



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

**Estrategia de Región de Confianza
para Problemas de Optimización
Multiobjetivo no Convexos**

Gabriel Aníbal Carrizo

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2012

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemáticas, de la Universidad Nacional del Sur, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el instituto Plasmas Densos Magnetizados (PLADEMA), de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA) y en el Departamento de Ciencias de Matemática, de la UNS, durante el período comprendido entre el 2 de septiembre de 2008 y el 28 de noviembre de 2012.

Este trabajo fue realizado bajo la dirección de la Dra. María Cristina Maciel, Profesora Titular del Departamento de Matemáticas de la UNS, y el Dr. Pablo Andrés Lotito, Profesor Asociado de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.

Gabriel Aníbal Carrizo

gabrielanibal@gmail.com

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Bahía Blanca, 28 de noviembre de 2012.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el / /, mereciendo la calificación de(.....)

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, sobre todo a la vieja y el viejo; y la familia que elegí: Melisa y mis Amigos.

A los profesores que he tenido y en particular a mis directores: Cristina y Pablo.

Al instituto PLADEMA de la UNCPBA y al Departamento de Matemática de la UNS.

A CONICET y al Estado Argentino, por invertir en mi formación.

Resumen

Un algoritmo basado en región de confianza es considerado para el problema de optimización multiobjetivo no convexo sin restricciones. Éste es una generalización del algoritmo propuesto por Fliege, Graña Drummond y Svaiter en 2009 para problemas convexos. En forma similar al caso escalar en cada iteración se resuelve un subproblema y se evalúa el paso. Las nociones de condiciones de decrecimiento predicho es adaptada al caso vectorial. Se introduce una regla para adaptar el radio de la región de confianza. Bajo hipótesis de diferenciabilidad, el algoritmo converge a puntos que satisfacen una condición necesaria para ser Pareto y en el caso convexo a puntos Pareto optimales. En el caso convexo la sucesión generada por el algoritmo converge a un punto Pareto que satisface, como el algoritmo de Fliege y sus colaboradores, condiciones necesarias y suficientes. Bajo hipótesis locales estándares el algoritmo converge con velocidad q -cuadrática.

Abstract

A trust-region-based algorithm for the non convex unconstrained multiobjective optimization problem is considered. It is a generalization of the algorithms proposed by Fliege, Graña Drummond and Svaiter, 2009 for the convex problem. Similarly to the scalar case, at each iteration a subproblem is solved and the step needs to be evaluated. The notions of decrease condition and of predicted reduction are adapted to the vector case. A rule to update the trust region radius is introduced. Under differentiability assumptions, the algorithm converges to points satisfying a necessary condition for Pareto optimal and in the convex case to a Pareto solution, satisfying necessary and sufficient conditions, like in the procedure proposed by the cited authors. Under standard local assumptions the convergence results to be q -quadratic.

Índice general

Índice general	I
Introducción	1
Abreviaturas y símbolos	4
1. Conceptos previos en optimización	5
1.1. Condiciones de optimalidad	5
1.1.1. Optimización sin restricciones	7
1.1.2. Optimización con restricciones	8
1.2. Estrategias de globalización	14
1.2.1. Esquema básico de un algoritmo de región de confianza	16
2. Revisión sobre optimización multiobjetivo	21
2.1. Problema de optimización multiobjetivo	21
2.2. Conceptos de solución	22
2.3. Condiciones de optimalidad	25
2.4. Métodos de resolución para MOP	30
2.4.1. Métodos geométricos	32
2.4.2. Método de criterio global	33

2.4.3. Método de los pesos	34
2.4.4. Método de la restricción ϵ	35
2.4.5. Método proximal de haces para multiobjetivo	35
2.4.6. Método de máximo descenso	38
2.4.7. Método de Newton	40
3. Estrategia de región de confianza para optimización multi- objetivo	44
3.1. Dificultades de la no-convexidad del MOP	45
3.2. El algoritmo principal	49
3.3. Análisis de convergencia del algoritmo	51
4. Análisis de convergencia local	64
5. Experimentación numérica	89
5.1. Problemas test y resolución numérica	90
5.2. Análisis de resultados	96
Conclusiones y trabajos futuros	99
Bibliografía	101
Anexos	109
A. Demostración auxiliar del Lema 4.1	110
B. Ejemplo de subproblema	113

Introducción

La optimización es el área de la matemática que consiste en hallar posibles soluciones correspondientes a minimizar (o maximizar) criterios especificados, sujetos a restricciones. Siguiendo este razonamiento es claro que en un problema de optimización escalar, con una sola función objetivo, entre dos puntos factibles es evidente cuál de ellos es preferible debido a que se pueden comparar los valores de la función objetivo.

En el caso de optimización multiobjetivo se tienen en consideración múltiples objetivos simultáneamente y, por lo tanto, interesa la situación en que tales objetivos sean contrapuestos. Por ejemplo: al momento de diseñarse un puente es deseable minimizar el peso de la estructura pero a su vez maximizar la rigidez de la misma, sin embargo, es muy improbable que estos objetivos conflictivos puedan ser optimizados simultáneamente. Por lo tanto, es necesario establecer un concepto que generalice la idea de solución de modo tal que medie entre estos objetivos contrapuestos.

Este es el tipo de problemas que se encuadra en la teoría de la optimización multiobjetivo.

El origen de la optimización multiobjetivo data de finales del siglo XIX en el campo de la economía. En el libro titulado *Mathematical Physics* [20], Edgeworth estableció por primera vez la noción de optimalidad para esta clase de problemas conocida actualmente con el nombre de Pareto Optimalidad, nombre debido al economista Vilfredo Pareto que continuó el trabajo de Edgeworth. Su motivación consistía en la necesidad de satisfacer a más de un cliente simultáneamente. El concepto de multiobjetivo también fue tratado por otros autores en el marco de la teoría de juegos, es el caso de los trabajos

de Borel en los años 20 [12], de Von Neumann [57] o de la obra clásica de Von Neumann y Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* [58]. Sin embargo, el primer tratamiento matemático formal de un problema de optimización vectorial en espacios de dimensión finita se encuentra incluido en el célebre trabajo *Nonlinear programming* citeKT de Kuhn y Tucker.

Recién a fines de la década de 1970 y principios de 1980 aparecieron los primeros desarrollos en pos de la obtención de algoritmos para la hallar soluciones a problemas de optimización multiobjetivo. Cabe señalar que, a diferencia del caso escalar, la solución del problema puede ser un conjunto de puntos del dominio del problema, por lo tanto los algoritmos pueden estar enfocados a hallar un punto Pareto o un conjunto de puntos Pareto, llamado frontera Pareto (ver definiciones en la sección 2).

Entre los métodos que aproximan la frontera Pareto se destacan el de intersección normal a la frontera (NBI, siglas de su denominación en inglés: *normal boundary intersection*) [18] y de restricciones normales (NC, *normal constrains*) [42].

Para los métodos que buscan puntos Pareto en el caso lineal se encuentran las extensiones de los los métodos simplex [21, 61] y de punto interior [4]. Para los problemas no lineales, los abordajes más populares son: el método de los pesos, el método de la ϵ -mayorante, el método proximal de haces para optimización multiobjetivo no diferenciable y los métodos de criterio global. En éstos, la hipótesis de convexidad juega un rol importante, ya que en todos ellos se requiere la resolución de problemas de optimización que serán convexos o no, según lo sean las funciones involucradas, con las dificultades que esto conlleva.

Recientemente y bajo la hipótesis de convexidad se han introducido métodos que generalizan los métodos de Newton y de máximo descenso de optimización escalar al caso multiobjetivo; estos dos métodos son de especial interés para el presente trabajo ya que aquí se generaliza su aplicabilidad para problemas no convexos mediante la utilización de una estrategia de región de confianza.

El concepto de región de confianza data de mediados del siglo XX, con el trabajo de Levenberg [35] para la resolución del problema de cuadrados mínimos no lineales. Posteriormente Morrison [48] y Griffith Stewart [28] utilizaron la idea de sucesivas minimizaciones de modelos de la función objetivo. En [27] Goldfeldt, Quandt y Trotter introdujeron la idea de progreso real y predicho, dándole la forma en la cual conocemos el algoritmo actualmente. Luego fue aplicada a otros tipos de problemas como puede verse en [15].

De acuerdo a nuestro conocimiento, la combinación de problemas multiobjetivo y la estrategia de región de confianza no es un área muy activa. En 2006 Ashry [5] convierte el problema de optimización multiobjetivo con restricciones en un problema escalar y usa un algoritmo de región de confianza para resolver el problema general de programación no lineal. El algoritmo está basado en la teoría de Byrd, Schnabel y Schultz [13] para el problema no lineal con restricciones de igualdad. Recientemente Qu, Goh y Liang [51] han desarrollado un algoritmo de región de confianza para el caso multiobjetivo irrestricto que tiene algunos puntos en común con el nuestro. Por ejemplo, ellos también se han inspirado en el trabajo de Fliege, Granña Drummond y Svaiter [24], pero enfocándose el análisis al caso no diferenciable a diferencia del presente trabajo.

Abreviaturas y símbolos

\mathbb{R}	el cuerpo de los números reales.
\mathbb{R}^n	el espacio de los vectores reales de dimensión n .
\mathbb{R}_+^m	el cono de los vectores reales de dimensión n cuyas componentes son no negativas.
\mathbb{R}_{++}^m	el interior de \mathbb{R}_+^m .
$B(x, \delta)$	la bola abierta de centro x y radio δ .
$\mathcal{R}(A)$	la imagen o rango de la transformación lineal asociada a la matriz A .
$F(x)$	función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m evaluada en $x \in \mathbb{R}^n$.
$f_i(x)$	para $i = 1, \dots, m$, i -ésima componente de la función $F(x)$.
$\nabla F(x)$	la matriz jacobiana de la función F en el punto x .
$\nabla f_i(x)$	el vector (columna) gradiente de la función f_i en el punto x .
$\nabla^2 f_i(x)$	la matriz Hessiana de la función f_i en el punto x .
\mathcal{C}^1	el conjunto de las funciones diferenciables con continuidad.
\mathcal{C}^2	el conjunto de las funciones dos veces diferenciables con continuidad.
$\ \cdot\ $	norma euclídea.

Capítulo 1

Conceptos previos en optimización

En este capítulo se hace una breve reseña de resultados generales sobre optimización que serán considerados a lo largo del presente trabajo. Se presentan resultados conocidos sobre condiciones de optimalidad, para los casos restringido e irrestricto, y estrategias de globalización, enfatizando en la estrategia de región de confianza.

1.1. Condiciones de optimalidad

Las primeras dos definiciones que introducimos sirven para establecer qué funciones son de interés para la optimización.

Definición 1.1. *Una función $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ se dice cerrada si los conjuntos de nivel*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \gamma\}$$

son cerrados para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Una de las hipótesis más fuertes es la convexidad de las funciones involucradas en los problemas de optimización, por ello introducimos los conceptos de función convexa y función fuertemente convexa.

Definición 1.2. Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, se dice que una función $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ es convexa si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

En caso que la desigualdad sea estricta para $t \in (0, 1)$ se dice que la función es estrictamente convexa.

Definición 1.3. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ diferenciable se dice fuertemente convexa con coeficiente $\alpha > 0$ si

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Por último definimos lo que llamaremos dirección de descenso.

Definición 1.4. Un vector $s \in \mathbb{R}^n$ se dice que es una dirección de descenso para f , continua, en x si existe $t_0 > 0$ tal que

$$f(x + ts) < f(x) \quad \forall t \in (0, t_0].$$

En lo que resta del presente trabajo se consideraran sólo funciones cuya imagen está contenida en \mathbb{R} salvo que se indique lo contrario.

1.1.1. Optimización sin restricciones

El problema de optimización irrestricta consiste en:

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Recordemos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es mínimo de f si no existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) \leq f(x^*)$.

Las condiciones de optimalidad, bajo hipótesis de diferenciable, para estos problemas están establecidas en los teoremas que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y x^* un mínimo local del problema (1.1). Entonces*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Si f es dos veces diferenciable con continuidad entonces $\nabla^2 f(x^)$ es semidefinida positiva.*

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable con continuidad en $S \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto. Supongamos que $x^* \in S$ satisface*

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 f(x^*) \text{ es definida positiva,}$$

entonces x^ es un mínimo local del problema (1.1).*

Las demostraciones de estos teoremas pueden hallarse en los textos de optimización no lineal, por ejemplo [7, Sec. 1.1.2]. En [8, Sec. 2.1] se encuentra el siguiente resultado que nos será de utilidad:

Teorema 1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cerrada y estrictamente convexa, entonces tiene un único mínimo.*

1.1.2. Optimización con restricciones

Consideraremos el problema general de optimización con restricciones

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

El conjunto de \mathbb{R}^n que satisface las restricciones del problema (1.2) lo llamamos *conjunto factible*:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}.$$

En el siguiente teorema vemos la relevancia de la hipótesis de convexidad.

Teorema 1.4. *Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo.*

- x^* un mínimo local de f en S , entonces también es mínimo global en S . Si además f es estrictamente convexa, entonces existe a lo sumo un mínimo global para f en S .
- Si S es abierto y f diferenciable, entonces $\nabla f(x^*) = 0$ es condición necesaria y suficiente para que x^* sea mínimo de f en S .

La prueba de este resultado puede hallarse en [8].

El siguiente teorema establece condiciones necesarias para que un punto x^* sea solución del problema (1.2).

Teorema 1.5. *Sea x^* un punto factible del problema (1.2), tal que $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$ son \mathcal{C}^1 en x^* .*

Si x^ es solución del problema (1.2), entonces existen escalares θ , λ_i , $i = 1, \dots, m$ y μ_j , $j = 1, \dots, p$, tales que:*

$$\theta \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\theta, \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$(\theta, \mu, \lambda) \neq 0,$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$.

A los escalares θ , λ_i , $i = 1, \dots, m$ y μ_j , $j = 1, \dots, p$, se los denomina multiplicadores de Fritz-John. Para la prueba de este teorema pueden consultarse los libros [6, 8].

Otras condiciones necesarias, similares y muy populares, son las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker, abreviadas KKT, debido a los trabajos de Karush [33], Kuhn y Tucker [34]. Para enunciarlas definimos el conjunto de restricciones activas:

$$A(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x) = 0\},$$

y los siguientes conos¹:

¹Decimos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono si $\forall x \in K$ y $\lambda \geq 0$ implica que $\lambda x \in K$.

$$G(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \nabla g_j(x)^T z < 0, \quad \forall j \in A(x) \right\},$$

$$H(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \nabla h_i(x)^T z = 0, \quad i = 1, \dots, m. \right\}$$

y el cono tangente

$$\mathcal{T}(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \exists \{x_k\} \subset S, \quad x_k \rightarrow x, \quad \exists \{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}_+, \\ \alpha_k \rightarrow 0 : \frac{x_k - x}{\alpha_k} \rightarrow z \end{array} \right\}.$$

Teorema 1.6. *Sea x^* un punto factible del problema (1.2), tal que $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$ son \mathcal{C}^1 en x^* ; y además $G(x^*) \cap H(x^*) = \mathcal{T}(x^*)$*

Si x^ es solución del problema (1.2), entonces existen escalares λ_i , $i = 1, \dots, m$ y μ_j , $j = 1, \dots, p$, tales que:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$(\mu, \lambda) \neq 0,$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$.

A los escalares λ_i , $i = 1, \dots, m$ y μ_j , $j = 1, \dots, p$, se los denomina multiplicadores de Lagrange. Para la prueba puede consultarse [6, Teo. 5.3.1].

La condición " $G(x^*) \cap H(x^*) = \mathcal{T}(x^*)$ " es una condición calificadora de las restricciones. Existen diversas condiciones calificadoras bajo las cuales

sigue siendo válido el Teorema 1.6. Para nuestro trabajo serán de interés las siguientes:

Definición 1.5. *Un punto factible \bar{x} satisface la condición calificadora de de Abadie si se cumple la igualdad*

$$G(\bar{x}) \cap H(\bar{x}) = \mathcal{T}(\bar{x}).$$

Definición 1.6. *Si las funciones h_i son lineales para $i = 1, \dots, m$, g_j son convexas para $j = 1, \dots, p$, y existe \bar{x} tal que*

$$h(\bar{x}) = 0 \quad y \quad g(\bar{x}) < 0,$$

entonces se satisface la condición calificadora de Slater.

Definición 1.7. *Un punto factible \bar{x} satisface la condición calificadora de Cottle si*

a) $\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i=1}^m$ es linealmente independiente.

b) Existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla h_i(\bar{x})^T d = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\nabla g_j(\bar{x})^T d \leq 0, \quad j \in A(\bar{x}).$$

Definición 1.8. *Un punto factible \bar{x} satisface la condición calificadora de independencia lineal de las restricciones activas (LICQ, siglas en inglés de*

linear independence constraint qualification) *si el conjunto*

$$\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i=1,\dots,m} \cup \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in A(\bar{x})}$$

es linealmente independiente.

Los puntos que satisfacen la condición LICQ también son denominados *regulares*.

Recientemente para el problema 1.2 se han introducido otras condiciones calificadoras como la CPLD (siglas en inglés de *constant positive linear dependence*) [2, 50] y la CRQC (siglas en inglés de *constant rank constraint qualification*) [3, 46].

Algunas de estas condiciones son más restrictivas que otras (para ver la relación entre las condiciones calificadoras puede consultarse [6, 7, 36]) y, naturalmente, nos permiten extraer conclusiones más fuertes:

Teorema 1.7. *Sea x^* un punto factible del problema (1.2), tal que $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$ son \mathcal{C}^1 en x^* ; y además se satisface la condición LICQ.*

Si x^ es solución del problema (1.2), entonces existen escalares únicos λ_i , $i = 1, \dots, m$ y μ_j , $j = 1, \dots, p$, tales que:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$(\mu, \lambda) \neq 0,$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$.

