq R(x)$ y por lo tanto $z \in R(x)$. Concluimos que $(x, z) \in R$ y $R\circ \preceq_1 = R$. De manera análoga se prueba que $R = \preceq_2 \circ R$.

3. Sea $U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Box_{(S\circ R)}(U) &= \{x \in X_1 : (S \circ R)(x) \subseteq U\} &= \{x \in X_1 : S(R(x)) \subseteq U\} \\ &= \{x \in X_1 : R(x) \subseteq \Box_S(U)\} &= \Box_R(\Box_S(U)). \end{aligned}$$

Como R y S son $\wedge$-relaciones, se sigue que $\Box_{(S\circ R)}(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$. Por otro lado, por la Proposición 5.1.8, tenemos que $(S \circ R)(x) = S(R(x))$ es un subconjunto cerrado de X_3, para cada $x \in X_1$. Concluimos que $S \circ R$ es una $\wedge$-relación. ■

Por el Teorema 5.1.9, los DN-espacios junto con las $\wedge$-relaciones forman una categoría. Denotaremos como $\mathcal{SR}_\wedge$ a la categoría que tiene como objetos DN-espacios y como morfismos $\wedge$-relaciones entre DN-espacios. De manera análoga a la Sección 3.2, nos vamos a concentrar ahora en estudiar la correspondencia entre $\wedge$-semi-homomorfismos e $\wedge$-relaciones. Si A y B DN-álgebras y $\Box \in \mathcal{DNS}_\wedge[A,B]$, definimos la relación binaria $R_\Box \subseteq X(B) \times X(A)$ como

$$(P,Q) \in R_\Box \text{ si y sólo si } Q \subseteq \Box^{-1}(P).$$

Proposición 5.1.10. *Sean A y B DN-álgebras y sea $\Box \in \mathcal{DNS}_\wedge[A,B]$.*

1. *Para cada $P \in X(B)$ y cada $a \in A$, $\Box a \in P$ si y sólo si existe $Q \in X(A)$ tal que $(P,Q) \in R_\Box$ y $a \in Q$.*
2. *Para cada $a \in A$, $\varphi_B(\Box a) = \Box_{R_\Box}(\varphi_A(a))$.*
3. *$R_\Box \in \mathcal{SR}_\wedge[X(B), X(A)]$.*
4. *Si $C \in \mathcal{DNS}_\wedge$ y $\triangle \in \mathcal{DNS}_\wedge[B,C]$, entonces $R_{\triangle\circ\Box} = R_\Box \circ R_\triangle$.*

Demostración. *1.* Si $\Box a \in P$, entonces $a \notin \Box^{-1}(P)^c$. Por el Lema 5.1.2, $\Box^{-1}(P)^c \in \mathrm{Fi}(A)$. Luego, por el Teorema 2.2.6, existe $Q \in X(A)$ tal que $a \in Q$ y $Q \cap \Box^{-1}(P)^c = \emptyset$. Se sigue que $(P,Q) \in R_\Box$ y $a \in Q$. La recíproca es inmediata.

2. Sea $a \in A$. Por el punto *1.* y 5.1 tenemos que

$$\begin{aligned} P \in \Box_{R_\Box}(\varphi_A(a)) &\iff R_\Box(P) \subseteq \varphi_A(a) \\ &\iff \forall Q \in X(B)\,(Q \subseteq \Box^{-1}(P) \Rightarrow a \notin Q) \\ &\iff a \notin \Box^{-1}(P) \\ &\iff P \in \varphi_B(\Box a). \end{aligned}$$

3. Veamos que para cada $P \in X(B)$,

$$R_h(P) = \bigcap \{\varphi_A(a) \ : \ \Box a \notin P\}.$$

Sea $Q \in R_\Box(P)$ y $\Box a \notin P$. Entonces $Q \subseteq \Box^{-1}(P)$ y $a \notin \Box^{-1}(P)$. Así, $a \notin Q$, o lo que es equivalente, $Q \in \varphi_A(a)$. Como vale para cada $\Box a \notin P$, se sigue que $Q \in \bigcap\{\varphi_A(a) \ : \ \Box a \notin P\}$. Recíprocamente, si $Q \in \bigcap\{\varphi_A(a) \ : \ \Box a \notin P\}$ entonces $a \notin Q$ para cada $a \notin \Box^{-1}(P)$, es decir, $Q \subseteq \Box^{-1}(P)$. Así, $Q \in R_\Box(P)$ y $R_\Box(P)$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$. Por otro lado, $\Box_{R_\Box}(\varphi_A(a)) = \varphi_B(\Box a) \in D_{\mathcal{K}_B}(X(B))$, para cada $a \in A$. En consecuencia, $R_\Box$ es una $\wedge$-relación.

4. Sea $(P, Q) \in R_{\triangle \circ \Box}$. Entonces $Q \subseteq \Box^{-1}(\triangle^{-1}(P))$ y consideremos el conjunto $\Box(Q) = \{\Box q \ : \ q \in Q\} \subseteq B$. Por el Lema 5.1.2, $\triangle^{-1}(P)^c \in \mathrm{Fi}(B)$. Veamos que

$$I(\Box(Q)) \cap \triangle^{-1}(P)^c = \emptyset.$$

Si suponemos lo contrario, entonces existe $b \in \triangle^{-1}(P)^c$ tal que $b \in I(\Box(Q))$. Luego, existen $q_1, ..., q_n \in Q$ tal que $b \leq \Box q_1 \vee ... \vee \Box q_n$. Sea $q = q_1 \vee ... \vee q_n \in Q$. Como $\Box$ es monótona, $b \leq \Box q$. Al ser $\triangle^{-1}(P)^c$ un filtro, $\Box q \in \triangle^{-1}(P)^c$ o lo que es equivalente, $q \notin \Box^{-1}(\triangle^{-1}(P))$. Así, $q \notin Q$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $I(\Box(Q)) \cap \triangle^{-1}(P)^c = \emptyset$, y por el Teorema 2.2.6, existe $D \in X(B)$ tal que $\Box(Q) \subseteq D$ y $D \cap \triangle^{-1}(P)^c = \emptyset$, es decir, $Q \subseteq \Box^{-1}(D)$ y $D \subseteq \triangle^{-1}(P)$. Por último, como $(P, D) \in R_\triangle$ y $(D, Q) \in R_\Box$ se sigue que $(P, Q) \in R_\Box \circ R_\triangle$. Es fácil de probar la inclusión $R_\Box \circ R_\triangle \subseteq R_{\triangle \circ \Box}$. ■

