Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Un estudio algebraico y topológico en variedades de álgebras de De Morgan con operadores

Aldo Figallo Orellano

Bahía Blanca **Argentina**

2014

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática durante el período comprendido entre marzo de 2008 y junio de 2014, bajo la dirección de la Dra. Alicia N. Ziliani, Profesora Asociada.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a las personas que me apoyaron a lo largo de mis años de estudios.

En primer lugar, a mi directora de tesis Dra. Alicia Ziliani por su guía, sugerencias y correcciones a lo largo del desarrollo de toda la tesis. Sus conocimientos transmitidos contribuyeron de manera fundamental a mi formación.

A mi profesora de topología en mi carrera de grado, Lic. Inés Pascual quien con sus conocimientos en representaciones topólogicas me permitieron profundizar los capítulos IV y V. Por sus sugerencias y correcciones es que la considero la Co-directora de esta tesis.

A mi esposa y compañera, Karina, por su incondicional apoyo a largo de nuestros años de vida juntos.

Introducción

En los años 40, Tarski introdujo las *álgebras cilíndricas* con el objeto de proveer de un aparato algebraico para el estudio del cálculo de predicados clásico (o *lógica de primer orden*). Estas ideas se plasmaron en los trabajos de Chin y Tarski (1948), Jónsson y Tarski (1951) y Tarski y Thompson (1952) (ver por ejemplo [41]). Posteriormente, Halmos entra en contacto con las álgebras cilíndricas en distintos seminarios dictados por Tarski y en 1956, publica su primer trabajo sobre *álgebras de Boole monádicas* (o *álgebras monádicas*), que son álgebras cilíndricas de dimensión uno. Las mismas son una contraparte algebraica del cálculo de predicados de primer orden donde solo figura una variable proposicional. Los importantes trabajos de Halmos proveyeron de una herramienta fundamental en el estudio de la teoría de la cuantificación donde las representaciones topológicas juegan un rol muy importante. En 1968, A. Diego y R. Panzone ([20]), estudiando cierto tipo de problemas relacionados con la teoría de probabilidades, consideraron las álgebras de Boole con dos cuantificadores que conmutan, las mismas resultan ser las álgebras cilíndricas de dimensión dos libre de elementos diagonales (o Df_2-álgebras). Más recientemente, estas álgebras fueron estudiadas por N. Bezhanishvili ([4]) y M. Figallo ([31]), entre otros. En [4] el autor probó que el retículo de las subvariedades de la variedad de las Df_2-álgebras tiene el cardinal del *continuo*. Mientras que, es bien sabido que el retículo de las subvariedades de la variedad de las álgebras de Boole monádicas forma una cadena numerable. Estas últimas afirmaciones muestran que al agregar cuantificadores a una estructura algebraica las álgebras resultantes son más complejas.

Por otra parte, en 1974, A. Monteiro y O. Varsavsky ([58]) introdujeron el concepto de álgebras de Heyting monádicas, donde los cuantificadores no están relacionados entre sí, es decir no es posible definir uno de ellos a partir del otro, como sucede en las álgebras monádicas donde $\exists x = \sim \forall \sim x$ y por lo tanto, debieron equipar a las álgebras de Heyting con los dos cuantificadores. Sin embargo, existen numerosos ejemplos donde solo basta equipar a la estructura algebraica con un cuantificador, como son los casos de las MV-álgebras monádicas, estudiadas por Rutledge ([70]) en 1959 y por Lattanzi ([45]) en 2000, las álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas consideradas por Abad ([1]) en 1987, las álgebras de De Morgan monádicas investigadas por Petrovich ([62]) en 1997 y las álgebras tetravalentes modales monádicas, estudiadas por Ziliani ([74]) en 2001. Cabe destacar que todos los ejemplos citados anteriormente corresponden a estructuras algebraicas cuyo soporte es un álgebra de De Morgan especial y esto es justamente lo que permite que los cuantificadores puedan estar interdefinidos. Sin embargo, debemos señalar que hay otras clases de álgebras donde esto también es posible, por ejemplo, tal es el caso de las álgebras de Tarski monádicas o las álgebras Implicativas de Lukasiewicz monádicas introducidas y estudiadas por A. V. Figallo en 1990 ([22, 23]).

Por otra parte, en los años 50, Moisil ([53]) introdujo las álgebras de Boole simétricas para estudiar la teoría de circuitos y ellas fueron estudiadas por A. Monteiro en [57]. Posteriormente, este último autor estudió las álgebras de Boole cíclicas ([55]), es decir álgebras de Boole con un automorfismo de período k. Por otra parte, en 1975, Lee y Keren-Zvi ([47]) introdujeron las álgebras de Boole generalizadas en las cuales se extiende la operación de complementación a una operación más general y definen además una operación que es un automorfismo de período k. En ese artículo probaron que este tipo de operaciones puede ser ventajosamente aplicado al diseño de sistemas digitales. Más tarde, ideas similares fueron abordadas por diferentes autores y en distintas clases de álgebras, en particular para las TM-álgebras, las álgebras de Łukasiewicz de orden n y las MV-álgebras n-valentes. Cabe destacar que en las dos últimas variedades mencionadas, en el caso finito, a un álgebra k-cíclica se le puede definir un cuantificador especial y vice versa (ver [1, 45]).

Las consideraciones precedentes motivaron el estudio de los temas desarrollados en esta tesis. En ella definimos e investigamos nuevas clases de álgebras. Por un lado consideramos las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales (o mpM-álgebras) con operadores adicionales; más precisamente, con un automorfismo de período k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ o con un cuantificador. Cabe mencionar que en el caso finito dichos operadores no pueden interdefinirse. Por otro lado, nos interesaremos en el estudio de las MV-álgebras equipadas con dos cuantificadores que conmutan.

Resumen

El volumen que aquí presentamos esta organizado en 6 capítulos. En el primero se describen resultados conocidos que facilitarán la lectura de la tesis, el mismo no tiene pretenciones de originalidad.

El Capítulo II está organizado en siete secciones. Comenzamos señalando las motivaciones para el estudio de operadores simétricos en las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales, a las que denominamos $\mathcal{S}$-álgebras. Posteriormente, determinamos las álgebras generadoras de esta variedad y mostramos que es semisimple. A continuación, estudiamos las álgebras finitas y finitamente generadas lo que nos permitió afirmar que es una variedad localmente finita. También determinamos la estructura de las $\mathcal{S}$-álgebras libres con n, $(n < \omega)$ generadores libres y exhibimos el número de elementos de la misma en función del número de generadores. Completamos el capítulo determinando las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de epimorfismos entre $\mathcal{S}$-álgebras finitas. Para ello, debimos realizar un estudio minucioso del espectro primo de las $\mathcal{S}$-álgebras, en particular, probamos que el mismo se puede descomponer como una suma cardinal especial. A partir de estos resultados contabilizamos el número de epimorfimos que es posible definir entre álgebras finitas y mostramos dicho número en casos particulares como

las mpM-álgebras, las álgebras de Lukasiewicz-Moisil de orden 3 y las álgebras de Boole. Finalizamos el capítulo describiendo el retículo de las subvariedades de la variedad de las $\mathcal{S}$-álgebras.

En el Capítulo III, introducimos y estudiamos las mpM-álgebras enriquecidas con un automorfismo de periodo k, donde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ a las que llamamos $\mathcal{C}_k$-álgebras. Los resultados de este capítulo son la generalización natural de los obtenidos en el capítulo anterior para de las $\mathcal{S}$-álgebras, que son el caso $k = 2$. Comenzamos presentando las propiedades más importantes de esta nueva estructura. Posteriormente, establecemos una correspondencia entre conguencias y c-filtros, (i.e.: ciertos filtros especiales del álgebra) lo que permite determinar la familia de ultrafiltros asociada a cada c-filtro maxinal. Por otra parte, determinamos las condiciones necesarias y suficientes para que una congruencia sea maximal, lo que fue posible considerando una nueva operación binaria, la implicación cíclica, y caracterizando a las congruencias por medio de los sistemas deductivos asociados a está implicación. Además, las propiedades que verifica esta implicación nos permitió mostrar que la variedad de las $\mathcal{C}_k$-álgebras es semisimple. Por otra parte, estudiando el espectro primo de una $\mathcal{C}_k$-álgebra y utilizando técnicas diferentes al caso $k = 2$, ya que la estructura de las $\mathcal{C}_k$-álgebras es mucho más complejo que de las $\mathcal{S}$-álgebras, determinamos las álgebras generadoras de la variedad. También, mostramos que la variedad es finitamente generada y localmente finita. Por último, determinamos el cardinal de la $\mathcal{C}_k$-álgebra libre con un conjunto de n ($n < \omega$) generadores libres en función de los parámetros k y n y verificamos este resultado para los casos $k = 1$ y $k = 2$ mostrando que ellos conincinden con los ya obtenidos en [61] y en el Capítulo II de esta tesis, respectivamente.

En el Capítulo IV, definimos las mpM-álgebras monádicas (o $\mathcal{M}$-álgebras). A cada álgebra de esta nueva clase ecuacional, la tratamos como un par formado por una mpM-álgebra y un cuantificador existencial. En primer lugar, exhibimos propiedades y mostramos la relación existente entre estas álgebras y otras estructuras conocidas. Además, a partir de una familia especial de subálgebras de una mpM-álgebra determinamos como obtener todos los cuantificadores que la transforman en una $\mathcal{M}$-álgebra. A continuación, iniciamos un estudio topológico de las mismas, asociando a cada $\mathcal{M}$-álgebra un espacio compacto, Hausdorff y totalmente disconexo en el orden, enriquecido con una relación de equivalencia, al estilo de las dualidades de Halmos-Priestley. Esta primera representación nos permitió realizar un estudio exhaustivo de las congruencias. En particular, mostramos que existe un isomorfismo entre el retículo de ciertos subconjuntos abiertos, cerrados e involutivos del espacio asociado a una $\mathcal{M}$-álgebra y el retículo de las $\mathcal{M}-$congruencias principales de la misma. Además, probamos que las congruencias principales y booleanas coinciden y en el caso finito determinamos su cardinal. Luego, mostramos que las congruencias principales quedan también determinadas por ciertos filtros especiales del álgebra, completando el estudio de las mismas. Finalmente, terminamos el capítulo señalando que, a diferencia de lo que ocurre en otras clases de álgebras, aquí, no siempre, es posible definir la estructura monádica partir de la k-cíclica.

En el Capítulo V, continuamos el estudio de las $\mathcal{M}$-álgebras y presentamos una segunda representación topológica la que nos permitió determinar las álgebras generadoras (finitas o infinitas) de la variedad. Primeramente, profundizamos el estudio del espectro primo de las $\mathcal{M}$-álgebras, lo que nos permitió obtener una nueva representación topológica para estas álgebras considerando la categoría de los sm-espacios y las sm-funciones. Dicha dualidad cuenta con la ventaja de brindar más información que la primera, sobre el efecto de la relación de equivalencia en el espacio. Por otro lado, probamos que las condiciones que se le piden a los q-espacios (ver [9]) resultan adecuadas para que el espacio cociente sea un espacio de Priestley con la topología de identificación y que la proyección canónica sea una función continua que preserva el orden. Además, mostramos que este resultado se tralada a las espacios de De Morgan monádicos ([62, p.84]) y a los sm-espacios, lo que es fundamental para el estudio subsiguiente. Por otra parte, utilizamos conceptos de topología general tales como convergencia y acomulación de redes (suceciones de Moore-Smith) y el teorema de extensión de funciones continuas para espacios T_3, entre otros, para determinar las $\mathcal{M}$-álgebras generadoras de cardinalidad arbitraria. Finalmente, teniendo en cuenta algunos de los resultados precedentes, analizamos la relación entre las álgebras de De Morgan monádicas ([62]) y las álgebras tetravalentes modales monádicas ([74]). En particular, probamos que toda álgebra tetravalente modal equipada con un cuantificador especial es álgebras de De Morgan monádicas una simple. Luego, estamos en condiciones de decir que el retículo de las subvariedades de álgebras de De Morgan monádicas es mucho más complejo que el retículo de las subvariedades de los Q-retículos distributivos acotados introducidos por Cignoli en [9].

Finalmente, en el Capítulo VI introducimos las MV-álgebras con dos cuantificadores que conmutan las cuales, como ya dijimos, son una generalización natural de las *álgebras cilíndricas de dimensión dos libre de elementos diagonales*. El tramtamiento de estas álgebras esta dado en términos de implicación y negación. Este hecho nos permite simplificar los resultados establecidos por Di Nola y Grigolia [18] en cuanto a la caracterización de los cuantificadores por medio de subálgebras *relativamente* completas especiales. Además, probamos que esta nueva variedad tiene la propiedad de extensión de congruencias y que es a congruencias distributivas. Por otra parte, desarollamos una dualidad topológica para estas álgebras y como aplicación de la misma, caracterizamos a las congruencias por medio de ciertos subconjuntos cerrados del espacio asociado a un álgebra. Además, estudiamos la variedad generada por cadenas de longitud $n+1$ $(n < \omega)$y, entre otras resultados, probamos que se trata de una subvariedad semisimple y caracterizamos sus miembros subdirectamente irreducibles. Finalmente, a partir de un álgebra funcional especial determinamos un conjunto importante de las álgebras simples y exhibimos la totalidad de ellas en el caso finito.

Abstract

This volume is organized in six chapters. In Chapter I all the results presented are well-known, but they were included either to facilitate the reading or to fix the notations needed throughout the remainder chapters and it has no pretensions of originality.

Chapter II is organized in seven sections. We start pointing out the motivations for the study of symmetric operators in modal pseudocomplemented De Morgan algebras, which we called $\mathcal{S}$-algebras. Subsequently, we determine the generating algebras of this variety and we show that it is semisimple. Furthermore, we study the finite and the finitely generated $\mathcal{S}$-algebras which allows us to assert that this variety is locally finite. We also determine the structure of the free $\mathcal{S}$-algebras with n ($n < \omega$) free generators and we exhibit a formula to calculate the cardinal number of these algebras in terms of the number of its free generators. On the other hand, we establish necessary and sufficient conditions for the existence of epimorphisms between finite $\mathcal{S}$-algebras. To do this, we make a thorough study of the prime spectrum of the $\mathcal{S}$-algebras. In particular, we prove that it can be decomposed as a special cardinal sum. From these results we compute the number of epimorphims which can be defined between finite algebras. In addition, we show that number in the particular cases of mpM-algebras, Lukasiewicz-Moisil algebras of order 3 and Boolean algebras. We conclude the chapter describing the lattice of subvarieties of the variety of the $\mathcal{S}$–algebras.

In Chapter III, we introduce and study the mpM-algebras enriched with an automorphism of period k, where $k \in I\!N$, $k \geq 2$. We called them $\mathcal{C}_k$-algebras. The results of this chapter are a natural generalization of those obtained in the previous chapter for $\mathcal{S}$-algebras, because they are $\mathcal{C}_k$-algebras when $k = 2$. First, we present the most important

properties of this new structure. Then, we establish a correspondence between the family of congruences and the family of c-filters (ie: certain special filters of the algebra) which allows us to determine a family of ultrafilters associated with each maxinal c-filter. Moreover, we determine necessary and sufficient conditions for a congruence to be a maximal one. This result follows by considering a new binary operation called *cyclical implication* and characterizing the congruences by means of the deductive systems associated with this implication. In addition, the properties verified by this implication allow us to show that the variety of $\mathcal{C}_k$-algebras is semisimple. On the other hand, we determine the algebras which generate this variety by applying different techniques of the ones used when $k = 2$ because the structure of $\mathcal{C}_k$-algebras is much more complex than the $\mathcal{S}$-algebras. Besides, we prove that the variety of $\mathcal{C}_k$-algebras is finitely generated and locally finite. Finally, we obtain the cardinal number of the free $\mathcal{C}_k$-algebra with a set of n $(n < \omega)$ free generators in terms of the parameters k and n and we also verify this result for the case $k = 1$ and $k = 2$, showing that they coincide with those already obtained in [61] and in Chapter II of this thesis, respectively.

Chapter IV is devoted to monadic mpM-algebras (or $\mathcal{M}$-algebras). Each algebra of this new variety is considered as a pair consisting of an mpM-algebra and an existential quantifier. First, we obtain some properties and show the relationship between these algebras and others well-known structures. Moreover, from a special family of subalgebras of an mpM-algebra we determine how to get all the quantifiers that transform it into an $\mathcal{M}$-algebra. Next, we started a topological study of this variety associating to each $\mathcal{M}$-algebra a compact, Hausdorff and totally order-disconnected topological space enriched with an equivalence relation, such as the Halmos-Priestley's dualities. This first duality allowed us to do an extensive study of the congruences. In particular, we show that there is an isomorphism between the lattice of certain open, closed and involutive subsets of the associated space of an $\mathcal{M}$-algebra and the lattice of the principal $\mathcal{M}$-congruences of it. Furthermore, we prove that the principal and Boolean congruences coincide and we calculate the number of them in the case of finite algebras. Besides, we show that the principal congruences are also determined by certain special filters of the algebra. Thus the study of the congruences is completed. Finally, we ended the chapter by noting that, unlike what happens in other classes of algebras, here it is not always possible to define the monadic structure from the k-cycle one.

In Chapter V, we continue the study of the $\mathcal{M}$-algebras and we present a second topological representation which allowed us to determine the generating algebras (finite or infinite) of this variety. First, we go in depth in the study of the prime spectrum of the $\mathcal{M}$-algebras, in order to obtain a new topological representation for these algebras considering the category of the sm-spaces and the sm-functions. This duality has the advantage of providing more information than the first on the effect of the equivalence relation in the space. On the other hand, we prove that the conditions that verify the q-spaces (see [9]) are suitable for the quotient space to be a Priestley space with the identification topology, and for the canonical projection to be a continuous function that preserves the order. Moreover, we show that this result is transferred to the monadic De Morgan spaces ([62, p.84]) and to the sm-spaces, which is fundamental for subsequent study. Furthermore, we use among others, general topological concepts as the convergence and accumulation for nets (Moore-Smith sequences) and the extension theorem for the continuous functions in T_3-spaces, in order to determine the $\mathcal{M}$-algebras of an arbitrary cardinality which generates this variety. Finally, taking into account some of the previous results, we analyzed the relationship between monadic De Morgan algebras ([62]) and monadic tetravalent modal algebras ([74]). In particular, we prove that all tetravalent modal algebra with a special quantifier is a simple monadic De Morgan algebra. Hence, we can assert that the lattice of the subvarieties of monadic De Morgan algebras is much more complex than the lattice of the subvarieties of Q-distributive lattices introduced by Cignoli in [9].

Finally, in Chapter VI we introduce the MV-algebras with two quantifiers which commute. These algebras are a natural generalization of *cylindric algebras of dimension two free of diagonal elements*. The study of them is done in terms of implication and negation. This fact allows us to simplify the results established by Di Nola and Grigolia ([18]) with respect to the characterization of quantifiers by means of special *relatively complete* subalgebras. Besides, we prove that this new variety has the congruence extension property and distributive congruences. Furthermore, we develop a topological duality for these algebras which allows us to characterize the congruences by means of certain closed subsets of the space associated with them. In addition, we study the variety generated by chains of length $n+1$ ($n<\omega$) and, among other results, we prove that it is a semisimple subvariety and we characterize their subdirectely irreducible members. Finally, from a special functional algebra we determine an important set of simple algebras and we show all of them in the finite case.

Contents

1 Capítulo I

En lo que sigue supondremos conocida la teoría de los retículos distributivos, pero el lector interesado en ampliar detalles sobre este tema puede consultar, por ejemplo [2, 6]. También daremos por conocidas las nociones básicas de álgebra universal. Sin embargo, con el objeto de facilitar la lectura del texto y además fijar las notaciones que utilizaremos, en la Sección 1.1 repasaremos aquellas nociones de álgebra universal que vamos a utilizar con cierta frecuencia. Más información sobre estos temas pueden consultarse en [8, 35].

1.1 Tópicos sobre álgebra universal y categorías

Sea A un conjunto no vacío y n un número natural. Una operación $n-$aria sobre A es cualquier función $f : A^n \longrightarrow A$, donde n es la aridad de f. Si $n = 0$, una operación 0–aria es una constante de A. Una operación finitaria sobre A es una operación $n-$aria para algún número natural n.

Un lenguaje o tipo de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman símbolos de función, tal que a cada miembro de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural n, llamado aridad de f y f se denomina símbolo de función $n-$ario.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$, le corresponde una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}$ sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama universo o soporte del álgebra $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos f en lugar de $f^{\mathcal{A}}$ y si $\mathcal{F}$ es finito, por ejemplo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$. En este caso, si n_i es la aridad de f_i para $1 \leq i \leq k$, también diremos que A es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representaremos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte A.

1.1.1 Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ se dice un homomorfismo de A en B si para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y para toda $n-$upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos

(Ho) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

Si h es inyectiva, diremos que h es una inmersión. En el caso que h es sobreyectiva, diremos que h es un epimorfismo y que $\mathcal{B}$ es una imagen homomórfica de $\mathcal{A}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{B}$ y escribiremos $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ si existe un homorfismo biyectivo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

1.1.2 Congruencias y álgebras cociente

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces diremos que θ es una congruencia sobre $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots,$ $b_n \in A$, si $a_i \,\theta\, b_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\theta\, f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

El conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotaremos por $Con(\mathcal{A})$. Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces el álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por θ que representaremos $\mathcal{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) = |f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y f es un símbolo de función $n-$aria en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. De esta definición resulta que la aplicación canónica $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $Con(\mathcal{A})$ ordenado por la relación de inclusión es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es la relación id_A identidad sobre A y cuyo último elemento es $A \times A$.

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo general no lo sea.

El retículo de las congruencias caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles del siguiente modo:

Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, $Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$ tiene primer elemento.

Es decir, $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, existe $\theta_1 \in Con(\mathcal{A})$, $\theta_1 \neq id_A$ tal que $\theta_1 \subseteq \theta$ para toda $\theta \in Con(\mathcal{A})$.

Un teorema fundamental debido a G. Birkhoff es el siguiente:

Toda álgebra con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles.

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y sólo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir id_A y $A \times A$. Además, un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple si es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.

1.1.3 Congruencias especiales

Álgebras a congruencias distributivas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias distributivas si $Con(\mathcal{A})$ es distributivo. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras es a congruencias distributivas si, y sólo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias distributivas.

Álgebras a congruencias conmutativas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias conmutativas si se verifica $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$, para toda θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathcal{A})$. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras es a congruencias conmutativas si, y sólo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias conmutativas.

Las congruencias conmutativas de un álgebra $\mathcal{A}$ pueden ser caracterizadas de la siguiente manera:

Si $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(CC1) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$,

(CC2) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$,

(CC3) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

Álgebras a congruencias débilmente regulares

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias débilmente regulares si $\mathcal{A}$ tiene una constante 1 y $|1|_\Theta = |1|_\Phi$ implica $\Theta = \Phi$ para cada Θ, $\Phi \in Con(\mathcal{A})$.

1.1.4 Álgebras libres

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{L} \in \mathcal{K}$. $\mathcal{L}$ es un álgebra que tiene a G como conjunto de generadores libres si se verifican las dos condiciones siguientes:

(AL1) $[G] = L$,

(AL2) para cada álgebra $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ y cada función $f : G \longrightarrow B$ existe un homomorfismo $h : L \longrightarrow B$ que extiende a f, esto es se verifica $h(g) = f(g)$, para todo $g \in G$.

El homomorfismo h de (AL2) es único, y si $\mathcal{L}'$ es un álgebra de $\mathcal{K}$ con un conjunto G' de generadores libres tal que existe una biyección de G en G', entonces $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$ (ver [6]).

1.1.5 Categorías

A continuación repasaremos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de categorías serán necesarias para la lectura de este trabajo. Para una mayor información sobre este tema sugerimos consultar [50] y [34].

Una categoría $\boldsymbol{C}$ está formada por:

(i) una colección $Ob(\boldsymbol{C})$ cuyos miembros son llamados objetos,

(ii) una colección $Morf(\boldsymbol{C})$ cuyos objetos son llamados morfismos,

(iii) dos operaciones $dom, cod : Morf(\boldsymbol{C}) \longrightarrow Ob(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada morfismo f dos objetos llamados dominio y codominio de f respectivamente. Si $A = dom(f)$ y $B = cod(f)$ escribiremos $f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$,

(iv) una operación $\circ : Morf(\boldsymbol{C}) \times Morf(\boldsymbol{C}) \longrightarrow Morf(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada par f, g con $dom(f) = cod(g)$ el morfismo $g \circ f$ llamado composición de f con g que tiene $dom(g \circ f) = dom(f)$ y $cod(g \circ f) = cod(g)$ y tal que se verifica la ley asociativa siguiente: para toda terna f, g, h en $Morf(\boldsymbol{C})$ tal que $cod(f) = dom(g)$ y $cod(g) = dom(h)$ entonces
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

(v) un operador $id : Ob(\boldsymbol{C}) \longrightarrow Morf(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada objeto A un morfismo $id_A : A \longrightarrow A$, llamado morfismo identidad de A tal que se verifique la siguiente ley de identidad: para todo par de morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ resulta

$$id_B \circ f = f \quad \text{y} \quad g \circ id_B = g.$$

Dada una categoría $\boldsymbol{C}$ en lo que sigue denotaremos:

(i) $\boldsymbol{C}(A, B)$ para representar la colección de todos los morfismos con dominio A y codominio B.

(ii) $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ y $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ para indicar que A es un objeto de $\boldsymbol{C}$ y que f es un monomorfismo de A en B en $\boldsymbol{C}$.

A partir de una categoría dada una manera de obtener nuevas categorías es considerando, entre otras, la categoría dual y subcategorías.

Categoría dual

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría. Llamaremos categoría dual (u opuesta) de $\boldsymbol{C}$ y la notaremos $\boldsymbol{C}^{op}$ a la categoría donde:

(i) $Ob(\boldsymbol{C}) = Ob(\boldsymbol{C}^{op})$,

(ii) para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\boldsymbol{C}$ tenemos el correspondiente morfismo $f^{op} : B \longrightarrow A$ en $\boldsymbol{C}^{op}$ tal que $cod(f^{op}) = dom(f)$ y $dom(f^{op}) = cod(f)$ y estos son los únicos morfismos en C^{op},

(iii) para todo par f^{op}, g^{op} en $Morf(\boldsymbol{C}^{op})$ tal que $dom(g^{op}) = cod(f^{op})$ se tiene:

$$g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}.$$

Subcategorías

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría. Una categoría $\boldsymbol{D}$ es una subcategoría de $\boldsymbol{C}$ si se verifica:

(i) $Ob(\boldsymbol{D}) \subseteq Ob(\boldsymbol{C})$,

(ii) para todo $A, B \in Ob(\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{D}(A, B) \subseteq \boldsymbol{C}(A, B)$,

(iii) las composiciones e identidades coinciden con las de $\boldsymbol{C}$.

Una subcategoría $\boldsymbol{D}$ de $\boldsymbol{C}$ se dice llena si, y sólo si, para todo $A, B \in Ob(\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{D}(A, B) = \boldsymbol{C}(A, B)$.

Morfismos especiales

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría y sean $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ y $D \in Ob(\boldsymbol{C})$. Diremos que:

(i) f es un monomorfismo si para todo $g, h \in \boldsymbol{C}(D, A)$ tal que $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$,

(ii) f es un epimorfismo si para todo $g, h \in \boldsymbol{C}(B, D)$ tal que $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$,

(iii) f es un isomorfismo si, y sólo si, existe un morfismo $g \in \boldsymbol{C}(B, A)$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.

Se verifica que todo isomorfismo es un epimorfismo y un monomorfismo pero la recíproca no es válida.

Funtores

Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ categorías entonces:

(i) Un funtor covariante $T : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es una correspondencia que asigna a cada $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ un objeto $T(A)$ en $\boldsymbol{D}$ y a cada morfismo $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ un morfismo de $T(f) \in \boldsymbol{D}(T(A), T(B))$ tal que :

(CO1) para todo $A \in Ob(\boldsymbol{C})$, $T(id_A) = id_{T(A)}$,

(CO2) si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$, entonces $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

(ii) Un funtor contravariante $T : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es una correspondencia que asigna a cada $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ un objeto $T(A)$ en $\boldsymbol{D}$ y a cada morfismo $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ un monomorfismo de $T(f)$ de $\boldsymbol{D}(T(B), T(A))$ tal que :

(CT1) para todo $A \in Ob(\boldsymbol{C})$, $T(id_A) = id_{T(A)}$,

(CT2) si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$, entonces $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$.

Tenemos las siguientes clases especiales de funtores:

Un funtor $T : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ se dice:

(i) lleno si para todo par $A, B \in Ob(\boldsymbol{C})$ y para todo morfismo $g \in \boldsymbol{D}(T(A), T(B))$ existe un morfismo $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ tal que $g = T(f)$.

(ii) fiel si para todo par $A, B \in Ob(\boldsymbol{C})$ y para todo par de morfismos $f, g \in \boldsymbol{C}(A, B)$ tal que $T(f) = T(g)$ en $\boldsymbol{D}(T(A), T(B))$ implica que $f = g$.

Equivalencia natural

Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ categorías y sean $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$, $G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ funtores. Una familia de morfismos $\{\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)\}_{A \in Ob(\boldsymbol{C})}$ se dice una transformación natural si para cada $h \in \boldsymbol{C}(A, B)$ se verifica que $G(h) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(h)$.

Además, F y G se dicen naturalmente equivalentes si τ_A es un isomorfismo para todo $A \in Ob(\boldsymbol{C})$.

Diremos que las categorías $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son naturalmente equivalentes si existen $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$, $G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ tales que $F \circ G$ y $G \circ F$ son naturalmente equivalentes a los funtores id_B e id_A, respectivamente.

1.1.6 Variedades de álgebras relacionadas con la tesis

A continuación daremos diversos ejemplos de álgebras que utilizaremos más adelante y también repasaremos algunas propiedades y resultados que serán necesarios para el desarrollo posterior.

1. Álgebras de Boole

Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $x \wedge x' = 0$,

(B2) $x \vee x' = 1$.

Las álgebras de Boole, introducidas por G. Boole en 1850, son los modelos algebraicos del cálculo proposicional de la lógica clásica. Para una mayor información sobre estas álgebras se pueden consultar, por ejemplo [39].

2. Retículos distributivos pseudocomplementados

Existen en la literatura numerosas generalizaciones de las álgebras de Boole en las cuales la negación es reemplazada por diversas operaciones unarias, que satisfacen algunas de las propiedades de la operación original. Una de ellas son los retículos distributivos pseudocomplementados cuyo estudio comenzó con un trabajo de V. Glivenko ([37]) en 1929.

Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, ^*, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ es un *retículo distributivo pseudocomplementado* (o $p-$*álgebra*) si $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado tal que para cada $a \in L$, el elemento a^* es el pseudocomplemento de a; i.e. $x \leq a^*$ si y sólo si $a \wedge x = 0$.

Cabe destacar que numerosos autores tales como H. Lakser y G. Grätzer ([36]) denominaron a estas álgebras $p-$*álgebras distributivas* ya que el nombre de $p-$álgebras en general, es utilizado por autores tales como H. P. Sankappanavar ([71]), T. Hecht y T. Katriňák ([40]) para las no necesariamente distributivas.

En 1949, P. Ribenboim ([67]) mostró que la clase de las $p-$álgebras constituyen una variedad. Más precisamente, probó que estas álgebras son retículos distributivos acotados con una operación unaria adicional * que verifica las siguientes identidades:

(R1) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$,

(R2) $x \wedge 0^* = x$,

(R3) $0^{**} = 0$.

Es bien conocido que en toda $p-$álgebra L se verifican las siguientes propiedades para todo $a, b \in L$:

(P1) $a \wedge a^* = a^{**} \wedge a^* = 0$,

(P2) $a \wedge b = 0$ si, y sólo si, $a \leq b^*$,

(P3) $a \leqslant a^{**}$,

(P4) $a^{***} = a^*$,

(P5) $a \wedge b = 0$ si, y sólo si, $a^{**} \wedge b = 0$,

(P6) $a \leqslant b$ implica $b^* \leqslant a^*$,

(P7) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$,

(P8) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$,

(P9) $(a^{**} \vee b^{**})^{**} = (a \vee b)^{**}$,

(P10) $(a \vee a^*)^* = 0$.

3. Álgebras de De Morgan

Un *álgebra de De Morgan* (o M*–álgebra*) es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se verifican las siguientes condiciones:

(M1) $\sim\sim x = x$,

(M2) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

En lo que sigue y por simplicidad, al álgebra de De Morgan $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ la notaremos con $(L, \sim)$.

De la definición resulta que en toda M–álgebra se verifican las siguientes propiedades:

(M3) $x \leq y$ si, y sólo si, $\sim y \leq \sim x$,

(M4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(M5) $\sim 1 = 0$.

(M6) Si $(L, \sim)$ es una M–álgebra con más de un elemento, se puede definir sobre el conjunto $X(L)$ de todos los filtros primos de L la transformación φ llamada *transformación de Birula y Rasiowa* que a cada $P \in X(L)$ le asigna $\varphi(P) = L \backslash \sim P \in X(L)$, donde $\sim P = \{\sim x : x \in P\}$ ([5]). Las dos propiedades importantes de φ son:

(φ_1) $\varphi\varphi(P) = P$, para cada $P \in X(L)$,

(φ_2) si P, $Q \in X(L)$ son tales que $P \subseteq Q$, entonces $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

La noción de álgebra de De Morgan fue estudiada por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa ([5]) y por H. Rasiowa ([66]) como un instrumento algebraico para el estudio de lógicas constructivas con negación fuerte. Estos autores dan en sus trabajos a las álgebras de De Morgan el nombre de *álgebras quasi–booleanas*.

4. Álgebras de De Morgan pseudocomplementadas

El estudio de álgebras más complejas en las cuales dos o más generalizaciones de las álgebras de Boole ocurren simultáneamente dieron origen, entre otras, a las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas.

Un *álgebra de De Morgan pseudocomplementada* es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, ^*, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tal que $\langle L, \wedge, \vee, ^*, 0, 1\rangle$ es una p–álgebra y $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan, es decir se verifican las siguientes condiciones:

(A1) $x \vee 1 = 1$,

(A2) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(A3) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

(A4) $\sim\sim x = x$,

(A5) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$,

(A6) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$,

(A7) $x \wedge 0^* = x$, donde $0 = \sim 1$,

(A8) $0^{**} = 0$.

Cabe destacar que en la definición anterior no se establece ninguna relación entre las operaciones $\sim$ y *.

En [69], A. Romanowska denominó a estas álgebras $pM-$álgebras y determinó las $pM-$álgebras subdirectamente irreducibles. Posteriormente, H. Sankappanavar [72] caracterizó, entre otros resultados, a todas subvariedades que poseen las congruencias ecuacionalmente definibles.

5. Álgebras de Łukasiewicz trivalentes

La teoría de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes fue introducida y desarrollada por Gr. Moisil [52]. A. Monteiro (ver [56, 54]) indicó una axiomática equivalente a la dada por Moisil y la que daremos a continuación es debida a L. Monteiro (ver [59]).

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ se dice un *, álgebra de Łukasiewicz trivalente* si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las identidades:

(L1) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(L2) $\sim x \wedge \nabla x = \sim x \wedge x$, (L3) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

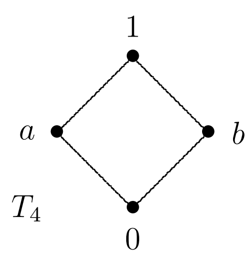
6. Álgebras tetravalentes modales

En 1978, A. Monteiro introdujo a las álgebras tetravalentes modales como una generalización de las álgebras Łukasiewicz trivalentes omitiendo la identidad ($L3$). Más precisamente,

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ es un *álgebra tetravalente modal* (o $TM-$*álgebra*), si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las identidades (L1) y (L2) indicadas anteriormente.

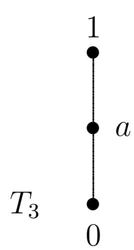
La teoría de las $TM-$álgebras ha sido desarrollada por I. Loureiro en [48, 49] y A. V. Figallo en [25, 26, 28]. J. Font y M. Rius indicaron, en la introducción del importante trabajo [32], una breve pero detallada reseña histórica sobre estas álgebras.

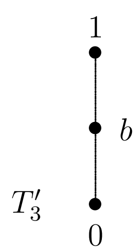
En [49], I. Loureiro demostró que si A es una $TM-$álgebra con más de un elemento, entonces existe un conjunto no vacío X tal que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{T}_4^X$, con $\mathcal{T}_4 = \langle T_4, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$, donde $T_4 = \{0, a, b, 1\}$ tiene el diagrama de Hasse indicado en la figura y $\sim, \nabla$ están definidas por medio de las siguientes tablas:

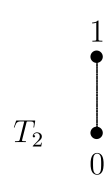


x	$\sim x$	∇x
0	1	0
a	a	1
b	b	1
1	0	1

Denotaremos con $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_3'$ y $\mathcal{T}_2$ a las únicas subálgebras de $\mathcal{T}_4$.







$\mathcal{T}_3$ y $\mathcal{T}_3'$ son álgebras isomorfas.

4. Álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales

Estas estructuras surgieron con el propósito de determinar la subclase maximal de las álgebras de De Morgan pseudcomplementadas que admiten una estructura de $TM-$álgebra (ver A.V. Figallo and P. Landini [27]) y las que denominaron álgebras de De Morgan pseudcomplementadas modales (ó $mpM-$ álgebra). Posteriormente, A. V. Figallo, en [26], mostró que toda $mpM-$álgebra es una $TM-$álgebra definiendo $\nabla x = \sim (\sim x \wedge x^*)$ ($\triangle x = \sim \nabla \sim x$).

Un *álgebra de De Morgan pseudocomplementadas modal* es una $pM-$álgebra que verifica la siguiente condición:

(A9) $x \vee \sim x \leqslant x \vee x^*$.

Las siquientes propiedades de las $mpM-$ álgebra fueron determinadas por N. Oliva en [61] y forman parte de su tesis de Magister.

Proposición 1.1. [61] *En toda $mpM-$álgebra se verifican las siguientes propiedades:*

(A10) $\sim x^* \vee \sim x = 1$,

(A11) $(\sim x)^* \leqslant \sim x^*$,

(A12) $x \wedge \sim (\sim x)^* \leqslant x \wedge \sim x$,

(A13) $(\sim x)^* \wedge x \wedge \sim (\sim x)^* = 0$,

(A14) $\sim (\sim x)^* \vee \sim x \vee (\sim x)^* = 1$,

(A15) $(\sim (\sim x)^*)^* \leqslant x$,

(A16) $(\sim (x \wedge y))^* = (\sim x)^* \wedge (\sim y)^*$.

(A17) $(x^* \wedge y)^{**} = x^* \wedge y^{**} = (x \vee y^*)^*$.

Lema 1.2. *En toda mpM-álgebra valen las siguientes propiedades:*

(T1) $\triangle 0 = 0$, $\triangle 1 = 1$,

(T2) $\triangle x \leq x$, $x \leq \nabla x$,

(T3) *si* $x \leqslant y$ *entonces* $\triangle x \leq \triangle y$,

(T4) $\triangle x$ *es un elemento booleano y su complemento es* $\sim \triangle x$,

(T5) $(\sim \triangle x)^* = \triangle x$,

(T6) $(\sim \triangle x)^* = \triangle(\sim x)^*$,

(T7) $\triangle\triangle x = \triangle x$, $\triangle\nabla x = \nabla x$, $\nabla\triangle x = \triangle x$

(T8) $(\triangle x)^* =\sim \triangle x$,

(T9) $\triangle \sim \triangle x =\sim \triangle x$,

(T10) $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y$, $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$,

(T11) *si* $x \in \triangle A$ *si, y solo si,* $x = \triangle x$, *si, y solo si,* $x = \nabla x$,

(T12) $\triangle A$ *es una subálgebra de* A,

(T13) $\sim x \wedge \triangle x = 0$ (*ó* $x \vee \nabla \sim x = 1$),

(T14) $x \vee \sim \triangle x = 1$,

(T15) $\triangle(\triangle x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$,

(T16) $\triangle(\sim \triangle x \vee y) =\sim \triangle x \vee \triangle y$,

(T17) $\nabla(\triangle x \wedge y) = \triangle x \wedge \nabla y$,

(T18) $\triangle(\nabla x \vee y) = \nabla x \vee \triangle y$.

(T19) ∇x *es un elemento booleano y su complemento es* $\sim \nabla x$,

Dem. Para la prueba de (T1) a (T16) ver [61].

(T17) $\nabla(\triangle x \wedge y) = \sim \triangle(\sim \triangle x \vee \sim y)$. Entonces, de (T16) tenemos que $\nabla(\triangle x \wedge y) = \sim (\sim \triangle x \vee \triangle \sim y) = \triangle x \wedge \sim \triangle \sim y = \triangle x \wedge \nabla y$.

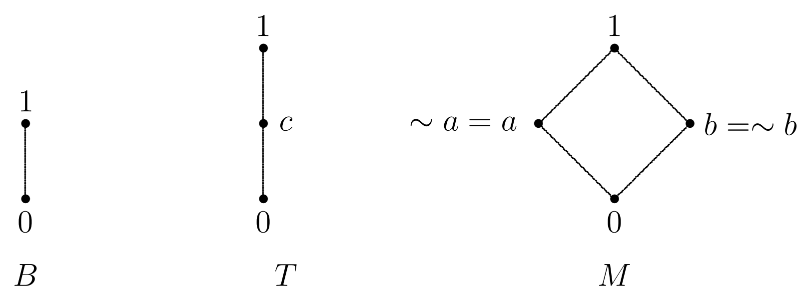
(T18) $\triangle(\nabla x \vee y) = \sim \nabla(\sim \nabla x \wedge \sim y) = \sim \nabla(\triangle \sim x \wedge \sim y)$ y teniendo en cuenta (T17) resulta que $\triangle(\nabla x \vee y) = \sim (\triangle \sim x \wedge \nabla \sim y) = (\sim \triangle \sim x \vee \sim \nabla \sim y) = \nabla x \vee \triangle y$.
$\square$

Teorema 1.3. [61] *Las únicas mpM−álgebras subdirectamente irreducibles son, salvo isomorfismo, las álgebras B, T y M indicadas a continuación:*

(a) $B = \{0, 1\}$ *con* $0 < 1$, $\sim 0 = 0^* = 1$, $\sim 1 = 1^* = 0$,

(b) $T = \{0, a, 1\}$, *con* $0 < a < 1$, $\sim a = a$, $a^* = 0$, $\sim 0 = 0^* = 1$, $\sim 1 = 1^* = 0$,

(c) $M = \{0, a, b, 1\}$ *con* $a \not\leq b$, $b \not\leq a$ *y* $0 < a, b < 1$, $\sim b = a^* = b$, $\sim a = b^* = a$, $\sim 0 = 0^* = 1$, $\sim 1 = 1^* = 0$.



Del Teorema anterior resulta que T no es una subálgebra de M ya que $c^* = 0$ y $a^* = b$. Esto muestra que la variedad de la mpM-álgebbras difiere de las de las TM-álgebras.

5. Álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden n

Las álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden n han sido ampliamente estudiadas. Para ver el desarrollo y propiedades de estas álgebras se puede consultar [7]. Las mismas pueden ser definidas del siguiente modo:

Un *álgebra de Łukasiewicz-Moisil de orden* n, $n \geq 2$, es una álgebras $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \ \{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq n-1}\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0, \{1\}_{1 \leq i \leq n-1})$ donde se satisfacen las siguientes condiciones:

LM1. $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra De Morgan.

Las funciones $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1} : L \longrightarrow L$ son homomorfismos de retículos acotados tales que para todo $x, y \in L$ verifican las siguientes condiciones:

LM2. $\varphi_i(x) \vee \sim \varphi_i(x) = 1$, para todo $i \in I_{n-1}$, donde $I_l = \{1, \cdots, l\}$,

LM3. $\varphi_i(x) \wedge \sim \varphi_i(x) = 0$, para todo $i \in I_{n-1}$,

LM4. $\varphi_i \varphi_j(x) = \varphi_j(x)$, para todo $i, j \in I_{n-1}$,

LM5. $\varphi_i(\sim x) = \sim \varphi_j(x)$, para todo $i, j \in I_{n-1}$, $i + j = n$,

LM6. $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_{n-1}(x)$.

LM7. si $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, para todo $i = 1, \cdots, n-1$, entonces $x = y$. (principio de determinación de Moisil)

Como consecuencia de la definición anterior se tiene que:

- Si $x, y \in L$, entonces $x \leq y$ si, y sólo si, $\varphi_i(x) \leq \varphi_i(y)$, para todo $i = 1, \cdots, n-1$,
- $\varphi_1(x) \leq x \leq \varphi_{n-1}(x)$, para todo $x \in L$.

6. MV-álgebras

A continuación expondremos las definiciones y propiedades básicas de estas álgebras, necesarias para el resto del trabajo. En primer lugar recordemos que

Una *MV-álgebra* es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow, \sim, 1\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ que verifica las siguientes identidades:

(w1) $1 \rightarrow x = x$,

(w2) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$,

(w3) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$, (w4) $(\sim y \rightarrow \sim x) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$.

Es bien sabido que las MV-álgebras pueden ser definidas otras operaciones, más precisamente:

$1 = \sim 0,$ $\quad$ $x \oplus y = \sim x \rightarrow y,$

$x \odot y = \sim (\sim x \oplus \sim y),$ $\quad$ $x \vee y = \sim (\sim x \oplus y) \oplus y = (x \rightarrow y) \rightarrow y,$

$x \wedge y = \sim (\sim x \vee \sim y),$

donde $\wedge$ y $\vee$ son las operaciones de ínfimo y supremo definidas en un retículo, respectivamente.

Si consideramos las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como operaciones primitivas, entonces tenemos que $\langle A, \oplus, \odot, 0 \rangle$ es una MV-álgebras en el sentido de Chang (ver [15]) y es equivalente a la formulación dada en términos de la implicación y negación (ver [33]). Por otra parte, es sabido que la categoría de las MV-álgebras es equivalente a la categoría de los l-Grupos con unidad fuerte (ver [60]) y que valen las siguientes propiedades:

(1) $a \oplus \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigwedge_{i \in I} (a \oplus a_i),$

(2) $a \oplus \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a \oplus a_i),$

(3) $\bigwedge_{i \in I} (a \rightarrow a_i) = (a \rightarrow \bigwedge_{i \in I} a_i),$

Notaremos con $B(A)$ al conjunto de los elementos booleanos de A y se verifica que $B(A) = \{x \in A : x \oplus x = x\}$. A continuación, exhibiremos propiedades bien conocidas que caracterizan a los elementos de $B(A)$.

Lema 1.4. (*ver* [11]) *Sea A una MV-álgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $a \in B(A)$,

(ii) $a \wedge \sim a = 0$,

(iii) $a^n = a$, *para todo entero positivo n.*

En lo que sigue utilizaremos indistintamente todas las operaciones que se pueden definir sobre una MV-álgebra. Con el propósito de facilitar la lectura daremos a continuación un lista de reglas de cálculo, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en [11, 68, 33]:

Lema 1.5. *En toda MV-álgebra valen las siguientes propiedades:*

(w5) $x \to 1 = 1$

(w6) $x \oplus \sim x = 1$,

(w7) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$,

(w8) $x \to (y \to x) = 1$,

(w9) $x \to 0 = \sim 0$,

(w10) $\sim x \to \sim y = y \to x$,

(w11) *la relación* $\leq$ *definida sobre* A *de la siguiente manera* $x \leq y$ *si, y solo si,* $\sim x \oplus y = x \to y = 1$*, es una relación de orden sobre* A*,*

(w12) $0 \leq x \leq 1$,

(w13) *Si* $x \leq y$*, para todo* $z \in A$*, se tiene que* $x \oplus z \leq y \oplus z$ *y* $x \odot z \leq y \odot z$*,*

(w14) *Si* $x \leq y$*, se tiene que* $\sim y \leq \sim x$*,*

(w15) $x \odot y \leq z$ *si, y solo si,* $x \leq y \to z$*,*

(w16) $x \odot (x \to y) = x \wedge y$,

(w17) $x \odot y \leq x \wedge y \leq x \vee y \leq x \oplus y$,

(w18) $(x \odot y) \to z = x \to (y \to z)$.

1.2 Dualidades topológicas para diversas clases de álgebras

La topología y el álgebra tienen variadas conexiones, acá estableceremos relaciones entre categorías cuyos objetos son álgebras y cuyos morfismos son los correspondientes homomorfismos, y categorías cuyos objetos son espacios topológicos y sus morfismos ciertas aplicaciones entre ellos. En particular, indicaremos las dualidades para los retículos distributivos acotados, las álgebras de De Morgan y algunas de sus extensiones.

1.2.1 Retículos distributivos acotados

En lo que sigue indicaremos con $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ a la categoría de los retículos distributivos acotados y sus correspondientes homomorfismos.

Recordemos que un *espacio topológico totalmente disconexo en el orden* es una terna $(X, \tau, \leq)$ donde $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, (X, τ) es un espacio topológico y dados $x, y \in X$ tales que $x \not\leq y$, existe $U \subseteq X$ abierto, cerrado y creciente tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Un *espacio de Priestley* (o *P–espacio*) es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden. Una *P–función* de un P–espacio en otro es una función continua y creciente.

A la categoría de los P–espacios y las P–funciones la denotaremos con $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Como es usual, a los objetos de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ lo representaremos por su conjunto subyacente X.

H. Priestley en [63, 64] definió los funtores contravariantes $\Psi : \boldsymbol{\mathcal{P}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\Phi : \boldsymbol{\mathcal{L}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}$ como sigue:

- si X es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, $\Psi(X) = \boldsymbol{D}(X)$ donde $\boldsymbol{D}(X) = \langle D(X), \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ es el retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X,

- para cada $f \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(X_1, X_2)$, $\Psi(f)(U) = f^{-1}(U)$ para cada $U \in \boldsymbol{D}(X_2)$.

Además,

- si L es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\Phi(L) = \boldsymbol{X}(L)$ donde $\boldsymbol{X}(L) = (X(L), \subseteq, \tau)$ el conjunto de los filtros primos de L ordenados por la relación inclusión y con la topología que tiene como sub-básicos a los conjuntos de la forma $\sigma_L(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$ y $X(L) \setminus \sigma_L(a)$ para cada $a \in L$,

- si $h \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(L_1, L_2)$, entonces $\Phi(h)(P) = h^{-1}(P)$ para cada $P \in X(L_2)$.

Por otra parte, $\sigma_L : L \longrightarrow \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}(L))$ es un isomorfismo de retículos distributivos acotados y la función $\varepsilon_X : X \longrightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{D}(X))$ definida por $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, es decir, es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden. Así, los funtores Ψ y Φ establecen una completa dualidad entre las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

Por otra parte H. A. Priestley caracterizó a las congruencias de los retículos distributivos acotados por medio de ciertos subconjuntos del P–espacio asociado de la siguiente manera:

Teorema 1.6. *Sea L retículo distributivo acotado e Y un subconjunto cerrado de $\boldsymbol{X}(L)$. Entonces*

$$\Theta(Y) = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$$

es una congruencia en L y la correspondencia $Y \longrightarrow \Theta(Y)$ establece un anti-isomorfismo entre el retículo de todos los subconjuntos cerrados de $\boldsymbol{X}(L)$ y el retículo de las congruencias de L.

1.2.2 Retículos distributivos pseudocomplementados

En adelante, indicaremos con $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$ a la categoría de las $p-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

En [65], H. Priestley describió una dualidad topológica para las $p-$álgebras considerando la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$ cuyos objetos son los $p-$espacios y cuyos morfismos son las $p-$funciones. Más precisamente, Un $p-$*espacio* es un espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ tal que para todo $U \in D(X)$, $(U]$ es un subconjunto abierto de X. Además, una $p-$*función* f de un $p-$espacio X_1 en otro X_2 es una $P-$función tal que $f(maxX_1 \cap [x)) = maxX_2 \cap [f(x))$ para cada $x \in X_1$.

Entonces se verifica que

- Si L es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$, entonces $\boldsymbol{X}(L)$ es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$.
- Si X es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$, entonces $\langle D(X), \cup, \cap, ^*, \emptyset, X\rangle$ es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$ definiendo $U^* = X \setminus (U]$ para cada $U \in D(X)$.

Además, se probó que la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$ es naturalmente equivalente a la dual de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$, donde σ_L y ε_X, definidas de la manera indicada anteriormente, son las equivalencias naturales correspondientes. Por otra parte, H. Priestley probó que

Teorema 1.7. *Si L es una $p-$álgebra, entonces el retículo de todos los subconjuntos cerrados Y de $\boldsymbol{X}(L)$ tales que $maxX(L) \cap [Y) \subseteq Y$ es isomorfo al dual de retículo de todas las congruencias de L.*

1.2.3 Álgebras de De Morgan

W. Cornish y P. Fowler (ver [16, 17]) extendieron la dualidad de Priestley a las álgebras de De Morgan de la manera que indicamos a continuación.

Un *espacio de De Morgan* (o m-*espacio*) es un par (X, g), donde X es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ y $g\colon X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo involutivo y un anti-isomorfismo de orden. Por otra parte, una m-*función* de un m-espacio (X_1, g_1) en un m-espacio (X_2, g_2) es una P-función $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que verifica $f \circ g_1 = g_2 \circ f$.

Denotaremos con $\boldsymbol{m}$ a la categoría de los m–espacios y las m–funciones y con $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ a la categoría de las M–álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

Si $(L, \sim)$ es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y $g_L : X(L) \longrightarrow X(L)$ está definida por

- $g_L(P) = L \setminus \{\sim x : \ x \in P\}$ para cada $P \in X(L)$,

entonces $(\boldsymbol{X}(L), g_L)$ es un objeto de $\boldsymbol{m}$. Por otra parte, si (X, g) es un m–espacio y se define la operación $\sim : D(X) \longrightarrow D(X)$ por la prescripción

- $\sim U = X \setminus g^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X)$,

entonces $(\boldsymbol{D}(X), \sim)$ es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Luego, las categorías $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y $\boldsymbol{m}$ son dualmente equivalentes y los isomorfismos σ_L y ε_X son las equivalencias naturales correspondientes.

Por otra parte, Cornish y Fowler en [17] introdujeron la noción de conjunto involutivo de un m–espacio (X, g) como un subconjunto Y de X tal que $g(Y) = Y$, lo que es equivalente a decir que $y \in g(Y)$ si, y sólo si, $y \in Y$. Entonces, mostraron que

Teorema 1.8. *Si L es un álgebra de De Morgan, entonces el retículo de todos los subconjuntos cerrados e involutivos de $\boldsymbol{X}(L)$ es isomorfo al dual del retículo de todas las congruencias de L.*

1.2.4 MV-álgebras

A continuación realizaremos una sintesis de la dualidad obtenida en [51] para las MV-álgebras, la misma es una extensión de la ya establecida para las álgebras de De Morgan ([16]).

Lema 1.9. [51, Lemma 2] *Sea $\mathcal{A} = (A, \rightarrow, \sim, 1)$ un MV-álgebra, P un filtro primo y $a \notin P$, entonces $P_a = \{x \in A : x \rightarrow a \notin P\}$ es un filtro primo. Además P_a es el mayor de todos los filtros primos tales que $Q \subseteq g(P)$ tal que $a \notin \Phi_Q(P) = \bigcup_{x \in Q} \{y \in A : x \rightarrow y \in P\}$.*

Un *mv-espacio* es un sistema $(X, \tau, \leq, g, \{\Phi_p\}_{p \in X})$ tal que verifica:

- $(X, \tau, \leq, g)$ es un espacio de De Morgan,
- $\{\Phi_p\}_{p \in X}$ es una familia de funciones parciales $\Phi_p : D_p \rightarrow X$, donde $D_p = \{q \in X : p \leq g(q)\}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

– para cada $p \in X$, Φ_p es una función creciente y continua en la topología superior de X,

– $p, q \leq \Phi_p(q)$ para todo $p, q \in X$ tales que $p \leq g(q)$,

– $\Phi_p(q) = \Phi_q(p)$ para todos $p, q \in X$ tales que $p \leq g(q)$,

– $\Phi_p(g(\Phi_p(q))) \leq g(q)$ para todos $p, q \in X$ tales que $p \leq g(q)$,

– $\Phi_p(\Phi_r(q)) = \Phi_r(\Phi_p(q))$ para todos $p, q, r \in X$ tales que $p, r \leq g(q)$,

– si $U \in D(X)$ y $q \notin U$, existe $q_U \in X$ es el mayor de todos los $p \in X$ tal que $p \leq g(q)$ y $\Phi_p(q) \notin U$; dados $U, V \in D(X)$, si $q \notin U \cup V$ entonces $(q_V)_V \notin U$.

– $\bigcap\limits_{p \in U} (D_p^c \cup \Phi_p^{-1}(V)) \in D(X)$, para todos $U, V \in D(X)$.

Para simplificar nos referiremos a los mv-espacios indicando simplemente por su soporte.

Sean $(X, \tau, \leq, g, \{\Phi_p\}_{p \in X})$ y $(X', \tau', \leq', g', \{\Phi_{p'}\}_{p' \in X})$ mv-espacios. Diremos que una m-función $f : X \to X'$ es una MV-función si verifica que para todo $U, V \in D(X)$:

$$f^{-1}(\bigcap_{p \in U}(D_p^c \cup \Phi_p^{-1}(V))) = \bigcap_{p' \in f^{-1}(U)} (D_{p'}^c \cup \Phi_{p'}^{-1}(f^{-1}(V))).$$

Entonces tenemos que son válidas las siguientes afirmaciones:

- Sea $\mathcal{A} = (A, \to, \sim, 1)$ es una MV-algebra y sea $\mathcal{X}_m(A)$ el espacio de De Morgan asociado a la algebra de De Morgan subyacente de $\mathcal{A}$. Se define para cada filtro primo P, $\Phi_Q(P) = \bigcup\limits_{x \in Q} \{y \in A : x \to y \in P\}$, para cada $Q \in D_p = \{Q \in X(A) : P \subseteq g(Q)\}$. Entonces $\mathcal{X}_{MV}(A) = (\mathcal{X}_m(A), \{\Phi_P\}_{P \in X(A)})$ es un mv-espacio.

- Sea $\mathcal{X}$ un mv-espacio. Sea $\langle D(X), \cap, \cup, \sim, \emptyset, X\rangle$ el álgebra de De Morgan de los conjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X, donde para cada $U \in D(X)$, $\sim U = X \setminus g(U)$. Si definimos $U \to V = \bigcap\limits_{p \in U} (D_p^c \cup \Phi_p^{-1}(V))$, si $U \neq \emptyset$ y $\emptyset \to V = X$. Entonces $D_{MV} = \langle D(X), \to, \sim, X\rangle$ es una MV-álgebra.

- Si X y X' son mv-espacios y $f : X \to X'$ es una MV-función, entonces $D(f) : D(X) \to D(X')$ definida por $D(f)(U) = f^{-1}(U)$ es una MV-homomorfismo.

- si A y A' son MV-álgebras y $h : A \to A'$ un MV-homomorfismo, entonces $X(h) : X(A) \to X(A')$, definido por $X(h)(P) = h^{-1}(P)$ es una MV-función.

Si denotamos con $\mathcal{MV}$ a la categoría de las MV-álgebras, con sus respectivos homorfismos y con MV a la categoría cuyos objetos son los mv-espacios y cuyos morfismos son las MV-funciones, de los resultados obtenidos en [51], es simple probar que

Las categorías $\mathcal{MV}$ y **MV** son dualmente equivalentes.

1.2.5 Q−retículos distributivos acotados

Teniendo en cuenta la dualidad de Priestley y la de Halmos para las álgebras de *Boole monádicas*, R. Cignoli ([9]) las extendió a los retículos dictributivos acotados con un cuantificador (ó $Q-$retículo) como detallaremos a continuación.

Un $q-$*espacio* es un par (X, E) tal que X es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ y E es una relación de equivalencia sobre X que satisface las dos condiciones siguientes:

(q1) $E(U) \in D(X)$ para cada $U \in D(X)$, donde $E(U)$ es la unión de todas las clases de equivalencia de los elementos de U.

(q2) Las clases de equivalencia determinadas por E son subconjuntos cerrados de X.

Sean (X_1, E_1), (X_2, E_2) $q-$espacios. Una $q-$función de (X_1, E_1) en (X_2, E_2) es una P–función $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $E_1 f^{-1}(V) = f^{-1}E_2 V)$ para cada $V \in D(X_2)$.

Denotaremos con $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ a la categoría de los $Q-$retículos y los $Q-$homomorfismos y con $\boldsymbol{q}$ a la categoría de los $q-$espacios y las $q-$funciones.

Si (A, ∇) es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ y se define

$$E_{\nabla} = \{(P,Q) \in X(A) \times X(A) : P \cap \nabla(L) = Q \cap \nabla(L)\},$$

entonces $(X(A), E_{\nabla}) \in \boldsymbol{q}$.

Si (X, E) es un objeto de $\boldsymbol{q}$, entonces $(D(X), \nabla_E) \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}$, donde ∇_E se define como en (q1).

Por lo tanto, la categoría $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ es dualmente equivalente a $\boldsymbol{q}$.