Al problema (1.2) se lo suele denominar *problema primal* y se le puede asociar un *problema dual*:

$$\begin{aligned} \underset{s.a}{\text{máx}} \quad & \theta(\lambda, \mu) \\ & \mu \geq 0, \\ & \mu \in \mathbb{R}^p, \lambda \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde

$$\theta(\lambda, \mu) = \inf \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x) \right\}.$$

La relación más simple entre ambos problemas nos la da el teorema de dualidad débil:

Teorema 1.8. *Sea x un punto factible para el problema (1.2) y (λ, μ) factible para el problema (1.3), entonces*

$$f(x) \geq \theta(\lambda, \mu).$$

La demostración del teorema de dualidad débil es inmediata de la definición de θ y de ella se desprende el siguiente corolario:

Corolario 1.1. *Sean \bar{x} un punto factible para el problema (1.2) y $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ factible para el problema (1.3) tales que*

$$f(\bar{x}) = \theta(\bar{\lambda}, \bar{\mu}),$$

entonces \bar{x} es solución de (1.2) y $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es solución de (1.3).

Cuando se da la igualdad señalada por el corolario se dice que no hay *brecha de dualidad*. El siguiente teorema nos brinda condiciones bajo las cuales se puede asegurar que no hay brecha de dualidad:

Teorema 1.9. *Dado el problema (1.2) con las funciones $h_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, afines y las funciones $g_j(x)$, $j = 1, \dots, p$, convexas. Si además se satisface la condición de Slater, entonces: para x^* , solución del problema primal, y (λ^*, μ^*) , solución del problema dual, se satisface:*

$$f(x^*) = \theta(\lambda^*, \mu^*).$$

$$\text{Además } (\mu^*)^T g(x^*) = 0.$$

Ver [6, Teo. 6.2.5] para su demostración.

1.2. Estrategias de globalización

Para la resolución del problema de optimización irrestricto:

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.4}$$

existen múltiples métodos (ver [22]), la mayoría iterativos, es decir que, a partir de un punto x_k que aproxima una solución, obtienen un punto x_{k+1} . Muchos de ellos tienen la propiedad de converger localmente, es decir: requieren que se elija el punto inicial cerca de una solución. Obviamente que esto es un inconveniente, ya que *a priori* no se conoce una solución. Para evitar esta dificultad se utilizan estrategias de globalización.

Hay dos tipos básicos de estrategias de globalización: búsqueda lineal y región de confianza.

En la búsqueda lineal se considera el iterado actual y una dirección determinada por el método que se esté utilizando. Luego, partiendo del iterado actual, se toman puntos a lo largo de la dirección hallada y se acepta aquél que cumpla algún requerimiento previamente establecido y, generalmente, asociado a un suficiente descenso de la función objetivo (ver capítulo 2 de [49] y [19, 29]).

En los métodos de región de confianza se construye un modelo que aproxima a la función objetivo en una región centrada en el iterado actual. Esta región es denominada *región de confianza* y usualmente está definida como el conjunto de puntos que están a menos de cierta distancia del iterado actual. Esta distancia es llamada *radio de la región de confianza*. Luego se calcula un minimizador del modelo en la región y utilizando este punto se calcula la reducción producida en la función objetivo y la predicha por el modelo. Si el cociente entre la reducción real y la predicha es lo suficientemente grande, lo cual indica que el modelo aproxima en buena medida a la función objetivo y se puede *confiar en él*, se toma este punto como próximo iterado y posiblemente se aumenta el radio de la región de confianza. Si el cociente es muy pequeño se reduce la región y se busca un nuevo minimizador del modelo en la nueva región de confianza.

De este modo en cada iteración se resuelve un subproblema que brinda un candidato a nuevo iterado que, en función de cuán bueno sea, se lo toma o no como iterado siguiente, y se define un nuevo subproblema.

1.2.1. Esquema básico de un algoritmo de región de confianza

En esta parte introduciremos las hipótesis para un algoritmo básico de región de confianza para el problema (1.1), asumiendo que $f \in \mathcal{C}^2$. Si bien pueden obtenerse resultados de convergencia para casos más generales, asumiendo solamente que exista ∇f y sea Lipschitz continuo, aquí expondremos este caso particular por razones de simplicidad. Para una exposición más general y la demostración de los siguientes resultados, puede consultarse [15], en que se basa esta revisión.

Se requiere como hipótesis que la función f sea acotada inferiormente en \mathbb{R}^n y que la matriz Hessiana de f esté acotada uniformemente, es decir: que existan κ_1 y κ_2 tal que

$$\kappa_1 \leq f(x) \quad \text{y} \quad \|\nabla^2 f(x)\| \leq \kappa_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

En cada iterado x_k se define el siguiente modelo cuadrático que aproxima a f alrededor de ese punto

$$m_k(s) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(x_k) s, \quad (1.5)$$

y éste es minimizado en la así llamada región de confianza.

Siguiendo la notación de [15] introducimos el arco de Cauchy y el punto de Cauchy. Se denomina *arco de Cauchy* al segmento

$$x_k^C(t) = \{x : x = x_k + t\nabla f(x_k), t \geq 0, \|t\nabla f(x_k)\| \leq \Delta_k\}$$

y punto de Cauchy a

$$x_k^c = x_k + t_k^c \nabla f(x_k) = \underset{\substack{t \geq 0 \\ x_k + t \nabla f(x_k) \in B(x_k, \Delta_k)}}{\operatorname{arg\,mín}} m_k(t \nabla f(x_k)),$$

es decir, el punto que minimiza el modelo a lo largo del arco de Cauchy.

El esquema básico del algoritmo es el siguiente [15]:

Algoritmo 1.1. *Partir de un punto y radio iniciales, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\Delta_0 > 0$, respectivamente; y dadas las constantes η_1 , η_2 , γ_1 y γ_2 , tales que*

$$0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1 \quad 0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < 1.$$

Para $k = 0$.

1. Calcular $\nabla f(x_k)$ y $\nabla^2 f(x_k)$.
2. Calcular s_k solución de

$$\underset{s.a.}{\operatorname{mín}} m_k(s) \quad (1.6)$$

$$\|s\| \leq \Delta_k.$$

3. Calcular $f(x_k + s_k)$ y definir

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{m_k(0) - m_k(s_k)}.$$

Si $\rho_k \geq \eta_1$ se define $x_{k+1} = x_k + s_k$. Si no, $x_{k+1} = x_k$.

4. Actualizar

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} (\Delta_k, \infty) & \text{si } \eta_2 \leq \rho_k, \\ (\gamma_2 \Delta_k, \Delta_k] & \text{si } \eta_1 \leq \rho_k < \eta_2, \\ [\gamma_1 \Delta_k, \gamma_2 \Delta_k] & \text{si } \rho_k < \eta_1, \end{cases}$$

$k = k + 1$ y volver al paso 1.

El método no requiere el cálculo exacto de la solución del subproblema (1.6), basta con que la solución en cada iteración satisfaga:

$$m_k(0) - m_k(s_k) \geq \kappa_d \|\nabla f(x_k)\| \min \left\{ \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{1 + \|\nabla^2 f(x_k)\|}, \Delta_k \right\}, \quad (1.7)$$

donde $0 < \kappa_d < 1$ y el resto del lado derecho es una cota del descenso que se observa en el modelo utilizando el punto de Cauchy. A partir de esta cota se puede afirmar que ρ_k está bien definido, salvo que $\nabla f(x_k) = 0$, pero en tal caso x_k ya es un punto crítico.

Cuando ρ_k es mayor que η_1 se dice que la iteración es exitosa y en caso que sea mayor que η_2 se dice que es muy exitosa.

Establecidas estas herramientas, pueden probarse los siguientes resultados técnicos que son centrales en la demostración de los resultados de convergencia propiamente dichos. Para ello pueden consultarse [15, 47, 55].

El primer lema nos brinda una cota a la aproximación de la función por el modelo.

Lema 1.10. *Para toda iteración se verifica*

$$|f(x_k + s_k) - m_k(s_k)| \leq \kappa \Delta_k^2.$$

La combinación de los próximos dos lemas es clave en el análisis de convergencia, observemos que lo que están probando cada uno de ellos es:

- Si el radio de la región de confianza es muy pequeño en relación a la norma del gradiente en el iterado actual, la iteración es exitosa.
- En caso de que los iterados se mantengan alejadas de puntos críticos, la cantidad de veces que se reduce la región de confianza es finita.

Lema 1.11. *Asumiendo que $\nabla f(x_k) \neq 0$ y que*

$$\Delta_k \leq \frac{\kappa_d \|\nabla f(x_k)\| (1 - \eta_2)}{\kappa}.$$

Entonces la iteración k es muy exitosa y

$$\Delta_{k+1} \geq \Delta_k.$$

Lema 1.12. *Si existe $c > 0$ tal que $\|\nabla f(x_k)\| \geq c$ para todo k , entonces existe $c' > 0$ tal que*

$$\Delta_k \geq c'$$

para todo k .

A partir de estos resultados se prueba la convergencia a una solución del problema (1.1) (Ver [15]) en función de la cantidad de iteraciones exitosas. Si hay una cantidad finita de iteraciones exitosas:

Teorema 1.13. *Asumiendo que hay un número finito de iteraciones exitosas entonces $x_k = x^*$ para todo k lo suficientemente grande y x^* es un punto crítico.*

En caso que la cantidad de iteraciones exitosas sea infinita:

Teorema 1.14.

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Lo cual prueba que la sucesión converge a un punto crítico.

Capítulo 2

Revisión sobre optimización multiobjetivo

En este capítulo se introduce el problema de optimización multiobjetivo (MOP, por sus siglas en inglés, *multiobjective optimization problem*). Se presentan diferentes conceptos de solución, resultados básicos sobre condiciones necesarias y suficientes para que un punto sea solución del problema, así como algoritmos usuales para el MOP.

2.1. Problema de optimización multiobjetivo

El área de toma de decisiones con múltiples criterios puede verse como un conjunto de métodos y procedimientos a través de los cuales se puede estudiar y analizar formalmente diversos objetivos en forma conjunta. Usualmente se divide en dos áreas [25]: análisis de decisión multicriterio, que aborda problemas de pequeño porte considerando un entorno con incertidumbre, y

optimización multiobjetivo, donde se tratan los problemas en el marco de la teoría de optimización considerando múltiples funciones objetivo.

En optimización multiobjetivo un aspecto de suma importancia es la definición de una relación de orden que permita establecer la preferencia entre puntos factibles. Si consideramos

$$\begin{aligned} \text{“mín”} \quad & \{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \\ \text{s.a} \quad & x \in S, \end{aligned}$$

donde tenemos $m \geq 2$ funciones objetivo $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Notaremos al vector de funciones objetivo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, y $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ las variables de decisión pertenecientes al conjunto factible S . Podemos definir distintos problemas de acuerdo al significado que asignemos a “mín”.

2.2. Conceptos de solución

Debido a que el objetivo es minimizar las m funciones objetivo simultáneamente, si no hubiera conflicto entre ellas, es decir si los mínimos de cada una se realizan en un mismo punto, nos bastaría con elegir tal punto como solución. Pero este no es el caso en general. Cuando no se da esa particularidad, necesitamos establecer una preferencia entre puntos factibles, para ello introducimos el concepto de *mínimo Pareto*:

Definición 2.1. Un punto $x^* \in S$ se dice que es mínimo (solución) Pareto si no existe otro $x \in S$ tal que $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $f_j(x) < f_j(x^*)$ para al menos un j .

Se dice que el vector \tilde{v} domina al vector \bar{v} si y solo si $\tilde{v}_i \leq \bar{v}_i \quad \forall 1 \leq i \leq m$

y $\bar{v}_j < \bar{v}_j$ para algún j .

Entonces, un punto es mínimo Pareto si su imagen vía F es un punto no dominado por la imagen de ningún otro punto.

Es decir un punto x^* es mínimo en el sentido Pareto si no es posible hacer descender alguna de las funciones objetivos sin aumentar las otras. En la literatura también es usual hallar el término *eficiente* en lugar de *Pareto optimal*.

Usualmente suele utilizarse el término *espacio de decisiones* al espacio de las variables y *espacio de criterios* o *espacio objetivo* al de la imagen del primero.

Debido a que es frecuente que haya infinitas soluciones Pareto optimales, se denomina *conjunto Pareto optimal* o *frontera Pareto* al conjunto de tales soluciones.

Los métodos computacionales para optimización multiobjetivo, al igual que para el caso escalar, en general no son capaces de hallar soluciones globales, por ello otro concepto importante es el de *punto localmente Pareto optimal*, que se define a partir del óptimo Pareto en forma análoga que un óptimo local a partir del óptimo.

Definición 2.2. Un punto $x^* \in S$ es localmente Pareto optimal si existe $\delta > 0$ tal que x^* es Pareto optimal en $S \cap B(x^*, \delta)$.

La definición de los conceptos de punto Pareto optimal y debilmente Pareto optimal pueden verse como caso particular de un planteo más general. Dado un orden definido mediante un cono convexo $K \subset \mathbb{R}^m$,

$$F(x^1) \leq_K F(x^2) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x^1) \in K,$$

al optimizar utilizando ese orden decimos que es un problema de *optimización vectorial* [31]. En particular si $K = \mathbb{R}_+^m$ tenemos un problema de optimización multiobjetivo.

Gran parte de los resultados y definiciones que presentaremos a modo de marco teórico son válidos tanto para optimización vectorial como multiobjetivo, aquí los enunciaremos en términos del caso multiobjetivo ya que es el apropiado para este trabajo.

Un concepto más general (más débil) de solución es:

Definición 2.3. *Un punto $x^* \in S$ es mínimo Pareto débil si no existe otro $x \in S$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$ para todo $1 \leq i \leq k$.*

Es decir que un punto es débilmente Pareto optimal si no existe otro cuya imagen sea estrictamente dominada por la imagen del primero.

Claramente, un punto Pareto optimal es débilmente Pareto optimal, ya que si un punto x^* no es débilmente Pareto optimal ha de existir otro punto x que mejore a todas las funciones objetivo, lo cual impide que x^* sea Pareto optimal.

Por último, cuando las funciones objetivo sean diferenciables, consideraremos el concepto de punto *estacionario* o *crítico*.

Definición 2.4. *Un punto $x^* \in S$ es crítico si*

$$\mathcal{R}(\nabla F(x^*)) \cap (-\mathbb{R}_{++}^m) = \phi.$$

Observemos que el hecho de que estos conjuntos tengan intersección vacía

significa que para todo $v \in \mathbb{R}^n$, existe $1 \leq i \leq m$ tal que

$$\nabla f_i(x^*)^T v \geq 0.$$

Es decir que no existe una dirección que sea de descenso simultáneo para todas las funciones objetivo f_j en x^* .

En caso de que exista s dirección de descenso para f_j en \bar{x} para $j = 1, \dots, m$, diremos que s es una *dirección de descenso* para F en \bar{x} .

Asumiendo diferenciabilidad de F , es simple probar, por el absurdo, que un punto débilmente Pareto optimal es crítico.

Es decir:

$$x^* \text{ es Pareto optimal} \Rightarrow x^* \text{ es débilmente Pareto optimal} \Rightarrow x^* \text{ es crítico.}$$

Asumiendo la existencia de derivadas de segundo orden, si $\nabla^2 f_i$, $1 \leq i \leq m$, son definidas positivas en S , los tres conceptos son equivalentes [24].

Finalmente otro concepto simple es el de *punto utópico*:

Definición 2.5. *El vector $z^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)^T$ compuesto por los mínimos globales f_i^* de cada f_i , $1 \leq i \leq m$, se lo llama punto utópico.*

A modo de ejemplo podemos ver en la figura 2.1 algunos de estos puntos.

2.3. Condiciones de optimalidad

Las condiciones de optimalidad son un pilar básico en el área de optimización y suelen utilizarse como un objetivo al momento de diseñar algoritmos para la resolución de los problemas.

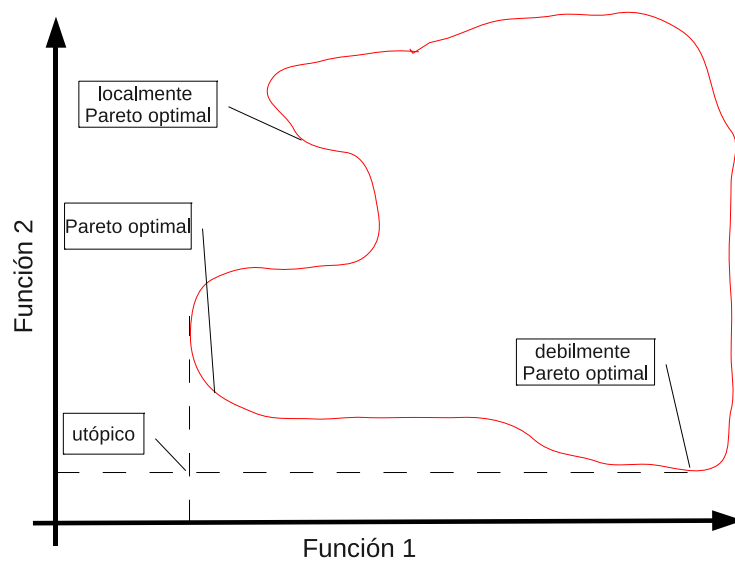


Figura 2.1: Clasificación de puntos

En forma similar a los problemas de optimización escalar, para el caso multiobjetivo se han desarrollado condiciones de optimalidad en términos de los multiplicadores de Lagrange. Si consideramos un problema con las restricciones presentadas en la forma usual

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \\ & h_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq l, \\ & g_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq p, \end{aligned}$$

y denominamos *conjunto factible* a $S \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}.$$

El primer resultado es una condición necesaria del tipo Fritz-John.

Teorema 2.1. *Dado el problema MOP con función objetivo y restricciones diferenciables en $x^* \in S$. Una condición necesaria para que x^* sea Pareto optimal es que existan vectores $0 \leq \theta \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ y $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^p$, $(\theta, \lambda, \mu) \neq 0$, tales que*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^m \theta_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$(ii) \quad \mu_j g_j(x^*) = 0 \text{ para todo } 1 \leq j \leq p.$$

La demostración puede hallarse en [17]. Un corolario evidente es el siguiente:

Corolario 2.1. *Las condiciones del Teorema 2.1 también son necesarias para que x^* sea débilmente Pareto optimal.*

La diferencia entre las condiciones de optimalidad de tipo Fritz-John y Karush-Kuhn-Tucker es la presencia de los multiplicadores θ asociados a la función objetivo; En el caso $\theta = 0$ la función objetivo no es parte de la condición de optimalidad por lo que la información que ésta brinda al respecto es muy pobre. Para ello es necesario definir condiciones calificadoras y de regularidad, a partir de las cuales se pueda afirmar que $\theta \neq 0$.

