Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Un estudio algebraico de operadores temporales definibles en versiones algebraicas de diversas lógicas

Gustavo Andrés Pelaitay

Bahía Blanca **Argentina**

2015

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Area VI (Lógica y Fundamentos), dependiente del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre septiembre de 2009 y diciembre de 2014, bajo la dirección del Dr. Aldo Victorio Figallo.

12 de febrero 2015

Gustavo Andrés Pelaitay

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

A mi querida familia

Agradecimientos

Una vez concluida mi tesis doctoral quiero agradecer en primer lugar al profesor Aldo Victorio Figallo, por brindarme enseñanzas tanto académicas como humanas y por guiarme en este trabajo con gran disponibilidad, pasión y afecto. Fuente de mi pasión por las matemáticas. Sin su ayuda no hubiese logrado mi meta.

Quiero agradecer a los profesores Sergio Celani, Marcelo Coniglio y Ramón Jansana que gentilmente aceptaron ser los jurados de mi tesis. Por tal motivo, estaré agradecido eternamente.

Además quiero agradecer al Sr. Paolo Landini por haber aceptado en forma desinteresada ser codirector de mi Beca Interna Doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Al Sr. Martín Figallo por haber aceptado amablemente ser codirector de mi Beca Interna Posdoctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Al Sr. Aldo Figallo Orellano y al Sr. Carlos Gallardo con sus respectivas familias por haber abierto las puertas de sus hogares y por el tiempo que me brindaron.

A la Sra. María Cristina Carrillo quien con gran pasión y dedicación dispuso de su tiempo para ayudarme a traducir algunos de nuestros trabajos al inglés. Estoy muy agradecido por su valiosa actitud.

Muchas gracias al Director del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, Sheldy Ombrosi por haberme permitido realizar esta tarea y a las autoridades del Departamento de Matemática de la Facultad de Filosofía Humanidades y Artes, al director del departamento Víctor Fernández y al vice director Fernando Ramos por haberme recibido.

A mis compañeros de la FFHA, con quienes compartí experiencias, tomando como ejemplo sus capacidades en las matemáticas y sus virtudes como seres humanos, desde ya mi gran agradecimiento.

Finalmente, agradezco al CONICET, institución que me becó y sin cuya ayuda monetaria me hubiese sido imposible realizar este trabajo.

Si le das un pescado a un hombre,
él tendrá comida para un día.
Si le enseñas a pescar,
tendrá comida para toda su vida.
Kuan-tzu

.

Introducción

Esta es una breve introducción, dada para ayudar a la comprensión de lo que sigue, pero de ninguna manera pretende ser una reseña histórica sobre el nacimiento y evolución de la lógica temporal. Todo lo que acá decimos ya figura en alguno de los buenos trabajos citados en la bibliografía final y a estos remitimos a los lectores interesados.

Algunos autores consideran a Arthur Prior (ver por ejemplo [130, 131, 132]) como el iniciador de la disciplina conocida como "lógica temporal", a finales de la década de los cincuenta y en los sesenta del siglo XX. Pero también es habitual señalar a los lógicos estoicos como los iniciadores de la lógica temporal y encontrar conexiones que llegan hasta la actualidad.

En este volumen la lógica temporal es una extensión de la lógica clásica introducida para permitir formalizar enunciados que incluyen datos sobre el momento del tiempo en que han ocurrido, por ejemplo para los enunciados "está haciendo calor" y "hará calor" tenemos las opciones de formalizarlas como la misma proposición, o dos proposiciones completamente diferentes.

Una posibilidad que brinda la lógica temporal es formalizarla como la misma proposición pero en dos momentos diferentes del tiempo, es decir nos permite diferenciar si un acontecimiento ocurre en el pasado, en el presente, o en el futuro.

A partir de la obra de Arthur N. Prior *Time and tense* [132], título difícilmente traducible al español, surge la lógica temporal formal moderna que se divide en cuatro grandes ramas:

- La lógica de la datación o de la fecha (time).
- La lógica del tiempo gramatical (tense).
- La lógica temporal de preposiciones y adverbios.
- La lógica temporal de propósito específico.

Las lógicas del tiempo gramatical son aquellas que se fundan en la distinción propia de las lenguas indo-europeas entre sus tiempos fundamentales: pasado, presente y futuro. El sistema considerado como el más elemental de la lógica del tiempo gramatical es el minimal introducido por E. J. Lemmon en 1965 y que ha sido denominado Kt. El sistema Kt es el habitual de la lógica clásica de proposiciones, con sus símbolos y sus reglas de formación de fórmulas bien formadas. A esto se añaden cuatro operadores unarios (G, H, F y P). La axiomatización estilo Hilbert de Kt puede encontrarse en [149]:

- Todos los axiomas de la lógica proposicional clásica.
- $G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta),\ H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$,
- $\alpha \to GP\alpha,\ \alpha \to HF\alpha$, donde $P\alpha := \neg H(\neg\alpha)$ y $F\alpha := \neg G(\neg\alpha)$.

Las reglas de inferencia son modus ponens, y

$$\text{(RG)}\ \frac{\alpha}{G\alpha} \qquad\qquad \text{(RH)}\ \frac{\alpha}{H\alpha}$$

Prior “interpretó” a los cuatro operadores unarios G, H, F y P del modo siguiente:

- G: “Será siempre en el futuro verdad”.
- H: “Ha sido siempre en el pasado verdad”.

- F: "Será alguna vez en el futuro verdad".
- P: "Fue alguna vez en el pasado verdad".

Los operadores unarios G y F habitualmente son denominados *operadores temporales débiles* mientras que a H y P se los suele llamar *operadores temporales fuertes*.

Los modelos algebraicos de la lógica temporal clásica (ver [149, 104]) los constituyen las álgebras de Boole temporales (o álgebras temporales).

1. Un álgebra de Boole temporal (o $tB-$álgebra) es una terna $(\mathscr{B}, G, H)$ tal que $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole (o $B-$álgebra) y $G, H : B \longrightarrow B$ son dos operaciones unarias sobre B tales que

   1.1 $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

   1.2 $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

   1.3 $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, donde $P(x) = \neg H(\neg x)$ y $F(x) = \neg G(\neg x)$.

Observemos que pueden darse distintas axiomáticas para las álgebras de Boole temporales y algunas de ellas serán utilizadas más adelante. En efecto,

2. Un álgebra de Boole temporal (o $tB-$álgebra) es una terna $(\mathscr{B}, G, H)$ tal que $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ es una $B-$álgebra y $G, H : B \longrightarrow B$ son dos operaciones unarias sobre B tales que

   2.1 $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

   2.2 $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

   2.3 $G(x) \vee y = 1$ si, y sólo si, $x \vee H(y) = 1$.

En primer lugar recordemos que las $B-$álgebras pueden ser descritas como álgebras $\mathscr{B} = \langle B, \to, \neg, 1\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ que satisfacen ciertas identidades. Luego, cuando hablemos de álgebras de Boole pero con operaciones primitivas a $\{\to, \neg, 1\}$ las denominaremos B^H-álgebras. Entonces

3. Un álgebra de Boole temporal es una terna $(\mathscr{B}, G, H)$ tal que $\mathscr{B} = \langle B, \rightarrow, \neg, 1\rangle$ es una B^H-álgebra y $G, H : B \longrightarrow B$ son dos operaciones unarias sobre B tales que

   3.1 $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

   3.2 $G(x \rightarrow y) = G(x) \rightarrow G(y)$, $H(x \rightarrow y) = H(x) \rightarrow H(y)$,

   3.3 $x \rightarrow GP(x) = 1$, $x \rightarrow HF(x) = 1$, donde $F(x) = \neg G(\neg x)$ y $P(x) = \neg H(\neg x)$.

La prueba de que las tres definiciones anteriores son equivalentes puede consultarse en [85]. También, en [104], Kowalski da la siguiente definición de álgebra de Boole temporal, equivalente a las anteriores.

4. Un álgebra de Boole temporal (o $tB-$álgebra) es una terna $(\mathscr{B}, G, H)$ tal que $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ es una $B-$álgebra y $G, H : B \longrightarrow B$ son dos operaciones unarias sobre B tales que

   4.1 $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

   4.2 $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

   4.3 $\neg x \vee G(\neg H(\neg x)) = 1$, $\neg x \vee H(\neg G(\neg x)) = 1$.

Por otra parte, numerosos autores han definido de manera adecuada *operadores temporales* para obtener así contrapartidas algebraicas de nuevas lógicas temporales. Los lectores interesados en ampliar este ítem pueden consultar por ejemplo [43], [28], [31] y [27].

En 2007, Diaconescu y Georgescu, en su importante trabajo [43], comenzaron el estudio algebraico de operadores temporales sobre $MV-$álgebras y álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas.

Chiriţă, en [29] (ver también [28]), introdujo las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $\theta-$valuadas temporales y probó un importante teorema de representación que le permitió demostrar la completitud de la lógica de Mosil $\theta-$valuada temporal (ver [28]). Diaconescu y Georgescu, en [43], formularon el problema de obtener una representación para las $MV-$álgebras temporales, el cual fue resuelto por Botur y Paseka ([9, 126]), pero restringido al caso de las $MV-$álgebras temporales semisimples.

Botur y otros, en [8], introdujeron y estudiaron las álgebras temporales básicas, las cuales son una interesante generalización de las $MV-$álgebras temporales.

En esta tesis se definen y se estudian nuevas álgebras obtenidas al adicionar *operadores temporales* sobre distintas clases de álgebras, más generales que las álgebras de Boole como por ejemplo las *álgebras de De Morgan*, las *álgebras de Heyting*, las *álgebras de Heyting simétricas* y las *álgebras tetravalentes modales*. Además, consideramos operadores temporales sobre las *álgebras de Heyting simétricas de orden* n, a las que hemos denominado SH_n-álgebras, y sobre las *álgebras de Łukasiewicz-Moisil* $n \times m-$*valuadas*, a las que hemos denominado $LM_{n\times m}-$álgebras, en cada caso de las cuales se obtiene una generalización común para las álgebras de Boole temporales y las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas temporales.

Abstract

The volume presented here is organized in five chapters. In the first, with no claim to originality, we describe some known results that will facilitate the reading of the thesis.

Chapter 2 is organized in three sections. In the first we investigate the variety of algebras that we have called tense De Morgan Algebras as a natural generalization of tense Boolean algebras. In this section our main interest is the representation theory for this class of algebras. Section 2.1 is organized as follows: In Subsection 2.1.1 we define the variety of tense De Morgan algebras, introduce some examples and prove some properties. In Subsection 2.1.2 we give a representation theorem for tense De Morgan algebras in terms of tense De Morgan algebras of sets by using a well-known representation theorem for De Morgan algebras. In Subsection 2.1.3 we describe a topological duality for tense De Morgan algebras, extending the duality given by Cornish and Fowler in [42] for De Morgan algebras. Finally, in Subsection 2.1.4 we characterize the congruences lattice of these algebras in terms of the duality mentioned before and certain closed subsets of the space associated with them.

The results obtained in this section were published in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on De Morgan algebras*. Log. J. IGPL 22, 2, 255–267. 2014.

The second section consists of two subsections. In the first we obtain a discrete duality for the n-valued Łukasiewicz-Moisil algebras taking into account the results indicated by Dzik, Orłowska and van Alten in 2006 for De Morgan algebras [49]. In the second subsection we extend the discrete duality given for n-valued Łukasiewicz-Moisil algebras to the case of the tense n-valued Łukasiewicz–Moisil algebras. The results of this sections were published in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Discrete duality for tense Łukasiewicz–Moisil algebras.* Fund. Inform., 136. 1–13. 2015.

The third section is divided into three subsections. In Subsection 2.3.1 we review definitions and known results on tetravalent modal algebras which will be useful in the subsequent subsections. We also show that De Morgan algebras with implication defined by Kondo in [102] are polynominally equivalent to the contrapositive modal tetravalent algebras defined by Figallo and Landini in [58] and recently studied by Coniglio and Figallo in [40]. In Subsection 2.3.2 we obtain two different discrete dualities for the tetravalent modal algebras. Finally, in the last subsection we define the variety of tense tetravalent modal algebras as a common generalization of tense Boolean algebras and tense $n-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. The most important result in this subsection is having obtained a discrete duality for these new algebras.

Chapter 3 is organized into five sections. The first is devoted to the study of the $n \times m$-valued Łukasiewicz-Moisil algebras defined by Figallo and Sanza in [60]. This section has been subdivided into five subsections. In Subsection 3.1.1 we review an example which has allowed us to legitimate the study of the $n \times m$-valued Łukasiewicz-Moisil algebras. In Subsection 3.1.2 we recall definitions and results which will be useful for what follows. In Subsection 3.1.3 we introduce new implication connectives and prove some of their basic properties. In Subsection 3.1.4 the definition of monadic $n \times m-$valued Łukasiewicz–Moisil algebra is reviewed. These algebras were defined by Figallo and Sanza in [69]. Finally, in the last subsection we define the class of polyadic $n \times m$-valued Łukasiewicz-Moisil algebras. These algebras, for the case of $m = 2$, they coincide with polyadic $n-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras [7]. The main result of this subsection is a representation theorem for polyadic $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. Section 3.2 is focused on the study of weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras defined by Figallo and Pelaitay in [78]. This section is divided into four subsections. In Subsection 3.2.1 we introduce the variety of weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil as a common generalization of weak-tense Boolean algebras and weak-tense $n-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. In Subsection 3.2.2, based on the notion of weak frame, we provide an example of weak-tense $n \times m-$valued Lukasiewicz-Moisil algebras to bear into consideration for further analysis. In Subsection 3.2.3 we prove a representation theorem for weak-tense $n \times m$-valued Łukasiewicz-Moisil algebras. Finally, in the last subsection we focus on the study of congruences in a weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebra. These results allowed us to characterize simple and subdirectly irreducible algebras from the previously mentioned variety. Section 3.3 is focused on the study of tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras defined by Figallo and Pelaitay in [79]. This section is divided into four subsections. In Subsection 3.3.1 we introduce the variety of tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras as a common generalization of tense Boolean algebras and tense $n-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. In Subsection 3.3.2, based on the notion of frame, we provide an example of tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras, necessary for later analysis. In Subsection 3.3.3, we proved a representation theorem for tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras; as a corollary of this theorem we obtain the representation theorem provided by Diaconescu and Georgescu in [43] for tense $n-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. Finally, in the last subsection we focus on the study of congruences in a tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. These results allowed us to characterize simple and subdirectly irreducible algebras from the variety previously mentioned. Section 3.4 is focused on the study polyadic weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. This section is divided into two subsections. In Subsection 3.4.1 we introduced the class of study polyadic weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras as a common generalization of polyadic weak-tense Boolean algebras and polyadic weak-tense $n-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. Furthermore, based on the notion of weak-tense system, we provide an example of polyadic weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. The most prominent result from this second subsection is a representation theorem for polyadic weak-tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras. In the last subsection we define the class of polyadic tense $n \times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras and we provide an example based on the notion of tense system. Some of the results of this chapter have been accepted for publishing in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *A representation theorem for tense $n \times m-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras.* Mathematica Bohemica. 2015.
- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *$n \times m$-valued Łukasiewicz–Moisil algebras with two modal operators.* South American Journal of Logic. 2015.

They have also been presented and exposed in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Operadores temporales sobre álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m$-valuadas,* Actas del XII Congreso Dr. Antonio Monteiro, UNS, Bahía Blanca, Argentina, (2013), 31-32.

Chapter four is organized into three sections. The first section is focused to the study of tense operators on Heyting algebras. This section is divided into six subsections. In the first subsection we demonstrate that algebraic axiomatization given by Chajda in [24] of the tense operators F and P in intuitionistic logic is not in accordance with the Halmos definition of existential quantifier. In the second subsection we introduce $IKt-$algebras variety, we show some examples and prove some of its properties. In the third subsection we prove that intuitionistic tense logic introduced by Ewald in [52] has $IKt-$algebras as its algebraic counterpart. In the fourth subsection we describe a discrete duality for $IKt-$algebras bearing into account the results indicated by Orłowska and Rewitzky in [124] for Heyting algebras. In the fifth subsection we give a general construction of tense operators on a complete Heyting algebra via the so-called Heyting frames. Finally, in the last subsection we introduce the notion of tense deductive system which allows us to determine the congruences lattice in an $IKt-$algebras and characterize simple and subdirectly irreducible from the IKt variety. The results of this section have been published in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Remarks on Heyting algebras with tense operators.* Bull. Sect. Logic Univ. Lódz 41, 1–2, 71–74. 2012.
- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *An algebraic axiomatization of the Ewald's intuitionistic tense logic.* Soft Computing. 18, 10, 1873–1883. 2014.

They were also presented and discussed in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay.*Una axiomatización algebraica del sistema IKt,* IV Congreso Lationoamericano de Matemáticos, Córdoba, 2012.
- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *An algebraic axiomatization of IKt system,* 6th Workshop on Intuitionistic Modal Logic and Applications, Rio de Janeiro, Brazil, 2013.

The second section is focused on the study of tense operators on symmetric Heyting algebras. This section is divided into three subsections. In the first section we define tense symmetric Heyting algebras, we provide an example and prove some of their properties. In the second subsection we obtain a discrete duality for tense symmetric Heyting algebras taking into account the indications in [49] for De Morgan algebras and in [124] for Heyting algebras. In the third subsection we describe a propositional calculus that has tense symmetric Heyting algebras as an algebraic counterpart. The results in this section were published in

- A. V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Discrete duality for TSH-algebras*. Commun. Korean Math. Soc., 27, 1, 47–56. 2012.

They were also presented and discussed in

- A.V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Operadores temporales sobre álgebras de Heyting simétricas*. LIX Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Índice de Comunicaciones Científicas. Mar del Plata, Septiembre 2009.

- A.V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Una dualidad discreta para las álgebras de Heyting simétricas temporales*. LX Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Índice de Comunicaciones Científicas. Tandil, Septiembre 2010.

The third section is devoted to the study of tense operators on symmetric Heyting algebras of order n (or SH_n-algebras). This section is divided in three subsections. In the first subsection, we define the variety of tense SH_n-algebras, we provide an example and prove several properties. In the second subsection, we obtain a discrete duality for tense SH_n-algebras taking into account the ones indicated in [124] for SH_n-algebras. In the third subsection, we describe a propositional calculus that has tense SH_n-algebras as algebraic counterparts. The results of this section were published in:

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on SH_n-algebras*. Pioneer Journal of Algebra, Number Theory and its Applications. 1, 1, 33–41. 2011.

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Note on tense SH_n-algebras.* An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., 38, 4, 24–32. 2011.

They were also presented and discussed in:

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on SH_n-algebras*, 16th Brazilian Logic Conference, Petropolis, Brazil, 2011.

Chapter 5 consists of a brief enumeration of the possible future developments.

Resumen

El volumen que aquí presentamos está organizado en cinco capítulos. En el primero se describen resultados conocidos que facilitarán la lectura de la tesis, el mismo no tiene pretenciones de originalidad.

El Capítulo 2 está organizado en tres secciones. En la primera sección investigamos la variedad de álgebras que hemos denominado álgebras de De Morgan temporales, como una generalización natural de las álgebras de Boole temporales. En esta sección nuestro principal interés es la teoría de representación para esta clase de álgebras. La Sección 2.1 está organizada como sigue:

En la Subsección 2.1.1 definimos la variedad de las álgebras de De Morgan temporales, introducimos algunos ejemplos y probamos algunas propiedades. En la Subsección 2.1.2 damos un teorema de representación para las álgebras de De Morgan temporales en términos de las álgebras de De Morgan temporales de conjuntos usando un conocido teorema de representación para las álgebras de De Morgan. En la Subsección 2.1.3 describimos una dualidad topológica para las álgebras de De Morgan temporales, extendiendo la dualidad dada por Cornish y Fowler en [42] para las álgebras de De Morgan. Finalmente, en la Subsección 2.1.4 caracterizamos el retículo de las congruencias de estas álgebras en términos de la dualidad antes mencionada

y de ciertos subconjuntos cerrados del espacio asociado con él. Los resultados de esta sección fueron publicados en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on De Morgan algebras.* Log. J. IGPL 22, 2, 255–267. 2014.

La segunda sección está compuesta por dos subsecciones. En la primera obtenemos una dualidad discreta para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil n-valuadas teniendo en cuenta los resultados indicados por Dzik, Orłowska y van Alten en 2006 para las álgebras de De Morgan [49]. En la segunda subsección extendemos la dualidad discreta dada para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil n-valuadas al caso de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas temporales. Los resultados de esta sección fueron publicados en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Discrete duality for tense Łukasiewicz–Moisil algebras.* Fund. Inform., 136. 1–13. 2015.

La tercer sección está dividida en tres subsecciones. En la Subsección 2.3.1 repasamos definiciones y resultados conocidos sobre las álgebras tetravalentes modales que nos serán de utilidad en las subsecciones siguientes. También mostramos que las álgebras de De Morgan con implicación definidas por Kondo en [102] son polinomialmente equivalentes a las álgebras tetravalentes modales contrapositivas definidas por Figallo y Landini en [58] y estudiadas recientemente por Coniglio y Figallo en [40]. En la Subsección 2.3.2 obtenemos dos dualidades discretas diferentes para las álgebras tetravalentes modales. Finalmente, en la última subsección definimos la variedad de las álgebras tetravalentes modales temporales como una generalización común de las álgebras de Boole temporales y las álgebras de Łukasiewicz-Moisil 3$-$valuadas temporales. El resultado más importante de esta subsección es la obtención de una dualidad discreta para esta nueva clase de álgebras.

El Capítulo 3 está organizado en cinco secciones. La primera está dedicada al estudio de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas definidas por Figallo y Sanza en [60]. Esta sección se divide en cinco subsecciones.

En la Subsección 3.1.1. repasamos un ejemplo que nos permite legitimar el estudio de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m$-valuadas. En la Subsección 3.1.2 recordamos definiciones y resultados que nos serán de utilidad para lo que sigue. En la Subsección 3.1.3 introducimos nuevos conectivos de implicación y probamos algunas propiedades básicas de estos conectivos. En la Subsección 3.1.4 recordamos la definición de álgebra de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuada monádica. Estas álgebras fueron definidas por Figallo y Sanza en [69]. Finalmente, en la última subsección definimos la clase de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas poliádicas. Estas álgebras, para el caso $m = 2$, coinciden con las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas poliádicas [7]. El principal resultado de esta subsección es un teorema de representación para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas poliádicas.

La Sección 3.2 está dedicada al estudio de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales débiles definidas por Figallo y Pelaitay en [78]. Esta sección está dividida en cuatro subsecciones.

En la Subsección 3.2.1 introducimos la variedad de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales débiles como una generalización común de las álgebras de Boole temporales débiles y de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas temporales débiles. En la Subsección 3.2.2, basados en la noción de marco débil, damos un ejemplo de álgebra de Łukasiewicz-Moisil temporal débil que será de utilidad en lo que sigue. En la Subsección 3.2.3 probamos un teorema de representación para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales débiles. Finalmente, en la última subsección nos dedicamos al estudio de las congruencias en un álgebra de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuada temporal débil. Estos resultados nos permitieron caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de la variedad antes mencionada.

La Sección 3.3 está dedicada al estudio de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas temporales definidas por Figallo y Pelaitay en [79]. Esta sección está dividida en cuatro subsecciones.

En la Subsección 3.3.1 introducimos la variedad de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales como una generalización común de las álgebras de Boole temporales y de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas temporales. En la Subsección 3.3.2, basados en la noción de marco, damos un ejemplo de álgebra de Łukasiewicz-Moisil temporal que será de utilidad en lo que sigue. En la Subsección 3.3.3, probamos un teorema de representación para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales; como corolario de este teorema obtenemos el teorema de representación dado por Diaconescu y Georgescu en [43] para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas temporales. Finalmente, en la última subsección nos dedicamos al estudio de las congruencias en un álgebra de Łukasiewicz-Moisil $n \times m$-valuada temporal. Estos resultados nos permitieron caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de la variedad antes mencionada.

La Sección 3.4 está dedicada al estudio de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas poliádicas temporales débiles. Esta sección está dividida en dos subsecciones.

En la Subsección 3.4.1 introducimos la clase de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas poliádicas temporales débiles como una generalización común de las álgebras de Boole poliádicas temporales débiles y las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuadas poliádicas temporales débiles. También, basados en la noción de sistema temporal débil, damos un ejemplo de álgebra de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuada poliádica temporal débil. El resultado más importante de la segunda subsección es un teorema de representación para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales débiles.

En la última subsección definimos la clase de las álgebras de Łukasiewicz-

Moisil $n \times m-$valuadas poliádicas temporales y damos un ejemplo basándonos en la noción de sistema temporal.

Algunos de los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *A representation theorem for tense $n \times m-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras*. Mathematica Bohemica. 2015.
- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *$n \times m$-valued Łukasiewicz–Moisil algebras with two modal operators*. South American Journal of Logic. 2015.

También han sido presentados y expuestos en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Operadores temporales sobre álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m$-valuadas*, Actas del XII Congreso Dr. Antonio Monteiro, UNS, Bahía Blanca, Argentina, (2013), 31-32.

El Capítulo 4 está organizado en tres secciones. La primera sección está dedicada al estudio de operadores temporales sobre álgebras de Heyting. Esta sección se divide en seis subsecciones. En la primera subsección mostramos que la axiomatización algebraica dada por Chajda en [24] de los operadores temporales F y P en la lógica intuicionista no se ajusta a la definición de Halmos de cuantificador existencial. En la segunda subsección introducimos la variedad de las $IKt-$álgebras, mostramos algunos ejemplos y probamos algunas propiedades. En la tercera subsección probamos que el sistema IKt de la lógica temporal intuicionista introducido por Ewald en [52], tiene a las $IKt-$álgebras como contraparte algebraica. En la cuarta subsección describimos una dualidad discreta para las $IKt-$álgebras teniendo en cuenta los resultados indicados por Orłowska y Rewitzky en [124] para las álgebras de Heyting. En la quinta subsección damos una construcción general de los operadores temporales sobre un álgebra de Heyting completa por medio de los llamados marcos de Heyting. Finalmente, en la última subsección introducimos la noción de sistema deductivo temporal, la cual nos permite determinar el retículo de las congruencias en una $IKt-$álgebra y caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de la variedad IKt.

Los resultados de esta sección fueron publicados en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Remarks on Heyting algebras with tense operators.* Bull. Sect. Logic Univ. Lódz 41, 1–2, 71–74. 2012.

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *An algebraic axiomatization of the Ewald's intuitionistic tense logic.* Soft Computing. 18, 10, 1873–1883. 2014.

También han sido presentados en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay.*Una axiomatización algebraica del sistema IKt,* IV Congreso Lationoamericano de Matemáticos, Córdoba, 2012.

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *An algebraic axiomatization of IKt system,* 6th Workshop on Intuitionistic Modal Logic and Applications, Rio de Janeiro, Brazil, 2013.

La segunda sección está dedicada al estudio de operadores temporales sobre álgebras de Heyting simétricas. Esta sección está dividida en tres subsecciones. En la primera definimos la variedad de las álgebras de Heyting simétricas temporales, damos un ejemplo y probamos algunas propiedades. En la segunda subsección obtenemos una dualidad discreta para las álgebras de Heyting simétricas temporales teniendo en cuenta las indicadas en [49] para las álgebras de De Morgan y en [124] para las álgebras de Heyting. En la tercer subsección describimos un cálculo proposicional que tiene a las álgebras de Heyting simétricas temporales como contraparte algebraica. Los resultados de esta sección fueron publicados en

- A. V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Discrete duality for $TSH-$algebras.* Commun. Korean Math. Soc., 27, 1, 47–56. 2012.

También fueron presentados y expuestos en

- A.V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Operadores temporales sobre álgebras de Heyting simétricas*. LIX Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Índice de Comunicaciones Científicas. Mar del Plata, Septiembre 2009.

- A.V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Una dualidad discreta para las álgebras de Heyting simétricas temporales*. LX Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Índice de Comunicaciones Científicas. Tandil, Septiembre 2010.

La tercera sección está dedicada al estudio de operadores temporales sobre álgebras de Heyting simétricas de orden n (o SH_n-álgebras para abreviar) . Esta sección está dividida en tres subsecciones. En la primera subsección definimos la variedad de las SH_n-álgebras temporales, damos un ejemplo y probamos algunas propiedades. En la segunda subsección obtenemos una dualidad discreta para las SH_n-álgebras temporales teniendo en cuenta las indicadas en [124] para las SH_n-álgebras. En la tercera subsección describimos un cálculo proposicional que tiene a las SH_n-álgebras temporales como contraparte algebraica. Los resultados de esta sección fueron publicados en:

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on SH_n-algebras*. Pioneer Journal of Algebra, Number Theory and its Applications. 1, 1, 33–41. 2011.

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Note on tense SH_n-algebras*. An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., 38, 4, 24–32. 2011.

También fueron presentados y expuestos en:

- A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on SH_n-algebras*, 16th Brazilian Logic Conference, Petropolis, Brazil, 2011.

El Capítulo 5 consiste en una breve enumeración de los posibles desarrollos futuros.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Diversos ejemplos de álgebras

A continuación daremos las definiciones de aquellas clases de álgebras que utilizaremos más adelante, y también repasaremos algunas propiedades y resultados que serán necesarios para el desarrollo posterior.

1.1.1. $L_{0,1}-$álgebras

Teniendo en cuenta la caracterización dada por M. Sholander en 1951 ([145]) para los retículos distributivos, un álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ es un *retículo distributivo acotado* (o $L_{0,1}-$álgebra), si se verifican las siguientes condiciones:

(rd1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(rd2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(rd3) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$.

Para más detalles sobre la teoría de las $L_{0,1}-$álgebras puede verse por ejemplo en [3, 6, 91].

1.1.2. $B-$álgebras

Nosotros utilizaremos la siguiente definición de álgebra de Boole.

Definición 1.1.1. *Un álgebra de Boole (o $B-$álgebra) es un álgebra* $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2,2,1,0,0)$ *donde el reducto* $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es una* $L_{0,1}-$*álgebra y se satisfacen las siguientes condiciones:*

(B1) $x \wedge \neg x = 0$,

(B2) $x \vee \neg x = 1$.

A continuación recordaremos dos ejemplos de $B-$álgebras que nos serán de utilidad.

Ejemplo 1.1.1. *Sea* $\mathbf{2} = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$, *donde* $x \vee y = \text{máx}\{x, y\}$, $x \wedge y = \text{mín}\{x, y\}$,$\neg x = 1 - x$, *para todo* $x, y \in \{0,1\}$ *es una $B-$álgebra, llamada la $B-$álgebra estándar.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea X un conjunto no vacío y sea* $\mathbf{2}$ *la $B-$álgebra estándar. Entonces* $\mathbf{2}^X = \langle \mathbf{2}^X, \vee, \wedge, \neg, \mathbb{O}, \mathbb{I}\rangle$, *donde* $\mathbf{2}^X$ *es el conjunto de todas las funciones de X en* $\{0,1\}$, $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$, $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$, $(\neg f)(x) = \neg(f(x))$, $\mathbb{O}(x) = 0$, $\mathbb{I}(x) = 1$, *para todo* $x \in X$ *es una $B-$álgebra.*

Las $B-$álgebras, introducidas por Boole en 1850, son los modelos algebraicos del cálculo proposicional de la lógica clásica. Para una mayor información sobre estas álgebras se pueden consultar, por ejemplo, [94, 144].

1.1.3. $mB-$álgebras

En 1955, Halmos ([92]) (ver también [93]) introdujo las álgebras de Boole monádicas (o $mB-$álgebras) como pares $(\mathscr{B}, \exists)$ donde $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ es una $B-$álgebra y $\exists$ es una operación unaria sobre B, llamada *cuantificador existencial,* de modo que se satisfacen las identidades siguientes:

(E1) $\exists 0 = 0$,

(E2) $x \leq \exists x$,

(E3) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$.

Es bien sabido que en cualquier $mB-$álgebra se verifican las identidades:

(E4) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$,

(E5) $\exists\exists x = \exists x$.

Por otra parte, en estas álgebras se define la operación unaria $\forall$, llamada *cuantificador universal*, por medio de la fórmula $\forall x = \neg\exists\neg x$, la cual verifica:

(E6) $\forall 1 = 1$,

(E7) $x \wedge \forall x = \forall x$,

(E8) $\forall(x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$,

Además, en toda $mB-$álgebra se verifican las propiedades:

(E9) $\forall\forall x = \forall x$.

(E10) $\exists\forall x = \forall x$,

(E11) $\forall\exists x = \exists x$.

1.1.4. $t_d B-$álgebras

En esta subsección recordaremos algunas definiciones y resultados sobre la representación de las álgebras de Boole temporales débiles (ver [107, 149, 10]).

Definición 1.1.2. *Un álgebra de Boole temporal débil (o $t_d\,B-$álgebra) es una terna* $(\mathscr{B},G,H)$ *tal que* $\mathscr{B} = \langle B,\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ *es una $B-$álgebra y G,H son dos operadores unarios sobre B tales que, para todo $x,y \in B$:*

(tB1) $G(1)=1$, $H(1)=1$,

(tB2) $G(x\wedge y)=G(x)\wedge G(y)$, $H(x\wedge y)=H(x)\wedge H(y)$.

Proposición 1.1.1. ([85]) *Sea $(\mathscr{B},G,H)$ una $t_d\,B-$álgebra. Entonces, la condición* (tB2) *de la Definición 1.1.2 es equivalente a la siguiente condición:*

(tB2)* $G(x\to y)=G(x)\to G(y)$, $H(x\to y)=H(x)\to H(y)$, *donde* $x\to y := \neg x\vee y$.

Observación 1.1.1. *Usando la Proposición 1.1.1, en la Definición 1.1.2 si reemplazamos la condición* (tB2) *por* (tB2)*, *obtenemos una definición equivalente de $t_d\,B-$álgebra.*

Observación 1.1.2. *Sea $\mathscr{B} = \langle B,\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ una $B-$álgebra. Si G,H son dos endomorfismos de $\mathscr{B}$, entonces $(\mathscr{B},G,H)$ es una $t_d\,B-$álgebra.*

Observación 1.1.3. *Sea $\mathscr{B} = \langle B,\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ una $B-$álgebra. Entonces $(\mathscr{B},1_B,1_B)$ es una $t_d\,B-$álgebra, donde 1_B, es la función $1: B \longrightarrow B$, definida por $1_B(x)=1$, para todo $x\in B$.*

Definición 1.1.3. *Sea $(\mathscr{B},G,H)$ una $t_d\,B-$álgebra. Definimos la operación unaria $d_{\mathscr{B}}$ sobre B por $d_{\mathscr{B}}(x)=G(x)\wedge x\wedge H(x)$, para todo $x\in B$.*

Definición 1.1.4. *Si $(\mathscr{B},G,H)$ una $t_d\,B-$álgebra, llamaremos filtro temporal de $\mathscr{B}$ a todo subconjunto M de B tal que:*

(a) *M es filtro de B,*

(b) *si $x\in M$, entonces $G(x),H(x)\in M$.*

Notaremos con $\mathscr{D}_t(B)$ a la familia de todos los filtros temporales de la $t_d\,B-$álgebra B.

Observación 1.1.4. *Para una $t_d\, B-$álgebra $(\mathscr{B}, G, H)$, el retículo $\mathscr{D}_t(B)$ es isomorfo a el retículo de las congruencias de B.*

Definición 1.1.5. *Un marco débil es una terna (X, R, Q), donde X es un conjunto no vacío y R, Q son dos relaciones binarias sobre X.*

Sea (X, R, Q) un marco débil. Definimos las operaciones $G^*, H^* : \mathbf{2}^X \longrightarrow \mathbf{2}^X$, para todo $p \in \mathbf{2}^X$ y $x \in X$ por:

(1.1) $(G^*(p))(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xRy\}, (H^*(p))(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xQy\},$

Proposición 1.1.2. *Para todo marco temporal débil (X, R, Q), $(\mathbf{2}^X, G^*, H^*)$ es una $t_d\, B-$álgebra.*

Dem. Por el Ejemplo 1.1.2, tenemos que $\mathbf{2}^X$ es una $B-$álgebra. Entonces, solo resta probar (tB1) y (tB2) de la Definición 1.1.1.
(tB1) Sea $x \in X$. $(G^*(\mathbb{I}))(x) = \bigwedge\{\mathbb{I}(y) \mid y \in X, xRy\} = 1$, luego $G^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. De manera similar se puede probar que $H^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$.
(tB2) Sean $p, q \in \mathbf{2}^X$ y $x \in X$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(G^*(p \wedge q))(x) &= \bigwedge\{(p \wedge q)(y) \mid y \in X, xRy\} \\
&= \bigwedge\{p(y) \wedge q(y) \mid y \in X, xRy\} \\
&= \left(\bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xRy\}\right) \wedge \left(\bigwedge\{q(y) \mid y \in X, xRy\}\right) \\
&= (G^*(p))(x) \wedge (G^*(q))(x) \\
&= (G^*(p) \wedge G^*(q))(x),
\end{aligned}$$

así, $G^*(p \wedge q) = G^*(p) \wedge G^*(q)$. De manera similar se prueba que $H^*(p \wedge q) = H^*(p) \wedge H^*(q)$. ■

Definición 1.1.6. *Sean $(\mathscr{B}, G, H)$ y $(\mathscr{B}', G', H')$ dos $t_d\, B-$álgebras. Una función $f : B \longrightarrow B'$ es un morfismo de $t_d\, B-$álgebras (o $t_d\, B-$morfismo) si f es un morfismo de $B-$álgebras y este satisface las condiciones: $f(G(x)) = G'(f(x))$ y $f(H(x)) = H'(f(x))$, para cada $x \in B$.*

Denotaremos por $\mathscr{WTB}$ a la categoría de las $B-$álgebras temporales débiles con sus correspondientes morfismos y por $\mathscr{B}$ a la categoría de las $B-$álgebras con sus correspondientes morfismos.

La demostración del teorema de representación que indicaremos a continuación y que utilizaremos más adelante se puede consultar en [107].

Teorema 1.1.1. *Para cada $t_d B-$álgebra $(\mathscr{B}, G, H)$, existe un marco débil (X, R, Q) y un morfismo inyectivo de $t_d B-$álgebras $\alpha : (\mathscr{B}, G, H) \longrightarrow (\mathbf{2}^X, G^*, H^*)$, donde las operaciones G^* y H^* están definidas como en 1.1.*

1.1.5. $tB-$álgebras

En esta subsección recordaremos algunas definiciones y resultados sobre la representación de las álgebras de Boole temporales (ver [149, 10, 104, 85]).

Definición 1.1.7. *Un álgebra de Boole temporal (o $tB-$álgebra) es una $t_d B-$álgebra $(\mathscr{B}, G, H)$ que satisface la siguiente propiedad adicional, para todo $x, y \in B$:*

(tB3) $G(x) \vee y = 1 \Leftrightarrow x \vee H(y) = 1.$

Observación 1.1.5. *Sea $(\mathbf{2}, G, H)$ una $tB-$álgebra, donde $\mathbf{2}$ es la B-álgebra del Ejemplo 1.1.1. Entonces, $G = H = I_d$ o $G = H = 1_{\mathbf{2}}$. Donde $I_d : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$ es definida por $I_d(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{2}$ y $1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$ es definida por $1_{\mathbf{2}}(x) = 1$ para todo $x \in \mathbf{2}$.*

Proposición 1.1.3. ([85]) *Sea $(\mathscr{B}, G, H)$ una $t_d B-$álgebra. Entonces, la condición* (tB3) *de la Definición 1.1.7 es equivalente a:*

(tB3)* *$x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, donde P y F son operadores unarios sobre B, definidos por: $P(x) = \neg H(\neg x)$ y $F(x) = \neg G(\neg x)$.*

Observación 1.1.6. *Teniendo en cuenta la Proposición 1.1.3 podemos obtener una definición equivalente para las $tB-$álgebras. Esto muestra que las $tB-$álgebras forman una variedad.*

Definición 1.1.8. *Un marco es un par* (X,R)*, donde* X *es un conjunto no vacío y* R *es una relación binaria sobre* X*.*

Basados en la noción de marco, vamos a construir un ejemplo de $B-$álgebra temporal.

Sea (X,R) un marco. Definimos las operaciones $G^*, H^* : \mathbf{2}^X \longrightarrow \mathbf{2}^X$, para todo $p \in \mathbf{2}^X$ y $x \in X$ por:

(1.2) $(G^*(p))(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xRy\}, (H^*(p))(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, yRx\},$

Proposición 1.1.4. *Para cada marco* (X,R)*,* $(\mathbf{2}^X, G^*, H^*)$ *es una* $t\,B-$*álgebra.*

Dem. Por la Proposición 1.1.2 tenemos que $(\mathbf{2}^X, G^*, H^*)$ es una $t_d\,B-$álgebra. Vamos a verificar la condición (tB3) de la Definición 1.1.7. Sean $p, q \in \mathbf{2}^X$ tales que $G^*(p) \vee q = \mathbb{I}$. Entonces, $(G^*(p) \vee q)(x) = 1$, para cada $x \in X$. De donde resulta que $\bigwedge\{p(y) \vee q(x) \mid y \in X, xRy\} = 1$, para cada $x \in X$, luego $p(y) \vee q(x) = 1$, para todo $x, y \in X$ con xRy. Pero la condición $p(y) \vee q(x) = 1$, para todo $x, y \in X$ con xRy es equivalente a $p(x) \vee q(y) = 1$, para todo $x, y \in X$ con yRx. De donde resulta que $(p \vee H^*(q))(x) = 1$, para cada $x \in X$, luego $p \vee H^*(q) = \mathbb{I}$. La implicación recíproca se puede probar de manera similar. ■

Observación 1.1.7. *El concepto de morfismo de* $t\,B-$*álgebras es definido de la misma manera que para morfismos de* $t_d\,B-$*álgebras. También, la operación* $d_{\mathscr{B}}$ *definida para una* $t_d\,B-$*álgebra* $(\mathscr{B}, G, H)$*, puede extenderse para* $t\,B-$*álgebras.*

Denotaremos por $\mathscr{T}\mathscr{B}$ a la categoría de las $B-$álgebras temporales con sus correspondientes morfismos.

La demostración del teorema de representación que indicaremos a continuación y que utilizaremos más adelante se puede consultar en [107].

Teorema 1.1.2. *Para cada* $t\,B-$*álgebra* $(\mathscr{B}, G, H)$*, existe un marco* (X,R) *y un morfismo inyectivo de* $t\,B-$*álgebras* $\alpha : (\mathscr{B}, G, H) \longrightarrow (\mathbf{2}^X, G^*, H^*)$*, donde los operadores* G^* *y* H^* *están definidos como en 1.2.*

1.1.6. $pB-$álgebras

La lógica algebraica del cálculo de predicados clásico surgió por el estudio de dos tipos de estructuras: las álgebras poliádicas introducidas en [93] por Halmos y las álgebras cilíndricas, introducidas por Tarski (ver [95, 96]). Uno de los resultados de Galler [84] muestra que las álgebras poliádicas con igualdad y las álgebras cilíndicas son equivalentes como estructuras algebraicas. El teorema de representación de Halmos [93] y el teorema de representación de Tarski [95, 96] son la contraparte algebraica de los teoremas de completitud para el cálculo de predicados clásico.

Recordaremos la definición de álgebra de Boole poliádica (ver [7, 93]).

Definición 1.1.9. *Un álgebra de Boole poliádica (o $pB-$álgebra) es un sistema $(\mathscr{B}, U, S, \exists)$, donde $\mathscr{B}$ es una $B-$álgebra, U es un conjunto no vacío, S es una función de U^U en el conjunto de los endomorfismos de $\mathscr{B}$ y $\exists$ es una función de $\mathscr{P}(U)$ en el conjunto de los cuantificadores existenciales de $\mathscr{B}$ tales que se satisfacen los siguientes axiomas:*

(i) $S(1_U) = 1_B$,

(ii) $S(\rho \circ \tau) = S(\rho) \circ S(\tau)$, *para cada* $\rho, \tau \in U^U$,

(iii) $\exists(\emptyset) = 1_B$,

(iv) $\exists(J \cup J') = \exists(J) \circ \exists(J')$, *para cada* $J, J' \subseteq U$,

(v) $S(\rho) \circ \exists(J) = S(\tau) \circ \exists(J)$, *para cada* $J \subseteq U$ *y cada* $\rho, \tau \in U^U$ *tal que* $\rho\mid_{U\setminus J} = \tau\mid_{U\setminus J}$,

(vi) $\exists(J) \circ S(\rho) = S(\rho) \circ \exists(\rho^{-1}(J))$, *para cada* $J \subseteq U$ *y para cada* $\rho \in U^U$ *tal que* $\rho\mid_{\rho^{-1}(J)}$ *es inyectiva.*

La noción de morfismo de $pB-$álgebras es definida de manera natural. El cardinal de U será llamado *el grado* de la $pB-$álgebra $(\mathscr{B}, U, S, \exists)$. Un subconjunto J de U será llamado el *soporte* de un elemento $p \in B$ si $\exists(U \setminus J)p = p$. Una $pB-$álgebra es *localmente finita* si todo elemento tiene un soporte finito.

Ejemplo 1.1.3. *Sea $\mathscr{B}$ una $B-$álgebra completa, U un conjunto infinito y $X \neq \emptyset$. El conjunto $B^{(X^U)}$ de todas las funciones de X^U en B tiene una estructura natural de $B-$álgebra. Para cada $J \subseteq U$ y $\tau \in U^U$ definimos dos operaciones unarias $\exists(J)$ y $S(\tau)$ sobre $B^{(X^U)}$ por:*

- $\exists(J)(p(x)) = \bigvee\{p(y) \mid y \in X^U, y\,|_{U\setminus J} = x\,|_{U\setminus J}\}$,
- $S(\tau)(p(x)) = p(x \circ \tau)$,

para cada $p : X^U \longrightarrow B$, $\tau \in U^U$ y $J \subseteq U$. Entonces, se puede probar que $B^{(X^U)}$ es una $pB-$álgebra.

1.1.7. $t_d pB-$álgebras

Las álgebras de Boole poliádicas temporales débiles fueron introducidas en [86] (ver también [30, 31]) como estructuras algebraicas para la lógica de predicados temporal débil. Estas se obtienen dotando a una $pB-$álgebra con los operadores temporales G y H. Recordaremos definiciones y resultados sobre $B-$álgebras poliádicas temporales débiles.

Definición 1.1.10. *Un álgebra de Boole poliádica temporal débil (o $t_B pB-$álgebra) es un sistema $(\mathscr{B}, U, S, \exists, G, H)$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $(\mathscr{B}, U, S, \exists)$ *es una $pB-$álgebra,*

(ii) $(\mathscr{B}, G, H)$ *es una $t_d B-$álgebra,*

(iii) $S(\tau)(G(p)) = G(S(\tau)(p))$, *para cada $\tau \in U^U$ y $p \in B$,*

(iv) $S(\tau)(H(p)) = H(S(\tau)(p))$, *para cada $\tau \in U^U$ y $p \in B$.*

Definición 1.1.11. *Un sistema* $\mathscr{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, Q, 0)$ *es un sistema temporal débil si:*

(i) T *es un conjunto arbitrario no vacío,*

(ii) R *y* Q *son dos relaciones binarias sobre* T*,*

(iii) $0 \in T$*,*

(iv) *Para cada* $s, t \in T$*,* X_t *es un conjunto no vacío, con la siguiente propiedad:*

si tRs *o* tQs*, entonces* $X_t \subseteq X_s$*.*

Observación 1.1.8. (T, R, Q) *es un marco débil.*

Sea $\mathscr{T}$ un sistema temporal débil y U un conjunto no vacío. Denotaremos por

$$F_{\mathscr{T}}^U = \{(f_t)_{t\in T} \mid f_t : X_t^U \longrightarrow \mathbf{2}, \text{ para cada } t \in T\}.$$

Sobre $F_{\mathscr{T}}^U$ consideraremos las siguientes operaciones:

(pb1) $(f_t)_{t\in T} \to (g_t)_{t\in T} = (f_t \to g_t)_{t\in T}$, donde $(f_t \to g_t)(x) = f_t(x) \to g_t(x)$, para todo $x \in X_t^U$,

(pb2) $\neg(f_t)_{t\in T} = (\neg f_t)_{t\in T}$, donde $(\neg f_t)(x) = \neg(f_t(x))$, para todo $x \in X_t^U$,

(pb3) $1^{\mathscr{T}} = (1_t)_{t\in T}$, donde $1_t : X_t^U \longrightarrow \mathbf{2}$, $1_t(x) = 1$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$.

Lema 1.1.1. (Georgescu [86]) $\mathscr{F}_{\mathscr{T}}^U = (F_{\mathscr{T}}^U, \to, \neg, 1^{\mathscr{T}})$ *es una* B^H*−álgebra.*

Sobre $F_{\mathscr{T}}^U$ consideramos los operadores G y H, definidos por:

(pb4) $G((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, $g_t : X_t^U \longrightarrow \mathbf{2}$, $g_t(x) = \bigwedge\{f_s(i \circ x) \mid tRs, s \in T\}$,

(pb5) $H((f_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, $h_t : X_t^U \longrightarrow \mathbf{2}$, $h_t(x) = \bigwedge\{f_s(i \circ x) \mid tQs, s \in T\}$, donde $i : X_t \longrightarrow X_s$ es la función inclusión.

Lema 1.1.2. (Georgescu [86]) *$(\mathscr{F}^U_{\mathscr{T}}, G, H)$ es una $t_d B-$álgebra.*

(pb6) Para cada $\tau \in U^U$, definimos $S(\tau) : F^U_{\mathscr{T}} \longrightarrow F^U_{\mathscr{T}}$ por $S(\tau)((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$,

donde $g_t : X^U_t \longrightarrow \mathbf{2}$, $g_t(x) = f_t(x \circ \tau)$, para todo $t \in T$ y $x \in X^U_t$,

(pb7) Para cada $J \subseteq U$, consideramos la función $\exists(J) : F^U_{\mathscr{T}} \longrightarrow F^U_{\mathscr{T}}$, definida por

$\exists(J)((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X^U_t \longrightarrow \mathbf{2}$, es definida por:

$g_t(x) = \bigvee\{f_t(y) \mid y \in X^U_t, y\mid_{U\setminus J} = x\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $x \in X^U_t$.

Lema 1.1.3. (Georgescu [86]) *$(\mathscr{F}^U_{\mathscr{T}}, U, S, \exists, G, H)$ es una $t_d pB-$álgebra.*

Definición 1.1.12. *Sea $(\mathscr{B}, U, S, \exists, G, H)$ una $t_d pB-$álgebra. Un subconjunto J de U es un soporte de $p \in B$ si $\exists(U \setminus J)p = p$. La intersección de los soportes de un elemento $p \in B$ será denotado por J_p. Una $t_d pB-$álgebra es localmente finita si todo elemento tiene soporte finito. El cardinal de U es el grado de $(\mathscr{B}, U, S, \exists, G, H)$.*

Teorema 1.1.3. (Georgescu [86]) *Sea $(\mathscr{B}, U, S, \exists, G, H)$ una $t_d pB-$álgebra localmente finita de grado infinito y Γ un filtro propio de $\mathscr{B}$ tal que $J_p = \emptyset$, para cualquier $p \in \Gamma$. Entonces existe un sistema temporal débil $\mathscr{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, Q, 0)$ y un morfismo de $t_d pB-$álgebras $\Phi : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{F}^U_{\mathscr{T}}$, tal que, para cada $p \in \Gamma$, tenemos que: $\Phi(p) = (f_t)_{t\in T}$ implica $f_0(x) = 1$, para todo $x \in X^U_t$.*

1.1.8. $tpB-$álgebras

Las álgebras de Boole poliádicas temporales son estructuras algebraicas (ver [86, 31]) para la lógica de predicados temporal. En esta sección, recordaremos las definiciones y resultados sobre esta clase de álgebras.

Definición 1.1.13. *Un álgebra de Boole poliádica temporal (o $tpB-$álgebra) es una $t_B pB-$álgebra $(\mathscr{B}, U, S, \exists, G, H)$ que satisface la propiedad adicional* (tB3) *de la Definición 1.1.7.*

Definición 1.1.14. *Un sistema $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, 0)$, es un sistema temporal si:*

(i) *T es un conjunto arbitrario no vacío,*

(ii) *R es una relación binaria sobre T,*

(iii) $0 \in T$,

(iv) *para todo $t, s \in T$, X_t es un conjunto no vacío, con la siguiente propiedad:*

si tRs o sRt, entonces $X_t = X_s$.

Observación 1.1.9. *(T, R) es un marco.*

Sea $\mathcal{T}$ un sistema temporal y U un subconjunto no vacío. Denotamos por:

$$F^U_{\mathcal{T}} = \{(f_t)_{t\in T} \mid f_t : X^U_t \longrightarrow \mathbf{2}, \text{ para cada } t \in T\}.$$

Sobre $F^U_{\mathcal{T}}$ consideramos las operaciones $\rightarrow, \neg$ y $1^{\mathcal{T}}$ definidas previamente en (pb1)-(pb3).

Lema 1.1.4. (Chiriţă [31]) *$\mathscr{F}^U_{\mathcal{T}} = (F^U_{\mathcal{T}}, \rightarrow, \neg, 1^{\mathcal{T}})$ es una B^H−álgebra.*

Sobre $F^U_{\mathcal{T}}$ consideramos los operadores G y H definidos por

(pb4)* $G((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, $g_t : X^U_t \longrightarrow \mathbf{2}$, $g_t(x) = \bigwedge\{f_s(x) \mid tRs, s \in T\}$,

(pb5)* $H((f_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, $h_t : X^U_t \longrightarrow \mathbf{2}$, $h_t(x) = \bigwedge\{f_s(x) \mid sRt, s \in T\}$.

Lema 1.1.5. (Chiriţă [31]) *$(\mathscr{F}^U_{\mathcal{T}}, G, H)$ es una tB−álgebra.*

Sobre el conjunto $\mathscr{F}^U_{\mathcal{T}}$, para cada $\tau \in U^U$ y $J \subseteq U$, definimos las operaciones $S(\tau), \exists(J) : F^U_{\mathcal{T}} \longrightarrow F^U_{\mathcal{T}}$ como en (pb6)-(pb7).

Proposición 1.1.5. (Chiriţă [31]) *$(\mathscr{F}^U_{\mathcal{T}}, U, S, \exists, G, H)$ es una tpB−álgebra.*

1.1.9. $M-$álgebras y $K-$álgebras

Los *retículos de De Morgan* son retículos con una operación unaria adicional, e intuitivamente podemos decir que tiene propiedades importantes que también valen en el caso de las $B-$álgebras. Estos fueron introducidas de manera independiente por varios autores, Bialynicki–Birula y Rasiowa en [12], Kalman en [101], Monteiro en [116] y Dunn en [44], por mencionar algunos. Dunn, los utilizó como semánticas para la Lógica Relevante, y en este contexto son también conocidos con el nombre de retículos intensionales. Sobre estos temas también se puede consultar el libro de Rasiowa [134].

En particular, las álgebras de De Morgan (o $M-$álgebras) fueron presentadas como $L_{0,1}-$álgebras a la que se le ha adicionado una polaridad que satisface las leyes de De Morgan. Las $M-$álgebras aparecen como contraparte algebraica de la lógica conocida como Lógica de Belnap [5].

A continuación y de acuerdo con nuestras necesidades las definiremos del siguiente modo:

Definición 1.1.15. *Un álgebra de De Morgan (o $M-$álgebra) es un álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,0,0)$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es una $L_{0,1}-$álgebra y $\sim$ satisface las ecuaciones:*

(M1) $\sim\sim x = x$,

(M2) $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, denotaremos a estas álgebras por $(A, \sim)$.

Es bien conocido que toda $M-$álgebra verifica las siguientes propiedades:

(M3) $x \leq y$ si, y sólo si, $\sim y \leq \sim x$,

(M4) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, (M5) $\sim 1 = 0$,

(M6) $\sim 0 = 1$.

Definición 1.1.16. *Un álgebra de Kleene (o $K-$álgebra) es una $M-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ donde el operador $\sim$ satisface la siguiente condición adicional:*

(K) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$.

Las $K-$álgebras fueron consideradas por primera vez por Kalman [101] bajo el nombre de $i-$retículos normales y Monteiro las denominó álgebras de Kleene [116].

1.1.10. LM_n-álgebras

Definición 1.1.17. *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $n-$valuada (o LM_n-álgebra), n entero, $n \geq 2$, es un álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 1\rangle$ tal que $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra y $\{\sigma_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ es una familia de operadores unarios sobre L que satisfacen las siguientes condiciones:*

(L1) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i(x) \vee \sigma_i(y)$,

(L2) $\sigma_i(x) \vee \sim \sigma_i(x) = 1$,

(L3) $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j$,

(L4) $\sigma_i(\sim x) = \sim \sigma_{n-i}(x)$,

(L5) $\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x) \leq \ldots \leq \sigma_{n-1}(x)$,

(L6) *si* $\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$, *entonces* $x = y$.

Las LM_n-álgebras fueron introducidas por Gr. C. Moisil en 1941 ([119]) bajo el nombre de álgebras de Łukasiewicz $n-$valentes y Cignoli en [32] las estudió bajo el nombre de álgebras de Moisil de orden n. Este concepto fue desarrollado por el mismo Moisil en [121, 122] y por Sicoe en [142, 143]. En [33, 32] se demostró que la clase de las LM_n-álgebras constituyen una variedad.

