Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Subvariedades de álgebras de semi-Heyting

Juan Manuel Cornejo

Bahía Blanca Argentina

2011

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 12 de septiembre de 2006 y el 22 de junio de 2011, bajo la dirección del Dr. Manuel Abad, Profesor Titular del Departamento de Matemática en el Area II.

Juan Manuel Cornejo

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

A los axiomas de mi felicidad:

Carina, Melanie y Sol.

Agradecimientos

Al Dr. Manuel Abad: por brindarme enseñanzas tanto académicas como humanas. Por su paciencia, consejos, solidaridad y excelente predisposición que impulsaron en mí el deseo a desarrollarme como investigador.

A mi papá, Francisco Cornejo: por su esfuerzo, apoyo y ánimo que me brindó durante toda mi vida. Por haber sido un padre, un amigo, una contención y un ejemplo para mi.

Al Dr. José Patricio Díaz Varela: por ofrecerme su ayuda y su tiempo de manera desinteresada. Por compartir sus experiencias y conocimientos, demostrando ser una persona de gran calidez humana.

Al Dr. Ignacio Viglizzo: por haber leído en detalle un capítulo de esta tesis. Sus sugerencias y correcciones, así como sus consejos, han resultado ser muy valiosos.

A mis suegros, Noemí Brustle y Oscar Foresi: por sus consejos, su cariño y su buena predisposición como abuelos, lo cual permitió que pudiera invertir más tiempo y tranquilidad en mi trabajo.

Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas: por el apoyo institucional brindado durante el transcurso de mi doctorado.

A ti Carina, mi amor: porque tu ayuda y afecto ha sido vital no sólo para el desarrollo de esta tesis sino también para lograr mi felicidad. Por ser mi compañera, mi amiga, mi sustento y mi excusa para seguir amándote cada día más.

A mis "peques", Melanie y Sol: por alegrar mi vida e iluminar mis días. Por ser el verdadero motivo de mi existencia. Por enseñarme que la simpleza de un abrazo, un beso o una mirada puede cambiar el rumbo de nuestras vidas.

Introducción

Motivado por algunos de sus trabajos previos sobre álgebras de Heyting con un homomorfismo dual (álgebras de Heyting simétricas, en la terminología de A. Monteiro [27]) Sankappanavar se plantea la conjetura de la existencia de una variedad $\mathcal{V}$ de álgebras del mismo tipo de las álgebras de Heyting, que sean reticulados distributivos pseudocomplementados, que sus congruencias estén determinadas por sus filtros y que contengan a las álgebras de Heyting como subvariedad.

El estudio e investigación de esta conjetura llevó a Sankappanavar a la introducción de las álgebras de semi-Heyting [33]. Un álgebra de semi-Heyting es un sistema $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ es un reticulado (distributivo) con $0, 1$, y además, $x \wedge (x \to y) \approx x \wedge y$, $x \wedge (y \to z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$ y $x \to x \approx 1$. Es decir, se definen reemplazando el axioma $(x \wedge y) \to x \approx 1$ en la definición de álgebras de Heyting por el axioma $x \to x \approx 1$.

La variedad $\mathcal{SH}$ de las álgebras de semi-Heyting comparte con la variedad $\mathcal{H}$ de las álgebras de Heyting, además de las ya mencionadas, algunas otras propiedades importantes. Por ejemplo, todo intervalo en un álgebra de semi-Heyting es también pseudocomplementado, $\mathcal{SH}$ tiene Congruencias Principales Definibles Ecuacionalmente y tiene por lo tanto la Propiedad de Extensión de Congruencias, y la variedad de las álgebras de semi-Heyting es aritmética.

Sin embargo, la variedad de las álgebras de semi-Heyting presenta profundas diferencias con la variedad de las álgebras de Heyting, siendo las que siguen, algunas de las más importantes:

1. Es sabido que la implicación en un álgebra de Heyting está determinada por el orden del reticulado subyacente. En particular, sólo es posible definir (a lo sumo) una implicación de Heyting sobre un reticulado distributivo dado. La implicación de semi-Heyting no está determinada por el orden de reticulado subyacente. Así por ejemplo, se pueden definir dos estructuras de álgebra de semi-Heyting sobre el reticulado con dos elementos, y diez, sobre el reticulado de tres elementos. Es decir podemos tener muchas operaciones de semi-Heyting definibles sobre un mismo reticulado dado, siendo la implicación de Heyting la mayor (lema 7.4.1).

2. Un *reticulado residuado* [18] es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1\rangle$ tal que $\langle A; \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado acotado con primer elemento 0 y último elemento 1, $\langle A; \cdot, 1\rangle$ es un monoide conmutativo, y para todo $x, y \in A$ se tiene que $x \cdot y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \to z$. Desde el punto lógico los reticulados residuados han resultado ser de

gran interés. Así como las álgebras de Boole son los modelos algebraicos para la lógica proposicional clásica y las álgebras de Heyting son modelos para la lógica intuicionista, los reticulados residuados forman una semántica algebraica equivalente para las lógicas subestructurales [18].

Si a la base ecuacional que define la clase de los reticulados residuados le agregamos la identidad $x \approx x^2$, es decir, si el producto coincide con el ínfimo, se obtiene la variedad de las álgebras de Heyting. En consecuencia, la variedad de las álgebras de Heyting es una subvariedad de la variedad de los reticulados residuados. Esto permite aplicar al estudio de las álgebras de Heyting todos los resultados válidos para reticulados residuados.

Claramente, las álgebras de semi-Heyting no son reticulados residuados, pues éstos verifican la identidad $(x \wedge y) \to y \approx 1$ y las álgebras de semi-Heyting no la satisfacen: basta considerar la cadena de semi-Heyting conmutativa con dos elementos $\overline{\mathbf{2}}$ definida en 1.

3. Una *BCK-álgebra* (Iseki [23]) es un álgebra $\langle A; \to, 1\rangle$ tal que satisface las siguientes condiciones:

   (a) $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) \approx 1$

   (b) $x \to x \approx 1$

   (c) $x \to 1 \approx 1$

   (d) $1 \to x \approx x$

   (e) Si $x \to y = y \to x = 1$ entonces $x = y$

   (f) $x \to (y \to z) \approx (x \to y) \to z$.

   Es conocido que las BCK-álgebras son los $\{\to, 1\}$-subreductos de los reticulados residuados [10, 18, 25].

   En particular, los $\{\to, 1\}$-subreductos de las álgebras de Heyting son una clase particular de BCK-álgebras, conocidas también como *álgebras de Hilbert*, las álgebras estudiadas por A. Diego en [16] en el año 1966.

   Sin embargo, los $\{\to, 1\}$-subreductos de las álgebras de semi-Heyting no son BCK-álgebras, y de hecho se comportan de manera totalmente diferente. Por ejemplo si consideramos el álgebra de semi-Heyting $\overline{\mathbf{2}}$, su $\{\to, 1\}$-subreducto no es una BCK-álgebra pues no satisface la identidad $x \to 1 \approx 1$.

En [33], Sankappanavar plantea una serie de problemas abiertos sobre la variedad $\mathcal{SH}$. Entre ellos, investigar la estructura del reticulado de subvariedades de $\mathcal{SH}$, axiomatizar las lógicas trivalentes de semi-Heyting, hallar bases ecuacionales para la subvaridad generada por la cadenas, hallar el número de estructuras de semi-Heyting no isomorfas que se pueden definir sobre una cadena con n elementos, etc.

Esta tesis surgió como un intento de resolver algunos de los problemas anteriores, y pretende ser una contribución al desarrollo de la teoría de las álgebras de semi-Heyting.

El primer objetivo de esta tesis es investigar propiedades algebraicas de $\mathcal{SH}$ y de diversas subvariedades. La mayor dificultad de esta investigación radica en el extraño comportamiento de la implicación, la cual carece de algunas de las propiedades importantes de la implicación de Heyting. Se ha logrado caracterizar algunas subvariedades de $\mathcal{SH}$ generadas por cadenas y se han establecido equivalencias con las álgebras de Heyting lineales.

Nuestro segundo objetivo es definir una lógica, que hemos llamado *lógica semi-intuicionista* $\mathcal{SI}$, de manera tal que las álgebras de semi-Heyting sean la semántica algebraica para $\mathcal{SI}$ y tal que la lógica intuicionista sea un extensión axiomática de $\mathcal{SI}$. Asimismo, se investigan los términos $t(x, y)$ en el lenguaje de Heyting $\{\wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\}$ que definen una implicación de semi-Heyting. Investigamos la correspondiente variedad $\mathcal{SH}_t$ así como sus lógicas asociadas.

Son varios los problemas sobre las álgebras de semi-Heyting que permanecen abiertos. Entre estos problemas podemos mencionar los siguientes:

1. Hallar una dualidad topológica tipo Priestley para la variedad $\mathcal{SH}$, o para la subvariedad de $\mathcal{SH}$ generada por las cadenas.

2. Es sabido que hay $2^{\aleph_0}$ subvariedades de $\mathcal{H}$. ¿Vale lo mismo para la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por la ecuación $0 \rightarrow 1 \approx 0$?

3. Dar una descripción general del reticulado de subvariedades en el caso lineal.

4. Estudiar los $\{\rightarrow, 1\}$-subreductos de $\mathcal{SH}$.

Cabe mencionar, por último, que existen diversas variedades que son extensiones de la variedad de las álgebras de semi-Heyting, que están siendo actualmente motivo de investigación, entre las que podemos mencionar "las álgebras de semi-Heyting con un hemimorfismo dual" o "las álgebras de semi-Heyting cuasi-De Morgan", entre otras ([32]).

Resumen

Las álgebras de semi-Heyting fueron introducidas como una nueva clase ecuacional por H. P. Sankappanavar en [33]. Éstas álgebras representan un generalización de las álgebras de Heyting. Si bien la manera de definir la axiomática para una clase u otra es casi la misma, de hecho difieren en un sólo axioma, el comportamiento entre las variedades es distinto y hace rico el trabajo de estudiar cuáles son las propiedades que se extienden a las álgebras de semi-Heyting y cuáles no.

Un álgebra $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ se dice un *álgebra de semi-Heyting* si satisface las siguientes condiciones:

$(SH1)$ $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un reticulado con 0 y 1

$(SH2)$ $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$

$(SH3)$ $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$

$(SH4)$ $x \rightarrow x \approx 1$.

Observemos que si reemplazamos el axioma $(SH4)$ por $(x \wedge y) \rightarrow x \approx 1$ obtenemos una base ecuacional para la variedad $\mathcal{H}$ de las álgebras de Heyting. En adelante notaremos $\mathcal{SH}$ la variedad de las álgebras de semi-Heyting.

En [33] el autor demuestra que éstas nuevas álgebras mantienen ciertas propiedades de la clase ecuacional de álgebras de Heyting. Por ejemplo, son pseudocomplementadas, con el pseudocomplemento dado por $x^* = x \rightarrow 0$, sus congruencias están determinadas por sus filtros de reticulado y la variedad formada por ellas es aritmética. Pero, al mismo tiempo, las álgebras de semi-Heyting presentan diferencias bien remarcadas. Por ejemplo, la implicación sobre un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A}$ no está determinada por el orden del reticulado de $\mathbf{A}$. Sankappanavar encuentra dos estructuras definibles sobre el reticulado totalmente ordenado de dos elementos, diez sobre el de tres elementos y ciento sesenta sobre la cadena con cuatro elementos. Es decir podemos tener muchas operaciones de semi-Heyting sobre un mismo reticulado dado, siendo la implicación de Heyting la mayor (lema 7.4.1).

Este trabajo de tesis está dedicado a estudiar esta conexión y a profundizar la investigación sobre las álgebras de semi-Heyting y sus subvariedades determinando distintos resultados relevantes.

Al encontrarse con unas estructuras tan ricas y variadas surge naturalmente el problema de pensar cómo se comportan las cadenas de semi-Heyting. Por eso el propósito del capítulo 2 es investigar la estructura de las cadenas de semi-Heyting y la variedad $\mathcal{SH}^C$ generada por ellas. Determinamos el número de cadenas de semi-Heyting no isomorfas con n elementos resolviendo así uno de los problemas propuestos en [33]. Con el objetivo de estudiar el reticulado de subvariedades de $\mathcal{SH}^C$, se investiga la relación de inclusión entre las cadenas de semi-Heyting. En la última parte del capítulo se determinan bases ecuacionales para $\mathcal{SH}^C$ y para las subvariedades de $\mathcal{SH}^C$ introducidas por Sankappanavar.

En [33] se define la variedad $com\mathcal{SH}$ como la subvariedad de $\mathcal{SH}$ caracterizada por la ecuación $x \to y \approx y \to x$. En la subvariedad $com\mathcal{SH}^C = com\mathcal{SH} \cap \mathcal{SH}^C$ si $\mathbf{L}$ es una cadena, y $x < y$ en $\mathbf{L}$, entonces $x \to y = x$, y en $\mathcal{H}^C = \mathcal{H} \cap \mathcal{SH}^C$ si $\mathbf{L}$ es una cadena y $x < y$ en $\mathbf{L}$ entonces $x \to y = 1$. Estudiamos una variedad, $\mathcal{CI}$, que representa una generalización para $com\mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{H}^C$ pues está generada por cadenas que verifican la condición $x < y$ implica que $x \to y \in \{x, y, 1\}$. Demostramos que una base ecuacional para esta variedad es la identidad $((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow x) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y) \vee (x \to y) \approx 1$ donde $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$ y que está generada por sus cadenas finitas.

El propósito del capítulo 4 es introducir e investigar la subvariedad $\mathcal{ISSH}$ de las álgebras de semi-Heyting que satisfacen la ecuación $(0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$. Claramente, la variedad de las álgebras de semi-Heyting de Stone está contenida en $\mathcal{ISSH}$. Es más, $\mathcal{ISSH}$ contiene todas las subvariedades introducidas en por Sankappanavar, y es de hecho la menor subvariedad de $\mathcal{SH}$ que contiene a todas las subvariedades de Sankappanavar. Probaremos que las subvariedades introducidas en el capítulo 1 son de hecho subvariedades de $\mathcal{ISSH}$. Estudiamos las relaciones entre ellas dentro de $\mathcal{ISSH}$ y determinamos el subreticulado del reticulado de subvariedades de $\mathcal{SH}$ generado por las subvariedades anteriormente definidas. También introducimos y estudiamos nuevas subvariedades de $\mathcal{ISSH}$.

Consideremos las cadenas de semi-Heyting con n elementos de la forma

$$\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} = 1$$

y todas las implicaciones $\to : L \times L \to L$ que determinan una estructura algebraica de semi-Heyting sobre el reticulado subyacente de $\mathbf{L}$.

Llamamos

$$\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$$

a la variedad generada por las cadenas consideradas anteriormente que satisfacen la condición: $a_i \to a_j = a_r$ con $0 \leq i < j \leq n-1$ e $i \leq r \leq n-1$.

El principal objetivo del capítulo 5 es encontrar una base ecuacional para cada una de estas subvariedades. Creemos que es el paso previo fundamental para obtener una base ecuacional para la variedad generada por un número finito de cadenas de semi-Heyting. Para lograr este objetivo describimos el comportamiento de las álgebras subdirectamente irreducibles de las variedades $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$.

En [6, 24] se demuestra que los elementos regulares de un álgebra de Heyting $\mathbf{A}$ forman una subálgebra de $\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{A}$ satisface la condición de Stone $x^* \vee x^{**} \approx 1$. Esta condición no es suficiente en el caso de las álgebras de semi-Heyting. Probamos que los elementos regulares de un álgebra de semi-Heyting **A** forman una subálgebra de **A** si y sólo si, además de la condición de Stone, **A** satisface la identidad

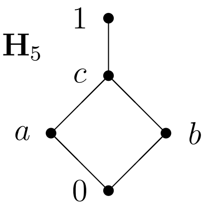
$$(0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1.$$

En el capítulo 6 obtenemos un teorema del tipo de Glivenko para la variedad de las álgebras de semi-Heyting y probamos que la clase de las álgebras de semi-Heyting booleanas (álgebras con una estructura subyacente de reticulado booleano) constituye una subcategoría reflexiva de $\mathcal{SH}$. Finalmente aplicamos estos resultados para obtener la siguiente caracterización de la descomponibilidad de las álgebras de semi-Heyting libres: Para toda subvariedad no trivial $\mathcal{V}$ de $\mathcal{SH}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$ es directamente indescomponible
2. $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{SH}^S$
3. $\mathcal{V}$ contiene un álgebra cuyo reducto de reticulado pseudocomplementado es isomorfo a $\mathbf{H}_5$.

donde $\mathcal{SH}^S$ es la clase de las álgebras de semi-Heyting que satisfacen la condición de Stone y $\mathbf{H}_5 = \langle \{0, a, b, c, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ es el reticulado distributivo con cinco elementos:

$\mathbf{H}_5$



En [22], Hecht y Katriňák investigaron las álgebras de Heyting lineales (denominadas en ese momento como *álgebras relativas de Stone*). Los autores probaron que cada subvariedad puede ser caracterizada por una única identidad módulo $\mathcal{H}^C$. En el capítulo 7 investigamos aquellas subvariedades de la variedad $\mathcal{SH}$ que son equivalentes por términos a la variedad $\mathcal{H}^C$ de las álgebras de Heyting lineales. Probamos que las únicas subvariedades con esta propiedad son la variedad $com\mathcal{SH}^C$ de las álgebras de semi-Heyting conmutativas y la variedad $\mathcal{L}_\vee$ generada por cadenas en las cuales si $a < b$ entonces $a \to b = b$. Además estudiamos la variedad $\mathcal{C}$ generada en $\mathcal{SH}$ por $\mathcal{H}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ y $com\mathcal{SH}^C$. En particular, probamos que $\mathcal{C}$ es localmente finita y obtenemos una construcción del álgebra libre finitamente generada en $\mathcal{C}$.

En el capítulo 8 definimos una nueva lógica $\mathcal{SI}$ llamada lógica semi-intuicionista. Introducimos una lista de axiomas y una nueva regla de inferencia, la cual denominamos *semi-Modus Ponens*, de manera tal que la clase de las álgebras de semi-Heyting resulta ser la semántica algebraica para el cálculo proposicional generado, es decir, probamos teoremas de sanidad y completitud en la lógica $\mathcal{SI}$ respecto de las álgebras de semi-Heyting. Además estudiamos la relación de esta lógica con el cálculo proposicional intuicionista $\mathcal{I}$, demostrando, por ejemplo, que $\mathcal{I}$ es una extensión axiomática de la lógica semi-intuicionista.

En el capítulo 9 se investigan los términos de Heyting $t(x, y)$ que definen una implicación de semi-Heyting. Consideramos la identidad

$$x \Rightarrow y \approx t(x, y) \qquad \text{(t)}$$

y su subvariedad asociada $\mathcal{SH}_t = \{\mathbf{L} \in \mathcal{SH} : \ \mathbf{L}$ satisface la identidad (t)$\}$ donde la operación $\Rightarrow_H$ se interpreta en el término $t(x, y)$ como $x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y)$ para todo $x, y \in L$. El objetivo de este capítulo es investigar las subvariedades $\mathcal{SH}_t$ y sus lógicas asociadas. Para ello necesitamos introducir las nociones de lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ y subvariedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Sean α y β dos fórmulas de la lógica $\mathcal{SI}$ y sea ε el par (α, β). Llamamos lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ a la extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ definida a partir del axioma:

(S_ε) $(\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\beta \rightarrow (\beta \wedge \alpha))$

y todas sus sustituciones.

En la sección 9.2 demostramos que la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es sana y completa respecto de la variedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ introducida en este capítulo. Luego probamos que las subvariedades de $\mathcal{SH}$ definidas por la ecuación (t) para algún término $t(x, y)$ son de la forma $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ para algún par de fórmulas. Probamos que su lógica asociada $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es equivalente al cálculo proposicional intuicionista [30] y resulta ser una extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$.

Recíprocamente demostramos que toda extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ equivalente al cálculo proposicional intuicionista es de la forma $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ para algún par de fórmulas ε introduciendo traducciones $\cdot^\circ, \cdot^* : Form[X] \rightarrow Form[X]$ de manera tal que para $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$ entonces $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$.

(b) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x \rightarrow y, g(t(x,y)))]} \phi$ entonces $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$.

(c) $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} (\alpha^\circ)^*$.

(d) $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x \rightarrow y, g(t(x,y)))]} \alpha$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x \rightarrow y, g(t(x,y)))]} (\alpha^*)^\circ$.

Además probamos un teorema que como caso particular establece que la lógica $\mathcal{SI}$ es algebrizable respecto de la clase de álgebras $\mathcal{SH}$ en el sentido de Blok y Pigozzi [9]. Sin embargo, como veremos, $\mathcal{SI}$ no es una lógica implicativa [30].

Por último, en las últimas dos secciones del capítulo 9, brindamos una semántica de Kripke para cada una de las lógicas semi-intuicionistas equivalentes a $\mathcal{I}$ y determinamos que el espacio de Priestley dual de las álgebras de Heyting coincide con el espacio dual de las álgebras en la variedad $\mathcal{SH}_t$.

Varias de las demostraciones de resultados contenidos en esta tesis son de naturaleza computacional que hace su lectura difícil y tediosa. Con el objetivo de facilitar la lectura, hemos excluido estas demostraciones del cuerpo principal de la tesis y hemos agregado un apéndice (capítulo 10) que las contiene.

Abstract

Semi-Heyting algebras were introduced as a new equational class by H. P. Sankappanavar en [33]. These algebras represent a generalization of Heyting algebras. In fact, their definition can be obtain from a certain axiomatic of Heyting algebras replacing one of the axioms by a weaker one. Nevertheless, as we will see, the behavior of semi-Heyting algebras is much more complicated than that of Heyting algebras.

An algebra $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ is said to be a *semi-Heyting algebra* if the following conditions hold:

$(SH1)$ $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ is a lattice with 0 and 1,

$(SH2)$ $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$,

$(SH3)$ $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$,

$(SH4)$ $x \rightarrow x \approx 1$.

Observe that if we replace the axiom $(SH4)$ by $(x \wedge y) \rightarrow x \approx 1$ we obtain an equational basis for the variety $\mathcal{H}$ of Heyting algebras. The variety of semi-Heyting algebras will be denoted by $\mathcal{SH}$.

These new algebras share with Heyting algebras some important properties (see [33]). For instance, they are pseudocomplemented, with the pseudocomplement given by $x^* = x \rightarrow 0$, congruences on them are determined by filters and the variety of semi-Heyting algebras is arithmetic. But, at the same time, semi-Heyting algebras present strong differences with Heyting algebras. For example, the operation of implication on a semi-Heyting algebra $\mathbf{A}$ is not determined by the order of the underlying structure of lattice of $\mathbf{A}$: there are two non-isomorphic structures of semi-Heyting definable on the two-element lattice and ten on the three-element lattice. That is, we can have many operations of semi-Heyting implications on a given lattice. Among all these implications, the Heyting implication is the biggest one (Lemma 7.4.1).

This work is devoted to continue the investigation on the variety of semi-Heyting algebras and its subvarieties initiated in [33].

The contents of the thesis are summarized as follows: In Chapter 2 we investigate the structure of semi-Heyting chains and the variety $\mathcal{SH}^C$ generated by them. We determine the number of non-isomorphic n-element semi-Heyting chains, solving one of the problems posted in [33]. With the aim of studying the lattice of subvarieties of $\mathcal{SH}^C$, we investigate

the inclusion relationship between semi-Heyting chains. Finally, we determine equational bases for $\mathcal{SH}^C$ and for the subvarieties of $\mathcal{SH}^C$ introduced by Sankappanavar.

In [33], the variety $com\mathcal{SH}$ is defined as the subvariety of $\mathcal{SH}$ characterized by the equation $x \to y \approx y \to x$. In the subvariety $com\mathcal{SH}^C = com\mathcal{SH} \cap \mathcal{SH}^C$, if $\mathbf{L}$ is a chain, and $x < y$ in $\mathbf{L}$, then $x \to y = x$, and in $\mathcal{H}^C = \mathcal{H} \cap \mathcal{SH}^C$, if $\mathbf{L}$ is a chain and $x < y$ in $\mathbf{L}$ then $x \to y = 1$. We introduce and study in Chapter 3 a subvariety, $\mathcal{CI}$, that is a common generalization for $com\mathcal{SH}^C$ and $\mathcal{H}^C$, since it is generated by the chains that satisfy the condition $x < y$ implies $x \to y \in \{x, y, 1\}$. We prove that the identity $((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow x) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y) \vee (x \to y) \approx 1$, where $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$, is an equational basis for this variety. We also prove that it is generated by its finite chains.

The objective of Chapter 4 is to introduce and investigate the subvariety $\mathcal{ISSH}$ of all semi-Heyting algebras that satisfy the equation $(0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$. Clearly, the variety of semi-Heyting algebras that satisfy the Stone condition $x^* \vee x^{**} \approx 1$ is contained in $\mathcal{ISSH}$. Moreover, $\mathcal{ISSH}$ contains all the subvarieties introduced in [33] by Sankappanavar, and, in fact, is the smallest subvariety of $\mathcal{SH}$ that contains the subvarieties of Sankappanavar. We prove that the subvarieties introduced in Chapter 1 are all of them subvarieties of $\mathcal{ISSH}$. We study the relationships between them within $\mathcal{ISSH}$ and we determine the sublattice of the lattice of subvarieties of $\mathcal{SH}$ generated by the subvarieties previously defined. We also introduce and study new subvarieties of $\mathcal{ISSH}$.

Consider the n-element semi-Heyting chains of the form

$$\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} = 1$$

and all those operations of implication $\to: L \times L \to L$ that determine an algebraic structure of semi-Heyting over the underlying lattice of $\mathbf{L}$.

Let

$$\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$$

be the variety generated by those chains considered above that satisfy the condition $a_i \to a_j = a_r$ with $0 \leq i < j \leq n-1$ and $i \leq r \leq n-1$.

The main objective of Chapter 5 is to find an equational basis for each of these subvarieties. We believe that this is the previous step to obtain an equational basis for the variety generated by a finite number of semi-Heyting chains. To this end, we describe the behavior of subdirectly irreducible algebras of the varieties $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$.

It is known that the regular elements of a Heyting algebra $\mathbf{A}$ form a subalgebra of $\mathbf{A}$ if and only if $\mathbf{A}$ satisfies the Stone condition $x^* \vee x^{**} \approx 1$ [6, 24]. This condition is no longer sufficient in the case of semi-Heyting algebras. We prove in Chapter 6 that the regular elements of a semi-Heyting algebra $\mathbf{A}$ form a subalgebra of $\mathbf{A}$ if and only if, in addition to the Stone condition, $\mathbf{A}$ satisfies the identity

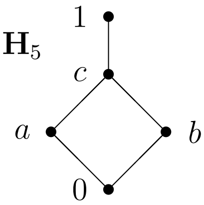
$$(0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1.$$

We also obtain a Glivenko type theorem for the variety of semi-Heyting algebras, and we prove that the class of Boolean semi-Heyting algebras (algebras with an underlying structure of Boolean lattice) constitute a reflective subcategory of $\mathcal{SH}$. Finally, we apply these results to obtain the following characterization of the decomposability of free semi-Heyting algebras: For every non-trivial subvariety $\mathcal{V}$ of $\mathcal{SH}$, the following conditions are equivalent:

1. $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$ is directly indecomposable,
2. $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{SH}^S$,
3. $\mathcal{V}$ contains an algebra whose pseudocomplemented lattice reduct is isomorphic to $\mathbf{H}_5$.

where $\mathcal{SH}^S$ is the class of semi-Heyting algebras that satisfy the Stone condition and $\mathbf{H}_5 = \langle \{0, a, b, c, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ is the 5-element distributive lattice:

$\mathbf{H}_5$



In [22], Hecht and Katriňák investigated the variety $\mathcal{H}^C$ of linear Heyting algebras (*relative Stone algebras*). They proved that each subvariety of $\mathcal{H}^C$ can be characterized by a single identity within $\mathcal{H}^C$. In Chapter 7 we investigate those subvarieties of $\mathcal{SH}$ that are term equivalent to the variety $\mathcal{H}^C$. We prove that the unique subvarieties of $\mathcal{SH}$ with this property are the variety $com\mathcal{SH}^C$ of commutative semi-Heyting algebras and the variety $\mathcal{L}_\vee$ generated by chains in which if $a < b$ then $a \to b = b$. Besides we study the variety $\mathcal{C}$ generated in $\mathcal{SH}$ by $\mathcal{H}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ and $com\mathcal{SH}^C$. In particular, we prove that $\mathcal{C}$ is locally finite, and we obtain a construction of the finitely generated free algebra in $\mathcal{C}$.

We define in Chapter 8 a new logic $\mathcal{SI}$ called semi-intuitionistic logic. We introduce an axiomatic and a new inference rule, the *semi-Modus Ponens*, in such a way that the class of semi-Heyting algebras turns out to be the algebraic semantics for the generated propositional calculus, that us, we prove sound and completeness theorems for the logic $\mathcal{SI}$ with respect to the semi-Heyting algebras. In addition, we study the relationship of this logic with the intuitionistic propositional calculus $\mathcal{I}$, proving, for example, that $\mathcal{I}$ is an axiomatic extension of the semi-intuitionistic logic.

We investigate in Chapter 9 those Heyting terms $t(x, y)$ which define a semi-Heyting implication. Consider the identity

$$x \Rightarrow y \approx t(x, y) \qquad \text{(t)}$$

and its associated variety $\mathcal{SH}_t = \{\mathbf{L} \in \mathcal{SH} : \ \mathbf{L} \text{ satisfies the identity (t)}\}$, where the operation $\Rightarrow_H$ is interpreted in the term $t(x, y)$ as $x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y)$ for every $x, y \in L$. The objective of this chapter is to investigate the subvarieties $\mathcal{SH}_t$ and their associated logics. To this end we introduce the notions of logic $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ and subvariety $\mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Let α and β be two formulas in the logic $\mathcal{SI}$ and let ε be the pair (α, β). Let $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ be the axiomatic extension of the logic $\mathcal{SI}$ defined by the axiom:

(S_ε) $(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\beta \to (\beta \wedge \alpha))$

and its subtitutions.

In Section 9.2 we prove that the logic $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ is sound and complete with respect to the variety $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ introduced in this chapter. We also prove that the subvarieties of $\mathcal{SH}$ defined by the equation (t) for some term $t(x, y)$ are of the form $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ for some pair of formulas. We prove that its associated logic $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ is equivalent to the intuitionistic propositional calculus [30] and it is an axiomatic extension of the logic $\mathcal{SI}$.

Conversely, we prove that every axiomatic extension of the logic $\mathcal{SI}$ equivalent to intuitionistic propositional calculus is of the form $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ for some pair of formulas ε by defining functions $\cdot^\circ, \cdot^* : Form[X] \to Form[X]$ in such a way that for $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$ the following conditions hold:

(a) If $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$ then $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$.

(b) If $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \phi$ then $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$.

(c) $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ if and only if $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} (\alpha^\circ)^*$.

(d) $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha$ if and only if $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} (\alpha^*)^\circ$.

Besides we prove a theorem that, as a particular case, establishes that the logic $\mathcal{SI}$ is algebraizable with respect to the class of algebras $\mathcal{SH}$ in the sense of Blok and Pigozzi [9]. Nevertheless, as we will see, $\mathcal{SI}$ is not an implicative logic [30].

Finally, we provide in the last two sections of Chapter 9 a Kripke semantics for each semi-intuitionistic logic equivalent to $\mathcal{I}$ and we determine that the dual Priestley space of Heyting algebras coincide with the dual space of the algebras in the variety $\mathcal{SH}_t$.

Several of the demonstrations of results in this thesis are of a computational nature which makes reading them difficult and tedious. For ease of reading we have excluded demonstrations from the main body of the thesis and included them in an appendix (Chapter 10).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Empezaremos la sección recordando algunas definiciones y resultados bien conocidos. Para notación básica y resultados generales del álgebra universal el lector puede consultar [6], [7], [8], [11], [19], [30].

Definición 1.0.1 *Un álgebra* $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Heyting si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(H1) $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un reticulado con* $0, 1$

(H2) $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$

(H3) $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$

(H4) $(x \wedge y) \rightarrow x \approx 1$.

Como es conocido, las álgebras de Heyting son pseudocomplementadas (con $x^* = x \rightarrow 0$ como el pseudocomplemento de x) en el sentido de la siguiente definición:

Definición 1.0.2 *Un álgebra* $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ *es un reticulado pseudocomplementado (p-reticulado or p-álgebra), donde* * *es una operación unaria, si se verifican las siguientes condiciones:*

(PS1) $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un reticulado con* $0, 1$

(PS2) $x \wedge (x \wedge y)^* \approx x \wedge y^*$

(PS3) $0^* \approx 1 \quad y \quad 1^* \approx 0$.

Para $\mathbf{L}$ un reticulado pseudocomplementado, notaremos $B(\mathbf{L})$ el conjunto de *elementos cerrados* ($a^{**} = a$) y $D(\mathbf{L})$ el conjunto de *elementos densos* ($a^* = 0$). Observemos que $\langle B(\mathbf{L}), \sqcup, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole, donde $(a \sqcup b) = (a^* \wedge b^*)^*$.

La siguiente definición es central para la tesis.

Definición 1.0.3 *Un álgebra* $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de semi-Heyting si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(SH1) $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un reticulado con* $0, 1$

(SH2) $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$

(SH3) $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$

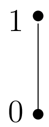
(SH4) $x \rightarrow x \approx 1.$

La observación que la identidad (SH4) es un caso particular de la identidad (H4) muestra que la clase de las álgebras de Heyting forma un subvariedad de la variedad de las álgebras de semi-Heyting. Dicha condición da origen a una innumerable cantidad de problemas abiertos algunos abordados en [33].

Notaremos a lo largo del presente trabajo con $\mathcal{SH}$ la variedad de las álgebras de semi-Heyting y con $\mathcal{H}$ la (sub)variedad de las álgebras de Heyting.

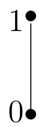
Las álgebras $\mathbf{2}$ y $\bar{\mathbf{2}}$, las cuales tienen una cadena con dos elementos como reticulado subyacente y la operación $\rightarrow$ definida como en la Figura 1, son dos ejemplos importantes de álgebras de semi-Heyting. Se puede verificar fácilmente que $\mathbf{2}$ es un álgebra de Heyting (la cual es, además, un álgebra de Boole), mientras que $\bar{\mathbf{2}}$ no lo es.

$\mathbf{2}$:



$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\bar{\mathbf{2}}$:



$\rightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Figura 1

Otro resultado útil que será utilizado en el resto de este trabajo es el siguiente teorema donde $\mathbf{L}$ representa un álgebra de semi-Heyting arbitraria. Este presenta algunas propiedades aritméticas muy usadas sobre las álgebras de semi-Heyting.