2 Capítulo II

Este capítulo está organizado en siete secciones. En la primera señalamos las motivaciones que nos llevaron al estudio de las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales con un automorfismo involutivo, a las que hemos llamado $\mathcal{S}$-álgebras. En las dos secciones subsiguientes caracterizamos las congruencias y definimos una operación de implicación en las $\mathcal{S}$-álgebras a partir de la cual mostramos que constituyen una variedad semisimple. En la Sección 4, determinamos las $\mathcal{S}$-álgebras generadoras de la variedad y probamos que la misma es localmente finita. Posteriormente, estudiamos propiedades de las álgebras finitas y finalizamos la Sección 5 determinando la estructura de las $\mathcal{S}$-álgebras libres con un conjunto finito de generadores libres. Además, exhibimos la fórmula que nos permite calcular el número de sus elementos en función del número de generadores. En la Sección 7 exponemos las condiciones para la existencia de epimorfismos entre $\mathcal{S}$-álgebras finitas. Para ello debimos realizar un estudio minucioso del espectro primo lo que permitió contabilizar el número de epimorfimos que se pueden definir entre dos álgebras finitas. Finalizamos este párrafo mostrando dicho número en casos particulares como las mpM-álgebras, las álgebras de Lukasiewicz-Moisil de orden 3 y las álgebras de Boole. En la última sección, determinamos el retículo de las subvariedades de la variedad de las

$\mathcal{S}$-álgebras.

2.1 Introducción

Las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas fueron estudiadas por A. Romanowska en [69] quién las denominó $pM-$álgebras. Las mismas constituyen una extensión de las álgebras de De Morgan. Posteriormente H. Sankappanavar, en [71], estudió las subvariedades de las pM-álgebras que satisfacen la propiedad de que las congruencias principales son definibles ecuacionalmente.

Por otra parte, en 1978, A. Monteiro introdujo las álgebras tetravalentes modales (o TM-álgebras) como álgebras $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tales que el reducto $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las siguientes identidades:

(i) $\nabla x \vee \sim x = 1$,

(ii) $\nabla x \wedge \sim x = \sim x \wedge x$.

Estas álgebras resultan ser una generalización de las álgebras Łukasiewicz 3-valuadas y han sido ampliamente estudiadas por diferentes autores (ver [26, 32, 48, 49, 13, 17]). En [27], A. V. Figallo y P. Landini probaron que las álgebras tetravalentes modales son polinómicamente equivalentes a las álgebras de De Morgan con una operación unaria adicional $\urcorner$ que verifica:

(F1) $x \wedge \urcorner x = 0$,

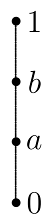
(F2) $x \vee \urcorner x = x \vee \sim x$.

Entonces como consecuencia directa de esta afirmación resulta que las pM-álgebras que verifican (F2) son álgebras tetravalentes modales, más precisamente, son álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Luego, con el propósito de determinar la subclase maximal de las álgebras De Morgan pseudcomplementadas que admiten una estructura de $TM-$álgebra, es que en [27] se consideró la subvariedad de las $pM-$álgebras que verifican:

(tm) $x \vee \sim x \leq x \vee x^*$,

a las que denominaron álgebras de De Morgan pseudcomplementadas modales (o mpM-álgebras). Posteriormente, en ([26]) se mostró que toda $mpM-$álgebra es una $TM-$álgebra definiendo $\nabla x = \sim (\sim x \wedge x^*)$.

Por otra parte, cabe mencionar que la variedad de las mpM-álgebras constituyen una subvariedad propia de la variedad $\mathcal{V}_0$ de las álgebras De Morgan pseudcomplementadas que satisfacen la identidad: $x \wedge (\sim x)^* = (\sim (x \wedge (\sim x)^*)^*$, estudiadas por H. Sankappanavar en [71]. En efecto, basta considerar el álgebra L_4 cuyo diagrama de Hasse se indica a continuacón y donde las operaciones $\sim$ y * están dadas en la siguiente tabla:



x	$\sim x$	x^*
0	1	1
a	b	0
b	a	0
1	0	0

Aquí tenemos que $b = a \vee \sim a \not\leq a \vee a^* = a$.

Por lo tanto, las $mpM-$álgebras constituyen una subvariedad de la variedad de las álgebras de De Morgan modales clásicas introducidas por S. Celani en [13], ya que esta última clase ecuacional, contiene a $\mathcal{V}_0$ y a la variedad de las álgebras de Stone involutivas introducidas por R. Cignoli y M.S de Gallego en [12].

Por otro lado, en los años 50, Moisil introdujo las álgebras de Boole simétricas, motivado en modelar la teoría de circuitos de conmutación. Dichas álgebras están constituídas por un álgebra de Boole y un operador que resulta ser un automorfismo involutivo. El mismo autor, probó que estas álgebras son polinomialmente equivalentes a los cuerpos de Galois $GF(2^2)$, es decir de caracteristica 2^2 (ver [53]). Cabe mencionar que posteriormente ideas similares fueron abordadas por diferentes autores y en distintas clases de álgebras, en particular, en [30], para la TM-álgebras. Por lo que surgió, de manera natural, estudiar las $mpM-$álgebras con un operador de estas características

2.2 Las mpM−álgebras simétricas o $\mathcal{S}$-álgebras

En esta sección expondremos las definiciones necesarias para el desarrollo del capítulo.

Definición 2.1. *Una pM-álgebra modal simétrica (ó $\mathcal{S}$-álgebra) es un par (A, T) donde A es una mpM-álgebra y T es un automorfismo involutivo, es decir $T(T(x)) = x$.*

Nuestro próximo objetivo es determinar las $\mathcal{S}$-congruencias. En primer lugar lo haremos teniendo en cuenta los resultados establecidos en [61], para lo cual consideraremos ciertos subconjuntos especiales del álgebra.

Definición 2.2. *Si (A, T) es una $\mathcal{S}$-álgebra, llamaremos $T\triangle$–filtro de A a todo subconjunto N de A tal que:*

N1. N es un filtro,

N2. si $x \in N$ entonces $\triangle x \in N$,

N3. si $x \in N$ entonces $T(x) \in N$.

Notaremos con $\mathcal{N}(A)$ a la familia de los $T\triangle$–filtros de la $\mathcal{S}$-álgebra A.

Lema 2.3. *Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra. Para cada $N \in \mathcal{N}(A)$ sea $R(N) = \{(x, y) \in A \times A : \text{existe}\, f \in N, \text{tal que}\, x \wedge f = y \wedge f\}$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $R(N) \in Con(A)$,

(ii) $|1|_{R(N)} = N$.

Dem. (i): Por lo demostrado en [61], solo resta probar que la compatiblilidad con el automorfismo. Si $(x, y) \in R(N)$, entonces existe $n \in N$ tal que $x \wedge n = y \wedge n$, de lo que resulta que $T(x) \wedge T(n) = T(y) \wedge T(n)$ y como $T(x) \in N$, concluimos que $(T(x), T(y)) \in R(N)$.

(ii): Inmediato. $\square$

Lema 2.4. *Sean* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra con más de un elemento y* $\Theta \in Con(A)$*. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $N_\Theta = |1|_\Theta$ *es un* $T\triangle-$*filtro de* A*,*

(ii) $R(|1|_\Theta) = \Theta$.

Dem. (i): Por los establecido en [61] sólo probaremos que $|1|_\Theta$ verifica (N3). En efecto, sea $x \in |1|_\Theta$, entonces $(x, 1) \in \Theta$ de donde resulta que $(T(x), T(1)) \in \Theta$. Luego, teniendo en cuenta que T es un automorfismo conluimos que $(T(x), 1) \in \Theta$ y por lo tanto, $T(x) \in |1|_\Theta$.

(ii): Es inmediato de [61, Lema 2.4.5]. □

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente teorema con el cual quedan caracterizadas las congruencias en las $\mathcal{S}$-álgebras.

Teorema 2.5. *Sea* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra con más de un elemento. Entonces se verifican:*

(i) $Con(A) = \{R(N) : N \in \mathcal{N}(A)\}$*, donde* $R(N) = \{(x, y) \in A \times A :$ *existe* $f \in N$ *tal que* $x \wedge f = y \wedge f\}$.

(ii) *Los retículos* $Con(A)$ *y* $\mathcal{N}(A)$ *son isomorfos considerando las correspondencias* $\Theta \longmapsto N_\Theta$ *y* $N \longmapsto R(N)$*, que son inversas una de la otra.*

Dem. Es consecuencia inmediata de [61] y el Lema 2.3. □

2.3 La implicación y los sistemas deductivos

En lo que sigue introduciremos una nueva operación binaria sobre las $\mathcal{S}$-álgebras lo que nos permitirá obtener otra descripción de los $T\triangle$–filtros.

Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra y sean $a, b \in A$, definiremos la operación de implicación $\Rightarrow$ por medio de la siguiente prescripción:

$$a \Rightarrow b = \nabla \sim (a \wedge T(a)) \vee b.$$

Proposición 2.6. *Si A es una $\mathcal{S}$-álgebra y $a, b, c \in A$, entonces se verifica las siguiente propiedades:*

I_1. $1 \Rightarrow a = a$,

I_2. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = 1$,

I_3. $a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = 1$,

I_4. $((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a = 1$,

I_5. $a \Rightarrow T(a) = 1$,

I_6. $a \Rightarrow \triangle a = 1$,

I_7. $a \Rightarrow a = 1$,

I_8. $a \Rightarrow (a \wedge b) = a \Rightarrow b$,

I_9. *si $a \leq b$ entonces $c \Rightarrow a \leq c \Rightarrow b$.*

Dem. Solo probaremos I_3 y I_4.

I_3: De (T10) y (T13) tenemos que $a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = \nabla \sim a \vee \nabla \sim T(a) \vee (b \Rightarrow a) = \nabla \sim a \vee \nabla \sim T(a) \vee (\nabla \sim b \vee \nabla \sim T(b) \vee a) = 1$.

I_4: De (T10), (T17) y (T2) resulta que

$((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a = ((\nabla \sim a \vee \nabla \sim T(a) \vee b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$

$= (\nabla \sim (\nabla \sim a \vee \nabla \sim T(a) \vee b) \vee \nabla \sim T(\nabla \sim a \vee \nabla \sim T(a) \vee b) \vee a) \Rightarrow a$

$= (\triangle a \wedge \triangle T(a) \wedge \nabla \sim b) \vee (\triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \nabla \sim T(b) \vee a) \Rightarrow a$

$= (\triangle(a \wedge T(a)) \wedge (\nabla \sim b \vee \nabla \sim T(b))) \vee a) \Rightarrow a = a \Rightarrow a = 1.$ □

Definición 2.7. *Sea A es una $\mathcal{S}$-álgebra y D un subconjunto de A. Diremos que D es un sistema deductivo de A si verifica: (D_1) $1 \in D$ y (D_2) si $a, a \Rightarrow b$, entonces $b \in D$.*

El siguiente teorema establece la equivalencia entre las nociones $T\triangle$–filtro y sistema deductivo.

Teorema 2.8. *Sea A una $\mathcal{S}$-álgebra y $D \subseteq A$. Entonces D es un sistema deductivo de A si, y solo si, D es $T\triangle$–filtro de A.*

Dem. Sea D un sistema deductivo de A y sean $a, b \in D$. Por I_3, I_8 tenemos que $1 = a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \wedge b)) \in D$, de donde aplicando (D_2) tenemos que $a \wedge b \in D$. Por otro lado, sea $c \in D$ y $d \in A$ tales que $c \leq d$. Luego, por I_9 inferimos que $1 = c \Rightarrow c \leq c \Rightarrow d$ y por lo tanto $c \Rightarrow d \in D$, entonces por D_2 concluimos que $d \in D$. Además si $a \in D$, por I_5 e I_6 tenemos que $\triangle a \in D$ y $T(a) \in D$.

Recíprocamente si $a, a \Rightarrow b \in D$, entonces por $N2$ y $N3$ tenemos que $\triangle T(a)$, $\triangle a$, $\triangle(a \Rightarrow b) \in D$. Luego,

$\triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \triangle(a \Rightarrow b) = \triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \triangle(\nabla \sim (a \wedge T(a)) \vee b)$

$= \triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge (\nabla \sim (a \wedge T(a)) \vee \triangle b)$ [(T18)]

$= \triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge (\nabla(\sim a \vee \sim T(a)) \vee \triangle b)$

$= \triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge ((\nabla \sim a \vee \nabla \sim T(a)) \vee \triangle b)$ [(T10)]

$= \triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge ((\sim \triangle a \vee \sim \triangle T(a)) \vee \triangle b)$

$= (\triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \sim \triangle a) \vee (\triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \sim \triangle T(a)) \vee (\triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \triangle b)$

$= \triangle T(a) \wedge \triangle a \wedge \triangle b \leq b.$

De las afirmaciones anteriores (T4) y (T13) concluimos que $b \in D$. □

Proposición 2.9. *Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra y $D \subseteq A$ un sistema deductivo. Si $a \wedge \sim a \in D$ entonces $D = A$.*

Dem. Veamos que $(a \wedge \sim a) \Rightarrow 0 = 1$. En efecto, por (T10) tenemos que $(a \wedge \sim a) \Rightarrow 0 = \nabla \sim (a \wedge \sim a) \vee \nabla \sim T(a \wedge \sim a) \vee 0 = (\nabla a \vee \nabla \sim a) \vee (\nabla T(a) \vee \nabla \sim T(a))$. Por otra parte, de (T2) y (T1) resulta que $1 = a \vee \nabla \sim a \leq \nabla a \vee \nabla \sim a \leq (\nabla a \vee \nabla \sim a) \vee (\nabla T(a) \vee \nabla \sim T(a))$. Luego, $(a \wedge \sim a) \Rightarrow 0 \in D$ y por lo tanto $0 \in D$. □

Observación 2.10. *Como consecuencia de los resultados establecidos por A. Monteiro en [56] y dado que $\Rightarrow$ verifica I_1, I_2, I_3 e I_4 tenemos que en las $\mathcal{S}$-álgebras todo sistema deductivo es intersección de sistemas deductivos maximales. En particular, $\{1\}$ es la intersección de todos los $T\triangle$–filtros maximales.*

Teorema 2.11. *La variedad de las $\mathcal{S}$-álgebras es semisimple.*

Dem. Es consecuencia directa de la Observación 2.10 y resultados bien conocidos de álgebra universal (ver [35, 8]).

$\square$

2.4 Las $\mathcal{S}$-álgebras subdirectamente irreducibles

2.4.1 La subálgebra K(A) de las constantes

En primer lugar, dada una $\mathcal{S}$-álgebra A consideremos un subconjunto especial de A que desempeñará un papel fundamental para obtener una primera descripción de las álgebras simples de la variedad.

Definición 2.12. *Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra. Llamaremos conjunto de los elementos invariantes de A al conjunto $K(A) = \{x \in A : T(x) = x = \nabla x\}$.*

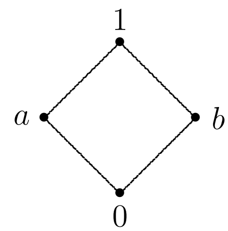
Es claro que $K(A) \neq \emptyset$, pues $0, 1 \in K(A)$.

Proposición 2.13. *Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra, entonces $(K(A), T)$ es una $\mathcal{S}$-subálgebra de A y $(K(A), \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ es un álgebra de Boole.*

Dem. Sea $x, y \in K(A)$, entonces $x \wedge y = T(x) \wedge T(y) = T(x \wedge y)$. Además, $x \wedge y = \nabla x \wedge \nabla y$ de donde por (T7) y (T15) resulta que $x \wedge y = \sim (\sim \nabla x \vee \sim \nabla y) = \sim (\triangle \sim x \vee \triangle \sim y) = \sim (\triangle \sim x \vee \triangle\triangle \sim y) = \sim \triangle(\sim x \vee \triangle \sim y) = \nabla \sim (\sim x \vee \triangle \sim y) = \nabla(x \wedge \sim \triangle \sim y) = \nabla(x \wedge \nabla y) = \nabla(x \wedge y)$. Luego, $x \wedge y \in K(A)$.

Por otra parte, $\sim x = \sim T(x) = T(\sim x)$ y por (T11) tenemos que $\nabla \sim x = \nabla \sim \nabla x = \sim \triangle \nabla x = \sim x$, entonces $\sim x \in K(A)$. Además, si $x \in K(A)$ se verifica sin dificultad que $T(x) \in K(A)$. Veamos ahora que $x^* \in K(A)$. En efecto, es claro que $\triangle x^* = \triangle(\triangle x)^*$, luego por (T8) y (T9) se tiene que $\triangle(\triangle x)^* = \triangle(\sim \triangle x) = \sim \triangle x = (\triangle x)^* = x^*$ y es simple verificar que $T(x^*) = x^*$. De las afirmaciones anteriores concluimos que $K(A)$ es una subálgebra de A. El resto de la demostración es inmediata de (T4). $\square$

Observemos que pueden existir elementos booleanos que no son invariantes. En efecto, basta considerar la $\mathcal{S}$-álgebra $M = \{0, a, b, 1\}$ cuyo diagrama de Hasse indicamos a continuación y tal que $\sim a = a^* = b = T(a)$, $\sim b = b^* = a = T(b)$, $\sim 0 = 0^* = 1 = T(1)$ y $\sim 1 = 1^* = 0 = T(0)$.



M

Es claro que a es un elemento booleano y que $a \notin K(M)$.

Proposición 2.14. *Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra y $a \in A$. Entonces el filtro principal $[a)$ generado por a es un $T\triangle$–filtro si, y sólo si, $a \in K(A)$.*

Dem. Si $a \in [a)$ es un $T\triangle$–filtro, entonces $T(a), \triangle a \in [a)$, de lo que tenemos que $a \leq \triangle a$ y $a \leq T(a)$. De esta última afirmación resulta que $T(a) \leq TT(a) = a$. Luego por (T2) y (T11) inferimos que $\nabla a = a = T(a)$ y por lo tanto $a \in K(A)$.

Recíprocamente, como $[a)$ es un filtro, solo debemos probar que es cerrado por $\triangle$ y T. En efecto, sea $x \in [a)$ entonces por (T3) y como T es una función que preserva el orden es que tenemos que $a = \triangle a \leq \triangle x$ y $a = T^2(a) \leq T(x)$ y por lo tanto $[a)$ es un $T\triangle$–filtro de A. $\square$

En lo que sigue caracterizaremos las álgebras simples, para ello observemos que si A es una álgebra simple por Teorema 2.5 los únicos $T\triangle$–filtros son A y $\{1\}$.

Teorema 2.15. *Sea (A, T) una $\mathcal{S}$-álgebra. Entonces (A, T) es simple si, y solo si, $K(A) = \{0, 1\}$.*

Dem. Sea $a \in K(A)$, entonces por la Proposición 2.14 tenemos que $[a)$ es un $T\triangle$–filtro de A. Luego, como A es simple resulta que $[a) = \{1\}$ ó $[a) = A$, de lo que conluimos que $a = 1$ ó $a = 0$, con lo que la condición necesaria queda probada.

Recíprocamente, es claro que A y $\{1\}$ son $T\triangle$–filtros son A. Probemos ahora que son los únicos. Sea $N \subset A$ un $T\triangle$–filtro, entonces $N = \{1\}$. En efecto, sea $a \in N$ entonces $a \wedge T(a) \in N$ y por lo tanto, $\triangle(a \wedge T(a)) \in N$. Como $\triangle(a \wedge T(a)) \in K(A)$, de la hipótesis resulta que $\triangle(a \wedge T(a)) = 0$ o $\triangle(a \wedge T(a)) = 1$. Si suponemos que $\triangle(a \wedge T(a)) = 0$ tendríamos que $N = A$, lo cual es una contradicción Por lo tanto, $1 = \triangle(a \wedge T(a)) \leq a \wedge T(a) \leq a$. □

Observación 2.16. *Si consideramos las álgebras* $\mathbf{T_4^2} = (T_4 \times T_4, \vee, \wedge, \sim, *, T, 1)$ *con* $T(0, a) = (b, 0)$, $T(a, 0) = (0, b)$ *y* $\mathbf{T_3^2} = (T_3 \times T_3, \vee, \wedge, \sim, *, T, 1)$ *con* $T(c, 0) = (0, c)$, $T(1, 0) = (0, 1)$ *y las restantes operaciones definidas punto por punto, entonces* $K(\mathbf{T_4^2}) = \{0, 1\}$ *y* $K(\mathbf{T_3^2}) = \{0, 1\}$ *de donde por el Teorema 2.15 conluimos que son* $\mathcal{S}$*-álgebras simples.*

2.4.2 Los $T\triangle$–filtros maximales y los ultrafiltros

En lo que sigue y con el propósito de obtener una mejor descripción de las $\mathcal{S}$-álgebras simples caracterizaremos los $T\triangle$–filtros maximales vía los ultrafiltros (filtros maximales) de una álgebra dada, donde la noción de maximal es la habitual [2, p.68]. Para ello trabajaremos con la transformación de Birula–Rasiowa ([5]).

Recordemos que si A es un álgebra de De Morgan la transformación φ que a cada filtro primo P de A le hace corresponder $\varphi(P) = A \backslash \sim P = A \backslash \{\sim x : x \in P\}$ se denomina transformación de Birula–Rasiowa. Es bien sabido que esta transformación verifica las siguientes propiedades:

- $\bullet_1$ $\varphi(P)$ es un filtro primo A,
- $\bullet_2$ $\varphi(\varphi(P)) = P$,
- $\bullet_3$ si Q filtro primo de A tal que $P \subseteq Q$, entonces $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

Proposición 2.17. *Sean* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra y* $P \subseteq A$ *un filtro primo. Entonces* $\varphi(T(P)) = T\varphi(P)$.

Dem. Sea $y \in \varphi(T(P)) \Leftrightarrow y \notin \sim T(P) \Leftrightarrow \sim T(y) \notin P \Leftrightarrow T(y) \notin \sim P \Leftrightarrow T(y) \in \varphi(P) \Leftrightarrow y \in T(\varphi(P))$. $\square$

Proposición 2.18. *Sea (A,T) una $\mathcal{S}$-álgebra y $P \subseteq A$ un filtro primo. Entonces $T(P)$ es un filtro primo. Además, P es un filtro primo minimal si, y solo si, $T(P)$ también lo es.*

Dem. Por ser T un automorfismo es simple verificar que $T(P)$ es un filtro, veamos ahora que es primo. Como P propio y T es automorfismo, $0 \notin T(P)$. Además, si $a \vee b \in T(P)$, entonces $T(a \vee b) = T(a) \vee T(b) \in P$, como P es primo, se tiene que $a \in T(P)$ ó $b \in T(P)$.

Sea P es un filtro primo minimal y supongamos que existe un filtro primo Q tal que $Q \subseteq T(P)$, entonces $T(Q) \subseteq P$. Como $T(Q)$ es un filtro primo y P es minimal resulta que $T(Q) = P$. Por lo tanto, $Q = T(P)$, de donde resulta que $T(P)$ es minimal. La otra implicación resulta con un razonamiento análogo al anterior. $\square$

Teorema 2.19. *Sean (A,T) una $\mathcal{S}$-álgebra y U un ultrafiltro de A. Entonces $N = U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$ es un $T\triangle$–filtro de A.*

Dem. Es claro que N es un filtro de A, luego solo resta probar que N es cerrado por $\triangle$ y T. En efecto, sea (1) $x \in N$ por (A9) tenemos que se $x = x \wedge (\sim x \vee x) = x \wedge (\sim x \vee \sim (\sim x)) \leq (\sim x \vee (\sim x)^*) \wedge x = (\sim x \wedge x) \vee ((\sim x)^* \wedge x) = (\sim x \wedge x) \vee \triangle x \leq \sim x \vee \triangle x$. Entonces (2) $x \leq \sim x \vee \triangle x$. Como por hipótesis (3) $x \in \varphi(U)$, entonces $\sim x \notin U$. De esta afirmación, teniendo en cuenta que $x \in U$, (2) y que U es un filtro primo, concluimos que $\triangle x \in U$. Por otra parte, de (2) y (3) tenemos que $\sim x \vee \triangle x \in \varphi(U)$. Como $\sim x \notin \varphi(U)$ y $\varphi(U)$ es un filtro primo, inferimos que $\triangle x \in \varphi(U)$. Teniendo en cuenta la Proposición 6.15 y $\bullet_1$ resulta que $T(U)$ y $\varphi(T(U))$ son filtros primos. Además, como $x \in T(U)$ y $x \in \varphi(T(U))$, siguiendo un razonamiento totalmente análogo al de los casos anteriores tenemos que $\triangle x \in T(U)$ y $\triangle x \in \varphi(T(U))$. Luego, hemos probado que N es cerrado por $\triangle$.

Por otra parte, de (1) tenemos que $x \in U$ y $x \in T(U)$ de donde resulta que $T(x) \in T(U)$ y $T(x) \in TT(U) = U$, respectivamente. Además, como $x \in \varphi(U)$ por la Proposición 2.17 concluimos que $T(x) \in T(\varphi(U)) = \varphi(T(U))$. Finalmente, de $x \in T(\varphi(U))$ inferimos que $T(x) \in TT(\varphi(U)) = \varphi(U)$. Luego, $T(x) \in N$ para todo $x \in N$. $\square$

Proposición 2.20. *Sea* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra y* N *un* $T\triangle$*-filtro de* A*. Si* P *un filtro primo de* A *tal que* $N \subseteq P$*, entonces* $N \subseteq \varphi(P) \cap T(P)$*.*

Dem. Sea $x \in N$, de las hipótesis concluimos que $T(x) \in N = T(N) \subseteq T(P)$. Si suponemos que $x \notin \varphi(P)$, entonces $\sim x \in P$ y como $\triangle x \in N \subseteq P$ resulta que $\triangle x \wedge \sim x \in P$. Luego, por (T13) tenemos que $0 \in P$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $N \subseteq \varphi(P) \cap T(P)$. □

Proposición 2.21. *Sea* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra y* $U \subseteq A$*. Entonces* U *es un ultrafiltro si, y solo si,* $T(U)$ *lo es.*

Dem. Supongamos que $T(U)$ no es un ultrafiltro de A. Como $T(U)$ es un filtro propio de A, entonces existe un ultrafiltro $W \subseteq A$ tal que $T(U) \subset W$. Luego, $U \subset T(W)$ y como U es un maximal $T(W) = A$. Por lo tanto, $A = W$ con lo que queda probado que $T(U)$ es maximal. La otra implicación resulta con un razonamiento análogo. □

El siguiente teorema nos permite caracterizar los $T\triangle$–filtros maximales de una $\mathcal{S}$-álgebra A en término de los ultrafiltros de A, lo que será de gran utilidad para determinar las álgebras simples de la variedad.

Teorema 2.22. *Sea* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra y* $N \subseteq A$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) N *es un* $T\triangle$*–filtro maximal de* A*,*

(ii) *existe un ultrafiltro* U *de* A *tal que* $N = U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$*.*

Además, esta representación de N *es única.*

Dem. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Como N es un filtro propio de A, existe un ultrafiltro U de A tal que $N \subseteq U$. Luego, por Proposición 2.20 resulta que $N \subseteq \varphi(U) \cap T(U)$ y por ser $T(U)$ un filtro primo, $N \subseteq \varphi(T(U))$ y por lo tanto, $N \subseteq U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$. Por otra parte, por el Teorema 2.19 sabemos que $U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$ es un $T\triangle$–filtro. Entonces $N = U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sea U un ultrafiltro de A tal que $N = U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$. Del Teorema 2.19, N es un $T\triangle$–filtro de A y como N es propio, entonces existe un $T\triangle$–filtro maximal W tal que $N \subseteq W$. Luego, por la condición necesaria sabemos que existe un ultrafiltro Y de A, tal que $W = Y \cap T(Y) \cap \varphi(Y) \cap \varphi(T(Y))$. Como Y es primo y $N \subseteq Y$ entonces tenemos que (1) $U \subseteq Y$ ó (2) $\varphi(U) \subseteq Y$ ó (3) $T(U) \subseteq Y$ ó (4) $\varphi(T(U)) \subseteq Y$. Si ocurre (1) como U es maximal se tiene que $U = Y$; si vale (2) se tiene que $Y = \varphi(U)$ ó $U = Y$; si vale (3) tenemos $U = T^2(U) \subseteq T(Y)$ de donde resulta que $U = T(Y)$. Por último, si ocurriese (4) tendriamos que $T(U) = \varphi(\varphi(T(U))) = Y$ ó $\varphi(T(U)) = Y$. Por lo tanto, $N = W$ y con esto podemos asegurar que la representación es única. $\square$

Los resultados que indicaremos a continuación serán de utilidad para determinar las álgebras simples.

Consideremos la familia Π de filtros primos de un $\mathcal{S}$-álgebra A tal que $\varphi(P), T(P) \in \Pi$, para todo $P \in \Pi$ y sea Θ_Π la relación definida sobre A de la siguente manera:

$$a\Theta_\Pi b \text{ si, y solo si, para todo } P \in \Pi,\ a \in P \Longleftrightarrow b \in P.$$

Entonces se verifica que

Proposición 2.23. *Θ_Π es una relación de congruencia sobre el $\mathcal{S}$-álgebra (A, T).*

Es bien sabido que si $a \in A$, entonces $|a|_{\Theta_\Pi} = \bigcap\limits_{P\in\Pi, a\in P} P \cap \bigcap\limits_{P\in\Pi, a\notin P} A\backslash P$. En particular, $|1|_{\Theta_\Pi} = \bigcap\limits_{P\in\Pi} P$ y $|0|_{\Theta_\Pi} = \bigcap\limits_{P\in\Pi} A\backslash P$. Veamos ahora que toda congruencia sobre una $\mathcal{S}$-álgebra (A, T) es de la forma de Θ_Π para algún suconjunto Π fijo. Más precisamente

Proposición 2.24. *Sea Θ una congruencia sobre la $\mathcal{S}$-álgebra A, entonces $\Theta = \Theta_\Pi$, para alguna familia Π de filtros primos de A.*

Dem. Sea $q : A \to A/\Theta$ el epimorfismo canónico y sea Π' la familia de todos los filtros primos de A/Θ. Si consideremos $\Pi = \{q^{-1}(Q) : Q \in \Pi'\}$, entonces se prueba de manera análoga que para retículos distributivos que $(a, b) \in \Theta_\Pi$ si, y solo si, $q(a) = q(b)$. $\square$

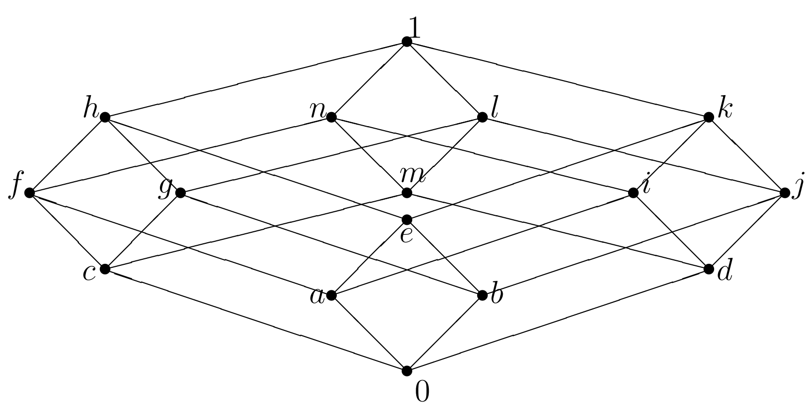
Observación 2.25. *Sea* (A, T) *una* $\mathcal{S}$*-álgebra y sea* U *un ultrafiltro de* A*. Entonces es simple verificar que* $\Pi_0 = \{U, \varphi(U), T(U), \varphi T(U)\}$ *es una familia de filtros primos de* A *con la propiedad que si* $P \in \Pi_0$*, entonces* $T(P), \varphi(P) \in \Pi_0$*.*

Ahora estamos en condiciones de presentar las $\mathcal{S}$-álgebra simples de la variedad.

Teorema 2.26. *Una* $\mathcal{S}$*-álgebra* A *es subdirectamente irreducible (simple), si y solo si,* A *es isomorfo a una subálgebra de* $\mathbf{T_4^2}$ *ó* $\mathbf{T_3^2}$*.*

Dem. Por Teorema 2.8 podemos afirmar que (A, T) es isomorfa al cociente entre una $\mathcal{S}$-álgebra y un $T\triangle$–filtro maximal. Luego, por abuso del lenguaje podemos considerar B un $\mathcal{S}$-álgebra y N un $T\triangle$–filtro maximal de B tal que $B/N = A$, por Teorema 2.22 existe un ultrafiltro U tal que $N = U \cap T(U) \cap \varphi(U) \cap \varphi(T(U))$. Por lo visto anteriormente podemos tomar $\Pi_0 = \{U, T(U), \varphi(U), \varphi(T(U))\}$ una familia de filtros primos de A con la propiedad que si $P \in \Pi_0$ entonces $T(P), \varphi(P) \in \Pi_0$. Además, por Proposición 2.24 tomando el epimorfismo canónico $q : B \to B/N$ tenemos que $q(a) = q(b) \Longleftrightarrow (a, b) \in \Theta_{\Pi_0}$, y por lo tanto $A = B/\Theta_{\Pi_0}$. Luego, se presentan los siguientes casos:

(i) supongamos que Π_0 es una anticadena, luego tenemos que se verifica que $A \simeq \mathbf{T_4^2}$,

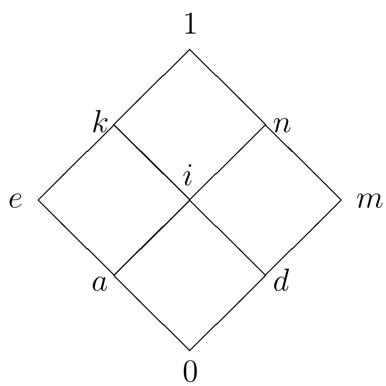


donde las operaciones están dadas por las siguentes tablas:

x	$\sim x$	x^*	Tx
0	1	0	0
a	n	l	d
b	l	n	c
c	h	k	b
d	k	h	a
e	m	m	m
f	f	j	j
g	g	i	g

x	$\sim x$	x^*	Tx
h	c	d	l
i	i	g	i
j	j	f	f
k	d	c	n
l	b	a	h
m	e	c	e
n	a	b	k
1	0	0	1

(ii) $\{U, T(U)\}$ son incomparables y $U \subset \varphi(U)$, entonces $T(U) \subset \varphi(T(U))$ y por lo tanto tenemos que $A \simeq \mathbf{T_3^2}$,



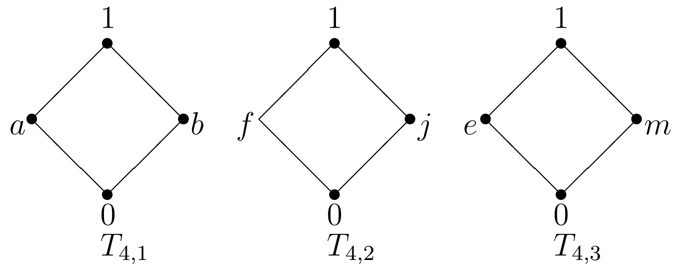
T_3^2

x	$\sim x$	x^*	Tx
0	1	0	0
a	n	e	d
d	k	e	a
e	m	m	m
m	e	e	j
i	e	0	i
k	d	0	n
n	a	0	k
1	0	0	1

(iii) $\{U, \varphi(U)\}$ son incomparables y $\varphi(U) = \varphi(T(U))$, entonces $A = \{0, a, b, 1\}$ y si $x \in A$, implica $T(x) = x$, $a =\sim a$,

(iv) $\{U, T(U)\}$ son incomparables y $U = \varphi(T(U))$, entonces $A = \{0, f, j, 1\}$ y $T(f) = j$, $f =\sim j$,

(v) $\{U, T(U)\}$ son incomparables y $U = \varphi(U)$, se tiene que 4 clases y $A = \{0, e, m, 1\}$ y si $T(e) = m$, $e =\sim e$,



(vi) $U = T(U)$ y $\varphi(U) \subseteq U$, entonces $A = \{0, c, 1\}$, $T(x) = x$, entonces $A \simeq T_3$,

(vii) $\varphi(U) = T(U)$ y $\varphi(U) \subseteq U$, entonces $A = \{0, c, 1\}$, $T(c) = \sim c$, de lo que se tiene $A \simeq T_3$.

Finalmente,

(viii) $U = T(U) = \varphi(U) = \varphi(T(U))$, se tiene que $A \simeq T_2$.

Es claro que T_3^2, T_3 no son subálgebras de T_4^2, pero $T_{4,2}$ y T_2 son las únicas subálgebra T_3^2. □

Es claro que la variedad esta generada por un número finito de álgebras finitas, luego tenemos el siguiente

Corolario 2.27. *La variedad de las $\mathcal{S}$-álgebras es finitamente generada y localmente finita.*

Dem. Ee consecuencia directa del Teorema 2.26 y resultados de álgebra universal [8, Theorem 10.16] □

2.5 Álgebras finitas, finitamente generadas y libres

Sea A una $\mathcal{S}$-álgebra y sea X un subconjunto de A. Notaremos con $N(X)$ al $T\triangle$–filtro generado por X, es decir a la intersección de todos los $T\triangle$–filtros de A que contienen a

X, y con $N(a)$ representaremos a $N(\{a\})$.

Proposición 2.28. *Sea A una $\mathcal{S}$-álgebra y $a \in A$, entonces $N(a) = [\triangle a \wedge T(\triangle a))$, donde con $[x)$ indicamos el filtro principal generado por x.*

Dem. Veamos primero que $F = [\triangle a \wedge T(\triangle a))$ es un $T\triangle$–filtro. En efecto, sea $x \in F$, entonces $\triangle a \wedge T(\triangle a) \leq x$. Luego, por (T3) resulta que $\triangle(\triangle a \wedge T(\triangle a)) = \triangle a \wedge T(\triangle a) \leq \triangle x$ de lo que inferimos que $\triangle x \in F$. También se puede probar, sin dificultad, que $T(x) \in F$. Por otro lado, sea H un $T\triangle$–filtros de A tal que $a \in H$. Luego, $\triangle a \in H$ y $T(a) \in H$. Por lo tanto, $\triangle a \wedge T(a) \in H$ de donde resulta que $F \subseteq H$. $\square$

Observemos que en toda $\mathcal{S}$-álgebra finita los $T\triangle$–filtros son prinicipales. En lo que sigue caracterizaremos los $T\triangle$–filtros maximales en las álgebras finitas.

Proposición 2.29. *Sea A una $\mathcal{S}$-álgebra finita y $N \subseteq A$. Entonces N es un $T\triangle$–filtro maximal de A si, y solo si, de $N = F(a)$ con a átomo de $K(A)$.*

Dem. Como A es finita, por la Proposición 2.28, existe $b \in A$ tal que $N = N(b) = [\triangle b \wedge T(\triangle b))$. Es claro que $\triangle b \wedge T(\triangle b) \in K(A)$, probemos ahora que es un átomo de $K(A)$. Supongamos que no es así, entonces existe $c \in K(A)$ tal que $0 < c < \triangle b \wedge T(\triangle b)$, como $\triangle c = T(\triangle c) = c$, se tiene que $\triangle c \wedge T(\triangle c) < \triangle b \wedge T(\triangle b)$. Luego $[\triangle b \wedge T(\triangle b)) \subset [\triangle c \wedge T(\triangle c))$ lo que contradice la maximilidad de N.

Recíprocamente, es claro que si a átomo de $K(A)$, entonces $N = [a)$ es un $T\triangle$–filtro de A. Veamos que N es maximal, supongamos que no es así. Como N es propio pues $0 < a$, tenemos que existe un $T\triangle$–filtro maximal M de A tal que $N \subset M$. Por la condición necesaria resulta que existe un átomo $b \in K(A)$ tal que $M = F(b)$. Luego, $F(a) \subset F(b)$ y por lo tanto $b < a$, lo cual es una contradicción. $\square$

Por el Teorema 2.8, la Proposición 2.29 y con técnicas habituales se tiene el siguiente:

Teorema 2.30. *Sea A una álgebra A finita y sean a_i, $1 \leq i \leq n$, los átomos de $K(A)$. Entonces $A \simeq \prod_{i=1}^{n} A/[a_i)$.*

Las álgebras libres

En lo que sigue determinaremos la estructura de las $\mathcal{S}$-álgebras libres con un conjunto G de generadores libres tal que $|G| = n$, $n \in I\!N$, y a la que notaremos con $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)$, donde $|X|$ es el número de elementos de X. La noción de álgebra libre es la usual ([8]).

Teniendo en cuenta el Corolario 2.27 sabemos que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)$ es finita. Luego, por lo visto anteriormente tenemos que

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n) \simeq T_2^{\alpha_2} \otimes T_3^{\alpha_3} \otimes T_4^{\alpha_{4,1}} \otimes T_4^{\alpha_{4,2}} \otimes T_4^{\alpha_{4,3}} \otimes T_9^{\alpha_9} \otimes T_{16}^{\alpha_{16}}$$

donde $\alpha_k = |M_k| = |\{M : M \text{ es } T\triangle\text{−filtro maximal de } \mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n) \text{ y } \mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)/M \simeq T_k\}|$.

Probemos que

$$\alpha_k = \frac{|EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k)|}{|Aut(T_k)|},$$

donde $EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k)$ es el conjunto de todos los epimorfismos de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)$ en T_k y $Aut(T_k)$ es el conjunto de todos los automorfismos de T_k.

Consideremos la aplicación $s : EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k) \to M_k$ definida por $s(h) = Ker(h)$, es claro que es s es sobreyectiva. Luego, para todo $N \in M_k$ existe $h' \in EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k)$ tal que $s(h') = N$. Observemos que

$$(1)\ s^{-1}(N) = \{f : f \in EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k) \text{ y } ker(f) = N\}$$
$$= \{f : f \in EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k) \text{ y } ker(f) = ker(h')\}$$
$$= \{f : f \in EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k) : f = \alpha \circ h', \alpha \in Aut(T_k)\}$$

Luego, $|s^{-1}(N)| = |Aut(T_k)|$ de lo que se verifica (1).

Observemos que los conjuntos $EPI(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n), T_k)$ y $T^*_{k,G}$ tienen el mismo cardinal, donde $T^*_{k,G}$ es el conjunto de las funciones $f : G \to T_k$ que verifican $[f(G)]_{\mathcal{S}} = T_k$, siendo $[X]_{\mathcal{S}}$ la $\mathcal{S}$-subálgebra de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)$ generada por X.

Además, sea $T_{k,G}$ el conjunto de todas las funciones $f : G \to T_k$ y sea $F_i = \{f : G \to S_i : S_i \text{ subalgebra maximal de } T_k, \}$, entonces es claro que

$$|T^*_{k,G}| = |T_{k,G}| - |\bigcup_{i\in I} F_i|.$$

Por otro lado, notaremos con $F_{i_1,\cdots,i_r} = \bigcap_{j=1}^{r} F_{ij} = \bigcap_{j=1}^{r} \{f : G \to \bigcap_{j=1}^{r} S_{ij}\}$.

Cómputo de $\alpha_{\mathbf{k}}$

En el caso de $k = 2$, es claro que T_2 no tiene subálgebras maximales y por lo tanto $|\bigcup_{i\in I} F_i| = 0$ y $|Aut(T_2)| = 1$, luego $\alpha_2 = 2^n$.

Para $k = 3$, la única subálgebra maximal de T_3 es T_2 y $|Aut(T_3)| = 1$, de donde tenemos que $\alpha_3 = 3^n - |F_1| = 3^n - 2^n$.

Podemos observar que $T_{4,1}$ tiene solo un subálgebra maximal isomorfa a T_2 y $|Aut(T_{4,1})| = 2$, entonces $\alpha_{4,1} = \frac{4^n-2^n}{2}$. Análogamente, se tiene que $\alpha_{4,2} = \alpha_{4,3} = \alpha_{4,1}$.

Por otra parte, T_9 tiene subálgebras maximales isomorfas T_3, T_4 y T_2, entonces $\alpha_9 = \frac{9^n-3^n-4^n+2^n}{2}$.

Finalmente, para α_{16} es claro que las subálgebras maximales no isomorfas de T_{16} son isomorfas a T_2, $T_{4,1}$, $T_{4,2}$ y $T_{4,3}$, luego $|\bigcup_{i=1}^{4} F_i| = 3 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^n$ y como $|Aut(T_{16})| = 4$, concluimos que $\alpha_{16} = \frac{16^n-3\cdot 4^n+3\cdot 2^n}{4}$. Luego, hemos probado el siguiente teorema

Teorema 2.31. *Sea $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)$ la $\mathcal{S}$-álgebra libre con n generadores libres. Entonces*

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)| = 2^{2^n} \times 3^{3^n-2^n} \times 4^{3\cdot\frac{4^n-2^n}{2}} \times 9^{\frac{9^n-3^n-4^n+2^n}{2}} \times 16^{\frac{16^n-3\cdot 4^n+2\cdot 2^n}{4}}$$

Ejemplos 2.32. *Si $n = 1$ entonces $|\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(n)| = 15.925.248$.*

2.6 Epimorfismos entre $\mathcal{S}$-álgebras finitas

En esta sección estudiaremos y determinaremos las condiciones para la existencia de epimorfimos entre álgebras simétricas finitas, con el objeto de obtener el número de epimorfismos. Nuestro trabajo estará basado en cursos dados por A.V. Figallo ([24]), donde se estudiaron el número de epimorfismos y el monoide de los enodomorfismos entre álgebras de Boole finitas. Por otra parte, este autor extendió sus estudios a otras estructuras algebraicas como las álgebras de Lukasiewicz trivalentes y las álgebras tetravalentes modales.

2.6.1 Descomposición del espectro primo

Es bien sabido que en un retículo distributivo finito los filtros primos son principales y sus elementos generadores son exactamente los elementos primos del retículo. En lo que sigue, siempre que hagamos referencia a una $\mathcal{S}$-álgebra A la consideraremos finita.

Por otra lado, la transformación de Birula-Rasiowa la podemos pensar como una función especial entre el conjunto de los elementos primos de A. Notaremos con $\Pi(A)$ al conjunto de los elementos primos de A y a la transformación la notaremos con ψ para este caso, es decir, $\psi : \Pi(A) \to \Pi(A)$ estará definida por $\psi(p) = q$ si y solo si $\varphi([p)) = [q)$. Es bien sabido que esta función verifica:

- $\psi(\psi(p)) = p$, para todo $p \in \Pi(A)$,
- si $p_1, p_2 \in \Pi(A)$ son tales que $p_1 \leq p_2$, entonces $\psi(p_2) \leq \psi(p_1)$.

Por otra parte, para todo $x \in A$ con $x \neq 1$ la negación $\sim$ puede ser caracterizada por medio de la transformación ψ del siguiente modo:

$$\sim x = \bigvee_{\{p \in \Pi(A) : \psi(p) \not\leq x\}} p$$

De resultados establecidos por A. Monteiro [] y el Teorema 2.26, tenemos que el espectro primo $(\Pi(A), \psi)$ de una $\mathcal{S}$-álgebra A, tiene las siquientes componentes conexas:

Tipo I: con $\psi(p) = p$, (1.1) $\psi = T$ y (1.2) $\psi \neq T$,

Tipo II: con $p < p'$, $\psi(p) = p'$ y $\psi(p') = p$, (2.1) $\{p, T(p)\}$ incomparables, (2.2) $p = T(p)$ y (2.3) $T = \psi$,

Tipo III: con p y p' incomparables, $\psi(p) = p'$ y $\psi(p') = p$, (3.1) $T = \psi$, (3.2) $p = T(p)$ y (3.3) $\{p, T(p), \psi(p), \psi(T(p))\}$ incomparables.

Si $p \in \Pi(A)$ diremos que:

• es de tipo I, si $\psi(p) = p$,

• es de tipo II, si existe $q \in \Pi(A)$ tal que si $p < q$ entonces $\psi(p) = q$ ó si $q < p$ implica $\psi(q) = p$,

• es de tipo III, si existe $q \in \Pi(A)$ incomparable con p tal que $\psi(p) = q$.

Obeservemos que si A es una $mpM-$álgebra, entonces las componentes conexas que tiene son de tipo I, II y III, donde no entra en juego el operador T. En lo que sigue presentaremos algunas propiedades que permitirán el desarrollo de la presente sección.

Lema 2.33. *Sea A una mpM-álgebra finita y $p \in \Pi(A)$, entonces se verifican:*

(i) $p^* = \begin{cases} \bigvee\limits_{t \in \Pi_p^*} t & si\ \Pi_p^* \neq \emptyset, \\ 0 & si\ \Pi_p^* = \emptyset, \end{cases}$ *donde* $\Pi_x^* = \{z \in \Pi(A) : z \wedge x = 0\}$,

(ii) $\sim p^* \in \Pi(A)$,

(iii) *si* $p = p_{c_i} = (0, \cdots, c_i, \cdots, 0)$ *con* $c_i \in \Pi(T_i)$ $i = 2, 3, 4$. *Entonces se verifican:*

1. $c_i \in \Pi(T_2)$ *implica* $\psi(p) = p$,
2. $c_i \in \Pi(T_3)$ *implica* $\psi(p_c) = p_1$,
3. $c_i \in \Pi(T_4)$ *implica* $\psi(p_a) = p_b$.

Dem. Se verifica sin dificultad a partir de la definición de pseudocomplementación la validez de (i). Probemos (ii): sea $A \simeq \prod\limits_{i=1}^{n} T_{\alpha_i}$ donde $\alpha_i \in \{2, 3, 4\}$ y los T_{α_i} son las álgebras que generan a la variedad de las mpM-álgebras. Luego, identificaremos a los elementos de A con n-uplas $(x_1, \cdots, x_n)$. Se puede probar que los elementos primos de A son de la forma $p = (0, \cdots, p_i, \cdots, 0)$, donde la coordenada i es p_i y el resto 0, con $p_i \in \Pi(T_{\alpha_i})$. Entonces, es claro que $\sim p_i^* \in \Pi(T_{\alpha_i})$ de lo que resulta lo enunciado.

(iii) Sabemos que si P es un filtro primo de A, la transformación $\varphi(P) = A \backslash \sim P$. Como A es finita se define $\psi(p) = q$ si, y solo si, $\varphi([p)) = A \backslash \sim [p) = [q)$. Luego, observemos que si $p = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, entonces se verifica $\varphi([p)) = \varphi([(0, \cdots, 1, \cdots, 0))) =$

$A\backslash \sim [(0,\cdots,1,\cdots,0)) = [(0,\cdots,1,\cdots,0)) = [p)$ y por lo tanto $\psi(p) = p$, con lo se cumple 1. Sea, ahora $p_c = (0,\cdots,c,\cdots,0)$ y $p_1 = (0,\cdots,1,\cdots,0)$. Luego $\varphi([p_1)) = \varphi([(0,\cdots,1,\cdots,0))) = A\backslash \sim [(0,\cdots,1,\cdots,0)) = A\backslash\{(x_1,\cdots,0,\cdots,x_n) : x_i \in T_s\} = \{(w_1,\cdots,z,\cdots,w_n) : w_i \in T_s, z \in \{c,1\}\} = [(0,\cdots,c,\cdots,0)) = p_c$ y por lo tanto $\psi(p_c) = p_1$. De manera análoga se verifica que $\psi(p_a) = p_b$. $\square$

Corolario 2.34. *En toda mpM-álgebra finita A verifica:*

(i) *si $p \in \Pi(A)$ y $\psi(p) = p$ entonces $\nabla p = p =\sim p^*$,*

(ii) *sea $p, q \in \Pi(A)$ tal que $p < q$ y $\psi(q) = p$ entonces $\nabla p = q =\sim p^* = \nabla q =\sim q^*$,*

(iii) *sea $p, q \in \Pi(A)$ incomparables tal que $\psi(q) = p$ y $\psi(p) = q$, entonces $p < \nabla p = \nabla q > q$ y $\nabla p \notin \Pi(A)$.*

Dem. Teniendo en cuenta la demostración del Lema 2.33, veamos la validez de (i). Sea $p = (0,\cdots,p_i,\cdots,0)$ con $p_i \in \Pi(T_{\alpha_i})$ tal que $\psi(p) = p$. Luego, es claro que $p_i = 1 \in \Pi(T_2)$, de lo que se verifica sin dificultad que $p =\sim p^* = \nabla p$.

(ii): Sean $p, q \in \Pi(A)$ tales que $p < q$. Luego, es claro que $p = (0,\cdots,c,\cdots,0)$ y $q = (0,\cdots,1,\cdots,0)$ con $c, 1 \in \Pi(T_3)$, de lo que se verifica operando coordenada a coordenada que $q =\sim p^* =\sim q^*$. Además, $\nabla p = \nabla q = q$.

(iii): Si tomamos ahora un primo $t = (0,\cdots,t_i,\cdots,0)$ de tipo III, es claro que $t_i \in \Pi(T_4)$, pues caso contario estaríamos en algún caso anterior. Luego, $t_i = a$ ó $t_i = b$, por lo tanto si tomamos $p, q \in \Pi(A)$ incomparables tal que $\psi(q) = p$ y $\psi(p) = q$, entonces $p = (0,\cdots,a,\cdots,0)$ y $q = (0,\cdots,b,\cdots,0)$ y por lo tanto $\nabla p = \nabla q = (0,\cdots,1,\cdots,0)$, con lo queda completa la demostración. $\square$

Dados los espectros primos $(\Pi(A_1),\psi_1)$ y $(\Pi(A_2),\psi_2)$, definiremos a $(\Pi(A_1),\psi_1) + (\Pi(A_2),\psi_2)$ del siguiente modo $(\Pi(A_1) + \Pi(A_2),\psi)$, donde $+$ es la suma ordinal de los conjuntos dados y $\psi_{|\Pi(A_i)} = \psi_i$. $i = 1, 2$. Entonces, de los resultados precedentes hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2.35. *Sea A una mpM-álgebra finita y sea $(\Pi(A), \psi)$ su espectro primo. Entonces*

$$(\Pi(A), \psi) = \sum_{\alpha_2}(\Pi(T_2), \psi_2) + \sum_{\alpha_3}(\Pi(T_3), \psi_3) + \sum_{\alpha_4}(\Pi(T_4), \psi_4)$$

donde $\alpha_i < \infty$ y ψ_i es la transformación asociada a la mpM-álgebra T_i.

2.6.2 Construcción de los epimorfismos

Sean A y A' dos $\mathcal{S}$-álgebras finitas, $Epi(A, A')$ el conjunto de toda los $\mathcal{S}$-epimorfismos de A en A' y consideremos el conjunto $R(A) = \Pi(A) \cup \{\nabla p : p \in \Pi(A)\}$.

Definición 2.36. *Sean A y A' dos $\mathcal{S}$-álgebras. Diremos que una función $f : R(A_1) \to R(A_2)$ es una $\mathcal{S}$-función si verifica las siguientes condiciones:*

$\mathcal{S}_1$. *f es inyectiva,*

$\mathcal{S}_2$. *$f(\psi(p)) = \psi f(p)$, para todo $p \in \Pi(A_1)$,*

$\mathcal{S}_3$. *$f(\nabla q) = \nabla f(q)$, para todo $q \in \Pi(A_1)$,*

$\mathcal{S}_4$. *$f(T(q)) = T(f(q))$, para todo $q \in \Pi(A_1)$.*

Notaremos con $\mathcal{F}(A_2, A_1)$ el conjunto de todas las $\mathcal{S}$-funciones de A_1 y A_2.

Lema 2.37. *Sean A_1 y A_2 dos $\mathcal{S}$-álgebras finitas y $f : R(A_1) \to R(A_2)$ es una $\mathcal{S}$-función, entonces:*

(i) *f es creciente en $\Pi(A_1)$,*

(ii) *$f(p)$ y p son del mismo tipo,*

(iii) *f es creciente en $R(A_1)$.*

Dem. (i) Sean $q_1, q_2 \in \Pi(A_1)$ tales que $q_1 \leq q_2$, entonces por Corolario 2.34 (ii) tenemos que $\nabla q_1 = q_2$ y por lo tanto $f(q_1) \leq \nabla f(q_1) = f(\nabla q_1) = f(q_2)$.

(ii) Supongamos que p es tipo I, i.e.: $\psi(p) = p$, entonces $f(p) = f(\psi(p)) = \psi f(p)$. Luego, $f(p)$ es de tipo I. Además, si $p \in \Pi(A)$ es de tipo II, existe $q \in \Pi(A)$ tal que $p < q$ (ó $q < p$). Supongamos que $p < q$, de donde resulta que $\psi(p) = q$ y $f(p) < f(q)$, pues la igualdad nos conduce a una contradicción. Luego, $\psi(f(p)) = f(q)$ y por lo tanto $f(p)$ es de tipo II. Si p es de tipo III, existe $q \in \Pi(A)$ incomparable con p tal que $\psi(p) = q$. Luego, es claro que se verifica $\psi(f(p)) = f(q)$, entonces $f(p)$ y $f(q)$ son incomparables. En efecto, si suponemos que $f(p) = f(q)$ como f es inyectiva tenemos que $p = q$, lo que es una contradicción. Si suponemos, ahora, que $f(p) < f(q)$, se tiene por Corolario 2.34 (ii) que $\nabla f(p) = f(q)$ y por lo tanto $\nabla p = q$ pero por el mismo corolario inciso (iii) se tiene que ∇p no es primo lo cual es una contradicción. El resto de la prueba sigue con un razonamiento análogo.

(iii) Por lo probado en (i) solo debemos considerar que $p, q \in R(A_1)$ son tales que $p = \nabla t_1$ ó $q = \nabla t_2$ con $t_1, t_2 \in \Pi(A_1)$ y $p \leq q$. Supongamos que (1) $p \in \Pi(A_1)$ y $q = \nabla t_2$ con $t_2 \in \Pi(A_1)$ y consideremos los dos subcasos siguientes: (1.1) t_2 de tipo I ó II y (1.2) t_2 de tipo III. Para el caso (1.1), tenemos por el Corolario 2.34 que $q = \nabla t_2 \in \Pi(A_1)$ y por el inciso (i) de este lema queda probado. Para el caso (1.2), tenemos por el Corolario 2.34 que $\nabla t_2 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \notin \Pi(A_1)$, tenemos que $p = p_a$ ó $p = p_b$ de lo que se tiene los siguientes nuevos casos (a) $p_a < \nabla p_a = \nabla p_b$ ó (b) $p_b < \nabla p_a = \nabla p_b$. Supongamos que ocurre el caso (a), como $\psi(p_a) = p_b$ se tiene que $\psi(f(p_a)) = f(p_b)$ y $f(p_a), f(p_b)$ incomparables. Luego, por el Corolario2.34 (iii) tenemos que $f(p_a) < \nabla f(p_b) = f(\nabla p_b)$ y por lo tanto $f(p) < f(q)$. El caso (b) es análogo.

Supongamos ahora que (2) $p = \nabla t_1$ y $q = \nabla t_2$ con $t_1, t_2 \in \Pi(A_1)$. Luego, es claro que $\nabla t_1 = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ y $\nabla t_2 = (0, \ldots, 1_j, \ldots, 0)$ y como $p \leq q$, entonces $i = j$ de donde resulta que $\nabla t_1 = \nabla t_2$ y por lo tanto $f(p) = f(q)$.

Por otra parte, supongamos que (3) $p = \nabla t_1$ y $q, t_1 \in \Pi(A_1)$. Entonces $p = \nabla t_1 = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ y $q = (0, \ldots, q_j, \ldots, 0)$ y como $p \leq q$, inferimos que $i = j$ y por lo tanto, $p = q$ con lo que concluye la demostración. □

El Lema 2.37 nos permitó probar el siguiente lema

Lema 2.38. *Sea $f \in \mathcal{F}(A_1, A_2)$ y para todo $x \in A$, sean $A_x^r = \{q \in R(A_1) : f(q) \leq x\}$ y*

$A_x^\pi = \{p \in \Pi(A_1) : f(p) \leq x\} \neq \emptyset$. *Entonces se verifica:*

$$\bigvee_{q \in A_x^r} q = \bigvee_{p \in A_x^\pi} p.$$

Dem. Consideremos el conjunto $N_x = A_x^r - A_x^\pi$ y sean $a = \bigvee_{p \in A_x^\pi} p$, $b = \bigvee_{q \in A_x^r} q$ y $c = \bigvee_{r \in N_x} r$, entonces $b = a \vee c$. Supongamos que $N_x = \emptyset$, entonces $c \leq a$. En efecto, sea $r \in N_x$ entonces existe $p_0 \in \Pi(A_1)$ tal que $r = \nabla p_0 = \sim {p_0}^* \vee p_0$, de donde resulta que $\sim {p_0}^* \leq r$ y $p_0 \leq r$. Por el Lema 6.3 concluimos que $f(\sim {p_0}^*) \leq f(r)$ y $f(p_0) \leq f(r)$. Como $f(r) \leq x$ y por el Lema 2.33 tenemos que $\sim {p_0}^* \in \Pi(A_1)$, entonces $\sim {p_0}^*, p_0 \in A_x^\pi$, lo que completa la demostración. $\square$

Consideremos ahora un nuevo tipo de función asociada a f del siguiente modo:

Definición 2.39. *Sea $f \in \mathcal{F}(A_1, A_2)$, Diremos que la función $F_f : A_2 \to A_1$ es una Π-función asociada a f si $F_f(x) = \bigvee_{q \in A_x^r} q$, si $A_x^\pi \neq \emptyset$ y $F_f(x) = 0$ si $A_x^\pi = \emptyset$, para todo $x \in A$.*

Notaremos con $\Pi(A_2, A_1)$ al conjunto de las Π-funciones asociadas a las $\mathcal{S}$-funciones.