Por el Teorema 3.1.12 y la Proposición 5.1.10 tenemos que existe un funtor contravariante

$$\mathbb{X}_\wedge : \mathcal{DNS}_\wedge \to \mathcal{SR}_\wedge$$

dado por

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{X}_\wedge(A) & = & \langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle & \text{si } \langle A, \vee, 1 \rangle \text{ es una DN-álgebra,} \\ \mathbb{X}_\wedge(\Box) & = & R_\Box & \text{si } \Box \text{ es un } \wedge\text{-semi-homomorfismo.} \end{array}$$

Veamos que existe un funtor contravariante de $\mathcal{SR}_\wedge$ en $\mathcal{DNS}_\wedge$.

Teorema 5.1.11. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{K}_2 \rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{K}_3 \rangle$ DN-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}_\wedge[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}_\wedge[X_2, X_3]$.*

1. $\Box_R \in \mathcal{DNS}_\wedge[D_{\mathcal{K}_2}(X_2), D_{\mathcal{K}_1}(X_1)]$.

2. $\Box_{(S \circ R)}(U) = (\Box_R \circ \Box_S)(U)$, *para cada* $U \in D_{\mathcal{K}_3}(X_3)$.

Demostración. *1.* De 5.1 y la Definición 5.1.3, tenemos que $\Box_R(U) \in D_{\mathcal{K}_1}(X_1)$ para cada $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Además, $\Box_R(X_2) = X_1$ y si $U \cap V \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$, entonces $\Box_R(U \cap V) = \Box_R(U) \cap \Box_R(V)$. Así, $\Box_R$ es un $\wedge$-semi-homomorfismo.

2. Se sigue del Teorema 5.1.9. ■

Luego, por los Teoremas 3.1.13, 5.1.9 y 5.1.11, podemos definir un funtor contravariante

$$\mathbb{D}_\wedge : \mathcal{SR}_\wedge \to \mathcal{DNS}_\wedge$$

como

$$\begin{array}{lll} \mathbb{D}_{\wedge}(X) & = & \langle D_{\mathcal{K}}(X), \cup, X\rangle \quad \text{si } \langle X, \mathcal{K}\rangle \text{ es un DN-espacio,} \\ \mathbb{D}_{\wedge}(R) & = & \Box_R \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{si } R \text{ es una } \wedge\text{-relación.} \end{array}$$

Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio y $H_X : X \to X(D_{\mathcal{K}}(X))$ el homeomorfismo del Teorema 3.1.13. Por el Corolario 5.1.7, $H_X^{\bullet} \subseteq X \times X(D_{\mathcal{K}}(X))$ dada por $(x, P) \in H_X^{\bullet}$ si y sólo si $P \subseteq H_X(x)$ es una $\wedge$-relación.

Teorema 5.1.12. *$H^{\bullet}$ es un isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{SR}_{\wedge}}$ y $\mathbb{X}_{\wedge} \circ \mathbb{D}_{\wedge}$.*

Demostración. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ DN-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_{\wedge}[X_1, X_2]$. Por el Lema 5.1.4,

$$(x, y) \in R \iff (H_{X_1}(x), H_{X_2}(y)) \in R_{\Box_R}. \tag{5.2}$$

Por el Corolario 5.1.7, las relaciones binarias $H_{X_1}^{\bullet}$ y $H_{X_2}^{\bullet}$ son $\wedge$-relaciones. Probemos que $H_{X_2}^{\bullet} \circ R = R_{\Box_R} \circ H_{X_1}^{\bullet}$. Sea $x \in X_1$ y $P \in X(D_{\mathcal{K}_2}(X_2))$ tal que $(x, P) \in H_{X_2}^{\bullet} \circ R$. Entonces existe $y \in X_2$ tal que $(x, y) \in R$ e $(y, P) \in H_{X_2}^{\bullet}$. Luego, por 5.2 y el Corolario 5.1.7, tenemos que $(H_{X_1}(x), H_{X_2}(y)) \in R_{\Box_R}$ y $P \subseteq H_{X_2}(y)$. Al ser H_{X_2} una aplicación biyectiva, existe $z \in X_2$ tal que $H_{X_2}(z) = P$. Así $H_{X_2}(z) \subseteq H_{X_2}(y)$, es decir, $H_{X_2}(y) \preceq_{\mathcal{K}_2} H_{X_2}(z)$. Entonces $(H_{X_1}(x), H_{X_2}(z)) \in (\preceq_{\mathcal{K}_2} \circ R_{\Box_R}) = R_{\Box_R}$. Como $(x, H_{X_1}(x)) \in H_{X_1}^{\bullet}$, se sigue que $(x, P) \in R_{\Box_R} \circ H_{X_1}^{\bullet}$.

Recíprocamente, sea $(x, P) \in R_{\Box_R} \circ H_{X_1}^{\bullet}$. Entonces existe $Q \in X(D_{\mathcal{K}_1}(X_1))$ tal que $(x, Q) \in H_{X_1}^{\bullet}$ y $(Q, P) \in R_{\Box_R}$. Como las aplicaciones H_{X_1} y H_{X_2} son biyectiva, se sigue que existen $y \in X_1$ y $z \in X_2$ tal que $Q = H_{X_1}(y)$ y $P = H_{X_2}(z)$. Por lo tanto, $H_{X_1}(y) \subseteq H_{X_1}(x)$, o lo que es equivalente, $H_{X_1}(x) \preceq_{\mathcal{K}_1} H_{X_1}(y)$. Entonces $(H_{X_1}(y), H_{X_2}(z)) \in R_{\Box_R}$ y $(H_{X_1}(x), H_{X_2}(z)) \in (R_{\Box_R} \circ \preceq_{\mathcal{K}_1}) = R_{\Box_R}$. Por el Lema 5.1.10, $(x, z) \in R$ y $(z, H_{X_2}(z)) \in H_{X_2}^{\bullet}$. Concluimos que $(x, P) \in H_{X_2}^{\bullet} \circ R$.