Debido a que los multiplicadores no son necesariamente únicos, se clasifican los puntos de acuerdo a si los multiplicadores son nulos o no [38], siendo de mayor interés las soluciones para las que $\theta > 0$.

Para garantizar la positividad de θ necesitamos asumir *condiciones calificadoras* en forma análoga al caso escalar. Una de ellas es la *condición calificadora de Kuhn-Tucker*:

Definición 2.6. *Si las funciones que definen las restricciones del problema son continuamente diferenciables en $x^* \in S$. El problema satisface la condición calificadora de Kuhn-Tucker en x^* si para todo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que*

- $h_j(x^*)^T d = 0$ para todo $1 \leq j \leq l$,
- $g_j(x^*)^T d \leq 0$ para todo $j \in A(x^*)$, donde $A(x^*)$ se define como en la página 9.

existe $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en 0 y un escalar $\alpha > 0$ tal que

$$a(0) = x^*, h(a(t)) = 0, g(a(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{y} \quad a'(0) = \alpha d.$$

Ahora podemos enunciar resultados, similares al teorema y el corolario anteriores, garantizando que $\theta \neq 0$.

Teorema 2.2. *Dado el problema MOP con función objetivo y restricciones diferenciables en $x^* \in S$, donde se satisface la condición calificadora de Kuhn-Tucker. Una condición necesaria para que x^* sea Pareto optimal es que existan vectores $0 \leq \theta \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ y $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^p$, $(\lambda, \mu) \neq 0$, $\theta \neq 0$, tales que*

- (i) $\sum_{i=1}^m \theta_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$,
- (ii) $\mu_j g_j(x^*) = 0$ para todo $1 \leq j \leq p$.

La demostración puede hallarse en [43, Teo. 3.1.5]. Aquí también obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Las condiciones del Teorema 2.2 también son necesarias para que x^* sea débilmente Pareto optimal.*

Así mismo, se definen otras condiciones calificadoras [9, 53, 62] que también nos permiten establecer condiciones necesarias y suficientes, como en el caso escalar. Esto da lugar al estudio las relaciones entre las diferentes condiciones calificadoras (ver [9, 10, 38]).

Al igual que en los problemas de optimización escalar, cuando se asume hipótesis de convexidad podemos obtener resultados más fuertes. Entre ellos, el siguiente teorema, [43, Teo. 3.1.7].

Teorema 2.3. *Dado un MOP con función objetivo y restricciones convexas y diferenciables en $x^* \in S$, una condición suficiente para que x^* sea Pareto optimal es que existan vectores $0 \leq \theta \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ y $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^p$, $(\theta, \lambda, \mu) \neq 0$, $\theta \neq 0$, tales que*

- (i) $\sum_{i=1}^m \theta_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$,

(ii) $\mu_j g_j(x^*) = 0$ para todo $1 \leq j \leq p$.

Corolario 2.3. *Dado un MOP con función objetivo y restricciones convexas y diferenciables en $x^* \in S$, una condición suficiente para que x^* sea débilmente Pareto optimal es que existan vectores $0 \leq \theta \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ y $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^p$, $(\theta, \lambda, \mu) \neq 0$, $\theta \neq 0$, tales que*

$$(i) \sum_{i=1}^m \theta_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0,$$

(ii) $\mu_j g_j(x^*) = 0$ para todo $1 \leq j \leq p$.

La hipótesis de convexidad se puede reemplazar por hipótesis más débiles manteniendo la validez del resultado, ver [39, 41, 53].

En forma similar al caso escalar, podemos hallar condiciones suficientes de segundo orden [37, 60] y también condiciones para casos no diferenciables [40].

2.4. Métodos de resolución para MOP

La tarea de hallar soluciones Pareto optimales juega un rol central en la optimización multiobjetivo, y se considera que un problema está resuelto cuando se obtiene el conjunto Pareto optimal. Aunque sería deseable obtener una única solución que sea la “mejor” en algún sentido para el problema, no es posible hallar una solución que optimice todos los criterios. Debido a esta imposibilidad es que algunos algoritmos consideran la participación de un usuario que intervenga en las decisiones, y este también es el motivo por el cual interesa la obtención de la frontera Pareto.

Respecto a la intervención de un usuario podemos clasificar a los algoritmos en las siguiente categorías:

1. *Métodos sin preferencia*: no consideran las posibles preferencias del usuario.
2. *Métodos a posteriori*: tienen por objetivo hallar la frontera Pareto (o parte de ella), para que luego el usuario introduzca sus preferencias.
3. *Métodos a priori*: introducen información respecto de las preferencias y realizan la búsqueda de soluciones a partir de tal información.
4. *Métodos interactivos*: se consideran las preferencias del usuario a medida que se aplica el método.

Si bien esta clasificación no es exhaustiva es útil como marco de referencia [43].

A su vez, otra característica muy frecuente en los algoritmos es la utilización de *funciones de escalarización* con el propósito de transformar el problema multiobjetivo en uno escalar y así aplicar métodos conocidos para el problema obtenido. Dentro de las excepciones a esta característica están los métodos para problemas multiobjetivo lineales, basados en el método simplex de programación lineal ([21]), y para no lineales: método de criterio global, método de los pesos, método de la restricción ϵ , método proximal de haces para optimización multiobjetivo, de los cuales daremos una breve reseña, y los métodos de Newton y máximo descenso, que son de particular interés para nuestro trabajo.

2.4.1. Métodos geométricos

Los métodos geométricos para optimización multiobjetivo tienen por fin obtener una aproximación de la frontera Pareto, entre ellos tenemos el método de intersección normal a la frontera (NBI, por sus siglas en inglés, *Normal-Boundary Intersection*) [18] y el método de restricciones normales (NC, por sus siglas en inglés, *Normal Constraint*) [42].

En el método NBI se considera el punto utópico $F^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)^T$, con $f_i^* = f_i(x_i^*)$, donde $x_i^* \in \mathbb{R}^n$ son los puntos en que se alcanzan los mínimos de f_i para $1 \leq i \leq m$. Luego, considera la clausura convexa de mínimos individuales (CHIM, por sus siglas en inglés, *convex hull of individual minima*), es decir la clausura convexa de $\{F(x_i^*) - F^*\}$. Al considerar la clausura convexa de la intersección del espacio de criterios \mathcal{F} y CHIM se obtiene CHIM_+ .

La idea central del método pasa por la siguiente observación: los puntos que se obtienen por intersección de la frontera de \mathcal{F} , $\partial\mathcal{F}$, y rectas normales a CHIM_+ son puntos Pareto optimales.

El método NC utiliza la misma idea. La diferencia radica en que una vez obtenido F^* se define $\bar{F}(x) = (f_1(x)/f_1^*, \dots, f_m(x)/f_m^*)$. Se considera el espacio afín que contiene los puntos $\bar{F}(x_1^*), \dots, \bar{F}(x_m^*)$ y a partir de él se consideran rectas normales que intersectan a $\partial\mathcal{F}$ en puntos Pareto optimales.

2.4.2. Método de criterio global

El método de criterio global consiste en tomar un utópico $z^* \in \mathbb{R}^k$ y considerar el problema

$$\min_{s.a} \left(\sum_{i=1}^m |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{1/p}, \quad (2.1)$$

$$x \in S$$

con $1 \leq p < \infty$.

Considerando $p = \infty$, tenemos un *problema de Tchebycheff* [26], que tiene la forma

$$\min_{s.a} \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(x) - z_i^*|, \quad (2.2)$$

$$x \in S$$

que es no diferenciable, pero podemos convertirlo en el siguiente problema equivalente y diferenciable:

$$\min_{s.a} \alpha$$

$$f_i(x) - z_i^* \leq \alpha \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$x \in S, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para este abordaje tenemos los siguientes resultados, cuyas demostraciones se pueden hallar en [43, Parte II, Sec. 2.1.2].

Teorema 2.4. *La solución del problema (2.1) es Pareto optimal.*

Teorema 2.5. *La solución del problema (2.2) es débilmente Pareto optimal.*

Teorema 2.6. *El problema (2.2) tiene al menos una solución que es Pareto optimal.*

Corolario 2.4. *Si el problema (2.2) tiene una única solución entonces es Pareto optimal.*

2.4.3. Método de los pesos

La idea de este método consiste en asociar a cada función objetivo un coeficiente (peso) y minimizar esta suma ponderada de las funciones objetivos. Suponiendo que los pesos w_i , $1 \leq i \leq m$ son números reales no negativos, podemos partir de la base que están normalizados, es decir $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \\ & x \in S, \end{aligned} \tag{2.3}$$

denominado *problema pesado*.

Para esta estrategia tenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.7. *La solución del problema (2.3) es un punto débilmente Pareto optimal.*

En caso de ser única o que los pesos w_i sean todos positivos es Pareto optimal.

En el caso que el problema sea convexo, para cada punto óptimo Pareto x^* existe un vector de pesos para el cual x^* es solución del problema (2.3) asociado. Desafortunadamente el resultado no se mantiene en el caso no convexo.

Como referencia para estos resultados puede consultarse [43, Parte II, Sec. 3.1.1].

2.4.4. Método de la restricción ϵ

Este método fue presentado en [30] y consiste en elegir una de las funciones objetivo para minimizarla sujeta a que las demás queden acotadas superiormente. Es decir

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f_j(x) \\ & f_i(x) \leq \epsilon_i \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq j, \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Esta forma de encarar el problema está sustentada por los siguientes resultados (ver [43, Parte II, Sec. 3.2.1]).

Teorema 2.8. *Las soluciones de (2.4) son puntos débilmente Pareto optimales.*

Teorema 2.9. *Un punto x^* factible es Pareto optimal si y solo si es una solución para todo $1 \leq j \leq m$ tomando $\epsilon_i = f_i(x^*)$ para $1 \leq i \leq m, i \neq j$.*

Para este método se ha propuesto un algoritmo utilizando el concepto de región de confianza en [5].

2.4.5. Método proximal de haces para multiobjetivo

El método proximal de haces para multiobjetivo (MPB, por sus siglas en inglés, *Multiobjective Proximal Bundle Method*) es adecuado para resolver problemas con funciones no lineales e incluso no diferenciables pero requiere que sean Lipschitz continuas. Los métodos de escalarización transforman el problema multiobjetivo en uno escalar y resuelven este problema. La diferen-

cia entre éstos y el MPB es que en éste se utiliza un algoritmo de optimización no diferenciable ¹.

Asumiendo que la región factible es de la forma:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ 1 \leq i \leq p\}$$

se define la *función de mejora* $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H(x_1, x_2) = \max \{f_i(x_1) - f_i(x_2), g_j(x_1) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p\}.$$

Teorema 2.10. *Una condición necesaria para que $x^* \in \mathbb{R}^n$ sea débilmente Pareto optimal es que la función $H(x, x^*)$ alcance un mínimo en x^* .*

Si el problema es convexo y se satisface la condición calificadora de Slater, entonces también es una condición suficiente.

En el método MPB la solución se busca iterativamente: dada una aproximación x^k se busca una dirección d^k solución del problema

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & H(x_k + d, x_k) \\ & d \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dado que, en general, es no diferenciable, se considera una aproximación del mismo.

Consideremos por un momento que el problema es convexo. Supongamos que, además del iterado actual x_k , tenemos puntos $y^j \in \mathbb{R}^n$ y subgradientes $\xi_{f_i}^j \in \partial f_i(y^j)$ para $j \in J^k$, $\xi_{g_l}^j \in \partial g_l(y^j)$ para $j \in J^k$, donde $J^k \subset \{1, \dots, k\}$.

¹En esta sección se mencionarán algunos conceptos de cálculo no diferenciable. Para una referencia de los mismos sugerimos [52].

Luego podemos tener una linealización de las funciones objetivo y de las restricciones en cada y^j :

$$\begin{aligned}\bar{f}_{i,j} &= f_i(y^j) + (\xi_{f_i}^j)^T (x - y^j) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, j \in J^k, \\ \bar{g}_{l,j} &= g_l(y^j) + (\xi_{g_l}^j)^T (x - y^j) \quad \text{para } 1 \leq l \leq p, j \in J^k.\end{aligned}$$

Entonces se puede definir la linealización de la función de mejora:

$$\bar{H}^k(x) = \max \{ \bar{f}_{i,j}(x) - f_i(x_k), \bar{g}_{l,j}(x) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq l \leq p, j \in J^k \}$$

con la cual aproximar (2.5):

$$\begin{aligned}\min_{s.a} \quad & \bar{H}^k(x_k + d) + \frac{1}{2}u_k \|d\|^2 \\ & d \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $u_k > 0$ es un parámetro y el término de penalización $\frac{1}{2}u_k \|d\|^2$ es agregado para garantizar la existencia de solución manteniendo el punto $x_k + d$ lo suficientemente cerca de x_k .

Notemos que, en general, el problema (2.6) sigue siendo no diferenciable, pero debido a que la no diferenciable proviene del máximo de la definición de \bar{H}^k , es equivalente al problema cuadrático que se obtiene al agregar una variable α que acote la aproximación de la función de mejora:

$$\begin{aligned}\min_{s.a} \quad & \alpha + \frac{1}{2}u^k \|d\|^2 \\ & -\beta_{f_{i,j}}^k + (\xi_{f_i}^j)^T d \leq \alpha \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, j \in J^k, \\ & -\beta_{g_{l,j}}^k + (\xi_{g_l}^j)^T d \leq \alpha \quad \text{para } 1 \leq l \leq p, j \in J^k.\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde:

$$\begin{aligned}\beta_{f_{i,j}}^k &= f_i(x_k) - \bar{f}_{i,j}(x^k), \quad 1 \leq i \leq m, j \in J^k, \\ \beta_{g_{l,j}}^k &= -\bar{g}_{l,j}(x_k), \quad 1 \leq l \leq p, j \in J^k.\end{aligned}$$

Luego con una solución (α, d) de (2.7) se hace una búsqueda lineal.

Para este algoritmo tenemos el siguiente resultado, cuya prueba puede hallarse en [59].

Teorema 2.11. *Dado el problema MOP convexo para el cual se satisface la condición calificadora de Slater, si el algoritmo se detiene en un número finito de iteraciones, el punto hallado es débilmente Pareto optimal; por otro lado, si se genera un sucesión infinita, cualquier punto de acumulación de la misma es débilmente Pareto optimal.*

Para más detalles ver [44, 45].

2.4.6. Método de máximo descenso

En [23] se plantea una escalarización similar a (2.6) para problemas convexos con restricciones de desigualdad y también para problemas irrestrictos. La diferencia entre ambos métodos es que en [23] se considera el parámetro constante $u = 1$ y que MPB es válido para el caso no diferenciable mientras que el propuesto en [23] no. Además los autores, en lugar de utilizar la linealización mediante planos de la función de mejora, consideran:

$$f_{x_k}(d) = \max \left\{ \nabla f_i(x_k)^T d, \nabla g_j(x_k)^T d : 1 \leq i \leq m, j \in A_\epsilon(x_k) \right\},$$

donde $A_\epsilon(x_k)$ es el conjunto de restricciones casi activas:

$$A_\epsilon(x_k) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x_k) \leq -\epsilon\},$$

por lo que $f_{x_k}(d)$ es una linealización de la función de mejora.

Al igual que en (2.6), la función objetivo resulta no diferenciable, problema que se supera agregando una variable, obteniéndose el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \alpha + \frac{1}{2} \|d\|^2 \\ & \nabla f_i(x_k)^T d \leq \alpha \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, \\ & \nabla g_j(x_k)^T d \leq \alpha \quad \text{para } j \in A_\epsilon(x_k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

En [23], para el caso sin restricciones, el subproblema a partir del cual se busca la dirección de descenso para F a partir de x_k , en caso de que exista, consiste en

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f_{x_k}(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \\ & v \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde

$$f_{x_k}(v) = \max \{ \nabla f_i(x_k)^T v : 1 \leq i \leq m \}.$$

Como la función objetivo es cerrada y estrictamente convexa, el subproblema siempre tiene solución única por el Teorema 1.3. Agregando una variable α se lo puede reformular de modo tal de evitar el inconveniente de

la no diferenciabilidad:

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \alpha + \frac{1}{2} \|v\|^2 \\ & \nabla f_i(x_k)^T v \leq \alpha, \text{ para } 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (2.9)$$

que es un problema cuadrático con restricciones lineales de desigualdad, equivalente al anterior, siendo que 0 es el mínimo del problema 2.9 si x es crítico.

De este modo, se obtiene que la dirección hallada es una dirección de máximo descenso con la cual se realiza una búsqueda lineal a través de una regla del tipo de Armijo [19, Sec. 6.3]. Con este procedimiento se obtiene un algoritmo para el cual se prueban los siguientes resultados de convergencia, cuya demostración se puede consultar en [23].

Teorema 2.12. *Todo punto de acumulación de la sucesión generada por el método es crítico Pareto. Si la función objetivo tiene conjuntos de nivel acotados entonces la sucesión es acotada y por ende tiene al menos un punto de acumulación.*

Para el caso con restricciones:

Teorema 2.13. *Sean $\nabla f_i, \nabla g_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$, Lipschitz continuas y la sucesión generada acotada, entonces ella tiene un punto de acumulación que en el caso convexo es Pareto optimal.*

2.4.7. Método de Newton

En [23] Fliege y Svaiter proponen una forma de construir modelos lineales de cada función y muestran cómo utilizarlos para obtener un método de

máximo descenso para el caso multiobjetivo, mientras que en [24] Fliege, Graña Drummond y Svaiter construyen modelos cuadráticos

$$q_k^j(s) = \nabla f_j(x_k)^T s + s^T \nabla^2 f_j(x_k) s, \quad j = 1, \dots, m,$$

y los utilizan para obtener un método de Newton para el caso multiobjetivo sin restricciones.