Teorema 1.0.4 [33] *Sean* $a, b, c, d \in L$*. Entonces*

(a) $1 \rightarrow a = a$

(b) $a \leq b$ *implica que* $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge c$

(c) $a \leq b$ *implica que* $a \leq b \rightarrow 1$

(d) $a \leq b$ *implica que* $a \leq a \rightarrow b$

(e) $b \rightarrow c \geq b \wedge c$

(f) $a \leq b$ *implica que* $a \leq b \to a$

(g) $a \leq b$ *y* $a \leq c$ *implica que* $a \leq b \to c$

(h) $d \leq \ a \to b$ *implica que* $d \wedge a \leq b$

(i) $a \to b = 1$ *implica que* $a \leq b$

(j) $a = b$ *si y sólo si* $(a \to b) \wedge (b \to a) = 1$

(k) $a = b$ *si y sólo si* $(a \vee b) \to (a \wedge b) = 1$

(l) $a \leq (a \wedge b) \to b$

(m) $a \leq a \to 1$

(n) $a \leq b \leq c$ *implica que* $b \wedge (a \to c) = b \wedge (a \to b)$

(ñ) $a \leq (a \to b) \to b$

(o) $a \leq [(a \wedge b) \to b] \to a$

(p) $a \leq [a \to (b \to (a \wedge b))]$

(q) $a \wedge (0 \to 1) = a \wedge (0 \to a)$

(r) $a \leq (0 \to 1)$ *si y sólo si* $a \leq (0 \to a)$

(s) $b \leq (a \to 1)$ *si y sólo si* $b \leq (a \wedge b) \to b$

(t) $b \to (a \wedge b) \leq (a \wedge b) \to b$

(u) $a \to b \leq a \to (a \wedge b)$.

En adelante introduciremos propiedades sobre la estructura del reducto reticular de un álgebra de semi-Heyting.

Teorema 1.0.5 [33] *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$ *con* $a, b \in L$. *Para* $c \in [a, b]$ *definimos* $c^{*ab} = (c \to a) \wedge b$. *Entonces el álgebra* $\langle [a, b], \vee, \wedge, ^{*ab}, a, b \rangle$ *es un reticulado pseudocomplementado .*

El teorema 1.0.5 tiene distintas consecuencias interesantes. Por ejemplo, podemos derivar el siguiente corolario.

Corolario 1.0.6 [33] *Sea* $\boldsymbol{L} \in \mathcal{SH}$. *Entonces el álgebra* $\langle L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1 \rangle$, *donde* $c^* = c \to 0$ *para* $c \in L$, *es un reticulado pseudocomplementado.*

Corolario 1.0.7 [33] *Sean* $\boldsymbol{L} \in \mathcal{SH}$ *y* $a, b, c \in L$. *Entonces*

(a) $a \wedge (a \to b)^* = a \wedge b^*$

(b) $a^{**} \wedge (a \to b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$

(c) *Si a es denso, entonces* $(a \to b)^* = b^*$

(d) *Si a y b son elementos densos entonces $a \to b$ también lo es*

(e) $0 \to 1 = 0$ *si y sólo si* $0 \to a \leq a^*$*; luego*
Si a es denso, entonces $0 \to 1 = 0$ *si y sólo si* $0 \to a = 0$

(f) *Si $\mathbf{L}$ posee como retículado subyacente una cadena y* $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 0$ *entonces* $0 \to a = 0$*, para cada* $a \in L - \{0\}$

(g) $a^* \leq 0 \to a$*. En particular* $a^* \leq 0 \to a^{**}$

(h) $a \leq 0 \to a^*$

(i) $a \to a^* \leq a^* \leq a^{**} \to a$

(j) *Si* $0 \to a^* \geq a^*$ *entonces* $a \to a^* = a^*$

(k) $a \leq a^{**} \to a$ *y* $a^* \leq a^{**} \to a$

(l) $a \leq a \to a^{**}$

(m) $a^* \leq a \to a^{**}$ *y* $a^{**} \geq a^* \to a$

(n) $a \vee a^* \leq a \to a^{**}$*; luego,* $a \to a^{**} \in D(L)$

(ñ) $c \leq a$ *implica que* $c \wedge (a \to b^*) = c \wedge b^*$

(o) $a \leq 0 \to a^{**}$ *si y sólo si* $a \leq 0 \to a$

(p) $b \wedge (a \to b^*) = b \wedge a^*$

(q) *Si a es denso, entonces* $a \to b^* \leq b^*$

(r) $a \leq b^*$ *implica que* $a \to b^* \leq b^*$

(s) $0 \to a = 0$ *implica que* $0 \to 1 \leq a^*$

(t) *Si* $a \wedge b = 0$ *entonces* $a \to b \leq a^*$.

Teorema 1.0.8 [33] *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$*. Entonces* $\mathbf{L}$ *es un reticulado distributivo.*

El siguiente teorema demostrado en [33] generaliza otra propiedad bien conocida de las álgebras de Heyting.

Teorema 1.0.9 [33] *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$ *y sean* $a, b \in L$ *con* $a \leq b$*. Para* $c, d \in [a, b]$*, definimos* $c \to^{ab} d = (c \to d) \wedge b$*. Entonces el álgebra* $\mathbf{L_0} = \langle [a, b], \vee, \wedge, \to^{ab}, a, b \rangle$ *es un álgebra de semi-Heyting. Es más, si L es un álgebra de Heyting, entonces* $\mathbf{L_0}$ *también lo es.*

En adelante haremos mención de resultados del trabajo de Sankappanavar [33] que demuestran que las congruencias están determinadas por los filtros de reticulado, una herramienta importante para la investigación en la variedad $\mathcal{SH}$.

En lo que sigue notaremos $\mathbf{L}$ un álgebra de semi-Heyting arbitraria y $F(\mathbf{L})$ el reticulado de los filtros de $\mathbf{L}$.

Definición 1.0.10 *Sea $F \in F(\mathbf{L})$. Definimos la siguiente relación binaria $\Theta(F)$ sobre $\mathbf{L}$ como*
$\langle x, y\rangle \in \Theta(F)$ *si y sólo si* $x \wedge f = y \wedge f$, *para algún* $f \in F$.

Lema 1.0.11 $\Theta(F) \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$ *y* $1/\Theta(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.

Lema 1.0.12 *Si $F \in F(\mathbf{L})$ y $a, b \in L$, entonces*
$\langle a, b\rangle \in \Theta(F)$ *si y sólo si* $(a \to b) \wedge (b \to a) \in F$.

Con los resultados anteriores podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 1.0.13 $\mathrm{Con}(\mathbf{L}) \cong \mathrm{F}(\mathbf{L})$.

Del teorema anterior, en particular, resulta que la variedad $\mathcal{SH}$ es distributiva por congruencias. De hecho, tenemos el siguiente resultado fuerte:

Teorema 1.0.14 [33] *La variedad $\mathcal{SH}$ es aritmética.*

En la demostración del teorema anterior se determina el término de Mal'cev para esta subvariedad:

$$p(x, y, z) = [(x \to y) \to z] \wedge [(z \to y) \to x] \wedge (x \vee z)$$

El siguiente teorema brinda una caracterización de las álgebras de semi-Heyting directamente indescomponibles. Si $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$ llamaremos el *centro* de L, notado por $\mathrm{Cen}(\mathbf{L})$, al conjunto de elementos complementados de $\mathbf{L}$.

Teorema 1.0.15 [33] *La siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{L}$ *es directamente indescomponible*

(b) $\mathrm{Cen}(\mathbf{L}) = \{0, 1\}$

(c) *Si $a \in L - \{0, 1\}$ entonces $a \vee a^* < 1$.*

Los siguientes resultados caracterizan las álgebras simples y las álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{SH}$.

Teorema 1.0.16 [33] *Las álgebras $\mathbf{2}$ y $\overline{\mathbf{2}}$ son las únicas álgebras simples en la variedad $\mathcal{SH}$.*

Si con $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ denotamos la variedad generada por un álgebra $\mathbf{A}$ se tiene el siguiente:

Corolario 1.0.17 *El reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{SH}$ tiene exactamente dos átomos, son $\mathcal{V}(\mathbf{2})$ y $\mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}})$.*

Teorema 1.0.18 [33] *La variedad generada por $\mathbf{2}$ y $\overline{\mathbf{2}}$, $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$, es una variedad con discriminador donde el término discriminador es:*

$$t(x, y, z) = [(x \wedge z) \vee y^*] \wedge (x \vee z).$$

Luego todo miembro no trivial de esta variedad es un producto booleano de $\mathbf{2}$ y $\overline{\mathbf{2}}$.

El siguiente teorema tiene una importancia vital para la mayoría de los temas desarrollados en esta tesis.

Teorema 1.0.19 [33] *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$ con $|\mathbf{L}| \geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible*

(b) $\mathbf{L}$ *tiene un único coátomo.*

Del teorema anterior se deduce que en un álgebra de semi-Heyting irreducible, el elemento 1 es $\vee$- irreducible.

En [33, Definition 8.1] Sankappanavar introdujo las siguientes subvariedades de $\mathcal{SH}$:

Subvariedad	definida por la identidad en $\mathcal{SH}$
$\mathcal{FTT}$ (**F**alse implies **T**rue is **T**rue)	$0 \to 1 \approx 1$
$\mathcal{FTD}$ (**F**alse implies **T**rue is **D**ense)	$(0 \to 1)^* \approx 0$
$\mathcal{QH}$ (Álgebras de quasi-Heyting)	$y \leq x \to y$
$\mathcal{H}$ (Álgebras de Heyting)	$(x \wedge y) \to x \approx 1$
$\mathcal{SH}^S$ (Álgebras de semi-Heyting stoneanas)	$x^* \vee x^{**} \approx 1$
$\mathcal{SH}^B$ (Álgebras de semi-Heyting booleanas)	$x \vee x^* \approx 1$
$\mathcal{SH}^C$ (La subvariedad de $\mathcal{SH}$ generada por cadenas)	(ver teorema 2.4.3)
$\mathcal{FTF}$ (**F**alse implies **T**rue is **F**alse)	$0 \to 1 \approx 0$
$\mathcal{PTP}$ (**P**ossible implies **T**rue is **P**ossible)	$x \to 1 \approx x$
$com\mathcal{SH}$ (Álgebras de semi-Heyting conmutativas)	$x \to y \approx y \to x$

Para una variedad dada $\mathcal{V}$, sea $\mathcal{V}^C$ la variedad $\mathcal{V} \cap \mathcal{SH}^C$, y similarmente, sea $\mathcal{V}^S$ la variedad $\mathcal{V} \cap \mathcal{SH}^S$. Por ejemplo, $com\mathcal{SH}^C$ es la variedad $\mathcal{SH}^C \cap com\mathcal{SH}$ y $\mathcal{PTP}^C = \mathcal{PTP} \cap \mathcal{SH}^C$.

Por otro lado, notaremos $\mathcal{T}$ a la variedad trivial.

Estas subvariedades serán estudiadas a lo largo de los capítulos 2, 3, 4 y 5.

Lema 1.0.20 [33]

(a) $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}}) = \mathcal{SH}^B$

(b) $\mathcal{V}(\mathbf{2}) \cap \mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}}) = \mathcal{T}$.

Diremos que un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A}$ es *un álgebra de semi-Heyting booleana* si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$.

En esta tesis se utilizan diversas nociones de álgebra universal que se suponen conocidas. En particular, frecuentemente se usan las siguientes notaciones habituales.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo.

- $\mathbf{L} \in \mathbb{I}(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{L}$ es isomorfa a algún miembro de la clase $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{L} \in \mathbb{S}(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{L}$ es una subálgebra de algún miembro de la clase $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{L} \in \mathbb{H}(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{L}$ es una imagen homomorfa de algún miembro de la clase $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{L} \in \mathbb{P}(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{L}$ es un producto directo de una familia no vacía de elementos de $\mathcal{K}$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Notaremos por $\mathbb{I}(\mathbf{A})$, $\mathbb{S}(\mathbf{A})$, $\mathbb{H}(\mathbf{A})$ y $\mathbb{P}(\mathbf{A})$ al conjunto $\mathbb{I}(\{\mathbf{A}\})$, $\mathbb{S}(\{\mathbf{A}\})$, $\mathbb{H}(\{\mathbf{A}\})$ y $\mathbb{P}(\{\mathbf{A}\})$ respectivamente.

Capítulo 2

La variedad generada por las cadenas de semi-Heyting

2.1. Introducción

El propósito de este capítulo es investigar propiedades de las cadenas de semi-Heyting y la estructura de la variedad $\mathcal{SH}^C$ generada por éstas. Los resultados hallados en este capítulo forman parte del trabajo [3]. Llamaremos *Álgebra de semi-Heyting lineal* a toda álgebra en la variedad $\mathcal{SH}^C$.

En [33], Sankappanavar presenta el siguiente problema: Para $\mathcal{V}$ una subvariedad de las álgebras de semi-Heyting y n un número natural, si $f(\mathcal{V}, n)$ representa el número de cadenas de semi-Heyting no isomorfas con n elementos en $\mathcal{V}$, encontrar una fórmula para $f(\mathcal{V}, n)$.

En la sección 2.2 probamos algunos resultados sobre las cadenas de semi-Heyting y encontramos $f(\mathcal{SH}, n)$, es decir, determinamos el número de estructuras de semi-Heyting no isomorfas que pueden ser definidas sobre una cadena de n elementos. La sección 2.3 está enfocada a investigar el comportamiento de las subálgebras de una cadena de semi-Heyting dada. Finalmente, encontramos bases ecuacionales para algunas subvariedades de $\mathcal{SH}^C$ en la sección 2.4 resolviendo los problemas 14.6 a 14.10 sugeridos en [33].

2.2. Cadenas de semi-Heyting

En esta sección probaremos algunos resultados sobre las cadenas de semi-Heyting y determinaremos una formula para el número de estructuras de semi-Heyting que pueden ser definidas sobre una cadena de n elementos. Generalizaremos los resultados de Sankappanavar en [33] para las cadenas con 2, 3 y 4 elementos.

El siguiente lema establece que una parte de la tabla de la operación $\rightarrow$ en una cadena de semi-Heyting está unívocamente determinada.

Lema 2.2.1 [33] *Sea* $\mathbf{L}$ *una cadena de semi-Heyting y sean* $a, b \in L$. *Si* $a < b$ *entonces* $b \rightarrow a = a$.

Demostración Como $b \wedge a = b \wedge (b \to a)$ y $a < b$, obtenemos $a = b \wedge (b \to a)$. Como L es una cadena, $a = b$ o $a = b \to a$, luego $a = b \to a$. ■

Los dos lemas siguientes son útiles cuando tenemos que verificar si una cadena dada es un álgebra de semi-Heyting.

Lema 2.2.2 *Sea $\langle L, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ un reticulado acotado totalmente ordenado con una operación binaria $\to$ tal que si $a, b \in L$ con $a < b$ entonces $b \to a = a$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (a) $x \to x \approx 1$

 (b) $x \wedge (x \to y) \approx x \wedge y$

(2) (a) $x \to x \approx 1$

 (b) *Si $x < y$ entonces $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$.*

Demostración Sólo tenemos que probar que (2) $\Rightarrow$ (1). Es decir, queremos probar que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$ para todo $a, b \in L$. Si $a < b$, por (2) (b), $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$. Si $a = b$ por (2)(a), $a \wedge (a \to a) = a \wedge 1 = a = a \wedge a$. Finalmente, si $a > b$, por hipótesis $a \to b = b$ y, luego, $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$. ■

Lema 2.2.3 *Sea $\langle L, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ un reticulado acotado totalmente ordenado con una operación binaria $\to$ tal que si $a, b \in L$ con $a < b$ entonces $b \to a = a$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\langle L, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle \in \mathcal{SH}$

(2) (a) $x \to x \approx 1$

 (b) $x \wedge (x \to y) \approx x \wedge y$

 (c) *Si $y < x < z$ entonces $x \wedge (y \to x) = x \wedge (y \to z)$.*

Demostración (1) $\Rightarrow$ (2). Como $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle \in \mathcal{SH}$, $\mathbf{L}$ satisface (2)(a) y (2)(b). Sean $a, b, c \in L$ tal que $b < a < c$. Entonces $a \wedge (b \to c) = a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)] = a \wedge (b \to a)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Es suficiente probar (SH3). Sean $a, b, c \in L$, y supongamos que $c < b$.

Si $a < c$, entonces $a \wedge b = a \wedge c = a$. Luego $a \wedge (b \to c) = a \wedge c = a$ y $a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)] = a \wedge a = a$. En el caso que $c < a < b$ o $c < b < a$, entonces $a \wedge c < a \wedge b$. Luego $a \to [(a \wedge b) \to (a \wedge c)] = a \wedge a = a$.

Los otros casos son similares (ver apéndice 10.1.1). ■

Lema 2.2.4 *Sea $\mathbf{L}$ una cadena de semi-Heyting. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $0 \to a = 0$ *para algún $a \in L$ con $a \neq 0$*

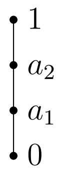
(b) $0 \to b = 0$ *para todo $b \in L$ con $b \neq 0$.*

Demostración Supongamos que $0 \to a = 0$ para algún $a \in L$, $a \neq 0$. Luego $0 = a \wedge 0 = a \wedge (0 \to a) = a \wedge ((0 \wedge a) \to (1 \wedge a)) = a \wedge (0 \to 1)$. Como $a \neq 0$ y L es una cadena, $0 \to 1 = 0$. Sea $b \in L :\ b \neq 0$. Entonces $0 = b \wedge 0 = b \wedge (0 \to 1) \overset{(SH3)}{=} b \wedge (0 \to b)$. Como $b \neq 0$ y L es una cadena, $0 \to b = 0$. ■

En particular, si $0 \to 1 = 0$, entonces $0 \to b = 0$ para todo $b \in L$, $b \neq 0$.

Con el objetivo de determinar el número de estructuras de semi-Heyting que pueden ser definidas en una cadena con n elementos, consideremos primero el siguiente ejemplo, pues contiene las ideas principales subyacentes en el procedimiento.

Sea $\mathbf{L}$ un reticulado de 4 elementos, $L = \{0, a_1, a_2, 1\}$, con $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 = 1$. Consideremos una operación binaria $\to: \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ de tal manera que $\langle L, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ es una cadena de semi-Heyting. Del lema 2.2.1, sabemos que para $x, y \in L$, si $x < y$ entonces $y \to x = x$. Consecuentemente, la mitad que se ubica por debajo de la diagonal principal, incluyendo la diagonal, de la tabla de la operación $\to$ de $\mathbf{L}$ está unívocamente determinada. Luego sólo resta llenar la parte superior de la tabla, esto es, los elementos $x \to y$ para $x < y$.



$\to$	0	a_1	a_2	1
0	1	?	?	?
a_1	0	1	?	?
a_2	0	a_1	1	?
1	0	a_1	a_2	1

Observemos que si $x \leq y$ entonces $x \leq x \to y$ (lema 1.0.4).

Si $0 \to 1 = 0$, entonces por el lema 2.2.4, $0 \to a_1 = 0 \to a_2 = 0$. Luego la primer fila de la tabla es

$\to$	0	a_1	a_2	1
0	1	0	0	0

Si $0 \to 1 = a_1$, entonces $0 \to a_2 = a_2$ y $0 \to a_1 \in [a_1)$, donde $[x) = \{y \in L :\ x \leq y\}$. De hecho, $a_1 = a_2 \wedge a_1 = a_2 \wedge (0 \to 1) = a_2 \wedge (0 \to a_2)$, luego $0 \to a_2 = a_1$; y $a_1 = a_1 \wedge (0 \to 1) \overset{(SH3)}{=} a_1 \wedge (0 \to a_1)$, esto es, $0 \to a_1 \geq a_1$.

Luego en este caso, la primer fila de la tabla es

$\to$	0	a_1	a_2	1
0	1	$\geq a_1$	a_1	a_1

De una manera similar puede verse que si $0 \to 1 = a_2$ ó $0 \to 1 = 1$, entonces $0 \to a_2 \in [a_2)$ y $0 \to a_1 \in [a_1)$. Entonces tenemos que

$\to$	0	a_1	a_2	1
0	1	$\geq a_1$	$\geq a_2$	$\geq a_2$

Como consecuencia podemos escribir para la primer fila

$$(0 \to 1, 0 \to a_2, 0 \to a_1) = \begin{cases} (0,0,0), & \\ (a_1, a_1, z), & \text{con } z \in [a_1) \\ (x,y,z), & \text{con } x, y \in [a_2), z \in [a_1), \end{cases}$$

es decir,
$(0 \to 1, 0 \to a_2, 0 \to a_1) \in \{\{0\} \times \{0\} \times \{0\}\} \cup \{\{a_1\} \times \{a_1\} \times [a_1)\} \cup \{\{a_2\} \times [a_2) \times [a_1)\} \cup \{\{1\} \times [a_2) \times [a_1)\}$.

Para la segunda y tercer fila tendremos las mismas posibilidades, determinadas por $a_1 \to 1$ y $a_2 \to 1$ respectivamente:

$\to$	0	a_1	a_2	1
a_1	0	1	a_1	a_2

$\to$	0	a_1	a_2	1
a_1	0	1	$\geq a_2$	$\geq a_2$

$\to$	0	a_1	a_2	1
a_2	0	a_1	1	$\geq a_2$

Observemos que el comportamiento de cada fila es independiente de las otras, y que, para $x < y$, el elemento $x \to y$ depende del elemento $x \to 1$.

El siguiente lema prueba que en toda cadena de semi-Heyting, la tabla de operación de $\to$ se comporta como en el ejemplo anterior.

Lema 2.2.5 *Sea* $\mathbf{L}$ *una cadena de semi-Heyting y sean* $a, b, c \in L$, $a \neq 1$. *Si* $a \to 1 = b$ *entonces para* $c > a$

$$\begin{cases} a \to c = b & si\ b < c \\ a \to c \in [c) & si\ b \geq c. \end{cases}$$

Demostración Supongamos que $b < c$. De $a \to 1 = b$ obtenemos que $c \wedge (a \to 1) = c \wedge b = b$, es decir, $c \wedge [(c \wedge a) \to (c \wedge 1)] = b$. Luego $c \wedge (a \to c) = b$. Como L es una cadena y $b < c$, entonces $b = a \to c$. Supongamos ahora que $b \geq c$. Como antes, $c \wedge (a \to c) = c$ pues $b \geq c$. Luego $c \leq a \to c$. ∎

Sea $\mathbf{L}_n = \langle L_n, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ una reticulado totalmente ordenado con n elementos:

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} = 1.$$

Sea $\to : \mathbf{L}_n \times \mathbf{L}_n \to \mathbf{L}_n$ una función tal que $\langle L_n, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle \in \mathcal{SH}$.

Motivado por el ejemplo anterior, introduciremos los siguientes conjuntos:

Para $a_j \in L_n$, $0 \leq j \leq n-2$, y para $1 \leq k \leq n-1$,

$$E_k^j = \begin{cases} \{a_j\} & \text{si} \quad k < n-j \\ [a_{n-k}) & \text{si} \quad k \geq n-j \end{cases}$$

y para $a_i < a_j$,

$$E_{a_j}^{a_i} = \prod_{k=1}^{n-i-1} E_k^j$$

Finalmente, sea F_i el conjunto

$$F_i = \bigcup_{j=i}^{n-1} E_{a_j}^{a_i} \quad \text{con} \quad 0 \leq i < n-1.$$

(F_i representará la fila de la tabla que corresponde a los elementos de la forma $a_i \to y$ con $a_i < y$).

En el ejemplo anterior (n = 4),

$$\begin{aligned} F_0 = \; & \bigcup_{j=0}^{3} E_{a_j}^{a_0} = E_{a_0}^{a_0} \cup E_{a_1}^{a_0} \cup E_{a_2}^{a_0} \cup E_{a_3}^{a_0} = \{E_1^0 \times E_2^0 \times E_3^0\} \cup \{E_1^1 \times E_2^1 \times E_3^1\} \cup \\ & \{E_1^2 \times E_2^2 \times E_3^2\} \cup \{E_1^3 \times E_2^3 \times E_3^3\} \\ = \; & \{\{a_0\} \times \{a_0\} \times \{a_0\}\} \cup \{\{a_1\} \times \{a_1\} \times [a_1)\} \cup \{\{a_2\} \times [a_2) \times [a_1)\} \cup \{\{a_3\} \times [a_2) \times [a_1)\}, \end{aligned}$$

Tenemos que $(0 \to 1, 0 \to a_2, 0 \to a_1) \in F_0$, $(a_1 \to 1, a_1 \to a_2) \in F_1$ y $a_2 \to 1 \in F_2$ y escribiremos $((0 \to 1, 0 \to a_2, 0 \to a_1), (a_1 \to 1, a_1 \to a_2), a_2 \to 1) \in F_0 \times F_1 \times F_2$.

Esto motiva la introducción del siguiente conjunto F (este representará la parte superior a la diagonal principal de la tabla):

$$F = \prod_{i=0}^{n-2} F_i.$$

Lema 2.2.6 $(a_i \to 1; a_i \to a_{n-2}, \ldots, a_i \to a_{i+1}) \in F_i$.

Demostración Como $a_i \leq 1$, entonces $a_i \to 1 \geq a_i$. Supongamos que $a_i \to 1 = a_k$ con $i \leq k \leq n-1$. Veremos que $(a_i \to 1; a_i \to a_{n-2}, \ldots, a_i \to a_{i+1}) \in E_{a_k}^{a_i}$. Por el lema 2.2.5,

$$a_i \to a_j \begin{cases} = a_k & \text{si} \quad k < j \\ \geq a_j & \text{si} \quad k \geq j \quad \text{con} \quad j > i \end{cases} \qquad (*)$$

Veamos que $a_i \to a_j \in E_{n-j}^k$ con $i+1 \leq j \leq n-1$. Si $n-j < n-k$ entonces $j > k$. Luego, por $(*)$, $a_i \to a_j = a_k$ y, consecuentemente, $a_i \to a_j \in E_{n-j}^k$. Si $n-j \geq n-k$ entonces $j \leq k$. Luego, por $(*)$, $a_i \to a_j \geq a_j$ y, entonces, $a_i \to a_j \in [a_{n-(n-j)})$. Entonces $a_i \to a_j \in E_{n-j}^k$ y entonces $(a_i \to 1; a_i \to a_{n-2}, \ldots, a_i \to a_{i+1}) \in E_{a_k}^{a_i}$. Como consecuencia, $(a_i \to 1; a_i \to a_{n-2}, \ldots, a_i \to a_{i+1}) \in F_i$. ∎

Notaremos $\alpha_{\to}(i) = (a_i \to 1; a_i \to a_{n-2}, \ldots, a_i \to a_{i+1})$ con $0 \leq i \leq n-2$.

Corolario 2.2.7 $(\alpha_{\to}(0), \alpha_{\to}(1), \ldots, \alpha_{\to}(n-2)) \in F$.

Ahora construiremos una implicación sobre un elemento dado $x \in F$.

Consideremos el conjunto F y $x \in F$. Entonces $x = (x(0), x(1), \ldots, x(n-2))$ donde $x(i) \in F_i$ para $0 \leq i \leq n-2$. Ahora, para cada i, existe j_i con $i \leq j_i \leq n-1$ tal que $x(i) \in E_{a_{j_i}}^{a_i}$. Luego $x(i) = (x(i)_{j_i}(1), x(i)_{j_i}(2), \ldots, x(i)_{j_i}(n-i-1))$ con $x(i)_{j_i}(k) \in E_k^{j_i}$, $1 \leq k \leq n-i-1$. Definimos en L_n una operación $\Rightarrow$ de la siguiente manera:

$$a_r \Rightarrow a_l = \begin{cases} a_l & \text{si} \quad r > l \\ a_{n-1} & \text{si} \quad r = l \\ x_{j_r}(r)(n-l) & \text{si} \quad r < l \end{cases}$$

El siguiente lema prueba que $\Rightarrow$ es una implicación de semi-Heyting.

Lema 2.2.8 $\langle L_n, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle \in \mathcal{SH}$.

Demostración Primero observemos que si $r < l$ entonces $1 \leq n-l \leq n-r-1$. Luego $\Rightarrow$ está bien definida.

Ahora, veremos que $\Rightarrow$ es una implicación de semi-Heyting.

Por definición de $\Rightarrow$, $L \models x \Rightarrow x \approx 1$.

Veamos que $L \models x \wedge (x \Rightarrow y) \approx x \wedge y$. Sean $x, y \in L$ con $x < y$. Entonces $x = a_r$ y $y = a_l$ con $0 \leq r, l \leq n-1$ y $r < l$. Luego $a_r \Rightarrow a_l = x(r)_{j_r}(n-l)$ pertenece al conjunto

$$E^{j_r}_{n-l} = \begin{cases} \{a_{j_r}\} & \text{si} \quad n-l < n-j_r \\ [a_{n-(n-l)}) & \text{si} \quad n-l \geq n-j_r \end{cases}.$$

Como $r \leq j_r$ y $r < l$, $a_r \wedge (a_r \Rightarrow a_l) = a_r = a_r \wedge a_l$. Luego $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$. Por el lema 2.2.2, $L \models x \wedge (x \Rightarrow y) \approx x \wedge y$.

Resulta extenso pero computacional probar que $L \models x \wedge (y \Rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)]$ (ver apéndice 10.1.2).

Por el lema 2.2.3, $\Rightarrow$ es una implicación de semi-Heyting. ■

De lo anterior se deducen los siguientes resultados

Teorema 2.2.9 *Sea* $S_n = \{\rightarrow : L^2_n \rightarrow L_n \mid \langle L_n, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle \in \mathcal{SH}\}$. *Existe una correspondencia biyectiva entre* S_n *y* F.

Demostración Definimos $\alpha : S_n \rightarrow F$ como sigue: $\alpha(\rightarrow) = (\alpha_{\rightarrow}(0), \alpha_{\rightarrow}(1), \ldots, \alpha_{\rightarrow}(n-2))$ para cada $\rightarrow \in S_n$. Por el corolario 2.2.7, $\alpha(\rightarrow) \in F$. Por el lema 2.2.8, α es sobre.

Probemos que α es inyectiva. Sea $\rightarrow_1, \rightarrow_2 \in S_n$ tal que $\alpha(\rightarrow_1) = \alpha(\rightarrow_2)$. Por el lema 2.2.1, si $a_r > a_l$ entonces $a_r \rightarrow_1 a_l = a_l = a_r \rightarrow_2 a_l$. Si $a_r = a_l$ entonces $a_r \rightarrow_1 a_l = 1 = a_r \rightarrow_2 a_l$. Como $\alpha(\rightarrow_1) = \alpha(\rightarrow_2)$, $(\alpha_{\rightarrow_1}(0), \alpha_{\rightarrow_1}(1), \ldots, \alpha_{\rightarrow_1}(n-2)) = (\alpha_{\rightarrow_2}(0), \alpha_{\rightarrow_2}(1), \ldots, \alpha_{\rightarrow_2}(n-2))$. Luego $\alpha{\rightarrow_1}(i) = \alpha{\rightarrow_2}(i)$ para todo i con $0 \leq i < n-1$. Entonces $a_i \rightarrow_1 1 = a_i \rightarrow_2 1$, $a_i \rightarrow_1 a_{n-2} = a_i \rightarrow_2 a_{n-2}, \ldots, a_i \rightarrow_1 a_{i+1} = a_i \rightarrow_2 a_{i+1}$ para todo i con $0 \leq i < n-1$. Luego $\rightarrow_1 = \rightarrow_2$, y α es inyectiva. ■

Nuestro siguiente objetivo es determinar el cardinal del conjunto F.

Lema 2.2.10 $E^{a_i}_{a_j} \cap E^{a_i}_{a_k} = \emptyset$ *con* $j \neq k$.

Demostración Sea $x \in E^{a_i}_{a_j} \cap E^{a_i}_{a_k}$ y supongamos que $j < k$. Como $x \in E^{a_i}_{a_j}$ entonces $x = (x(1), x(2), \ldots, x(n-i-1))$, con $x(m) \in E^j_m$, $1 \leq m \leq n-i-1$. Como $x \in E^{a_i}_{a_k}$ entonces $x = (z(1), z(2), \ldots, z(n-i-1))$ con $z(m) \in E^k_m$, $1 \leq m \leq n-i-1$. Ahora, si $1 < n-j$, $x(1) = a_j$ y si $1 \geq n-j$, entonces $x(1) = 1$. Si $1 < n-k$, $z(1) = a_k$ y si $1 \geq n-k$, entonces $z(1) = 1$. También, como $j < k$, $n-j > n-k$. Si $1 < n-k < n-j$ entonces $x(1) = a_j$ y $z(1) = a_k$, lo cual es una contradicción pues $x(1) = z(1)$. Los otros casos son similares. Consecuentemente, $E^{a_i}_{a_j} \cap E^{a_i}_{a_k} = \emptyset$ ■

Lema 2.2.11 $|F| = \prod\limits_{i=0}^{n-2} \left[1 + (n-i-1)! \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!} \right]$

Demostración Por el lema 2.2.10, $|F_i| = \sum\limits_{j=i}^{n-1} \left|E^{a_i}_{a_j}\right|$ con $\left|E^{a_i}_{a_j}\right| = \left|E^j_1\right| \cdot \left|E^j_2\right| \cdot \ldots \cdot \left|E^j_{n-i-1}\right|$.

$$\left|E^j_k\right| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k < n-j \\ n-1-(n-k)+1 & \text{si} \quad k \geq n-j \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k < n-j \\ k & \text{si} \quad k \geq n-j \end{cases}.$$

Luego $\left|E^{a_i}_{a_j}\right| = \begin{cases} (n-j).(n-j+1)...(n-i-1) & \text{si} \quad j > i \\ 1 & \text{si} \quad j = i \end{cases}$. Entonces

$$|F_i| = 1 + \sum_{j=i+1}^{n-1} (n-j).(n-j+1)...(n-i-1) = 1 + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{(n-i-1)!}{(n-j-1)!}$$

$$= 1 + (n-i-1)! \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!}.$$

Luego, $\quad |F| = \prod\limits_{i=0}^{n-2} \left[1 + (n-i-1)! \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!} \right]$ ■

Por el lema 2.2.11 y por el teorema 2.2.9 se deduce inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 2.2.12 *Existen*

$$\prod_{i=0}^{n-2} \left[1 + (n-i-1)! \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!} \right]$$

cadenas de semi-Heyting con n elementos no isomorfas, para $n \geq 2$.

Para $n = 2, 3, 4$ esta fórmula da 2, 10 y 160 respectivamente, lo cual coincide con los números determinados por Sankappanavar en [33]. Para $n = 5$, existen 10400 cadenas de semi-Heyting con 5 elementos no isomorfas.

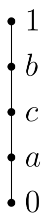
2.3. Subálgebras isomorfas de una cadena de semi-Heyting

Cuando se tiene que investigar el reticulado de subvariedades de $\mathcal{SH}^C$, resulta importante caracterizar las subálgebras de una cadena de semi-Heyting finita y estudiar la relación entre cadenas de $\mathcal{SH}^C$.

En esta sección consideraremos el siguiente problema, el cual mostrará la complejidad del problema general. Dada una cadena con n elementos $\mathbf{L}$ queremos saber cuándo una cadena de semi-Heyting con $n+1$ elementos $\mathbf{L}'$ contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbf{L}$, y el número de álgebras $\mathbf{L}'$ que pueden ser encontradas en esas condiciones.

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ una cadena de semi-Heyting con 4 elementos, $L : 0 < a < b < 1$. Queremos determinar el número de cadenas de semi-Heyting $\mathbf{L}'$ con 5 elementos tal que $\mathbf{L}$ es (isomorfa a) una subálgebra de $\mathbf{L}'$. Sea $\mathbf{L}'$ una cadena de semi-Heyting con 5 elementos tal que $\mathbf{L} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}')$ y asumamos que $L' = L \cup \{c\}$.

Supongamos que $0 < a < c < b < 1$. Sólo debemos considerar los elementos $x \to c$ para $x < c$ y los elementos $c \to y$ para $c < y$.