Por el Teorema 3.1.13, H_{X_1} es un homeomorfismo entre X_1 y $(\mathbb{X}_{\wedge} \circ \mathbb{D}_{\wedge})(X_1)$. Por lo tanto, $H^{\bullet}$ es una isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{SR}_{\wedge}}$ y $\mathbb{X}_{\wedge} \circ \mathbb{D}_{\wedge}$. ■

Teorema 5.1.13. *φ es una isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{DNS}_{\wedge}}$ y $\mathbb{D}_{\wedge} \circ \mathbb{X}_{\wedge}$.*

Demostración. Sean A y B DN-álgebras y sea $\Box \in \mathcal{DNS}_{\wedge}[A, B]$. Por la Proposición 5.1.10, $\varphi_B \circ \Box = \Box_{R_\Box} \circ \varphi_A$. Además, por el Teorema 3.1.12, φ_A es un isomorfismo entre A y $(\mathbb{D}_{\wedge} \circ \mathbb{X}_{\wedge})(A)$. Por lo tanto, φ es una isomorfismo natural entre los funtores $\mathbf{1}_{\mathcal{DNS}_{\wedge}}$ y $\mathbb{D}_{\wedge} \circ \mathbb{X}_{\wedge}$. ■

Teorema 5.1.14. *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}_{\wedge}$ y $\mathbb{D}_{\wedge}$ y los isomorfismos naturales $H^{\bullet}$ y φ establecen una equivalencia dual entre la categoría de DN-álgebras con $\wedge$-semi-homomorfismos y la categoría de DN-espacios con $\wedge$-relaciones.*

5.2 Representación y dualidad para $\mathcal{DNH}_{\Box}$

Nuestro próximo objetivo es introducir y estudiar la clase de las DN-álgebras con un operador modal de necesidad. Siguiendo los resultados desarrollados en la sección anterior y teniendo en cuenta el artículo [14], presentamos una dualidad topológica para dicha clase de álgebras a tavés de ciertas estructuras relacionales.

Definición 5.2.1. Una *DN-álgebra con un operador de necesidad* $\Box$, o *DN$\Box$-álgebra*, es un par $\langle A, \Box \rangle$ donde A es una DN-álgebra y $\Box$ es un $\wedge$-semi-homomorfismo definido sobre A.

Definición 5.2.2. Sean $\langle A, \Box_1 \rangle$ y $\langle B, \Box_2 \rangle$ DN$\Box$-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_{\wedge}[A, B]$. Diremos que h es un *$\Box$-homomorfismo* si $h(\Box_1 a) = \Box_2 (h(a))$, para cada $a \in A$.

Denotaremos como $\mathcal{DNH}_{\Box}[A, B]$ al conjunto de todos los $\Box$-homomorfismos entre las DN$\Box$-álgebras $\langle A, \Box_1 \rangle$ y $\langle B, \Box_2 \rangle$ y como $\mathcal{DNH}_{\Box}$ a la categoría que tiene como objetos DN$\Box$-álgebras y como morfismos $\Box$-homomorfismos entre DN$\Box$-álgebras. En nuestra próxima definición, introducimos los objetos duales a las DN$\Box$-álgebras.

Definición 5.2.3. Una estructura $\langle X, \mathcal{K}, Q \rangle$ es un *DN$\Box$-espacio* si $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es un DN-espacio y $Q \subseteq X \times X$ es una $\wedge$-relación.

Si $\langle X, \mathcal{K}, Q \rangle$ es un DN$\Box$-espacio, entonces la aplicación

$$\Box_Q : D_{\mathcal{K}}(X) \to D_{\mathcal{K}}(X)$$

definida como

$$\Box_Q(U) = \{x \in X \ : \ Q(x) \subseteq U\}$$

es un $\wedge$-semi-homomorfismo y el par $\langle D_{\mathcal{K}}(X), \Box_Q \rangle$ resulta ser una DN$\Box$-álgebra. De manera recíproca, si el par $\langle A, \Box \rangle$ es una DN$\Box$-álgebra, entonces la relación asociada $Q_{\Box} \subseteq X(A) \times X(A)$ definida como

$$(P, R) \in Q_{\Box} \text{ si y sólo si } R \subseteq \Box^{-1}(P)$$

es una $\wedge$-relación. Así, la estructura $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_{\Box} \rangle$ es un DN$\Box$-espacio.

Teorema 5.2.4. *Sea $\langle A, \Box\rangle$ una DN$\Box$-álgebra. Entonces las DN$\Box$-álgebras $\langle A, \Box\rangle$ y $\langle D_{\mathcal{K}_A}(X(A)), \Box_{Q_\Box}\rangle$ son isomorfas.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.12, la aplicación φ_A es un isomorfismo entre las DN-álgebras A y $D_{\mathcal{K}_A}(X(A))$. Luego, como consecuencia de la Proposición 5.1.10, tenemos que $\varphi_A(\Box a) = \Box_{R_\Box}(\varphi_A(a))$ para cada $a \in A$. Por lo tanto φ_A es un isomorfismo entre las DN$\Box$-álgebras $\langle A, \Box\rangle$ y $\langle D_{\mathcal{K}_A}(X(A)), \Box_{Q_\Box}\rangle$. ■

Estamos en condiciones de poder definir la contrapartida topológica de los $\Box$-homomorfismos entre DN$\Box$-álgebras.

Definición 5.2.5. Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1, Q_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2, Q_2\rangle$ DN$\Box$-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_\wedge[X_1, X_2]$. Diremos que R es una *$\wedge\Box$-relación* si $R \circ Q_1 = Q_2 \circ R$.