Se define la aproximación cuadrática de la función de mejora en x_k

$$f_{x_k}(d) = \text{máx} \left\{ q_k^j(s) = \nabla f_j(x_k)^T d + d^T \nabla^2 f_j(x_k) d : j = 1, \dots, m \right\},$$

que resulta ser no diferenciable, de modo que se procede en forma análoga al método de máximo descenso, obteniéndose el siguiente subproblema (en (α, d)):

$$\begin{aligned} \text{mín}_{s.a} \quad & \alpha + \frac{1}{2} \|d\|^2 \\ & \nabla f_j(x_k)^T d + d^T \nabla^2 f_j(x_k) d \leq \alpha \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Luego haciendo una búsqueda lineal con la dirección hallada y aplicando la regla de Armijo con constante σ , obtienen el iterado $k + 1$. Se tienen los siguientes resultados de convergencia para este método.

Teorema 2.14. *Dada $F \in \mathcal{C}^2$, considerando una sucesión $\{x_k\}$ generada por este algoritmo y $\{s_k\}$ la sucesión de pasos, suponiendo que existen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, b, r, \delta, \epsilon > 0$ y*

- a) $aI \preceq \nabla^2 f_j(x) \preceq bI$ ², para todo $x \in V$, $j = 1, \dots, m$.
- b) $\|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| \leq \epsilon$ para todo $x, y \in U$ con $\|x - y\| \leq \delta$, para todo $x \in U$, $j = 1, \dots, m$.
- c) $\frac{\epsilon}{a} \leq 1 - \sigma$,
- d) $B(x_0, r) \subseteq U$,
- e) $\|s_0\| \leq \min\{\delta, r(1 - \frac{\epsilon}{a})\}$.

Entonces, para cada k , tenemos:

- (i) $\|x_k - x_0\| \leq \|s_0\| \frac{1 - (\epsilon/a)^k}{1 - (\epsilon/a)}$,
- (ii) $\|s_k\| \leq \|s_0\| (\epsilon/a)^k$,
- (iii) $\|s_{k+1}\| \leq \|s_k\| (\epsilon/a)$.

Además la sucesión converge a un punto localmente Pareto optimal $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \frac{\|s_0\|}{1 - (\epsilon/a)} \leq r.$$

La tasa de la convergencia de la sucesión es q -superlineal.

Además si se agrega la hipótesis convencional de que las Hessianas $\nabla^2 f_j$ sean Lipschitz continuas se puede garantizar la velocidad de convergencia q -cuadrática:

Teorema 2.15. Dadas $F \in \mathcal{C}^2$, una sucesión $\{x_k\}$ generada por este algoritmo y $\{s_k\}$ la sucesión de pasos, suponiendo que existen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, b, r, \delta, \epsilon > 0$ y

²donde \preceq representa el orden de Lowner en $\mathbb{R}^{n \times n}$, i. e. $A \preceq B \Leftrightarrow B - A$ pertenece al cono de matrices semidefinidas positivas, para más detalles ver [54].

$$a) aI \preceq \nabla^2 f_j(x) \preceq bI \text{ para todo } x \in U, j = 1, \dots, m,$$

$$b) \|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| \leq \epsilon \text{ para todo } x, y \in U \text{ con } \|x - y\| \leq \delta.$$

$$c) \frac{\epsilon}{a} \leq 1 - \sigma,$$

$$d) B(x_0, r) \subseteq U,$$

$$e) \|s_0\| \leq \min \left\{ \delta, r \left(1 - \frac{\epsilon}{a} \right) \right\}.$$

Definiendo $\tau_k = (L/a) \|s_k\|$ y tomando $\zeta \in (0, 1/2)$. Entonces existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene que $\tau_k < \zeta$ y

$$\|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq \frac{L}{a} \frac{(1 - \tau_k)}{(1 - 2\tau_k)^2} \|\bar{x} - x_k\|^2 \leq \frac{L}{a} \frac{(1 - \zeta)}{(1 - 2\zeta)^2} \|\bar{x} - x_k\|^2$$

donde \bar{x} un el punto Pareto optimal para el MOP, límite de $\{x_k\}$.

Capítulo 3

Estrategia de región de confianza para optimización multiobjetivo

En este capítulo se presenta un nuevo algoritmo en el que se utilizan ideas de los presentados en [23, 24], agregándose una región de confianza, con lo cual se deja de lado la búsqueda lineal que se aplicaba en los métodos citados. Se prueban resultados de convergencia que generalizan el caso escalar. Esta generalización permite resolver problemas cuyas funciones objetivo sean no convexas. Ésta es precisamente la principal virtud del algoritmo, ya que permite resolver una clase más amplia de problemas.

Recordemos que el problema que se tratará es

$$\begin{array}{ll} \underset{s.a}{\text{mín}} & F(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la escribiremos como $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$.

3.1. Dificultades de la no-convexidad del MOP

Para construir un algoritmo que utilice la estrategia de región de confianza se debe utilizar un modelo cuadrático del problema, por lo cual resulta natural considerar que el subproblema sea similar al de [24] agregándole la región de confianza como restricción. En [24] utilizan el subproblema

$$\begin{aligned} \min_{s,a} \quad & t \\ \text{s.a.} \quad & \nabla f_i(x_k)^T s + s^T \nabla^2 f_i(x_k) s \leq t \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

La región de confianza se puede definir sobre todas las variables (t, s) o solamente sobre las variables s , ya que al acotar estas obtenemos, por continuidad de los modelos cuadráticos, una cota inferior para t . De este modo, el subproblema resulta acotado independientemente de la convexidad de las funciones f_j , $j = 1, \dots, m$. Optamos por definir la región de confianza sobre las variables s , ya que, a diferencia de t , están claramente asociadas a las variables originales del problema x . De modo que un posible subproblema para el método que pretendemos crear es

$$\begin{aligned} \min_{s,a} \quad & t \\ \text{s.a.} \quad & \nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\ & \|s\| \leq \Delta, \\ & (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando las restricciones de este subproblema no son convexas se presenta otra dificultad: En el caso convexo si 0 es el valor óptimo del subproblema se puede asegurar que x es punto crítico, vía un cálculo similar al Lema 3.2 de [24]. Pero en el caso no convexo no es válida esta implicación, por lo tanto obtener 0 como valor óptimo del subproblema no garantiza que el punto hallado sea un punto crítico.

Para garantizar que obtener como valor óptimo del subproblema 0 nos asegure haber hallado un punto crítico, introducimos una restricción por cada función objetivo, obteniendo

$$\begin{aligned}
& \underset{s,a}{\text{mín}} \quad t \\
& \nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\
& \nabla f_j(x)^T s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\
& \|s\| \leq \Delta, \\
& (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

De este modo el subproblema (3.1) está bien definido, i.e., tiene solución óptima, ya que la función objetivo está acotado inferiormente, y tiene las propiedades establecidas en el siguiente lema:

Lema 3.1. *Para las siguientes afirmaciones:*

- a. x^* no es punto crítico.
- b. Existe (t, s) , factible para el problema (3.1) con $x = x^*$ y $t < 0$.
- c. No existe (\bar{t}, \bar{s}) óptimo para el problema (3.1) con $x = x^*$ y $\bar{s} = 0$.

son válidas: $a \Leftrightarrow b \Rightarrow c$

Demostración. $a \Rightarrow b$) Si x^* no es crítico entonces

$$\mathcal{R}(\nabla F(x^*)) \cap (-\mathbb{R}_{++}^m) \neq \phi,$$

por lo que $\exists \tilde{s} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f_j(x^*)^T \tilde{s} < 0, \forall j = 1, \dots, m$.

Luego existe $\tilde{t} = \widetilde{t(\tilde{s})} < 0$ tal que

$$\nabla f_j(x^*)^T \tilde{s} - \tilde{t} < 0, \forall j = 1, \dots, m.$$

Si $\tilde{s}^T \nabla^2 f_j(x^*) \tilde{s} \leq 0$ entonces

$$\nabla f_j(x^*)^T \tilde{s} + \frac{1}{2} \tilde{s}^T \nabla^2 f_j(x^*) \tilde{s} < \tilde{t} < 0.$$

Si $\tilde{s}^T \nabla^2 f_j(x^*) \tilde{s} > 0$ entonces tomando $\tilde{s}l$ con l lo suficientemente pequeño tenemos que

$$\nabla f_j(x^*)^T \tilde{s}l + \frac{1}{2} l^2 \tilde{s}^T \nabla^2 f_j(x^*) \tilde{s} < \widetilde{t(\tilde{s}l)} < 0.$$

Por lo tanto el mínimo del problema (3.1) en x^* es menor que 0.

$b \Rightarrow a$)

Si existe (t, s) factible para el problema (3.1) con $x = x^*$ y $t < 0$, entonces

$$\nabla f_j(x^*)^T s \leq t < 0, \forall j = 1, \dots, m,$$

luego $\mathcal{R}(\nabla f(x^*)) \cap (-\mathbb{R}_{++}^m) \neq \phi$, es decir x^* no es crítico.

$b \Rightarrow c$)

Supongamos que existe (\bar{t}, \bar{s}) óptimo para el problema (3.1) con $\bar{s} = 0$

entonces:

$$\nabla f_j(x^*)^T \bar{s} - \bar{t} \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

y, por tanto,

$$0 - \bar{t} \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

de donde $\bar{t} \geq 0$, lo que contradice que el valor mínimo sea menor que 0; por lo tanto, no existe (\bar{t}, \bar{s}) óptimo para el problema (3.1) con $x = x^*$ y $\bar{s} = 0$.

□

Para ver claramente que la condición c del lema anterior no es equivalente a las condiciones a y b consideremos el siguiente ejemplo:

$$\text{mín} \begin{bmatrix} \cos(x_1) + e^{x_2} - x_2 \\ -\cos(x_2) - e^{x_1} - x_1 \end{bmatrix}.$$

El punto $(0, 0)^T$ es crítico y subproblema del tipo (3.1) asociado en dicho

punto es:

$$\begin{aligned} & \underset{s,a}{\text{mín}} \quad t \\ & [0 \ 0] s + \frac{1}{2} s^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - t \leq 0, \\ & [0 \ 0] s - t \leq 0, \\ & \|s\| \leq \Delta, \\ & (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Claramente, las soluciones son los puntos (t, s) tales que $t = 0$ y $s \in \mathbb{R}^2$ con $|s_2| \leq |s_1|$. Entonces existen soluciones con $s \neq 0$ y $t = 0$. Lo cual nos muestra que $c \not\Rightarrow a$. Enfatizamos una vez más que esto sucede sólo en problemas no convexos.

3.2. El algoritmo principal

Una vez definido el subproblema en el iterado x_k , el siguiente algoritmo permite encontrar x_{k+1} . Observemos que después de calcular el paso de prueba s_k como solución del subproblema (3.1), se presenta el criterio de evaluación y aceptación del mismo, en los pasos 3 y 4, y la regla de actualización del radio de la región de confianza descrita en el paso 5.

Algoritmo 3.1. Elegir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_0 > 0$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, $tol > 0$ y $k = 0$.

1. Calcular $\nabla f_j(x_k)$, $\nabla^2 f_j(x_k)$ y obtener (t_k, s_k) óptimos para el subpro-

blema

$$\begin{aligned}
 \underset{s,a}{\text{mín}} \quad & t \\
 \text{s.a} \quad & \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x_k) s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m) \\
 & \nabla f_j(x_k)^T s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m) \\
 & \|s\| \leq \Delta_k \\
 & (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

2. Si $|t_k| < \text{tol}$, terminar.

3. Calcular

$$\rho_k^j = \frac{f_j(x_k) - f_j(x_k + s_k)}{q_k^j(0) - q_k^j(s_k)}. \quad (3.2)$$

4. Si $\rho_k^j \geq \eta_1 \forall j$, $x_{k+1} = x_k + s_k$, si no $x_{k+1} = x_k$.

5. Actualizar el radio de la región de confianza

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [\Delta_k, \infty) & \text{si } \eta_2 \leq \rho_k^j \forall j. \\ (\gamma_2 \Delta_k, \Delta_k] & \text{si } \eta_1 \leq \rho_k^j \forall j \text{ y } \exists l / \rho_k^l < \eta_2. \\ [\gamma_1 \Delta_k, \gamma_2 \Delta_k] & \text{si } \exists l / \rho_k^l < \eta_1. \end{cases}$$

6. $k = k + 1$ y volver al paso 1.

El modelo cuadrático de f_j en x_k es la función

$$q_k^j(s) = \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x_k) s.$$

A diferencia de los esquemas estándares de región de confianza aquí definimos m cocientes entre reducciones reales y predichas, uno por cada función. A

partir de ellos modificamos el tamaño de la región de confianza, aumentándolo cuando todos los cocientes sean *muy satisfactorios* (es decir $\rho_k^j \geq \eta_2 \ \forall j$), disminuyéndolo en caso que haya al menos uno *no satisfactorio* ($\rho_k^j \leq \eta_1$) y manteniéndolo en otro caso. Al igual que en el caso escalar se dice que la iteración es *muy exitosa* cuando se aumenta el radio de la región de confianza y *exitosa* cuando se acepta el paso sin aumentar el radio de la región de confianza.

3.3. Análisis de convergencia del algoritmo

La prueba de la convergencia del algoritmo comparte características con la prueba usual para el caso escalar, ver [15].

Para esta sección asumiremos que:

A1) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

A2) Existe $\kappa > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\nabla^2 f_j(x)\| \leq \kappa, \quad \text{para } j = 1, \dots, m.$$

A3) $F(x)$ es acotada.

A4) $\Delta_k \leq \Delta_{\text{máx}}$.

A5) Existe $\nu > 0$ tal que

$$\|\nabla f_j(x)\| \leq \nu \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{para } j = 1, \dots, m.$$

En los métodos de región de confianza para optimización escalar se busca que el descenso observado por una iteración sea una fracción del descenso que produce el paso de Cauchy. En este caso, como no se tiene un paso de Cauchy con la longitud y la dirección óptima para cada función, se debe estimar cual será el descenso máximo para cada uno de los modelos con una dirección que posiblemente no sea la de máximo descenso para ella. El siguiente lema da una cota inferior al descenso para cada modelo cuadrático q_k^j a lo largo de una dirección de descenso para F .

Lema 3.2. *Sea $s \in \mathbb{R}^n$ una dirección de descenso para F en x_k y $\bar{t} > 0$, tal que $\|\bar{t}s\| \leq \Delta_k$ y*

$$q_k^j(\bar{t}s) \leq q_k^j(ts) \quad \forall t > 0 / \|ts\| \leq \Delta_k,$$

entonces

$$q_k^j(0) - q_k^j(\bar{t}s) \geq -\frac{1}{2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\|s\|} \min \left\{ -\frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\|s\| \kappa}, \Delta_k \right\}. \quad (3.3)$$

Demostración. Para cada modelo cuadrático consideraremos los casos en que la curvatura a lo largo de la recta definida por s sea positiva o negativa.

Si s es una dirección tal que

$$s^T \nabla^2 f_j(x_k) s > 0,$$

el modelo tiene un mínimo sobre la recta ts que lo podemos hallar buscando

el cero de la derivada respecto de t :

$$0 = \nabla f_j(x_k)^T s + t^* s^T \nabla^2 f_j(x_k) s$$

de donde

$$t^* = \frac{-\nabla f_j(x_k)^T s}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} > 0.$$

Luego si el mínimo está dentro de la región de confianza, es decir $\|t^* s\| \leq \Delta_k$,

$$\begin{aligned} q_k^j(t^* s) &= \frac{-\nabla f_j(x_k)^T s}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} \left(\frac{-\nabla f_j(x_k)^T s}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} \right)^2 s^T \nabla^2 f_j(x_k) s \\ &= -\frac{\left(\nabla f_j(x_k)^T s \right)^2}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} + \frac{1}{2} \frac{\left(\nabla f_j(x_k)^T s \right)^2}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\left(\nabla f_j(x_k)^T s \right)^2}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s}. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la cota dada por A2,

$$\begin{aligned} q_k^j(0) - q_k^j(t^* s) &= \frac{1}{2} \frac{\left(\nabla f_j(x_k)^T s \right)^2}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\left(\nabla f_j(x_k)^T s \right)^2}{\|s\|^2 \kappa}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\|t^* s\| > \Delta_k$, el mínimo a lo largo de la recta queda fuera

de la región de confianza por lo tanto tomamos $\bar{t}^* = \Delta_k / \|s\|$. Entonces:

$$q_k^j(\bar{t}^*s) = \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_k}{\|s\|} \right)^2 s^T \nabla^2 f_j(x_k) s.$$

Debido a que $\|t^*s\| > \Delta_k$, tenemos $\frac{-\nabla f_j(x_k)^T s}{s^T \nabla^2 f_j(x_k) s} \|s\| > \Delta_k = \bar{t}^* \|s\|$.
Entonces

$$\frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\bar{t}^*} < -s^T \nabla^2 f_j(x_k) s.$$

Luego

$$\begin{aligned} q_k^j(0) - q_k^j(\bar{t}^*s) &> -\frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} \frac{\Delta_k^2}{\|s\|^2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\bar{t}^*} \\ &= -\frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s. \end{aligned}$$

En caso que $s^T \nabla^2 f_j(x_k) s \leq 0$, el mínimo valor del modelo ocurre en el borde de la región de confianza, por lo que tomamos \bar{t}^* como antes. Luego

$$\begin{aligned} q_k^j(\bar{t}^*s) &= \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s + \frac{1}{2} \frac{\Delta_k^2}{\|s\|^2} s^T \nabla^2 f_j(x_k) s \\ &\leq \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} q_k^j(0) - q_k^j(\bar{t}s) &\geq -\frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s \\ &\geq -\frac{1}{2} \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s. \end{aligned}$$

En suma

$$\begin{aligned} q_k^j(0) - q_k^j(\bar{t}s) &\geq \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\nabla f_j(x_k)^T s)^2}{\|s\|^2 \kappa}, -\frac{1}{2} \frac{\Delta_k}{\|s\|} \nabla f_j(x_k)^T s \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\|s\|} \min \left\{ -\frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\|s\| \kappa}, \Delta_k \right\}. \end{aligned}$$

□

Es importante notar que el resultado del lema anterior es válido para cada una de las funciones f_j ya que s es de descenso para F en x_k , sin embargo el valor de \bar{t} va a ser distinto para cada función.