	0	a	c	b	1
0			?		
a			?		
c				?	?
b					
1					

Si $0 \to b \leq a$ entonces $c \wedge (0 \to c) = c \wedge (0 \to b) = 0 \to b$. Como $\mathbf{L}$ es una cadena, $0 \to c = 0 \to b$.

Si $0 \to b \geq b$ entonces $c \wedge (0 \to c) = c \wedge (0 \to b) = c$. Entonces $0 \to c \geq c$, es decir

$$0 \to c = 0 \to b \text{ si } 0 \to b \leq a \text{ y } 0 \to c \geq c \text{ si } 0 \to b \geq b.$$

Similarmente, si $a \to b = a$ entonces $a \to c = a \to b$, y si $a \to b \geq b$ entonces $a \to c \geq c$. Es decir,

$$a \to c = a \to b \text{ si } a \to b = a \text{ y } a \to c \geq c \text{ si } 0 \to b \geq b.$$

Además, $c \to 1 \geq c$ y

$$c \to b = c \to 1 \text{ si } c \to 1 = c \text{ y } c \to b \geq b \text{ si } c \to 1 \geq b.$$

Entonces podemos concluir que

$$(c \to 1, c \to b) \in (\{c\} \times \{c\}) \cup (\{b\} \times [b)) \cup (\{1\} \times [b)).$$

De una manera similar se pueden considerar los casos $0 < a < b < c < 1$ y $0 < c < a < b < 1$.

En general, sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ una cadena de semi-Heyting con n elementos, $n \geq 3$, con

$$L : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} = 1.$$

Para $0 \leq i \leq n-2$ dado, sea $\langle L^i, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ una cadena con $n+1$ elementos con $L^i = L \cup \{b_i\}$, $b_i \notin L$, y

$$L^i : \; 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_i < b_i < a_{i+1} < \ldots < a_{n-1} = 1.$$

Queremos encontrar condiciones sobre una implicación $\to$: $L^i \times L^i \to L^i$ de manera que $\mathbf{L}$ sea una subálgebra de $\mathbf{L}^i = \langle L^i, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ y determinar cuántas implicaciones pueden ser definidas en esas condiciones.

Consideremos los siguientes conjuntos

(a) $F^k_j = \begin{cases} \{a_k\} & si \quad k < j \\ [a_j) & si \quad k \geq j \end{cases}$

(b) $F^i_k = \{a_k\} \times \prod_{j=i+1}^{n-2} F^k_j$

(c) $F^i_0 = \{b_i\} \times \prod_{j=i+1}^{n-2} \{b_i\}$

(d) $E^i_j = \begin{cases} \{a_j \to a_{i+1}\} & si \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ [b_i) & si \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases}$

(e) $E^i = \prod_{j=0}^{i} E^i_j$

(f) $G^i = E^i \times \left[\left(\bigcup_{k=i+1}^{n-1} F^i_k\right) \cup F^i_0\right]$

Lema 2.3.1 *Sean* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{L}^i$ *en las condiciones introducidas más arriba. Entonces*

$$((a_0 \to b_i, a_1 \to b_i, \ldots, a_i \to b_i), (b_i \to 1, b_i \to a_{i+1}, b_i \to a_{i+2}, \ldots, b_i \to a_{n-2})) \in \ G^i.$$

Demostración Para $0 \leq j \leq i$, $a_j < a_{i+1}$, y entonces por el lema 1.0.4, $a_j \to a_{i+1} \geq a_j$. Si $a_j \to a_{i+1} = a_l$ con $j \leq l \leq i$, como $b_i > a_l$, por el lema 2.2.5, $a_j \to b_i = a_l = a_j \to a_{i+1}$. Si $a_j \to a_{i+1} = a_l$ con $i+1 \leq l \leq n-1$, por el lema 2.2.5, $a_j \to b_i \geq b_i$. Entonces $a_j \to b_i \in E^i_j$. Consecuentemente, $(a_0 \to b_i, a_1 \to b_i, \ldots, a_i \to b_i) \in E^i$. Además, como $b_i < 1$, por el lema 1.0.4, $b_i \to 1 \geq b_i$. Luego $b_i \to 1 = b_i$ ó $b_i \to 1 = a_k$ con $i+1 \leq k \leq n-1$.

Supongamos que $b_i \to 1 = b_i$. Consideremos j con $i+1 \leq j \leq n-2$. Por el lema 2.2.5, $b_i \to a_j = b_i$. Entonces $(b_i \to 1, b_i \to a_{i+1}, \ldots, b_i \to a_{n-2}) \in F^i_0$.

Si $b_i \to 1 = a_k$ con $i+1 \leq k \leq n-1$, consideremos j con $i+1 \leq j \leq n-2$. Si $j \leq k$, por el lema 2.2.5, $b_i \to a_j \geq a_j$. Si $j > k$, por el lema 2.2.5, $b_i \to a_j = a_k$. entonces $(b_i \to 1, b_i \to a_{i+1}, \ldots, b_i \to a_{n-2}) \in F^i_k$.

Entonces, $(b_i \to 1, b_i \to a_{i+1}, \ldots, b_i \to a_{n-2}) \in \bigcup_{k=i+1}^{n-1} F^i_k \cup F^i_0$. Luego $((a_0 \to b_i, a_1 \to b_i, \ldots, a_i \to b_i), (b_i \to 1, b_i \to a_{i+1}, b_i \to a_{i+2}, \ldots, b_i \to a_{n-2})) \in \ G^i$. ■

Ahora construiremos una implicación a partir de un elemento dado del conjunto G^i.

Sea $\alpha \in G^i$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con $\alpha_1 \in E^i$ y $\alpha_2 \in \left(\bigcup_{k=i+1}^{n-1} F^i_k\right) \cup F^i_0$. Como $\alpha_1 \in E^i$, entonces $\alpha_1 = (\alpha_1(0), \alpha_1(1), \ldots, \alpha_1(i))$ con $\alpha_1(j) \in E^i_j$ para todo j, $0 \leq j \leq i$. Como $\alpha_2 \in \left(\bigcup_{k=i+1}^{n-1} F^i_k\right) \cup F^i_0$, entonces $\alpha_2 \in F^i_{k_0}$ para todo k_0 con $i+1 \leq k_0 \leq n-1$ ó $\alpha_2 \in F^i_0$. Luego $\alpha_2 = (\alpha_2(n-1), \alpha_2(i+1), \alpha_2(i+2), \ldots, \alpha_2(n-2))$. Si $\alpha_2 \in F^i_{k_0}$ para todo k_0 con $i+1 \leq k_0 \leq n-1$ entonces $\alpha_2(n-1) = a_{k_0}$ y $\alpha_2(j) \ \in \ F^{k_0}_j$ con $i+1 \leq j \leq n-2$. Si

$\alpha_2 \in F_0^i$ entonces $\alpha_2(n-1) = b_i$ y $\alpha_2(j) = b_i$ con $i+1 \leq j \leq n-2$. En L^i definimos la operación $\Rightarrow$ como:

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} x \to y & \text{si} \quad x, y \in L \\ 1 & \text{si} \quad x = y \\ y & \text{si} \quad (x,y) = (a_j, b_i) \quad \text{con} \quad i+1 \leq j \leq n-1 \\ y & \text{si} \quad (x,y) = (b_i, a_j) \quad \text{con} \quad 0 \leq j \leq i \\ \alpha_1(j) & \text{si} \quad (x,y) = (a_j, b_i) \quad \text{con} \quad 0 \leq j \leq i \\ \alpha_2(j) & \text{si} \quad (x,y) = (b_i, a_j) \quad \text{con} \quad i+1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Lema 2.3.2 *Sea* $\mathbf{L}^i = \langle L^i, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$. *Entonces* $\mathbf{L}^i \in \mathcal{SH}$ *y, consecuentemente,* $\mathbf{L}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{L}^i$.

Demostración Claramente, $\mathbf{L}^i \models x \Rightarrow x \approx 1$.

Veamos que $\mathbf{L}^i \models x \wedge (x \Rightarrow y) \approx x \wedge y$. Sean $a, b \in L^i$ con $a < b$.

Si $a, b \in L$, entonces $a \wedge (a \Rightarrow b) = a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

Supongamos que $a = b_i$, $b = a_r$ con $i+1 \leq r \leq n-1$ y $\alpha_2 \in F_{k_0}^i$ con $i+1 \leq k_0 \leq n-1$. Entonces $b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_r) = b_i \wedge \alpha_2(r)$. Si $r = n-1$, $b_i \wedge (b_i \Rightarrow 1) = b_i \wedge \alpha_2(n-1) = b_i \wedge a_{k_0} = b_i = b_i \wedge 1$. Si $r < n-1$, $b_i \Rightarrow a_r = \begin{cases} a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < r \\ x & \text{si} \quad k_0 \geq r \quad \text{con} \quad x \geq a_r \end{cases}$.

Consecuentemente $b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_r) = \begin{cases} b_i & \text{si} \quad k_0 < r \\ b_i & \text{si} \quad k_0 \geq r \end{cases} = b_i \wedge a_r$

Supongamos ahora que $a = b_i$, $b = a_r$ con $i+1 \leq r \leq n-1$ y $\alpha_2 \in F_0^i$. En este caso $b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_r) = b_i \wedge \alpha_2(r) = b_i \wedge b_i = b_i = b_i \wedge a_r$.

Finalmente si $a = b_i$ y $b = a_r$ con $0 \leq r \leq i$ entonces $a_r \wedge (a_r \Rightarrow b_i) = a_r \wedge \alpha_1(r)$. Luego, $\alpha_1(r) = \begin{cases} a_r \to a_{i+1} & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ x & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \quad \text{con} \quad x \geq b_i \end{cases}$,

entonces, $a_r \wedge \alpha_1(r) = \begin{cases} a_r \wedge (a_r \to a_{i+1}) & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ a_r \wedge x & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \quad \text{con} \quad x \geq b_i \end{cases}$.

Luego $a_r \wedge (a_r \Rightarrow b_i) = a_r \wedge \alpha_1(r) = a_r = a_r \wedge b_i$.

De una manera similar se pude probar que $\mathbf{L}^i \models x \wedge (y \Rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)]$ (ver apéndice 10.1.3).

Por el lema 2.2.3, $\mathbf{L}^i \in \mathcal{SH}$. ■

Observación 2.3.3 *Del lema anterior se deduce que para toda cadena de semi-Heyting con* n *elementos* $\mathbf{L}$ *existe una cadena de semi-Heyting con* $n+1$ *elementos* $\mathbf{L}'$ *tal que* $\mathbf{L}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{L}'$.

De los resultados anteriores podemos establecer la siguiente correspondencia:

Teorema 2.3.4 *Sea* S_i *el conjunto de operaciones* $\to : L^i \times L^i \to L^i$ *tal que* $\mathbf{L}^i = \langle L^i, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle \in \mathcal{SH}$ *y* $\mathbf{L}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{L}^i$. *Entonces existe una correspondencia biyectiva entre* S_i *y* G^i.

Demostración Definimos $\alpha : S_i \to G^i$ como $\alpha(\to) = ((a_0 \to b_i, a_1 \to b_i, \ldots, a_i \to b_i), (b_i \to 1, b_i \to a_{i+1}, b_i \to a_{i+2}, \ldots, b_i \to a_{n-2}))$. Por el lema 2.3.1 y lema 2.3.2, α está bien definida y es sobre. La inyectividad queda a cargo del lector. ■

Ahora queremos determinar el cardinal del conjunto G^i.

Lema 2.3.5 *Sean* $i+1 \leq k, k' \leq n-1$ *y* $0 \leq i \leq n-2$. *Entonces* $F_k^i \cap F_{k'}^i = \emptyset$ *si* $k \neq k'$.

Demostración Sea $\alpha \in F_k^i \cap F_{k'}^i$ y supongamos que $k < k'$. Como $\alpha \in F_k^i, \alpha = (\alpha_1, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_{n-2})$ con $\alpha_1 = a_k$ y $\alpha_j \in F_j^k$ con $i+1 \leq j \leq n-2$. Como $\alpha \in F_{k'}^i, \alpha = (\alpha_1, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_{n-2})$ con $\alpha_1 = a_{k'}$ y $\alpha_j \in F_j^{k'}$ con $i+1 \leq j \leq n-2$. Luego $a_k = a_{k'}$ y por lo tanto $k = k'$ lo cual es una contradicción. ■

Lema 2.3.6

$$\left|G^i\right| = \prod_{j=0}^{i} A_j^i \left(\sum_{k=i+1}^{n-2} \frac{(n-(i+1)-1)!}{(n-(i+1)-(k-(i+1)+2))!} + (n-(i+1)-1)! + 1 \right),$$

donde

$$A_j^i = \begin{cases} 1 & si \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ n-i & si \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases}.$$

Demostración Tenemos que $F_j^k = \begin{cases} \{a_k\} & \text{si} \quad k < j \\ [a_j) & \text{si} \quad k \geq j \end{cases}$ y entonces

$$\left|F_j^k\right| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k < j \\ n-2-j+1 & \text{si} \quad k \geq j \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k < j \\ n-j-1 & \text{si} \quad k \geq j \end{cases}$$

Luego, para $k \neq n-1$,

$$\prod_{j=i+1}^{n-2} \left|F_j^k\right| = \frac{(n-(i+1)-1)!}{(n-(i+1)-(k-(i+1)+2))!}.$$

Si $k = n-1$, $\prod_{j=i+1}^{n-2} \left|F_j^k\right| = (n-(i+1)-1)!$.
Además, como

$$E_j^i = \begin{cases} \{a_j \to a_{i+1}\} & \text{si} \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ [b_i) & \text{si} \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases},$$

entonces $|E_j^i| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ |\,[b_i)\,| & \text{si} \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases}$ con $|[b_i)| = n-1-(i+1)+2 = n-1-i-1+2 = n-i$.
Sea

$$A_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ n-i & \text{si} \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases}.$$

Entonces, como, $G^i = E^i \times \left[\left(\bigcup_{k=i+1}^{n-1} F_k^i \right) \cup F_0^i \right]$, por el lema 2.3.5

$$\left|G^i\right| = \prod_{j=0}^{i} A_j^i \left(\sum_{k=i+1}^{n-2} \frac{(n-(i+1)-1)!}{(n-(i+1)-(k-(i+1)+2))!} + (n-(i+1)-1)! + 1 \right).$$

■

Del lema 2.3.6 y teorema 2.3.4 resulta el siguiente corolario.

Corolario 2.3.7 *El número de álgebras no isomorfas* $\mathbf{L}^i$ *es:*

$$\prod_{j=0}^{i} A_j^i \left(\sum_{k=i+1}^{n-2} \frac{(n-(i+1)-1)!}{(n-(i+1)-(k-(i+1)+2))!} + (n-(i+1)-1)! + 1 \right)$$

donde

$$A_j^i = \begin{cases} 1 & si \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ n-i & si \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases} .$$

Corolario 2.3.8 *El número de cadenas de semi-Heyting con* $n+1$ *elementos no isomorfas* $\mathbf{L}^i$ *tal que* $\mathbf{L}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{L}^i$ *está dado por*

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left[\prod_{j=0}^{i} A_j^i \left(\sum_{k=i+1}^{n-2} \frac{(n-(i+1)-1)!}{(n-(i+1)-(k-(i+1)+2))!} + (n-(i+1)-1)! + 1 \right) \right]$$

donde

$$A_j^i = \begin{cases} 1 & si \quad a_j \to a_{i+1} \leq a_i \\ n-i & si \quad a_j \to a_{i+1} > a_i \end{cases}$$

Resta considerar el caso $n = 2$.

Recordemos que $\mathbf{2}$ y $\overline{\mathbf{2}}$ las cadenas de semi-Heyting con dos elementos cuya operación $\to$ satisface $0 \to 1 = 1$ y $0 \to 1 = 0$ respectivamente. $\mathbf{2}$ es un álgebra de Heyting (la cual además es una álgebra de Boole), mientras que $\overline{\mathbf{2}}$ no lo es.

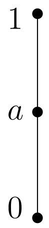
Sea $\mathbf{L}$ alguna de las cadenas $\mathbf{2}$ ó $\overline{\mathbf{2}}$. Sea $\mathbf{L}' = \langle L', \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ la cadena con tres elementos $0 < b < 1$. Si $\mathbf{L}$ es una subálgebra de $\mathbf{L}'$, entonces sólo tenemos que determinar los elementos $0 \to b$ y $b \to 1$. Del lema 2.2.5, si $0 \to 1 = 0$ entonces $0 \to b = 0$ y si $0 \to 1 = 1$ entonces $0 \to b \geq b$. Adicionalmente, $b \to 1 \geq b$.

Entonces tenemos que

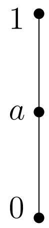
Corolario 2.3.9 *Existen cuatro cadenas de semi-Heyting con* 3 *elementos no isomorfas tal que contienen a* $\mathbf{2}$ *como una subálgebra y dos cadenas de semi-Heyting con* 3 *elementos no isomorfas tal que contienen a* $\overline{\mathbf{2}}$ *como subálgebra.*

A continuación se muestran las seis cadenas a las que se refiere en el Corolario 2.3.9.

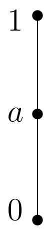
Cadenas que contienen al álgebra 2 como subálgebra:



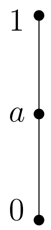
$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1



$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	1
1	0	a	1

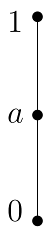


$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	a
1	0	a	1



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	a
1	0	a	1

Cadenas que contienen al álgebra $\overline{\mathbf{2}}$ como subálgebra:



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	0	0
a	0	1	1
1	0	a	1

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	0	0
a	0	1	a
1	0	a	1

Teorema 2.3.10 *Sea $n \geq 3$. Existe una cadena de semi-Heyting con $n+1$ elementos tal que no contiene ninguna cadena con semi-Heyting de n elementos como subálgebra.*

Demostración Sea $L' : b_0 < b_1 < \ldots < b_{n-1} < b_n$. Definimos $\rightarrow: L' \times L' \rightarrow L'$ en términos

$$b_i \rightarrow b_j = \begin{cases} b_{i+1} & \text{si} \quad i < j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \\ b_j & \text{si} \quad i > j \quad \text{con} \quad 0 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

Es fácil probar que $\rightarrow$ es una implicación de semi-Heyting.

Supongamos que existe una subálgebra $\mathbf{L}$ de $\mathbf{L}'$ y $|\mathbf{L}| = n$. Entonces existe $0 < k < n$ tal que $L = L' \setminus \{b_k\}$. Ahora, $b_k = b_{k-1} \rightarrow b_{k+1}$, y entonces $b_k \in L$, contradicción. ■

2.4. Bases ecuacionales para $\mathcal{SH}^C$

En esta sección daremos bases ecuacionales para la variedad $\mathcal{SH}^C$ y algunas de sus subvariedades.

Lema 2.4.1 *Sea $\mathbf{L}$ una cadena de semi-Heyting. Entonces $\mathbf{L}$ satisface la siguiente identidad*

$$((x \vee (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)) \vee (y \rightarrow (x \wedge y)) \approx 1 \qquad \text{(Ch)}$$

Demostración Sean $a, b \in L$. Como L es una cadena, $a \leq b$ ó $b < a$. Si $a \leq b$, por el lema 1.0.4, $a \leq a \rightarrow b$. Luego $a \vee (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$, entonces $(a \vee (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$. Si $b < a$, $b = b \wedge a$ y entonces $b \rightarrow (a \wedge b) = b \rightarrow b = 1$. ■

Lema 2.4.2 *Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por* (Ch). *Si $\mathbf{L} \in \mathcal{V}$ es subdirectamente irreducible, entonces $\mathbf{L}$ es una cadena.*

Demostración Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible y sean $a, b \in L$. Como L satisface (Ch), $((a \vee (a \to b)) \to (a \to b)) \vee (b \to (a \wedge b)) = 1$. Como $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible, 1 es $\vee$-irreducible. Luego $(a \vee (a \to b)) \to (a \to b) = 1$ ó $b \to (a \wedge b) = 1$.

Supongamos que $(a \vee (a \to b)) \to (a \to b) = 1$. Entonces $a \vee (a \to b) \leq a \to b$, y por lo tanto, $a \leq a \vee (a \to b) \leq a \to b$. Luego $a \wedge b = a \wedge (a \to b) = a$, entonces $a \leq b$.

Si $b \to (a \wedge b) = 1$, entonces $b \leq a \wedge b$, y en consecuencia $b \leq a$.

Luego $\mathbf{L}$ es una cadena. $\blacksquare$.

De los lemas 2.4.1 y 2.4.2 tenemos lo siguiente.

Teorema 2.4.3 *Una base ecuacional para $\mathcal{SH}^C$ relativa a $\mathcal{SH}$ está dada por*

$$((x \vee (x \to y)) \to (x \to y)) \vee (y \to (x \wedge y)) \approx 1 \qquad \text{(Ch)}.$$

Sea $\mathcal{C}_n$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ generada por todas las cadenas de n elementos, $n \geq 2$.

Es fácil ver que el siguiente teorema se verifica.

Teorema 2.4.4 *Una base ecuacional para $\mathcal{C}_2$ relativa a $\mathcal{SH}$ está dada por*

$$((x \vee (x \to y)) \to (x \to y)) \vee (y \to (x \wedge y)) \approx 1 \qquad \text{(Ch)}$$

y

$$x \vee x^* \approx 1.$$

Observemos que $\mathcal{C}_2$ es la subvariedad generada por las álgebras $\mathbf{2}$ y $\overline{\mathbf{2}}$, es decir, es la variedad $\mathcal{SH}^B$ de las álgebras de semi-Heyting booleanas.

Teorema 2.4.5 *Una base ecuacional para $\mathcal{C}_n$ con $n \geq 3$ está dada por las siguientes identidades*

$$((x \vee (x \to y)) \to (x \to y)) \vee (y \to (x \wedge y)) \approx 1 \qquad \text{(Ch)}$$

y

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (x_i \vee x_i^*) \vee \bigvee_{j=1; j<i}^{n-1} (x_i \to x_j) \approx 1 \ (\mathrm{H_n})$$

Demostración Sea $\mathbf{L}$ una cadena de semi-Heyting de n elementos, $L : 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < 1$. Por el teorema 2.4.3, $\mathbf{L}$ satisface (Ch).

Probemos que $\mathbf{L}$ satisface $(\mathrm{H_n})$. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in L$. Si $z_k \in \{0, 1\}$ para algún k, $1 \leq k \leq n-1$, entonces $z_k \vee z_k^* = 1$. Supongamos que $z_k \notin \{0, 1\}$ para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, es decir, $z_k \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ para todo k. Entonces existe $j < i$ tal que $z_i = z_j$, y entonces $z_i \to z_j = 1$. Luego $\mathbf{L}$ satisface $(\mathrm{H_n})$.

Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por (Ch) y $(\mathrm{H_n})$ y consideremos un álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{L} \in \mathcal{V}$. Por el teorema 2.4.3, $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}^C$, y por el lema 2.4.2, L es una cadena. Supongamos que existen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \in L$ tales que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < 1$. Entonces $\bigvee_{i=1}^{n-1} (a_i \vee a_i^*) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (a_i \vee 0) = a_{n-1}$. Por hipótesis,

$a_{n-1} \vee \bigvee_{i,j=1;j<i}^{n-1} (a_i \to a_j) = 1$, y como 1 es $\vee$-irreducible, $a_i \to a_j = 1$ para algún $j < i$. Luego $a_i \leq a_j$, contradicción. Luego $|L| \leq n$, y consecuentemente $\mathbf{L} \in \mathcal{C}_n$. ■

Como un corolario inmediato del teorema 2.4.3 podemos determinar bases ecuacionales para las siguientes subvariedades de $\mathcal{SH}^C$ introducidas en [33]: $\mathcal{FTT}^C = \mathcal{SH}^C \cap \mathcal{FTT}$, $\mathcal{FTD}^C = \mathcal{SH}^C \cap \mathcal{FTD}$, $\mathcal{QH}^C = \mathcal{SH}^C \cap \mathcal{QH}$ (variedad generada por las cadenas de quasi-Heyting), $\mathcal{H}^C = \mathcal{SH}^C \cap \mathcal{H}$ (la variedad de las álgebras de Heyting lineales), $\mathcal{FTF}^C = \mathcal{SH}^C \cap \mathcal{FTF}$ y $com\mathcal{SH}^C = \mathcal{SH}^C \cap com\mathcal{SH}$ (variedad generada por las cadenas de semi-Heyting conmutativas).

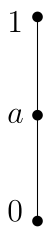
Capítulo 3

La variedad generada por las cadenas en las que $Sg(\{a, b\}) = \{0, a, b, 1\}$

3.1. Introducción

En este capítulo tendrán importancia las cadenas de semi-Heyting $\mathbf{L}$ que satisfacen la siguiente condición para todo $a, b \in L$: Si $a < b$ entonces $a \to b \in \{a, b, 1\}$. Es decir, el universo de la subálgebra generada por el conjunto $\{a, b\}$ es $\{0, a, b, 1\}$. Investigaremos en $\mathcal{SH}$ la variedad generada por ellas que será notada por $\mathcal{CI}$. Diremos que un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{L}$ en $\mathcal{SH}^C$ es una $\mathcal{CI}$-álgebra si $\mathbf{L} \in \mathcal{CI}$.

Observemos que en el caso de las álgebras de Heyting lineales totalmente ordenadas para todo $a, b \in L$ si $a < b$ entonces $a \to b = 1$ y en el caso de las cadenas en $com\mathcal{SH}^C$, para todo $a, b \in L$ si $a < b$ entonces $a \to b = a$. Como consecuencia la variedad $\mathcal{CI}$ es más general y abarcativa como muestra el siguiente ejemplo:



$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	a
1	0	a	1

Vamos a probar que la variedad $\mathcal{CI}$ está definida, módulo $\mathcal{SH}$, por la identidad

$$((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow x) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y) \vee (x \to y) \approx 1. \tag{3.1}$$

donde $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$.

Además demostraremos que $\mathcal{CI}$ está generada por sus miembros (cadenas) finitos, los cuales serán caracterizados, y estudiaremos diferentes propiedades de estos miembros finitos que la generan.

3.2. Base ecuacional para la variedad $\mathcal{CI}$ y generación por sus miembros finitos

Veremos que $\mathcal{CI}$ está definida por la identidad (3.1) y probaremos que está generada por sus miembros finitos los cuáles serán caracterizados de manera completa. Recordemos que en $\mathcal{CI}$ si $\mathbf{L}$ es una cadena y $W \subseteq L$ entonces la $\mathcal{CI}$-álgebra generada por W es $W \cup \{0, 1\}$.

Del teorema 1.0.19 resulta inmediato probar el siguiente lema.

Lema 3.2.1 *Si* $\mathbf{L}$ *es una cadena de semi-Heyting y* $\mathbf{L} \models ((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow x) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y) \vee (x \to y) \approx 1$ *entonces* $\mathbf{L} \in \mathcal{CI}$.

El siguiente resultado prueba uno de los principales objetivos de esta sección:

Teorema 3.2.2 *La identidad (3.1) es una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{CI}$ *relativa a* $\mathcal{SH}^C$*:*

Demostración Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}^C$ subdirectamente irreducible tal que verifica la identidad (3.1). Por el Lema 2.4.2, $\mathbf{L}$ es totalmente ordenada. Luego, del lema anterior, $\mathbf{L} \in \mathcal{CI}$.

Para la recíproca consideremos un álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{L} \in \mathcal{CI}$. Queremos probar que para todo $a, b \in L$ se tiene que $((a \wedge b) \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow a) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) \vee (a \to b) = 1$. La igualdad anterior resulta inmediata del hecho de que si $a < b$ entonces $a \to b \in \{a, b, 1\}$. ■

Ahora vamos a determinar los elementos que generan la subvariedad $\mathcal{CI}$. Para lograr este objetivo deberemos introducir algunos conceptos.

Consideremos el siguiente ejemplo crucial para la comprensión de las definiciones dadas en el resto de la sección.

Sea $\mathbf{L}$ un reticulado con 4 elementos, $L = \{0, a_1, a_2, 1\}$, con $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 = 1$. Consideremos una operación binaria $\to: \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ de tal manera que $\langle L, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ es una $\mathcal{CI}$-álgebra.

Observemos que $0 \to 1 \in \{0, 1\}$. Si $0 \to 1 = 0$, por el lema 2.2.5, $0 \to a = 0$ para $0 < a$. Además si $0 \to 1 = 1$, por el lema 2.2.5, $0 \to a \in \{a, 1\}$ para $0 < a$. Esta situación se puede generalizar para todos los elementos $a \to b$ con $a < b$ de la siguiente manera:

$$(3.2)\quad a \to b = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \to 1 = a \\ \in \{b, 1\} & \text{si} \quad a \to 1 = 1 \end{cases}$$

Vamos a introducir una función γ que determinará los elementos de la forma $a_i \to 1$ con $0 \leq i \leq n - 2$, es decir, $a_i \to 1 = a_{\gamma(i)}$.

Definición 3.2.3 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2$. *Llamaremos* valuación n-ésima *a toda función* $\gamma : \{0, 1, \ldots, n-2\} \to \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$ *tal que* $\gamma(i) \in \{i; n-1\}$.

Observemos que la expresión (3.2) es equivalente a la siguiente afirmación:

$a_i \to a_j = a_k$ donde

$k = \begin{cases} i \wedge j & \text{si} \quad a_i \to 1 = a_i \\ i \vee j & \text{si} \quad a_i \to 1 = 1 \end{cases}$ (caso 1)

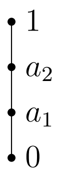
ó

$k = \begin{cases} i \wedge j & \text{si} \quad a_i \to 1 = a_i \\ n-1 & \text{si} \quad a_i \to 1 = 1 \end{cases}$ (caso 2)

con $0 \leq i < j \leq 3$.

Destaquemos también que si $a_i \to 1 = a_i$, en ambos casos, $k = i \wedge j$.

Para aclarar la idea de las definiciones que daremos a continuación, vamos a considerar en nuestro ejemplo la siguiente implicación de semi-Heyting:



$\to$	0	a_1	a_2	1
0	1	1	a_2	1
a_1	0	1	a_1	a_1
a_2	0	a_1	1	1
1	0	a_1	a_2	1

En este ejemplo los elementos $Z_1^\gamma(i,j)$ y $Z_2^\gamma(i,j)$ que definiremos más abajo corresponderán a los casos 1 y 2, respectivamente.

Para $a_0 \to a_1$ al subíndice k le corresponde el caso 2 pues $a_0 \to a_2 = a_3$. Análogamente para los elementos $a_0 \to a_2, a_0 \to a_3, a_1 \to a_2, a_1 \to a_3, a_2 \to a_3$ les corresponden los casos 1, 2, 1, 1, 2 respectivamente.

Finalmente la función $Z_x^\gamma(i,j)$ representará el subíndice k para cada i, j.

Definición 3.2.4 *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Sea γ una valuación n-ésima. Definimos las funciones $\boldsymbol{Z}_1^\gamma, \boldsymbol{Z}_2^\gamma : \{0,\dots,n-2\} \times \{1,\dots,n-1\} \to \{0,\dots,n-1\}$ como*

$$Z_1^\gamma(i,j) = \begin{cases} i \wedge j & si \quad \gamma(i) = i \\ i \vee j & si \quad \gamma(i) = n-1 \end{cases}$$

y

$$Z_2^\gamma(i,j) = \begin{cases} i \wedge j & si \quad \gamma(i) = i \\ n-1 & si \quad \gamma(i) = n-1 \end{cases}$$

con $i < j$.

Observemos que si $\gamma(i) = i$, $Z_1^\gamma = Z_2^\gamma$.

Veamos que las definiciones anteriores nos permiten definir una implicación de semi-Heyting sobre una cadena finita cualquiera de modo tal que el álgebra resultante sea una $\mathcal{CI}$-álgebra.

Definición 3.2.5 *Sea* $\mathbf{L}: a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ *una cadena con* n *elementos* $(n \geq 2)$*. Sea* γ *una valuación n-ésima. Defino* $\to_{\gamma,x}: \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ *como:*

$$a_i \to_{\gamma,x} a_j = a_k \text{ donde } k = \begin{cases} n-1 & si \quad i=j \\ j & si \quad i>j \\ Z_x^\gamma(i,j) & si \quad i<j \end{cases} \quad con\ x \in \{1;2\}$$

Lema 3.2.6 *Sea* $\mathbf{L}: a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ *una cadena con* n *elementos* $(n \geq 2)$*. Sea* γ *una valuación n-ésima. Entonces* $\langle \mathbf{L}, \to_{\gamma,x} \rangle \in \mathcal{SH}$*.*

Demostración Por definición de $\to_{\gamma,x}$, $\mathbf{L} \models w \to_{\gamma,x} w \approx 1$.

Sean $c, d \in L: \ c < d$. Queremos probar que $c \wedge (c \to_{\gamma,x} d) = c \wedge d$. Como $c < d$, $c = a_i$, $d = a_j$ con $i < j$.

Entonces $c \wedge (c \to_{\gamma,x} d) = a_i \wedge (a_i \to_{\gamma,x} a_j) =$

$$\begin{cases} a_i \wedge a_{i\wedge j} & \text{si} \quad \gamma(i) = i \\ a_i \wedge a_{i\vee j} & \text{si} \quad c(i,j) = 1 \text{ y } \gamma(i) \neq i \\ a_i \wedge a_{n-1} & \text{si} \quad c(i,j) = 2 \text{ y } \gamma(i) \neq i \end{cases} = a_i = c \wedge d.$$

Por el lema 2.2.2, $\mathbf{L} \models w \wedge (w \to_{\gamma,x} y) \approx w \wedge y$.

Resulta extenso pero sencillo probar que $L \models w \wedge (y \to_{\gamma,x} z) \approx w \wedge [(w \wedge y) \to_{\gamma,x} (w \wedge z)]$.

Por el Lema 2.2.3, $\to_{\gamma,x}$ es una implicación de semi-Heyting. ■

Sea $\mathbf{L}: a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ una cadena con n elementos $(n \geq 2)$. Sea γ una valuación n-ésima. Notaremos $\mathbf{L}^n_{\gamma,x}$ al álgebra $\langle \mathbf{L}, \to_{\gamma,x} \rangle$.

Lema 3.2.7 $\mathbf{L}^n_{\gamma,x} \in \mathcal{CI}$*.*

Demostración Basta ver que $\mathbf{L}^n_{\gamma,x}$ satisface la identidad (3.1). Sean $c, d \in L$. Si $c \geq d$, $(c \wedge d) \leftrightarrow d = a_{n-1}$. Supongamos que $c < d$. Luego $c = a_i, \ d = a_j$ con $i < j$.

$$\text{Entonces } c \to_{\gamma,x} d = a_i \to_{\gamma,x} a_j = \begin{cases} a_{i\wedge j} & \text{si} \quad \gamma(i) = i \\ a_{i\vee j} & \text{si} \quad x(i,j) = 1 \text{ y } \gamma(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x(i,j) = 2 \text{ y } \gamma(i) \neq i \end{cases} =$$

$$\begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad x(i,j) = 1 \text{ y } \gamma(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x(i,j) = 2 \text{ y } \gamma(i) \neq i \end{cases} = \begin{cases} c & \text{si} \quad \gamma(i) = i \\ d & \text{si} \quad x(i,j) = 1 \text{ y } \gamma(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x(i,j) = 2 \text{ y } \gamma(i) \neq i \end{cases}.$$

Como consecuencia $(c \to_{\gamma,x} d) \leftrightarrow c = a_{n-1}$ ó $(c \to_{\gamma,x} d) \leftrightarrow d = a_{n-1}$ ó $c \to_{\gamma,x} d = a_{n-1}$. Luego $\mathbf{L}^n_{\gamma,x}$ satisface la identidad (3.1) . ■

Vamos a ver que toda cadena de la variedad $\mathcal{CI}$ se puede representar de la manera que vimos anteriormente.