Denotaremos como $\mathcal{SR}_\Box[X_1, X_2]$ al conjunto de todas las $\wedge\Box$-relaciones entre los DN$\Box$-espacios $\langle X_1, \mathcal{K}_1, Q_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2, Q_2\rangle$ y como $\mathcal{SR}_\Box$ a la categoría que tiene como objetos DN$\Box$-espacios y como morfismos $\wedge\Box$-relaciones entre DN$\Box$-espacios.

Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio y sea $H_X : X \to X(D_\mathcal{K}(X))$ el homeomorfismo de el Teorema 3.1.6. Por el Corolario 5.1.7, se sigue que H_X induce una relación binaria $H_X^\bullet \subseteq X \times X(D_\mathcal{K}(X))$ que resulta ser una $\wedge$-relación. Probemos que $H_X^\bullet$ es en realidad una $\wedge\Box$-relación.

Teorema 5.2.6. *Sea $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ un DN$\Box$-espacio. Entonces $H_X^\bullet$ es una $\wedge\Box$-relación entre los DN$\Box$-espacios $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ y $\left\langle X(D_\mathcal{K}(X)), \mathcal{K}_{D_\mathcal{K}(X)}, Q_{\Box_Q}\right\rangle$.*

Demostración. Si $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un DN$\Box$-espacio, entonces $\langle D_\mathcal{K}(X), \Box_Q\rangle$ es una DN$\Box$-álgebra. Por la Proposición 5.1.10, $Q_{\Box_Q}$ es una $\wedge$-relación sobre $X(D_\mathcal{K}(X))$ y la estructura $\left\langle X(D_\mathcal{K}(X)), \mathcal{K}_{D_\mathcal{K}(X)}, Q_{\Box_Q}\right\rangle$ resulta ser un DN$\Box$-espacio donde

$$(x, y) \in Q \iff (H_{X_1}(x), H_{X_2}(y)) \in Q_{\Box_Q}.$$

De manera análoga a la demostración de el Teorema 5.1.12, se prueba que la relación $H_X^\bullet$ satisface la condición $H_X^\bullet \circ Q = Q_{\Box_Q} \circ H_X^\bullet$. Por lo tanto, tenemos que $H_X^\bullet$ es una $\wedge\Box$-relación. ■

En la Sección 5.1 probamos que si $\langle X_1, \mathcal{K}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2\rangle$ son DN-espacios y $R \in \mathcal{SR}_\wedge[X_1, X_2]$, entonces $\Box_R : D_\mathcal{K}(X) \to D_\mathcal{K}(X)$ es un $\wedge$-semi-homomorfismo. El siguiente resultado muestra que en realidad la aplicación $\Box_R$ es un $\Box$-homomorfismo entre DN$\Box$-álgebras cuando R es una $\wedge\Box$-relación.

Teorema 5.2.7. *Sean $\langle X_1, \mathcal{K}_1, Q_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2, Q_2\rangle$ DN$\square$-espacios y sea $R \in \mathcal{SR}_\square[X_1, X_2]$. Entonces $\square_R \in \mathcal{DNH}_\square[D_{\mathcal{K}_2}(X_2), D_{\mathcal{K}_1}(X_1)]$.*

Demostración. Sea $x \in X_1$ y sea $U \in D_{\mathcal{K}_2}(X_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in \square_R(\square_{Q_2}(U)) &\iff R(x) \subseteq \square_{Q_2}(U) &&\iff \forall y \in R(x)\,(Q_2(y) \subseteq U) \\ &\iff Q_2(R(x)) \subseteq U &&\iff R(Q_1(x)) \subseteq U \\ &\iff \forall z \in Q_1(x)\,(R(z) \subseteq U) &&\iff Q_1(x) \subseteq \square_R(U) \\ &\iff x \in \square_{Q_1}(\square_R(U)). \end{aligned}$$

Así, $\square_R(\square_{Q_2}(U)) = \square_{Q_1}(\square_R(U))$ y $\square_R$ es un $\square$-homomorfismo. ∎

Sean $\langle A, \square_1\rangle$ y $\langle B, \square_2\rangle$ DN$\square$-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNS}_\wedge[A, B]$. Entonces por la Proposición 5.1.10 tenemos que la relación asociada $Q_h \subseteq X(B) \times X(A)$ dada por

$$(P, R) \in Q_h \text{ si y sólo si } R \subseteq h^{-1}(P)$$

es una $\wedge$-relación. Estudiamos ahora la relación Q_h cuando h es un $\square$-homomorfismo.

Teorema 5.2.8. *Sean $\langle A, \square_1\rangle$ y $\langle B, \square_2\rangle$ DN$\square$-álgebras y sea $h \in \mathcal{DNH}_\square[A, B]$. Entonces $Q_h \in \mathcal{SR}_\square[X(B), X(A)]$.*

Demostración. Probemos que la relación Q_h satisface la condición $Q_h \circ Q_{\square_2} = Q_{\square_1} \circ Q_h$. Si $(P, D) \in Q_{\square_1} \circ Q_h$, entonces existe $S \in X(A)$ tal que $(P, S) \in Q_h$ y $(S, D) \in Q_{\square_1}$, es decir, $S \subseteq h^{-1}(P)$ y $D \subseteq \square_1^{-1}(S)$. Por el Lema 5.1.2, tenemos que $\square_2^{-1}(P)^c \in \mathrm{Fi}(B)$. Probemos que

$$I(h(D)) \cap \square_2^{-1}(P)^c = \emptyset.$$

Si suponemos lo contrario, entonces existe $b \in B$ tal que $b \in I(h(D)) \cap \square_2^{-1}(P)^c$, es decir, existe $a \in D$ tal que $b \leq h(a)$ y $\square_2 b \notin P$. Como h es un $\square$-homomorfismo, $\square_2 b \leq \square_2(h(a)) = h(\square_1 a)$ y $h(\square_1 a) \notin P$. Luego, $\square_1 a \notin h^{-1}(P)$ y $a \notin \square_1^{-1}(S)$. Por lo tanto $a \notin D$, lo cual es una contradicción. Entonces $I(h(D)) \cap \square_2^{-1}(P)^c = \emptyset$ y por el Teorema 2.2.6, existe $H \in X(B)$ tal que $I(h(D)) \subseteq H$ y $H \cap \square_2^{-1}(P)^c = \emptyset$. Se sigue que $D \subseteq h^{-1}(H)$ y $H \subseteq \square_2^{-1}(P)$, es decir, $(H, D) \in Q_h$ y $(P, H) \in Q_{\square_2}$. Concluimos que $(P, D) \in Q_h \circ Q_{\square_2}$. La inclusión $Q_h \circ Q_{\square_2} \subseteq Q_{\square_1} \circ Q_h$ se prueba de forma análoga y así Q_h es una $\wedge\square$-relación. ∎

Resumimos estos resultados utilizando el Teorema 5.1.14.