Por otra parte un ejemplo muy importante de LM_n-álgebras es la cadena de n fracciones racionales

$$Ł_n = \left\{ \frac{j}{n-1} \mid 0 \leq j \leq n-1 \right\}$$

con la estructura natural de retículo y las operaciones unarias $\sim$ y σ_i, definidas por las prescripciones: $\sim \left(\frac{j}{n-1}\right) = 1 - \frac{j}{n-1}$ y $\sigma_i \left(\frac{j}{n-1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j<n \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

1.1.11. mLM_n−álgebras

En [88], Georgescu y Vraciu introdujeron las álgebras de Łukasiewicz–Moisil monádicas (o LM_n−álgebras monádicas) del siguiente modo:

Definición 1.1.18. *Un par* $(\mathscr{L}, \exists)$ *es una* LM_n*−álgebra monádica (o* mLM_n*−álgebra) si* $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge \sim, \{\sigma_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 1\rangle$ *es una* LM_n*−álgebra y* $\exists$ *es una operación unaria sobre L, llamada cuantificador existencial, que verifica* (E1)*,* (E2)*,* (E3) *y la condición adicional:*

(E12) $\sigma_i(\exists x) = \exists(\sigma_i x)$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$.

La clase de las mLM_n−álgebras ha sido estudiada por varios autores (ver por ejemplo [62, 61]).

1.1.12. tLM_n−álgebras

En 2007, Diaconescu y Georgescu en [43] introdujeron las álgebras de Łukasiewicz-Moisil temporales (o álgebras de Łukasiewicz-Moisil n−valuadas temporales) del siguiente modo:

Definición 1.1.19. *Una terna* $(\mathscr{L}, G, H)$ *es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil temporal (o* tLM_n*−álgebra) si* $\mathscr{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, \{\sigma_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 1\rangle$ *es una* LM_n*−álgebra y* G, H *son operaciones unarias sobre L que verifican:*

(tL1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(tL2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(tL3) $G(\sigma_i(x)) = \sigma_i(G(x))$, $H(\sigma_i(x)) = \sigma_i(H(x))$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$,

(tL4) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, *donde* $P(x) = \sim H(\sim x)$ *y* $F(x) = \sim G(\sim x)$.

Dada una tLM_n-álgebra $(\mathscr{L}, G, H)$, en lo que sigue denotaremos por $I_d, 0_L, 1_L : L \longrightarrow L$, a las funciones definidas por $I_d(x) = x$, $0_L(x) = 0$ y $1_L(x) = 1$ para todo $x \in L$.

Proposición 1.1.6. (Diaconescu y Georgescu [43]) *Si* $(Ł_n, G, H)$ *es una* tLM_n-*álgebra, entonces* $G = H = I_d$ *o* $G = H = 1_{Ł_n}$.

Sea (X, R) un marco. Definimos los operadores unarios $G^*, H^* : Ł_n^X \longrightarrow Ł_n^X$ por:

(1.3) $\quad G^*(p)(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xRy\}, H^*(p)(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, yRx\},$

para todo $p \in L_n^X$ y $x \in X$.

Proposición 1.1.7. (Diaconescu y Georgescu [43]) *Para todo marco* (X, R), $(Ł_n^X, G^*, H^*)$ *es una* tLM_n-*álgebra, donde* G^* *y* H^* *están definidos como en 1.3.*

Definición 1.1.20. *Sean* $(\mathscr{L}, G, H)$ *y* $(\mathscr{L}', G', H')$ *dos* tLM_n-*álgebras. Una función* $f : L \longrightarrow L'$ *es un morfismo de* tLM_n-*álgebras (o* tLM_n-*morfismo) si* f *es un morfismo de* LM_n-*álgebras y este satisface las condiciones:* $f(G(x)) = G'(f(x))$ *y* $f(H(x)) = H'(f(x))$, *para cada* $x \in L$.

El siguiente teorema de representación para las tLM_n-álgebras temporales generaliza a el teorema de representación para las $tB-$álgebras. La demostración de este teorema puede encontrarse en [43].

Teorema 1.1.4. *Para cada tLM_n-álgebra $(\mathscr{L}, G, H)$, existe un marco (X, R) y un morfismo inyectivo de tLM_n-álgebras $\Phi : (\mathscr{L}, G, H) \longrightarrow (Ł_n^X, G^*, H^*)$.*

El teorema anterior permite probar la completitud de la lógica de Moisil $n-$valuada temporal (ver [43])

Por otra parte, siguiendo la terminología de Chiriţă [31], nosotros llamaremos *álgebra de Łukasiewicz-Moisil temporal débil* (o $t_d LM_n-$álgebra) a toda terna $(\mathscr{L}, G, H)$ donde $\mathscr{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, \{\sigma_i\}_{i\in\{1,\dots,n-1\}}, 0, 1\rangle$ es una LM_n-álgebra y G, H son dos operaciones unarias sobre L que satisfacen (tL1), (tL2) y (tL3) de la Definición 1.1.19.

1.1.13. $H-$álgebras

En conexión con los fundamentos de la lógica, Brouwer y Heyting definieron una clase de álgebras más general que la de las álgebras de Boole, y esta generalización se basó en la siguiente propiedad: en cualquier álgebra de Boole B, para todo $a \in B$ el complemento booleano de a, que hemos denotado por $\neg a$, es el último elemento de $\{x \in B \mid a \wedge x = 0\}$. Más generalmente, para todo $a, b, x \in A$ se verifica que $a \wedge x \leq b$ si, y sólo si, $x \leq \neg a \vee b$, por lo tanto, dados $a, b \in B$ existe el último elemento $c = \neg a \vee b$, tal que $a \wedge c \leq b$.

Teniendo en cuenta lo anterior, dado un retículo L y $a, b \in L$, si existe el último elemento $x \in L$ tal que $a \wedge x \leq b$, entonces este elemento se denota por $a \to b$, y se llama pseudocomplemento relativo de a con respecto a b.

La definición de pseudocomplemento relativo es equivalente a la existencia de un elemento $a \to b$, tal que satisface:

$$a \wedge x \leq b \text{ si, y sólo si, } x \leq a \to b.$$

Un álgebra de Heyting (o $H-$álgebra) es una $L_{0,1}-$álgebra L en el cual $a \to b$ existe para todo $a, b \in L$.

Su nombre se debe a que en 1930, fue Heyting quien formalizó el cálculo proposicional intuicionista desde el punto de vista algebraico.

En 1955, Monteiro [117] demostró que pueden ser definidas equivalentemente como álgebras $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,2,0,0)$ que satisfacen las siguientes identidades:

(H1) $x \wedge 0 = 0$,

(H2) $x \rightarrow x = 1$,

(H3) $(x \rightarrow y) \wedge y = y$,

(H4) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$,

(H5) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,

(H6) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$.

Recordemos que si $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es una $H-$álgebra, entonces $D \subseteq A$ es un *sistema deductivo* si se verifica:

(D1) $1 \in D$,

(D2) $x, x \rightarrow y \in D$ implica $y \in D$.

En lo que sigue notaremos por $\mathscr{D}(A)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos de A.

En [117], Monteiro probó que en una $H-$álgebra la noción de sistema deductivo y filtro coinciden. Además mostró que el retículo de las congruencias $Con_H(A)$, queda determinada del siguiente modo:

si $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es una $H-$álgebra y $D \in \mathscr{D}(A)$, entonces

$$Con_H(A) = \{R(D) : D \in \mathscr{D}(A)\},$$

donde

$$R(D) = \{(x, y) \in A \times A : x \rightarrow y, y \rightarrow x \in D\}.$$

Esta caracterización le permitió probar que los retículos $Con_H(A)$ y $\mathscr{D}(A)$ son isomorfos considerando las correspondencias $\theta \longmapsto [1]_\theta$ y $D \longmapsto R(D)$ las cuales son inversas una de la otra.

1.1.14. $mH-$álgebras

En 1957, Monteiro y Varsavsky en [118] consideraron una generalización de las $mB-$álgebras y definieron las álgebras de Heyting monádicas (o $mH-$álgebras) como ternas $(\mathscr{A}, \exists, \forall)$, donde $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ es una $H-$álgebra y $\exists$, $\forall$ son operaciones unarias que satisfacen (E1) a (E11).

Dado que, sobre las $H-$álgebras, a diferencia de lo que ocurre en las $B-$álgebras, uno de los cuantificadores no puede ser definido en términos del otro, por lo cuál, Monteiro y Varsavsky debieron considerar simultáneamente el par de cuantificadores para que la estructura considerada pudiese decirse que era monádica, sin embargo es posible definir estructuras algebraicas $(\mathscr{A}, \exists)$ y $(\mathscr{A}, \forall)$, y de hecho se han considerado.

Ahora, con el objeto de completar la historia, comentamos que en 1982 Georgescu en [87] consideró las $mH-$álgebras para indicar un teorema de representación para las $H-$álgebras poliádicas (ver también [103, 114]), llamó *cuantificador existencial* a cualquier operación unaria $\exists$ definida sobre una $H-$álgebra A que verifica las propiedades (E1), (E2), (E3), (E5) y las identidades adicionales:

(G1) $\exists(\exists x \to \exists y) = \exists x \to \exists y$,

(G2) $\exists(\exists x \vee \exists y) = \exists x \vee \exists y$.

Este autor llamó *cuantificador universal* a cualquier operación unaria $\forall$ sobre A que verifica (E6), (E7), (E9) y la condición:

(G3) $\forall(x \to y) \leq \forall x \to \forall y$.

Georgescu indicó la definición de $H-$álgebra $I-$poliádica de la cuál es posible derivar como caso particular, una definición de $mH-$álgebra. En efecto, según la terminología de Georgescu una $mH-$álgebra es una terna $(\mathscr{A},\forall,\exists)$ donde A es una $H-$álgebra y $\forall$, $\exists$ son operaciones unarias sobre A que satisfacen (E1), (E2), (E3), (G1), (G2), (E5), (E6), (E7), (E9) y (G3).

Pero se puede comprobar que la definición de Monteiro–Varsavky coincide con la de Georgescu. Por otra parte, como en la definición de Monteiro–Varsavky ninguno de los axiomas indicados para los operadores $\forall$ y $\exists$ involucran a la implicación intuicionista, Figallo y Ziliani introdujeron en [59] (ver también [63, 73]), una noción más general del siguiente modo:

Definición 1.1.21. *Un retículo distributivo monádico (o $mL_{0,1}-$álgebra) es una terna $(\mathscr{A},\forall,\exists)$ donde $\mathscr{A}=\langle A,\vee,\wedge,\rightarrow,0,1\rangle$ es una $L_{0,1}-$álgebra, $\forall$ y $\exists$ son operaciones unarias sobre A, tales que se satisfacen las condiciones* (E1) *a* (E11).

1.1.15. $SH-$álgebras y SH_n-álgebras

Entre las muchas extensiones del cálculo intuicionista consideradas por diversos autores figura la extensión de Moisil a la que este autor llamó *cálculo proposicional modal simétrico general*, el cuál fue publicado en 1942 en [120] (ver también [122]). Recordemos que este cálculo se obtiene mediante la adición de un conectivo unario $\sim$ al alfabeto del cálculo proposicional intuicionista. Dos axiomas lógicos y una regla de inferencia caracterizan a este nuevo conectivo: las leyes de la doble negación y la regla de contraposición. Por otra parte, en 1969 Monteiro, con el objeto de estudiar este cálculo con técnicas algebraicas definió y desarrolló la teoría de las álgebras de Heyting simétricas (o $SH-$álgebras, para abreviar). Estas álgebras son $H-$álgebras a las que se les ha adicionado una involución que invierte el orden dado por la implicación. Ejemplos de $SH-$álgebras lo constituyen las álgebras de Heyting trivalentes, las álgebras de Łukasiewicz trivalentes y, por supuesto, las $B-$álgebras. Para más detalles consultar [115, 137].

Por otro lado, en 1967, Rousseau ([135],[136]) formuló versiones clásica e intuicionista del cálculo proposicional intuicionista $n-$valuado, y fue él quién indicó el primer sistema de axiomas estándar para cada uno de ellos. Estudios algebraicos de estos cálculos son las álgebras de Post y las pseudo-álgebras de Post respectivamente.

Iturrioz en [97] presentó una lógica conectada con el cálculo proposicional modal simétrico general pero con técnicas algebraicas, para lo cuál introdujo la noción de álgebra de Heyting simétrica de orden n. Informalmente hablando, estas álgebras, contrapartes algebraicas del cálculo proposicional de Iturrioz, son $SH-$álgebras a las que se le adicionan $n-1$ operadores unarios $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ satisfaciendo propiedades adecuadas. Entonces, en estas semánticas los operadores mencionados pueden ser interpretados como operadores modales, más precisamente coinciden con los operadores de posibilidad considerados por Moisil cuando definió a las LM_n-álgebras.

Formalmente, un álgebra de Heyting simétrica de orden n (o SH_n-álgebra) es un álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \{S_i\}_{i=1}^{n}, 0, 1\rangle$, donde $\langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ es una $SH-$álgebra, es decir, $\langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es una $H-$álgebra y $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra, y los $n-1$ operadores unarios S_i satisfacen las propiedades:

(S1) $S_i(x \wedge y) = S_i(x) \wedge S_i(y)$,

(S2) $S_i(x \rightarrow y) = \bigwedge_{k=i}^{n}(S_k(x) \rightarrow S_k(y))$,

(S3) $S_i(S_j(x)) = S_j(x)$, para todo $i, j = 1, \ldots, n-1$,

(S4) $S_1(x) \vee x = x$,

(S5) $S_i(\sim x) = \sim S_{n-i}(x)$, para $i = 1, \ldots, n-1$,

(S6) $S_1(x) \vee \neg S_1(x) = 1$, con $\neg x = x \rightarrow 0$.

1.2. Dualidades discretas y aplicaciones

1.2.1. Generalidades sobre la dualidad discreta

La teoría de la dualidad surgió del trabajo de Marshall Stone [146] sobre álgebras de Boole y retículos distributivos en los años 30. A principios de los 50, Jónsson y Tarski [99, 100] extendieron los resultados de Stone a álgebras de Boole con operadores. Estos operadores son conocidos como operadores modales de posibilidad. Luego, en los 70, Larisa Maksimova [112, 113] y Hilary Priestley [127, 128], desarrollaron resultados análogos para las álgebras de Heyting, las álgebras de Boole topológicas y los retículos distributivos. Los últimos fueron extendidos a retículos distributivos con operadores por Goldblatt en [89] (ver también [38]). Desde entonces establecer una dualidad se ha convertido en un problema metodológico importante, tanto en el álgebra como en la lógica.

Todos los resultados de las dualidades clásicas antes mencionados se han desarrollado utilizando espacios topológicos como espacios duales de álgebras.

Una dualidad discreta es una dualidad donde una clase de sistemas relacionales abstractos es una contrapartida dual de una clase de álgebras. A estos sistemas relacionales se los denomina marcos siguiendo la terminología de las lógicas no clásicas. Una topología no está involucrada en la construcción de estos marcos y entonces se puede pensar que tienen una topología discreta.

Establecer una dualidad discreta involucra los siguientes pasos: dada una clase **Alg** de álgebras (resp. una clase **Marc** de marcos) definimos una clase **Marc** de marcos (resp. una clase **Alg** de álgebras). A continuación, para un álgebra $A \in \mathbf{Alg}$ definimos su marco canonico $\mathscr{X}(A)$ y para cada marco $X \in \mathbf{Marc}$ definimos su álgebra compleja $\mathscr{C}(X)$. Entonces probamos que $\mathscr{X}(A) \in \mathbf{Marc}$ y $\mathscr{C}(X) \in \mathbf{Alg}$.

Una dualidad entre **Alg** y **Marc** se verifica siempre que se prueben los siguientes teoremas de representación:

(TD1) Toda álgebra $A \in \mathbf{Alg}$ es sumergible en el álgebra compleja de su marco canónico i.e., $\mathscr{C}(\mathscr{X}(A))$.

(TD2) Todo marco $X \in \mathbf{Marc}$ es isomorfo a una subestructura del marco canónico de su álgebra compleja i.e., $\mathscr{X}(\mathscr{C}(X))$.

Un rasgo distintivo de este marco de trabajo para establecer una dualidad discreta es que las nociones algebraicas y lógicas involucradas en las pruebas se definen en forma autónoma; no mezclamos metodologías algebraicas y lógicas. La separación de las construcciones lógicas y algebraicas nos permiten ver las clases duales de álgebras y marcos como dos tipos de estructuras semánticas de un lenguaje formal. Como consecuencia obtenemos fácilmente lo que llamamos la dualidad a través de la verdad.

Dados un lenguaje formal **Len**, una clase de marcos **Marc** que determina una semántica relacional para **Len** y una clase **Alg** de álgebras que determina su semántica algebraica, una dualidad a través del teorema de verdad dice que estos dos tipos de semántica son equivalentes en el sentido siguiente:

(DvT) Una fórmula $\phi \in \mathbf{Len}$ es verdadera en toda álgebra de **Alg** si, y sólo si, es verdadera en todo marco de **Marc**.

Con el fin de demostrar tal teorema tenemos que probar el siguiente lema denominado teorema del álgebra compleja.

(CA) Para todo marco $X \in \mathbf{Marc}$, una fórmula $\phi \in \mathbf{Len}$ es verdadera en X si, y sólo si, ϕ es verdadera en el álgebra compleja $\mathscr{C}(X)$.

Por medio del teorema (CA) y el teorema de representación (TD1) podemos demostrar el teorema (DvT).

La implicación de derecha a izquierda de (DvT) resulta de la implicación de izquierda a derecha de (CA) y la implicación de izquierda a derecha de (DvT) resulta de la implicación de derecha a izquierda de (CA) y (TD1).

De esta manera la dualidad discreta contribuye al desarrollo de una semántica relacional (resp. una semántica algebraica) una vez que una semántica algebraica (resp. una semántica relacional) de un lenguaje es conocida.

1.2.2. Aplicaciones a completitud y teoremas de correspondencias

La dualidad discreta contribuye también a un resultado de completitud una vez que un sistema deductivo para un lenguaje **Len** es dado.

Supongamos que una semántica algebraica de **Len** está dada en términos de una clase de álgebras **Alg** y de una semántica relacional en términos de una clase de marcos **Marc** de modo que una dualidad discreta se establezca entre estas dos clases.

Suponemos que las álgebras de **Alg** se basan en retículos acotadas.

Para probar la completitud se define una relación binaria $\approx$ en el conjunto de fórmulas de **Len** como demostratividad de la doble implicación, si está entre las operaciones de **Len**, o de otra manera como demostratividad de un secuente construido con un par de fórmulas.

A continuación probamos que esta es una relación de equivalencia y una congruencia con respecto a todas las operaciones admitidas en **Len**.

Luego formamos el álgebra Lindenbaum-Tarski $A/\approx$ de **Len**. Su conjunto soporte consiste en clases de equivalencia $[\phi]_\approx$ (con respecto a la relación $\approx$) de fórmulas.

A continuación, mostramos que el álgebra $A/\approx$ pertenece a la clase de álgebras **Alg**.

Ahora, dependiendo de si estamos interesados en la completitud con respecto a la semántica algebraica o relacional procedemos de la siguiente manera.

Para probar la completitud del sistema de deducción con respecto a la semantica relacional consideramos el marco canonico $\mathscr{X}(A/\approx)$ del álgebra de Lindenbaum-Tarski.

Su universo consiste en filtros primos de $A/\approx$. Luego formamos un modelo $M/\approx$ basado en este marco.

La preservación de las operaciones por la aplicación que proporciona la inmersión de $A/\approx$ en $\mathscr{C}(\mathscr{X}(A/\approx))$ garantizada por el teorema (TD1) nos permite demostrar el lema de verdad que dice que la satisfacción de una fórmula ϕ en el modelo $M/\approx$ por un filtro S es equivalente a $[\phi]_\approx \in S$. De este lema, la completitud se sigue de la manera habitual.

Para probar la completitud del sistema de deducción con respecto a la semántica algebraica definimos una valuación de las fórmulas atómicas de **Len** en $A/\approx$ como $v(p) = [p]_\approx$ y probamos que se extiende a todas las fórmulas tal que $v(\phi) = [\phi]_\approx$.

Luego mostramos que la demostrabilidad de una fórmula ϕ es equivalente a $v(\phi) = [1]_\approx$, donde $[1]_\approx$ es el último elemento del reducto reticular de $A/\approx$, de donde resulta la completitud.

La Dualidad Discreta es también pertinente para la teoría de la correspondencia que tiene por objeto encontrar relaciones entre la verdad de las fórmulas en un marco y las propiedades de las relaciones en el marco. Por lo general, una correspondencia tiene la siguiente forma:

(CPS) Una fórmula $\phi \in$ **Len** es verdadera en un marco X si, y sólo si, las relaciones del marco tienen una cierta propiedad.

Dadas las clases **Alg** y **Marc** para las cuales una dualidad discreta y la dualidad por medio del teorema de la verdad con respecto a un lenguaje **Len** dado se cumplen, podemos considerar las siguientes correspondencias:

(Cps1) Las relaciones de un marco $X \in \mathbf{Marc}$ tienen una propiedad determinada si, y sólo si, una fórmula $\phi \in \mathbf{Len}$ es verdadera en el álgebra compleja $\mathscr{C}(X)$.

(Cps2) Una fórmula $\phi \in \mathbf{Len}$ es verdadera en un álgebra $A \in \mathbf{Alg}$ si, y sólo si, las relaciones de la estructura canónica $\mathscr{X}(A)$ tienen una cierta propiedad.

Se sabe que estas correspondencias están relacionadas con la correspondencia clásica (CPS).

La implicación de izquierda a derecha (Cps1) y la implicación de derecha a izquierda (CA) implican la implicación de derecha a izquierda (CPS). La implicación de derecha a izquierda (Cps1) y la implicación de izquierda a derecha (CA) implican implicación de izquierda a derecha (CPS). Ejemplos de las correspondencias de este tipo se pueden encontrar en [98].

Para más detalles sobre dualidades discretas y aplicaciones recomendamos la lectura de los trabajos [45, 46, 47, 48, 123] y [125] incluidos en la bibliografía final.

1.2.3. Una dualidad discreta para las $M-$álgebras

En 2006, Dzik, Orłowska y van Alten en [49] describieron una dualidad discreta para las $M-$álgebras. Nosotros repasaremos dicha dualidad en esta subsección.

Sea T una relación binaria sobre un conjunto X y sea U un subconjunto de X. En lo que sigue denotaremos por $[T]U$ al conjunto $\{x \in X \mid$ para todo y, xTy implica $y \in U\}$.

Una estructura $(X, \leq, g)$ es un *marco de De Morgan* (o $\mathcal{M}-$marco), si X es un conjunto no vacío dotado de un orden $\leq$ y $g : X \longrightarrow X$ es una función y, para todo $x, y \in X$,

1. $x \leq y$ implica $g(y) \leq g(x)$,
2. $g(g(x)) = x$.

Dada una $M-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ su marco canónico es

$$(\mathscr{X}(A), \leq^c, g^c),$$

donde $\mathscr{X}(A)$ es el conjunto de los filtros primos de A ordenado por la inclusión de conjuntos, esto es, $\leq^c$ es $\subseteq$ y $g^c(S) = \{a \in A : \sim a \notin S\}$ para todo $S \in \mathscr{X}(A)$. Es fácil ver que el marco canónico $(\mathscr{X}(A), \leq^c, g^c)$ es un $\mathcal{M}-$marco.

Dado un $\mathcal{M}-$marco $(X, \leq, g)$, su álgebra compleja es

$$\langle \mathscr{C}(X), \vee^c, \wedge^c, \sim^c, 0^c, 1^c\rangle,$$

donde $\mathscr{C}(X) = \{U \subseteq X : [\leq]U = U\}$ y para cada $U, V \in \mathscr{C}(X)$, $U \vee^c V = U \cup V$, $U \wedge^c V = U \cap V$, $0^c = \emptyset$, $1^c = X$, $\sim^c U = \{x \in X : g(x) \notin U\}$.

El álgebra compleja de un $\mathcal{M}-$marco es una $M-$álgebra y la función $h : A \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(A))$, definida, para cada $a \in A$, por

$$h(a) = \{S \in \mathscr{X}(A) : a \in S\}, \tag{1.4}$$

es un sumergimiento de $M-$álgebras. Además, la función $k : X \longrightarrow \mathscr{X}(\mathscr{C}(X))$, definida, para cada $x \in X$, por

$$k(x) = \{U \in \mathscr{C}(X) : x \in U\}, \tag{1.5}$$

es inyectiva y preserva el orden.

Por lo tanto, se obtiene una dualidad discreta entre $M-$álgebras y $\mathcal{M}-$marcos.

1.2.4. Una dualidad discreta para las $H-$álgebras

En 2007, Orłowska y Rewitzky en [124] obtuvieron una dualidad discreta para las $H-$álgebras. A continuación, repasaremos dicha dualidad discreta.

Un par $(X,\leq)$ es un *marco de Heyting* (o $\mathcal{H}-$marco) si X es un conjunto no vacío dotado de un orden $\leq$. Dada una $H-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A,\vee,\wedge,\rightarrow,0,1\rangle$ su marco canónico es

$$(\mathscr{X}(A),\leq^c),$$

donde $\mathscr{X}(A)$ es el conjunto de los filtros primos de A ordenado por la inclusión de conjuntos, esto es, $\leq^c$ es $\subseteq$. Es claro que el marco canónico $(\mathscr{X}(A),\leq^c)$ es un $\mathcal{H}-$marco.

Dado un $\mathcal{H}-$marco $(X,\leq)$, su álgebra compleja es

$$\langle \mathscr{C}(X),\vee^c,\wedge^c,\rightarrow_c,0^c,1^c\rangle,$$

donde $\mathscr{C}(X) = \{U \subseteq X : [\leq]U = U\}$, y para todo $U,V \in \mathscr{C}(X)$, $U \vee^c V = U \cup V$, $U \wedge^c V = U \cap V$, $0^c = \emptyset$, $1^c = X$, $U \rightarrow_c V = [\leq]((X \setminus U) \cup V)$.

El álgebra compleja de un $\mathcal{H}-$marco es una $H-$álgebra y la función $h : A \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(A))$, definida, para cada $a \in A$, por

$$h(a) = \{S \in \mathscr{X}(A) : a \in S\}, \tag{1.6}$$

es un sumergimiento de $H-$álgebras. Además, la función $k : X \longrightarrow \mathscr{X}(\mathscr{C}(X))$, definida, para cada $x \in X$, por

$$k(x) = \{U \in \mathscr{C}(X) : x \in U\}, \tag{1.7}$$

es inyectiva y preserva el orden.

Por lo tanto, se obtiene una dualidad discreta entre $H-$álgebras y $\mathcal{H}-$marcos.

1.2.5. Una dualidad discreta para las SH_n-álgebras

En esta sección repasaremos la dualidad discreta dada en [124] para las SH_n-álgebras.

Un $\mathcal{SH}_n-$marco es una estructura $(X,\leq,g,\{s_i\}_{i=1}^{n-1})$, donde $(X,\leq,g)$ es un $\mathcal{M}-$marco y s_i (para $i=1,\cdots,n-1$) son funciones sobre X que satisfacen, para cada $x,y\in X$,

1. $g(s_i(x))=s_{n-i}(g(x))$, $i=1,\cdots,n-1$,
2. $s_j(s_i(x))=s_j(x)$, $i,j=1,\cdots,n-1$,
3. $s_1(x)\leq x$,
4. $x\leq s_{n-1}(x)$,
5. $s_i(x)\leq s_j(x)$ para $i\leq j$,
6. $x\leq y$ implica $s_i(x)\leq s_i(y)$ y $s_i(y)\leq s_i(x)$, $i=1,\cdots,n-1$,
7. $s_i(y)\leq y$ y $y\leq s_i(y)$ implica $s_i(y)=y$, $i=1,\cdots,n-1$,
8. $x\leq s_i(x)$ o $s_{i+1}(x)\leq x$, $i=1,\cdots,n-2$, $n\geq 3$.

El álgebra compleja de un $\mathcal{SH}_n-$marco $(X,\leq,g,\{s_i\}_{i=1}^{n-1})$ es un álgebra

$$\langle \mathscr{C}(X),\vee^c,\wedge^c,\rightarrow_c,\sim^c,\{S_i^c\}_{i=1}^{n-1},0^c,1^c\rangle,$$

donde $\langle \mathscr{C}(X),\vee^c,\wedge^c,\rightarrow_c,0^c,1^c\rangle$, es el álgebra compleja asociada al $\mathcal{H}-$marco $(X,\leq)$ y las operaciones unarias $\sim^c, S_i^c$ (para $i=1,\cdots,n-1$) están defindas por: $\sim^c U=\{x\in X: g(x)\notin U\}$ y $S_i^c(U)=\{x\in X: s_i(x)\in U\}$, para todo $U\in\mathscr{C}(X)$.

Por otra parte, el marco canónico de una SH_n-álgebra $\mathscr{A}=\langle A,\vee,\wedge,\rightarrow,\sim,\{S_i\}_{i=1}^{n},0,1\rangle$ es un sistema

$$(\mathscr{X}(A),\leq^c,g^c,\{s_i^c\}_{i=1}^{n-1}),$$

donde $(\mathscr{X}(A),\leq^c)$ es el marco canónico asociado a la $H-$álgebra $\langle A,\vee,\wedge,\rightarrow,0,1\rangle$ y para cada $S\in\mathscr{X}(A)$, $g^c(S)=\{a\in A:\sim a\notin S\}$, $s_i^c(S)=\{a\in A: S_i(a)\in S\}$ para $i=1,\cdots,n-1$.

Estos resultados permiten obtener una dualidad discreta para las SH_n-álgebras y $\mathcal{SH}_n-$marcos teniendo en cuenta los sumergimientos definidos en 1.6 y 1.7.

1.2.6. Dualidades topológicas

La topología y el álgebra tienen variadas conexiones, acá estableceremos relaciones entre categorías cuyos objetos son álgebras y cuyos morfismos son los correspondientes homomorfismos, y categorías cuyos objetos son espacios topológicos y sus morfismos ciertas aplicaciones entre ellos. En particular, indicaremos las dualidades para los retículos distributivos acotados y para las álgebras de De Morgan.

Dualidad de Priestley para los retículos distributivos acotados

Si bien, la teoría de los espacios de Priestley y su relación con los retículos distributivos con primer y último elemento, es muy conocida, con el objeto de fijar las notaciones que usaremos, enunciaremos algunos resultados.

Recordemos que $(X,\leq,\tau)$ es un espacio topológico totalmente disconexo en el orden si $(X,\leq)$ es un conjunto ordenado, (X,τ) es un espacio topológico y dados $x,y \in X$, con $x \not\leq y$, existe un conjunto abierto, cerrado y creciente U tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Un espacio de Priestley (o $P-$espacio) es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden.

Denotaremos con $D(X)$ la familia de los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de un $P-$espacio X y con $X(A)$ a la familia de los filtros primos una $L_{0,1}-$álgebra A.

Sea $\mathscr{A} = \langle A,\vee,\wedge,0,1\rangle$ una $L_{0,1}-$álgebra. Priestley en [127, 128] probó que la terna $(X(A),\subseteq,\tau)$, donde $\subseteq$ es la relación inclusión y τ la topología que tiene como familia de subbásicos a los conjuntos $\sigma_A(a) = \{S \in X(A) : a \in S\}$ y $X(A)\setminus \sigma_A(a)$, para cada $a \in A$, es un $P-$espacio, llamado el espacio de Priestley de A, y que la función:

(I) $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ es un $L_{0,1}-$isomorfismo.

Recíprocamente, si X es un $P-$espacio, entonces $\langle D(X),\cap,\cup,\emptyset,X\rangle$ es una $L_{0,1}$-álgebra, y la función:

(II) $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, definida por $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.

Esto nos dice que a toda $L_{0,1}-$álgebra podemos pensarla como el retículo de los abiertos, cerrados y crecientes de un espacio de Priestley y que todo espacio de Priestley podemos considerarlo como el conjunto de los filtros primos de una $L_{0,1}-$álgebra.

Denotaremos con **PS** la categoría de los $P-$espacios y las funciones continuas y creciente (o $P-$funciones). En lo que sigue, cuando no haya lugar a dudas, a los $P-$espacios $(X, \leq, \tau)$ los representaremos simplemente por su conjunto soporte X. Además, denotaremos con $\mathscr{L}_{0,1}$ a la categoría de las $L_{0,1}-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

En [127, 128] se probó que existe una dualidad entre ambas categorías definiendo los funtores contravariantes $\Psi : \mathbf{PS} \longrightarrow \mathscr{L}_{0,1}$ y $\Phi : \mathscr{L}_{0,1} \longrightarrow \mathbf{PS}$ como sigue:

(P1) Si X es un objeto en **PS**, $\Psi(X) = D(X)$,

si $f \in \mathbf{PS}(X_1, X_2)$ y $U \in D(X_2)$, $\Psi(f)(U) = f^{-1}(U)$.

(P2) si A es un objeto en $\mathscr{L}_{0,1}$, $\Phi(A) = X(A)$,

si $h \in \mathscr{L}_{0,1}(A_1, A_2)$ y $S \in X(A_2)$, $\Phi(h)(S) = h^{-1}(S)$.

Las composiciones $\Psi \circ \Phi$ y $\Phi \circ \Psi$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre las categorías $\mathscr{L}_{0,1}$ y **PS** respectivamente, debido a que los isomorfismos σ_A y ε_X son las componentes de las transformaciones naturales, es decir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_{A_1}"'] & A_2 \arrow[d, "\sigma_{A_2}"] \\ D(X(A_1)) \arrow[r, "\Psi(\Phi(h))"'] & D(X(A_2)) \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo morfismo $h \in (A_1, A_2)_{\mathscr{L}_{0,1}}$ y el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_{X_1}"'] & X_2 \arrow[d, "\varepsilon_{X_2}"] \\ X(D(X_1)) \arrow[r, "\Phi(\Psi(f))"'] & X(D(X_2)) \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo morfismo $f \in (X_1, X_2)_{\mathbf{PS}}$.

Por otra parte el retículo de las $L_{0,1}-$congruencias puede caracterizarse por medio de ciertos subconjuntos del $P-$espacio asociado de la siguiente manera:

Sea $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ una $L_{0,1}-$álgebra y sea $X(A)$ el $P-$espacio asociado. Si Y es subconjunto cerrado de $X(A)$, entonces:

(P3) $\Theta(Y) = \{(a,b) \in A \times A : \sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y\}$

es una congruencia sobre A y la correspondencia $Y \longmapsto \Theta(Y)$ establece un anti-isomorfismo entre el retículo $\mathrm{C}(X(A))$ de los subconjuntos cerrados de $X(A)$ sobre el retículo $Con_{L_{0,1}}(A)$.

Para más detalles sobre la dualidad de Priestley y sus aplicaciones pueden consultarse los trabajos [127, 128, 129] y [39].

Dualidad para las álgebras de De Morgan

La dualidad de Priestley fue extendida a las $M-$álgebras por Cornish y Fowler ([42]) de la manera que indicamos a continuación. Un espacio de De Morgan (o $mP-$espacio) es un par (X,g) donde X es un objeto de **PS** y $g : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo involutivo que también es un isomorfismo de orden de X en su orden dual (o anti-isomorfismo de orden). Por otra parte, una $mP-$función de un $mP-$espacio (X_1, g_1) en un $mP-$espacio (X_2, g_2) es una $P-$función $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que verifica $f \circ g_1 = g_2 \circ f$.

Denotaremos con **mPS** a la categoría de los $mP-$espacios y las $mP-$funciones y con $\mathscr{M}$ a la categoría de las $M-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

Si $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un objeto de $\mathscr{M}$ y $g_A : X(A) \longrightarrow X(A)$ está definida por:

(FC1) $g_A(S) = \{a \in A : \sim a \notin S\}$ para cada $S \in X(A)$,

entonces $(X(A), g_A)$ es un objeto de $\mathscr{M}$.

Por otra parte, si (X,g) es un $mP-$espacio y se define la operación $\sim_g$: $D(X) \longrightarrow D(X)$ del siguiente modo:

(FC2) $\sim_g U = X \setminus g^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X)$,

entonces $\langle D(X), \cup, \cap, \sim_g, \emptyset, X\rangle$ es un objeto de $\mathscr{M}$.

Luego, las categorías **mPS** y $\mathscr{M}$ son dualmente equivalentes y los isomorfismos σ_A y ε_X , definidos en (I) y (II), son la equivalencias correspondientes.

Además, estos autores introducen la noción de conjunto involutivo en un $mP-$espacio (X,g) como un subconjunto Y de X tal que $Y = g(Y)$ y caracterizan las congruencias de una $M-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ por medio de la familia $\mathrm{C_I}(X(A))$ de los subconjuntos cerrados e involutivos de $X(A)$. Para obtener este resultado, ellos prueban que la función Θ_I de $\mathrm{C_I}(X(A))$ en la familia $Con_M(A)$ de las congruencias de A definida como en (P3) es un anti-isomorfismo de retículos.

Capítulo 2

Álgebras temporales con estructura subyacente de $M-$álgebras

2.1. $tM-$álgebras

2.1.1. $tM-$álgebras: definiciones y propiedades

En esta subsección definiremos a las álgebras de De Morgan temporales como una generalización natural de las $tB-$álgebras.

Definición 2.1.1. *Un álgebra de De Morgan temporal (o $tM-$álgebra) es una terna $(\mathscr{A}, G, H)$ tal que $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra y G, H son dos operadores unarios sobre A, llamados operadores temporales, tales que, para todo $x, y \in A$:*

(tM1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(tM2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(tM3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, *donde* $P(x) = \sim H(\sim x)$ *y* $F(x) = \sim G(\sim x)$,

(tM4) $G(x \vee y) \leq G(x) \vee F(y)$, $H(x \vee y) \leq H(x) \vee P(y)$.

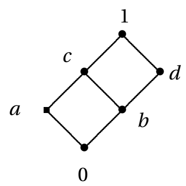
En lo que sigue denotaremos a estas álgebras por $(A, \sim, G, H)$ o simplemente por A cuando no haya lugar a confusión.

Ejemplo 2.1.1. *Es fácil ver que toda $tB-$álgebra es también una $tM-$álgebra.*

Ejemplo 2.1.2. *Existen dos ejemplos canónicos de operadores temporales sobre una $M-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$. Definimos $G = H$, tal que $G(1) = 1$ y $G(x) = 0$ para $x \neq 1$. Se puede chequear que $(\mathscr{A}, G, H)$ es una $tM-$álgebra. Otro ejemplo de operadores temporales son las funciones identidad, es decir, $G(x) = x = H(x)$ para todo $x \in A$.*

A continuación indicaremos un ejemplo de una $tM-$álgebra la cual no es una $tB-$álgebra.

Ejemplo 2.1.3. *Consideremos la $M-$álgebra $(\{0, a, b, c, d, 1\}, \sim)$, la cual está descrita como sigue:*



x	0	a	b	c	d	1
$\sim x$	1	d	c	b	a	0

Definimos los operadores G, H por medio de la siguiente tabla

x	0	a	b	c	d	1
$G(x)$	a	a	a	c	a	1
$H(x)$	0	0	b	b	1	1

Entonces, $(\{0, a, b, c, d, 1\}, \sim, G, H)$ es una $tM-$álgebra.

Proposición 2.1.1. *Las siguientes propiedades se verifican en toda $tM-$álgebra $(A, \sim, G, H)$:*

(tM5) $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$,

(tM6) $x \leq y$ *implica* $P(x) \leq P(y)$ *y* $F(x) \leq F(y)$, (tM7) $F(0)=0$, $P(0)=0$,

(tM8) $F(x\vee y)=F(x)\vee F(y)$, $P(x\vee y)=P(x)\vee P(y)$,

(tM9) $FH(x)\le x$, $PG(x)\le x$,

(tM10) $G(x)\wedge F(y)\le F(x\wedge y)$, $H(x)\wedge P(y)\le P(x\wedge y)$.

Dem.
(tM5): Supongamos que $x\le y$. Por (tM2), resulta que $G(x)=G(x\wedge y)=G(x)\wedge G(y)$. Por lo tanto, $G(x)\le G(y)$. En forma análoga se prueba que el operador temporal H es creciente.
(tM6): Supongamos que $x\le y$. Por (M3), $\sim y\le\sim x$. Aplicando (tM5), tenemos que $G(\sim y)\le G(\sim x)$. Por lo tanto, aplicando nuevamente (M3) resulta que $F(x)\le F(y)$. En forma análoga se prueba que $P(x)\le P(y)$.
(tM7): Es consecuencia directa de (M6), (tM1) y (M5).
(tM8): Es consecuencia directa de (M2), (tM2) y (M4).
(tM9): Por (tM3), $\sim x\le HF(\sim x)$. Entonces, aplicando (M3) y (M1) resulta que $\sim HF(\sim x)\le x$. Entonces, $PG(x)\le x$. En forma análoga se prueba la otra desigualdad.
(tM10): Por (tM4), tenemos que $G(\sim y\vee\sim x)\le G(\sim y)\vee F(\sim x)$. Entonces, aplicando (M3), (M2) y (M4), resulta que $G(x)\wedge F(y)=\sim G(\sim y)\wedge\sim F(\sim x)\le\sim G(\sim(x\wedge y))=F(x\wedge y)$. De manera similar se prueba la segunda desigualdad.

■

2.1.2. Representación por conjuntos

En esta sección probaremos un teorema de representación para las $tM-$álgebras en términos de $tM-$álgebras de conjuntos, usando el conocido teorema de representación para $M-$álgebras.

Consideremos un conjunto ordenado $(X,\le)$. Un subconjunto $U\subseteq X$ se dice *creciente* si para todo $x,y\in X$ tal que $x\in U$ y $x\le y$, tenemos que $y\in U$.

El conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X es denotado por $\mathscr{P}_c(X)$. Es claro que $\langle \mathscr{P}_c(X), \cup, \cap, \emptyset, X\rangle$ es una $L_{0,1}$−álgebra. Para cada $Y \subseteq X$, el conjunto creciente (decreciente) generado por Y es $[Y) = \{x \in X \mid \exists y \in Y(y \leq x)\}$ ($(Y] = \{x \in X \mid \exists y \in Y(x \leq y)\}$). Si $Y = \{y\}$, en lugar de $[\{y\})$ ($(\{y\}]$) escribiremos $[x)$ ($(x]$). El complemento de Y es denotado por $Y^c = X \setminus Y$.

Sea X un conjunto, R una relación binaria sobre X y R^{-1} la inversa de R. Definimos cuatro operadores sobre $\mathscr{P}(X)$ como sigue:

$$G_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}, \quad H_{R^{-1}}(U) = \{x \in X : R^{-1}(x) \subseteq U\}.$$

$$F_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}, \quad P_{R^{-1}}(U) = \{x \in X : R^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

En general, la M−álgebra $\langle \mathscr{P}_c(X), \cup, \cap, \sim_g, \emptyset, X\rangle$ no es cerrada bajo los operadores introducidos anteriormente, donde $\sim_g : \mathscr{P}_c(X) \longrightarrow \mathscr{P}_c(X)$, está definida por $\sim_g U = X \setminus g(U)$, para todo $U \in \mathscr{P}_c(U)$. El siguiente resultado da condiciones sobre la relación R y su inversa para que $\mathscr{P}_c(X)$ sea cerrado bajo estas operaciones.

Proposición 2.1.2. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado, R una relación binaria sobre X, y R^{-1} la inversa de R. Entonces*

(i) $(\leq \circ R) \subseteq (R \circ \leq) \Longleftrightarrow G_R(U) \in \mathscr{P}_c(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{P}_c(X)$.

(ii) $(\leq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \leq) \Longleftrightarrow H_{R^{-1}}(U) \in \mathscr{P}_c(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{P}_c(X)$.

(iii) $(\geq \circ R) \subseteq (R \circ \geq) \Longleftrightarrow F_R(U) \in \mathscr{P}_c(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{P}_c(X)$.

(iv) $(\geq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \geq) \Longleftrightarrow P_{R^{-1}}(U) \in \mathscr{P}_c(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{P}_c(X)$.

Dem. Solo probaremos (ii) y (iv). Las demostraciones de (i) y (iii) pueden verse en [19].

(ii) En primer lugar, probemos que si $U \in \mathscr{P}_c(X)$, entonces $H_{R^{-1}}(U) \in \mathscr{P}_c(X)$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ y $R^{-1}(x) \subseteq U$. Supongamos que $(y, z) \in R^{-1}$, para algún $z \in X$. Entonces existe $w \in X$ tal que $(x,w) \in R^{-1}$ y $w \leq z$. Como $R^{-1}(x) \subseteq U$, se verifica que $w \in U$; además dado que U es creciente, tenemos que $z \in U$. Recíprocamente, supongamos que $H_{R^{-1}}(U) \in \mathscr{P}_c(X)$, para todo $U \in \mathscr{P}_c(X)$. Sean $x,y,z \in X$ tales que $x \leq y$ y $(y,z) \in R^{-1}$. Consideremos el conjunto creciente $[R^{-1}(x))$. Como $R^{-1}(x) \subseteq [R^{-1}(x))$ se verifica que $x \in H_{R^{-1}}([R^{-1}(x)))$. Entonces, $y \in H_{R^{-1}}([R^{-1}(x)))$. Por lo tanto, $z \in [R^{-1}(x))$, es decir, existe $w \in X$ tal que $(x,w) \in R^{-1}$ y $w \leq z$, esto es, $(x,z) \in (R^{-1} \circ \leq)$.

(iv) Sean $x,y \in X$ tales que $x \leq y$ y $x \in P_{R^{-1}}(U)$. Entonces, existe $z \in U$ tal que $(x,z) \in R^{-1}$. Como $(\geq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \geq)$, resulta que $(y,z) \in (R^{-1} \circ \geq)$. Entonces existe $w \in X$ tal que $(y,w) \in R^{-1}$ y $z \leq w$. Dado que U es creciente, $w \in U$. Por lo tanto, $w \in R^{-1}(y) \cap U$, esto es, $y \in P_{R^{-1}}(U)$. Recíprocamente, supongamos que $P_{R^{-1}}(U) \in \mathscr{P}_c(X)$ para todo $U \in \mathscr{P}_c(X)$. Sean $x,y,z \in X$ tales que $z \leq x$ y $(z,y) \in R^{-1}$. Supongamos que para cada $w \in R^{-1}(x)$ se verifica que $y \not\leq w$, es decir, $R^{-1}(x) \cap [y) = \emptyset$. De donde resulta que $x \notin P_{R^{-1}}([y))$. Entonces, como $z \leq x$ y $P_{R^{-1}}([y)) \in \mathscr{P}_c(X)$, tenemos que $z \notin P_{R^{-1}}([y))$, es decir, $R^{-1}(z) \cap [y) = \emptyset$, lo cual contradice que $(z,y) \in R^{-1}$. Por lo tanto, existe $w \in R^{-1}(x)$ tal que $y \leq w$, esto es, $(x,y) \in (R^{-1} \circ \geq)$. ■

Definición 2.1.2. *Una estructura $\mathscr{F} = (X, \leq, g, R, R^{-1})$ es un marco de De Morgan temporal (o $\mathcal{TM}-$marco) si $(X, \leq, g)$ es un $\mathcal{M}-$marco, R es una relación binaria sobre X, y R^{-1} es la inversa de R tal que:*

(fM1) $(\leq \circ R) \subseteq (R \circ \leq)$,

(fM2) $(\leq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \leq)$,

(fM3) $(x,y) \in R$ *implica* $(g(x), g(y)) \in R$.

Proposición 2.1.3. *En todo $\mathcal{TM}-$marco $\mathscr{F} = (X, \leq, g, R, R^{-1})$ se verifican las siguientes condiciones:*

(fM4) $(\geq \circ R) \subseteq (R \circ \geq)$.

(fM5) $(\geq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \geq)$.

Dem. Solo probaremos (fM4). Sea $(x, y) \in (\geq \circ R)$. Entonces, existe un $z \in X$ tal que $x \leq x$ y $(x, y) \in R$. Dado que $(X, \leq, g)$ es un $\mathcal{M}-$marco, tenemos que $g(x) \leq g(z)$ y $(g(z), g(y)) \in R$, de donde se sigue que $(g(x), g(y)) \in (\leq \circ R)$. Por (fM1), existe $w \in X$ tal que $(g(x), w) \in R$ y $w \leq g(y)$. Aplicando la condición (fM3), se sigue que $(x, g(w)) \in R$ y $y \leq g(w)$. Por lo tanto, $(x, y) \in (R \circ \geq)$. ■

Proposición 2.1.4. *Sea $\mathscr{F} = (X, \leq, g, R, R^{-1})$ un $\mathcal{TM}-$marco. Entonces,*

(i) *para todo $U \in \mathscr{P}_c(X)$, $F_R(U) = \sim_g G_R(\sim_g U)$,*

(ii) *para todo $U \in \mathscr{P}_c(X)$, $P_{R^{-1}}(U) = \sim_g H_{R^{-1}}(\sim_g U)$.*

Dem. Solo probaremos (i). Sea $x \in F_R(U)$ y supongamos que $x \notin \sim_g G_R(\sim_g U)$, es decir, $R(g(x)) \subseteq \sim_g U$. Entonces, existe $z \in U$ tal que $(x, z) \in R$. Por (fM3) tenemos que $(g(x), g(z)) \in R$. Entonces, podemos deducir que $g(z) \in \sim_g U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in \sim_g G_R(\sim_g U)$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \sim_g G_R(\sim_g U)$. Luego, $g(x) \notin G_R(\sim_g U)$, es decir, $R(g(x)) \nsubseteq \sim_g U$. De la última afirmación, existe $z \in R(g(x))$ tal que $g(z) \in U$. Así, por (fM3), deducimos que $g(z) \in R(x) \cap U$. Por lo tanto, $x \in F_R(U)$. ■

Proposición 2.1.5. *Si $\mathscr{F} = (X, \leq, g, R, R^{-1})$ es un $\mathcal{TM}-$marco, entonces $A(\mathscr{F}) = (\mathscr{P}_c(X), \sim_g, G_R, H_{R^{-1}})$ es una $tM-$álgebra.*

Dem. Teniendo en cuenta las Proposiciones 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4, solo tenemos que probar (tM4). En efecto: sea $x \in G_R(U \cup V)$ y supongamos que $x \notin G_R(U)$. Entonces, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in R$ y $y \notin U$. Dado que, $y \in U \cup V$, tenemos que $y \in V$. Por lo tanto, $x \in F_R(V)$. En forma similar podemos probar que $H_{R^{-1}}(U \cup V) \subseteq H_{R^{-1}}(U) \cup P_{R^{-1}}(V)$. ■

Definición 2.1.3. *Sea $(A, \sim, G, H)$ una $tM-$álgebra . Definimos dos relaciones binarias R_G^A y R_H^A sobre $X(A)$ como sigue:*

$$(S,T)\in R_G^A \Longleftrightarrow G^{-1}(S)\subseteq T\subseteq F^{-1}(S),$$

$$(S,T)\in R_H^A \Longleftrightarrow H^{-1}(S)\subseteq T\subseteq P^{-1}(S).$$

La relación R_G^A fue considerada en el artículo [15] para definir la relación asociada a los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$ de la Lógica Modal Positiva. También esta relación ha sido utilizada en [18].

La siguiente Proposición es fundamental para la prueba de la Proposición 2.1.7.

Proposición 2.1.6. *Sea $(A,\sim,G,H)$ una tM−álgebra . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(S,T)\in R_G^A$,

(ii) $(T,S)\in R_H^A$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sean S,T dos filtros primos de A tales que $G^{-1}(S)\subseteq T\subseteq F^{-1}(S)$ y supongamos que $H(x)\in T$. Así, $FH(x)\in S$. De la afirmación anterior y (tM9), tenemos que $x\in S$. Entonces, $H^{-1}(T)\subseteq S$. Por otra parte, supongamos que $z\in S$. Por (tM3), $GP(z)\in S$ y, dado que $G^{-1}(S)\subseteq T$, tenemos que $P(z)\in T$. Por lo tanto, $S\subseteq P^{-1}(T)$. La implicación recíproca es similar. ■

Observaciones 2.1.1. *De la Proposición 2.1.6 tenemos que R_H^A es la inversa de R_G^A.*

Proposición 2.1.7. *Sea $(A,\sim,G,H)$ una tM−álgebra. Entonces, $\mathscr{F}(A)=(X(A),\subseteq,g_A,R_G^A,R_H^A)$ es un $\mathcal{TM}$−marco, donde $g_A: X(A)\longrightarrow X(A)$ está definida como en* (FC1) *de la Subsección 1.2.6.*

Dem. Teniendo en cuenta la Observación 2.1.1, solo debemos probar (fM1), (fM2) y (fM3).

(fM1): Sean S,T,D tres filtros primos de A tales que $S\subseteq D$ y $G^{-1}(D)\subseteq T\subseteq F^{-1}(D)$. Consideremos el ideal

$$(T^c\cup F^{-1}(S)^c]$$

y probemos que

$$G^{-1}(S)\cap(T^c\cup F^{-1}(S)^c]=\emptyset. \tag{2.1}$$

Supongamos que 2.1 no se satisface. Entonces existen $x\in G^{-1}(S)$, $y\in T^c$ y $z\notin F^{-1}(S)$ tales que $x\leq y\vee z$. Así, por (tM5) y (tM4), tenemos que $G(x)\leq G(y\vee z)\leq G(y)\vee F(z)$. Dado que $G(x)\in S$ y $F(z)\notin S$, deducimos que $G(y)\in S$, lo cual es imposible. Entonces por el teorema de Birkhoff–Stone existe un filtro primo Z tal que

$$G^{-1}(S)\subseteq Z \text{ y } (T^c\cup F^{-1}(S)^c)\cap Z=\emptyset$$

Por lo tanto, $G^{-1}(S)\subseteq Z\subseteq F^{-1}(S)$ y $Z\subseteq T.$, es decir, $(S,T)\in(R_G^A\circ\subseteq)$.

(fM2): Se prueba de manera similar a (fM1).

(fM3): Sean S,T dos filtros primos tales que $G^{-1}(S)\subseteq T\subseteq F^{-1}(S)$. Supongamos que $x\in G^{-1}(g_A(S))$. Así, $\sim G(x)=F(\sim x)\notin S$, y dado que $T\subseteq F^{-1}(S)$, tenemos que $\sim x\notin T$, es decir, $x\in g_A(T)$. Por otra parte, supongamos que $z\in g_A(T)$ y $F(z)\notin g_A(S)$. Así, $\sim F(z)=G(\sim z)\in S$, y dado que $G^{-1}(S)\subseteq T$, tenemos que $\sim z\in T$, es decir, $z\notin g_A(T)$, lo cual es una contradicción. Luego, $F(z)\in g_A(S)$. Por lo tanto, $G^{-1}(g_A(S))\subseteq g_A(T)\subseteq F^{-1}(g_A(S))$.

■

El siguiente resultado es necesario para la prueba del Teorema 2.1.1.

Lema 2.1.1. *Sea $(A,\sim,G,H)$ una $tM-$álgebra y sea $S\in X(A)$ y $a\in A$. Entonces*

(i) $G(a)\notin S\Longleftrightarrow$ *existe $T\in X(A)$ tal que $(S,T)\in R_G^A$ y $a\notin T$,*

(ii) $H(a)\notin S\Longleftrightarrow$ *existe $Z\in X(A)$ tal que $(S,Z)\in R_H^A$ y $a\notin Z$.*

Dem. Supongamos que $G(a)\notin S$. Consideremos el ideal $(\{a\}\cup F^{-1}(S)^c]$, y probemos que

$$G^{-1}(S)\cap(\{a\}\cup F^{-1}(S)^c] = \emptyset \tag{2.2}$$

Supongamos lo contrario. Entonces existen $b \in G^{-1}(S)$ y $c \in F^{-1}(S)^c$ tal que $b \leq a \vee c$. De (tM5) y (tM4) tenemos que $G(b) \leq G(a \vee c) \leq G(a) \vee F(c)$. De esta afirmación deducimos que $F(c) \in S$, lo cual es una contradicción. Luego se verifica 2.2. Por lo tanto del teorema de Birkhoff–Stone existe un filtro primo T tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq T \ \text{ y } \ (\{a\}\cup F^{-1}(S)^c) \cap T = \emptyset.$$

Entonces, $(S,T) \in R_G^A$ y $a \notin T$. La otra implicación es fácil. En forma similar podemos probar (ii).

■

Sea $(A,\sim,G,H)$ una $tM-$álgebra y consideremos su $\mathcal{TM}-$marco asociado $\mathscr{F}(A) = (X(A),\subseteq, g_A, R_G^A, R_H^A)$. La estructura

$$A(\mathscr{F}(A)) = (\mathscr{P}_i(X(A)),\sim_{g_A}, G_{R_G^A}, H_{R_H^A})$$

es una $tM-$álgebra.

Sea $\mathscr{A} = \langle A,\vee,\wedge,\sim,0,1\rangle$ una $M-$álgebra. Para cada $a \in A$ consideremos el conjunto

$$\sigma_A(a) = \{S \in X(A) : a \in S\}$$

y la familia de conjuntos

$$\beta(A) = \{\sigma_A(a) : a \in A\}$$

Se sabe que la estructura

$$(\beta(A),\sim_{g_A})$$

es una $M-$subálgebra de la $M-$álgebra

$$\mathscr{P}_c(X(A)) = (\mathscr{P}_c(X(A)),\sim_{g_A}).$$

La asignación $\sigma_A : A \longrightarrow \mathscr{P}_c(X(A))$ es un homomorfismo inyectivo de $M-$álgebras cuyo rango es el conjunto $\beta(A)$. Además, este resultado puede ser extendido a las $tM-$álgebras como sigue.

Teorema 2.1.1. *Para toda $tM-$álgebra $(A, \sim, G, H)$ el álgebra*

$$\beta(A) = (\beta(A), \sim_{g_A}, G_{R^A_G}, H_{R^A_H})$$

es una subálgebra de $A(\mathscr{F}(A))$ isomorfa a A por medio de la asignación $\sigma_A : A \longrightarrow \beta(A)$.