Lema 3.2.8 *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{CI}$ *una cadena con* n *elementos* $(n \geq 2)$*. Entonces existe una valuación n-ésima* γ *tal que* $\mathbf{L} \simeq \mathbf{L}^n_{\gamma,x}$*.*

Demostración Como $\mathbf{L}$ es una cadena, $\mathbf{L}: A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1}$. Definimos una valuación n-ésima γ como:

$$\gamma(i) = \begin{cases} i & \text{si} \quad A_i \to A_{n-1} = A_i \\ n-1 & \text{si} \quad A_i \to A_{n-1} \neq A_i \end{cases},$$

$x = x(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A_i \to A_j \in \{A_i, A_j\} \\ 2 & \text{si} \quad A_i \to A_j = A_{n-1} \end{cases} \quad \text{si } j \neq n-1$
y $x(i, n-1) = 1$.

Observemos que γ y x están bien definidas pues, como $\mathbf{L} \in \mathcal{CI}$, $A_i \to A_j \in \{A_i, A_j, A_{n-1}\}$ si $0 \leq i < j \leq n-1$.

Veamos que $\mathbf{L} \simeq \mathbf{L}^n_{\gamma,x}$. Para esto basta ver que $A_i \to A_j = A_k$ si y sólo si $a_i \to_{\gamma,x} a_j = a_k$ con $0 \leq i < j \leq n-1$ e $i \leq k \leq n-1$.

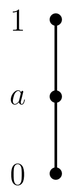
Supongamos que $A_i \to A_j = A_k$. Entonces $A_i \to A_j \in \{A_i, A_j, A_{n-1}\}$. Tomaremos casos sobre $A_i \to A_j$.

Si $j \neq n-1$ y $A_i \to A_j = A_i$ entonces $a_i \to_{\gamma,x} a_j = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad \gamma(i) \neq i \end{cases}$. Por el lema 2.2.5, como $A_i \to A_j = A_i$ se deduce que $A_i \to A_{n-1} = A_i$. Luego $\gamma(i) = i$. Entonces $a_i \to_{\gamma,x} a_j = a_i$. Los otros casos son similares.

Para la recíproca, tomemos como hipótesis que $a_i \to_{\gamma,x} a_j = a_k$. Por el lema 3.2.7, $a_i \to_{\gamma,x} a_j \in \{a_i, a_j, a_{n-1}\}$. Si $a_i \to_{\gamma,x} a_j = a_i$ entonces $A_i \to A_{n-1} = A_i$. Por el lema 2.2.5, $A_i \to A_j = A_i$. Los otros casos son similares.

Como consecuencia $\mathbf{L} \simeq L^n_{\gamma,x}$. ■

El siguiente ejemplo permite al lector una mejor comprensión de las funciones definidas en la demostración del resultado anterior.



$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	a
1	0	a	1

En este caso $a_0 = 0, a_1 = a, a_2 = 1$, $\gamma((0,1)) = (2,1)$, $x(0,1) = 1$, $x(0,2) = 2$ y $x(1,2) = 1$.

Veamos que las álgebras de la forma $\mathbf{L}^n_{\gamma,x}$ son justamente las que generan toda la variedad $\mathcal{CI}$.

Teorema 3.2.9 *Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad de $\mathcal{CI}$. $\mathcal{V}$ es propia si y sólo si $\mathbf{L}^n_{\gamma,x} \notin \mathcal{V}$ para algún $n \in \omega$, γ una valuación n-esima.*

Demostración Si $\mathbf{L}^n_{\gamma,x} \notin \mathcal{V}$, por el lema 3.2.7, $\mathcal{V}$ es propia.

Supongamos que $\mathcal{V}$ es propia. Entonces $\mathcal{V} \neq \mathcal{CI}$. Luego existe una identidad $\epsilon \approx \lambda$ tal que $\mathcal{V} \models \epsilon \approx \lambda$ y $\mathcal{CI} \not\models \epsilon \approx \lambda$. En consecuencia existe una cadena $\mathbf{A} \in \mathcal{CI}$ tal que $\mathbf{A} \not\models \epsilon \approx \lambda$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_m$ las variables que ocurren en la identidad $\epsilon \approx \lambda$ y sean $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ tal que $\epsilon(a_1, a_2, \ldots, a_m) \neq \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Consideremos la cadena $\mathbf{B}$ formada por los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Por el lema 3.2.8, $\mathbf{B} \simeq \mathbf{L}^n_{\gamma,x}$ para algún $n \in \omega$ y γ una valuación n-esima. Luego $\mathbf{L}^n_{\gamma,x} \notin \mathcal{V}$. ■

Usando un argumento similar al de la demostración del teorema 3.2.9, se prueba que toda subvariedad de $\mathcal{CI}$ está generada por sus cadenas finitas.

3.3. Propiedades de los generadores de $\mathcal{CI}$

A continuación vamos a estudiar propiedades interesantes sobre los generadores de $\mathcal{CI}$.

Lema 3.3.1 $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^n_{\gamma_1,x_1}$ *si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $\gamma_0 = \gamma_1$,

(2) $x_0(i,j) = x_1(i,j)$ *si* $\gamma_0(i) = n-1$ *con* $0 \leq i < j < n-1$.

Demostración Supongamos que $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^n_{\gamma_1,x_1}$. Entonces $a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j = a_i \to_{\gamma_1,x_1} a_j$ con $0 \leq i < j \leq n-1$. Si $j < n-1$, $a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_0(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad \gamma_0(i) \neq i \text{ y } x_0(i,j) = 1 \\ a_{n-1} & \text{si} \quad \gamma_0(i) \neq i \text{ y } x_0(i,j) = 2 \end{cases}$

y $a_i \to_{\gamma_1,x_1} a_j = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_1(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad \gamma_1(i) \neq i \text{ y } x_1(i,j) = 1 \\ a_{n-1} & \text{si} \quad \gamma_1(i) \neq i \text{ y } x_1(i,j) = 2 \end{cases}$.

Si $\gamma_0(i) = n-1$ y $x_0(i,j) = 1$ entonces $a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j = a_j$. Por hipótesis, $a_i \to_{\gamma_1,x_1} a_j = a_j$. Luego $\gamma_1(i) = n-1$ y $x_1(i,j) = 1$. Los otros casos son similares, luego queda probado (1) y (2).

Supongamos que $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0}$y $\mathbf{L}^n_{\gamma_1,x_1}$ satisfacen (1) y (2).

Si $j \neq n-1$, $a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_0(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad \gamma_0(i) \neq i \text{ y } x_0(i,j) = 1 \\ a_{n-1} & \text{si} \quad \gamma_0(i) \neq i \text{ y } x_0(i,j) = 2 \end{cases} =$

$\begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_1(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad \gamma_1(i) \neq i \text{ y } x_1(i,j) = 1 \\ a_{n-1} & \text{si} \quad \gamma_1(i) \neq i \text{ y } x_1(i,j) = 2 \end{cases} = a_i \to_{\gamma_1,x_1} a_j.$

El otro caso es similar. Luego $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^n_{\gamma_1,x_1}$. ■

Ejemplo 3.3.2

$\mathbf{L}^3_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^3_{\gamma_1,x_1}$ donde $\gamma_0(0) = 2,\ \gamma_0(1) = 1,\ \gamma_1(0) = 2,\ \gamma_2(1) = 1,\ x_0(0,1) = x_1(0,1) = 1,\ x_0(0,2) = x_1(0,2) = 1,\ x_0(1,2) = 1$ y $x_1(1,2) = 2$.

$\mathbf{L}^3_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^3_{\gamma_1,x_1}$ donde $\gamma_0(0) = 0,\ \gamma_0(1) = 2,\ \gamma_1(0) = 0,\ \gamma_2(1) = 2, x_0(0,1) = 1, x_0(0,2) = 2,\ x_0(1,2) = x_1(1,2) = 1, x_1(0,1), x_1(0,2) \in \{1,2\}$.

Lema 3.3.3 $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1})$ *si y sólo si existe* k *con* $1 \leq k \leq n-1$ *tal que dados* $0 \leq i < j \leq n-1$ *se verifica que:*

(1) $\gamma_0(i) = i$ *si y sólo si* $\gamma_1(i) = i$ *si* $i < k$

(2) $\gamma_0(i) = i$ *si y sólo si* $\gamma_1(i+1) = i+1$ *si* $k \leq i$

(3) $x_0(i,j) = x_1(i,j)$ *si* $i < j < k$ *y* $\gamma_0(i) = n-1$

(4) $x_0(i,j) = x_1(i,j+1)$ *si* $i < k \leq j < n-1$ *y* $\gamma_0(i) = n-1$

(5) $x_0(i,j) = x_1(i+1,j+1)$ *si* $k \leq i < j < n-1$ *y* $\gamma_0(i) = n-1$.

Demostración Veamos la primera implicación. Supongamos que $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1})$.

$$\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} \text{ y } \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1} : A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1} < A_n.$$

Luego existe $\lambda : \mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \to \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}$ un monomorfismo de semi-Heyting y existe $A_k \in \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}$ con $1 \leq k \leq n-1$ tal que $A_k \notin \lambda(\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0})$.
Entonces $\lambda(a_i) = \begin{cases} A_i & \text{si} \quad 0 \leq i < k \\ A_{i+1} & \text{si} \quad k \leq i \leq n-1 \end{cases}$ y $\lambda(a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j) = \lambda(a_i) \to_{\gamma_1,x_1} \lambda(a_j)$.
Supongamos que $i < j < k$. Entonces $\lambda(a_i) = A_i$ y $\lambda(a_j) = A_j$.
Luego $\lambda(a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j) = \begin{cases} A_i & \text{si} \quad \gamma_0(i) = i \\ A_j & \text{si} \quad x_0(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_0(i) \neq i \\ A_n & \text{si} \quad x_0(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_0(i) \neq i \end{cases}$.
Además, $\lambda(a_i) \to_{\gamma_1,x_1} \lambda(a_j) = A_i \to_{\gamma_1,x_1} A_j = \begin{cases} A_i & \text{si} \quad \gamma_1(i) = i \\ A_j & \text{si} \quad x_1(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \\ A_n & \text{si} \quad x_1(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \end{cases}$.
Es inmediato ver que $\gamma_0(i) \neq i$ y $x_0(i,j) = 1$ si y sólo si $x_1(i,j) = 1$ y $\gamma_1(i) \neq i$. Los otros casos similares.

Probemos la recíproca. Definimos $\lambda : \mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \to \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}$ como:

$$\lambda(a_i) = \begin{cases} A_i & \text{si} \quad 0 \leq i < k \\ A_{i+1} & \text{si} \quad k \leq i \leq n-1 \end{cases}.$$

Claramente λ es un monomorfismo de reticulados. Es largo pero rutinario probar que $\lambda(a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j) = \lambda(a_i) \to_{\gamma_1,x_1} \lambda(a_j)$. Luego $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1})$. ■

Lema 3.3.4 $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1})$ *si y sólo si dados* $0 \leq i < j \leq n-1$ *se verifica que:*

(1) $\gamma_0(i) = i$ *si y sólo si* $\gamma_1(i) = i$ *cuando* $i < n-1$

(2) $x_0(i,j) = x_1(i,j)$ *si* $i < j < n-1$ *y* $\gamma_0(i) \neq i$.

Demostración Supongamos que $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1})$.

$$\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} \text{ y } \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1} : A_0 < A_1 < \ldots < A_n.$$

Entonces $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}/[A_{n-1})$. Sea $\beta : \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}/[A_{n-1}) \to \mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0}$ un isomorfismo.
Luego $\beta(\overline{A_k}) = \begin{cases} a_k & \text{si} \quad 0 \leq k < n-1 \\ a_{n-1} & \text{si} \quad n-1 \leq k \leq n \end{cases}$.
Si $i < j < n-1$, $\beta(\overline{A_i}) \to_{\gamma_0,x_0} \beta(\overline{A_j}) = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_0(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad x_0(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_0(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x_0(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_0(i) \neq i \end{cases}$.
Además $\beta(\overline{A_i \to_{\gamma_1,x_1} A_j}) = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_1(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad x_1(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x_1(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \end{cases}$.
Usando que β es un isomorfismo resultan en forma inmediata las afirmaciones (1) y (2). El caso en que $i < n-1 \leq j$ es similar.

Para la recíproca queremos probar que $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1})$. Consideremos el filtro $[A_{n-1}) = \{A_{n-1}; A_n\}$. Veamos que $\mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0} \simeq \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}/[A_{n-1})$.

Definimos $\beta : \mathbf{L}^{n+1}_{\gamma_1,x_1}/[A_{n-1}) \to \mathbf{L}^n_{\gamma_0,x_0}$ como $\beta(\overline{A_k}) = \begin{cases} a_k & \text{si} \quad 0 \leq k < n-1 \\ a_{n-1} & \text{si} \quad n-1 \leq k \leq n \end{cases}$.

Veamos que si $0 \leq i < j \leq n$, $\beta(\overline{A_i}) \to_{\gamma_0,x_0} \beta(\overline{A_j}) = \beta(\overline{A_i \to_{\gamma_1,x_1} A_j})$.

Si $i < j < n-1$,

$\beta(\overline{A_i}) \to_{\gamma_0,x_0} \beta(\overline{A_j}) = a_i \to_{\gamma_0,x_0} a_j =$

$\begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_0(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad x_0(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_0(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x_0(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_0(i) \neq i \end{cases} =$

$\begin{cases} a_i & \text{si} \quad \gamma_1(i) = i \\ a_j & \text{si} \quad x_1(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \\ a_{n-1} & \text{si} \quad x_1(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \end{cases} =$

$\begin{cases} \beta(\overline{A_i}) & \text{si} \quad \gamma_1(i) = i \\ \beta(\overline{A_j}) & \text{si} \quad x_1(i,j) = 1 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \\ \beta(\overline{A_n}) & \text{si} \quad x_1(i,j) = 2 \text{ y } \gamma_1(i) \neq i \end{cases} = \beta(\overline{A_i \to_{\gamma_1,x_1} A_j})$.

Los otros casos son similares. ■

Capítulo 4

La variedad de las álgebras de semi-Heyting que satisfacen la identidad $(0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$

4.1. Introducción

Sankappanavar introdujo en su trabajo ([33]) varias subvariedades de $\mathcal{SH}$, por ejemplo, la variedad $\mathcal{SH}^S$ de las álgebras de semi-Heyting de Stone, la variedad $\mathcal{SH}^B$ de las álgebras de semi-Heyting booleanas, la variedad $\mathcal{QH}$ de las quasi-Heyting algebras, la variedad $\mathcal{SH}^C$ generada por sus cadenas, investigada en la sección 2, la variedad $\mathcal{FTT}$ en la cual $0 \to 1 \approx 1$, la variedad $\mathcal{FTF}$ en la cual $0 \to 1 \approx 0$, y algunas más. Estas nuevas subvariedades resultan ser interesantes desde el punto de vista de la lógica no clásica, ya que nos pueden proveer nuevas interpretaciones de la implicación como conectiva.

El propósito de esta sección es introducir e investigar la subvariedad $\mathcal{ISSH}$ de las álgebras de semi-Heyting que satisfacen la ecuación $(0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$. Claramente, la variedad de las álgebras de semi-Heyting de Stone está contenida en $\mathcal{ISSH}$. Es más, $\mathcal{ISSH}$ contiene todas las subvariedades introducidas en [33], y es de hecho la menor subvariedad de $\mathcal{SH}$ que contiene a todas las subvariedades de Sankappanavar. Los resultados hallados en este capítulo forman parte del trabajo [4].

Un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \to, 0, 1 \rangle$ se dice un *álgebra de semi-Heyting con una implicación stoneana* si satisface la identidad $(0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$.

Notaremos $\mathcal{ISSH}$ la variedad de las álgebras de semi-Heyting con una implicación stoneana. Observemos que la variedad de las álgebras de semi-Heyting stoneanas está contenida propiamente en la variedad $\mathcal{ISSH}$ (ver teorema 4.2.8).

El objetivo de esta sección es probar que las subvariedades introducidas en el capítulo 1 son de hecho subvariedades de $\mathcal{ISSH}$. Estudiaremos las relaciones entre ellas dentro de $\mathcal{ISSH}$ y determinaremos el subreticulado generado por las subvariedades anteriormente definidas dentro del reticulado de subvariedades de $\mathcal{SH}$. También introduciremos y estudiaremos nuevas subvariedades de $\mathcal{ISSH}$.

Ahora probaremos algunas propiedades simples de las álgebras de semi-Heyting stoneanas.

Teorema 4.1.1 *Si* $\mathbf{L}$ *es una álgebra de semi-Heyting stoneana subdirectamente irreducible entonces* 0 *es* $\wedge$*-irreducible.*

Demostración Supongamos que existen $a, b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$ con $a \neq 0$. Como $\mathbf{L}$ satisface la identidad de Stone, $a^* \vee a^{**} = 1$, y como 1 es $\vee$-irreducible, $a^* = 1$ ó $a^{**} = 1$. Pero $a^* \neq 1$, entonces $a^{**} = 1$. Como consecuencia $a^* = 0$, y luego $0 = b \wedge a^* = b \wedge (a \to 0) \overset{(SH3)}{=} b \wedge [(b \wedge a) \to (b \wedge 0)] = b \wedge (0 \to 0) = b$. ■

Corolario 4.1.2 *Si* $\mathbf{L}$ *es una álgebra de semi-Heyting finita subdirectamente irreducible, entonces* $\mathbf{L}$ *es un álgebra de Stone si y sólo si* $\mathbf{L}$ *tiene un único átomo.*

Corolario 4.1.3 *Si* $\mathbf{L}$ *es una álgebra de semi-Heyting stoneana subdirectamente irreducible y* $|L| \leq 5$*, entonces* $\mathbf{L}$ *es una cadena.*

Recordemos que $\mathcal{PTP}$ es la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por la identidad $x \to 1 \approx x$. En [33], el autor prueba que $\mathcal{PTP}^C = com\mathcal{SH}^C$ y se pregunta si es cierto que $\mathcal{PTP} = com\mathcal{SH}$ ([33, Problem 14.11]). Probemos que, en general, $\mathcal{PTP} = com\mathcal{SH}$.

Teorema 4.1.4 *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $x \to y \approx y \to x$

(2) $x \to 1 \approx x$

(3) $y \wedge (x \to y) \approx x \wedge y$.

Demostración (1) $\Rightarrow$ (2) Si $a \in L$, $a \to 1 = 1 \to a = a$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Sean $a, b \in L$. Entonces $b \wedge (a \to b) = b \wedge [(b \wedge a) \to (b \wedge b)] = b \wedge [(b \wedge a) \to b] = = b \wedge [(b \wedge a) \to (b \wedge 1)] = b \wedge (a \to 1) = b \wedge a$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Sean $a, b \in L$. Entonces $(a \to b) \wedge (b \to a) = (a \to b) \wedge [((a \to b) \wedge b) \to ((a \to b) \wedge a)] = = (a \to b) \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge b)] = (a \to b) \wedge 1 = (a \to b)$. Luego $a \to b \leq b \to a$. Similarmente, $b \to a \leq a \to b$. Entonces $a \to b = b \to a$. ■

Corolario 4.1.5 $com\mathcal{SH} = \mathcal{PTP}$.

Una vez que uno tiene estudiada la variedad en la cual $\to$ es conmutativa, es natural preguntarse acerca de la variedad $asoc\mathcal{SH}$ en la cual $\to$ es asociativa. Probaremos que, de hecho, la identidad $x \to (y \to z) \approx (x \to y) \to z$ caracteriza la variedad $\mathcal{V}(\mathbf{\overline{2}})$.

Lema 4.1.6 *Si* $\mathbf{L} \in asoc\mathcal{SH}$*, entonces* $\mathbf{L}$ *satisface* $x \to 1 \approx x$.

Demostración Para $a \in L$, basta tomar $x = y = z = a$ en la identidad $x \to (y \to z) \approx (x \to y) \to z$. ■

Corolario 4.1.7 $asoc\mathcal{SH} \subseteq com\mathcal{SH}$.

Teorema 4.1.8 $asoc\mathcal{SH} = \mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}})$

Demostración Es claro que $\overline{\mathbf{2}} \in asoc\mathcal{SH}$. Entonces $\mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}}) \subseteq asoc\mathcal{SH}$.

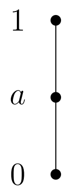
Sea $\mathbf{L}$ un álgebra subdirectamente irreducible en $asoc\mathcal{SH}$ con $|L| \geq 2$. Sea $d \in L$ el único coátomo en L y probemos que $d = 0$. Supongamos que $d \neq 0$. Tenemos que

$$0 \to (0 \to d) = (0 \to 0) \to d = 1 \to d = d.$$

Del corolario 4.1.7, $0 \to d = d \to 0 = d^* = 0$. Entonces $d = 0 \to (0 \to d) = 0 \to 0 = 1$, contradicción. Luego $|L| = 2$. Por conmutatividad, tenemos que $0 \to 1 = 0$, entonces $\mathbf{L} \simeq \overline{\mathbf{2}}$. ■

Las siguientes álgebras serán usadas en la sección 4.2. Es rutinario probar que son álgebras de semi-Heyting subdirectamente irreducibles.

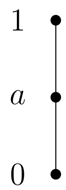
$\mathbf{L}_1$



$\to$	0	a	1
0	1	0	0
a	0	1	a
1	0	a	1

En $\mathbf{L}_1$, $(0 \to 1)^* = 1$, entonces $\mathbf{L}_1 \in \mathcal{ISSH}$. Por otro lado, es claro que $\mathbf{L}_1 \notin \mathcal{FTD}$.

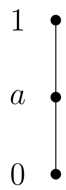
$\mathbf{L}_2$



$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1

Tenemos que $\mathbf{L}_2$ es un álgebra de Heyting.

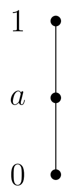
$\mathbf{L}_3$



$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	1
1	0	a	1

Es claro que $\mathbf{L}_3$ satisface $y \leq x \to y$, entonces $\mathbf{L}_3 \in \mathcal{QH}$. Como $a = 0 \to a \neq 1$, $\mathbf{L}_3 \notin \mathcal{H}$.

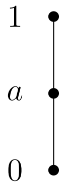
$\mathbf{L}_4$



$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	a
1	0	a	1

$\mathbf{L}_4 \in \mathcal{FTT}$. Como $1 \neq a \to 1 = a$, $\mathbf{L}_4 \notin \mathcal{QH}$.

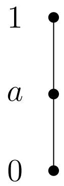
$\mathbf{L}_5$



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	a	a
a	0	1	a
1	0	a	1

Tenemos que $\mathbf{L}_5 \in \mathcal{FTD}$ y $\mathbf{L}_5 \notin \mathcal{FTT}$.

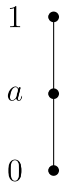
$\mathbf{L}_6$



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	0	0
a	0	1	1
1	0	a	1

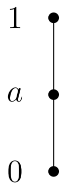
Observemos que $a \rightarrow 1 \neq 1 \rightarrow a$, entonces $\mathbf{L}_6 \notin com\mathcal{SH}$.

$\mathbf{L}_7$



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	a
a	0	1	1
1	0	a	1

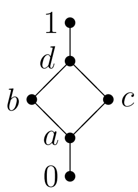
$\mathbf{L}_8$



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	a	a
a	0	1	1
1	0	a	1

$\mathbf{L}_8 \in \mathcal{FTD}$.

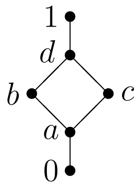
$\mathbf{L}_9$



$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1
b	0	c	1	1	1	1
c	0	b	b	1	1	1
d	0	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

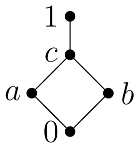
Observemos que $\mathbf{L}_9$ es un álgebra de Heyting y satisface $x^* \vee x^{**} \approx 1$, entonces $\mathbf{L}_9 \in \mathcal{H}^S$.

$\mathbf{L}_{10}$



$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	0	0	0	0	0
a	0	1	c	b	a	a
b	0	c	1	a	b	b
c	0	b	a	1	c	c
d	0	a	b	c	1	d
1	0	a	b	c	d	1

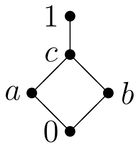
$\mathbf{L}_{11}$



$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\mathbf{L}_{11}$ es un álgebra de Heyting.

$\mathbf{L}_{12}$



$\to$	0	a	b	c	1
0	1	b	a	0	0
a	b	1	0	a	a
b	a	0	1	b	b
c	0	a	b	1	c
1	0	a	b	c	1

4.2. Generando un subreticulado del reticulado de subvariedades de $\mathcal{ISSH}$

El objetivo de esta sección es determinar el subreticulado generado por las subvariedades introducidas en la sección 4.1 dentro del reticulado de subvariedades de $\mathcal{ISSH}$.

Lema 4.2.1 *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$.

(a) *Si* $\mathbf{L} \models (x \wedge y) \to x \approx 1$ *entonces* $\mathbf{L} \models y \wedge (x \to y) \approx y$.

(b) *Si* $\mathbf{L} \models y \wedge (x \to y) \approx y$ *entonces* $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$.

(c) *Si* $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$ *entonces* $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \approx 0$.

Demostración $b \wedge (a \to b) \overset{(SH3)}{=} b \wedge ((b \wedge a) \to (b \wedge b)) = b \wedge ((b \wedge a) \to b) = b \wedge 1 = b$, probando (a). (b) se obtiene tomando $x = 0$, $y = 1$. Finalmente, (c) es claro. ■

Lema 4.2.2 $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{QH} \subsetneq \mathcal{FTT} \subsetneq \mathcal{FTD} \subsetneq \mathcal{ISSH}$.

Demostración Del lema 4.2.1, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{QH} \subseteq \mathcal{FTT} \subseteq \mathcal{FTD}$, y es claro que $\mathcal{FTD} \subseteq \mathcal{ISSH}$. Las álgebras $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$ y $\mathbf{L}_5$ prueban que $\mathcal{H} \neq \mathcal{QH}$, $\mathcal{QH} \neq \mathcal{FTT}$ y $\mathcal{FTT} \neq \mathcal{FTD}$. El álgebra $\mathbf{L}_1 \in \mathcal{ISSH} \setminus \mathcal{FTD}$, entonces $\mathcal{FTD} \neq \mathcal{ISSH}$. ■

Lema 4.2.3 *com*$\mathcal{SH} \subsetneq \mathcal{FTF} \subsetneq \mathcal{ISSH}$.

Demostración Sea $\mathbf{L} \in com\mathcal{SH}$. En $\mathbf{L}$, $0 \to 1 = 1 \to 0 = 0$, entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{FTF}$. Es claro que $\mathcal{FTF} \subseteq \mathcal{ISSH}$ y consecuentemente, $com\mathcal{SH} \subseteq \mathcal{FTF} \subseteq \mathcal{ISSH}$. Teniendo en cuenta las álgebras $\mathbf{L}_6$ y $\mathbf{L}_4$ tenemos que $com\mathcal{SH} \neq \mathcal{FTF}$ y $\mathcal{FTF} \neq \mathcal{ISSH}$. ■

Es claro que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{V}(\mathbf{2}) \subsetneq \mathcal{H}$.

Consideremos ahora las siguientes identidades:

(4.1) $[(x \vee x^*) \wedge (0 \to 1)] \vee [((x \to y) \leftrightarrow (y \to x)) \wedge (0 \to 1)^*] \approx 1,$

(4.2) $[(0 \to 1)^* \wedge (x \vee x^*)] \vee [((x \wedge y) \to y) \wedge (0 \to 1)] \approx 1,$

(4.3) $[((x \wedge y) \to y) \wedge (0 \to 1)] \vee [((x \to y) \leftrightarrow (y \to x)) \wedge (0 \to 1)^*] \approx 1,$

(4.4) $[((x \wedge y) \to y) \wedge (0 \to 1)] \vee (0 \to 1)^* \approx 1,$

(4.5) $(x \vee x^*) \vee (0 \to 1)^* \approx 1,$

(4.6) $[(y \wedge (x \to y) \leftrightarrow y) \wedge (0 \to 1)] \vee [(x \vee x^*) \wedge (0 \to 1)^*] \approx 1,$

(4.7) $[(y \wedge (x \to y) \leftrightarrow y) \wedge (0 \to 1)] \vee [((x \to y) \leftrightarrow (y \to x)) \wedge (0 \to 1)^*] \approx 1,$

(4.8) $[(y \wedge (x \to y) \leftrightarrow y) \wedge (0 \to 1)] \vee (0 \to 1)^* \approx 1,$

(4.9) $(0 \to 1) \vee [(0 \to 1)^* \wedge (x \vee x^*)] \approx 1,$

(4.10) $(0 \to 1) \vee [(0 \to 1)^* \wedge ((x \to y) \leftrightarrow (y \to x))] \approx 1,$

(4.11) $(0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1,$

(4.12) $(0 \to 1)^{**} \vee [(0 \to 1)^* \wedge (x \vee x^*)] \approx 1,$

(4.13) $(0 \to 1)^{**} \vee [(0 \to 1)^* \wedge ((x \to y) \leftrightarrow (y \to x))] \approx 1.$

Sea $\mathcal{E}_j$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por la identidad $(4.j)$.

Lema 4.2.4 $\mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}}) \subsetneq \mathcal{SH}^B \subsetneq \mathcal{E}_2 \subsetneq \mathcal{E}_6 \subsetneq \mathcal{E}_9 \subsetneq \mathcal{E}_{12}$

Demostración Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2$ subdirectamente irreducible. Para $a, b \in L$,

$$[(0 \to 1)^* \wedge (a \vee a^*)] \vee [((a \wedge b) \to b) \wedge (0 \to 1)] = 1.$$

Entonces $(0 \to 1)^* \wedge (a \vee a^*) = 1$ ó $((a \wedge b) \to b) \wedge (0 \to 1) = 1$.

Si $((a \wedge b) \to b) \wedge (0 \to 1) = 1$ entonces $(a \wedge b) \to b = 1$ y $0 \to 1 = 1$. Entonces $b \wedge (a \to b) = b$ y $0 \to 1 = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$, es decir, $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_6$.

Las otras inclusiones son similares (ver apéndice 10.2.1).

Veamos que $\mathcal{E}_2 \neq \mathcal{E}_6$. El álgebra $\mathbf{L}_3$ satisface las identidades $y \wedge (x \to y) \approx y$ y $0 \to 1 \approx 1$. Entonces $\mathbf{L}_3 \in \mathcal{E}_6$. Pero si tomamos $x = 0$ e $y = a$ en la identidad (4.2), obtenemos $[(0 \to 1)^* \wedge (0 \vee 0^*)] \vee [(0 \to a) \wedge (0 \to 1)] = 0 \vee [a \wedge 1] = a \neq 1$. Luego $\mathbf{L}_3 \notin \mathcal{E}_2$.

Para el resto de las desigualdades, es suficiente considerar las álgebras $\mathbf{2}$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_4$ y $\mathbf{L}_8$. ■

Lema 4.2.5 $com\mathcal{SH} \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_3 \subsetneq \mathcal{E}_7 \subsetneq \mathcal{E}_{10} \subsetneq \mathcal{E}_{13}$.

Demostración Probemos que $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_3$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$ subdirectamente irreducible y $a, b \in L$. Si $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1) = 1$ entonces $a \vee a^* = 0 \to 1 = 1$. Entonces $a = 1$ ó $a = 0$. En ambos casos, $(a \wedge b) \to b = 0 \to 1 = 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$.

El álgebra $\mathbf{L}_2$ pertenece a $\mathcal{E}_3$, pero si tomamos $x = y = a$ en (4.1), obtenemos que $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1) = a \neq 1$, entonces $\mathbf{L}_2 \notin \mathcal{E}_1$. Consecuentemente, $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_3$.

Los otros casos son similares (ver ápendice 10.2.2). Las desigualdades correspondientes se obtienen considerando las álgebras $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$, $\mathbf{L}_5$ y el álgebra $\mathbf{2}$. ■

Lema 4.2.6 $\mathcal{FTF} \subsetneq \mathcal{E}_5 \subsetneq \mathcal{E}_4 \subsetneq \mathcal{E}_8 \subsetneq \mathcal{E}_{11} \subsetneq \mathcal{ISSH}$.

Demostración Sólo probaremos que $\mathcal{E}_5 \subsetneq \mathcal{E}_4$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_5$ subdirectamente irreducible y sean $a, b \in L$. Tenemos que $\mathbf{L}$ satisface $(x \vee x^*) \vee (0 \to 1)^* \approx 1$. Si $0 \to 1 = 0$ la identidad (4.4) se verifica trivialmente. Si $0 \to 1 = 1$ entonces $a \vee a^* = 1$ y como en la demostración anterior, $(a \wedge b) \to b = 1$. Finalmente, el caso $0 \to 1 = a$ con $a \notin \{0, 1\}$ no es posible, pues tendríamos que $(a \vee a^*) \vee (0 \to 1)^* = a \vee a^* \neq 1$. Luego, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_4$.

El álgebra $\mathbf{L}_2$ pertenece a $\mathcal{E}_4$, pero si tomamos $x = a$ en (4.5), observamos que $\mathbf{L}_2 \notin \mathcal{E}_5$. Luego, $\mathcal{E}_5 \subsetneq \mathcal{E}_4$.

Las otras relaciones pueden ser verificadas teniendo en cuenta el lema 4.2.1 y usando las álgebras $\mathbf{2}$, $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$ y $\mathbf{L}_5$. ■

De una manera similar se pueden probar las siguientes relaciones (para la demostración completa ver apéndice 10.2.3).

Lema 4.2.7

(1) $\mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}}) \subsetneq com\mathcal{SH}$.

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{2}) \subsetneq \mathcal{SH}^B \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_5$.

(3) $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{E}_2 \subsetneq \mathcal{E}_3 \subsetneq \mathcal{E}_4$.

(4) $\mathcal{QH} \subsetneq \mathcal{E}_6 \subsetneq \mathcal{E}_7 \subsetneq \mathcal{E}_8$.

(5) $\mathcal{FTT} \subsetneq \mathcal{E}_9 \subsetneq \mathcal{E}_{10} \subsetneq \mathcal{E}_{11}$.

(6) $\mathcal{FTD} \subsetneq \mathcal{E}_{12} \subsetneq \mathcal{E}_{13} \subsetneq \mathcal{ISSH}$.

Recordemos que, para una variedad dada $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^C$ es la variedad $\mathcal{V} \cap \mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{V}^S$ es la variedad $\mathcal{V} \cap \mathcal{SH}^S$.

Teorema 4.2.8 $\mathcal{SH}^C \subsetneq \mathcal{SH}^S \subsetneq \mathcal{ISSH}$

Demostración Por el lema 2.4.2, $\mathcal{SH}^C \subseteq \mathcal{SH}^S$, y es claro que $\mathcal{SH}^S \subseteq \mathcal{ISSH}$.

El álgebra $\mathbf{L}_9 \in \mathcal{SH}^S$. Como $\mathbf{L}_9$ es un álgebra subdirectamente irreducible que no es una cadena, $\mathbf{L}_9 \notin \mathcal{SH}^C$ (lema 2.4.2).