Teorema 5.2.9. *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}_\wedge|_{\mathcal{DNH}_\square}$ y $\mathbb{D}_\wedge|_{\mathcal{SR}_\square}$ y los isomorfismos naturales $H^\bullet$ y φ establecen una equivalencia dual entre la categoría de DN$\square$-álgebras con $\square$-homomorfismos y la categoría de DN$\square$-espacios con $\wedge\square$-relaciones.*

5.3 Aplicaciones

En esta sección aplicamos la dualidad desarrollada para las DN□-álgebras para caracterizar topológicamente los conceptos de □-congruencia, □-subálgebra y también sobre la □-extensión reticular distributiva libre de una DN□-álgebra.

5.3.1 □-congruencias

En la Subsección 3.3.2 del Capítulo 3 probamos la existencia de un isomorfismo dual entre el retículo de las congruencias de una DN-álgebra y el retículo de los DN-subespacios de su espacio dual. En esta subsección estudiamos el retículo de las congruencias correspondientes a las DN□-álgebras.

Si $\langle A, \Box\rangle$ es una DN□-álgebra, diremos que una relación binaria θ es una □-*congruencia* sobre $\langle A, \Box\rangle$ si es una congruencia sobre A y además satisface que si $(a, b) \in \theta$ entonces $(\Box a, \Box b) \in \theta$, para cada $a, b \in A$. Denotaremos como $\mathrm{Con}_{\Box}(A)$ al conjunto de todas las □-congruencias sobre $\langle A, \Box\rangle$.

Definición 5.3.1. Sea $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ un DN□-espacio y sea Y un DN-subespacio de $\langle X, \mathcal{K}\rangle$. Diremos que Y es *Q-saturado* si $\max Q(x) \subseteq Y$, para cada $x \in Y$.

Sea $\mathrm{S}_Q(X)$ el conjunto de todos los DN□-subespacios de $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$.

Sea $\langle A, \Box\rangle$ una DN□-álgebra. Recordemos que si Y es un subconjunto de A, entonces la relación binaria $\theta(Y)$ definida por 3.6 es una congruencia sobre A. Se prueba de manera sencilla que $\theta(Y)$ es una □-congruencia sobre $\langle A, \Box\rangle$.

Teorema 5.3.2. *Sea $\langle A, \Box\rangle$ una DN□-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_\Box\rangle$ su espacio dual. Entonces la aplicación*

$$F : \mathrm{S}_Q(X(A)) \to \mathrm{Con}_{\Box}(A)$$

dada por $F(Y) = \theta(Y)$ es un isomorfismo dual.

Demostración. Sea $Y \in \mathrm{S}_Q(X)$. Por el Teorema 3.3.10 bastará con probar que $\theta(Y)$ es compatible con el operador modal □. Sean $a, b \in A$ tal que $(a, b) \in \theta(Y)$ y supongamos que $\varphi_A(\Box a)^c \cap Y \neq \varphi_A(\Box b)^c \cap Y$, es decir, que existe $P \in X(A)$ tal que $P \in \varphi_A(\Box a)^c \cap Y$ y $P \notin \varphi_A(\Box b)^c \cap Y$. Entonces $P \in Y$, $\Box a \in P$ y $\Box b \notin P$. Luego, por la Proposición 5.1.10, existe $R \in X(A)$ tal que $R \subseteq \Box^{-1}(P)$ y $a \in R$. Consideremos la familia

$$\mathcal{G} = \left\{H \in X(A) \ : \ R \subseteq H \text{ y } H \subseteq \Box^{-1}(P)\right\}.$$

Como $R \in \mathcal{G}$, tenemos que $\mathcal{G}$ es no vacío. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal D tal que $R \subseteq D$ y $D \subseteq \Box^{-1}(P)$. Se sigue que $a \in R \subseteq D$ y $D \in \varphi_A(a)^c$. Por otro lado, $D \in \max Q_\Box(P) \subseteq Y$. Así, $D \in \varphi_A(a)^c \cap Y = \varphi_A(b)^c \cap Y$ y $D \in \varphi_A(b)^c$, es decir, $b \in D \subseteq \Box^{-1}(P)$ y $\Box b \in P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(\Box a, \Box b) \in \theta(Y)$ y $\theta(Y) \in \mathrm{Con}_\Box(A)$.

Recíprocamente, sea $\theta \in \mathrm{Con}_\Box(A)$. Por la Proposición 3.3.8 sabemos que el par $\langle Y_\theta, \mathcal{K}_\theta \rangle$ es un DN-espacio tal que $F(Y_\theta) = \theta$. Veamos que Y_θ es $Q_\Box$-saturado. Sea $P \in Y_\theta$ y sea $R \in \max Q_\Box(P)$. Supongamos que $R \notin Y_\theta$. Entonces $R \subseteq \Box^{-1}(P)$ y consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \bigcap \left\{ \varphi_A(b) \cap Y_\theta \ : \ \varphi_A(b) \notin H_{X(A)}(R) \right\} \cap \bigcap \left\{ \varphi_A(c)^c \cap Y_\theta \ : \ \varphi_A(c) \in H_{X(A)}(R) \right\}.$$

Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, entonces existe $D \in \mathcal{F}$ y $H_{X(A)}(D) = H_{X(A)}(R)$. Luego, como $H_{X(A)}$ es inyectiva, $D = R$ y $R \in Y_\theta$, lo cual es una contradicción. Entonces $\mathcal{F} = \emptyset$ y

$$\bigcap \left\{ \varphi_A(b) \cap Y_\theta \ : \ \varphi_A(b) \notin H_{X(A)}(R) \right\} \subseteq \bigcup \left\{ \varphi_A(c) \cap Y_\theta \ : \ \varphi_A(c) \in H_{X(A)}(R) \right\}.$$

Sea $B = \left\{ b \ : \ \varphi_A(b) \notin H_{X(A)}(R) \right\}$ y sea $C = \left\{ c \ : \ \varphi_A(c) \in H_{X(A)}(R) \right\}$. Al ser Y_θ un DN-subespacio, existen $b_1, ..., b_n \in [B)$ y $c_1, ..., c_m \in C$ tal que existe $b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y

$$[\varphi_A(b_1) \cap Y_\theta] \cap ... \cap [\varphi_A(b_n) \cap Y_\theta] \subseteq [\varphi_A(c_1) \cap Y_\theta] \cup ... \cup [\varphi_A(c_m) \cap Y_\theta].$$

Como $b_1, ..., b_n \in [B)$, existen $\overline{b_1}, ..., \overline{b_n} \in B$ tal que $\overline{b_i} \leq b_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Sea $b = b_1 \wedge ... \wedge b_n$ y sea $c = c_1 \vee ... \vee c_m$. Así, $\varphi_A(b) \cap Y_\theta \subseteq \varphi_A(c) \cap Y_\theta$. Luego, $\varphi_A(c)^c \cap Y_\theta \subseteq \varphi_A(b)^c \cap Y_\theta$ y el par $(b \vee c, c) \in \theta(Y_\theta)$. Al ser $\theta(Y_\theta)$ compatible con el operador modal $\Box$, tenemos que el par $(\Box(b \vee c), \Box c) \in \theta(Y_\theta)$, es decir, $\varphi_A(\Box(b \vee c))^c \cap Y_\theta = \varphi_A(\Box c)^c \cap Y_\theta$. Se sigue que $P \in \varphi_A(\Box c)^c$. Si suponemos lo contrario, es decir, si $P \in \varphi_A(\Box c)$ entonces $c \notin \Box^{-1}(P)$ y $c \notin R$. Por otro lado, como $\varphi_A(c) \in H_{X(A)}(R)$, $R \notin \varphi_A(c)$ y $c \in R$ lo cual es una contradicción. Entonces $P \in \varphi_A(\Box c)^c \cap Y_\theta$ y $P \in \varphi_A(\Box(b \vee c))^c \cap Y_\theta$. Así, $b \vee c \notin \Box^{-1}(P)^c$ y al ser $\Box^{-1}(P)^c$ un filtro por el Lema 5.1.2 se sigue que $b \notin \Box^{-1}(P)^c$, o lo que es equivalente, $\Box b \in P$. Luego, $\Box b = \Box(b_1 \wedge ... \wedge b_n) = \Box b_1 \wedge ... \wedge \Box b_n$ y al ser P un ideal primo, existe algún i tal que $1 \leq i \leq n$ y $\Box b_i \in P$. Además, como $\Box$ es monótona, $\Box \overline{b_i} \leq \Box b_i$ y $\Box \overline{b_i} \in P$. Por la Proposición 5.1.10, existe $D \in X(A)$ tal que $D \subseteq \Box^{-1}(P)$ y $\overline{b_i} \in D$. Al ser R maximal, tenemos que $D \subseteq R$ y $\overline{b_i} \in R$. Por otro lado, recordemos que $\varphi_A\left(\overline{b_i}\right) \notin H_{X(A)}(R)$, es decir, $\overline{b_i} \notin R$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Y_θ es un subconjunto $Q_\Box$-saturado y la aplicación F es un isomorfismo dual. ■

5.3.2 $\Box$-subálgebras

Una $\Box$-*subálgebra* de una DN$\Box$-álgebra $\langle A, \Box\rangle$ es cualquier subconjunto cerrado bajo la operación ternaria m y la operación binaria $\Box$. Denotaremos como $\mathrm{Sub}_{\Box}(A)$ al retículo de las congruencias de $\langle A, \Box\rangle$.

Definición 5.3.3. Sea $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ un DN$\Box$-espacio y sea $\mathcal{L}$ un subconjunto DN-básico de $\mathcal{K}$. Diremos que $\mathcal{L}$ es *DN$\Box$-básico* si $\Box_Q(U^c)^c \in \mathcal{L}$, para cada $U \in \mathcal{L}$.

Sea $\mathrm{Nb}_{\Box}(X)$ la familia de todos los subconjuntos DN$\Box$-básicas de $\mathcal{K}$ y tomemos la aplicación T de la Proposición 3.3.13.

Lema 5.3.4. *Sea $\langle A, \Box\rangle$ una DN$\Box$-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_{\Box}\rangle$ su espacio dual. Entonces la aplicación*

$$T : \mathrm{Sub}_{\Box}(A) \to \mathrm{Nb}_{\Box}(X(A))$$

preserva el orden.

Demostración. Sea $B \in \mathrm{Sub}_{\Box}(A)$. Por la Proposición 3.3.13, bastará con probar que $\Box_{Q_{\Box}}(U^c)^c \in T(B)$ para cada $U \in T(B)$. Si $U \in T(B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $U = \varphi_A(b)^c$. Como $\Box b \in B$, pues B es una subálgebra de $\langle A, \Box\rangle$, se sigue que $\varphi_A(\Box b)^c \in T(B)$. Luego, por la Proposición 5.1.10, $\Box_{Q_{\Box}}(\varphi_A(b)) = \varphi_A(\Box b)$. Así, $\Box_{Q_{\Box}}(\varphi_A(b))^c \in T(B)$ y $T(B) \in \mathrm{Nb}_{\Box}(X(A))$. ■

Tomemos ahora la aplicación S de el Lema 3.3.14.