Dem. Es fácil chequear que $\beta(A)$ es una subálgebra de $A(\mathscr{F}(A))$ y que la aplicación σ_A es inyectiva. Probaremos que σ_A es un homomorfismo de $tM-$álgebras. Solo necesitamos ver que $\sigma_A(G(a)) = G_{R^A_G}(\sigma_A(a))$ y $\sigma_A(H(a)) = H_{R^A_H}(\sigma_A(a))$. Ahora probaremos la inclusión $G_{R^A_G}(\sigma_A(a)) \subseteq \sigma_A(G(a))$. Tomemos un filtro primo S tal que $G(a) \notin S$. Del Lema 2.1.1, existe $T \in X(A)$ tal que $(S, T) \in R^A_G$ y $a \notin T$. Entonces, tenemos que $R^A_G(S) \nsubseteq \sigma_A(a)$. Así $S \notin G_{R^A_G}(\sigma_A(a))$. La inclusión $\sigma_A(G(a)) \subseteq G_{R^A_G}(\sigma_A(a))$ es immediata. La igualdad $\sigma_A(H(a)) = H_{R^A_H}(\sigma_A(a))$ resulta por argumentos similares usando (ii) del Lema 2.1.1. ■

2.1.3. Dualidad para las $tM-$álgebras

En esta sección, indicaremos una dualidad para las $tM-$álgebras teniendo en cuenta los resultados establecidos por Cornish y Fowler en [42].

Definición 2.1.4. *Un espacio de De Morgan temporal (o $tmP-$espacio) es un sistema (X, g, R, R^{-1}) donde (X, g) es un $mP-$espacio, R es una relación binaria sobre X y R^{-1} es la inversa de R tal que:*

(sM1) *Para cada $U \in D(X)$ se verifica que $G_R(U)$, $H_{R^{-1}}(U) \in D(X)$, donde $G_R(U)$, $H_{R^{-1}}(U)$ están definidos como en la Sección 2.1.2.*

(sM2) $(x, y) \in R$ *implica* $(g(x), g(y)) \in R$.

(sM3) *Para cada* $x \in X$, $R(x)$ *es un conjunto cerrado.*

(sM4) *Para cada* $x \in X$, $R(x) = (R(x)] \cap [R(x))$.

Definición 2.1.5. *Una* $tmP-$*función de un* $tmP-$*espacio* $(X_1, g_1, R_1, R_1^{-1})$ *en otro,* $(X_2, g_2, R_2, R_2^{-1})$*, es una* $mP-$*función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *la cual satisface las siguientes condiciones:*

(rM1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$ *para* $x, y \in X_1$,

(rM2) *si* $(f(x), y) \in R_2$*, entonces existe* $z \in X_1$ *tal que* $(x, z) \in R_1$ *y* $f(z) \leq y$,

(rM3) *si* $(y, f(x)) \in R_2$*, entonces existe* $z \in X_1$ *tal que* $(z, x) \in R_1$ *y* $f(z) \leq y$.

A continuación probaremos que la categoría **tmPS** de los $tmP-$espacios y $tmP-$funciones es dualmente equivalente a la categoría $\mathscr{TM}$ de las $tM-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

Lema 2.1.2. *Sea* (X, g, R, R^{-1}) *un* $tmP-$*espacio. Entonces,* $(D(X), \sim_g, G_R, H_{R^{-1}})$ *es una* $tM-$*álgebra, donde* $\sim_g : D(X) \longrightarrow D(X)$ *está definida como en* (FC2) *de la Subsección 1.2.6.*

Dem. La buena definición de G_R y $H_{R^{-1}}$ es consecuencia de (sM1). La condición (sM2) nos dan las ecuaciones (tM3) y (tM4). Finalmente, (tM1) y (tM2) son consecuencia de la definición de G_R y $H_{R^{-1}}$. ■

Lema 2.1.3. *Sea* $f : (X_1, g_1, R_1, R_1^{-1}) \longrightarrow (X_2, g_2, R_2, R_2^{-1})$ *un morfismo de* $tmP-$*espacios. Entonces* $\Psi(f) : D(X_2) \longrightarrow D(X_1)$ *definida como en* (P1) *de la Subsección 1.2.6 es un* $tM-$*morfismo.*

Dem. Solo probaremos que $f^{-1}(G_{R_2}(U)) = G_{R_1}(f^{-1}(U))$. La inclusión $f^{-1}(G_{R_2}(U)) \subseteq G_{R_1}(f^{-1}(U))$ resulta por (rM1). Sea $x \in G_{R_1}(f^{-1}(U))$ y sea $y \in X_2$ tal que $(f(x), y) \in R_2$. Por (rM2), existe $z \in X_1$ tal que $(x, z) \in R_1$ y $f(z) \leq y$. Dado que $z \in R_1(x) \subseteq f^{-1}(U)$, $y \in U$. Así $f(x) \in G_{R_2}(U)$, y en consecuencia $G_{R_1}(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(G_{R_2}(U))$.

■

Los dos lemas previos muestran que Ψ es un funtor contravariante de $\mathscr{T}\mathscr{M}$ en **tmPS**.

Definición 2.1.6. *Un $tmP^{*}-$espacio es un sistema (X, g, R, R^{-1}) donde (X, g) es un $mP-$espacio, R es una relación binaria sobre X y R^{-1} es la inversa de R tal que se verifican* (sM1) *y* (sM2) *de la Definición 2.1.4.*

Sea $R^{D(X)}$ la relación definida en $X(D(X))$ por medio del operador G_R, es decir,

$$(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R^{D(X)} \Longleftrightarrow G_R^{-1}(\varepsilon_X(x)) \subseteq \varepsilon_X(y) \subseteq F_R^{-1}(\varepsilon_X(x)).$$

Proposición 2.1.8. *Sea (X, g, R, R^{-1}) un $tmP^{*}-$espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *para todo $x \in X$, $R(x)$ es cerrado y $R(x) = (R(x)] \cap [R(x))$.*

(ii) *para todo $x \in X$, $R(x)$ es compacto y $R(x) = (R(x)] \cap [R(x))$.*

(iii) *para cada $x, y \in X$, si $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R^{D(X)}$ entonces $(x, y) \in R$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es inmediata. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos que $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R^{D(X)}$ y $y \notin R(x) = (R(x)] \cap [R(x))$. Si $y \notin [R(x))$, entonces para todo $z \in R(x)$, $z \not\leq y$. Como X es un espacio de Priestley, para cada $z \in R(x)$ existe un $U_z \in D(X)$ tal que $z \in U_z$ y $y \notin U_z$. Entonces, $R(x) \subseteq \bigcup\limits_{z \in R(x)} U_z$ y $y \notin \bigcup\limits_{z \in R(x)} U_z$. Dado que $R(x)$ es compacto, $R(x) \subseteq U$ para algún $U \in D(X)$ tal que $y \notin U$. Pero como $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R^{D(X)}$ y $x \in G_R(U)$, entonces $y \in U$, lo cual no es posible. Si $y \notin (R(x)]$, por un argumento similar, también obtenemos una contradicción. (iii) $\Rightarrow$ (i). Probemos que $(R(x)] \cap [R(x)) \subseteq R(x)$; la otra inclusión siempre se verifica. Supongamos que $y \in (R(x)] \cap [R(x))$. Entonces existen $z_1, z_2 \in X$ tales que

$$z_1 \leq y \leq z_2 \text{ y } z_1, z_2 \in R(x).$$

Por hipótesis, tenemos que $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(z_1)) \in R^{D(X)}$, $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(z_2)) \in R^{D(X)}$ y también $\varepsilon_X(z_1) \subseteq \varepsilon_X(y) \subseteq \varepsilon_X(z_2)$. Es fácil chequear que $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R^{D(X)}$. Resulta de la hipótesis (iii) que $(x, y) \in R$. Por lo tanto $y \in R(x)$. Probemos ahora que $R(x)$ es cerrado. Supongamos que $y \in \mathrm{Cl}(R(x))$ y $y \notin R(x)$, donde $\mathrm{Cl}(R(x))$ denota la clausura del conjunto $R(x)$. Por la hipótesis (iii), tenemos que $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \notin R^{D(X)}$. Así, existe $U \in D(X)$ tal que $G_R(U) \in \varepsilon_X(x)$ y $U \notin \varepsilon_X(y)$, o existe $V \in D(X)$ tal que $V \in \varepsilon_X(y)$ y $F_R(V) \notin \varepsilon_X(x)$. En el primer caso $R(x) \subseteq U$ y $y \in U^c$. De donde resulta que $R(x) \cap U^c = \emptyset$ y $y \in U^c$, lo que no es posible, pues $y \in \mathrm{Cl}(R(x))$. En el otro caso, $y \in V$ y $R(x) \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X.

■

Lema 2.1.4. *Sea* $(A, \sim, G, H)$ *una* $tM-$*álgebra. Entonces* $(X(A), \subseteq, g_A, R_G^A, R_H^A)$ *es un* $tmP-$*espacio.*

Dem. Solo probaremos (sM3). Vamos a chequear que $R_G^A(S)$ es cerrado para $S \in X(A)$. Supongamos que $T \notin R_G^A(S)$. Entonces por la definición de la relación R_G^A, existe $x \in G^{-1}(S)$ tal que $x \notin T$ o existe $y \in T$ tal que $y \notin F^{-1}(S)$. En el primer caso $R_G^A(S) \subseteq \sigma_A(x)$ y en el segundo caso $R_G^A(S) \subseteq X(A) \setminus \sigma_A(y)$, lo cual completa la prueba.

■

Lema 2.1.5. *Sea* $h : A_1 \longrightarrow A_2$ *un* $tM-$*morfismo. Entonces,* $\Phi(h) : X(A_2) \longrightarrow X(A_1)$ *definido como en* (P2) *de la Subsección 1.2.6 es un morfismo de* $tmP-$*espacios.*

Dem. Probaremos (rM1) y (rM2); (rM3) puede probarse de manera similar a (rM2). Sean $S, T \in X(A_2)$. Vamos a probar que si $(S, T) \in R_G^{A_2}$, entonces $(h^{-1}(S), h^{-1}(T)) \in R_G^{A_1}$. Supongamos que $a \in G^{-1}(h^{-1}(S))$. Entonces tenemos que $h(G(a)) = G(h(a)) \in S$, de donde resulta que $h(a) \in T$, es decir, $a \in h^{-1}(T)$. De una manera similar podemos probar que $h^{-1}(T) \subseteq F^{-1}(h^{-1}(S))$. Ahora supongamos que $(h^{-1}(S), T) \in R_G^{A_1}$. Vamos a probar que existe un $Z \in X(A_2)$ tal que

$(S,Z) \in R_G^{A_2}$ y $h^{-1}(Z) \subseteq T$. En primer lugar vamos a probar la exstencia de un filtro Z. La prueba consiste de dos partes:

1. Probaremos la existencia de un filtro primo $D \subseteq A_2$, tal que $G^{-1}(S) \subseteq D$ y $h^{-1}(D) \subseteq T$.

2. Probaremos la existencia de un filtro primo $Z \subseteq A_2$, tal que $G^{-1}(S) \subseteq Z \subseteq F^{-1}(S)$ y $Z \subseteq D$.

De 1 y 2, resulta la existencia del filtro primo Z, que cumple con la condición establecida.

Por hipótesis tenemos que $G^{-1}(h^{-1}(S)) \subseteq T \subseteq F^{-1}(h^{-1}(S))$. Ahora vamos a probar que

$$G^{-1}(S) \cap (h(T^c)] = \emptyset. \tag{2.3}$$

Supongamos que 2.3 no se satisface. En consecuencia existen $a \in G^{-1}(S)$, $b \in T^c$, tales que $a \leq h(b)$. Entonces, $G(a) \leq G(h(a)) \in S$. De esto se sigue que, $b \in G^{-1}(h^{-1}(S)) \subseteq T$, lo que es una contradicción. Entonces 2.3 se verifica. Por el teorema de Birkhoff–Stone, existe un filtro primo D, tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq D \text{ y } h^{-1}(D) \subseteq T.$$

Ahora vamos a probar la segunda parte. Para este propósito primero vamos a mostrar que

$$G^{-1}(S) \cap (D^c \cup F^{-1}(S)^c] = \emptyset. \tag{2.4}$$

Supongamos lo contrario. Entonces, existen $a \in G^{-1}(S)$, $b \in D^c$ y $c \in F^{-1}(S)^c$ tales que $a \leq b \vee c$. Entonces, tenemos

$$G(a) \leq G(b \vee c) \leq G(b) \vee F(c) \in S.$$

Dado que $b \notin D$ y $G^{-1}(S) \subseteq D$, $G(b) \notin S$. Por lo tanto, $F(c) \in S$, lo cual es una contradicción. Entonces, 2.4 se verifica. Aplicando el teorema de Birkhoff–Stone, podemos asegurar que existe un filtro primo Z tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq Z \subseteq F^{-1}(S) \text{ y } Z \subseteq D.$$

Como $h^{-1}(Z) \subseteq h^{-1}(D) \subseteq T$, hemos probado la existencia del filtro primo Z.

■

Los dos lemas previos muestran que Φ es un funtor contravariante de **tmPS** en $\mathcal{TM}$.

Ahora, veremos que estas categorías son dualmente equivalentes entre sí.

Proposición 2.1.9. *Sea (X, g, R, R^{-1}) un $tmP-$espacio, entonces la función $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ definida como en* (I) *de la Subsección 1.2.6 es un isomorfismo de tmP–espacios.*

Dem. Resulta de los resultados establecidos en [42] y Proposición 2.1.8.

■

Proposición 2.1.10. *Sea $(A, \sim, G, H)$ una $tM-$álgebra, entonces la función $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$ definida como en* (II) *de la Subsección 1.2.6 es un $tM-$isomorfismo.*

Dem. Resulta de los resultados establecidos en [42] y Lema 2.1.1.

■

El siguiente teorema es consecuencia de las Proposiciones 2.1.9 y 2.1.10.

Teorema 2.1.2. *Los funtores ε_X y σ_A establecen una equivalencia dual entre las categorías $\mathcal{TM}$ y* **tmPS**.

2.1.4. Aplicación de la dualidad

En esta subsección usaremos la dualidad descrita en la Sección 2.1.3 para caracterizar el retículo de las congruencias $Con_{tM}(A)$ de una $tM-$álgebra $(A, \sim, G, H)$.

Definición 2.1.7. *Sea (X, g, R, R^{-1}) un $tmP-$espacio. Un subconjunto cerrado e involutivo Y de X es un $tmP-$subconjunto de X si este satisface las siguientes condiciones para $u, v \in X$:*

(ts1) *si* $(v,u) \in R$ *y* $u \in Y$, *entonces existe,* $w \in Y$ *tal que* $(w,u) \in R$ *y* $w \leq v$.

(ts2) *si* $(u,v) \in R$ *y* $u \in Y$, *entonces existe,* $z \in Y$ *tal que* $(u,z) \in R$ *y* $z \leq v$.

Lema 2.1.6. *Sea* $(A,\sim,G,H)$ *una* $tM-$*álgebra y* Y, *un* $tmP-$*subconjunto de* $X(A)$. *Entonces* $\Theta(Y)$ *es una* $tM-$*congruencia, donde* $\Theta(Y)$ *está definida como en* (P3) *de la Subsección 1.2.6.*

Dem. Solo probaremos que $\Theta(Y)$ preserva G y H. Sea $(a,b) \in \Theta(Y)$ y supongamos que $S \in G_{R^A_G}(\sigma_A(a)) \cap Y$. Luego, $(R^A_G)^{-1}(S) \subseteq \sigma_A(a)$ y $S \in Y$. Supongamos que $T \in (R^A_G)^{-1}(S)$. En consecuencia, de (ts1) existe un $W \in Y$, tal que $W \subseteq T$ y $W \in (R^A_G)^{-1}(S)$. Esta última afirmación nos permite inferir que $W \in \sigma_A(a)$, de donde llegamos a la conclusión $W \in \sigma_A(b) \cap Y$. Por lo tanto, dado que $W \subseteq T$, tenemos que $T \in \sigma_A(b)$; luego, $S \in G_{R^A_G}(\sigma_A(b)) \cap Y$. Entonces, $G_{R^A_G}(\sigma_A(a)) \cap Y \subseteq G_{R^A_G}(\sigma_A(b)) \cap Y$. La otra inclusión se prueba de manera similar. En forma análoga se puede probar que, $\Theta(Y)$ preserva H. ■

Lema 2.1.7. *Sea* $(A,\sim,G,H)$ *una* $tM-$*álgebra y* $\theta \in Con_{tM}(A)$. *Si* $q : A \longrightarrow A/\theta$ *es el epimorfismo natural, entonces* $Y = \{\Phi(q)(S) : S \in X(A/\theta)\}$ *es un* $tmP-$*subconjunto, donde* Φ *está definido como en* (P2) *de la Subsección 1.2.6.*

Dem. Como $Con_M(A)$ es un subretículo de $Con_{tM}(A)$ tenemos que $Y = \{\Phi(q)(S) : S \in X(A/\theta)\}$ es un subconjunto cerrado e involutivo de $X(A)$ y $\theta = \Theta(Y)$ (ver [42]). Además, del Lema 2.1.5 tenemos que $\Phi(q)$ es una $tmP-$función. Entonces, Y es un $tmP-$subconjunto de $X(A)$. En efecto, sea $(V,U) \in R^A_G$ y $U \in Y$. De la última afirmación, existe $S \in X(A/\theta)$ tal que $\Phi(q)(S) = U$. Entonces, $(V,\Phi(q)(S)) \in R^A_G$. Como una consecuencia, tenemos de (rM2) que existe $T \in X(A/\theta)$ tal que $(T,S) \in R^{A/\theta}_G$ y $\Phi(q)(T) \subseteq V$. Por lo tanto, aplicando (rM1) tenemos que $\Phi(q)(T) \subseteq (R^A_G)^{-1}(U)$. (ts2) puede ser probado de una manera similar.

■

De los Lemas 2.1.6 y 2.1.7, obtenemos el Teorema 2.1.3.

Teorema 2.1.3. *Sea $(A,\sim,G,H)$ una $tM-$álgebra y $(X(A),g_A,R_G^A,R_H^A)$, el $tmP-$espacio asociado a A. Entonces, existe un anti–isomorfismo entre $Con_{tM}(A)$ y el retículo de todos los $tmP-$subconjuntos de $X(A)$.*

2.2. tLM_n-álgebras

2.2.1. Una dualidad discreta para las LM_n-álgebras

En esta subsección, describiremos una dualidad discreta para las LM_n-álgebras teniendo en cuenta la indicada en [49] para $M-$álgebras.

A continuación recordaremos nuevamente la definición de álgebra de Łukasiewicz-Mosil $n-$valuada y enumeraremos algunas propiedades que nos serán de utilidad en esta subsección.

Un álgebra de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuada (o LM_n-álgebra) donde n es un entero, $n \geq 2$, es un álgebra $\mathscr{L} = \langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_i\}_{1\leq i\leq n-1},0,1\rangle$ tal que $\langle L,\vee,\wedge,\sim,0,1\rangle$ es una $M-$álgebra y σ_i, con $1 \leq i \leq n-1$, son operaciones unarias sobre L las cuales satisfacen (L1)-(L6) (ver Definición 1.1.17).

Una LM_n-álgebra $\mathscr{L} = \langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_i\}_{1\leq i\leq n-1},0,1\rangle$ será denotada en el resto de esta subsección por su conjunto soporte L.

Lema 2.2.1. ([7]) *En toda LM_n-álgebra L se verifican las siguientes propiedades:*

(L7) $\sigma_i(x\wedge y)=\sigma_i(x)\wedge\sigma_i(y)$,

(L8) $x\leq y$ *si, y sólo si,* $\sigma_i(x)\leq\sigma_i(y)$ *para* $i=1,\ldots,n-1$,

(L9) $\sigma_1(x)\leq x$

(L10) $x\leq\sigma_{n-1}(x)$,

(L11) $\sigma_i(1)=1$, $\sigma_i(0)=0$.

Definición 2.2.1. *Una estructura* $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq n-1})$ *es un* $\mathcal{LM}_n-$*marco si* $(X, \leq, g)$ *es un* $\mathcal{M}-$*marco y* Φ_i *(para* $i = 1, \ldots, n-1$*) son funciones sobre* X *que satisfacen las siguientes condiciones:*

(fL1) $g(\Phi_i(x)) = \Phi_{n-i}(g(x))$,

(fL2) $\Phi_j(\Phi_i(x)) = \Phi_j(x)$,

(fL3) $\Phi_1(x) \leq x$,

(fL4) $x \leq \Phi_{n-1}(x)$,

(fL5) $\Phi_i(x) \leq \Phi_j(x)$ *para* $i \leq j$,

(fL6) $x \leq \Phi_i(x)$ o $\Phi_{i+1}(x) \leq x$, $i = 1, \ldots, n-2$, $n \geq 3$,

(fL7) $\Phi_i(g(x)) = \Phi_i(x)$,

(fL8) $x \leq y$ *implica* $\Phi_i(x) \leq \Phi_i(y)$.

El siguiente resultado es necesario para la prueba del Lema 2.2.3.

Lema 2.2.2. *Sea* $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq n-1})$ *un* $\mathcal{LM}_n-$*marco. Entonces, para cada* $x \in X$ *existe* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *tal que* $\Phi_i(x) = x$.

Dem. Sea $M_x = \{j \in \{1, \ldots, n-1\} : \Phi_j(x) \leq x\}$. El conjunto M_x es no vacío, dado que por (fL3) tenemos que $\Phi_1(x) \leq x$. Como M_x es finito, existe un elemento maximal i en M_x. Si $i = n-1$, entonces dado que $i \in M_x$ tenemos que $\Phi_{n-1}(x) \leq x$. Por (fL4) obtenemos que $\Phi_i(x) = x$. Si $i < n-1$, entonces dado que i es maximal, tenemos que $i+1 \notin M_x$. Luego, $\Phi_{i+1}(x) \not\leq x$. De (fL6) debe ser $x \leq \Phi_i(x)$. Dado que $i \in M_x$, tenemos que $\Phi_i(x) \leq x$. Por lo tanto, $\Phi_i(x) = x$.

■

Definición 2.2.2. *El álgebra compleja de un* $\mathcal{LM}_n-$*marco* $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq n-1})$ *es una estructura*

$$\langle \mathscr{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \{\sigma_i^c\}_{1\leq i\leq n-1}, \emptyset, X\rangle$$

donde $\langle \mathscr{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \emptyset, X\rangle$ es el álgebra compleja del $\mathcal{M}-$marco $(X, \leq, g)$ y para cada $U \in \mathscr{C}(X)$, $\sigma_i^c(U) = \{x \in X : \Phi_i(x) \in U\}$ (para $i = 1, \ldots, n-1$).

Definición 2.2.3. *El marco canónico de una LM_n-álgebra L es*

$$(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c, \{\Phi_i^c\}_{1\leq i\leq n-1})$$

donde $(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c)$ es el marco canónico del $M-$reducto L y para cada $S \in \mathscr{X}(L)$, $\Phi_i^c(S) = \{a \in L : \sigma_i(a) \in S\}$ (para $i = 1, \ldots, n-1$).

Lema 2.2.3. *El marco canónico de una LM_n-álgebra es un $\mathcal{LM}_n-$marco.*

Dem. De (L11), (L7), (L8) y (L1) tenemos que $\mathscr{X}(L)$ es cerrado bajo Φ_i^c, $i = 1, \ldots, n-1$. Ahora vamos a chequear los axiomas de $\mathcal{LM}_n-$marco (fL1) a (fL6). Los axiomas (fL1), (fL2), (fL3), (fL4) y (fL5) se prueban sin dificultad de los axiomas (L4), (L3), (L9), (L10) y (L5), respectivamente. A continuación probaremos que se satisfacen (fL6),(fL7) y (fL8).

(fL6) Sea S un filtro primo. Supongamos que existe $a \in S$ y $\sigma_i(a) \notin S$ y existe $\sigma_{i+1}(b) \in S$ y $b \notin S$. De donde resulta que $a \wedge \sigma_{i+1}(b) \in S$. Dado que para todo $a, b \in L$,

$$a \wedge \sigma_{i+1}(b) \leq b \vee \sigma_i(a),$$

tenemos que $b \vee \sigma_i(a) \in S$. Dado que S es un filtro primo, $b \in S$ o $\sigma_i(a) \in S$, lo cual es una contradicción.

(fL7) De (L2) resulta que para todo $S \in \mathscr{X}(L)$ se verifica que: $\Phi_i^c(g^c(S)) = \sigma_i^{-1}(L \setminus \{\sim x \in L \mid x \in S\}) = L \setminus \sigma_i^{-1}(\{\sim x \in L \mid x \in S\}) = L \setminus (\{x \in L \mid \sim \sigma_i x \in S\}) = L \setminus (\{x \in L \mid \sigma_i x \notin S\}) = L \setminus (\{x \in L \mid x \notin \sigma_i^{-1}(S)\}) = \sigma_i^{-1}(S) = \Phi_i^c(S)$.

(fL8) Se verifica por la definición de Φ_i^c.

■

Lema 2.2.4. *El álgebra compleja de un $\mathcal{LM}_n-$marco es una LM_n-álgebra.*

Dem. Necesitamos mostrar que las operaciones σ_i^c (para $i = 1,\ldots,n-1$) son cerradas en $\mathscr{C}(X)$, esto es, $\sigma_i^c(U) = [\leq]\sigma_i^c(U)$. La inclusión $\supseteq$ se sigue de la reflexividad de $\leq$. Supongamos que $x \in \sigma_i^c(U)$. Tomemos un $y \in X$ tal que $x \leq y$. Entonces, $\Phi_i(x) \in U$ y, por (fL8), $\Phi_i(x) \leq \Phi_i(y)$. Luego, dado que $U = [\leq]U$, tenemos que $\Phi_i(y) \in U$, como queríamos probar. (L2), (L3) y (L4) resultan de las condiciones de marco (fL7), (fL2) y (fL1), respectivamente.

(L1): Es consecuencia directa de la definición de σ_i^c.

(L5): Sea $i \leq j$ y supongamos que $x \in \sigma_i^c(U)$. Entonces, $\Phi_i(x) \in U$. Dado que $i \leq j$, de (fL5), tenemos que $\Phi_i(x) \leq \Phi_j(x)$. Luego, dado que $U = [\leq]U$, obtenemos $\Phi_j(x) \in U$. Por lo tanto, $x \in \sigma_j^c(U)$.

(L6): Supongamos que $\sigma_j^c(U) = \sigma_j^c(V)$ para todo $j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Sea $x \in U$. Entonces, del Lema 2.2.2, existe un $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ tal que $\Phi_i(x) = x$. De donde obtenemos que $x \in \sigma_i^c(U)$. De esta afirmación y de la hipótesis tenemos que $x \in \sigma_i^c(V)$, esto es, $\Phi_i(x) = x \in V$. Por lo tanto, $U \subseteq V$. La inclusión restante es análoga.

■

Ahora vamos a mostrar que el sumergimiento $h : L \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(L))$, definido en la Subsección 1.2.3, preserva los operadores unarios σ_i $(i = 1,\ldots,n-1)$, esto es,

Lema 2.2.5. *Para cada $a \in L$, $h(\sigma_i(a)) = \sigma_i^c(h(a))$.*

Dem. Las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos.

1. $S \in \sigma_i^c(h(a))$,
2. $\Phi_i^c(S) \in h(a)$,
3. $a \in \Phi_i^c(S)$,
4. $\sigma_i(a) \in S$,

5. $S \in h(\sigma_i(a))$.

■

Ahora vamos a mostrar que el sumergimiento de orden $k : X \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{C}(X))$, definido en la Subsección 1.2.3, preserva las funciones Φ_i (para $i = 1, \ldots, n-1$), esto es,

Lema 2.2.6. *Para cada $x, y \in X$: $\Phi_i(x) = y$ si, y sólo si, $\Phi_i^c(k(x)) = k(y)$.*

Dem. Notemos que, para cada $x, y \in X$

$$\Phi_i^c(k(x)) = k(y) \text{ si, y sólo si, para todo } U \in \mathcal{C}(X), \Phi_i(x) \in U \Leftrightarrow y \in U.$$

Supongamos que $\Phi_i(x) = y$. Entonces trivialemente, para cada $U \in \mathcal{C}(X)$, $\Phi_i(x) \in U$ si, y sólo si, $y \in U$. Por otra parte, supongamos que $\Phi_i^c(k(x)) = k(y)$. Entonces, $[\Phi_i(x)) \in \mathcal{C}(X)$ y $\Phi_i(x) \in [\Phi_i(x))$, así $y \in [\Phi_i(x))$, esto es, $\Phi_i(x) \leq y$. También $[y) \in \mathcal{C}(X)$ y $y \in [y)$, así $\Phi_i(x) \in [y)$, esto es, $y \leq \Phi_i(x)$. Por lo tanto, $\Phi_i(x) = y$.

■

Luego, tenemos una dualidad discreta entre LM_n–álgebras y $\mathfrak{LM}_n$–marcos.

Teorema 2.2.1.

(a) *Toda LM_n–álgebra es sumergible en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathfrak{LM}_n$–marco es sumergible en el marco canónico de su álgebra compleja.*

2.2.2. Una dualidad discreta para las tLM_n–álgebras

En esta sección, obtenemos una dualidad discreta para las tLM_n–álgebras teniendo en cuenta la indicada en la Sección 2.2 para LM_n–álgebras.

A continuación recordaremos nuevamente la definición de tLM_n-álgebra y enumeraremos algunas propiedades que nos serán de utilidad en esta subsección.

Una terna $(\mathscr{L}, G, H)$ es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil $n-$valuada temporal (o tLM_n-álgebra) si $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_i\}_{1\leq i\leq n-1}, 0, 1\rangle$ es una LM_n-álgebra y G, H son operadores unarios sobre L que verifican (tL1), (tL2), (tL3) y (tL4) (ver Definición 1.1.19).

Lema 2.2.7. (Diaconescu y Georgescu [43]) *Las siguientes propiedades se verifican en toda tLM_n-álgebras $(\mathscr{L}, G, H)$.*

(tL5) $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$,

(tL6) $x \leq y$ *implica* $F(x) \leq F(y)$ *y* $P(x) \leq P(y)$,

(tL7) $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

(tL8) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

(tL9) $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

(tL10) $G(x) \wedge F(y) \leq F(x \wedge y)$, $H(x) \wedge P(y) \leq P(x \wedge y)$,

(tL11) $G(x \vee y) \leq G(x) \vee F(y)$, $H(x \vee y) \leq H(x) \vee P(y)$.

Sea $(X, \leq, g)$ un $\mathcal{M}-$marco, R una relación binaria sobre X y R^{-1} la inversa de R. Definimos cuatro operadores sobre $\mathscr{C}(X)$ como sigue:

$$G^c(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}, \quad H^c(U) = \{x \in X : R^{-1}(x) \subseteq U\}. \tag{2.5}$$

$$F^c(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}, \quad P^c(U) = \{x \in X : R^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset\}. \tag{2.6}$$

En general, la $M-$álgebra $\langle \mathscr{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \emptyset, X\rangle$ no es cerrada bajo las operaciones introducidas anteriormente. En el siguiente resultado daremos condiciones sobre la relación R y su inversa para que $\mathscr{C}(X)$ sea cerrado bajo esas operaciones.

Lema 2.2.8. *Sea* $(X, \leq, g)$ *un* $\mathcal{M}-$*marco,* R *una relación binaria sobre* X*, y* R^{-1} *la inversa de* R*. Entonces*

(i) $(\leq \circ R) \subseteq (R \circ \leq) \Leftrightarrow G^c(U) \in \mathscr{C}(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{C}(X)$.

(ii) $(\leq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \leq) \Leftrightarrow H^c(U) \in \mathscr{C}(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{C}(X)$.

(iii) $(\geq \circ R) \subseteq (R \circ \geq) \Leftrightarrow F^c(U) \in \mathscr{C}(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{C}(X)$.

(iv) $(\geq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \geq) \Leftrightarrow P^c(U) \in \mathscr{C}(X)$, *para todo* $U \in \mathscr{C}(X)$.

Dem. La demostración es similar a la de la Proposición 2.1.2. ■

Definición 2.2.4. *Una estructura* $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq n-1}, R, R^{-1})$ *es un* $\mathcal{LM}_n-$*marco temporal (o* $\mathcal{TLM}_n-$*marco) si* $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq n-1})$ *es un* $\mathcal{LM}_n$*-marco,* R *es una relación binaria sobre* X*, y* R^{-1} *es la inversa de* R *tal que:*

(ftL1) $(x, y) \in R$ *implica* $(g(x), g(y)) \in R$,

(ftL2) $(\leq \circ R) \subseteq (R \circ \leq)$,

(ftL3) $(\leq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \leq)$,

(ftL4) $(x, y) \in R$ *implica* $(\Phi_i(x), \Phi_i(y)) \in R$,

(ftL5) $(\Phi_i(z), y) \in R$ *implica que existe un* $x \in X$ *tal que* $(z, x) \in R$ *y* $\Phi_i(x) \leq y$,

(ftL6) $(y, \Phi_i(z)) \in R$ *implica que existe un* $x \in X$ *tal que* $(x, z) \in R$ *y* $\Phi_i(x) \leq y$.

Observación 2.2.1. *En todo* $\mathcal{TLM}_n-$*marco* $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq n-1}, R, R^{-1})$ *se satisfacen las las siguientes condiciones:*

(ftL7) $(\geq \circ R) \subseteq (R \circ \geq)$.

(ftL8) $(\geq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \geq)$.

Los operadores F^c y P^c introducidos en (2.6) pueden ser definidos por medio de los operadores G^c y H^c, respectivamente, como lo muestra el siguiente lema:

Lema 2.2.9. *Sea $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq n-1}, R, R^{-1})$ un $\mathcal{TLM}_n$-marco. Entonces,*

(i) *para todo $U \in \mathscr{C}(X)$, $F^c(U) = \sim^c G^c(\sim^c U)$,*

(ii) *para todo $U \in \mathscr{C}(X)$, $P^c(U) = \sim^c H^c(\sim^c U)$.*

Dem. La demostración es similar a la de la Proposición 2.1.4. ■

Definición 2.2.5. *El álgebra compleja de un $\mathcal{TLM}_n$-marco*

$$(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq n-1}, R, R^{-1})$$

es una terna $(\mathscr{C}(X), G^c, H^c)$ donde $\mathscr{C}(X)$ es el álgebra compleja del $\mathcal{LM}_n-$marco $(X, \leq, g, \{\Phi_i\}_{1\leq i\leq n-1})$ y G^c, H^c, están definidas como en (2.5).

Definición 2.2.6. *El marco canónico de una tLM_n-álgebra $(\mathscr{L}, G, H)$ es una estructura*

$$(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c, \{\Phi^c\}_{1\leq i\leq n-1}, R^c, Q^c)$$

donde $(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c, \{\Phi^c\}_{1\leq i\leq n-1})$ es el marco canónico asociado con L y R^c, Q^c son dos relaciones binarias sobre $\mathscr{X}(L)$ definidas por:

$$(S,T) \in R^c \Leftrightarrow G^{-1}(S) \subseteq T \subseteq F^{-1}(S)$$

$$(S,T) \in Q^c \Leftrightarrow H^{-1}(S) \subseteq T \subseteq P^{-1}(S).$$

El siguiente lema es fundamental para la prueba del Lema 2.2.11.

Lema 2.2.10. *Sea $(\mathscr{L}, G, H)$ una tLM_n-álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(S,T) \in R^c$,

(ii) $(T,S) \in Q^c$.

Dem. La demostración es similar a la de la Proposición 2.1.6. ■

Observación 2.2.2. *Del Lema 2.2.10 tenemos que* Q^c *es la inversa de* R^c.

Lema 2.2.11. *El marco canónico de una* tLM_n*–álgebra es un* $\mathcal{TLM}_n$*–marco.*

Dem. Teniendo en cuenta la Observación 2.2.2 y el Lema 2.2.3, solo nos resta probar de (ftL1) a (ftL6).

(ftL1): Sean S, T dos filtros primos tales que $G^{-1}(S) \subseteq T \subseteq F^{-1}(S)$. Supongamos que $x \in G^{-1}(g^c(S))$. Así, $\sim G(x) = F(\sim x) \notin S$, y dado que $T \subseteq F^{-1}(S)$, tenemos que $\sim x \notin T$, es decir, $x \in g^c(T)$. Por otra parte, supongamos que $z \in g^c(T)$ y $F(z) \notin g^c(S)$. Así, $\sim F(z) = G(\sim z) \in S$, y dado que $G^{-1}(S) \subseteq T$, tenemos que $\sim z \in T$, es decir, $z \notin g^c(T)$, lo cual es una contradicción. Así, $F(z) \in g^c(S)$. Por lo tanto, $G^{-1}(g^c(S)) \subseteq g^c(T) \subseteq F^{-1}(g^c(S))$.

(ftL2): Sean S, T, D tres filtros primos de L tales que $S \subseteq D$ y $G^{-1}(D) \subseteq T \subseteq F^{-1}(D)$. Consideremos el ideal $((L \setminus T) \cup (L \setminus F^{-1}(S))]$ y probemos que

$$G^{-1}(S) \cap ((L \setminus T) \cup (L \setminus F^{-1}(S))] = \emptyset. \tag{2.7}$$

Supongamos que (2.7) no se satisface. Entonces, existe un elemento $x \in G^{-1}(S)$, $y \in L \setminus T$ y $z \notin F^{-1}(S)$ tales que $x \leq y \vee z$. Así, por (tL5) y (tL11), tenemos que $G(x) \leq G(y \vee z) \leq G(y) \vee F(z)$. Dado que $G(x) \in S$ y $F(z) \notin S$, deducimos que $G(y) \in S$, lo cual no es posible. Entonces, por el Teorema de Birkhoff–Stone existe un filtro primo Z tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq Z \text{ y } ((L \setminus T) \cup (L \setminus F^{-1}(S)) \cap Z = \emptyset$$

Por lo tanto, $G^{-1}(S) \subseteq Z \subseteq F^{-1}(S)$ y $Z \subseteq T.$, es decir, $(S, T) \in (R^c \circ \leq^c)$.

(ftL3): Se prueba de manera similar a (ftL2).

(ftL4): Sean S, T dos filtros primos. Vamos a probar que si $(S, T) \in R^c$, entonces $(\Phi_i^c(S), \Phi_i(T)^c) \in R^c$. Supongamos que $a \in G^{-1}(\Phi_i^c(S))$. Entonces tenemos que $\sigma_i(G(a)) = G(\sigma_i(a)) \in S$, de donde resulta que $\sigma_i(a) \in T$, es decir, $a \in \Phi_i^c(T)$. De manera similar se puede probar que $\Phi_i^c(T) \subseteq F^{-1}(\Phi_i^c(S))$.

(ftL5): Ahora supongamos que $(\Phi_i^c(S), T) \in R^c$. Vamos a probar que existe un $Z \in \mathscr{X}(L)$ tal que $(S,Z) \in R^c$ y $\Phi_i^c(Z) \subseteq T$. En primer lugar vamos a probar la existencia del filtro Z. La prueba consiste de dos partes:

1. Vamos a probar la existencia de un filtro primo $D \subseteq L$, tal que $G^{-1}(S) \subseteq D$ y $\Phi_i^c(D) \subseteq T$.
2. Vamos a probar la existencia de un filtro primo $Z \subseteq L$, tal que $G^{-1}(S) \subseteq Z \subseteq F^{-1}(S)$ y $Z \subseteq D$.

De 1 y 2, se sigue la existencia de un filtro primo Z, el cual satisface las condiciones que fueron establecidas. Por la hipótesis tenemos que $G^{-1}(\Phi_i^c(S)) \subseteq T \subseteq F^{-1}(\Phi_i^c(S))$. Ahora vamos a probar que

$$G^{-1}(S) \cap (\sigma_i(L \setminus T)] = \emptyset \tag{2.8}$$

Supongamos que (2.8) no se satisface. Recíprocamente, existen $a \in G^{-1}(S)$, $b \in L \setminus T$, tales que $a \leq \sigma_i(b)$. Entonces, $G(a) \leq G(\sigma_i(b)) \in S$.

De esto resulta que, $b \in G^{-1}(\Phi_i^c(S)) \subseteq T$, lo cual es una contradicción. Entonces, se satisface (2.8). Por el Teorema de Birkhoff–Stone, existe un filtro primo D, tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq D \text{ y } \Phi_i^c(D) \subseteq T.$$

Ahora vamos a probar la segunda parte. Para este propósito primero vamos a probar que

(2.9) $$G^{-1}(S)\cap((L\setminus D)\cup(L\setminus F^{-1}(S))]=\emptyset$$

Supongamos lo contrario. Entonces, existen $a\in G^{-1}(S)$, $b\in L\setminus D$ y $c\in L\setminus F^{-1}(S)$ tales que

$$a\leq b\vee c.$$

Entonces, tenemos que

$$G(a)\leq G(b\vee c)\leq G(b)\vee F(c)\in S.$$

Dado que $b\notin D$ y $G^{-1}(S)\subseteq D$, $G(b)\notin S$. Por lo tanto, $F(c)\in S$, lo cual es una contradicción. Entonces, se verifica (2.9). Aplicando el Teorema de Birkhoff–Stone, podemos asegurar la existencia de un filtro primo Z tal que

$$G^{-1}(S)\subseteq Z\subseteq F^{-1}(S)\text{ y } Z\subseteq D.$$

Como $\Phi_i^c(Z)\subseteq\Phi_i^c(D)\subseteq T$, hemos probado la existencia del filtro primo Z.

(ftL6): Se prueba de manera similar a (ftL5). ■

El siguiente resultado es necesario para la prueba del Lema 2.2.14.

Lema 2.2.12. *Sea $(\mathscr{L},G,H)$ una tLM_n−álgebra y sea $S\in\mathscr{X}(L)$ y $a\in L$. Entonces*

(i) *$G(a)\notin S$ si, y sólo si, existe $T\in\mathscr{X}(L)$ tal que $(S,T)\in R^c$ y $a\notin T$,*

(ii) *$H(a)\notin S$ si, y sólo si, existe $Z\in\mathscr{X}(L)$ tal que $(S,Z)\in Q^c$ y $a\notin Z$,*

Dem. Supongamos que $G(a)\notin S$. Consideremos el ideal $(\{a\}\cup(L\setminus F^{-1}(S)]$, y probemos que

(2.10) $$G^{-1}(S)\cap(\{a\}\cup(L\setminus F^{-1}(S)]=\emptyset$$

Supongamos lo contrario. Entonces existen $b\in G^{-1}(S)$ y $c\in(L\setminus F^{-1}(S))$ tales que $b\leq a\vee c$. De (tL5) y (tL11) tenemos que

$$G(b)\leq G(a\vee c)\leq G(a)\vee F(c).$$

De esta última afirmación se deduce que $F(c) \in S$, lo cual es una contradicción. Así, se verifica (2.10). Por lo tanto del Teorema de Birkhoff–Stone existe un filtro primo T tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq T \text{ y } (\{a\} \cup (L \setminus F^{-1}(S))) \cap T = \emptyset.$$

Entonces, $(S,T) \in R^c$ y $a \notin T$. La otra implicación es fácil. De manera similar podemos probar (ii).

■

Lema 2.2.13. *El álgebra compleja de un $\mathcal{TLM}_n-$marco es una tLM_n-álgebra.*

Dem. De los resultados establecidos en Lema 2.2.3, 2.2.8, 2.2.9 y Observación 2.2.1, solo nos resta probar (tL4). Supongamos que $\Phi_i(y) \in G^c(U)$ y $(y,x) \in R$. Entonces, por (ftL4), tenemos que $(\Phi_i(y), \Phi_i(x)) \in R$. De esta última afirmación podemos inderir que $\Phi_i(x) \in U$. Luego, $\sigma_i^c(G^c(U)) \subseteq G^c(\sigma_i^c(U))$. Por otra parte, supongamos que $z \in G^c(\sigma_i^c(U))$ y $(\Phi_i(z), y) \in R$. Entonces, de (ftL5), existe $x \in X$ tal que $(z,x) \in R$ y $\Phi_i(x) \leq y$. Por lo tanto, $y \in U$. De manera similar podemos probar que $\sigma_i^c(H^c(U)) = H^c(\sigma_i^c(U))$.

■

Ahora vamos a mostrar que el sumergimiento $h : L \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{X}(L))$, preserva G y H, esto es,

Lema 2.2.14. *Para todo $a \in L$, $h(G(a)) = G^c(h(a))$ y $h(H(a)) = H^c(h(a))$.*

Dem. Tomemos un filtro primo S tal que $G(a) \notin S$. Del Lema 2.2.12, existe $T \in \mathcal{X}(L)$ tal que $(S,T) \in R^c$ y $a \notin T$. Entonces, tenemos que $R^c(S) \nsubseteq h(a)$. Así, $S \notin G^c(h(a))$. La inclusión $h(G(a)) \subseteq G^c(h(a))$ es inmediata. La igualdad $h(H(a)) = H^c(h(a))$ resulta por argumentos similares usando (ii) del Lema 2.2.12.

■

Ahora vamos a mostrar que el sumergimiento de orden $k : X \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{C}(X))$, preserva la relación R, esto es,

Lema 2.2.15. *Para cada $x, y \in X$: $(x, y) \in R$ si, y sólo si, $(k(x), k(y) \in R^c$.*

Dem. Supongamos que $(x, y) \in R$. Necesitamos mostrar que

$$(k(x), k(y)) \in R^c.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(k(x), k(y)) \in R^c &\Leftrightarrow (G^c)^{-1}(k(x)) \subseteq k(y) \text{ y } k(y) \subseteq (F^c)^{-1}k(x)\\ &\Leftrightarrow \text{para todo } U \in \mathscr{C}(X),\ x \in G^c(U) \text{ implica } y \in U \text{ y}\\ &\quad\ \text{para todo } U \in \mathscr{C}(X),\ y \in U \text{ implica } x \in F^c(U).\end{aligned}$$

Tomemos $U \in \mathscr{C}(X)$ tal que $x \in G^c(U)$. Entonces, dado que $(x, y) \in R$, tenemos que $y \in U$. Tomemos un $U \in \mathscr{C}(X)$ tal que $y \in U$. Entonces, dado que $(x, y) \in R$ tenemos que $x \in F^c(U)$. Por otra parte, supongamos que $(k(x), k(y)) \in R^c$. Entonces, $[\leq]\{y\} \in \mathscr{C}(X)$. Así, $x \in F^c([\leq]\{y\})$. De esta última afirmación y (ftL7) podemos deducir que $x \in [\leq]F^c(\{y\})$. Así, por la reflexividad de $\leq$ tenemos que $x \in F^c(\{y\})$, esto es, $(x, y) \in R$, como se requeria.

■

Luego, tenemos una dualidad discreta entre tLM_n-álgebras y $\mathcal{TLM}_n$-marcos.

Teorema 2.2.2.

(a) *Toda tLM_n−álgebra es sumergible en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathcal{TLM}_n$−marco es sumergible en el marco canónico de su álgebra compleja.*

2.3. tFM−álgebras

2.3.1. Sobre las FM−álgebras

Las álgebras tetravalentes modales fueron consideradas por primera vez por A. Monteiro y estudiadas intensamente por I. Loureiro, A. V. Figallo, A. Ziliani y P. Landini (ver [108, 110, 109, 54, 57, 58, 74]). Luego, en 2000, J. M. Font y M. Rius [82] mostraron su interés en las lógicas originadas por el retículo de estas álgebras. Actualmente estas álgebras continúan siendo tema de estudios de diferentes autores. Desde el punto de vista de la lógica, M. Coniglio y M. Figallo [40, 41] las estudiaron bajo la perspectiva de las lógicas paraconsistentes. Además, S. Celani en [22] probó, entre otros resultados, que las álgebras tetravalentes modales tienen la propiedad de amalgamación y superamalgamación. También, en [74], A.V. Figallo y P. Landini dieron diversas caracterizaciones de las álgebras tetravalentes modales y mostraron la relación existente entre esta clase de álgebras y la clase de las álgebras De Morgan pseudocomplementadas modales (ver [72]).

Recordemos que un álgebra tetravalente modal (o álgebra 4−valuada modal) es un álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,1,0,0)$ que verifica:

(i) $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una M−álgebra.

(ii) $\Diamond : L \longrightarrow L$ satisface las identidades:

(I1) $\Diamond x \vee \sim x = 1$,

(I2) $\Diamond x \wedge \sim x = \sim x \wedge x$.

Nosotros, en lo que sigue utilizaremos la terminología de A. V. Figallo [57]. Entonces, representaremos con $\mathscr{FM}$ a la clase de las álgebras 4-valuadas modales (o FM−álgebras, para abreviar).

(I3) En toda FM−álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\sim \Box x \vee x = 1$,
2. $\Box x \vee \sim x = x \vee \sim x$,
3. $\Box x \vee \sim \Box x = 1$,
4. $\Box x \wedge \sim \Box x = 0$,
5. $\Box x \leq x$,
6. $\Box 1 = 1$,
7. $\Box 0 = 0$,
8. si $x \leq y$, entonces $\Box x \leq \Box y$,
9. $\Box\Box x = \Box x$,
10. $\Box(\Box x \wedge \Box y) = \Box x \wedge \Box y$,
11. $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$,
12. $\Box \sim \Box x = \sim \Box x$,
13. $\Box(x \vee \Box y) = \Box x \vee \Box y$,
14. $x \wedge \Box \sim x = 0$,

donde el operador $\Box$ está definido por la fórmula $\Box x := \sim \Diamond \sim x$.

I. Loureiro en [110, 111], probó:

(I4) Sea $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ una $FM-$álgebra y $a \in L$. Si S es un filtro primo de L, entonces $\Diamond a \in S \Longleftrightarrow a \in S$ o $a \in g^c(S)$, donde g^c está definida como en la Subsección 1.2.3.

(I5) Sobre una $M-$álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es posible definir una estructura de $FM-$álgebra, si y sólo si, para todo filtro primo S, T de L se satisface la siguiente condición: $S \subseteq T \Longleftrightarrow S = T$ o $g^c(S) = T$.

(I6) Si $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ es una $FM-$álgebra no trivial, entonces existe un conjunto no vacío X tal que L es isomorfo a una subálgebra de T_4^X, donde $T_4 = \langle T_4, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$, $T_4 = \{0, a, b, 1\}$ tiene el diagrama de la figura 1 y $\sim, \Diamond$ están definidas por medio de las siguientes tablas:

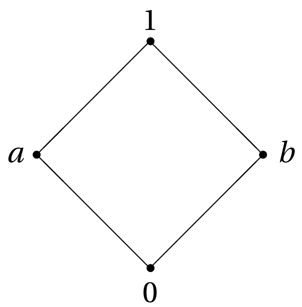


Figura 1

x	$\sim x$	$\Diamond x$
0	1	0
a	a	1
b	b	1
1	0	1

Por otra parte, sobre una $FM-$álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ se pueden definir varios operadores de implicación (ver [58]):

(I7) $x \supset y = \sim x \vee y$,

(I8) $x \rightarrow y = \Diamond \sim x \vee y$,

(I9) $x \mapsto y = (x \rightarrow y) \wedge (\Diamond y \vee \sim x)$,

(I10) $x \succ y = (x \mapsto y) \wedge ((x \supset y) \rightarrow (\Box \sim x \vee y))$.

Observemos que si $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ verifica la condición de Kleene $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$, o equivalentemente si $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz $3-$valuada entonces el operador $\mapsto$ y $\succ$ definido por I9 y I10 respectivamente coincide con la implicación de Łukasiewicz trivalente.

En T_4, las operaciones $\Box, \hookrightarrow, \rightarrow, \mapsto$ y $\succ$ tienen las siguientes tablas:

x	$\Box x$
0	0
a	0
b	0
1	1

$\supset$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	0	a	b	1

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
1	0	a	b	1

$\mapsto$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	b	1	1	1
1	0	a	b	1

$\succ$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	b	1
b	b	a	1	1
1	0	a	b	1

La implicación $\succ$ es llamada implicación contrapositiva. Esta implicación, entre otras propiedades interesantes, permite caracterizar el retículo de las congruencias de una $FM-$álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 0, 1\rangle$ (ver [150]).

Por otra parte, en [58], A.V. Figallo y P. Landini demostraron que las $FM-$álgebras son polinomialmente equivalente a las álgebras tetravalentes modales contrapositivas. Recordemos que un álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \succ, \sim, 1\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ es un álgebra tetravalente modal contrapositiva si se satisfacen:

1. $1 \succ x = x$,

2. $x \succ 1 = 1$,

3. $(x \succ y) \succ y = (y \succ x) \succ x$,

4. si $x \succ (y \succ z) = 1$, entonces $y \succ (x \succ z) = 1$,

5. $((x \succ (x \succ y)) \succ x) \succ x = 1$,

6. $\sim 1 \succ x = 1$,

7. $x \succ \sim 1 = \sim x$,

8. $((x \vee \sim y) \succ z) \succ ((x \succ z) \wedge (y \succ z)) = 1$,

donde $a \vee b$ denota a $(a \succ b) \succ b$ y $a \wedge b$ denota a $\sim(\sim a \vee \sim b)$.

Considerando la implicación contrapositiva $\succ$, en [40], M. Coniglio y M. Figallo introdujeron un cálculo estilo Hilbert para dos lógicas naturalmente asociadas a las álgebras tetravalentes modales contrapositivas. Independientemente, A. V. Figallo y otros en [71], introdujeron un cálculo proposicional estilo Hilbert para otra lógica asociada a la clase $\mathscr{F}\mathscr{M}$. En este cálculo estilo Hilbert se consideraron dos *nuevos* operadores de implicación. También, en [71], se introdujo la noción de *retículo modal con implicación* y se probó que la clase de estas álgebras es categorialmente equivalente a la clase de las $FM-$álgebras.

Por otra parte, en [102], M. Kondo definió las álgebras de De Morgan con implicación (o $MI-$álgebras) y dió un cálculo proposicional estilo Hilbert para la lógica, que el llamó, lógica de De Morgan. Un álgebra de De Morgan con implicación es una estructura $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \hookrightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,2,1,0,0)$ tal que el reducto $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra y la implicación $\hookrightarrow$ satisface las siguientes propiedades:

1. $y \leq x \hookrightarrow y$

2. $x \leq y$ implica $x \hookrightarrow y = 1$

3. $\sim x \wedge \sim y \leq (x \vee y) \hookrightarrow y$

4. $\sim x \wedge y \wedge \sim (x \hookrightarrow y) = 0$

5. $x \wedge (x \hookrightarrow y) \leq y \vee \sim y$

6. $x \wedge (x \hookrightarrow y) \leq \sim x \vee y$

7. $x \wedge \sim x \wedge (x \rightarrow y) \leq \sim (x \hookrightarrow y) \vee y$

En [102], el autor demostró que la clase de las $MI-$álgebras está generada por la $MI-$álgebra $\mathcal{T}_4 = \langle T_4, \vee, \wedge, \hookrightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ donde $\langle T_4, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es la $M-$álgebra definida en (I6) y $\hookrightarrow$ está definida en la siguiente tabla:

$\hookrightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	b	1
b	b	a	1	1
1	0	a	b	1

Observemos que en $\mathcal{T}_4$ la implicación definida por Kondo coincide con la implicación contrapositva $\succ$ definida por A.V. Figallo y P. Landini. Teniendo en cuenta esta observación se puede probar que las $MI-$álgebras son polinomialmente equivalentes a las álgebras tetravalentes modales contrapositivas.

2.3.2. Dualidades discretas para las $FM-$álgebras

Primer dualidad discreta para las $FM-$álgebras

En esta subsección obtenemos una dualidad discreta para las $FM-$álgebras teniendo en cuenta los resultados establecidos en [110].

Definición 2.3.1. *Una estructura $(X, \leq, g)$ es un marco de Loureiro (o $\mathcal{L}-$marco) si $(X, \leq, g)$ es un $\mathcal{M}-$marco y se satisface la siguientes propiedad adicional:*

(L) *si $x \leq y$, entonces $x = y$ o $g(x) = y$.*

Definición 2.3.2. *El álgebra compleja de un $\mathcal{L}-$marco $(X, \leq, g)$ es una estructura*

$$\langle \mathcal{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \diamondsuit^c, \emptyset, X\rangle$$

donde $\langle \mathcal{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \emptyset, X\rangle$ es el álgebra compleja del $\mathcal{M}-$marco $(X, \leq, g)$ y para cada $U \in \mathcal{C}(X)$, $\diamondsuit^c(U) = U \cup g(U)$.

Definición 2.3.3. *El marco canónico de una $FM-$álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \diamondsuit, 0, 1\rangle$ es*

$$(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c)$$

donde $(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c)$ es el marco canónico del $M-$reducto de L.

Lema 2.3.1. *El marco canónico de una $FM-$álgebra es un $\mathfrak{L}-$marco.*

Dem. Es consecuencia directa de (I5).

■

Lema 2.3.2. *El álgebra compleja de un $\mathfrak{L}-$marco es una $FM-$álgebra.*

Dem. Necesitamos probar que $\diamondsuit^c$ es cerrado en $\mathscr{C}(X)$, esto es, $\diamondsuit^c U = [\leq]\diamondsuit^c U$. La inclusión $\supseteq$ resulta de la reflexividad de $\leq$. Supongamos que $x \in \diamondsuit^c U$. Tomemos un $y \in X$ tal que $x \leq y$. Entonces, $x \in U$ o $x \in g(U)$. En el primer caso, como $U = [\leq]U$, tenemos que $y \in U$. De donde resulta que $y \in U \cup g(U) = \diamondsuit^c(U)$. En el segundo caso, como $x \leq y$, aplicando (L) tenemos que $x = y$ o $g(x) = y$. De donde resulta que, en ambos casos, $y \in \diamondsuit^c U$. A continuación probaremos (I1) y (I2) de la definición de $FM-$álgebra.