Similarmente, el álgebra $\mathbf{L}_{11} \in \mathcal{ISSH}$, pero $\mathbf{L}_{11} \notin \mathcal{SH}^S$, pues no contiene un único átomo. ■

Corolario 4.2.9

(a) $\mathcal{H}^C \subsetneq \mathcal{H}^S \subsetneq \mathcal{H}$.

(b) $\mathcal{QH}^C \subsetneq \mathcal{QH}^S \subsetneq \mathcal{QH}$.

(c) $\mathcal{FTT}^C \subsetneq \mathcal{FTT}^S \subsetneq \mathcal{FTT}$.

(d) $\mathcal{FTD}^C \subsetneq \mathcal{FTD}^S \subsetneq \mathcal{FTD}$.

Demostración Sólo se demostrará el inciso (a) dado que los otros son análogos. Por el teorema 4.2.8, $\mathcal{H}^C \subseteq \mathcal{H}^S \subseteq \mathcal{H}$. Además $\mathbf{L}_9 \in \mathcal{H}^S$ pero $\mathbf{L}_9 \notin \mathcal{H}^C$ (ver teorema 4.2.8). Para finalizar, $\mathbf{L}_{11} \in \mathcal{H}$ pero $\mathbf{L}_{11} \notin \mathcal{H}^S$ (ver teorema 4.2.8). ■

Corolario 4.2.10

(a) $com\mathcal{SH}^C \subsetneq com\mathcal{SH}^S \subsetneq com\mathcal{SH}$.

(b) $\mathcal{FTF}^C \subsetneq \mathcal{FTF}^S \subsetneq \mathcal{FTF}$.

Demostración Vamos a demostrar el inciso (a). Por el teorema 4.2.8, $com\mathcal{SH}^C \subseteq com\mathcal{SH}^S \subseteq com\mathcal{SH}$. Ahora, el álgebra $\mathbf{L}_{10} \in com\mathcal{SH}^S$. Pero, por el lema 2.4.2, $\mathbf{L}_{10} \notin com\mathcal{SH}^C$. Por otro lado, el álgebra $\mathbf{L}_{12} \in com\mathcal{SH}$, mientras que $\mathbf{L}_{12} \notin com\mathcal{SH}^S$ pues no tiene un único átomo. ■

Corolario 4.2.11 $\mathcal{E}_j^C \subsetneq \mathcal{E}_j^S \subsetneq \mathcal{E}_j, 1 \leq j \leq 13$

Demostración Sólo probaremos el caso $j = 1$. Por el teorema 4.2.8, $\mathcal{E}_1^C \subseteq \mathcal{E}_1^S \subseteq \mathcal{E}_1$. El álgebra $\mathbf{L}_{10}$ es commutativa, entonces en particular, $\mathbf{L}_{10} \in \mathcal{E}_1^S$. Como $\mathcal{E}_1^C \subseteq \mathcal{SH}^C$, por el teorema 4.2.8, $\mathbf{L}_{10} \notin \mathcal{E}_1^C$. Entonces $\mathcal{E}_1^C \subsetneq \mathcal{E}_1^S$. Por otro lado, el álgebra $\mathbf{L}_{12}$ es commutativa, y entonces $\mathbf{L}_{12} \in \mathcal{E}_1$, pero $a^* \vee a^{**} \neq 1$, entonces $\mathbf{L}_{12} \notin \mathcal{SH}^S$. ■

El siguiente lema será utilizado en el resto de esta sección.

Lema 4.2.12 *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}^C$ *subdirectamente irreducible. Si* $0 \to 1 = c$ *con* $c \in L \setminus \{0, 1\}$ *entonces* $\mathbf{L}$ *no satisface ninguna de las identidades (4.1) a (4.11).*

Demostración Si $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}^C$ es subdirectamente irreducible, $\mathbf{L}$ es una cadena. Como $0 \to 1 = c$ con $c \in L \setminus \{0, 1\}$, $(0 \to 1)^* = 0$. El resultado sigue de tomar $x = y = c$ en cualquiera de las identidades (4.1) a (4.11). ■

En lo que sigue vamos a encontrar el supremo y el ínfimo en el reticulado de subvariedades de $\mathcal{ISSH}$ de cada par de subvariedades previamente definidas. Observemos que una base ecuacional para $V(\mathbf{2})$, módulo $\mathcal{SH}$, está dada por $x \vee x^* \approx 1$ y $0 \to 1 \approx 1$ ([33, Corolario 9.3]), y una base ecuacional para $V(\overline{\mathbf{2}})$, módulo $\mathcal{SH}$, está dada por $x \vee x^* \approx 1$ y $0 \to 1 \approx 0$ ([33, Corolario 9.4]). Luego $V(\mathbf{2}) = \mathcal{SH}^B \cap \mathcal{FTT}$ y $V(\overline{\mathbf{2}}) = \mathcal{SH}^B \cap \mathcal{FTF}$.

Lema 4.2.13

(a) $\mathcal{H} \cap \mathcal{SH}^B = \mathcal{V}(\mathbf{2})$.

(b) $\mathcal{V}(\mathcal{H}, \mathcal{SH}^B) = \mathcal{E}_2$.

Demostración Es claro que $\mathbf{2} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{SH}^B$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{SH}^B$ subdirectamente irreducible. Por el lema 1.0.20, $\mathbf{L} \simeq \mathbf{2}$ o $\mathbf{L} \simeq \overline{\mathbf{2}}$. Como $\mathbf{L} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{L} \simeq \mathbf{2}$. Entonces tenemos (a).

Con el objetivo de probar (b), sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2$ subdirectamente irreducible. Supongamos que $0 \to 1 = 0$. Entonces para $a \in L$, obtenemos en (4.2), $a \vee a^* = 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}^B$. Si $0 \to 1 = 1$, entonces para $a, b \in L$ obtenemos en (4.2), $(a \wedge b) \to b = 1$, y consecuentemente, $\mathbf{L} \in \mathcal{H}$. Además, de los lemas 4.2.4 y 4.2.7, $\mathcal{SH}^B \subseteq \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_2$. ■

De manera similar (ver apéndice 10.2.4), usando el lema 4.2.12 y los resultados y ejemplos anteriores, se puede probar que:

Lema 4.2.14

(1) (a) $\mathcal{SH}^B \cap com\mathcal{SH} = \mathcal{V}(\overline{\mathbf{2}})$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{SH}^B, com\mathcal{SH}) = \mathcal{E}_1$.

(2) (a) $\mathcal{QH} \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{H}$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{QH}, \mathcal{E}_2) = \mathcal{E}_6$.

(3) (a) $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_1 = \mathcal{SH}^B$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_3$.

(4) (a) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{FTF} = com\mathcal{SH}$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_1, \mathcal{FTF}) = \mathcal{E}_5$.

(5) (a) $\mathcal{E}_6 \cap \mathcal{FTT} = \mathcal{QH}$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_6, \mathcal{FTT}) = \mathcal{E}_9$.

(6) (a) $\mathcal{E}_6 \cap \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_3) = \mathcal{E}_7$.

(7) (a) $\mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_1$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_5) = \mathcal{E}_4$.

(8) (a) $\mathcal{FTD} \cap \mathcal{E}_9 = \mathcal{FTT}$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{FTD}, \mathcal{E}9) = \mathcal{E}_{12}$.

(9) (a) $\mathcal{E}_9 \cap \mathcal{E}_7 = \mathcal{E}_6$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_9, \mathcal{E}_7) = \mathcal{E}_{10}$.

(10) (a) $\mathcal{E}_7 \cap \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_3$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_7, \mathcal{E}_4) = \mathcal{E}_8$.

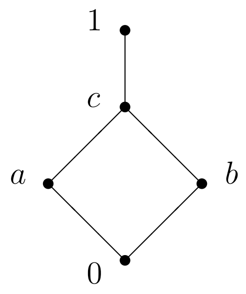
(11) (a) $\mathcal{E}_{12} \cap \mathcal{E}_{10} = \mathcal{E}_9$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{10}) = \mathcal{E}_{13}$.

(12) (a) $\mathcal{E}_{10} \cap \mathcal{E}_8 = \mathcal{E}_7$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_{10}, \mathcal{E}_8) = \mathcal{E}_{11}$.

(13) (a) $\mathcal{E}_{13} \cap \mathcal{E}_{11} = \mathcal{E}_{10}$
    (b) $\mathcal{V}(\mathcal{E}_{13}, \mathcal{E}_{11}) = \mathcal{ISSH}$.

Observemos que $\mathcal{ISSH} \subsetneq \mathcal{SH}$, como muestra el siguiente ejemplo.

L

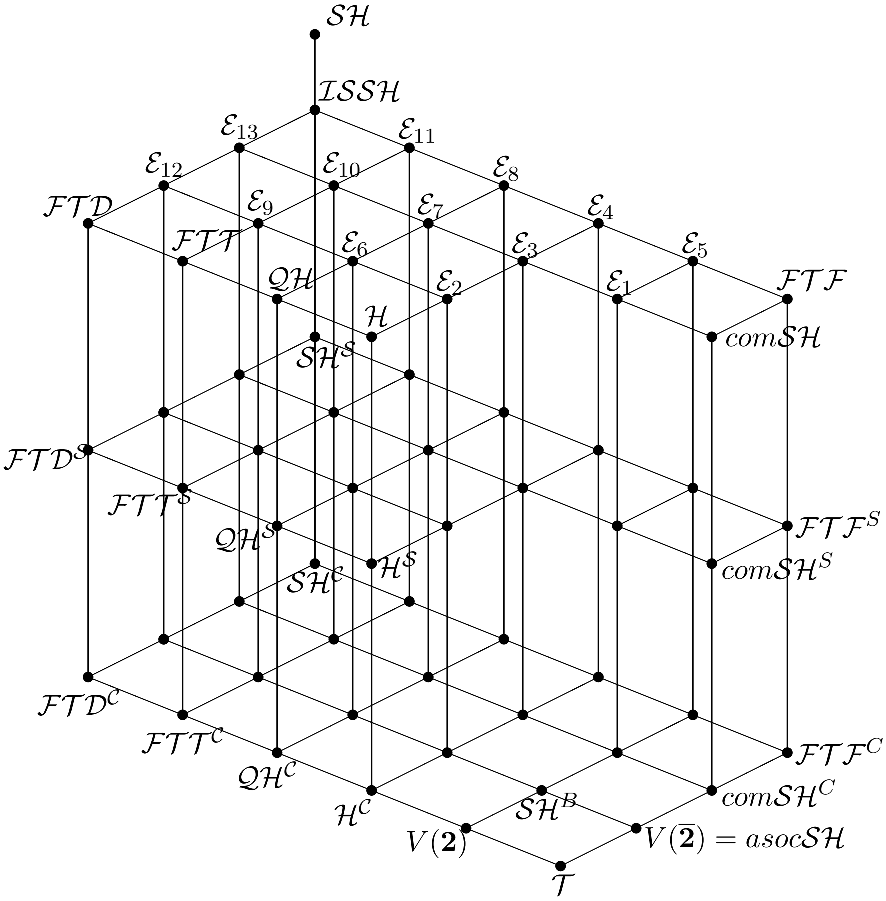


$\to$	0	a	b	c	1
0	1	b	a	a	a
a	b	1	0	a	a
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Tenemos que $\mathbf{L}$ es una álgebra de semi-Heyting, pero $(0 \to 1)^{**} \vee (0 \to 1)^{*} = a^{**} \vee a^{*} = b^{*} \vee b = a \vee b = c \neq 1$, entonces $\mathbf{L} \notin \mathcal{ISSH}$.

Luego resulta el siguiente teorema.

Teorema 4.2.15 *La relación de orden entre las subvariedades previamente definidas es la graficada en la siguiente figura.*



Capítulo 5

Base ecuacional para la variedad $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$

5.1. Introducción

Consideremos las cadenas de semi-Heyting con n elementos de la forma

$$\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} = 1.$$

y todas las implicaciones $\to$: $L \times L \to L$ que determinan una estructura algebraica de semi-Heyting sobre el reticulado subyacente de $\mathbf{L}$.

En el presente capítulo llamaremos

$$\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$$

a la variedad de las cadenas consideradas anteriormente que satisfacen con la condición: $a_i \to a_j = a_r$ con $0 \leq i < j \leq n-1$ e $i \leq r \leq n-1$.

Por ejemplo, la variedad $\mathcal{V}^3_{a_1 \to a_2 = a_2}$ es la variedad generada por las álgebras $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_6$, $\mathbf{L}_7$ y $\mathbf{L}_8$ del capítulo 4. Recordemos que estas álgebras tienen como reticulado subyacente $0 = a_0 < a_1 < a_2 = 1$ y $a_1 \to a_2 = a_1 \to 1 = 1$.

El principal objetivo de este capítulo es encontrar una base ecuacional para cada una de éstas subvariedades. Creemos que es el paso previo fundamental para obtener una base ecuacional para la variedad generada por un número finito de cadenas de semi-Heyting arbitrario. Para lograr este objetivo deberemos describir el comportamiento de las álgebras subdirectamente irreducibles de cada una de ellas. Este análisis además de ser esencial para nuestro objetivo es interesante para observar que aún trabajando con estructuras sencillas de reticulados totalmente ordenados el problema se vuelve altamente complejo.

Notación 5.1.1 *Notaremos $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$ con $i < j,\ i \leq r$ a la identidad:*

$$\bigvee_{l,m=0,\ l<m}^{n-1} ((x_l \vee x_m) \to x_l) \vee ((x_i \to x_j) \leftrightarrow x_r) \approx 1$$

El siguiente teorema es central para el resto de la sección debido a que caracteriza a aquellas cadenas de semi-Heyting con n elementos, $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} = 1$, tales que $a_i \to a_j = a_r$.

Teorema 5.1.2 *Sea* $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ *una cadena de semi-Heyting con n elementos. Entonces* $a_i \to a_j = a_r$ *en* $\mathbf{L}$ *si y sólo si* $\mathbf{L}$ *satisface la identidad* $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$ *con* $0 \leq i < j \leq n-1$.

Demostración Supongamos que $a_i \to a_j = a_r$ en $\mathbf{L}$. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in L$. Si $c_l \geq c_m$ para algún $l < m$ entonces $(c_l \vee c_m) \to c_l = c_l \to c_l = 1$. Luego podemos suponer que $c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1}$. Entonces $c_m = a_m$ con $1 \leq m \leq n-1$. Como $a_i \to a_j = a_r$, $c_i \to c_j = c_r$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$.

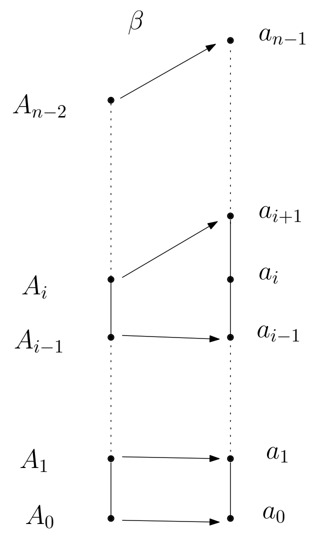
Para la recíproca, supongamos que $\mathbf{L}$ satisface la identidad $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$. Tomamos $x_m = a_m$ con $1 \leq m \leq n-1$ en la identidad $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$. Si $l < m$, $(a_l \vee a_m) \to a_l = a_m \to a_l = a_l \neq 1$. Entonces $a_i \to a_j = a_r$. ■

Observemos que como corolario inmediato del resultado anterior se tiene que $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ satisface la identidad $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$.

El siguiente lema prueba que toda cadena de semi-Heyting con $n-1$ ($n \geq 3$) elementos puede sumergirse en cualquier variedad $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ siempre que $a_i \neq 0$.

Lema 5.1.3 *Sea* $\mathbf{L}$ *una cadena de semi-Heyting con* $2 \leq |L| \leq n-1$, $n \geq 3$ *elementos. Entonces* $\mathbf{L} \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ *con* $0 < i < j \leq n-1$ *e* $i \leq r \leq n-1$*..*

Demostración Probemos primero el caso en que $|L| = n-1$. Es decir $\mathbf{L} : A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-2}$. Sea $\mathbf{L}' : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ una cadena con n elementos.
Definamos $\beta : \mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ como $\beta(A_k) = \begin{cases} a_k & \text{si } k < i \\ a_{k+1} & \text{si } k \geq i \end{cases}$.
Observemos que β se comporta como en el siguiente gráfico:



Observemos, también, que β es un monomorfismo de reticulados.

Ahora definamos una implicación $\tilde{\to}$ sobre $\mathbf{L}'$.

$$a_l \tilde{\to} a_m = \begin{cases} \beta\left(A_l \to A_m\right) & \text{si } \beta\left(A_l\right) = a_l \quad\quad \text{y } \beta\left(A_m\right) = a_m, l < m \\ a_r & \text{si } l = i, l < m \quad\quad \text{y } m \geq j \\ a_m & \text{si } l = i, l < m \quad\quad \text{y } m < j \\ a_m & \text{si } m = i, l \leq k < i \quad \text{y } A_l \to A_{n-2} = A_k \\ a_i & \text{si } m = i, k \geq i, l < m \text{ y } A_l \to A_{n-2} = A_k \\ a_m & \text{si } l > m \\ 1 & \text{si } l = m \end{cases}.$$

Es rutinario probar que $\mathbf{L}' \in \mathcal{SH}$ (apéndice 10.3.1). Además en $\mathbf{L}'$, $a_i \tilde{\to} a_j = a_r$. Entonces $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$. Observemos que con esta implicación $\tilde{\to}$ definida sobre $\mathbf{L}'$, β resulta ser un monomorfismo de semi-Heyting. Como $\mathbf{L} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}')$, $\mathbf{L} \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$.

Ahora probemos el caso en que $2 \leq |L| < n - 1$. Por la observación 2.3.3, existe una cadena de semi-Heyting con $n - 1$ elementos $\mathbf{L}''$ tal que $\mathbf{L}$ es una subálgebra de $\mathbf{L}''$. Del caso anterior se puede afirmar que $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$. Como consecuencia, $\mathbf{L} \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$. ■

Vamos a probar algunos lemas de suma utilidad. Las demostraciones de los lemas han sido integradas al apéndice para facilitar la lectura de los mismos. Ver apéndice 10.3.2 y apéndice 10.3.3 para los lemas 5.1.4 y 5.1.6 respectivamente.

El lema que sigue permite construir, a partir de una cadena finita de semi-Heyting $\mathbf{L}'$ dada, una cadena de semi-Heyting finita $\mathbf{L}$ con una mayor cantidad de elementos tal que $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L})$.

Lema 5.1.4 *Sean $\mathbf{L} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ y $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-1}$, con $2 \leq k < n$, dos cadenas. Sea $\to: \mathbf{L}' \times \mathbf{L}' \to \mathbf{L}'$ una implicación de semi-Heyting. Si existe un monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}$ tal que $\gamma(A_k) = a_{k'}$ con $k \leq k'$ entonces la operación $\tilde{\to}: \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, definida a continuación, es una implicación de semi-Heyting.*

$$a_i \tilde{\to} a_j = \begin{cases} a_j & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \\ \gamma(a \to b) & \text{si } \gamma(a) = a_i, \gamma(b) = a_j \textit{ e } i < j \\ \gamma(A_l) & \text{si } A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \textit{ con } i_0 \leq l < j, a_i = \gamma(A_{i_0}), a_j \notin \gamma(\mathbf{L}'), i < j \\ a_j & \text{si } A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \textit{ con } j \leq l, a_i = \gamma(A_{i_0}), a_j \notin \gamma(\mathbf{L}'), i < j \\ 1 & \textit{en otro caso} \end{cases}.$$

Como consecuencia, $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L})$.

Notación 5.1.5 *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$. Notaremos $[b) = \{a \in L : a \geq b\}$ y $(b] = \{a \in L : a \leq b\}$.*

Lema 5.1.6 *Sea $\langle \mathbf{L}, \to \rangle$ una cadena de semi-Heyting con n elementos tal que $\mathbf{L}$ satisface la identidad $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$ con $i < j$ y $i \leq r$. Existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}'$ con $n + l$ elementos ($l \geq 1$) tal que $\mathbf{L}'$ satisface la misma identidad y $\mathbf{L} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}')$.*

La demostración del siguiente lema es similar a la del lema anterior observando cómo se define la implicación $\tilde{\to}$.

Lema 5.1.7 *Sea* $\langle \mathbf{L}, \rightarrow \rangle$ *una cadena de semi-Heyting con* n *elementos tal que* $\mathbf{L}$ *satisface la identidad* $\alpha(a_0 \rightarrow a_{n-1} = a_r) = \alpha(0 \rightarrow 1 = a_r)$ *con* $0 \leq r \leq n-1$. *Existe una cadena de semi-Heyting* $\mathbf{L}'$ *con* $n+l$ *elementos* $(l \geq 1)$ *tal que* $\mathbf{L}'$ *satisface la identidad* $\alpha(a_0 \rightarrow a_{n+l-1} = a_r) = \alpha(0 \rightarrow 1 = a_r)$ *y* $\mathbf{L} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}')$.

Lema 5.1.8 *Sea* $\langle \mathbf{L}, \rightarrow \rangle$ *una cadena de semi-Heyting con* n *elementos tal que* $\mathbf{L}$ *satisface la identidad* $0 \rightarrow 1 \approx 1$. *Existe una cadena de semi-Heyting* $\mathbf{L}'$ *con* $n+l$ *elementos* $(l \geq 1)$ *tal que* $\mathbf{L}'$ *satisface la identidad* $\alpha(a_0 \rightarrow a_{n+l-1} = a_{n+l-2}) = \alpha(0 \rightarrow 1 = a_{n+l-2})$ *y* $\mathbf{L} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}')$.

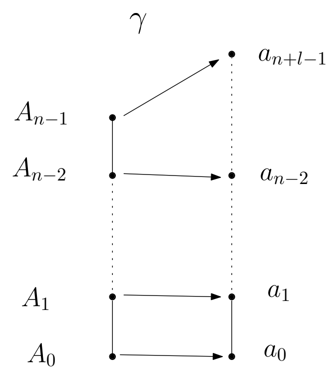
Demostración Observemos que $a_{n+l-2} = 1$ es un coátomo en la cadena $\mathbf{L}'$.

Sea $\mathbf{L} : A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1}$.

Ahora, consideremos la cadena

$$\mathbf{L}' : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n < \ldots < a_{n+l-1}.$$

Definimos $\gamma : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ como $\gamma(A_k) = \begin{cases} a_k & \text{si } 0 \leq k \leq n-2 \\ a_{n+l-1} & \text{si } k = n-1 \end{cases}$.



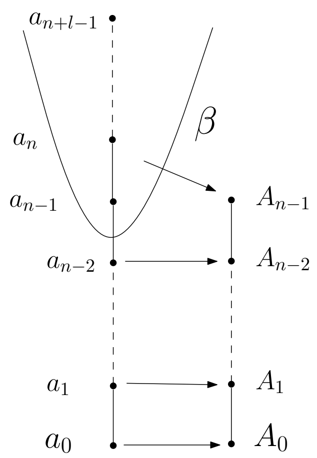
Observemos que γ es un monoformismo de reticulados. Definimos $\tilde{\rightarrow}: \mathbf{L}' \times \mathbf{L}' \rightarrow \mathbf{L}'$ como:

$$a_i \;\tilde{\rightarrow}\; a_j = \begin{cases} a_j & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \\ \gamma(a \rightarrow b) & \text{si } a_i = \gamma(a), a_j = \gamma(b), (a_i, a_j) \neq (a_0, a_{n+l-1}) \text{ con } i < j \\ a_{n+l-2} & \text{si } (a_i, a_j) = (a_0, a_{n+l-1}) \text{ con } i < j \\ a_j & \text{si } \gamma(a \rightarrow A_{n-1}) = a_{n+l-1}, a_i = \gamma(a), a_j \notin \gamma(\mathbf{L}) \text{ con } i < j \\ \gamma(a \rightarrow A_{n-1}) & \text{si } \gamma(a \rightarrow A_{n-1}) \leq a_{n-2}, a_i = \gamma(a), a_j \notin \gamma(\mathbf{L}) \text{ con } i < j \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

Se tiene que $\langle \mathbf{L}', \tilde{\rightarrow} \rangle \in \mathcal{SH}$ (apéndice 10.3.4).

Consideremos el filtro $[a_{n-1})$ y el cociente asociado al mismo $\mathbf{L}'/[a_{n-1})$.

Definimos $\beta : \mathbf{L}'/[a_{n-1}) \rightarrow \mathbf{L}$ como $\beta(\overline{a_i}) = A_i$ con $0 \leq i \leq n-1$.



Como en el lema 5.1.6, β es un isomorfismo. Entones $\mathbf{L} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}')$. En $\mathbf{L}'$, $a_0 \tilde{\to} a_{n+l-1} = a_{n+l-2}$. Por el lema 5.1.2, $\mathbf{L}'$ satisface la identidad $\alpha(a_0 \tilde{\to} a_{n+l-1} = a_{n+l-2})$. ■

De los lemas 1.0.4 y 2.2.1 se deduce inmediatamente el siguiente lema:

Lema 5.1.9 *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}^C$. $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^{**} \approx 1$ *si y sólo si* $0 \to 1 \neq 0$.

5.2. Base ecuacional

En adelante el objetivo será establecer una base ecuacional para la variedad $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ con $n \geq 3$, $0 \leq i < j \leq n-1$ y $0 \leq r \leq n-1$. Primero vamos a considerar el caso en que $i \neq 0$, es decir, el elemento a_i no es la constante 0.

Recordemos las siguientes identidades introducidas en el capítulo 2

$$((x \vee (x \to y)) \to (x \to y)) \vee (y \to (x \wedge y)) \approx 1 \qquad \text{(Ch)}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (x_i \vee x_i^*) \vee \bigvee_{j=1; j<i}^{n-1} (x_i \to x_j) \approx 1 \ (\mathrm{H_n})$$

que caracterizan las variedades $\mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{C}_n$ respectivamente.

Teorema 5.2.1 *Las identidades* (Ch), $(\mathrm{H_n})$ *y* $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$ *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ *con* $n \geq 3$ *y* $0 < i < j \leq n-1$.

Demostración Como $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r} \subseteq \mathcal{SH}^C$, por el teorema 2.4.3, $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ satisface la identidad (Ch). Como $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ está generada por cadenas con n elementos que verifican que $a_i \to a_j = a_r$ entonces por un lado $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ satisface la identidad $(\mathrm{H_n})$ y, por el otro, por el teorema 5.1.2, $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ satisface la identidad $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$.

Sea $\mathcal{V}$ la variedad definida por las identidades (Ch), $(\mathrm{H_n})$ y $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible. Entonces, $\mathbf{L}$ es una cadena de semi-Heyting. Por el teorema 2.4.5, $|L| \leq n$. Si $|L| = n$, como $\mathbf{L}$ satisface $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$ entonces por el teorema 5.1.2, $\mathbf{L} \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$. Si $2 \leq |L| < n-1$, como $\mathbf{L}$ satisface $\alpha(a_i \to a_j = a_r)$, por el lema 5.1.3, $\mathbf{L} \in \mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$. ■

Consideremos ahora las siguientes 39 identidades esenciales para el resto del capítulo:

(5.1) $(0 \to 1)^{**} \approx 1$

(5.2) $x \vee (((0 \to 1) \vee x) \leftrightarrow (0 \to 1)) \approx 1$

(5.3)

$$\bigwedge_{k=1}^{n-(i+1)} \Big[\bigvee_{j=1}^{n-k-2}((x_j \vee x_j^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{j=1}^{n-k-3}((x_j \vee x_{j+1}) \leftrightarrow x_j) \bigvee_{j=i-k}^{i}((0 \to 1) \leftrightarrow x_j) \vee$$
$$\vee [((x_{i-k} \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge ((x_i \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow x_i)] \Big] \approx 1$$

(5.4) $x^* \vee (((0 \to 1) \vee x) \leftrightarrow x) \approx 1$

(5.5) $(((0 \to (0 \to 1)) \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to (0 \to 1))) \approx 1$

(5.6) $(((0 \to (0 \to 1)) \to (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 1)) \approx 1$

(5.7)

$$\bigwedge_{n-i<k\leq n-1,\ k\geq 4} \left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee (((0 \to 1) \vee x_{k-n+i}) \leftrightarrow (0 \to 1))\right] \approx 1$$

(5.8)

$$\bigwedge_{n-j<k\leq n-1,\ k\geq 4} \Big[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1)\vee$$
$$\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee (((0 \to (0 \to 1)) \vee x_{k-n+j}) \leftrightarrow (0 \to (0 \to 1))) \Big] \approx 1$$

(5.9) $((x \vee x^*) \leftrightarrow 1) \vee (((0 \to (0 \to 1)) \vee x) \leftrightarrow (0 \to (0 \to 1))) \approx 1$

(5.10)

$$\bigwedge_{i\le k-2\le n-3,\ k\ge 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee(((0\to 1)\vee x_i)\leftrightarrow x_i)\right]\approx 1$$

(5.11) $((x\vee x^*)\leftrightarrow 1)\vee(((0\to 1)\vee x)\leftrightarrow x)\approx 1$

(5.12)

$$\bigwedge_{j\le k-2\le n-3,\ k\ge 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee(((0\to(0\to 1))\vee x_j)\leftrightarrow x_j)\right]\approx 1$$

(5.13)

$$\bigwedge_{1\le t\le i,\ j-i+1\le a\le k-2-t}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee(((0\to 1)\to x_t)\leftrightarrow x_t)\vee\right.$$
$$\vee(((0\to 1)\to x_t)\leftrightarrow(0\to 1))\vee[((0\to 1)\leftrightarrow x_t)\wedge[((x_{t+a}\to(0\to(0\to 1)))\leftrightarrow(0\to(0\to 1)))\vee$$
$$\vee(((0\to(0\to 1))\to x_{t+a})\leftrightarrow x_{t+a})]]]\approx 1$$

(5.14)

$$\bigwedge_{i\le k-2\le n-3,\ k\ge 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee((x_{k-2}\vee(0\to(0\to 1)))\leftrightarrow x_{k-2})\vee\right.$$
$$\vee[((x_{k-2}\vee(0\to(0\to 1)))\leftrightarrow((0\to(0\to 1))))\wedge$$
$$(((0\to(0\to 1))\to x_{k-2})\leftrightarrow x_{k-2})\wedge(((0\to 1)\vee x_i)\leftrightarrow(0\to 1))]]\approx 1$$

(5.15)

$$((x\vee x^*)\leftrightarrow 1)\vee((x\vee(0\to(0\to 1)))\leftrightarrow x)\vee[((x\vee(0\to(0\to 1)))\leftrightarrow(0\to(0\to 1)))$$
$$\wedge(((0\to(0\to 1))\to x)\leftrightarrow x)\wedge(((0\to 1)\vee x)\leftrightarrow(0\to 1))]\approx 1$$

(5.16)

$$\bigwedge_{i\le k-2\le n-3,\ 1\le k-j+i-1,\ k\ge 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee((0\to(0\to 1))\leftrightarrow x_{k-2})\vee\right.$$
$$\vee[(((0\to(0\to 1))\vee x_{k-2})\leftrightarrow x_{k-2})\wedge((x_{k-2}\to(0\to(0\to 1)))\leftrightarrow(0\to(0\to 1)))]\vee$$
$$\vee[(((0\to(0\to 1))\vee x_{k-2})\leftrightarrow(0\to(0\to 1)))\wedge(((0\to(0\to 1))\to x_{k-2})\leftrightarrow x_{k-2})\wedge$$
$$\wedge(((0\to 1)\vee x_{k-j+i-1})\leftrightarrow(0\to 1))]]\approx 1$$

(5.17)

$$((x \vee x^*) \leftrightarrow 1) \vee ((0 \to (0 \to 1)) \leftrightarrow x) \vee$$
$$\vee[(((0 \to (0 \to 1)) \vee x) \leftrightarrow x) \wedge ((x \to (0 \to (0 \to 1))) \leftrightarrow (0 \to (0 \to 1)))] \vee$$
$$\vee[(((0 \to (0 \to 1)) \vee x) \leftrightarrow (0 \to (0 \to 1))) \wedge (((0 \to (0 \to 1)) \to x) \leftrightarrow x) \wedge$$
$$\wedge (((0 \to 1) \vee x) \leftrightarrow (0 \to 1))] \approx 1$$

(5.18) $0 \to (0 \to 1) \approx 1$

(5.19)

$$\bigwedge_{n-i<k\leq n-1,\ k\geq 4} \left[\bigvee_{m=1}^{k-2} ((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{m=1}^{k-3} ((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee ((x_{k-n+i} \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 1)) \right] \approx 1$$

(5.20) $((x \vee x^*) \leftrightarrow 1) \vee ((x \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 1)) \approx 1$

(5.21)

$$\bigwedge_{i\leq k-2\leq n-3,\ k\geq 4} \left[\bigvee_{m=1}^{k-2} ((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{m=1}^{k-3} ((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee ((x_i \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow x_i) \right] \approx 1$$

(5.22) $((x \vee x^*) \leftrightarrow 1) \vee ((x \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow x) \approx 1$

(5.23)

$$\bigwedge_{n-i<k\leq n-1,\ k\geq 4} \left[\bigvee_{m=1}^{k-2} ((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{m=1}^{k-3} ((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee \right.$$
$$\left. \vee[((x_{k-n+i} \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge (((0 \to 1) \to x_{k-n+i}) \leftrightarrow x_{k-n+i})] \right] \approx 1$$

(5.24) $((x \vee x^*) \leftrightarrow 1) \vee [((x \vee (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge (((0 \to 1) \to x) \leftrightarrow x)] \approx 1$

(5.25)

$$\bigwedge_{r\leq k-2<j,\ k\geq 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee[(((0\to 1)\to x_r)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to 1)\vee x_r)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\vee[((x_r\to(0\to 1))\leftrightarrow(0\to 1))\wedge(((0\to 1)\vee x_r)\leftrightarrow x_r)]\vee$$
$$\left.\vee[((0\to 1)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to x_i)\vee x_r)\leftrightarrow(0\to x_i))\wedge(((0\to x_i)\to x_r)\leftrightarrow x_r)]\right]\approx 1$$

(5.26)

$$\bigwedge_{n-j<k\leq n-1,\ k\geq 4,\ r\leq k-2<j}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee[(((0\to 1)\to x_r)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to 1)\vee x_r)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\vee[((x_r\to(0\to 1))\leftrightarrow(0\to 1))\wedge(((0\to 1)\vee x_r)\leftrightarrow x_r)]\vee$$
$$\left.\vee[((0\to 1)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to x_i)\vee x_{k-n+j})\leftrightarrow(0\to x_i))]\right]\approx 1$$

(5.27)

$$\bigwedge_{k-2<r<j,\ i<k-1,\ r=k-1,\ k\geq 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee((0\to 1)\leftrightarrow x_{r-1})\vee[((0\to 1)\vee x_{r-1}\leftrightarrow x_{r-1})\wedge(x_{r-1}\to(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\left.\vee[(x_{r-1}\vee(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))\wedge((0\to 1)\to x_{r-1}\leftrightarrow x_{r-1})\wedge(((0\to x_i)\vee(0\to 1))\leftrightarrow(0\to x_i))]\right]\approx 1$$

(5.28)

$$((x\vee x^*)\leftrightarrow 1)\vee((0\to 1)\leftrightarrow x)\vee[((0\to 1)\vee x\leftrightarrow x)\wedge(x\to(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\vee[(x\vee(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))\wedge((0\to 1)\to x\leftrightarrow x)\wedge(((0\to x)\vee(0\to 1))\leftrightarrow(0\to x))]\approx 1$$