Observación 3.1. El descenso que se obtiene en los modelos cuadráticos utilizando la dirección dada por la solución del subproblema (3.1) puede ser acotado inferiormente utilizando la cota dada por el lema anterior. Para ello veamos que

$$q_k^j(s_k) \leq t_k, \text{ para } j = 1, \dots, m.$$

por la definición del subproblema (3.1). Si el Algoritmo 3.1 no se detiene en

el segundo paso,

$$q_k^j(s_k) \leq t_k < tol < 0, \text{ para } j = 1, \dots, m.$$

Luego

$$q_k^j(0) - q_k^j(s_k) < tol. \quad (3.4)$$

Por otro lado, usando las hipótesis A2 y A5, y el lema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} q_k^j(0) - q_k^j(\bar{t}s_k) &= -\bar{t}\nabla f_j(x_k)^T s_k - \frac{1}{2}\bar{t}^2 s_k^T \nabla^2 f_j(x_k) s_k \\ &\leq \|\nabla f_j(x_k)\| \|\bar{t}s_k\| + \frac{1}{2} \|\bar{t}s_k\|^2 \kappa \\ &\leq \nu\Delta_{\text{máx}} + \frac{1}{2}\Delta_{\text{máx}}^2 \kappa. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Luego, combinando (3.4) y (3.5), obtenemos

$$\frac{q_k^j(0) - q_k^j(s_k)}{q_k^j(0) - q_k^j(\bar{t}s_k)} > \frac{tol}{\nu\Delta_{\text{máx}} + \frac{1}{2}\Delta_{\text{máx}}^2 \kappa} = \beta.$$

Lo que nos permite afirmar que para todos los x_k y s_k dados por el Algoritmo 3.1, se tiene la cota

$$q_k^j(0) - q_k^j(s_k) \geq -\beta \frac{1}{2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\|s\|} \min \left\{ -\frac{\nabla f_j(x_k)^T s}{\|s\| \kappa}, \Delta_k \right\}, \quad (3.6)$$

para $j = 1, \dots, m$, excepto cuando x_k sea punto crítico.

Observación 3.2. Es importante observar que la cota dada por este lema es estrictamente mayor que cero, por lo que los cocientes ρ_k^j (ver (3.2)) están bien definidos.

El siguiente lema establece una condición bajo la cual se aumenta el radio de la región de confianza.

Lema 3.3. *Asumiendo la hipótesis A2. Si $\left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right| \neq 0$ y*

$$\Delta_k \leq \frac{\beta \left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right| (1 - \eta_2)}{2\kappa \|s_k\|} \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

Entonces la iteración k es muy exitosa y

$$\Delta_{k+1} > \Delta_k.$$

Demostración. Observemos que

$$\frac{1}{2} (1 - \eta_2) < 1,$$

de lo que se deduce que

$$\Delta_k < \frac{\beta \left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right|}{\kappa \|s_k\|}.$$

Luego podemos precisar la cota (3.6) del descenso observado en los modelos:

$$\begin{aligned} q_k^j(0) - q_k^j(s_k) &\geq -\beta \frac{1}{2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s_k}{\|s_k\|} \min \left\{ \frac{\nabla f_j(x_k)^T s_k}{\|s_k\| \kappa}, \Delta_k \right\} \\ &= -\beta \frac{1}{2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s_k}{\|s_k\|} \Delta_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} |\rho_k^j - 1| &= \left| \frac{f_j(x_k) - f_j(x_k + s_k)}{-q_k^j(s_k)} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{f_j(x_k) - f_j(x_k + s_k) + q_k^j(s_k)}{-q_k^j(s_k)} \right|. \end{aligned}$$

Considerando un polinomio de Taylor para f_j alrededor de x_k , existe $\xi_k = x_k + \lambda s$, con $\lambda \in (0, 1)$, tal que:

$$\begin{aligned} |\rho_k^j - 1| &= \left| \frac{f_j(x_k) - f_j(x_k) - \nabla f_j(x_k)^T s_k - \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 f_j(\xi_k) s_k + q_k^j(s_k)}{-q_k^j(s_k)} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 f_j(\xi_k) s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 f_j(x_k) s_k}{-q_k^j(s_k)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \frac{|s_k^T (\nabla^2 f_j(\xi_k) - \nabla^2 f_j(x_k)) s_k|}{|-q_k^j(s_k)|}. \end{aligned}$$

Finalmente usamos la consistencia de la norma matricial con el producto y la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\rho_k^j - 1| \leq \frac{1}{2} \frac{\|s_k\|^2 \|\nabla^2 f_j(\xi_k) - \nabla^2 f_j(x_k)\|}{|-q_k^j(s_k)|}.$$

Usando la hipótesis A2 podemos acotar el numerador y, como s_k es de

descenso, por (3.8)

$$\begin{aligned} |\rho_k^j - 1| &\leq \frac{1}{2} \frac{\Delta_k^2 2\kappa}{| -q_k^j(s_k) |} \\ &\leq \frac{\Delta_k^2 \kappa}{-\beta \frac{1}{2} \frac{\nabla f_l(x_k)^T s_k}{\|s_k\|} \Delta_k} \end{aligned}$$

Luego, mediante pasos algebraicos y utilizando nuevamente que s_k es de descenso, obtenemos

$$\begin{aligned} |\rho_k^j - 1| &= \frac{2\Delta_k \|s_k\| \kappa}{-\beta \nabla f_l(x_k)^T s_k} \\ &= \frac{2\Delta_k \|s_k\| \kappa}{\beta \left| \nabla f_l(x_k)^T s_k \right|} \\ &< 1 - \eta_2. \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se desprende fácilmente de la hipótesis (3.7), por lo tanto

$$\rho_k^j > \eta_2, \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

luego el paso es aceptable y

$$\Delta_{k+1} > \Delta_k.$$

□

El próximo lema garantiza que mientras haya direcciones de descenso simultáneo que no sean próximas a ser perpendiculares al gradiente de alguna de las funciones objetivo, el radio de la región de confianza no se reducirá de-

masiado.

Lema 3.4. *Si $\exists c > 0$ tal que $\frac{|\nabla f_j(x_k)^T s_k|}{\|s_k\|} > c \forall k \forall j$ entonces $\exists \bar{c}$ tal que*

$$\Delta_k > \bar{c}$$

Demostración. Supongamos que k es la primer iteración tal que

$$\Delta_{k+1} \leq \frac{\gamma_1 c \beta (1 - \eta_2)}{2\kappa}.$$

Por ser k la primera en satisfacer la desigualdad: $\gamma_1 \Delta_k \leq \Delta_{k+1}$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta_k &\leq \frac{c\beta(1-\eta_2)}{2\kappa} \\ &\leq \beta \frac{1-\eta_2}{2\kappa} \frac{|\nabla f_j(x_k)^T s_k|}{\|s_k\|}. \end{aligned}$$

Lo que implica que la iteración anterior fue muy exitosa por lo que, por el teorema anterior, el radio debió aumentarse en lugar de reducirse. Lo cual nos lleva a una contradicción, por lo tanto $\nexists k$ tal que

$$\Delta_{k+1} \leq \frac{\gamma_1 c (1 - \eta_2) \beta}{2\kappa} = \bar{c}.$$

□

Finalmente los siguientes dos teoremas garantizan que el Algoritmo 3.1 halla la solución en una cantidad finita de pasos o bien genera una sucesión que tiene una subsucesión convergente a un punto crítico.

Teorema 3.5. *Si el Algoritmo 3.1 genera una cantidad finita de iteraciones*

exitosas, entonces $x_k = x^*$ para todo k lo suficientemente grande y x^* es un punto crítico.

Demostración. Por la definición del algoritmo $x^* = x_k = x_{k+j} \forall j > 0$ donde k es el índice del último iterado correspondiente a una iteración exitosa, luego, debido a que los siguientes pasos no son exitosos $\Delta_k \rightarrow 0$.

Si $\left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right| \neq 0$ por el Teorema 3.4 debería haber un iterado exitoso posterior lo que contradice que x_k es el último iterado exitoso, por lo tanto $\left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right| = 0$. \square

Teorema 3.6. Sean x_k y s_k obtenidos mediante el Algoritmo 3.1 entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right|}{\|s_k\|} = 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que

$$\frac{\left| \nabla f_j(x_k)^T s_k \right|}{\|s_k\|} \geq \epsilon \quad (3.9)$$

para algún $\epsilon > 0$. Consideremos un conjunto de índices \mathcal{S} de iteraciones exitosas, entonces

$$\begin{aligned} f_j(x_k) - f_j(x_{k+1}) &\geq \eta_1 (q_k^j(0) - q_k^j(s_k)) \\ &\geq \eta_1 \beta \left(-\frac{1}{2} \frac{\nabla f_j(x_k)^T s_k}{\|s_k\|} \min \left\{ -\frac{\nabla f_j(x_k)^T s_k}{\|s_k\| \kappa}, \Delta_k \right\} \right), \end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se debe a que la iteración es exitosa y la segunda a la cota para el descenso esperado (3.6).

Usando que s_k es de descenso y (3.9),

$$\begin{aligned} f_j(x_k) - f_j(x_{k+1}) &\geq \eta_1 \beta \left(\frac{1}{2} \frac{|\nabla f_l(x_k)^T s_k|}{\|s_k\|} \min \left\{ \frac{|\nabla f_l(x_k)^T s_k|}{\|s_k\| \kappa}, \Delta_k \right\} \right) \\ &\geq \eta_1 \beta \frac{\epsilon}{2} \min \left\{ \frac{\epsilon}{\kappa}, \Delta_k \right\}. \end{aligned}$$

Luego si sumamos sobre todas las iteraciones exitosas hasta la k -ésima:

$$\begin{aligned} f_j(x_0) - f_j(x_{k+1}) &= \sum_{l=0, l \in \mathcal{S}}^k |f_j(x_l) - f_j(x_{l+1})| \\ &\geq \sum_{l=0, l \in \mathcal{S}}^k \eta_1 \beta \frac{\epsilon}{2} \min \left\{ \frac{\epsilon}{\kappa}, \Delta_k \right\} \\ &\geq \sigma_k \eta_1 \beta \frac{\epsilon}{2} \min \left\{ \frac{\epsilon}{\kappa}, \Delta_k \right\}, \end{aligned}$$

donde σ_k indica el número de iteraciones exitosas hasta el índice k . Luego si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k < +\infty$$

entonces estamos en las condiciones del teorema anterior y el resultado es obvio, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \infty$$

la diferencia $f_j(x_0) - f_j(x_{k+1})$ es infinita, lo que contradice que f_j estén

acotadas. Luego $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\frac{|\nabla f_j(x_k)^T s_k|}{\|s_k\|} \geq \epsilon.$$

□

Por último establecemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Asumiendo que los conjuntos de nivel de las funciones f_i , $i = 1, \dots, m$, son acotados, la sucesión generada por el Algoritmo 3.1 converge a un punto crítico.*

Con estos resultados tenemos garantizada la buena definición y convergencia del método independientemente de la convexidad de las funciones objetivo.

Capítulo 4

Análisis de convergencia local

En este capítulo se estudian las propiedades locales del algoritmo propuesto en el capítulo anterior. Se prueba que, localmente, se obtiene una tasa de convergencia q -cuadrática, al igual que el método vectorial presentado en [24] y los algoritmos tipo Newton con región de confianza para el caso escalar.

Para algunos resultados de este capítulo, además de las hipótesis requeridas para la convergencia global (A1 - A5), asumiremos:

A6) Existe $a > 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface

$$a \|v\|^2 \leq v^T \nabla^2 f_j(x) \quad j = 1, \dots, m.$$

Esta hipótesis claramente implica la convexidad de las funciones objetivo. Consideraremos ahora el problema 3.1 formulado con una diferencia in-

material en la última restricción

$$\begin{aligned}
 \underset{s,a}{\text{mín}} \quad & t \\
 \nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t & \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\
 \nabla f_j(x)^T s - t & \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\
 \frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} & \leq 0, \\
 (t, s) & \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para el análisis a desarrollar en este capítulo es de utilidad considerar el Lagrangiano del problema (4.1):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t, s, \lambda^1, \lambda^2, \lambda) &= t + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \left(\nabla f_j^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j s - t \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 (\nabla f_j^T s - t) \\
 &+ \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 (\nabla f_j^T s - t) + \lambda \left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

En el caso convexo, el problema (4.1), con $\Delta > 0$, satisface la condición calificadora de Slater tomando s en el interior de la región de confianza y t suficientemente grande. Por lo tanto en la solución existen los multiplicadores de Lagrange $\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda$, con $j = 1, \dots, m$, satisfaciendo las condiciones KKT:

- Se anula el gradiente del Lagrangiano:

$$\nabla \mathcal{L}(t, s, \lambda^1, \lambda^2, \lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4.2}$$

- El punto es factible:

$$\begin{aligned} \nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ \nabla f_j(x)^T s - t &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ \frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

- Se cumplen las condiciones de complementariedad:

$$\left(\nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t \right)^T \lambda_j^1 = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.4)$$

$$(\nabla f_j(x)^T s - t)^T \lambda_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right) \lambda = 0,$$

$$\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Observación 4.1. Por A6, tenemos que las matrices Hessianas $\nabla^2 f_j$, $j = 1, \dots, m$, son definidas positivas. Entonces, las restricciones lineales (4.3) nunca son activas, por lo cual, para satisfacer la condición de complementariedad (4.5), se tiene: $\lambda_j^2 = 0$, para $j = 1, \dots, m$.

Reescribiendo (4.2), se puede obtener algunas relaciones interesantes entre los multiplicadores y las variables:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nabla^2 f_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla f_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = 0.$$

Del primer componente deducimos que:

$$1 - \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 = 0,$$

y de los n restantes:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j s + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla f_j + \lambda s = 0. \quad (4.6)$$

Siguiendo cálculos y utilizando que por A5, las matrices $\nabla^2 f_j$, $j = 1, \dots, m$, son invertibles por ser definidas positivas, obtenemos:

$$s = - \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j(x) + \lambda I \right]^{-1} \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla f_j(x). \quad (4.7)$$

Lo cual nos permite definir a los s y t óptimos como funciones $s(x)$ y $t(x)$. El siguiente lema (basado en el Lema 3.2 de [24]) brinda propiedades de las mismas.

Lema 4.1. *Asumiendo la convexidad de las funciones objetivo se tiene:*

- a) *Para todo x , $t(x) \leq 0$.*
- b) *Las siguientes propiedades son equivalentes:*
 - (i) *\bar{x} no es punto crítico.*
 - (ii) *$t(\bar{x}) < 0$.*
 - (iii) *$s(\bar{x}) \neq 0$.*
- c) *$s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está acotada y $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Por ser $t(x)$ solución de (4.1) y ser $(t, s) = (0, 0)$ factible, $t(x) \leq 0$.

Para la parte *b*, es evidente a partir del Lema 5.1 que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$, por lo que sólo probaremos $(iii) \Rightarrow (i)$.

Debido a que $\nabla^2 f_j(\bar{x})$ es definida positiva para $j = 1, \dots, m$ y $s(\bar{x}) \neq 0$ tenemos:

$$\nabla f_j(\bar{x})^T s < \nabla f_j(\bar{x})^T s + \frac{1}{2} s(\bar{x})^T \nabla^2 f_j(\bar{x}) s(\bar{x}) \leq t(\bar{x}) \leq 0,$$

para $j = 1, \dots, m$, luego $\mathcal{R}(\nabla F(\bar{x})) \subseteq (-\mathbb{R}_{++}^m)$, por lo tanto \bar{x} no es crítico.

Para la parte *c*, el hecho de que $s(x)$ esté acotada es evidente pues está acotada por el radio de la región de confianza.

Veamos que $t(x)$ es continua sobre cualquier compacto $W \subset \mathbb{R}^n$. Para W fijo pero arbitrario, $x \in W$ y $j = 1, \dots, m$ definimos las funciones:

$$\varphi_{x,j} : W \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi_{x,j}(z) = \nabla f_j(z)^T s(x) + \frac{1}{2} s(x)^T \nabla^2 f_j(z) s(x)$$

y

$$\psi_{x,j} : W \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\psi_{x,j}(z) = \nabla f_j(z)^T s(x).$$

La familia $\{\varphi_{x,j}, \psi_{x,j}\}$ es equicontinua (ver anexo A). Entonces

$$x \in W,$$

$$j = 1, \dots, m$$

definimos:

$$\Phi_x(z) = \max_{j=1,\dots,m} \{ \varphi_{x,j}(z), \psi_{x,j}(z) \},$$

donde el máximo es tomado sobre $\varphi_{x,1}(z), \dots, \varphi_{x,m}(z), \psi_{x,1}(z), \dots, \psi_{x,m}(z)$. Luego $\Phi_x(z)$ es equicontinua por ser el máximo de una familia de funciones equicontinuas.

Tomemos $\epsilon > 0$, por la equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall y, z \in W, \|y - z\| < \delta \Rightarrow |\Phi_x(y) - \Phi_x(z)| < \epsilon \quad \forall x \in W.$$

Entonces, para todo $y, z \in W$ tales que $\|y - z\| < \delta$,

$$\begin{aligned} t(z) &= \Phi_z(z) \\ &= \max_{j=1,\dots,m} \left\{ \nabla f_j(z)^T s(z) + \frac{1}{2} s(z)^T \nabla^2 f_j(z) s(z), \nabla f_j(z)^T s(z) \right\} \\ &\leq \max_{j=1,\dots,m} \left\{ \nabla f_j(z)^T s(y) + \frac{1}{2} s(y)^T \nabla^2 f_j(z) s(y), \nabla f_j(z)^T s(y) \right\} \\ &= \Phi_y(z), \end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a que $s(z)$ minimiza el máximo de los modelos alrededor del punto z .

Luego, por un razonamiento análogo, obtenemos que $\Phi_y(z) - \Phi_y(y) \geq 0$,

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 t(z) &\leq \Phi_y(z) \\
 &= \Phi_y(y) + \Phi_y(z) - \Phi_y(y) \\
 &\leq \Phi_y(y) + |\Phi_y(z) - \Phi_y(y)| \\
 &< t(y) + \epsilon,
 \end{aligned}$$

es decir $t(z) - t(y) < \epsilon$.