(I1)
$$\begin{aligned}\sim^c U \cup \diamondsuit^c U &= (X \setminus g(U)) \cup (U \cup g(U)) \\ &= ((X \setminus g(U)) \cup g(U)) \cup U \\ &= X \cup U = X\end{aligned}$$

(I2)
$$\begin{aligned}\sim^c U \cap \diamondsuit^c U &= (X \setminus g(U)) \cap (U \cup g(U)) \\ &= ((X \setminus g(U)) \cap U) \cup ((X \setminus g(U)) \cap g(U)) \\ &= ((X \setminus g(U)) \cap U) \cup \emptyset \\ &= (X \setminus g(U)) \cap U \\ &= \sim^c U \cap U\end{aligned}$$

■

A continuación mostraremos que el sumergimiento $h : L \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(L))$, definido en la Subsección 1.2.3, preserva el operador unario $\Diamond$, esto es,

Lema 2.3.3. *Para cada $a \in L$, $h(\Diamond a) = \Diamond^c h(a)$.*

Dem. Sea $S \in \mathscr{X}(L)$. Entonces, teniendo en cuenta (I4), las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $S \in h(\Diamond a)$,

(2) $\Diamond a \in S$,

(3) $a \in S$ o $a \in g^c(S)$,

(4) $S \in h(a)$ o $S \in g^c(h(a))$,

(5) $S \in \Diamond^c h(a)$.

■

Luego, obtenemos una dualidad discreta entre $FM-$álgebras y $\mathfrak{L}-$marcos.

Teorema 2.3.1.

(a) *Toda $FM-$álgebra puede sumergirse en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathfrak{L}-$marco puede sumergirse en el marco canónico de su álgebra compleja.*

Segunda dualidad discreta para las $FM-$álgebras

En esta sección, obtenemos una dualidad discreta para las $FM-$álgebras teniendo en cuenta los resultados establecidos en [22]. Para tal fin, utilizaremos la siguiente definición de $FM-$álgebra.

Un álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Box, 0, 1\rangle$ es una $FM-$álgebra, si el reducto $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra y $\Box$ es un operador unario definido sobre L que satisface las siguientes propiedades:

(F1) $\Box a \wedge \sim a = 0$

(F2) $a \wedge \sim \Box a = \sim a \wedge a$

Definición 2.3.4. *Una estructura $(X, \leq, g, R)$ es un $\mathcal{FM}-$marco si $(X, \leq, g)$ es un $\mathcal{M}-$marco y R es una relación binaria sobre X que satisface:*

(fF1) *R reflexiva,*

(fF2) $(\leq \circ R \circ \leq) \subseteq R$,

(fF3) *si $(x, y) \in R$, entonces $x \leq y$ o $g(x) \leq y$.*

(fF4) *$g(x) \in R(x)$, para todo $x \in X$.*

Definición 2.3.5. *El álgebra compleja de un $\mathcal{FM}-$marco $(X, \leq, g, R)$ es una estructura*

$$\langle \mathscr{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \Box^c, \emptyset, X\rangle$$

donde $\langle \mathscr{C}(X), \cup, \cap, \sim^c, \emptyset, X\rangle$ es el álgebra compleja del $\mathcal{M}-$marco $(X, \leq, g)$ y para todo $U \in \mathscr{C}(X)$, $\Box^c(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$.

Definición 2.3.6. *El marco canónico de una $FM-$álgebra $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \Box, 0, 1\rangle$ es*

$$(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c, R^c)$$

donde $(\mathscr{X}(L), \leq^c, g^c)$ es el marco canónico del $M-$reducto de L y para cada $S, T \in \mathscr{X}(L)$,

$$(S, T) \in R^c \Longleftrightarrow \Box^{-1}(S) \subseteq T.$$

Lema 2.3.4. *El marco canónico de una $FM-$álgebra es un $\mathcal{FM}-$marco.*

Dem. Solo resta probar (fF1)-(fF4).

(fF1): Sea $S \in \mathscr{X}(L)$ y supongamos que $x \in \Box^{-1}(S)$. Entonces, $\Box x \in S$. Dado que $\Box x \leq x$, tenemos que $x \in S$. Por lo tanto, $\Box^{-1}(S) \subseteq S$, esto es, $(S,S) \in R^c$.

(fF2): Sean $(U,V) \in (\leq^c \circ R^c \leq^c)$. Entonces, existe $T, S \in \mathscr{X}(L)$ tal que $U \subseteq T$, $(T,S) \in R^c$ y $S \subseteq V$. De estas dos últimas afirmaciones tenemos que $\Box^{-1}(T) \subseteq V$. Por lo tanto, dado que $U \subseteq T$ inferimmos que $(U,V) \in R^c$.

(fF3): Sean $U, V \in \mathscr{X}(L)$ tal que $(U,V) \in R^c$. Supongamos que $U \nsubseteq V$ y $g^c(U) \nsubseteq V$. Entonces $U \cap g^c(U) \nsubseteq V$. Así existe $a \in U \cap g^c(U)$ y $a \notin V$. Entonces $\sim a \notin U$. Como $\sim a \wedge a = a \wedge \sim \Box a$, y $a \in U$, tenemos que $\sim \Box a \notin U$. Así, $\Box a \in g^c(U)$. Dado que $\Box a \wedge \sim \Box a = 0$, $\sim \Box a \notin g^c(U)$, es decir, $\Box a \in U$. Así, $a \in V$, pues $(U,V) \in R^c$, lo cual es una contradicción.

(fF4): Sea $U \in \mathscr{X}(L)$. Si $(U, g^c(U)) \notin R^c$, entonces existe $a \in L$ tal que $\Box a \in U$ y $a \notin g^c(U)$. Así, $\Box a \wedge \sim a = 0 \in U$, lo cual es una contradicción.

■

Lema 2.3.5. *El álgebra compleja de un $\mathcal{FM}-$marco es una $FM-$álgebra.*

Dem. De [49], $\mathscr{C}(X)$ es cerrado bajo las operaciones de retículo y $\sim^c$. Ahora, probaremos que es cerrado bajo $\Box^c$ i.e., $\Box^c U = [\leq]\Box^c U$. De la reflexividad de $\leq$, tenemos que $[\leq]\Box^c U \subseteq \Box^c U$. Supongamos que $x \in \Box^c U$. Sea $y \in X$ tal que $x \leq y$ y tomemos un $z \in X$ que verifique $(y,z) \in R$. Entonces, de la reflexividad de $\leq$ y (fF2) inferimos que $(x,z) \in R$. Así, $z \in U$ y por lo tanto, $x \in [\leq]\Box^c U$. Por lo tanto, $\Box^c U \subseteq [\leq]\Box^c U$. Es claro que $\mathscr{C}(X)$ es una $M-$álgebra. Ahora probaremos que se verifican (F1) y (F2).

(F1): Supongamos que $\sim^c U \cap \Box^c U \neq \emptyset$. Entonces, existe $y \in \sim^c U$ tal que $R(y) \subseteq U$. Dado que $g(y) \in R(y)$, tenemos que $g(y) \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\sim^c U \cap \Box^c U = \emptyset$.

(F2): En primer lugar, notemos que por (fF1) se deduce que $\Box^c U \subseteq U$. Luego, tenemos que $\sim^c U \cap U \subseteq \sim^c \Box^c U \cap U$. La otra inclusión es consecuencia de (fF3).

En efecto: sea $x \in \sim^c \Box^c U \cap U$. Entonces, existe $z \in R(g(x))$ tal que $z \notin U$. De donde resulta por (fF3) que $g(x) \leq z$. De esta última afirmación tenemos que $x \in \sim^c U$. Por lo tanto, $x \in U \cap \sim^c U$, lo cual completa la demostración.

■

Ahora probaremos que el sumergimiento $h : L \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(L))$, definido en Subsección 1.2.3, preserva el operador unario $\Box$, esto es,

Lema 2.3.6. *Para cada $a \in L$, $h(\Box a) = \Box^c(h(a))$.*

Dem. Sea $S \in h(\Box a)$; entonces $\Box a \in S$. Supongamos que $T \in \mathscr{X}(L)$ verifica que $(S,T) \in R^c$. Entonces, $\Box^{-1}(S) \subseteq T$ y así, $a \in T$. Por lo tanto, $S \in \Box^c(h(a))$ de donde inferimos que $h(\Box a) \subseteq \Box^c(h(a))$. Recíprocamente, supongamos que $S \in \Box^c(h(a))$. Entonces para cada $T \in \mathscr{X}(L)$, $(S,T) \in R^c$ implica que $T \in h(a)$. Supongamos que $\Box a \notin S$. Entonces $\Box^{-1}(S)$ es un filtro y $a \notin \Box^{-1}(S)$. Luego, existe $W \in \mathscr{X}(L)$ tal que $a \notin W$ y $\Box^{-1}(S) \subseteq W$. Esta última afirmación nos permite concluir que $(S,W) \in R^c$. De esta afirmación tenemos que $W \in h(a)$ y así, $a \in W$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $h(\Box a) = \Box^c(h(a))$. Entonces, en virtud de los resultados establecidos en [49] la prueba está completa.

■

En el Lema 2.3.7 probaremos que el sumergimiento de orden $k : X \longrightarrow \mathscr{X}(\mathscr{C}(X))$ definido en Subsección 1.2.3, preserva la relación R.

Lema 2.3.7. *Sea $(X, \leq, g, R)$ un $\mathcal{FM}-$marco y sean $x, y \in X$. Entonces*

$(x,y) \in R$ si, y sólo si, $(k(x), k(y)) \in R^c$.

Dem. Supongamos que $(x,y) \in R$ y sea $U \in \mathscr{C}(X)$ que verifica $\Box^c U \in k(x)$. Entonces es fácil ver que $y \in U$ y así, $(k(x), k(y)) \in R^c$. Recíprocamente, sean $x, y \in X$ tales que $(k(x), k(y)) \in R^c$. Entonces $\Box^{c^{-1}}(k(x)) \subseteq k(y)$. Por otra parte, notemos que $[\leq](X \setminus (y]) \in \mathscr{C}(X)$ y $y \notin [\leq](X \setminus (y])$. Por lo tanto, $[\leq](X \setminus (y]) \notin k(y)$ y así, $[\leq](X \setminus (y]) \notin \Box^{c^{-1}}(k(x))$. Por lo tanto, $\Box^c([\leq](X \setminus (y])) \notin k(x)$ de donde podemos inferir que $x \notin \Box^c([\leq](X \setminus (y]))$. Entonces existe z tal que $(x,z) \in R$ y

$z \notin [\leq](X \setminus (y])$. De esta última afirmación existe w tal que $z \leq w$ y $w \leq y$, lo cual nos permite inferir que $z \leq y$. Entonces, en virtud de la reflexividad de $\leq$ y (fF2), $(x, y) \in R$ como queríamos. ■

Por lo tanto, tenemos una dualidad discreta entre FM-álgebras y $\mathcal{FM}$-marcos.

Teorema 2.3.2.

(a) *Toda $FM-$álgebra se puede sumergir en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathcal{FM}-$marco se puede sumergir en el marco canónico de su álgebra compleja.*

2.3.3. $tFM-$álgebras: una dualidad discreta

En esta subsección definimos las $FM-$álgebras temporales y obtenemos una dualidad discreta para estas álgebras.

Definición 2.3.7. *Una estructura $(\mathcal{L}, G, H, \Diamond)$ es una $FM-$álgebra temporal (o $tFM-$álgebra) si:*

(i) $(\mathcal{L}, G, H)$ *es una $tM-$álgebra,*

(ii) $(\mathcal{L}, \Diamond)$ *es una $FM-$álgebra,*

(iii) *los operadores F y P definidos por $F(x) = \sim G(\sim x)$ y $P(x) = \sim H(\sim x)$ verifican las siguientes identidades: $F(\Diamond x) = \Diamond F(x)$ y $P(\Diamond x) = \Diamond P(x)$.*

Ejemplo 2.3.1. *Toda $tB-$álgebra es una $tFM-$álgebra.*

Ejemplo 2.3.2. *Toda álgebra de Łukasiewicz-Moisil 3-valuada temporal es una $tFM-$álgebra.*

Proposición 2.3.1. *Las siguientes propiedades se verifican en toda $tFM-$álgebra $(\mathscr{L}, G, H, \diamondsuit)$*

1. $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$,

2. $x \leq y$ *implica* $F(x) \leq F(y)$ *y* $P(x) \leq P(y)$,

3. $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

4. $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

5. $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

6. $G(x) \wedge F(y) \leq F(x \wedge y)$, $H(x) \wedge P(y) \leq P(x \wedge y)$,

7. $G(\square x) = \square G(x)$, $H(\square x) = \square H(x)$.

Dem. Es de rutina. ■

Definición 2.3.8. *Una estructura* $(X, \leq, g, R, R^{-1})$ *es un* $\mathcal{FM}-$*marco temporal (o* $\mathcal{TFM}-$*marco) si es un* $\mathcal{TM}-$*marco que satisface la condición* (L) *de la Definición 2.3.1.*

Definición 2.3.9. *El álgebra compleja de un* $\mathcal{TFM}-$*marco* $(X, \leq, g, R, R^{-1})$ *es una estructura* $(\mathscr{C}(X), \sim^c, \diamondsuit^c, G^c, H^c)$ *donde* $(\mathscr{C}(X), \sim^c, G^c, H^c)$ *es el álgebra compleja del* $\mathcal{TM}-$*marco* $(X, \leq, g, R, R^{-1})$ *y* $\diamondsuit^c$ *está definida como en Definición 2.3.2.*

Definición 2.3.10. *El marco canónico de una* $tFM-$*álgebra* $(\mathscr{L}, G, H, \diamondsuit)$ *es*

$$(\mathscr{X}(\mathscr{L}), \leq^c, g^c, R^c, Q^c)$$

donde $(\mathscr{X}(\mathscr{L}), \leq^c, g^c)$ *es el marco canónico del* $FM-$*reducto de* L *y* R^c, Q^c *son relaciones binarias sobre* $\mathscr{X}(L)$ *definidas como en Definición 2.2.6.*

Lema 2.3.8. *El marco canónico de una* $tFM-$*álgebra es un* $\mathcal{TFM}-$*marco.*

Dem. Es similar a la de la Proposición 2.1.7. ■

Lema 2.3.9. *El álgebra compleja de un $\mathcal{TFM}$−marco es una tFM−álgebra.*

Dem. Sólo probaremos (iii) de la Definición 2.3.7. En primer lugar probaremos que $F^c(g(U)) = g(F^c(U))$. Sea $x \in F^c(g(U))$. Entonces, existe $y \in g(U)$ tal que $(x, y) \in R$. De estas dos últimas afirmaciones podemos deducir que $g(y) \in U$ y $(g(x), g(y)) \in R$. Así, $R(g(x)) \cap U \neq \emptyset$, esto es, $g(x) \in F^c(U)$. Por lo tanto, $x \in g(F^c(U))$. Recíprocamente, sea $y \in g(F^c(U))$. Entonces, $g(y) \in F^c(U)$. De esta última afirmación, existe $z \in U$ tal que $(g(y), z) \in R$. De donde resulta que $(y, g(z)) \in R$. Así, $R(y) \cap g(U) \neq \emptyset$, esto es, $y \in F^c(g(U))$. Por otra parte, $F^c(\Diamond^c U) = F^c(U) \cup F^c(g(U)) = F^c(U) \cup g(F^c(U)) = \Diamond^c(F^c(U))$. De manera similar se puede probar que $P^c(\Diamond^c U) = \Diamond^c(P^c(U))$.

■

Luego, teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos obtener una dualidad discreta entre tFM−álgebras y $\mathcal{TFM}$−marcos.

Teorema 2.3.3.

(a) *Toda tFM−álgebra puede sumergirse en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathcal{TFM}$−marco se puede sumergir en el marco canónico de su álgebra compleja.*

Capítulo 3

Álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m$−valuadas temporales

3.1. $LM_{n\times m}$−álgebras

En esta subsección, recordaremos la definición de álgebra de Łukasiewicz –Moisil $n \times m$-valuada (o $LM_{n\times m}$−álgebras) y exhibiremos algunas construcciones que muestran la relación entre estas estructuras y las B−álgebras (ver [69, 65, 138, 139, 140, 141]).

3.1.1. El ejemplo de M. Fidel

En 1940, G. Moisil introdujo las álgebras de Łukasiewicz 3-valuadas y 4-valuadas con el propósito de obtener una contraparte algebraica de las correspondientes lógicas de Łukasiewicz. Un año más tarde, generalizó estas álgebras definiendo las álgebras de Łukasiewicz n-valuadas ([119]) y las estudió desde el punto de vista algebraico. Es bien sabido que estas álgebras no constituyen la contraparte algebraica de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz n−valuadas para $n \geq 5$ (ver [7, 33]). Este problema fue resuelto por R. Cignoli ([34, 35]) adicionando a las operaciones básicas de las álgebras de Łukasiewicz

$n-$valuadas ciertas operaciones binarias, y los sistemas así obtenidos fueron llamados álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas propias. Para una descripción general de los orígenes de las lógicas de Łukasiewicz multivaluadas y las álgebras de Łukasiewicz se remite al lector a [7, 36, 37].

Por otra parte, en 1975, Suchoń ([147]) definió las álgebras de Łukasiewicz matriciales con el propósito de generalizar las álgebras de Łukasiewicz n-valuadas sin negación. El único trabajo que conocemos que menciona al trabajo de Suchoń es el de Sanza mencionado anteriormente y una breve referencia a las mismas puede encontrarse en [7, pag. 121]. En 2000 Figallo y Sanza introdujeron las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n \times m-$valuadas (o $LM_{n\times m}-$álgebras). Las $LM_{n\times m}-$álgebras constituyen una extensión de aquellas dadas por Suchoń y en el caso $m = 2$ coinciden con las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n-$valuadas.

Con este propósito, de acuerdo a lo citado en [80], recordemos que la lógica de Belnap 4$-$valuada ([5], [4]) es un sistema lógico muy conocido por sus diversas aplicaciones, en particular en el estudio de bases de datos deductivas y programas lógicos distribuídos, manejando información que puede contener conflictos o lagunas. La idea de Belnap es simple: Enfrentados a una situación (para ejemplos ver los trabajos citados) donde se pueden tener varias partes conflictivas de información sobre la veracidad de una sentencia, o puede no tenerse información sobre ella, los clásicos valores de verdad (verdadero y falso) deben ser tratados como mutuamente independientes dando origen a 4 valores no clásicos epistémicos: 1 := verdadero y no falso; 0 := falso y no verdadero (estos valores se identifican en algún sentido con los clásicos); n := ni verdadero ni falso, el bien llamado valor indeterminado de algunas lógicas 3$-$valuadas y b := ambos verdadero y falso, también llamado sobredeterminado, correspondiente a una situación donde varias fuentes, probablemente independientes asignan un valor clásico diferente a una sentencia. Estos valores pueden ser ordenados por medio del retículo de la Figura 2.

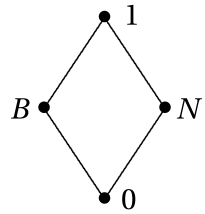


Figura 2

Además, sobre este retículo que denotaremos T_4, Belnap consideró una operación de negación $\neg$ definida por: $\neg 0 = 1$, $\neg N = N$, $\neg B = B$ y $\neg 1 = 0$.

En el ejemplo que desarrollaremos a continuación, el cuál de acuerdo a lo que me informó A. V. Figallo, fue elaborado por M. Fidel, y perfeccionado por C. Sanza, la que al utilizarlo al publicar su primer artículo sobre este tema, sin ninguna intencionalidad olvidó mencionar a Fidel, encontraremos la motivación necesaria para legitimar el estudio de las $LM_{n\times m}$−álgebras.

Entonces, teniendo en cuenta el sistema recién descripto, si consideramos el siguiente que lo amplía: Enfrentados a una situación como la analizada por Belnap, distinguiremos los valores de verdad clásicos de una sentencia, de la información que tenemos sobre la misma, la cual puede ser *positiva* o *negativa*. Entonces, consideraremos los valores de verdad clásicos 1 := verdadero; 0 := falso y los epistémicos, similares a los considerados por Belnap, a := toda la información es negativa y ninguna es positiva; b := alguna información es positiva y alguna es negativa; c := no existe información positiva ni negativa y d := toda la información es positiva y ninguna es negativa. Estos valores pueden ser ordenados desde el falso al verdadero por medio del retículo $S_{3\times 3}$ ilustrado en la Figura 3.

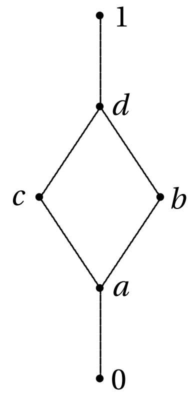


Figura 3

También definiremos sobre $S_{3\times 3}$ la negación de De Morgan $\sim$ indicada en la Tabla 1.

Por otra parte, en 1978 A. Monteiro extendió el álgebra base de Belnap $(T_4, \neg, 1)$, adicionando el operador modal $\Box$ definido por: $\Box 1 = 1$ y $\Box x = 0$, para todo $x \neq 1$. El álgebra así obtenida es la que genera las álgebras tetravalentes modales, las cuales fueron estudiadas por I. Loureiro en [108, 110] (ver también [55, 56]). Posteriormente, en [80], para una sentencia dada ϕ el operador $\Box$ fue interpretado como

$\Box\phi :=$ *la información disponible confirma que* ϕ *es verdadera.*

De manera similar a lo recién descripto sobre el álgebra base de Belnap, extendemos el álgebra $(S_{3\times 3}, \sim, 1)$ definiendo ciertos operadores de posibilidad σ_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$. Entonces para cada valor en $S_{3\times 3}$ tenemos la posibilidad de adoptar diferentes criterios de decisión, dependiendo de la información disponible de una sentencia. Así, para cada par i, j, $1 \leq i, j \leq 2$, el operador σ_{ij} es el definido en la Tabla 1.

x	$\sim x$	$\sigma_{11}x$	$\sigma_{12}x$	$\sigma_{21}x$	$\sigma_{22}x$
0	1	0	0	0	0
a	d	0	0	0	1
b	b	0	1	0	1
c	c	0	0	1	1
d	a	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1

Tabla 1

Con el propósito de dar una interpretación a cada uno de estos operadores, consideremos por ejemplo, a un directivo que debe tomar una decisión basado en la información que le brindan sus asesores. Así, este directivo puede ser considerado, de acuerdo a la decisión σ_{ij} que toma como: *conservador y desconfiado de todo* (σ_{11}); *conservador pero arriesgado* (σ_{12}); *arriesgado* (σ_{21}) o *excesivamente arriesgado* (σ_{22}).

Entonces, para cada sentencia ϕ, los operadores σ_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$ pueden ser interpretados como

$\sigma_{11}\phi :=$ *la información disponible confirma que* ϕ *es verdadera,*

$\sigma_{12}\phi :=$ *la información disponible permite considerar a* ϕ *como verdadera,*

$\sigma_{21}\phi :=$ *la información disponible no permite considerar a* ϕ *como falsa,*

$\sigma_{22}\phi :=$ *la información disponible no confirma que* ϕ *es falsa.*

Por lo tanto, en este contexto la sentencia

$\sigma_{11}\phi$ es verdadera sólo cuando ϕ es verdadera, mientras que es falsa en el resto de los casos,

$\sigma_{12}\phi$ es considerada verdadera cuando ϕ es verdadera o cuando existe alguna información positiva sobre ϕ, mientras que es falsa en el resto de los casos,

$\sigma_{21}\phi$ es considerada verdadera cuando ϕ es verdadera o cuando no existe información negativa sobre ϕ, mientras que es falsa en el resto de los casos,

$\sigma_{22}\phi$ es considerada verdadera en todos los casos excepto aquel en el cual ϕ es falso.

Es claro que solo σ_{11} da una información precisa sobre la veracidad de una sentencia mientras que el resto de los operadores provee una información en cierto modo *difusa*; así, podríamos hablar de *diferentes grados de veracidad*.

Por lo tanto, obtenemos la matriz característica

$$(S_{3\times 3}, \sim, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, 1)$$

de una lógica que llamaremos lógica de Suchoń $3\times 3-$valuada.

3.1.2. $LM_{n\times m}-$álgebras: definiciones y propiedades

Sean n y m enteros tales que $n \geq 2$ y $m \geq 2$. En lo que sigue denotaremos con $(n \times m)$ al producto cartesiano de los $n-1$ por el de los $m-1$ primeros naturales, esto es

$$(n \times m) = \{1, \ldots, n-1\} \times \{1, \ldots, m-1\}.$$

Definición 3.1.1. *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $n\times m-$valuada (o $LM_{n\times m}-$álgebra), es un álgebra*

$$\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$$

donde, el reducto $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra y $\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}$ es una familia de operadores unarios sobre L que verifican las siguientes condiciones:

(C1) $\sigma_{ij}(x \vee y) = \sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y$,

(C2) $\sigma_{ij}x \leq \sigma_{(i+1)j}x$, (C3) $\sigma_{ij}x \le \sigma_{i(j+1)}x$,

(C4) $\sigma_{ij}\sigma_{rs}x = \sigma_{rs}x$,

(C5) $\sigma_{ij}x = \sigma_{ij}y$ *para todo* $(i,j)\in(n\times m)$ *implica* $x = y$,

(C6) $\sigma_{ij}x \vee \sim\sigma_{ij}x = 1$,

(C7) $\sigma_{ij}(\sim x) = \sim\sigma_{(n-i)(m-j)}x$.

Observación 3.1.1. *Toda $LM_{n\times 2}$−álgebra es isomorfa a una LM_n−álgebra. Vale la pena señalar que las $LM_{n\times m}$−álgebras constituyen una generalización no trivial de la antes mencionada* (*ver* [140, Remark 3.1]).

Ejemplo 3.1.1. *Si $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ es una $LM_{n\times m}$−álgebra y X, es un conjunto no vacío entonces el conjunto L^X puede ser dotado de una estructura de $LM_{n\times m}$−álgebra:*

$$\mathscr{L}^X = \langle L^X, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, \mathbb{O}, \mathbb{I}\rangle,$$

donde las operaciones de $\mathscr{L}^X$ están definidas para todo $f, g \in L^X$, $x \in X$ y $(i,j) \in (n\times m)$ como sigue:

(a) $(f\vee g)(x) = f(x)\vee g(x)$, $(f\wedge g)(x) = f(x)\wedge g(x)$,

(b) $(\sim f)(x) = \sim f(x)$,

(c) $(\sigma_{ij}(f))(x) = \sigma_{ij}(f(x))$,

(d) $\mathbb{O}(x) = 0$, $\mathbb{I}(x) = 1$.

Definición 3.1.2. *Sea $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ una $LM_{n\times m}$−álgebra. Diremos que $\mathscr{L}$ es completa si el $L_{0,1}$−reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es completo.*

Definición 3.1.3. *Sea $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ una $LM_{n\times m}$−álgebra. Diremos que $\mathscr{L}$ es completamente crisipiana si para cada $(x_k)_{k\in K}$ ($x_k \in L$ para* *todo $k \in K$) tal que $\bigwedge\limits_{k\in K} x_k$ y $\bigvee\limits_{k\in K} x_k$ existen, las siguientes propiedades se satisfacen: para todo $(i,j)\in(n\times m)$,*

$$\sigma_{ij}\left(\bigwedge_{k\in K} x_k\right)=\bigwedge_{k\in K}\sigma_{ij}x_k,\ \sigma_{ij}\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)=\bigvee_{k\in K}\sigma_{ij}x_k.$$

Sea $\mathscr{L}=\langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ una $LM_{n\times m}-$álgebra. Denotaremos por $C(L)$ al conjunto de todos los elementos complementados de L. También, denotaremos por I_d, 0_L, 1_L a las funciones I_d, 0_L, $1_L : L \longrightarrow L$, definidas por $I_d(x)=x$, $0_L(x)=0$ y $1_L(x)=1$ para todo $x\in L$.

Los siguientes resultados serán necesarios para lo que sigue:

Lema 3.1.1. ([140]) $C(L)=\Big\{x\in L:\sigma_{ij}(x)=x,\text{para cada},(i,j)\in(n\times m)\Big\}$

Lema 3.1.2. *Si $\mathscr{L}=\langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ es una $LM_{n\times m}-$álgebra, entonces $C(\mathscr{L})=\langle C(L),\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$, con $\neg x=\sim\sigma_{ij}x$, para todo $(i,j)\in(n\times m)$ y $x\in C(L)$ es una $B-$álgebra.*

Definición 3.1.4. *Sean $\mathscr{L}=\langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ y $\mathscr{L}'=\langle L',\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ dos $LM_{n\times m}-$álgebras. Un morfismo de $LM_{n\times m}-$álgebras (o $LM_{n\times m}$ $-$ morfismo) es una función $f: L\longrightarrow L'$ tales que, para todo $x,y\in L$ y $(i,j)\in(n\times m)$ tenemos:*

(a) $f(0)=0$ *y* $f(1)=1$;

(b) $f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$ *y* $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$;

(c) $f(\sigma_{ij}(x))=\sigma_{ij}(f(x))$, *para todo* $(i,j)\in(n\times m)$;

(d) $f(\sim x)=\sim f(x)$.

Observación 3.1.2. *La última condición de la definición anterior puede obtenerse de las tres primeras.*

Observación 3.1.3. *Sea $f:\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{L}'$ un morfismo de $LM_{n\times m}$−álgebras. Entonces tenemos que: $x\in C(L)\Rightarrow f(x)\in C(L')$.*

De acuerdo con la observación previa podemos considerar la función $C(f)=f\mid_{C(L)}: C(L)\longrightarrow C(L')$. De donde resulta que $C(f)$ es un morfismo de B−álgebras.

Vamos a denotar por $\boldsymbol{\mathscr{L}\mathscr{M}}_{n\times m}$ a la categoría de las $LM_{n\times m}$−álgebras y sus correspondientes morfismos. Entonces, la asignación $\mathscr{L}\mapsto C(\mathscr{L})$, $f\mapsto C(f)$ define un funtor covariante

$$C:\boldsymbol{\mathscr{L}\mathscr{M}}_{n\times m}\longrightarrow\boldsymbol{\mathscr{B}},$$

donde $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ es la categoría de las B−álgebras con sus correspondientes morfismos.

El siguiente ejemplo, muestra que para cada B−álgebra existe una $LM_{n\times m}$ −álgebra asociada.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $\mathscr{B}=\langle B,\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ una B−álgebra. El conjunto*

$D(B)=B\uparrow^{(n\times m)}=\{f:(n\times m)\longrightarrow B$ tal que para arbitrarios i,j si $r\leq s$, entonces $f(r,j)\leq f(s,j)$ y $f(i,r)\leq f(i,s)\}$*; de todas las funciones crecientes en cada componente de $(n\times m)$ en B puede ser dotada de una estructura de $LM_{n\times m}$−álgebra*

$$\mathscr{D}(\mathscr{B})=\langle B\uparrow^{(n\times m)},\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0_{D(B)},1_{D(B)}\rangle$$

donde $0_{D(B)},1_{D(B)}:(n\times m)\longrightarrow B$ están definidas por $0_{D(B)}(i,j)=0$ y $1_{D(B)}(i,j)=1$, para cada $(i,j)\in(n\times m)$, las operaciones del retículo $\langle B\uparrow^{(n\times m)},\vee,\wedge\rangle$ están definidas puntualmente y

(a) *$(\sigma_{ij}f)(r,s)=f(i,j)$, para todo $f\in B\uparrow^{(n\times m)}$ y $(i,j),(r,s)\in(n\times m)$,*

(b) *$(\sim f)(i,j)=\neg f(n-i,m-j)$, donde $\neg x$ denota el complemento Booleano de x, para todo $f\in B\uparrow^{(n\times m)}$ y $(i,j)\in(n\times m)$.*

Observación 3.1.4. ([139]) *La $LM_{n\times m}-$álgebra $D(\mathbf{2}) = \mathbf{2}\uparrow^{(n\times m)}$ es simple, completa y completamente crisipiana.*

Observación 3.1.5. ([139]) *Identificando el conjunto $(n\times 2)$ con $\mathbf{n} = \{1,\cdots,n-1\}$ tenemos que $\tau_{Ł_n} : Ł_n \longrightarrow \mathbf{2}\uparrow^{\mathbf{n}}$ es un isomorfismo el cual en este caso está definido por $\tau_{Ł_n}(\frac{j}{n-1}) = f_j$ donde $f_j(i) = 0$ si $i + j < n$ y $f_j(i) = 1$ en otro caso.*

Sean $\mathscr{B} = \langle B,\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ y $\mathscr{B}' = \langle B',\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ dos $B-$álgebras y sean $D(\mathscr{B})$ y $D(\mathscr{B}')$ las correspondientes $LM_{n\times m}-$álgebras asociadas. Para cada morfismo de $B-$álgebras, $g : B \longrightarrow B'$ definimos la función $D(g) : D(\mathscr{B}) \longrightarrow D(\mathscr{B}')$ de la siguiente manera:

$$(D(g))(u) = g\circ u, \text{ para todo } u \in D(B).$$

Entonces la función $D(g) : D(B) \longrightarrow D(B')$ es un morfismo de $LM_{n\times m}-$álgebras. Luego, la asignación $\mathscr{B} \mapsto D(\mathscr{B})$, $g \mapsto D(g)$ define un funtor covariante

$$D : \boldsymbol{\mathscr{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathscr{L}\mathscr{M}}_{n\times m}.$$

Observaciones 3.1.1. *El funtor D es un adjunto a derecha de C, C es fiel y D es pleno.*

Observaciones 3.1.2. *Los funtores adjuntos C y D establecen una fuerte relación entre las categorías $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ y $\boldsymbol{\mathscr{L}\mathscr{M}}_{n\times m}$. Ellos permiten transferir algunas propiedades de las $B-$álgebras a las $LM_{n\times m}-$álgebras.*

Definición 3.1.5. *Sea $\mathscr{L} = \langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ una $LM_{n\times m}-$álgebra. Diremos que un conjunto $M \subseteq L$ es un $n\times m$-filtro de $\mathscr{L}$ si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *$x, y \in M$ implica $x\wedge y \in M$,*

(b) *$x \in M$, $x \le y$ implica $y \in M$,*

(c) *$x \in M$ implica $\sigma_{11}x \in M$.*

3.1.3. La implicación de Filipoiu en las $LM_{n\times m}$−álgebras

En esta subsección introduciremos nuevos conectivos de implicación y probaremos algunas propiedades básicas de estos conectivos.

Definición 3.1.6. *Sea $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ una $LM_{n\times m}$−álgebra y $(i,j)\in(n\times m)$. Consideremos la operación binaria $\underset{ij}{\hookrightarrow}$, que llamamos implicación de Filipoiu, sobre L definida por*

$$x \underset{ij}{\hookrightarrow} y = \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y, \textit{ para todo } x, y \in L.$$

Observación 3.1.6. *Si $x, y \in C(L)$, entonces $x \underset{ij}{\hookrightarrow} y = \neg x \vee y$, para cada $(i,j)\in(n\times m)$.*

Proposición 3.1.1. *Para cada $(i,j)\in(n\times m)$, la implicación $\underset{ij}{\hookrightarrow}$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow} x) = 1$,

(b) $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow}(x\wedge y)) = 1$,

(c) $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = (x \underset{ij}{\hookrightarrow} y)\underset{ij}{\hookrightarrow}(x \underset{ij}{\hookrightarrow} z)$,

(d) $(x\wedge y)\underset{ij}{\hookrightarrow} x = 1$, $(x\wedge y)\underset{ij}{\hookrightarrow} y = 1$,

(e) $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(x\vee y) = 1$, $y \underset{ij}{\hookrightarrow}(x\vee y) = 1$,

(f) $x \leq y$ si, y sólo si, $x \underset{ij}{\hookrightarrow} y = 1$, para todo $(i,j)\in(n\times m)$,

(g) $x \underset{ij}{\hookrightarrow} 1 = 1$,

(h) $(x \underset{ij}{\hookrightarrow} y)\wedge(x \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y\wedge z)$,

(i) $\sigma_{rs}x \underset{ij}{\hookrightarrow} \sigma_{rs}y = x \underset{rs}{\hookrightarrow} y$, para todo $(r,s)\in(n\times m)$,

(j) $\sigma_{rs}x \underset{ij}{\hookrightarrow} \sigma_{rs}x = 1$,

(k) $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = (x\wedge y)\underset{ij}{\hookrightarrow} z$,

(l) Si $x \leq y \underset{ij}{\hookrightarrow} z$ para todo $(i,j) \in (n \times m)$, entonces $x \wedge y \leq z$.

Dem.

(a) $$\begin{aligned} x \underset{ij}{\hookrightarrow} (y \underset{ij}{\hookrightarrow} x) &= \sim \sigma_{ij} x \vee \sigma_{ij} (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} x) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sigma_{ij} \sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} \sigma_{ij} x) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} x) \\ &= (\sim \sigma_{ij} x \vee \sigma_{ij} x) \vee \sim \sigma_{ij} y \\ &= 1 \vee \sim \sigma_{ij} y \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x \underset{ij}{\hookrightarrow} (y \underset{ij}{\hookrightarrow} (x \wedge y)) &= \sim \sigma_{ij} x \vee \sigma_{ij} (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} (x \wedge y)) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} (x \wedge y)) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sim \sigma_{ij} y \vee (\sigma_{ij} x \wedge \sigma_{ij} y)) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} x) \wedge (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} y) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} x) \wedge 1 \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} x) \\ &= (\sim \sigma_{ij} x \vee \sigma_{ij} x) \vee \sim \sigma_{ij} y \\ &= 1 \vee \sim \sigma_{ij} y \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x \underset{ij}{\hookrightarrow} (y \underset{ij}{\hookrightarrow} z) &= \sim \sigma_{ij} x \vee \sigma_{ij} (\sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} z) \\ &= \sim \sigma_{ij} x \vee \sim \sigma_{ij} y \vee \sigma_{ij} z. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(x \underset{ij}{\hookrightarrow} y)\underset{ij}{\hookrightarrow}(x \underset{ij}{\hookrightarrow} z) &= \sim\sigma_{ij}(\sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y) \vee \sigma_{ij}(\sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}z)\\ &= (\sigma_{ij}x \wedge \sim\sigma_{ij}y) \vee \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}z\\ &= \sim\sigma_{ij}x \vee \sim\sigma_{ij}y \vee \sigma_{ij}z\end{aligned}$$

De donde resulta que: $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = (x \underset{ij}{\hookrightarrow} y)\underset{ij}{\hookrightarrow}(x \underset{ij}{\hookrightarrow} z)$.

(d) $$\begin{aligned}(x \wedge y)\underset{ij}{\hookrightarrow} x &= \sim\sigma_{ij}(x \wedge y) \vee \sigma_{ij}x\\ &= (\sim\sigma_{ijx} \vee \sim\sigma_{ij}y) \vee \sigma_{ij}x\\ &= 1.\end{aligned}$$

De manera similar se puede probar que $(x \wedge y)\underset{ij}{\hookrightarrow} y = 1$.

(e) $$\begin{aligned}x \underset{ij}{\hookrightarrow}(x \vee y) &= \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}(x \vee y)\\ &= \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y\\ &= 1,\end{aligned}$$

De manera similar se puede probar que $y \underset{ij}{\hookrightarrow}(x \vee y) = 1$.

(f) ($\Rightarrow$) Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ y $(i,j) \in (n \times m)$. Entonces tenemos que: $x \vee y = y$, así $x \underset{ij}{\hookrightarrow} y = \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y = \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}(x \vee y) = \sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y = 1$.

($\Leftarrow$) Sean $x, y \in L$. Dado que $x \underset{ij}{\hookrightarrow} y = 1$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$ resulta que $\sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y = 1$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$.

Dado que en toda $B-$álgebra tenemos que $x \leq y$ si, y sólo si, $\neg x \vee y = 1$, obtenemos que $\sigma_{ij}x \leq \sigma_{ij}y$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$. Luego, de (C5) tenemos que $x \leq y$.

(g) Es inmediata de (f), pues $x \leq 1$.

(h) $(x \underset{ij}{\hookrightarrow} y) \wedge (x \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = (\sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}y) \wedge (\sim\sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}z)$

$$=\sim \sigma_{ij}x \vee (\sigma_{ij}y \wedge \sigma_{ij}z)$$

$$=\sim \sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}(y \wedge z)$$

$$= x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \wedge z),$$

(k) $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = \sim \sigma_{ij}x \vee \sigma_{ij}(\sim \sigma_{ij}y \vee \sigma_{ij}z)$

$$=\sim \sigma_{ij}x \vee \sim \sigma_{ij}y \vee \sigma_{ij}z$$

$$=\sim (\sigma_{ij}x \wedge \sigma_{ij}y) \vee \sigma_{ij}z$$

$$=\sim \sigma_{ij}(x \wedge y) \vee \sigma_{ij}z$$

$$= (x \wedge y) \underset{ij}{\hookrightarrow} z$$

(l) Sean $x, y, z \in L$ tales que $x \leq y \underset{ij}{\hookrightarrow} z$ para todo $(i, j) \in (n \times m)$.

Por (f) obtenemos que $x \underset{ij}{\hookrightarrow}(y \underset{ij}{\hookrightarrow} z) = 1$ para todo $(i, j) \in (n \times m)$. Luego, usando (k) y (f) resulta que $(x \wedge y) \leq z$

■

3.1.4. $\boldsymbol{mLM_{n\times m}}$−álgebras

En 2007, Figallo y Sanza en [64] (ver también [69]) introdujeron las álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n \times m$−valuadas monádicas del siguiente modo:

Definición 3.1.7. *Un álgebra de Łukasiewicz–Moisil $n \times m$−valuada monádica (o $mLM_{n\times m}$−álgebra) es un par $(\mathcal{L}, \exists)$ tal que $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ es una $LM_{n\times m}$−álgebra y $\exists$ es una operación unaria sobre L que verifica* (E1)*,* (E2)*,* (E3) *y la condición adicional:*

(E13) $\sigma_{ij}(\exists x) = \exists(\sigma_{ij}x)$, *para todo* $(i, j) \in (n \times m)$.

Estas álgebras para el caso $m = 2$ coinciden con las mLM_n−álgebras introducidas por Georgescu y Vraciu en [88] (ver también [61, 62]).

3.1.5. $pLM_{n\times m}$−álgebras

En esta subsección definiremos las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n\times m$−valuadas poliádicas (o $pLM_{n\times m}$−álgebras, para abreviar). Estas álgebras son una extensión natural de las B−álgebras poliádicas y una generalización natural de las LM_n−álgebras poliádicas. También, en esta subsección probaremos un teorema de representación para las $pLM_{n\times m}$−álgebras.

Definición 3.1.8. *Una $LM_{n\times m}$−álgebra poliádica (o $pLM_{n\times m}$−álgebra) es una estructura $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ donde $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ es una $LM_{n\times m}$ −álgebra, U es un conjunto no vacío, S es un aplicación de U^U en el conjunto de todos los endomofismos de L y $\exists$ es una aplicación de $\mathscr{P}(U)$ en L^L, tal que se satisfacen los siguientes axiomas:*

(i) $S(1_U) = 1_L$,

(ii) $S(\rho\circ\tau) = S(\rho)\circ S(\tau)$, *para cada* $\rho,\tau\in U^U$,

(iii) $\exists(\emptyset) = 1_L$,

(iv) $\exists(J\cup J') = \exists(J)\circ\exists(J')$, *para cada* $J, J'\subseteq U$,

(v) $S(\rho)\circ\exists(J) = S(\tau)\circ\exists(J)$, *para cada* $J\subseteq U$ *y para cada* $\rho,\tau\in U^U$ *tal que* $\rho\,|_{U\setminus J} = \tau\,|_{U\setminus J}$,

(vi) $\exists(J)\circ S(\rho) = S(\rho)\circ\exists(\rho^{-1}(J))$ *para cada* $J\subseteq U$ *y para cada* $\rho\in U^U$ *tal que* $\rho\,|_{\rho^{-1}(J)}$ *es inyectiva.*

(vii) *Para cada* $J\subseteq U$, *el par* $(\mathscr{L}, \exists(J))$ *es una* $mLM_{n\times m}$*−álgebra.*

Definición 3.1.9. *Sean $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ y $(\mathscr{L}', U, S, \exists)$ dos $pLM_{n\times m}$−álgebras. Un morfismo de $pLM_{n\times m}$−álgebras (o $pLM_{n\times m}$−morfismo) es un $LM_{n\times m}$−morfismo $f: L \longrightarrow L'$ tal que $f\circ S(\rho) = S(\rho)\circ f$ y $f\circ\exists(J) = \exists(J)\circ f$, para todo $\rho\in U^U$ y $J\subseteq U$.*

Observación 3.1.7. *Si* $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ *es una* $pLM_{n\times m}-$*álgebra, entonces se puede dotar a* $C(L)$ *de una estructura de* $pB-$*álgebra. Todo* $pLM_{n\times m}-$*morfismo* $f : (\mathscr{L}, U, S, \exists) \longrightarrow (\mathscr{L}', U, S, \exists)$ *induce un* $pB-$*morfismo*

$$C(f) : (C(L), U, S, \exists) \longrightarrow (C(L'), U, S, \exists).$$

De esta manera hemos definido un funtor de la categoría $\boldsymbol{\mathscr{P}\mathscr{L}\mathscr{M}_{n\times m}}$ *de las* $LM_{n\times m}-$*álgebras poliádicas y sus correspondientes morfismos en la categoría* $\mathscr{P}\mathscr{B}$ *de las álgebras de Boole poliádicas con sus correspondientes morfismos.*

Definición 3.1.10. *Sea* $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ *una* $pLM_{n\times m}-$*álgebra y* $a \in L$*. Un subconjunto* J *de* U *es un soporte de* a *si* $\exists(U \setminus J)a = a$*. Una* $pLM_{n\times m}-$*álgebra es localmente finita si cada elemento tiene soporte finito. El grado de* $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ *es el cardinal de* U*.*

Lema 3.1.3. *Sea* $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ *una* $pLM_{n\times m}-$*álgebra,* $a \in L$ *y* $J \subseteq U$*. Si el grado de* L *es mayor o igual que* 2*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) J *es el soporte de* a*,*

(ii) $\forall(U \setminus J)a = a$*,*

(iii) $\rho \mid_{U\setminus J} = \tau \mid_{U\setminus J}$ *implica* $S(\rho)a = S(\tau)a$*,*

(iv) $\rho \mid_{U\setminus J} = 1_{U\setminus J}$ *implica* $S(\rho)a = a$*,*

(v) *Para cada* $(i, j) \in (n \times m)$*,* J *es el soporte de* $\sigma_{ij}(a)$ *en la* $pB-$*álgebra* $C(L)$*.*

Dem. Es de rutina. ■

En el resto de esta subsección, por $pLM_{n\times m}-$álgebra entenderemos a una $pLM_{n\times m}$-álgebra finita de grado infinito.

Ejemplo 3.1.3. *Sea* $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ *una* $LM_{n\times m}-$*álgebra completa y completamente crisipiana,* U *un conjunto infinito y* $X \neq \emptyset$*. El conjunto* $L^{(X^U)}$ *de todas las funciones de* X^U *en* L *tiene una estructura natural de* $LM_{n\times m}-$

álgebra. Para cada $J \subseteq U$ y $\tau \in U^U$ definimos dos operaciones unarias $\exists(J)$ y $S(\tau)$ sobre $L^{(X^U)}$ por:

- $\exists(J)(p(x)) = \bigvee\{p(y) \mid y \in X^U, y\mid_{U\setminus J} = x\mid_{U\setminus J}\}$,
- $S(\tau)(p(x)) = p(x \circ \tau)$,

para cada $p : X^U \longrightarrow L$, $\tau \in U^U$ y $J \subseteq U$. Entonces se puede probar que $L^{(X^U)}$ es una $pLM_{n\times m}$−álgebra.

Definición 3.1.11. *Diremos que una $pLM_{n\times m}$−subálgebra de $L^{(X^U)}$ es una $pLM_{n\times m}$ −álgebra funcional. Denotaremos por $\mathbb{F}(X^U, L)$ al conjunto de todas las $pLM_{n\times m}$−álgebras funcionales de $L^{(X^U)}$ que tienen soporte finito.*

Observaciones 3.1.3. *$\mathbb{F}(X^U, L)$ es localmente finita.*

Proposición 3.1.2. *Sea $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ una $pLM_{n\times m}$−subálgebra completamente crisipiana. Para cada $a \in L$, $p \in U^U$ y $J \subseteq U$ se satisface la siguiente igualdad:*

$$S(\tau)\exists(J)a = \bigvee\{S(\rho)a \mid \rho\mid_{U\setminus J} = \tau\mid_{U\setminus J}\}$$

Dem. Teniendo en cuenta los resultados de [7, Proposition 4.24, pag.50] tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}S(\tau)\exists(J)a &= \exists(J)S(\tau)\sigma_{ij}a \\
&= \bigvee\{S(\rho)\sigma_{ij}a \mid \rho\mid_{U\setminus J} = \tau\mid_{U\setminus J}\} \\
&= \bigvee\{\sigma_{ij}S(\rho)a \mid \rho\mid_{U\setminus J} = \tau\mid_{U\setminus J}\} \\
&= \sigma_{ij}\left(\bigvee\{S(\rho)a \mid \rho\mid_{U\setminus J} = \tau\mid_{U\setminus J}\}\right)
\end{aligned}$$

para todo $(i, j) \in (n \times m)$. Entonces, aplicando (C5) tenemos la igualdad requerida.

■

Observación 3.1.8. *Sea $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ una $pLM_{n\times m}-$álgebra. Consideremos el conjunto*

$$E_o(L) = \{a \in L \mid \emptyset \text{ es soporte de } a\ \}.$$

Entonces, se puede probar que $E_o(L)$ es una $LM_{n\times m}-$subálgebra de L.

Teorema 3.1.1. *Sea $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ una $pLM_{n\times m}$-álgebra y M un $n \times m$-filtro propio de $E_o(L)$. Entonces existe un conjunto no vacío X y un $pLM_{n\times m}-$morfismo*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathbb{F}(X^U, D(\mathbf{2}))$$

tal que $\Phi(a) = 1$, para cada $a \in M$.

Dem. Consideremos la $pB-$álgebra $(C(L), U, S, \exists)$ y denotemos por $E(L)$ a la $pB-$álgebra de todos los elementos de $C(L)$ que tienen soporte $\emptyset$ en $C(L)$, es decir, $E(L) = \{a \in C(L) : \emptyset \text{ es soporte de } a\}$. Es claro que $E(L) = E_o(L) \cap C(L)$ y que $M_o = M \cap C(L)$ es un filtro propio de la $B-$álgebra $C(L)$. Luego, por [7, Theorem 4.28, pag. 51] existe un conjunto no vacío X y un morfismo de $B-$álgebras poliádicas

$$\Psi : C(L) \longrightarrow \mathbb{F}(X^U, \mathbf{2})$$

tal que $\Psi(a) = 1$ para cada $a \in M_o$.

Definimos la aplicación $\Phi : L \longrightarrow \mathbb{F}(X^U, D(\mathbf{2}))$ por

$$\Phi(a)(x)(i,j) = \Psi(\sigma_{ij} a)(x),$$

para todo $a \in L$, $x \in X^U$ y $(i,j) \in (n \times m)$. No es difícil probar que Φ es un morfismo de $LM_{n\times m}-$álgebras. Por otra parte, para cada $a \in L$, $J \subseteq U$, $\rho \in U^U$, $x \in X^U$ y $(i,j) \in (n \times m)$ tenemos:

(a) $$\begin{aligned} \Phi(\exists(J)a)(x)(i,j) &= \Psi(\sigma_{ij}\exists(J)a)(x) \\ &= \Psi(\exists(J)\sigma_{ij} a)(x) \\ &= \exists(J)\Psi(\sigma_{ij} a)(x) \end{aligned}$$

$$= \bigvee\{\Psi(\sigma_{ij}a)(y) \mid y\,|_{U\setminus J} = x\,|_{U\setminus J}\}$$

$$= \bigvee\{\Phi(a)(y) \mid y\,|_{U\setminus J} = x\,|_{U\setminus J}\}$$

$$= (\exists(J)\Phi(a))(x)(i,j).$$

(b) $\Phi(S(\tau)a)(x)(i,j) = \Psi(\sigma_{ij}S(\tau)a)(x)$

$$= \Psi(S(\tau)\sigma_{ij}a)(x)$$

$$= (S(\tau)\Psi(\sigma_{ij}a))(x)$$

$$= \Psi(\sigma_{ij}a)(x\tau)$$

$$= \Phi(a)(x\tau)(i,j)$$

$$= (S(\tau)\Phi(a))(x)(i,j),$$

De (a) y (b) tenemos que Φ es un $pLM_{n\times m}$−morfismo. Si $a \in M$ entonces $\sigma_{ij}a \in M_o$, por lo tanto $\Psi(\sigma_{ij}a) = 1$ para cada $(i,j) \in (n\times m)$. Así, $\Phi(a)(x)(i,j) = \Psi(\sigma_{ij}a)(x) = 1$ para cada $x \in X^U$ y $(i,j) \in (n\times m)$.

■

3.2. $t_d LM_{n\times m}$−álgebras

En esta sección definimos las $LM_{n\times m}$−álgebras temporales débiles (o $t_d LM_{n\times m}$−álgebras) como una generalización común de las B−álgebras temporales débiles y las LM_n−álgebras temporales débiles.

3.2.1. $t_d LM_{n\times m}$−álgebras: definiciones y propiedades

Definición 3.2.1. *Una $LM_{n\times m}$−álgebra temporal débil (o $t_d LM_{n\times m}$−álgebra) es una terna $(\mathscr{L}, G, H)$ tal que $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ es una $LM_{n\times m}$-álgebra y G, H son dos operadores unarios sobre L tales que, para todo $x, y \in L$, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(tC1) $G(1)=1$, $H(1)=1$,

(tC2) $G(x\wedge y)=G(x)\wedge G(y)$, $H(x\wedge y)=H(x)\wedge H(y)$,

(tC3) $G(\sigma_{ij}(x))=\sigma_{ij}(G(x))$, $H(\sigma_{ij}(x))=\sigma_{ij}(H(x))$, *para todo* $(i,j)\in(n\times m)$.

Ahora consideremos los operadores F y P de la siguiente manera:

Definición 3.2.2. *Sea* $(\mathscr{L},G,H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}-$*álgebra. Para cada* $x\in L$*, los operadores unarios* P *y* F *están definidos para todo* $x\in L$ *por:*

$$F(x)=\sim G(\sim x),\ P(x)=\sim H(\sim x).$$

En la siguiente proposición enumeraremos varias propiedades de las $t_d LM_{n\times m}-$álgebras.

Proposición 3.2.1. *Sea* $(\mathscr{L},G,H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*-álgebra. Las siguientes propiedades se satisfacen, para todo* $x,y\in L$ *y* $(i,j)\in(n\times m)$:

1. $P(0)=0$, $F(0)=0$,
2. $x\leq y$ *implica* $G(x)\leq G(y)$ *y* $H(x)\leq H(y)$,
3. $x\leq y$ *implica* $P(x)\leq P(y)$ *y* $F(x)\leq F(y)$,
4. $P(x\vee y)=P(x)\vee P(y)$, $F(x\vee y)=F(x)\vee F(y)$,
5. $G(x)\vee G(y)\leq G(x\vee y)$, $H(x)\vee H(y)\leq H(x\vee y)$,
6. $F(x\wedge y)\leq F(x)\wedge F(y)$, $P(x\wedge y)\leq P(x)\wedge P(y)$,
7. $G(x\vee y)\leq F(x)\vee G(y)$, $H(x\vee y)\leq P(x)\vee H(y)$,
8. $G(x)\wedge F(y)\leq F(x\wedge y)$, $H(x)\wedge P(y)\leq P(x\wedge y)$.

Lema 3.2.1. *Sea* $(\mathscr{L},G,H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*-álgebra. Si* $x\in C(L)$ *entonces* $G(x)\in C(L)$ *y* $H(x)\in C(L)$.

Dem. Sea $x \in C(L)$. Entonces, $\sigma_{ij} x = x$, para cada $(i,j) \in (n \times m)$. Luego, de (tC3), tenemos que: $\sigma_{ij} G(x) = G(\sigma_{ij} x) = G(x)$, por lo tanto $G(x) \in C(L)$. De manera similar se prueba que $H(x) \in C(L)$. ■

Definición 3.2.3. *De acuerdo con el lema previo podemos considerar los operadores unarios $C(G) : C(L) \longrightarrow C(L)$ y $C(H) : C(L) \longrightarrow C(L)$, definidos por $C(G) = G\mid_{C(L)}$, $C(H) = H\mid_{C(L)}$.*

Proposición 3.2.2. *Si $(\mathscr{L}, G, H)$ es una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra, entonces*

$$(C(\mathscr{L}), C(G), C(H))$$

es una $t_d B-$álgebra.

Dem. Es inmediata del Lema 3.2.1 y la Definición 3.2.3. ■

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ una $LM_{n\times m}$-álgebra y G, H dos operaciones unarias sobre L que satisfacen las condiciones* (tC1) *y* (tC3). *Entonces, la condición* (tC2) *es equivalente a:*

(tC2)* $G(x \underset{ij}{\hookrightarrow} y) \leq G(x) \underset{ij}{\hookrightarrow} G(y)$, $H(x \underset{ij}{\hookrightarrow} y) \leq H(x) \underset{ij}{\hookrightarrow} G(y)$, *para todo* $(i,j) \in (n \times m)$.

Dem.

(tC2) $\Rightarrow$ (tC2)*. Sea $(i,j) \in (n\times m)$. Entonces $G(a \underset{i,j}{\hookrightarrow} b) \in C(L)$ y $G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b) \in C(L)$, así $G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b)$ tiene complemento $\neg(G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b)) = \sim \sigma_{rs}(G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b))$ para todo $(r,s) \in (n\times m)$. Entonces, tenemos que: $G(a \underset{i,j}{\hookrightarrow} b) \wedge \sim \sigma_{rs}(G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b)) = G(\sim \sigma_{ij}(a) \vee \sigma_{ij}(b)) \wedge \sim \sigma_{rs}(\sim \sigma_{ij}(G(a)) \vee \sigma_{ij}(G(b))) = G(\sim \sigma_{ij}(a) \vee \sigma_{ij}(b)) \wedge \sigma_{ij}(G(a)) \wedge \sim \sigma_{ij} G(b) = G(\sim \sigma_{ij}(a) \vee \sigma_{ij}(b)) \wedge G\sigma_{ij}(a) \wedge \sim \sigma_{ij} G(b) = G((\sim \sigma_{ij}(a) \vee \sigma_{ij}(b)) \wedge \sigma_{ij}(a)) \wedge \sim \sigma_{ij} G(b) = G(\sigma_{ij}(a \wedge b)) \wedge \sim \sigma_{ij} G(b) = \sigma_{ij} G(a \wedge b) \wedge \sim \sigma_{ij} G(b) \leq \sigma_{ij} G(b) \wedge \sim \sigma_{ij} G(b) = 0$, así $G(a \underset{i,j}{\hookrightarrow} b) \wedge \sim \sigma_{rs}(G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b)) = 0$. De donde resulta que $G(a \underset{i,j}{\hookrightarrow} b) \leq G(a) \underset{i,j}{\hookrightarrow} G(b)$.