(5.29)

$$\bigwedge_{n-r<k\leq n-1,\ k\geq 4}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\left.\vee(((0\to 1)\vee x_{k-n+r})\leftrightarrow(0\to 1))\right]\approx 1$$

(5.30)

$$((x\vee x^*)\leftrightarrow 1)\vee(((0\to 1)\vee x)\leftrightarrow(0\to 1))\approx 1$$

(5.31)

$$\bigwedge_{r\le k-2\le n-3,\ k\ge 5}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\vee(((0\to 1)\vee x_r)\leftrightarrow x_r)\right]\approx 1$$

(5.32)

$$\bigwedge_{r<j\le k-2\le n-3,\ k\ge 5}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee[((0\to 1)\vee x_r\leftrightarrow x_r)\wedge(x_r\to(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\vee[(x_r\vee(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))\wedge((0\to 1)\to x_r\leftrightarrow x_r)]\vee$$
$$\vee[((0\to 1)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to x_i)\vee x_j)\leftrightarrow x_j)\vee(((0\to x_i)\vee x_r)\leftrightarrow(0\to x_i))]]\approx 1$$

(5.33)

$$\bigwedge_{r<j\le k-2\le n-3,\ k\ge 5,\ n-j<k\le n-1}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee[((0\to 1)\vee x_r\leftrightarrow x_r)\wedge(x_r\to(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\vee[(x_r\vee(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))\wedge((0\to 1)\to x_r\leftrightarrow x_r)]\vee$$
$$\vee[((0\to 1)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to x_i)\vee x_{k-n+j})\leftrightarrow(0\to x_i))]]\approx 1$$

(5.34)

$$\bigwedge_{j\le k-2<r,\ k\ge 4,r=k-1}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee(((0\to 1)\vee x_{k-2})\leftrightarrow x_{k-2})\vee$$
$$\vee[(x_{k-2}\vee(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))\wedge((0\to 1)\to x_{k-2}\leftrightarrow x_{k-2})\wedge((0\to x_i)\leftrightarrow x_j)]]\approx 1$$

(5.35)

$$\bigwedge_{j<r\le k-2\le n-3,\ k\ge 5}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee[((0\to 1)\vee x_r\leftrightarrow x_r)\wedge(x_r\to(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$
$$\vee[(x_r\vee(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))\wedge((0\to 1)\to x_r\leftrightarrow x_r)]\vee$$
$$\vee[((0\to 1)\leftrightarrow x_r)\wedge(((0\to x_i)\vee x_j)\leftrightarrow x_j)\vee(((0\to x_i)\vee x_r)\leftrightarrow x_r)]]\approx 1$$

(5.36)

$$\bigwedge_{j<r\le k-2\le n-3,\ k\ge 5,\ n-r<k\le n-1}\left[\bigvee_{m=1}^{k-2}((x_m\vee x_m^*)\leftrightarrow 1)\bigvee_{m=1}^{k-3}((x_m\vee x_{m+1})\leftrightarrow x_m)\vee\right.$$
$$\vee[((0\to 1)\vee x_r\leftrightarrow x_r)\wedge(x_r\to(0\to 1)\leftrightarrow(0\to 1))]\vee$$

$$\vee[(x_r \vee (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge ((0 \to 1) \to x_r \leftrightarrow x_r)] \vee$$
$$\vee[((0 \to 1) \leftrightarrow x_r) \wedge ((0 \to x_i) \leftrightarrow x_j)]] \approx 1$$

(5.37)

$$\bigwedge_{j=r\leq k-2\leq n-3,\ k\geq 4} \left[\bigvee_{m=1}^{k-2} ((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{m=1}^{k-3} ((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee \right.$$
$$\vee[((0 \to 1) \vee x_r \leftrightarrow x_r) \wedge (x_r \to (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1))] \vee$$
$$\vee[(x_r \vee (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge ((0 \to 1) \to x_r \leftrightarrow x_r)] \vee$$
$$\vee[((0 \to 1) \leftrightarrow x_r) \wedge ((0 \to x_i) \leftrightarrow x_r)]] \approx 1$$

(5.38)

$$\bigwedge_{j=r,\ k-2<r,\ i<k-1,\ r=k-1,\ k\geq 4} \left[\bigvee_{m=1}^{k-2} ((x_m \vee x_m^*) \leftrightarrow 1) \bigvee_{m=1}^{k-3} ((x_m \vee x_{m+1}) \leftrightarrow x_m) \vee \right.$$
$$\vee((0 \to 1) \leftrightarrow x_{r-1}) \vee [((0 \to 1) \vee x_{r-1} \leftrightarrow x_{r-1}) \wedge (x_{r-1} \to (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1))] \vee$$
$$\vee[(x_{r-1} \vee (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge ((0 \to 1) \to x_{r-1} \leftrightarrow x_{r-1}) \wedge ((0 \to x_i) \leftrightarrow (0 \to 1))]] \approx 1$$

(5.39)

$$((x \vee x^*) \leftrightarrow 1) \vee ((0 \to 1) \leftrightarrow x) \vee [((0 \to 1) \vee x \leftrightarrow x) \wedge (x \to (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1))] \vee$$
$$\vee[(x \vee (0 \to 1) \leftrightarrow (0 \to 1)) \wedge ((0 \to 1) \to x \leftrightarrow x) \wedge ((0 \to x) \leftrightarrow (0 \to 1))] \approx 1$$

Hasta el momento establecimos una base ecuacional para las subvariedades $\mathcal{V}^n_{a_i \to a_j = a_r}$ con $i \neq 0$, es decir, el elemento $a_i \neq 0$. Ahora nos ocuparemos del caso, más complicado, que es tomando el $a_i = 0 = a_0$. Empezaremos por el caso donde 0 implica 1 es igual a un coátomo.

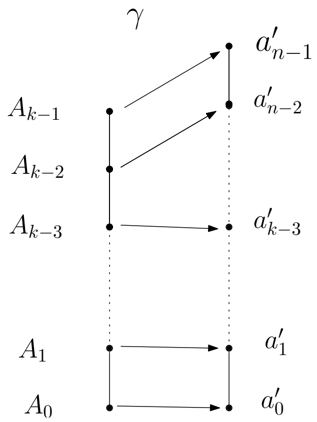
Teorema 5.2.2 *Las identidades* (Ch), (H$_\text{n}$) *y* $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_{n-2})$ *y las identidades* (5.1) *y* (5.2) *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1} = a_{n-2}} = \mathcal{V}^n_{0 \to 1 = a_{n-2}}$ *con* $n \geq 3$.

Demostración Sea $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ una cadena de semi-Heyting en la que se satisface que $0 \to 1 = a_{n-2}$. Por el teorema 5.1.2, $\mathbf{L}$ verifica la identidad $\alpha(0 \to 1 = a_{n-2})$. Entonces $(0 \to 1)^{**} = (a_{n-2})^{**} = 0^* = 1$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.1). Veamos que $\mathbf{L} \models x \vee (((0 \to 1) \vee x) \leftrightarrow (0 \to 1)) \approx 1$ (5.2). Sea $c \in L$. Si $c = 1$ la igualdad se verifica claramente. Si $c \neq 1$, $(0 \to 1) \vee c = a_{n-2} \vee c = a_{n-2} = 0 \to 1$. Luego, la igualdad se verifica.

Para la recíproca consideremos un álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ donde $\mathcal{V}$ es la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), (H$_\text{n}$), $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_{n-2})$, (5.1) y (5.2). Por resultados anteriores es suficiente suponer que $|L'| \leq n - 1$.

<u>Caso 1:</u> $|L'| = k$ con $3 \leq k \leq n - 1$. Entonces $\mathbf{L}' : 0 = A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-2} < A_{k-1} = 1$. Consideremos el elemento A_{k-2} y reemplacemos este elemento en la identidad (5.2). Se obtiene $A_{k-2} \vee (((0 \to 1) \vee A_{k-2}) \leftrightarrow (0 \to 1)) = 1$. Como $\mathbf{L}'$ es subdirectamente irreducible, $(((0 \to 1) \vee A_{k-2}) \leftrightarrow (0 \to 1)) = 1$. Entonces, $(0 \to 1) \vee A_{k-2} = 0 \to 1$. Entonces $0 \to 1 \geq A_{k-2}$. Como consecuencia $0 \to 1 = A_{k-2}$ ó $0 \to 1 = 1$.

<u>Caso 1.1:</u> $0 \to 1 = A_{k-2}$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena con n elementos. Definimos $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como: $\gamma(A_m) = \begin{cases} A_m & \text{si } 0 \leq m \leq k-3 \\ A_{m+n-k} & \text{si } k-2 \leq m \leq k-1 \end{cases}$.



Definiendo una implicación de semi-Heyting $\tilde{\to}$ sobre $\mathbf{L}''$ como en el lema 5.1.4, se tiene que $\langle \mathbf{L}'', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. Además, en $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = \gamma(0) \tilde{\to} \gamma(1) = \gamma(0 \to 1) = \gamma(A_{k-2}) = a'_{n-2}$. Como consecuencia $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1} = a_{n-2}}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$.

<u>Caso 1.2:</u> $0 \to 1 = 1$. Por el lema 5.1.8, existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos tal que $\mathbf{L}''$ satisface la identidad $\alpha(0 \to 1 = a_{n-2})$ y $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Como consecuencia $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0 \to 1 = a_{n-2}}$.

<u>Caso 2:</u> $|L'| = 2$. Como $\mathbf{L}' \models (0 \to 1)^{**} \approx 1$, por el lema 5.1.9, $\mathbf{L}' \models 0 \to 1 \approx 1$. Por el lema 5.1.8, existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos tal que $\mathbf{L}''$ satisface la identidad $\alpha(0 \to 1 = a_{n-2})$ y $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Como consecuencia $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0 \to 1 = a_{n-2}}$.

■

Veamos ahora el caso donde 0 implica 1 es igual a un elemento que no es ni átomo ni coátomo.

Teorema 5.2.3 *Las identidades* (Ch), (H$_n$), (5.1) *y* $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_i)$ *y la identidad* (5.3) *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1} = a_i} = \mathcal{V}^n_{0 \to 1 = a_i}$ *con* $n \geq 5$ *y* $2 \leq i \leq n-3$.

Demostración Sea $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ una cadena de semi-Heyting en la que se satisface que $0 \to 1 = a_i$. Por el teorema 5.1.2, $\mathbf{L}$ verifica la identidad $\alpha(0 \to 1 = a_i)$. Entonces $(0 \to 1)^{**} = (a_i)^{**} = 0^* = 1$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.1).

Veamos que $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.3).
Consideremos $k \in \omega :\ 1 \leq k \leq n-(i+1)$. Como $1 \leq i-1 \leq n-k-2 \leq n-3$, podemos considerar elementos $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \in L$.
Si $c_j \in \{0, 1\}$ para algún $1 \leq j \leq n-k-2$ entonces $c_j \vee c_j^* = 1$.
Si $c_j \geq c_{j+1}$ para algún $1 \leq j \leq n-k-3$ entonces $c_j \vee c_{j+1} = c_j$. Luego, la igualdad (5.3) se verifica.

Ahora podemos asumir que $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \in L$ con $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-k-2}$ y $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \notin \{0,1\}$.
Si $c_l = a_i$ con $c_l \in \{c_{i-k}, c_{i-k+1}, \ldots, c_i\}$ entonces $0 \to a_i = c_l$. Consecuentemente la igualdad (5.3) se verifica.

Luego podemos asumir que $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \in L$ con $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-k-2}$, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \notin \{0,1\}$ y $c_{i-k}, c_{i-k+1}, \ldots, c_i \neq a_i$.
Veamos que estos elementos son distintos del elemento a_i, es decir, $c_j \neq a_i$ para cada $1 \le j \le n-k-2$.
Como $1 \le k \le n-(i+1)$ entonces $i-k-1 > 1$. Luego, tiene sentido considerar j con $1 \le j \le i-k-1$ y consecuentemente, $k+1 \le i-j \le i-1$. Por otro lado como $i \le n-2$ entonces $i-k \le n-k-2$. Luego podemos considerar j de manera que $i-k \le j \le n-k-2$. Vamos a probar que $c_j \neq a_i$ para cada $1 \le j \le n-k-2$ cuando $1 \le j \le i-k-1$ y cuando $i+1 \le j \le n-k-2$.

Veamos, primero, que $c_j \neq a_i$ para cada $1 \le j \le n-k-2$ cuando $1 \le j \le i-k-1$. Supongamos que $c_{i-l} \ge a_i$ para algún $k+1 \le l \le i-1$. Entonces $\{c_{i-l}, c_{i-l+1}, \ldots, c_{n-k-2}\} \subseteq [a_i) \setminus \{a_{n-1}\}$ y, como consecuencia $|\{c_{i-l}, c_{i-l+1}, \ldots, c_{n-k-2}\}| \le |[a_i) \setminus \{a_{n-1}\}|$. Luego $n-k-2-(i-l)+1 \le n-1-i+1-1$ de lo cual se deduce que $l \le k$ (absurdo). Entonces $c_{i-l} < a_i$ para todo $k+1 \le l \le i-1$. Por lo tanto $c_j \neq a_i$ para cada $1 \le j \le n-k-2$ cuando $1 \le j \le i-k-1$.

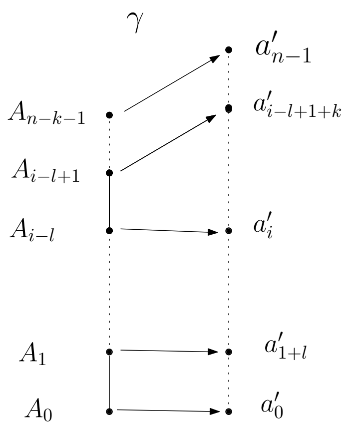
Veamos ahora que $c_j \neq a_i$ para cada $1 \le j \le n-k-2$ cuando $i+1 \le j \le n-k-2$. Supongamos que $c_{i+l} \le a_i$ para algún $1 \le l \le n-k-2-i$. Entonces $\{c_1, c_2, \ldots, c_{i+l}\} \subseteq (a_i] \setminus \{a_0\}$ y, consecuentemente, $|\{c_1, c_2, \ldots, c_{i+l}\}| \le |(a_i] \setminus \{a_0\}|$. Luego se obtiene que $i+l \le i$ y, por lo tanto, $l \le 0$ (absurdo). Entonces $c_{i+l} > a_i$ para todo $1 \le l \le n-k-2-i$. Como consecuencia $c_j \neq a_i$ para cada $1 \le j \le n-k-2$ cuando $i+1 \le j \le n-k-2$. De lo anterior $c_1, c_2, \ldots, c_{i-k-1}, c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots, c_{n-k-2} \notin \{a_i\}$.

Luego podemos asumir que $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \in L$ con $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-k-2}$ y $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-2} \notin \{0, 1, a_i\}$. Para demostrar la igualdad (5.3) basta con probar que $c_{i-k} \le a_0 \to 1$ y que $a_0 \to 1 \le c_i$. Lo haremos por el absurdo.
Supongamos que $c_{i-k} \ge a_{i+1}$. Entonces $\{c_{i-k}, c_{i-k+1}, \ldots, c_{n-k-2}\} \subseteq [a_{i+1}) \setminus \{a_{n-1}\}$ y, consecuentemente, $|\{c_{i-k}, c_{i-k+1}, \ldots, c_{n-k-2}\}| \le |[a_{i+1}) \setminus \{a_{n-1}\}|$. Por lo tanto $n-k-1-i+k \le n-1-i-1$ de lo que se deduce que $n-1 \le n-2$ (absurdo). Luego $c_{i-k} < a_{i+1}$. Entonces $c_{i-k} \le a_i = a_0 \to 1$.
Ahora supongamos que $c_i < a_{i-1}$. Luego $\{c_1, c_2, \ldots, c_i\} \subseteq (a_{i-1}] \setminus \{a_0\}$ y, entonces, $|\{c_1, c_2, \ldots, c_i\}| \le |(a_{i-1}] \setminus \{a_0\}|$. Como consecuencia, $i \le i-1$ (absurdo). Entonces $c_i \ge a_i = a_0 \to 1$.

Para la recíproca consideremos un álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ donde $\mathcal{V}$ es la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), ($\mathrm{H_n}$), (5.1), $\alpha(0 \to 1 = a_i)$ y (5.3). Por resultados anteriores es suficiente suponer que $|L'| \le n-1$.

<u>Caso 1:</u> $|L'| = n-k$ con $1 \le k \le n-(i+2)$ y $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-k-2} < A_{n-k-1}$. Tomo $x_1 = A_1, x_2 = A_2, \ldots, x_{n-k-2} = A_{n-k-2}$ en la identidad (5.3). Se obtiene que $A_0 \to A_{n-k-1} = A_{i-l}$ con $0 \le l \le k$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$. Definimos

$$\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}'' \text{ como: } \gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+k} & \text{si } i-l+1 \le x \le n-k-1 \\ a'_{x+l} & \text{si } 1 \le x \le i-l \\ a'_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$



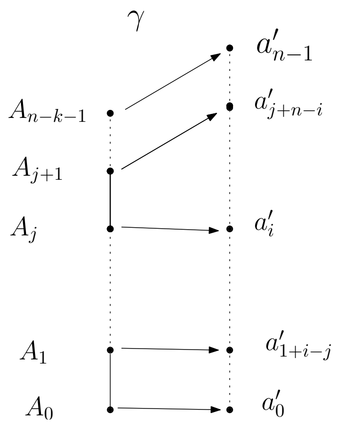
Definimos $\tilde{\rightarrow}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}'$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\rightarrow} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{n-k-1}) = \gamma(A_{i-l}) = a'_i$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$.

Caso 2: $|L'| = i+1$ y $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{i-1} < A_i$. Como $\mathbf{L}'$ satisface (5.1), $A_0 \to A_i \geq A_1$.

Caso 2.1: $A_0 \to A_i = A_i$. Por el corolario 5.1.7 existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos que satisface la identidad $\alpha(0 \to 1 = a_i)$ y $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$.

Caso 2.2: $A_0 \to A_{n-k-1} = A_j$ con $1 \leq j \leq i-1$ en $\mathbf{L}'$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$. Definimos $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como:

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+n-1-i} & \text{si} \quad j+1 \leq x \leq i \\ a'_{x+i-j} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq j \\ a'_0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$



Definimos $\tilde{\rightarrow}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}'$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\rightarrow} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{n-k-1}) = \gamma(A_j) = a'_i$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$.

Caso 3: $2 \leq |L'| \leq i$. Por la observación 2.3.3, existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con $i+1$ elementos tal que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Como $\mathbf{L}' \models (0 \to 1)^{**} \approx 1$, $\mathbf{L}' \not\models 0 \to 1 \approx 0$.

Luego $\mathbf{L}'' \not\models 0 \to 1 \approx 0$. Como en el caso 2, $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$. Como consecuencia, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_i}$.

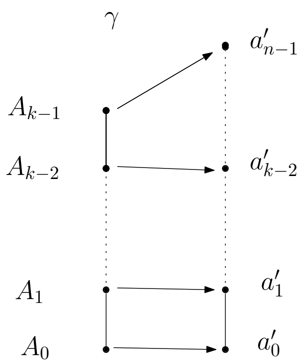
■

A continuación estudiaremos los casos donde $0 \to 1 \approx 1$ y $0 \to 1 \approx 0$.

Teorema 5.2.4 *Las identidades* (Ch), ($\mathrm{H_n}$)*, y la identidad* $0 \to 1 \approx 1$ *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1}=a_{n-1}} = \mathcal{V}^n_{0\to 1=1}$ *con* $n \geq 3$.

Demostración Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), ($\mathrm{H_n}$), y $0 \to 1 \approx 1$. Sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ un álgebra subdirectamente irreducible. Basta suponer que $|L'| = k$ con $2 \leq k \leq n-1$. Entonces $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-2} < A_{k-1}$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$. Definimos $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como:

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_x & \text{si } 0 \leq x \leq k-2 \\ a'_{n-1} & \text{si } x = k-1 \end{cases}.$$



Definimos $\overset{\sim}{\to}: \mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}'$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_{k-1}) = a'_{n-1}$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1}=a_{n-1}}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1}=a_{n-1}}$. ■

En forma análoga se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 5.2.5 *Las identidades* (Ch), ($\mathrm{H_n}$)*, y la identidad* $0 \to 1 \approx 0$ *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1}} = \mathcal{V}^n_{0\to 1=0}$ *con* $n \geq 3$.

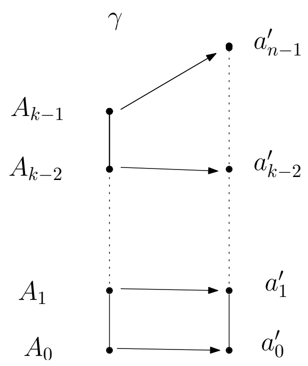
El teorema que sigue abarca el caso en que $0 \to 1$ es igual a un átomo.

Teorema 5.2.6 *Las identidades* (Ch), ($\mathrm{H_n}$), $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_1)$ *y* (5.1) *y la identidad* (5.4) *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{a_0 \to a_{n-1}=a_1} = \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_1}$ *con* $n \geq 3$.

Demostración Sea $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ una cadena de semi-Heyting que verifica que $0 \to 1 = a_1$. Sea $c \in L$. Si $c = 0$ entonces $c^* = 1$. Si $c \neq 0$ entonces $c \geq a_1 = 0 \to 1$. Luego $c \vee (0 \to 1) = c$. Entonces, $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.4).

Para la recíproca, sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), ($\mathrm{H_n}$), $\alpha(0 \to 1 = a_1)$, (5.1) y la identidad (5.4). Sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible. Por las identidades (Ch), ($\mathrm{H_n}$) y $\alpha(0 \to 1 = a_1)$, basta suponer que $|L'| < n$.

Caso 1: $|L'| = k$ con $3 \leq k \leq n-1$ y $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-1}$. En la identidad (5.4), reemplazamos $x = A_1$ y obtenemos que $A_0 \to A_{k-1} \leq A_1$. Como $\mathbf{L}'$ satisface (5.1), $A_0 \to A_{k-1} \geq A_1$. Luego $A_0 \to A_{k-1} = A_1$. Sea $\mathbf{L}'' : a_0' < a_1' < \ldots < a_{n-1}'$. Definimos $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como: $\gamma(A_x) = \begin{cases} a_x' & \text{si } 0 \leq x \leq k-2 \\ a_{n-1}' & \text{si } x = k-1 \end{cases}$.



Definimos $\tilde{\to}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}'$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a_0' \tilde{\to} a_{n-1}' = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_1) = a_1'$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_1}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_1}$.

Caso 2: $|L'| = 2$. Como $\mathbf{L}' \models (0 \to 1)^{**} \approx 1$, $\mathbf{L}' \models 0 \to 1 \approx 1$. Por el corolario 5.1.8, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{0\to 1=a_1}$.

■

Los casos restantes son más complicados de estudiar. Para esto deberemos definir las siguientes subvariedades y encontrar bases ecuacionales para ellas. Este hecho determinará directamente bases ecuacionales para los casos omitidos hasta ahora.

Notación 5.2.7 *Notaremos*

$$\mathcal{V}^n_{(a_i\to a_j=a_r)\&(a_{i'}\to a_{j'}=a_{r'})}$$

a la variedad generada por las cadenas de semi-Heyting de la forma $\mathbf{L} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ *que satisfacen* $a_i \to a_j = a_r$ *y* $a_{i'} \to a_{j'} = a_{r'}$.

Vamos a encontrar una base ecuacional para cada subvariedad $\mathcal{V}^n_{(a_i\to a_j=a_r)\&(a_{i'}\to a_{j'}=a_{r'})}$ considerando casos sobre el índice j. Observemos que en adelante $a_i \neq 0$. El teorema que sigue caracteriza el caso en que $j \neq n-1$.

La demostración del siguiente teorema se desarrolla en el apéndice 10.3.5.

Teorema 5.2.8 *Las siguientes identidades representan una base ecuacional para la variedad*

$$\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)\&(0\to 1=a_i)}$$

con $n \geq 4$ *y* $0 < i < j < n-1$*:* (Ch), ($\mathrm{H_n}$), (5.1), $\alpha(0 \to a_i = a_j)$, $\alpha(0 \to 1 = a_i)$, (5.5), (5.6), (5.7), (5.12), (5.13), (5.14), (5.16), *y las identidades descritas a continuación según cada caso:*

(1) (a) (5.8) *si* $j \neq n-2$

(b) (5.9) *si* $j = n-2$

(2) (a) (5.10) *si* $i \neq 1$

(b) (5.11), (5.17) *si* $i = 1$.

(3) (5.15) *si* $i = 1$ *y* $j = 2$.

Los siguientes resultados caracterizan la variedad en el caso en que $j = n-1$ y se demuestran como en el teorema anterior.

Teorema 5.2.9 *Las identidades* (Ch), (H$_3$), (5.1), $\alpha(0 \to a_i = 1)$, $\alpha(0 \to 1 = a_i)$, *con* $0 < i < n-1$, (5.7), (5.10), (5.11) *y la identidad* (5.18) *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=1)\&(0\to 1=a_i)}$ *con* $n \geq 4$.

Teorema 5.2.10 *Las identidades* (Ch), (H$_\mathrm{n}$), (5.1), $\alpha(0 \to a_1 = a_2)$, $\alpha(0 \to a_2 = a_1)$ *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^3_{(0\to a_1=a_2)\&(0\to a_2=a_1)}$.

En los teoremas anteriores se estudiaron las identidades de la forma $\alpha(0 \to a_i = a_j)$ donde el elemento a_i es distinto de 0 estrictamente menor que a_j. Ahora veremos qué sucede si el elemento a_i es igual al a_j.

Nuevamente, para la demostración del siguiente teorema se remite al lector al apéndice 10.3.6.

Teorema 5.2.11 *Las identidades* (Ch), (H$_\mathrm{n}$), (5.1), (5.18) $\alpha(a_0 \to a_i = a_i)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_i)$, *con* $0 < i < n-1$, *y la identidades* (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) *representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_i)\&(a_0\to a_{n-1}=a_i)}$ *con* $n \geq 3$.

Para analizar los casos restantes necesitaremos definir una ecuación más y a partir de ésta una nueva subvariedad.

Notación 5.2.12 *Notaremos* $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$ *con* $0 < i < n-1$ *a la identidad:*

$$\bigvee_{l,m=0,\ l<m}^{n-1} ((x_l \vee x_m) \to x_l) \vee (((0 \to 1) \vee x_{i+1}) \leftrightarrow x_{i+1}) \approx 1$$

Teorema 5.2.13 *Sea* $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ *una cadena de semi-Heyting. Entonces* $0 \to 1 \geq a_{i+1}$ *en* $\mathbf{L}$ *si y sólo si* $\mathbf{L}$ *satisface la identidad* $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$ *con* $0 < i < n-1$.

Demostración Supongamos que $0 \to 1 \geq a_{i+1}$ en $\mathbf{L}$. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in L$. Si $c_l \geq c_m$ para algún $l < m$ entonces $(c_l \vee c_m) \to c_l = c_l \to c_l = 1$. Podemos suponer que $c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1}$. Entonces $c_m = a_m$ con $1 \leq m \leq n-1$. Como $0 \to 1 \geq a_{i+1}$, $0 \to 1 \geq c_{i+1}$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$.

Para la recíproca, supongamos que $\mathbf{L}$ satisface la identidad $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$. Tomamos $x_m = a_m$ con $1 \leq m \leq n-1$ en la identidad $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$. Si $l < m$, $(a_l \vee a_m) \to a_l = a_m \to a_l = a_l \neq 1$. Entonces $0 \to 1 \geq x_{i+1} = a_{i+1}$. ■

Notación 5.2.14 *Notaremos*

$$\mathcal{V}^n_{(a_i \to a_j = a_r)\&(0 \to 1 \geq a_{i+1})}$$

a la variedad generada por las cadenas de semi-Heyting de la forma $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ *que satisfacen las condiciones* $a_i \to a_j = a_r$ *y* $0 \to 1 \geq a_{i+1}$.

En el teorema que sigue 0 implica el elemento $a_i \neq 0, 1$ es el mismo elemento a_i. Además $0 \to 1$ es mayor o igual que el elemento que cubre al a_i en la cadena.

Teorema 5.2.15 *Las siguientes identidades representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{(0 \to a_i = a_i)\&(0 \to 1 \geq a_{i+1})}$ *con* $n \geq 3$ *y* $0 < i < n-1$*:* (Ch), (H$_\mathrm{n}$), (5.1), $\alpha(0 \to a_i = a_i)$, $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$ *y las identidades descritas a continuación según cada caso:*

(a) (5.23) *si* $i \neq n-2$

(b) (5.24) *si* $i = n-2$

Demostración Sea $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ una cadena de semi-Heyting con n elementos tal que $0 \to a_i = a_i$ y $0 \to 1 \geq a_{i+1}$ y sea $k \in \omega$ con $n - i < k \leq n-1$ y $k \geq 4$.

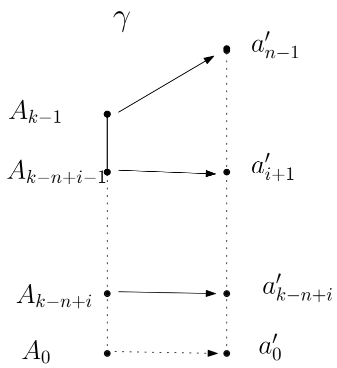
Veamos que si $i = n-2$ entonces $\mathbf{L}$ verifica la identidad (5.24). Sea $c \in L$. Como en demostraciones anteriores se puede suponer que $c \notin \{0, 1\}$.
Supongamos que $c \geq 0 \to 1$. Entonces $c \geq a_{i+1} = 1$. Luego $c = 1$ (absurdo). Como consecuencia $c < 0 \to 1$. Luego $\mathbf{L}$ verifica la identidad (5.24).

Veamos ahora que si $i \neq n-2$ entonces $\mathbf{L}$ verifica la identidad (5.23).
Consideremos $c_1, c_2, \ldots, c_{k-2} \in L$. Como en demostraciones anteriores, podemos suponer que $c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-2}$ con $c_m \notin \{0, 1\}$ para todo $1 \leq m \leq k-2$.
Supongamos que $c_{k-n+i} \geq 0 \to 1$. Entonces $c_{k-n+i} \geq a_{i+1}$ y, como consecuencia, $\{c_{k-n+i}, c_{k-n+i+1}, \ldots, c_{k-2}\} \subseteq [a_{i+1}) \setminus \{a_{n-1}\}$. Luego $k - 2 - (k - n + i) \leq n - 2 - (i+1)$ (absurdo). Por lo tanto $c_{k-n+i} < 0 \to 1$. De lo anterior se deduce que $c_{k-n+i} \vee (0 \to 1) = 0 \to 1$ y $(0 \to 1) \to c_{k-n+i} = c_{k-n+i}$. Luego $\mathbf{L}$ verifica la identidad (5.23).

Veamos, ahora, la recíproca. Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), (H$_\mathrm{n}$), (5.1), $\alpha(0 \to a_i = a_i)$, $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$, (5.23) ó (5.24). Sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible. Como antes, podemos suponer que $|L'| = k$ con $2 \leq k \leq n-1$. Si $k = 2$, como en el lema 5.1.8 se puede defnir una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos que satisface las identidades $\alpha(0 \to a_i = a_i)$, $\alpha(0 \to 1 \geq a_{i+1})$ tal que $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Entonces, supongamos que $k \neq 2$. $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-1}$. A partir de ahora, tomo $x_m = A_m$ con $1 \leq m \leq k-2$ en las identidades.

Caso 1: $k > n - i$. Por la identidad (5.23) ó (5.24), $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-n+i}$. Si $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-n+i}$ entonces $A_{k-n+i} = A_{k-1}$. Luego $k - 1 = k - n + i$ y, en consecuencia, $i = n - 1$ (absurdo). Por lo tanto $A_0 \to A_{k-1} > A_{k-n+i}$ y, consecuentemente, $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-n+i+1}$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. Como $k \leq n-1$ y, en consecuencia, $k - n + i < i$, puedo definir el siguiente monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$.

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+n-k} & \text{si} \quad k-n+i+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq k-n+i \end{cases}.$$



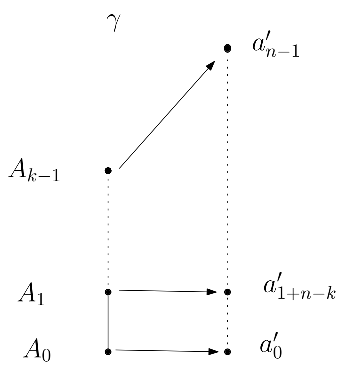
Definiendo en $\mathbf{L}''$ una implicación $\tilde{\to}$ como:

$$a_m \tilde{\to} a_r = \begin{cases} a_r & \text{si} \quad m > r \\ 1 & \text{si} \quad m = r \\ \gamma(a \to b) & \text{si} \quad \gamma(a) = a_m, \gamma(b) = a_r, m < r \\ \gamma(a \to A_{k-1}) & \text{si} \quad \gamma(a \to A_{k-1}) < a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r \\ a_r & \text{si} \quad \gamma(a \to A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r \\ 1 & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que $\langle \mathbf{L}'', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. Entonces $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-n+i+1}$ y, en consecuencia, $\gamma(A_0 \to A_{k-1}) \geq \gamma(A_{k-n+i+1})$. Luego $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} \geq a'_{i+1}$. Por lo tanto $\gamma(A_0 \to A_{k-1}) \geq a'_{i+1} > a'_i$. Luego $a'_0 \tilde{\to} a'_i = a'_i$. Entonces $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(0 \to a_i = a_i) \& (0 \to 1 \geq a_{i+1})}$. Como $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}'')$, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(0 \to a_i = a_i) \& (0 \to 1 \geq a_{i+1})}$.

Caso 2: $k \leq n - i$. Sea $\mathbf{L}' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. Como $k \leq n - i$ y, en consecuencia, $n - k + 1 \geq i + 1$, puedo definir el siguiente monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$.

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+n-k} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq k-1 \\ a'_0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$



Definimos en $\mathbf{L}''$ una implicación $\tilde{\to}$ como en el caso anterior y se obtiene que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1\geq a_{i+1})}$.

■

Debido a la gran cantidad de identidades y casos que se utilizan en el siguiente teorema, se ha trasladado su demostración al apéndice (ver 10.3.7) para facilitar su lectura.

Teorema 5.2.16 *Las siguientes identidades representan una base ecuacional para la variedad* $\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)\&(0\to 1=a_r)}$ *con* $n \geq 3$, $0 < i < j \leq n-1$ *e* $i+1 \leq r \leq n-1$: (Ch), ($\mathrm{H_n}$), (5.1), $\alpha(0 \to a_i = a_j)$, $\alpha(0 \to 1 = a_r)$, (5.25), (5.26), (5.31), (5.32), (5.33), (5.34), (5.35), (5.36), (5.37), *y las identidades descritas a continuación según cada caso:*

(1) (a) (5.27) *si* $r \geq 3$

(b) (5.28) *si* $r = 2$ *y* $r < j$.

(c) (5.29) *si* $r \neq n-2$

(d) (5.30) *si* $r = n-2$ *y* $r < j$.

(2) (a) (5.38) *si* $r \geq 3$

(b) (5.39) *si* $r = j = 2$.