En forma análoga se prueba que $t(y) - t(z) < \epsilon$, de donde:

$$\forall z, y \in W / \|z - y\| < \delta \Rightarrow |t(z) - t(y)| < \epsilon,$$

con lo cual $t(x)$ es continua. □

Notemos que, como se vio en el Lema 5.1, aún en el caso no convexo es válida la primer afirmación del lema anterior y $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ de la segunda.

En el anexo (B) se encuentra un ejemplo del subproblema del algoritmo con gráficas de la curva $s(\Delta)$. Por simplicidad se adoptará la notación $s_k = s(x_k)$ en los casos que no presente lugar a confusiones.

Para probar que la tasa de convergencia del Algoritmo 3.1 es q -cuadrática, son necesarios algunos resultados que presentamos a continuación.

Lema 4.2. Sean $\epsilon, \delta > 0$ tales que si $\|x - y\| < \delta$ entonces

$$\|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| < \epsilon, \quad j = 1, \dots, m.$$

Entonces, para todo x, y tales que $\|x - y\| < \delta$, para $j = 1, \dots, m$, se tiene:

(i)

$$\|\nabla f_j(y) - (\nabla f_j(x) + \nabla^2 f_j(x)(y - x))\| < \epsilon \|y - x\|,$$

(ii)

$$\left| f_j(y) - (f_j(x) + \nabla f_j(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f_j(x) (y - x)) \right| < \frac{\epsilon}{2} \|y - x\|^2,$$

Si $\nabla^2 f_j$ es Lipschitz continua con constante L para $j = 1, \dots, m$, entonces

$$\|\nabla f_j(y) - (\nabla f_j(x) + \nabla^2 f_j(x)(y - x))\| < \frac{L}{2} \|y - x\|^2$$

es válido para $j = 1, \dots, m$.

La prueba de este lema consiste simplemente en aplicar los resultados 4.1.10 y 4.1.12 de [19].

El siguiente lema establece una relación entre el valor absoluto de la función $t(x)$ y la norma de $s(x)$ en el caso convexo, es decir entre el valor óptimo obtenido en el subproblema con la longitud del paso.

Lema 4.3. Sean $u \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a > 0$ como en A5, entonces

$$\frac{a}{2} \|s(x)\|^2 \leq |t(x)|, \quad \forall x \in U.$$

Demostración. Para la prueba es conveniente analizar por separado los casos en que la restricción asociada a la región de confianza sea activa o no. En ambos casos el término asociado a la región de confianza se anula en el

Lagrangiano. En virtud de esta similitud, presentamos solamente el caso en que la restricción asociada a la región de confianza sea inactiva.

Si $\|s\| < \Delta$, por complementariedad, $\lambda = 0$.

Analicemos el Lagrangiano del subproblema (4.1) en la solución óptima $(t, s) = (t(x), s(x))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, s, \lambda^1, \lambda^2, \lambda) &= t + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \left(\nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 (\nabla f_j(x)^T s - t) + \lambda \left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Por la Observación 4.1, el hecho de que $\lambda = 0$ y 4.4

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, s, \lambda^1, \lambda^2, \lambda) &= t + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \left(\nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t \right) \\ &= t. \end{aligned}$$

Por (4.7) y el hecho de que $\lambda = 0$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla f_j(x) = - \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j(x) \right] s.$$

Combinando las dos últimas igualdades,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t, s, \lambda^1, \lambda^2, \lambda) &= \left(- \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j(x) \right] s \right)^T s + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 s^T \nabla^2 f_j(x) s \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 s^T \nabla^2 f_j(x) s \\
 &= t.
 \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se desprende de que $\nabla f_j(x)$ es simétrica ya que $f_j \in (C)^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Entonces

$$t = -\frac{1}{2} s^T \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j(x) \right) s \leq 0,$$

por lo tanto, usando A6,

$$\begin{aligned}
 |t| &\geq \frac{1}{2} s^T \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j \right) s \\
 &\geq \frac{a}{2} \|s\|^2.
 \end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos da una cota para el subproblema en función de los gradientes de las funciones objetivo.

Lema 4.4. Sean $x \in U$ y $a > 0$ como en A6, entonces

$$|t(x)| \leq \frac{1}{2a} \left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla f_j(x) \right\|^2,$$

para todo $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, tal que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, y para todo $x \in U$.

Demostración. Para este lema resulta conveniente considerar el problema dual de (4.1):

$$\begin{aligned} \max_{s,a} \quad & \inf_{(t,s)} \left\{ t + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t) + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 (\nabla f_j(x)^T s - t) + \lambda \left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right\} \\ & \lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \\ & \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1. \end{aligned}$$

Por A6 tenemos que todas las restricciones del problema (4.1) son convexas y que se satisface la condición calificadora de Slater, por lo tanto, debido al Teorema 1.9, no hay brecha de dualidad. Esto nos permite afirmar que $t(x)$ es el valor óptimo del problema dual

$$\begin{aligned} t(x) &= \max_{s,a} \quad \inf_{(t,s)} \left\{ t + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t) + \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 (\nabla f_j(x)^T s - t) + \lambda \left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right\} \\ &\geq \max_{s,a} \quad \inf_{(t,s)} \left\{ t + \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t) + \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 (\nabla f_j(x)^T s - t) + \lambda \left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right\} \\ & \quad \lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \\ & \quad \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1. \end{aligned}$$

Luego, agregando las restricciones $\sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1$ y $\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0$

usando la restricción de igualdad del problema dual, tenemos

$$\begin{aligned}
 t(x) &= \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1}} \inf_s \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j s) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \nabla f_j^T s + \lambda \left(\frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right\} \\
 &\geq \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1}} \inf_s \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j s) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \nabla f_j^T s \right\} + \lambda \inf_s \left\{ \frac{\|s\|^2}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

El mínimo del segundo sumando se obtiene en $s = 0$:

$$t(x) \geq \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1}} \left\{ \inf_s \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j s) \right. \right. \\
 \left. \left. + \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \nabla f_j^T s \right\} - \lambda \frac{\Delta^2}{2} \right\}.$$

Para el supremo debe ser $\lambda = 0$ pues $-\frac{\Delta^2}{2} < 0$, entonces:

$$t(x) \geq \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1}} \inf_s \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 (\nabla f_j^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j s) \right. \\
 \left. + \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \nabla f_j^T s \right\}.$$

Si aplicamos la hipótesis A6:

$$t(x) \geq \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2 \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1}} \inf_{(t,s)} \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \frac{1}{2} a \|s\|^2 + \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j^T s.$$

El último ínfimo es realmente un mínimo que se alcanza en el punto que

se anula el gradiente (respecto de las variables s), ya que es tomado sobre una función convexa. Entonces calculamos el gradiente y hallamos tal cero:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a s + \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j = 0,$$

$$s = -\frac{\sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a}.$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} t(x) &\geq \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2 \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1.}} \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \frac{1}{2} a \left\| \frac{\sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a} \right\|^2 \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j^T \right) \frac{\sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a} \\ &= \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2 \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1.}} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a \right) \frac{\left\| \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j \right\|^2}{\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a \right)^2} \\ &\quad - \frac{\left\| \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j \right\|^2}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a} \\ &= \sup_{\substack{\lambda_j^1, \lambda_j^2 \geq 0, \\ \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) = 1.}} -\frac{1}{2} \frac{\left\| \sum_{j=1}^m (\lambda_j^1 + \lambda_j^2) \nabla f_j \right\|^2}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 a}. \end{aligned}$$

Luego, si fijamos algunos valores para λ_j^2 se conserva la desigualdad. En

particular si tomamos $\lambda_j^2 = 0$ para $j = 1, \dots, m$, tenemos

$$t(x) \geq -\frac{1}{2} \frac{\left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla f_j \right\|^2}{a},$$

ya que $\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 = 1$.

Finalmente, dejando de lado el superíndice y teniendo en cuenta que $t(x) \leq 0$:

$$|t(x)| \leq \frac{1}{2a} \left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla f_j \right\|^2,$$

$\forall \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, m$ tales que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$. □

Es interesante observar que la cota inferior que se obtiene en el lema está dada por cualquier combinación convexa de los gradientes y no sólo cuando se trata de la que definen los multiplicadores del subproblema 4.1.

El siguiente lema permite relacionar la longitud de los pasos en iteraciones sucesivas.

Lema 4.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, \hat{x} y $\hat{x}_+ = \hat{x} + s(\hat{x})$, $a, r, \delta, \epsilon > 0$ tales que:

- a) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a > 0$ tales que satisfacen A6.
- b) $B(\hat{x}, r) \subset U$.
- c) $\|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| < \epsilon, \forall x, y \in B(\hat{x}, r)$ tales que $\|x - y\| < \delta$.
- d) $\|s(\hat{x}_+)\| < \min\{\delta, r, \hat{\Delta}\}$, donde $\hat{\Delta}$ es el radio de la región de confianza en \hat{x} .

Entonces

$$\|s(\hat{x}_+)\| \leq \frac{\epsilon}{a} \|s(\hat{x})\|.$$

Si además

$$\|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in B(\hat{x}, r),$$

entonces

$$\|s(\hat{x}_+)\| \leq \frac{L}{2a} \|s(\hat{x})\|^2.$$

Demostración. Sean $\hat{\lambda}_j^1, \hat{\lambda}_j^2, \hat{\lambda} > 0$ los multiplicadores asociados al subproblema (4.1) en \hat{x} .

Debido a la convexidad de las f_j , $j = 1, \dots, m$, y a que la restricción asociada a la región de confianza es inactiva, los multiplicadores son todos nulos salvo los $\hat{\lambda}_j^1$, por lo que

$$\sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j^1 = 1.$$

Utilizando el Lema 4.4 tenemos que:

$$|t(\hat{x}_+)| \leq \frac{1}{2a} \left\| \sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j^1 \nabla f_j(\hat{x}_+) \right\|^2. \quad (4.8)$$

Por otro lado definimos

$$G(x) = \sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j^1 f_j(x).$$

Luego

$$\begin{aligned}\nabla G(\widehat{x}_+) &= \nabla G(\widehat{x} + s(\widehat{x})) \\ &= \sum_{j=1}^m \widehat{\lambda}_j^1 \nabla f_j(\widehat{x} + s(\widehat{x})), \\ \nabla^2 G(\widehat{x}) &= \sum_{j=1}^m \widehat{\lambda}_j^1 \nabla^2 f_j(\widehat{x}).\end{aligned}$$

A partir de (4.7) podemos escribir:

$$\begin{aligned}\widehat{s} &= - \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla^2 f_j \right]^{-1} \sum_{j=1}^m \lambda_j^1 \nabla f_j \\ &= -\nabla^2 G(\widehat{x}) \nabla G(\widehat{x}).\end{aligned}$$

Debido a que G es combinación convexa de las f_j , $j = 1, \dots, m$, hereda la propiedad de la hipótesis (4.5), entonces podemos utilizar el Lema 4.2 teniendo en cuenta la última ecuación:

$$\|\nabla G(\widehat{x} + \widehat{s}) - [\nabla G(\widehat{x}) + \nabla^2 G(\widehat{x}) \widehat{s}]\| \leq \epsilon \|\widehat{s}\|,$$

entonces

$$\|\nabla G(\widehat{x}_+)\| \leq \epsilon \|\widehat{s}\|.$$

Relacionando esta desigualdad con (4.8) y el resultado de los Lemas 4.3 y 4.4, tenemos

$$\frac{a}{2} \|\widehat{s}_+\|^2 \leq |t(\widehat{x}_+)| \leq \frac{1}{2a} (\epsilon \|\widehat{s}\|)^2,$$

entonces

$$a \|\widehat{s}_+\| \leq \frac{\epsilon}{a} \|\widehat{s}\|.$$

Si además $\nabla^2 f_j$, $j = 1, \dots, m$, son Lipschitz continuas con constante L , entonces $\nabla^2 G$ también lo es con la misma constante. Lo cual, utilizando nuevamente el Lema 4.2, nos permite escribir

$$\begin{aligned} |t(\widehat{x}_+)| &\leq \frac{1}{2a} \|\nabla G(\widehat{x}_+)\|^2 \\ &= \frac{1}{2a} \|\nabla G(\widehat{x} + \widehat{s}) - [\nabla G(\widehat{x}) + \nabla^2 G(\widehat{x})\widehat{s}]\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4a} L^2 \|\widehat{s}\|^4. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando el Lema 4.3,

$$\frac{a}{2} \|\widehat{s}_+\|^2 \leq \frac{1}{2a} \frac{L^2}{4} \|\widehat{s}\|^4,$$

es decir

$$\|\widehat{s}_+\| \leq \frac{L}{2a} \|\widehat{s}\|^2.$$

□

El siguiente teorema garantiza la convergencia a un punto Pareto optimal en un entorno del punto inicial. Una característica interesante del resultado es que, en forma similar al Teorema de Kantorovich para optimización escalar [32], no asume la existencia de tal punto. A diferencia del citado teorema, el nuestro no permite asegurar que sea el único minimizador en el entorno del punto inicial.

Teorema 4.6. Sean $\{x_k\}$ generada por el Algoritmo 3.1, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $a, r, \delta, \epsilon > 0$ tales que

- a) U y a como en A6.
- b) $\|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| < \epsilon$, $\forall x, y \in U$, tal que $\|x - y\| < \delta$.
- c) $\frac{\epsilon}{a} < 1 - \eta_2$, donde η_2 es el parámetro fijado en el Algoritmo 3.1 para determinar si un paso es muy exitoso.
- d) $B(x_0, r) \subseteq U$.
- e) $\|s(x_0)\| \leq \min\{\delta, r(1 - \frac{\epsilon}{a}), \Delta_0\}$,

entonces se cumple

- (i) $\|x_k - x_0\| \leq \|s(x_0)\| \frac{1 - (\frac{\epsilon}{a})^k}{1 - \frac{\epsilon}{a}} \forall k$.
- (ii) $\|s(x_k)\| \leq \|s(x_0)\| (\frac{\epsilon}{a})^k \forall k$.
- (iii) $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k \forall k$.
- (iv) $\|s(x_{k+1})\| \leq \|s(x_k)\| (\frac{\epsilon}{a}) \forall k$.

Además $\{x_k\}$ converge a un punto localmente Pareto optimal.

Demostración. Probaremos que, para un k fijo, los ítems (i) y (ii) implican a (iii) y (iv), para ese k . Luego al, aplicar inducción, bastará con probar (i) y (ii).

Supongamos que para k valen (i) y (ii), que junto con la desigualdad triangular permite escribir:

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x_0\| &= \|x_k + s(x_k) - x_0\| \\
 &\leq \|x_k - x_0\| + \|s(x_k)\| \\
 &\leq \|s(x_0)\| \frac{1 - \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k}{1 - \frac{\epsilon}{a}} + \|s(x_0)\| \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k \\
 &= \|s(x_0)\| \frac{1 - \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{k+1}}{1 - \frac{\epsilon}{a}}.
 \end{aligned}$$

Luego por la hipótesis c) y $0 \leq \eta_2 \leq 1$, tenemos que

$$0 \leq \frac{\epsilon}{a} \leq 1,$$

entonces, considerando una de las cotas dada por e):

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x_0\| &\leq r \left(1 - \frac{\epsilon}{a}\right) \frac{1 - \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{k+1}}{1 - \frac{\epsilon}{a}} \\
 &= r \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{k+1}\right) \\
 &\leq r.
 \end{aligned}$$

Además, por (ii):

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x_k\| &= \|s(x_k)\| \\
 &\leq \|s(x_0)\| \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k \\
 &\leq \|s(x_0)\| \\
 &\leq \delta.
 \end{aligned}$$

Entonces $x_k, x_k + s(x_k) \in B(x_0, r)$ y $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \delta$.

Veamos que es válido (iii), para ello veremos que $\rho_j > \eta_2$ para $j = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} f_j(x_k + s_k) - f_j(x_k) &\leq \nabla f_j(x_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 f_j(x_k) s_k + \frac{\epsilon}{2} \|s_k\|^2 \\ &= q_k^j(s_k) + \frac{\epsilon}{2} \|s_k\|^2 \\ &= \eta_2 q_k^j(s_k) + (1 - \eta_2) q_k^j(s_k) + \frac{\epsilon}{2} \|s_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Veamos que la suma de los últimos dos términos es no positiva, por la definición de $t(x_k)$ y por c :

$$\begin{aligned} (1 - \eta_2) q_k^j(s_k) + \frac{\epsilon}{2} \|s_k\|^2 &\leq (1 - \eta_2) t(x_k) + \frac{\epsilon}{2} \|s_k\|^2 \\ &\leq (1 - \eta_2) \frac{a}{2} \|s_k\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \|s_k\|^2 \\ &\leq \frac{\|s_k\|^2}{2} (\epsilon - a(1 - \eta_2)) \\ &= a \frac{\|s_k\|^2}{2} \left(\frac{\epsilon}{a} - (1 - \eta_2) \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego, retomando (4.9),

$$f_j(x_k + s_k) - f_j(x_k) \leq \eta_2 q_k^j(s_k).$$

Entonces, debido a que $q_k^j(s_k) < 0$:

$$\frac{f_j(x_k) - f_j(x_k + s_k)}{-q_k^j(s_k)} \geq \eta_2,$$

por lo tanto:

$$\Delta_{k+1} \geq \Delta_k.$$

El punto *(iv)* se deduce del Lema 4.5 y del hecho que al ser válido *(iii)* el paso es aceptable.

Probemos por inducción que *(i)* y *(ii)* valen para todo k .

Para $k = 0$ es trivial que se cumplen los puntos *(i)* y *(ii)*, ya que lo tenemos por hipótesis. Supongamos que es válido hasta k .

Al cumplirse *(iii)*, $x_{k+1} = x_k + s_k$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_0\| &\leq \|x_k - x_0\| + \|s_k\| \\ &\leq \|s(x_0)\| \frac{1 - \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k}{1 - \frac{\epsilon}{a}} + \|s(x_0)\| \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k \\ &= \|s(x_0)\| \frac{1 - \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{k+1}}{1 - \frac{\epsilon}{a}}, \end{aligned}$$

por lo tanto vale *(i)* para $k + 1$.