(tC2)* $\Rightarrow$ (tC2). Sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Por (f) de la Proposición 3.1.1 obtenemos que $a \underset{i,j}{\hookrightarrow} b = 1$ para todo $(i,j) \in (n \times m)$, así $1 = G(1) = G(a \underset{i,j}{\hookrightarrow} b) \leq$

$G(a)\underset{i,j}{\hookrightarrow}G(b)$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$. Usando nuevamente (f) tenemos que $G(a)\leq G(b)$, por lo tanto G es creciente. De donde se sigue que $G(a\wedge b)\leq G(a)\wedge G(b)$. De (b) y (f) de la Proposición 3.1.1 obtenemos que $a\leq b\underset{i,j}{\hookrightarrow}(a\wedge b)$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$, entonces $G(a)\leq G(b\underset{i,j}{\hookrightarrow}(a\wedge b))\leq G(b)\underset{i,j}{\hookrightarrow}G(a\wedge b)$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$. Por (l) de la Proposición 3.1.1 resulta que $G(a)\wedge G(b)\leq G(a\wedge b)$. Por lo tanto, $G(a\wedge b)=G(a)\wedge G(b)$.

■

Por lo tanto, si en la Definición 3.2.1 reemplazamos el axioma (tC2) por el (tC2)*, obtenemos una definición equivalente de $t_d LM_{n\times m}$-álgebra.

3.2.2. $t_d LM_{n\times m}$−álgebras especiales

Basados en la noción de marco débil, vamos a dar un ejemplo importante de $t_d LM_{n\times m}$-álgebra.

Sea $\mathscr{L}=\langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ una $LM_{n\times m}$-álgebra completa y completamente crisipiana.

Vamos a considerar un marco débil (X,R,Q). Definimos sobre L^X las operaciones $\vee,\wedge,\sim,\sigma_{ij}$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{O}$ como en el Ejemplo 3.1.1 y las operaciones unarias adicionales G^* y H^* como sigue:

$$(G^*(p))(x)=\bigwedge\{p(y)\mid y\in X, xRy\},\ (H^*(p))(x)=\bigwedge\{p(y)\mid y\in X, xQy\},$$

para todo $p\in L^X$, $x\in X$.

Proposición 3.2.4. *Para todo marco débil (X,R,Q), $(\mathscr{L}^X,G^*,H^*)$ es una $t_d LM_{n\times m}$ −álgebra.*

Dem. Por el Ejemplo 3.1.1 tenemos que $\mathscr{L}^X$ es una $LM_{n\times m}$−álgebra. Ahora, vamos a probar que G^* y H^* satisfacen las propiedades (tC1)-(tC3).

(tC1) Sea $x\in X$. Entonces,

$$(G^*(\mathbb{I}))(x)=\bigwedge\{\mathbb{I}(y)\mid y\in X, xRy\}$$

$$= \bigwedge\{1 \mid y \in X, xRy\} = 1.$$

(tC2) Sean $f, g \in L^X$ y $x \in X$. Entonces,

$$\begin{aligned}(G^*(f \wedge g))(x) &= \bigwedge\{(f \wedge g)(y) \mid y \in X, xRy\}\\ &= \left(\bigwedge\{f(y) \mid y \in X, xRy\}\right) \wedge \left(\bigwedge\{g(y) \mid y \in X, xRy\}\right)\\ &= (G^*(f))(x) \wedge (G^*(g))(x)\\ &= (G^*(f) \wedge G^*(g))(x).\end{aligned}$$

(tC3) Sean $f, g \in L^X$, $x \in X$, $(i, j) \in (n \times m)$. Dado que $\mathscr{L}$ es completamente crisipiana resulta que:

$$\begin{aligned}(G^*(\sigma_{ij}(f)))(x) &= \bigwedge\{\sigma_{ij}(f)(y) \mid y \in X, xRy\},\\ &= \bigwedge\{\sigma_{ij}(f(y)) \mid y \in X, xRy\},\\ &= \sigma_{ij}\left(\bigwedge\{f(y) \mid y \in X, xRy\}\right),\\ &= \sigma_{ij}(G^*(f)(x)),\\ &= (\sigma_{ij}(G^*(f)))(x).\end{aligned}$$

■

Observación 3.2.1. *En la $t_d LM_{n\times m}$−álgebra $(\mathscr{L}^X, G^*, H^*)$, de la proposición anterior, se puede probar que los operadores temporales P^* y F^* están definidos de la siguiente forma: para cada $p \in L^X$, $x \in X$,*

$$(P^*(p))(x) = \bigvee\{p(y) \mid y \in X, yRx\}, (F^*(p))(x) = \bigvee\{p(y) \mid y \in X, yQx\},$$

Definición 3.2.4. *Sea $(\mathscr{L}, G, H)$ y $(\mathscr{L}', G', H')$ dos $t_d LM_{n\times m}$−álgebras. Una función $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo de $t_d LM_{n\times m}$−álgebras (o $t_d LM_{n\times m}$−morfismo) si es un morfismo de $LM_{n\times m}$−álgebras, que satisface la propiedad adicional, para todo $x, y \in L$:*

(e) $f(G(x)) = G'(f(x))$, $f(H(x)) = H'(f(x).)$

Observación 3.2.2. *Sea* $f : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}'$ *un morfismo de* $t_d LM_{n\times m}$*−álgebras. Entonces, usando* (C5)*, podemos probar que* $x \in C(L) \Rightarrow f(x) \in C(L')$.

De acuerdo con la observación previa podemos considerar la función $C(f) = f\mid_{C(L)}: C(L) \longrightarrow C(L')$. De donde resulta que $C(f)$ es un morfismo de $t_d B$−álgebras.

Vamos a denotar por $\mathscr{WTLM}_{n\times m}$ a la categoría de las $LM_{n\times m}$−álgebras temporales débiles y sus correspondientes morfismos. Entonces, la asignación $\mathscr{L} \mapsto C(\mathscr{L})$, $f \mapsto C(f)$ define un funtor covariante $C : \mathscr{WTLM}_{n\times m} \longrightarrow \mathscr{WTB}$, donde $\mathscr{WTB}$ es la categoría de las B−álgebras temporales débiles con sus correspondientes morfismos.

De los resultados anteriores y con técnicas habituales se pueden probar las siguientes proposiciones:

Proposición 3.2.5. *C es fiel.*

Proposición 3.2.6. *C preserva el producto directo.*

Proposición 3.2.7. *Sea* $f : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}'$ *un morfismo en* $\mathscr{WTLM}_{n\times m}$*. Entonces:*
f es inyectiva si, y sólo si, $C(f)$ es injectiva.

Proposición 3.2.8. *Sean* $(\mathscr{L}, G, H)$ *y* $(\mathscr{L}', G', H')$ *dos* $t_d LM_{n\times m}$*−álgebras y* $f : L \longrightarrow L'$ *una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}'$ *es un monomorfismo en* $\mathscr{WTLM}_{n\times m}$*,*

(ii) $C(f) : C(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{L}')$ *es un monomorfismo en* $\mathscr{WTB}$*.*

3.2.3. Representación de $t_d LM_{n\times m}$−álgebras

En esta sección daremos un teorema de representación para las $t_d LM_{n\times m}$ −álgebras.

Sea $(\mathscr{B}, G, H)$ una $t_d B$−álgebra. Consideremos la $LM_{n\times m}$−álgebra asociada $D(\mathscr{B})$ definida como en el Ejemplo 3.1.2. En $D(B)$ definimos las operaciones unarias $D(G)$ y $D(H)$ por:

$$(D(G))(f) = G \circ f,\ (D(H))(f) = H \circ f, \text{ para todo } f \in D(B).$$

Entonces, se verifica el siguiente

Lema 3.2.2. *Si* $(\mathscr{B}, G, H)$ *es una* $t_d B$*−álgebra, entonces* $(D(\mathscr{B}), D(G), D(H))$ *es una* $t_d LM_{n\times m}$*-álgebra.*

Dem. Vamos a probar que $D(G)$ y $D(H)$ verifican los axiomas (tC1)-(tC3).

(tC1) Sea $(i, j) \in (n \times m)$. Entonces,

$$\begin{aligned}(D(G))(1_{D(B)})(i,j) &= (G \circ 1_{D(B)})(i,j)\\ &= G(1_{D(B)}(i,j))\\ &= G(1) = 1\end{aligned}$$

(tC2) Sean $f, g \in D(B)$ y $(i, j) \in (n \times m)$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}(D(G)(f \wedge g))(i,j) &= (G \circ (f \wedge g))(i,j)\\ &= G(f(i,j) \wedge g(i,j))\\ &= G(f(i,j)) \wedge G(g(i,j))\\ &= (G \circ f)(i,j) \wedge (G \circ g)(i,j)\\ &= (D(G)(f))(i,j) \wedge (D(G)(g))(i,j)\\ &= ((D(G)(f) \wedge (D(G)(g))(i,j)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(D(G))(f \wedge g) = (D(G))(f) \wedge (D(G))(g)$.

(tC3) Sea $f \in D(B)$ y $(i, j), (r, s) \in (n \times m)$. Entonces, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(D(G)(\sigma_{ij}f))(r,s) &= (G\circ(\sigma_{ij}f))(r,s)\\
&= G((\sigma_{ij}f)(r,s))\\
&= G(f(i,j))\\
&= (G\circ f)(i,j)\\
&= (D(G)(f))(i,j)\\
&= \sigma_{ij}(D(G)(f))(r,s)
\end{aligned}
$$

De donde se deduce que $(D(G))(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}(D(G))$.

■

Definición 3.2.5. *Sean $(\mathscr{B},G,H)$ y $(\mathscr{B}',G,H)$ dos $t_d B-$álgebras, $f : B \longrightarrow B'$ un morfismo de $t_d B-$álgebras y sean $D(\mathscr{B})$ y $D(\mathscr{B}')$ las correspondientes $LM_{n\times m}-$álgebras asociadas. Vamos extender la función f a la función $D(f) : D(B) \longrightarrow D(B')$ de la siguiente manera:*

$$(D(f))(u) = f\circ u, \text{para todo } u \in D(B).$$

Lema 3.2.3. *La función $D(f) : D(B) \longrightarrow D(B')$ es un morfismo de $t_d LM_{n\times m}-$álgebras.*

Dem. Dado que f es un morfismo de $B-$álgebras es fácil probar que $D(f)$ es un $L_{0,1}-$homomorfismo. Sea $u \in D(B)$ y $(i,j),(r,s) \in (n\times m)$. Entonces, tenemos que $D(f)(\sigma_{rs}u)(i,j) = f((\sigma_{rs}u)(i,j)) = f(u(r,s))$ y $\sigma_{rs}(D(f)(u))(i,j) = D(f)(u)(r,s) = f(u(r,s))$. De donde resulta que $D(f)\circ\sigma_{rs} = \sigma_{rs}\circ D(f)$. Por otra parte, $D(f)(D(G)u)(r,s) = (f\circ(D(G)u))(r,s) = f((D(G)u)(r,s)$, lo cual completa la prueba.

■

Hemos probado que para cada $t_d B-$álgebra $\mathscr{B}$, $D(\mathscr{B})$ es una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra y para cada morfismo de $t_d B-$álgebras f, $D(f)$ es un morfismo de $t_d LM_{n\times m}$-álgebras.

Entonces, la asignación $\mathscr{B} \mapsto D(\mathscr{B})$, $f \mapsto D(f)$ define un funtor covariante

$$D : \mathscr{WTB} \longrightarrow \mathscr{WTLM}_{n\times m}$$

De los resultados anteriores y con técnicas habituales se pueden probar las siguientes proposiciones:

Proposición 3.2.9. *D es un funtor pleno.*

Proposición 3.2.10. *El funtor D preserva productos directos.*

Definición 3.2.6. *Sea $(\mathscr{L}, G, H)$ una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra. Consideremos la función $\omega_{\mathscr{L}} : L \longrightarrow D(C(L))$, definida por $\omega_{\mathscr{L}}(x)(i,j) = \sigma_{ij}(x)$ para todo $x \in L$, $(i,j)\in(n\times m)$.*

Lema 3.2.4. *$\omega_{\mathscr{L}}$ es un morfismo inyectivo en $\mathscr{WTL}_{n\times m}$.*

Dem. Teniendo en cuenta [140, Theorem 3.1], la aplicación $\omega_{\mathscr{L}} : L \longrightarrow D(C(L))$ es un $LM_{n\times m}$−morfismo inyectivo. Además, de (tC3) es simple chequear que $\omega_{\mathscr{L}}$ conmuta con los operadores temporales G y H. ∎

Definición 3.2.7. *Sea $(\mathscr{B}, G, H)$ una $t_d B$−álgebra. Consideremos la función $\phi_B : B \longrightarrow C(D(B))$, definida por: $\phi_B(x) = f_x$ donde $f_x : (n\times m) \longrightarrow B$, $f_x(i,j) = x$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$.*

Lema 3.2.5. *ϕ_B es un isomorfismo de $t_d B$−álgebras.*

Dem. Sea $x \in B$ y $f_x : (n\times m) \longrightarrow B$ con $f_x(i,j) = x$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$. De donde resulta que f_x es creciente en cada componente y $\sigma_{rs}(f_x) = f_x$ para todo $(r,s)\in(n\times m)$, así $f_x \in C(D(B))$. De donde obtenemos que ϕ_B está bien definida. Es fácil probar que ϕ_B es un B−morfismo. Vamos a chequear que ϕ_B conmuta con G y H. Sea $x \in B$ y $(i,j)\in(n\times m)$. Entonces, tenemos que:

(a) $\phi_B(G(x))(i,j) = f_{G(x)}(i,j) = G(x)$.

(b) $C(D(G))(\phi_B(x))(i,j) = D(G)\mid_{C(D(B))}(\phi_B(x))(i,j)$

$$
\begin{aligned}
&= (G\circ\phi_B(x))(i,j)\\
&= G(\phi_B(x)(i,j))\\
&= G(f_x(i,j))\\
&= G(x).
\end{aligned}
$$

De (a) y (b) obtenemos que $\phi_B\circ G = C(D(G))\circ\phi_B$. El homomorfismo $\phi_B : B \longrightarrow C(D(B))$ es inyectivo pues $\phi_B(x) = \phi_B(y)$ implica $f_x = f_y$, luego $f_x(i,j) = f_y(i,j)$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$, así $x = y$. Para probar la sobreyectividad tomamos $g\in C(D(B))$. Entonces $\sigma_{ij}(g) = g$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$ lo que significa que $\sigma_{ij}(g)(r,s) = g(r,s)$ para todo $(i,j),(r,s)\in(n\times m)$. Pero $\sigma_{ij}(g)(r,s) = g(i,j)$, luego $g(i,j) = g(r,s)$ para todo $(i,j),(r,s)\in(n\times m)$, lo que significa que g es constante. Por lo tanto $\phi_B(g) = g$. De donde resulta que ϕ_B es un isomorfismo.

■

Lema 3.2.6. *Sea* $(\mathscr{L},G,H)$ *una* $t_dLM_{n\times m}$*-álgebra. Las siguientes implicaciones se satisfacen:*

(i) *Si* $C(G) = I_d$ *entonces* $G = I_d$.

(ii) *Si* $C(H) = I_d$ *entonces* $H = I_d$.

Dem. (i) Sea $x\in L$. Entonces tenemos que $\sigma_{ij}(x)\in C(L)$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$. Por hipótesis resulta que $G(\sigma_{ij}(x)) = \sigma_{ij}(x)$. Dado que G conmuta con σ_{ij}, obtenemos que $\sigma_{ij}G(x) = \sigma_{ij}(x)$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$. De esta última afirmación, aplicando (C5), resulta que $G(x) = x$. Por lo tanto, $G = I_d$. (ii) se puede probar de manera similar a (i). ■

Lema 3.2.7. *Sea* $(\mathscr{L},G,H)$ *una* $t_dLM_{n\times m}-$*álgebra. Las siguientes implicaciones se satisfacen:*

(i) *Si* $C(G) = 1_{C(L)}$ *entonces* $G = 1_L$.

(ii) *Si* $C(H) = 1_{C(L)}$ *entonces* $H = 1_L$.

Dem. Solo probaremos (i). Sea $x \in L$. Tenemos que $\sigma_{ij}(x) \in C(L)$ para todo $(i,j) \in (n \times m)$. Por la hipótesis resulta que $C(G)(\sigma_{ij}(x)) = 1$. Dado que $C(G) = G\mid_{C(L)}$ obtenemos que $C(G)(\sigma_{ij}x) = G(\sigma_{ij}x) = \sigma_{ij}G(x) = 1 = \sigma_{ij}(1)$ para todo $(i,j) \in (n \times m)$. Por (C5) resulta que $G(x) = 1$. Por lo tanto $G = 1_L$.

■

Las dos proposiciones siguientes nos serán de utlidad para lo que sigue.

Proposición 3.2.11. *Sean* $f, g : B \longrightarrow B'$ *dos morfismos en* $\mathscr{WTB}$. *Entonces tenemos las siguiente equivalencia:* $f = g \Leftrightarrow D(f) = D(g)$

Dem. Es de rutina. ■

Proposición 3.2.12. *Sean* $f, g : B \longrightarrow B'$ *dos morfismos en* $\mathscr{WTB}$. *Entonces tenemos las siguiente equivalencia:* f *es inyectiva* $\Leftrightarrow D(f)$ *es inyectiva.*

Dem. Es de rutina. ■

Definición 3.2.8. *Sea* (X, R, Q) *un marco débil y* $(\mathbf{2}^X, G, H)$ *la* $t_d B$*–álgebra de la Proposición 1.1.2. Consideremos la función*

$$\beta : (D(\mathbf{2}^X), D(G), D(H)) \longrightarrow (D(\mathbf{2})^X, G^*, H^*)$$

definida por: $\beta(f)(x)(i,j) = f(i,j)(x)$ *para todo* $f \in D(\mathbf{2}^X)$, $x \in X$, $(i,j) \in (n \times m)$, *donde* G^* *y* H^* *están definidos por:* $G^*(p)(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xRy\}$ *y* $H^*(p)(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y \in X, xQy\}$.

Lema 3.2.8. β *es un isomorfismo de* $t_d LM_{n\times m}$*–álgebras.*

Dem. No es difícil ver que β es un $LM_{n\times m}$–morfismo inyectivo. Solo resta probar que β conmuta con los operadores temporales.

Sea $f \in D(\mathbf{2}^X)$, $x \in X$ y $(i,j) \in (n \times m)$. Entonces, tenemos que:

(a) $\beta(D(G)(f))(x)(i,j) = D(G)(f)(i,j)(x)$

$$= G(f(i,j))(x)$$

$$= \bigwedge\{f(i,j)(y) \mid y \in X, xRy\}.$$

(b) $G^*(\beta(f))(x)(i,j) = \bigwedge\{\beta(f)(y)(i,j) \mid y \in X, xRy\}$

$$= \bigwedge\{f(i,j)(y) \mid y \in X, xRy\}.$$

De (a) y (b), obtenemos que $\beta(D(G)(f))(x)(i,j) = G^*(\beta(f)(x))(i,j)$, así $\beta \circ D(G) = G^* \circ \beta$. Definimos la función $\gamma : D(\mathbf{2})^X \longrightarrow D(\mathbf{2}^X)$ por: $\gamma(g)(i,j)(x) = g(x)(i,j)$ para todo $g \in D(\mathbf{2})^X$, $x \in X$, $(i,j) \in (n \times m)$. Sea $r \leq s$. Para todo $x \in X$, tenemos que $g(x) \in D(\mathbf{2})$, así $g(x)(r,j) \leq g(x)(s,j)$ y $g(x)(i,r) \leq g(x)(i,s)$. De donde resulta que $\gamma(g)(r,j)(x) \leq \gamma(g)(s,j)(x)$ y $\gamma(g)(i,r)(x) \leq \gamma(g)(s,j)(x)$ para todo $x \in X$, así $\gamma(g)(r,j) \leq \gamma(g)(s,j)$ y $\gamma(g)(i,r) \leq \gamma(g)(s,j)$. Luego, γ está bien definida. Vamos a probar que β y γ son mutuamente inversos. Sea $g \in D(\mathbf{2})^X$, $x \in X$ y $(i,j) \in (n \times m)$. Entonces, tenemos que : $(\beta \circ \gamma)(g)(x)(i,j) = \beta(\gamma(g))(x)(i,j) = \gamma(g)(i,j)(x) = g(x)(i,j)$, por lo tanto $(\beta \circ \gamma)(g) = g$. Sea $f \in D(\mathbf{2}^X)$, $(i,j) \in (n \times m)$ y $x \in X$. Entonces $(\gamma \circ \beta)(f)(i,j)(x) = \gamma(\beta(f))(i,j)(x) = \beta(f)(x)(i,j) = f(i,j)(x)$, así $(\gamma \circ \beta)(f) = f$.

■

Teorema 3.2.1. *Para cada $t_d LM_{n\times m}$-álgebra $(\mathscr{L}, G, H)$ existe un marco débil (X, R, Q) y un $t_d LM_{n\times m}-$morfismo inyectivo $\alpha : (\mathscr{L}, G, H) \longrightarrow (D(\mathbf{2})^X, G^*, H^*)$.*

Dem. Sea $(\mathscr{L}, G, H)$ una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra. Por el Lema 3.2.2 tenemos que la estructura $(C(\mathscr{L}), C(G), C(H))$ es una $t_d B-$álgebra. Aplicando el teorema de representación para las $t_d B-$álgebras, resulta que existe un marco débil (X, R, Q) y un morfismo inyectivo de $t_d B-$álgebras $\kappa : (C(\mathscr{L}), C(G), C(H)) \longrightarrow (\mathbf{2}^X, G, H)$. Sea $D(\kappa) : D(C(L)) \longrightarrow D(\mathbf{2}^X)$ el correspondiente morfismo de κ por medio del funtor D. Entonces, tenemos que $D(\kappa)$ es un morfismo inyectivo. Por otra parte, usando el Lema 3.2.4 tenemos un morfismo inyectivo de $t_d LM_{n\times m}$-álgebras

$\omega_{\mathscr{L}} : L \longrightarrow D(C(L))$. Además, por el Lema 3.2.5, $\beta : D(\mathbf{2}^X) \longrightarrow D(\mathbf{2})^X$ es un isomorfismo de $t_d LM_{n\times m}$−álgebras. Ahora, en el siguiente diagrama,

$$L \xrightarrow{\omega_{\mathscr{L}}} D(C(L)) \xrightarrow{D(\kappa)} D(\mathbf{2}^X) \xrightarrow{\beta} D(\mathbf{2})^X$$

si consideramos la composición $\beta \circ D(\kappa) \circ \omega_{\mathscr{L}}$ obtenemos el morfismo inyectivo requerido. ■

3.2.4. Congruencias en $t_d LM_{n\times m}$−álgebras

En esta sección, vamos a definir la operación d en una $t_d LM_{n\times m}$−álgebra $(\mathscr{L}, G, H)$, extendiendo la noción similar para $t_d B$−álgebras. Usaremos las propiedades de d para el estudio de los $n \times m$−filtros temporales y congruencias en una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra $(\mathscr{L}, G, H)$.

Definición 3.2.9. *Sea $(\mathscr{L}, G, H)$ una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra. Definimos la operación unaria $d = d_{\mathscr{L}}$ sobre L por $d(x) = d_{\mathscr{L}}(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x)$, para todo $x \in L$. Para cada $n \in \omega$, definimos $d^n x$ por inducción: $d^0(x) = x$, $d^{n+1}(x) = d(d^n(x))$.*

Observación 3.2.3. *Para cada $n \in \omega$ tenemos que $d^n(d(x)) = d^{n+1}(x)$.*

Lema 3.2.9. *Sea $(\mathscr{L}, G, H)$ una $t_d LM_{n\times m}$-álgebra. Entonces, $d_{C(\mathscr{L})} = d_{\mathscr{L}} |_{C(\mathscr{L})}$, donde $d_{C(\mathscr{L})}$ fue introducido en la Definición 1.1.3.*

Dem. Sea $x \in C(L)$. Entonces, tenemos que $d_{\mathscr{L}}(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x) = C(G)(x) \wedge x \wedge C(H)(x) = d_{C(\mathscr{L})}(x)$. ■

Lema 3.2.10. *Sea $(\mathscr{B}, G, H)$ una $t_d B$−álgebra. Entonces, $d_{D(\mathscr{B})}(f) = d_{\mathscr{B}} \circ f$, para todo $f \in D(\mathscr{B})$.*

Dem. Sea $f \in D(\mathscr{B})$ y $(i, j) \in (n \times m)$. Entonces, tenemos que:

$$(d_{D(\mathscr{B}(f))})(i, j) = (D(G)(f) \wedge f \wedge D(H)(f))(i, j),$$

$$= (D(G)(f))(i, j) \wedge f(i, j) \wedge (D(H)(f)(i, j)),$$

$$= G(f(i,j)) \wedge f(i,j) \wedge H(f(i,j)),$$

$$= d_{\mathscr{B}}(f(i,j)),$$

$$= (d_{\mathscr{B}} \circ f)(i,j).$$

Por lo tanto, $d_{D(\mathscr{B}(f))} = d_{\mathscr{B}} \circ f$. ■

Proposición 3.2.13. *Sea* $(\mathscr{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*-álgebra. Entonces, para todo* $x, y \in L$, $n \in \omega$ *y* $(i,j) \in (n \times m)$, *se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $d^n(0) = 0$, $d^n(1) = 1$,

(b) $d^{n+1}(x) \leq d^n(x)$,

(c) $d^n(x \wedge y) = d^n(x) \wedge d^n(y)$,

(d) *Si* $x \leq y$, *entonces* $d^n(x) \leq d^n(y)$,

(e) *Si* $d(x) = x$, *entonces* $d(\sigma_{ij} x) = \sigma_{ij} x$,

(f) *Si* $d(x) = x$, *entonces* $d^n(x) = x$,

(g) $d^n(\sigma_{ij} x) = \sigma_{ij}(d^n(x))$.

Dem. Es fácil probar (a), (b), (c), (d), (f) y (g).

(e) Sea $x \in L$ con $d(x) = x$ y sea $(i,j) \in (n \times m)$. Entonces:

$$d(\sigma_{ij} x) = G(\sigma_{ij} x) \wedge \sigma_{ij} x \wedge H(\sigma_{ij} x),$$

$$= \sigma_{ij} G(x) \wedge \sigma_{ij} x \wedge \sigma_{ij} H(x),$$

$$= \sigma_{ij}(G(x) \wedge x \wedge H(x)),$$

$$= \sigma_{ij} d(x),$$

$$= \sigma_{ij} x.$$

■

Proposición 3.2.14. *Sea* $(\mathscr{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*–álgebra y consideremos el conjunto* $L^d = \{x \in L : d(x) = x\}$*. Entonces,* L^d *es cerrado bajo las operaciones* $\vee, \wedge$ *y* σ_{ij} *para todo* $(i,j) \in (n \times m)$*.*

Dem. De (e) de la Proposición 3.2.13, resulta que L^d es cerrado bajo σ_{ij}, para todo $(i,j) \in (n\times m)$. Sean $x, y \in L^d$. Entonces, $d(x) = x$ y $d(y) = y$. Usando (tC2) resulta que:

$$\begin{aligned} d(x \wedge y) &= G(x \wedge y) \wedge (x \wedge y) \wedge H(x \wedge y), \\ &= (G(x) \wedge x \wedge H(x)) \wedge (G(y) \wedge y \wedge H(y)), \\ &= d(x) \wedge d(y), \\ &= x \wedge y, \end{aligned}$$

así, $x \wedge y \in L^d$.

Sabemos por la definición de d que $d(x \vee y) \leq x \vee y$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} d(x \vee y) &= G(x \vee y) \vee (x \vee y) \vee H(x \vee y), \\ &= (G(x \vee y) \wedge x \wedge H(x \vee y)) \vee (G(x \vee y) \wedge y \wedge H(x \vee y)), \\ &\geq (G(x) \wedge x \wedge H(x)) \vee (G(y) \wedge y \wedge H(y)), \\ &= d(x) \vee d(y) \\ &= x \vee y. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $d(x \vee y) = x \vee y$, así $x \vee y \in L^d$. ■

Observaciones 3.2.1.

(a) *Sea* $(\mathscr{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*–álgebra. En general,* L^d *no es cerrado bajo la operación unaria* $\sim$*.*

(b) *Sea* $f : (\mathcal{L}, G, H) \longrightarrow (\mathcal{L}', G', H')$ *un morfismo de* $t_d LM_{n\times m}$*−álgebras. Entonces, se satisface la siguiente propiedad:* $x \in L^d \Rightarrow f(x) \in (L')^d$.

(c) *Sea* $(\mathcal{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*−álgebra. Entonces, se satisface la siguiente igualdad:* $C(L^d) = (C(L))^d$.

Definición 3.2.10. *Sea* $(\mathcal{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*−álgebra. Diremos que* $D \subseteq L$ *es un* $n \times m$*−filtro temporal, si* D *es un* $n \times m$*−filtro que verifica la siguiente condición adicional:* $x \in D$ *implica* $G(x), H(x) \in D$.

Notaremos con $\mathcal{D}_t(L)$ al conjunto de todos los $n \times m$−filtros temporales de L.

Proposición 3.2.15. *Sea* $(\mathcal{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*−álgebra y* $D \subseteq L$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) D *es un* $n \times m$*−filtro temporal,*

(ii) D *es un* $n \times m$*−filtro cerrado bajo* d.

Dem. ($\Rightarrow$) Supongamos que D es un $n \times m$−filtro temporal. Entonces D es un $n \times m$−filtro y D es cerrado bajo las operaciones G y H. Sea $x \in D$. Entonces $d(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x)$ y resulta que $d(x) \in D$. ($\Leftarrow$) Supongamos que D es un $n \times m$−filtro cerrado bajo d. Debemos probar que D es cerrado bajo G y H. Sea $x \in D$. Entonces $d(x) \leq G(x)$ y $d(x) \leq H(x)$. De donde resulta que $G(x), H(x) \in D$. ■

Lema 3.2.11. *Sea* $(\mathcal{L}, G, H)$ *una* $t_d LM_{n\times m}$*-álgebra. Entonces*

$$Con_{t_d LM_{n\times m}}(\mathcal{L}) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}_t(\mathcal{L})\},$$

donde $R(D) = \{(x, y) \in L \times L : $ *existe* $z \in D$ *tal que* $x \wedge z = y \wedge z\}$.

Dem. Sea $D \in \mathcal{D}_t(\mathcal{L})$, dado que $\mathcal{L}$ es una $LM_{n\times m}$−álgebra y D es un $n\times m$−filtro de $\mathcal{L}$, sabemos que $R(D) \in Con_{LM_{n\times m}}(\mathcal{L})$. Vamos a probar que $R(D)$ preserva los operadores G y H. Sea $(x,y)\in D$. Entonces, existe $z\in D$ tal que $x\wedge z = y\wedge z$. Dado que D es un $n\times m-$filtro temporal tenemos que $G(z)\in D$. Entonces, por (tC2) obtenemos que $G(x)\wedge G(z) = G(y)\wedge G(z)$, esto es, $(G(x),G(y))\in R(D)$. De manera similar, se prueba que $R(D)$ preserva H. Recíprocamente, sea $\theta\in Con_{t_d LM_{n\times m}}(\mathscr{L})$, entonces $\theta\in Con_{LM_{n\times m}}(\mathscr{L})$. De los resultados obtenidos en [140, Proposition 4.4] tenemos que $[1]_\theta$ es un $n\times m-$filtro de $\mathscr{L}$ y $R([1]_\theta)=\theta$. Además, de la hipótesis y de (tC1), tenemos que $(G(x),1),(H(x),1)\in\theta$ siempre que $(x,1)\in\theta$, esto es, $[1]_\theta\in\mathscr{D}_t(\mathscr{L})$, lo cual completa la prueba.

■

Teniendo en cuenta los resultados establecidos en [140, Theorem 4.1] y Lema 3.2.11, obtenemos:

Teorema 3.2.2. *Sea $(\mathscr{L},G,H)$ una $t_d LM_{n\times m}-$álgebra. Entonces, los retículos $Con_{t_d LM_{n\times m}}(\mathscr{L})$ y $\mathscr{D}_t(\mathscr{L})$ son isomorfos, por medio de las correspondencias $\theta\mapsto [1]_\theta$, $D\mapsto R(D)$, las cuales son mutuamente inversas.*

El siguiente lema nos será de utilidad para la prueba del Teorema 3.2.3.

Lema 3.2.12. *Sea $(\mathscr{L},G,H)$ una $t_d LM_{n\times m}-$álgebra. Entonces, se satisfacen las siguientes implicaciones:*

(a) *Si $D\in\mathscr{D}_t(\mathscr{L})$, entonces $D\cap C(\mathscr{L})\in\mathscr{D}_t(C(\mathscr{L}))$,*

(b) *Si $M\in\mathscr{D}_t(C(\mathscr{L}))$, entonces $M^*\in\mathscr{D}_t(\mathscr{L})$, donde $M^*=\{x\in L: a\leq x$, para algún $a\in M\}$.*

Dem.

(a) Sea $D\in\mathscr{D}_t(\mathscr{L})$. Probemos que $D\cap C(\mathscr{L})$ es un filtro temporal (ver Definición 1.1.4). Como D es $n\times m-$filtro temporal tenemos que $D\cap C(\mathscr{L})$ es filtro. Sea $x\in D\cap C(\mathscr{L})$. Entonces, $\sigma_{ij}(x)=x\in D$. De donde resulta que $G(x)=G(\sigma_{ij}(x))=\sigma_{ij}(G(x))\in D$. Luego, $G(x)\in D\cap C(\mathscr{L})$. De manera análoga se prueba que $H(x)\in D\cap C(\mathscr{L})$.

(b) Sea $M \in \mathscr{D}_t(C(\mathscr{L}))$. Probemos que M^* es un $n\times m$−filtro temporal de $\mathscr{L}$. Dado que M es filtro de $C(\mathscr{L})$, resulta que M^* es filtro de $\mathscr{L}$. Sea $x\in M^*$. Entonces, existe $a\in M$ tal que $a\leq x$. Como $\sigma_{11}a=a$, tenemos que $a\leq\sigma_{11}x$. De donde resulta que $\sigma_{11}x\in M^*$. Por otra parte, sea $x\in M^*$. Entonces, existe $a\in M$ tal que $a\leq x$. Como G es creciente, tenemos que $G(a)\leq G(x)$, con $G(a)\in M$. De donde resulta que $G(x)\in M^*$. De manera similar se prueba que $H(x)\in M^*$.

■

Teorema 3.2.3. *Sea $(\mathscr{L},G,H)$ una $t_dLM_{n\times m}$-álgebra. Entonces, los retículos $\mathscr{D}_t(\mathscr{L})$ y $\mathscr{D}_t(C(\mathscr{L}))$ son isomorfos bajo las correspondencias $D\mapsto D\cap C(\mathscr{L})$ y $M\mapsto M^*$, las cuales son una la inversa de la otra.*

Dem. Es consecuencia directa del Lema 3.2.12.

■

Los siguientes dos resultados nos permiten dar una caracterización de las $t_dLM_{n\times m}$−álgebras simples y subdirectamente irreducibles. Las pruebas de estas dos proposiciones son consecuencia de los Teorema 3.2.2 y 3.2.3.

Proposición 3.2.16. *Para cada $t_dLM_{n\times m}$−álgebra $(\mathscr{L},G,H)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(\mathscr{L},G,H)$ es una $t_dLM_{n\times m}$−álgebra simple.*

(ii) *$(C(\mathscr{L}),G,H)$ es una t_dB−álgebra simple.*

(iii) *Para cada $a\in C(L)\setminus\{1\}$ existe $n\in\omega$ tal que $d^n(a)=0$.*

Proposición 3.2.17. *Para cada $t_dLM_{n\times m}$-álgebra $(\mathscr{L},G,H)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(\mathscr{L},G,H)$ es una $t_dLM_{n\times m}$−álgebra subdirectamente irreducible.*

(ii) *$(C(\mathscr{L}),G,H)$ es una t_dB−álgebra subdirectamente irreducible.*

(iii) *Existe $b\in C(L)\setminus\{1\}$, tal que: para cada $a\in C(L)\setminus\{1\}$ existe $n\in\omega$ tal que $d^n(a)\leq b$.*

3.3. $tLM_{n\times m}-$álgebras

En esta sección definimos las $LM_{n\times m}-$álgebras temporales como una generalización común de las $B-$álgebras temporales y las LM_n-álgebras temporales.

3.3.1. $tLM_{n\times m}-$álgebras: definiciones y propiedades

Definición 3.3.1. *Una $LM_{n\times m}-$álgebra temporal (o $tLM_{n\times m}-$álgebra) es una $t_dLM_{n\times m}-$álgebra $(\mathcal{L}, G, H)$ tal que, para todo $x \in L$, se satisface la siguiente propiedad adcional:*

(tC4) *$x \leq GP(x)$ y $x \leq HF(x)$, donde F y P están definidos como en Definición 3.2.2.*

Observación 3.3.1. *Teniendo en cuenta la Observación 3.1.1 podemos inferir que toda $tLM_{n\times 2}-$álgebra es isomorfa a una tLM_n-álgebra.*

Observación 3.3.2. *Definiciones, proposiciones, lemas y observaciones válidas en las $t_dLM_{n\times m}-$álgebras, son válidas también para las $tLM_{n\times m}-$álgebras.*

Proposición 3.3.1. *Sea $(\mathcal{L}, G, H)$ una $tLM_{n\times m}-$álgebra. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades, para todo $x, y \in L$ y $(i, j), (r, s) \in (n \times m)$:*

1. *Las condiciones* 1-8 *de la Proposición 3.2.1.*

2. $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

3. $x \wedge F(y) \leq F(P(x) \wedge y)$, $x \wedge P(y) \leq P(F(x) \wedge y)$.

3.3.2. $tLM_{n\times m}-$álgebras especiales

Basados en la noción de marco vamos a dar un ejemplo importante de $tLM_{n\times m}-$álgebra.

Sea $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0, 1\rangle$ una $LM_{n\times m}$−álgebra completa y completamente crisipiana.

Sea (X,R) un marco. Definimos sobre L^X las operaciones $\vee, \wedge, \sim, \sigma_{ij}$ para todo $(i,j)\in(n\times m)$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{O}$ como en el Ejemplo 3.1.1 y las operaciones unarias adicionales G^* y H^* como sigue:

(3.1) $(G^*(p))(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y\in X, xRy\}$, $(H^*(p))(x) = \bigwedge\{p(y) \mid y\in X, yRx\}$,

para todo $p\in L^X$, $x\in X$.

Proposición 3.3.2. *Para todo marco* (X,R), $(\mathscr{L}^X, G^*, H^*)$ *es una* $t\,LM_{n\times m}$*−álgebra.*

Dem. La demostración de que $(\mathscr{L}^X, G^*, H^*)$ es una $t_d\,LM_{n\times m}$−álgebra es similar a la prueba de la Proposición 3.2.4. Solo nos resta verificar la condición (tC4). Dado que

$$\sim H^*(\sim p)(x) = \sim\left(\bigwedge\{\sim p(y) \mid y\in X, yRx\}\right) = \bigvee\{p(y) \mid y\in X, yRx\}$$

Obtenemos que

$$G^*P^*(p)(x) = G^*(\sim H^*(\sim p))(x) = \bigwedge_{z\in X}\{\bigvee_{y\in X}\{p(y) \mid yRz\} \mid xRz\}$$

Dado que cada miembro del ínfimo es mayor o igual a $p(x)$ concluimos que $G^*P^*(p)(x)\geq p(x)$ para todo $x\in X$, es decir, $p\leq G^*P^*(p)$. En forma análoga se puede probar $p\leq H^*F^*(p)$.

■

Definición 3.3.2. *Sean* $(\mathscr{L}, G, H)$ *y* $(\mathscr{L}', G', H')$ *dos* $t\,LM_{n\times m}$*−álgebras. Una función* $f : L \longrightarrow L'$ *es un morfismo de* $t\,LM_{n\times m}$*−álgebras (o* $t\,LM_{n\times m}$*−morfismo) si* f *es un* $LM_{n\times m}$*−morfismo y se satisface la siguiente condición adicional:* $f(G(x)) = G'(f(x))$ *y* $f(H(x)) = H'(f(x))$*, para cada* $x\in L$*.*

Definición 3.3.3. *Sean* (X,R) *y* (Y,Q) *dos marcos. Una función* $u:(X,R)\longrightarrow(Y,Q)$ *es un morfismo de marcos si se satisfacen la siguiente condición:* aRb *implica* $u(a)Qu(b)$ *para todo* $a,b\in X$.

Sea $\mathscr{L}=\langle L,\wedge,\vee,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ una $LM_{n\times m}$−álgebra y $u:(X,R)\longrightarrow(Y,Q)$ un morfismo de marcos. Consideremos la función $u^*:L^Y\longrightarrow L^X$, definida por: $u^*(p)=p\circ u$ para todo $p\in L^Y$.

Proposición 3.3.3. *Sea* $\mathscr{L}=\langle L,\vee,\wedge,\sim,\{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)},0,1\rangle$ *una* $LM_{n\times m}$*−álgebra completa y completamente crisipiana,* (X,R), (Y,Q) *dos marcos y* $u:(X,R)\longrightarrow(Y,Q)$ *un morfismo de marcos los cuales satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $u:X\longrightarrow Y$ *es sobreyectiva.*

(b) *Si* $u(a)Qu(b)$*, entonces* aRb *para todo* $a,b\in X$.

Entonces u^* *es un morfismo de* $t\,LM_{n\times m}$*−álgebras.*

Dem. Solo probaremos que $u^*\circ G=G\circ u^*$. Sea $p\in L^Y$ y $x\in X$. Tenemos que: $u^*(G(p))(x)=(G(p)\circ u)(x)=G(p)(u(x))=\bigwedge\{p(b)\mid b\in Y,u(x)Qb\}$ y $G(u^*(p))(x)=G(p\circ u)(x)=\bigwedge\{(p(u(a)))\mid a\in X,xRa\}$.

(i) Sea $a\in X$ tal que xRa. De donde resulta que $u(a)\in Y$ y $u(x)Qu(a)$, así $\{p(u(a))\mid a\in X,xRa\}\subseteq\{p(b)\mid b\in Y,u(x)Qb\}$, luego $\bigwedge\{p(b)\mid b\in Y,u(x)Qb\}\leq\bigwedge\{p(u(a))\mid a\in X,xRa\}$.

(ii) Sea $b\in Y$ tal que $u(x)Qb$. Por las condiciones (a) y (b) resulta que existe $a\in X$ tal que $b=u(a)$ y xRa. De donde obtenemos que $\{p(b)\mid b\in Y,u(x)Qb\}\subseteq\{p(u(a))\mid a\in X,xRa\}$, así $\bigwedge\{p(u(a))\mid a\in X,xRa\}\leq\bigwedge\{p(b)\mid b\in Y,u(x)Qb\}$.

De (i) y (ii) resulta que $u^*(G(p))(x)=G(u^*(p))(x)$, así $u^*\circ G=G\circ u^*$.

■

3.3.3. Representación de $tLM_{n\times m}$−álgebras

En esta subsección probaremos un teorema de representación para las $tLM_{n\times m}$−álgebras, como corolario de este obtenemos el Teorema 1.1.4, dado por Diaconescu y Georgescu en [43], para tLM_n−álgebras.

Para las $tLM_{n\times m}$−álgebras, los funtores C y D se construyen de la misma manera que para las $t_d LM_{n\times m}$−álgebras.

Proposición 3.3.4. *Si $(\mathscr{L}, G, H)$ es una $tLM_{n\times m}$−álgebra, entonces*

$$(C(\mathscr{L}), C(G), C(H))$$

es una tB−álgebra.

Dem. Es de manera similar a la Proposición 3.2.2. ■

Lema 3.3.1. *Si $(\mathscr{B}, G, H)$ es una tB−álgebra, entonces $(D(\mathscr{B}), D(G), D(H))$ es una $tLM_{n\times m}$−álgebra.*

Dem. Hemos probado en Lema 3.2.2 que $D(\mathscr{B})$ tiene estructura de $t_d LM_{n\times m}$−álgebra. Ahora probaremos que $D(G)$ y $D(H)$ verifican (tC4) de la Definición 3.3.1. Sea $f \in D(B)$ y $(i,j) \in (n\times m)$. Entonces,

$$\begin{aligned} D(G) \sim D(H)(\sim f)(i,j) &= D(G) \sim D(H)(\neg f)(n-i, m-j) \\ &= D(G) \sim (H \circ \neg f)(n-i, m-j) \\ &= D(G) \neg (H \circ \neg f)(i,j) \\ &= (G \circ \neg H \circ \neg f)(i,j). \end{aligned}$$

Dado que $(\mathscr{B}, G, H)$ es una tB−álgebra tenemos que:

$$f(i,j) \leq G \neg H \neg f(i,j).$$

De donde obtenemos que: $f \leq D(G) \sim D(H) \sim f$. De manera similar se puede probar que $f \leq D(H) \sim D(G) \sim f$.

■

Teorema 3.3.1. *Para toda $tLM_{n\times m}$−álgebra $(\mathscr{L},G,H)$ existe un marco (X,R) y un morfismo inyectivo de $tLM_{n\times m}$−álgebras $\alpha : (\mathscr{L},G,H) \longrightarrow (D(\mathbf{2})^X, G^*, H^*)$ donde G^* y H^* están definidos en 3.1.*

Dem. Seguiremos la línea de prueba del teorema de representación para las $t_d LM_{n\times m}$−álgebras (ver Teorema 3.2.1). Sea $(\mathscr{L},G,H)$ una $tLM_{n\times m}$−álgebra y sea (X,R) un marco. De la Proposición 3.3.4 tenemos que $(C(\mathscr{L}),C(G),C(H))$ es una tB−álgebra. Aplicando el teorema de representación para las tB−álgebras, resulta que existe un marco (X,R) y un morfismo inyectivo de tB−álgebras

$$\kappa : (C(\mathscr{L}),C(G),C(H)) \longrightarrow (\mathbf{2}^X, G^*, H^*).$$

Por el Lema 3.3.1 y la Proposición 3.3.2 resulta que $D(C(\mathscr{L}))$, $D(\mathbf{2}^X)$, $(D(\mathbf{2}))^X$ son $tLM_{n\times m}$−álgebras.

Entonces, tenemos los siguientes morfismos $tLM_{n\times m}$−álgebras construidos de la misma manera que en la prueba del Teorema 3.2.1:

- $D(\kappa) : D(C(L)) \longrightarrow D(\mathbf{2}^X)$, el morfismo de $tLM_{n\times m}$−álgebras obtenido de aplicar el funtor D a κ,
- $\omega_{\mathscr{L}} : L \longrightarrow D(C(L))$, el morfismo inyectivo de $LM_{n\times m}$−álgebras definido como en Definición 3.2.6,
- $\beta : D(\mathbf{2}^X) \longrightarrow D(\mathbf{2})^X$, un morfismo biyectivo de $tLM_{n\times m}$−álgebras definido como en Definición 3.2.8.

Como en el Teorema 3.2.1, la composición $\beta \circ D(\kappa) \circ \omega_{\mathscr{L}}$ es el morfismo inyectivo requerido.

■

Corolario 3.3.1. *Para cada tLM_n−álgebra $(\mathscr{L},G,H)$ existe un marco (X,R) y un morfismo inyectivo de tLM_n−álgebras $\Phi : (\mathscr{L},G,H) \longrightarrow (\text{Ł}_n^X, G^*, H^*)$.*

Dem. Es consecuenica inmediata de la Observaciones 3.3.1, 3.1.5 y Teorema 3.3.1. ■

3.3.4. Congruencias en $tLM_{n\times m}$−álgebras

La operación d, definida para $t_d LM_{n\times m}$−álgebras (ver Subsección 3.2.4), puede ser extendida a $tLM_{n\times m}$−álgebras. Las definiciones de $n\times m$−filtro temporal y $tLM_{n\times m}$−congruencias son análogas a las correspondientes definiciones dada para $t_d LM_{n\times m}$−álgebras. Los lemas, proposiciones y observaciones también pueden probarse para $tLM_{n\times m}$−álgebras.

3.4. $t_d pLM_{n\times m}$−álgebras

En esta subsección, introduciremos las $LM_{n\times m}$−álgebras poliádicas temporales débiles como una generalización común de las B−álgebras poliádicas temporales débiles y las LM_n−álgebras poliádicas temporales débiles.

3.4.1. $t_d pLM_{n\times m}$−álgebras: definición y ejemplo

Definición 3.4.1. *Una $LM_{n\times m}$−álgebras poliádica temporal débil (o $t_d pLM_{n\times m}$ −álgebra) es una sistema $(\mathscr{L}, U, S, \exists, G, H)$ tal que*

(a) $(\mathscr{L}, U, S, \exists)$ *es una $pLM_{n\times m}$−álgebra,*

(b) $(\mathscr{L}, G, H)$ *es una $t_d pLM_{n\times m}$−álgebra,*

(c) $S(\tau)(G(p)) = G(S(\tau))(p))$*, para todo $\tau \in U^U$ y $p \in L$,*

(d) $S(\tau)(H(p)) = H(S(\tau))(p))$*, para todo $\tau \in U^U$ y $p \in L$.*

Definición 3.4.2. *Sean $(\mathscr{L}, U, S, \exists, G, H)$ y $(\mathscr{L}', U, S, \exists, G, H)$ dos $t_d pLM_{n\times m}$−álgebras. Una función $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo de $LM_{n\times m}$−álgebras temporales poliádicas débiles (o $t_d pLM_{n\times m}$−morfismo) si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *f es un morfismo de $pLM_{n\times m}$−álgebras,*

(ii) *f es un morfismo de $t_d LM_{n\times m}$−álgebras.*

Vamos a usar la noción de sistema temporal débil para dar un ejemplo de $t_d pLM_{n\times m}$−álgebras.

Definición 3.4.3. *Sea $\mathscr{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, Q, 0)$ un sistema temporal débil, $\mathscr{L}$ una $LM_{n\times m}$−álgebra completa y completamente crisipiana y U un subconjunto no vacío. Denotamos por:*

$$\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}} = \{(f_t)_{t\in T} \mid f_t : X^U \longrightarrow L, \textit{ para cada } t \in T\}.$$

En particular, cuando $L = D(\mathbf{2})$ a $\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$ lo denotamos por $\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T}}$.

En $\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$ consideraremos las siguientes operaciones:

- $(f_t)_{t\in T} \wedge (g_t)_{t\in T} = (f_t \wedge g_t)_{t\in T}$, donde $(f_t \wedge g_t)(x) = f_t(x) \wedge g_t(x)$, para todo $t \in T$ y $x \in X^U_t$,
- $(f_t)_{t\in T} \vee (g_t)_{t\in T} = (f_t \vee g_t)_{t\in T}$, donde $(f_t \vee g_t)(x) = f_t(x) \vee g_t(x)$, para todo $t \in T$ y $x \in X^U_t$,
- $\sim^{\mathscr{T}} ((f_t)_{t\in T}) = (\sim \circ f_t)_{t\in T}$, donde $(\sim \circ f_t)(x) = \sim (f_t(x))$, para todo $t \in T$ y $x \in X^U_t$,
- $\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) = (\sigma_{ij} \circ f_t)_{t\in T}$, donde $(\sigma_{ij} \circ f_t)(x) = \sigma_{ij}(f_t(x))$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$, $t \in T$ y $x \in X^U_t$,
- $0^{\mathscr{T}} = (0_t)_{t\in T}$, donde $0_t : X^U_t \longrightarrow L$, $0_t(x) = 0$, para todo $t \in T$ y $x \in X^U_t$,
- $1^{\mathscr{T}} = (1_t)_{t\in T}$, donde $1_t : X^U_t \longrightarrow L$, $1_t(x) = 1$, para todo $t \in T$ y $x \in X^U_t$.

Lema 3.4.1. *$\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}} = \langle F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}, \vee, \wedge, \sim^{\mathscr{T}}, \{\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}\}_{(i,j)\in(n\times m)}, 0^{\mathscr{T}}, 1^{\mathscr{T}}\rangle$ es una $LM_{n\times m}$ −álgebra.*

Dem. Es fácil ver que $\langle F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}, \vee, \wedge, 0^{\mathscr{T}}, 1^{\mathscr{T}}\rangle$ es una $L_{0,1}$−álgebra. Ahora probaremos que se satisfacen (M1) y (M2) de la Definición 1.1.15.

(M1) $\sim^{\mathscr{T}}\sim^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T})=\sim^{\mathscr{T}}((\sim\circ f_t)_{t\in T}),$

$$=(\sim\circ\sim\circ f_t)_{t\in T}, \text{ donde}$$

$(\sim\circ\sim f_t)(x)=\sim(\sim(f_t(x)))=f_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$, así

$\sim^{\mathscr{T}}\sim^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T})=(f_t)_{t\in T}.$

(M2) $\sim^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T}\wedge(g_t)_{t\in T})=\sim^{\mathscr{T}}((f_t\wedge g_t)_{t\in T}),$

$$=(\sim\circ(f_t\wedge g_t))_{t\in T}, \text{ donde}$$

$(\sim\circ(f_t\wedge g_t))(x)=\sim((f_t\wedge g_t)(x)),$

$$=\sim(f_t(x)\wedge g_t(x)),$$

$$=\sim f_t(x)\vee\sim g_t(x), \text{ para todo } t\in T \text{ y } x\in X_t^U,$$

así, $\sim^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T}\wedge(g_t)_{t\in T})=\sim^{\mathscr{T}}(f_t)_{t\in T}\vee\sim^{\mathscr{T}}(g_t)_{t\in T}.$

Ahora, vamos a verificar las condiciones (C1)-(C7) de la Definición 3.1.1.

(C1) Sea $(i,j)\in(n\times m)$ y $(f_t)_{t\in T},(g_t)_{t\in T}\in F_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$. Entonces,

$\sigma_{ij}^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T}\vee(g_t)_{t\in T})=\sigma_{ij}^{\mathscr{T}}((f_t\vee g_t)_{t\in T})=(\sigma_{ij}\circ(f_t\vee g_t))_{t\in T}.$

Como $\mathscr{L}$ es una $LM_{n\times m}-$álgebra resulta que:

$(\sigma_{ij}\circ(f_t\vee g_t))_{t\in T}=((\sigma_{ij}\circ f_t)\vee(\sigma_{ij}\circ g_t))_{t\in T}$

$$=(\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T}\vee(\sigma_{ij}\circ g_t)_{t\in T}$$

$$=\sigma_{ij}^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T})\vee\sigma_{ij}^{\mathscr{T}}((g_t)_{t\in T}).$$

(C2) Sea $(i,j)\in(n\times m)$. Vamos a probar que $\sigma_{ij}^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T})\leq\sigma_{(i+1)j}^{\mathscr{T}}((f_t)_{t\in T})$,

para todo $(f_t)_{t\in T}\in F_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$.

Sea $(f_t)_{t\in T}\in F_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$. Entonces,

$\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) = (\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T}$ y $\sigma^{\mathscr{T}}_{(i+1)j}((f_t)_{t\in T}) = (\sigma_{(i+1)j}\circ f_t)_{t\in T}$.

Sea $t\in T$ y $x\in X^U_t$. Como $\mathscr{L}$ es una $LM_{n\times m}$−álgebra resulta que:

$\sigma_{ij}(f_t(x)) \leq \sigma_{(i+1)j}(f_t(x))$, así, $\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) \leq \sigma^{\mathscr{T}}_{(i+1)j}((f_t)_{t\in T})$.

De manera similar podemos probar que:

$\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) \leq \sigma^{\mathscr{T}}_{i(j+1)}((f_t)_{t\in T})$.

(C4) Vamos a probar que $\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}\circ\sigma^{\mathscr{T}}_{rs} = \sigma^{\mathscr{T}}_{rs}$, para todo $(i,j),(r,s)\in(n\times m)$.

Sean $(i,j),(r,s)\in(n\times m)$ y $(f_t)_{t\in T}\in\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$. Probar que

$(\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}\circ\sigma^{\mathscr{T}}_{rs})((f_t)_{t\in T}) = \sigma^{\mathscr{T}}_{rs}((f_t)_{t\in T})$ es equivalente a probar que:

$(\sigma_{ij}\circ\sigma_{rs}\circ f_t)_{t\in T} = (\sigma_{rs}\circ f_t)_{t\in T}$. En efecto:

Sea $t\in T$ y $x\in X^U_t$. Luego, resulta que

$(\sigma_{ij}\circ\sigma_{rs}\circ f_t)(x) = (\sigma_{ij}\circ\sigma_{rs})(f_t(x)) = \sigma_{rs}(f_t(x)) = (\sigma_{rs}\circ f_t)(x)$,

así, $(\sigma_{ij}\circ\sigma_{rs}\circ f_t)_{t\in T} = (\sigma_{rs}\circ f_t)_{t\in T}$.

(C5) Sean $(f_t)_{t\in T},(g_t)_{t\in T}\in\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$ tales que $\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) = \sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((g_t)_{t\in T})$,

para todo $(i,j)\in(n\times m)$. Entonces,

$(\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T} = (\sigma_{ij}\circ g_t)_{t\in T}$, para todo $(i,j)\in(n\times m)$.