Para concluir, veamos los siguientes resultados:

Lema 5.2.17 *Sea* $n \geq 3$ *y sea* $0 < i < n-1$. *Entonces*

$$\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)} = \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1=a_i)} \cup \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1\geq a_{i+1})}.$$

Demostración Claramente

$$\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1=a_i)} \cup \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1\geq a_{i+1})} \subseteq \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)}.$$

Sea $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ una cadena de semi-Heyting con n elementos. Supongamos que $0 \to a_i = a_i$ en $\mathbf{L}$. Entonces $a_i \wedge (0 \to 1) = a_i \wedge ((a_i \wedge 0) \to (a_i \wedge 1)) = a_i \wedge (0 \to a_i) = a_i \wedge a_i = a_i$. Luego $0 \to 1 \geq a_i$. Como consecuencia $\mathbf{L} \in \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1=a_i)} \cup \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_i)\&(0\to 1\geq a_{i+1})}$. ■

Lema 5.2.18 *Sea $n \geq 3$ y sea $0 < i < j \leq n-1$. Entonces*

$$\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)} = \bigcup_{r=i}^{n-1} \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)\&(0\to 1=a_r)}.$$

Demostración Claramente,

$$\bigcup_{r=i}^{n-1} \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)\&(0\to 1=a_r)} \subseteq \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)}.$$

Sea $\mathbf{L} : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} = 1$ una cadena de semi-Heyting con n elementos. Supongamos que $0 \to a_i = a_j$ en $\mathbf{L}$. Entonces $a_i \wedge (0 \to 1) = a_i \wedge ((a_i \wedge 0) \to (a_i \wedge 1)) =$ $= a_i \wedge (0 \to a_i) = a_i \wedge a_j = a_i$. Luego $0 \to 1 \geq a_i$. Entonces $\mathbf{L} \in \bigcup_{r=i}^{n-1} \mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)\&(0\to 1=a_r)}$.
■

Del lema 2.2.5, se demuestra fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 5.2.19 *Sea $n \geq 3$. Entonces:*

(a) $\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=0)} = \mathcal{V}^n_{(0\to 1=0)}$ *con* $0 < i \leq n-1$

(b) $\mathcal{V}^n_{(0\to a_i=a_j)} = \mathcal{V}^n_{(0\to 1=a_j)}$ *con* $0 < j < i \leq n-1$

De los teoremas de esta sección se puede dar una base ecuacional para la subvariedad $\mathcal{V}^n_{a_i\to a_j=a_r}$ con $n \geq 3$, $0 \leq i < j \leq n-1$ y $0 \leq r \leq n-1$.

Resulta imprescindible destacar que las bases ecuacionales previamente encontradas no bastan para determinar la base ecuacional para la variedad generada por un número finito arbitrario de cadenas de semi-Heyting. Este problema parece ser mucho más complejo y complicado que lo expuesto anteriormente como demuestra el siguiente ejemplo.

Sea

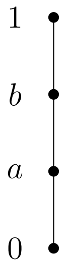
$$\mathcal{V}^4_{(a\to b=a)\&(a\to 1=a)\&(b\to 1=b)}$$

la variedad generada por las cadenas de semi-Heyting de la forma $\mathbf{L} : 0 < a < b < 1$ tal que $a \to b = a, a \to 1 = a$ y $b \to 1 = b$ en $\mathbf{L}$. Vamos a ver que

$$\mathcal{V}^4_{(a\to b=a)\&(a\to 1=a)\&(b\to 1=b)} \neq \mathcal{V}^4_{a\to b=a} \cap \mathcal{V}^4_{a\to 1=a} \cap \mathcal{V}^4_{b\to 1=b}.$$

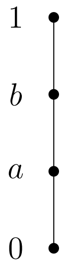
Consideremos las siguientes cadenas de semi-Heyting $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$.

$\mathbf{L}_1$



$\to$	0	a	b	1
0	1	0	0	0
a	0	1	a	a
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

$\mathbf{L}_2$



$\to$	0	a	b	1
0	1	0	0	0
a	0	1	b	1
b	0	a	1	b
1	0	a	b	1

Consideremos la cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}_0 : 0 < c < 1$ donde $0 \to c = 0 \to 1 = 0$ y $c \to 1 = 1$. Como $\mathbf{L}_0$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_1 \in \mathcal{V}^4_{a\to b=a} \cap \mathcal{V}^4_{a\to 1=a}$ entonces $\mathbf{L}_0 \in \mathcal{V}^4_{a\to b=a} \cap \mathcal{V}^4_{a\to 1=a}$. Por otro lado, como $\mathbf{L}_0$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_2$ y $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{V}^4_{b\to 1=b}$ entonces $\mathbf{L}_0 \in \mathcal{V}^4_{b\to 1=b}$. Luego $\mathbf{L}_0 \in \mathcal{V}^4_{a\to b=a} \cap \mathcal{V}^4_{a\to 1=a} \cap \mathcal{V}^4_{b\to 1=b}$. Sin embargo, es fácil verificar que $\mathbf{L}_0 \notin \mathcal{V}^4_{(a\to b=a)\&(a\to 1=a)\&(b\to 1=b)}$.

Capítulo 6

Teorema de Glivenko y aplicaciones en álgebras libres

6.1. Introducción

En [24, III 3.5] se demuestra que los elementos regulares de un álgebra de Heyting **A** forman una subálgebra de **A** si y sólo si **A** satisface la condición de Stone $x^* \vee x^{**} \approx 1$. Esta condición no es suficiente en el caso de las álgebras de semi-Heyting. Vamos a probar que los elementos regulares de un álgebra de semi-Heyting **A** forman una subálgebra de **A** si y sólo si, además de la condición de Stone, **A** satisface la identidad

$$(0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1.$$

En este capítulo obtendremos un teorema del tipo de Glivenko para la variedad de las álgebras de semi-Heyting y probaremos que la clase de las álgebras de semi-Heyting booleanas (álgebras con una estructura subyacente de reticulado booleano) constituye una subcategoría reflexiva de $\mathcal{SH}$. Finalmente aplicaremos estos resultados para obtener una caracterización de la descomponibilidad de las álgebras de semi-Heyting libres. Los resultados hallados en este capítulo forman parte del trabajo [1].

Como las álgebras de semi-Heyting son reticulados pseudocomplementados, las siguientes propiedades se verifican:

Lema 6.1.1 (a) *Si $a \leq b$ entonces $b^* \leq a^*$.*

(b) $a \leq a^{**}$.

(c) $a \wedge b = 0$ *si y sólo si* $a^{**} \wedge b = 0$.

(d) *Si $b \wedge a^* = 0$ entonces $b \leq a^{**}$.*

(e) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$.

(f) $a^{***} = a^*$.

(g) *Si $a \wedge b = 0$ entonces $a \leq b^*$.*

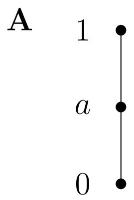
(h) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.

El conjunto de los elementos *regulares* de un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A}$ es $Reg(\mathbf{A}) = \{a \in A : a^{**} = a\}$, y el conjunto de sus elementos *densos* es $D(\mathbf{A}) = \{a \in A : a^* = 0\}$. Es fácil ver que $D(\mathbf{A})$ es un filtro de $\mathbf{A}$.

Un elemento $a \in A$ se dice *complementado* (*booleano*) si existe $b \in A$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$; el elemento b es llamado el *complemento* de a. Si $a \in A$ tiene un complemento, éste es único y es a^*. Si $B(\mathbf{A})$ denota el conjunto de elementos complementados de $\mathbf{A}$, entonces $B(\mathbf{A}) = \{a \in A : a \vee a^* = 1\}$ y, consecuentemente, $B(\mathbf{A}) \subseteq Reg(\mathbf{A})$.

Si $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}$, entonces $Reg(\mathbf{A})$ no es, en general, una subálgebra de $\mathbf{A}$, como muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos la siguiente álgebra de semi-Heyting con tres elementos $\mathbf{A} = \langle \{0, a, 1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$, cuyo orden de reticulado y operación $\rightarrow$ está definida a continuación.



$\rightarrow$	0	a	1
0	1	a	a
a	0	1	a
1	0	a	1

Tenemos que $B(\mathbf{A}) = \{0, 1\}$ y $0 \rightarrow 1 = a \notin B(\mathbf{A})$, luego $B(\mathbf{A})$ no es una subálgebra de $\mathbf{A}$.

Observemos que si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$ entonces su $\{\wedge, \vee, *, 0, 1\}$-reducto es un álgebra de Boole. Recordemos que un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A}$ es un álgebra booleana si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$.

6.2. Teorema de Glivenko

En esta sección probaremos un teorema del tipo de Glivenko para las álgebras de semi-Heyting. Además probaremos que la categoría de las álgebras de semi-Heyting booleanas constituye una subcategoría reflectiva de la categoría de las álgebras de semi-Heyting y sus homomorfismos.

Lema 6.2.1 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de semi-Heyting. Si definimos las siguientes operaciones sobre* $Reg(\mathbf{A})$

$$x \wedge^R y = x \wedge y, \quad x \vee^R y = (x \vee y)^{**}, \quad 0_R = 0, \quad 1_R = 1 \quad y \quad x \Rightarrow y = (x \rightarrow y)^{**}$$

entonces $\langle Reg(\mathbf{A}), \wedge^R, \vee^R, \Rightarrow, 0_R, 1_R \rangle \in \mathcal{SH}$ *y satisface la ecuación* $x \vee^R x^* \approx 1$, *ó equivalentemente,* $\langle Reg(\mathbf{A}), \wedge^R, \vee^R, \Rightarrow, 0_R, 1_R \rangle \in \mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$.

Demostración Del lema 6.1.1, $a \wedge^R b, a \vee^R b, a \Rightarrow b \in Reg(\mathbf{A})$ cuando $a, b \in Reg(\mathbf{A})$. Además, $0_R^{**} = 0^{**} = 1^* = 0 = 0_R$ y $1_R^{**} = 1^{**} = 0^* = 1 = 1_R$ y, por lo tanto, $Reg(\mathbf{A})$ es un reticulado acotado con las operaciones anteriores. Veamos que $\Rightarrow$ es una implicación de semi-Heyting.
En efecto, sean $a, b, c \in Reg(\mathbf{A})$.

$$\begin{aligned} a \wedge (a \Rightarrow b) &= a \wedge (a \to b)^{**} = a^{**} \wedge (a \to b)^{**} \\ &= [a \wedge (a \to b)]^{**} = (a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**} = a \wedge b; \\ a \wedge (b \Rightarrow c) &= a \wedge (b \to c)^{**} = a^{**} \wedge (b \to c)^{**} = [a \wedge (b \to c)]^{**} \\ &= [a \wedge ((a \wedge b) \to (a \wedge c))]^{**} = a^{**} \wedge ((a \wedge b) \to (a \wedge c))^{**} \\ &= a^{**} \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge c)) = a \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge c)); \\ a \Rightarrow a &= (a \to a)^{**} = 1^{**} = 1 = 1_R. \end{aligned}$$

Luego $\langle Reg(\mathbf{A}), \wedge^R, \vee^R, \Rightarrow, 0_R, 1_R \rangle$ es un álgebra de semi-Heyting.

Finalmente veremos que $Reg(\mathbf{A})$ satisface la ecuación $x \vee^R x^* \approx 1$. En efecto, por el lema 6.1.1 (h), $(a \vee a^*)^{**} = (a^* \wedge a^{**})^*$. Luego $a \vee^R a^* = (a \vee a^*)^{**} = (a^* \wedge a^{**})^* = 0^* = 1 = 1_R$. ■

Como $\langle Reg(\mathbf{A}), \wedge^R, \vee^R, \Rightarrow, 0_R, 1_R \rangle \in \mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$, existe una inmersión $\alpha : Reg(\mathbf{A}) \to \prod \mathbf{2}^I \times \overline{\mathbf{2}}^J$ para algunos conjuntos I, J. Observemos que en el álgebra de semi-Heyting $\mathbf{2}$, $a \to b = a^* \vee b$, mientras que en $\overline{\mathbf{2}}$, $a \to b = (a^* \vee b) \wedge (b^* \vee a)$. Luego, si $a, b \in Reg(\mathbf{A})$ y π_i es la $i-$ésima proyección de $\prod \mathbf{2}^I \times \overline{\mathbf{2}}^J$, entonces

$$\pi_i(\alpha(a \Rightarrow b)) = \alpha(a \Rightarrow b)(i) = \alpha(a)(i) \to \alpha(b)(i) =$$
$$\begin{cases} \alpha(a)(i)^* \vee \alpha(b)(i) & \text{si } \pi_i(\alpha(Reg(\mathbf{A}))) = \mathbf{2} \\ (\alpha(a)(i)^* \vee \alpha(b)(i)) \wedge (\alpha(b)(i)^* \vee \alpha(a)(i)) & \text{si } \pi_i(\alpha(Reg(\mathbf{A}))) = \overline{\mathbf{2}} \end{cases}$$

Lema 6.2.2 *La función $r_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to Reg(\mathbf{A})$ definida como $r_A(a) = a^{**}$ es un homomorfismo de álgebras de semi-Heyting .*

Demostración

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{A}}(a \wedge b) &= (a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**} = a^{**} \wedge^R b^{**} = r_{\mathbf{A}}(a) \wedge r_{\mathbf{A}}(b); \\ r_{\mathbf{A}}(a \vee b) &= (a \vee b)^{**} = (a^* \wedge b^*)^* = (a^{***} \wedge b^{***})^* \\ &= (a^{**} \vee b^{**})^{**} = a^{**} \vee^R b^{**} \\ &= r_{\mathbf{A}}(a) \vee r_{\mathbf{A}}(b); \end{aligned}$$

$r_{\mathbf{A}}(0) = 0^{**} = 0 = 0_R$ y $r_{\mathbf{A}}(1) = 1^{**} = 1 = 1_R$.

Con el objetivo de probar que $r_{\mathbf{A}}(a \to b) = r_{\mathbf{A}}(a) \Rightarrow r_{\mathbf{A}}(b)$ demostraremos que $\alpha(r_{\mathbf{A}}(a \to b)) = \alpha(r_{\mathbf{A}}(a) \Rightarrow r_{\mathbf{A}}(b))$.

Supongamos que $\pi_i(Reg(\mathbf{A})) = \mathbf{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha(r_{\mathbf{A}}(a \to b))(i) &= \alpha((a \to b)^{**}(i) = \alpha(a \Rightarrow b)(i) = \alpha(a)(i) \to \alpha(b)(i) \\ &= \alpha(a)(i)^* \vee \alpha(b)(i) = [\alpha(a)(i)^* \vee \alpha(b)(i)]^{**} \\ &= [\alpha(a)(i)^{**} \vee \alpha(b)(i)^*]^* = [\alpha(a)(i)^{**} \vee \alpha(b)(i)^{***}]^* \\ &= [\alpha(a)(i)^* \vee \alpha(b)(i)^{**}]^{**} = [\alpha(a)(i)^{***} \vee \alpha(b)(i)^{**}]^{**} \\ &= \alpha(a)(i)^{**} \to \alpha(b)(i)^{**} = \alpha(a)(i) \to \alpha(b)(i) \\ &= \alpha(a \Rightarrow b)(i). \end{aligned}$$

El caso $\pi_i(Reg(\mathbf{A})) = \overline{\mathbf{2}}$ es similar. ■

Los resultados anteriores permiten establecer el teorema de Glivenko para álgebras de semi-Heyting .

Teorema 6.2.3 (Teorema de Glivenko) *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de semi-Heyting. Entonces* $\langle Reg(\mathbf{A}), \wedge^R, \vee^R, \rightarrow^R, 0_R, 1_R\rangle$ *es un álgebra de semi-Heyting booleana. Además, la función* $r_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to Reg(\mathbf{A})$ *definida como* $r_{\mathbf{A}}(a) = a^{**}$ *es un homomorfismo y* $Reg(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{A}/D(\mathbf{A})$.

Diremos que una subcategoría $\mathcal{A}$ de la categoría $\mathcal{SH}$ es *reflectiva* si existe un funtor $\mathcal{R} : \mathcal{SH} \to \mathcal{A}$, llamado *reflector*, tal que para cada $\mathbf{A} \in Obj(\mathcal{SH})$ existe un morfismo $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \to \mathcal{R}(\mathbf{A})$ de $\mathcal{SH}$ con las siguientes propiedades:

(a) Si $f \in Hom(\mathcal{SH})$ con $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ entonces $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}') \circ f = \mathcal{R}(f) \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A})$.

(b) Si $\mathbf{A} \in Obj(\mathcal{A})$ y $f \in Hom(\mathcal{SH})$ con $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ entonces existe un único morfismo $f' \in Hom(\mathcal{A})$ con $f' : \mathcal{R}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ tal que $f' \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) = f$.

Teorema 6.2.4 [6, Thm. I.18.2] *Sea* $\mathcal{A}$ *una subcategoría de* $\mathcal{SH}$. $\mathcal{A}$ *es una subcategoría reflectiva de* $\mathcal{SH}$ *si y sólo si existe una función que a todo objeto* $\mathbf{A}$ *de* $\mathcal{SH}$ *asigna un objeto* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ *de* $\mathcal{A}$ *y una función que asigna a todo objeto* $\mathbf{A}$ *de* $\mathcal{SH}$ *un morfismo* $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \to \mathcal{R}(\mathbf{A})$ *de* $\mathcal{SH}$ *tal que para todo* $\mathbf{A} \in Obj(\mathcal{A})$ *y* $f \in Hom(\mathcal{SH})$ *con* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *existe un único* $f' \in Hom(\mathcal{A})$ *con* $f' : \mathcal{R}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ *tal que* $f' \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) = f$.

En adelante probaremos que la clase de las álgebras de semi-Heyting booleanas constituye una subcategoría reflectiva de $\mathcal{SH}$.

Lema 6.2.5 $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$ *es una subcategoría reflectiva de* $\mathcal{SH}$.

Demostración Definimos $\mathcal{R} : Obj(\mathcal{SH}) \to Obj(\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}}))$ como $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = Reg(\mathbf{A})$. Para $\mathbf{A} \in Obj(\mathcal{SH})$ definimos $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \to \mathcal{R}(\mathbf{A})$ como $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A})(a) = r_{\mathbf{A}}(a)$. Del lema 6.2.2, $\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) = r_{\mathbf{A}}$ está bien definida. Sea $\mathbf{B} \in Obj(\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}}))$ y sea $f : \mathbf{A} \to \mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$ un homomorfismo de semi-Heyting. Queremos probar que existe un único morfismo en la categoría $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$, $f' : Reg(\mathbf{A}) \to \mathbf{B}$ tal que $f' \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}) = f$. Definimos $f' : Reg(\mathbf{A}) \to \mathbf{B}$ por $f' = f|_{Reg(\mathbf{A})}$. Veamos que $(f' \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}))(c) = f(c)$ para cualquier $c \in Reg(\mathbf{A})$. Como $c = c^{**}$, $(f' \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}))(c) = f'(r_{\mathbf{A}}(c)) = f'(c^{**}) = f'(c) = f|_{Reg(\mathbf{A})}(c) = f(c)$. Para la unicidad, sea $f'' : Reg(\mathbf{A}) \to \mathbf{B}$ tal que $(f'' \circ \Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A}))(c) = f(c)$. Entonces $f''(c) = f''(c^{**}) = f''(r_A(c)) = f''(\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A})(c)) = f(c) = f'(\Phi_{\mathcal{R}}(\mathbf{A})(c)) = f'(r_{\mathbf{A}}(c)) = f'(c^{**}) = f'(c)$. Por el teorema 6.2.4, tenemos que $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \overline{\mathbf{2}})$ es una subcategoría reflectiva de $\mathcal{SH}$. ■

6.3. Descomponibilidad en las álgebras de semi-Heyting libres

En [24, III 3.5] los autores prueban que para un álgebra de Heyting $\mathbf{A}$, $Reg(\mathbf{A})$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{A}$ satisface la condición de Stone. Este resultado no se generaliza al caso de las álgebras de semi-Heyting, como vimos en el ejemplo en la sección 1, donde tenemos un álgebra $\mathbf{A}$ que satisface la condición de Stone pero $Reg(\mathbf{A})$ no es una subálgebra de $\mathbf{A}$. Recordemos que notamos por $\mathcal{SH}^S$ la subvariedad de las álgebras de semi-Heyting Stoneanas, esto es la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por la identidad de Stone $x^* \vee x^{**} \approx 1$.

Sea $\mathcal{D}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ que satisface las identidades

$$x^* \vee x^{**} \approx 1 \ \text{ y } \ (0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1.$$

El lema que sigue brinda una condición necesaria y suficiente sobre un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}$ para que $Reg(\mathbf{A})$ forme una subálgebra de $\mathbf{A}$.

Lema 6.3.1 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}$. *Entonces* $Reg(\mathbf{A})$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$.

Demostración Supongamos que $Reg(\mathbf{A})$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$. Observemos que el hecho que $Reg(\mathbf{A})$ sea una subálgebra de $\mathbf{A}$ implica que $\vee^R = \vee$ y $a \vee a^* = 1$ para cada $a \in Reg(\mathbf{A})$. Luego para todo $a \in A$, como $a^* \in Reg(\mathbf{A})$ se tiene que $a^* \vee a^{**} = 1$. Por otro lado , $0, 1 \in Reg(\mathbf{A})$, y entonces $0 \to 1 \in Reg(\mathbf{A})$. Luego $(0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* = 1$.

Para la recíproca, supongamos que $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$. Sean $a, b \in Reg(\mathbf{A})$ y probemos que $a \vee b = a \vee^R b$. De $a^* \vee a^{**} = 1$ y $a = a^{**}$ tenemos que $a^* \vee a = 1$, y similarmente, $b^* \vee b = 1$. Observemos que $(a \vee b)^* \vee (a \vee b) = (a^* \wedge b^*) \vee (a \vee b) = (a^* \vee (a \vee b)) \wedge (b^* \vee (a \vee b)) = 1 \vee 1 = 1$. Luego $a \vee^R b = (a \vee b)^{**} = (a \vee b)^{**} \wedge 1 = (a \vee b)^{**} \wedge [(a \vee b)^* \vee (a \vee b)] = (a \vee b)^{**} \wedge (a \vee b) = (a \vee^R b) \wedge (a \vee b)$. Consecuentemente, $a \vee^R b \leq a \vee b$. La desigualdad $a \vee b \leq (a \vee b)^{**} = a \vee^R b$ es consecuencia del lema 6.1.1 (b).

Probemos que $Reg(\mathbf{A})$ es cerrado respecto de la operación $\to$. Como $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto de una familia $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ de álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{D}$. Además, como $\mathbf{A}$ satisface la condición de Stone, es fácil ver que $Reg(\mathbf{A}) = B(\mathbf{A})$. Luego si $a, b \in Reg(\mathbf{A})$, a, b pueden ser identificados como una secuencia de $0'$s y $1'$s en $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Por otro lado, en un álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{A}_i$, la ecuación $(0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1$ se satisface si y sólo si $\{0, 1\}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}_i$. Como $0 \to 1 = 1$ ó $0 \to 1 = 0$ en cada $\mathbf{A}_i$, entonces es claro que $a \to b$ es una secuencia de $0'$s y $1'$s, esto es, $a \to b \in B(\mathbf{A}) = Reg(\mathbf{A})$. ■

Para una variedad $\mathcal{K}$ dada, sea $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$ el álgebra libre en $\mathcal{K}$ sobre un conjunto X de generadores libres.

Ahora daremos una descripción de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$, el álgebra libre en la variedad $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}})$, con $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Probaremos que el reducto booleano de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ es isomorfo al álgebra de Boole libre sobre $n + 1$ generadores libres $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(n + 1)$.

Observemos que $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}})$ es una variedad con discriminador [33, theorem 7.3]. Además, $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}})$ es localmente finita. En efecto, veamos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ es finita. Como $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}})$ es una variedad con discriminador, entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ es un producto booleano de las álgebras $\mathbf{2}$ y $\bar{\mathbf{2}}$, es decir, $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{2}^{\alpha_1} \times (\bar{\mathbf{2}})^{\alpha_2}$.

Tenemos que $\alpha_1 = |Hom(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n), \mathbf{2})| = |\{f : \ f : X_n \to \mathbf{2}|\} = 2^n$, y similarmente, $\alpha_2 = 2^n$. Luego $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n) \cong \mathbf{2}^{2^n} \times (\bar{\mathbf{2}})^{2^n}$ y, consecuentemente, $|\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)| = 2^{2^{n+1}}$.

Luego los generadores $x_k \in X_n$, $1 \leq k \leq n$, pueden ser representados de la siguiente manera: $x_k = (f_1, f_2)$ donde $f_1 : 2^n \to \mathbf{2}$, $f_2 : 2^n \to \bar{\mathbf{2}}$ y $f_1(i) = f_2(i)$, $1 \leq i \leq 2^n$, es decir, f_1 y f_2 son, ambos, 2^n-uplas de 0's y 1's. Luego existe $I \subseteq \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ tal que

$$x_k(i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in I \\ 0 & \text{si} \quad i \notin I \end{cases}, \text{ y para } 1 \leq i \leq 2^n, \ x(2^n + i) = x(i).$$

Lema 6.3.2 *Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si α es un átomo de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ entonces, para algún $J \subseteq I_n$,*

$$\alpha = \bigwedge_{j \in J} x_j \wedge \bigwedge_{j \notin J} x_j^* \wedge (0 \to 1)$$

ó

$$\alpha = \bigwedge_{j \in J} x_j \wedge \bigwedge_{j \notin J} x_j^* \wedge (0 \to 1)^*.$$

Demostración Sea α un átomo de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$. Entonces $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(2^{n+1}))$ donde para algún $k \in \{1, \ldots, 2^{n+1}\}$, $\alpha(k) = 1$ y $\alpha(i) = 0$ para $i \neq k$.

Si $k < 2^n$, sea $\widetilde{\alpha}$ el elemento $(\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(2^n), \alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(2^n))$ (observemos que α y $\widetilde{\alpha}$ difieren sólo en la coordenada $2^n + k$). Entonces, como la primer mitad de $\widetilde{\alpha}$ es un átomo de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2})}(X_n)$, existe $J \subseteq X_n$ tal que $\widetilde{\alpha} = \bigwedge_{j \in J} x_j \wedge \bigwedge_{j \notin J} x_j^*$. Ahora, en $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$, el elemento $0 \to 1$ es la 2^{n+1}-upla $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, i.e, $(0 \to 1)(i) = 1$ para $0 \leq i \leq 2^n$ y $(0 \to 1)(i) = 0$, para $2^n + 1 \leq i \leq 2^{n+1}$, ya que $0 \to 1 \approx 1$ en $\mathbf{2}$ y $0 \to 1 \approx 0$ en $\bar{\mathbf{2}}$. Luego $\alpha = \widetilde{\alpha} \wedge (0 \to 1)$, es decir $\alpha = \bigwedge_{j \in J} x_j \wedge \bigwedge_{j \notin J} x_j^* \wedge (0 \to 1)$.

Si $k > 2^n$, entonces $\widetilde{\alpha} = (\alpha(2^n{+}1), \alpha(2^n{+}2), \ldots, \alpha(2^{n+1}), \alpha(2^n{+}1), \alpha(2^n{+}2), \ldots, \alpha(2^{n+1}))$ es tal que $\widetilde{\alpha} = \bigwedge_{j \in J} x_j \wedge \bigwedge_{j \notin J} x_j^*$, y tenemos que $\alpha = \widetilde{\alpha} \wedge (0 \to 1)^*$, es decir, $\alpha = \bigwedge_{j \in J} x_j \wedge \bigwedge_{j \notin J} x_j^* \wedge (0 \to 1)^*$. ■

Corolario 6.3.3 $\{x_1, \ldots, x_n, 0 \to 1\}$ *es un conjunto de generadores para el* $\{\wedge, \vee, *, 0, 1\}$*-reducto (booleano) de* $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$

Lema 6.3.4 *El* $\{\wedge, \vee, *, 0, 1\}$*-reducto de* $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ *es isomorfo al álgebra de Boole libre sobre $n + 1$ generadores libres $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(n + 1)$.*

Demostración Sea $Y_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ un conjunto de generadores para $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(n + 1)$. Sea $h : Y_n \to X_n \cup \{0 \to 1\}$ definida como $h(y_i) = x_i$ para $1 \leq i \leq n$ y $h(y_{n+1}) = 0 \to 1$. Sea $\bar{h} : \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(n + 1) \to \mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)$ la extensión homomórfica de h. Del lema 6.3.2, $\bar{h}$ es sobre. Como $|\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(n + 1)| = |\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X_n)| = 2^{2^{n+1}}$, entonces h es un isomorfismo. ■

Como las variedades $\mathcal{V}(\mathbf{2})$ (álgebras de Boole) y $\mathcal{V}(\bar{\mathbf{2}})$ son los únicos átomos en el reticulado de subvariedades de $\mathcal{SH}$ [33], entonces toda subvariedad no trivial $\mathcal{V}$ de $\mathcal{SH}$ satisface una de las siguientes propiedades:

(I) $\mathcal{V}(\mathbf{2}) \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}(\bar{\mathbf{2}}) \nsubseteq \mathcal{V}$, o

(II) $\mathcal{V}(\bar{\mathbf{2}}) \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}(\mathbf{2}) \nsubseteq \mathcal{V}$, o

(III) $\mathcal{V}(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}}) \subseteq \mathcal{V}$.

Luego se tiene lo siguiente:

Teorema 6.3.5 *Para toda subvariedad $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SH}$, $Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X))$ es isomorfa a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2})}(X^{**})$ si $\mathcal{V}$ satisface* (I)*, es isomorfa a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\bar{\mathbf{2}})}(X^{**})$ si $\mathcal{V}$ satisface* (II) *y es isomorfa a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X^{**})$ si $\mathcal{V}$ satisface* (III)*, con $X^{**} = \{x^{**} : x \in X\}$.*

Recordemos que $\mathcal{D}$ denota la subvariedad de $\mathcal{SH}$ que satisface las identidades

$$x^* \vee x^{**} \approx 1 \text{ y } (0 \to 1) \vee (0 \to 1)^* \approx 1.$$

Corolario 6.3.6 *Si $\mathcal{V}$ es una subvariedad de $\mathcal{D}$, entonces $Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X))$ es isomorfa a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2})}(X^{**})$ ó a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\bar{\mathbf{2}})}(X^{**})$, ó a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\bar{\mathbf{2}})}(X^{**})$, y $Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X))$ es un retracto de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$.*

En lo que sigue estudiaremos la descomponibilidad de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$, para una subvariedad $\mathcal{V}$ de $\mathcal{SH}$.

Asumamos que $\mathcal{V}$ es una subvariedad de $\mathcal{SH}^S$ que satisface (I) ó (II), y X es un conjunto con $|X| > 0$. Como todo término depende sólo de un conjunto finito de variables, entonces podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que X es finito. Sea $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $I_n = \{1, \ldots, n\}$. Para cada $I \subseteq I_n$, consideremos el elemento

$$\alpha_I(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i^{**} \wedge \bigwedge_{i \notin I} x_i^*.$$

La correspondencia $I \mapsto \alpha_I(x_1, \ldots, x_n)$ brinda una función inyectiva de $P(I_n)$, el conjunto de partes de I_n, sobre el conjunto de átomos del álgebra de semi-Heyting booleana libre $Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X_n)) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2})}(X^{**}) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\bar{\mathbf{2}})}(X^{**})$. Luego para todo $b \in Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X_n))$, existe $N \subseteq P(I_n)$ tal que

$$b = \left(\bigvee_{I \in N} \alpha_I(x_1, \ldots, x_n) \right)^{**}$$

donde $N = \{I \in P(I_n) : \ \alpha_I \leq b\}$.

Lema 6.3.7 [12] *Para todo $J \subseteq I_n$ y $x \in \mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$, consideremos la n-upla $\overrightarrow{x}_J$ cuya i-ésima componente es x para $i \in J$, y 1 para $i \notin J$. Para cada $I \subseteq I_n$, obtenemos que*

$$\overline{\alpha}_I(\overrightarrow{x}_J) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = I_n \text{ y } J = \emptyset \\ x^{**} & \text{si } I = I_n \text{ y } J \neq \emptyset \\ x^* & \text{si } I = I_n \setminus J \text{ y } J \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 6.3.8 *Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad no trivial de $\mathcal{SH}$. Entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$ es directamente descomponible si y sólo si $\mathcal{V}$ satisface la identidad de Stone.*

Demostración Supongamos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$ es directamente descomponible. Entonces existe $\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$ tal que $\alpha \vee \alpha^* = 1$ y $\alpha \neq 0, 1$.

Supongamos primero que $\mathcal{V}$ satisface (I) ó (II). Podemos asumir que $\alpha = \alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X_n)$, como antes. Como $\alpha \in Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X_n))$, existe $N \subseteq P(I_n)$, $N \neq \emptyset, P(I_n)$, tal que

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \left(\bigvee_{I \in N} \alpha_I \right)^{**}.$$

Probemos que $x^* \vee x^{**} = 1$, para todo $x \in \mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$.

Supongamos que $I_n \notin N$. Fijemos $K \in N$ y sea $J = I_n \setminus K$. Como $K \neq I_n$, $J \neq \emptyset$ y el lema anterior implica que

$$\alpha_I(\overrightarrow{x}_J) = \begin{cases} x^* & \text{si } I = K \\ 0 & \text{si } I \in N, I \neq K \end{cases}.$$

Como consecuencia $\alpha_I(\overrightarrow{x}_J) = (x^*)^{**} = x^*$. Entonces, como $\alpha \vee \alpha^* = 1$ obtenemos que $x^{**} \vee x^* = 1$, como deseábamos. Ahora asumamos que $I_n \in N$. Elegimos $J \subseteq I_n$ tal que $J \neq I_n \setminus I$ para todo $I \in N$. Observemos que es posible pues $N \neq P(I_n)$. Por el lema anterior obtenemos que

$$\alpha_I(\overrightarrow{x}_J) = \begin{cases} x^{**} & \text{si } I = I_n \\ 0 & \text{si } I \in N, I \neq I_n \end{cases}.$$

Luego, $\alpha_I(\overrightarrow{x}_J) = x^{**}$ y la ecuación $\alpha \vee \alpha^* = 1$ se transforma en la ecuación de Stone $x^{**} \vee x^* = 1$. Esto prueba que $\mathcal{V}$ satisface la identidad de Stone.

Supongamos ahora que $\mathcal{V}$ satisface (III). Entonces $Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X))$ es isomorfo a $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\overline{\mathbf{2}})}(X^{**})$. Como $\alpha \in Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X_n))$, existe $N \subseteq P(I_n)$, $N \neq \emptyset, P(I_n)$, tal que

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n, z) = \left(\bigvee_{I \in N} (\alpha_I \wedge z) \right)^{**}$$

donde $z \in \{(0 \to 1)^*, (0 \to 1)^{**}\}$, por el lema 6.3.2.