Usando *(iv)* y *(ii)* para k tenemos:

$$\begin{aligned} \|s_{k+1}\| &\leq \|s_k\| \frac{\epsilon}{a} \\ &\leq \|s_0\| \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

entonces vale *(ii)* para $k + 1$; luego, como ya vimos que *(iii)* y *(iv)* se deducen de *(i)* y *(ii)*, son válidos *(i)*, *(ii)*, *(iii)* y *(iv)* para todo k .

A partir de (i) y (ii):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| &= \sum_{k=0}^{\infty} \|s_k\| \\ &\leq \|s_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k \\ &< \infty, \end{aligned}$$

por lo que $\{x_k\}$ es de Cauchy, entonces $\exists \bar{x}$ tal que $x_k \rightarrow \bar{x}$.

Además $\|s_k\| \rightarrow 0$, entonces $t(x_k) \rightarrow 0$, y, por continuidad de t , $t(\bar{x}) = 0$. Entonces \bar{x} es localmente Pareto optimal. \square

A partir de este resultado y agregando la condición de Lipschitz continuidad de las matrices Hessianas de las funciones objetivos obtenemos la convergencia local q -cuadrática como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *Si se cumplen las hipótesis a) – e), del Teorema 4.6 y $\nabla^2 f_j$ son Lipschitz continuas con constante L en U .*

Sean

$$\tau_k = \left(\frac{L}{2a}\right) \|s_k\|$$

y $\xi \in (0, \frac{1}{2})$.

Entonces existe k_0 tal que $\forall k \geq k_0$, $\tau_k < \xi$ y

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x_{k+1}\| &\leq \frac{L}{a} \frac{1 - \tau_k}{(1 - 2\tau_k)^2} \|\bar{x} - x_k\|^2 \\ &\leq \frac{L}{a} \frac{1 - \xi}{(1 - 2\xi)^2} \|\bar{x} - x_k\|^2, \end{aligned}$$

donde \bar{x} es punto límite de $\{x_k\}$ y es localmente Pareto optimal.

Demostración. Por el Teorema 4.6 tenemos que

$$\|s_k\| \leq \|s_0\| \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k,$$

luego

$$\tau_k \leq \frac{L}{2a} \|s_0\| \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^k,$$

por lo que existe un k_0 tal que $\forall k \geq k_0$

$$\tau_k < \xi.$$

Por el Lema 4.5 tenemos que

$$\|s_{k+1}\| \leq \frac{L}{2a} \|s_k\|^2. \quad (4.10)$$

Sea $i > k \geq k_0$ entonces

$$\begin{aligned} \|x_i - x_{k+1}\| &\leq \sum_{j=k+2}^i \|x_j - x_{j-1}\| \\ &\leq \sum_{j=k+2}^i \|s_{j-1}\|, \end{aligned}$$

haciendo tender i a infinito:

$$\|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \|s_j\|.$$

Aplicando (4.10):

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x_{k+1}\| &\leq \frac{L}{2a} \|s_k\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L}{2a} \|s_k\| \right)^{2j} \\ &\leq \frac{L}{2a} \|s_k\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\tau_k)^{2j}. \end{aligned}$$

Debido a que $\tau_k < \frac{1}{2}$ obtenemos una serie geométrica convergente, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x_{k+1}\| &\leq \frac{L}{2a} \|s_k\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \tau_k^j \\ &= \frac{L}{2a} \|s_k\|^2 \frac{1}{1 - \tau_k}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x_k\| &\geq \|x_{k+1} - x_k\| - \|\bar{x} - x_{k+1}\| \\ &\geq \|s_k\| - \|s_k\|^2 \frac{\frac{L}{2a}}{1 - \tau_k} \\ &= \|s_k\| \frac{1 - 2\tau_k}{1 - \tau_k}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la definición de τ_k ; entonces:

$$\|s_k\| \leq \|\bar{x} - x_k\| \frac{1 - \tau_k}{1 - 2\tau_k}.$$

Retomando (4.11):

$$\begin{aligned}\|\bar{x} - x_{k+1}\| &\leq \frac{L}{2a} \|s_k\|^2 \frac{1}{1 - \tau_k} \\ &\leq \frac{L}{2a} \left(\|\bar{x} - x_k\| \frac{1 - \tau_k}{1 - 2\tau_k} \right)^2 \frac{1}{1 - \tau_k} \\ &= \frac{L}{2a} \|\bar{x} - x_k\|^2 \frac{1 - \tau_k}{(1 - 2\tau_k)^2} \\ &\leq \frac{L}{2a} \|\bar{x} - x_k\|^2 \frac{1 - \xi}{(1 - 2\xi)^2}.\end{aligned}$$

Con lo cual hemos probado la convergencia q -cuadrática del Algoritmo 3.1. □

Capítulo 5

Experimentación numérica

Con el propósito de validar los resultados de convergencia del algoritmo se lo ha codificado en FORTRAN bajo ubuntu 10.04 LTS, en una PC con procesador INTEL CORE I3 530 2.93Ghz y 3gb de memoria RAM. Para la resolución del subproblema se ha utilizado la subrutina ALGENCAN desarrollada en la Universidad Estatal de Campinas, UNICAMP, que implementa el método de Lagrangiano aumentado [1, 2].

5.1. Problemas test y resolución numérica

En el Lema establecimos como condición necesaria y suficiente para que un punto sea crítico que la solución del subproblema

$$\begin{aligned}
 & \underset{s.a}{\text{mín}} \quad t \\
 & \nabla f_j(x)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f_j(x) s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\
 & \nabla f_j(x)^T s - t \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m), \\
 & \|s\| \leq \Delta, \\
 & (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

sea tal que $t = 0$. Para implementarlo numéricamente, consideramos que el algoritmo ha convergido cuando la solución de dicho problema resulta mayor que 10^{-8} . A su vez, se fija un máximo de 100 iteraciones, si se alcanza dicho máximo sin satisfacerse el criterio de convergencia convenimos que el algoritmo no convergió.

Los parámetros del algoritmo 3.1 fueron fijados como:

$$\eta_1 = 0,1, \eta_2 = 0,9, \Delta_0 = 2.$$

Debido a que los parámetros γ_1, γ_2 sólo establecen limitaciones para modificar el radio de la región de confianza no han sido fijados. En su lugar establecimos que en caso de que el mínimo de los ρ^l resulte menor que η_1 se toma la mitad del radio para la siguiente iteración; si resulta mayor que η_2 se toma el doble del radio y se conserva el mismo en otro caso.

Utilizamos los parámetros de ALGENCAN en sus valores por defecto; es importante señalar algunos de ellos:

- `precond` = 'QNCGNA', con el preconditionador descrito en [11].
- `epsfeas` = 1.0d-08, tolerancia admitida para las restricciones.
- `epsopt` = 1.0d-08, tolerancia admitida para la norma supremo del gradiente proyectado del Lagrangiano Aumentado.

A continuación, listamos los problemas test utilizados.

Problema 5.1. [16]

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por:}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \end{bmatrix}.$$

Problema 5.2. [16]

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por:}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \\ \sin(x_1 + 0,7) \end{bmatrix}.$$

Problema 5.3. [16]

$$\text{Sea } F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por:}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ \frac{x_1}{x_2} \end{bmatrix}.$$

Problema 5.4. [16]

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por:}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{8}} \\ ((x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2)^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix}.$$

Problema 5.5. [16] $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} (1 + \frac{x}{20}) \sin(x) \\ (1 + \frac{x}{20}) \cos(x) \end{bmatrix}.$$

Problema 5.6. [16] $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} -(x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 - (x_3 - 5)^2 - (x_4 - 4)^2 + 5 \\ \frac{\sum_{i=1}^4 \sin(x_i)}{1 + \sum_{i=1}^4 x_i^2 / 100} \end{bmatrix}.$$

Problema 5.7. [56] $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ (x - 2)^2 \end{bmatrix}.$$

Problema 5.8. [56] $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 \left(x_i - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 \left(x_i + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \end{bmatrix}.$$

Problema 5.9. [56] $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + (a_1 - (0,5\text{sen}(x_1) - 2\text{cos}(x_1) + \text{sen}(x_2) - 1,5\text{cos}(x_2)))^2 \\ &\quad + (a_2 (1,5\text{sen}(x_1) - \text{cos}(x_1) + 2\text{sen}(x_2) - 0,5\text{cos}(x_2)))^2, \\ f_2(x) &= (x_1 + 3) + (x_2 + 1), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,5\text{sen}(1) - 2\text{cos}(1) + \text{sen}(2) - 1,5\text{cos}(2), \\ a_2 &= 1,5\text{sen}(1) - \text{cos}(1) + 2\text{sen}(2) - 0,5\text{cos}(2). \end{aligned}$$

Problema 5.10.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 3(x_1 - 2)^2 + 5(x_2 + 1)^2 \end{bmatrix}.$$

Para cada problema consideramos tres conjuntos de puntos iniciales generados aleatoriamente; uno de 10 puntos en una región circular de radio 1 centrada en 0, a la que la denominamos “chica”; uno de 10 puntos en una región circular de radio 10 centrada en 0, a la que la denominamos “mediana”; y uno de 10 puntos en una región circular de radio 100 centrada en 0, a la que la denominamos “grande”.

Los resultados de las pruebas se encuentran detallados en las tablas 5.1a, 5.1b y 5.1c.

Por otra parte consideramos el siguiente problema 5.11 de dimensión variable, para el cual obtuvimos los resultados de las tablas 5.2a, 5.2b y 5.2c

Prob.	Cant. It.	No. éxitos	Prob.	Cant. It.	No. éxitos
5.1	2,0	10	5.1	3,6	10
5.2	2,4	10	5.2	2,2	10
5.3	18,8	10	5.3	21,1	10
5.4	7,9	10	5.4	17,1	10
5.5	1,4	10	5.5	1,8	10
5.6	5,1	10	5.6	6,9	10
5.7	1,4	10	5.7	3,3	10
5.8	5,7	10	5.8	1,1	10
5.9	6,9	10	5.9	7,1	10
5.10	2,8	10	5.10	3,5	10

(a) Región chica.

(b) Región mediana.

Prob.	Cant. It.	No. éxitos
5.1	6,4	10
5.2	18,8	10
5.3	28,8	10
5.4	20,2	10
5.5	1,2	10
5.6	5,7	10
5.7	5,3	10
5.8	1,1	10
5.9	7,9	10
5.10	5,9	10

(c) Región grande.

Cuadro 5.1: Resultados para problemas de dimensión fija.

Dimensión	Cant. It.	No. éxitos	Dimensión	Cant. It.	No. éxitos
5	3,0	1	5	7,0	2
10	6,2	9	10	14,2	6
50	3,0	10	50	10,6	10
100	6,1	10	100	12,2	10
200	8,2	10	200	13,0	10

(a) Región chica.

(b) Región mediana.

Dimensión	Cant. It.	No. éxitos
5	15,8	5
10	28,0	3
50	30,6	9
100	36,4	10
200	33,6	10

(c) Región grande.

Cuadro 5.2: Resultados para el problema 5.11 de dimensión variable.

Problema 5.11. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix},$$

donde

$$f_1(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i(x_i - i)^4,$$

$$f_2(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i n\right) + \|x\|^2,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i(n-i+1)\exp(-x_i),$$

Resumiendo, se han corrido un total de 590 problemas.

A su vez, en el gráfico 5.1, se puede observar el desempeño del algoritmo para cada una de las regiones consideradas.

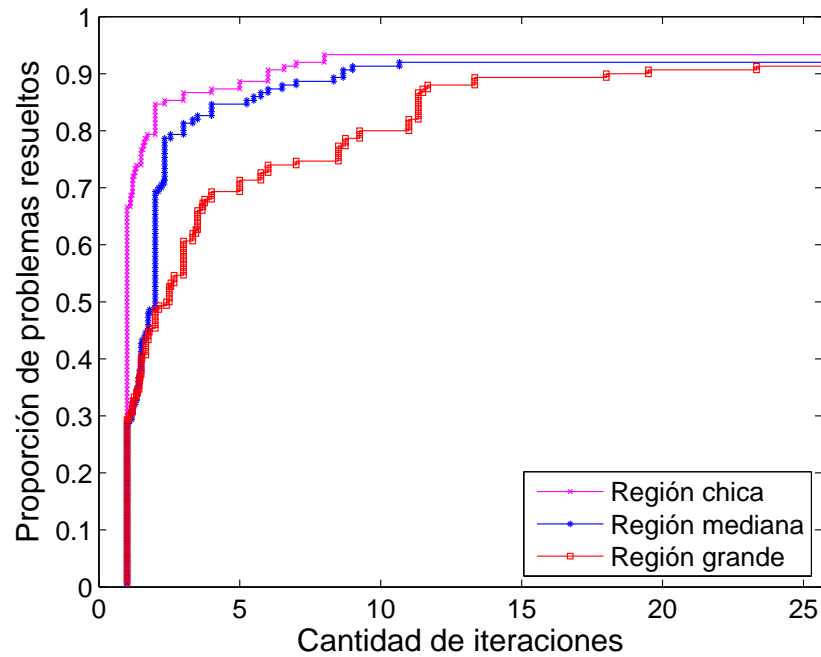


Figura 5.1: Perfil de desempeño del algoritmo según la ubicación del punto inicial.

5.2. Análisis de resultados

En las tablas 5.1a, 5.1b, 5.1c, 5.2a, 5.2b y 5.2c podemos observar, por problema y por dimensión, la cantidad de pruebas exitosas y el promedio de iteraciones para cada caso. Es importante señalar que para la mayoría de las pruebas hechas al momento de resolver el subproblema 5.1, ALGENCAN tuvo resultados exitosos, es decir: alcanzó las tolerancias indicadas dentro

de la cantidad de iteraciones y evaluaciones de función admitidas. Pero la resolución no fue exitosa para todos los casos. Se observaron 3 tipos de errores que llevaron a ALGENCAN a detenerse sin obtener convergencia:

- Se alcanzó el máximo de iteraciones externas.
- No se observó progreso en la factibilidad.
- Se observó crecimiento excesivo de los parámetros de penalización.

Sin embargo no hay evidencias claras de que estos errores hayan sido determinantes para la convergencia ya que, como se ve en el gráfico 5.2, la mayoría de las pruebas convergieron, e incluso la mayoría de las pruebas que presentaron errores de ALGENCAN convergieron.

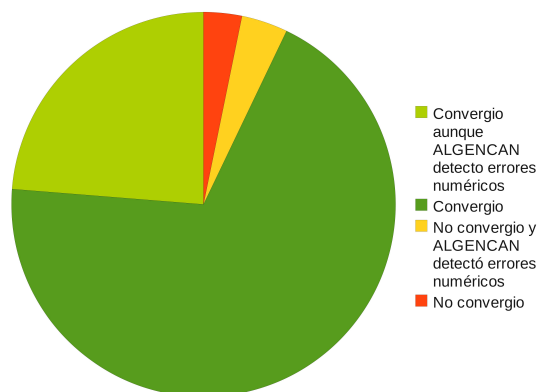


Figura 5.2: Proporción de pruebas para las que se observaron convergencia y errores numéricos detectados por ALGENCAN en el subproblema.

En todos los problemas considerados observamos que al algoritmo ha alcanzado la condición de convergencia en un número reducido de iteraciones.

Los problemas 5.8, 5.2 y 5.5, han sido los de más rápida resolución, aún tratándose de problemas no convexos. Esto se atribuye a los conflictos entre las funciones y al carácter localmente convexo de los mismos.

El problema 5.3 resultó ser uno de los que más iteraciones requirieron para su resolución. Esto puede atribuirse a la no convexidad, sin embargo, su mayor inconveniente consiste en que permite descenso de ambas funciones simultáneamente mientras se aproxima a la frontera Pareto, lo cual provocó que el algoritmo realice muchos iterados antes de que se satisfaga la condición de corte.

Otro de los problemas que requirieron de muchas iteraciones fue 5.4 a pesar de ser convexo. La mayor dificultad que ha presentado para puntos lejanos al origen nos dan indicios de que la dificultad de este problema radica en que las superficies de las funciones objetivo tienen muy poca pendiente cerca de esos puntos iniciales.

Por otro lado los resultados hallados para el problema 5.11 muestran un desempeño para nuestro algoritmo comparable con el método presentado [24] y ligeramente mejor que el de [51].

Asimismo, observando el gráfico 5.1 podemos ver que el algoritmo ha tenido una tasa de éxito similar en cada una de las regiones en que se consideraron puntos iniciales. La mayor rapidez para resolver problemas con puntos iniciales en la región chica la atribuimos al hecho de que algunos problemas tenían soluciones próximas a 0.

Conclusiones y trabajos futuros

Se desarrolló un algoritmo para problemas de optimización multiobjetivo sin restricciones dotado de una estrategia de globalización de región de confianza. Dicho algoritmo está basado en la aproximación de las funciones objetivo mediante modelos cuadráticos de las mismas, lo cual conduce a denominarlo de tipo Newton. Se probó la convergencia global del método y se demostró un orden de convergencia local q -cuadrático.

En las pruebas numéricas realizadas se observaron buenos resultados, obteniéndose convergencia en más del 94% de las pruebas y con un número bajo de iteraciones.

Continuando con esta línea de investigación planeamos:

1. Desarrollar un método específico para resolver el subproblema en forma eficiente y no depender de subrutinas para problemas de optimización con restricciones como ALGENCAN.
2. Extender el método de modo tal de poder abordar problemas con restricciones.
3. Analizar la posibilidad de considerar modelos con aproximaciones secantes de las matrices Hessianas.

Actualmente, hemos comenzado el desarrollo del último ítem [14]. Dado que una de las principales ventajas de los métodos secantes es el menor costo computacional en la evaluación, debido a no requerir el cálculo de las matrices Hessianas, en el caso multiobjetivo resulta muy auspiciosa esta ventaja, pues el ahorro computacional se ve multiplicado por la cantidad de funciones objetivo.