De donde resulta que para todo $t\in T$, $\sigma_{ij}\circ f_t = \sigma_{ij}\circ g_t$, esto es,

$\sigma_{ij}(f_t(x)) = \sigma_{ij}(g_t(x))$, para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$.

Usando el axioma (C5) para la $LM_{n\times m}$−álgebra $\mathscr{L}$, obtenemos que:

$f_t(x) = g_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$, así $(f_t)_{t\in T} = (g_t)_{t\in T}$.

(C6) $\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) \vee \sim^{\mathscr{T}} (\sigma^{\mathscr{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}) = (\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T} \vee (\sim\circ\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T}$,

$$= ((\sigma_{ij} \circ f_t) \vee (\sim \circ \sigma_{ij} \circ f_t))_{t\in T},$$

donde $((\sigma_{ij} \circ f_t) \vee (\sim \circ\sigma_{ij} \circ f_t))(x) = \sigma_{ij}(f_t(x)) \vee \sim \sigma_{ij}(f_t(x)) = 1$,

para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Así, $\sigma_{ij}^{\mathcal{T}}((f_t)_{t\in T}) \vee \sim^{\mathcal{T}} (\sigma_{ij}^{\mathcal{T}}((f_t)_{t\in T})) = 1^{\mathcal{T}}$.

(C7) $\sigma_{ij}^{\mathcal{T}}(\sim^{\mathcal{T}} (f_t)_{t\in T}) = (\sigma_{ij} \circ \sim \circ f_t)_{t\in T}$, donde

$(\sigma_{ij} \circ \sim \circ f_t)(x) = \sigma_{ij}(\sim f_t(x)) = \sim \sigma_{n-im-j}(f_t(x)) = (\sim \circ \sigma_{n-im-j} \circ f_t)(x)$,

para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$.

De donde resulta que : $\sigma_{ij}^{\mathcal{T}}(\sim^{\mathcal{T}} (f_t)_{t\in T}) = \sim^{\mathcal{T}} (\sigma_{n-im-j}^{\mathcal{T}}(f_t)_{t\in T})$.

■

Observación 3.4.1. *$C(\mathscr{F}_{\mathcal{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m})$ es una $B-$álgebra.*

Sobre $\mathscr{F}_{\mathcal{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$ definimos los operadores unarios G y H por:

$G((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X^U \longrightarrow L$, $g_t(x) = \bigwedge\{f_s(i \circ x) \mid tRs, s \in T\}$,

$H((f_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, donde $h_t : X^U \longrightarrow L$, $h_t(x) = \bigwedge\{f_s(i \circ x) \mid tQs, s \in T\}$,

donde $i : X_t \longrightarrow X_s$ es la función inclusión.

Lema 3.4.2. *$(\mathscr{F}_{\mathcal{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}, G, H)$ es una $t_d LM_{n\times m}-$álgebra.*

Dem. Por el Lema 3.4.1, sabemos que $\mathscr{F}_{\mathcal{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$ es una $LM_{n\times m}-$álgebra. Entonces, solo nos resta probar que G y H verifican (tC1)-(tC3).

(tC1) $G(1^{\mathcal{T}}) = G((1_t)_{t\in T}) = (f_t)_{t\in T}$, donde $f_t(x) = \bigwedge\{1_s(i \circ x) \mid tRs\} = 1$,

para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$, luego $(f_t)_{t\in T} = (1_t)_{t\in T}$. De donde resulta que:

$G(1^{\mathcal{T}}) = 1^{\mathcal{T}}$. De manera similar se prueba que $H(1^{\mathcal{T}}) = 1^{\mathcal{T}}$.

(tC2) Sean $(f_t)_{t\in T}, (g_t)_{t\in T} \in F_{\mathcal{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$. Entonces, tenemos que:

(a) $G((f_t)_{t\in T}) = (v_t)_{t\in T}$, donde $v_t(x) = \bigwedge\{f_s(i\circ x) \mid tRs\}$,

(b) $G((g_t)_{t\in T}) = (p_t)_{t\in T}$, donde $p_t(x) = \bigwedge\{g_s(i\circ x) \mid tRs\}$,

(c) $G((f_t)_{t\in T} \wedge (g_t)_{t\in T}) = G((f_t \wedge g_t)_{t\in T}) = (u_t)_{t\in T}$,

donde $u_t(x) = \bigwedge\{(f_s \wedge g_s)(i\circ x) \mid tRs\}$.

Sea $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Por (a), (b) y (c) obtenemos que $u_t(x) = v_t(x) \wedge p_t(x)$, luego $(u_t)_{t\in T} = (v_t)_{t\in T} \wedge (p_t)_{t\in T}$, así $G((f_t)_{t\in T} \wedge (g_t)_{t\in T}) = G((f_t)_{t\in T}) \wedge G((g_t)_{t\in T})$. De manera similar se prueba que $H((f_t)_{t\in T} \wedge (g_t)_{t\in T}) = H((f_t)_{t\in T}) \wedge H((g_t)_{t\in T})$.

(tC3) Sean $(f_t)_{t\in T} \in F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m}$. Entonces, tenemos que:

(a) $G(\sigma_{ij}^{\mathcal{T}}(f_t)_{t\in T}) = G((\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde

$g_t(x) = \bigwedge\{(\sigma_{ij}\circ f_s)(i\circ x) \mid tRs\}$.

(b) $\sigma_{ij}^{\mathcal{T}}(G((f_t)_{t\in T})) = \sigma_{ij}^{\mathcal{T}}((p_t)_{t\in T})$, donde $p_t(x) = \bigwedge\{f_s(i\circ x) \mid tRs\}$.

Sea $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Por (a), (b) y el hecho que $\mathcal{L}$ es completamente crisipiana, obtenemos que $g_t(x) = \sigma_{ij}(p_t(x))$, luego $(g_t)_{t\in T} = \sigma_{ij}^{\mathcal{T}}(p_t)_{t\in T}$. Así, $G\circ\sigma_{ij}^{\mathcal{T}} = \sigma_{ij}^{\mathcal{T}}\circ G$. De manera similar se prueba que el operador H conmuta con el operador σ_{ij}.

■

Para cada $\tau \in U^U$, definimos $S(\tau): F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m} \longrightarrow F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m}$ por

- $S(\tau)((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X_t^U \longrightarrow L$ es definida por:

  $g_t(x) = f_t(x\circ\tau)$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

Para cada $J \subseteq U$, definimos la función $\exists(J): F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m} \longrightarrow F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m}$ por

- $\exists(J)((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X_t^U \longrightarrow L$ es definida por:

  $g_t(x) = \bigvee\{f_t(y) \mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J} = x\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

Proposición 3.4.1. *Para cada $J\subseteq U$, $(\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}},\exists(J))$ es una $mLM_{n\times m}-$álgebra.*

Dem. Sea $J\subseteq U$. Vamos a probar que $\exists(J)$ es un cuantificador existencial sobre $\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$.

(E1) $\exists(J)(0^{\mathcal{T}})=\exists(J)((0_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$, donde

$$g_t(x)=\bigvee\{0_t(y)\mid y\in X^U_t, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}=\bigvee\{0\}=0,$$

para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$. De donde obtenemos que $(g_t)_{t\in T}=0^{\mathcal{T}}$,

luego $\exists(J)(0^{\mathcal{T}})=0^{\mathcal{T}}$.

(E2) Sea $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$. Vamos a probar que $(f_t)_{t\in T}\leq\exists(J)((f_t)_{t\in T})$.

Tenemos que: $\exists(J)((f_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$, donde

$$g_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X^U_t, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\},$$

para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$.

De donde obtenemos que $f_t(x)\leq g_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$,

luego $(f_t)_{t\in T}\leq(g_t)_{t\in T}$.

(E3) Sean $(f_t)_{t\in T},(g_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$. Tenemos que:

(a)
$$\begin{aligned}\exists(J)((f_t)_{t\in T}\wedge\exists(J)(g_t)_{t\in T})&=\exists(J)((f_t)_{t\in T}\wedge(h_t)_{t\in T})\\&=\exists(J)((f_t\wedge h_t)_{t\in T})\\&=(u_t)_{t\in T},\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\exists(J)((f_t)_{t\in T})\wedge\exists(J)((g_t)_{t\in T})&=(p_t)_{t\in T}\wedge(v_t)_{t\in T}\\&=(p_t\wedge v_t)_{t\in T},\end{aligned}$$

donde, para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$,

$h_t(x)=\bigvee\{g_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$,

$u_t(x)=\bigvee\{(f_t(z)\wedge h_t(z))\mid z\in X_t^U, z\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$,

$=\bigvee\{f_t(z)\wedge g_t(y)\mid z,y\in X_t^U, z\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}=y\mid_{U\setminus J}\}$,

$p_t(x)=\bigvee\{f_t(z)\mid z\in X_t^U, z\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$,

$v_t(x)=\bigvee\{g_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$.

De donde resulta que, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$,

$p_t(x)\wedge v_t(x)=\bigvee\{f_t(z)\wedge g_t(y)\mid z,y\in X_t^U, z\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}=y\mid_{U\setminus J}\}$

$=u_t(x)$.

Por lo tanto, $\exists(J)((f_t)_{t\in T}\wedge\exists(J)((g_t)_{t\in T})=\exists(J)((f_t)_{t\in T})\wedge\exists(J)((g_t)_{t\in T})$.

(E13) Sean $(i,j)\in(n\times m)$ y $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$. Entonces, tenemos que

(a) $\exists(J)(\sigma^{\mathcal{T}}_{ij})((f_t)_{t\in T})=\exists(J)((\sigma_{ij}\circ f_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$,

donde $g_t(x)=\bigvee\{\sigma_{ij}(f_t(y))\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

(b) $\sigma^{\mathcal{T}}_{ij}(\exists(J)((f_t)_{t\in T})=\sigma^{\mathcal{T}}_{ij}((h_t)_{t\in T})=(\sigma_{ij}\circ h_t)_{t\in T}$

con $h_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

Dado que $\mathcal{L}$ es completamente crisipiana deducimos que

$\sigma_{ij}(h_t(x))=g_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$, luego

$\exists(J)(\sigma^{\mathcal{T}}_{ij}((f_t)_{t\in T}))=\sigma^{\mathcal{T}}_{ij}(\exists(J)((f_t)_{t\in T}))$.

■

La siguiente proposición nos proporciona el ejemplo más importante de $t_d pLM_{n\times m}$−álgebra.

Proposición 3.4.2. $(\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}, U, S, \exists, G, H)$ *es una* $t_d pLM_{n\times m}$*−álgebra.*

Dem. Vamos a verificar las condiciones de la Definición 3.4.1.

(a) En primer lugar vamos a probar que se verifican las condiciones de la Definición 3.1.8.

(i) Sea $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$, $t\in T$ y $x\in X^U_t$.

Aplicando la definición de S, obtenemos que:

$S(1_U)((f_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$, donde $g_t(x)=f_t(x\circ 1_U)=f_t(x)$,

así $S(1_U)((f_t)_{t\in T})=(f_t)_{t\in T}$, luego $S(1_U)=1_{\mathscr{F}^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}}$.

(ii) Sean $\rho,\tau\in U^U$, $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$, $t\in T$ y $x\in X^U_t$.

$S(\rho\circ\tau)((f_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$ con $g_t(x)=f_t(x\circ\rho\circ\tau)$.

$(S(\rho)\circ S(\tau))((f_t)_{t\in T})=S(\rho)(S(\tau)((f_t)_{t\in T}))=S(\rho)((h_t)_{t\in T})=(p_t)_{t\in T}$,

donde $h_t(x)=f_t(x\circ\tau)$ y $p_t(x)=h_t(x\circ\rho)=f_t(x\circ\rho\circ\tau)$.

De donde resulta que $S(\rho\circ\tau)((f_t)_{t\in T})=(S(\rho)\circ S(\tau))((f_t)_{t\in T})$,

luego $S(\rho\circ\tau)=S(\rho)\circ S(\tau)$.

(iii) Sea $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$, $t\in T$ y $x\in X^U_t$. Entonces, tenemos que:

$\exists(\emptyset)((f_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$, donde

$g_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X^U_t, y\mid_{U}=x\mid_{U}\}=\bigvee\{f_t(x)\}=f_t(x)$, así

$\exists(\emptyset)((f_t)_{t\in T})=(f_t)_{t\in T}$,

es decir, $\exists(\emptyset)=1_{F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}}$.

(iv) Sean $J,J'\subseteq U$ y $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}$. Entonces,

(1) $\exists(J\cup J')((f_t)_{t\in T})=(g_t)_{t\in T}$

con $g_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus(J\cup J')}=x\mid_{U\setminus(J\cup J')}\}$,

para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

(2) $(\exists(J)\circ\exists(J'))((f_t)_{t\in T})=\exists(J)(\exists(J')(f_t)_{t\in T})=\exists(J)((h_t)_{t\in T})=(p_t)_{t\in T}$,

donde $h_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J'}=x\mid_{U\setminus J'}\}$ y

$p_t(x)=\bigvee\{h_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

Entonces, obtenemos que:

$p_t(x)=\bigvee\{f_t(z)\mid z\in X_t^U$, existe $y\in X_t^U : z\mid_{U\setminus J'}=y\mid_{U\setminus J'}, x\mid_{U\setminus J}=y\mid_{U\setminus J}\}$.

Ahora probaremos que los conjuntos

$A=\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus(J\cup J')}=x\mid_{U\setminus(J\cup J')}\}$

y $B=\{f_t(z)\mid z\in X_t^U$, existe $y\in X_t^U$ tal que $z\mid_{U\setminus J'}=y\mid_{U\setminus J'}, x\mid_{U\setminus J}=y\mid_{U\setminus J}\}$ son iguales.

Sea $z\in X_t^U$ tales que $z\mid_{U\setminus(J\cup J')}=x\mid_{U\setminus(J\cup J')}$. Consideremos $y\in X_t^U$, definida por:

$$y(a)=\begin{cases} z(a) & \text{si } a\in U\setminus J', \\ x(a) & \text{si } a\in J', \end{cases}.$$

De donde resulta que $y\mid_{U\setminus J'}=z\mid_{U\setminus J'}$. Si $a\in U\setminus J$, entonces tenemos dos casos:

(I) Si $a\in J'$ entonces, $y(a)=x(a)$.

(II) Si $a\notin J'$ resulta que $a\in U\setminus(J\cup J')$, así $y(a)=z(a)=x(a)$.

De (I) y (II), tenemos que $z\mid_{U\setminus J'}=y\mid_{U\setminus J'}$ y $x\mid_{U\setminus J}=y\mid_{U\setminus J}$, así $A\subseteq B$.

Recíprocamente, sea $z\in X_t^U$ tal que, existe $y\in X_t^U$ con $z\mid_{U\setminus J'}=y\mid_{U\setminus J'}$

y $x\mid_{U\setminus J}=y\mid_{U\setminus J}$. De donde resulta que

$z\mid_{(U\setminus J')\cap(U\setminus J)}=y\mid_{(U\setminus J')\cap(U\setminus J)}$ y $x\mid_{(U\setminus J)\cap(U\setminus J')}=y\mid_{(U\setminus J)\cap(U\setminus J')}$, luego

$z\mid_{U\setminus(J\cup J')}=x\mid_{U\setminus(J\cup J')}$.

Entonces, obtenemos que $B\subseteq A$, luego $A=B$.

Tenemos que $g_t(x)=p_t(x)$ para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$, así

$\exists(J\cup J')=\exists(J)\circ\exists(J')$.

(v) Sea $J\subseteq U$, $\rho,\tau\in U^U$ y $(f_t)_{t\in T}\in F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m}$, tal que $\rho\mid_{U\setminus J}=\tau\mid_{U\setminus J}$.

Entonces, obtenemos que:

(1) $(S(\rho)\circ\exists(J))((f_t)_{t\in T})=S(\rho)(\exists(J))((f_t)_{t\in T}))=(g_t)_{t\in T}$, donde

$g_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=(x\circ\rho)\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

(2) $(S(\tau)\circ\exists(J))((f_t)_{t\in T})=S(\tau)(\exists(J))((f_t)_{t\in T})=(h_t)_{t\in T}$, donde

$h_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=(x\circ\tau)_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

De $\rho\mid_{U\setminus J}=\tau\mid_{U\setminus J}$ resulta que $(x\circ\rho)\mid_{U\setminus J}=(x\circ\tau)\mid_{U\setminus J}$, para todo $x\in X_t^U$,

luego $g_t(x)=h_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

De donde resulta que: $S(\rho)\circ\exists(J)=S(\tau)\circ\exists(J)$.

(vi) Sea $J\subseteq U$, $(f_t)_{t\in T}\in F_{\mathcal{T},\mathcal{L}}^{U,n\times m}$ y $\rho\in U^U$ tal que $\rho\mid_{\rho^{-1}(J)}$ es inyectiva.

Entonces, tenemos que:

(1) $(\exists(J)\circ S(\rho))((f_t)_{t\in T}))=(g_t)_{t\in T}$, donde

$g_t(x)=\bigvee\{f_t(y\circ\rho)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$, para todo $t\in t$ y $x\in X_t^U$.

(2) $(S(\rho)\circ\exists(\rho^{-1}(J)))((f_t)_{t\in T})=(h_t)_{t\in T}$, donde

$h_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}=(x\circ\rho)\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}\}$, para todo $t\in T$

y $x\in X_t^U$.

Ahora, vamos a probar que los conjuntos A y B son iguales, donde

$A=\{f_t(y\circ\rho)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$ y

$B=\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}=(x\circ\rho)\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}\}$.

Sea $y\in X_t^U$ tal que $y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}$. Consideremos $z=y\circ\rho$.

Sea $a\in U\setminus\rho^{-1}(J)$. Entonces, $z(a)=y(\rho(a))=x(\rho(a))=(x\circ\rho)(a)$,

así $z\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}=(x\circ\rho)\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}$. Entonces, obtenemos que $A\subseteq B$.

Recíprocamente, sea $y\in X_t^U$ tal que $y\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}=(x\circ\rho)\mid_{U\setminus\rho^{-1}(J)}$.

Como $\rho\mid_{\rho^{-1}(J)}$ es inyectiva, podemos considerar la función biyectiva

$\rho':\rho^{-1}(J)\longrightarrow J$, definida por $\rho'(a)=\rho(a)$ para todo $a\in\rho^{-1}(J)$.

También, vamos a considerar $z\in X_t^U$, definida por:

$$z(a)=\begin{cases} y(\rho'^{-1}(a)) & \text{si } a\in J,\\ x(a) & \text{si } a\in U\setminus J,\end{cases}.$$

Se puede ver que $z\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}$. De donde se deduce que $(z\circ\rho)(a)=y(a)$,

para todo $a\in U$, así $z\circ\rho=y$.

De donde resulta que $B\subseteq A$, así $A=B$.

(vi) Aplicando la Proposición 3.4.1.

(b) Aplicando el Lema 3.4.2.

(c) Sea $\tau \in U^U$, $(f_t)_{t\in T} \in F^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$, $t\in T$ y $x\in X^U_t$. De donde resulta que:

(1) $S(\tau)(G((f_t)_{t\in T})) = S(\tau)((g_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, donde

$g_t(x) = \bigwedge\{f_s(i\circ x) \mid tRs, s\in T\}$ y $h_t(x) = g_t(x\circ\tau) = \bigwedge\{f_s(i\circ x\circ\tau) \mid tRs\}$.

(2) $G(S(\tau)((f_t)_{t\in T})) = G((p_t)_{t\in T}) = (u_t)_{t\in T}$, donde $p_t(x) = f_t(x\circ\tau)$ y

$u_t(x) = \bigwedge\{p_s(i\circ x) \mid tRs, s\in T\}$.

De (1) y (2) obtenemos que $h_t(x) = u_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$, así

$(h_t)_{t\in T} = (u_t)_{t\in T}$, es decir, $S(\tau)(G((f_t)_{t\in T})) = G(S(\tau))((f_t)_{t\in T}))$.

(d) En forma similar a (c).

■

Definición 3.4.4. *Sea $(\mathcal{L}, U, S, \exists, G, H)$ una $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra. Un subconjunto J de U es un soporte de $p\in L$ si $\exists(U\setminus J)p = p$. La intersección de los soportes de un elemento $p\in L$ será denotado por J_p. Una $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra es localmente finita si todo elemento tiene soporte finito. El grado de $(\mathcal{L}, U, S, \exists, G, H)$ es la cardinalidad de U.*

Observación 3.4.2. *Consideremos la $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra $(\mathcal{F}^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}, U, S, \exists, G, H)$. Aplicando la Definición 3.4.4, $M\subseteq U$ es un soporte de $(f_t)_{t\in T}\in F^{U,n\times m}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$ si $\exists(U\setminus M)((f_t)_{t\in T}) = (f_t)_{t\in T}$. Usando la definición de $\exists$, obtenemos que $\bigvee\{f_t(y) \mid y\in X^U_t, y\mid_M = x\mid_M\} = f_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X^U_t$.*

Lema 3.4.3. *Consideremos la $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra $(\mathcal{F}^{U,n\times m}_{\mathcal{T}}, U, S, \exists, G, H)$, donde $\mathcal{F}^{U,n\times m}_{\mathcal{T}} = \{(f_t)_{t\in T} \mid f_t : X^U_t \longrightarrow D(\mathbf{2})$ para cada $t\in T\}$, $(f_t)_{t\in T}\in\mathcal{F}^{U,n\times m}_{\mathcal{T}}$ y $Q\subseteq U$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Q es un soporte de $(f_t)_{t\in T}$,*

(b) *Para todo $(x_t)_{t\in T}, (y_t)_{t\in T}$, $x_t, y_t\in X^U_t$, para todo $t\in T$ tenemos que:*

$x_t\mid_Q = y_t\mid_Q, t\in T \Rightarrow f_t(x_t)=f_t(y_t),\ t\in T.$

Dem. (a)⇒ (b): Supongamos que Q es soporte de $(f_t)_{t\in T}$. Aplicando la Definición 3.4.4 y la Definición de $\exists$, resulta que: $\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_Q = x\mid_Q\} = f_t(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$. Sean $t\in T$, $x_t, y_t\in X_t^U$ tales que $x_t\mid_Q = y_t\mid_Q$. Entonces, tenemos:

$$f_t(x_t)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_Q = x_t\mid_Q\}\geq f_t(y_t)$$

$$f_t(y_t)=\bigvee\{f_t(x)\mid x\in X_t^U, x\mid_Q = y_t\mid_Q\}\geq f_t(x_t)$$

Así, $f_t(x)=f_t(y_t)$.

(b)⇒ (a): Usando la definición de $\exists$ obtenemos que $\exists(U\backslash Q)(f_t)_{t\in T}=(g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X_t^U \longrightarrow D(\mathbf{2})$, $g_t(x)=\bigvee\{f_t(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_Q = x\mid_Q\}$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$. Sea $t\in T$ y $x\in X_t^U$. Por (b) resulta que $g_t(x)=\bigvee\{f_t(x)\mid y\in X_t^U, y\mid_Q = x\mid_Q\} = f_t(x)$. De donde obtenemos que $(g_t)_{t\in T}=(f_t)_{t\in T}$, así $\exists(U\setminus Q)(f_t)_{t\in T} = (f_t)_{t\in T}$, es decir, Q es soporte de $(f_t)_{t\in T}$.

■

Lema 3.4.4. *Sea $f : L\longrightarrow L'$ un morfismo de $t_d pLM_{n\times m}$−álgebras, $p\in L$, $Q\subseteq U$. Si Q es soporte de p, entonces Q es soporte de $f(p)$.*

Dem. Como Q es soporte de p, resulta que $\exists(U\setminus Q)p=p$. Aplicando la definición de morfismo de $t_d pLM_{n\times m}$−álgebras obtenemos que: $f(\exists(U\backslash Q)p)=\exists(U\backslash Q)f(p)=f(p)$, luego Q es soporte de $f(p)$.

■

Lema 3.4.5. *Sea $(\mathscr{L},G,H)$ una $t_d LM_{n\times m}$−álgebra. Entonces,*

(i) $(C(\mathscr{L}),U,S,\exists,C(G),C(H))$ *es una $t_d pB$−álgebra.*

(ii) *Si $\mathscr{L}$ es localmente finita, entonces $C(\mathscr{L})$ es localmente finita.*

Dem. Solo probaremos (i). Aplicando [7, p. 453, Remark 4.2], tenemos que $C(L)$ puede ser dotado de una estructura de pB−álgebra. Por la Proposición 3.2.2, tenemos que $(C(\mathscr{L}), C(G), C(H))$ es una $t_d B-$álgebra. Las condiciones (iii) y (iv) de la Definición 1.1.9 son bien conocidas para los elementos de $C(L)$, luego $C(\mathscr{L})$ es una $t_d pB-$álgebra.

■

Sea $(\mathscr{B}, U, S, \exists, G, H)$ una $t_d pB-$álgebra. Consideremos sobre $D(B)$ las siguientes operaciones, para todo $\tau \in U^U$, $f \in D(B)$ y $J \subseteq U$:

- $(D(S)(\tau))(f) = S(\tau) \circ f$,
- $(D(\exists)(J))(f) = \exists(J) \circ f$,
- $(D(G))(f) = G \circ f$,
- $(D(H))(f) = H \circ f$.

Entonces, se verifica el siguiente:

Lema 3.4.6.

(i) *$(D(\mathscr{B}), U, D(S), D(\exists), D(G), D(H))$ es una $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra.*

(ii) *Si $\mathscr{B}$ es localmente finita, entonces $D(\mathscr{B})$ es localmente finita.*

La asignación $\mathscr{B} \mapsto C(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \mapsto D(\mathscr{B})$ establece los funtores adjuntos C y D entre la categoría de las $B-$álgebras poliádicas temporal débiles y la categoría de las $LM_{n\times m}-$álgebras poliádicas temporales débiles.

Definición 3.4.5. *Sea $(\mathscr{L}, U, S, \exists, G, H)$ una $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra. Consideremos la función $\omega_{\mathscr{L}} : L \longrightarrow D(C(L))$, $\omega_{\mathscr{L}}(x)(i,j) = \sigma_{ij}(x)$, para todo $x \in L$ y $(i,j) \in (n \times m)$.*

Lema 3.4.7. *$\omega_{\mathscr{L}}$ es un morfismo inyectivo de $t_d pLM_{n\times m}-$álgebras.*

Dem. Por el Lema 3.2.4, $\omega_{\mathscr{L}}$ es un morfismo inyectivo de $t_d LM_{n\times m}-$álgebras. Solo nos resta probar que $\omega_{\mathscr{L}}$ conmuta con S y $\exists$.

Sea $J \subseteq U$, $\tau \in U^U$, $x \in L$, $(i,j) \in (n \times m)$.

(a) Tenemos que: $\omega_{\mathscr{L}}(S(\tau)(x))(i,j) = \sigma_{ij}(S(\tau))(x) = S(\tau)(\sigma_{ij}x)$.

Por otra parte, $D(S)(\tau)(\omega_{\mathscr{L}}(x))(i,j) = S(\tau)(\omega_{\mathscr{L}}(x)(i,j)) = S(\tau)(\sigma_{ij}(x))$.

Por lo tanto, $\omega_{\mathscr{L}} \circ S(\tau) = D(S)(\tau) \circ \omega_{\mathscr{L}}$.

(b) Tenemos que: $\omega_{\mathscr{L}}(\exists(J)(x))(i,j) = \sigma_{ij}(\exists(J)(x))$.

Por otra parte, $D(\exists)(J)(\omega_{\mathscr{L}}(x))(i,j) = \exists(J)(\omega_{\mathscr{L}}(x)(i,j)) = \exists(J)(\sigma_{ij}x)$.

Como $\exists(J)$ conmuta con σ_{ij}, obtenemos que $D(\exists)(J) \circ \omega_{\mathscr{L}} = \omega_{\mathscr{L}} \circ \exists(J)$.

■

Lema 3.4.8. *Sea $\mathscr{T} = (T,(X_t)_{t\in T},R,Q,0)$ un sistema temporal débil. Entonces $C(\mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U,n\times m}) \simeq \mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U,n\times m}$.*

Dem. Por Lema 3.2.5, tenemos que $\mathbf{2} \simeq C(D(\mathbf{2}))$. Consideremos un isomorfismo $u : \mathbf{2} \longrightarrow C(D(\mathbf{2})) \subseteq D(\mathbf{2})$. Definimos la función $\Phi : \mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U,n\times m} \longrightarrow C(\mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U,n\times m})$ por: $\Phi((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$ con $f_t : X_t^U \longrightarrow \mathbf{2}$, $g_t : X_t^U \longrightarrow D(\mathbf{2})$, $g_t = u \circ f_t$, para cada $t \in T$. No es difícil ver que Φ es un morfismo inyectivo de $t_d pB$−álgebras. Para probar la sobrectividad, consideremos $(h_t)_{t\in T} \in C(\mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U,n\times m})$. Entonces, $\sigma_{ij}^{\mathscr{T}}((h_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$ si, y sólo si, $\sigma_{ij} \circ h_t = h_t$, para todo $(i,j) \in (n\times m)$, para todo $t \in T$ si, y sólo si, $\sigma_{ij}(h_t(x)) = h_t(x)$, para todo $(i,j) \in (n\times m)$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$ si, y sólo si, $h_t(x) \in C(D(\mathbf{2})) \simeq \mathbf{2}$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Por lo tanto, Φ es sobreyectiva.

■

3.4.2. Representación de $\boldsymbol{t_d pLM_{n\times m}}$−álgebras

En esta subsección obtenemos un teorema de representación para las $t_d pLM_{n\times m}$−álgebra.

Proposición 3.4.3. *Sea* $\mathcal{T}=(T,(X_t)_{t\in T},R,Q,0)$ *un sistema temporal débil. Entonces existe un* $t_d pLM_{n\times m}-$*morfismo inyectivo* $\lambda: D(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^U)\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{U,n\times m}$.

Dem. Tenemos que $D(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^U)=\{v:(n\times m)\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^U \mid r\leq s$ implica $v(i,r)\leq v(i,s), v(r,j)\leq v(s,j)\}$. Sea $v\in D(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^U)$. Para cada $(i,j)\in(n\times m)$ vamos a denotar $v(i,j)=(g_t^{ij})_{t\in T}$, donde $g_t^{ij}:X_t^U\longrightarrow \mathbf{2}$, tal que para todo $r\leq s$ y $t\in T$, $g_t^{ir}\leq g_t^{is}$, $g_t^{rj}\leq g_t^{sj}$. Vamos a definir $\lambda: D(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^U)\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{U,n\times m}$, $\lambda(v)=(f_t)_{t\in T}$, donde para todo $t\in T$, $x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$, $f_t: X_t^U\longrightarrow D(\mathbf{2})$ está definida por: $f_t(x)(i,j)=g_t^{ij}(x)$. Como las g_t^{ij} son crecientes componente a componente resulta que $f_t(x)$ también lo son, así $f_t(x)\in D(\mathbf{2})$. Debemos probar que λ es un morfismo de $t_d pLM_{n\times m}-$álgebras, es decir, λ es un morfismo de $t_d LM_{n\times m}-$álgebras y conmuta con las operaciones S y $\exists$. Sean $v_1,v_2\in D(F_{\mathcal{T}}^U)$ con $v_1(i,j)=(g_t^{ij})_{t\in T}$ y $v_2(i,j)=(u_t^{ij})_{t\in T}$, donde $g_t^{ij},u_t^{ij}:X_t^U\longrightarrow \mathbf{2}$. Vamos a probar que $\lambda(0_{D(F_{\mathcal{T}}^U)})=0_{F_{\mathcal{T}}U,n\times m}$. Tenemos que:

(1) $0_{D(F_{\mathcal{T}}^U)}=0:(n\times m)\longrightarrow F_{\mathcal{T}}^U$, $0(i,j)=(0_t^{ij})_{t\in T}$ con $0_t^{ij}:X_t^U\longrightarrow \mathbf{2}$, $0_t^{ij}(x)=0$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

(2) $0_{F_{\mathcal{T}}U,n\times m}=(0_t)_{t\in T}$ con $0_t: X_t^U\longrightarrow D(\mathbf{2})$ es definida por $0_t(x)(i,j)=0$, para todo $x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$.

De (1) y (2) resulta que $0_t(x)(i,j)=0_t^{ij}(x)$, para todo $t\in T, x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$, así $\lambda(0_{D(F_{\mathcal{T}}U)})=0_{F_{\mathcal{T}}U,n\times m}$. En forma similar se puede probar que $\lambda(1_{D(F_{\mathcal{T}}^U)})=1_{F_{\mathcal{T}}U,n\times m}$.

- Vamos a probar que $\lambda(v_1\vee v_2)=\lambda(v_1)\vee\lambda(v_2)$.

  Por la definición de λ, tenemos que: $\lambda(v_1\vee v_2)=(p_t)_{t\in T}$, $\lambda(v_1)=(f_t)_{t\in T}$, $\lambda(v_2)=(h_t)_{t\in T}$, donde $p_t,f_t,h_t: X_t^U\longrightarrow D(\mathbf{2})$, $(p_t(x))(i,j)(i,j)=(g_t^{ij}\vee u_t^{ij})(x)$, $(f_t(x))(i,j)=g_t^{ij}(x)$, $(h_t(x))(i,j)=u_t^{ij}(x)$, para todo $t\in T, x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$.

Sea $t \in T$ y $x \in X_t^U$. La relación $(g_t^{ij} \vee u_t^{ij})(x) = g_t^{ij}(x) \vee u_t^{ij}(x)$ es válida, así resulta que: $(p_t(x))(i,j) = (f_t(x))(i,j) \vee (h_t(x))(i,j)$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$. Luego $\lambda(v_1 \vee v_2) = \lambda(v_1) \vee \lambda(v_2)$.

De la misma manera podemos probar que: $\lambda(v_1 \wedge v_2) = \lambda(v_1) \wedge \lambda(v_2)$.

- Vamos a probar que $\lambda \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ij} \circ \lambda$.

  Sea $(i,j) \in (n \times m)$. Tenemos que

$$(\sigma_{ij}(v_1))(i,j) = \sigma_{ij}(v_1(i,j)) = \sigma_{ij}((g_t^{ij})_{t\in T}) = (\sigma_{ij} \circ g_{t\in T}^{ij}),$$

  luego $\lambda(\sigma_{ij}(v_1)) = (f_t)_{t\in T}$ con $f_t(x)(i,j) = (\sigma_{ij} \circ g_t^{ij})(x)$, para todo $t \in T, x \in X_t^U$ y $(i,j) \in (n \times m)$.

  Por otra parte, $\sigma_{ij}(\lambda(v_1)) = \sigma_{ij}((h_t)_{t\in T}) = (\sigma_{ij} \circ h_t)_{t\in T}$, donde $h_t(x)(i,j) = g_t^{ij}(x)$. Sea $x \in X_t^U$ y $t \in T$. De donde resulta que $f_t(x)(i,j) = \sigma_{ij}(h_t(x)(i,j))$, para todo $(i,j) \in (n \times m)$, así $\lambda(\sigma_{ij}(v_1)) = \sigma_{ij}(\lambda(v_1))$.

- Vamos a probar que λ conmuta con los operadores temporales G y H.

  Sea $(i,j) \in (n \times m)$. Entonces, $D(G)(v_1)(i,j) = G(v_1(i,j)) = G((g_t^{ij})_{t\in T}) = (h_t^{ij})_{t\in T}$, donde $h_t^{ij}(x) = \bigwedge\{g_s^{ij}(i \circ x) \mid tRs, s \in T\}$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. De donde resulta que $\lambda(D(G)(v_1)) = (f_t)_{t\in T}$ con $f_t(x)(i,j) = h_t^{ij}(x)$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$.

  Por otra parte, $G(\lambda(v_1)) = G((g_t^{ij})_{t\in T}) = (u_t^{ij})$ con $u_t^{ij} = \bigwedge\{g_s^{ij}(i \circ x) \mid tRs\}$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Podemos ver que $f_t(x)(i,j) = u_t^{ij}(x)$ para todo $t \in T$, $x \in X_t^U$ y $(i,j) \in (n \times m)$, luego $\lambda \circ G = G \circ \lambda$. De manera similar se puede probar que $\lambda \circ H = H \circ \lambda$.

- Vamos a probar que λ conmuta con S.

Sea $\tau \in U^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$. Entonces, $D(S)(\tau)(v_1)(i,j)=S(\tau)(v_1(i,j))=S(\tau)((g_t^{ij})_{t\in T})=(h_t^{ij})_{t\in T}$ con $h_t^{ij}(x)=g_t^{ij}(x\circ\tau)$. De donde resulta que: $(\lambda\circ D(S)(\tau))(v_1)=\lambda(D(S)(\tau)(v_1))=(f_t)_{t\in T}$, donde $f_t(x)(i,j)=h_t^{ij}(x)$.

Por otra parte, $(S(\tau)\circ\lambda)(v_1)=S(\tau)(\lambda(v_1))=(p_t)_{t\in T}$, donde $p_t(x)(i,j)=g_t^{ij}(x\circ\tau)$. De donde resulta que: $f_t(x)(i,j)=p_t(x)(i,j)$, para todo $t\in T$, $x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$, así $\lambda\circ D(S)(\tau)=S(\tau)\circ\lambda$.

- Vamos a probar que λ conmuta con $\exists$.

  Sea $J\subseteq U$ y sea $(i,j)\in(n\times m)$. Tenemos que:

  $D(\exists)(J)(v_1)(i,j)=\exists(J)(v_1(i,j))=\exists(J)((g_t^{ij})_{t\in T})=(h_t^{ij})_{t\in T}$, donde $h_t^{ij}(x)=\bigvee\{g_t^{ij}(y)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$,para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$. Luego: $(\lambda\circ D(\exists)(J))(v_1)=\lambda(D(\exists(J)(v_1)))=(f_t)_{t\in T}$ con $f_t(x)(i,j)=h_t^{ij}(x)$, para todo $t\in T$ y $x\in X_t^U$.

  Por otra parte, $(\exists(J)\circ\lambda)(v_1)=\exists(J)(\lambda(v_1))=\exists(J)((p_t)_{t\in T})=(v_t)_{t\in T}$, donde $p_t(x)(i,j)=g_t^{ij}(x)$ y $v_t(x)(i,j)=\bigvee\{p_t(y)(i,j)\mid y\in X_t^U, y\mid_{U\setminus J}=x\mid_{U\setminus J}\}$. De donde resulta que $v_t(x)(i,j)=h_t^{ij}(x)$ para todo $t\in T$, $x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$ así, $(v_t)_{t\in T}=(h_t^{ij})_{t\in T}$, es decir, $\lambda\circ D(\exists)(J)=\exists(J)\circ\lambda$.

- Vamos a probar que λ es inyectiva.

  Sean $v_1,v_2\in D(F_{\mathscr{T}}^U)$, $v_1(i,j)=(g_t^{ij})_{t\in T}$ y $v_2(i,j)=(p_t^{ij})_{t\in T}$, para todo $(i,j)\in(n\times m)$ tales que $\lambda(v_1)=\lambda(v_2)$. Usando la definición de λ, obtenemos que $g_t^{ij}(x)=p_t^{ij}(x)$, para todo $t\in T, x\in X_t^U$ y $(i,j)\in(n\times m)$. De donde resulta que $v_1(i,j)=v_2(i,j)$, para todo $(i,j)\in(n\times m)$, luego $v_1=v_2$. Por lo tanto, λ es inyectiva.

■

El siguiente teorema muestra que toda $t_d pLM_{n\times m}$−álgebra puede representarse por medio de la $t_d pLM_{n\times m}$−álgebra $\mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U,n\times m}$ asociada con un sistema temporal débil $\mathscr{T}$.

Teorema 3.4.1. *Sea* $(\mathscr{L}, U, S, \exists, G, H)$ *una* $t_d pLM_{n\times m}$*–álgebra localmente finita de grado infinito y* Γ *un filtro propio de* $\mathscr{L}$ *con* $J_p = \emptyset$ *para todo* $p \in \Gamma$*. Entonces existe un sistema temporal débil* $\mathscr{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, Q, 0)$ *y un morfismo de* $t_d pLM_{n\times m}$*–álgebras* $\Phi : L \longrightarrow F_{\mathscr{T}}^{U, n\times m}$ *tal que, para todo* $p \in \Gamma$*, se satisface la siguiente propiedad:*

(P) $\Phi(p) = (f_t)_{t\in T} \Rightarrow (f_0(x))(i, j) = 1$, *para todo* $x \in X_t^U$, $(i, j) \in (n\times m)$.

Dem. Sea $(\mathscr{L}, U, S, \exists, G, H)$ una $t_d pLM_{n\times m}$–álgebra y Γ un filtro propio de $\mathscr{L}$. Por el Lema 3.4.5, tenemos que $(C(\mathscr{L}), U, S, \exists, C(G), C(H))$ es una $t_d pB$–álgebra y $\Gamma_0 = \Gamma \cap C(L)$ es un filtro propio de $C(\mathscr{L})$. Aplicando el teorema de representación para las $t_d pB$–álgebras, resulta que existe un sistema temporal débil

$$\mathscr{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, Q, 0)$$

y un morfismo de $t_d pB$–álgebras $\mu : C(L) \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathscr{T}}^U$, tal que para todo $p \in \Gamma_o$ se satisface la siguiente propiedad: $\mu(p) = (g_t)_{t\in T} \Rightarrow g_0(x) = 1$, para todo $x \in X_t^U$. Sea $D(\mu) : D(C(L)) \longrightarrow D(F_{\mathscr{T}}^U)$ el correspondiente morfismo de μ por el funtor D. Usando el Lema 3.4.7, tenemos un morfismo inyectivo de $t_d pLM_{n\times m}$–álgebras $\omega_{\mathscr{L}} : L \longrightarrow D(C(L))$ y usando la Proposición 3.4.3, tenemos un morfismo inyectivo de $t_d pLM_{n\times m}$–álgebras $\lambda : D(\mathscr{F}_{\mathscr{T}}^U) \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathscr{T}}^{U, n\times m}$. Ahora, en el siguiente diagrama,

$$L \xrightarrow{\omega_L} D(C(L)) \xrightarrow{D(\mu)} D(F_{\mathscr{T}}^U) \xrightarrow{\lambda} F_{\mathscr{T}}^{U, n\times m}$$

si consideramos la composición $\lambda \circ D(\mu) \circ \omega_L$ obtenemos el morfismo inyectivo requerido.

Ahora, vamos a verificar la condición (P) del teorema. Sea $p \in \Gamma$ y $(i, j) \in (n\times m)$. Sabemos que $\omega_{\mathscr{L}}(p)(i, j) = \sigma_{ij}(p)$ y $\sigma_{ij}(p) \in \Gamma_0$. Entonces, $D(\mu)(\omega_{\mathscr{L}}(p)) = \mu \circ \omega_{\mathscr{L}}(p)$, luego $(\mu \circ \omega_{\mathscr{L}}(p))(i, j) = \mu(\omega_{\mathscr{L}}(p)(i, j)) = \mu(\sigma_{ij}(p))$. Supongamos que $\mu(\sigma_{ij} p) = (g_t^{ij})_{t\in T}$, donde $g_t^{ij} : X_t^U \longrightarrow \mathbf{2}$. Como $\sigma_{ij} p \in \Gamma_0$, obtenemos que $g_0^{ij}(x) = 1$, para todo $x \in X_t^U$. De donde resulta que: $\Phi(p) = \lambda(D(\mu)(\omega_{\mathscr{L}}(p))) = \lambda(D(\mu)(\sigma_{ij} p)) = \lambda(\mu(\sigma_{ij} p))$. De donde resulta que $\Phi(p)(i, j) = (f_t)_{t\in T}$, donde, aplicando la prueba de la Proposición 3.4.3, tenemos que $f_t(x)(i,j) = g_t^{ij}(x)$, para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Entonces, $f_0(x)(i,j) = g_0^{ij}(x) = 1$. ■

Observación 3.4.3. *La idea principal de la prueba del Teorema 3.4.1 es usar los funtores adjuntos C y D para transferir el teorema de representación para las $t_d pB-$álgebras en el teorema de representación para las $t_d pLM_{n\times m}-$álgebras.*

3.5. $\boldsymbol{tpLM_{n\times m}}-$álgebras

En esta subsección, introduciremos las $LM_{n\times m}-$álgebras poliádicas temporales (o $tpLM_{n\times m}-$álgebras) como una generalización común de las $B-$álgebras poliádicas temporales y las LM_n-álgebras poliádicas temporales.

3.5.1. $\boldsymbol{tpLM_{n\times m}}-$álgebras: definición y ejemplo

Definición 3.5.1. *Una $LM_{n\times m}-$álgebras poliádica temporal (o $tpLM_{n\times m}-$álgebra) es una $t_d pLM_{n\times m}-$álgebra $(\mathscr{L},U,S,\exists,G,H)$ tal que G y H verifican la siguiente propiedad adicional: para todo $x \in L$,*

4. *$x \leq GP(x)$ y $x \leq HF(x)$, donde $P(x) = \sim H(\sim x)$ y $F(x) = \sim G(\sim x)$.*

Ahora, vamos a construir un ejemplo de $tpLM_{n\times m}-$álgebra basados en la noción de sistema temporal.

Sea $\mathscr{T} = (T,(X_t)_{t\in T},R,0)$ un sistema temporal, $\mathscr{L}$ una $LM_{n\times m}-$álgebra completa y completamente crisipiana y U un subconjunto no vacío.

Sobre el conjunto $F_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m} = \{(f_t)_{t\in T} \mid f_t : X^U \longrightarrow L$, para todo $t \in T\}$ definimos las operaciones $\vee,\wedge,\sim^{\mathscr{T}},\sigma_{ij}^{\mathscr{T}},0^{\mathscr{T}}$ y $1^{\mathscr{T}}$ de la misma manera que en la Definición 3.4.3.

Definimos sobre $F_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$ los operadores unarios G y H por

- $G((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X_t^U \longrightarrow L$, $g_t(x) = \bigwedge\{f_s(x) \mid tRs, s \in T\}$,

- $H((f_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, donde $h_t : X_t^U \longrightarrow L$, $h_t(x) = \bigwedge\{f_s(x) \mid sRt, s \in T\}$.

Para todo $\rho \in U^U$ y $J \subseteq U$, la operación $S(\rho)$ y el cuantificador existencial $\exists(J)$ se definen de la misma manera que para el caso temporal débil.

La siguiente proposición, representa el principal ejemplo de $tpLM_{n\times m}$-álgebra.

Proposición 3.5.1. *$(\mathscr{F}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}, U, S, \exists, G, H)$ es una $tpLM_{n\times m}$-álgebra.*

Dem. La prueba de que $(\mathscr{F}_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}, U, S, \exists, G, H)$ es una $t_d pLM_{n\times m}$−álgebra es similar a la prueba de la Proposición 3.4.2. Resta verificar la condición 4 de la Definición 3.5.1. Sean $(f_t)_{t\in t} \in F_{\mathscr{T},\mathscr{L}}^{U,n\times m}$. Dado que $\sim^{\mathscr{T}} H \sim^{\mathscr{T}} ((f_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, donde $h_t : X_t^U \longrightarrow L$, $h_t(x) = \bigvee\{f_s(x) \mid sRt, s \in T\}$, obtenemos que $GP((f_t)_{t\in T}) = G \sim^{\mathscr{T}} H \sim^{\mathscr{T}} ((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, donde $g_t : X_t^U \longrightarrow L$, $g_t(x) = \bigwedge\{h_s(x) \mid tRs, s \in T\}$. Por otra parte, se verifica que $h_t(x) \geq f_t(x)$ para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. De donde resulta que $g_t(x) \geq f_t(x)$ para todo $t \in T$ y $x \in X_t^U$. Por lo tanto, $(f_t)_{t\in T} \leq GP((f_t)_{t\in T})$. En forma análoga se prueba que $(f_t)_t \leq HF((f_t)_{t\in T})$.

■

Observación 3.5.1. *La construcción de los funtores adjuntos C y D, entre la categoría de las B−álgebras poliádicas temporales débiles y las $LM_{n\times m}$−álgebras poliádicas temporales débiles, puede extenderse a la categoría de las B−álgebras poliádicas temporales y las $LM_{n\times m}$−álgebras poliádicas temporales.*

Capítulo 4

Álgebras temporales con estructura subyacente de $H-$álgebras

4.1. Operadores temporales sobre $H-$álgebras

4.1.1. La definición de $tH-$álgebra de Chajda

En esta sección vamos a mostrar que la axiomatización algebraica dada por Chajda de los operadores temporales F y P en la lógica intuicionista no se ajusta a la definición de Halmos de cuantificador existencial. La noción de operador temporal sobre una $H-$álgebra fue introducida por Chajda en [24]. A continuación, repetiremos la definición dada en [24].

Definición 4.1.1. *Sea $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ una $H-$álgebra. Denotamos por $\neg x = x \rightarrow 0$ (el pseudocomplemento de x). Los operadores unarios G, H definidos sobre A son llamados operadores temporales si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(ch1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(ch2) $G(x \rightarrow y) \leq G(x) \rightarrow G(y)$, $H(x \rightarrow y) \leq H(x) \rightarrow H(y)$,

(ch3) $G(x) \vee G(y) \leq G(x \vee y)$, $H(x) \vee H(y) \leq H(x \vee y)$,

(ch4) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$, (ch5) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, *donde* $P(x) = \neg H(\neg x)$ *y* $F(x) = \neg G(\neg x)$.

Nuestro próximo objetivo es probar que los axiomas (ch2) y (ch3) son redundantes. Para hacer esto, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sean G, H dos operadores unarios sobre una $H-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$, que satisfacen el axioma* (ch4). *Entonces se verifican los axiomas* (ch2) *y* (ch3).

Dem. En primer lugar vamos a probar que G es creciente. Sean $x, y \in A$ tales que $x \leq y$. De (ch4), tenemos que $G(x) = G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, esto es, $G(x) \leq G(y)$. Teniendo en cuenta que G es creciente, obtenemos que $G(x) \leq G(x \vee y)$ y $G(y) \leq G(x \vee y)$. Luego, $G(x) \vee G(y) \leq G(x \vee y)$. Por otra parte, de (H2) y (ch4), tenemos que $G(x) \wedge G(x \rightarrow y) = G(x \wedge (x \rightarrow y)) = G(x \wedge y) \leq G(y)$. Por lo tanto, $G(x \rightarrow y) \leq G(x) \rightarrow G(y)$. En forma similar se puede probar que $H(x) \vee H(y) \leq H(x \vee y)$ y $H(x \rightarrow y) \leq H(x) \rightarrow H(y)$, lo cual completa la prueba.

■

Teniendo en cuenta el Lema 4.1.1, podemos reformular la Definición 4.1.1 como sigue:

Definición 4.1.2. *Una $tH-$álgebra es una terna $(\mathscr{A}, G, H)$ tal que $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es una $H-$álgebra y G, H son dos operadores unarios definidos sobre A, llamados operadores temporales, que verifican:*

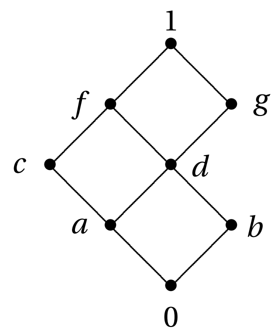
(ch1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(ch2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(ch5) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, *donde* $P(x) = \neg H(\neg x)$ *y* $F(x) = \neg G(\neg x)$.

Notemos que esta última definición es similar a la definición de $tB-$álgebra donde (tB3)* (ver Proposición 1.1.3) fue reemplazado por (ch5). Otra objeción al trabajo de Chajda es que en [24, Remark 8], el autor afirma que si en una $H-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ los operadores temporales G y H satisfacen $G(0) = 0$ y $H(0) = 0$, entonces F y P pueden ser considerados como cuantificadores existenciales. Tal denominación no es clara dado que F y P no son cuantificadores existenciales en el sentido de Halmos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1. *Consideremos la $H-$álgebra $A = \{0, a, b, c, d, f, g, 1\}$, la cual está descrita como sigue:*



Definimos G, H por $G(x) = x = H(x)$, para todo $x \in A$. Es fácil ver que G y H son operadores temporales sobre A. Por otra parte,

$$F(a \vee b) = 1 \neq f = F(a) \vee F(b) \text{ y } P(a \vee b) = 1 \neq f = P(a) \vee P(b).$$

Además, en la lógica temporal intuicionista, los operadores temporales F y P no pueden ser definidos por medio de G y H, es decir, las siguientes equivalencias no se satisfacen:

$$F\alpha \longleftrightarrow \neg G \neg \alpha \quad \text{y} \quad P\alpha \longleftrightarrow \neg H \neg \alpha.$$

Luego, la definición de F y P dada en (Ch5) no es correcta. Por lo tanto podemos decir que la axiomatización algebraica dada por Chajda en [24] de los operadores temporales P y F no se ajusta a la definición de cuantificador existencial de Halmos.

4.1.2. Las $IKt-$álgebras

Con el objetivo de obtener una caracterización algebraica del sistema IKt, en esta sección, vamos a introducir la variedad **IKt**. Más precisamente:

Definición 4.1.3. *Sea $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ una $H-$álgebra y sean G, H, F y P operaciones unarias sobre A que satisfacen:*

(t1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(t2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(t3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$,

(t4) $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

(t5) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

(t6) $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

(t7) $F(x \rightarrow y) \leq G(x) \rightarrow F(y)$, $P(x \rightarrow y) \leq H(x) \rightarrow P(y)$.

Entonces el álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ será llamada IKt$-$álgebra y G, H, F y P serán llamados operadores temporales.

Los siguientes son algunos ejemplos útiles.

Ejemplo 4.1.2. *Sea $(\mathscr{A}, G, H)$ una $tB-$álgebra. Si definimos $x \rightarrow y = \neg x \vee y$, para cada $x, y \in A$, entonces $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ es una IKt$-$álgebra, donde F y P están definidos como en* (tB3)* *de la Proposición 1.1.3.*

Ejemplo 4.1.3. *Consideremos la $H-$álgebra $\mathscr{A}$ representada en la Figura* 4.

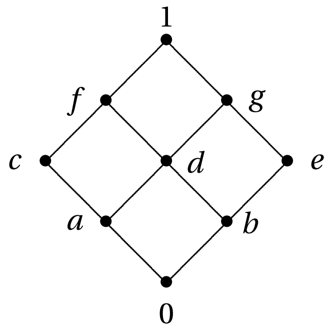


Figura 4

Definimos los operadores G, H, F y P por medio de la siguiente tabla:

x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
G(x)	0	0	b	0	d	e	d	g	1
H(x)	0	a	0	c	d	0	f	d	1
F(x)	0	a	d	c	d	1	f	1	1
P(x)	0	d	b	1	d	e	1	g	1

Entonces, es fácil ver que $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *es una IKt−álgebra.*

Vamos a detallar algunas propiedades básicas válidas en las *IKt*−álgebras, probando solamente algunas de ellas.

Lema 4.1.2. *Sea* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *una IKt−álgebra. Entonces*

(t8) $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$,

(t9) $x \leq y$ *implica* $F(x) \leq F(y)$ *y* $P(x) \leq P(y)$,

(t10) $F(x) \to G(y) \leq G(x \to y)$, $P(x) \to H(y) \leq H(x \to y)$,

(t11) $G(x \to y) \leq F(x) \to F(y)$, $H(x \to y) \leq P(x) \to P(y)$,

(t12) $G(x) \wedge F(y) \leq F(x \wedge y)$, $H(x) \wedge P(y) \leq P(x \wedge y)$,

(t13) $x \wedge F(y) \leq F(P(x) \wedge y)$, $x \wedge P(y) \leq P(F(x) \wedge y)$, (t14) $F(x) \wedge y = 0$ *si, sólo si,* $x \wedge P(y) = 0$.

Dem. Los axiomas (t8) y (t9) son consecuencia de los axiomas (t2) y (t5), respectivamente. A continuación, vamos a probar (t10). De (t7) obtenemos $F(P(x) \to H(y)) \leq GP(x) \to FH(y)$. Dado que $x \leq GP(x)$ y $FH(y) \leq y$ podemos deducir que $GP(x) \to FH(y) \leq x \to y$. Luego, $F(P(x) \to H(y)) \leq x \to y$. De esta última afirmación y de (t8) resulta que $HF(P(x) \to H(y)) \leq H(x \to y)$. Entonces de (t3), tenemos que $P(x) \to H(y) \leq H(x \to y)$. La otra desigualdad es análoga. Vamos a probar que se verifica (t11). Teniendo en cuenta el axioma (t7), tenemos que $G(x \to y) \leq F((x \to y) \to y) \to F(y)$. Por otra parte, de (H2) se puede deducir que $x \leq (x \to y) \to y$. Entonces, de (t9) resulta que $F(x) \leq F((x \to y) \to y))$. Entonces $F((x \to y) \to y) \to F(y) \leq F(x) \to F(y)$. Luego, $G(x \to y) \leq F(x) \to F(y)$. La otra desigualdad se prueba de manera similar. Ahora, vamos a probar (t12). Dado que $x \leq y \to (x \wedge y)$, de (t8), obtenemos $G(x) \leq G(y \to (x \wedge y))$. De esta última afirmación y (t11), resulta que $G(x) \leq F(y) \to F(x \wedge y)$, esto es, $G(x) \wedge F(y) \leq F(x \wedge y)$. La otra desigualdad se prueba de manera similar. Entonces, vamos a probar (t13). De (t3) tenemos que $x \wedge F(y) \leq GP(x) \wedge F(y)$. De esta última afirmación y de (t12) obtenemos $x \wedge F(y) \leq F(P(x) \wedge y)$. La otra desigualdad es análoga. Finalmente, veamos que se verifica (t14). Vamos a suponer que $F(x) \wedge y = 0$. De (t13) y (t4), obtenemos $x \wedge P(y) \leq P(F(x) \wedge y) = P(0) = 0$. Luego, $x \wedge P(y) = 0$. En forma similar, podemos probar la otra dirección.