Lema 5.3.5. *Sea $\langle A, \Box\rangle$ una DN$\Box$-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_{\Box}\rangle$ su espacio dual. Entonces la aplicación*

$$S : \mathrm{Nb}_{\Box}(X(A)) \to \mathrm{Sub}_{\Box}(A)$$

preserva el orden.

Demostración. Sea $\mathcal{L} \in \mathrm{Nb}_{\Box}(X(A))$. Por el Lema 3.3.14, será suficiente con probar que $S(\mathcal{L})$ es cerrado bajo el operador modal $\Box$. Si $a \in S(\mathcal{L})$, entonces $\varphi_A(a)^c \in \mathcal{L}$ y como $\mathcal{L}$ es DN$\Box$-básico, $\Box_{Q_{\Box}}(\varphi_A(a))^c = \varphi_A(\Box a)^c \in \mathcal{L}$. Así, $\Box a \in S(\mathcal{L})$ y $S(\mathcal{L}) \in \mathrm{Sub}_{\Box}(A)$. ■

Utilizando el Teorema 3.3.15, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.6. *Sea $\langle A, \Box\rangle$ una DN$\Box$-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_{\Box}\rangle$ su espacio dual. Entonces los retículos $\mathrm{Sub}_{\Box}(A)$ y $\mathrm{Nb}_{\Box}(X(A))$ son isomorfos.*

5.3.3 Sobre la $\Box$-extensión reticular distributiva libre

Nos enfocamos en esta subsección en extender los resultados desarrollados en la Subsección 3.3.5 del Capítulo 3 para probar la existencia de la $\Box$-extensión reticular distributiva libre de una DN$\Box$-álgebra.

Extendemos la Definición 3.3.19 para la clase de las DN$\Box$-álgebras.

Definición 5.3.7. Sea $\langle A, \Box \rangle$ una DN$\Box$-álgebra. Una par $\left\langle \left\langle L, \overline{\Box} \right\rangle, e \right\rangle$ es la $\Box$-*extensión reticular distributiva libre de* $\langle A, \Box \rangle$ si satisface las siguientes condiciones:

1. $\left\langle L, \overline{\Box} \right\rangle$ es un retículo distributivo acotado con un operador modal y $e : A \to L$ un $\Box$-homomorfismo inyectivo.

2. Para cada retículo distributivo acotado con un operador modal $\left\langle \overline{L}, \Delta \right\rangle$ y cada $\Box$-homomorfismo $h : A \to \overline{L}$, existe un único $\Box$-homomorfismo $\overline{h} : L \to \overline{L}$ tal que $h = \overline{h} \circ e$.

Sea $\langle A, \Box \rangle$ una DN$\Box$-álgebra y sea $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_\Box \rangle$ su espacio dual. Por el Teorema 3.3.20 sabemos que el par $\langle D_{\mathcal{KO}}[X(A)], \varphi_A \rangle$ es la extensión reticular distributiva libre de A, donde $\langle D_{\mathcal{KO}}[X(A)], \cup, \cap, \emptyset, X(A) \rangle$ es un retículo distributivo acotado y $\varphi_A : A \to D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$ es el homomorfismo inyectivo dado por $\varphi_A(a) = \{P \in X(A) \ : \ a \notin P\}$. Consideremos la aplicación

$$\overline{\Box} : D_{\mathcal{KO}}[X(A)] \to D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$$

dada por

$$\overline{\Box}(U) = \varphi_A(\Box a_1) \cap ... \cap \varphi_A(\Box a_n),$$

donde $U = \varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n)$ para algún $a_1, ..., a_n \in A$. Notemos que

$$\overline{\Box}(X(A)) = \overline{\Box}(\varphi_A(1)) = \varphi_A(\Box 1) = \varphi_A(1) = X(A)$$

y

$$\overline{\Box}(U \cap V) = \overline{\Box}(U) \cap \overline{\Box}(V),$$

para cada $U, V \in D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$. En otras palabras, la aplicación $\overline{\Box}$ es un operador de necesidad sobre $D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.8. *Sea* $\langle A, \Box \rangle$ *una DN$\Box$-álgebra y sea* $\langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_\Box \rangle$ *su espacio dual. Entonces el par* $\left\langle \left\langle D_{\mathcal{KO}}[X(A)], \overline{\Box} \right\rangle, \varphi_A \right\rangle$ *es la $\Box$-extensión reticular distributiva libre de* $\langle A, \Box \rangle$.

Demostración. Sea $\langle \overline{L}, \Delta \rangle$ un retículo distributivo acotado con un operador modal y sea $h : A \to \overline{L}$ un $\Box$-homomorfismo. Sea $\overline{h} : D_{\mathcal{KO}}[X(A)] \to \overline{L}$ la aplicación de el Teorema 3.3.20. Solamente debemos probar que $\overline{h}\left(\overline{\Box}(U)\right) = \Delta\left(\overline{h}(U)\right)$ para cada $U \in D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$. Si $U \in D_{\mathcal{KO}}[X(A)]$, entonces existen $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $U = \varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n)$. Luego,

$$\begin{array}{rclcl}
\overline{h}\left(\overline{\Box}(U)\right) & = & \overline{h}\left(\overline{\Box}(\varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n))\right) & = & \overline{h}(\varphi_A(\Box a_1) \cap ... \cap \varphi_A(\Box a_n)) \\
& = & h(\Box a_1) \wedge ... \wedge h(\Box a_n) & = & \Delta(h(a_1)) \wedge ... \wedge \Delta(h(a_n)) \\
& = & \Delta(h(a_1) \wedge ... \wedge h(a_n)) & = & \Delta\left(\overline{h}(\varphi_A(a_1) \cap ... \cap \varphi_A(a_n))\right) \\
& = & \Delta\left(\overline{h}(U)\right). & &
\end{array}$$

Por lo tanto, $\overline{h}$ es un $\Box$-homomorfismo. ■

Bibliografía

[1] Abad M., Díaz Varela J. P. and Torrens A.: *Topological representation for implication algebras.* Algebra Universalis **52** (2004), 39–48.

[2] Abbott J.: *Semi-boolean algebra.* Mat. Vestnik **19** (1967), 177–198.