Lema 2.40. *Si $p \in \Pi(A_2)$, entonces $F_f(p) = 0$ ó $F_f(p) \in \Pi(A)$.*

Dem. Sea $p \in \Pi(A_2)$, entonces podemos considerar los siguientes casos:

(i) p es un elemento minimal de $\Pi(A_2)$. Si suponemos que $F_f(p) \neq 0$, entonces existe $p_1 \in \Pi(A_1)$ tal que $f(p_1) \leq p$, pero como $f(p_1) \in \Pi(A_1)$, concluimos que $f(p_1) = p$. Luego, no es difícil verificar que $A_p^\pi = \{p_1\}$ y por lo tanto, $F_f(p) = p_1$.

(ii) p es un elemento maximal y no minimal de $\Pi(A_2)$. Entonces existe $q \in \Pi(A_2)$ tal que $q < p$ y $\nabla q = p$. Si suponemos que $F_f(p) \neq 0$, entonces existe $p' \in \Pi(A_1)$ tal que si $f(p') \leq p$. Si $F_f(q) = 0$ tendríamos que no existe $t' \in \Pi(A_1)$ tal que $f(t') \leq q$, entonces $f(p') = p$ y $A_p^\pi = \{p'\}$ y por lo tanto $F_f(p) = p'$. Por otra parte, si $F_f(q) \neq 0$ existe un único $q' \in \Pi(A_1)$ tal que $f(q') = q$ y verifica $q' < \nabla q'$. Si fuese $q' = \nabla q'$ tendríamos $f(q') = f(\nabla q') = \nabla f(q') = \nabla q = p$, lo cual es una contradicción. Consecuentemente, tenemos $A_p^\pi = \{q', \nabla q'\}$. En efecto, es claro que como $f(q') = q$ es de tipo II por el Lema

2.37 tenemos que q' es del mismo tipo. Entonces $\nabla q' \in \Pi(A_1)$ y $f(\nabla q') = p$. Supongamos ahora que existe $h' \in \Pi(A)$ tal que $f(h') \leq p$. Como $f(h') \in \Pi(A_1)$, entonces $f(h') = q$ ó $f(h') = p$, de lo que resulta que $h' = q'$ ó $h' = \nabla q'$ y por lo tanto $F_f(p) = \nabla q'$. $\square$

Teorema 2.41. *Toda Π-función F_f asociada a una $\mathcal{S}$-función f es un $\mathcal{S}$-epimorfismo.*

Dem. Sea f $\mathcal{S}$-función de A en A' y sea $F_f : A' \to A$ la Π-función asociada, entonces se verifica sin dificultad que $F_f(x \vee y) = F_f(x) \vee F_f(y)$ para todo $x, y \in A'$. Veamos que $F_f(\sim x) = \sim F_f(x)$:

(i): Supongamos que $A^{\pi}_{\sim x} \neq \emptyset$, pues caso contrario se verifica sin dificultad que $F_f(\sim x) \leq \sim F_f(x)$. Sea $q_0{}' \in A^{\pi}{}_{\sim x}$, entonces $q_0{}' \in \Pi(A')$ y verifica que $f(q_0{}') \leq \sim x = \bigvee\limits_{\{p \in \Pi(A) : \psi(p) \not\leq x\}} p$. Luego, existe $p_0 \in \Pi(A)$ tal que $f(q_0{}') \leq p_0$ y $\psi(p_0) \not\leq x$ de lo que se tiene $\psi(p_0) \leq \psi(f(q_0{}'))$ y por lo tanto $f(\psi(q_0{}')) \not\leq x$. Como consecuencia de estas afirmaciones tenemos que $\psi(q_0{}') \not\leq F_f(x)$ de lo que inferimos que $q_0{}' \leq \sim F_f(x)$. Por lo tanto, por el Lema 6.3 tenemos probada la desigualdad deseada. Recíprocamente, supongamos que $\sim F_f(x) \neq 0$, en caso contrario se verifica trivialmente que $\sim F_f(x) \leq F_f(\sim x)$. Entonces, sea $p' \in \Pi(A')$ tal que $\psi(p') \not\leq F_f(x)$ de lo que deducimos que $\psi(f(p')) \not\leq x$ y por lo tanto, $p' \leq F_f(\sim x)$, de esto último se tiene la igualdad postulada.

(ii): Veamos ahora que F_f respeta la operación *. Para ello solo basta probar que se verifica para los elementos primos, es decir que $F_f(p^*) \leq (F_f(p))^*$ para todo $p \in \Pi(A')$. En efecto, supongamos $F_f(p^*) \neq 0$ y $F_f(p) \neq 0$ puesto que si vale la igualdad se verifica trivialmente. Como $F_f(p^*) = \bigvee\limits_{\{q' \in \Pi(A_1), f(q') \leq p^*\}} q'$, entonces podemos suponer que existe $q_0{}' \in \Pi(A)$ tal que $f(q_0{}') \leq p^*$ y por el Lema 2.33 (i) tenemos que $p^* = \bigvee\limits_{\{t \in \Pi(A') : t \wedge p = 0\}} t$. Luego, $f(q_0{}') \not\leq p$ de lo que resulta que $q_0{}' \not\leq F_f(p)$ y por el Lema 2.40 podemos afirmar que $q_0{}'$ y $F_f(p)$ son primos incomparables. Luego, $q_0{}' \wedge F_f(p) = 0$, y por lo tanto $q_0{}' \leq (F_f(p))^*$. Por otra parte, veamos que $F_f(p)^* \leq F_f(p^*)$. Consideraremos $F_f(p)^* \neq 0$, pues caso contrario se verifica trivialmente. Sea $q' \in \Pi(A_1)$ tal que $q' \wedge F_f(p) = 0$, entonces $q' \not\leq F_f(p)$ de donde concluimos que $f(q') \not\leq p$. Luego, de esta última afirmación y el Lema 2.40 tenemos que $f(q')$ y p son primos incomparables. Por lo tanto, $f(q') \wedge p = 0$ y $f(q') \leq p^*$ con lo que queda probada la desigualdad buscada. Como se verifica sin dificultad que $F_f(x^*) = F_f(x)^*$, para todo $x \in A'$, tenemos probado (ii).

(iii): Por último, es claro que $T(F_f(p)) = T(\bigvee_{q' \in A_p^\pi} q') = \bigvee_{q' \in A_p^\pi} T(q')$. Luego, sea ${q_0}' \in \Pi(A')$ tal que $f({q_0}') \leq p$, entonces $T(f({q_0}')) = f(T({q_0}')) \leq T(p)$ y como $T({q_0}') \in \Pi(A')$ resulta que $T({q_0}') \leq \bigvee_{t' \in A_{T(p)}^\pi} T(t') \leq F_f(T(p))$. Recíprocamente, como $F_f(T(p)) = \bigvee_{h' \in A_{T(p)}^\pi} h'$, sea ${h_0}' \in \Pi(A')$ tal que $f({h_0}') \leq T(p)$, entonces $T(f({h_0}')) = f(T({h_0}')) \leq T^2(p) = p$ y por lo tanto $T({h_0}') \leq F_f(p)$. Luego, ${h_0}' \leq T(F_f(p))$. De las desigualdades anteriores es claro que $F_f(T(x)) = T(F_f(x))$ con $x \in A$. Por lo tanto, $F_f : A \to A'$ es un S-homomorfismo.

Veamos ahora que F_f es sobreyectiva. Sea $b \in \Pi(A')$, entonces $f(b) = a \in \Pi(A)$ y por lo tanto, $F_f(a) \neq 0$. Recordemos, que por el Lema 2.40 tenemos que $F_f(a) \in \Pi(A')$ y sea $w = F_f(a)$. Luego, $f(b) \leq f(w)$ pero como por otra parte $f(w) \leq a = f(b)$, tenemos que $b = w$ y por lo tanto, $F_f(a) = b$. No es difícil verificar que si $w \in A'$, existe $z \in A$ tal que $F_f(z) = w$. $\square$

Veamos que vale la recíproca del Lema 2.41, antes probemos un resultado auxiliar.

Lema 2.42. *Sean A_1 y A_2 $\mathcal{S}$-álgebras finitas, $h : A_2 \to A_1$ un $\mathcal{S}$-epimorfimo y $p' \in \Pi(A_1)$. Entonces existe un único $p_0 \in \Pi(A_2)$ tal que $h(p_0) = p'$.*

Dem. Sabemos que existe $x \in A_2$ tal que $h(x) = p'$. Supongamos que $h^{-1}(p') = \{x_1, \cdots, x_t\}$ y consideremos el elemento $p_0 = \bigwedge_{i=1}^{t} x_i$. Es claro que $h(p_0) = p'$ y que $p_0 \neq 0$, veamos que es primo. En efecto, supongamos que $p_0 = a \vee b$, luego se tiene que $a \leq p_0$ y $b \leq p_0$. Además, $p' = h(p_0) = h(a) \vee h(b)$, de lo que resulta que $p_0 = a$ ó $p_0 = b$.

Por otra parte, veamos que p_0 es único. En efecto, sea $p_1 \in \Pi(A)$ y $p_1 \in h^{-1}(p')$ luego, $p_0 \leq p_1$, y si p_1 es un primo de tipo I o III, $p_0 = p_1$. Observemos que si p_1 es de tipo II y suponemos $p_0 < p_1$, entonces $\nabla p_0 = p_1$ y $\triangle p_0 = (\sim p_0)^* \wedge p_0 = 0$. Por otra parte, como h es un $\nabla, \triangle$-morfismo tenemos que $p' = h(p_1) = h(\nabla p_0) = \nabla h(p_0) = \nabla p'$ y como $\triangle p' = \triangle \nabla p' = \triangle \sim \triangle \sim p' = \sim \nabla \triangle \sim p' = \sim \triangle \sim p' = \nabla p'$, inferimos que $0 = h(\triangle p_0) = \triangle h(p_0) = \triangle p'$, lo que resulta una contradición. De todos estos casos se tiene que $p_0 = p_1$ es decir es único. $\square$

Consideremos ahora h un $\mathcal{S}$-epimorfismo de A_2 en A_1, diremos que la función $f : \Pi(A_1) \to \Pi(A_2)$ es inducida por h si se verifica que $f(q) = p$ si, y solo si, $h(p) = q$. La existencia de f está asegurada por el Lema 2.42, además f es inyectiva. Por otra parte, f puede ser extendida de una única manera a una $\mathcal{S}$-función $f_s : R(A_1) \to R(A_2)$ de la siguiente forma: si $q \in \Pi(A_1)$, entonces $f_s(q) = f(q)$, $f_s(\psi(q)) = \psi f(q)$ y $f_s(T(q)) = f(T(q))$; si $q \in R(A_1)/\Pi(A)$, entonces $f_s(\nabla q) = \nabla f(q)$. Luego, diremos que f_s es la $\mathcal{S}$-función inducida por h.

Lema 2.43. *Si f la función inducida por el $\mathcal{S}$-epimorfismo h, entonces f es una* Π-*función.*

Dem. Sea $h : A_1 \to A_2$ un $\mathcal{S}$-epimorfismo y sea g la $\mathcal{S}$-función inducida por h. Además, consideremos la Π-función F_g asociada a g y veamos que $F_g = h$. En efecto, sea $p \in \Pi(A_2)$. Supongamos primero que $F_g(p) \neq 0$, luego por Lema 2.40 se tiene que $F_g(p) = p'$ con $f(p') = p$ y $p' \in \Pi(A_1)$. Entonces por la definición de f tenemos que $h(p) = p'$ y por lo tanto, $F_g(p') = h(p)$. Supongamos ahora que $F_g(p) = 0$, debemos probar que $h(p) = 0$. Supongamos que $h(p) \neq 0$, entonces existe $p' \in \Pi(A_1)$ tal que $p' \leq h(p)$. Luego, por Lema 2.42 existe un único $q \in \Pi(A_1)$ tal que $h(q) = p'$ y como f es inducida por h tenemos que $f(p') = q$. Por otro lado, $p' = p' \wedge h(p) = h(p \wedge q)$, entonces por el Lema 2.42 tenemos que $q = p \wedge q$ de lo que se deduce que $q = f(p') \leq p$ y por lo tanto $A_p^\pi \neq \emptyset$ lo que resulta ser una contradicción. $\square$

Este último lema y el Teorema 2.41, nos permiten observar que para cada epimorfismo tenemos la Π-función inducida y que toda Π-función tiene asosiado un $\mathcal{S}$-epimorfismo. Por lo tanto, no es difícil verificar que el conjunto de los $\mathcal{S}$-epimorfismos de A en A' ($Epi(A, A')$) es coordinable con el conjunto de las Π-funciones de A en A ($\mathcal{F}(A_1, A_2)$), i.e.

$$|Epi(A, A')| = |\mathcal{F}(A_1, A_2)|.$$

Sea $|\Pi(A_1)| = m$ y $|\Pi(A_2)| = n$, notaremos con $A_1 = A_{t_{1,i};t_{2,j};t_{3,k}}$ y $A_2 = B_{s_{1,i};s_{2,j};s_{3,k}}$ con $1 \leq i \leq 2$ y $1 \leq j, k \leq 3$ dos $\mathcal{S}$-álgebras finitas, donde A_1 tiene $t_{1,1} + 2t_{1,2}$ primos de tipo I, $2(t_{2,2}+t_{2,3})+4t_{2,1}$ de tipo II y $2(t_{3,1}+t_{3,2})+4t_{3,3}$ de tipo III. Por lo tanto,

$$t_{1,1}+2t_{1,2}+2(t_{2,2}+t_{2,3})+4t_{2,1}+2(t_{3,1}+t_{3,2})+4t_{3,3}=m.$$

De manera análoga se contabilizan los primos de A_2. Es claro que $s_{i,j}\leq t_{i,j}$ y por lo tanto, el conjunto $\mathcal{F}(A_2,A_1)\neq\emptyset$. Además, si notamos con $\mathcal{F}_{ij}(A_2,A_1)$ al conjunto de las $\mathcal{S}$-funciones inyectivas entre los elementos primos de tipo i subtipo j entre A_2 y A_1 resulta que:

$$|\mathcal{F}(A',A)|=\prod_{1\leq i\leq 2}|\mathcal{F}_{1,i}(A',A)|\cdot\prod_{\substack{2\leq s\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}|\mathcal{F}_{s,j}(A',A)|.$$

De todo lo expuesto anteriormente concluimos el siguiente

Teorema 2.44.

$$|Epi(A_2,A_1)|=\frac{s_{1,1}!}{(s_{1,1}-t_{1,1})!}\cdot\frac{(2s_{1,2})!}{(2s_{1,2}-t_{1,2})!}\cdot\frac{s_{2,1}!}{(s_{2,1}-t_{2,1})!}\cdot\frac{s_{2,2}!}{(s_{2,2}-t_{2,2})!}$$

$$\cdot\frac{(2s_{2,3})!}{(2s_{2,3}-t_{2,3})!}\cdot\frac{(2s_{3,1})!}{(2s_{3,1}-t_{3,1})!}\cdot\frac{(2s_{3,2})!}{(2s_{3,2}-t_{3,3})!}\cdot\frac{(4s_{3,3})!}{(4s_{3,3}-t_{3,3})!}$$

$$|Aut(A_2,A_2)|=s_{1,1}!\cdot(2s_{1,2})!\cdot s_{2,1}!\cdot s_{2,2}!(2s_{2,3})!\cdot(2s_{3,1})!\cdot(2s_{3,2})!\cdot(4s_{3,3})!$$

Dem. Para calcular el número de epimorfismos tenemos que contabilizar el número de funciones inyectivas de van de los primos del álgebra de partida en los primos de la imagen de h y se verifica lo postulado. Por otra parte, si tomamos $h\in Epi(A,A)$ tal que h sea inyectivo, entonces la $\mathcal{S}$-función f, función inducida por h, es sobre. Como $f/_{\Pi(A)}$: $\Pi(A)\to\Pi(A)$ es inyectiva se verifica sin dificultad que el número de automorfismos es el enunciado. $\square$

2.6.3 Ejemplos. mpM-álgebras, álgebras de Lukasiewicz trivalentes y álgebras de Boole

Es de destacar que estos resultados se podrían haber obtenido con técnicas topológicas, utilizando la dualidad de Priestley presentada para las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales estudiadas en [61].

Por otro lado, si consideramos $T(x) = x$ la identidad tenemos que las álgebras A_1 y A_2 son mpM-algebras finitas y por lo tanto se verifica:

$$|Epi_{\mathcal{S}}(A_2, A_1)| = |Epi_{mpM}(A_2, A_1)| = \frac{s_{1,1}!}{(s_{1,1} - t_{1,1})!} \cdot \frac{s_{2,1}!}{(s_{2,1} - t_{2,1})!} \cdot \frac{(2s_{3,1})!}{(2s_{3,1} - t_{3,1})}!$$

Si A_1 y A_2 son álgebras de Łukasiewicz de orden 3, resulta que:

$$|Epi_{\text{Ł}_3}(A_2, A_1)| = \frac{s_{1,1}!}{(s_{1,1} - t_{1,1})!} \cdot \frac{s_{2,1}!}{(s_{2,1} - t_{2,1})!}.$$

Además, si A_1y A_2 son álgebras de Boole:

$$|Epi_B(A_2, A_1)| = \frac{s_{1,1}!}{(s_{1,1} - t_{1,1})!}.$$

2.7 El retículo de subvariedades $\Lambda(\mathcal{S})$

Presentaremos primero algunas consideraciones previas. Sea K un conjunto de álgebras finitas, entonces notaremos con $\mathcal{V} = Var(K)$ a la variedad generada por K. Por otra parte, por el Lema de Jónsson, el retículo $\Lambda(\mathcal{V})$ de todas las subvariedades de $\mathcal{V}$ es un retículo distributivo finito y, por lo tanto, $\Lambda(\mathcal{V})$ es isomorfo al retículo $\mathcal{O}(P)$ de los ideales del poset P de los elementos irreducibles de $\Lambda(\mathcal{V})$. Por otro lado, es bien sabido que $\mathcal{V}' \in \Lambda(\mathcal{V})$ es un elemento irreducible si, y solo si, existe un álgebra subdirectamente irreducible $A \in \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}' = Var(\{A\})$. Más aún, si A y B son álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathcal{V}$, $Var(\{A\}) \subseteq Var(\{B\})$ si, y solo si, $A \in \mathbf{H}(\mathbf{S}(B))$. Donde $\mathbf{H}(W) = \{C \in \mathcal{V} : \textit{existe un epimorfismo } p : C \to W\}$ y $\mathbf{S}(Z)$ el conjunto de las subálgebras de Z.

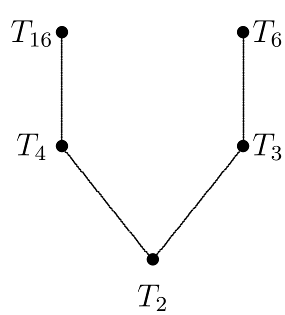
El propósito de esta sección es, a partir de estos resultados, dar una descripción completa del retículo de subvariedades de la variedad de las $\mathcal{S}$-álgebras, a la que notaremos con **mpMS**.

Por el Teorema 2.26, sabemos que $\mathbf{Si}_{fin}(\mathbf{mpMS}) = \{T_2, T_3, T_4, T_6, T_{16}\}$ donde $\mathbf{Si}_{fin}(\mathbf{mpMS})$ es el conjunto de las álgebras subdirectamente irreducibles finitas de **mpMS** que en este casos son todas las subdirectamente irreducibles. Luego, vale el siguiente resultado.

Lema 2.45. $\mathbf{H}(\mathbf{S}(A)) = \mathbf{S}(A)$, *para toda* $A \in \mathbf{mpMS}$.

Dem. Como consecuencia los resultados obtenidos en la Sección 2.6 sabemos que solo se pueden construir un epimorfismo de un álgebra simple en una sub-álgebra de ella y como la variedad es semisimple y finitamente generada, tenemos que $\mathbf{H}(\mathbf{S}(A)) = \mathbf{S}(A)$, para toda álgebra subdirectamente irreducible de **mpMS**. □

Luego, $\mathbf{H}(\mathbf{S}(T_2)) = \{T_2\}$, $\mathbf{H}(\mathbf{S}(T_3)) = \{T_2, T_3\}$, $\mathbf{H}(\mathbf{S}(T_4)) = \{T_2, T4\}$, $\mathbf{H}(\mathbf{S}(T_6)) = \{T_2, T_3, T_6\}$ y $\mathbf{H}(\mathbf{S}(T_{16})) = \{T_2, T_4, T_{16}\}$. Entonces, el poset $\langle \mathbf{Si}_{fin}, \leq \rangle$ tiene el siguiente diagrama de Hasse:



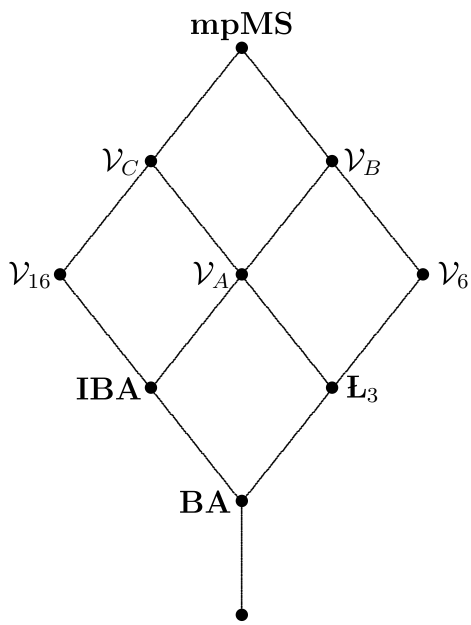
El siguiente teorema será utildad para determinar el retículo $\Lambda(\mathbf{mpMS})$.

Teorema 2.46. (A. Davey) *Sea K un conjunto finito de álgebras finitas, tal que $\mathcal{V} = Var(K)$ es a congruencias distributivas. Consideremos el conjunto ordenado $\langle \mathbf{Si}_{fin}(\mathcal{V}), \leq \rangle$ donde $A \in B$ si, y solo si, $A \in \mathbf{H}(\mathbf{S}(B))$. Entonces, $\Lambda(\mathcal{V})$ es un retículo distributivo finito isomorfo a $\mathcal{O}(\mathbf{Si}_{fin}(\mathcal{V}))$.*

Sean $\mathcal{V}_2 = Var(T_2),\ \mathcal{V}_3 = Var(T_3),\ \mathcal{V}_4 = Var(T_4),\ \mathcal{V}_6 = Var(T_6),\ \mathcal{V}_A = Var(\{T_2, T_3, T_4\})$, $\mathcal{V}_A = Var(\{T_2, T_3, T_4, T_6\}),\ \mathcal{V}_A = Var(\{T_2, T_3, T_4, T_{16}\})$.

Es claro que $\mathcal{V}_2$ coincide con la variedad **BA** de las álgebras de Boole, $\mathcal{V}_3$ coincide con la variedad $\mathbf{Ł}_3$ de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes y $\mathcal{V}_4$ coincide con la variedad **IBA** de las álgebras de Boole involutivas (ver [57]).

Teniendo en cuenta el Teorema 2.46 podemos afirmar que $\Lambda(\mathbf{mpMS})$ es un retículo finito distributivo con el siguiente diagrama de Hasse:



3 Capítulo III

En este capítulo introducimos y estudiamos las mpM-álgebras enriquecidas con un automorfismo de período k, con $k \in I\!N$, $k \geq 2$, a las que denominamos $\mathcal{C}_k$-álgebras. Ellas constituyen una generalización natural de las $\mathcal{S}$-álgebras desarrolladas en el Capítulo II que son las que corresponden al caso $k = 2$. Comenzamos nuestro estudio presentando las propiedades más importantes de esta nueva estructura. Además, extendemos algunos resultados establecidos para las mpM-álgebras período 2 a las de período k, tales como la relación entre los c-filtros y las conguencias. Esto nos permitió determinar la familia de ultrafiltros asociada con cada c-filtro maxinal. Por otra parte, determinamos las condiciones necesarias y suficientes para que una congruencia sea maximal, lo que fue posible considerando una nueva operación binaria, la implicación cíclica, y caracterizando a las congruencias por medio de los sistemas deductivos asociados a está implicación. Además, las propiedades que verifica esta implicación nos permitió mostrar que la variedad de las $\mathcal{C}_k$-álgebras es semisimple. También determinamos, utilizando las técnicas desarrolladas por Birula-Rasiowa ([5]), las álgebras simples. Asimismo, mostramos que esta variedad es finitamente generada y localmente finita. Finalmente, describimos las $\mathcal{C}_k$-álgebras libres con un conjunto finito de n generadores libres e indicamos la fórmula para calcular su cardinal en función de los parámetros n y k. Verificamos y testeamos este resultado para los casos $k = 1$ y $k = 2$, mostrando que coninciden con los ya obtenidos en [61] y en el Capítulo II de esta tesis, respectivamente.

3.1 Operadores k-cíclicos en las mpM-álgebras

Las álgebras de Boole equipadas con un automorfismo de período k, k un enetero mayor o igual a 2, fueron introducidas por Gr. Moisil [53] y las que denominó *álgebras de Boole cíclicas*. Además A. Monterio ([55]) se interesó en la estructura finita de las álgebras libres. Posteriormente, H. Cendra (profesor de la UNS) en [14] presenta un método para construir un cuerpo de Cuerpo de Galois $\mathbf{GF}(2^k)$ finito, a partir de un álgebra de Boole cíclica finita y recisprocamente.

Más recientemente, en 2006, Díaz Varela en [19] probó que si consideramos a los anillos conmutativos de caracteristica 2 con raiz cuadrada (una operación primitiva agregada) como una variedad, esta está generada por los cuerpos $\mathbf{GF}(2^k)$ finitos, para la prueba se usan los resultados de álgebras de Boole cíclicas comentadas anteriormente.

En esta sección definiremos las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales equipadas con un automorfismo de período k y nos abocaremos al estudio de sus propiedades más importantes. Además, extenderemos algunos de los resultados vistos en el Capítulo II.

Definición 3.1. *Una mpM-álgebra k-cíclica (ó $\mathcal{C}_k$-álgebra) es un par (A, t) donde A es una mpM-álgebra y $t : A \to A$ es un automorfismo tal que $t^k(x) = x$ con k entero, $k \geq 0$ (donde $t^0(x) = x$ y $t^n(x) = (t^{n-1} \circ t)(x)$ si $n \geq 1$).*

Cuando no haya lugar a confusión escribiremos tx en lugar de $t(x)$.

Cabe observar que las *mpM*-álgebras simétricas, estudiadas en el Capítulo II, las álgebras de Boole cíclicas estudiadas en [55] y las álgebras de Łukasiewicz trivalentes cíclicas de [1], son ejemplos de $\mathcal{C}_k$-álgebras.

Observación 3.2. *Teniendo en cuenta los resultados establecidos en el Capítulo II, podemos afirmar que una forma de caracterizar a las congruencias en las $\mathcal{C}_k$-álgebras es vía los $T\triangle$–filtros del álgebra, que en adelante llamaremos filtros cíclicos (ó c-filtros). Más precisamente, se puede probar que si (A,t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra con más de un elemento, entonces*

(i) $Con(A) = \{R(F) : F \in \mathcal{C}(A)\}$, *donde* $R(F) = \{(x,y) \in A \times A :$ *existe* $f \in F$ *tal que* $x \wedge f = y \wedge f\}$, *siendo* $\mathcal{C}(A)$ *al conjunto de todos los c-filtros de* A.

(ii) *Los retículos* $Con(A)$ *y* $\mathcal{C}(A)$ *son isomorfos considerando las correspondencias* $\Theta \longmapsto F_\Theta$ *y* $F \longmapsto R(F)$, *que son inversas una de la otra.*

En el Lema 3.3 resumiremos las propiedades de los filtros primos y los ultrafiltros de las $\mathcal{C}_k$-álgebras, las cuales son consecuencia directa de los resultados obtenidos en la Sección 1.4 del Capítulo II y serán de utilidad más adelante.

Lema 3.3. *Sea* (A,t) *una* $\mathcal{C}_k$*-álgebra y* $P \subseteq A$ *un filtro primo. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(a) $t^i(P)$ *es un fitro primo,* $1 \leq i \leq k$,

(b) P *es minimal (maximal) si, y sólo si,* $t^i(P)$ *es minimal (maximal),*

(c) U *es un ultrafiltro si, y sólo si,* $t^i(P)$ *es un ultrafiltro,* $1 \leq i \leq k$,

(d) $\varphi(t^i(P)) = t^i\varphi(P)$, $1 \leq i \leq k$,

(f) *si* F *es un c–filtro de* A *y* $F \subseteq P$, *entonces* $F \subseteq \varphi(P) \cap t^i(P)$, *donde* φ *es la transformación de Birula–Rasiowa* (B-R),

(g) *si* $P \subseteq Q$ *y* Q *es un filtro primo de* A, *entonces* $\varphi(P) = Q$ *ó* $P = Q$.

Dem. (a) y (b): Son consecuencia directa de la Proposición 6.15.

(c): Es inmediata de la Proposición 2.21.

(d): Resulta de la Proposición 2.17.

(f): Es fácil ver que si F es un c-filtro, $t^i F = F$ para todo i, $1 \leq i \leq k$. Como por hipótesis $F \subseteq P$, entonces $N = t^i(N) \subseteq t^i(P)$. Sea ahora $x \in N$, entonces por hipótesis inferimos que $\triangle x \in P$ y por (T4) tenemos que $\sim \triangle x \notin \varphi(P)$. Luego, como por (T14) $1 = x \vee \sim \triangle x \in \varphi(P)$ y $\varphi(P)$ es filtro primo inferimos que $x \in \varphi(P)$. Por lo tanto, $N \subseteq \varphi(P) \cap t^i(P)$.

(g): Se verifica en las mpM-álgebras y por lo tanto matiene su validez en las $\mathcal{C}_k$-álgebras. □

En lo que sigue nos abocaremos al estudio del espectro primo de una $\mathcal{C}_k$-álgebra A con técnicas algebraicas. Observemos que el mismo podría realizarse utilizando técnicas topológicas como en [61], adosándole una homeomorfismo que represente al autmorfismo t.

Proposición 3.4. *Sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra y sea $U \subseteq A$ un ultrafiltro. Entonces $N = \bigcap_{i=0}^{k-1} t^i U \cap \varphi(t^i U)$ es un c–filtro de A.*

Dem. Es claro que N es un filtro de A. Luego, solo resta probar que N es cerrado por $\triangle$ y t. En efecto, sea $x \in N$ entonces por (T14) tenemos que $\sim x \vee \triangle x \in N$. Como $x \in \varphi(t^i U)$ para algún i, $0, \leq i \leq k-1$, entonces $\sim x \notin t^i U$ y por el Lema 3.3 (a) inferimos que $\triangle x \in t^i U$. Si suponemos ahora que $x \in t^i(U)$, entonces $\sim x \notin \varphi(t^i U)$ y por lo tanto, $\triangle x \in \varphi(t^i U)$. De las afirmaciones anteriores se deduce que $\triangle x \in N$. Por otra parte, sea $x \in N$, si $x \in \bigcap_{i=0}^{k-1} t^i(U)$, entonces $t(x) \in \bigcap_{i=0}^{k-1} t^i(U)$. Además, si $x \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \varphi(t^i U)$, entonces $t(x) \in \bigcap_{i=0}^{k-1} t(\varphi t^i(U))$ y por el Lema 3.3 (d) concluimos que $t(x) \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \varphi(t^i U)$, de donde resulta que $t(x) \in N$. □

En lo que sigue veremos como representar a los c-filtros maximales en término de ciertos ultrafiltros especiales, extendiendo los resultados establecidos en el Teorema 2.22.

Teorema 3.5. *Sea A una $\mathcal{C}_k$-álgebra y $N \subseteq A$. Entonces N es un c–filtro maximal de A si, y sólo si, existe un ultrafiltro U de A tal que*

$$N = \bigcap_{i=0}^{k-1} t^i U \cap \varphi(t^i U).$$

Además, esta representación es única.

Dem. Sea N es c–filtro maximal de A, como es propio existe un ultrafiltro U de A tal que $N \subseteq U$. Luego, por Lema 3.3 inferimos que $N \subseteq \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} t^i U \cap \varphi(t^i U)$. De la Proposición 3.4 y la maximilidad de N se concluye la demostración.

Recíprocamente, sea U un ultrafiltro de A tal que $N = \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} t^i U \cap \varphi(t^i U)$. Por la Proposición 3.4 tenemos que N es un c–filtro de A y como N es un filtro propio, entonces existe un c–filtro maximal W tal que $N \subseteq W$. Luego, por la condición necesaria sabemos que existe un ultrafiltro Y de A, tal que $W = \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} t^i Y \cap \varphi(t^i Y)$ y como Y es un filtro primo tenemos que $t^i(U) \subseteq Y$ ó $\varphi(t^i U) \subseteq Y$. Además, por el Lema 3.3, sabemos que $t^i(U)$ es maximal y por lo tanto $t^i(U) = Y$. Por otra parte, si $\varphi(t^i U) \subseteq Y$, por el Lema 3.3, tenemos que $t^i U = \varphi(\varphi(t^i U)) = Y$ ó $\varphi(t^i U) = Y$. Ambos casos conducen a $N = W$. $\square$

Definición 3.6. *Sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra. Diremos que un c-filtro maximal N es de período d, si d es el menor entero positivo tal que $t^d N = N$. En este caso diremos que el c-filtro maximal $N = \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} t^i U \cap \varphi(t^i U)$ es de período d, o que es un d-filtro.*

De la definición anterior resulta el siguiente lema que juega un rol fundamental en lo que sigue.

Lema 3.7. *Sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra. Si N es un d-filtro de A, entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) d/k,

(ii) *los únicos ultrafiltros de A que contiene a N son de la forma* $\{t^iP, \varphi(t^iP)\}_{\{0\leq i\leq d-1\}}$.

Dem. (i): De la Definición 3.6 es claro que $d \leq k$, entonces sabemos que $k = dq + r$ con $r < d$. Luego $t^k N = t^{dq+r}N = t^r(t^{dq}N) = t^r N$ y como t es k-cíclica inferimos que $t^r N = N$, de lo que resulta que $r = 0$.

(ii): Es consecuencia directa de la Definición 3.6 y el Teorema 3.5. □

3.2 La implicación cíclica y sus sistemas deductivos

A continuación buscamos caracterizar a las congruencia a partir de ciertos sistemas deductivos, lo que nos permitirá probar la semisimplicidad de la variedad.

Dada una $\mathcal{C}_k$-álgebra (A, t), definiremos una nueva operación binaria $\rightharpoondown$ sobre A del siguiente modo:

$$a \rightharpoondown b = \bigvee_{i=1}^{k} \nabla(\sim t^i a) \vee b.$$

Lema 3.8. *En toda $\mathcal{C}_k$-álgebra se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $a \rightharpoondown a = 1$,

(ii) $a \rightharpoondown \triangle a = 1$,

(iii) $a \rightharpoondown t^s(a) = 1$, *para todo* $s \in \mathbb{N}$,

(iv) $a \rightharpoondown (a \wedge b) = a \rightharpoondown b$,

(v) $a \leq b$ *implica* $c \rightharpoondown a \leq c \rightharpoondown b$,

(vi) $((a \rightharpoondown b) \rightharpoondown a) \rightharpoondown a) = 1$,

(vii) $a \rightharpoondown (b \rightharpoondown a) = 1$,

(viii) $1 \rightharpoondown a = 1$ *implica* $a = 1$,

(ix) $(a \rightharpoondown (b \rightharpoondown c)) = ((a \rightharpoondown b) \rightharpoondown (a \rightharpoondown c))$,

(x) $a \rightharpoondown 1 = 1$.

Dem. Solo probaremos (iii), (iv) y (ix).

(iii): Si $s \leq k$, entonces $1 = \nabla \sim t^s a \vee t^s(a) \leq \bigvee_{i=1}^{k} \nabla \sim t^i a \vee t^s(a) = a \rightharpoondown t^s(a)$. Por otra parte, si $k \leq s$, entonces existen q, r enteros positivos tales que $s = k \cdot q + r$ y $r < k$. Por lo tanto, $t^s(a) = t^r(a)$ y con un razonamiento análogo al anterior tenemos probada la propiedad.

(vi): Probemos primero que: $(*) \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\bigwedge_{i=1}^{k} t^i x) = \bigvee_{n=1}^{k-1} \bigwedge_{i=1}^{k} t^{n+i} x = \bigwedge_{j=1}^{k} t^j x$. En efecto, basta mostrar que para todo entero n_0 tal que $1 \leq n_0 \leq k$ se verifica que:

$$\{t^{n_0+i} x\}_{1 \leq i \leq k} = \{t^j x\}_{1 \leq j \leq k}.$$

Sean $A = \{t^j x\}_{1 \leq j \leq k}$ y $B = \{t^{n_0+i} x\}_{1 \leq i \leq k}$. Si j es tal que $1 \leq j \leq k$, entonces puede suceder que: (a) $j > n_0$ ó (b) $j = n_0$ ó (c) $j < n_0$.

Veamos que, en todos los casos, existe i tal que $t^j x = t^{n_0+i} x$. En efecto, si ocurre (a) tenemos que $0 < j - n_0 < k$, entonces tomando $i = j - n_0$ la propiedad está probada. Si vale (b), tomando $i = k$ se verifica. Por último, si ocurre (c), tenemos que $0 < n_0 - j < k$ y por lo tanto $0 < k - (n_0 - j) < k$. Luego, si tomamos $i = k - (n_0 - j)$ resulta $t^j x = t^{n_0+i} x$. De las afirmaciones anteriores concluimos que $A \subseteq B$.

Recíprocamente, como $0 \leq i \leq k$, entonces $n_0 \leq i + n_0 \leq k + n_0$ lo que nos lleva a analizar los dos casos siguientes. Si ocurre (a) $n_0 \leq i + n_0 \leq k$, entonces $j = i + n_0$ es el buscado. Si ocurre (b) $k < i + n_0 \leq k + n_0$, dividiendo $i + n_0$ por k tenemos que $i + n_0 = q \cdot k + r$, con $0 \leq r < k - 1$. Luego, $t^{i+n_0} x = t^{q \cdot k + r} x = t^r x$ y si tomamos $j = r$ tenemos probada la inclusión buscada. Por lo tanto, $A = B$ de donde concluimos la validez de $(*)$.

Mostremos ahora que $((a \rightharpoondown b) \rightharpoondown a) = a$. En primer lugar, observemos que $(**)$ $a \rightharpoondown b = \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee b = \nabla \sim (\bigwedge_{j=1}^{k} t^j a) \vee b = \nabla \sim z \vee b$, donde $z = \bigwedge_{j=1}^{k} t^j a$. Luego,

$(a \rightharpoondown b) \rightharpoondown a = (\nabla \sim z \vee b) \rightharpoondown a) = \bigvee_{n=1}^{k} \nabla \sim t^n(\nabla \sim z \vee b) \vee a = \nabla \sim (\nabla \sim z \vee b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} \nabla \sim t^n(\nabla \sim z \vee b) \vee a = \nabla(\sim \nabla \sim z \wedge \sim b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n \nabla(\sim \nabla \sim z \wedge \sim b) \vee a =$

$\nabla(\triangle z \wedge \sim b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n \nabla(\triangle z \wedge \sim b) \vee a = (T17)\ (\triangle z \wedge \nabla \sim b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\triangle z \wedge \nabla \sim b) \vee a$. Luego, reemplazando z tenemos que $(a \rightharpoondown b) \rightharpoondown a = (\triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j a \wedge \nabla \sim b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j a \wedge \nabla \sim b) \vee a = (\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) \vee a = (\triangle a \wedge \bigwedge_{j=1}^{k-1} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) \vee a = ((\triangle a \wedge \bigwedge_{j=1}^{k-1} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) \vee a) \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) = (T2)\ a \vee \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \wedge \nabla \sim b) = a \vee (\bigvee_{n=1}^{k-1} t^n(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a) \wedge t^n \nabla \sim b)$. De lo demostrado, $(**)$ y (T2) inferimos que $(a \rightharpoondown b) \rightharpoondown a = a \vee (\bigwedge_{i=1}^{k} t^i \triangle a \wedge \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n \nabla \sim b) = a \vee (\triangle a \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} t^i \triangle a \wedge \bigvee_{n=1}^{k-1} t^n \nabla \sim b) = a$. De esta afirmación y el inciso (i), (vi) queda demostrada.

(ix): Observemos primero que $(a \rightharpoondown b) \rightharpoondown (a \rightharpoondown c) = \bigvee_{i=1}^{k} \nabla \sim t^i(\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee b) \vee (\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c) = \bigvee_{i=1}^{k} \nabla t^i(\bigwedge_{j=1}^{k} \sim \nabla \sim t^j a \wedge \sim b) \vee (\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c) = \bigvee_{i=1}^{k} t^i(\bigwedge_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \sim b) \vee (\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c) = (T10)\,(T17)\ \bigvee_{i=1}^{k} t^i \triangle(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j a \wedge \nabla \sim b) \vee \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c = (T10)\ (\bigvee_{i=1}^{k} t^i \bigwedge_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b) \vee (\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c) = (\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \vee \bigvee_{i=1}^{k-1} t^i \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a) \wedge \bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b) \vee (\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c) = (**)\,((\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \vee \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a) \wedge \bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b) \vee \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c = (\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \wedge \bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b) \vee (\bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c) = ((\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \vee \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a) \wedge (\bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b \vee \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a)) \vee c = ((\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \vee \bigvee_{j=1}^{k} t^j \sim \triangle a) \wedge (\bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b \vee \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a)) \vee c$. Como por (T4) sabemos que $\triangle a$ es un elemento booleano, entonces $(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \vee \bigvee_{j=1}^{k} t^j \sim \triangle a) = 1$. Luego, tenemos que

$(a \rightharpoondown b) \rightharpoondown (a \rightharpoondown c) = \bigvee_{i=1}^{k} t^i \nabla \sim b \vee \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j a \vee c = \bigvee_{j=1}^{k} \nabla(\sim t^j a) \vee \bigvee_{i=1}^{k} \nabla(\sim t^i b) \vee c = a \rightharpoondown (b \rightharpoondown c)$, con lo que la propiedad queda probada . $\square$

A continuación vamos a considerar la noción de sistema deductivo para la implicación

$\rightharpoondown$ de la manera habitual. Es decir, dada una $\mathcal{C}_k$-álgebra A y $D \subset A$, diremos que D es un sistema deductivo cíclico (ó s.d.c.) si, y sólo si, se verifican (D$_c$1) $1 \in D$ y (D$_c$2) $x, x \rightharpoondown y \in D$ implican que $y \in D$.

Lema 3.9. *Sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra y $F \subseteq A$, entonces las siguiente condiciones son equivalentes:*

(i) *F es un sistema deductivo cíclico,*

(ii) *F c-filtro.*

Dem. (i)$\Rightarrow$ (ii): Es claro que $1 \in F$. Sean $a, b \in F$, por Lema 3.8 (vii) y (iv) $1 = b \rightharpoondown (a \rightharpoondown b) = b \rightharpoondown (a \rightharpoondown (a \wedge b)) \in F$. Entonces por (D$_c$2) inferimos que $a \wedge b \in F$. Sean ahora $a \in F$ y $b \in A$ tales que $a \leq b$, entonces por Lema 3.8 (v) tenemos que $1 = a \rightharpoondown a \leq a \rightharpoondown b$. De esto último, el Lema 3.8 (viii) y (D$_c$2) resulta que $b \in F$. Las condiciones (C2) y (C3) de la definición de c-filtro es consecuencia directa del Lema 3.8 incisos (ii) y (iii).

(ii)$\Rightarrow$ (i): Sean $a, a \rightharpoondown b \in F$, entonces $\triangle t^j a \in F$ para todo $1 \leq j \leq k$. Además, $\triangle(a \rightharpoondown b) \in F$ y por lo tanto, $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \triangle(a \rightharpoondown b) \in F$. Por otra parte, $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \triangle(a \rightharpoondown b) = \bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \triangle(\bigvee\limits_{i=1}^{k} \nabla \sim t^i a \vee b) = (T18) \bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge (\bigvee\limits_{i=1}^{k} \nabla \sim t^i a \vee \triangle b) = (\bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \bigvee\limits_{i=1}^{k} \sim \triangle t^i a) \vee (\bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \triangle b) = H$. Como por (T4) sabemos que $\triangle a$ es un elemento booleano, entonces resulta que $(\bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \bigvee\limits_{i=1}^{k} \sim \triangle t^i a) = 0$ y por lo tanto $H = \bigwedge\limits_{j=1}^{k} \triangle t^j a \wedge \triangle b \leq \triangle b \leq b$. Luego, de las afirmaciones anteriores concluimos que $b \in F$. $\square$

De la Observación 3.2 y el Lema 3.9 podemos afirmar que las congruencias en las $\mathcal{C}_k$-álgebras quedan determinadas por los sistemas deductivos cíclicos. Luego, por el Lema 3.8, resultados generales de algebra universal y los establecidos por A. Monteiro ([56]), tenemos probados los siguientes resultados.

Lema 3.10. *En toda $\mathcal{C}_k$-álgebra (A,t) se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *todo s.d.c. propio de A es interseccción de s.d.c. máximales de A,*

(ii) *la intersección de todos los sistemas deductivos maximales de A es $\{1\}$.*

Teorema 3.11. *La variedad de las $\mathcal{C}_k$-álgebras es semisimple.*

3.2.1 Los sistemas deductivos generados

En lo que sigue nos ocuparemos de estudiar los sistemas deductivos cíclicos generados por un conjunto H de una $\mathcal{C}_k$-álgebra A, los cuales están definidos de la manera habitual. Es decir, como la intersección de todos los sistemas deductivos cíclicos de A que contienen a H y que notaremos con $D(H)$. Si $H = \{a\}$ escribiremos simplemente $D(a)$.

Lema 3.12. *Sea (A,t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra, $a \in A$ y $H \subseteq A$, entonces:*

(i) $D(a) = [\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a)$, *donde $[X)$ es el c-filtro generado por X,*

(ii) $D(H,a) = D(H \cup \{a\}) = \{x \in A : a \rightharpoondown x \in D(H)\}$,

(iii) $D(a) = \{x \in A : a \rightharpoondown x = 1\}$.

Dem. (i): Como $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq \triangle a \leq a$, entonces $a \in [\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a)$. Sea ahora $x \in [\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a)$, entonces $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq x$, de lo que se inferimos que $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle\triangle a \leq \triangle x$. Luego, $\triangle x \in [\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a)$. De manera similar podemos probar que $tx \in [\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a)$. Luego, por Lema 3.9 tenemos que $[\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a)$ es un s.d.c.. Por otra parte, si W es un s.d.c. y $a \in W$, es simple verificar $[\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle a) \subseteq W$, lo que concluye la demostración.

(ii): Por el Lema 3.8 (i) tenemos que $a \in D(H,a)$. Además, es claro que $h \in D(H,a)$ para todo $h \in H$. Veamos ahora que $D(H,a)$ es un sistema deductivo. En efecto, por el Lema 3.8 (x) sabemos que $1 \in D(H,a)$. Además, sean $x, x \rightharpoondown y \in D(H,a)$, entonces tenemos que $a \rightharpoondown x, a \rightharpoondown (x \rightharpoondown y) \in D(H)$. Luego, por Lema 3.8 inferimos que $1 = (a \rightharpoondown (x \rightharpoondown y)) \rightharpoondown ((a \rightharpoondown x) \rightharpoondown (a \rightharpoondown y)) \in D(H)$ de lo que resulta por (D_c2) y las afirmaciones anteriores que $a \rightharpoondown y \in D(H)$.

Por otra parte, si B un s.d.c. tal que $H \cup \{a\} \subseteq B$ se verifica sin dificultad que $D(H \cup \{a\}) \subseteq B$, lo que completa la demostración.

(iii): Es inmediata de (ii) tomando $H = \emptyset$. $\square$

Lema 3.13. *Sea (A,t) una $\mathcal{C}_k$-algebra y D_1 un s.d.c de A, entonces*

$$D(D_1, a) = \{x \in A : \text{existe}\, d \in D_1 \,\text{tal que}\, d \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq x\}.$$

Dem. Sea $B = \{x \in A : \text{existe}\, d \in D_1 \,\text{tal que}\, d \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq x\}$. Entonces es claro que $D_1 \subseteq D(D_1, a)$ y que $a \in D(D_1, a)$. Por otra parte, si $x, y \in B$, como D_1 un filtro concluimos que $x \wedge y \in B$. Veamos ahora que B es un c-filtro. En efecto, sea $z \in B$ entonces existe $w \in D_1$ tal que $w \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq z$. Luego, por (T10) tenemos que $\triangle(w \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a) = \triangle w \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq \triangle z$ y como por el Lema 3.9, D_1 es un c-filtro tenemos que $\triangle w \in D_1$ de donde inferimos que $\triangle z \in B$. De manera, análoga se prueba que $t(z) \in B$. Por otro lado, supongamos que existe un c-filtro Y tal que $D_1 \cup \{a\} \subseteq Y$. Si $x \in B$, entonces existe $d \in D_1$ tal que $d \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \leq x$. Como $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j \triangle a \in Y$ e Y es un filtro inferimos que $x \in Y$, con lo que concluimos la demostración. $\square$

3.2.2 Determinación de las congruencias maximales

Recordemos que ([8, p.59]), A/θ es un álgebra simple si, y sólo si θ es una congruencia maximal de A. Entonces teniendo en cuenta la Observación 3.2 y el Lema 3.9 las mismas quedarán determinadas si caracterizamos a los s.d.c. maximales.

Teorema 3.14. *Sea (A,t) una $\mathcal{C}_k$-algebra y $M \subseteq A$ un s.d.c., entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *M es maximal,*

(2) *si* $a \notin M$, *existe* $m \in M$ *tal que* $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \wedge m = 0$,

(3) *si* $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \vee b \in M$, *implica* $a \in M$ *ó* $b \in M$,

(4) *si* $a \notin M$, *implica* $\sim \triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) \in M$,

(5) *si* $a, b \notin M$, *implica* $a \rightharpoondown b, b \rightharpoondown a \in M$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $a \in A$ tal que $a \notin M$ y consideremos $D = D(M, a)$. Si suponemos que $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \wedge m \neq 0$ para todo $m \in M$, entonces por Lema 3.13 tenemos que $D \neq A$ y $M \subset D \subset A$, lo que contradice la maximalidad de M.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $b \in A$ tal que $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \vee b \in M$ y supongamos que $a \notin M$. Entonces por (2), existe $m \in M$ tal que $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \wedge m = 0$. Luego, $(\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \vee b) \wedge m = (\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) \wedge m) \vee (b \wedge m) = b \wedge m \in M$ y por lo tanto $b \in M$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Por hipótesis $a \notin M$ y como $\triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) \leq a$, entonces $\triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) \notin M$. Por otra parte, $\sim \triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) \vee \triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) = 1 \in M$. Luego, de las afirmaciones anteriores y (3) inferimos que $\sim \triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) \in M$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Sean $a, b \in A$ tales que $a \notin M$ y $b \notin M$. Luego, por (4) tenemos que $\sim \triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) \in M$. Como $\sim \triangle \bigwedge_{j=1}^{k} t^j(a) = \sim \bigwedge_{j=1}^{k} \triangle t^j(a) = \bigvee_{j=1}^{k} \sim \triangle t^j(a) = \bigvee_{j=1}^{k} \nabla \sim t^j(a) \leq a \rightharpoondown b$, entonces tenemos que $a \rightharpoondown b \in M$. De manera análoga se prueba que $b \rightharpoondown a \in M$.

(5) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que M no es maximal, entonces existe un s.d.c. M' tal que $M \subset M'$. Sea $a \in M' \backslash M$ y $b \in A \backslash M'$, luego por (5) $a \rightharpoondown b \in M'$ pero por ser s.d. tenemos que $b \in M'$, lo que es una contradicción. $\square$

3.3 Álgebras generadoras de la variedad de las $\mathcal{C}_k$-álgebras

En esta sección determinaremos las álgebras simples que la generan. En primer lugar, consideraremos el conjunto de los invariantes por t y por ∇, al igual que en el caso Mpm-álgebras simétricas, i.e. sea $K(A) = \{x \in A : tx = x = \nabla x\}$. En lo que sigue presentaremos algunos resultados que serán una necesarios para el desarrollo de la sección.

Proposición 3.15. *Sean (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra y $a \in A$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *$K(A)$ es una Mpm-subálgebra de A,*

(b) *$K(A)$ es una álgebra de Boole,*

(c) *si (S, t_s) es una $\mathcal{C}_k$-subálgebra de (A, t), entonces $K(S) = K(A) \cap S$,*

(d) *$[a)$ es un c-filtro si, y solo si, $a \in K(A)$,*

(e) *si $a \in K(A)$, entonces $D(a) = [a)$.*

Dem. La demostración de (a) y (b) es análoga la de la Proposición 2.28. Además, (c) es inmediata de las definiciones correspondientes. La prueba de (d) es análoga la de la Proposición 2.14. Por último, si $a \in K(A)$, entonces por (d) tenemos que $[a)$ es un s.d.c.. Además, si D_1 es un s.d.c tal que $a \in D_1$ es inmediato que $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j \triangle \in D_1$. Luego, por el Lema 3.12 concluimos que $D(a) \subseteq D_1$. $\square$

Teorema 3.16. *Sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *(A, t) es $\mathcal{C}_k$-álgebra simple,*

(ii) *para todo $a \in A$, $a \neq 1$, $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) = 0$*

(iii) $K(A) = \{0, 1\}$.

Dem. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): Es análoga a la demostración del Teorema 2.15.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Como (A, t) es simple entonces $\{1\}$ es un s.d.c. maximal. De esta última afirmación y el Teorema 3.14 (2) inferimos que $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle a) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $z \in K(A)$, $z \neq 1$. Como $\triangle z = z = t^j z$, tenemos que $t^j \triangle z = t^j z$ y por lo tanto $\bigwedge_{j=1}^{k} t^j(\triangle z) = z = 0$, lo que completa la demostración. $\square$

Sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra. Si para todo $x \in A$, k es el menor entero no negativo tal $t^k(x) = x$, diremos que (A, t) es k-periódica.

Sean T_2, T_3 y T_4 las álgebras que generan la variedad de las Mpm-álgebras. En lo que sigue consideraremos las álgebras $T_{2,k}$, $T_{3,k}$ y $T_{4,k}$ que se obtienen de realizar el producto cartesiano k-veces de cada una de la álgebras indicadas y donde las operaciones están definidas punto a punto. Por otra parte, sea t una función tal que $t : T_{i,k} \to T_{i,k}$ con $i = 2, 3, 4$ definida por $t(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_k, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$ donde $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in T_{i,k}$. Se puede probar sin dificultad que t es un automorfismo de período k y por lo tanto, $(T_{2,k}, t)$, $(T_{3,k}, t)$ y $(T_{4,k}, t)$ son $\mathcal{C}_k$-álgebras. En particular son k-periódicas. Veremos que ellas son álgebras simples.

Corolario 3.17. *Las $\mathcal{S}_k$-álgebras $(T_{i,k}, t)$ con $i = 2, 3, 4$ son $\mathcal{C}_k$-álgebra simples.*

Dem. En primer lugar consideramos el álgebra $(T_{4,k}, t)$. Por construcción tenemos que $0, 1 \in K(T_{4,k})$. Veamos ahora que esos son los únicos elementos invariantes de $T_{4,k}$. En efecto, sea $z \in K(T_{4,k})$ tal que $z \neq 0$ y $z \neq 1$, entonces $z = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$. Luego, se presentan dos casos: (I) $x_i \in \{a, b\}$ para algún i, $1 \leq i \leq k$ ó (II) $x_i \in \{0, 1\}$ para todo i, $1 \leq i \leq k$. Si ocurre (I), como $\nabla a = \nabla b = 1$ inferimos que $\nabla z \neq z$, lo que es una contradicción. Si ocurre (II), de la hipótesis concluimos que existe l tal que $x_l = 0$ y $x_{l+1} = 1$ ó $x_l = 1$ y $x_{l+1} = 0$. En cualquier caso, por la definición de t tenemos que $tz \neq z$, lo que contradice que z sea invariante. Por lo tanto, por el Teorema 3.16 inferimos que $(T_{4,k}, t)$ es una $\mathcal{S}_k$-álgebra simple. Con un razonamiento similar se prueba que $(T_{2,k}, t)$ y $(T_{3,k}, t)$ son $\mathcal{S}_k$-álgebras simples. $\square$

Corolario 3.18. *Las subálgebras de* $(T_{i,k}, t)$ *con* $i = 3, 4$ *son algebras simples.*

Dem. Es inmediata del inciso (c) de la Proposición 3.15. $\square$

Lema 3.19. *Toda* $\mathcal{C}_k$*-álgebra simple es finita.*

Dem. Sea A un álgebra simple de la variedad. Entonces $\{1\}$ es un c-filtro maximal de A y por el Teorema 3.5 existe un ultrafiltro U tal que $\{1\} = \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} t^iU \cap \varphi(t^iU)$, de donde resulta que los únicos utltrafiltros de A son $\{t^iU, \varphi(t^iU)\}_{\{0\leq i\leq k-1\}}$, que es un conjunto finito. Luego, el espectro primo de A es finito, por lo tanto A es finita. $\square$

Teorema 3.20. *Si* (A, t) *una* $\mathcal{C}_k$*-álgebra simple, entonces* $(A, t) \simeq (T_{i,d}, t)$ *con* $i = 2, 3, 4$ *y* $T_{i,d}$ *es d-periódica para algún entero positivo d tal que* d/k.

Dem. Por Lema 3.19 sabemos que A es finita y supongamos que $\{1\}$ es d-periódico con d/k. Entonces $\{1\} = \bigcap\limits_{i=0}^{d-1} t^iP \cap \varphi(t^iP)$ y por lo tanto el espectro primo de A es $\{t^jP, \varphi(t^jP)\}_{\{0\leq j\leq d-1\}}$.

Por otra parte, como A es un retículo finito entonces existe un elemento primo $p \in \Pi(A)$ tal que $P = [p)$, es decir que podemos considerar la transformación $\psi(p) = q$ si y solo si $\varphi([p)) = [q)$, lo que permite identificar a los filtros primos con elementos primos como en el caso de el estudio de los epimorfismos en las mpM-álgebras simétrica. Luego, p pueden ser tipo I: $p = \psi(p)$, de tipo II: $p < \psi(p)$ ó de tipo III: p y $\psi(p)$ incomparables. Supongamos que p es de tipo I, entonces el espectro primo esta formado por la anticadena $\{p, tp, \ldots, t^{d-1}p\}$ y no es difícil ver que los t^ip son de tipo I. Por lo tanto, existe un mpM-isomorfismo $\alpha : A \to T_2^d$ donde $\alpha(p) = (1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha(tp) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$,$\alpha(t^jp) = (0, 0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0)$. Por otro lado, tenemos que $t\alpha(p) = t(1, 0, \ldots, 0) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ y en general, obtenemos $t^j\alpha(p) = t^{j-1}t\alpha(p) = t^{j-1}t(1, 0, \ldots, 0) = t^{j-1}(0, 1, 0, \ldots, 0) = \cdots = (0, 0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0)$, con lo que se verifica que α es un $\mathcal{C}_k$-isomorfismo y por lo tanto $(A, t) \simeq (T_{2,d}, t)$. Si p es de tipo II, el espectro primo está formado por

$$\{p, tp, \ldots, t^{d-1}p, \psi(p), \psi(tp), \ldots, \psi(t^{d-1}p)\}$$

donde $t^i p < \psi(t^i p)$. Observemos que los primos de $T_{3,d}$ son de la forma $(0, \ldots, 0, c, 0, \ldots, 0)$ y $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, luego por un razonamiento análogo al caso anterior, tenemos que $(A, t) \simeq (T_{3,d}, t)$. Si p es de tipo III, el espectro primo es una anticadena

$$\{p, tp, \ldots, t^{d-1}p, \psi(p), \psi(tp), \ldots, \psi(t^{d-1}p)\}$$

y los primos de $T_{4,d}$ son de la forma $(0, \ldots, 0, a, 0, \ldots, 0)$ y $(0, \ldots, 0, b, 0, \ldots, 0)$. Luego, con un razonamiento análogo al de los casos anteriores tenemos que $(A, t) \simeq (T_{4,d}, t)$. $\square$

Es bien sabido que dado un entero positivo k, la relación divide $(/)$ es una relación de orden y que el conjunto $D_{iv}(k)$ de los divisores k forman un retículo donde el máximo común divisor entre $k_1, k_2 \in D_{iv}(k)$, que notaremos con $mcd(k_1, k_2)$, es el ínfimo entre ellos.

En el siguiente lema utilizaremos los resultados establecidos en [55] por A. Monteiro. Este autor probó que la familia de todas las subágebras del álgebra de Boole k-periódica B_k (con k átomos), es isomorfa al conjunto de divisores de k ordenados por la relación divide. Para cada d divisor de k, la subálgebra B_d asociada a d de B_k es la única subálgebra de B_k d-periódica caracterizada por $B_d = \{g \in B_k : t^d g = g\}$.

Lema 3.21. *Las subálgebras de $(T_{i,k}, t)$ son las álgebras $(T_{i,d}, t_d)$ con d/k. Además, $T_{2,d}$ es una $\mathcal{C}_k$-subálgebra $T_{3,d}$ y $T_{4,d}$ así como $T_{3,d}$ no es una subálgebra de $T_{4,d}$.*

Dem. Sea $T_{i,k}^d = \{x \in T_i^k : t^d x = x\}$, entonces es claro que $(T_{i,k}^d, t'_d)$ es una subálgebra de $(T_{i,k}, t)$ donde la restricción $t|_{T_{i,k}^d} = t'_d$ es un automorfismo de $T_{i,k}^d$. Por otra parte, del Lema 3.7 tenemos que el espectro primo de $T_{i,k}^d$ es de la forma $\{t^i P, \varphi(t^i P)\}_{\{0 \leq i \leq d-1\}}$ y por lo tanto, $(T_{i,k}^d, t'_d) \simeq (T_{i,d}, t_d)$.