■

Nuestra presentación de los operadores temporales difiere de la de Chajda dado que nuestros operadores P y F no pueden derivarse por medio de G y H, ver el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.4. *Consideremos la IKt−álgebra* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$, *definida en el Ejemplo 4.1.3, entonces se puede ver que:*

$$\neg G(\neg a) = c \neq a = F(a) \text{ y } \neg H(\neg a) = 1 \neq d = P(a).$$

El siguiente lema nos permite obtener una definición equivalente de una *IKt*−álgebra.

Lema 4.1.3. *Sean G, H dos operaciones unarias sobre una $H-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ tal que $G(1) = 1$ y $H(1) = 1$. Entonces el axioma* (t2) *es equivalente al siguiente:*

(t2)* $G(x \to y) \leq G(x) \to G(y)$, $H(x \to y) \leq H(x) \to H(y)$.

Dem. Solo vamos a probar la equivalencia entre (t2) y (t2)* en el caso de G. De (t2), (t8) y (H2), tenemos $G(x) \wedge G(x \to y) = G(x \wedge (x \to y)) = G(x \wedge y) \leq G(y)$. Por lo tanto, $G(x \to y) \leq G(x) \to G(y)$. Recíprocamente, sean $x, y \in A$ tales que $x \leq y$. Entonces $x \to y = 1$ y así, de (t2)* y la hipótesis, obtenemos que $1 = G(x \to y) \leq G(x) \to G(y)$. Luego, $G(x) \leq G(y)$ de donde obtenemos que G es creciente. De la última afirmación y (t2)*, inferimos que $G(x) \leq G(y \to (x \wedge y)) \leq G(y) \to G(x \wedge y)$. Por lo tanto, $G(x) \wedge G(y) \leq G(x \wedge y)$. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que G es creciente, concluimos que $G(x) \wedge G(y) = G(x \wedge y)$. ■

Por lo tanto, si en la Definición 4.1.3 reemplazamos el axioma (t2) por (t2)*, obtenemos una definición equivalente de una *IKt*−álgebra.

El Lema 4.1.4 muestra la relación entre los operadores temporales y el pseudocomplemento en una *IKt*−álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$.

Lema 4.1.4. *Sea $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ una IKt−álgebra. Entonces*

(t15) $G(0) = 0$ *si, y sólo si,* $G(\neg x) \leq \neg G(x)$,

(t16) $H(0) = 0$ *si, y sólo si,* $H(\neg x) \leq \neg H(x)$,

(t17) $G(\neg x) = \neg F(x)$, $H(\neg x) = \neg P(x)$,

(t18) $F(x) \leq \neg G(\neg x)$, $P(x) \leq \neg H(\neg x)$, (t19) $F(\neg x) \leq \neg G(x)$, $P(\neg x) \leq \neg H(x)$.

Dem. Primero vamos a probar (t15). Supongamos que $G(0) = 0$. Entonces por (t2)*, tenemos que $G(\neg x) = G(x \to 0) \leq G(x) \to G(0) = \neg G(x)$. Recíprocamente, si $G(\neg x) \leq \neg G(x)$ entonces $G(0) = G(x \wedge \neg x) = G(x) \wedge G(\neg x) \leq G(x) \wedge \neg G(x) = 0$. Por lo tanto, $G(0) = 0$. Debido a la simetría de los operadores temporales G y H, (t16) se puede probar de manera similar a (t15). Vamos a probar (t17). Dado que $0 \leq G(0)$, tenemos $F(x) \to 0 \leq F(x) \to G(0)$. Aplicando (t10), obtenemos $\neg F(x) \leq G(\neg x)$. Por otra parte, de (t11) y (t4), tenemos: $G(\neg x) = G(x \to 0) \leq F(x) \to F(0) = \neg F(x)$. Luego, $G(\neg x) = \neg F(x)$. La otra igualdad se prueba de una manera similar. Vamos a probar (t18). Dado que $F(x) \leq \neg\neg F(x)$, aplicando (t17), tenemos que $F(x) \leq \neg G(\neg x)$. De manera similar, $P(x) \leq \neg H(\neg x)$. Finalmente, vamos a verificar (t19). De (t4) y (t7), tenemos que: $F(x \to 0) \leq G(x) \to F(0) = G(x) \to 0$, esto es, $F(\neg x) \leq \neg G(x)$. $P(\neg x) \leq \neg H(x)$ se prueba de manera similar.

■

4.1.3. Completitud algebraica del sistema IKt

En esta sección vamos a probar que las $IKt-$álgebras son la contraparte algebraica del sistema IKt.

La lógica temporal intuicionista IKt fue introducida por Ewald [52] extendiendo el lenguaje de la lógica proposicional intuicionista con los operadores unarios P, F, H y G. La axiomatización estilo Hilbert de IKt puede encontrarse en [52][p. 171]:

(A1) Todos los axiomas de la lógica intuicionista (Int).

(A2) $G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$, $H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$,

(A3) $G(\alpha \wedge \beta) \longleftrightarrow G\alpha \wedge G\beta$, $H(\alpha \wedge \beta) \longleftrightarrow H\alpha \wedge H\beta$,

(A4) $F(\alpha \vee \beta) \longleftrightarrow F\alpha \vee F\beta$, $P(\alpha \vee \beta) \longleftrightarrow P\alpha \vee P\beta$, (A5) $G(\alpha \to \beta) \to (F\alpha \to F\beta),\ H(\alpha \to \beta) \to (P\alpha \to P\beta),$

(A6) $G\alpha \wedge F\beta \to F(\alpha \wedge \beta),\ H\alpha \wedge P\beta \to P(\alpha \wedge \beta),$

(A7) $G\neg\alpha \to \neg F\alpha,\ H\neg\alpha \to \neg P\alpha,$

(A8) $FH\alpha \to \alpha,\ PG\alpha \to \alpha,$

(A9) $\alpha \to GP\alpha,\ \alpha \to HF\alpha,$

(A10) $(F\alpha \to G\beta) \to G(\alpha \to \beta),\ (P\alpha \to H\beta) \to H(\alpha \to \beta),$

(A11) $F(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to F\beta),\ P(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to P\beta).$

Las reglas de inferencia son modus ponens, y

(RG) $\dfrac{\alpha}{G\alpha},$ (RH) $\dfrac{\alpha}{H\alpha}.$

Es bien sabido que la axiomatización de Ewald no es minimal (ver por ejemplo [148]), pues varios axiomas pueden deducirse de los otros. Además, en contraste con la lógica proposicional clásica, F y P no pueden definirse en términos de G y H, es decir, las siguientes equivalencias no se satisfacen:

$$P\alpha \longleftrightarrow \neg H\neg\alpha \text{ y } F\alpha \longleftrightarrow \neg G\neg\alpha.$$

Sea $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ una $IKt-$álgebra. Vamos a denotar por V al conjunto de todas las variables proposicionales y por $For[V]$ al conjunto de todas las $IKt-$fórmulas.

Sea $v : V \longrightarrow A$ una función que asigna a cada variable p en V un elemento $v(p)$ de la $H-$álgebra A. Tales funciones son llamadas valuaciones. La valuación v puede ser extendida unívocamente al conjunto $For[V]$ de todas las IKt−fórmulas inductivamente de la siguiente manera:

1. $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta),$

2. $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta),$

3. $v(\neg\alpha) = \neg v(\alpha)$,

4. $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$,

5. $v(G\alpha) = Gv(\alpha)$,

6. $v(H\alpha) = Hv(\alpha)$,

7. $v(F\alpha) = Fv(\alpha)$,

8. $v(P\alpha) = Pv(\alpha)$.

Diremos que una $IKt-$fórmula $\alpha \in For[V]$ es válida si $v(\alpha) = 1$ para todo valuación $v : For[V] \longrightarrow A$ en cualquier $IKt-$álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$.

Teorema 4.1.1. *Toda IKt−fórmula demostrable es válida.*

Dem. La demostración correspondiente a los axiomas de la lógica intuicionista y modus ponens son estándar (ver por ejemplo [133]). La validez del axioma (A2) es una consecuencia del Lema 4.1.3. Además, la prueba de la validez de los axiomas (A3), (A4), (A5), (A6), (A8), (A9), (A10) y (A11) son consecuencia de los axiomas (t2), (t5), (t11), (t12), (t6), (t3), (t10) y (t7) respectivamente. Finalmente la prueba de la validez del axioma (A7) se sigue de (t17). Así, solo resta probar que las reglas (RG) y (RH) preservan validez. Sea v una valuación del conjunto de todas las fórmulas $For[V]$ en alguna $IKt-$álgebra (A, G, H, F, P) y supongamos que $v(\alpha) = 1$. Luego, de (t1) tenemos que $v(G\alpha) = G(v\alpha) = G(1) = 1$. Por lo tanto, $G\alpha$ es válida. De forma similar podemos probar que (RH) preserva validez.

■

Para obtener la completitud, vamos a probar que las fórmulas válidas son demostrables, construyendo el álgebra de Lindenbaum–Tarski de IKt (ver [133], para más detalles). En primer lugar, vamos a definir una relación de equivalencia $\equiv$ sobre el conjunto $For[V]$:

$$\alpha \equiv \beta \Longleftrightarrow \vdash \alpha \to \beta \text{ y} \vdash \beta \to \alpha,$$

donde $\vdash \alpha$ significa que α es demostrable en IKt.

Lema 4.1.5. *La relación de equivalencia* $\equiv$ *es una congruencia sobre* $For[V]$.

Dem. Solo vamos a probar que $\equiv$ es compatible con las conectivas G y F. Supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Entonces $\vdash \alpha \to \beta$ y $\vdash \beta \to \alpha$, lo que implica que $\vdash G(\alpha \to \beta)$ y $\vdash G(\beta \to \alpha)$. Luego, del axioma (A2) y modus ponens tenemos que $\vdash G(\alpha) \to G(\beta)$ y $\vdash G(\beta) \to G(\alpha)$, esto es, $G(\alpha) \equiv G(\beta)$. Ahora vamos a probar que F es compatible con $\equiv$. Supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Entonces, podemos deducir que $\vdash G(\alpha \to \beta)$ y $\vdash G(\beta \to \alpha)$. Luego, de (A5) y modus ponens obtenemos que $\vdash F\alpha \to F\beta$ y $\vdash F\beta \to F\alpha$. Por lo tanto, $F\alpha \equiv F\beta$.

■

Para cada *IKt*−fórmula $\alpha \in For[V]$, denotamos por $[\alpha]_\equiv$ la clase de equivalencia de α, esto es,

$$[\alpha]_\equiv = \{\beta \in For[V] : \alpha \equiv \beta\}.$$

El conjunto de todas las *IKt*−clases es denotado por $For[V]/\equiv$.

Dado que la equivalencia $\equiv$ es una congruencia sobre el conjunto $For[V]$, podemos definir su álgebra cociente introduciendo las siguientes operaciones sobre el conjunto cociente $For[V]/\equiv$. Para $\alpha, \beta \in For[V]$, ponemos:

1. $[\alpha]_\equiv \vee [\beta]_\equiv = [\alpha \vee \beta]_\equiv$,

2. $[\alpha]_\equiv \wedge [\beta]_\equiv = [\alpha \wedge \beta]_\equiv$,

3. $[\alpha]_\equiv \to [\beta]_\equiv = [\alpha \to \beta]_\equiv$,

4. $\neg[\alpha]_\equiv = [\neg\alpha]_\equiv$,

5. $G[\alpha]_\equiv = [G\alpha]_\equiv$,

6. $H[\alpha]_\equiv = [H\alpha]_\equiv$,

7. $F[\alpha]_{\equiv} = [F\alpha]_{\equiv}$,

8. $P[\alpha]_{\equiv} = [P\alpha]_{\equiv}$,

9. $\mathbf{0} = [\bot]_{\equiv}$,

10. $\mathbf{1} = [\top]_{\equiv}$.

donde $\top$ es la constante verdad definida por

$$\top := p \to p$$

para alguna variable proposicional fija $p \in V$ y $\bot$ es la constante falso definida por

$$\bot := \neg\top.$$

Dado que la clase de las *IKt*−álgebras es ecuacional y la relación $\equiv$ es una congruencia, el álgebra cociente es una *IKt*−álgebra como se establece en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *El álgebra cociente*

$$\langle For[V]/\equiv, \vee, \wedge, \to, G, H, F, P, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$$

es una IKt−álgebra.

La *IKt*−álgebra

$$\langle For[V]/\equiv, \vee, \wedge, \to, G, H, F, P, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$$

es la *IKt*−álgebra de Lindenbaum–Tarski. Ahora podemos definir una valuación $v^* : V \longrightarrow For[V]/\equiv$ por

$$v^*(p) = [p]_{\equiv}$$

Se puede verificar fácilmente por inducción sobre las fórmulas que

$$v^*(\alpha) = [\alpha]_{\equiv}$$

para toda *IKt*−fórmula $\alpha \in For[V]$.

El siguiente lema será útil para probar la completitud algebraica de IKt.

Lema 4.1.6. *Para cada IKt−fórmula $\alpha \in For[V]$,*

$$\vdash \alpha \Longleftrightarrow v^*(\alpha) = \mathbf{1}.$$

Dem. Si $\vdash \alpha$, entonces $\vdash \top \to \alpha$. La inversa, $\vdash \alpha \to \top$, siempre se verifica. Así, $\alpha \equiv \top$ y $v^*(\alpha) = [\alpha]_{\equiv} = [\top]_{\equiv} = \mathbf{1}$. Recíprocamente, si $v^*(\alpha) = [\alpha]_{\equiv} = \mathbf{1}$, entonces $\vdash \top \to \alpha$. Por lo tanto, $\vdash \alpha$. ■

El siguiente teorema muestra la completitud algebraica de IKt.

Teorema 4.1.2. *Una IKt–fórmula es demostrable si, y sólo si, es válida.*

Dem. Supongamos que α es válida. Entonces, $v(\alpha) = 1$ para toda valuación v sobre una *IKt*−álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$. En particular, tenemos que $v^*(\alpha) = \mathbf{1}$ en la *IKt*−álgebra de Lindenbaum–Tarski. Del Lema 4.1.6 obtenemos que α debe ser demostrable. La otra dirección fue probada en el Teorema 4.1.1.

■

Finalizaremos esta sección probando que IKt es conservativo sobre la lógica intuicionista Int.

Sea $For[V]^*$ el conjunto de todas las Int–fórmulas, esto es, el conjunto $For[V]^*$ es el subconjunto de todas las IKt–fórmulas $For[V]$ que no contienen los conectivos G, H, F y P. Es claro que $For[V]^*$ es el conjunto de fórmulas de la lógica proposcional intuicionista Int. Para cada Int–fórmula $\alpha \in For[V]^*$, $\vdash_{\text{Int}} \alpha$ denota que α es demostrable en Int. Esto significa que existe una demostración de α que usa solamente los axiomas de (A1) y modus ponens.

Proposición 4.1.2. *IKt es conservativo sobre la lógica intuicionista, esto es, para cada IKt–fórmula* $\alpha \in For[V]^*$,

$$\vdash \alpha \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{Int}} \alpha.$$

Dem. Sea $\alpha \in For[V]^*$ y supongamos que $\nvdash_{\mathrm{Int}} \alpha$. Dado que la lógica intuicionista Int es completa con respecto a la semántica de las $H-$álgebras, existe una $H-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ y una valuación $v^* : For[V]^* \to A$ tal que $v^*(\alpha) \neq 1$. Definiendo $G(x) = x$, $H(x) = x$, $F(x) = x$ y $P(x) = x$ para todo $x \in A$, podemos extender esta $H-$álgebra a una $IKt-$álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$. También la valuación v^* puede extenderse a una valuación $v : For[V] \to A$ por $v(Gp) = v^*(p)$, $v(Hp) = v^*(p)$, $v(Fp) = v^*(p)$ y $v(Pp) = v^*(p)$ para todo $p \in V$. Entonces tenemos que $v(\alpha) \neq 1$, lo que significa que $\nvdash \alpha$ por el Teorema 4.1.2. La recíproca es trivial. ■

4.1.4. Una dualidad discreta para las *IKt*−álgebras

En esta sección, describiremos una dualidad discreta para las $IKt-$álgebras teniendo en cuenta la indicada en [124] para las $H-$álgebras. Para tal fin, introducimos la siguiente:

Definición 4.1.4. *Una estructura* $(X, \leq, R, R^{-1})$ *es un* $\mathcal{IK}_t-$*marco si* $(X, \leq)$ *es un* $\mathcal{H}-$*marco, R es una relación binaria sobre X, y* R^{-1} *es la inversa de R tal que:*

(K1) $(\geq \circ R) \subseteq (R \circ \geq)$,

(K2) $(\geq \circ R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \circ \geq)$.

En lo que sigue, $\mathcal{IK}_t-$marcos serán denotados simplemente por X cuando no haya lugar a confusión. Además, denotaremos por $[x)$ al conjunto $\{y \in X : x \leq y\}$ y por $(x]$ al conjunto $\{y \in X : y \leq x\}$.

Definición 4.1.5. *Un marco canónico de una IKt−álgebra* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *es una estructura* $(\mathscr{X}(A), \leq^c, R^c, Q^c)$, *donde* $(\mathscr{X}(A), \leq^c)$ *es el marco canónico asociado con* $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ *y además se verifican las siguientes condiciones:*

(a) R^c y Q^c *son dos relaciones binarias sobre* $\mathscr{X}(A)$,

(b) $R^c = (Q^c)^{-1}$,

(c) $(S,T) \in R^c \Longleftrightarrow G^{-1}(S) \subseteq T \subseteq F^{-1}(S)$.

Lema 4.1.7. *El marco canónico de una IKt−álgebra es un* $\mathcal{IK}_t-$*marco.*

Dem. Teniendo en cuenta los resultados establecidos en [124], solo tenemos que probar (K1) y (K2). Supongamos que $(S,T) \in (\geq^c \circ R^c)$. Entonces existe $U \in \mathscr{X}(A)$ tal que $S \supseteq U$ y $G^{-1}(U) \subseteq T \subseteq F^{-1}(U)$. Consideremos el filtro K generado por $T \cup G^{-1}(S)$. Vamos a mostrar que $K \subseteq F^{-1}(S)$. Supongamos que $x \in K$. Entonces, existe $y \in T$ y $z \in G^{-1}(S)$ tal que $y \wedge z \leq x$. Luego, $y \leq z \to x$ así $F(y) \leq F(z \to x)$, y por lo tanto por (t7), obtenemos que $F(y) \leq G(z) \to F(x)$. Dado que $y \in T$ y $T \subseteq F^{-1}(S)$, tenemos que $G(z) \to F(x) \in S$. De esta última afirmación y del hecho que S es un sistema deductivo tenemos que $F(x) \in S$, esto es, $x \in F^{-1}(S)$. Por lo tanto, $K \cap (A \setminus F^{-1}(S)) = \emptyset$. Entonces por el teorema de Birkhoff-Stone existe un filtro primo $W \in \mathscr{X}(A)$ tal que $W \subseteq F^{-1}(S)$, $G^{-1}(S) \subseteq T$ y $W \supseteq T$, es decir, $(S,T) \in (R^c \circ \geq^c)$. Podemos probar (K2) de una manera similar a (K1). ■

Sea T una relación binaria sobre X y sea U un subconjunto de X. En lo que sigue denotaremos por $[T]U$ al conjunto $\{x \in X : T(x) \subseteq U\}$ y por $\langle U \rangle U$ al conjunto $\{x \in X : T(x) \cap U \neq \emptyset\}$.

Definición 4.1.6. *El álgebra compleja de un* $\mathcal{IK}_t-$*marco* $(X, \leq, R, R^{-1})$ *es*

$$(\mathscr{C}(X), G^c, H^c, F^c, P^c),$$

donde $\mathscr{C}(X)$ *es el álgebra compleja del* $\mathcal{H}-$*marco* $(X, \leq)$, $G^c(U) = [\leq \circ R]U$, $H^c(U) = [\leq \circ R^{-1}]U$, $F^c(U) = \langle R \rangle U$ *y* $P^c(U) = \langle R^{-1} \rangle U$ *para todo* $U \in \mathscr{C}(X)$.

El siguiente resultado es necesario para la prueba del Teorema 4.1.3.

Lema 4.1.8. $\mathscr{C}(X)$ *es cerrado bajo las operaciones* G^c, H^c, F^c *y* P^c.

Dem. Solo probaremos que $\mathscr{C}(X)$ es cerrado bajo las operaciones G^c y F^c, esto es, para cada $U \in \mathscr{C}(X)$, $[\leq][\leq \circ R]U = [\leq \circ R]U$ y $[\leq]\langle R\rangle U = \langle R\rangle U$. En ambos casos la inclusión $\subseteq$ resulta de la reflexividad de $\leq$. En primer lugar, vamos a probar que $[\leq \circ R]U \subseteq [\leq][\leq \circ R]U$. Sean $x, y \in X$ tales que $R([x)) \subseteq U$ y $x \leq y$. Vamos a probar que $R([y)) \subseteq U$. Ahora supongamos que $z \in R([y))$. Entonces, existe $w \in [y)$ tal que $(w,z) \in R$. Por la transitividad de la relación $\leq$ obtenemos que $x \leq w$. Dado que $(w,z) \in R$ podemos deducir que $z \in R([x))$ por lo tanto $z \in U$. A continuación, vamos a probar que $\langle R\rangle U \subseteq [\leq]\langle R\rangle U$. Sea $x \in \langle R\rangle U$ tal que $x \leq y$. Entonces, $R(x) \cap U \neq \emptyset$, esto es, existe $w \in U$ tal que $(x,w) \in R$. Así, de (K1) podemos deducir que $(y,w) \in (R\circ \geq)$. De esta última afirmación existe $z \in X$ tal que $(y,z) \in R$ y $w \leq z$. Dado que $U \in \mathscr{C}(X)$ tenemos que $z \in R(y) \cap U$. Por lo tanto $y \in \langle R\rangle U$. ■

Teorema 4.1.3. *El álgebra compleja de un $\mathcal{IK}_t-$marco es una IKt$-$álgebra.*

Dem. De los resultados establecidos en [124], $\mathscr{C}(X)$ es una $H-$álgebra. Además del Lema 4.1.8, $\mathscr{C}(X)$ es cerrado bajo las operaciones G^c, H^c, F^c y P^c. De la definición de los operadores G^c, H^c, F^c y P^c podemos obtener (t1), (t2), (t4) y (t5). Vamos a probar que se verifican los axiomas restantes.

Vamos a probar que $U \subseteq [\leq \circ R]\langle R^{-1}\rangle U$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \in U$ y $y \in R([x))$. Entonces, existe $z \in [x)$ tal que $(z,y) \in R$. Dado que $U \in \mathscr{C}(X)$ tenemos que $z \in U$ y dado que $z \in R^{-1}(y)$, obtenemos $R^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$, esto es, $y \in \langle R^{-1}\rangle U$. De manera similar podemos probar que $U \subseteq [\leq \circ R^{-1}]\langle R\rangle U$. Por lo tanto (t3) se verifica.

A continuación, vamos a probar que $\langle R^{-1}\rangle[\leq \circ R]U \subseteq U$. Sea $x \in \langle R^{-1}\rangle[\leq \circ R]U$. Entonces, $R^{-1}(x) \cap [\leq \circ R]U \neq \emptyset$. Luego, existe $z \in R^{-1}(x)$ tal que $R([z)) \subseteq U$. Dado que $\leq$ es reflexiva tenemos que $(z,x) \in (\leq \circ R)$, esto es, $x \in R([z))$. Por lo tanto $x \in U$. De manera similar podemos probar que $\langle R\rangle[\leq \circ R^{-1}] \subseteq U$. Entonces (t6) se verifica.

Finalmente, vamos a probar que (t7) se verifica. Supongamos que $x \in \langle R\rangle(U \to_c V)$, $x \leq z$ y $z \in [\leq \circ R]U$. Vamos a probar que $z \in \langle R\rangle V$, es decir,

$R(z)\cap V \neq \emptyset$. Dado que $x \in \langle R\rangle(U \rightarrow_c V)$ entonces existe $y \in R(x)\cap(U \rightarrow_c V)$, $z \geq x$, $(x,y)\in R$, y así de (K1) tenemos que $(z,v)\in R$ y $v \geq y$ para algún $v \in X$. Dado que $v \in R(z) \subseteq (\leq \circ R)(z) \subseteq U$, $y \leq v$ y $y \in (U \rightarrow_c V)$ entonces $v \in V$. Por lo tanto, $R(z)\cap V \neq \emptyset$. De manera similar podemos probar $\langle R^{-1}\rangle(U \rightarrow_c V) \subseteq [\leq \circ R^{-1}]U \rightarrow_c \langle R^{-1}\rangle V$.

■

Ahora vamos a mostrar que el sumergimiento $h : A \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(A))$, preserva G, H, F y P, esto es,

Lema 4.1.9. *Sea (A,G,H,F,P) una IKt−álgebra. Para cada $a \in A$,*

(a) $h(G(a)) = G^c(h(a)) = [\leq^c \circ R^c]h(a)$,

(b) $h(H(a)) = H^c(h(a)) = [\leq^c \circ Q^c]h(a)$,

(c) $h(F(a)) = F^c(h(a)) = \langle R^c\rangle h(a)$,

(d) $h(P(a)) = P^c(h(a)) = \langle Q^c\rangle h(a)$.

Dem. Solo vamos a probar (a) y (c).
(a): Sea $G(a)\in S$ y probemos que $(\leq^c \circ R^c)(S) \subseteq h(a)$. Supongamos que $T \in (\leq^c \circ R^c)(S)$. Entonces existe $W \in \mathscr{X}(A)$ tal que $S \subseteq W$ y $G^{-1}(W) \subseteq T \subseteq F^{-1}(W)$. Dado que $a \in G^{-1}(S)$ y $S \subseteq W$ tenemos que $a \in G^{-1}(W)$. Luego, $a \in T$, es decir, $T \in h(a)$. Por otra parte, vamos a demostrar que, para cada $a \in A$, si $G(a) \notin S$ entonces $S \notin [\leq^c \circ R^c]h(a)$. Dado que $\leq^c$ es reflexiva, es suficiente con mostrar que, si $G(a) \notin S$ entonces $S \notin [R^c]h(a)$. Supongamos que $G(a) \notin S$ y $F(b) \notin S$. Entonces $a \notin G^{-1}(S)$ y $b \notin F^{-1}(S)$. Consideremos el ideal $\downarrow a \cap \downarrow b$, donde $\downarrow x$ denota el ideal generado por el conjunto unitario $\{x\}$. Entonces,

$$(\downarrow a \cap \downarrow b)\cap G^{-1}(S) \subseteq \downarrow a \cap G^{-1}(S) = \emptyset \text{ y } G^{-1}(S) \text{ es un filtro.}$$

Entonces, por el teorema Birkhoff-Stone existe un filtro primo T tal que

$$G^{-1}(S) \subseteq T \text{ y } a \notin T \text{ y } b \notin T.$$

Luego, $G(a) \notin S$ implica, para algún $T \in \mathscr{X}(A)$, $a \notin T$ y $T \subseteq F^{-1}(S)$ y si $b \notin F^{-1}(S)$ entonces $b \notin T$.

(c): Para cada $a \in A$ y para cada $S \in \mathscr{X}(A)$, probemos que

$$F(a) \in S \text{ si, y sólo si, existe } T \in \mathscr{X}(A) \text{ tal que } G^{-1}(S) \subseteq T \subseteq F^{-1}(S) \text{ y } a \in T.$$

La implicación de derecha a izquierda es trivial. Supongamos que $F(a) \in S$ y $G(b) \in S$. Entonces $a \in F^{-1}(S)$ y $b \in G^{-1}(S)$. Consideremos el filtro $\uparrow a \cap \uparrow b$, donde $\uparrow x$ denota al filtro generado por el conjunto unitario $\{x\}$. Tenemos que

$$(\uparrow a \cap \uparrow b) \cap (A \setminus F^{-1}(S)) \subseteq \uparrow a \cap (A \setminus F^{-1}(S)) = \emptyset \text{ y } A \setminus F^{-1}(S) \text{ es un ideal.}$$

Así, por el teorema de Birkhoff-Stone existe un filtro primo T tal que

$$T \cap (A \setminus F^{-1}(S)) = \emptyset \text{ y } a \in T \text{ y } b \in T.$$

Luego $a \in F^{-1}(S)$ implica, para algún $T \in \mathscr{X}(A)$, $T \subseteq F^{-1}(S)$ y $a \in T$ y si $b \in G^{-1}(S)$ entonces $b \in T$.

■

Ahora vamos a mostrar que el sumergimiento de orden $k : X \longrightarrow X(\mathscr{C}(X))$, preserva la relación R, esto es,

Lema 4.1.10. *Sea $(X, \leq, R, R^{-1})$ un $\mathcal{IK}_t-$marco y sean $x, y \in X$. Entonces,*

$(x, y) \in R$ si, y sólo si, $(k(x), k(y)) \in R^c$.

Dem. Supongamos que $(x, y) \in R$. Necesitamos mostrar que

$$(k(x), k(y)) \in R^c.$$

Notemos que

$$(k(x), k(y)) \in R^c \text{ si, y sólo si, } [\leq \circ R]^{-1}(k(x)) \subseteq k(y) \text{ y } k(y) \subseteq \langle R \rangle^{-1} k(x)$$

$$\text{si, y sólo si, para todo } U \in \mathscr{C}(X), x \in [\leq \circ R]U \text{ implica } y \in U$$
$$\text{y para todo } U \in \mathscr{C}(X), y \in U \text{ implica } x \in \langle R \rangle U.$$

Tomemos cualquier $U \in \mathscr{C}(X)$ tal que $x \in [\leq \circ R]U$. Entonces, dado que $(x,y) \in R$ y $R \subseteq (\leq \circ R)$, tenemos que $y \in U$. Tomemos cualquier $U \in \mathscr{C}(X)$ tal que $y \in U$. Entonces, dado que $(x,y) \in R$ tenemos que $x \in \langle R \rangle U$. Por otra parte, supongamos que $(k(x), k(y)) \in R^c$. Entonces, $[\leq]\{y\} \in \mathscr{C}(X)$. Así $x \in \langle R \rangle [\leq]\{y\}$. De esta última afirmación y (K1) podemos deducir que $x \in [\leq]\langle R \rangle \{y\}$. Así, por la reflexividad de $\leq$ tenemos que $x \in \langle R \rangle \{y\}$, esto es, $(x,y) \in R$, como queríamos demostrar.

■

Entonces, tenemos una dualidad discreta entre $\mathcal{IK}_t-$marcos y *IKt*$-$álgebras.

Teorema 4.1.4.

(a) *Toda IKt$-$álgebra es sumergible en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathcal{IK}_t-$marco es sumergible en el marco canónico de su álgebra compleja.*

4.1.5. Una construcción general de los operadores temporales

En esta sección, vamos a dar una construcción general de los operadores temporales sobre una $H-$álgebra completa por medio de los llamados $\mathcal{H}-$marcos. Construcciones similares fueron indicadas en [24], [8], [26] y [25]. Sea $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1 \rangle$ una $H-$álgebra y A^X el conjunto de todas las funciones de X en A. Es fácil ver que $\mathscr{A}^X = \langle A^X, \vee, \wedge, \to, \mathbb{O}, \mathbb{I} \rangle$ es una $H-$álgebra, donde las operaciones $\vee, \wedge, \to$ están definidas puntualemente y además $\mathbb{O}(x) = 0$, $\mathbb{I}(x) = 1$ para cada $x \in X$.

Teniendo en cuenta las afirmaciones anteriores podemos formular el siguiente teorema:

Teorema 4.1.5. *Sea $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ una $H-$álgebra completa y $(X, \leq)$ un $\mathcal{H}-$marco. Definimos los operadores G, H, F y P sobre A^X como sigue:*

$$G(p)(x) = \bigwedge_{y\in[x)} \{p(y)\}, \quad H(p)(x) = \bigwedge_{y\in(x]} \{p(y)\},$$

$$F(p)(x) = \bigvee_{y\in[x)} \{p(y)\}, \quad P(p)(x) = \bigvee_{y\in(x]} \{p(y)\}.$$

Entonces $(\mathscr{A}^X, G, H, F, P)$ es una IKt$-$álgebra tal que $G(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$, $H(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$, $F(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ y $P(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Además, se verifican:

(a) *$G(p) \leq F(p)$ para todo $p \in A^X$,*

(b) *$H(p) \leq P(p)$ para todo $p \in A^X$.*

Dem. Es evidente probar los axiomas (t1) y (t4). Dado que $\mathscr{A}$ es una $H-$álgebra completa y las operaciones de ínfimo y supremo son asociativas, obtenemos (t2) y (t5) de forma inmediata. De la definición de G y P tenemos que:

$$GP(p)(x) = \bigwedge_{y\in[x)} \{ \bigvee_{z\in(y]} \{p(z)\}\}.$$

Por otra parte, es claro que

$$p(x) \leq \bigvee_{z\in(y]} \{p(z)\}, \text{ para cada } y \in [x). \tag{4.1}$$

De 4.1 y la definición de ínfimo, tenemos que

$$p(x) \leq \bigwedge_{y\in[x)} \{ \bigvee_{z\in(y]} \{p(z)\}\}.$$

Por lo tanto, $p \leq GP(p)$. En forma análoga, se puede probar que $p \leq HF(p)$. Por lo tanto, (t3) se verifica.

De la definición de P y G, tenemos que

$$PG(p)(x) = \bigvee_{y\in(x]} \{ \bigwedge_{z\in[y)} \{p(z)\}\}.$$

Además, se verifica que

$$\bigwedge_{z\in[y)}\{p(z)\}\leq p(x), \text{ para cada } y\in(x]. \tag{4.2}$$

De 4.2 y la definición de supremo, tenemos que

$$\bigvee_{y\in(x]}\{\bigwedge_{z\in[y)}\{p(z)\}\}\leq p(x).$$

Luego, $PG(p)\leq p$. En forma análoga, se puede probar que

$$FH(p)\leq p.$$

Por lo tanto, (t6) se verifica. Finalmente, verifiquemos (t7). Sea $y\in(x]$, entonces

$$\begin{aligned}\bigwedge_{z\in(x]}\{p(z)\}\wedge(p(y)\to q(y))&\leq p(y)\wedge(p(y)\to q(y))\\&\leq q(y)\\&\leq\bigvee_{z\in(x]}\{q(z)\}.\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, tenemos que

$$(p(y)\to q(y))\leq\bigwedge_{z\in(x]}\{p(z)\}\to\bigvee_{z\in(x]}\{q(z)\},$$

para cada $y\in(x]$.

Luego,

$$\bigvee_{y\in(x]}(p(y)\to q(y))\leq\bigwedge_{z\in(x]}\{p(z)\}\to\bigvee_{z\in(x]}\{q(z)\},$$

esto es, $F(p\to q)\leq G(p)\to F(q)$. De manera similar, se prueba que $P(p\to q)\leq H(p)\to P(q)$. Por lo tanto, $(\mathscr{A}^X,G,H,F,P)$ es una *IKt*$-$álgebra. Además, es claro que $G(\mathbb{O})=\mathbb{O}=H(\mathbb{O})$ y que $F(\mathbb{I})=\mathbb{I}=P(\mathbb{I})$. Por otra parte, por la reflexividad de la relación $\leq$, tenemos que

$$G(p)(x)=\bigwedge_{y\in[x)}\{p(y)\}\leq p(x)\leq\bigvee_{y\in[x)}\{p(y)\}=F(p)(x).$$

Por lo tanto, $G(p) \leq F(p)$. De manera similar podemos probar que se verifica (b).

■

El siguiente ejemplo es una aplicación del teorema previo.

Ejemplo 4.1.5. *Sea* $(X, \leq)$ *un* $\mathcal{H}-$*marco, donde* $X = \{1,2\}$ *y* $\leq$ *denota el orden natural. Sea* A *la* $H-$*álgebra de tres elementos, esto es,* $A = \{0, a, 1\}$*, donde* $0 \leq a \leq 1$*. Consideremos la* $H-$*álgebra* A^X *la cual tiene* 9 *elementos y cuyo diagrama de puede visualizarse en el Ejemplo 4.1.3. Entonces podemos identificar los elementos como sigue:*

0	a	b	c	d	e	f	g	1
(0,0)	$(a,0)$	$(0,a)$	(1,0)	(a,a)	(0,1)	$(1,a)$	$(a,1)$	(1,1)

Dado que $X = \{1,2\}$, aplicando el Teorema 4.1.5 tenemos:

x	G(x)	H(x)	F(x)	P(x)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(a,0)	(0,0)	(a,0)	(a,0)	(a,a)
(0,a)	(0,a)	(0,0)	(a,a)	(0,a)
(1,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)	(1,1)
(a,a)	(a,a)	(a,a)	(a,a)	(a,a)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(0,1)
(1,a)	(a,a)	(1,a)	(1,a)	(1,1)
(a,1)	(a,1)	(a,a)	(1,1)	(a,1)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)

Observemos que G, H, F y P son los operadores temporales del Ejemplo 4.1.3.

4.1.6. Congruencias y sistemas deductivos temporales

Con el objetivo de caracterizar las *IKt*−congruencias, introducimos la siguiente definición:

Definición 4.1.7. *Sea* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *una IKt−álgebra. Un subconjunto D de A es un sistema deductivo temporal, si este satisface* (D1), (D2) *y la condición adicional*

(D3) $G(x), H(x) \in D$ *para cada* $x \in D$.

Vamos a probar que el retículo de las *IKt*−congruencias $Con_{IKt}(A)$ es isomorfo al retículo de todos los sistemas deductivos de A, $\mathscr{D}_{IKt}(A)$.

Lema 4.1.11. *Sea* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *una IKt−álgebra. Entonces*

$$Con_{IKt}(A) = \{R(D) : D \in \mathscr{D}_{IKt}(A)\},$$

donde $R(D)$ *está definida como en la Subseción 1.1.13.*

Dem. Sea $D \in \mathscr{D}_{IKt}(A)$, dado que A es una $H-$álgebra y D es un sistema deductivo de A, tenemos que $R(D) \in Con_H(A)$. Vamos a probar que $R(D)$ preserva los operadores temporales. Sea $(x, y) \in R(D)$ dado que D es un sistema deductivo temporal, $G(x \to y), G(y \to x) \in D$. Entonces por (t2)*, obtenemos que $G(x) \to G(y), G(y) \to G(x) \in D$, esto es, $(G(x), G(y)) \in R(D)$. Por otra parte, dado que $G(x \to y), G(y \to x) \in D$, aplicando (t11), tenemos que $F(x) \to F(y), F(y) \to F(x) \in D$; esto es, $(F(x), F(y)) \in R(D)$. De manera similar, se prueba que $R(D)$ preserva H y P. Recíprocamente, sea $\theta \in Con_{IKt}(A)$, entonces $\theta \in Con_H(A)$. De los resultados expuestos en la Subsección 1.1.13, tenemos que $[1]_\theta$ es un sistema deductivo de A y $R([1]_\theta) = \theta$. Además, de la hipótesis y (t1) tenemos que $(G(x), 1) \in \theta$ y $(H(x), 1) \in \theta$ siempre que $(x, 1) \in \theta$, esto es, $[1]_\theta \in \mathscr{D}_{IKt}(A)$, lo cual completa la prueba.

■

Teniendo en cuenta los resultados establecidos en la Subsección 1.1.13 y Lema 4.1.11, obtenemos:

Teorema 4.1.6. *Sea $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ una IKt$-$álgebra. Entonces, los retículos $Con_{IKt}(A)$ y $\mathscr{D}_{IKt}(A)$ son isomorfos.*

Vamos a definir el operador d sobre una *IKt*$-$álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$. Este operador fue definido previamente en [104] para $tB-$álgebras, en [43] para $MV-$álgebras temporales, y en [29] para las álgebras de Łukasiewicz-Moisil $\theta-$valuadas temporales, respectivamente. Usaremos las propiedades de d para caracterizar las *IKt*$-$álgebras simples y subdirectamente irreducibles.

Definición 4.1.8. *Sea $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ una IKt$-$álgebra. Definimos la operación unaria $d = d_{\mathscr{A}}$ sobre A por $d(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x)$, para cada $x \in A$. Para cada $n \in \omega$ definimos $d^n(x)$ por : $d^0(x) = x$, $d^{n+1}(x) = d(d^n(x))$.*

Lema 4.1.12. *Sea $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ una IKt$-$álgebra. Entonces para cada $n \in \omega$, se verifican:*

(a) $d^n(1) = 1$ *y* $d^n(0) = 0$,

(b) $d^{n+1}(x) \leq d^n(x)$,

(c) $d^n(x \wedge y) = d^n(x) \wedge d^n(y)$,

(d) $x \leq y$ *implica* $d^n(x) \leq d^n(y)$,

(e) $D \in \mathscr{D}_{IKt}(A)$ *si, y sólo si, D es un filtro cerrado bajo d.*

Dem. Es fácil probar (a), (b), (c) y (d). Vamos a probar que (e) se satisface. ($\Rightarrow$) Supongamos que D es un sistema deductivo temporal. Entonces D es un filtro y D es cerrado bajo las operaciones G y H. Sea $x \in D$. Entonces $d(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x)$ y resulta que $d(x) \in D$. ($\Leftarrow$) Supongamos que D es un filtro cerrado bajo d. Debemos probar que D es cerrado bajo G y H. Sea $x \in D$. Entonces $d(x) \leq G(x)$ y $d(x) \leq H(x)$. De donde resulta que $G(x), H(x) \in D$. ■

Proposición 4.1.3. *Sea $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ una IKt$-$álgebra. El sistema deductivo temporal $\langle a \rangle$ de $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ generado por $\{a\}$ tiene la siguiente forma:*

$$\langle a \rangle = \{x \in A : d^n(a) \leq x, \text{ para algún } n \in \omega\}.$$

Dem. Denotemos por Σ al lado derecho de la igualdad anterior. $1 \in \Sigma$, dado que $d^0 a = a \leq 1$. Sea $x \in \Sigma$ tal que $x \leq y$. Luego, existe $n \in \omega$ tal que $d^n(a) \leq x$. Dado que $x \leq y$, tenemos que $d^n(a) \leq y$, esto es, $y \in \Sigma$. A continuación, vamos a probar que $x \wedge y \in \Sigma$, para $x, y \in \Sigma$. Sean $x, y \in \Sigma$, entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $d^n(a) \leq x$ y $d^m(a) \leq y$. Si tomamos $k = n + m$, del Lema 4.1.12, se verifica que $d^k(a) \leq x$ y $d^k(a) \leq y$, de donde resulta que $d^k(a) \leq x \wedge y$, esto es, $x \wedge y \in \Sigma$. De (b) del Lema 4.1.12, obtenemos que Σ es cerrado bajo el operador d. Por lo tanto, de (e) del Lema 4.1.12, Σ es un sistema deductivo temporal. El resto de la prueba es obvia.

■

Los dos resultados siguientes son consecuencia de la Proposición 4.1.3 y Teorema 4.1.6 (ver [104], [43], para resultados similares en el caso de $tB-$álgebras y $MV-$álgebras temporales, respectivamente).

Proposición 4.1.4. *Para cada IKt−álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ es una IKt álgebra simple,*

(ii) *$(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ satisface la propiedad:*

(A) *Para cada $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n \in \omega$ tal que $d^n(a) = 0$.*

Proposición 4.1.5. *Para cada IKt−álgebra $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ es una IKt−álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *$(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ satisface la propiedad:*

(B) *Existe $b \in A \setminus \{1\}$, tal que: para cada $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n \in \omega$ tal que $d^n(a) \leq b$.*

Finalmente, vamos a mostrar un ejemplo de una *IKt*−álgebra subdirectamente irreducible la cual no es una $H-$álgebra subdirectamente irreducible.

Ejemplo 4.1.6. *Consideremos la IKt−álgebra* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *del Ejemplo 4.1.3. Es claro que* $\mathscr{A}$ *no es una H−álgebra subdirectamente irreducible. Por otra parte, teniendo en cuenta* (B) *de la Proposición 4.1.5, podemos chequear que la estructura* $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ *es una IKt−álgebra subdirectamente irreducible.*

4.2. $tSH-$álgebras

En esta sección introduciremos las $SH-$álgebras temporales como una generalización natural de las $B-$álgebras temporales.

4.2.1. $tSH-$álgebras: definiciones y propiedades

Definición 4.2.1. *Un álgebra de Heyting simétrica temporal (o* $SH-$*álgebra temporal, o* $tSH-$*álgebra) es una terna* $(\mathscr{A}, G, H)$ *tal que* $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ *es una* $SH-$*álgebra y* G, H *son dos operadores unarios sobre* A *tales que, para todo* $x, y \in A$:

(tsh1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(tsh2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(tsh3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, *donde* P *y* F *están definidos por* $P(x) = \sim H(\sim x)$ *y* $F(x) = \sim G(\sim x)$.

Ejemplo 4.2.1. *Si* $(\mathscr{A}, G, H)$ *una* $tB-$*álgebra, y definimos*

$$x \rightarrow y = \neg x \vee y,$$

para cada $x, y \in A$, *entonces* $(\mathscr{A}, G, H)$ *es una* $tSH-$*álgebra.*

Lema 4.2.1. *Las siguientes propiedades se verifican en toda* $tSH-$*álgebra* $(\mathscr{A}, G, H)$:

(tsh4) $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$, (tsh5) $x \leq y$ *implica* $P(x) \leq P(y)$ *y* $F(x) \leq F(y)$,

(tsh6) $G(x) \vee G(y) \leq G(x \vee y)$, $H(x) \vee H(y) \leq H(x \vee y)$,

(tsh7) $P(x \wedge y) \leq P(x) \wedge P(y)$, $F(x \wedge y) \leq F(x) \wedge F(y)$,

(tsh8) $P(0) = 0$, $F(0) = 0$,

(tsh9) $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$, $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$,

(tsh10) $FH(x) \leq x$, $PG(x) \leq x$.

Dem. Es de rutina. ■

Lema 4.2.2. *Sean G y H dos operaciones unarias sobre una $SH-$álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ tal que $G(1) = 1$ y $H(1) = 1$. Entonces, la condición* (tsh2) *es equivalente a la siguiente condición:*

$$\text{(tsh2)}^* \quad G(x \rightarrow y) \leq G(x) \rightarrow G(y),\ H(x \rightarrow y) \leq H(x) \rightarrow H(y).$$

Dem. La demostración es similar a la dada en el Lema 4.1.3.

■

Por lo tanto, si reemplazamos en la Definición 4.2.1 el axioma (tsh2) por el (tsh2)*, obtenemos una definición equivalente de $tSH-$álgebra.

Lema 4.2.3. *Sea $(\mathscr{A}, G, H)$ una $tSH-$álgebra. Si M es un filtro de A, entonces $G^{-1}(M)$ y $H^{-1}(M)$ son filtros de A.*

Dem. La prueba es una consecuencia directa de (tsh1) y (tsh2) de la Definición 4.2.1.

■

4.2.2. Una dualidad discreta para las $tSH-$álgebras

En esta sección, describiremos una dualidad discreta para las $tSH-$álgebras utilizando las descritas para las $M-$álgebras y para las $H-$álgebras. Para tal fin, introducimos la siguiente:

Definición 4.2.2. *Un $SH-$marco temporal (o $\mathcal{TSH}-$marco) es una estructura $(X,\leq,g,R,Q)$ donde $(X,\leq,g)$ es un $\mathcal{M}-$marco, (X,R,Q) es un marco débil y se satisfacen las siguientes condiciones adicionales:*

(fsh1) $(\leq\circ R\circ\leq)\subseteq R$,

(fsh2) $xRg(y)\Leftrightarrow yQg(x)$, *para todo* $x,y\in X$.

Proposición 4.2.1. *En todo $\mathcal{TSH}-$marco $(X,\leq,g,R,Q)$ se satisface la siguiente propiedad:*

(fsh3) $(\leq\circ Q\circ\leq)\subseteq Q$.

Dem. Sea $(x,y)\in(\leq\circ Q\circ\leq)$. Entonces, existe $z,w\in X$ tales que $x\leq z$, $(z,w)\in Q$ y $w\leq y$. Dado que $(X,\leq,g)$ es un $\mathcal{M}-$marco tenemos que $g(z)\leq g(x)$, $g(y)\leq g(w)$, y $(g(g(z)),g(g(w)))\in Q$. Aplicando (fsh2), obtenemos que $(g(w),g(z))\in R$. Así, $(g(y),g(x))\in R$. Entonces, aplicando nuevamente (fsh2) tenemos que xQy.

■

En lo que sigue, los $\mathcal{TSH}-$marcos serán denotados simplemente por X cuando no haya lugar a confusión.

Definición 4.2.3. *Un marco canónico de una $tSH-$álgebra $(\mathscr{A},G,H)$ es una estructura $(\mathscr{X}(\mathscr{A}),\leq^c,g^c,R^c,Q^c)$, donde $(\mathscr{X}(\mathscr{A}),\leq^c,g^c)$ es el marco canónico asociado al $M-$reducto $\langle A,\vee,\wedge,\sim,0,1\rangle$ y se verifican las siguientes condiciones para $S,T\in\mathscr{X}(\mathscr{A})$.*

(rsh1) $SR^cT\Leftrightarrow G^{-1}(S)\subseteq T$,

(rsh2) $SQ^cT\Leftrightarrow H^{-1}(S)\subseteq T$.

Lema 4.2.4. *El marco canónico de una $tSH-$álgebra es un $\mathcal{TSH}-$marco.*

Dem. Teniendo en cuenta los resultados establecidos en la Subsección 1.2.4, solo tenemos que probar (fsh1) y (fsh2).

(fsh1): Sea $(S,T)\in(\leq^c\circ R^c\circ\leq)$. Entonces existen $V,W\in\mathcal{X}(\mathcal{A})$ tales que $S\subseteq V$, VR^cW y $W\subseteq T$. De las dos últimas afirmaciones tenemos que $G^{-1}(V)\subseteq T$. Por lo tanto, dado que $S\subseteq V$ inferimos que SR^cT.
(fsh2): Sean $TR^cg^c(S)$ y $a\in H^{-1}(S)$. Supongamos que $\sim a\in T$. Por otra parte, de (tsh3) de la Definición 4.2.1 tenemos que $\sim a\leq G(\sim H(a))$ y así, obtenemos que $G(\sim H(a))\in T$. De esta última afirmación y del hecho que $G^{-1}(T)\subseteq g^c(S)$, obtenemos $\sim H(a)\in g^c(S)$. Luego, $H(a)\notin S$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a\in g^c(T)$. De donde concluimos que $PQ^cg^c(F)$. La recíproca se prueba de manera similar.

■

Definición 4.2.4. *El álgebra compleja de un* $tSH-$*marco* $(X,\leq,g,R,Q)$ *es*

$$\langle\mathcal{C}(X),\vee^c,\wedge^c,\rightarrow_c,\sim^c,G^c,H^c,0^c,1^c\rangle,$$

donde $\langle\mathcal{C}(X),\vee^c,\wedge^c,\rightarrow_c,\sim^c,0^c,1^c\rangle$, *es el álgebra compleja del* $\mathcal{H}-$*marco* $(X,\leq)$, $\sim^c U=X\setminus g(U)$, $G^c(U)=[R]U$ *y* $H^c(U)=[Q]U$ *para todo* $U\in\mathcal{C}(X)$.

Lema 4.2.5. *El álgebra compleja de un* $\mathcal{TSH}-$*marco es una* $tSH-$*álgebra.*

Dem. De [49, 124], $\mathcal{C}(X)$ es cerrado bajo las operaciones de retículo, $\sim^c$ y $\rightarrow_c$. Ahora, vamos a probar que $\mathcal{C}(X)$ es cerrado bajo G^c, es decir, $G^c(U)=[\leq]G^c(U)$. De la reflexividad de $\leq$, tenemos que $[\leq]G^c(U)\subseteq G^c(U)$. Supongamos que $x\in G^c(U)$. Sea $y\in X$ tal que $x\leq y$ y tomemos $z\in X$ que verifique yRz. Luego, de la reflexividad de $\leq$ y (fsh1) inferimos que xRz. Así, $z\in U$ y por lo tanto, $x\in[\leq]G^c(U)$. Entonces, $G^c(U)\subseteq[\leq]G^c(U)$. En forma similar, usando (fsh3), se prueba que $H^c(U)=[\leq]H^c(U)$. Por otra parte, claramente se satisfacen los axiomas (tsh1) y (tsh2). Por lo tanto solo resta probar (tsh3). Sea $x\in U$ y supongamos que $x\notin G^c(\sim^c H^c(\sim^c U))$. Entonces, existe $y\in X$ tal que xRy y $y\notin\sim^c H^c(\sim^c U)$. De esta última afirmación, $y\in g(H^c(\sim^c U))$ y así, $y=g(z)$ para algún $z\in H^c(\sim^c U)$. Luego, $xRg(z)$ y de (fsh2) tenemos que $zQg(x)$. Esta afirmación y del hecho que $z\in H^c(\sim^c U)$ nos permite inferir que $g(x)\notin g(U)$, lo cual es una contradicción. Así, $U \subseteq G^c(\sim^c H^c(\sim^c U))$. En forma análoga, se prueba que $U \subseteq H^c(\sim^c G^c(\sim^c U))$.

■

Ahora vamos a mostrar que la inmersión $h : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(\mathscr{A}))$, preserva G y H, esto es,

Lema 4.2.6. *Para todo $a \in A$, $h(G(a)) = G^c(h(a))$ y $h(H(a)) = H^c(h(a))$.*

Dem. Sea $S \in h(G(a))$; entonces $G(a) \in S$. Supongamos que $T \in \mathscr{X}(\mathscr{A})$ verifica que SR^cT. Entonces de (rsh1), $G^{-1}(S) \subseteq T$ y así, $a \in T$. Por lo tanto, $S \in G^c(h(a))$ de donde inferimos que $h(G(a)) \subseteq G^c(h(a))$. Recíprocamente, supongamos que $S \in G^c(h(a))$. Entonces para todo $T \in \mathscr{X}(\mathscr{A})$, SR^cT implica que $T \in h(a)$. Supongamos que $G(a) \notin S$. Entonces $G^{-1}(S)$ es un filtro y $a \notin G^{-1}(S)$. Luego, existe $V \in \mathscr{X}(\mathscr{A})$ tal que $a \notin V$ y $G^{-1}(S) \subseteq V$. Esta última afirmación y (rsh1) nos permite concluir que SR^cV. De esta afirmación tenemos que $V \in h(a)$ y así, $a \in V$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $h(G(a)) = G^c(h(a))$. De manera similar, usando (rsh2), se prueba que $h(H(a)) = H^c(h(a))$.

■

El Lema 4.2.7 muestra que la inmersión de orden $k : X \longrightarrow \mathscr{X}(\mathscr{C}(X))$ definida por $k(x) = \{U \in \mathscr{C}(X) : x \in U\}$ preserva las relaciones R y Q.

Lema 4.2.7. *Sea $(X, \leq, g, R, Q)$ un $tSH-$marco y sean $x, y \in X$. Entonces,*

(i) $xRy \Leftrightarrow k(x)R^ck(y)$,

(ii) $xQy \Leftrightarrow k(x)Q^ck(y)$.

Dem. Solo probaremos (i). Sea xRy y supongamos que $U \in \mathscr{C}(X)$ verifica que $G^c(U) \in k(x)$. Entonces, es fácil ver que $y \in U$ y así, $k(x)R^ck(y)$. Recíprocamente, sean $x, y \in X$ tales que $k(x)R^ck(y)$. Entonces, $G^{c^{-1}}(k(x)) \subseteq k(y)$. Por otra parte, notemos que $[\leq](X \setminus (y]) \in \mathscr{C}(X)$ y $y \notin [\leq](X \setminus (y])$. Entonces, $[\leq](X \setminus (y]) \notin k(y)$ y así, $[\leq](X \setminus (y]) \notin G^{c^{-1}}(k(x))$. Por lo tanto, $[R]([\leq](X \setminus (y])) \notin k(x)$ de donde inferimos que $x \notin [R]([\leq](X \setminus (y])$. Entonces, existe $z \in X$ tal que xRz

y $z \notin [\leq](X \setminus (y])$. De esta última afirmación existe $w \in X$ tal que $z \leq w$ y $w \leq y$, lo que nos permite inferir que $z \leq y$. Luego, en virtud de la reflexividad de $\leq$ y (fsh1), xRy como queríamos probar.

■

Entonces, tenemos una dualidad discreta entre $\mathcal{TSH}-$marcos y $tSH-$álgebras.

Teorema 4.2.1.

(a) *Toda $tSH-$álgebra es inmersible en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo $\mathcal{TSH}-$marco es inmersible en el marco canónico de su álgebra compleja.*

4.2.3. Un cálculo proposicional basado en $tSH-$álgebras

En esta sección, describiremos un cálculo proposicional que tiene a las $tSH-$álgebras como contraparte algebraica. La terminología y símbolos usados aquí coinciden en general con los usados en [134].

Sea $\mathscr{L} = (A^0, For[V])$ un lenguaje formalizado de orden cero, donde en el alfabeto $A^0 = (V, L_0, L_1, L_2, U)$ el conjunto

- V de variables proposicionales es numerable,
- L_0 es vacío,
- L_1 contiene tres elementos denotados por $\sim$, G y H llamados símbolo de negación y símbolo de operadore temporales, respectivamente,
- L_2 contiene tres elementos denotados por $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, llamados símbolo de disyunción, símbolo de conjunción y símbolo de implicación, respectivamente,

- U contiene dos elementos denotados por (,).

Para cada α, β en el conjunto $For[V]$ de todas las fórmulas sobre A^0, en lugar de $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, $\sim G \sim \alpha$ y $\sim H \sim \alpha$ escribiremos para abreviar $\alpha \longleftrightarrow \beta$, $F\alpha$ y $P\alpha$, respectivamente.

Supongamos que el conjunto $\mathscr{A}_l$ de los axiomas lógicos consiste de todas las fórmulas de la siguiente forma, donde α, β son fórmulas cualesquiera en $For[V]$:

(MS0) los axiomas del cálculo proposicional modal simétrico, es decir, los axiomas (A1)-(A10) indicados en [115, pag. 60],

(MS1) $G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta),\ H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$,

(MS2) $\alpha \to GP\alpha,\ \alpha \to HF\alpha$.