[3] Araújo J. and Kinyon M.: *Independent axiom systems for nearlattices.* Czechoslovak Mathematical Journal **61** (2011), 975–992.

[4] Balbes R.: *A representation theory for prime and implicative semilattices.* Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 261–267.

[5] Balbes R. and Dwinger P.: *Distributive Lattices.* University of Missouri Press, 1974.

[6] Bezhanishvili G. and Jansana R.: *Priestley style duality for distributive meet-semilattices.* Studia Logica **98** (2011), 83–122.

[7] Bezhanishvili G. and Jansana R.: *Generalized Priestley quasi-orders.* Order **28** (2011), 201–220.

[8] Bezhanishvili G. and Jansana R.: *Esakia style duality for implicative semilattices.* Applied Categorical Structures **21** (2013), 181–208.

[9] Blackburn P., de Rijke M. and Venema Y.: *Modal logic.* Cambridge University Press, 2001.

[10] Burris S. and Sankappanavar H.: *A course in Universal Algebra.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[11] Calomino I. and Celani S.: *A note on annihilators in distributive nearlattices.* Miskolc Mathematical Notes **16** (2015), 65–78.

[12] Celani S.: *Topological representation of distributive semilattices.* Scientiae Math. Japonicae **8** (2003), 41–51.

[13] Celani S.: *Representation of Hilbert algebras and implicative semilattices.* Central European Journal of Mathematics **4** (2003), 561–572.

[14] Celani S.: *Modal Tarski algebras.* Reports on Mathematical Logic **39** (2005), 113–126.

[15] Celani S.: *Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2006** (2006), 1–20.

[16] Celani S.: *Distributive pseudocomplemented semilattices.* Asian-European Journal of Mathematics **3** (2010), 21–30.

[17] Celani S. and Cabrer L.: *Topological duality for Tarski algebras.* Algebra Universalis **58** (2008), 73–94.

[18] Celani S. and Calomino I.: *Some remarks on distributive semilattices.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **54** (2013), 407–428.

[19] Celani S. and Calomino I.: *Stone style duality for distributive nearlattices.* Algebra Universalis **71** (2014), 127–153.

[20] Celani S. and Calomino I.: *On homomorphic images and the free distributive lattice extension of a distributive nearlattice.* Enviado a publicar (2015).

[21] Chajda I., Halaš R. and Zedník J.: *Filters and annihilators in implication algebras.* Acta Univ. Palacki. Olomuc. Fac. rer. nat. Math. **37** (1998), 41–45.

[22] Chajda I. and Halaš R.: *An example of a congruence distributive variety having no near-unanimity term.* Acta Univ. M. Belii Ser. Math. **13** (2006), 29–31.

[23] Chajda I., Halaš R. and Kühr J.: *Semilattice Structures.* Research and Exposition in Mathematics, Heldermann Verlag, 2007.

[24] Chajda I. and Kolařík M.: *A decomposition of homomorphic images of nearlattices.* Acta Univ. Palacki. Olomuc. Fac. rer. nat. Math. **45** (2006), 43–51.

[25] Chajda I. and Kolařík M.: *Ideals, congruences and annihilators on nearlattices.* Acta Univ. Palacki. Olomuc. Fac. rer. nat. Math. **46** (2007), 25–33.

[26] Chajda I. and Kolařík M.: *Nearlattices.* Discrete Math. **308** (2008), 4906–4913.

[27] Cornish W.: *Normal lattices.* Journal Austral. Math. Soc. **14** (1972), 200–215.

[28] Cornish W.: *n-Normal lattices.* Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 48–53.

[29] Cornish W. and Hickman R.: *Weakly distributive semilattices.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), 5–16.

[30] Engelking R.: *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, 1989.

[31] Esakia L.: *Topological Kripke Models.* Soviet. Math. Dokl. **15** (1974), 147–151.

[32] Goldblatt R.: *Topoi: the categorial analysis of logic.* Elsevier, 1984.

[33] Grätzer G.: *General Lattice Theory.* Birkhäuser Verlag, 1998.

[34] Halaš R.: *Subdirectly irreducible distributive nearlattices.* Miskolc Mathematical Notes **7** (2006), 141–146.

[35] Hickman R.: *Join algebras.* Communications in Algebra **8** (1980), 1653–1685.

[36] Hoo C. and Shum K.: *0-distributive and P-uniform semilattices.* Canad. Math. Bull. **25** (1982), 317–324.

[37] Johnstone P.: *Stone spaces.* Cambridge University Press, 1982.

[38] Mandelker M.: *Relative annihilators in lattices.* Duke Math. J. **37** (1970), 377–386.

[39] Michael E.: *Topologies on spaces of subsets.* Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 152–182.

[40] Monteiro A.: *Sur les algèbres de Heyting symétriques.* Portugaliae Mathematica **39** (1980), 1–237.

[41] Munkres J.: *Topología.* Massachusetts Institute of Techology, 2000.

[42] Pawar Y. and Lokhande A.: *Normal semilattices.* Indian J. pure appl. Math. **29** (1998), 1245–1249.

[43] Pawar Y. and Thakare N.: *On prime semilattices.* Canad. Math. Bull. **23** (1980), 291–298.

[44] Petrovich A.: *Distributive lattices with an operator*. Studia Logica **56** (1996), 205–224.

[45] Priestley H.: *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*. Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 186–190.

[46] Priestley H.: *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*. Proc. London Math. Soc. **24** (1972), 507–530.

[47] Shum K., Chan M., Lai C. and So. K. Y.: *Characterizations for prime semilattices.* Canad. J. Math. **37** (1985), 1059–1073.

[48] Stone M.: *The theory of representations for a Boolean algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–111.

[49] Stone M.: *Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics*. Casopis pešt. mat. fys. **67** (1937), 1–25.

[50] Varlet J.: *Distributive semilattices and boolean lattices.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liege **41** (1972), 5–10.

[51] Varlet J.: *Relative annihilators in semilattices.* Bull. Austral. Math. Soc. **9** (1973), 169–185.

[52] Varlet J.: *On separation properties in semilattices.* Semigroup Forum **10** (1975), 220–228.