Por otra parte, es claro que $(B(T_{i,k}), t_B) \simeq B_k$ para $i = 2, 3$, donde $t|_{B(T_{i,k})} = t_B$ y $B(A)$ es el conjunto de los elementos booleanos de la $\mathcal{C}_k$-álegbra A. Luego, por [55] existe d/k tal que B_d es una subálgebra de B_k. Luego, tenemos que las subálgebras de $(T_{i,k}, t)$ con $i = 2, 3$ son de la forma $(T_{i,d}, t_d)$ ya que $(B(T_{i,d}), t_B) \simeq B_d$.

Para el caso $i = 4$, es claro que $B(T_{4,k}) = T_{4,k}$. Sea d un divisor de k, entonces $k = d \cdot q$. Luego, podemos considerar a los elementos de $T_{4,k}$ como k-uplas del tipo $x = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q)$ donde $\overline{x}_1 = (x_1, \ldots, x_q)$, …, $\overline{x}_q = (x_{dq-q}, x_{dq-(q-1)}, \ldots, x_{dq})$. Por otra parte, sea el conjunto $D = \{x \in T_{4,k} : x = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q)$, tal que $\overline{x_1} = \overline{x_2} = \ldots = \overline{x_d}\}$. Entonces es claro que D es un subálgebra de $T_{4,k}$ y considerando el automorfismo $t|_D : D \to D$ tenemos que $(D, t|_D)$ es un álgebra d-periódica. Los átomos son de la forma $a_1 = (a, 0, \ldots, 0), \ldots, a_d = (0, 0, \ldots, a)$ y $b_1 = (b, 0, \ldots, 0), \ldots, b_d = (0, 0, \ldots, b)$ y verifican $t(a_i) = a_{i+1}$ y $t(b_i) = b_{i+1}$. Luego, no es difícil ver que $(D, t|_D) \simeq (T_{4,d}, t_d)$. Por otra parte, determinaremos una subálgebra de $T_{4,k}$ donde sus coordenadas pertenezcan a T_2. Tomemos $D' = \{x \in T_{4,k} : x = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q)$, tal que $\overline{x_1} = \overline{x_2} = \ldots = \overline{x_d} \in T_{2,q}\}$ y $t' = t|_{D'} : D' \to D'$, luego tenemos que $(D', t') \simeq (T_{2,d}, t_d)$. Por lo tanto, $(T_{2,d}, t_d)$ y $(T_{4,d}, t_d)$ son las únicas subalgebras de $(T_{4,k}, t)$. Como T_3 no es subálgebra de T_4, entonces $T_{3,d}$ no es subálgebra de $T_{4,d}$, lo que completa la demostración. □

Lema 3.22. *$T_{i,d_1} \cap T_{i,d_2} = T_{i,mcd(d_1,d_2)}$, $T_{2,d_1} \cap T_{i,d_2} = T_{2,mcd(d_1,d_2)}$, $T_{3,d_1} \cap T_{4,d_2} = T_{2,mcd(d_1,d_2)}$ con $i = 2, 3, 4$*

Dem. Es consecuencia directa del Lema 3.21. □

Como consecuencia directa del Corolario 3.17, el Lema 3.19, el Teorema 3.20 y resultados de álgebra universal [8, Theorem 10.16] concluimos que

Teorema 3.23. *La variedad de las $\mathcal{C}_k$-álgebras es finitamente generada y localmente finita.*

3.4 $\mathcal{C}_k$-álgebras libres

A continuación determinaremos la estructura de las $\mathcal{C}_k$-álgebras libres con un conjunto de n ,$n \in I\!N$ generadores libres, a la que notaremos con $F_{\mathcal{C}_k}(n)$. Además, indicaremos como determinar su cardinal en función de n.

Por los resultados vistos hasta aquí, para cada divisor d de k la familia $\mathcal{C}$ de los c-filtros maximales de $F_{\mathcal{C}_k}(n)$ puede ser particionada del siguente modo:

$$N_{i,d} = \{N \in \mathcal{C} : F_{\mathcal{C}_k}(n)/N \simeq T_{i,d}\}.$$

Luego, tenemos que:

$$F_{\mathcal{C}_k}(n) \simeq \prod_{d/k} T_{2,d}^{\alpha_{2,d}} \times \prod_{d/k} T_{3,d}^{\alpha_{3,d}} \times \prod_{d/k} T_{4,d}^{\alpha_{4,d}},$$

donde $\alpha_{i,d} = |N_{i,d}|$ con $i = 2, 3, 4$.

Sea ahora $Epi(F_{\mathcal{C}_k}(n), T_{i,d})$ el conjunto de todos los epimorfismos de $F_{\mathcal{C}_k}(n)$ en $T_{i,d}$ y $Aut(T_{i,d})$ el conjunto de todos los automorfismos de las álgebras $T_{i,d}$. Por [1, pag. 47] sabemos que las álgebras $T_{l,d}$ con $l = 2, 3$ sólo tienen d automorfismos que conmutan con t y estos son $t, t^2, \cdots, t^{d-1}, t^d$ de donde resulta que $|Aut(T_{l,d})| = d$. Con un razonamiento similar concluimos que $|Aut(T_{4,d})| = 2d$. Además, si consideramos la función $s : Epi(F_{\mathcal{C}_k}(n), T_{i,d}) \to N_{i,d}$ definida por $s(h) = ker(h) = h^{-1}(\{1\})$, para todo $h \in Epi(F_{\mathcal{C}_k}(n), T_{i,d})$, no es difícil probar que s es sobreyectiva y que $s^{-1}(N) = \{\alpha \circ h : \alpha \in Aut(T_{i,d})\}$. Por lo tanto,

$$\alpha_{i,d} = \frac{|Epi(F_{\mathcal{C}_k}(n), T_{i,d})|}{|Aut(T_{l,d})|}$$

Por otra parte, para cada $h \in Epi(F_{\mathcal{C}_k}(n), T_{i,d})$ existe una función $f : G \to T_{i,d}$ tal que $f = h|_G$. Si $F^*(G, T_{i,d}) = \{f : G \to T_{i,d}$ tal que $[f(G)]_{\mathcal{C}_k} = T_{i,d}\}$, entonces tenemos que:

$$|Epi(F_{\mathcal{C}_k}(n), T_{i,d})| = |F^*(G, T_{i,d})|.$$

Observemos que la condición $[f(G)]_{\mathcal{C}_k} = T_{i,d}$ es equivalente a que $f(G) \subseteq T_{i,d}$ y $f(G) \nsubseteq S$ para toda subálgebra maximal S de $T_{i,d}$. Si notamos con $M(d)$ al conjunto de los divisores maximales de d distintos a d, entonces se verifica que las subálgebras maximales de $T_{i,d}$ son de la forma $T_{i,x}$ con $x \in M(d)$. Luego, podemos escribir

$$F^*(G, T_{i,d}) = F_{i,d} \backslash \bigcup_{l \leq i} \bigcup_{x \in M(d)} F_{l,x},$$

donde $F_{i,d}$ es el conjunto de todas las funciones de G en $T_{i,d}$. Por lo tanto,

$$|F^*(G,T_{i,d})| = |F_{i,d}| - |\bigcup_{l\leq i}\bigcup_{x\in M(d)} F_{l,x}| = (i^d)^n - |\bigcup_{l\leq i}\bigcup_{x\in M(d)} F_{l,x}|.$$

Por otra parte, es bien sabido que para todo conjunto finito $\mathcal{J}$ y para toda familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ se verifica que

$$|\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_i| = \sum_{X\subseteq\mathcal{J},X\neq\emptyset} (-1)^{|X|-1} |\bigcap_{j\in X} A_j|.$$

Observemos que si tomamos $I = \{w : w \leq i\}$, tenemos que

$$|\bigcup_{l\leq i}\bigcup_{x\in M(d)} F_{l,x}| = |\bigcup_{(z,t)\in I\times M(d)} F_{z,t}| = \sum_{X\subseteq I\times M(d)} (-1)^{|X|} |\bigcap_{(j_1,j_2)\in X} F_{j_1,j_2}|,$$

donde

$$\bigcap_{(j_1,j_2)\in X} F_{j_1,j_2} = \{f \in F_{i,d} :\ f : G \to \bigcap_{(j_1,j_2)\in X} T_{j_1,j_2}\}.$$

Cálculo de los $\boldsymbol{\alpha_{i,d}}$

Si $i = 2$, entonces $I = \{2\}$ y por lo tanto,

$$\alpha_{2,d} = \frac{(2^d)^n - |\bigcup_{x\in M(d)} F_{2,x}|}{d} = \frac{(2^d)^n - \sum_{Z\subseteq M(d),Z\neq\emptyset} (-1)^{|Z|-1} |\bigcap_{w\in Z} F_{2,w}|}{d}$$
$$= \frac{(2^d)^n - \sum_{Z\subseteq M(d),Z\neq\emptyset} (-1)^{|Z|-1} (2^{mcd(Z)})^n}{d},$$

donde $mcd(Z)$ es el máximo comun divisor de los elementos de Z.

Si $i = 3$, tenemos:

$$\alpha_{3,d} = \frac{(3^d)^n - |\bigcup_{(j,x)\in\{2,3\}\times M(d)} F_{j,x} \cup F_{2,d}|}{d} = \frac{(3^d)^n - |F_{2,d} \cup \bigcup_{y\in M(d)} F_{3,y}|}{d}.$$

Como

$$|F_{2,d} \cup \bigcup_{y\in M(d)} F_{3,y}| = |F_{2,d}| + |\bigcup_{y\in M(d)} F_{3,y}| - |F_{2,d} \cap \bigcup_{y\in M(d)} F_{3,y}|$$

y

$$|F_{2,d} \cap \bigcup_{y \in M(d)} F_{3,y}| = |\bigcup_{y \in M(d)} (F_{2,d} \cap F_{3,y})|,$$

obtenemos que

$$\alpha_{3,d} = \frac{(3^d)^n - (2^d)^n - \sum_{W \subseteq M(d), W \neq \emptyset} (-1)^{|W|-1} (3^{mcd(W)})^n + \sum_{H \subseteq M(d) \times M(d), H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} (2^{mcd(H_1 \cup H_2)})^n}{d}$$

donde $H_1 = \{x : (x, y) \in H\}$ y $H_2 = \{y : (x, y) \in H\}$.

Finalmente, para $i = 4$ por Lema 3.21 tenemos que

$$\alpha_{4,d} = \frac{(4^d)^n - |\bigcup_{(j,x) \in \{2,4\} \times M(d)} F_{j,x} \cup F_{2,d}|}{2d} = \frac{(4^d)^n - |F_{2,d} \cup \bigcup_{y \in M(d)} F_{4,y}|}{2d}.$$

Realizando un razonamiento análogo al caso anterior resulta que

$$\alpha_{4,d} = \frac{(4^d)^n - (2^d)^n - \sum_{W \subseteq M(d), W \neq \emptyset} (-1)^{|W|-1} (4^{mcd(W)})^n + \sum_{H \subseteq M(d) \times M(d), H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} (2^{mcd(H_1 \cup H_2)})^n}{2d}.$$

De los resultados anteriores tenemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.24. *Sea $F_{\mathcal{C}_k}(n)$ la $\mathcal{C}_k$-álgebra libre con n generadores libres. Entonces*

$$|F_{\mathcal{C}_k}(n)| = \prod_{d/k} 2^{\alpha_{2,d}} \cdot \prod_{d/k} 3^{\alpha_{3,d}} \cdot \prod_{d/k} 4^{\alpha_{4,d}}$$

con

$$\alpha_{2,d} = \frac{(2^d)^n - \sum_{Z \subseteq M(d), Z \neq \emptyset} (-1)^{|Z|-1} (2^{mcd(Z)})^n}{d},$$

$$\alpha_{3,d} = \frac{(3^d)^n - (2^d)^n - \sum_{W \subseteq M(d), W \neq \emptyset} (-1)^{|W|-1} (3^{mcd(W)})^n + \sum_{H \subseteq M(d) \times M(d), H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} (2^{mcd(H_1 \cup H_2)})^n}{d},$$

$$\alpha_{4,d} = \frac{(4^d)^n - \sum_{W \subseteq M(d), W \neq \emptyset} (-1)^{|W|-1} (4^{mcd(W)})^n - (2^d)^n + \sum_{H \subseteq M(d) \times M(d), H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} (2^{mcd(H_1 \cup H_2)})^n}{2d}.$$

3.5 Ejemplos

En esta sección calcularemos el número de elementos del álgebra libre para ciertos valores de k reencontrando, en algunos casos, resultados ya conocidos.

3.5.1 $\mathcal{C}_1$-álgebras libres

Si $k = 1$, cabe señalar que las $\mathcal{C}_1$-álgebras coinciden con las mpM-álgebras estudiadas por N. Oliva en [61]. Por el Teorema 3.24 tenemos que la $\mathcal{C}_1$-álgebra libre con r generadores libres es:

$$F_{\mathcal{C}_1}(r) \simeq T_{2,1}^{\alpha_{2,1}} \times T_{3,1}^{\alpha_{3,1}} \times T_{4,1}^{\alpha_{4,1}}.$$

Como $M(1) = \emptyset$, entenderemos que $\sum\limits_{Z\subseteq M(1)} (-1)^{|Z|}\,(2^{mcd(Z)})^r = 0$ y por lo tanto $\alpha_{2,1} = 2^r$. Además, de manera análoga resulta que

$$\sum_{H\subseteq M(1)\times M(1), H\neq\emptyset} (-1)^{|H|}\,(2^{mcd(H_1\cup H_2)})^r = 0,$$

$$\sum_{W\subseteq M(d), W\neq\emptyset} (-1)^{|W|-1}\,(4^{mcd(W)})^r = 0 = \sum_{W\subseteq M(d), W\neq\emptyset} (-1)^{|W|-1}\,(3^{mcd(W)})^r,$$

y por lo tanto, $\alpha_{3,1} = 3^r - 2^r$ y $\alpha_{4,1} = \frac{4^r-2^r}{2} = 2^{r-1}(2^r-1)$. Luego,

$$|F_{\mathcal{C}_1}(n)| = 2^{2^r} \times 3^{3^r-2^r} \times 4^{2^{r-1}(2^r-1)}.$$

Este número coincide con el obtenido por N. Oliva en sus Tesis de Magister.

3.5.2 $\mathcal{C}_2$-álgebras libres

Observemos que para $k = 2$, tenemos que la $\mathcal{C}_2$-álgebra libre con r generadores libres es:

$$F_{\mathcal{C}_2}(r) \simeq \prod_{d=1}^{2} T_{2,d}^{\alpha_{2,d}} \times \prod_{d=1}^{2} T_{3,d}^{\alpha_{3,d}} \times \prod_{d=1}^{2} T_{4,d}^{\alpha_{4,d}}.$$

Como $|T_{i,d}| = i^d$, $\alpha_{2,2} = \frac{4^r-2^r}{2}$, $\alpha_{3,2} = \frac{9^r-3^r-4^r+2^r}{2}$ y $\alpha_{4,2} = \frac{4^{2r}-4^r-2^{2r}+2^r}{4}$, tenemos

$$|F_{\mathcal{C}_2}(r)| = |T_{2,1}|^{2^r} \times |T_{2,2}|^{\frac{4^r-2^r}{2}} \times |T_{3,1}|^{3^r-2^r} \times |T_{3,2}|^{\frac{3^{2r}-3^r-2^{2r}+2^r}{2}} \times |T_{4,1}|^{\frac{4^r-2^r}{2}} \times |T_{4,2}|^{\frac{4^{2r}-4^r-2^{2r}+2^r}{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{2^r} \times 4^{\frac{4^r-2^r}{2}} \times 3^{3^r-2^r} \times 9^{\frac{3^{2r}-3^r-2^{2r}+2^r}{2}} \times 4^{\frac{4^r-2^r}{2}} \times 16^{\frac{4^{2r}-4^r-2^{2r}+2^r}{4}} \\
&= 2^{2^r} \times 4^{2\cdot\frac{4^r-2^r}{2}} \times 3^{3^r-2^r} \times 9^{\frac{9^r-3^r-4^r+2^r}{2}} \times 16^{\frac{16^r-4^r-4^r+2^r}{4}} \\
&= 2^{2^r} \times 4^{2\cdot\frac{4^r-2^r}{2}} \times 3^{3^r-2^r} \times 9^{\frac{9^r-3^r-4^r+2^r}{2}} \times 16^{\frac{16^r-3\cdot4^r+2\cdot2^r+4^r-2^r}{4}} \\
&= 2^{2^r} \times 4^{2\cdot\frac{4^r-2^r}{2}} \times 3^{3^r-2^r} \times 9^{\frac{9^r-3^r-4^r+2^r}{2}} \times 16^{\frac{16^r-3\cdot4^r+2\cdot2^r}{4}} \times 16^{\frac{4^r-2^r}{4}} \\
&= 2^{2^r} \times 4^{3\cdot\frac{4^r-2^r}{2}} \times 3^{3^r-2^r} \times 9^{\frac{9^r-3^r-4^r+2^r}{2}} \times 16^{\frac{16^r-3\cdot4^r+2\cdot2^r}{4}}.
\end{aligned}$$

y este es cardinal de la $\mathcal{S}$-álgebra libre con un conjunto de r generadores libres hallado en el Capítulo II.

3.5.3 $\mathcal{C}_k$-álgebras libres con k primo

En esta última sección del capítulo, exhibiremos la $\mathcal{C}_k$-álgebra libre con r generadores cuando k es un número primo. Siguiendo un razonamiento análogo a los anteriores casos tenemos que:

$$|F_{\mathcal{C}_k}(r)| = \prod_{N\in N_{2,d}, d/k} |T_{2,d}|^{|N_{2,d}|} \times \prod_{N\in N_{3,d}, d/k} |T_{3,d}|^{|N_{3,d}|} \times \prod_{N\in N_{4,d}, d/k} |T_{4,d}|^{|N_{4,d}|}$$

$$= \prod_{d/k} (2^d)^{\alpha_{2,d}} \times \prod_{d/k} (3^d)^{\alpha_{3,d}} \times \prod_{d/k} (4^d)^{\alpha_{4,d}}$$

$$= 2^{\alpha_{2,1}} \times (2^k)^{\alpha_{2,k}} \times 3^{\alpha_{3,1}} \times (3^k)^{\alpha_{3,k}} \times 4^{\alpha_{4,1}} \times (4^k)^{\alpha_{4,k}}$$

$$= 2^{2^r} \times (2^k)^{\frac{2^{kr}-2^r}{k}} \times 3^{3^r-2^r} \times (3^k)^{\frac{3^{kr}-3^r-2^{kr}+2^r}{k}} \times 4^{\frac{4^r-2^r}{2}} \times (4^k)^{\frac{4^{kr}-4^r-2^{kr}+2^r}{2k}}$$

4 Capítulo IV

En este capítulo introducimos e investigamos las mpM-álgebras monádicas (o $\mathcal{M}$-álgebras, para abreviar). A cada álgebra de esta nueva clase, que es ecuacional, la tratamos como un par formado por una mpM-álgebra y un cuantificador existencial. En la Sección 1 exhibimos definiciones, propiedades y señalamos la relación entre ellas y otras estructuras algebraicas existentes. En la Sección 2, a partir de una familia especial de subálgebras de una mpM-álgebra determinamos como obtener todos los cuantificadores que la transformen en una $\mathcal{M}$-álgebra. A partir de la Sección 3, iniciamos un estudio topológico de las mismas, asociando a cada $\mathcal{M}$-álgebra un espacio compacto, Hausdorff y totalmente disconexo en el orden enriquecido con una relación de equivalencia, al estilo de las dualidades de Halmos-Priestley. Esta primera representación nos permitió realizar un estudio exhaustivo de las congruencias. En particular, mostramos que existe un isomorfismo entre el retículo de ciertos subconjuntos abiertos, cerrados e involutivos del espacio asociado a una $\mathcal{M}$-álgebra y el retículo de las $\mathcal{M}-$congruencias principales de la misma. Además, probamos que las congruencias principales y booleanas coinciden y en el caso finito determinamos su cardinal. Luego, mostramos que las congruencias principales quedan también determinadas por ciertos filtros especiales del álgebra, completando el estudio de las mismas. Finalmente terminamos el capítulo señalando que, a diferencia de lo que ocurre en otras clases de álgebras, aquí no siempre es posible definir la estructura monádica partir de la k-cíclica.

4.1 Las $mpM-$álgebras monádicas o $\mathcal{M}$-álgebras

Definición 4.1. *Una mpM$-$álgebra modal monádica (ó $\mathcal{M}$-álgebra, para simplificar) es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \sim, ^*, \exists, 0, 1)$ donde el reducto $(A, \wedge, \vee, \sim, ^*, 0, 1)$ es una mpM-álgebra y $\exists$ es un operador unario sobre A, que denominaremos cuantificador existencial y satisface las siguientes identidades:*

(m1) $x \wedge \exists x = x$,

(m2) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$,

(m3) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$,

(m4) $\exists((\sim x)^* \wedge x) = (\sim \exists x)^* \wedge \exists x$,

(m5) $\exists \sim x^* = \sim (\exists x)^*$.

En lo que sigue notaremos con $\mathbf{M}$ a la variedad de las $\mathcal{M}$-álgebras y para simplificar a sus elementos los indicaremos con $(A, \exists)$ o simplemente con A.

A continuación indicamos algunas propiedades del cuantificador existencial válidas en toda $\mathcal{M}$-álgebra que serán de gran utilidad en lo que sigue.

Proposición 4.2. *Sea $A \in \mathbf{M}$, entonces se verifican:*

(m6) $x \leq \exists x$,

(m7) $\exists 1 = 1$, $\exists 0 = 0$,

(m8) $\exists\exists x = \exists x$,

(m9) $x \leq y$ *implica* $\exists x \leq \exists y$, (m10) $\sim x \vee \nabla\exists x = 1$, *donde* $\nabla x =\sim \triangle \sim x$ *y* $\triangle x = (\sim x)^* \wedge x$,

(m11) $\exists x \vee \nabla \sim x = 1$,

(m12) *el conjunto* $\exists A = \{x \in A : \exists x = x\}$ *es una mpM-subálgebra de* A,

(m13) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$,

(m14) $x \leq \nabla x$,

(m15) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$,

(m16) $\triangle\nabla x = \nabla x$,

(m17) $\nabla\triangle x = \triangle x$,

(m18) $\exists\nabla x = \nabla\exists x$.

Dem. Solo probaremos (m12) y (m18).

(m12): De (m2) y (m3) es simple verificar que $\exists A$ es una subálgebra de De Morgan de A. Además, sea $a \in \exists A$, entonces $a^* = (\exists a)^*$ y por (m5) tenemos que $\sim a^* =\sim (\exists a)^* = \exists \sim a^*$ de lo que se concluye que $\sim a^* \in \exists A$. Por lo tanto, $a^* \in \exists A$.

(m18): Veamos que $\exists\nabla x \leq \nabla\exists x$. Primero observemos que (1) $\exists\nabla\exists x = \nabla\exists x$. En efecto, como $\exists\nabla\exists x = \exists \sim \triangle \sim \exists x$ por (m3) y (m4) tenemos que $\exists\nabla\exists x = \exists \sim \triangle\exists \sim \exists x = \exists \sim \exists\triangle \sim \exists x =\sim \exists\triangle \sim \exists x =\sim \triangle\exists \sim \exists x =\sim \triangle \sim \exists x = \nabla\exists x$. Por otra parte, de (m6) y (m15) resulta que $\nabla x \leq \nabla\exists x$ y por lo tanto de (m9) $\exists\nabla x \leq \exists\nabla\exists x$. Luego, de (1) concluimos que $\exists\nabla x \leq \nabla\exists x$.

Por otra parte, como $x \leq \nabla x$ por (m9) tenemos que $\exists x \leq \exists\nabla x$ y por lo tanto de (m15) resulta que (2) $\nabla\exists x \leq \nabla\exists\nabla x$. Además, se verifica que (3) $\nabla\exists\nabla x = \exists\nabla x$. En efecto, por (m16), (m4) y (m17) tenemos que $\nabla\exists\nabla x = \nabla\exists\triangle\nabla x = \nabla\triangle\exists\nabla x = \triangle\exists\nabla x = \exists\triangle\nabla x = \exists\nabla x$. Luego, de (2) y (3) concluimos la demostración. $\square$

Observación 4.3.

(i) *De la Proposición 4.2 se verifica sin dificultad que* $(A, \wedge, \vee, \sim, \triangle, \exists, 0, 1)$ *es una álgebra tetravalente modal monádica que fueron estudiadas en* [74].

(ii) *De los axiomas (m1), (m2), (m3) y (m13) tenemos que el reducto* $(A, \wedge, \vee, \sim, \exists, 0, 1)$ *es un álgebra de De Morgan monádica. Esta clase de álgebras fue investigada en* [62].

(iii) *Si* $(A, \exists)$ *es una* $\mathcal{M}$*-álgebra que verifica* $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$, *entonces* $(A, \exists)$ *es un álgebra de Łukasiewicz trivalente monádica* (ver [59]).

Ejemplos 4.4. *Los ejemplos de* $\mathcal{M}$*-álgebras que indicaremos a continuación juegan un rol fundamental en el estudio de esta variedad.*

(i) *Sean* T_i *con* $i = 2, 3, 4$ *las mpM-álgebras que generan la variedad. Entonces* $(T_i, \exists)$ *donde* $\exists$ *es la identidad son* $\mathcal{M}$*-álgebras.*

(ii) *Sea* Y *un conjunto no vacío, entonces* $T_i^Y = \{f : Y \longrightarrow T_i\}$ *con* $i = 2, 3$ *son mpM-álgebras definiendo las operaciones coordenada a coordenada y* $(T_i^Y, \exists)$ *son* $\mathcal{M}$*-álgebras definiendo para todo* $y \in Y$, $(\exists f)(y) = \bigvee f(Y)$ *para todo* $f \in T_i^Y$.

Los resultados que exhibiremos en el Lema 4.6 serán necesarias para el desarrollo de este capítulo.

Definición 4.5. *Sea* $A \in \mathbf{M}$ *y* $x \in A$. *Diremos que* x *es un elemento regular si* $\sim x = x^*$ *e indicaremos con* $Reg(A)$ *al conjunto de todos los elementos regulares de* A.

Lema 4.6. *Sea* $A \in \mathbf{M}$ *entonces se verifican:*

(m19) $\triangle A = \nabla A = Reg(A)$,

(m20) $Reg(A) \subseteq B(A)$, *donde* $B(A) = \{x \in A : x \vee x^* = 1\}$ *es el conjunto de los elementos booleanos de* A,

(m21) x *es un punto fijo de* A *si, y sólo si,* $\nabla x = 1$ *y* $\triangle x = 0$, *donde* x *es un punto fijo de* A *si* $\sim x = x$.

Dem.

(m19): Sea $z \in \triangle A$, entonces por (T11) $z = \triangle z$. Luego, $z^* = (\triangle z)^*$ y por (T8) tenemos que $z^* = \sim \triangle z = \sim z$. Recíprocamente, sea $z \in Reg(A)$. Entonces $z^* = \sim z$ y por lo tanto $\triangle z = (\sim z)^* \wedge z = z^{**} \wedge z$, de donde por (P3) concluimos que $\triangle z = z$. El resto de la demostración resulta por (T11).

(m20): Sea $z \in Reg(A)$, entonces $\sim z = z^*$. Luego, $z \vee z^* = z \vee \sim z = \sim (\sim z \wedge z) = \sim (z^* \wedge z) = 1$. Además, $z \wedge z^* = 0$. De estas afirmaciones inferimos que $z \in B(A)$.

(m21): Sea $x \in A$ un punto fijo, es decir $x = \sim x$. Entonces $\triangle x = (\sim x)^* \wedge x = x^* \wedge x = 0$. Por otra parte, de (T2) y (T14) tenemos que $\nabla x = x \vee \nabla x = \sim x \vee \nabla x = 1$. $\square$

Lema 4.7. *Sea $A \in \mathbf{M}$ entonces se verifican:*

(m22) *si $\exists A \simeq T_2$, entonces para todo $x \in A$, $\sim x$ es el complemento booleano de x,*

(m23) $(\triangle A, \exists)$ *es un álgebra de Boole monádica,*

(m24) $\exists \triangle A$ *es un álgebra de Boole,*

(m25) *si $\exists A \simeq T_3$ y z un punto fijo de A, entonces z es el único punto fijo de A y no es un elemento booleano de A,*

(m26) *si $\exists A \simeq T_4$, entonces existen sólo dos puntos fijos de A tales que uno es el complemento booleano del otro.*

Dem.

(m22): Supongamos que existe $x \in A$ tal que $x \wedge \sim x \neq 0$, entonces de la hipótesis tenemos que $\exists (x \wedge \sim x) = 1$, de donde por (m4), (T10) y (T13) resulta que $1 = \triangle \exists (x \wedge \sim x) = \exists (\triangle x \wedge \triangle \sim x) = \exists 0 = 0$ lo que es una contradicción. Luego, $x \wedge \sim x = 0$ y por lo tanto, $\sim x \vee x = 1$ para todo $x \in A$.

(m23): De (T12) y (T4) tenemos que $\triangle A$ es un álgebra de Boole, y de (m4) inferimos que para todo $x \in \triangle A$, $\exists x \in \triangle A$. Además, de (m7), (m1) y (m2) se concluye la demostración.

(m24): Inmediata de (m23).

(m25): Sea $z \in A$ un punto fijo, entonces $\exists z \in \{0, c, 1\}$. Veamos que $\exists z = c$. En efecto, si suponemos que $\exists z = 0$, entonces $0 = \nabla \exists z$. Por otra parte, de la hipótesis, (m21) y (m18) resulta $\nabla \exists z = 1$, lo que es una contradicción. Análogamente, se prueba que $\exists z \neq 1$. Además, por (m6) tenemos $z \leq \exists z = c$ y como $c = \sim c \leq \sim z = z$ concluimos que $z = c$.

Supongamos ahora que z es un elemento booleano de A. Luego, por ser punto fijo $z \neq 0$ y $z \neq 1$, de lo que se tiene que $z' \notin \exists A$, donde z' es el complemento de z. Por otra parte, como $\exists z = z$ de (m7) y (m2) resulta que $0 = \exists(z \wedge z') = \exists z \wedge \exists z' = z \wedge \exists z'$. Además, por (m7) y (m13) tenemos que $1 = \exists(z \vee z') = z \vee \exists z'$, por lo tanto $\exists z' = z'$ lo que es una contradicción.

(m26): Sea z un punto fijo de A, siguiendo un razonamiento análogo a (m25) se demuestra que $\exists z \neq 0$ y $\exists z \neq 1$. Luego, $\exists z = a$ ó $\exists z = b$. Supongamos que $\exists z = a$, entonces $z \leq a$ y por lo tanto $a = \sim a \leq \sim z = z$ de lo que se tiene que $z = a$. Es claro que si $\exists z = b$ se demuestra de manera análoga que $z = b$. $\square$

4.2 Relación entre subálgebras y cuantificadores

En esta sección indicaremos como obtener todos los cuantificadores sobre una mpM-álgebra A a partir de una familia especial de subálgebras.

Observemos que de (m9), (m6), (m8) y (m13) cada cuantificador $\exists$ es un operador de clausura aditivo definido como en [2, pag. 47]. Luego, el cuantificador $\exists$ está determinado por su imagen $\exists A$. A continuación determinaremos las condiciones que deben verificar las subálgebras que determinan al cuantificador.

Proposición 4.8. *Sea $(A, \exists) \in \mathbf{M}$ entonces $\exists A$ verifica las siguientes condiciones:*

(i) *para cada $x \in A$, $\exists x$ es el primer elemento del conjunto $[x) \cap \exists A$,*

(ii) *para cada $x, y \in \exists A$, si $x \Rightarrow y$ existe en A entonces $x \Rightarrow y \in \exists A$, donde $x \Rightarrow y$ es el pseudocomplemento de x relativo a y,*

(iii) $\exists A$ *es una mpM-subálgebra de* A*,*

(iv) *para cada* $x \in \triangle A$*,* $\exists x \in \triangle A$*,*

(v) $[(\sim x)^* \wedge x) \cap (\exists x] \cap \exists A \cap \triangle A$ *tiene un único elemento,*

(vi) $\sim (\exists x)^* \in [\exists \sim x^*)$.

Dem. Solo probaremos (v), ya que de [9, Proposition 1.2] las condiciones (i) y (ii) son válidas. Además, (iii) y (vi) son consecuencia directa de (m12) y (m5) respectivamente y (iv) se deducen de (m4).

(v): Sea $B = [(\sim x)^* \wedge x) \cap (\exists x] \cap \exists A \cap \triangle A$. Por (m4) resulta que $\exists \triangle x \in B$. Por otra parte, si $z \in B$, entonces se verifica que $\exists z = z = \triangle z$ y $\triangle x \leq z \leq \exists x$ de donde se tiene $\exists \triangle x \leq z = \exists z$. Por otra parte, $z = \triangle z \leq \triangle \exists x$ de donde por (m4) concluimos que $z \leq \exists \triangle x$. Por lo tanto, $z = \exists \triangle x$. $\square$

Proposición 4.9. *Sea* A *una mpM-álgebra y sea* M *subálgebra de* A *que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *para cada* $x \in M$*, el conjunto* $[x) \cap M$ *tiene primer elemento,*

(ii) *para cada* $x, y \in M$*, si* $x \Rightarrow y$ *existe en* A *entonces* $x \Rightarrow y \in M$*,*

(iii) *para cada* $x \in \triangle A$*, entonces* $\exists_M x \in \triangle A$*, donde* $\exists_M x$ *es el primer elemento de* $[x) \cap M$*,*

(iv) $[(\sim x)^* \wedge x) \cap (\exists_M x] \cap \triangle A \cap M$ *tiene un único elemento,*

(v) $\sim (\exists_M x)^* \in [\exists_M \sim x^*)$.

Entonces $(A, \exists_M)$ *es una* $\mathcal{M}$*-álgebra y* $\exists_M A = M$*.*

Dem. Por [9, Proposición 1.3] tenemos que $\exists_M$ verifica (m1), (m2) y $\exists_M A = M$. Veamos la validez de (m3), (m4) y (m5).

(m3): Como $\exists_M x \in M$ y M es una subálgebra de A, entonces $\sim \exists_M x \in M$. Por lo tanto, $\sim \exists_M x \in [\sim \exists_M x) \cap M$ de donde resulta que $\exists_M \sim \exists_M x \leq \sim \exists_M x$. La otra desigualdad es inmediata.

(m4): Es claro que de (iii) y el hecho que M es una subálgebra de A tenemos que $\exists_M \triangle x \in [(\sim x)^* \wedge x) \cap (\exists_M x] \cap \triangle A \cap M$. Además, $\triangle \exists_M x \in [(\sim x)^* \wedge x) \cap (\exists_M x] \cap \triangle A \cap M$. De las afirmaciones anteriores y (iv) concluimos la demostración.

(m5): Sea $x \in A$. Como $\exists_M$ verifica (m1) tenemos que $x \leq \exists_M x$, entonces $\sim x^* \leq \sim (\exists_M x)^*$. Por lo tanto, $\sim (\exists_M x)^* \in [\sim x^*) \cap M$. Luego, por la definición de $\exists_M$ se deduce que $\exists_M \sim x^* \leq \sim (\exists_M x)^*$ y de (v) concluimos que $\exists_M \sim x^* = \sim (\exists_M x)^*$. $\square$

4.3 Representación topológica de las $\mathcal{M}$-álgebras

A continuación, describiremos una dualidad topológica para las $\mathcal{M}$-álgebras teniendo en cuenta las obtenidas para los Q-retículos distributivos, detallada en el Capítulo I, y para las $mpM-$álgebras indicada en [61]. En lo que sigue, y para facilitar la lectura, exhibiremos esta última dualidad entre la categoría de las $mpM-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos y la categoría de los mp_M-espacios y las mp_M-funciones.

Un mp_M-espacio es un par (X, g) que es a la vez, un espacio de De Morgan y un $p-$espacio (ver Capítulo I) y satisface la condición adicional siguiente:

(pm1) $x \leq y$ implica $x = y$ ó $g(x) = y$.

Una mp_M-función de un mp_M-espacio en otro es una función de De Morgan y una $p-$función (ver Capítulo I) simultáneamente. Además, se probó que:

(DmpI) si (X, g) es un mp_M-espacio, entonces $\langle D(X), \cup, \cap, \sim, ^*, \emptyset, X \rangle$ es una mp_M-álgebra donde $\sim U = X \setminus g(U)$ y $U^* = X \setminus (U]$, para cada $U \in D(X)$, y la función $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$, definida por $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.

(DmpII) si A es una mp_M-álgebra, entonces el par $(X(A), g_A)$ donde $X(A)$ es el conjunto de todos los filtros primos de A y $g_A(P) = A \setminus \{\sim x : x \in P\}$ es un mp_M-espacio. Además, la función $\sigma_A : A \longrightarrow D(X(A))$, definida por $\sigma_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$ es un mp_M-isomorfismo.

De lo expuesto anteriormente y con técnicas habituales se concluye que la categoría de los mp_M-espacios y las mp_M-funciones es naturalmente equivalente al dual de la categoría de las $mpM-$álgebras y sus correspondientes homomorphismos.

Observación 4.10. ([61]) *De* (pm1) *se infiere que todo mp_M-espacio es la suma cardinal de una familia de cadenas, cada una de las cuáles tiene a lo sumo dos elementos. Luego, todo mp_M-espacio totalmente ordenado tiene a lo sumo dos elementos.*

Antes de describir la dualidad para las $\mathcal{M}$-álgebras indicaremos algunas propiedades su espectro primo que nos serán de utilidad.

Sean $A \in \mathbf{M}$ y $X \subseteq A$. Denotaremos con $I(X)$, $F(X)$ respectivamente al ideal y al filtro generado por X en A.

Teorema 4.11. ([74]) *Sea $(A, \exists)$ una $\mathcal{M}$-álgebra y sean $S, T \in X(A)$ tales que $S \cap \exists A \subseteq T$. Entonces existe $Q \in X(A)$ tal que*

(i) $S \subseteq Q,$

(ii) $Q \cap \exists A = T \cap \exists A.$

Dem. Consideremos el filtro $F = F(S \cup (T \cap \exists A)$ y el ideal $J = I(\exists A \setminus T)$, entonces $F \cap J = \emptyset$. En efecto, supongamos $x \in F \cap J$, entonces existe (1) $k \in \exists A \setminus T$, $s \in S$ y $\exists t \in T \cap \exists A$ tales que $s \wedge \exists t \leq x \leq k$. Luego, $\exists(s \wedge \exists t) \leq \exists k = k$, de donde por (m2) resulta que (2) $\exists s \wedge \exists t \leq k$. Como $\exists s \in S \cap \exists A$, de la hipotesis $\exists s \in T$ y por (2) $k \in T$, lo que contradice (1).

Luego, por el Teorema de Birkhoff-Stone existe $Q \in X(A)$ tal que (3) $F \subseteq Q$ y $Q \cap J = \emptyset$. De (3) tenemos que $S \subseteq Q$ y $T \cap \exists A \subseteq Q$, luego $T \cap \exists A \subseteq Q \cap \exists A$. Por otra parte, sea $x \in Q \cap \exists A$. Si suponemos que $x \notin T$ tenemos que $x \in \exists A \setminus T \subseteq J$ y por lo tanto, $Q \cap J \neq \emptyset$ lo que es una contradición. $\square$

Teorema 4.12. *Sea $(A, \exists)$ una $\mathcal{M}$-álgebra y $R_\exists \subseteq X(A) \times X(A)$ definida por $R_\exists = \{(P, Q) \in X(A) \times X(A) : P \cap \exists A = Q \cap \exists A\}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$R_\exists$ es una relación de equivalencia y las clases de equivalencias son cerradas en $X(A)$ ([9]),*

(ii) *$(P, Q) \in R_\exists$ implica $(g(P), g(Q)) \in R_\exists$ ([74]),*

(iii) *Para todo $(P, Q) \in R_\exists$, si existe $R \in X(A)$ tal que $g(R) \subseteq P$, entonces existen $S, T \in X(A)$, tales que $(g(S), T) \in R_\exists$ y $T \subseteq Q$,*

(iv) *Para todo $S, T, Q \in X(A)$, tales que $(g(S), T) \in R_\exists$ y $T \subseteq Q$, existen $P, R \in X(A)$ tales que $(P, Q) \in R_\exists$ y $g(R) \subseteq Q$.*

Dem. (iii): Sean $P, Q \in X(A)$ tales que (1) $P \cap \exists A = Q \cap \exists A$ y supongamos que existe $R \in X(A)$ tal que $g(R) \subseteq P$. Luego, $g(P) \cap \exists A \subseteq R$ de donde por (1) y (ii) tenemos que $g(Q) \cap \exists A \subseteq R$. Por el Teorema 4.11, existe $W \in X(A)$ tal que (2) $g(Q) \subseteq W$ y (3) $W \cap \exists A = R \cap \exists A$. Por lo tanto, tomando $g(W) = T$ y $R = S$ de (2) inferimos que $T \subseteq Q$ y de (3) y (ii) resulta que $g(S) \cap \exists A = T \cap \exists A$.

(iv): Sean $S, T, Q \in X(A)$, tales que $g(S) \cap \exists A = T \cap \exists A$ y $T \subseteq Q$. Tomemos $R = g(T)$, entonces es claro que $g(R) \subseteq Q$ y por lo tanto, $g(R) \cap \exists A \subseteq Q$. Luego, por el Teorema 4.11, existe $P \in X(A)$ tal que $P \cap \exists A = Q \cap \exists A$. $\square$

Definición 4.13. *Un espacio monádico (o $\mathcal{MS}$-espacio) es una terna (X, g, R), donde (X, g) es un mp_M-espacio, (X, R) es un q-espacio y se verifican las condiciones adicionales siguientes:*

(ms1) *si $(x, y) \in R$, entonces $(g(x), g(y)) \in R$,*

(ms2) *$R(U) \cap R(g(U)) \subseteq R(U \cap g(U))$ para todo $U \in D(X)$,* (ms3) *para todo* $U \in D(X)$*, si* $(x, y) \in R$ *y* $u_0 \in U$ *es tal que* $g(u_0) \leq y$*, entonces existe* $t_0 \in X$ *tal que* $(t_0, g(u_0)) \in R$ *y* $t_0 \leq x$*,*

(ms4) *para todo* $U \in D(X)$*, si* $s_0 \in U$ *y* $x, t \in X$ *son tales que* $t \leq x$ *y* $(t, g(s_0)) \in R$*, entonces existen* $u_0 \in U$ *e* $y \in X$ *tales que* $g(u_0) \leq y$ *y* $(x, y) \in R$*.*

Si (X_1, g_1, R_1) *y* (X_2, g_2, R_2) *son* $\mathcal{MS}$*-espacios, entonces* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *es una* $\mathcal{MS}$*-función si* f *es una* mp_M*-función y una q-función simultáneamente.*

Observación 4.14. *Sea* (X, g) *un espacio de Morgan y sea* $W \in D(X)$*, entonces* $g((W]) = [g(W))$*. En efecto, sea* $x \in g((W])$*, entonces existe* $w_0 \in W$ *tal que* $g(x) \leq w_0$*. Luego, tenemos que* $g(w_0) \leq x$ *y por lo tanto* $x \in [g(W))$*. La otra inclusión es análoga.*

Lema 4.15. *Sea* (X, g, R) *un* $\mathcal{MS}$*-espacio, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *para todo* $x \in X$*,* $g(R(x)) = R(g(x))$ *,*

(ii) *para todo* $Y \subseteq X$*,* $g(R(Y)) = R(g(Y))$*, donde* $R(T) = \bigcup\limits_{x \in T} R(x)$*, para todo* $T \subseteq X$*,*

Dem. (i): Es consecuencia directa de (ms1).

(ii): Es consecuencia directa de (i) y el hecho que $g = g^{-1}$. □

Corolario 4.16. *Sea* (X, g, R) *un* $\mathcal{MS}$*–espacio. Si* Y *es un subconjunto involutivo de* X*, entonces* $R(Y)$ *también lo es.*

Dem. Es consecuencia directa del Lema 4.15. □

Proposición 4.17. *Si* (X, g, R) *es un* $\mathcal{MS}$*-espacio, entonces* $\mathsf{M}(X) = (D(X), \cup, \cap, \sim, ^*, \exists_R, \emptyset, X)$ *es una* $\mathcal{M}$*-álgebra donde para cada* $U \in D(X)$*,* $U^* = X \setminus (U]$*,* $\sim U = X \setminus g(U)$ *y* $\exists_R(U) = R(U)$*.*

Dem. De la hipótesis, (DmpI) y los resultados establecidos en el Capítulo I sólo debemos probar que para todo $U \in D(X)$ se verifican (m3), (m4) y (m5):

(m3): Sea $x \in \exists_R \sim \exists_R U$. Entonces, existe $y \in \sim \exists_R U$ tal que $(x, y) \in R$. De esta afirmación y de (ms1) tenemos que (1) $(g(x), g(y)) \in R$ y (2) $g(y) \notin \exists_R U$. Luego,

$g(x) \notin \exists_R U$. En efecto, supongamos que existe $z \in U$ tal que $(g(x), z) \in R$, entonces de (1) resulta que $(g(y), z) \in R$ de donde inferimos que $g(y) \in \exists_R U$, lo que contradice (2). Por lo tanto $x \in \sim \exists_R U$. La otra inclusión es inmediata de (m1).

(m4): Es consecuencia directa de (ms2) y del Lema 4.15 tenemos que (m4).

(m5): De la Observación 4.14 y el Lema 4.15 tenemos que (1) $\sim (\exists_R U)^* = X \setminus g((\exists_R U)^*) = X \setminus g(X \setminus (\exists_R U]) = g((\exists_R U]) = [g(\exists_R U)) = [g(\bigcup_{s \in U} R(s))) = [\bigcup_{s \in U} R(g(s)))$. Por otra parte, (2) $\exists_R \sim U^* = \bigcup_{s \in \sim U^*} R(s) = \bigcup_{s \in [g(U))} R(s)$.

Sea $x \in \sim (\exists_R U)^*$, entonces de (1) existe $t_0 \in \bigcup_{s \in U} R(g(s))$ tal que $t_0 \leq x$. Luego, por (ms4) existen $u_0 \in U$ y $y \in X$ tales que $g(u_0) \leq y$ y $(x, y) \in R$. De las afirmaciones anteriores resulta que $y \in [g(U))$, de donde por (2) concluimos que $x \in \exists_R \sim U^*$. Recíprocamente, sea $x \in \exists_R \sim U^*$. Entonces por (2) existe $s_0 \in [g(U))$ tal que $(x, s_0) \in R$ y además, existe $u_0 \in U$ tal que $g(u_0) \leq s_0$. De estas afirmaciones y (ms3) tenemos que existen $t_1 \in X$ tal que $(t_1, g(u_0)) \in R$ y $t_1 \leq x$. Luego, $t_1 \in \bigcup_{s \in U} R(g(s))$ y por lo tanto $x \in [\bigcup_{s \in U} R(g(s))) = \sim (\exists_R U)^*$. □

Proposición 4.18. *Si* $(A, \exists)$ *es una* $\mathcal{M}$*-álgebra, entonces* $\mathsf{m}(A) = (X(A), g_A, R_\exists)$ *es un* $\mathcal{MS}$*-espacio donde para todo* $P \in X(A)$, $g_A(P) = A \setminus \sim P$ *y* $R_\exists = \{(P, Q) \in X(A) \times X(A) : P \cap \exists A = Q \cap \exists A\}$. *Además, la función* σ_A *es un* $\mathcal{M}$*-isomorfismo.*

Dem. De la hipótesis tenemos que $(X(A), \exists_R)$ es un q-espacio y que $(X(A), g_A)$ es un mpM-espacio. Luego, se verifica (ms1).

(ms2): Dado que todo $U \in D(X(A))$ es de la forma $\sigma_A(a) = U$ para algún $a \in A$, entonces para probar esta condición es suficiente probar que $R_\exists(\sigma_A(a)) \cap R_\exists(g_A(\sigma_A(a))) \subseteq R_\exists(\sigma_A(a) \cap g_A(\sigma_A(a)))$, lo que es consecuencia directa del Lema 4.15 y que $\sigma_A(\exists \triangle a) = \sigma_A(\triangle \exists a)$. □

De las Proposiciones 4.17 y 4.18 y con técnicas habituales obtenemos el siguiente:

Teorema 4.19. *La categoría de los* $\mathcal{MS}$*-espacios y las* $\mathcal{MS}$*-funciones es naturalmente* *equivalente al dual de la categoría de las $\mathcal{M}$-álgebras y sus correspondientes homomorphismos.*

4.4 Congruencias

A continuación, teniendo en cuenta la dualidad topológica obtenida anteriormente caracterizaremos el retículo $Con(A)$ de todas las $\mathcal{M}$-congruencias de A, para lo cual vamos a introducir la siguiente:

Definición 4.20. *Sea (X, g, R) un $\mathcal{MS}$-espacio y sea Y un subconjunto de X. Diremos que Y es R-saturado si, y sólo si, $Y = R(Y)$.*

Teorema 4.21. *Sea $(A, \exists)$ una $\mathcal{M}$-álgebra. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_{IR_S}(\mathsf{m}(A))$ de todos los subconjuntos cerrados, involutivos y $R_\exists$-saturados de $\mathsf{m}(A)$ es isomorfo al dual del retículo $Con(A)$; y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{CIR_S} : \mathcal{C}_{IR_S}(\mathsf{m}(A)) \longrightarrow Con(A)$ definida por $\Theta_{CIR_S}(Y) = \{(a, b) \in A \times A : \sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y\}$.*

Dem. Sea $Y \in \mathsf{m}(A)$, entonces por [61] sabemos que $\Theta_{IR_S}(Y)$ es una mpM-congruencia. Luego, solo debemos probar la compatibilidad con $\exists$ lo cual es una consecuencia directa de los resultados establecidos en [9, Lemma 3.1].

Recíprocamente, sea $\theta \in Con(A)$ e $Y = \{P \in X(A) : |1|_\theta \subseteq P\}$. Entonces probemos que $Y \in \mathcal{C}_{IR_S}(\mathsf{m}(A))$ y que $\theta = \Theta(Y)$.

(i) Y cerrado: sea $Q \notin Y$, entonces de la hipótesis resulta que $|1|_\theta \not\subseteq Q$ y por lo tanto existe $a \in |1|_\theta \backslash Q$, de lo que se tiene que $Q \in X(A) \backslash \sigma_A(a)$. Además, es simple verificar que $(X(A) \backslash \sigma_A(a)) \cap Y = \emptyset$. Luego, tenemos que $X(A) \backslash \sigma_A(a)$ es un entorno de Q y $X(A) \backslash \sigma_A(a) \subseteq X(A) \backslash Y$. Por lo tanto, Y es cerrado.

(ii) Y es involutivo: sea $P \in Y$ y sea $x \in |1|_\theta$. Como $\triangle x \in |1|_\theta$, entonces por (T13) $\sim x \notin P$. Luego, $|1|_\theta \subseteq g_A(P)$ de donde resulta que $g_A(P) \in Y$. La otra inclusión es inmedita.

(iii) Y es R-saturado: solo probaremos que $R(Y) \subseteq Y$ pues la otra inclusión es directa. Sea (1) $P \in Y$, entonces $R(P) \subseteq Y$. En efecto, sea (2) $Q \in R(P)$ y $t \in |1|_\theta$. Luego,

$\sim \exists \sim t \in |1|_\theta$, de donde por (m3), (1) y (2) tenemos que $\sim \exists \sim t \in P \cap \exists A = Q \cap \exists A$ y como $\sim \exists \sim t \leq t$, concluimos que $t \in Q$. Por lo tanto, $|1|_\theta \subseteq Q$, lo que implica que $Q \in Y$. Finalmente, de la representación de Priestley para retículos distributivos acotados y el Teorema 2.4.6 de [61] resulta que $\theta = \Theta(Y)$, lo que completa la demostración. □

La siguiente versión del Teorema 4.21 nos facilitará la determinación de las congruencias principales de las $\mathcal{M}$-álgebras. La misma está basada en las dos afirmaciones siguientes, de fácil comprobación:

(i) $Y \subseteq X(A)$ es cerrado (abierto) involutivo si, y sólo si, $X(A) \setminus Y$ es abierto (cerrado) involutivo,

(ii) $\sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y$ si, sólo si, $\sigma_A(a) \triangle \sigma_A(b) \subseteq X(A) \setminus Y$, donde $W \triangle Z = (W \setminus Z) \cup (Z \setminus W)$.

Teorema 4.22. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra. Entonces, el retículo $\mathcal{O}_{IR_S}(\mathsf{m}(A))$ de todos los subconjuntos abiertos, involutivos y $R_\exists$-saturados de $\mathsf{m}(A)$ es isomorfo al retículo $Con(A)$; y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{OIR_S} : \mathcal{O}_{IR_S}(\mathsf{M}(A)) \longrightarrow Con(A)$ definida por $\Theta_{OIR_S}(G) = \{(a,b) \in A \times A : \sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a) \subseteq G\}$.*

4.5 La semi-simplicidad de la variedad de las $\mathcal{M}$-álgebras

Nuestro próximo objetivo es determinar las $\mathcal{M}$-álgebras subdirectamente irreducibles a partir de los resultados establecidos anteriormente y además, probar que se trata de una variedad semisimple.

Con este propósito comenzaremos recordando las siguientes propiedades demostradas en [61].

Lema 4.23. [61] *Sea (X, g) un mp_M-espacio. Entonces $min\, X \cup max\, X = X$.*

Lema 4.24. [61] *Sea (X, g) un mp_M-espacio y sea Y un subconjunto involutivo y no vacío de X, entonces Y es creciente y decreciente.*

Como consecuencia directa del Lema 4.24 tenemos que:

Corolario 4.25. *Sea* (X, g) *un* mp_M*-espacio. Si* Y *es un subconjunto involutivo y no vacío de* X*, entonces* $min\, Y \cup max\, Y \subseteq Y$*.*

En la siguiente proposición caracterizaremos a los subconjuntos R-saturados que será de utilidad en lo que sigue.

Proposición 4.26. *Sea* (X, g, R) *un* $\mathcal{MS}$*-espacio y sea* Y *un subconjunto involutivo y no vacío de* X*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $min\, R(y) \subseteq Y$*, para todo* $y \in Y$*,*

(ii) Y *es* $R-$*saturado.*

Dem. (i)$\Rightarrow$ (ii): Como R es reflexiva tenemos que $Y \subseteq R(Y)$. Por otra parte, sea $z \in R(Y)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $z \in R(y)$. Como $R(y)$ es cerrado, entonces $min\, R(y) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $m \in min\, R(y)$ tal que $m \leq z$ y por (i) concluimos que $m \in Y$. Luego, por el Lema 4.24 tenemos que $z \in Y$ de donde resulta que $R(Y) \subseteq Y$.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Es consecuencia directa de (ii). $\square$

Proposición 4.27. *Sea* (X, g, R) *un* $\mathcal{MS}$*-espacio. Entonces* X *el único subconjunto cerrrado e involutivo que contiene a* $min\, X$*.*

Dem. Sea $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ involutivo y cerrado tal que (1) $min\, X \subseteq Y$. Sea $x \in X$ entonces por el Lema 4.23 (2) $x \in min\, X$ ó (3) $x \in max\, X$. Si ocurre (2) se tiene que $X \subseteq Y$, y si ocurre (3) existe $t \in min\, X$ tal que $t < x$, luego $t \in Y$, pero como Y es involutivo por Lema 4.24, Y es creciente y por lo tanto $x \in Y$. $\square$

Teorema 4.28. *Sea* (X, g, R) *un* $\mathcal{MS}$*-espacio tal que* $D(X)$ *es una* $\mathcal{M}$*-álgebra subdirectamente irreducibles. Si* Y *es un subconjunto cerrado, involutivo y no vacío de* X*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es* R*-saturado,*

(ii) $min\, X \subseteq Y$*.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $Y \in \mathcal{C}_{IR_S}(X)$ e $Y \neq \emptyset$. Si $min\, X \not\subseteq Y$, entonces $Y \neq X$ y por lo tanto $Y \in \mathcal{C}_{IR_S}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Como $D(X)$ es subdirectamente irreducible, por el Teorema 4.21, existe $M_0 \in \mathcal{C}_{IR_S}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ tal que (1) $S \subseteq M_0$ para todo $S \in \mathcal{C}_{IR_S}(X) \setminus \{X\}$. Como $M_0 \neq X$, por la Proposición 4.27 existe $m \in min\, X$ tal que $m \notin M_0$ y como M_0 es involutivo, $g(m) \notin M_0$. Sea $W = R(m) \cup g(R(m))$. Luego, W es un subconjunto cerrado e involutivo de X. Además, por el Lema 4.15 tenemos que $R(W) = W$. De las afirmaciones anteriores inferimos que $R(m) \cap M_0 = \emptyset$ y $g(R(m)) \cap M_0 = R(g(m)) \cap M_0 = \emptyset$ y por consiguiente $W \cap M_0 = \emptyset$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{C}_{IR_S}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ y $W \not\subseteq M_0$, lo que contradice (1). Luego, $min\, X \subseteq Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia directa de la Proposición 4.27. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar que las $\mathcal{M}$-álgebras subdirectamnte irreducibles son simples.

Corolario 4.29. *La variedad de las $\mathcal{M}$-álgebras es semisimple.*

Dem. Solo debemos probar que si $D(X)$ es subdirectamente irreducible, entonces es simple. Sea $Y \in \mathcal{C}_{IR_S}(X)$ tal que $Y \neq \emptyset$, entonces por el Teorema 4.28 tenemos que $min\, X \subseteq Y$ y como Y es creciente concluimos que $Y = X$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_{IR_S}(X) = \{\emptyset, X\}$, con lo que queda probado que $D(X)$ es simple. $\square$

4.6 Un estudio topológico de las $\mathcal{M}-$congruencias principales y booleanas

En esta sección comenzamos caracterizando los subconjuntos abiertos, involutivos y $R-$saturados que corresponden a las congruencias principales bajo la dualidad descripta anteriormente.

4.6.1 $\mathcal{M}-$congruencias principales

Observemos en primer lugar que si $a, b \in A$ y $\theta(a, b)$ es la congruencia principal generada por (a, b) como $\theta(a, b) = \theta(a \wedge b, a \vee b)$, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b$.

Observación 4.30. *Sean A una $\mathcal{M}-$álgebra, $a, b \in A$ y G un subconjunto abierto, involutivo y $R_{\exists}-$saturado de $X(A)$. Por el Teorema 4.22 tenemos que $(a,b) \in \Theta_{OIR_S}(G)$ si, y sólo si, $\sigma_A(b) \triangle \sigma_A(a) \subseteq G$. Si suponemos además que $a \leqslant b$, entonces resulta que $(a,b) \in \Theta(G)$ si, y sólo si, $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$.*

Proposición 4.31. *Sean A una $\mathcal{M}-$álgebra y $(X(A), g_A, R_{\exists})$ el $\mathcal{MS}-$espacio asociado. Si $a, b \in A$ son tales que $a \leqslant b$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_{OIR_S}(G) = \theta(a,b)$, donde Θ_{OIR_S} es la definida en el Teorema 4.22,*

(ii) *G es el menor subconjunto de $\mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Observación 4.30 tenemos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. Por otra parte, si $H \in \mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$ es tal que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$, por la Observación 4.30 inferimos que $(a,b) \in \Theta_{OIR_S}(H)$. Luego, por (i) resulta que $\Theta_{OIR_S}(G) \subseteq \Theta_{OIR_S}(H)$, de lo que concluimos por el Teorema 4.22 que $G \subseteq H$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis y la Observación 4.30 tenemos que $(a,b) \in \Theta_{OIR_S}(G)$. Además, si $\varphi \in Con(A)$ es tal que $(a,b) \in \varphi$, entonces por el Teorema 4.22 existe $H \in \mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$ tal que $\Theta_{OIR_S}(H) = \varphi$. De las afirmaciones anteriores resulta que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$. Entonces de (ii) y por el Teorema 4.22 se sigue que $\Theta_{OIR_S}(G) \subseteq \varphi$, de lo que concluimos que $\Theta_{OIR_S}(G) = \theta(a,b)$. $\square$

Recordemos que si P es un conjunto ordenado, diremos que $S \subseteq P$ es *convexo* si dados $a, b \in S$, entonces $\{x \in P : a \leq x \leq b\} \subseteq S$ ([2, p. 41]).

Observación 4.32. *De la Observación 4.10 es simple verificar que todo subconjunto de un mpM-espacio es convexo.*

Lema 4.33. *Sea X un mpM-espacio y $R \subseteq X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *R es un subconjunto cerrado, abierto y convexo de X,*

(ii) *existen $W, V \in D(X)$ tales que $W \subseteq V$ y $R = V \setminus W$.*

Dem. (i)$\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y [61, Lema 3.1.1] tenemos que $[R) \setminus R$ es cerrado y creciente. Por otra parte, de [61, Lema 3.1.2] existe $W \in D(X)$ tal que $[R) \setminus R \subseteq W$ y $R \cap W = \emptyset$. Sea $V = R \cup W$ y veamos que V es creciente. En efecto, sea $x \in V$ e $y \in X$ tales que $x \leq y$. Si $x \in W$, entonces $y \in W \subseteq V$. Si $x \in R$, puede ocurrir que: $y \in R$ ó $y \notin R$. En el primer caso, es claro que $y \in V$. En el otro caso tenemos que $y \in [R) \setminus R$, luego $y \in W \subseteq V$. De las afirmaciones anteriores, $V, W \in D(X)$ son los buscados.