El operador de consecuencia $C_{\mathscr{L}}$ en $\mathscr{L}$ está determinado por $\mathscr{A}_l$ y las siguientes reglas de inferencia:

(R1) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$,

(R2) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\sim \beta \to \sim \alpha}$,

(R3) $\dfrac{\alpha}{G\alpha}$,

(R4) $\dfrac{\alpha}{H\alpha}$.

El sistema $TMS = (\mathscr{L}, C_{\mathscr{L}})$ así obtenido será llamado el $TMS-$cálculo proposicional. Denotaremos por $\mathscr{T}$ al conjunto de todas las fórmulas demostrables en TMS. Si α pertenece a $\mathscr{T}$ escribiremos $\vdash \alpha$.

Sea $\approx$ la relación binaria sobre $For[V]$ definida por

$$\alpha \approx \beta \Longleftrightarrow \vdash \alpha \longleftrightarrow \beta.$$

Entonces es fácil chequear que $\approx$ es una relación de congruencia sobre $\langle For[V], \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, G, H\rangle$ y $\mathscr{T}$ determina una clase de equivalencia la cual denotaremos por $\mathbf{1}$. Además, teniendo en cuenta [115, pag. 62] se puede deducir que

Teorema 4.2.2. *$\langle For[V]/\approx, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, G, H, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ es una $tSH-$álgebra, siendo $\mathbf{0} = \sim \mathbf{1}$.*

Definición 4.2.5. *Un $tSH-$modelo basado en un $\mathfrak{TSH}-$marco $K = (X, \leq, g, R, Q)$ es un sistema $M = (K, m)$ tal que $m : V \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ es una función que asigna subconjuntos de estados a variables proposicionales, es decir, satisface la siguiente condición:*

(her) $x \leq y$ *y* $x \in m(p)$ *implica* $y \in m(p)$.

Observación 4.2.1. *A la función m de la Definición 4.2.5 anterior la llamaremos función de significado o valuación.*

Definición 4.2.6. *Un $tSH-$modelo $M = ((X, \leq, g, R, Q); m)$ satisface una fórmula α en el estado x y escribiremos $M \models_x \alpha$, si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $M \models_x p \Longleftrightarrow x \in m(p)$ *para* $p \in V$,
- $M \models_x \alpha \vee \beta \Longleftrightarrow M \models_x \alpha$ *o* $M \models_x \beta$,
- $M \models_x \alpha \wedge \beta \Longleftrightarrow M \models_x \alpha$ *y* $M \models_x \beta$,
- $M \models_x \sim \alpha \Longleftrightarrow M \not\models_{g(x)} \alpha$,
- $M \models_x \alpha \rightarrow \beta \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* $x \leq y$ *y* $M \models_y \alpha$ *entonces* $M \models_y \beta$,
- $M \models_x G\alpha \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* xRy *entonces* $M \models_y \alpha$,

- $M \models_x H\alpha \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* xQy *entonces* $M \models_y \alpha$.

Definición 4.2.7.

- *Un fórmula* α *es verdadera en un* $tSH-$*modelo* M *(denotada por* $M \models \alpha$*) si, y sólo si, para todo* $x \in X$, $M \models_x \alpha$.
- *La fórmula* α *es verdadera en un* $\mathcal{TSH}-$*marco* K *(denotada por* $K \models \alpha$*) si, y sólo si, esta es verdadera en todo* $tSH-$*modelo basado en* K.
- *La fórmula* α *es válida si, y sólo si, es verdadera en todo* $\mathcal{TSH}-$*marco.*

Proposición 4.2.2. *Dado un* $tSH-$*modelo* $M = ((X, \leq, g, R, Q); m)$, *la función* m *puede ser extendida a todas las fórmulas por* $m(\alpha) = \{x \in X : M \models_x \alpha\}$. *Para todo* $tSH-$*modelo* M *y para toda fórmula* α, *esta extensión tiene la siguiente propiedad:*

(her) *si* $x \leq y$ *y* $x \in m(\alpha)$ *entonces* $y \in m(\alpha)$.

Dem. La prueba es por inducción con respecto a la complejidad de α. Por dar un ejemplo mostraremos (her) para fórmulas de la forma $G\alpha$. Sea (1) $x \leq y$ y (2) $M \models_x G(\alpha)$. Supongamos que yRz, entonces por (1),(2) y (fsh1), tenemos que $M \models_z \alpha$. ■

Teorema 4.2.3. (Teorema de Completitud) *Sea* α *una fórmula en* TMS. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) α *es demostrable en* TMS,

(ii) α *es válida.*

Dem. (i)$\Rightarrow$(ii): Procederemos por inducción sobre la complejidad de la fórmula α. Por ejemplo, probaremos que el axioma (MS2) es válido. Sea $K = (X, \leq, g, R, Q)$ un $\mathcal{TSH}-$marco y M un $tSH-$modelo basado en K.

(1) Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, [hip.]

(2) $M \models_y \alpha$, [hip.]

(3) Sea $z \in X$ tal que $y\,Q\,z$, [hip.]

Supongamos que

(4) $M \models_{g(z)} G \sim \alpha$, [hip.]

(5) $g(z)\,R\,g(y)$, [(3),(fsh3)]

(6) $M \models_{g(y)} \sim \alpha$, [(4),(5)]

(7) $M \not\models_y \alpha$. [(6)]

(7) contradice (2). Entonces

(8) $M \not\models_{g(z)} G \sim \alpha$, [(4),(7)]

(9) $M \models_z \sim G \sim \alpha$, [(8)]

(10) $M \models_y H \sim G \sim \alpha$, [(3),(9)]

(11) $M \models_x \alpha \to H \sim G \sim \alpha$. [(1),(2),(10)]

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que α no es demostrable, es decir, $[\alpha]_\approx \neq 1$. Aplicando el Teorema 4.2.1 a la tSH−álgebra $For[V]/\approx$, existe un $\mathcal{SH}$−marco $\mathscr{X}(For[V]/\approx)$ y un morfismo inyectivo de tSH−álgebras $h : For[V]/\approx \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(For[V]/\approx))$. Consideremos la función $m : TMS \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(For[V]/\approx))$ definida por $m(\alpha) = h([\alpha]_\approx)$ para todo $\alpha \in For[V]$. Es fácil probar que m es una función de significado. Dado que h es inyectiva, $m(\alpha) = h([\alpha]_\approx) \neq \mathscr{X}(For[V]/\approx)$, es decir, $(\mathscr{X}(For[V]/\approx), m) \not\models_{x_o} \alpha$ para algún $x_o \in \mathscr{X}(For[V]/\approx)$. Por lo tanto, α no es válida. ■

4.3. tSH_n−álgebras

En esta sección introduciremos las SH_n−álgebras temporales, o tSH_n−álgebras como una generalización de las LM_n−álgebras temporales.

4.3.1. tSH_n-álgebras: definición y propiedades

Definición 4.3.1. *Un álgebra de Heyting simétrica de orden n temporal (o SH_n-álgebra temporal, o tSH_n-álgebra) es una terna $(\mathscr{A}, G, H)$ tal que $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \{S_i\}_{1\leq i\leq n-1}, \sim, 0, 1\rangle$ es una SH_n-álgebra y G, H son dos operadores unarios sobre A tales que:*

1. $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,
2. $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,
3. $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, *donde P y F están definidos por:* $P(x) = \sim H(\sim x)$ *y* $F(x) = \sim G(\sim x)$,
4. $S_i(G(x)) = GS_i(x)$, $S_i(H(x)) = HS_i(x)$, *para* $i = 1, \ldots, n-1$.

Ejemplos 4.3.1.

- *El reducto $\langle A, \vee, \wedge, \to, G, H, \sim, 0, 1\rangle$ de una tSH_n-álgebra $(\mathscr{A}, G, H)$ es una $tSH-$álgebra.*
- *Si $(\mathscr{A}, G, H)$ es una tSH_n-álgebra en la cual se satisface la ley de Kleene: $x\wedge \sim x \leq y \vee \sim y$, entonces $(\mathscr{A}, G, H)$ es una tLM_n-álgebra.*

Lema 4.3.1. *Las siguientes propiedades se verifican en toda tSH_n-álgebra $(\mathscr{A}, G, H)$:*

5. $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$,
6. $x \leq y$ *implica* $P(x) \leq P(y)$ *y* $F(x) \leq F(y)$,
7. $G(x) \vee G(y) \leq G(x \vee y)$, $H(x) \vee H(y) \leq H(x \vee y)$,
8. $P(x \wedge y) \leq P(x) \wedge P(y)$, $F(x \wedge y) \leq F(x) \wedge F(y)$,
9. $P(0) = 0$, $F(0) = 0$,

10. $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$, $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$,

11. $FH(x) \leq x$, $PG(x) \leq x$.

12. $S_i(F(x)) = FS_i(x)$, $S_i(P(x)) = PS_i(x)$, *para* $i = 1, \ldots, n-1$.

Dem. Es de rutina. ■

Lema 4.3.2. *Sean* G *y* H *dos operaciones unarias sobre una* SH_n*−álgebra* $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \{S_i\}_{1 \leq i \leq n-1}, \sim, 0, 1\rangle$ *tal que* $G(1) = 1$ *y* $H(1) = 1$. *Entonces, la condición* 2 *de la Definición 4.3.1 es equivalente a la siguiente condición:*

$$(2)^* \quad G(x \rightarrow y) \leq G(x) \rightarrow G(y),\ H(x \rightarrow y) \leq H(x) \rightarrow H(y).$$

Dem. La demostración es similar a la dada en el Lema 4.1.3.

■

Por lo tanto, si reemplazamos en la Definición 4.3.1 el axioma 2. por el $(2)^*$, obtenemos una definición equivalente de tSH−álgebra.

4.3.2. Una dualidad discreta para las tSH_n−álgebras

En esta sección, describiremos una dualidad discreta para las tSH_n−álgebras temporales teniendo en cuenta los resultados indicados en la Subsección 1.2.5 para las SH_n−álgebras. Para tal fin, introducimos la siguiente:

Definición 4.3.2. *Un* SH_n*−marco temporal (o* $\mathcal{TSH}_n$*−marco) es una estructura*

$$(X, \leq, g, \{s_i\}_{1 \leq i \leq n-1}, R, Q)$$

donde $(X, \leq, g, \{s_i\}_{1 \leq i \leq n-1})$ *es un* SH_n*-marco,* $(X, \leq, g, R, Q)$ *es un SH-marco temporal y se satisfacen las siguientes condiciones adicionales:*

1. xRy *implica* $s_i(x)Rs_i(y)$,

2. xQy *implica* $s_i(x)Qs_i(y)$,

3. $s_i(z)Ry$ *implica que existe* $x \in X$ *tal que* zRx *y* $s_i(x) \leq y$,

4. $s_i(z)Qy$ *implica que existe* $x \in X$ *tal que* zQx *y* $s_i(x) \leq y$.

En lo que sigue, a los $\mathcal{TSH}_n-$marcos los denotaremos simplemente por X cuando no haya lugar a confusión.

Definición 4.3.3. *Un marco canónico de una* tSH_n-*álgebra* $(\mathscr{A}, G, H)$ *es una estructura*

$$(\mathscr{X}(\mathscr{A}), \leq^c, g^c, \{s_i\}_{1\leq i\leq n-1}, R^c, Q^c),$$

donde $(\mathscr{X}(\mathscr{A}), \leq^c, g^c, \{s_i\}_{1\leq i\leq n-1})$ *es el marco canónico asociado al* SH_n-*reducto* $\langle A, \vee, \wedge, \to, \{S_i\}_{1\leq i\leq n-1}, \sim, 0, 1\rangle$ *y* R^c, Q^c *son dos relaciones binarias definidas como en* (rsh1) *y*(rsh2) *de la Definición 4.2.3.*

Lema 4.3.3. *El marco canónico de una* tSH_n-*álgebra es un* $\mathcal{TSH}_n-$*marco.*

Dem. Teniendo en cuenta los resultados establecidos en [124] y en Lema 4.2.4, solo nos resta probar 1-4 de la Definición 4.3.2.
1: Sean $S, T \in \mathscr{X}(\mathscr{A})$. Vamos a probar que si SR^cT, entonces $s_i^c(S)R^cs_i^c(T)$. Supongamos que $a \in G^{-1}(s_i^c(S))$. Entonces, tenemos que $S_i(G(a)) = G(S_i(a)) \in S$, de donde resulta que $S_i(a) \in T$, es decir, $a \in s_i^c(T)$. De manera similar podemos probar 2.
3: Sean $S, T \in \mathscr{X}(\mathscr{A})$ tales que $G^{-1}(s_i^c(S)) \subseteq T$ y consideremos el conjunto $E = \{z \in A : G(z) \in S\}$, entonces tenemos que $\bigwedge I \not\leq \bigvee J$, para todo subconjunto finito $I \subseteq E$, $J \subseteq S_i(A \setminus T)$. En efecto: Supongamos que existen $I \subseteq E$, $J \subseteq S_i(A \setminus T)$ subconjuntos finitos tales que $\bigwedge I \leq \bigvee J$. De esta última afirmación y de 2 de la Definición 4.3.1 inferimos que $G(\bigwedge I) \in S$. Dado que G es creciente obtenemos que $G(\bigvee J) \in S$. Por otra parte, es fácil ver que $\bigvee J \in S_i(A \setminus T)$. De esta última afirmación, existe $a \in A \setminus T$ tal que $S_i(a) = \bigvee J$. Luego, $G(S_i(a)) \in S$. Entonces, por 4 de la Definición 4.3.1 podemos deducir que $a \in T$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, E es una separación (ver [89, p.185]) de $S_i(A \setminus T)$, entonces de [89,

p. 186], existe $Z \in \mathscr{X}(\mathscr{A})$ tal que $E \subseteq Z$ y $Z \cap S_i(A \setminus T) = \emptyset$. Esta última afirmación nos permite concluir que $s_i^c(Z) \subseteq T$ y SR^cZ. De manera similar se prueba 4.

■

Definición 4.3.4. *El álgebra compleja de un $\mathcal{TSH}_n$−marco $(X, \leq, g, \{s_i\}_{1\leq i\leq n}, R, Q)$ es*

$$\langle \mathscr{C}(X), \vee^c, \wedge^c, \rightharpoonup_c, \sim^c, \{S_i^c\}_{1\leq i\leq n-1}, G^c, H^c, 0^c, 1^c \rangle,$$

donde $\langle \mathscr{C}(X), \vee^c, \wedge^c, \rightharpoonup_c, \sim^c, \{S_i^c\}_{1\leq i\leq n-1}, 0^c, 1^c \rangle$, es el álgebra compleja del $\mathcal{SH}_n$−marco $(X, \leq, g, \{s_i\}_{1\leq i\leq n})$ y G^c, H^c son dos operadores unarios sobre $\mathscr{C}(X)$ detallados como en la Definición 4.2.4.

Lema 4.3.4. *El álgebra compleja de un $\mathcal{TSH}_n$−marco es una tSH_n−álgebra.*

Dem. Teniendo en cuenta los resultados establecidos en [124] y el Lema 4.2.5, solo nos resta probar 4 de la Definición 4.3.1.

En efecto: sea $U \in \mathscr{C}(X)$ y supongamos que $s_i(y) \in [R]U$ con yRx. Entonces, por 1 de la Definición 4.3.2 tenemos que $s_i(y)Rs_i(x)$. De esta última afirmación podemos inferir que $s_i(x) \in U$. Por lo tanto, $S_i^c([R]U) \subseteq [R]S_i^c(U)$. Por otra parte, supongamos que $z \in [R](S_i^c(U))$ y $s_i(z)Ry$. Entonces en virtud de 2 de la Definición 4.3.2, existe $x \in X$ tal que zRx y $s_i(x) \leq y$. Esta última afirmación nos permite concluir que $y \in U$. En forma similar, se prueba que $S_i^c[Q](U) = [Q]S_i^c(U)$.

■

Ahora vamos a mostrar que la inmersión $h : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(\mathscr{A}))$, preserva G y H, esto es,

Lema 4.3.5. *Para todo $a \in A$, $h(G(a)) = G^c(h(a))$ y $h(H(a)) = H^c(h(a))$.*

Dem. Es similar a la prueba del Lema 4.2.6. ■

El Lema 4.3.6 muestra que la inmersión de orden $k : X \longrightarrow \mathscr{X}(\mathscr{C}(X))$ definido por $k(x) = \{U \in \mathscr{C}(X) : x \in U\}$ preserva las relaciones R y Q.

Lema 4.3.6. *Sea* $(X, \leq, g, \{s_i\}_{1\leq i\leq n-1}, R, Q)$ *un* $\mathcal{TSH}_n-$*marco y sean* $x, y \in X$. *Entonces,*

(i) $xRy \Leftrightarrow k(x)R^c k(y)$,

(ii) $xQy \Leftrightarrow k(x)Q^c k(y)$.

Dem. Es análoga a la prueba del Lema 4.2.7.

■

Entonces, tenemos que existe una dualidad discreta entre $\mathcal{TSH}_n-$marcos y las tSH_n-álgebras.

Teorema 4.3.1.

(a) *Toda* tSH_n-*álgebra es sumergible en el álgebra compleja de su marco canónico.*

(b) *Todo* $\mathcal{TSH}_n-$*marco es sumergible en el marco canónico de su álgebra compleja.*

4.3.3. Un cálculo proposicional basado en $\boldsymbol{tSH_n}-$álgebras

En esta sección, describiremos un cálculo proposicional que tiene a las tSH_n-álgebras como contraparte algebraica. La terminología y símbolos usados aquí coinciden en general con los usados en [134].

Sea $\mathscr{L} = (A^0, For[V])$ un lenguaje formalizado de orden cero, donde el alfabeto $A^0 = (V, L_0, L_1, L_2, U)$ el conjunto

- V de variables proposicionales es numerable,
- L_0 es vacío,
- L_1 contiene $n+2$ elementos denotados por $\sim$, S_i (for $i = 1, \cdots, n-1$), G y H llamados símbolo de negación, símbolos de operadores modales y símbolo de operadores temporales, respectivamente,

- L_2 contiene tres elementos denotados por $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, llamados símbolo de disyunción, símbolo de conjunción y símbolo de implicación, respectivamete,

- U contiene dos elementos denotados por (,).

Para cada α, β en el conjunto $For[V]$ de todas las fórmulas sobre A^0, en lugar de $\alpha \rightarrow\sim (\alpha \rightarrow \alpha)$, $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, $\sim G \sim \alpha$ y $\sim H \sim \alpha$ escribiremos para abreviar $\neg\alpha$, $\alpha \longleftrightarrow \beta$, $F\alpha$ y $P\alpha$, respectivamente.

Supondremos que el conjunto $\mathscr{A}_l$ de los axiomas lógicos consiste de todas las fórmulas de la siguiente forma, donde α, β, γ son fórmulas en $For[V]$:

(LI0) los axiomas de la lógica SHn, es decir, los axiomas (A1)-(A15) indicados en [97],

(LI1) $G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta),\ H(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (H\alpha \rightarrow H\beta)$,

(LI2) $\alpha \rightarrow GP\alpha,\ \alpha \rightarrow HF\alpha$,

(LI3) $S_i G\alpha \longleftrightarrow GS_i\alpha,\ S_i H\alpha \longleftrightarrow HS_i\alpha$.

La operación de consecuencia $C_{\mathscr{L}}$ en $\mathscr{L}$ es determinada por $\mathscr{A}_l$ y las siguientes reglas de inferencias:

(R1) $\dfrac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

(R2) $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta}{\sim \beta \rightarrow\sim \alpha}$

(R3) $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta}{S_1\alpha \rightarrow S_1\beta}$

(R4) $\dfrac{\alpha}{G\alpha}$

(R5) $\dfrac{\alpha}{H\alpha}$

El sistema $TSH_n = (\mathscr{L}, C_{\mathscr{L}})$ así obtenido será llamado el SH_n-cálculo proposicional temporal. Denotaremos por $\mathscr{T}$ al conjunto de todas las fórmulas demostrables en TSH_n. Si α pertenece a $\mathscr{T}$ escribiremos $\vdash \alpha$.

Sea $\approx$ una relación binaria sobre $For[V]$ definida por:

$$\alpha \approx \beta \Longleftrightarrow \vdash \alpha \longleftrightarrow \beta.$$

Entonces es fácil chequear que $\approx$ es una relación de congruencia sobre $\langle For[V], \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \{S_i\}_{i=1}^{n-1}, G, H\rangle$ y que $\mathscr{T}$ determina una clase de equivalencia que será denotada por $\mathbf{1}$. Además, teniendo en cuenta [97, p. 300], es fácil ver que

Teorema 4.3.2. *$\langle For[V]/\approx, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \{S_i\}_{i=1}^{n-1}, G, H, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ es una tSH_n-álgebra, siendo $\mathbf{0} = \sim \mathbf{1}$.*

Definición 4.3.5. *Un tSH_n-modelo basado en un $\mathcal{TSH}_n-$marco*

$$K = (X, \leq, g, \{s_i\}_{i=1}^{n-1}, R, Q)$$

es un sistema $M = (K, m)$ tal que $m : V \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ es una función de significado que satisface la siguiente condición:

(her) *$x \leq y$ y $x \in m(p)$ imply $y \in m(p)$.*

Definición 4.3.6. *Un tSH_n-modelo $M = ((X, \leq, g, \{s_i\}_{i=1}^{n-1}, R, Q); m)$ satisface una fórmula α en el estado x y escribiremos $M \models_x \alpha$, si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- $M \models_x p \Longleftrightarrow x \in m(p)$ *para* $p \in V$,
- $M \models_x \alpha \vee \beta \Longleftrightarrow M \models_x \alpha$ *o* $M \models_x \beta$,
- $M \models_x \alpha \wedge \beta \Longleftrightarrow M \models_x \alpha$ *y* $M \models_x \beta$,
- $M \models_x \sim \alpha \Longleftrightarrow M \not\models_{g(x)} \alpha$,

- $M \models_x \alpha \to \beta \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* $x \leq y$ *y* $M \models_y \alpha$ *entonces* $M \models_y \beta$,
- $M \models_x \neg\alpha \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* $x \leq y$ *entonces* $M \not\models_y \alpha$,
- $M \models_x S_i\alpha \Longleftrightarrow M \models_{s_i(x)} \alpha$,
- $M \models_x G\alpha \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* xRy *entonces* $M \models_y \alpha$,
- $M \models_x H\alpha \Longleftrightarrow$ *para todo* y, *si* xQy *entonces* $M \models_y \alpha$.

Definición 4.3.7.

- *Una fórmula* α *es verdadera en un* tSH_n*−modelo* M *(denotado por* $M \models \alpha$*) si, y sólo si, para todo* $x \in X$, $M \models_x \alpha$.
- *Una fórmula* α *es verdadera en un* $\mathcal{TSH}_n$*−marco* K *(denotado por* $K \models \alpha$*) si, y sólo si, es verdadera en todo* tSH_n*−modelo basado en* K
- *La fórmula* α *es válida si, y sólo si, es verdadera en todo* $\mathcal{SH}_n$*−marco.*

Proposición 4.3.1. *Dado un* tSH_n*−modelo* $M = (K, m)$*, la función de significado* m *puede extenderse a todas las fórmulas por* $m(\alpha) = \{x \in X : M \models_x \alpha\}$. *Para todo* tSH_n*−modelo* M *y para toda fórmula* α*, esta extensión tiene la propiedad:*

(her) *si* $x \leq y$ *y* $x \in m(\alpha)$ *entonces* $y \in m(\alpha)$.

Dem. La prueba es por inducción con respecto a la complejidad de α. ■

Teorema 4.3.3. (Teorema de Completitud) *Sea* α *una fórmula en* TSH_n. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) α *es demostrable en* TSH_n,

(ii) α *is válida.*

Dem. (i) ⇒ (ii): Procederemos por inducción sobre la complejidad de la fórmula α. Por ejemplo, probaremos que el axioma (LI3) es válido. Sea $K = (X, \leq, g, \{s_i\}_{i=1}^{n-1}, R, Q)$ un $\mathcal{TSH}_n$−marco y M un tSH_n−modelo basado en K.

(LI3) Probemos que $S_i G\alpha \longleftrightarrow GS_i\alpha$ es válida. En efecto:

(1) Sea $y \in X$ tal que $x \leq y$, [hip.]

(2) $M \models_y S_i G\alpha$, [hip.]

(3) Sea $z \in X$ tal que $y\, R\, z$, [hip.]

(4) $s_i(y)\, R\, s_i(z)$, [(3), 2 Def. 4.3.2]

(5) $M \models_{s_i(z)} \alpha$, [(2),(4)]

(6) $M \models_z S_i\alpha$, [(5)]

(7) $M \models_y GS_i\alpha$, [(3),(6)]

(8) $M \models_x S_i G\alpha \rightarrow GS_i\alpha$, [(2),(7)]

Por otra parte

(9) Sea $y \in X$ tal que $x \leq y$, [hip.]

(10) $M \models_y GS_i\alpha$, [hip.]

(11) Sea $z \in X$ tal que $s_i(y)\, R\, z$, [hip.]

(12) existe $w \in X$ tal que $y\, R\, w$ y $s_i(w) \leq z$, [(11),3. Def. 4.3.2]

(13) $M \models_{s_i(w)} \alpha$, [(10),(12)]

(14) $M \models_z \alpha$. [(12),(13),(her)]

(15) $M \models_y S_i G\alpha$, [(11),(14)]

(16) $M \models_x GS_i\alpha \rightarrow S_i G\alpha$. [(9),(10),(15)]

Por lo tanto, $S_iG\alpha \longleftrightarrow GS_i\alpha$ es válida. En forma análoga podemos probar que $S_iH\alpha \longleftrightarrow HS_i\alpha$ es válida.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que α no es demostrable, es decir, $[\alpha]_\approx \neq 1$. Aplicando el Teorema 4.3.1 a la SH_n−álgebra $For[V]/\approx$, existe un $\mathcal{TSH}_n$−marco $\mathscr{X}(For[V]/\approx)$ y un morfismo inyectivo de tSH_n−álgebras $h : For[V]/\approx \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(For[V]/\approx))$. Consideremos la función $m : TSH_n \longrightarrow \mathscr{C}(\mathscr{X}(For[V]/\approx))$ definida por $m(\alpha) = h([\alpha]_\approx)$ para todo $\alpha \in For[V]$. Es fácil probar que m es una función de significado. Dado que h es inyectiva, $m(\alpha) = h([\alpha]_\approx) \neq \mathscr{X}(For[V]/\approx)$, es decir, $(\mathscr{X}(For[V]/\approx), m) \not\models_{x_o} \alpha$ para algún $x_o \in \mathscr{X}(For[V]/\approx)$. Por lo tanto, α no es válida. ■

Capítulo 5

Futuros desarrollos

A continuación enumeraremos algunos de los posibles desarrollos con los que continuaremos nuestras investigaciones. No agotamos la lista, y comentamos que ya tenemos resultados parciales, pero que todavía no consideramos que sea tiempo de intentar alguna publicación. Los títulos destacados están para ubicar al lector de que tema se trata. Y tal vez el que no hemos incorporado pero que lo consideramos relevante, es desarrollar contrapartidas algebraicas para el $\{\to,1\}-$fragmento del cálculo proposicional clásico temporal. Tema que en nuestra opinión es de mucho interés en disciplinas afines.

MV-álgebras temporales

En 2007, Diaconescu y Georgescu en [43] introdujeron las $MV-$álgebras temporales como sigue:

Sea $\mathscr{A} = (A,\oplus,\odot,-,0,1)$ una $MV-$álgebra y $G,H : A \longrightarrow A$ dos operaciones unarias sobre A. La estructura $(\mathscr{A},G,H)$ es llamada $MV-$álgebra temporal si se verifican las siguientes condiciones:

1. $G(1)=1$, $H(1)=1$,

2. $G(x \to y) \leq G(x) \to G(y)$, $H(x \to y) \leq H(x) \to H(y)$, donde $x \to y =: -x \oplus y$,

3. $G(x) \oplus G(y) \leq G(x \oplus y)$, $H(x) \oplus H(y) \leq H(x \oplus y)$,

4. $G(x \oplus x) \leq G(x) \oplus G(x)$, $H(x \oplus x) \leq H(x) \oplus H(x)$,

5. $F(x) \oplus F(x) \leq F(x \oplus x)$, $P(x) \oplus P(x) \leq P(x \oplus x)$,

6. $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, donde $F(x) = -G(-x)$ y $P(x) = -H(-x)$.

Los autores en [43] formularon un problema sobre la representación de las $MV-$álgebras temporales, este problema fue resuelto [126, 9] para las $MV-$álgebras temporales semisimples.

Las álgebras de Wajsberg (ver [37, 81]) son una formulación equivalente de las $MV-$álgebras basadas en la implicación en lugar de la disyunción. Teniendo en cuenta esto podríamos definir a las álgebras de Wajsberg temporales como ternas $(\mathscr{A}, G, H)$ donde $\mathscr{A} = \langle A, \to, \sim, 1\rangle$ es un álgebra de Wajsberg y $G, H : A \longrightarrow A$ son dos operaciones unarias sobre A que verifican:

1. $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

2. $G(x \to y) \leq G(x) \to G(y)$, $H(x \to y) \leq H(x) \to H(y)$,

3. $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$, donde $F(x) = \sim G(\sim x)$ y $P(x) = \sim H(\sim x)$,

4. $F(x) \to G(y) \leq G(x \to y)$, $P(x) \to H(y) \leq H(x \to y)$,

5. $G(\sim x \to x) \leq F(\sim x) \to G(x)$, $H(\sim x \to x) \leq P(\sim x) \to H(x)$,

6. $G(\sim x) \to F(x) \leq F(\sim x \to x)$, $H(\sim x) \to P(x) \leq P(\sim x \to x)$.

Entonces sería interesante determinar una dualidad topológica para las álgebras de Wajsberg temporales teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Celani y Cabrer en [13].

$L_{0,1}$−álgebras temporales

Como ya dijimos, con el objeto de obtener una versión algebraica del sistema IKt definimos la variedad de las IKt−álgebras. Recordemos que una IKt−álgebra es una estructura $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ donde $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ es una H−álgebra y G, H, F y P son operaciones unarias sobre A que verifican los siguientes axiomas:

(t1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(t2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(t3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$,

(t4) $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

(t5) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

(t6) $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

(t7) $F(x \to y) \leq G(x) \to F(y)$, $P(x \to y) \leq H(x) \to P(y)$.

Se puede probar que si en la definición anterior reemplazamos el axioma (t7) por el siguiente:

(t7)* $G(x) \wedge F(y) \leq F(x \wedge y)$, $H(x) \wedge P(y) \leq P(x \wedge y)$,

se obtiene una definición equivalente de IKt−álgebra. En esta nueva definición ninguno de los axiomas indicados para los operadores temporales G, H, F y P involucran ni la implicación intuicionista, ni la negación intuicionista (o pseudocomplemento). Esto nos motiva, desde un punto de vista algebraico, al estudio de una clase más general que la de las IKt−álgebras. Estas álgebras son estructuras $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ donde $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y G, H, F y P son operaciones unarias sobre A que verifican los siguientes axiomas:

(t1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(t2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(t3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$,

(t4) $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

(t5) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

(t6) $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

(t7)* $G(x) \wedge F(y) \leq F(x \wedge y)$, $H(x) \wedge P(y) \leq P(x \wedge y)$.

Álgebras de Heyting débiles temporales

La variedad de las álgebras de Heyting débiles (o $WH-$álgebras), fue introducida por Celani y Jansana en [17], como la contraparte algebraica de la menor lógica subintuicionista ωK considerada en [16]. Una $WH-$álgebra es un retículo distributivo acotado dotado de una operación binaria $\to$ con las propiedades de la implicación estricta de la lógica modal K. Las álgebras de Heyting son ejemplos de $WH-$álgebras. Otros ejemplos de $WH-$álgebras que aparecen en la literatura son las álgebras básicas introducidas por Ardeshir y Ruitenburg en [1], y los retículos subresiduados de G. Epstein y A. Horn [51]. Cada una de las variedades de $WH-$álgebras estudiadas en [17] corresponden a las lógicas proposicionales ωK_σ y sK_σ definidas en [16]. Las lógicas ωK_σ y sK_σ son los fragmentos de la implicación estricta de la consecuencia local y global definida por los modelos de Kripke (ver [16]), respectivamente. Recientemente, Celani y San Martín, han iniciado el estudio de *operadores frontales* sobre $WH-$álgebras (ver [20, 14]). Entonces, siguiendo las ideas de Celani y San Martín, sería interesante estudiar las $WH-$álgebras dotadas de los operadores temporales G, H, F y P. Una posible definición de operador temporal sobre una $WH-$álgebra sería la siguiente:

Una estructura $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ es un álgebra de Heyting débil temporal (o $WH-$álgebra temporal) si $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ es una $WH-$álgebra y G, H, F y P son operadores unarios sobre A, llamados operadores temporales, que verifican los siguientes axiomas:

(t1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

(t2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(t3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$,

(t4) $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

(t5) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

(t6) $PG(x) \leq x$, $FH(x) \leq x$,

(t7) $F(x \to y) \leq G(x) \to F(y)$, $P(x \to y) \leq H(x) \to P(y)$.

Es claro que las $WH-$álgebras temporales, así definidas, son una generalización no trivial de las $IKt-$álgebras.

$H_0^{\vee}-$álgebras temporales

Es bien sabido que la variedad de las álgebras de Hilbert es la semántica algebraica del fragmento implicativo positivo $\mathrm{Int}^{\to}$ del cálculo proposicional intuicionista Int. De manera similar, es posible concluir que la variedad de las álgebras de Hilbert con supremo es la semántica algebraica del $\{\to, \vee\}$-fragmento de Int.

Recordemos que un álgebra de Hilbert con supremo (o $H^{\vee}-$álgebras) (ver [21]) es un álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \to, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0)$ que verifica:

1. $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert,

2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semiretículo con último elemento 1,

3. para todo $x, y \in A$, $x \to y = 1 \Leftrightarrow x \vee y = y$.

Si existe un elemento $0 \in A$ tal que $0 \to x = 1$, para todo $x \in A$, entonces A se dice una $H^{\vee}-$álgebra con primer elemento (o $H_0^{\vee}$-álgebra). Recientemente, Celani y Montangie, han iniciado el estudio de las $H_0^{\vee}-$álgebras dotadas de un operador modal de necesidad $\Diamond$ (ver [23]). Entonces, siguiendo las ideas de Celani y Montangie, sería interesante estudiar las $H_0^{\vee}-$álgebras dotadas de los operadores temporales G, H, F y P. Una posible definición de operador temporal sobre una $H_0^{\vee}-$álgebra sería la siguiente:

Una estructura $(\mathscr{A}, G, H, F, P)$ es una $H_0^{\vee}-$álgebra temporal si $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \to, 0, 1\rangle$ es una $H_0^{\vee}-$álgebra y G, H, F y P son operadores unarios sobre A, llamados operadores temporales, que verifican los siguientes axiomas:

1. $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,

2. $G(x \to y) \leq G(x) \to G(y)$, $H(x \to y) \leq H(x) \to H(y)$,

3. $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$,

4. $F(0) = 0$, $P(0) = 0$,

5. $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$, $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,

6. $PG(x) \leq x$ y $FH(x) \leq x$,

7. $F(x \to y) \leq G(x) \to F(y)$, $P(x \to y) \leq H(x) \to P(y)$.

Álgebras de De Morgan-Nelson temporales

En 1990, A.V. Figallo [53] introdujo los $N-$lattices generalizados. Ahora denominados álgebras de De Morgan-Nelson debido a que en el 2005, Vakarelov introdujo bajo eso nombre una noción diferente de la considerada por Figallo. Entonces, tenemos que:

Un álgebra de De Morgan-Nelson ([53]) es un álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,2,1,0,0)$ tal que el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es una $M-$álgebra y la operación binaria $\rightarrow$ satisface las identidades:

1. $x \rightarrow x = 1$,

2. $(x \rightarrow y) \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$,

3. $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y)$,

4. $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,

5. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$.

En [106] se estudiaron las álgebras de De Morgan-Nelson monádicas. Entonces, siguiendo las ideas de [106], sería interesante estudiar la noción de operador temporal sobre las álgebras de De Morgan-Nelson.

Bibliografía

[1] M. Ardeshir, W. Ruitenburg. *Basic Propositional Calculus* I. Mathematical Logic Quarterly 44. 317–343. 1998.

[2] R. Mc Arthur, P. Robert. *Tense logic.* Synthese Library, 111. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht–Boston, Mass. 1976.

[3] R. Balbes, P. Dwinger. *Distributive lattices.* University of Missouri Press, Columbia. 1974.

[4] N. Belnap. *How a computer should think.* Contemporary Aspects of Philosophy, G. Ryle Ed. Oriel Press, Boston. 30–56. 1976.

[5] N. Belnap. *A useful four valued logic.* Modern Uses of Multiple-Valued Logic, J. M. Dunn and G. Epstein, Eds. Reidel, Dordrecht-Boston. 8–37. 1977.

[6] G. Birkhoff. *Lattice theory.* Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967

[7] A. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu, S. Rudeanu. *Łukasiewicz-Moisil algebras.* Annals of Discrete Mathematics, 49. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. 1991.

[8] M. Botur, I. Chajda, R. Halaš, M. Kolařik. *Tense operators on Basic Algebras.* Internat. J. Theoret. Phys., 50 (12), 3737–3749. 2011.

[9] M. Botur, J. Paseka. *On tense MV-algebras.* Fuzzy Sets and Systems 259. 111–125. 2015.

[10] J. P. Burgess. *Basic tense logic.* Handbook of philosophical logic, Vol. II, 89–133, Synthese Lib., 165, Reidel, Dordrecht. 1984.

[11] S. Burris, H.P. Sankappanavar. *A course in universal algebra.* Graduate Texts in Mathematics, 78. Springer-Verlag, New York-Berlin. 1981.

[12] A. Bialynicki-Birula, H. Rasiowa. *On the representation of quasi-Boolean algebras.* Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 5, 259–261, XXII. 1957.

[13] L. Cabrer, S. Celani. *Priestley dualities for some lattice-ordered algebraic structures, including MTL, IMTL and MV-algebras.* Cent. Eur. J. Math. 4,4. 600–623. 2006.

[14] J. L. Castiglioni, M. S. Sagastume, H. J. San Martín. *On frontal Heyting algebras.* Rep. Math. Logic, 45. 201–224. 2010.

[15] S. Celani, R. Jansana. *Priestley Duality, a Sahlqvist Theorem and a Goldblatt-Thomason Theorem for Positive Modal Logic.* L. J. of the IGPL, 7, 6. 683–715. 1999.

[16] S. Celani, R. Jansana. *A closer look at some subintuitionistic logics.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 42. 225–255. 2003.

[17] S. Celani, R. Jansana. *Bounded distributive lattices with strict implication.* Mathematical Logic Quarterly 51. 219–246. 2005.

[18] S. Celani, *Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2006 (2006), Article ID 21835, 20 pages, 2006.

[19] S. Celani. *Notes on the representation of distributive modal algebras.* Miskolc Mathematical Notes, 9 , 2, 81–89. 2008.

[20] S. Celani, H. J. San Martín. *Frontal operators in weak Heyting algebras.* Studia Logica, 100, 1–2,91–114. 2012.

[21] S. Celani, D. Montangie. *Hilbert algebras algebras with supremum,* Algebra Univers. 67, 237–255. 2012.

[22] S. Celani. *Classical modal De Morgan algebras.* Studia Logica, 98, 1–2. 251–266. 2012

[23] S. Celani, D. Montangie. *Hilbert algebras algebras with modal operator* $\Diamond$. Studia Logica. 2014.

[24] I. Chajda. *Algebraic axiomatization of tense intuitionistic logic.* Cent. Eur. J. Math. 9, 5, 1185–1191. 2011.

[25] I. Chajda, J. Paseka. *Dynamic effect algebras and their representations.* Soft Computing, 16 (10), 1733–1741. 2012.

[26] I. Chajda, M. Kolařik. *Dynamic effect algebras.* Math. Slovaca 62, 3. 379–388. 2012.

[27] I. Chajda, J. Paseka. *Tense operators in fuzzy logic.* Fuzzy Sets Syst. 2014. doi:10.1016/j.fss.2014.09.007

[28] C. Chiriţă. *Tense θ–valued Moisil propositional logic.* Int. J. of Computers, Communications and Control. 5, 642–653. 2010.

[29] C. Chiriţă. *Tense θ–valued Łukasiewicz–Moisil algebras.* J. Mult. Valued Logic Soft Comput. 17, 1. 1–24. 2011.

[30] C. Chiriţă. *Polyadic tense θ–valued Łukasiewicz–Moisil algebras.* Soft Computing. 16, ,6. 979–987. 2012.

[31] C. Chiriţă. *Tense Multiple–Valued Logical Systems.* PhD Thesis, University of Bucharest, Bucharest, 2012.

[32] R. Cignoli. *Algebras de Moisil de orden n*. Ph.D. Thesis. Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1969.

[33] R. Cignoli. *Moisil Algebras.* Notas de Lógica Matemática, 27, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. 1970.

[34] R. Cignoli. *Some algebraic aspects of many–valued logics.* Brazilian Conference on Mathematical Logic, 3. 49–69. 1980.

[35] R. Cignoli. *Proper n–valued Łukasiewicz algebras as S–algebras of Łukasiewicz n–valued propositional calculi.* Studia Logica, 41, 3–16. 1982.

[36] R. Cignoli, I. D' Ottaviano, D. Mundici. *Algebras das Logicas de Łukasiewicz*, Campinas UNICAMP-CLE, 1995.

[37] R. Cignoli, I. D'Ottaviano, D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer, 2000.

[38] R. Cignoli, S. Lafalce, A. Petrovich. *Remarks on Priestley duality for distributive lattices.* Order, 8, 3, 299–315. 1991.

[39] R. Cignoli. *Distributive lattice congruences and Priestley spaces.* Proceedings of the First "Dr. Antonio A. R. Monteiro". 81–84, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1991.

[40] M. E. Coniglio, M. Figallo. *Hilbert–style presentations of two logics associated to tetravalent modal algebras.* Studia Logica, 102, 3, 525–539. 2014.

[41] M. E. Coniglio, M. Figallo. *On a four-valued modal logic with deductive implication.* Bull. Sect. Logic Univ. Lódz 43, 1–2, 1–17. 2014.

[42] W. H. Cornish, P. R. Fowler. *Coproducts of De Morgan algebras.* Bull. Austral. Math. Soc. 16, 1, 1–13. 1977.

[43] D. Diaconescu, G. Georgescu. *Tense operators on MV-algebras and Łukasiewicz-Moisil algebras.* Fund. Inform., 81 (2007), 4, 379–408. 2007.

[44] M. J. Dunn. *Intensional algebras.* Entailment, edited by A. R. Anderson and N. D. Belnap Jr., Princeton University Press, Princeton. 180–206. 1975.

[45] I. Düntsch, E. Orłowska,I. Rewitzky.*Structures with multirelations, their discrete dualities and applications.* Fund. Inform. 100. 1–4, 77–98. 2010.

[46] I. Düntsch, E. Orłowska. *Discrete dualities for double Stone algebras.* Studia Logica, 99, 1–3, 127–142. 2011.

[47] I. Düntsch, E. Orłowska. *Discrete dualities for rough relation algebras.* Fund. Inform. 127, 1–4, 35-47. 2013.

[48] I. Düntsch, E. Orłowska. *Discrete dualities for some algebras with relations.* J. Log. Algebr. Methods Program. 83, 2, 169-.179 2014.

[49] W. Dzik, E. Or łowska, C. van Alten. *Relational representation theorems for general lattices with negations. Relations and Kleene algebra in computer science.* Lecture Notes in Comput. Sci., 4136, Springer, Berlin, 162–176. 2006.

[50] L. Esakia. *Topological Kripke models.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 214. 298–301. 1974

[51] G. Epstein, A. Horn. *Logics which are characterized by subresiduated lattices.* Zeitschrift fur Mathematiche Logik und Grundlagen der Mathematik, 22. 199–210. 1976.

[52] W. B. Ewald. *Intuitionistic tense and modal logic.* J. Symbolic Logic, 51, 1. 166–179. 1986.

[53] A. V. Figallo. *Notes on generalized $N-$lattices.* Rev. de la Unión Mat. Argentina, 35. 61–66. 1990.

[54] A. V. Figallo, A. Ziliani. *Symmetric tetra–valued modal algebras.* Notas Soc. Mat. Chile, 10, 1. 133–141. 1991.

[55] A. V. Figallo. *On the congruence in four–valued modal algebras.* Portugaliae Math., 49. 249–261. 1992.

[56] A. V. Figallo. *Tópicos sobre álgebras modales* $4-$*valuadas.* Proceeding of the IX Simposio Latino–Americano de Lógica Matemática, Bahía Blanca, Argentina, Ed. vol. 39 de Notas de Lógica Matemática, 145–157. 1992.

[57] A. V. Figallo. *On the congruences in four-valued modal algebras.* Portugal. Math. 49, 2, 249–261. 1992.

[58] A. V. Figallo, P. Landini. *On generalized* $I-$*algebras and* $4-$*valued modal algebras.* Rep. Math. Logic, 29. 3–18. 1996.

[59] A. V. Figallo, A. Ziliani. *Monadic Distributive Lattices.* Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, U. N. de San Juan, Argentina. 2, 1. 19–35. 1997.

[60] A. V. Figallo, C. Sanza. *Álgebras de Łukasiewicz* $n \times m$*–valuadas con negación* Noticiero de la Unión Matemática Argentina. 93. 2000.

[61] A. V. Figallo, I. Pascual, A. Ziliani. *Notes on monadic* $n-$*valued Łukasiewicz algebras.* Math. Bohem. 129, 3. 255–271. 2004.

[62] A. V. Figallo, C. Sanza, A. Ziliani. *Functional monadic* $n-$*valued Łukasiewicz algebras.* Math. Bohem. 130, 4. 337–348. 2005.

[63] A. V. Figallo, I. Pascual A. Ziliani. *Monadic Distributive Lattices.* Logic Journal of IGPL, 15, 5–6. 535–551. 2007.

[64] A.V. Figallo, C. Sanza. *Advances in monadic* $n \times m-$*valued Łukasiewicz algebras with negation.* Abstracts of Lectures, Tutorials and Talks. International Conference on Order, Algebra and Logics. Vanderbilt University, Nashville, USA. 46. 2007.

[65] A. V. Figallo, C. Sanza. *The $NS_{n\times m}-$propositional calculus.* Bulletin of the Section of Logic, 35, 2, 67–79. 2008.

[66] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on SH_n-algebras.* Pioneer Journal of Algebra, Number Theory and its Applications. 1, 1, 33–41. 2011.

[67] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Note on tense SH_n-algebras.* An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., 38, 4, 24–32. 2011.

[68] A. V. Figallo, G. Pelaitay, C. Sanza. *Discrete duality for $TSH-$algebras.* Commun. Korean Math. Soc., 27, 1, 47–56. 2012.

[69] A. V. Figallo, C. Sanza. *Monadic $n\times m-$valued Łukasiewicz-Moisil algebras.* Math. Bohem. 137, 4, 425–447. 2012.

[70] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Remarks on Heyting algebras with tense operators.* Bull. Sect. Logic Univ. Lódz 41, 1–2, 71–74. 2012.

[71] A. V. Figallo, E. Bianco, A. Ziliani. *A new algebraic version of Monteiro's four–valued propositional calculus.* Open Journal of Philosophy, 4, 319–331. 2014.

[72] A. V. Figallo, N. Oliva, A. Ziliani. *Modal pseudocomplemented De Morgan algebras.* Acta Univ. Palacki Olomouc. 53, 1. 65–79. 2014.

[73] A. V. Figallo, I. Pascual, A. Ziliani. *Monadic distributive lattices and monadic augmented Kripke frames.* J. Mult. Valued Logic Soft Comput., 22, 1–2, 189-216. 2014.

[74] A. V. Figallo, P. Landini. *Several characterizations of the $4-$valued modal algebras.* An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., 41, 2. 154-165. 2014.

[75] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Tense operators on De Morgan algebras.* Log. J. IGPL 22, 2, 255–267. 2014.

[76] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *An algebraic axiomatization of the Ewald's intuitionistic tense logic.* Soft Computing. 18, 10, 1873–1883. 2014.

[77] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *Discrete duality for tense Łukasiewicz–Moisil algebras.* Fund. Inform., 136. 1–13. 2015.

[78] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *$n \times m$-valued Łukasiewicz–Moisil algebras with two modal operators.* South American Journal of Logic. 2015.

[79] A. V. Figallo, G. Pelaitay. *A representation theorem for tense $n \times m-$valued Łukasiewicz–Moisil algebras.* Mathematica Bohemica. 2015.

[80] J. Font and M. Rius. *An abstract algebraic logic approach to tretavalent modal logics.* Journal of Symbolic Logic 65. 481–518. 2000.

[81] J. Font, A. J. Rodriguez, A. Torrens. *Wajsberg algebras.* Stochastica 8. 5–31. 1984.

[82] J. Font, M. Rius. *An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics.* J. Symbolic Logic 65. 2, 481–518. 2000.

[83] D. Gabbay. *Model theory for tense logics.* Ann. Math. Logic 8. 185–236. 1975.

[84] B. A. Galler. *Cylindric and polyadic algebras.* Proc. AMS, 8. 176–183. 1957.

[85] F. García Olmedo. *Un estudio algebraico de las lógicas temporales.* PhD Thesis, Universidad de Granada, Granada, 1994.

[86] G. Georgescu. *A representation theorem for tense polyadic algebras.* Mathematica, 21, 44, 2. 131–138. 1979.

[87] G. Georgescu. *A representation theorem for polyadic Heyting algebras.* Algebra Universalis, 14. 197–209. 1982.

[88] G. Georgescu, C. Vraciu. *Monadic Boolean algebras and monadic Łukasiewicz algebras.* Stud. Cerc. Mat. 23, 1025–1048. 1971.

[89] R. Goldblatt. *Varieties of complex algebras.* Ann. Pure Appl. Logic 44, 3, 173–242. 1989.

[90] G. Grätzer. *Universal algebra.* Second edition. Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1979.

[91] G. Grätzer. *General lattice theory.* Second edition. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[92] P. Halmos. *Algebraic Logic.* I. *Monadic Boolean algebras.* Compositio Math., 12. 217–249. 1955

[93] P. Halmos. *Algebraic Logic.* Chelsea, New York, 1962.

[94] P. Halmos. *Lectures on Boolean algebras.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 1 D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J. 1963.

[95] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski A. *Cylindric algebras,* I. North-Holland. 1971.

[96] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski. *Cylindric algebras,* II. North-Holland, (1985).

[97] L. Iturrioz. *Modal operators on symmetrical Heyting algebras.* Universal algebra and applications, 289–303, Banach Center Publ., 9, PWN, Warsaw. 1982.

[98] J. Järvinen, E. Orlowska. *Relational correspondences for lattices with operators. Relational methods in computer science.* 134–146, Lecture Notes in Comput. Sci., 3929, Springer, Berlin, 2006.

[99] B. Jónsson, A. Tarski. *Boolean algebras with operators.* I. Amer. J. Math. 73. 891–939. 1951.

[100] B. Jónsson, A Tarski. *Boolean algebras with operators.* II. Amer. J. Math. 74. 127–162. 1952.

[101] J. A. Kalman. *Lattices with involution.* Trans. Amer. Math. Soc. 87. 485–491. 1958.

[102] M. Kondo. *Characterization Theorem of* $4-$*valued De Morgan Logic.* Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Series B: Mathematical Science, 31. 73–80. 1998.

[103] J. Kotas, A. Pieczkowski. *On a generalized cylindrical algebra and intuitionistic logic.* Studia Logica XVIII, 73–80. 1966.

[104] T. Kowalski. *Varieties of tense algebras.* Rep. Math. Logic., 32. 53–95. 1998.

[105] F. Kröger. *Temporal logic of programs.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, 8. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[106] P. Landini. *Extensiones monádicas de las álgebras de Ockham.* Tesis doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, Bahía Blanca, 2011.

[107] E. J. Lemmon. *Algebraic semantics for modal logic.* I.II.. J. Symbolic Logic, 31, 45–46, 191–218. 1966.

[108] I. Loureiro. *Axiomatisation et propriétés des algèbres modales tétravalentes.* C.R. Acad. Sc. Paris t. 295, Série I, 555–557. 1982.

[109] I. Loureiro. *Algebras Modais Tetravalentes,* Ph. D. Thesis, Faculdade de Ciências de Lisboa, 1983.

[110] I. Loureiro. *Prime Spectrum of a Tetravalent Modal Algebra.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 24. 389–394. 1983.

[111] I. Loureiro. *Finite tetravalent modal algebras.* Rev. Un. Mat. Argentina 31, 4, 187–191. 1985.

[112] L. Maksimova. *Pretabular superintuitionistic logics.* Algebra i Logika 11 (1972), 558–570, 615.

[113] L. Maksimova. *Pretabular extensions of Lewis's logic S*4. Algebra i Logika 14, 1, 28–55, 117. 1975.

[114] J. Monk. *Polyadic Heyting algebras.* Notices Amer. Math. Soc. 7. 735. 1966.

[115] A. Monteiro. *Sur les algèbres de Heyting symétriques.* Portugal. Math. 39, 1–4. 1–237. 1985.

[116] A. Monteiro. *Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique.* An. Acad. Brasil Ci. 32. 1–7. 1960.

[117] A. Monteiro. *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer.* Rev. Un. Mat. Argentina 17. 149–160. 1956.

[118] A. Monteiro, O. Varsavsky. *Álgebras de Heyting monádicas.* Actas de las *X* Jornadas de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca, (1957), 52–62. 1957

[119] G. Moisil. *Notes sur les logiques non–chrysippiennes.* Ann. Sci. Univ. Jassy. Sect. I. 27. 86–98. 1941.

[120] G. Moisil. *Logique modale. Disquisit.* Math. Phys. 2. 3–98. 1942

[121] G. Moisil. *Le algèbre di Lukasiewicz.* An. Univ. Bucuresti Ser. Acta Logica 6. 97–135. 1963.

[122] G. Moisil. *Essais sur les logiques non chrysippiennes.* Éditions de lÁcadémie de la République Socialiste de Roumanie, Bucharest, 1972.

[123] E. Orłowska, I. Rewitzky. *Duality via truth: semantic frameworks for lattice-based logics.* Log. J. IGPL 13. 4. 467–490. 2005.

[124] E. Orłowska, I. Rewitzky. *Discrete dualities for Heyting algebras with operators.* Fund. Inform. 81. 1–3, 275–295. 2007.

[125] E. Orłowska, I. Rewitzky. *Discrete duality and its application to reasoning with incomplete information.* In Rough sets and Intelligent Systems Paradigms. Lectures Notes in Computer Science 4585, 51–56. 2007.

[126] J. Paseka. *Operators on $MV-$algebras and their representations.* Fuzzy Sets and Systems. 232. 62–73. 2013.

[127] H. A. Priestley. *Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces.* Bull. London Math. Soc. 2. 186–190. 1970.

[128] H. A. Priestley. *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices.* Proc. London Math. Soc. 3, 24. 507–530. 1972.

[129] H. A. Priestley. *Stone lattices: a topological approach.* Fund. Math. 84, 2. 127–143. 1974

[130] A. Prior. *Time and Modality.* Oxford, Oxford University Pres. 1957.

[131] A. Prior. *Past, Present and Future.* Oxford, Oxford University Press. 1967.

[132] A. Prior. *Papers on Time and Tense.* Oxford, Oxford University Press. 1968.

[133] H. Rasiowa, R. Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics.* Second Edition, PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw. 1968.

[134] H. Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 78. North-Holland Publishing Co., Amsterdam–London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York. 1974.

[135] G. Rousseau. *Logical systems with finitely many truth–values.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 17. 189–194. 1969.

[136] G. Rousseau. *Post algebras and pseudo–Post algebras.* Fund. Math. 67. 133–145. 1970

[137] H. P. Sankappanavar. *Distributive lattices with a dual endomorphism.* Z. Math. Logik Grundlag. Math. 31, 5, 385–392. 1985.

[138] C. Sanza. *Notes on* $n \times m-$*valued Łukasiewicz algebras with negation.* Log. J. IGPL 12, 6, 499–507. 2004.

[139] C. Sanza. *Álgebras de Łukasiewicz* $n \times m-$*valuadas con negación.* Tesis Doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2005.

[140] C. Sanza. $n \times m-$*valued Łukasiewicz algebras with negation.* Rep. Math. Logic 40, 83–106. 2006.

[141] C. Sanza. *On* $n \times m-$*valued Łukasiewicz-Moisil algebras.* Cent. Eur. J. Math. 6, 3. 372–383. 2008.

[142] C. Sicoe. *On many–valued Łukasiewicz algebras.* Proc. Japan Acad. 43. 725–728. 1967.

[143] C. Sicoe. *A characterization of Łukasiewiczian algebra.* I, II. Proc. Japan Acad. 43. 729–732, 733–736. 1967.

[144] R. Sikorski. *Boolean algebras.* Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, NeueFolge, Band 25 Academic Press Inc., New York; Springer–Verlag, Berlin-New York 1964.

[145] M. Sholander. *Postulates for distributive lattices.* Canadian J. Math. 3. 28–30. 1951.

[146] M. H. Stone. *The theory of representations for Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 40, 1. 37–111. 1936.

[147] W. Suchoń. *Matrix Łukasiewicz algebras.* Rep. Math. Logic 4. 91–104. 1975.

[148] D. Surowik. *Knowledge, time and intuitionism,* http://www.computational-logic.org/content/events/iccl-ss-2005/talks/DariuszSurowik.pdf.

[149] S. K. Thomason. *Semantic analysis of tense logic.* J.Symbolic Logic, 30. 150–158. 1977.

[150] A. Ziliani, A. *Álgebras de De Morgan modales* $4-$*valuadas monádicas.* Tesis doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2001.