Bibliografía

- [1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt. On Augmented Lagrangian Methods with General Lower-Level Constraints. *SIAM J. on Optimization*, 18(4):1286–1309, November 2007.
- [2] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt. Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification. *Math. Program.*, 111(1):5–32, June 2007.
- [3] Roberto Andreani, Gabriel Haeser, MaríaLaura Schuverdt, and Paulo J.S. Silva. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming*, 135:255–273, 2012.
- [4] A. Arbel. An interior multiobjective linear programming algorithm. *Computers & Operations Research*, (20):723–735, 1993.
- [5] G.A. Ashry. On globally convergent multi-objective optimization. *Applied mathematics and computation.*, 183(183):209–216, 2006.
- [6] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, and C.M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, 2 edition, 1993.

- [7] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1999.
- [8] D. Bertsekas. *Convex analysis and optimization*. Athenas Scientific, 2003.
- [9] G. Bigi. *Optimality and Lagrangian Regularity in Vector Optimization*. PhD thesis, Scuola di Dottorato-Università di Pisa, Pisa, Italy, 1999.
- [10] G. Bigi and M. Pappalardo. Regularity conditions in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102:83–96, 1999.
- [11] E. G. Birgin and J. M. Martínez. Structured minimal-memory inexact quasi-Newton method and secant preconditioners for augmented Lagrangian optimization. *Comput. Optim. Appl.*, 39(1):1–16, January 2008.
- [12] E. Borel. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173:1304–1308, 1921.
- [13] R. Byrd, R. Schnabel, and G. Shultz. A Trust Region Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(5):1152–1170, 1987.
- [14] G. A. Carrizo, P. A. Lotito, and M. C. Maciel. Método quasi-Newton para optimización multiobjetivo. *En preparación*.
- [15] A.R. Conn, N.I.M. Gould, and P.L. Toint. *Trust Region*. MPS-SIAM Philadelphia, 2000.

- [16] A. L. Custódio, J. F. A. Madeira, A. Ismael F. Vaz, and Luís N. Vicente. Direct Multisearch for Multiobjective Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 21(3):1109–1140, 2011.
- [17] N.O. Da Cunha and E. Polak. Constrained minimization under vector-valued criteria in finite dimensional spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 19(1):103–124, 1967.
- [18] I. Das and J.E. Dennis. Normal-boundary intersection: a new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM J. Optimization*, 8:631–657, 1998.
- [19] J.E. Dennis and R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Nonlinear Equations*. SIAM, 1996.
- [20] F.Y. Edgeworth. *Mathematical Physics: an Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. K. Paul, 1881.
- [21] J.P. Evans and R.E. Steuer. A Revised Simplex Method for Multiple Objective Programs. *Mathematical Programming*, 5(1):54–72, 1973.
- [22] R. Fletcher. *Practical methods in optimization*. Wiley, 2000.
- [23] J. Fliege and Svaite B.F. Steepest descent method for multicriteria optimization. *Mathematical methods of operations research*, 51(3):479–494, 2000.
- [24] J. Fliege, L.M. Graña Drummond, and B.F. Svaite. Newton’s method for multiobjective optimization. *SIAM Journal optimization*, 20(2):602–626, 2009.

- [25] X. Gandibleux. *Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliographic Surveys*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, 2002.
- [26] W. Gharibi and Y. Xia. A Dual Approach for Solving Nonlinear Infinite-Norm Minimization Problems with Applications in Separable Cases. *Numerical Mathematics a Journal of Chinnese universities english series*, 3(16), 2007.
- [27] S.M. Goldfedt, R.E. Quandt, and H.F. Trotter. Maximization by quadratic hill-climbing. *Econometrica*, (34):541–551, 1966.
- [28] R.E. Griffith and R.A. Stewart. A nonlinear programming technique for the optimization of continuous processing systems. *Management Science*, (7):379–392, 1961.
- [29] L. Grippo, F. Lapariello, and S. Lucidi. A nonmonotone line search technique for Newton’s method. *SIAM journal numerical analysis*, 23:707–716, 1986.
- [30] Y.Y. Haimes, L.S. Lasdon, and D.A. Wismer. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1:296–297, 1971.
- [31] J. Jahn. *Vector optimization*. Springer, 2004.
- [32] L.V. Kantorovich and G.E. Forsythe. *Functional analysis and applied mathematics*. NBS report. National Bureau of Standards, 1952.

- [33] W. Karush. Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. *M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.*, 1939.
- [34] H.W. Kuhn and A.W. Tucker. Nonlinear Programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492, 1951.
- [35] K. Levenberg. A method for solution of certain problem in least squares. *Quarterly Journal on Applied Mathematics*, (2):164–168, 1944.
- [36] Shu Lu. Relation between the constant rank and the relaxed constant rank constraint qualifications. *Optimization*, 61(5):555–566, 2012.
- [37] María C. Maciel, Sandra A. Santos, and Graciela N. Sottosanto. On Second-Order Optimality Conditions for Vector Optimization: Addendum. *Journal of Optimization Theory and Applications*, pages 1–6, 2012.
- [38] M.C. Maciel, S.A. Santos, and G.N. Sottosanto. On regularity conditions in differentiable vector optimization revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 142:385–398, 2009.
- [39] A.A.K. Majumdar. Optimality conditions in differentiable multiobjective programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 92:419–427, 1997.
- [40] M.M. Mäkelä and P. Neittaanmäki. *Nonsmooth optimization: analysis and algorithms with applications to optimal control*. World Scientific Publishing Co., 1992.

- [41] I. Marusciac. On Fritz John type optimality criterion in multi-objective programming. *Revue d'Analyse Numérique et Théorie de l'Approximation*, 11:109–114, 1982.
- [42] A. Messac, A. Ismail-Yahaya, and C.A. Mattson. The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier. *Struct Multidisc Optim*, pages 86–98, 2003.
- [43] K.M. Miettinen. *Nonlinear multiobjective optimization*. Kluwer academic publisher, 2008.
- [44] K.M. Miettinen and M.M. Mäkelä. Interactive Bundle-based method for nondifferentiable multiobjective optimization: NIMBUS. *Optimization*, 34:231–246, 1995.
- [45] K.M. Miettinen and M.M. Mäkelä. Theoretical and computational comparison of multiobjective optimization methods NIMBUS and RD. *University of Jyväskylä, Department of Mathematics, Laboratory of science and computing.*, 5/1998:237–252, 1998.
- [46] L. Minchenko and S. Stakhovski. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization*, 60(4):429–440, 2011.
- [47] J.J. Moré. Recent developments in algorithms and software for trust region methods. In A. Bachem, M Grotchel, and B. Korte, editors, *Mathematical Programming: The State of the Art*, pages 258–287. Springer Verlag, 1983.

- [48] D.D. Morrison. Methods for nonlinear least squares problems and convergence proofs. *Proceedings of the Seminar on Tracking Programs and Orbit Determination*, 1-9.
- [49] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 2006.
- [50] L. Qi and Z. Wei. On the Constant Positive Linear Dependence Condition and Its Application to SQP Methods. *SIAM Journal on Optimization*, 10(4):963–981, 2000.
- [51] S. Qu, M. Goh, and B. Liang. Trust region methods for solving multiobjective optimisation. *Optimization Methods and Software*, DOI: 10.1080/10556788.2012.660483, 2012.
- [52] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1996.
- [53] C.P. Simon. Scalar and vector maximization: Calculus and techniques with economics applications. *Studies in mathematical economics*, 25:62–159, 1986.
- [54] M. Siotani. Some applications of Loewner’s ordering on symmetric matrices. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 19:245–259, 1967. 10.1007/BF02911678.
- [55] D.C. Sorensen. Newton’s method with a model trust region modification. *SIAM journal numerical analysis*, 19(2):409–426, 1982.
- [56] Claudio Javier Tablada. *Aproximación numérica equiespaciada de la variedad y el frente de Pareto para problemas de optimización multi-*

- objetivo*. PhD thesis, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina, 2011.
- [57] J. von Neumann. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, (100):295–320, 1928.
- [58] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [59] S. Wang. Algorithms for multiobjective and nonsmooth optimization. *Methods of operations research*, 58(58):131–142, 1989.
- [60] S. Wang. A second-order necessary and sufficient conditions in multi-objective programming. *Numerical functional analysis and applications*, 12(1-2):237–252, 1991.
- [61] M. Zeleny. *Linear multiobjective programming*. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems 95. Springer-Verlag, 1974.
- [62] X. Zhou, F.S. Mokhtarian, and S. Zlobec. A simple constraint qualification in convex programming. *Mathematical Programming*, 61:385–397, 1993.

Anexos

Anexo A

Demostración auxiliar del

Lema 4.1

En este anexo se presenta una prueba auxiliar al Lema 4.1. En el contexto de dicho lema se afirma que la familia $\{\varphi_{x,j}, \psi_{x,j}\}_{x \in W, j=1, \dots, m}$ con $W \subset \mathbb{R}^n$ es equicontinua, donde

$$\varphi_{x,i} : W \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_{x,i}(z) = \nabla f_i(z)^T s(x) + \frac{1}{2} s(x)^T \nabla^2 f_i(z) s(x)$$

y

$$\psi_{x,i} : W \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi_{x,i}(z) = \nabla f_i(z)^T s(x).$$

A continuación se prueba tal afirmación.

Debido a que $\nabla^2 f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\nabla f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ son continuas para

$j = 1, \dots, m$, sobre W son uniformemente continuas, ya que W es compacto.

Luego $\{\nabla^2 f_j\}_{j=1, \dots, m}$, $\{\nabla f_j\}_{j=1, \dots, m}$, son dos familias de funciones uniformemente equicontinuas, por ser finitas.

Luego dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall x, y \in W$ tales que $\|x - y\| < \delta_1$ se satisface

$$\|\nabla^2 f_j(x) - \nabla^2 f_j(y)\| < \frac{\epsilon}{\Delta^2}, \quad (\text{A.1})$$

para $j = 1, \dots, m$.

Además $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\forall x, y \in W$ tales que $\|x - y\| < \delta_2$ se satisface

$$\|\nabla f_j(x) - \nabla f_j(y)\| < \frac{\epsilon}{2\Delta}, \quad (\text{A.2})$$

para $j = 1, \dots, m$.

Si tomamos

$$\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{\epsilon}{2\kappa\Delta} \right\},$$

y $z, y \in W$ tales que $\|z - y\| < \delta$, tenemos que, para $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{x,i}(z) - \varphi_{x,i}(y)\| &= \left\| \nabla f_i(z)^T s(x) + \frac{1}{2} s(x)^T \nabla^2 f_i(z) s(x) \right. \\ &\quad \left. - \left(\nabla f_i(y)^T s(x) + \frac{1}{2} s(x)^T \nabla^2 f_i(y) s(x) \right) \right\| \\ &= \left\| (\nabla f_i(z) - \nabla f_i(y))^T s(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} s(x)^T (\nabla^2 f_i(z) - \nabla^2 f_i(y)) s(x) \right\| \\ &= \|\nabla f_i(z) - \nabla f_i(y)\| \|s(x)\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \|s(x)\|^2 \|\nabla^2 f_i(z) - \nabla^2 f_i(y)\|. \end{aligned}$$

Luego aplicamos A.1 y A.2, y que $\|s\| \leq \Delta$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{x,i}(z) - \varphi_{x,i}(y)\| &= \|\nabla f_i(z) - \nabla f_i(y)\| \|s(x)\| \\
&\quad + \frac{1}{2} \|s(x)\|^2 \|\nabla^2 f_i(z) - \nabla^2 f_i(y)\| \\
&< \frac{\epsilon}{2\Delta} \Delta + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{\epsilon}{\Delta^2}. \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|\psi_{x,i}(z) - \psi_{x,i}(y)\| &= \|\nabla f_i(z)^T s(x) - \nabla f_i(y)^T s(x)\| \\
&\leq \|\nabla f_i(z) - \nabla f_i(y)\| \|s(x)\|.
\end{aligned}$$

Si aplicamos A.2

$$\begin{aligned}
\|\psi_{x,i}(z) - \psi_{x,i}(y)\| &= \|\nabla f_i(z)^T s(x) - \nabla f_i(y)^T s(x)\| \\
&< \frac{\epsilon}{2\Delta} \Delta \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Con lo cual probamos que $\{\varphi_{x,j}, \psi_{x,j}\}_{x \in W, j=1, \dots, m}$ es una familia equicontinua de funciones.

Anexo B

Ejemplo de subproblema

Consideraremos un MOP con un punto inicial y analizaremos un subproblema y su solución para poder observarlos gráficamente.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}(x_1) + x_2^2 + 10x_1 \\ x_1 + \cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

Si consideramos $x_0 = [1, 1]^T$ podemos graficar las funciones en un entorno del punto (corresponden a los gráficos en degradé de colores de las figuras B.1 y B.2).

Luego el subproblema es:

$$\begin{aligned}
& \underset{s,a}{\text{mín}} \quad t \\
& q_1(s) - t \leq 0 \\
& q_2(s) - t \leq 0 \\
& l_1(s) - t \leq 0 \\
& l_2(s) - t \leq 0 \\
& \|s\| \leq \Delta \\
& (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Donde

$$\begin{aligned}
l_1(s) &= (10,540302 \ 2) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\
l_2(s) &= (1 \ -0,8414710) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\
q_1(s) &= (10,540302 \ 2) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (s_1 \ s_2) \begin{bmatrix} -0,8414710 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$q_2(s) = (1 \ -0,8414710) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (s_1 \ s_2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,5403023 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix},$$

son los modelos cuadráticos y lineales de las funciones objetivo desplazados al origen.

En los gráficos B.1 y B.2 podemos ver las aproximaciones de cada mo-

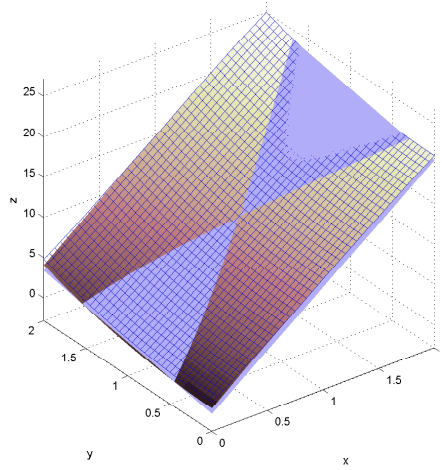


Figura B.1: Función f_1 y sus aproximaciones l_1 y q_1 , alrededor de x_0 .

delo a cada función objetivo. En tales gráficos las superficies de color liso corresponden a los modelos lineales, las mallas corresponden a los modelos cuadráticos y las que tienen degradé de colores son las funciones objetivo.

Luego graficamos las restricciones del subproblema B.1 asociadas a las funciones objetivo en la figura B.3.

Es sabido que el subproblema B.1 es equivalente a un problema no diferenciable; el subproblema no diferenciable para nuestro ejemplo consiste en hallar el mínimo de la función

$$f_{x^k}(d) = \max \{q_1(s), q_2(s), l_1(s), l_2(s)\},$$

en un entorno de radio Δ .

En la figura B.4 podemos ver dicha función y en B.5 se muestra la solución del subproblema en función del radio de la región de confianza Δ . Es

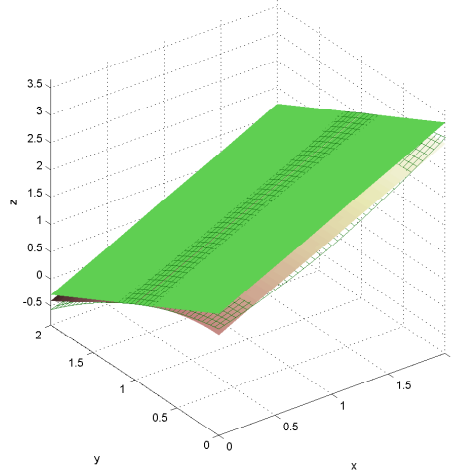


Figura B.2: Función f_2 y sus aproximaciones l_2 y q_2 , alrededor de x_0 .

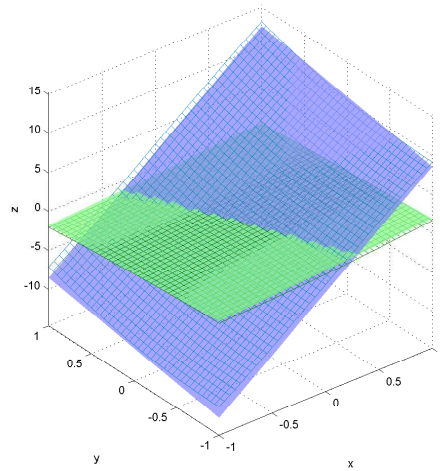


Figura B.3: Restricciones del subproblema.

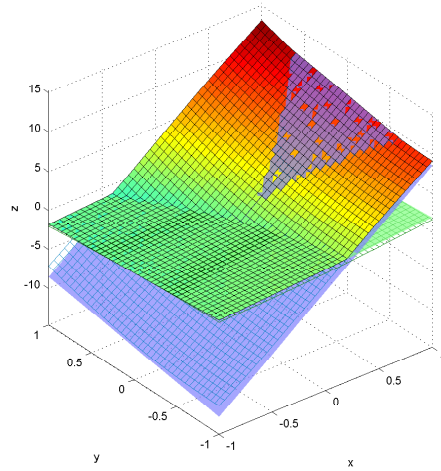


Figura B.4: Función objetivo no diferenciable.

importante observar que en la solución del subproblema no es necesariamente única al no ser convexo.

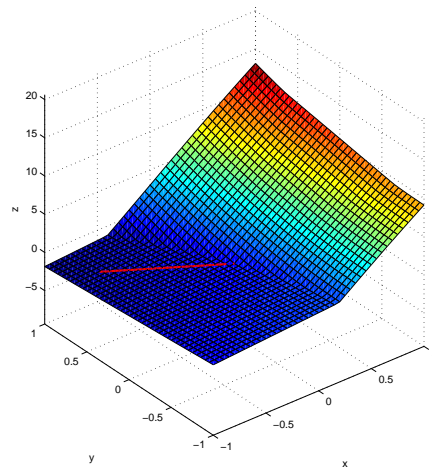


Figura B.5: Solución del subproblema.