(ii)$\Rightarrow$ (i): Es inmediata de la hipótesis y la Observación 4.32. $\square$

A continuación, describiremos con mayor precisión a los subconjuntos abiertos, involutivos y R-saturados que determinan a las congruencias principales.

Proposición 4.34. *Sean $(A, \exists)$ una $\mathcal{M}-$álgebra y $(X(A), g_A, R_\exists)$ el $\mathcal{MS}-$espacio asociado. Si a, $b \in A$ son tales que $a \leq b$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{OIR_S}(G) = \theta(a, b)$,

(ii) $G = R_\exists((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)))$,

(iii) *existe un subconjunto T abierto y cerrado de $X(A)$ tal que $G = R_\exists(T \cup g_A(T))$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Observación 4.30 tenemos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$ y como G es un subconjunto involutivo de $X(A)$ concluimos que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq G$. Además, como G es $R_\exists-$saturado resulta que $R_\exists((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))) \subseteq G$.

Por otra parte, como $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ es un subconjunto abierto, cerrado e involutivo de $X(A)$, entonces por el Lema 4.24 inferimos que es un subconjunto abierto, cerrado y creciente de $X(A)$ de donde concluimos que $R_\exists((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))) \in \mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$. Como $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq R_\exists(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus$

$\sigma_A(a))$), de la hipótesis y la Proposición 4.31 concluimos que $G \subseteq R_\exists((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es inmediato, considerando $T = \sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Observación 4.32 tenemos que T es un subconjunto abierto, cerrado y convexo en $X(A)$. Además, del Lema 4.33 existen $U, V \in D(X(A))$ tales que $U \subseteq V$ y $T = V \setminus U$. De esta afirmación inferimos que existen a, $b \in A$ tales que $a \leq b$, $U = \sigma_A(a)$ y $V = \sigma_A(b)$. Luego, $T = \sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$ de lo que concluimos la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.31 y del hecho que $R_\exists((\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)))$ es el menor elemento de $\mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$. $\square$

Teorema 4.35. *Sean A una $\mathcal{M}$-álgebra y $(X(A), g_A, R_\exists)$ el $\mathcal{MS}-$espacio asociado. Entonces existe un isomorfismo entre el retículo $\mathcal{CO}_{IR_S}(X(A))$ de todos los subconjuntos abiertos, cerrados, involutivos y $R_\exists$-saturados de $X(A)$ y el retículo $Con_P(A)$ de las $\mathcal{M}-$congruencias principales de A, donde el isomorfismo lo establece la restricción al retículo $\mathcal{CO}_{IR_S}(X(A))$ de la función Θ_{OIR_S} definida en el Teorema 4.22.*

Dem. Sea $G \in \mathcal{CO}_{Is}X(A)$. Entonces es simple verificar que $G = R_\exists(G \cup g_A(G))$. Luego, por la Proposición 4.34 resulta que $\Theta_{OIR_S}(G) \in Con_P(A)$.

Recíprocamente, sea $\rho \in Con_P(A)$, entonces por el Teorema 4.22 existe $G \in \mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$ tal que $\rho = \Theta_{OIR_S}(G)$. Luego, por la Proposición 4.34 existe $T \subseteq X(A)$ abierto y cerrado tal que $G = R_\exists(T \cup g_A(T))$, de donde inferimos que $G \in \mathcal{CO}_{IR_S}(X(A))$ $\square$

Corolario 4.36. *Si A una $\mathcal{M}$-álgebra, entonces $Con_P(A)$ es un álgebra de Boole.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.35 teniendo en cuenta que si $G \in \mathcal{CO}_{Is}X(A)$, por el Lema 4.15 resulta que $X(A) \setminus G \in \mathcal{CO}_{Is}X(A)$. $\square$

Por el Corolario 4.36 toda $\mathcal{M}-$congruencia principal es una $\mathcal{M}-$congruencia booleana, ahora probaremos que se verifica la recíproca.

Proposición 4.37. *Sean A una $\mathcal{M}-$álgebra y $\varphi \in Con(A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\mathcal{M}-$congruencia booleana,*

(ii) *φ es una $\mathcal{M}-$congruencia principal.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis como $\varphi \in Con(A)$, por el Teorema 4.22 inferimos que $\varphi = \Theta_{OIR_S}(G)$. Por otra parte, de la hipótesis existe $\rho \in Con(A)$ tal que $\rho \vee \Theta_{OIR_S}(G) = A \times A$ y $\rho \wedge \Theta_{OIR_S}(G) = Id_A$. Además, del Teorema 4.22, existe $H \in \mathcal{O}_{IR_S}(X(A))$ tal que $\rho = \Theta_{OIR_S}(H)$. Luego, de las afirmaciones anteriores concluimos que $G \cup H = X(A)$ y $G \cap H = \emptyset$ de donde resulta que $G = X(A) \setminus H$ es un subconjunto cerrado de $X(A)$. Por lo tanto, $G \in \mathcal{CO}_{Is}X(A))$ y por el Teorema 4.22 tenemos que $\varphi \in Con_P(A)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia directa del Corolario 4.36. □

Teniendo en cuenta que si A es una $\mathcal{M}-$álgebra finita, toda congruencia es principal podemos afirmar que:

Corolario 4.38. *Si A es una $\mathcal{M}-$álgebra finita, entonces $Con(A) = Con_P(A) = Con_B(A)$, donde $Con_B(A)$ es el retículo de todas las $\mathcal{M}-$congruencias booleanas de A.*

A continuación indicaremos algunos resultados establecidos en [61] que serán de utilidad en lo que sigue.

(N1) Sea (X, g) un $mp_M - espacio$ y $\{C_i\}_{i \in I}$ el conjunto de todas las cadenas maximales de X. Entonces para cada $U \in D(X)$ se satisfacen las siguientes identidades:

(i) $\triangle U = U \cap g(U) = \bigcup\limits_{C_i \subseteq U \cap g(U)} C_i,$

(ii) $\nabla U = U \cup g(U) = \bigcup\limits_{\substack{C_i \cap U \neq \emptyset \\ o \\ C_i \cap g(U) \neq \emptyset}} C_i.$

(N2) Sea (X, g) un $mp_M - espacio$ y sea $U \in D(X)$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:

(i) $U \in \nabla(D(X))$ si y sólo si $U = \nabla U$,

(ii) $U \in \triangle(D(X))$ si y sólo si $U = \triangle U$,

(iii) $\nabla(D(X)) = \triangle(D(X))$.

(N3) Sea (X, g) un $mp_M - espacio$ y $U \in D(X)$. Entonces se verifican:

(i) $U \in \triangle(D(X))$ si, y sólo si, U es abierto, cerrado e involutivo,

(ii) $U \in B(D(X))$ si, y sólo si, U es abierto, cerrado y $U = \bigcup_{x \in U} C_x$, donde C_x es la cadena maximal que contiene a x,

(iii) $\nabla(D(X)) = \triangle(D(X)) \subseteq B(D(X))$.

(N4) Sea A una $mpM-$álgebra finita tal que su espacio asociado es la suma cardinal de n cadenas con dos elementos, m cadenas involutivas con un elemento y $2l$ cadenas no involutivas con un elemento. Entonces $|Con_{mp_M}(A)| = |Con^B_{mp_M}(A)| = |Con^P_{mp_M}(A)| = |\nabla A| = 2^{n+m+l}$, donde $Con^B_{mp_M}(A)$ y $Con^P_{mp_M}(A)$ son los retículos de las $mpM-$congruencias booleanas y principales de A, respectivamente.

Proposición 4.39. *Sean (X, g, R) un $\mathcal{MS}-$espacio y $U \in D(X)$. Entonces $U \in \exists_R(\nabla(D(X)))$ si, y sólo si, U es un subconjunto abierto, cerrado, involutivo y $R-$saturado de X.*

Dem. Si $U \in \exists_R(\nabla(D(X)))$, entonces de (N3) y el Lema 4.24 tenemos que U es un subconjunto abierto, cerrado, involutivo y $R-$saturado de X. La recíproca es consecuencia directa de (N2) y (N3). □

Teorema 4.40. *Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra y $(X(A), g_A, R_\exists)$ el $\mathcal{MS}-$espacio asociado. Entonces, los retículos $\exists\nabla(A)$ y $Con_P(A)$ son isomorfos.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 4.39 y el Teorema 4.35. □

Corolario 4.41. *Sean A una $\mathcal{M}-$álgebra finita y $(X(A), g_A, R_\exists)$ el $\mathcal{MS}-$espacio asociado. Si $X(\exists(A))$ es la suma cardinal de n cadenas de dos elementos, m cadenas involutivas con un elemento y $2l$ cadenas no involutivas con un elemento, con n, m, l enteros no negativos, entonces $|Con_P(A)| = |Con(A)| = 2^{n+m+l}$.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.40 y (N4) teniendo en cuenta que $|Con_P(A)| = |\nabla\exists(A)| = |Con_{mp_M}(\exists A)| = 2^{n+m+l}$. □

4.6.2 Otra caracterización de las $\mathcal{M}-$congruencias principales

Nuestro próximo objetivo es obtener una nueva caracterización de las $\mathcal{M}-$congruencias principales por medio cierto subconjuntos del álgebra.

Es bien sabido ([63]) que, si L es un retículo distributivo acotado una clase importante de congruencias son las determinadas los filtros propios F de L definidas por:

$$(a,b) \in S(F) \Leftrightarrow \; existe \; f \in F \; y \; a \wedge f = b \wedge f.$$

Entonces se verifica que $Y_F = \{P \in X(L) : F \subseteq P\}$ es un subconjunto cerrado y creciente del espacio de Priestley asociado a L y $\Theta(Y_F) = S(F)$. Además, si $a \in L$ y $F = [a)$, entonces $Y_{[a)} = \{P \in X(L) : [a) \subseteq P\} = \sigma_L(a)$. De los resultados anteriores es simple verificar que:

Lema 4.42. *Sea L es un retículo distributivo acotado y $a \in L$. Entonces $\Theta(\sigma_L(a)) = S([a))$.*

Proposición 4.43. *Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *φ es una $\mathcal{M}-$congruencia principal de A,*

(ii) *existe $a \in \exists\nabla(A)$ tal que $\varphi = S([a))$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y el Teorema 4.35 existe un subconjunto G abierto, cerrado, involutivo y $R_\exists-$saturado de $X(A)$ tal que $\Theta_{OIR_S}(G) = \varphi$. Por otra parte, del Lema 4.24 y el Corolario 4.39 inferimos que $G \in \exists_{R_\exists}\nabla D(X(A))$ y como por el Teorema 4.40 se verifica que $\exists\nabla(A)$ y $\exists_{R_\exists}\nabla D(X(A))$ son isomorfos, entonces existe $a \in \exists\nabla(A)$, tal que $G = \sigma_A(a)$. Luego, de las afirmaciones anteriores concluimos que $\varphi = \Theta_{OIR_S}(\sigma_A(a))$. Teniendo en cuenta que la aplicación Θ_{OIR_S} es la restricción de Θ al conjunto $\mathcal{CO}_{IR_S}(X(A))$ y el Lema 4.42 inferimos que $\varphi = S([a))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $\varphi = S([a))$. Como $a \in \exists\nabla(A)$, entonces por (m18) tenemos que $\sigma_A(a) \in \nabla(\exists_{R_\exists}D(X(A)))$ y por (N3) concluimos que $\sigma_A(a) \in \mathcal{CO}_{IR_S}(X(A))$. Por otra parte, del Lema 4.42 $S([a)) = \Theta(\sigma_A(a)) = \Theta_{OIR_S}(\sigma_A(a))$ de donde por el Teorema 4.35 concluimos que es φ es una $\mathcal{M}-$congruencia principal. $\square$

Proposición 4.44. *Sea A una mpM-álgebra, $(X(A), g_A)$ el mp_M-espacio asociado. Si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$, entonces*

$$\theta(a,b) = S([(\nabla a \vee \sim \nabla b) \wedge (\triangle a \vee \sim \triangle b))) = \Theta_{COI}(\sigma_A((\nabla a \wedge \sim \nabla b) \vee (\triangle a \wedge \sim \triangle b))).$$

Dem. Por [61, Teorema 3.4.6, Teorema 2.4.6] inferimos que $\theta(a,b) = S(|1|_{\theta(a,b)}) = S([d))$, con $d = (\nabla a \vee \sim \nabla b) \wedge (\triangle a \vee \sim \triangle b)$. Por otra parte, del Lema 4.42 y [61, Corolario 3.3.9], teniendo en cuenta que $\triangle d = d$, concluimos que $S([d)) = \Theta_{COI}(\sigma_A(d))$. $\square$

Proposición 4.45. *Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra, $(X(A), g_A, R_\exists)$ el $\mathcal{MS}$-espacio asociado. Si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$, entonces*

$$\theta(a,b) = S([\exists((\nabla a \vee \sim \nabla b) \wedge (\triangle a \vee \sim \triangle b)))) = \Theta_{COIR_S}(\exists_{R_\exists}(\sigma_A((\nabla a \wedge \sim \nabla b) \vee (\triangle a \wedge \sim \triangle b)))).$$

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.35, la Proposición 4.44 y 4.43. $\square$

4.7 Relación entre las $\mathcal{M}$-álgebras y las $\mathcal{C}_k$-álgebras

Es bien sabido que toda álgebra de Boole k-cíclica (B, T) define una álgebra de Boole monádica $(B, \exists_T)$ donde $\exists_T = x \vee Tx \vee \cdots \vee T^{k-1}x$. Estos resultados fueron generalizados por M. Abad, en [1], para las álgebras de Łukasiewicz de orden n y por M. Lattanzi, en [45], para las MV-álgebras generada por n-cadenas. A continuación veremos que en el caso de las $\mathcal{M}-$álgebras, esto no sucede. En efecto, sea (A, t) una $\mathcal{C}_k$-álgebra y sea $\exists_t x = x \vee tx \vee \cdots \vee t^{k-1}x$. Teniendo en cuenta que $t\exists_t x = \exists_t x$ y que t es un $\mathcal{M}$-homomorfismo es simple verificar (m1), (m2), (m3) y (m5) pero, en general, (m4) no es válida ya que si tomamos las $\mathcal{S}$-álgebra $\mathbf{T_4^2}$ tenemos que $\exists_t \mathbf{T_4^2} \simeq T_4$, y por lo tanto, por (m26) solo deberia tener dos puntos fijo, lo que aquí no se verifica.

Por otra parte, observemos que si $\triangle(x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$ o equivalentemente $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$, entonces (m4) se verificaría. Pero en ese caso las mpM-álgebras coincidirían con las de Łukasiewicz de orden 3.

5 Capítulo V

En el presente capítulo continuamos el estudio de las $\mathcal{M}$-álgebras con el propósito de determinar todas las álgebras generadoras de esta variedad. En primer lugar, profundizamos el estudio del espectro primo de las $\mathcal{M}$-álgebras, lo que nos permitió obtener una nueva representación topológica para estas álgebras considerando la categoría cuyos objetos son los sm-espacios y cuyos morfismos son las sm-funciones. Esta dualidad cuenta con la ventaja de brindar una mayor información sobre el efecto de la relación de equivalencia en el espacio, lo que fue de utilidad para alcanzar el objetivo planteado. Por otra parte, probamos que las condiciones que se le piden a los q-espacios (ver [9]) resultan adecuadas para que el espacio cociente sea un espacio de Priestley con la topología de identificación y que la proyección canónica sea una función continua que preserva el orden. Además, mostramos que este resultado se traslada a las espacios de De Morgan monádicos ([62, p.84]) y a los sm-espacios, lo que nos permitió demostrar que si X es un sm-espacio, entonces $X(\exists_R D(X))$ y X/R son isomorfos como mpM–espacios, que es el resultado más importante de esta sección y facilitó la tarea propuesta. Por otra parte, también utilizamos conceptos de topología general tales como aglomeración y convergencia de redes (suceciones de Moore-Smith) y el teorema de extensión de funciones continuas para espacios T_3, para determinar las $\mathcal{M}$-álgebras generadoras de cardinalidad arbitraria. Igualmente determinamos condiciones necesarias y suficientes para que una $\mathcal{M}$-álgebras finita sea simple. Teniendo en cuenta algunos de los resultados precedentes, finalizamos el capítulo analizando la relación entre las álgebras de De Morgan monádicas ([62]) y las álgebras tetravalentes modales monádicas ([74]), en particular, esto nos sugiere estudiar una variedad más general que la de las TM-álgebras mónadicas.

5.1 Propiedades del espectro primo de las $\mathcal{M}$-álgebras

A continuación, describiremos una nueva dualidad topológica para las $\mathcal{M}$-álgebras, la que nos permitirá describir a las álgebras simples con mayor precisión. Antes veremos algunas propiedades del espectro primo de estas álgebras que las usaremos en el desarrollo del capítulo.

Lema 5.1. *Sea A una mpM-álgebra y $(X(A), g_A)$ el $mp_M -$ espacio asociado. Entonces para cada $a \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\triangle a = 0$,

(ii) $\sigma_A(a) \cap g_A(\sigma_A(a)) = \emptyset$,

(iii) *para todo* $P \in X(A)$, $P \in \sigma_A(a)$ *implica* $g_A(P) \notin \sigma_A(a)$.

Dem. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Es inmediata de que $\triangle U = U \cap g_A(U)$ y que σ_A es un mp_M-isomorfismo.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Sea $P \in \sigma_A(a)$, entonces de (ii) resulta que $P \notin g_A(\sigma_A(a))$ y por lo tanto $g_A(P) \notin \sigma_A(a)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $P \in \sigma_A(a) \cap g_A(\sigma_A(a))$, entonces $P \in \sigma_A(a)$ y $P \in g_A(\sigma_A(a))$, lo que contradice (iii). $\square$

Proposición 5.2. *Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra. Si $P \in X(A)$ es tal que $P \not\subseteq g_A(P)$, entonces $P \cap \exists(A) \neq g_A(P) \cap \exists(A)$.*

Dem. Como $P \not\subseteq g_A(P)$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \in P$ y $a \notin g_A(P)$, de donde resulta $P \in \sigma_A(a)$ y $g_A(P) \notin \sigma_A(a)$. Luego, $P \in X(A) \setminus g_A(\sigma_A(a)) = \sigma_A(\sim a)$. De las afirmaciones anteriores concluimos que $P \in \sigma_A(a \wedge \sim a)$. Además, (1) $\sigma_A(a \wedge \sim a) \cap g_A(\sigma_A(a \wedge \sim a) = \emptyset$. En efecto, si $Q \in \sigma_A(a \wedge \sim a)$, entonces $Q \notin g_A(\sigma_A(a))$, es decir $g_A(Q) \notin \sigma_A(a)$ y por consiguiente $g_A(Q) \notin \sigma_A(a \wedge \sim a)$. De (1) y el Lema 5.1 inferimos que $\triangle(a \wedge \sim a) = 0$, de lo que resulta por (m4) que (2) $\triangle\exists(a \wedge \sim a) = 0$. Por otra parte, como $a \wedge \sim a \in P$ entonces $\exists(a \wedge \sim a) \in P$. Luego, de (2) y el Lema 5.1 tenemos que $\exists(a \wedge \sim a) \notin g_A(P)$. Por lo tanto, $\exists(a \wedge \sim a) \in P \cap \exists(A)$ y $\exists(a \wedge \sim a) \notin g_A(P) \cap \exists(A)$, de lo que concluimos la demostración. $\square$

Corolario 5.3. *Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra y $P \in X(A)$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$g_A(P) \subset P$ implica que $g_A(P) \cap \exists(A) \subset P \cap \exists(A)$.*

(ii) *$P \not\subseteq g_A(P)$ y $g_A(P) \not\subseteq P$ implican que $P \cap \exists(A) \neq g_A(P) \cap \exists(A)$.*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.2. $\square$

Corolario 5.4. *Sean A una $\mathcal{M}-$álgebra, $P, Q \in X(A)$ y $R_\exists$ la relación definida en el Teorema 4.12. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$g_A(P) \subset P$ y $Q = g_A(Q)$ implican que $(P, Q) \notin R_\exists$.*

(ii) *$P \not\subseteq g_A(P)$, $g_A(P) \not\subseteq P$ y $Q = g_A(Q)$ implican que $(P, Q) \notin R_\exists$.*

Dem. (i): Si suponemos que $(P, Q) \in R_\exists$ entonces del Teorema 4.12 tenemos que $(g_A(P), g_A(Q)) \in R_\exists$ y por consiguiente $(g_A(P), Q) \in R_\exists$. Luego $(g_A(P), P) \in R_\exists$, lo que contradice el inciso (i) del Corolario 5.3.

(ii): Siguiendo un razonamiento análogo al anterior y teniendo en cuenta el inciso (ii) del Corolario 5.3 se concluye la demostración. $\square$

Teorema 5.5. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra y sean $S, T \in X(A)$ tales que $S \cap \exists A \subset T$ y $(S, T) \notin R_\exists$. Entonces $S \subset g_A(S)$ y $(g_A(S), T) \in R_\exists$.*

Dem. Consideremos el filtro $F = [S \cup (T \cap \exists A))$ y el ideal $J = (\exists A \setminus T]$, entonces $F \cap J = \emptyset$. En efecto, supongamos que $x \in F \cap J$, entonces existe $k \in \exists A \setminus T$, $s \in S$ y $t \in T \cap \exists A$ tales que $s \wedge \exists t \leq x \leq k$. Luego, por (m2) y (m8) tenemos que $\exists s \wedge \exists t \leq \exists k = k$. Por otra parte, de la hipótesis $\exists s \in T$ y por lo tanto $k \in T$, lo que resulta una contradicción. Luego, por el Teorema de Birkhoff-Stone existe $Q \in X(A)$ tal que $F \subseteq Q$ y $Q \cap J = \emptyset$. Por otra parte, $S \subset S \cup (T \cap \exists A)$. En efecto, si suponemos que $S = S \cup (T \cap \exists A)$, entonces $T \cap \exists A \subseteq S$. Además, como $(S, T) \notin R_\exists$ y $S \cap \exists A \subset T$, entonces $S \cap \exists A \subset T \cap \exists A$. Luego, existe $z \in T \cap \exists A$ tal que $z \notin S \cap \exists A$ de donde resulta $z \notin S$, contradicción. De la afirmación anterior concluimos que $S \subset Q$ y por lo tanto $Q = g_A(S)$ y $S \subset g_A(S)$. Además, $T \cap \exists A \subseteq Q \cap \exists A$. Por otra parte, si $x \in Q \cap \exists A$ y suponemos que $x \notin T$, tenemos que $x \in \exists A \setminus T \subseteq J$ y por lo tanto $Q \cap J \neq \emptyset$ lo que es una contradicción. Luego, $Q \cap \exists A = T \cap \exists A$ de lo que concluimos por $(g_A(S), T) \in R_\exists$. □

Proposición 5.6. *Sean A una $\mathcal{M}$-álgebra y $P, Q \in X(A)$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $(P, Q) \in R_\exists$ *y* $g_A(P) \subset P$ *implican que* $g_A(Q) \subset Q$.

(ii) $(g_A(P), Q) \in R_\exists$ *y* $Q \subset g_A(Q)$ *implican que* $g_A(P) \subset P$.

Dem. (i): Como $g_A(P) \subset P$, del inciso (i) del Corolario 5.3 y teniendo en cuenta que $(P, Q) \in R_\exists$ inferimos que $g_A(P) \cap \exists A \subset P \cap \exists A \subseteq Q$. Por otra parte, de la hipótesis resulta que (1) $(g_A(P), g_A(Q)) \in R_\exists$ de donde concluimos que $g_A(Q) \cap \exists A \subset Q$. Además, $(g_A(Q), Q) \notin R_\exists$. En efecto, si suponemos lo contrario de (1) tenemos que $(g_A(Q), P) \in R_\exists$ y por lo tanto $(g_A(P), P) \in R_\exists$ lo que contradice la Proposición 5.2. Luego, por el Teorema 5.5 concluimos que $g_A(Q) \subset Q$.

(ii): De $Q \subset g_A(Q)$ y el inciso (i) del Corolario 5.3 se verifica que $Q \cap \exists A \subset g_A(Q) \cap \exists A$ y como $(g_A(P), Q) \in R_\exists$ concluimos que $g_A(P) \cap \exists A \subset g_A(Q)$. Por otra parte $(g_A(P), g_A(Q)) \notin R_\exists$, ya que si suponemos lo contrario resulta que $(g(Q), Q) \in R_\exists$ lo que contradice la Proposición 5.2. Luego, por el Teorema 5.5 concluimos que $g_A(P) \subset P$. □

Corolario 5.7. *Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra. Si $P, Q \in X(A)$ son tales que $g_A(P) \subset P$, $Q \not\subseteq g_A(Q)$ y $g_A(Q) \not\subseteq Q$, entonces $(P, Q) \notin R_\exists$, $(P, g_A(Q)) \notin R_\exists$, $(g_A(P), Q) \notin R_\exists$ y $(g_A(P), g_A(Q)) \notin R_\exists$.*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.6 y el Teorema 4.12. □

Proposición 5.8. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra. Si $U \in D(X(A))$, $P, Q \in U$ y $(P, g_A(Q)) \in R_\exists$, entonces existe $S \in U \cap g_A(U)$ tal que $(S, P) \in R_\exists$.*

Dem. Como $(P, g_A(Q)) \in R_\exists$, entonces por el Teorema 4.12 tenemos que $(g_A(P), Q) \in R_\exists$. Luego, $g_A(P) \in R_\exists(Q) \subseteq R_\exists(U)$ de donde resulta que $P \in g(R_\exists U)$. Además, $P \in R_\exists(U)$ y por lo tanto $P \in g(R_\exists(U)) \cap R_\exists(U) = \triangle R_\exists(U)$. Por otra parte, sabemos que existe $a \in A$ tal que $U = \sigma_A(a)$, entonces $P \in \triangle R_\exists \sigma_A(a)$. Teniendo en cuenta que σ_A es un $Q-$isomorfismo, un mp_M-isomorfismo y la propiedad (m17) concluimos que $P \in \triangle R_\exists \sigma_A(a) = \sigma_A(\triangle \exists a) = \sigma_A(\exists \triangle a) = R_\exists \triangle(\sigma_A(a))$. Luego, existe $S \in U \cap g_A(U)$ tal que $(S, P) \in R_\exists$. □

5.2 Segunda representación topológica para las $\mathcal{M}$-álgebras

A continuación presentaremos una nueva dualidad topológica para las $\mathcal{M}$-álgebras del siguiente modo:

5.2.1 Los sm-espacios y las sm-funciones

Definición 5.9. *Un sm-espacio es una terna (X, g, R), donde (X, g) es un mp_M-espacio, (X, R) es un q-espacio y se verifican las condiciónes adicionales siguientes:*

(e1) *si $(x, y) \in R$, entonces $(g(x), g(y)) \in R$,*

(e2) *$x \not\leq g(x)$, entonces $(x, g(x)) \notin R$,*

(e3) *si $(x, y) \in R$ y $g(x) < x$, entonces $g(y) < y$,*

(e4) *si $U \in D(X)$, $x, y \in U$ y $(x, g(y)) \in R$, entonces existe $z \in U \cap g(U)$ tal que $(z, x) \in R$.*

Definición 5.10. *Si* (X_1, g_1, R_1) *y* (X_2, g_2, R_2) *son sm-espacios, entonces una función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *es una sm-función si* f *es una* mp_M*-función y una q-función simultáneamente.*

5.2.2 Propiedades de los *sm*-espacios

En lo que sigue determinaremos propiedades de los *sm*-espacios.

Proposición 5.11. *Sea* (X, g, R) *tal que* (X, g) *es un* mp_M-*espacio y* (X, R) *es un q-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(e4) *si* $U \in D(X)$, $x, y \in U$ *y* $(x, g(y)) \in R$, *entonces existe* $z \in U \cap g(U)$ *tal que* $(z, x) \in R$,

(ms2) $R(U) \cap R(g(U)) = R(U \cap g(U))$ *para todo* $U \in D(X)$.

Dem. (e4) $\Rightarrow$ (ms2): Para todo $U \in D(X)$ se verifica que $R(U \cap g(U)) \subseteq R(U) \cap R(g(U))$. Supongamos ahora que $w \in R(U) \cap R(g(U))$, entonces existen x, $y \in U$ tales que $(w, x) \in R$ y $(w, g(y)) \in R$, de lo que se sigue que $(x, g(y)) \in R$. Luego, por (e4) tenemos que existe $z \in U \cap g(U)$ tal que $(x, z) \in R$, de lo que resulta que $(w, z) \in R$. Por lo tanto, $w \in R(U \cap g(U))$, de lo que concluimos que $R(U) \cap R(g(U)) = R(U \cap g(U))$.

(ms2) $\Rightarrow$ (e4): Sean x, $y \in U$ tal que $(x, g(y)) \in R$. Luego, $x \in R(U) \cap R(g(U))$ de lo que se sigue de (ms2) que $x \in R(U \cap g(U))$. Por lo tanto, existe $z \in U \cap g(U)$ tal que $(x, z) \in R$. $\square$

Proposición 5.12. *Sea* (X, g, R) *un sm-espacio. Entonces para todo* x, $y \in X$ *valen las siguientes propiedades:*

(e5) $(x, y) \in R$ *y* $x < g(x)$ *implican* $y < g(y)$.

(e6) $(g(x), y) \in R$ *e* $y < g(y)$ *implican* $g(x) < x$.

(e7) $(g(x), y) \in R$ *y* $x < g(x)$ *implican* $g(y) < y$.

(e8) $(g(x), y) \in R$ *y* $g(x) < x$ *implican* $g(y) < y$.

(e9) $(g(x), y) \in R$ *y* $g(y) < y$ *implican* $x < g(x)$.

(e10) $g(x) \not\leq x$ *implica* $(x, g(x)) \notin R$.

(e11) $x < g(x)$ *o* $g(x) < x$, $y \not\leq g(y)$ *y* $g(y) \not\leq y$ *implican* $(x, y) \notin R$, $(g(x), y) \notin R$, $(x, g(y)) \notin R$ *y* $(g(x), g(y)) \notin R$.

(e12) $x < g(x)$ *o* $g(x) < x$ *y* $g(y) = y$ *implican* $(x, y) \notin R$ *y* $(g(x), y) \notin R$.

(e13) $x \not\leq g(x)$ *y* $g(x) \not\leq x$ *y* $g(y) = y$ *implican* $(x, y) \notin R$ *y* $(g(x), y) \notin R$.

(e14) $x < g(x)$ *o* $g(x) < x$ *implican* $(x, g(x)) \notin R$.

(e15) $x \not\leq g(x)$ *y* $g(x) \not\leq x$ *implican* $(x, g(x)) \notin R$.

(e16) $(x, y) \in R$ *y* $x = g(x)$ *implican* $y = g(y)$.

(e17) $(x, y) \in R$ *y* $x \not\leq g(x)$ *y* $g(x) \not\leq x$ *implican* $y \not\leq g(y)$ *y* $g(y) \not\leq y$.

Dem. (e5): De $(x, y) \in R$ resulta por (e1) que $(g(x), g(y)) \in R$. Por otra parte, de la hipótesis tenemos que $g(g(x)) < g(x)$, y por (e3) inferimos que $g(g(y)) < g(y)$ de donde concluimos que $y < g(y)$.

(e6): Inmediata de (e5).

(e7): Es consecuencia directa de (e1) y (e3).

(e8): De la hopótesis y (e1) tenemos que $(x, g(y)) \in R$ y como $g(x) < x$ por (e3) concluimos que $y < g(y)$.

(e9): Resulta inmediata de (e3).

(e10): De la hipoótesis tenemos que $g(x) \not\leq g(g(x))$, de lo que se sigue por (e2) que $(g(x), g(g(x))) \notin R$ y por lo tanto $(g(x), x) \notin R$.

(e11): Si $x < g(x)$ y suponemos que $(x, y) \in R$, entonces por (e5) se verifica que $y < g(y)$, lo que es una contradicción.

Si suponemos ahora que $g(x) < x$, con un razonamiento análogo tenemos una contradicción. Por lo tanto $(x, y) \notin R$.

Si $x < g(x)$ y suponemos que $(x, g(y)) \in R$, entonces $(g(x), y) \in R$ de donde por (e7) inferimos que $g(y) < y$, lo que contradice la hipótesis.

Si suponemos que $x < g(x)$, siguiendo una razonamiento análogo al anterior de (e8) tenemos que $g(y) < y$, contradicción.

Los casos restantes se prueban de manera análoga.

(e12): Si $(x, y) \in R$ y se verifica que $x < g(x)$, entonces por (e5) obtenemos que $y < g(y)$, lo que contradice la hipótesis. Si $(x, y) \in R$ y se verifica $g(x) < x$, por (e3) tenemos que $g(y) < y$, absurdo. Por lo tanto, $(x, y) \notin R$.

(e13): Sean x, $y \in X$ tales que $x \nleq g(x)$ y $g(x) \nleq x$ y $g(y) = y$. Si $(x, y) \in R$, entonces por (e1) tenemos que $(g(x), y) \in R$ y por consiguiente $(x, g(x)) \in R$, lo que contradice (e2) y (e10).

(e14): Resulta de la hipótesis, aplicando (e5) y (e3).

(e15): Es consecuencia inmediata de (e2) y (e10).

(e16): Si $(x, y) \in R$ y $x = g(x)$, de (e1) se sigue que $(g(x), g(y)) \in R$. Por lo tanto, $(x, g(y)) \in R$, de lo que obtenemos que $(y, g(y)) \in R$. Si $y \neq g(y)$, entonces $g(y) < y$ ó $y < g(y)$ ó $g(y) \nleq y$ e $y \nleq g(y)$. De estas afirmaciones, (e14) y (e15) concluimos que $y = g(y)$

(e17): De las hipótesis y (e15) se sigue que $(x, g(x)) \notin R$. Además, como $(x, y) \in R$ resulta que $y \neq g(x)$. Si suponemos que $y = g(y)$ por (e16) inferimos que $x = g(x)$, contradicción. Si $g(y) < y$ por (e3) tenemos que $g(x) \nleq x$, contradicción. Por último, si $y < g(y)$ por (e5) resulta $x \nleq g(x)$, contradicción. $\square$

Corolario 5.13. *Sea (X, g, R) un sm-espacio. Entonces para todo $x \in X$,*

(e18) $max\, R(x) = min\, R(x) = R(x)$.

Dem. Supongamos que $R(x) \backslash max\, R(x) \neq \emptyset$, luego existe $y \in R(x)$ tal que $y \notin max\, R(x)$. Como $R(x)$ es un conjunto cerrado, entonces existe $z \in max\, R(x)$ tal que $y < z$. Luego, $z = g(y)$ y por lo tanto $y < g(y)$, de lo que se sigue por (e14) que $(y, g(y)) \notin R$. Por otra parte, como $z, y \in R(x)$ resulta que $(y, z) \in R$ y por lo tanto $(y, g(y)) \in R$, lo que es una contradicción. Luego $max\, R(x) = R(x)$. El caso restante se prueba de manera análoga. □

Corolario 5.14. *Sea (X, g, R) un sm-espacio. Entonces:*

(i) $R(x) \subseteq max\, X$, *para todo* $x \in max\, X$,

(ii) $R(x) \subseteq min\, X$, *para todo* $x \in min\, X$,

(iii) $R(x) \subseteq max\, X \cap min\, X$, *para todo* $x \in max\, X \cap min\, X$,

(iv) $R(x) \subseteq max\, X \setminus min\, X$, *para todo* $x \in max\, X \setminus min\, X$,

(v) $R(x) \subseteq min\, X \setminus max\, X$, *para todo* $x \in min\, X \setminus max\, X$,

(vi) $R(x) \subseteq \{z \in X : z = g(z)\}$, *para todo* $x \in X$ *tal que* $x = g(x)$,

(vii) $R(x) \subseteq (min\, X \cap max\, X) \setminus \{z \in X : z = g(z)\}$ *para todo* $x \neq g(x)$ *y* $x \in min\, X \cap max\, X$,

(viii) $R(x) \subseteq max\, X$ *implica* $R(g(x)) \subseteq min\, X$,

(ix) $R(x) \subseteq min\, X$ *implica* $R(g(x)) \subseteq max\, X$.

Dem. (i): Sea $x \in max\, X$ e $y \in R(x)$, entonces se pueden presentar los siguientes casos:

(a) $g(x) < x$, entonces por (e3) obtenemos que $g(y) < y$ de donde resulta que $y \in max\, X$.

(b) $x = g(x)$, entonces por (e16) obtenemos que $y = g(y)$. Luego, $y \in max\, X$.

(c) $x \not\leq g(x)$ y $g(x) \not\leq x$, entonces por (e17), $y \not\leq g(y)$ y $g(y) \not\leq y$, y por lo tanto $y \in max\, X$.

(ii): La demostración se obtiene siguiendo un razonamiento anaálogo a (i).

(iii): Es conscuencia directa de (i) y (ii).

(iv): Sea $x \in max\, X \setminus min\, X$ e $y \in R(x)$. Entonces de la hipótesis resulta que $g(x) < x$. Luego, por (e3) tenemnos que $g(y) < y$ y por lo tanto $y \in max\, X \setminus min\, X$.

(v): Siguiendo un razonamiento análogo a (iv) y teniendo en cuenta (e5) se concluye la demostración

(vi): Es consecuencia inmediata de (e16).

(vii): Resulta de (e17).

(viii): Sea $y \in R(g(x))$, entonces $(y, g(x)) \in R$, de donde por (e1) tenemos que $(g(y), x) \in R$. Luego, de la hipótesis concluimos que $g(y) \in max\, X$. Entonces se pueden presentar los siguientes casos: $y < g(y)$ ó $y = g(y)$ ó $y \not\leq g(y)$ y $g(y) \not\leq y$, de lo que se concluye que $y \in min\, X$.

(ix): Se demuestra de manera análoga a (viii). $\square$

La siguiente propiedad de separación de los elementos de un espacio de De Morgan nos resultará de utilidad para determinar una formulación equivalente de los *sm*-espacios.

Proposición 5.15. *Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Si $x \not\leq g(x)$, entonces existe $U \in D(X)$ tal que:*

(i) $U \cap g(U) = \emptyset$,

(ii) $x \in U$ *y* $g(x) \notin U$.

Dem. Como $x \not\leq g(x)$ existe $V \in D(X)$ tal que $x \in V$ y $g(x) \notin V$. De esta última afirmación resulta que $x \in X \setminus g(V)$. Como $X \setminus g(V) \in D(X)$, entonces $U = V \cap (X \setminus g(V)) \in D(X)$, luego $x \in U$ y $g(x) \notin U$. Además, como $g(U) = g(V) \cap (X \setminus V)$ concluimos que $U \cap g(U) = \emptyset$. $\square$

Corolario 5.16. *Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Si $g(x) \not\leq x$, entonces existe $U \in D(X)$ tal que:*

(i) $U \cap g(U) = \emptyset$,

(ii) $g(x) \in U$ *y* $x \notin U$.

Dem. Inmediato de la Proposición 5.15. □

Corolario 5.17. *Sea* (X, g, R) *tal que:*

(i) (X, g) *es un espacio de De Morgan,*

(ii) (X, R) *es un q-espacio,*

(ms2) $R(U) \cap R(g(U)) = R(U \cap g(U))$ *para todo* $U \in D(X)$.

Entonces se verifican las siguintes propiedades:

(e19) *para cada* $x \in X$ *tal que* $x \not\leq g(x)$ *existe* $U \in D(X)$ *tal que* $x \in U$ *y* $g(x) \notin R(U)$,

(e2) $x \not\leq g(x)$ *implica* $(x, g(x)) \notin R$.

Dem. (e19): Como $x \not\leq g(x)$, de la Proposición 5.15, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in U$, $g(x) \notin U$ y $U \cap g(U) = \emptyset$. De esta última afirmación tenemos que $R(U \cap g(U)) = \emptyset$. Luego por (ms2), $R(U) \cap R(g(U)) = \emptyset$ y como $x \in U$ resulta que $g(x) \in R(g(U))$. Por lo tanto, $g(x) \notin R(U)$.

(e2): Es consecuencia inmediata de (e19). □

Proposición 5.18. *Sea* (X, g, R) *tal que:*

(i) (X, g) *un* mp_M-*espacio,*

(ii) (X, R) *es un q-espacio,*

(e1) *si* $(x, y) \in R$, *entonces* $(g(x), g(y)) \in R$,

(ms2) $R(U) \cap R(g(U)) = R(U \cap g(U))$ *para todo* $U \in D(X)$.

Entonces para cada $x \in X$ *se verifica la siguiente propiedad:*

(e3) *si* $(x, y) \in R$ *y* $g(x) < x$, *entonces* $g(y) < y$,

Dem. Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in R$ y $g(x) < x$. Entonces $x \not\leq g(x)$ y por el Corolario 5.17 resulta que $(x, g(x)) \notin R$. Si suponemos que $g(y) \not< y$, por ser (X, g) un mp_M-espacio tenemos que $g(y) = y$ ó $y < g(y)$ ó $y \not\leq g(y)$ y $g(y) \not\leq y$.

Si $g(y) = y$, de la hipótesis y (e1) deducimos que $(g(x), y) \in R$. Luego $(x, g(x)) \in R$, lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que $y < g(y)$. Como $x \not\leq g(x)$, por la Proposición 5.15 existe $U \in D(X)$ tal que $x \in U$ y $U \cap g(U) = \emptyset$. Luego, por (ms2) $R(U) \cap R(g(U)) = \emptyset$. Por otra parte, como $(x, y) \in R$ inferimos que $y \in R(U)$ y por lo tanto $g(y) \in R(U)$ lo que implica que $y \in R(U) \cap R(g(U))$, contradicción.

Finalmente, si $y \not\leq g(y)$ y $g(y) \not\leq y$, por el Corolario 5.16 existe $V \in D(X)$ tal que $g(y) \in V$ y $V \cap g(V) = \emptyset$. De esta última afirmación y (ms2) tenemos que $R(V) \cap R(g(V)) = \emptyset$. De la hipótesis y (e1) resulta que $(g(x), g(y)) \in R$. Por lo tanto, $g(x) \in R(V)$ lo que implica que $x \in R(g(V))$. Además, como $g(x) < x$ inferimos que $x \in R(V)$ de donde resulta que $x \in R(V) \cap R(g(V))$, lo que es una contradicción.

Luego, $g(y) < y$ con lo que concluimos la demostración. $\square$

Teorema 5.19. *Sea (X, g, R) tal que (X, g) es un mp_M-espacio y (X, R) es un q-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (X, g, R) *es un sm-espacio,*

(ii) (X, g, R) *es un $\mathcal{MS}$-espacio*

Dem. Es consecuencia inmediata de la Definición 5.9, el Corolario 5.17 y la Proposición 5.11 y 5.18. $\square$

A partir de lo demostrado en el Teorema 5.19 podemos afirmar que los conceptos y resultados establecidos para los $\mathcal{MS}$-espacios son también válidos para los sm-espacios. A continuación, obtendremos una descripción de las mpM-funciones que nos permitirá presentar una nueva caracterización de los sm-isomorfismos, que nos será de utilidad más adelante.

5.2.3 Propiedades de las sm-funciones

Proposición 5.20. [61] *Sean (X_1, g_1) y (X_2, g_2) mpM-espacios y f una mpM-función de X_1 en X_2. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f(max\, X_1 \cap [x)) = max\, X_2 \cap [f(x))$, *para todo* $x \in X_1$,

(ii) $f(max\, X_1) \subseteq max\, X_2$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $y \in f(max\, X_1)$ entonces $y = f(x)$ con $x \in max\, X_1$. Luego, $[x) = \{x\}$. Por lo tanto, $max\, X_1 \cap [x) = \{x\}$ de donde por (i) resulta que $f(\{x\}) = max\, X_2 \cap [f(x))$ lo que implica que $y = f(x) \in max\, X_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $x \in X_1$, entonces $x \in max\, X_1$ ó $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$.

Si $x \in max\, X_1$, entonces $max\, X_1 \cap [x) = \{x\}$, lo que implica que $f(max\, X_1 \cap [x)) = \{f(x)\}$. Luego, de (ii) resulta que $f(x) \in max\, X_2$. Por lo tanto, $\{f(x)\} = max\, X_2 \cap [f(x))$, de donde concluimos que $f(max\, X_1 \cap [x)) = max\, X_2 \cap [f(x))$.

Si $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$, entonces $x < g_1(x)$ y $g_1(x) \in max\, X_1$. Luego, $max\, X_1 \cap [x) = \{g_1(x)\} = max\, X_1 \cap [g_1(x))$. Entonces aplicando el caso anterior a $g_1(x)$ tenemos que $f(max\, X_1 \cap [g_1(x)) = max\, X_2 \cap [f(g_1(x)))$ lo que implica que $f(max\, X_1 \cap [x)) = max\, X_2 \cap [f(g_1(x)))$. Por otra parte como f es una mpM-función, $f(x) \leq f(g_1(x)) = g_2(f(x))$. Luego, $max\, X_2 \cap [f(x)) = max\, X_2 \cap [f(g_1(x)))$. Por lo tanto, $f(max\, X_1 \cap [x))) = max\, X_2 \cap [f(x))$ lo que completa la demostración. $\square$

Corolario 5.21. [61] *Sean (X_1, g_1) y (X_2, g_2) mpM-espacios y f una mpM-función de X_1 en X_2. Entonces $f(min\, X_1) \subseteq min\, X_2$.*

Dem. Sea $y \in f(min\, X_1)$ entonces existe $x \in min\, X_1$ tal que $y = f(x)$. Luego, $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$ ó $x \in min\, X_1 \cap max\, X_1$.

Si $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$, entonces $x < g_1(x)$. Por lo tanto, $g_1(x) \in max\, X_1$. Como f es una mpM-función de la Proposición 5.20 resulta que $f(g_1(x)) = g_2(f(x)) \in max\, X_2$ y $f(x) \leq g_2(f(x))$. Luego, $f(x) \in min\, X_2$.

Si $x \in min\, X_1 \cap max\, X_1$, $x = g_1(x)$ ó $x \not\leq g_1(x)$ y $g_1(x) \not\leq x$. Si $x = g_1(x)$ entonces $f(x) = g_2(f(x))$ y por lo tanto $f(x) \in min\, X_2 \cap max\, X_2$. Si $x \not\leq g_1(x)$ y $g_1(x) \not\leq x$, por la Proposición 5.20 podemos afirmar que $f(x), g_2(f(x)) \in max\, X_2$ de lo que concluimos por ser X_2 un mpM-espacio que $f(x), g_2(f(x)) \in min\, X_2$. □

Corolario 5.22. *Sean (X_1, g_1, R_1) y (X_2, g_2, R_2) sm-espacios y f una función de X_1 en X_2. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es una sm-función,*

(ii) *f es una función isótona y continua tal que*

  (a) $f \circ g_1 = g_2 \circ f$,

  (b) $f(max\, X_1) \subseteq max\, X_2$,

  (c) $R_1(f^{-1}(V)) = f^{-1}(R_2(V))$ *para cada* $V \in D(X_2)$.

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 5.20 y del hecho que f es una sm-función si y sólo si es una mpM-función y una q-función. □

Proposición 5.23. *Sean (X_1, g_1, R_1) y (X_2, g_2, R_2) sm-espacios y f una función de X_1 en X_2. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es un sm-isomorfismo,*

(ii) *f es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo tal que:*

  (a) $f \circ g_1 = g_2 \circ f$,

  (b) $f(max\, X_1) = max\, X_2$,

  (c) $(x, y) \in R_1$, *si y sólo si* $(f(x), f(y)) \in R_2$

Dem. Resulta Corolario 5.22 y [9, Lemma 2.8]. □

Observaciones 5.24. (i) *La función $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ es un sm-isomorfismo.*

(ii) *Sean (X_1, g_1, R_1) y (X_2, g_2, R_2) sm-espacios y $f : X_1 \to X_2$ una sm-función. Entonces la aplicación $\mathsf{M}(f) : D(X_2) \longrightarrow D(X_1)$, definida por la prescripción $\mathsf{M}(f)(U) = f^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X_2)$, es un sm-homomorfismo. Además, $\mathsf{M}(f)$ es inyectiva (sobreyectiva) si f es sobreyectiva (inyectiva).*

(iii) *Sean* $(A_1, \exists_1)$ *y* $(A_2, \exists_2)$ $\mathcal{M}-$*álgebras y* $h : A_1 \to A_2$ *un* $\mathcal{M}-$*homomorfismo de. Entonces la aplicación* $\mathsf{m}(h) : X(A_2) \longrightarrow X(A_1)$*, definida por la prescripción* $\mathsf{m}(h)(P) = h^{-1}(P)$ *para todo* $P \in X(A_2)$*, es una sm-función. Además,* $\mathsf{m}(h)$ *es inyectiva (sobreyectiva) si* h *es un homomorfismo sobreyectivo (inyectivo).*

5.3 Espacios cocientes

5.3.1 Espacio cociente de un q-espacio

Lema 5.25. *Sea* (X, R) *un* q*–espacio. Si* $x, y \in X$ *son tales que para todo* $w \in R(x)$ *y para todo* $z \in R(y)$ *se verifica que* $w \not\leq z$*, entonces existe un subconjunto abierto, cerrado y creciente* U *de* X *tal que* $R(x) \subseteq U$ *y* $R(y) \cap U = \emptyset$*.*

Dem. Como X es un espacio de Priestley y para todo $w \in R(x)$ y para todo $z \in R(y)$ se verifica que $w \not\leq z$, entonces para cada $w \in R(x)$ y cada $z \in R(y)$ existe un subconjunto abierto, cerrado y creciente U_{wz} de X tal que $w \in U_{wz}$ y $z \notin U_{wz}$. Por lo tanto, para cada $z \in R(y)$ se verifica que $R(x) \subseteq \bigcup\limits_{w \in R(x)} U_{wz}$ y $z \notin \bigcup\limits_{w \in R(x)} U_{wz}$. Como $R(x)$ es un subconjunto cerrado de X y X es compacto, entonces $R(x)$ es un subconjunto compacto de X y por consiguiente existe un número finito $w_1, \dots, w_n \in R(x)$ tales que $R(x) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{w_i z}$ y $z \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{w_i z}$. Como $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{w_i z}$ es una unión finita de subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X, entonces también es un subconjunto abierto, cerrado y creciente de X y lo notamos por U_z, es decir $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{w_i z} = U_z$. Por consiguiente, para cada $z \in R(y)$ existe un subconjunto abierto, cerrado y creciente U_z de X tal que $R(x) \subseteq U_z$ y $z \notin U_z$. Por lo tanto, $R(y) \subseteq \bigcup\limits_{z \in R(y)} (X \setminus U_z)$. Como $R(y)$ es un subconjunto compacto de X y para cada $z \in R(y)$, $X \setminus U_z$ es un subconjunto abierto de X, entonces existen $z_1, \dots, z_m \in R(y)$ tales que $R(y) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} (X \setminus U_{z_j})$ y por ende $R(y) \subseteq X \setminus \bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{z_j}$. Como cada conjunto U_{z_i}, $1 \leq i \leq m$ es un subconjunto abierto, cerrado y creciente de X, entonces $\bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{z_j}$ es también un subconjunto abierto, cerrado y creciente de X que lo notamos por U, es decir $\bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{z_j} = U$. De esta manera concluimos que existe un subconjunto abierto, cerrado y creciente U de X tal que $R(x) \subseteq U$ y $R(y) \cap U = \emptyset$. $\square$

Corolario 5.26. *Sea (X, R) un q–espacio. Si x, $y \in X$ son tales que para todo $w \in R(x)$ y para todo $z \in R(y)$ se verifica que $w \not\leq z$, entonces existe un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$*

Dem. Por el Lema 5.25 podemos afirmar que existe un subconjunto abierto, cerrado y creciente U de X tal que $R(x) \subseteq U$ y $R(y) \cap U = \emptyset$. Luego, $x \in R(U)$ e $y \notin R(U)$ y por (q1), $R(U)$ es un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado de X. $\square$

Teorema 5.27. *Sean $(X, \leq, \tau, R)$ un q–espacio, X/R el conjunto cociente por la relación de equivalencia R y $q : X \longrightarrow X/R$ la aplicación canónica. Entonces se verifican:*

(i) *$(X/R, \preceq, \tau_q)$ es un espacio de Priestley, donde τ_q es la topología de identificación determinada por q y la relación de orden $\preceq$ está definida la prescripción:*

- *para todo x, $y \in X$, $\overline{x} \preceq \overline{y}$ si, y sólo si, existen $w \in R(x)$ y $z \in R(y)$ y tal que $w \leq z$.*

(ii) *La aplicación $q : X \longrightarrow X/R$ es una función continua y creciente (i.e. es un morfismo de espacios de Priestley).*

Dem. (i): En primer lugar veamos que $(X/R, \preceq)$ es un conjunto ordenado: Como consecuencia directa de que R es una relación de equivalencia y $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado tenemos que $\preceq$ es reflexiva.

Sean $x, y \in X$ tales que $\overline{x} \preceq \overline{y}$ y $\overline{y} \preceq \overline{x}$ y veamos que $\overline{x} = \overline{y}$. En efecto, de la hipótesis existen $w, w' \in R(x)$ y $z, z' \in R(y)$ tales que $w \leq z$ y $z' \leq w'$. Sea U un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado de X tal que $x \in U$, entonces como U es saturado tenemos que $R(x) \subseteq U$ y por consiguiente $w \in U$. Luego, como U es creciente deducimos que $z \in U$. De esta última afirmación y como U es saturado inferimos que $R(y) \subseteq U$ y por lo tanto $y \in U$. Entonces, hemos probado que si U es un subconjunto abierto, cerrado y saturado de X tal que $x \in U$, entonces $y \in U$. Mediante un razonmiento análogo, se prueba que si V es un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado de X tal que

$y \in V$, entonces $x \in V$. Por lo tanto, podemos afirmar que para todo subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado W de X se verifica que $x \in W$ si, y sólo, si $y \in W$. Luego, del [9, Lemma 2.5] concluimos que $(x, y) \in R$ y por lo tanto, $\overline{x} = \overline{y}$.

Sean $x, y, z \in X$ tales que $\overline{x} \preceq \overline{y}$ y $\overline{y} \preceq \overline{z}$, entonces $\overline{x} \leq \overline{z}$. En efecto, de la hipotesis existen (1) $w \in R(x)$, (2) $z, z' \in R(y)$ y (3) $t \in R(z)$ tales que (4) $w \leq z$ y (5) $z' \leq t$. Si suponemos que $\overline{x} \not\leq \overline{z}$, entonces inferimos que $u \not\leq v$ para todo $u \in R(x)$ y $v \in R(z)$. Luego, por el Corolario 5.26 existe un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado U de X tal que (6) $x \in U$ y (7) $z \notin U$. Como U es saturado, entonces de (1) y (6) inferimos que $w \in U$. Además, como U es creciente de (4) $z \in U$, lo que contradice (7).

Veamos ahora que X/R es un espacio compacto: como $q : X \longrightarrow X/R$ es una función continua, ya que la topología de identificación determinada por la función q es la topología más fina para X/R que hace continua a q y como X es compacto, entonces $q(X) = X/R$ es compacto.

Por último, mostraremos que X/R es un espacio totalmente disconexo en el orden: Sean $x, y \in X$ son tales que $\overline{x} \not\preceq \overline{y}$, entonces por el Corolario 5.26 existe un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado U de X tal que (1) $x \in U$ e (2) $y \notin U$. Sea $V = q(U)$. Como la topología en X/R es la de identificación determinada por q y como $U = q^{-1}(q(U))$ por ser U saturado, entonces V es abierto y cerrado en X/R. Además, V es creciente. En efecto, sea (3) $\overline{z} \in V$ y $\overline{w} \in X/R$ tales que (4) $\overline{z} \preceq \overline{w}$. De (3) y teniendo en cuenta que U saturado inferimos que (5) $z \in U$. De (4) obtenemos que existen (6) $t \in R(z)$ y (7) $v \in R(w)$ tales que (8) $t \leq v$. De (5), (6) y por ser U saturado inferimos que $t \in U$. Luego, por (8) y ser U creciente resulta que $v \in U$. De esta última afirmación y (7) resulta que $\overline{w} \in q(U) = V$. Por lo tanto, V es un subconjunto abierto, cerrado y creciente de X/R y de (1), (2) inferimos que $\overline{x} \in V$ y $\overline{y} \notin V$. Luego, concluimos que $(X/R, \leq, \tau_q)$ es un espacio de Priestley.

(ii) $q : X \longrightarrow X/R$ es una función isótona y continua: sólo resta probar que q es isótona, lo que es inmediato de la definición de la relación $\preceq$. □

En [73] se considera en el espacio cociente de un espacio de Pristley la siguiente relación de orden: *$\overline{x} \preceq' \overline{y}$ si, y sólo si, para todo subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado U de X la hipótesis $x \in U$ implica $y \in U$.* A continuación mostraremos que es equivalente a la relación $\preceq$, definida anteriormente. También, en [73] se dan condiciones necesarias y suficientes para que una relación R permita que X/R sea un espacio de Priestley tal que $q : X \to X/R$ sea continua e isótona. Más precisamente, se prueba que basta con que R verifique (E3): *Si $x, y \in X$ son tales que $(x, y) \notin R$, entonces existe un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ o existe un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado V de X tal que $x \in V$ e $y \notin V$.* Posteriormente, R. Cignoli probó que los q-espacios verifican (E3) ([9, Lemma 2.5]).

Proposición 5.28. *Sean (X, R) un q–espacio y sean $\overline{x}, \overline{y} \in X/R$. Entonces $\overline{x} \preceq \overline{y}$ si, y sólo si, $\overline{x} \preceq' \overline{y}$.*

Dem. Sean $x, y \in X$ tales que $\overline{x} \preceq \overline{y}$. Luego, existen $w \in R(x)$, $z \in R(y)$ tales que $w \leq z$. Sea U un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado de X tal que $x \in U$. Entonces, $R(x) \subseteq U$. De las afirmaciones anteriores inferimos que $z \in U$ y como U es saturado, $R(z) \subseteq U$ de donde resulta que $y \in U$. Luego, $\overline{x} \preceq' \overline{y}$.

Por otro parte, sean $x, y \in X$ tales que $\overline{x} \preceq' \overline{y}$ y supongamos que $\overline{x} \not\preceq \overline{y}$. De esta última afirmación resulta que para todo $w \in R(x)$ y para todo $z \in R(y)$ se verifica que $w \not\leq z$. Entonces por el Corolario 5.26 podemos asegurar que existe un subconjunto abierto, cerrado, creciente y saturado U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$, lo que es una contradicción. $\square$

5.3.2 Espacio cociente de un espacio de De Morgan monádico

Teorema 5.29. *Si (X, g, R) es un qm-espacio* (ver [62, p.84]). *Entonces se verifican:*

(i) *$(X/R, \preceq, \tau_q, g_R)$ es un m-espacio, donde $\preceq$ y τ_q son las indicadas en el Teorema 5.27 y la aplicación $g_R : X/R \to X/R$ está definida por $g_R(\overline{x}) = \overline{g(x)}$, para todo $x \in X$.*

(ii) *La aplicación canónica $q : X \longrightarrow X/R$ es una m–función.*

Dem. (i): De acuerdo al Teorema 5.27 solo debemos probar que g_R es un homemorfismo involutivo y un anti-isomorfismo de orden. Se verifica sin dificultad que g_R es involutiva y epiyectiva. Además, g_R es inyectiva ya que si $g_R(\overline{x}) = g_R(\overline{y})$, entonces $\overline{g(x)} = \overline{g(y)}$ y por consiguiente $(g(x), g(y)) \in R$, además como (X, g, R) es un qm-espacio tenemos que $(x, y) \in R$, de lo que concluimos que $\overline{x} = \overline{y}$. Veamos ahora que g_R es un anti-isomorfismo de orden. En efecto, $\overline{x} \preceq \overline{y} \Leftrightarrow$ existen $w \in R(x)$ y $z \in R(y)$ tales que $w \leq z \Leftrightarrow$ existen $g(w) \in R(g(x))$ y $g(z) \in R(g(y))$ tales que $g(z) \leq g(w) \Leftrightarrow \overline{g(y)} \leq \overline{g(x)} \Leftrightarrow g_R(\overline{y}) \leq g_R(\overline{x})$.

Finalmente, probemos que $g_R : X/R \longrightarrow X/R$ es un homemorfismo. Observemos en primer lugar que para cada $U \subseteq X/R$ se verifica que: $g_R^{-1}(U) = \{\overline{x} : g_R(\overline{x}) \in U\}$ $= \{\overline{x} : \overline{g(x)} \in U\} = \{q(x) : g(x) \in q^{-1}(U)\} = \{q(x) : x \in g^{-1}(q^{-1}(U))\} = \{q(x) : x \in (q \circ g)^{-1}(U)\} = q((q \circ g)^{-1}(U))$. Sea U un subconjunto cerrado de X/R y como $q \circ g : X \longrightarrow X/R$ es una función continua por ser composición de funciones continuas, entonces $(q \circ g)^{-1}(U)$ es un subconjunto cerrado en X. Además, como $q : X \longrightarrow X/R$ es continua, X es compacto y X/R es un espacio de Hausdorff, entonces q es una función cerrada y por lo tanto $q((q \circ g)^{-1}(U))$ es un subconjunto cerrado de X/R. De esta última afirmación, y lo observado anteriormente resulta que $g_R^{-1}(U)$ es cerrado de X/R, de lo que concluimos que g_R es continua. Por otra parte, teniendo en cuenta que X/R es un espacio de Hausdorff compacto resulta que g_R es una función cerrada y como g_R es biyectiva concluimos que g_R es un homeomorfismo. Luego, $(X/R, \leq, \tau_q, g)$ es un espacio de De Morgan.

(ii): Por el Teorema 5.27 q es continua e isótona. Además, se verifica que $q \circ g = g_R \circ q$. En efecto, $(g_R \circ q)(x) = g_R(q(x)) = g_R(\overline{x}) = \overline{g(x)} = q(g(x)) = (q \circ g)(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

5.3.3 Espacio cociente de un *sm*-espacio

En lo que sigue aplicaremos los resultados anteriores para describir los sm-espacios cocientes lo que será de utilidad para determinar las $\mathcal{M}$-álgebras simples.

Teorema 5.30. *Sea (X, g, R) es un sm-espacio. Entonces*

(i) $(X/R, \leq, \tau_q, g_R)$ *es un mpM-espacio, donde* $\preceq$, τ_q *y* g_R *son las consideradas en el Teorema 5.29.*

(ii) *La aplicación canónica* $q : X \longrightarrow X/R$ *es una mpM−función.*

Dem. Teniendo en cuenta el Teorema 5.29 observamos que solo debemos probar que se verifica:

(pm1) $\overline{x} \preceq \overline{y}$, entonces $\overline{x} = \overline{y}$ ó $g_R(\overline{x}) = \overline{y}$:

De la hipótesis existen $z \in R(x)$ y $w \in R(y)$ tales que $z \leq w$. Como X es $mpM-$espacio, de (pm1) resulta que $w = z$ ó $w = g(z)$. Luego, $\overline{x} = \overline{y}$ ó $\overline{y} = g_R(\overline{z}) = g_R(\overline{x})$.

Veamos ahora que $q(max\, X) \subseteq max\, X/R$. En efecto, Sean $x \in max\, X$ e $y \in X$ tales que $\overline{x} \leq \overline{y}$. Entonces, existen $z \in R(x)$ y $w \in R(y)$ tales que $z \leq w$. Luego, como X es un mpM-espacio se verifica (1) $z = w$ ó (2)$z < w$. Si ocurre (1) inferimos $R(x) = R(y)$ y por lo tanto $\overline{x} = \overline{y}$. Si ocurre (2) entonces por (pm1) $g(z) = w$ de lo que inferimos que $z < g(z)$. De esta útima afirmación y (e5) obtenemos $x < g(x)$ lo que contradice la maximilidad de x. Luego, es claro que $\overline{x} \in max\, X/R$. Por lo tanto, de la Proposición 5.20 podemos afirmar que q es una mpM-función. □

Lema 5.31. *Sean A una* $\mathcal{M}-$*álgebra y B una subálgebra de A. Entonces la aplicación* $h : X(A) \longrightarrow X(B)$, *definida por* $h(x) = x \cap B$ *para cada* $x \in X(A)$, *es una sm-función.*

Dem. De la definición que h es inmediato que es isótona. Por otra parte, h es continua. En efecto, teniendo en cuenta que para cada $b \in B$, $\sigma_B(b) = \{x \in X(B) : b \in x\}$ y $\sigma_A(b) = \{x \in X(A) : b \in x\}$ es simple verificar que $h^{-1}(\sigma_B(b)) = \sigma_A(b)$. Además, como $\{\sigma_B(b) : b \in B\} \cup \{X(B) \setminus \sigma_B(b) : b \in B\}$ y $\{\sigma_a(b) : a \in A\} \cup \{X(A) \setminus \sigma_A(a) : a \in A\}$ son subbases de la topología de Priestley de $X(B)$ y $X(A)$ respectivamente, inferimos que h es continua.

Además, $h \circ g_A = g_B \circ h$. En efecto, observemos que $g_A(x) = X(A) \setminus \{\sim t :\in x\}$ y para cada $y \in X(B)$, $g_B(y) = X(B) \setminus \{\sim z : z \in B \cap y\}$. Entonces, $c \in h(g_A(x)) \Leftrightarrow c \in g_A(x) \cap B \Leftrightarrow c \neq\sim w$, para todo $w \in x \cap B \Leftrightarrow c \in g_B(x) \cap B \Leftrightarrow c \in g_B(h(x))$.

Finalmente, tenemos que $h(max\, X(A)) \subseteq max\, X(B)$. En efecto, sea $x \in max\, X(A)$ y supongamos que existe $z \in X(B)$ tal que $h(x) \subset z$. Como $X(B)$ es un mpM-espacio, entonces por (pm1) $z = g_B(h(x))$. Luego, de lo demostrado anteriormente resulta que $z = h(g_A(x))$ y por lo tanto $(*)$ $h(x) \subset h(g_A(x))$. De las afirmaciones anteriores veamos que $(**)$ $x \subset g_A(x)$. Supongamos que $x \not\subset g_A(x)$ y como es claro que por $(*)$ tenemos que $x \neq g_A(x)$. Luego, $x \nsubseteq g_A(x)$. Por la disconexión en el orden existen $a, b \in A$ tales que $x \in \sigma_A(a)$, $g_A(x) \in \sigma_A(b)$ y $\sigma_A(a) \cap \sigma_A(b) = \emptyset$. Luego, $h(x) \in h(\sigma_A(a)) = \sigma_A(a) \cap B = \sigma_B(a)$. Además, como $\sigma_B(a)$ es un subconjunto creciente de B concluimos que $h(g_A(x)) \in \sigma_B(a)$. Por lo tanto, $a \in g_A(x) \cap B$ de donde inferimos que $g_A(x) \in \sigma_B(a) \cap \sigma_A(b)$, lo que es una contradicción. Luego, se verifica $(**)$ lo que contradice el hecho que x es maximal, con lo que concluimos la demostración. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado más importante de esta sección.

Teorema 5.32. *Si X es un sm-espacio, entonces $X(\exists_R D(X))$ y X/R son isomorfos como mpM–espacios.*

Dem. Sea $h : X \longrightarrow X(\exists_R D(X))$, definida por $h(x) = \epsilon_X(x) \cap \exists_R(D(X))$, donde $\epsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ para cada $x \in X$. Como por la teoría de la dualidad para las $\mathcal{M}-$álgebras se verifica que $\epsilon_X(X) = X(D(X))$, entonces por el Lema 5.31, h es continua y por lo tanto también es cerrada por ser X compacto y $X(\exists_R D(X))$ un espacio de Hausdorff. (ver [21, p. 226])

Como $q : X \longrightarrow X/R$ es una identificación, $h : X \longrightarrow X(\exists_R D(X))$ es continua y h es constante en $q^{-1}(\overline{x})$ para cada $\overline{x} \in X/R$ (es decir h es constante sobre las fibras de q), entonces por [21, p. 123] podemos afirmar que $h \circ q^{-1} : X/R \longrightarrow X(\exists_R D(X))$ es continua y el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & X/R \arrow[d, "h \circ q^{-1}"] \\
& X(\exists_R(D(X)))
\end{tikzcd}$$

donde $(h \circ q^{-1})(\overline{x}) = h(R(x))$. Como h es constante en $q^{-1}(\overline{x})$, i.e. h es constante en $R(x)$ para cada $x \in X$, entonces $(h \circ q^{-1})(\overline{x}) = h(R(x)) = h(x)$.

Además como es h una función cerrada, entonces por el teorema anteriormente mencionado ([21, p. 226]), $h \circ q^{-1} : X/R \longrightarrow X(\exists_R D(X))$ es una función cerrada.

También, $h \circ q^{-1}$ es biyectiva. En efecto, sean $\overline{x}, \overline{y} \in X/R$ tales que $(h \circ q^{-1})(\overline{x}) = (h \circ q^{-1})(\overline{y})$, entonces $h(q^{-1}(\overline{x})) = h(q^{-1}(\overline{y}))$, como h es constantes sobre las fibras de q resulta que $h(x) = h(y)$, de lo que se sigue que $\epsilon_X(x) \cap \exists_R(D(X)) = \epsilon_X(y) \cap \exists_R(D(X))$. De esta última afirmación obtenemos que $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in R_{\exists_R}$. Como $\epsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ es un $\mathcal{M}-$isomorfismo, inferimos que $(x, y) \in R$ y por consiguiente $\overline{x} = \overline{y}$. Sea ahora $z \in X(\exists_R D(X))$, entonces existe $x \in X(D(X))$ tal que $z = x \cap \exists_R D(X)$. Sea $y = \epsilon_X^{-1}(x)$, entonces $y \in X$ y $z = \epsilon_X(y) \cap \exists_R D(X)$, de lo que concluimos que $h(y) = z$ y por lo tanto $(h \circ q^{-1})(\overline{y}) = z$.

Luego $h \circ q^{-1} : X/R \longrightarrow X(\exists_R D(X))$ es una biyección continua y cerrada y por lo tanto es un homemorfismo.

Como por el Lema 5.31, la función h es una mpM-función y por el Teorema 5.30, la aplicación canónica q es una mpM-función, entonces $h \circ q^{-1}$ es también una mpM-función, de lo que se sigue que $h \circ q^{-1}$ es un mpM-isomorfismo, lo que completa la demostración. $\square$

A continuación indicaremos un resultado que nos serán de utilidad para demostar la Proposición 5.34 donde se caracterizan a las $\mathcal{M}$-álgebras simples.

Lema 5.33. [29, Lemma 2.1] *Sea (X, R) un q-espacio. Entonces R es una relación cerrada, i.e. $R(A)$ es cerrado para todo subconjunto cerrado A de X.*

Dem. Sea $x \notin E(A)$. Entonces, tenemos que $(x, y) \notin E$ para todo $y \in A$. Luego, de [9, Lemma 2.5] concluimos que para todo $y \in A$ existe un subconjunto abierto y cerrado V_y de X tal que $x \in V_y$, $y \notin V_y$ y $V_y = E(V_y)$. Por lo tanto, $A \subseteq \bigcup_{y \in A}(X \setminus V_y)$ y como A es compacto inferimos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus V_{y_i})$. Como $E(\bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus V_{y_i})) = \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus V_{y_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} \cap E(A) = \emptyset$. De la última afirmación, el hecho que $\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ es un abierto y $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ concluimos que $x \notin \overline{E(A)}$, lo que completa la demostración $\square$

Proposición 5.34. *Sea (X, g, R) un sm-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$D(X)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple,*

(ii) *$\exists_R(D(X))$ es una mpM-álgebra simple.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $\exists_R(D(X))$ no es una mpM-álgebra simple. Entonces, existe subconjunto Y cerrado, involutivo y no trivial de $X(\exists_R(D(X)))$. Por el Teorema 5.32 tenemos que los mpM-espacios $(X(\exists_R(D(X))), g_1) \simeq (X/R, g_R)$ donde $g_R(R(w)) = R(g(w))$ con $w \in X$. Luego, podemos escribir $Y = \{R(w)\}_{w \in X'}$ con $\emptyset \neq X' \subset X$. De las afirmaciones anteriores existe $R(z) \in X/R$ tal que $R(z) \notin Y$. Sea $w \in X'$ tal que $R(w) \in Y$ y sea $W = R(w) \cup g(R(w))$. Es claro que, W es un subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y R-saturado de X. Además, $z \notin W$. En efecto, si $z \in W$ entonces (1) $z \in R(w)$ ó (2)$z \in g(R(w)) = R(g(w))$. Si ocurre (1) $R(z) = R(w)$ y por lo tanto $R(z) \in Y$, contradicción. Si ocurre (2) $R(z) = R(g(w))$, como Y es involutivo tenemos que $R(z) \in Y$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $W \neq X$ lo que contradice la hipótesis.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $D(X)$ no es una $\mathcal{M}$-álgebra simple, entonces existe un subconjunto Y de X, cerrado, involutivo y R-saturado no trivial. Además, como por el Teorema 5.32 tenemos que $(X(\exists_R(D(X))), g_1) \simeq (X/R, g_R)$ como mpM-espacios. Por

Teorema 5.30 sabemos que $q : X \to X/R$ es continua y por Lema 5.33 inferimos que q es cerrada. Luego, es claro que $q(Y)$ es un cerrado de de X/R y es no trivial. En efecto, es claro que $q(Y) \neq \emptyset$. Sea $z \in X \setminus Y$ entonces $R(z) \notin q(Y)$. Si suponemos lo contrario i.e. $R(z) \in q(Y)$, entonces como $q(Y) \subseteq X/R$ existe un $t \in Y$ tal que $R(z) = R(t)$. Además, como R(Y)=Y tenemos que $R(t) \in Y$ y por lo tanto $z \in Y$, lo que es una contradicción. Por otra parte, veamos que $q(Y)$ es involutivo. Como $g_R(q(Y)) = g_R(\{R(w)\}_{w\in Y}) = \{g_R(R(w))\}_{w\in Y} = \{R(g(w))\}_{w\in Y} = \{R(l)\}_{l\in Y} = q(Y)$ por ser Y involutivo (i.e $t \in T \Leftrightarrow g(t) \in Y$). Por lo tanto, nos construimos un cerrado, involutivo y no-trivial $\exists_R(D(X))$, esto último contradice que sea una mpM-álgebra simple. Con lo que tenemos completa la demostración. □

5.4 Algebras generadoras de cardinalidad arbitraria

A continuación, vamos a determinar con precisión las álgebras simples (finitas o no), para lo cual serán de utilidad los resultados que daremos a continuación.

Lema 5.35. *Sea (X, g, R) un sm-espacio y $x \in X$. Si $x \not\leq g(x)$ y $g(x) \not\leq x$ y $X = R(x) \cup R(g(x))$, entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\exists_R D(X) = \{\emptyset, X, R(x), R(g(x))\}$,

(ii) *$U \not\subset R(x)$ y $U \not\subset R(g(x))$ para todo $U \in D(X) \setminus \exists_R D(X)$,*

(iii) *$D(X) = \exists_R D(X)$.*

Dem. (i): Como $x \not\leq g(x)$ y $g(x) \not\leq x$ por (e15) concluimos que $R(x) \cap R(g(x)) = \emptyset$ y por (e17) $y \not\leq g(y)$ y $g(y) \not\leq y$ para todo $y \in X$. Por lo tanto X es una anticadena. Luego, de la afirmación anterior y teniendo en cuenta que $X = R(x) \cup R(g(x))$ deducimos que $R(x), R(g(x)) \in \exists_R D(X)$.

Por otra parte, supongamos que existe $U \in \exists_R D(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Si $x \in U$ entonces $R(x) = U$. En efecto, como $R(x) \subseteq U$ si suponemos que existe $u_0 \in U$ tal que $u_0 \notin R(x)$ entonces $u_0 \in R(g(x))$. Luego, $g(x) \in R(u_0) \subseteq U$ y por lo tanto $R(g(x)) \subseteq U$. De las afirmaciones anteriores concluimos $R(x) \cup R(g(x)) \subseteq U$, de donde resulta $X = U$, lo que es una contradicción.

Si $x \notin U$ entonces $R(x) \cap U = \emptyset$. En efecto, si $u \in R(x) \cap U$ tenemos que $x \in R(u) \subseteq U$, contradicción. Luego, como $\{R(x), R(g(x))\}$ es una partición de X entonces $U \cap R(g(x)) \neq \emptyset$. De esta afirmación, existe $u_1 \in R(g(x)) \cap U$ de lo que resulta que $g(x) \in R(u_1) \subseteq U$. Por lo tanto, $R(g(x)) \subseteq U$ de lo que conluimos $R(g(x)) = U$. Luego, $\exists_R D(X) = \{\emptyset, X, R(x), R(g(x))\}$.

(ii): Supongamos que $U \subset R(x)$, entonces $R(x) \setminus U \neq \emptyset$ es un abierto, cerrado y creciente de X. Además, como g es biyectiva $g(U) \subset g(R(x))$. Por otra parte, $g(U) \in D(X)$ y como $R(x) \cap R(g(x)) = \emptyset$ tenemos que $U \cap g(U) = \emptyset$. Sea $V = (R(x) \setminus U) \cup g(U) \in D(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ y se verifica que $V \cap g(V) = \emptyset$. En efecto, como $V \cap g(V) \subseteq (R(g(x)) \cup U) \cap (R(x) \cap g(U)) = U \cap g(U) = \emptyset$. De esta afirmación inferimos que $\triangle V = \emptyset$ y por lo tanto $\exists_R \triangle V = \emptyset$. Por otra parte, $\exists_R V = R(x) \cup R(g(x)) = X$ y por consiguiente $\triangle \exists_R V = X$, de lo que obtenemos que $\exists_R \triangle V \neq \triangle \exists_R V$, lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que $U \subset R(g(x))$, siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior tenemos que $W = (R(g(x)) \setminus U) \cup g(U) \in D(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ y $\exists_R \triangle W \neq \triangle \exists_R W$ lo que nos conduce nuevamente a una contradicción.

(iii) Solo resta probar que $D(X) \subseteq \exists_R D(X)$. Supongamos que existe $U \in D(X) \setminus \exists_R D(X)$. Entonces $R(x) \setminus U \neq \emptyset$ ó $R(g(x)) \setminus U \neq \emptyset$. En efecto, si $R(x) \setminus U = \emptyset = R(g(x)) \setminus U$ entonces $R(x) \subseteq U$ y $R(g(x)) \subseteq U$, lo que implica que $X = U$, contradicción. Luego, si $R(x) \subseteq U \neq \emptyset$ entonces $R(x) \subseteq U \in D(X)$ y $R(x) \subseteq U \subset R(x)$ lo que contradice (ii). Si aplicamos el razonamiento anterior a $R(g(x)) \setminus U \neq \emptyset$ también obtenemos una contradicción. Luego, $D(X) = \exists_R D(X)$, lo que completa la demostración. $\square$

Proposición 5.36. *Sea (X, g, R) un sm-espacio, entonces se verifica la siguiente propiedad:*

(e19) *si $x \not\leq g(x)$, $g(x) \not\leq x$ y $X = R(x) \cup R(g(x))$, entonces $X = \{x, g(x)\}$.*

Dem. Supongamos que existe $y \in X$ tal que $x \neq y$ y $g(x) \neq y$. Como X es una anticadena, tenemos que $y \not\leq x$ e $y \not\leq g(x)$. Luego, existen $U, V \in D(X)$ tales que $y \in U$ y $x \notin U$, $y \in V$ y $g(x) \notin V$. Además, del Lema 5.35 $D(X) = \{\emptyset, X, R(x), R(g(x))\}$ y por lo tanto $U = R(g(x))$, $V = R(x)$ y $R(x) \cap R(g(x)) \neq \emptyset$. Esta última afirmación es una contradicción ya que de las hipótesis y (e15) tenemos que $R(x) \cap R(g(x)) = \emptyset$. Por lo tanto, concluimos que $y = x$ o $y = g(x)$. $\square$

Lema 5.37. ([74]) *Sea (X, g, R) un sm-espacio. Si Y es un subconjunto cerrado de X, entonces $R(Y)$ también es un subconjunto cerrado de X.*

Dem. Como (X, R) es un q–espacio, para todo subconjunto cerrado Y de X se verifica que $R(Y)$ es un subconjunto cerrado de X. $\square$

Proposición 5.38. *Sea (X, g, R) un sm-espacio y $\{C_i\}_{i \in I}$ la familia de todas las cadenas maximales en X. Si $D(X)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple, entonces se verifica una y solo una de las siguientes condiciones:*

(i) *C_i es una cadena con dos elementos para todo $i \in I$,*

(ii) *C_i es una cadena con un elemento y $C_i = g(C_i)$ para todo $i \in I$,*

(ii) *C_i es una cadena con un elemento y $C_i \neq g(C_i)$ para todo $i \in I$.*

Dem. Si en X existen dos cadenas maximales C_{i_0} y C_{i_1} tales que $C_{i_0} = \{x, g(x)\}$, $g(x) < x$ y $C_{i_1} = \{y\} = \{g(y)\}$ ó $C_{i_1} = \{y\} \neq \{g(y)\}$. Luego, de (e12) y (e11) tenemos que $y \notin R(x)$ e $y \notin R(g(x))$, por lo tanto $y \notin R(C_{i_0})$. De las afirmaciones anteriores inferimos que $R(C_{i_0}) \neq X$ y $R(C_{i_0}) \neq \emptyset$, además $R(C_{i_0})$ es cerrado y R-saturado . Por otra parte, del Corolario 4.16 es involutivo, de donde resulta que $D(X)$ no es una $\mathcal{M}-$álgebra simple.

Supongamos ahora que existen en X dos cadenas maximales C_{i_0} y C_{i_1} tales que $C_{i_0} = \{x\} = \{g(x)\}$ y $C_{i_1} = \{y\} \neq \{g(y)\}$. Entonces por (e13) obtenemos que $y \notin R(C_{i_0})$ y por lo tanto $R(C_{i_0})$ es un subconjunto cerrado, involutivo y saturado no trivial, de lo que concluimos que $D(X)$ no es una $\mathcal{M}-$álgebra simple. $\square$

Teorema 5.39. *Sea (X, g, R) un sm-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *$D(X)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple,*

(ii) *Se verifica uno y sólo uno de los siguientes casos:*

(a) *X es la suma cardinal de cadenas con dos elementos tales las únicas clases de equivalencias son $min\, X$ y $max\, X$,*

(b) *X es la suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento y es la única clase de equivalencia,*

(c) *X es la suma cardinal de dos cadenas con un solo elemento que no son involutivas y las clases de equivalencias son los dos conjuntos unitarios.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Proposición 5.38, se presentan los siguientes casos:

(I) X es la suma cardinal de cadenas con dos elementos. Entonces existe $x \in X$ tal que $g(x) < x$. Luego, $R(x) \cup R(g(x))$ es un subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y R-saturado de X. Del Teorema 4.21 y teniendo en cuenta que $D(X)$ es simple concluimos que $R(x) \cup R(g(x)) = X$. Por otra parte, como $x \in max\, X \setminus min\, X$ y $g(x) \in min\, X \setminus max\, X$ del Corolario 5.14 tenemos que $R(x) \subseteq max\, X \setminus min\, X$ y $R(g(x)) \subseteq min\, X \setminus max\, X$ y por el Lema 4.23 inferimos que $R(x) = max\, X$ y $R(g(x)) = min\, X$.

(II) X es la suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento. Entonces $R(x) = g(R(x))$ para todo $x \in X$, de donde resulta que $R(x)$ es un subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y R-saturado de X. Como $D(X)$ es simple, del Teorema 4.21 tenemos que $R(x) = X$ para todo $x \in X$.

(III) X es la suma cardinal de dos cadenas con un solo elemento que no son involutivas. Entonces existe $x \in X$ tal que $x \not\leq g(x)$ y $g(x) \not\leq x$. Como $R(x) \cup g(R(x))$ es un subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y $R-$saturado de X, por el Teorema 4.21 resulta que $R(x) \cup R(g(x) = X$. Luego, por (e19) inferimos que $X = \{x, g(x)\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que se verifica:

(a) Sea Y un subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y $R-$saturado de X. Entonces $Y \cap min\, X \neq \emptyset$. Por otra parte, de la hipótesis tenemos que $R(x) = max\, X$ ó $R(x) =$

$min\,X$ para todo $x \in X$. Sea $z \in min\,X \cap Y$, entonces por el Corolario 5.14 (ii) resulta que $R(z) = min\,X$. Como $z \in Y$ e Y es R-saturado, $R(z) \subseteq Y$ y por lo tanto $min\,X \subseteq Y$. De esta afirmación y el Teorema 4.27 tenemos que $X = Y$. Luego, $D(X)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple.

(b) Es inmediato que el único subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y R-saturado de X es X de donde por el Teorema 4.21 concluimos la demostración.

(c) De la hipótesis es claro que el único subconjunto no vacío, cerrado, involutivo y R-saturado del espacio es X, por lo tanto queda probado el teorema. □

El siguiente resultado es consecuencia directa del Teorema 5.39 y el Teorema 5.32.

Corolario 5.40. *Sea (X, g, R) un sm-espacio tal que $(D(X), \exists_R)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple. Si se verifica que:*

(a) *X es la suma cardinal de cadenas con dos elementos tales las únicas clases de equivalencias son $min\,X$ y $max\,X$, entonces $\exists_R D(X) \simeq T_3$,*

(b) *X es la suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento y es la única clase de equivalencia, entonces $\exists_R D(X) \simeq T_2$,*

(c) *X es la suma cardinal de dos cadenas con un solo elemento que no son involutivas y las clases de equivalencias son los dos conjuntos unitarios, entonces $\exists_R D(X) \simeq T_4$.*

Corolario 5.41. *Las $\mathcal{M}$-álgebras funcionales $(T_2^X, \exists)$ y $(T_3^X, \exists)$ son $\mathcal{M}$-álgebras simples.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 5.39. □

Corolario 5.42. *Si en la $mpM-$álgebra T_4 se define $\exists x = x$ para todo $x \in T_4$, entonces $(T_4, \exists)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple. Además, $(T_4^X, \exists)$ es un álgebra simple si, y solo, si X tiene un elemnto.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 5.39. □

5.4.1 Conceptos de topología general

En primer lugar recordamos algunas nociones y resultados bien conocidos de topología general ([21]) que serán de utilidad en lo que sigue.

5.4.2 Aglomeración y convergencia de redes en los sm-espacios.

Definición 5.43. *Un conjunto dirigido es un par $(D, \prec)$, donde D es un conjunto no vacío y $\prec$ es un preorden que verifica la siguiente condición: para cada $a, b \in D$, existe $c \in D$ tal que $a \prec c$ y $b \prec c$.*

Definición 5.44. *Una red en un espacio topológico (X, τ) es un función $\varphi : D \longrightarrow X$, siendo D un conjunto dirigido. Notaremos con x_d a $\varphi(d)$ para todo $d \in D$ y con $\{x_d\}_{d\in D}$ a φ.*

Definición 5.45. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red. Entonces diremos que:*

(i) *φ converge a x_0 y escribiremos $\varphi \to x_0$, si para todo entorno $U(x_0)$, existe $d_0 \in D$ tal que $\varphi(d) \in U(x_0)$ para todo $d \in D$ y $d_0 \prec d$.*

(ii) *φ se aglomera en x_0 y lo notaremos $\varphi \succ x_0$, si para todo entorno $U(x_0)$ y para todo $d \in D$ existe $b_d \in D$ tal que $d \prec b_d$ y $\varphi(b_d) \in U(x_0)$*

Definición 5.46. *Sean $(D, \prec)$ un conjunto dirigido y $a \in D$, el conjunto terminal asociado a a es $T_a = \{d \in D : \ a \prec d\}$.*

Lema 5.47. (ver [21]) *Sean (X, τ) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\varphi : D \longrightarrow X$ una red. Entonces:*

(i) *$\varphi \to x_0$ si para todo $U(x_0)$ existe $d_0 \in D$ tal que $\varphi(T_{d_0}) \subseteq U(x_0)$.*

(ii) *$\varphi \succ x_0$ si para todo $U(x_0)$ y para todo $d \in D$ se verifica que $\varphi(T_d) \cap U(x_0) \neq \emptyset$.*

Definición 5.48. *Sea* $(D, \prec)$ *un conjunto dirigido. Diremos que* $R \subseteq D$ *es residual si existe* $d \in D$ *tal que* $T_d \subseteq R$.

Definición 5.49. *Sea* (X, τ) *un espacio topoloógico y* $\varphi : D \longrightarrow X$ *una red. Diremos que* φ *es una ultrared en* X *si* $\varphi^{-1}(A)$ *ó* $\varphi^{-1}(X \setminus A)$ *es residual en* D*, para todo* $A \subseteq X$.

Teorema 5.50. (ver [21]) *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *es compacto,*

(ii) *toda red en* X *se aglomera,*

(iii) *toda ultrared en* X *es convergente.*

Proposición 5.51. *Sea* A *una* $\mathcal{M}$*-álgebra simple tal que su sm-espacio asociado es la suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{D} = \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in X(A)\}$ *es un subconjunto denso de* $X(T_2^{X(A)})$.

(ii) *Si* $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ *está definida por* $f\left(\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}\right) = P$ *para cada* $P \in X(A)$*, entonces* f *es una función continua.*

Dem. (i): Es inmediato que $\mathcal{D} \subseteq X(T_2^{X(A)})$. Sea $B \subseteq X(T_2^{X(A)})$ un subconjunto básico no vacío. Entonces existen $h, g \in T_2^{X(A)}$ tales que $B = \sigma_{T_2^{X(A)}}(h) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(g)$. Como $B \neq \emptyset$ y $\sigma_{T_2^{X(A)}}$ es un isomorfismo de orden, entonces $h \not\leq g$, de lo que se sigue que existe $P \in X(A)$ tal que $h(P) \not\leq g(P)$. Como $h(P), g(P) \in T_2$, entonces $h(P) = 1$ y $g(P) = 0$. Es claro que $\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} \in \mathcal{D}$, además $h \in \{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}$ y $g \notin \{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}$. Luego, tenemos que $\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} \in \sigma_{T_2^{X(A)}}(h) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(g) \cap \mathcal{D}$ y por lo tanto $\mathcal{D}$ es denso.

(ii): Para cada $a \in A$, tenemos que $f^{-1}(\sigma_A(a)) = \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in \sigma_A(a)\} = \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in X(A) \text{ y } a \in P\}$. Consideremos ahora la función $h_a : X(A) \longrightarrow T_2$, definida por $h_a(P) = 1$ si $a \in P$ y $h_a(P) = 0$ si $a \notin P$. Entonces $h_a \in T_2^{X(A)}$ y

$\sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a) = \{Q \in X(T_2^{X(A)}) : h_a \in Q\} \in D(X(T_2^{X(A)}))$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a) \cap \mathcal{D} &= \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in X(A) \text{ y } h_a \in \{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}\} \\ &= \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in X(A) \text{ y } h_a(P) = 1\} \\ &= \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in X(A) \text{ y } a \in P\}.\end{aligned}$$

Entonces concluimos que $f^{-1}(\sigma_A(a)) = \mathcal{D} \cap \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a)$. Luego, $f^{-1}(\sigma_A(a))$ es un subbásico de $\mathcal{D}$ con la topoloía inducida, con lo que concluimos que f es continua. □

Proposición 5.52. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que su sm-espacio asociado es suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento. Sean $\mathcal{D}$ y f los definidos en la Proposición 5.51. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *Si $\{Q_d\}_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ es una red que converge a $Q \in X(T_2^{X(A)}) \setminus \mathcal{D}$, entonces la red $\{f(Q_d)\}_{d\in D}$ converge en $X(A)$.*

(ii) *Si $\{Q_d\}_{d\in D}$ y $\{R_d\}_{d\in D}$ son redes de $\mathcal{D}$ que convergen a un mismo punto $Q \in X(T_2^{X(A)}) \setminus \mathcal{D}$, entonces las redes $\{f(Q_d)\}_{d\in D}$ y $\{f(R_d)\}_{d\in D}$ convergen a un mismo punto de $X(A)$.*

Dem. (i): Como $X(A)$ es compacto, entonces $\{f(Q_d)\}_{d\in D}$ se aglomera en algún punto $R \in X(A)$. Supongamos que existe $S \in X(A)$ tal que $f(Q_d) \succ S$ y $S \neq R$. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que $X(A)$ es una anticadena resulta que $R \not\subseteq S$ y $S \not\subseteq R$. Por lo tanto, existen $a, b \in A$ tales que $a \in R \setminus S$ y $b \in S \setminus R$ de donde concluimos que $R \in \sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)$ y $S \in \sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$. Luego, existen dos subredes $\{f(Q_{d'})\}_{d'\in D}$ y $\{f(Q_{d^*})\}_{d^*\in D}$ tales que $\{f(Q_{d'})\}_{d'\in D} \subseteq \sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)$ y $\{f(Q_{d^*})\}_{d^*\in D} \subseteq \sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$. Las afirmaciones anteriores implican que $(*)$ $\{Q_{d'}\}_{d'\in D} \subseteq f^{-1}(\sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b))$ y $\{Q_{d^*}\}_{d^*\in D} \subseteq f^{-1}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$. Consideremos ahora, para cada $x \in A$, la función $h_x : X(A) \longrightarrow T_2$, definida por $h_x(P) = 1$ si $x \in P$ y $h_x(P) = 0$ si $x \notin P$. Siguiendo un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 5.51 inciso (ii), tenemos que $f^{-1}(\sigma_A(a)) = \mathcal{D} \cap \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a)$ de lo que resulta que $f^{-1}(\sigma_A(a) \setminus \sigma_A(b)) = \mathcal{D} \cap (\sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b))$ y $f^{-1}(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) = \mathcal{D} \cap (\sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a))$. Luego, de $(*)$ inferimos que $\{Q_{d'}\}_{d'\in D} \subseteq \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b)$ y $\{Q_{d^*}\}_{d^*\in D} \subseteq \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a)$. Por otra parte, como de la hipótesis $Q_d \to Q$ deducimos que $Q_{d'} \to Q$ y $Q_{d^*} \to Q$ de donde resulta que $Q_{d'} \succ Q$ y

$Q_{d^*} \succ Q$. Por lo tanto, $Q \in \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b)$ y $Q \in \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a)$ ya que los básicos son también cerrados. Luego, $Q \in \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_a) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b) \cap \sigma_{T_2^{X(A)}}(h_b) \setminus \sigma_{T_2^{X(A)}}$ lo que es una contradicción. De lo expuesto resulta que $R = S$ de lo que concluimos que la red $\{f(Q_d)\}_{d \in D}$ tiene un único punto de aglomeración y por consiguiente es convergente en $X(A)$.

(ii): De las hipótesis y lo demostrado en (i) tenemos que $\{f(Q_d)\}_{d \in D}$ y $\{f(R_d)\}_{d \in D}$ son redes convergentes en $X(A)$. Si suponemos que existen $R,\ S \in X(A)$ tales que $f(Q_d) \to R$ y $f(R_d) \to S$ con $S \neq R$, entonces mediante un razonamiento análogo al realizado en la demostración de (i), llegamos a una contradicción y por lo tanto $R = S$. $\square$

5.4.3 Teorema de extensión de funciones continuas en los *sm*-espacios.

Para lo que sigue necesitamos tener en cuenta el siguiente teorema de extensión de funciones continuas.

Teorema 5.53. ([21, p. 216]) *Sean (X, τ_X) un espacio topológico, D un subconjunto denso en X e (Y, τ_Y) un espacio T_3. Si $f : D \to Y$ es una función continua, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f tiene una extensión continua $F : X \to Y$,*

(ii) *para toda red $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq D$ que converge en X, $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ converge en Y.*

Si F existe, entonces es única.

Proposición 5.54. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que su sm-espacio asociado es suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento. Entonces existe una sm-función continua y sobreyectiva de $X(T_2^{X(A)})$ en $X(A)$.*

Dem. Teniendo en cuenta que todo espacio de Priestley es un espacio T_3, entonces por la Proposición 5.51 y el Teorema 5.53 podemos afirmar que la función $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$

donde $\mathcal{D} = \{\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}} : P \in X(A)\}$ tiene una extensión continua y sobreyectiva $F : X(T_2^{X(A)}) \longrightarrow X(A)$. Además, F es isótona ya que $X(T_2^{X(A)})$ y $X(A)$ son anticadenas. Por otra parte, veamos que $F \circ g_{T_2^{X(A)}} = g_A \circ F$. En efecto, para todo $P \in X(A)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
(1)\ (f \circ g_{T_2^{X(A)}}) \left(\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}\right) &= f\left(g_{T_2^{X(A)}}\left(\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}\right)\right) \\
&= f\left(\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{g_A(P)\}}\right) = g_A(P) \\
&= g_A\left(f\left(\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}\right)\right) \\
&= (g_A \circ f)\left(\{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P\}}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f \circ g_{T_2^{X(A)}} = g_A \circ f$.

Por otra parte, sea $Q \in X(T_2^{X(A)})$, entonces por el inciso (i) de la Proposición 5.51 existe una red $\{Q_d\}_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que (2) $Q_d \to Q$. Teniendo en cuenta que $g_{T_2^{X(A)}}$ es continua inferimos que $g_{T_2^{X(A)}}(Q_d) \to g_{T_2^{X(A)}}(Q)$. Como $\{Q_d\}_{d\in D} \subseteq \mathcal{D}$, entonces para cada $d \in D$ existe $P_d \in X(A)$ tal que $Q_d = \{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{P_d\}}$, por lo tanto $g_{T_2^{X(A)}}(Q_d) = \{1\} \times T_2^{X(A)\setminus\{g_A(P_d)\}}$. Luego, $g_{T_2^{X(A)}}(Q_d) \in \mathcal{D}$ para todo $d \in D$. Por lo tanto, $f\left(g_{T_2^{X(A)}}(Q_d)\right) \to F\left(g_{T_2^{X(A)}}(Q)\right)$ dado que F es continua y $F/\mathcal{D} = f$. De esta afirmación y (1) inferimos que (3) $g_A(f(Q_d)) \to F(g_{T_2^{X(A)}}(Q))$. Por otra parte de (2), el hecho que F es continua y $F/\mathcal{D} = f$, obtenenos que $f(Q_d) \to F(Q)$. Además, teniendo en cuenta que g_A es continua resulta que (4) $g_A(f(Q_d)) \to g_A(F(Q))$. De (3) y (4) y teniendo en cuenta que $X(A)$ es un espacio de Hausdorff y del hecho que todas las redes convergentes en espacio de Hausdorff convergen a un único elemento, concluimos que $(F \circ g_{T_2^{X(A)}})(Q) = (g_A \circ F)(Q))$ para todo $Q \in X(T_2^{X(A)})$. Luego, $F \circ g_{T_2^{X(A)}} = g_A \circ F$.

Por otra parte, como $X(T_2^{X(A)})$ y $X(A)$ son anticadenas podemos afirmar que $F(max\, X(T_2^{X(A)}) \subseteq max\, X(A)$. Por lo tanto, de lo demostrado anteriormente inferimos que $F : X(T_2^{X(A)}) \longrightarrow X(A)$ es una $mpM-$función sobreyectiva.

Luego, solo resta probar que F es una q-función. Para simplificar la demostración notaremos con $(X(A), R_\exists)$ y $(X(T_2^{X(A)}), R_{\exists_1})$ a los sm-espacios asociados a A y a $T_2^{X(A)}$

respectivamente. Por el Corolario 5.41 sabemos que $(T_2^{X(A)}, \exists_1)$ es una $\mathcal{M}$-álgebra simple. Luego, $X(T_2^{X(A)})$ es suma cardinal de cadenas involutivas con un solo elemento. Además, del Teorema 5.39 inferimos que $R_\exists(D(X(A)) = \{\emptyset, X(A)\}$ y $R_{\exists_1}(D(X(T_2^{X(A)})) = \{\emptyset, X(T_2^{X(A)})\}$. De lo que deducimos que $F^{-1}(R_\exists U) = R_{\exists_1}(F^{-1}(U))$ para todo $U \in D(X(A))$ con lo que se completa la demostración. $\square$

Corolario 5.55. *Sea A es una $\mathcal{M}$-álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que $\exists A$ es isomorfa a T_2,*

(i) *A es isomorfa a una $\mathcal{M}-$subálgebra de $T_2^{X(A)}$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Proposición 5.54, tenemos que existe una $\mathcal{M}-$función sobreyectiva $F : X(T_2^{X(A)}) \longrightarrow X(A)$. Entonces, por la Observación 5.24 (ii), la función $\mathsf{M}(F) : D(X(A)) \longrightarrow D(X(T_2^{X(A)}))$, definida por $\mathsf{M}(F)(U) = F^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X(A))$ es un $\mathcal{M}-$homomorfismo inyectivo. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que $D(X(A))$ y A son $\mathcal{M}-$álgebras isomorfas, tenemos que A es isomorfo a una $\mathcal{M}-$subálgebra $T_2^{X(A)}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia de la Observación 5.24 (ii) y el Corolario 5.40. $\square$

A continuación analizaremos el caso de las $\mathcal{M}$-álgebras simples cuyos espacios asociados son suma cardinal de cadenas involutivas que tienen dos elementos.

Proposición 5.56. *Sean A una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que su sm-espacio asociado es la suma cardinal de cadenas involutivas con dos elementos. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{D} = \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in Y\} \cup \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in Y\}$, *es un subconjunto denso de $X(T_3^Y)$, donde $Y = max\, X(A)$.*

(ii) *$f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ definida por $f\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) = g_A(P)$, $f\left(\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right)$ $= P$, para cada $P \in Y$, es una función continua.*

Dem. (i): Es claro que $\mathcal{D} \subseteq X(T_3^Y)$ y que $\mathcal{B} = \{\sigma_{T_3^Y}(h) \setminus \sigma_{T_3^Y}(g) : h, g \in T_3^Y\}$ es una base de la topología de $X(T_3^Y)$. Sea $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, entonces existen h, $g \in T_3^Y$ tales que $h \not\leq g$ y $B = \sigma_{T_3^Y}(h) \setminus \sigma_{T_3^Y}(g)$. Luego, existe $P \in Y$ tal que $h(P) \not\leq g(P)$. Como $h(P), g(P) \in T_3$, entonces $h(P) \neq 0$. Luego $h(P) = 1$ ó $h(P) = \frac{1}{2}$. Si $h(P) = 1$, entonces tenemos que $g(P) \neq 1$. De esta úlima afirmación resulta que $h \in \{1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}}$ y $g \notin \{1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}}$, de lo que se sigue que $\{1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} \in \sigma_{T_3^Y}(h) \setminus \sigma_{T_3^Y}(g)$ y por lo tanto $(\sigma_{T_3^Y}(h) \setminus \sigma_{T_3^Y}(g)) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Por otra parte, si $h(P) = \frac{1}{2}$, entonces tenemos que $g(P) = 0$. Por lo tanto, $h \in \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}}$ y $g \notin \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}}$, de lo que inferimos que $\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} \in \sigma_{T_3^Y}(h) \setminus \sigma_{T_3^Y}(g)$. Luego, $(\sigma_{T_3^Y}(h) \setminus \sigma_{T_3^Y}(g)) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. De lo probado anteriormente concluimos que $\mathcal{D}$ es denso.

(ii): Para cada $a \in A$, consideremos la función $h_a : X \longrightarrow T_3$ definida, para cada $P \in X$, por:

$$h_a(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in P,\ a \in g_A(P), \\ \frac{1}{2} & \text{si } a \in P,\ a \notin g_A(P), \\ 0 & \text{si } a \notin P,\ a \notin g_A(P). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $Y = max\, X(A)$, entonces para todo $P \in Y$ se verifica que $g_A(P) \subseteq P$. De esta afirmación resulta que h_a se puede definir del siguiente modo:

$$h_a(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in g_A(P), \\ \frac{1}{2} & \text{si } a \in P,\ a \notin g_A(P), \\ 0 & \text{si } a \notin P. \end{cases}$$

Luego, para cada $P \in Y$ tenemos que $h_a \in \{1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} \Leftrightarrow a \in g_A(P)$. Además, para cada $P \in Y$, $h_a \in \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} \Leftrightarrow h_a(P) \in \{\frac{1}{2}, 1\} \Leftrightarrow h_a(P) = \frac{1}{2}$ ó $h_a(P) = 1 \Leftrightarrow a \in P$ y $a \notin g_A(P)$ ó $a \in g_A(P)$.

De lo expuesto anteriormente resulta que:

$$
\begin{aligned}
(1)\, \sigma_{T_3^Y}(h_a) \cap \mathcal{D} \;&=\; \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; h_a \in \{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}},\; P \in Y\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; h_a \in \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}},\; P \in Y\} \\
&= \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; h_a(P) = 1,\; P \in X\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; h_a(P) = \frac{1}{2} \text{ ó } h_a(P) = 1,\; P \in X\} \\
&= \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; a \in g_A(P),\, P \in Y\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : a \in g_A(P),\, P \in X\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; a \in P \;\text{ y } a \notin g_A(P),\, P \in Y\}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, para cada $a \in A$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(2)\, f^{-1}(\sigma_A(a)) \;&=\; \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : f\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) \in \sigma_A(a),\, P \in Y\; \} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : f\left(\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) \in \sigma_A(a),\, P \in Y\} \\
&= \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : g_A(P) \in \sigma_A(a),\, P \in Y\; \} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in \sigma_A(a),\; P \in Y\} \\
&= \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : g_A(P) \in \sigma_A(a),\, P \in Y\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in \sigma_A(a),\, g_A(P) \in \sigma_A(a),\, P \in Y\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in \sigma_A(a),\, g_A(P) \notin \sigma_A(a),\, P \in Y\} \\
&= \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : a \in g_A(P),\, P \in Y\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; a \in P \;\text{ y } a \in g_A(P),\; P \in Y\} \cup \\
&\quad\; \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} :\; a \in P \;\text{ y } a \notin g_A(P),\; P \in Y\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \{\{1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} : a \in g_A(P),\, P \in Y\} \cup \\
& \{\{\tfrac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} :\ a \in g_A(P),\ P \in Y\}\ \cup \\
& \{\{\tfrac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y \setminus \{P\}} :\ a \in P\ \text{ y}\, a \notin g_A(P),\ P \in Y\}.
\end{aligned}
$$

Luego, de (1) y (2) concluimos que para todo $a \in A$:

$$f^{-1}(\sigma_A(a)) = \sigma_{T_3^Y}(h_a) \cap \mathcal{D}.$$

Por lo tanto, para todo $a \in A$ tenemos que $f^{-1}(\sigma_A(a))$ es un subconjunto abierto y cerrado en $\mathcal{D}$. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que el conjunto $\{\sigma_A(a) : a \in A\} \cup \{X(A) \setminus \sigma_A(a) :\ a \in A\}$ es una subbase de la topología de $X(A)$, concluimos que f es continua. □

La demostración del siguiente resultado se obtiene de la Proposición 5.56 haciendo un razonamiento análogo al de la Proposición 5.52.

Proposición 5.57. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que su sm-espacio asociado es suma cardinal de cadenas con dos elementos. Sean $\mathcal{D}$ y f los definidos en la Proposición 5.56. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *Si $\{Q_d\}_{d \in D} \subseteq \mathcal{D}$ es una red que converge a $Q \in X(T_3^Y) \setminus \mathcal{D}$, entonces la red $\{f(Q_d)\}_{d \in D}$ converge en $X(A)$, donde $Y = max\, X(A)$.*

(ii) *Si $\{Q_d\}_{d \in D}$ y $\{R_d\}_{d \in D}$ son redes de $\mathcal{D}$ que convergen a un mismo punto $Q \in X(T_3^Y) \setminus \mathcal{D}$, entonces las redes $\{f(Q_d)\}_{d \in D}$ y $\{f(R_d)\}_{d \in D}$ convergen a un mismo punto de $X(A)$.*

Proposición 5.58. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que su sm-espacio asociado es la suma cardinal de cadenas con dos elementos. Entonces, existe una sm-función sobreyectiva de $X(T_3^Y)$ en $X(A)$, donde $Y = max\, X(A)$.*

Dem. Por la Proposición 5.56 sabemos que existe una función continua $f : \mathcal{D} \longrightarrow X(A)$ donde $\mathcal{D} = \{\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in Y\} \cup \{\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} : P \in Y\}$ es un denso de $X(T_3^Y)$. Teniendo en cuenta que todo espacio de Priestley es un espacio T_3, entonces por las Proposiciones 5.56 y 5.57 y el Teorema 5.53 podemos afirmar que f tiene una extensión continua $F : X(T_3^Y) \longrightarrow X(A)$. La función f es sobreyectiva. En efecto, si $P \in X(A)$ entonces de la hipótesis podemos afirmar que $P \in max\, X(A) = Y$ ó $P \in min\, X(A)$. Si se verifica el primer caso, entonces de la definición de la función f se sigue que $f\left(\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) = P$. Si verifica el otro caso, entonces $g_A(P) \in Y$. Además, de lo que inferimos por la definición de la función f que $f\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{g_A(P)\}}\right) = g_A(g_A(P)) = P$. Por lo tanto, f es una función sobreyectiva y en consecuencia su extensión F también lo es.

Resta probar que F es *sm*-funcción. En primer lugar probemos que $F \circ g_{T_3^X} = g_A \circ F$ para lo cual observamos que $f \circ g_{T_3^Y} = g_A \circ f$. En efecto, teniendo en cuenta que el *sm*-espacio $X(T_3^Y)$ es la suma cardinal de cadenas con dos elementos y que para todo $P \in Y$, $\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}} \subset \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}$, entonces la restricción de la función $g_{T_3^Y}$ al conjunto $\mathcal{D}$ verifica lo siguiente: $g_{T_3^Y}\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) = \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}$ y $g_{T_3^Y}\left(\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) = \{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}$. De lo anterior, podemos asegurar que $g_{T_3^X}(Q) \in \mathcal{D}$ para todo $Q \in \mathcal{D}$. Luego, para todo $P \in X$,

$$\begin{aligned}
(f \circ g_{T_3^Y})\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) &= f\left(g_{T_3^Y}\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right)\right) = f\left(\{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) \\
&= P = g_A(g_A(P)) = g_A\left(f\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right)\right) \\
&= (g_A \circ f)\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right).
\end{aligned}$$

Además se verifica que:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g_{T_3^Y})\left(\{\frac{1}{2},1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) &= f\left(g_{T_3^Y}\left(\{\frac{1}{2},1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right)\right) = f\left(\{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right) \\
&= g_A(P) = g_A\left(f\left(\{\frac{1}{2},1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right)\right) \\
&= (g_A \circ f)\left(\{\frac{1}{2},1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f \circ g_{T_3^Y} = g_A \circ f$. Veamos ahora que $F \circ g_{T_3^Y} = g_A \circ F$. En efecto, sea $Q \in X(T_3^Y) \setminus \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ es denso, por el inciso (i) de la Proposición 5.56, existe una red $\{Q_d\}_{d \in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que $Q_d \to Q$. Luego, teniendo en cuenta que $g_{T_3^Y}$ es continua resulta que $g_{T_3^Y}(Q_d) \to g_{T_3^X}(Q)$. Además, como F es continua y $F|_{\mathcal{D}} = f$, concluimos que $f\left(g_{T_3^Y}(Q_d)\right) \to F\left(g_{T_3^Y}(Q)\right)$. Es decir, $(f \circ g_{T_3^Y})(Q_d) \to (F \circ g_{T_3^Y})(Q)$ y por lo probado anteriormente tenemos que $(g_A \circ f)(Q_d) \to (F \circ g_{T_3^Y})(Q)$. Por otra parte, como $Q_d \to Q$, F es continua y $F/\mathcal{D} = f$ entonces deducimos que $f(Q_d) \to F(Q)$. Luego, $(g_A \circ f)(Q_d) \to (g_A \circ F)(Q)$. De lo demostrado anteriomente y del hecho que todas las redes convergentes en un espacio de Hausdorff convergen a un único punto, inferimos que $(F \circ g_{T_3^Y})(Q) = (g_A \circ F)(Q)$ para todo $Q \in X(T_3^Y) \setminus \mathcal{D}$ y por lo tanto $F \circ g_{T_3^Y} = g_A \circ F$.

Probemos que F es una función isótona. Observemos que como $\mathcal{D}$ y $X(T_3^Y)$ son suma cardinal de cadenas con dos elementos, es inmediato que si $R, S \in X(T_3^Y)$ son tales que $R \subset S$, entonces $R, S \in \mathcal{D}$ ó $R, S \in X(T_3^Y) \setminus \mathcal{D}$. Por lo tanto, es suficiente probar que las restricciones $F|_{\mathcal{D}}$ y $F|_{X(T_3^Y)} \setminus \mathcal{D}$ son isótonas. Luego, $R \in min\, X(T_3^Y)$ y $S \in max\, X(T_3^Y)$.

Supongamos primero que $R, S \in \mathcal{D}$, entonces de la última afirmación tenemos que $R = \{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}$ y $S = \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P\}}$, para algún $P \in Y$. De donde resulta, por la definición de f, que $f(R) = g_A(P)$ y $f(S) = P$. Por lo tanto, como $P \in Y = maxX(A)$ tenemos que $f(R) \subset f(S)$ de lo que inferimos que $F(R) \subset F(S)$. Por otra parte, supongamos ahora que $R, S \in X(T_3^Y) \setminus \mathcal{D}$. Como $R \subset S$ resulta que $S = g_{T_3^Y}(R)$. Además, por la Proposición 5.56 sabemos que $\mathcal{D}$ es denso lo que implica que existe una red $\{R_d\}_{d \in D} \subseteq \mathcal{D}$ tal que (1) $R_d \to R$ y teniendo en cuenta que $g_{T_3^Y}$ es continua resulta que $g_{T_3^Y}(R_d) \to S$. Luego, como F es continua inferimos que (2) $f(g_{T_3^Y}(R_d)) \to F(S)$ y como $f \circ g_{T_3^Y} = g_A \circ f$ se sigue que $g_A(f(R_d)) \to F(S)$.

Por ota parte, teniendo en cuenta que $min\, X(T_3^Y)$ es un subconjunto cerrado de $X(T_3^Y)$ tenemos que $\{R_d\}_{d\in D} \subseteq \mathcal{D} \cap min\, X(T_3^Y)$. Por consiguiente, existe una red $\{P_d\}_{d\in D} \subseteq Y$ tal que $R_d = \{1\} \times T_3^{Y\setminus\{P_d\}}$ para todo $d \in D$. Entonces, (3) $g_{T_3^Y}(R_d) = \{\frac{1}{2}, 1\} \times T_3^{Y\setminus\{P_d\}}$ para todo $d \in D$. Luego, de (2) por la definición de f tenemos que (4) $P_d \to F(S)$. Además, de (1) resulta que $f(R_d) \to F(R)$ de donde, de (3) y la definición de f, inferimos que $g_A(P_d) \to F(R)$. Por otro lado, como g_A es continua de (4) concluimos $g_A(P_d) \to g_A(F(S))$. De estas dos últimas afirmaciones y teniendo en cuenta que en los espacios de Hausdorff las redes convergentes convergen a un único punto, podemos afirmar que $F(R) = g_A(F(S))$. De lo que concluimos, que por ser $min\, X(A)$ es un subconjunto cerrado, $F(R) \in min\, X(A)$ y por lo tanto $F(R) \subset F(S)$ de donde resulta que F es isótona.

Veamos que F que verifica $F(max\, X(T_3^Y)) \subseteq max\, X(A)$. En efecto, sea $Q \in max\, X(T_3^Y)$, entonces $g_{T_3^Y}(Q) \subset Q$ de lo que resulta, por ser F isótona, que $F(g_{T_3^Y}(Q)) \subset F(Q)$ y así $F(Q) \in max\, X(A)$. Por lo tanto, $F(max\, X(T_3^Y)) \subseteq max\, X(A)$. Observemos que por F sobreyectiva podemos afirmar que (5) $F(max\, X(T_3^Y)) = max\, X(A)$ y con un razonamiento análogo tenemos que $F(min\, X(T_3^X)) = min\, X(A)$

Finalmente, para simplificar la demostración de que F es una q-función notaremos con $(X(A), R_\exists)$ y $(X(T_3^Y), R_{\exists_1})$ a los *sm*-espacios asociados a A y a $T_2^{X(A)}$ respectivamente. Luego, veamos que $F^{-1}(R_\exists U) = R_{\exists_1}(F^{-1}(U))$ para todo $U \in D(X(A))$. Por el Corolario 5.40 inciso (a), se verifica que $R_\exists(D(X(A)) = \{\emptyset, max\, X(A), X(A)\}$ y $R_{\exists_1}(D(X(T_3^Y)) = \{\emptyset, max\, X(T_3^Y), X(T_3^Y)\}$. Además de (5) tenemos que $F^{-1}(max\, X(A)) = max\, X(T_3^X)$. Por lo tanto, se verifica lo que queriamos probar.

De todo lo demostrado anteriormente concluimos que F es una $\mathcal{M}-$función sobreyectiva. □

Corolario 5.59. *Sea A es una $\mathcal{M}$-álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que $\exists A$ es isomorfa a T_3,*

(i) *A es isomorfa a una $\mathcal{M}-$subálgebra de T_3^Y, para algún conjunto Y no vacío.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Proposición 5.58 tenemos que existe una $\mathcal{M}-$función sobreyectiva $F : X(T_3^Y) \longrightarrow X(A)$, donde $Y = max\, X(A)$. Entonces, por la Observación 5.24 (ii), la función $\mathsf{M}(F) : D(X(A)) \longrightarrow D(X(T_3^Y))$, definida por $\mathsf{M}(F)(U) = F^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X(A))$, es un $\mathcal{M}-$homomorfismo inyectivo, de lo que obtenemos que $D(X(A))$ es isomorfa a una $\mathcal{M}-$subálgebra de T_3^Y. Como $D(X(A))$ y A son isomorfas como $\mathcal{M}-$álgebras la demostración está completa.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia del Corolario 5.41 y el Corolario 5.40 inciso (a). $\square$

Lema 5.60. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra simple tal que $\exists A = \{0, a_0, 1\}$. Entonces a_0 es el único elemento de A tal que $\sigma_A(a_0) = max\, X(A)$. Además $\exists : A \longrightarrow A$ está definida por: $\exists 0 = 0$, $\exists a = a_0$ si $0 < a \leq a_0$ y $\exists a = 1$ en los otros casos.*

Dem. De la hipótesis resulta que $\exists(A) \simeq T_3$. Como $\sigma_A/\exists(A)$ es un mpM-isomorfismo entonces $\exists_{R_\exists}(D(X(A))) \simeq T_3$, de lo que resulta por el Teorema 5.39 y el El Teorema 5.32 que $X(A)$ es suma cardinal de cadenas de dos elementos y $X/R_\exists = \{min\, X(A), max\, X(A)\}$. Por consiguiente $\exists_{R_\exists} D(X)(A) = \{\emptyset, max\, X(A), X(A)\}$ y por lo tanto, $\sigma_A(a_0) = max\, X(A)$. El resto de la demostración es inmediata. $\square$

5.4.4 Determinación de las $\mathcal{M}$-álgebras simples

A continuación resumiremos, en el siguiente teorema, los resultados establecidos hasta el momento sobre las $\mathcal{M}$-álgebras simples.

Teorema 5.61. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $\mathcal{M}$-álgebra simple,*

(ii) *se verifica uno y sólo uno de los siguientes casos:*

  (a) *A es isomorfa a una $\mathcal{M}$-subálgebra de $T_2^{X(A)}$ y $\exists x = 1$ para todo $x \neq 0$,*

  (b) *A es isomorfa a una $\mathcal{M}$-subálgebra de T_3^Y, donde $Y = max\, X(A)$, $\exists A = \{0, a_0, 1\}$ y $\sigma_A(a_0) = Y$. Además, $\exists 0 = 0$, $\exists a = a_0$ si $0 < a \leq a_0$ y $\exists a = 1$ en los otros casos.*

(c) *$A \simeq T_4$ y $\exists$ es el cuantificador identidad,*

Dem. Es consecuencia de los Corolarios 5.55 y 5.59 y el Lema 5.59. $\square$

5.4.5 Propiedades de los $\mathcal{M}$-álgebras simples finitas

Sea A una $\mathcal{M}-$álgebra finita. Al conjunto ordenado de los elementos primos y al de los átomos de A los denotaremos por $\Pi(A)$ y $\mathcal{A}_t(A)$ respectivamente. Observemos que la correspondencia $p \longrightarrow [p)$ establece un anti–isomorfismo de orden de $\Pi(A)$ sobre $X(A)$ que transforma $\mathcal{A}_t(A)$ en $max\, X(A)$ y $max\,\Pi(A)$ en $min\, X(A)$.

Teorema 5.62. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $\mathcal{M}$-álgebra simple,*

(ii) *se verifica uno y sólo uno de los siguientes casos:*

(a) *A es la $\mathcal{M}$-álgebra T_4, donde $\exists$ es el cuantificador identidad,*

(b) *$\Pi(A) = \mathcal{A}_t(A)$ y $\exists$ es el cuantificador simple,*

(c) *$\Pi(A) = \mathcal{A}_t(A) \cup max\,\Pi(A)$, donde esta unión es suma cardinal de n cadenas de 2 elementos para algún $n \in I\!N$, $\exists A = \{0, a, 1\}$, donde $a = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$, $\mathcal{A}_t(A) = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $\exists 0 = 0$, $\exists b = a$ si $0 < b \leq a$ y $\exists b = 1$ en los otros casos.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 5.39 y 5.34, el Teorema 5.32 y el Lema 5.60. $\square$

Corolario 5.63. *Sea A una $\mathcal{M}$-álgebra finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una $\mathcal{M}$-álgebra simple,*

(ii) *se verifica uno y sólo uno de los siguientes casos:*

(a) *A es la $\mathcal{M}$-álgebra T_4, donde $\exists$ es el cuantificador identidad,*

(b) *A es isomorfa a una $\mathcal{M}$—subálgebra de T_2^n para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\exists$ es el cuantificador simple,*

(c) *A es isomorfa a una $\mathcal{M}$—subálgebra de T_3^n para algún $n \in \mathbb{N}$, $\exists A = \{0, a, 1\}$, donde $a = \bigvee_{i=1}^{i=n} a_i$, $\mathcal{A}_t(A) = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $\exists 0 = 0$, $\exists b = a$ si $0 < b \leq a$ y $\exists b = 1$ en los otros casos.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 5.62 y el Corolario 5.55 y 5.59. □

El siguiente ejemplo será de gran utilidad para tener una idea del grafo dirigido que le corresponde al espectro primo de un álgebra simple.

Ejemplos 5.64. *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, g(x_1), g(x_2), g(x_3)\}$ con $x_i < g(x_i)$, $1 \leq i \leq 3$ y consideremos la relación de equivalencia*

$$R = Id_X \cup \{(x_1, x_2), (g(x_1), g(x_2)), (x_2, x_1), (g(x_2), g(x_1))\}.$$

Es claro que (X, R) es un sm-espacio y que $D(X)$ es isomorfo como retículo a T_3^3. Además, con esta relación el espacio cociente X/R está formado por dos cadenas con dos elementos cada una, de lo que concluimos que $\exists_R(D(X))$ es isomorfo a T_3^2 y por consiguiente $D(X)$ no es una $\mathcal{M}$-álgebra simple.

5.5 Observaciones sobre las álgebras de De Morgan monádicas simples y las álgebras tetravalentes modales monádicas

Las álgebras tetravalentes modales monádicas fueron introducidas por A. Ziliani en [74] como ternas $(A, \triangle, \exists)$ donde $(A, \triangle)$ es un álgebra tetravalente modal (TM-álgebra) y $\exists$ es un operador unario definido sobre A que verifica:

(tmm1) $x \wedge \exists x = x$,

(tmm2) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$,

(tmm3) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$, (tmm4) $\exists\triangle x = \triangle\exists x$.

Además, se probó que a partir de los axiomas (tmm1) a (tmm4) se verifica (tmm5) $\nabla\exists x = \exists\nabla x$ y que de (tmm1) a (tmm3) y (tmm5) no se puede demostrar (tmm4). Por otra parte, la misma autora obtuvo, entre otros resultados, una dualidad topológica para las TM-álgebras monádicas considerando la categoría $\mathcal{QMM}_4$ cuyos objetos son los qmm_4-espacios y cuyos morfismos son las qmm_4-funciones. Recordemos que los qmm_4-espacios son ternas (X, g, R) donde (i) (X, g) es un espacio de De Morgan que verifica (pm1) $x \leq y$ implica $x = y$ ó $g(x) = y$ y (ii) (X, R) es un q-espacio (ver Capítulo I) tal que

(qm1) $R(U) \cap R(g(U)) \subseteq R(U \cap gU)$, para todo $U \in D(X)$,

y las qmm_4-funciones son m-funciones y q-funciones simultáneamente. Además, se probó que la categoría $\mathcal{QMM}_4$ es dualmente equivalente a la categoría de las TM-álgebras monádicas y sus correspondientes homomorfismos.

Lo expuesto anteriormente nos sugiere considerar una variedad más general que la de las TM-álgebras mónadicas y a las que llamaremos $gTMM$-álgebras. Diremos que una $gTMM$-álgebra es una terna $(A, \nabla, \exists)$ donde (A, ∇) es una TM-álgebra y $\exists$ verifica (atm1), (atm2), (atm3) y (atm5).

Por otra parte, en [62] se indicó una dualidad topológica para las álgebras de De Morgan monádicas con el objeto de estudiar las álgebras libres. Para ello se consideraron las MQ-estructuras y los MQ-morfismos. Observemos, que si solo pedimos que se verifique la condición (i) indicada anteriromente tenemos que (X, g, R) es una MQ-estructura especial a la que denominaremos dmm-espacio.

Luego, es simple verificar que la categoría cuyos objetos son los dmm-espacios y cuyos morfismos son las qmm-funciones es dualmente equivalente a la categoría de las $gTMM$-álgebras y sus correspondientes homomorfismos. Basta observar que $R(\nabla U) = R(U \cup g(U)) = R(U) \cup R(g(U)) = R(U) \cup g(R(U)) = \nabla R(U)$, para todo $U \in D(X(A))$.

Los siguientes resultados que se probaron para las $\mathcal{M}$-álgebra son también válidos para las $gTMM$-álgebras. Más aún, de sus demostraciones se puede concluir que se verifican para las álgebras de De Morgan monádicas.

Teorema 5.65. *Sea* $(A, \nabla, \exists)$ *una* $gTMM$*-álgebra. Entonces, el retículo* $\mathcal{C}_{IR_S}(X(A))$ *de todos los subconjuntos cerrados, involutivos y* $R_\exists$*-saturados del dmm-espacio asociado a* A *es isomorfo al dual del retículo* $Con_g(A)$.

Proposición 5.66. *Sea* (X, g, R) *un dmm-espacio. Entonces* X/R *y* $X(\exists_R(D(X)))$ *son isomorfos como dmm-espacios.*

Proposición 5.67. *Sea* (X, g, R) *un dmm-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $D(X)$ *es una* $gTMM$*-álgebra simple,*

(ii) $\exists_R(D(X))$ *es una* TM*-álgebra simple.*

Teorema 5.68. *Sean* A *una* TM*-álgebra y* $(X(A), g_A)$ *el* mm_4*-espacio asociado. Si cosideramos la relación* $R = X(A) \times X(A)$*, entonces* $(X(A), g_A, R)$ *es un dmm-espacio y* $(A, \nabla, \exists_R)$ *es una* $gTMM$*-álgebra simple, donde* $\exists_R x = 0$ *si* $x = 0$ *y* $\exists_R x = 1$ *en otro caso.*

Dem. Es claro que las clases de equivalencias de R son cerradas y que si $(x, y) \in R$ entonces $(g(x), g(y)) \in R$, por lo tanto $(X(A), g, R)$ es un espacio de De Morgan monádico. Además, como $(X(A), g_A)$ verifica $(mp1)$ tenemos que $(A, \nabla, \exists_R)$ es una $gTMM$-álgebra. Luego, por la Propisición 5.67 y 5.66 tenemos que $\exists_R D(X(A)) \simeq T_2$, de lo que resulta que $(A, \nabla, \exists_R)$ es una $gTMM$-álgebra simple y además, $\exists_R(U) = X(A)$ para todo $U \in D(X(A)) \setminus \{\emptyset\}$ y $\exists_R(\emptyset) = \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema porporciona otros ejemplos de $gTMM$-álgebras simples.

Teorema 5.69. *Sean* A *una* TM*-álgebra y* $(X(A), g_A)$ *el* mm_4*-espacio asociado. Si para todo* $P \in X(A)$ *se verifica que* $P \nsubseteq g_A(P)$ *y* $g_A(P) \nsubseteq P$ *y* $R(P) = \{Q \in X(A) : Q \nsubseteq g_A(Q)$ *y* $g_A(Q) \nsubseteq Q\}$*, entonces* $(X(A), g_A, R)$ *es un dmm-espacio y* $(A, \nabla, \exists_R)$ *es una* $gTMM$*-álgebras simple.*

Dem. Es claro que $X(A) = R(P) \cup R(g_A(P))$ y además $R(P) \cap R(g_A(P)) = \emptyset$. Entonces $R(P)$ y $R(g_A(P))$ son cerrados y se verifica que si $(x, y) \in R$ entonces $(g(x), g(y)) \in R$. Luego, los únicos cerrado e involutivos son los triviales y por lo tanto $(A, \nabla, \exists_R)$ es una $gTMM$-álgebra simple. $\square$

Las $gTMM$-álgebras simples descriptas anteriromente son también ejemplos de álgebras de De Morgan monádicas simples. Luego, estamos en condiciones de afirmar que el retículo de las subvariedades de las álgebras de De Morgan monádicas es mucho más complejo que el retículo de las subvariedades de los Q-retículos distributivos acotados, ([9]).

6 Capítulo VI

En este capítulo se introducen las MV-álgebras con dos cuantificadores que conmutan como una generalización natural de las *álgebras cilíndricas de dimensión dos libre de elementos diagonales.* El tratamiento de estas esta dado en términos de implicación y negación, lo que permite simplificar los resultados establecidos por Di Nola y Grigolia [18] en cuanto se refiere a la caracterización de los cuantificadores por medio de subálgebras *relativamente* completas especiales. Además, se prueba que esta nueva variedad tiene la propiedad de extensión de congruencias y es a congruencias distributivas.

Por otra parte, se desarolla una dualidad topológica y como aplicación de la misma, se caracterizan los cerrados especiales que determinan las congruencias en una determinada álgebra. También, estudiamos la variedad generada por cadenas de longitud $n+1$ $(n < \omega)$, entre otras cosas, probamos que se trata de una subvariedad semisimple y caracterizamos sus miembros simples. Finalmente, a partir de un álgebra funcional especial determinamos un conjunto importante de las álgebras simples y exhibimos la totalidad las álgebras simples finitas.

6.1 MV-álgebras con dos cuantificadores que conmutan

6.2 Introducción

La lógica infinito-valuada de Łukasiewicz fue introducida por razones filosóficas por Jan Łukasiewicz y es una de las lógicas no-clásicas más importante y ampliamente estudiada. Las MV-álgebras fueron introducidas por C. Chang ([15]) para probar la completitud de los cálculos propociosionales infinito-valuada de Łukasiewicz (**Ł**) y las mismas son una reformulación equivalente a las álgebras de Wajsberg (ver [11, 33, 42]).

Komori ([42]) introdujo las CN-álgebras como modelos algebraicos de **Ł** formulados en términos de implicación y negación. Posteriormente, Rodriguez Salas ([68]) llamó álgebras de Wajsberg a las que previamente se conocían como CN-álgebras.

Por otra parte, el correspondiente cálculo de predicado infinito-valuado de Łukasiewicz fue introducido de manera estandar y una descripción funcional del mismos fue dada por Rutledge en [70]. Este autor introdujo y estudió las MV-algebras monádicas como modelos algebraicos del cálculo de predicado monádico de la lógica infinito-valuada de Łukasiewicz, en la que ocurre solo una varieble libre, siguiendo los estudios de Halmos para las algebras de Boole monádicas. Además, muchos autores se han interesado por las MV-álgebras monádicas como se puede ver en [18, 3].

6.3 Preliminares

Recordemos que un álgebra $\mathcal{A} = (A, \to, \sim, \forall, 1)$ (ver[18, 70, 45]), se dice que es una MV-algebra monádica (ó MMV-álgebra), si el reducto $\mathcal{A} = (A, \to, \sim, 1)$ es una MV-álgebra y además $\forall$ satisface las siguientes condiciones:

(m1) $\forall x \to x = 1$,

(m2) $\forall(\forall x \to y) = \forall x \to \forall y$,

(m3) $\forall(\sim x \to x) =\sim \forall x \to \forall x$.

Si consideramos una MMV-álgebra $(A, \to, \sim, \forall, 1)$ y tomamos $\exists x =\sim \forall \sim x$ tenemos que $(A, \oplus, \odot, \exists, 0, 1)$ es una MV-álgebra monádica en el sentido de [18, 70]. Es claro que

$(\forall(A), \to, \sim, 1)$ es una MV-álgebra, donde $\forall(A) = \{x \in A : \forall x = x\}$. Además, $(B(A), \exists)$ es un álgebra de Boole monádica, donde $B(A)$ es el conjunto de los elementos booleanos de A (ver Capítulo I). Por otra parte, en [44] se estudió las MV-algebras con U-operadores, es decir las que verifican (m1) y (m2).

Lema 6.1. *De* (m1), (m2) *y* (m3) *se deduce:*

(m4) $\forall 0 = 0$, $\forall 1 = 1$,

(m5) $\forall\forall x = \forall x$,

(m6) $\forall(\forall x \to \forall y) = \forall x \to \forall y$,

(m7) $x \leq y$ *implica* $\forall x \leq \forall y$,

(m8) $\forall(x \odot y) = \forall x \odot \forall x$

(m9) $\forall \sim \forall x = \sim \forall x$,

(m10) $\forall(x \to y) \leq \forall x \to \forall y$,

(m11) $\forall(x \vee \forall y) = \forall x \vee \forall y$,

(m12) $\forall(x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$.

Dem. Las demostraciones se puede encontrar en [45]. □

Observemos que (m1), (m4), (m5) y (m6), son las condiciones duales que se piden en [9] para definir un cuantificador existencial sobre un retículos distributivos acotado. Además, estos cuantificadores definidos en [9] son operadores de clausura aditivos (ver [2, pag. 47]).

6.4 MV-álgebras biádicas

En esta sección iniciaremos el estudio de las MV-álgebras con dos cuantificadores que conmutan, como una extensión natural de las MV-álgebras monádicas y las Df_2-álgebras (ver Resumen).

Definición 6.2. *Diremos que álgebra el* $\mathcal{A} = (A, \to, \sim, \forall_1, \forall_2, 1)$ *de tipo* $(2, 1, 1, 1, 0)$ *es una MV-álgebra biádica (ó BMV-álgebra) si cada reducto* $(A, \to, \sim, \forall_i, 1)$ *es una MV-álgebras monádica y tal que verifica* (b) $\forall_1\forall_2 = \forall_2\forall_1$.

En lo que sigue notaremos con **BMV** a la variedad de las BMV-álgebras y como es de práctica usual, identificaremos a un álgebra $(A, \to, \sim, \forall_1, \forall_2, 1)$ con su soporte A ó escribiremos $(A, \forall_1, \forall_2)$ si queremos hacer hincapié sobre los cuantificadores.

Lema 6.3. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra y sea $\forall = \forall_1\forall_2$. Entonces tenemos que $\forall(A) = \forall_1(A) \cap \forall_2(A)$.*

Dem. Sea $z \in \forall(A)$, entonces existe $b \in A$ tal que $\forall_1\forall_2 b = z$ y por lo tanto $\forall_1 z = \forall_1\forall_1\forall_2 b = \forall_1\forall_2 b = z$ de lo que se tiene que $z \in \forall_1(A)$, análogamente se prueba que $z \in \forall_2(A)$. Recíprocamente, sea $z \in \forall_1(A) \cap \forall_2(A)$, entonces existen $a, b \in A$ tal que $\forall_1 a = z$ y $\forall_2 b = z$, luego $\forall z = \forall_1\forall_2 z = \forall_1\forall_2\forall_1 a = \forall_2\forall_1\forall_1 a = \forall_2\forall_1 a = \forall_2 z = \forall_2\forall_2 b = \forall_2 b = z$, por lo tanto $z \in \forall(A)$. $\square$

Lema 6.4. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra y sea $\forall = \forall_1\forall_2$. Entonces el álgebra $(A, \forall)$ es una MV-álgebra monádica.*

Dem.

Es claro que por (m1) tenemos que $\forall x = \forall_1\forall_2 x \leq \forall_2 x \leq x$. Además, por (m2) y (b) se verifica $\forall x \to \forall y = \forall_1\forall_2 x \to \forall_1\forall_2 y = \forall_1(\forall_1\forall_2 x \to \forall_2 y) = \forall_1\forall_2(\forall_2\forall_1 x \to y) = \forall(\forall x \to y)$. De manera análoga se prueba (m3). $\square$

Dada una BMV-álgebra $(A, \forall_1\forall_2)$ diremos que la MMV-álgebra $(A, \forall)$ con $\forall = \forall_1\forall_2$ es su MMV-ágebra asociada. En lo que sigue estudiaremos las congruencias de las BMV-

álgebras. Primero recordemos que $D \subset A$ es un filtro implicativos (f.i.) si verifica (F1) $1 \in D$ y (F2) si $x, x \to y \in D$ implica que $y \in D$.

Definición 6.5. *Sea A una BMV-álgebra y $F \subseteq A$ un filtro implicativo, diremos que es un filtro biádico (f.b.) si verifica:*

(F3) *$x \in F$ implica $\forall_1\forall_2 x \in F$.*

Notaremos a continuación con $\mathcal{F}_b(A)$ al conjunto de los filtros biádicos de la BMV-álgebra $(A, \forall_1, \forall_2)$ y con $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de los filtros implicativos de la MV-álgebra A. Por otra parte, notaremos $F_b[X]$ al f.b. generada por X y con $F[X]$ al f.i. generada por X.

Si $X \subseteq A$, llamaremos conjunto de constantes de X a $\forall(X) = \{x \in X : x = \forall_1\forall_2 x\} = X \cap \forall(A)$. Además se tiene que, $(B(A), \forall_1, \forall_2)$ es un Df_2-álgebra de [4].

Lema 6.6. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra, entonces $Con_b(A)$ y $\mathcal{F}_b(A)$ son retículos isomorfos, donde $Con_b(A)$ es el retículo de las congruencias de $(A, \forall_1, \forall_2)$.*

Dem. Sea $D \in \mathcal{F}_b(A)$, donde $R(D) = \{(a, b) \in A^2 : a \to b, b \to a \in D\}$, por [68] es claro que $R(D)$ es una congruencia, que respeta $\to$ y $\sim$. Solo resta probar que respeta $\forall_1$, $\forall_2$. En efecto, sea $(x, y) \in R(D)$, por definición de R(D), $x \to y, y \to x \in D$, y de (F3) se tiene que $\forall_1\forall_2(x \to y) \in D$, $\forall_1\forall_2(y \to x) \in D$, pero por (m1) $\forall_1\forall_2(x \to y) \to \forall_2(x \to y) = 1 \in D$. Luego $\forall_2(x \to y) \in D$, y por (m10) $\forall_2(x \to y) \to (\forall_2 x \to \forall_2 y) = 1 \in D$, y por lo tanto, $\forall_2 x \to \forall_2 y \in D$, y es claro que similarmente se tiene $\forall_2 y \to \forall_2 x \in D$. De manera análoga obtenemos $\forall_1 x \to \forall_1 y \in D$, $\forall_1 y \to \forall_1 x \in D$. Por lo tanto, $R(D) \in Con_b(A)$ y $[1]_{R(D)} = D$. Además, si $\theta \in Con_b(A)$ entonces $[1]_\theta$ es un filtro biádico y se verifica $R([1]_\theta) = \theta$. $\square$

Lema 6.7. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra y sea $X \subseteq A$, entonces $F_b[X] = F[\forall_1\forall_2 X]$.*

Dem. Por [68] sabemos que $F(\forall_1\forall_2 X) = \{a \in A :$ existen $h_i \in X, r_i \in I\!N \cup \{0\}, i \in I_k = \{1, 2, \cdots, k\} : (\forall_1\forall_2 h_1)^{r_1} \odot \cdots \odot (\forall_1\forall_2 h_k)^{r_k} \leq a\}$.

Se tiene que $X \subseteq F[\forall_1\forall_2 X]$. En efecto, sea $h \in X \Rightarrow \forall_2 h \leq h \Rightarrow \forall_1\forall_2 h \leq \forall_1 h \leq h \Rightarrow h \in F[\forall_1\forall_2 X]$. Veamos que $F[\forall_1\forall_2 X] \in \mathcal{F}_b(A)$. Es claro que $F[\forall_1\forall_2 X]$ es un f.i., luego resta probar (F3): sea $x \in F[\forall_1\forall_2 X]$, existen $h_i \in X, r_i \in I\!N \cup \{0\}, i \in I_k$ tal que $(\forall_1\forall_2 h_1)^{r_1} \odot \cdots \odot (\forall_1\forall_2 h_k)^{r_k} \leq x$, por (m5) $\forall_1((\forall_1\forall_2 h_1)^{r_1} \odot \cdots \odot (\forall_1\forall_2 h_k)^{r_k}) \leq \forall_1 x$, por (m8), $\forall_1(\forall_1\forall_2 h_1)^{r_1} \odot \cdots \odot \forall_1(\forall_1\forall_2 h_k)^{r_k} \leq \forall_1 x$, aplicando (m8), (m5) $(\forall_1\forall_2 h_1)^{r_1} \odot \cdots \odot (\forall_1\forall_2 h_k)^{r_k} \leq \forall_1 x$. Análogamente se prueba que $(\forall_1\forall_2 h_1)^{r_1} \odot \cdots \odot (\forall_1\forall_2 h_k)^{r_k} \leq \forall_1\forall_2 x$. Por lo tanto $\forall_1\forall_2 x \in F[\forall_1\forall_2 X]$.

Supongamos, ahora, que $D \in \mathcal{F}_b(A)$ es tal que $\forall_1\forall_2 X \subseteq D$, entonces como D es cerrado por $\odot$ (ver [11]) y se verifica sin dificultad que $F[\forall_1\forall_2 X] \subseteq D$. $\square$

Si $X \subseteq A$ y si $a \in A$, notaremos $F[\{a\}] = F[a]$ y $F[X \cup \{a\}] = F[X, a]$. Luego, estamos en condiciones de demostrar los siguientes lemas.

Lema 6.8. *Sea $X \subseteq A$ y $a \in A$, entonces $b \in F_b[X, a]$ si, y solo si, existe un entero n tal que $(\forall_1\forall_2 a)^n \to b \in F_b[X]$. En particular, $b \in F_b[a]$ si, y solo si, existe un entero n tal que $(\forall_1\forall_2 a)^n \leq b$.*

Dem. Es consecuencia directa de [68, p. 79] y Lema 6.7. $\square$

Lema 6.9. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra. Se verifica que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $F_b[a] = [a)$

(i) $a \in B(A) \cap \forall_1\forall_2 A$

Dem. (i) $\Rightarrow$(ii): Como $a^n \in F_b[a]$, pues los f.i. son cerrados por $\odot$, tenemos que $a \leq a^n$, de lo que resulta $a^n = a$. Por la caracterización de los elementos de $B(A)$ (ver Capitulo I) inferimos que $a \in B(A)$. Como $\forall_1\forall_2 a \in [a)$ y por (m1) concluimos que $\forall_1, \forall_2 a = a$. Por lo tanto $a \in \forall_1, \forall_2 A$.

(ii) $\Rightarrow$(i): Sea $x \in F_b[a]$, por Lema 6.8, tenemos que existe un n tal que $(\forall_1\forall_2 a)^n \leq x$, y por hipotesis $a \in B(A) \cap \forall_1\forall_2 A$, entonces $\forall_1\forall_2 a = a$. Como a es un elemento booleano, tenemos que $(\forall_1\forall_2 a)^n = a$, de lo que resulta que $a \leq x$. Luego, inferimos que $F_b[a] \subseteq [a)$.

Por otro lado, sea $x \in [a)$ entonces $a \leq x$, de lo que resulta $\forall_1\forall_2 a \leq \forall_1\forall_2 x \leq x$. Luego, repitiendo el procedimiento tenemos que $(\forall_1\forall_2 a)^n \leq x$, con lo que se tiene la otra inclusión. $\square$

Es claro que si $A \in \mathbf{BMV}$ con $F \subseteq A$ y tomamos $\forall = \forall_1\forall_2$, entonces F es un f.b. de $(A, \forall_1, \forall_2)$ si, y solo si, es un filtro nonádico (f.m.) del MV-álgebra $(A, \forall)$ (i.e. si $x \in F$ implica $\forall x \in F$). Esto permite probar el siguiente teorema.

Teorema 6.10. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra y $\forall = \forall_1\forall_2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $(A, \forall_1, \forall_2)$ *es una BMV-álgebra simple,*

(ii) $(A, \forall)$ *es una MV-álgebra mónadica simple.*

Dem. Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra simple, entonces las únicas congruencias de A son $A \times A$ y la identidad, de lo que se tienen que los únicos f.b. son A y $\{1\}$. Luego, son los únicos filtros monádicos de la MMV-álgebra asociada $(A, \forall)$ Por lo tanto, $(A, \forall)$ en una MV-álgebra mónadica simple. La recíproca es análoga. $\square$

Corolario 6.11. *La variedad de las BMV-álgebras tiene la propiedad de estensión de congruencias.*

Dem. Consideremos ahora una BMV-álgebra $(A, \forall_1, \forall_2)$ y una subálgebra B de ella. Entonces, sea $\Theta \in Con(B)$ y sea D_Θ el f.b. asociado. Luego existe un f.i. $D_\Phi = \{x \in A :$ existe $d \in D_\Theta$ tal que $d \leq x\}$ de A (ver [68, Proposición 2, pag. 75]) asociado a una congruencia Φ de A tal que $D_\Phi \cap B = D_\Theta$. Es claro que D_Φ es un f.b.. En efecto, si tomamos un $z \in D_\Phi$ se tiene que existe un elemento $d \in D_\Theta$ tal que $d \leq z$, luego por propiedades de MV-álgebras se tiene que $\forall_1\forall_2 d \leq \forall_1\forall_2 z$ y como $\forall_1\forall_2 d \in D_\Theta$, se tiene que $\forall_1\forall_2 z \in D_\Theta$. De donde resulta que $\Theta = \Phi \cap (B \times B)$, con lo cual queda probado el teorema. $\square$

Notaremos a continuación con $\mathcal{F}_m(A)$ al conjunto de los filtros monádicos de la MMV-álgebra $(A, \forall)$ y con $\mathcal{F}(\forall A)$ el conjunto de los filtros implicativos de la MV-álgebra $\forall A$. Por otra parte, notaremos $F_m[X]$ al filtro monádico generado por X.

Teorema 6.12. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra, entonces existe un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de $(A, \forall_1, \forall_2)$, el retículo de las congruencias de la MMV-álgebra asociada $(A, \forall)$ y las congruencias $\forall(A)$ como MV-álgebra .*

Dem. El hecho de que el retículo de las congruencias de BMV-álgebra $(A, \forall_1, \forall_2)$ es isomorfo al de las congruencias de la MMV-álgebra asociada $(A, \forall)$ es inmediato de la relación enter los f.b. y los f.m.

Sea ahora $M \in \mathcal{F}_b(A)$, definiremos la función $\alpha : \mathcal{F}_b(A) \to \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A)$, de la siguiente manera: $\alpha(M) = M \cap \forall_1\forall_2 A$ para todo $M \in \mathcal{F}_b(A)$. Es claro que α está bien definida por el Corolario 6.11. Consideremos, ahora, la función $\gamma : \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A) \to \mathcal{F}_b(A)$, dada por la prescripción $\gamma(N) = F_b[N]$, para todo $N \in \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A)$. Luego, se tiene que $(\gamma \circ \alpha)(M) = M$. En efecto, solo debemos probar que $F_b[M \cap \forall_1\forall_2 A] = M$. Es claro que $M \cap \forall_1\forall_2 A \subseteq M$. Sea S un f.b. tal que $M \cap \forall_1\forall_2 A \subseteq S$ y sea $z \in M$. Entonces, $\forall_1\forall_2 z \in M \cap \forall A$, de lo que resulta $\forall_1\forall_2 z \in S$, y como $\forall_1\forall_2 z \to z = 1$, tenemos que $z \in S$. Veamos ahora que $(\alpha \circ \gamma)(N) = N$. Como $\mathcal{F}_b(\forall_1\forall_2 A) = \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A)$, tenemos que $F_b[N] = F[\forall_1\forall_2 N] = F[N] = N$. Acabamos de probar que las funciones γ y α son biyectivas, se puede probar sin dificultad que dichas funciones son isomorfismos de orden. Por otro lado, sabemos que $\mathcal{F}_b(A) = \mathcal{F}_m((A, \forall))$ donde $\forall$ es el cuantificador asociado a la BMV-álgebra A, lo que concluye la demostración del teorema. $\square$

Corolario 6.13. *La variedad de las BMV-álgebras es a congruencias distributivas.*

Dem. Resulta del Teorema 6.12 y de propiedades conocidas de MV-álgebras. $\square$

6.5 $\oplus$-subálgebras y cuantificadores

Una subálgebra K de una MV-álgebra A se dice relativamente completa si, y solo si, para todo $a \in A$ el conjunto $\{x \in K : a \leq x\} = [a) \cap K$ tiene primer elemento, al que notaremos con $\bigwedge\limits_{x \in K: a \leq x} x$.

Sabemos por Rutledge ([70]), que en toda MV-álgebra monádica $(A, \exists)$, el conjunto $\exists A$ es una subálgebra relativamente completa de la MV-álgebra A y que $\exists a = \bigwedge\limits_{x \in K: a \leq x} x$.

A continuación estudiaremos las subálgebras especiales que determinen los cuantificadores.

Definición 6.14. *Sea A una MV-álgebra y K una MV-subálgebra de A, diremos que K es una $\oplus$-subálgebra si verifica:*

1. *para cada $a \in A$ existe el último elemento del conjunto $(a] \cap K$ que lo notaremos $\forall_K(a) = \bigvee\limits_{x \leq a, x \in K} x$,*
2. *si $a \oplus a \geq x$ para todo $a \in A$ y $x \in K$, implica que existe $v \in K$ tal que $a \geq v$ y $v \oplus v \geq x$.*

Observemos que si a la Definición 6.14 le agregamos la condición *" 3. si $a \odot a \geq x$ para todo $a \in A$ y $x \in K$, implica que existe $v \in K$ tal que $a \geq v$ y $v \odot v \geq x$ "*, entonces tenemos la definición dual de las subálgebras *m-relativamente completas* determinadas por Di Nola y Grigolia en [18]. Estos autores prueban que estas subálgebras determinan un único operador monádico.

Proposición 6.15. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV-álgebra. Entonces se verifican las siguientes propiedades para $i = 1, 2$:*

(i) *$x \in \forall_i A$ si, y solo si, $x = \forall_i x$,*

(ii) *$\forall_i A$ es una $\oplus$-subálgebra de A,*

(iii) *si $a \in A$, entonces $\forall_i a = \bigvee\limits_{x \leq a, x \in \forall_i A} x$,*

(iv) *$\forall_i \forall_j x \in \forall_j A$ con $i \neq j$ y $j = 1, 2$.*

Dem. Consideremos i fijo. Es claro que $\forall_i A$ es MV-subálgebra de A y que la condición (i) y (iv) son válidas, veamos que cumple 2. de la Definición 6.14. En efecto, sea $a \in A$ y $x \in \forall_i A$, entonces tomemos $v = \forall_i a$ y supongamos que $a \oplus a \geq x$, luego por la monotonía de $\forall_i$ se tiene que $\forall_i(a \oplus a) \geq \forall_i(x) = x$ de lo que resulta $\forall_i(a) \oplus \forall_i(a) = v \oplus v \geq x$.

(iii)

(1) Sea $z \in \forall_i A$ tal que $z \leq a$, [hip.]

(2) $z = \forall_i z \leq \forall_i a$, [(i), (1) y (m7)]

(3) $\bigvee_{x \leq a, x \in \forall_i A} x \leq \forall_i a$ [(1),(2)]

Por otra parte, se tiene que

(4) $\forall_i a \leq a$, [((m1))]

(5) $\forall_i a \leq \bigvee_{x \leq a, x \in \forall_i A} x$.

(6) $\forall_i a = \bigvee_{x \leq a, x \in \forall_i A} x$, [(2)]

□

Proposición 6.16. *Sea A una MV-álgebra y $K_1, K_2 \subseteq A$ tales que:*

(i) *K_1, K_2 sean $\oplus$-subálgebras,*

(ii) $\forall_{K_i}(a) = \bigvee_{x \leq a, x \in K_i} x$,

(iii) *$\forall_{K_i} \forall_{K_j} x \in K_j$ con $i \neq j$,*

Entonces $(A, \forall_{K_1}, \forall_{K_2})$ es una BMV-álgebra y $\forall_{K_i}(A) = K_i$.

Dem. Por [9] tenemos que $\forall_{k_i}$ verifica:

(1) $\forall_{K_i} a \leq a$,

(2) si $x \leq y$, entonces $\forall_{K_i} x \leq \forall_{K_i} y$,

(3) $\forall_{K_i}\forall_{K_i} a = \forall_{K_i} a$,

(4) si $b \in K_i$, entonces $\forall_{K_i} b = b$ y además $\forall_{K_i}(A) = K_i$.

Veamos que $\forall_{K_i}$ verifica (m2) :

(5) Sea $r = \forall_{K_i}(\forall_K x \to y)$, [hip.]

(6) $r \leq \forall_{K_i} x \to y$, , [(5),(1)]

(7) $r \odot \forall_{K_i} x \leq y$, [(6), Lema 1.5]

(8) $\forall_{K_i}(r \odot \forall_{K_i} x) \leq \forall_{K_i} y$, [(7), (2)]

(9) $\forall_{K_i}(r \odot \forall_{K_i} x) = r \odot \forall_{K_i} x$, [(4) (5), $r, \forall_{K_i} x \in K_i$]

(10) $r \odot \forall_{K_i} x \leq \forall_{K_i} y$,

(11) $r \leq \forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y$. [Lema 1.5]

Veamos que se verifica la otra desigualdad:

(12) $\forall_{K_i} y \leq y$,

(13) $\forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y \leq \forall_{K_i} x \to y$,

(14) $\forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y \in (\forall_{K_i} x \to y] \cap K_i$, [$\forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y \in K_i$]

(15) $\forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y \leq \forall_{K_i}(\forall_{K_i} x \to y)$.

(16) $\forall_{K_i}(\forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y) = \forall_{K_i} x \to \forall_{K_i} y$.

Veamos que $\forall_{K_i}$ verifica (m3) :

(17) $\sim \forall_K(a) \to \forall_K(a) = \forall_K(a) \oplus \forall_K(a) = \bigvee_{x \leq a, x \in K_i} x \oplus \bigvee_{y \leq a, y \in K_i} y = \bigvee_{x \leq a, x \in K_i} \bigvee_{y \leq a, y \in K_i} x \oplus y$.

Es claro que $\{v \oplus v : v \leq a, v \in K_i\} \subseteq \{x \oplus y : x \leq a, x \in K_i, y \leq a, y \in K_i\}$.

(18) $\bigvee_{v\leq a, v\in K_i}(v\oplus v) \leq \bigvee_{x\leq a, y\leq a, x,y\in K_i}(x\oplus y)$.

Para cada $x \leq a, y \leq a$, entonces $x\oplus y \leq a\oplus a$,

(19) existe $v\in K_i$, $v\leq a$, entonces $x\oplus y\leq v\oplus v$, [K_i $\oplus$-subálgebra]

(20) $\bigvee_{x\leq a, y\leq a, x,y\in K_i} x\oplus y \leq \bigvee_{v\leq a, v\in K_i} v\oplus v$

(21) $\bigvee_{x\leq a, y\leq a, x,y\in K_i} x\oplus y = \bigvee_{v\leq a, v\in K_i} v\oplus v$. [(18), (20)]

Es fácil ver que $\{v\oplus v : v\leq a\}\subseteq\{v\oplus v : 2v\leq 2a\}$,

(22) $\bigvee_{v\leq a, v\in K_i} v\oplus v \leq \bigvee_{2v\leq 2a, v\in K_i} v\oplus v$.

(23) Sea $z = \bigvee_{v\leq a, v\in K_i} v\oplus v$, [hip.]

(24) $z\geq v\oplus v$, para todo $v\leq a, v\in K_i$, [(23)]

(25) $z\geq v\oplus v$, para todo $2v\leq 2a, v\in K_i$,

(26) $z\geq \bigvee_{2v\leq 2a, v\in K_i} v\oplus v$,

(27) $\bigvee_{2v\leq 2a, v\in K_i} v\oplus v = \bigvee_{v\leq a, v\in K_i} v\oplus v$,

(28) $\{v\oplus v : 2v\leq 2a\}\subseteq\{u : u\leq 2a\}$,

(29) $\bigvee_{2v\leq 2a, v\in K_i} v\oplus v \leq \bigvee_{u\leq 2a, u\in K_i} u$.

(30) Como $u\leq a\oplus a$, entonces existe $v\in K_i$ tal que $v\leq a$ y $u\leq v\oplus v$,

(31) $\bigvee_{u\leq 2a, u\in K_i} u \leq \bigvee_{v\leq a, v\in K_i} v\oplus v$,

(32) $\bigvee_{2v\leq 2a, v\in K_i} v\oplus v = \bigvee_{u\leq 2a, u\in K_i} u = \forall_{K_i}(2a) = \forall_{K_i}(a\oplus a)$.

Veamos que $\forall_{K_i}$ verifica (b) :

Es claro también que vale $\forall_{K_1}\forall_{K_2}x \leq \forall_{K_2}x \leq x$, de lo que se tiene $\forall_{K_1}\forall_{K_1}\forall_{K_2}x \leq \forall_{K_1}x$, luego por hip. (iii) se tiene $\forall_{K_1}\forall_{K_2}x \leq \bigvee_{z\leq\forall_{K_1}x, z\in K_2} z = \forall_{K_2}\forall_{K_1}x$. La desigualdad restante es análoga. □

Como consecuencia de la demostración de las proposiciones anteriores tenemos caracterizada las subálgebras que determinan al U-operador.

Teorema 6.17. *Sea A una MV-álgebra. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre las subálgebras relativamente completas de A y los U-operadores que verifican (m1) y (m2).*

Dado $A \in \mathbf{BMV}$ y $K_i = \forall_i(A)$, para cada función $h_i : K_i \to A$ diremos que tiene una función adjunta a derecha si: $b \leq \forall_h(a) \Leftrightarrow h(b) \leq a$ para todo $b \in K$ y $a \in A$. Además, si verifica $\forall_{h_i}(x \oplus x) = \forall_{h_i}(x) \oplus \forall_{h_i}(x)$, entonces diremos que $\forall_{h_i}$ es una función $\oplus$-adjunta a derecha de h_i.

Proposición 6.18. *Sea A un MV-álgebra y K_1, K_2 subálgebras de A, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *la terna (A, K_1, K_2) verifica que K_1, K_2 son $\oplus$-subálgebra tal que $\forall_{K_i}\forall_{K_j}x \in \forall_{K_j}(A)$ para todo $i \neq j$ con $i, j = 1, 2$, con $x \in A$,*

(ii) *la terna (A, K_1, K_2) verifica que la inmersión canónica $h_i : K_i \to A$ tiene una función $\oplus$-adjunta a derecha $\forall_{h_i}$, $i = 1, 2$, tal que conmutan.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Veamos que la función $\forall_{h_i}(b) = \bigvee_{x\leq b, x\in K_i} x$ es la adjunta a derecha de h_i. En efecto,

(1) sea $b \in K_i$ y $a \in A$, [hip.]

(2) $b \leq \forall_{h_i}(a)$, [hip.]

(3) $b \leq \bigvee_{x \leq a, x \in K_i} x \leq a$,

(4) $b = h(b) \leq a$. [(3), h es una inmersion canónica]

Es claro que se verifica la condición necesaria de la definicion de adjunta a derecha, luego por Proposicion 6.16 se tiene que $\forall_{h_i}$ es $\oplus$-adjunta a derecha de h_i y que los $\forall_{h_i}$ conmutan.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Veamos que la función $\forall_{h_i}$ es creciente.

(1) Sean $x \leq y$, con $x, y \in A$,

(2) $\forall_{h_i} x \leq \forall_{h_i} x$,

(3) $h_i \forall_{h_i} x \leq x$, [(2), definición de adjunta a derecha]

(4) $h_i \forall_{h_i} x \leq y$,

(5) $\forall_{h_i} x \leq \forall_{h_i} y$,

Veamos que los K_i son $\oplus$-subálgebra de A y definamos que $\forall_{K_i} t = h_i \circ \forall_{h_i}(t)$ para todo $t \in A$,

(6) sea $x \in K_i$, $a \in A$ tal que

(7) $x \leq a \oplus a$,

(8) sea $v = \forall_{h_i}(a) \in K_i$

(9) $x = \forall_{h_i}(x) \leq \forall_{h_i}(a \oplus a) = \forall_{h_i}(a) \oplus \forall_{h_i}(a) = v \oplus v$. [$\forall_{h_i}$ es $\oplus$-adjunta a derecha]

Además se verifica sin dificultad que $\forall_{K_i} \forall_{K_j} x \in \forall_{K_j}(A)$ para todo $i \neq j$ con $i, j = 1, 2$. $\square$

Notaremos con $\mathcal{BMV}$ a la categoría de las BMV-álgebras con sus respectivos morfismos y con $\mathcal{MV}^3$, notaremos, a la categoría cuyos objetos son ternas (A, K_1, K_2) de MV-álgebras, donde cada MV-homomorfismo inyectivo $h_i : K_i \hookrightarrow A$ tiene una $\oplus$-adjunta a derecha. Los morfismos de$\mathcal{MV}^3$ son ternas de funciones $(f, f_1, f_2) : (A, K_1, K_2) \to (A', {K_1}', {K_2}')$, tal que se verifican las siguientes condiciones:

(1) $f : A \to A'$ es un MV-homomorfismo,

(2) $f \circ h_i = h'_i \circ f_i$,

(3) $f_i \circ \forall_{h_i} = \forall_{h'_i} \circ f$,

(4) $\forall_{h_1} \circ \forall_{h_2} = \forall_{h_1} \circ \forall_{h_2}$ y $\forall_{{h_1}'} \circ \forall_{{h_2}'} = \forall_{{h_1}'} \circ \forall_{{h_2}'}$.

Donde $h'_i : K'_i \to A'$ es una MV-homomorfismo inyectivo el cual tiene una función $\oplus$-adjunta a derecha $\forall_{h'_i}$.

Observación 6.19. *Las funciones f_i son MV-homomorfismos. En efecto:*

(i) $f_i(1) = 1$ y $f_i(0) = 0$,

(1) $(f \circ h_i)(1) = f(h_i(1)) = 1$, [$f, h$ son homomorfismos]

(2) $(h'_i \circ f_i)(1) = h'_i(f_i(1))$,

(3) $h'_i(f_i(1)) = 1 = h'_i(1)$, [(1),(2)]

(4) $f_i(1) = 1$. [h'_i es inyectiva]

Análogamente se prueba $f_i(0) = 0$, y el hecho de que f_i respete las restante operaciones resulta de que f y h'_i son MV-homomorfismos.

Teorema 6.20. *La categoría $\mathcal{BMV}$ es equivalente a la categoría $\mathcal{MV}^3$.*

Dem. Consideremos los funtores Φ y Ψ tal que $\Phi : \mathcal{BMV} \to \mathcal{MV}^3$ y $\Psi : \mathcal{MV}^3 \to \mathcal{BMV}$ dados por las siguientes prescripciones:

- $\Phi((A, \forall_1, \forall_2)) = (A, K_1, K_2)$ donde $\forall_i(A) = K_i$ y $\Phi(f) = (f, f/K_1, f/K_2)$,
- $\Psi((A, K_1, K_2)) = (A, \forall_{K_1}, \forall_{K_1})$ donde $\forall_{K_i} = h_i \circ \forall_{h_i}$ y $\Phi(f, f_1, f_2) = f$.

Veamos que los funtores está bien definidos. Para ello consideremos la BMV-álgebra $(A, \forall_1, \forall_2)$, entonces por la Proposición 6.15 la terna $(A, \forall_1(A), \forall_2(A))$ tiene la propiedad que $\forall_i(A)$ es una $\oplus$-subálgebra de A. Luego, por Proposición 6.18, la inmersión canónica $h_i : \forall_i(A) \hookrightarrow A$ tienen una $\oplus$-adjunta a derecha $\forall_{h_i}(x) = \bigvee_{b \leq x, b \in K_i} b$. Por lo tanto, Φ está bien definido para objetos.

Sea ahora $(A, \forall_1, \forall_2)$ y $(A', \forall_1', \forall_2')$ dos objetos de $\mathcal{BMV}$ y sea f un morfismos entre esos objetos. Veamos que $f, f/\forall_1(A), f/\forall_2(A)$ es un morfismo de $\mathcal{MV}^3$. Sea $a \in \forall_i(A)$, entonces

- $(f \circ h_i)(a) = f(h_i(a)) = f(a)$, [$h_i$ es inmersión canóninica]
- $({h_i}' \circ f/\forall_i(A))(a) = {h_i}'(f/\forall_i(A)(a)) = f/\forall_i(A)(a) = f(a)$,

  Luego se verifica la condición (2) de la definición de los objetos $\mathcal{MV}^3$.

Sea $b \in \forall_i(A)$, entonces como $\forall_{h_i} = \forall_i$, $\forall_{h_i'} = \forall_i'$ y por definición $\forall_{h_i}$ se tiene que

- $(f/\forall_i(A) \circ \forall_{h_i})(b) = f/\forall_i(A)(\forall_{h_i}(b)) = f/\forall_i(A)(\forall_i(b)) = f(\forall_i(b)) =$

  $= \forall_i' f(b) = \forall_{h_i}' f(b) = (\forall_{h_i}' \circ f)(b)$

  Luego la condición (3) se verifica.

Es claro que la condición (4) vale porque en en las BMV-álgebras los cuantificadores conmutan. Por lo que el funtor Φ está bien definido para morfismos.

Veamos a continuación que Ψ esta bien definido, para ello consideraremos el objeto (A, K_1, K_2) de $\mathcal{MV}^3$. Por proposición 6.18, resulta que la inmersión $h_i : K_i \hookrightarrow A$ tiene una función $\oplus$-adjunta a derecha $\forall_{h_i}$. Por lo tanto, podemos considerar el objeto $(A, h_1(K_1), h_2(K_2))$, donde $h_i(K_i)$ es una subálgebra de A que permite considerar la inmersión canónica $t_i : h_i(K_i) \hookrightarrow A$, la cual tiene una $\oplus$-adjunta a derecha $\forall_{t_i}$, donde $\forall_{t_i} = h_i \circ \forall_{h_i}$. En efecto, sea $b \in h_i(K_i)$, luego existe z tal que $h_i(z) = b$ y $b \leq \forall_{t_i}(a)$ para todo $a \in A \Leftrightarrow h_i(z) \leq \forall_{t_i}(a) \Leftrightarrow h_i(z) \leq (h_i \circ \forall_{h_i})(a) \Leftrightarrow z \leq \forall_{h_i}(a) \Leftrightarrow b = h_i(z) \leq a$ $\Leftrightarrow b = t_i(b) \leq a$ por ser t_i una inmersión canónica. Luego, $\forall_{t_i}$ es la adjunta a derecha de t_i y se prueba sin dificultad que preserva $\oplus$.

Entonces, tenemos que la terna $(A, h_1(K_1), h_2(K_2))$ tiene la propiedad de que $h_i(K_i)$ es una $\oplus$-subálgebra de A, y que se verifica $\forall_{h_i(K_i)}\forall_{h_j(K_j)}x \in \forall_{h_j(K_j)}A$ para todo $x \in A$ e $i \neq j$. Por la proposición 6.18 se tiene que $(A, \forall_{h_1(K_1)}, \forall_{h_2(K_2)})$ es un objeto de $\mathcal{BMV}$. Consideremos a continuación un morfismo (f, f_1, f_2) de $\mathcal{MV}^3$, entre los objetos (A, K_1, K_2) y (A', K_1', K_2'). Debemos verificar que $f : A \to A'$ es un BMV-homomorfismo. En efecto: sea $a \in A$, $f(\forall_{h_i(K_i)}x) = f(t_i(\forall_{t_i}x)) = f \circ t_i(\forall_{t_i}(x)) = t_i' \circ f_i \circ \forall_{t_i}(x) = t_i' \circ \forall_{t_i'} \circ f(x) = \forall_{h_i'(K_i')}f(x)$.

Se verifica sin dificultad, a partir de las Proposiciones 6.15 y 6.16, que $\Psi(\Phi((A, \forall_1, \forall_2))) \cong (A, \forall_1, \forall_2)$, $\Psi(\Phi(f)) = f$ y $\Phi(\Psi((A, K_1, K_2))) \cong (A, K_1, K_2)$, $\Psi(\Phi((f, f_1, f_2)) = (f, f_1, f_2)$. $\square$

6.6 Representación y dualidad topológica para MMV-álgebras

A continuación extederemos las dualidades presentadas en [51] y [9], para el caso de las MMV-algebras. Primero mostraremos algunas propiedades del espectro primo de una MV-álgebra. En este apartado utilizaremos la notación introducida en el Capítulo I referida a los mv-espacios.

Teorema 6.21. ([44]) *Sea $(A, \forall)$ una MMV-álgebra y $R_\forall \subseteq X(A) \times X(A)$ definida por $R_\forall = \{(P, Q) \in X(A) \times X(A) : P \cap \forall A = Q \cap \forall A\}$. Entonces las clases de equivalencia son cerradas y valen las siguientes propiedades:*

(i) $(P, Q) \in R_\forall$ *implica* $(g(P), g(Q)) \in R_\forall$.

(ii) *Para todo $P \in X(A)$ tal que $\forall a \notin P$ existe $Q_1 \in X(A)$ que verifica que $a \notin Q_1$ y $P \cap \forall A \subseteq Q_1 \cap \forall A$.*

(iii) *Para todo $P \in X(A)$ tal que $\forall a \notin P$ existe $Q_2 \in X(A)$ que verifica que $a \notin Q_2$ y $(P, Q_2) \in R_\forall$.*

(iv) $\sigma(\forall a) = \forall_{R_\forall}(\sigma(a))$, *donde* $\forall_{R_\forall}(\sigma(a)) := \bigcap_{a \notin Q} [X(A) \setminus R_\forall(Q)]$ *con $R_\forall(Q)$ es la clase de equivalencia de Q.*

Teorema 6.22. *Sea* $(A, \forall)$ *una* MMV*-álgebra y sea* $R_\forall \subseteq X(A) \times X(A)$ *ya definida anteriormente. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Sean* $P, Q \in X(A)$ *tales que* $(P, Q) \in R_\forall$ *y* $a, b \in A$. *Si* $P_0 \in X(A)$ *tal que* $P_0 \subseteq g(P)$, $\forall a \in P_0$ *y* $\forall b \notin \Phi_{P_0}(P)$, *entonces existe* $Q_0 \in X(A)$, $Q_0 \subseteq g(Q)$ *tal que* $\forall a \in Q_0$ *y* $\forall b \notin \Phi_{Q_0}(Q)$,

(ii) *sean* $P, Q \in X(A)$ *tales que* $P \subseteq g(Q)$ *y* $a, b \in A$. *Si* $\forall a \in P$ *y* $\forall b \notin \Phi_P(Q)$, *entonces existe* $P_1, \in X(A)$ *tales que* $(P_1, Q) \in R_\forall$ *y* $\forall a \to b \notin P_1$,

(iii) *sea* $P, Q \in X(A)$ *tales que* $P \subseteq g(Q)$ *y* $a, b \in A$. *Si existe* $T \in X(A)$ *tal que* $\sim \forall a \in T$ *y* $\forall b \notin \Phi_T(Q)$ *entonces existen* $P_1, Q_1 \in X(A)$ *tales que* $P_1 \subseteq g(Q_1)$, $\sim \forall a \in P_1$ *y* $b \notin \Phi_{P_1}(Q_1)$ *y* $(Q_1, Q) \in R_\forall$,

(iv) *sean* $P, Q \in X(A)$ *tal que* $(P, Q) \in R_\forall$ *y sean* $a, b \in A$. *Si* $T \in X(A)$ *tal que* $\sim a \in T$, $T \subseteq g(P)$ *y* $b \notin \Phi_T(Q)$, *entonces existe* $Q_0 \in X(A)$ *tales que* $\sim \forall a \in Q_0$, $Q_0 \subseteq g(P)$ *y* $\forall b \notin \Phi_{Q_0}(Q)$.

Dem. Las propiedades (i) y (ii) están demostradas en [44], por lo que solo probaremos las restantes. (iii):

1. Sean $P, Q \in X(A)$ tales que $P \subseteq g(Q)$ y
2. supongamos que existe $T \in X(A)$ tal que:
   (a) $\sim \forall a \in T$ y
   (b) $\forall b \notin \Phi_T(Q) = \bigcup_{x \in T} \{y \in A : x \to y \in Q\}$.
3. Para todo $x \in T:\ x \to \forall b \notin Q$, [2.b.]
4. $\sim \forall a \to \forall b \notin Q$, [2.a., 3.]
5. $\sim \forall a \to \forall b = \forall a \oplus \forall b = \forall(\forall a \oplus b) \notin Q$.
6. Existe $Q_1 \in X(A)$ tal que $\forall a \oplus b \notin Q_1$ y $(Q_1, Q) \in R_\forall$ [5. y teorema 6.47]

7. $b \notin Q$. [6. y $z \leq y \to z$]

8. Existe $P_1 = Q_{1b} = \{x \in A : x \to b \notin Q_1\}$ y es tal que [7. Lema 1.9]

    (a) $P_1 \subseteq g(Q_1)$

    (b) $b \notin \Phi_{P_1}(Q_1)$

9. $\sim \forall a \in P_1$ [6.]

(iv):

1. Sean $P, Q \in X(A)$ tal que $(P, Q) \in R_\forall$ y

2. sean $a, b \in A$ y $T \in X(A)$ tal que:

    (a) $\sim a \in T$,

    (b) $T \subseteq g(P)$,

    (c) $b \notin \Phi_T(P) = \bigcup_{x \in T} \{y \in A : x \to y \in P\}$.

3. Para todo $x \in T$ tal que $x \to b \notin P$,

4. $\sim a \to b \notin P$, [2.a, 3.]

5. $\forall(\sim a \to b) \notin P$, [4.]

6. $\forall(\sim a \to b) \notin Q$, [1. y 5.]

7. $\forall(\sim a \to b) = \forall(a \oplus b) = \forall a \oplus \forall b$,

8. $\forall a \oplus \forall b = \sim \forall a \to \forall b \notin Q$, [6. y 7.]

9. $\forall b \notin Q$.

10. Existe $Q_0 = Q_{\forall b} = \{x \in A : x \to \forall b \notin Q\}$ tal que [9. y Lema 1.9]

    (a) $Q_0 \subseteq g(Q)$,

    (b) $\forall b \notin \Phi_{Q_0}(Q)$,

(c) $\sim \forall a \in Q_0$. [10.]

$\square$

Ahora estamos en condiciones de definir el espacio asociado a una MV-álgebra monádica.

Definición 6.23. *Un mv-espacio monádico (ó mmv-espacio) es una 5-upla* $(X, \tau, g, \{\Phi_p\}_{p\in X}, R)$ *donde:*

(s0) R *una relación de equivalencia sobre* X*,*

(s1) $(x, y) \in R$ *implica* $(g(x), g(y)) \in R$*,*

(s2) $(X, \tau, g, \{\Phi_p\}_{p\in X})$ *es un mv-espacio,*

(s3) *las clases de equivalencia de* R *son subconjuntos cerrados de* X*,*

(s4) $U \in D(X)$ *implica* $\forall_E(U) \in D(X)$*, estos es* $D_R(X) = \{\forall_R(U) : U \in D(X)\}$*, donde para cada* $U \in D(X)$ *definimos* $\forall_R(U) = \bigcap_{p\notin U} [X \setminus R(p)]$*,*

(s5) $(x, y) \in R$ *y existe* $p_0 \in \forall_R(U)$ *tal que* $p_0 \leq g(x)$ *y* $\Phi_{p_0}(x) \notin \forall_R(V)$ *implica que existe* $p_1 \in \forall_R(U)$ *tal que* $p_1 \leq g(y)$ *y* $\Phi_{p_1}(y) \notin \forall_R(V)$*,*

(s6) $p \in \forall_R(U)$*,* $p \leq g(z)$ *y* $\Phi_p(z) \notin \forall_R(V)$ *implica que existen* $p_1 \in \forall_R(U)$ *y* $z_1 \in X$ *tales que* $p_1 \leq g(z_1)$*,* $\Phi_{p_1}(z_1) \notin V$ *y* $(z_1, z) \in R$*,*

(s7) $(x, y) \in R$ *y existe* $p_0 \in \sim U$ *tal que* $p_0 \leq g(x)$ *y* $\Phi_{p_0}(x) \notin V$ *implica que existe* $p_1 \in \sim \forall_R(U)$ *tal que* $p_1 \leq g(y)$ *y* $\Phi_{p_1}(y) \notin \forall_R(V)$*,*

(s8) $p \in \sim \forall_R(U)$*,* $p \leq g(z)$ *y* $\Phi_p(z) \notin \forall_R(V)$ *implica que existe* $p_1 \in \sim \forall_R(U)$ *y* $z_1 \in X$ *tales que* $p_1 \leq g(z_1)$*,* $\Phi_{p_1}(z_1) \notin V$ *y* $(z_1, z) \in R$*.*

Para simplificar en lo que sigue represetnaremos los mmv-espacios con (X, R). Observemos que (X, R) es un q-espacio dual en la terminología de [9].

Definición 6.24. *Si* (X_1, R_1) *y* (X_2, R_2) *son mmv-espacios,* $f : X_1 \to X_2$ *es una mmv-función si es una MV-función y para todo* $V \in D(X_2)$*,* $R_1(f^{-1}(V)) = f^{-1}(R_2V)$*.*

Corolario 6.25. *Sea* $(A, \forall)$ *un MMV-álgebra,* $R_\forall$ *definida en el Teorema 6.47. Entonces* $(D(X(A)), \forall_{R_\forall})$ *es una MMV-álgebra y* $\sigma_A : A \to D(X(A))$ *es un MMV-isomorfismo.*

Dem. Es claro que por la dualidad dada en [51], se tiene que σ_A es un MV-isomorfismo y por el teorema 6.47, se tiene que es un MMV-isomorfismo. □

El siguiente resultado es dual al establecido en [9] y su demostración es análoga.

Lema 6.26. [9] *Sea* (X, R) *un mmv-espacio. Entonces la relación* R *satisface la condición:*

" Los elementos no equivalentes de X *pueden ser separados por conjuntos en* $D_R(X)$*, es decir si* $(x, y) \notin R$*, existe* $V_1 \in D_R(X)$ *tal que* $x \in V_1$ *e* $y \notin V_1$ *ó bien existe* $V_2 \in D_R(X)$ *tal que* $x \notin V_2$ *e* $y \in V_2$*."*

Notaremos con $D_R(X)$ al conjunto de los abiertos, cerrados, crecientes y R-saturados, es decir $D_R(X) = \{U \in D(X) : \forall_R U = U\}$.

Teorema 6.27. *Sea* $(X, \tau, g, \{\Phi_p\}_{p\in X}, R)$ *un mmv-espacio. Entonces* $(D(X), \to, \sim, \forall_R, X)$ *es una MMV-álgebra y* $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ *es un mv-isomorfismo que satisface la condición:*

$$(\#)\ (x, y) \in R \Longleftrightarrow (\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R_{\forall_R}$$

donde $R_{\forall_R} = \{(P, Q) \in X(D(X)) \times X(D(X)) : P \cap \forall_R(D(X)) = Q \cap \forall_R(D(X))\}$*.*

Dem. Por [51], sabemos que $(D(X), \to, \sim, X)$ es una MV-álgebra. Luego, solo debemos probar que $\forall_R$ es un operador monádico. En efecto, sean $U, V \in D(X)$:

(m1) $\forall_R U \subseteq U$,

1. sea $x \in \forall_R U = X \setminus \bigcup_{p \notin U} [R(p)]$,

2. $x \notin \bigcup_{p \notin U} [R(p)]$,

3. si suponemos, $x \notin U$

4. $x \notin R(x)$, lo cual es una contradicción.

(m2) $\forall_R(\forall_R U \to V) = \forall_R U \to \forall_R V$,

i. $\forall_R(\forall_R U \to V) \subseteq \forall_R U \to \forall_R V$,

ii. $\forall_R U \to \forall_R V \subseteq \forall_R(\forall_R U \to V)$,

1. sea $z \in \forall_R(\forall_R U \to V) = X \setminus \bigcup_{p \notin \forall_R U \to V} [R(p)]$,

2. $z \notin \bigcup_{p \notin \forall_R U \to V} [R(p)]$,

3. para todo $p \notin \forall_R U \to V$ tenemos que $(z, p) \notin R$.

   Supongamos que

4. $z \notin \forall_R U \to \forall_R V = \bigcup_{t \in \forall_R U} (D_t^c \cup \Phi_t^{-1}(\forall_R V))$,

5. existe $t_0 \in \forall_R U$ tal que $z \notin D_{t_0}^c$ y $z \notin \Phi_{t_0}^{-1}(\forall_R V)$,

6. existe $t_0 \in \forall_R U$ tal que $t_0 \leq g(z)$ y $\Phi_{t_0}(z) \notin \forall_R V$,

7. existe $p_1 \in \forall_R U$, $y_1 \in X$ tal que $p_1 \leq g(y_1)$, $\Phi_{p_1}(y_1) \notin V$, $(y_1, z) \in R$ [6.,(s6)]

8. existe $y_1 \notin \forall_R U \to V$, $(y_1, z) \in R$,

   3. y 8. se contradicen. Luego vale i.

1. (ii)

2. Sea $z \in \forall_R U \to \forall_R V$,

3. $z \in \bigcap_{t \in \forall_R U} (D_t^c \cup \Phi_t^{-1}(\forall_R V))$,

4. para todo $t \in \forall_R U$ se tiene que $z \in D_t^c$ ó $z \in \Phi_t^{-1}(\forall_R V)$.

   Supongamos que

5. $z \notin \forall_R(\forall_R U \to V) = X \setminus \bigcup_{p \notin \forall_R U \to V} [R(p)]$,

6. $z \in \bigcap_{p \notin \forall_R U \to V} [R(p)]$,
7. para todo $p \notin \forall_R U \to V$ se tiene que $(z, p) \in R$,

   como $p \notin \forall_R U \to V$,
8. existe $t_0 \in \forall_R U$ tal que $p \notin D_{t_0}^c$ y $p \notin \Phi_{t_0}^{-1}(V)$,
9. existe $t_0 \leq g(p)$ y $\Phi_{t_0}(p) \notin V$, tal que $(z, p) \in R$, [7. y 9.]
10. existe $t_0 \leq g(p)$ y $\Phi_{t_0}(p) \notin \forall_R V$, tal que $(z, p) \in R$, [9. y $\forall_R V \subseteq V$]
11. existe $p_1 \in \forall_R U$ tal que $p_1 \leq g(z)$ y $\Phi_{p_1}(z) \notin \forall_R V$, [10.,(s5)]
12. existen $p_1 \in \forall_R U$ y $z_1 \in X$ tal que $z \notin D_{p_1}^c$ y $\Phi_{p_1}(z) \notin V$,
13. $z \notin \forall_R U \to V \supseteq \forall_R U \to \forall_R V$,

   3. y 13. se contradicen. Por lo tanto vale ii.

(m3) $\forall_R(\sim U \to U) = \sim \forall_R U \to \forall_R U$,

i. $\forall_R(\sim U \to U) \subseteq \sim \forall_R U \to \forall_R U$,

ii. $\sim \forall_R U \to \forall_R U \subseteq \forall_R(\sim U \to U)$,

(i.)

1. Sea $z \in \forall_R(\sim U \to U) = X \setminus \bigcup_{p \notin \sim U \to U} [R(p)]$,
2. $z \notin \bigcup_{p \notin \sim U \to U} [R(p)]$,
3. $(z, p) \notin R$ para todo $p \notin \sim U \to U$,
4. $(z, p) \notin R$ para todo $p \notin \sim \forall_R U \to U$.

   Supongamos que:
5. $z \notin \sim \forall_R U \to \forall_R U$,
6. $z \notin \bigcap_{t \in \sim \forall_R U} (D_t^c \cup \Phi_t^{-1}(\forall_R U))$,
7. existe $t_0 \in \sim \forall_R U$ tal que $z \notin D_{t_0}^c$ y $z \notin \Phi_{t_0}^{-1}(\forall_R U)$,
8. existe $t_0 \in \sim \forall_R U$ tal que $t_0 \leq g(z)$ y $\Phi_{t_0}(z) \notin (\forall_R U)$,

9. existen $p_1 \in\sim \forall_R U$ y $y_1 \in D(X)$ tal que $p_1 \leq g(y_1)$, $\Phi_{p_1}(y_1) \notin U$ y $(y_1, z) \in R$, [9., (s8)]

10. $y_1 \notin\sim \forall_R U \to U$ y $(y_1, z) \in R$,

    4. y 10. se contradicen. Por lo tanto vale i.

    (ii.)

1. sea $z \in\sim \forall_R U \to \forall_R U$,

2. $z \in \bigcap\limits_{t \in\sim \forall_R U} (D_t^c \cup \Phi_t^{-1}(\forall_R U))$.

    Supongamos que

3. $z \notin \forall_R(\sim U \to U) = X \setminus \bigcup\limits_{p \notin\sim U \to U} [R(p)]$,

4. $z \in \bigcup\limits_{p \notin\sim U \to U} [R(p)]$,

5. para todo $p \notin\sim U \to U$ se tiene que $(z, p) \in R$,

6. $p \notin\sim U \to U = \bigcap\limits_{t \in\sim U} (D_t^c \cup \Phi_t^{-1} U)$,

7. para todo $t \in\sim U$ tenemos $p \notin D_t^c$ y $p \notin \Phi_t^{-1} U$ y $(z, p) \in R$,

8. para todo $t \in\sim U$ tenemos $t \leq g(p)$, $\Phi_t(p) \notin U$ y $(z, p) \in R$,

9. existe $q_1 \in\sim \forall_R U$: $q_1 \leq g(z)$, $\Phi_{q_1}(z) \notin \forall_R U$. [8.,(s7)]

10. $z \notin\sim \forall_R U \to \forall_R U$,

    lo cual es una contradicción, luego vale ii.

Por lo tanto, $\forall_R$ es un operador monádico. Es claro, por [51] que ε_X es un MV-isomorfismo. Veamos a continuación que se verifica la condición (#) sobre la relación R. Sea $(x, y) \in R$ y sea $U \in \varepsilon_X(x) \cap \forall_R(D(X))$, de lo que se tiene que $x \in U$ y $U = \forall_R U = X \setminus \bigcup\limits_{p \notin U} [R(p)]$. Si suponemos que $y \notin U$, por hipótesis resulta $x \in R(y)$, por lo tanto $x \in \bigcup\limits_{p \notin U} [R(p)]$, lo cual es una contadicción. Luego, $U \in \varepsilon_X(y) \cap \forall_R(D(X))$. La inclusión restante es análoga.

Recíprocamente, supongamos que vale $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R_{\forall_R}$ y que $(x, y) \notin R$. Luego, por Lema 6.26, existe $V_1 \in D_R(X)$ tal que $x \in V_1$ e $y \notin V_1$ y como $\forall_R V_1 = V_1$ resulta que $V_1 \notin \varepsilon_X(y) \cap \forall_R(D(X))$, lo que contradice la hipótesis. $\square$

El siguiente lema es dual de [9, lemma 2.8] y que en este contexto puede ser presentado del siguiente modo.

Lema 6.28. *Sea (X_1, R_1) y (X_2, R_2) mmv-espacios y $f : X_1 \to X_2$ una mmv-función, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,

(ii) $R_1(f^{-1}(V)) = f^{-1}(R_2(V))$ *para todo* $V \in D(X_2)$,

(iii) $f^{-1}(R_2(V)) \subseteq R_1(f^{-1}(V))$ *para cada* $V \in D(X_2)$.

Este último lema nos permite ver que f es un *mmv*-isomorfismo si, y solo si, f es un *mv*-isomorfismo que verifica: $(x, y) \in R_1$ implica $(f(x), f(y)) \in R_2$.

Ahora consideramos la categoría $\mathcal{MMV}$ de las MMV-álgebras y sus respectivos morfismos y la categoría **MMV** de los *mmv*-espacios y las *mmv*-funciones. Luego, tenemos la siguiente dualidad.

Teorema 6.29. *Las categorías $\mathcal{MMV}$ y* **MMV** *son dualmente equivalentes.*

6.7 Congruencias y cerrados-saturados especiales

En lo que sigue nos abocaremos a caracterizar las congruencias en las MV-álgebras y las MMV-álgebras vía sus respectivas dualidades topológicas. En este punto, es importante destacar que estas caracterizaciones son originales.

Definición 6.30. *Sea X un mv-espacio y sea $Y \subseteq X$, diremos que Y es:*

(c1) *involutivos, si* $g(Y) = Y$,

(c2) *implicativo, si para todo* $U, V, W, Z \in D(X)$ *tal que si* $U \cap Y = V \cap Y$ *y* $W \cap Y = Z \cap Y$, *implica* $(U \to W) \cap Y = (V \to Z) \cap Y$.

Sabemos por [16, 17] que existe un correspondencia biyectiva entre las congruencias de un álgebra de De Morgan L y los subconjuntos cerrados e involutivos de $X(L)$, del siguiente modo: $Y \to \Theta(Y) = \{(a, b) : \sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y\}$. Luego, teniendo encuenta la dualidad topológica para las MV-álgebras dada en [51], podemos caracterizar las congruencias de una MV-álgebra A, por medio de la correspondencia anterior, con los subconjuntos cerrados, involutivos especiales de $X(A)$, como veremos a continuación.

Teorema 6.31. *Sea A una MV-álgebra, $X(A)$ un mv-espacio. La correspondencia $Y \to \Theta(Y)$ establece un isomorfismo entre las familias de los conjuntos cerrados, involutivos e implicativos de $X(A)$ y el retículo dual de las MV-congruencias de A.*

Dem. Sea Y implicativo veamos que $\Theta(Y)$ respeta la operación $\to$. En efecto, sea $(a, b); (c, d) \in \Theta(Y)$, de lo que se tiene $\sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y$ y $\sigma(c) \cap Y = \sigma(d) \cap Y$. Por hipótesis, tenemos $(\sigma(a) \to \sigma(c)) \cap Y = (\sigma(b) \to \sigma(d)) \cap Y$, y como σ es un MV-isomorfismo, $\sigma(a \to c) \cap Y = \sigma(b \to d) \cap Y$. Recíprocamente, sea $\Theta \in Con_{MV}(A)$, por la dualidades de [16, 17] sabemos que si $h : A \to A/\Theta$ es el epimorfismo canónico, entonces tenemos que $Y = \{h^{-1}(P) : P \in X(A/\Theta)\}$ es un cerrado e involutivo de $X(A)$. Veamos que Y es implicativo. Para ello consideremos $f : X(A/\Theta) \to X(A)$, dada por $f(R) = h^{-1}(R)$. Es claro que $f(X(A/\Theta)) = \{f(P) : P \in X(A/\Theta)\} = \{h^{-1}(P) : P \in X(A/\Theta)\} = Y$ y f es inyectiva. En efecto, si $f(R) = f(Q)$ entonces $h^{-1}(R) = h^{-1}(Q)$ ($|x|_\Theta = h(x) \in R \Leftrightarrow x \in h^{-1}(R) = h^{-1}(Q) \Leftrightarrow |x|_\Theta \in Q$).

Por lo tanto, sea $U, V, W, Z \in D(X(A))$ tales que $U \cap Y = V \cap Y$ y $W \cap Y = Z \cap Y$, luego existe $a, c, b, d \in X(A)$, tales que $\sigma(a) = U$, $\sigma(c) = V$, $\sigma(b) = W$,$\sigma(d) = Z$, de lo que resulta $\sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y$ y $\sigma(c) \cap Y = \sigma(d) \cap Y$. Luego, se tiene que $(a, c); (b, d) \in \Theta$ y por lo tanto $(a \to b, c \to d) \in \Theta$. Por otro lado, observemos $f^{-1}((U \to W) \cap Y) = f^{-1}((\sigma(a) \to \sigma(b)) \cap Y) = f^{-1}(\sigma(a \to b)) \cap X(A/\Theta) = f^{-1}(\sigma(a \to b))$. Análogamente, se tiene $f^{-1}((V \to Z) \cap Y) = f^{-1}(\sigma(c \to d))$. Además, vale $f^{-1}(\sigma(a \to b)) = f^{-1}(\sigma(c \to d))$. En efecto, $P \in f^{-1}(\sigma(a \to b)) \Leftrightarrow f(P) \in \sigma(a \to b) \Leftrightarrow a \to b \in h^{-1}(P) \Leftrightarrow h(a \to b) =$

$|a \to b|_\Theta \in P \Leftrightarrow |a \to b|_\Theta = |c \to d|_\Theta \in P \Leftrightarrow P \in f^{-1}(\sigma(c \to d))$. Luego, tenemos que $f^{-1}((U \to W) \cap Y) = f^{-1}((V \to Z) \cap Y)$, de lo que resulta, por la biyectividad de f, que $(U \to W) \cap Y = (V \to Z) \cap Y$. Por lo tanto, Y es implicativo. $\square$

En lo que sigue consideraremos ciertos subconjuntos que nos serán de utilidad para determinar las congruencias de las MMV-álgebras.

Definición 6.32. *Sea X una mmv-espacio y sea $Y \subseteq X$. Diremos que Y es $\forall$-saturado, si para todo $x \in Y$ se tiene que $min\, R(x) \subseteq Y$.*

Observemos que a si X es un espacio de Priestley y S un subconjunto cerrado de X, se tiene que para cada $x \in S$ existe $z \leq x$ tal que $z \in min\, S$. En particular, $minS \neq \emptyset$ si $S \neq \emptyset$ (ver [63]).

El siguiente lema será de utilidad en lo que sigue y el mismo es la versión análoga al probado en [74].

Lema 6.33. *Sea (X, R) un mmv-espacio y sean $S, T \in X(A)$ tales que $S \cap \forall A \subseteq T$, entonces existe $Q \in X(A)$ que verifica $S \subseteq Q$ y $Q \cap \forall A = T \cap \forall A$.*

Teorema 6.34. *Sea $(A, \forall)$ una MMV-álgebra, $X(A)$ un mmv-espacio. La correspondencia $Y \to \Theta(Y)$ establece un anti-isomorfismo entre las familias de los conjuntos cerrados, involutivos, implicativos y $\forall$-saturados de $X(A)$ y el retículo de las mmv-congruencias de A.*

Dem. Sea Y un cerrado $\forall$-saturados y consideremos la MV-congruencia $\Theta(Y)$ de A. Además, sean $a, b \in A$ tales que $(a, b) \in \Theta$, luego $\sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y$. Supongamos que $\sigma_A(\forall a) \cap Y \neq \sigma_A(\forall b) \cap Y$. Es claro que existe $Q \in \sigma_A(\forall a) \cap Y$ y $Q \notin \sigma_A(\forall b) \cap Y$. Pero como $Q \in Y$, tenemos que $\forall b \notin Q$. Por el Teorema 6.47, existe $P \in X(A)$, tal que $b \notin P$ y $(Q, P) \in R_\forall$. Como $R_\forall(Q)$ es cerrado, sabemos que existe $P_1 \in minR_\forall(Q)$, tal que $P_1 \subseteq P$. Como Y es $\forall$-saturado se tiene que $P_1 \in Y$ y por lo tanto $b \notin P_1$, de lo que resulta $P_1 \notin \sigma_A(b) \cap Y$. Por otro lado, como $\forall a \in Q$ tenemos que $\forall a \in Q \cap \forall A$, de lo que resulta que $a \in P_1$. Luego, tenemos que $P_1 \in \sigma_A(a) \cap Y$, lo que resulta ser una contradicción.

Recíprocamente, dada una congruencia Θ de $(A, \forall)$, por el teorema 6.31, solo debemos ver que $Y = \{h^{-1}(P) : P \in X(L/\Theta)\}$ es $\forall$-saturado. Es decir que, para todo $Q \in Y$ se tiene que $min\, R_\forall(Q) \subseteq Y$. Supongamos $T \in min\, R_\forall(Q)$ (1) y $T \notin Y$; luego tenemos que $T \in X(L) \setminus Y$ (abierto), y por lo tanto, existen $a, b \in A$ tales que $T \in \sigma(a) \setminus \sigma(b) \subseteq X(L) \setminus Y$. Por otro lado, sabemos que (2) $(b, a \vee b) \in \Theta(Y)$ y que $b \notin T$, de donde resulta que $\forall b \notin T \cap \forall A$. Por (1), tenemos que $T \cap \forall A = Q \cap \forall A$, por lo tanto $\forall b \notin Q$, de donde se tiene que $\forall(b \vee a) \notin Q$. En efecto, por (2) tenemos que $(\forall b, \forall(a \vee b)) \in \Theta(Y)$, y por definición de esta congruencia, vale $\sigma(\forall b) \cap Y = \sigma(\forall(a \vee b)) \cap Y$. Como $Q \notin \sigma(\forall b)$ resulta que $Q \notin \sigma(\forall(a \vee b))$.

Consideremos ahora el filtro $\forall^{-1}Q$ de A y consideremos el ideal generado por $((A \setminus T) \cup \{a\}]$. Veamos que $\forall^{-1}Q \cap ((A \setminus T) \cup \{a\}] \neq \emptyset$. En efecto, supongamos que $\forall^{-1}Q \cap ((A \setminus T) \cup \{a\}] = \emptyset$, por el Teorema de Birkhoff-Stone, existe $S \in X(A)$ tal que (3) $\forall^{-1}Q \subseteq S$ y $S \cap ((A \setminus T) \cup \{a\}] = \emptyset$. Luego, $S \cap ((A \setminus T) \cup \{a\}) \neq \emptyset$. Entonces, $S \subseteq A \setminus ((A \setminus T) \cup \{a\}) = T \cap (A \setminus \{a\}) \subset T$ (4). Por otro lado, tenemos $S \in R_\forall(Q)$ (5). En efecto, de $S \subset T$ se tiene $S \cap \forall A \subseteq T \cap \forall A \subseteq T$; por el lema anterior, existe $R \in X(A)$ tal que $S \subseteq R$ y $R \cap \forall A = T \cap \forall A$. Luego, tenemos que $S \cap \forall A \subseteq R \cap \forall A = T \cap \forall A = Q \cap \forall A$ y por (3) resulta que $S \cap \forall A = Q \cap \forall A$. De (3) y (4) se tiene un contradicción y por lo tanto probamos que $\forall^{-1}Q \cap ((A \setminus T) \cup \{a\}] \neq \emptyset$.

Luego, existe $q \in A \setminus T$ tal que $\forall(q \vee a) \in Q$ y $\forall(q \vee a \vee b) \in Q$. Como $(q \vee b, q \vee a \vee b) \in \Theta(Y)$ tenemos que $(\forall(q \vee b), \forall(q \vee a \vee b)) \in \Theta(Y)$; y por lo tanto para todo $Q \in \sigma(\forall(q \vee a \vee b)) \cap Y$ resulta que $Q \in \sigma(\forall(q \vee b)) \cap Y$. De donde se tiene que $q \vee b \in \forall^{-1}Q$ y como consecuencia $q \vee b \in T$. Pero, como T es primo, se tiene que $q \in$T ó $b \in T$ y ambos casos conducen a una contradicción. $\square$

6.8 Dualidad de Halmos-Priestley para BMV-álgebras

A continuacion extenderemos la dualidad para las MMV-álgebras a las BMV-álgebras.

Definición 6.35. *Un bmv-espacio es una terna* (X, R_1, R_2) *donde* (X, R_i) *es un mmv-*

espacio para $i = 1, 2$ y se verifica la siguiente propiedad:

(BMV) $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Además, dados (X, R_1, R_2) y (X', R'_1, R'_2) mmv-espacios, diremos que $f : X \to X'$ es una bmv-función si $f : (X, R_i) \to (X', R'_i)$ es una mmv-función para $i = 1, 2$.

Notaremos con **BMV** a la categoría de los *bmv*-espacios y las *bmv*-funciones.

Proposición 6.36. *Si (X, R_1, R_2) es un bmv-espacio, entonces $(D(X), \forall_{R_1}, \forall_{R_2})$ es una BMV-álgebra.*

Dem. Probar que los cuantificadores universasles $\forall_1$ y $\forall_2$ conmutan es equivalente a probar que los cuantificadores existenciales asociados $\exists_1$ y $\exists_2$ conmutan, puesto que $\forall_i x = \sim \exists_i \sim x$ para $i = 1, 2$. Por otro lado, sea (X, R_1, R_2) es un *bmv*-espacio. Los cuantificadores existenciales asociados a las R_i equivalencias tiene la siguiente expresión $\exists_{R_i}(U) = \bigcup_{p \in U} R_i(p)$, para todo $U \in D(X)$. Veamos que $\exists_{R_1}\exists_{R_2}(U) = \exists_{R_2}\exists_{R_1}(U)$. En efecto, sea $x \in \exists_{R_1}\exists_{R_2}(U)$, entonces existe $t \in R_2(U)$ tal que $x \in R_1(t)$. Luego, $(x, t) \in R_1$ y $(t, u) \in R_2$ para algún $u \in U$. Por lo tanto, $(x, u) \in R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$. De lo que resulta, que existe $m \in X$ tal que $(x, m) \in R_2$ y $(m, u) \in R_1$ de donde $(m, x) \in R_2$ y $m \in \exists_{R_1}(U)$. Es decir que $x \in R_2(m)$ con $m \in \exists_{R_1}(U)$ y por lo tanto tenemos que $x \in \exists_{R_2}\exists_{R_1}(U)$. La inclusión restante es análoga. □

Proposición 6.37. *Si $(A, \forall_1, \forall_2)$ es un BMV-álgebra, entonces $(X(A), R_{\forall_1}, R_{\forall_2})$ es un bmv-espacio.*

Dem. Es consecuencia directa de la Definición 6.2 y el Teorema 6.27. □

De las proposiciones anteriores tenemos que:

Teorema 6.38. *Las categorías* **BMV** *y $\mathcal{BMV}$ son dualmente equivalentes.*

Por lo tanto, tenemos probado que si $(A, \forall_1, \forall_2)$ es una BMV-álgebra y $(X(A), R_1, R_2)$ un *bmv*-espacio asociado, existe una correspondencia anti-isomorfica entre las familia de los conjuntos cerrados, involutivos, implicativos y $(R_1 \circ R_2)$-saturados de $X(A)$ y el retículo de las BMV-congruencias de A.

6.9 La variedad generada por MV-cadenas finitas

En esta sección investigaremos algunas subvariedades de la variedad de las BMV-álgebras. En particular, trataremos la variedad generada por una MV-cadena de longitud $n+1$ $(n < \omega)$. Notaremos con MV_{n+1}-álgebra a la MV-álgebra $(n+1)$-valente.

Definición 6.39. *Diremos que un álgebra $(A, \forall_1, \forall_2)$ es una BMV-álgebras $(n+1)$-valente (o BMV_{n+1}-álgebra) si el reducto $(A, \forall_1, \forall_2)$ es una BMV-álgebra y si se verifican las siguientes identidades:*

(w5) $x^n = x^{n+1}$,

(w6) $n(x^j \oplus (\sim x \odot \sim x^{j-1})) = 1$ *para* $1 < j < n$ *y* j *no divide* n.

Es bien sabido que si $(A, \rightarrow, \sim, 1)$ es una MV_{n+1}-álgebra entonces $(A, \wedge, \vee, \sim, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, 0, 1)$ es un álgebra de Lukasiewicz-Moisil $(n+1)$-valuada (ver [33]), donde los operadores σ_i, para $1 \leq i \leq n$, son definidos en términos de la operaciones de una MV-álgebra. También, es bien sabido que todo filtro implicativo es un filtro de Stone, de lo que resulta que todo filtro biádico coincide con el filtro de Stone generado por sus elementos booleanos, es decir, si $D \in \mathcal{F}_b(A)$, entonces $D = F(D \cap B(A)) = \{x \in A : \text{ exsite}\, a \in D \cap B(A) \,\text{talque}\, a \leq x\}$.

Por otra parte, notaremos con C_{n+1} a la MV_{n+1}-álgebra cuyo universo es $\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, en donde las operaciones se definen como sigue: $x \rightarrow y := min\{1, 1-x+y\}$, $\sim x := 1-x$. Además, C_{t+1} es una MV_{n+1}-subálgebra de C_{n+1} si, y solo si, t divide n. Luego, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 6.40. *Sea A un BMV_{n+1}-álgebra, entonces los conjuntos ordenados por la inclusión $\mathcal{F}_b(A)$, $\mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A)$, $\mathcal{F}_b(B(A))$ y $\mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A \cap B(A))$ son isomorfos. Los isomorfismos están dados por*

$\varphi_1 : \mathcal{F}_b(A) \to \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A)$, $\varphi_1(F) = F \cap \forall_1\forall_2 A$,

$\varphi_2 : \mathcal{F}_b(A) \to \mathcal{F}_b(B(A))$, $\varphi_2(F) = F \cap B(A)$,

$\varphi_3 : \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A) \to \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A \cap B(A))$, $\varphi_3(F) = F \cap \forall_1\forall_2 A \cap B(A)$,

$\varphi_4 : \mathcal{F}_b(B(A)) \to \mathcal{F}(\forall_1\forall_2 A \cap B(A))$, $\varphi_4(F) = F \cap \forall_1\forall_2 A \cap B(A)$,

Además, se verifica que $\varphi_3 \circ \varphi_1 = \varphi_4 \circ \varphi_2$.

Dem. Resulta del Corolario 6.11, el Teorema 6.12 y las observaciones precedentes. □

Luego, podemos afirmar que, como consecuencia de lo ya probado, las nociones de sistema deductivo biádico irreducible, maximal y completamente irreducible, son equivalentes. Además, también se tiene probado que todo filtro biádico propio es intersección de f.b. maximales, y que vale $\bigcap\limits_{D \in \mathcal{E}(A)} D = \{1\}$, donde $\mathcal{E}(A)$ es el conjunto de f.b. maximales de A. Lo que nos permite enunciar el siguiente Teorema.

Teorema 6.41. *La variedad de las BMV_{n+1}-álgebra algebras es semisimple.*

Dem. Es inmediato del Teorema 6.40 y de resultados bien conocidos del álgebra universal (ver [8, 35]). □

El siguiente teorema es consecuencia del Teorema 6.40 y será de fundamental importancia para la determinación de las álgebras simple.

Teorema 6.42. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV_{n+1}-álgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \forall_1, \forall_2)$ *es una BMV-álgebra simple,*

(ii) $\forall_1\forall_2 A$ *es una MV-álgebra simple,*

(iii) $\forall_1\forall_2 A \cap B(A)$ *es una álgebra de Boole simple, donde $B(A)$ es el conjunto de los elementos booleanos de A.*

Dem. Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV_{n+1}-álgebra no trivial, las siguiente condiciones son equivalentes: A es una BMV-álgebra simple $\Longleftrightarrow$ $\{1\}$ es el único f.b. de A $\Longleftrightarrow$ $\{1\}$ es el único f.i. de la MV_{n+1}-álgebra $\forall_1\forall_2 A$ $\Longleftrightarrow$ $\forall_1\forall_2 A$ es una MV_{n+1}-álgebra simple $\Longleftrightarrow$ $\{1\}$ es el único f.i. de $B(A) \cap \forall_1\forall_2 A$ $\Longleftrightarrow$ $B(A) \cap \forall_1\forall_2 A$ es un álgebra de Boole simple. $\square$

Luego, a partir de resultados conocidos de álgebras de Boole y de MV_{n+1}-álgebras (ver [11]) se tiene probado el siguiente corolario que caracteriza a las objetos simples.

Corolario 6.43. *Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV_{n+1}-álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \forall_1, \forall_2)$ *es una BMV-álgebra simple,*

(ii) $\forall_1\forall_2 A \simeq C_{r+1}$*, donde r es divisor de n,*

(iii) $\forall_1\forall_2 A \cap B(A) \simeq \mathbf{2}$*, donde $\mathbf{2}$ es el álgebra de Boole con dos elementos.*

Dem. Este resultado es inmediato del Teorema 6.42 y del hecho que las subálgebras de C_{n+1} son las cadenas de longitud $(r+1)$ con r es divisor de n. $\square$

6.10 Algebras funcionales biádicas y álgebras simples

A continuación definiremos la noción de BMV_{n+1}-álgebra funcional como una extensión de las MMV_{n+1}-álgebras funcionales monádicas ([44]). Para ello, consideraremos los conjuntos I, J no vacíos y el conjunto de todas las funciones sobre $I \times J$ que toman valores en C_{n+1}, al que notaremos con $C_{n+1}^{I\times J}$. Por otro lado, los cuantificadores serán definidos de la manera habitual, es decir, $\forall_x f$, $\forall_y f$, $\exists_x f$, $\exists_y f$ están dadas por las prescripciones:

$$(\exists_x f)(x,y) = \bigvee_{x\in I} f(x,y), \qquad (\forall_x f)(x,y) = \bigwedge_{x\in I} f(x,y),$$
$$(\exists_y f)(x,y) = \bigvee_{y\in J} f(x,y), \qquad (\forall_y f)(x,y) = \bigwedge_{y\in J} f(x,y).$$

para todo $f \in C_{n+1}^{I\times J}$.

Proposición 6.44. *Sean* $f, g \in C_{n+1}^{I\times J}$. *Entonces los operadores* $\forall_x$ *y* $\forall_y$ *verifican:*

(i) $\forall_x f \leq f$; $\forall_y f \leq f$,

(ii) $\forall_x(\forall_x f \to g) = \forall_x f \to \forall_x g$, $\forall_y(\forall_y f \to g) = \forall_y f \to \forall_y g$,

(iii) $\forall_x(f \oplus g) = \forall_x f \oplus \forall_x g$, $\forall_y(f \oplus g) = \forall_y f \oplus \forall_y g$.

(iv) $\forall_x \forall_y = \forall_y \forall_x$

Dem. Solo probaremos (m1) a (m3) para $\forall_x$: (i): $(\forall_x f)(x, y) = \bigwedge_{x\in I} f(x, y) \leq f(x, y)$,

(ii): $\forall_x(\forall_x f \to g)(x, y) = \bigwedge_{x\in I}(\forall_x f \to g)(x, y) = \bigwedge_{x\in I}(\forall_x f(x, y) \to g(x, y)) = \forall_x f(x, y) \to \bigwedge_{x\in I} g(x, y) = \bigwedge_{x\in I} f(x, y) \to \bigwedge_{x\in I} g(x, y) = \forall_x f \to \forall_x g$,

(iii): $\forall_x(f \oplus g)(x, y) = \bigwedge_{x\in I}(f \oplus g)(x, y) = \bigwedge_{x\in I}(f(x, y) \oplus g(x, y)) = \bigwedge_{x\in I} f(x, y) \oplus \bigwedge_{x\in I} g(x, y)) = \forall_x f \oplus \forall_x g$,

(iv): $(\forall_x \forall_y f)(x, y) = \forall_x \bigwedge_{y\in J} f(x, y) = \bigwedge_{x\in I} \bigwedge_{y\in J} f(x, y) = (\forall_y \forall_x) f(x, y)$ □

Luego, es claro que $(C_{n+1}^{I\times J}, \forall_x, \forall_y)$ es una BMV-álgebra y, en particular, es un álgebra simple como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 6.45. *Las álgebras funcionales biádicas* $(C_{n+1}^{I\times J}, \forall_x, \forall_y)$ *son simples*

Dem. Veamos que se verifica $\forall_x \forall_y (C_{n+1}^{I\times I}) \simeq C_{r+1}$, con r/n. Sea $p_{i,j} : C_{n+1}^{I\times J} \to A_{i,j}$ la i, j-ésima proyección, entonces $p_{i,j}(\forall_x \forall_y (C_{n+1}^{I\times J})) \subseteq \forall_x \forall_y A_{i,j} \simeq C_{r+1}$. Luego, tenemos que $p_{i,j} : \forall_x \forall_y (C_{n+1}^{I\times J}) \to C_{r+1}$ es un MV-isomorfismo. En efecto, sean $f, g \in \forall_x \forall_y (C_{n+1}^{I\times J})$ y supongamos que $p_{i,j}(f) = p_{i,j}(g)$. Luego, $f(i, j) = g(i, j)$. Por abuso de notación podemos escribir que $f(i, j), g(i, j) \in C_{r+1}$, de lo que se tiene $f = g$. Por lo tanto, $p_{i,j}$ en inyectiva. Sea ahora $a \in C_{r+1}$ y sea $f \in C_{n+1}^{I\times J}$ tal que $f(i, j) = a$ para todo $i, j \in I \times I$. Es claro que las funciones constantes verifican $\forall_x \forall_y f = f$. Luego, se tiene que $f \in \forall_x \forall_y (C_{n+1}^{I\times J})$, de donde resulta que $p_{i,j}(f) = f(i, j) = a$, y por lo tanto la i, j-ésima proyección es un isomorfismo. □

Veremos a continuación que, a menos de isomorfismos, las álgebras simples finitas son todas las subálgebras de $(C_{n+1}^{I\times J}, \forall_x, \forall_y)$ para I, J finitos.

Lema 6.46. *Sean $(A, \forall)$ y $(C, \forall')$ MMV_{n+1}-álgebras simples. Si $h : A \to C$ es un MV-homomorfismo inyectivo, entonces para todo $x \in A$ se verifica $h(\forall x) = \forall h(x)$.*

Dem. Consederemos las álgebras de Łukasiewicz de orden $n+1$ asociadas a A y C, a las que notaremos con $Ł_{n+1}(A)$ y $Ł_{n+1}(C)$, respectivamente. Entonces se verifica $\sigma_i h(\forall x) = \sigma_i' \forall h(x)$ para todo $x \in Ł_{n+1}(A)$. En efecto, es claro que $\forall \sigma_i x = \sigma_i \forall x \in B(A) \cap \forall A$. Como A es un álgebra simple, se tiene por [44] que $\forall \sigma_i x \in \{0,1\}$. Por otra parte, $h(\forall \sigma_i x) = \sigma_i h(\forall x) \in B(A) \cap \forall C$ y como C es simple entonces $\sigma_i h(\forall x) \in \{0,1\}$. Por lo tanto, es suficiente con probar que (1) $\sigma_i \forall' h(x) = 1$ si, y solo si, $\sigma_i h(\forall x) = 1$. Supongamos que $\sigma_i \forall_1' h(x) = 1$. Como $\forall h(x) \leq h(x)$ entonces $\sigma_i h(x) = h(\sigma_i x) = 1$; por ser h inyectiva $\sigma_i x = 1$, de donde resulta que $h(\forall \sigma_i x) = h(\sigma_i \forall x) = \sigma_i h(\forall x) = 1$. Recíprocamente, si $\sigma_i h(\forall x) = 1$ entonces $h(\sigma_i \forall x) = 1$. Como h es inyectiva tenemos que $\sigma_i \forall x = \forall \sigma_i x = 1$ y por lo tanto $\sigma_i x = 1$. Luego, es claro que $\sigma_i h(\forall x) = 1$.

De (1) y el Principio de determinación de Moisil, tenemos que $h(\forall x) = \forall' h(x)$, para todo $x \in Ł_{n+1}(A)$. □

Lema 6.47. *Sean A y C BMV_{n+1}-álgebras finitas. Si $h : A \to C$ es un MV-homomorfismo inyectivo, entonces para todo $x \in A$ se verifica $h(\forall_i x) = \forall_i h(x)$ para $i = 1, 2$.*

Dem. Sean $(A, \forall_1, \forall_2)$ y $(C, \forall_1', \forall_2')$ las álgebras de la hipótesis. Es claro que el reducto $(A, \forall_1)$ es isomorfo al prodructo directo de álgebras simples finitas, es decir, $(A, \forall_1) \simeq \prod_{i=1}^{n} (A_i, \forall_{1,i})$ donde $(A_i, \forall_{1,i})$ es una MMV_{n+1}-álgebra simple. Análogamente, tenemos que $(C, \forall_1') \simeq \prod_{j=1}^{m} (C_j, \forall_{1,j}')$ con $j < \omega$. Luego, es claro que podemos tener una familia de MV-morfismos inyectivos $h_i : A_i \to C_j$ a partir de h. Por lo tanto, por el Lema 6.46 y de que A_i, C_j son MMV_{n+1}-álgebras simples tenemos que $h_i(\forall_{1,i} x) = \forall_{1,j}' h(x)$ para todo $x \in A$. De lo que resulta que $h(\forall_1 x) = \forall_1' h(x)$. El resto de la demostración es análoga. □

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema central.

Teorema 6.48. *Si la BMV-álgebra A es simple finita, entonces es isomorfa a una subálgebra de $(C_{n+1}^{I\times J}, \forall_x, \forall_y)$ para I, J no vacíos y finitos.*

Dem. Sea $(A, \forall_1, \forall_2)$ una BMV_{n+1}-álgebra simple. Luego se tiene que A es una MV_{n+1}-álgebra y, por resultados establecidos en [68], tenemos que el conjunto de los filtros implicativos maximales $\mathcal{M}(A)$ es no vacío. Por lo tanto, existe un MV-morfismo inyectivo $\alpha : A \to C_{n+1}^{\mathcal{M}(A)}$. Por otra parte, consideremos el MV-edomorfismo canónico $\gamma : C_{n+1}^{\mathcal{M}(A)} \to C_{n+1}^{\mathcal{M}(A)\times\mathcal{M}(A)}$. Entonces, resulta que $\gamma \circ \alpha$ es un MV-homomorfismo inyectivo, y por el Lema 6.47 se tiene que $\gamma \circ \alpha$ es un BMV_{n+1}-morfismo inyectivo, donde $I = J = \mathcal{M}(A)$. □

Ahora, nos abocaremos al estudio de las álgebras simples finitas. Para ello vamos a suponer que $|I| = m$,$|J| = k$ y escribiremos $C_{n+1}^{m\times k}$ en lugar de $C_{n+1}^{I\times J}$. Por otra parte, sea B una subálgebra booleana de $B(C_{n+1}^{m\times k})$. Es bien sabido que $B(C_{n+1}^{m\times k}) \simeq \mathbf{2}^{m\times k}$, donde $\mathbf{2}$ es un álgebra de Boole con dos elementos. Por lo tanto, $B(C_{n+1}^{m\times k})$ es un álgebra de Boole con $m \times k$ atómos. Luego, existe una correspondencia biyectiva entre las subálgebras de $B(C_{n+1}^{m\times k})$ y la partición del conjunto de sus átomos. Por lo que toda partición del conjunto de los átomos tiene una corresponbdencia natural con las particiones del conjunto $m \times k$. Notaremos con $\Pi(B) = \{\pi_1, \cdots, \pi_{k_B}\}$ a la partición del conjunto $m \times k$ asociada a subálgebra B.

Para cada r divisor de n y cada subálgebra B de $B(C_{n+1}^{m\times k})$, consideraremos el álgebra

$$C_{r,\Pi(B)} = \{f \in C_{n+1}^{m\times m} : f(i,j) \in C_r, f(i,j) = f(s,t), \text{tal que } (i,j),(s,t) \in \pi_l\}.$$

Veamos que vale el siguiente lema.

Lema 6.49. *Sea B subálgebra de $B(C_{n+1}^{m\times k})$ y r un divisor de n. Entonces, $C_{r,\Pi(B)}$ es una BMV_{n+1}-subálgebra $C_{n+1}^{m\times k}$.*

Dem. Es claro que $\mathbf{0} \in C_{r,\Pi(B)}$, donde $\mathbf{0}(i,j) = 0$. Sea $f, g \in C_{r,\Pi(B)}$. Sea π_l una particion $\Pi(B)$ tal que $(i,j),(s,t) \in \pi_l$ y $f, g \in C_{r,\Pi(B)}$. Entonces, $(f \to g)(i,j) =$

$f(i,j) \to g(i,j) = f(s,t) \to g(s,t) = (f \to g)(s,t)$, de lo que resulta $f \to g \in C_{r,\Pi(B)}$. Veamos ahora que es cerrado para los operadores. Sea $f \in C_{r,\Pi(B)}$ e $(i,j),(s,t) \in \pi_l$, entonces es claro que $(\forall_x^r f)(i,j) = \bigwedge\limits_{i \in I_m} f(i,j) = \bigwedge\limits_{s \in I_m} f(s,t) = (\forall_x^r f)(s,t)$. La prueba para $\forall_y^r$, donde $\forall_x^r = \forall_x \cap C_{r+1}$, es análoga. $\square$

Sea S una subálgebra de $C_{n+1}^{m\times k}$ y consideremos $p_{i,j}$ la i,j-ésima proyección. Entonces, $p_{ij}(S)$ es una MV-subálgebra de C_{n+1} que contiene una copia de $\forall_1 S$ y de $\forall_2 S$. Luego, $p_{ij}(S) \simeq C_{\alpha+1}$ con α divisor de n. En Particular, $S \lhd_{MV} \prod\limits_{(i,j)\in I^2} p_{ij}(S) \lhd_{MV} C_{n+1}^{m\times m}$.

Sea B_S el álgebra booleana de $B(C_{n+1}^{m\times k})$ determinada por S, es decir, $B_S = S \cap B(C_{n+1}^{m\times k})$ y sea $\Pi(B_S) = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{k_{B_S}}\}$ la partición del conjunto $m \times k$ determinada por B_S.

Lema 6.50. *Sea S una subálgebra de $C_{n+1}^{m\times k}$, entonces se tiene que:*

(i) $p_{ij}(S) = p_{ij}(S \cap \forall_1\forall_2 C_{n+1}^{m\times k})$,

(ii) $S/[a,1]_S \simeq p_{ij}(S)$, *donde a es una átomo de $B(S)$ y $[a,1]_S = [a,1] \cap S$,*

(iii) $p_{ij}(S) \simeq p_{st}(S)$, *para todo $(i,j),(s,t) \in m \times k$.*

Dem.

(i): Veamos que $p_{ij}(S) \subseteq p_{ij}(S \cap \forall_1\forall_2 C_{n+1}^{m\times k})$; la otra inclusión es inmediata. En efecto, como $p_{ij}(S) \simeq C_{r+1}$ para algún r divisor de n, podemos considerar, por abuso de notación, un elemento $\frac{k}{r} \in p_{ij}(S)$. Entonces, es claro que existe $f \in S$ tal que $P_{ij}(f) = f(i,j) = \frac{k}{r}$. Sabemos por [33] que la MV-álgebra C_{r+1} admite una estuctura de algebra de Łukasiewicz-Moisil $(C_{r+1}, \{\sigma_l\}_{1\leq l \leq r})$, donde $\sigma_{r-j}(\frac{k}{r}) = 0$ si $k \leq j$ y a $\sigma_{r-j}(\frac{k}{r}) = 1$ en otro caso, con $j = 0, \cdots, r-1$. Sea $g = \sim \forall_1\forall_2(\sim f \vee \sigma_{r-j} f)$. Es claro que $g \in S \cap \forall_1\forall_2 C_{n+1}^{m\times k}$ y que además $P_{ij}(g) = g(i,j) = \sim \forall_1\forall_2(\sim f(i,j) \vee \sigma_{r-j} f(i,j)) = \sim \bigwedge\limits_{i\in m}\bigwedge\limits_{j \in k}(\sim (f(i,j) \vee \sigma_{r-j} f(i,j)) = \frac{k}{r}$.

(ii): Para cada $(i,j) \in \pi_l$, sea $h_{ij} : S/[a,1]_S \to p_{ij}(S)$ tal que si $x \in S$, $h_{ij}(|x|) = p_{ij}(x)$. Entonces, h_{ij} está bien definida. En efecto, sea $y \in |x|$, entonces existe $b \in [a,1] \cap S$ tal que $x \wedge b = y \wedge b$. Como a es un átomo, entonces $a(i,j)$ es 1 si $(i,j) \in \pi_l$ y 0 caso contrario. Luego, $b(i,j) = 1$, por lo que $x(i,j) = (x \wedge b)(i,j) = (y \wedge b)(i,j) = y(i,j)$. Es claro que h_{ij} es un MV-morfismo sobre, además $Ker(h_{ij}) = \{c \in S/[a,1] : h_{i,j}(c) = 1\}$ es un filtro implicativo de $S/[a,1]_S$ y como $[a,1]_S$ es un f.i. maximal, se tiene que $S/[a,1]_S$ es simple y propia, puesto que $0 \notin Ker(h_{ij})$. Luego, $Ker(h_{ij}) = \{|1|\}$, por lo que h_{ij} es inyectiva.

(iii): Sea $f \in \forall_x \forall_y C_{n+1}^{m \times k}$. Es claro que $f(i,j) = f(s,t)$ para todo $(i,j),(s,t) \in m \times k$. Luego, $p_{ij}(f) = p_{st}(f)$ y por lo tanto $p_{ij}(S \cap \forall_x \forall_y C_{n+1}^{m \times k}) = p_{st}(S \cap \forall_x \forall_y C_{n+1}^{m \times k})$ de lo que resulta, teniendo encuenta (i), la validez de (iii). $\square$

Ahora estamos en condiciones de determinar todas las algebras simples finitas, estas no son otras que las subálgebras de $(C_{n+1}^{m \times k}, \forall_1, \forall_2)$. Más precisamente:

Teorema 6.51. *Sea S una subálgebra de $C_{n+1}^{m \times k}$, entonces existe una MV_{n+1}-subálgebra C_{r+1} de C_{n+1} con r/n y B_S el álgebra boolena determinada por S tal que se verifica $S = C_{r,\Pi(B_S)}$.*

Dem. Como por lema 6.50 tenemos que $p_{ij}(S) \simeq p_{st}(S)$, para todo $(i,j),(s,t) \in m \times k$, podemos considerar $A = P_{11}(S) \simeq C_{r+1}$ con r/n . Por otra parte, consideremos el álgebra de Boole B_S y su partición asociada $\Pi(B_S)$ con l elementos. Probaremos que $S = C_{r,\Pi(B_S)}$. En efecto, sea $f \in S$. Entonces, $f(i,j) \in P_{ij}(S) = P_{11}(S)$, de lo que resulta $f(i,j) = f(s,t)$ si $(i,j),(s,t) \in \pi_w$ con π_w uno de los elementos de las partición enunciada. Si no fuese así, es decir $f(i,j) \neq f(s,t)$, podemos suponer que $f(i,j) = \frac{t}{r} < \frac{k}{r} = f(s,t)$. Es claro (ver demstración Lema 6.50) que $\sigma_{r-k} f \in B_S$, luego $\sigma_{r-k} f(i,j) = \sigma_{r-k} f(s,t)$, lo cual es una contradicción. Recíprocamente, sea $f \in C_{r,\Pi(B_S)}$ y sean e_t los átomos de B_S, es decir $e_t(i,j) = 1$ si $(i,j) \in \pi_t$ y $e_t(i,j) = 0$ si $(i,j) \notin \pi_t$ con $1 \leq t \leq l$. Consideraremos una indexación de elementos $a_{ij_w} \in A$ donde $(i,j)_w \in \pi_w$ tal que $f(i,j) = a_{ij_w}$. Es claro que existe $\pi_{11}(g) = a_{ij_w}$. Luego, por el Lema 6.50 (i), existe $g_{ij_w} \in S \cap \forall_1 \forall_2 C_{n+1}^{m \times k}$ tal que $\pi_{11}(g_{ij_w}) = a_{ij_w}$. Por lo tanto, $g_{ij_w}(s,t) = a_{ij_w}$ para todo $(s,t) \in m \times k$. Es fácil ver que $\pi_{s,t}(g_{st_w}) = f(s,t)$ y es claro que $f = \bigwedge_{(i,j)_s \in \pi_s, 1 \leq s \leq r} g_{ij_s} \wedge e_s$, con lo que se verifica el teorema. $\square$

6.11 Conclusiones finales

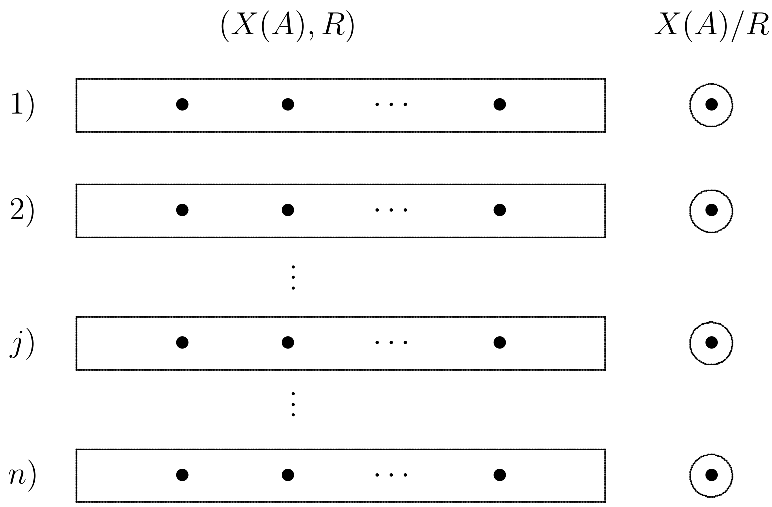
En el capítulo V se presentan nuevas técnicas para estudiar la teoría de la cuantificación en algunas álgebras de la lógica, que permitan dualidades tipo Priestley por medio del espacio cociente. Planeamos en en el futuro estudiar las BMV_{n+1}-álgebras via estas técnicas, este fue uno de los objetivos iniciales de esta esta tesis. Una vez determinadas las congruencias via la representación topológica, lo esperable era caracterizar las álgebras simples de la variedad, dado que se trata de una variedad semisimple. Como esto no fue posible, realizamos un trabajo meramente algebraico.

Esto nos condujo a estudiar otras estructuras que permitan un estudio topológico profundo, lo que nos acerco a las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales, emparentadas con las BMV-álgebras por medio de la estructura ordenada subyacente de álgebra de De Morgan. Es claro que el trabajo detallado llevado a cabo en el Capítulo V para las $\mathcal{M}$-álgebras, no hubiera sido nada sencillo en el caso de las álgebras de De Morgan monádicas, puesto que, como vimos al final de dicho capítulo, es una estructura mucho más compleja y desconocida que los Q-retículos de Cignoli. Si bien Petrovich en su tesis doctoral presenta una carecterización muy buena de las álgebras subrirectamente irreducibles y álgebras simples, según nuestra opinión, no se visualizaba que pudiera tener álgebras simples tan diversas.

Vamos a esbozar en lo que sigue, sin dar demasiados detalles, a modo de conjeturas, lo que se requiere para el trabajo topológico en las BMV_{n+1}-álgebras. Primero observemos el caso de las MV_{n+1}-álgebras monádicas.

6.11.1 MV_{n+1}-álgebras monádicas simples

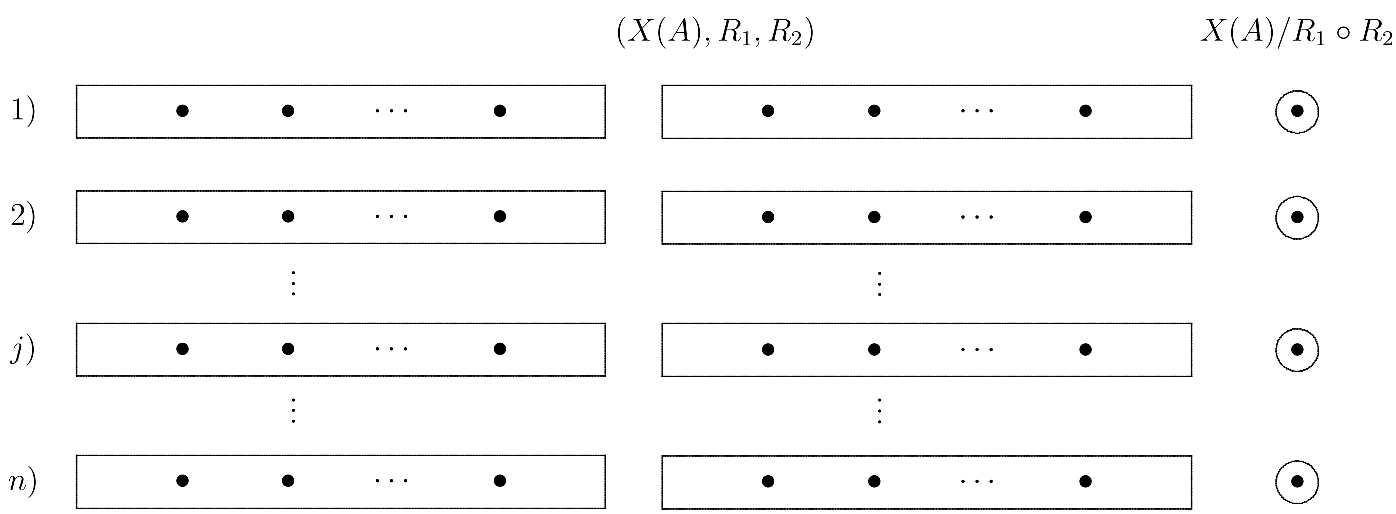
Consideremos un mmv-spacio (X, R) tal que $(D(X), \forall_R)$ sea una MV_{n+1}-álgebra monádica, es claro que por los resultados de Lattanzi en [44], y por lo desarrollado en esta tesis, se tiene que X es suma cardinal de cadenas con a lo sumo n elementos. Por los estudios del Capítulo V, se deberá verificar que solo estén en relación todos los primo del nivel j, para $1 \leq j \leq n$. Como se oberva en el gráfico a continuación. Esto produciría que el espacio cociente X/R sea una cadena de la misma longitud que las del espacio X.



Por lo tanto, $\forall_R D(X) \simeq C_{n+1}$, donde C_{n+1} es MV-cadena de longitud $n+1$. Luego, por lo probado por Lattanzi en [44] tenemos que $(D(X), \forall_R)$ es una MV_{n+1}-álgebra monádica simple.

6.11.2 MV_{n+1}-álgebras biádicas simples

Por los resultados probados en el Capítulo VI, para el caso de las MV_{n+1}-algebras biádicas, los bmv-espacios (X, R_1, R_2) deberán tener la siguiente forma:



Es claro que $R_1 \circ R_2(D(X)) \simeq C_n$, luego $(D(X), \forall_{R_1}, \forall_{R_2})$ es una BMV_n-álgebra simple.

References

[1] M. Abad, *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Łukasiewicz n–valente*, Notas de Lógica Matemática 36, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1988. (Tesis de Doctorado)

[2] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive lattices*, University of Missouri Press, Columbia, (1974).

[3] L. P. Belluce, R. Grigolia and A. Lettieri, *Representations of monadic MV-algebras*, Studia Logica 81, 1 (2005), 123–144.

[4] N. Bezhanishvili. *Varieties of two-dimensional cylindric algebras. Part I: Diagonal-free case*, Algebra Universalis, 48, 1 (2002), 11–42.

[5] A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa, *On the representation of Quasi–Boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronim. Phys. 5 (1957), 259–261.

[6] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 3rd. edition. Am. Math. Soc. Colloq. Pub., vol. 25, Providence, (1973).

[7] V. Boisescu, A. Filipoiu, G. Georgescu, S. Rudeanu, *Lukasiewicz-Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, (1991).

[8] S. Burris and H. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 78, Springer-Verlag, Berlin, (1981).

[9] R. Cignoli, *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math. 96 (1991), 183–197.

[10] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Álgebras das lógicas de Łukasiewicz*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, UNICAMP, Coleção CLE, volumen 12, (1995).

[11] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*. Trends in LogicStudia Logica Library, 7, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000).

[12] R. Cignoli and M. S. de Gallego, *Dualities for some De Morgan álgebras with operators and Łukasiewicz algebras*, J. Austral Math. Soc (Series A), 34 (1983), 377-393.

[13] S. Celani, *Classical modal De Morgan algebras*, Studia Logica 98, 1,2 (2011), 251-266.

[14] H. Cendra, *Cyclic Boolean algebras and Galois fields* $F(2^k)$, Portugaliae Math., 39 (1-4) (1980), 435-440.

[15] C. C. Chang, *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 476–490.

[16] W. H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproduts of De Morgan Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., 16 (1977), 1–13.

[17] W. H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproduts of Kleene Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. Ser. A 27 (1979), 209–220.

[18] A. Di Nola and R. Grigolia, *On monadic MV-algebras*, Ann. Pure Appl. Logic 128, 1-3 (2004), 125–139.

[19] J. P. Díaz Varela, *Equivalence between varieties of square root rings and Boolean algebras with a distinguished automorphism*, J. Algebra, 299 (2006), no. 1, 190-197.

[20] A. Diego and R. Panzone, *On measurable subalgebras associated to commuting conditional expectation operators, II*, Rev. de la Unión Mat. Argentina 24 (1968), 1–35.

[21] J. Dugundji, **Topology**, Allyn and Bacon, Boston, (1970).

[22] A. V. Figallo, *Free monadic Tarski algebras*, Algebra Universalis, 35, 1(1996), 141 – 150.

[23] A. V. Figallo, *Algebras Implicativas de Lukasiewicz* $(n+1)$*-valuadas con diversas operaciones adicionales*, Tesis Doctoral, Univ. Nac. del Sur (1990).

[24] A. V. Figallo, *Notas de clases: Reticulados distributivos finitos*, Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes, Universidad Nacional de San Juan, (1990).

[25] A. V. Figallo, *On the congruence in four–valued modal algebras*, Portugaliae Math. 49 (1992), 249–261.

[26] A. V. Figallo, *Tópicos sobre álgebras modales* $4-$*valuadas*, Proceeding of the IX Simposio Latino–Americano de Lógica Matemática, (Bahía Blanca, Argentina, 1992). Notas de Lógica Matemática, 39, (1992), 145–157.

[27] A. Figallo and P. Landini, *Notes on* $4-$*valued modal algebras*, Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, Univ. Nac. de San Juan, Vol. 1, (1990), 28–37.

[28] A. V. Figallo and P. Landini, *On generalized* $I-$*algebras and modal* $4-$*valued algebras*, Rep. Math. Logic 29 (1995), 3–18.

[29] A. V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Monadic distributive lattices*, Log. J. IGPL 15, 5-6 (2007), 535-551.

[30] A. Figallo and A. Ziliani, *Symmetric tetra–valued modal algebras*, Notas Soc. Mat. Chile 10, 1 (1991), 133–141.

[31] M. Figallo, *Finite diagonal-free two-dimensional cylindric algebras*, Log. J. IGPL 12, 6 (2004), 509–523.

[32] J. Font and M. Rius, *An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics*, J. Symbolic Logic, 65 (2000), 481–518.

[33] J. Font, A. Rodriguez and A. Torrens, *Wajsberg algebras*, Stochastica 8, 1 (1984), 5–31.

[34] R. Goldblatt, *Topoi: The categorial analysis of logic*, Studies in Logic and Foundations on Mathematics, North–Holland, New York, 1983.

[35] G. Grätzer, *Universal algebra*, With appendices by Grätzer, Bjarni Jónsson, Walter Taylor, Robert W. Quackenbush, Günter H. Wenzel, and Grätzer and W. A. Lampe. Revised reprint of the 1979 second edition. Springer, New York, 2008.

[36] G. Grätzer and H. Lakser, *The structure of pseudocomplemented distributive lattices II. Congruence extension and amalgamation*, Trans. Amer. Math. Soc., 156 (1971), 343–358.

[37] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bull. Acad. des Sci. de Belgique, 15 (1929), 183–188.

[38] R. Grigolia, *Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski's n-valued logic systems*, in R. Wójciki, G. Malinowski (Eds.) Selected papers on Łukasiewicz sentencial calculi, Ossolineum, Wroclaw (1977), 81–92.

[39] P. Halmos, *Algebraic Logic*, Chelsea, New York, 1962.

[40] T. Hecht and T. Katriňák, *Principal congruences of $p-$algebras and double $p-$algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 58 (1976), 25–31.

[41] L. Henkin, D. Monk and A. Tarski, *Cylindric Algebras*. Parts I & II, North-Holland, 1971 & 1985.

[42] Y. Komori, *The separation theorems of the $\aleph_0$ – valued Łukasiewicz propositional logic*, Reports of the Faculty of Sciences, Shizouka University, 12 (1978), 1–5.

[43] M. Lattanzi, *(N+1)-bounded Wajsberg algebras with a U-operator*, Rep. Math. Logic, 39 (2005), 89–111.

[44] M. Lattanzi, *Wajsberg algebras with a U-operator*, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. 10, 4 (2004), 315–338.

[45] M. Lattanzi, *Algebras de Wajsberg $(n+1)$-acotadas con operadores adicionales*, Ph.D. Thesis, Universidad Nacional del Sur, 2000.

[46] M. Lattanzi and A. Petrovich, *A duality for monadic (n+1)-valued MV-algebras.* Proceedings of the 9th "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress (Spanish), 107–117.

[47] S. Lee and Y. Keren-Zvi, *A generalized Boolean algebra and its application to logic design*, Proceeding of the 1975 International Symposium on Multiple-Valued Logic, Indiana University, Bloomington.

[48] I. Loureiro, *Axiomatisation et propriétés des algèbres modales tétravalentes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 295 (1982), Série I, 555–557.

[49] I. Loureiro, *Algebras Modais Tetravalentes*, PhD Thesis, Faculdade de Ciências de Lisboa, Lisboa, Portugal, 1983.

[50] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, (1971).

[51] G. Martinez, *The Priestley duality for Wajsberg algebras*, Studia Logica 49, 1 (1990), 31–46.

[52] Gr. C. Moisil, *Recherches sur les logiques non–chrysippiennes*, Ann. Sci. Uni. Jassy, 26 (1940), 431–436.

[53] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, Éditions de L'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucarest, 1972.

[54] A. Monteiro, *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[55] A. Monteiro, *Algèbres de Boole Cycliques*, Revue Roumaine de Math. Pures et Ap- pliquéss 23, (1978), 71-76.

[56] A. Monterio, *Sur les algèbres de Heyting simetriques*, Portugaliae Math., 39, 1-4 (1980), 1–237.

[57] A. Monteiro, *Notas del curso: Algebras de Boole involutivas*, Universidad Nacional del Sur, Argentina. 1969. Reprinted as Algebras de Boole *Algebras de Boole Involutivas*, Informe Técnico Interno Nro. 78, Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2002.

[58] A. Monteiro and O. Varsavsky, *Algebras de Heyting monádicas*, Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca, (1957), 52–62. (A French translation is published as Notas de Lógica Matemática 1, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1974), 1–16.)

[59] L. Monterio, *Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas*, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional del Sur (Bahía Blanca), 1972. Reprinted as *Notas de Lógica Matemática, Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, 1974, vol.32.*

[60] D. Mundici, *Interpretation of AF C^*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus*, J. Funct. Anal. 65, 1 (1986), 15–63.

[61] N. Oliva, *Algebras de De Morgan pseudocomplementadas modales*, Tesis de Magister en Matemática, Universidad Nacional del Sur, 2014.

[62] A. Petrovich, *Retículos distributivos con un operador y álgebras de De Morgan monádicas* , Ph. D. Thesis, Universidad Nacional de Buenos Aires, 1996.

[63] H. Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone space*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 186–190.

[64] H. Priestley, *Ordered topological space and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc. 4 (3)(1972), 507–530.

[65] H. Priestley, *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Ann. Discrete Math., 23 (1984), 39–60.

[66] H. Rasiowa, *N–lattices and constructive logic with strong negation*, Fund. Math. 46 (1958), 61–80.

[67] P. Ribenboim, *Characterization of the sup-complement in a distributive lattice with last element*, Summa Brasil. Math. 2, 4 (1949), 43–49.

[68] A. J. Rodriguez Salas, *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz*, Ph. D. Thesis, Universidad de Barcelona, 1980.

[69] A. Romanowska, *Subdirectly irreducible pseudocomplemented De Morgan algebras*, Algebra Universalis 12 (1981), 70–75.

[70] J. D. Rutledge, *A preliminary investigation of the infinitely many-valued predicate calculus*, Ph.D. Thesis, Cornell University. 1959.

[71] H. Sankappanavar, *Pseudocomplemented Ockham and De Morgan algebras*, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen Math., 32 (1986), 385–394.

[72] H. Sankappanavar, *Principal congruences of pseudocomplemented Demorgan algebras*, Zeitschr. f. Math. Logik Grundlagen Math., 33 (1987), 3–112.

[73] L. Vrancken-Mawet, *The lattice of R-subalgebras of a bounded distributive lattice*, Comment. Math. Univ. Carolin. 25, 1 (1984), 1–17.

[74] A. Ziliani, *Algebras de De Morgan modales* 4*-valuadas monádicas*, Ph.D. Thesis, Universidad Nacional del Sur (Bahía Blanca), 2001.