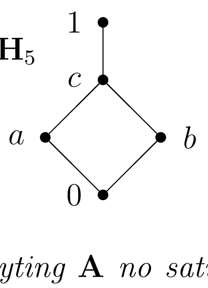
Por el corolario 6.3.3 y el lema 6.3.4, z es un generador libre del reducto booleano de $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\overline{\mathbf{2}})}(X^{**})$, es decir, z es un generador libre de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(n+1) \cong Reg(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{2},\overline{\mathbf{2}})}(X^{**})$. Entonces, de $\alpha(x_1, \ldots, x_n, z) \vee (\alpha(x_1, \ldots, x_n, z))^* = 1$ se tiene que

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n, x_n) \vee (\alpha(x_1, \ldots, x_n, x_n))^* = 1,$$

la cual evaluada en la misma $(n+1)$-upla de los casos (I) y (II) nos brinda $x^{**} \vee x^* = 1$, es decir, $\mathcal{V}$ satisface la identidad de Stone. ■

Consideremos $\mathbf{H}_5 = \langle \{0, a, b, c, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ el reticulado distributivo con cinco elementos:

$\mathbf{H}_5$



Lema 6.3.9 *Un álgebra de semi-Heyting* $\mathbf{A}$ *no satisface la identidad* $x^* \vee x^{**} \approx 1$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *contiene un subreticulado pseudocomplementado isomorfo a* $\mathbf{H}_5$.

Demostración Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de semi-Heyting y supongamos que existe $a \in A$ tal que $a^* \vee a^{**} \neq 1$. Entonces el conjunto $\{0, a^*, a^{**}, a^* \vee a^{**}, 1\}$ es el universo de un reticulado pseudocomplementado isomorfo a $\mathbf{H}_5$. La recíproca es inmediata. ■

Podemos unificar los resultados anteriores en el siguiente corolario:

Corolario 6.3.10 *Para toda subvariedad no trivial $\mathcal{V}$ de $\mathcal{SH}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(X)$ *es directamente indescomponible*

2. $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{SH}^S$

3. $\mathcal{V}$ *contiene un álgebra cuyo reducto de reticulado pseudocomplementado es isomorfo a* $\mathbf{H}_5$.

Capítulo 7

Álgebras de semi-Heyting equivalentes por términos a las álgebras de Heyting lineales

7.1. Introducción y preliminares

Recordemos que $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}$ es una cadena de semi-Heyting si el reducto de reticulado de $\mathbf{A}$ es totalmente ordenado, $\mathbf{A}$ es un *álgebra de semi-Heyting lineal* si $\mathbf{A}$ pertenece a la subvariedad de $\mathcal{SH}$ generada por las cadenas de semi-Heyting. Esta subvariedad se nota por $\mathcal{SH}^C$.

Recordemos también que la mitad inferior, incluida la diagonal, de la tabla de la operación $\rightarrow$ en una cadena de semi-Heyting está unívocamente determinada [33, Theorem 4.3], es decir, si $\mathbf{A}$ es una cadena de semi-Heyting, $a, b \in A$, y $a < b$ entonces $b \rightarrow a = a$, y consecuentemente sólo tenemos que considerar los casos $a \rightarrow b$ cuando $a < b$ para completar la tabla de la operación $\rightarrow$. En este capítulo vamos a considerar aquellas cadenas de semi-Heyting en las cuales $a \rightarrow b \in \{1, a, b\}$ para $a < b$, y esto nos conducirá a considerar tres subvariedades de $\mathcal{SH}^C$.

1. La primera es la subvariedad generada por las cadenas de semi-Heyting que satisface que $a < b$ implica que $a \rightarrow b = 1$, y esta es la variedad $\mathcal{H}^C$ de las *álgebras de Gödel* (también conocidas como la variedad de las *álgebras de Heyting lineales*).

2. En segundo lugar, consideraremos la subvariedad generada por las cadenas de semi-Heyting que satisfacen la condición que si $a < b$ entonces $a \rightarrow b = a$, y esta es la variedad $com\mathcal{SH}^C$ de las álgebras de semi-Heyting lineales conmutativas.

3. Finalmente, tenemos la subvariedad de $\mathcal{SH}^C$ generada por las cadenas de semi-Heyting en las cuales $a < b$ implica que $a \rightarrow b = b$. Esta subvariedad será notada por $\mathcal{L}_\vee$ pues satisface que para $a < b$, $a \rightarrow b = a \vee b$.

El principal objetivo de este capítulo es probar que las subvariedades $com\mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{L}_\vee$ son ambas equivalentes por términos a la variedad $\mathcal{H}^C$ de las álgebras de Gödel, y que ellas son las únicas subvariedades de $\mathcal{SH}^C$ equivalentes por términos a $\mathcal{H}^C$.

Como segundo objetivo investigaremos la variedad $\mathcal{C}$ generada en $\mathcal{SH}^C$ por $\mathcal{H}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ y $com\mathcal{SH}^C$. En particular probaremos que $\mathcal{C}$ es localmente finita y obtendremos una construcción del álgebra libre finitamente generada en $\mathcal{C}$.

7.2. La subvariedad $com\mathcal{SH}^C$

En esta sección consideraremos la subvariedad generada por las cadenas de semi-Heyting que satisfacen que $a < b$ implica que $a \to b = a$. Ésta es la subvariedad $com\mathcal{SH}^C$ de las *álgebras de semi-Heyting lineales conmutativas* caraterizada en $\mathcal{SH}^C$ por la ecuación $x \to y \approx y \to x$. Probaremos que $com\mathcal{SH}^C$ es localmente finita, determinaremos su reticulado de subvariedades y encontraremos bases ecuacionales para cada subvariedad.

El siguiente lema es inmediato.

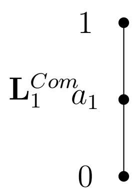
Lema 7.2.1 *Dado un reticulado totalmente ordenado* $\mathbf{A}$ *con primer elemento* 0 *y último elemento* 1*, si para todo* $a, b \in A$ *definimos*

$$a \to b = \begin{cases} 1 & si \quad a = b \\ a \wedge b & si \quad a \neq b \end{cases}$$

entonces $\mathbf{A} = \langle A, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de semi-Heyting conmutativa lineal.*

Es fácil ver que la única estructura de álgebra de semi-Heyting conmutativa que puede ser definida sobre una cadena es la introducida anteriormente.

Para cada entero $n \geq 0$, sean L_n y L_ω, respectivamente, las cadenas $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = 1$ y $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{n-1} < b_n < \ldots < 1$, y sean $\mathbf{L}_n^{Com}$ y $\mathbf{L}_\omega^{Com}$ las álgebras correspondientes en $com\mathcal{SH}^C$ con universo L_n y L_ω. Tenemos que $\mathbf{L}_0^{Com}$ es el álgebra $\bar{\mathbf{2}}$ y $\mathbf{L}_1^{Com}$ es la cadena



$\to$	0	a_1	1
0	1	0	0
a	0	1	a_1
1	0	a_1	1

Como la clase de las álgebras de semi-Heyting conmutativas lineales forman una subvariedad de $\mathcal{SH}^C$, toda álgebra de semi-Heyting conmutativa lineal puede ser representada como producto subdirecto de cadenas de semi-Heyting conmutativas.

Probaremos que $com\mathcal{SH}^C$ está generada por las cadenas $\mathbf{L}_n^{Com}$, $n \geq 0$.

Teorema 7.2.2 *Una subvariedad* $\mathcal{V}$ *de* $com\mathcal{SH}^C$ *es propia si y sólo si* $\mathbf{L}_n^{Com} \notin \mathcal{V}$ *para algún* $n \geq 0$.

Demostración Supongamos que $\mathcal{V}$ es una subvariedad propia de $com\mathcal{SH}^C$, es decir, $\mathcal{V} \neq com\mathcal{SH}^C$. Entonces existe una identidad $\epsilon \approx \lambda$ tal que $\mathcal{V} \models \epsilon \approx \lambda$ y $com\mathcal{SH}^C \not\models \epsilon \approx \lambda$. Entonces existe una cadena $\mathbf{A} \in com\mathcal{SH}^C$ tal que $\mathbf{A} \not\models \epsilon \approx \lambda$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ tales que $\epsilon(a_1, a_2, \ldots, a_m) \neq \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, y consideremos la subálgebra $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ generada por los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Entonces $\mathbf{B}$ es una cadena finita en $com\mathcal{SH}^C$, y consecuentemente $\mathbf{B} \cong \mathbf{L}_n^{Com}$ para algún $n \geq 0$. Luego $\mathbf{L}_n^{Com} \notin \mathcal{V}$. ■

Corolario 7.2.3 *Cada subvariedad de $com\mathcal{SH}^C$ está generada por sus cadenas finitas.*

El siguiente lema resulta inmediato.

Lema 7.2.4 (a) *$\mathbf{L}_n^{Com}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_\omega^{Com}$, para cada $n \geq 0$.*

(b) *La variedad de las álgebras de semi-Heyting conmutativas lineales está generada por $\mathbf{L}_\omega^{Com}$.*

(c) *Si $n \leq n'$, $\mathbf{L}_n^{Com}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_{n'}^{Com}$.*

Ahora determinaremos el reticulado de subvariedades de la variedad $com\mathcal{SH}^C$. Además daremos una base ecuacional para cada una de las subvariedades.

Teorema 7.2.5 *Las únicas subvariedades de $com\mathcal{SH}^C$ son $\mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^{Com})$ y $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{Com})$, $n \geq 0$.*

Demostración Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad de $com\mathcal{SH}^C$. Si $\mathcal{V}$ es variedad $com\mathcal{SH}^C$, entonces, por el lema 7.2.4, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^{Com})$. Supongamos que $\mathcal{V}$ es una subvariedad propia de $com\mathcal{SH}^C$. Por el teorema 7.2.2, existe un entero $n \geq 0$ tal que $\mathbf{L}_n^{Com} \notin \mathcal{V}$. Sea $t = \max \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathbf{L}_n^{Com} \in \mathcal{V}\}$. Luego, por el lema 7.2.4, toda cadena finita en $\mathcal{V}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_t^{Com}$. Entonces $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{L}_t^{Com})$. ■

Luego tenemos que el reticulado de subvariedades de $com\mathcal{SH}^C$ es una cadena de tipo $\omega + 1$:

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_0^{Com}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_1^{Com}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{Com}) \subseteq \ldots \subseteq com\mathcal{SH}^C = \mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^{Com})$$

y, consecuentemente, es isomorfo al reticulado de subvariedades de la variedad de las álgebras de Gödel (ver [22]).

Recordemos el siguiente resultado.

Lema 7.2.6 [3] *Sea $\mathbf{L}$ una cadena en $\mathcal{SH}^C$. Si $\mathbf{L}$ satisface la identidad* $(\mathrm{H_n})$, *entonces $|L| \leq n$.*

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (x_i \vee x_i^*) \vee \bigvee_{j=1; j<i}^{n-1} (x_i \to x_j) \approx 1 \qquad (\mathrm{H_n})$$

Corolario 7.2.7 $(\mathrm{H_n})$ *es, módulo $com\mathcal{SH}^C$, una base para $\mathcal{V}(\mathbf{L}_{n-2}^{Com})$, para cada entero $n \geq 2$.*

7.3. La subvariedad $\mathcal{L}_\vee$

En esta sección consideraremos la subvariedad $\mathcal{L}_\vee$ de $\mathcal{SH}^C$ generada por las cadenas de semi-Heyting en las cuales $a < b$ implica que $a \to b = b$.

En el siguiente teorema abreviaremos $x \leftrightarrow y$ para notar el término $(x \to y) \wedge (y \to x)$. Es claro que $x \leftrightarrow y \approx 1$ si y sólo si $x \approx y$.

Teorema 7.3.1 *$\mathcal{L}_\vee$ está caracterizada en $\mathcal{L}$ por la ecuación*

$$((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y) \approx 1.$$

Demostración Sea $\mathbf{A}$ una cadena en $\mathcal{L}_\vee$ y $a, b \in A$. Si $a = b$, entonces $((a \wedge a) \leftrightarrow a) \vee ((a \to a) \leftrightarrow a) = 1$. Si $a < b$, $((a \wedge b) \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = (a \leftrightarrow b) \vee (b \leftrightarrow b) = 1$. Si $a > b$, $((a \wedge b) \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = (b \leftrightarrow b) \vee (b \leftrightarrow b) = 1$. Entonces $\mathbf{A}$ satisface la ecuación deseada.

Supongamos ahora que $\mathbf{A}$ es una cadena de semi-Heyting que satisface $((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y) \approx 1$ y sea $a, b \in A$, $a < b$. Entonces $((a \wedge b) \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = 1$, es decir, $(a \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = 1$. Luego $a \leftrightarrow b = 1$ ó $(a \to b) \leftrightarrow b = 1$. Si $a \leftrightarrow b = 1$ entonces $a = b$, lo cual resulta una contradicción. Entonces $((a \to b) \leftrightarrow b) = 1$, es decir, $a \to b = b$. Luego $\mathbf{A}$ pertenece a la variedad $\mathcal{L}_\vee$. ■

Es fácil demostrar el siguiente resultado.

Lema 7.3.2 *Dado un reticulado totalmente ordenado $\mathbf{A}$ con primer elemento 0 y último elemento 1, si para cada $a, b \in A$ definimos*

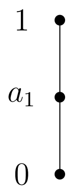
$$a \to b = \begin{cases} 1 & si \quad a = b \\ b & si \quad a \neq b \end{cases}$$

entonces $\mathbf{A} = \langle A, \to, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es un álgebra en $\mathcal{L}_\vee$.

Es fácil ver que la única estructura de un álgebra en $\mathcal{L}_\vee$ que puede ser definida sobre una cadena es la introducida más arriba.

Sean $\mathbf{L}_n^\vee$ y $\mathbf{L}_\omega^\vee$, respectivamente, las álgebras en $\mathcal{L}_\vee$ con reticulado subyacente $\langle L_n, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ y $\langle L_\omega, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$, respectivamente, es decir, donde la operación $\to$ está definida por $a \to b = 1$ si $a = b$ y $a \to b = b$ si $a \neq b$. $\mathbf{L}_0^\vee$ es el álgebra de Heyting $\mathbf{2}$ y $\mathbf{L}_1^\vee$ es el álgebra

$\mathbf{L}_1^\vee$



$\to$	0	a_1	1
0	1	a_1	1
a	0	1	1
1	0	a_1	1

Lema 7.3.3 *Toda cadena finita en $\mathcal{L}_\vee$ es isomorfa a $\mathbf{L}_n^\vee$ para algún $n \geq 0$.*

Demostración Sea $\mathbf{A} = \langle\{a_0 = 0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} = 1\}, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ una cadena finita en $\mathcal{L}_\vee$. Sean $a, b \in L$. Si $a = b$ entonces $a \to b = 1$. Si $a < b$, como $((a \wedge b) \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = (a \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = (a \wedge b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b)$ y $((a \wedge b) \leftrightarrow b) \vee ((a \to b) \leftrightarrow b) = 1$, entonces $a \to b = b$. Si $b < a$, como $a \wedge (a \to b) = a \wedge b = b$ y $\mathbf{A}$ es una cadena, entonces $a \to b = b$. Luego $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_n^\vee$. ■

La demostración del siguiente teorema es similar a la del teorema 7.2.2.

Teorema 7.3.4 *Una subvariedad $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}_\vee$ es propia si y sólo si $\mathbf{L}_n^\vee \notin \mathcal{V}$ para algún $n \geq 0$.*

Observación 7.3.5 Utilizando un argumento similar al de la demostración del teorema 7.2.2, podemos probar que toda subvariedad de $\mathcal{L}_\vee$ está generada por sus cadenas finitas, es decir, está generada por las álgebras $\{\mathbf{L}_n^\vee, n \in I\}$ para algún $I \subseteq \omega$.

Lema 7.3.6 (a) *$\mathbf{L}_n^\vee$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_\omega^\vee$, para cada $n \geq 0$.*

(b) *$\mathcal{L}_\vee$ está generada por $\mathbf{L}_\omega^\vee$.*

(c) *Si $n \leq n'$ entonces $\mathbf{L}_n^\vee$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_{n'}^\vee$.*

El siguiente teorema caracteriza el reticulado de subvariedades de $\mathcal{L}_\vee$.

Teorema 7.3.7 *Las únicas subvariedades de $\mathcal{L}_\vee$ son $\mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^\vee)$ y $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^\vee)$, con $n \geq 0$.*

Demostración Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad de $\mathcal{L}_\vee$. Si $\mathcal{V} = \mathcal{L}_\vee$, por el lema 7.3.6, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^\vee)$. Supongamos que $\mathcal{V}$ es una subvariedad propia. Del teorema 7.3.4 existe un entero $n \geq 0$ tal que $\mathbf{L}_n^\vee \notin \mathcal{V}$. Sea $t = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathbf{L}_n^\vee \in \mathcal{V}\}$. Entonces toda cadena finita en $\mathcal{L}_\vee$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_t^\vee$ por el lema 7.3.6. Luego $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{L}_t^\vee)$. ■

Luego, el reticulado de subvariedades de $\mathcal{L}_\vee$ es una cadena de tipo $\omega + 1$:

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_0^\vee) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_1^\vee) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^\vee) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}_\vee = \mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^\vee).$$

Como corolario, tenemos, como en la sección 7.2, una caracterización ecuacional para cada subvariedad de $\mathcal{L}_\vee$.

Corolario 7.3.8 $(\mathrm{H_n})$ *es, módulo $\mathcal{L}_\vee$, una base para $\mathcal{V}(\mathbf{L}_{n-2}^\vee)$ con $n \geq 2$.*

7.4. Subvariedades equivalentes por términos a la variedad de las álgebras de Gödel

En esta sección probaremos que las variedades $com\mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{L}_\vee$ son equivalentes por términos a la variedad $\mathcal{H}^C$ de las álgebras de Gödel (álgebras de Heyting lineales), y que son las únicas subvariedades en $\mathcal{SH}^C$ con esta propiedad.

El siguiente lema establece que siempre podemos definir una implicación de Heyting en cualquier álgebra de semi-Heyting. Es más, sobre todas las implicaciones de semi-Heyting que pueden ser definidas en un reticulado distributivo dado, la implicación de Heyting es la mayor.

Lema 7.4.1 *Sea $\langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ un álgebra de semi-Heyting. Si definimos $a \to_H b = a \to (a \wedge b)$ para todo $a, b \in A$, entonces*

(a) *$\langle A, \vee, \wedge, \to_H, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting*

(b) *$a \to b \leq a \to_H b$ para todo $a, b \in A$.*

Demostración Probemos que $\to_H$ es una implicación de Heyting. Sean $a, b, c \in A$. Entonces $a \to_H a = a \to (a \wedge a) = 1$, luego tenemos (SH4). Ahora, $a \wedge (a \to_H b) = a \wedge (a \to (a \wedge b)) = a \wedge a \wedge b = a \wedge b$, y obtenemos (SH2). Para (SH3), $a \wedge (b \to_H c) = a \wedge (b \to (b \wedge c)) = a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge b \wedge c)] = a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge b \wedge a \wedge c)] = a \wedge [(a \wedge b) \to_H (a \wedge c)]$. Finalmente, $(a \wedge b) \to_H a = (a \wedge b) \to (a \wedge b \wedge a) = 1$. Luego $\to_H$ es una implicación de Heyting, y hemos probado (a).

Para (b), $(a \to b) \wedge (a \to_H b) = (a \to b) \wedge [a \to (a \wedge b)] = (a \to b) \wedge [(a \wedge (a \to b)) \to (a \wedge b \wedge (a \to b))] = (a \to b) \wedge ((a \wedge b) \to (a \wedge b)) = (a \to b) \wedge 1 = a \to b$. Entonces $a \to b \leq a \to_H b$. ■

En forma similar, tenemos lo siguiente.

Lema 7.4.2 *Sea $\langle A, \vee, \wedge, \to_H, 0, 1\rangle$ una cadena de Heyting. Si definimos*

$$a \to_J b = b \vee [(a \to_H b) \wedge (b \to_H a)], \quad para \;\; a, b \in A,$$

entonces $\langle A, \vee, \wedge, \to_J, 0, 1\rangle \in \mathcal{L}_\vee$.

Demostración Sean $a, b \in L$. Si $a \leq b$ entonces $a \to_J b = b \vee (a \leftrightarrow_H b) = b$. Luego $\langle A, \vee, \wedge, \to_J, 0, 1\rangle \in \mathcal{L}_\vee$. ■

Como toda álgebra de Heyting lineal es un producto subdirecto de cadenas de Heyting, toda álgebra de Heyting lineal puede ser transformada en un álgebra de $\mathcal{L}_\vee$.

El siguiente lema establece que podemos definir una operación $\to_c$ sobre un álgebra de semi-Heyting para obtener un álgebra en $\mathcal{L}_{Com}$. Su demostración es sencilla.

Lema 7.4.3 *Sea $\langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ una cadena de semi-Heyting . Si definimos*

$$a \to_c b = (a \to_H b) \wedge (b \to_H a), \quad para \;\; a, b \in A,$$

entonces $\langle A, \vee, \wedge, \to_c, 0, 1\rangle \in com\mathcal{SH}^C$.

Por lo tanto, las subvariedades $com\mathcal{SH}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ son equivalentes por términos a la variedad de las álgebras de Heyting lineales, y consecuentemente, si $\mathfrak{F}_\mathcal{K}(X)$ nota el álgebra libre sobre un conjunto de generadores libres X en una clase dada $\mathcal{K}$, tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.4.4 [26] *Las álgebras $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}_H}(X), \mathfrak{F}_{com\mathcal{SH}^C}(X)$ y $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}_\vee}(X)$ son isomorfas dos a dos.*

Las demostraciones de los siguientes lemas se realizan por inducción sobre el término de Heyting $t(x, y)$.

Lema 7.4.5 *Sea $\langle \mathbf{L}, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ una cadena de semi-Heyting tal que $x \rightarrow y = t(x, y)$ donde $t(x, y)$ es un término de Heyting. Entonces se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(a) *$a \rightarrow b = a$ para todo $a, b \in L$ tal que $a < b$*

(b) *$a \rightarrow b = b$ para todo $a, b \in L$ tal que $a < b$*

(c) *$a \rightarrow b = 1$ para todo $a, b \in L$ tal que $a < b$.*

Del lema anterior se tiene el siguiente resultado.

Lema 7.4.6 *Consideremos un término de Heyting $t(x, y)$ con $t(x, y) \neq 0, 1$ y $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ dos cadenas de semi-Heyting. Sean $a, b \in L_1$ y $c, d \in L_2$ tales que $a < b$ y $c < d$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *Si $t^{\mathbf{L}_1}(a, b) = a$ entonces $t^{\mathbf{L}_2}(c, d) = c$*

(b) *Si $t^{\mathbf{L}_1}(a, b) = b$ entonces $t^{\mathbf{L}_2}(c, d) = d$*

(c) *Si $t^{\mathbf{L}_1}(a, b) = 1$ entonces $t^{\mathbf{L}_2}(c, d) = 1$.*

Teorema 7.4.7 *Las variedades $com\mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{L}_\vee$ son las únicas subvariedades en $\mathcal{SH}^C$ equivalentes por términos a las álgebras de Heyting lineales.*

Demostración Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad en $\mathcal{SH}^C$ equivalente por términos a las álgebras de Heyting lineales.Entonces existe un término de Heyting $t(x, y)$ tal que para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $x \rightarrow y = t(x, y)$. Sea $\mathbf{A}_0$ una cadena de $\mathcal{V}$. Por el lema 7.4.5 podemos suponer, como primer caso, que $a \rightarrow b = a$ para todo $a, b \in A$ tal que $a < b$. Entonces $\mathbf{A}_0 \in com\mathcal{SH}^C$. Además, por el lema 7.4.6, toda cadena de la variedad $\mathcal{V}$ pertenece a $com\mathcal{SH}^C$. Luego $\mathcal{V} \subseteq com\mathcal{SH}^C$. Los otros casos son similares. ■

7.5. La variedad generada por $com\mathcal{SH}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ y $\mathcal{H}^C$

El objetivo de esta sección es investigar la variedad generada por las variedades $com\mathcal{SH}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ y la variedad de las álgebras de Heyting lineales. Determinaremos su reticulado de subvariedades, encontraremos una base ecuacional para cada subvariedad, y estudiaremos álgebras libres en esta variedad.

Recordemos que el reticulado de subvariedades de $\mathcal{H}^C$ es una cadena de tipo $(\omega + 1)$

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_0^{\mathcal{H}}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_1^{\mathcal{H}}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathcal{H}}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{H}^C = \mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega^{\mathcal{H}}),$$

donde $\mathbf{L}_n^{\mathcal{H}}$ es la única álgebra que tiene como reducto reticular la cadena con $n+2$ elementos $\mathbf{L}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

Además observemos que $\mathbf{L}_0^{\mathcal{H}} = \mathbf{L}_0^{\vee}$.

Consideremos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl}\gamma_H(x,y) & = & (x \wedge y) \to x \\ \gamma_{Com}(x,y) & = & (x \to y) \leftrightarrow (y \to x) \\ \gamma_\vee(x,y) & = & ((x \wedge y) \leftrightarrow y) \vee ((x \to y) \leftrightarrow y)\end{array},$$

donde $x \leftrightarrow y = (x \to (x \wedge y)) \wedge (y \to (x \wedge y))$.

Observemos que $\gamma_H(x,y) \approx 1$, $\gamma_{Com}(x,y) \approx 1$ y $\gamma_\vee(x,y) \approx 1$ representan respectivamente una base ecuacional, módulo $\mathcal{SH}^C$, para las subvariedades $\mathcal{H}^C$, $com\mathcal{SH}^C$ y $\mathcal{L}_\vee$.

Definición 7.5.1 *Sea $\mathcal{C}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}^C$ caracterizada por la ecuación:*

$$\gamma_H(x_1,x_2) \vee \gamma_{Com}(y_1,y_2) \vee \gamma_\vee(z_1,z_2) \approx 1$$

Vamos a probar que $\mathcal{C}$ es la variedad generada por las variedades $com\mathcal{SH}^C$, $\mathcal{L}_\vee$ y $\mathcal{H}^C$.

Teorema 7.5.2 $\mathcal{V}(\mathcal{H}^C, com\mathcal{SH}^C, \mathcal{L}_\vee) = \mathcal{C}$.

Demostración Es claro que $\mathcal{V}(\mathcal{H}^C, com\mathcal{SH}^C, \mathcal{L}_\vee) \subseteq \mathcal{C}$. Para la otra inclusión, consideremos una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L} \in \mathcal{C}$. Si suponemos que $\mathbf{L} \notin \mathcal{H}^C \cup com\mathcal{SH}^C \cup \mathcal{L}_\vee$ entonces existen $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in L$ tales que $\gamma_H(a_1,a_2) \neq 1$, $\gamma_{Com}(b_1,b_2) \neq 1$ y $\gamma_\vee(c_1,c_2) \neq 1$. Luego $\gamma_H(a_1,a_2) \vee \gamma_{Com}(b_1,b_2) \vee \gamma_\vee(c_1,c_2) \neq 1$, lo cual es una contradicción. ■

Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad de $\mathcal{C}$. Como en la demostración del teorema 7.5.2, $Si(\mathcal{V}) = Si(\mathcal{H}^C) \cup Si(\mathcal{L}_\vee) \cup Si(com\mathcal{SH}^C)$, donde $Si(\mathcal{K})$ nota la colección de las álgebras subdirectamente irreducibles en la clase $\mathcal{K}$. Entonces es fácil ver el siguiente teorema.

Teorema 7.5.3 *Toda subvariedad de $\mathcal{C}$ es de la forma $\mathcal{V}(\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}, \mathbf{L}_j^{Com}, \mathbf{L}_k^{\vee})$, para $i,j,k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.*

Recordemos que si

$$\psi_n(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(x_i \vee x_i^*) \vee \bigvee_{i,j=1;j<i}^{n-1}(x_i \to x_j),$$

entonces $\psi_n(x_1,\ldots,x_{n-1}) \approx 1$ caracteriza la altura de una cadena $\mathbf{L}$ (ver 7.2.6). Luego el siguiente corolario resulta en forma inmediata .

Corolario 7.5.4 *Una base ecuacional para la subvariedad $\mathcal{V}(\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}, \mathbf{L}_j^{Com}, \mathbf{L}_k^{\vee})$, $i,j,k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, en $\mathcal{SH}^C$, es la siguiente:*

$$\delta_H^i(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1}) \vee \delta_C^j(y_1,\ldots,y_{n-1},y_n,y_{n+1}) \vee \delta_\vee^k(z_1,\ldots,z_{n-1},z_n,z_{n+1}) \approx 1, \text{ donde}$$

$$\begin{array}{rcl}\delta_H^i(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1}) & = & \psi_i(x_1,\ldots,x_{n-1}) \wedge \gamma_H(x_n,x_{n+1}) \\ \delta_C^j(y_1,\ldots,y_{n-1},y_n,y_{n+1}) & = & \psi_j(y_1,\ldots,y_{n-1}) \wedge \gamma_{Com}(y_n,y_{n+1}) \\ \delta_\vee^k(z_1,\ldots,z_{n-1},z_n,z_{n+1}) & = & \psi_k(z_1,\ldots,z_{n-1}) \wedge \gamma_\vee(z_n,z_{n+1})\end{array}.$$

7.6. Álgebras libres en la variedad $\mathcal{C}$

Nuestro siguiente objetivo es obtener una construcción del álgebra libre finitamente generada en la variedad $\mathcal{C}$. Seguiremos un proceso similar a lo realizado por Abad y Monteiro en [5].

Para cada $n \geq 0$, sean $\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$, $\mathbf{L}_i^{Com}(n)$ y $\mathbf{L}_i^{\vee}(n)$ la subálgebra de $\mathbf{L}_n^{\mathcal{H}}$, $\mathbf{L}_n^{Com}$ y $\mathbf{L}_n^{\vee}$ con universo $L_i(n) = \{0, a_1, \ldots, a_i, 1\}$, $0 \leq i \leq n$ respectivamente.

Dada un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A}$ y $X \subseteq A$, sea $S(X)$ la subálgebra de $\mathbf{A}$ generada por X. El siguiente lema es inmediato.

Lema 7.6.1 *Sea $\mathbf{L}$ una cadena en $\mathcal{C}$ y $X \subseteq L$. Entonces $S(X) = X \cup \{0,1\}$.*

La demostración del siguiente teorema es similar a la demostración dada en [27, V.1.4]

Teorema 7.6.2 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra en $\mathcal{C}$ y P un filtro primo de $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A}/P$ es una cadena si y sólo si la familia de todos los filtros propios de $\mathbf{A}$ que contienen a P es una cadena.*

Teorema 7.6.3 *Sea $A \in \mathcal{SH}^C$ y P un filtro primo de $\mathbf{A}$. Entonces la familia de todos los filtros propios de A que contienen a P es una cadena.*

Demostración Sea $\mathfrak{F} = \{F \subseteq A : F \neq A, F$ es un filtro de A y $P \subseteq F\}$. Sean $F_0, F_1 \in \mathfrak{F}$ y supongamos que $F_0 \not\subseteq F_1$ y $F_1 \not\subseteq F_0$. Entonces existen $a, b \in A$ tales que $a \in F_0 \setminus F_1$ y $b \in F_1 \setminus F_0$. Como $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}^C$, $\mathbf{A}$ satisface la identidad (Ch), es decir, la identidad $((a \vee (a \to b)) \to (a \to b)) \vee (b \to (a \wedge b)) \approx 1$. Como $1 \in P$ y P es un filtro primo, $(a \vee (a \to b)) \to (a \to b) \in P$ ó $b \to (a \wedge b) \in P$.

Si $(a \vee (a \to b)) \to (a \to b) \in P$, entonces $a \wedge [(a \vee (a \to b)) \to (a \to b)] = a \wedge b$. Como $(a \vee (a \to b)) \to (a \to b) \in F_0$ y $a \in F_0$ (siendo $P \subseteq F_0$), tenemos que $a \wedge b \in F_0$. Consecuentemente $b \in F_0$.

Si $b \to (a \wedge b) \in P$, entonces $b \wedge [b \to (a \wedge b)] = a \wedge b$, y como en el caso anterior, obtenemos que $a \in F_1$.

Como consecuencia, $F_0 \subseteq F_1$ ó $F_1 \subseteq F_0$, es decir, $\mathfrak{F}$ es una cadena. ■

De los teoremas 7.6.2 y 7.6.3 resulta el siguiente corolario.

Corolario 7.6.4 *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}^C$ y P es un filtro primo de A, entonces $\mathbf{A}/P$ es una cadena.*

Para un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A}$ dada, sea $\mathbb{P}(\mathbf{A})$ la colección de los filtros primos de $\mathbf{A}$, y para $\mathbf{A}$ finito, sea $\Pi(\mathbf{A})$ el conjunto de sus elementos primos.

Observación 7.6.5 Recordemos que un álgebra de semi-Heyting no trivial $\mathbf{A}$ pertenece a $\mathcal{SH}^C$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto de cadenas de semi-Heyting. Este resultado puede ser reescrito diciendo que $\mathbf{A}$ pertenece a $\mathcal{SH}^C$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto $\Pi_{P \in \mathbb{P}(\mathbf{A})} \mathbf{A}/P$.

El siguiente lema es consecuencia del teorema 7.6.3.

Lema 7.6.6 *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}^C$ *es finita y* $p \in \Pi(\mathbf{A})$*, entonces el conjunto* $I(p) = \{q \in \Pi(\mathbf{A}) : q \leq p\}$ *es una cadena.*

Sea $A \in \mathcal{SH}^C$, con $\mathbf{A}$ finita. Diremos que $p \in \Pi(A)$ es de *nivel* i en $\Pi(A)$, con i un entero positivo, si $|I(p)| = i$. Es claro que si $p \in \Pi(A)$ es de nivel i y $Fg(p)$ es el filtro generado por p, entonces $\mathbf{A}/Fg(p) \cong \mathbf{L}_{i-1}(n)$.

Sea $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ el álgebra libre en la variedad $\mathcal{C}$ sobre un conjunto de n generadores libres, $n > 0$. En lo que sigue notaremos $\mathbb{P}(n)$ la colección de los filtros primos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ y $\Pi(n)$ el conjunto de los elementos primos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$. Se tiene que $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ es isomorfa a una subálgebra de producto directo $\Pi_{P\in\mathbb{P}(n)}\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$.

Probaremos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ es finita, y en ese sentido, demostraremos que $\mathbb{P}(n)$ es finita y que $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$ es finita para todo $P \in \mathbb{P}(n)$.

Lema 7.6.7 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra en* $\mathcal{C}$*,* G *un conjunto finito de generadores de* $\mathbf{A}$ *con* $|G| = n$ *y* $P \in \mathbb{P}(\mathbf{A})$*. Entonces* $|\mathbf{A}/P| \leq n + 2$*.*

Demostración Sea $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/P$ el epimorfismo natural. Como $S(G) = \mathbf{A}$, $S(h(G)) = \mathbf{A}/P$. Por el corolario 7.6.4, $\mathbf{A}/P$ es una cadena. Luego $\mathbf{A}/P = h(\mathbf{A}) = S(h(G)) = h(G) \cup \{0, 1\}$ por el lema 7.6.1. Entonces $|\mathbf{A}/P| \leq |h(G)| + 2 \leq n + 2$. ■

Corolario 7.6.8 *Si* $P \in \mathbb{P}(n)$*, entonces* $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$ *es una cadena finita.*

Por el lema 7.6.7, si $P \in \mathbb{P}(n)$, la familia de filtros de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ que contienen a P tiene a lo sumo $n+2$ elementos, y la familia de filtros primos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ que contienen a P tiene a lo sumo $n+1$ elementos. Entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$ es isomorfa a $\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$ ó a $\mathbf{L}_i^{Com}(n)$ ó a $\mathbf{L}_i^{\vee}(n)$, con $0 \leq i \leq n$, y $h : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$ está definida como
$h(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in P \\ a_i & si \quad x \in P_i \setminus P_{i+1}, \ 0 \leq i \leq t \end{cases}$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$P_i^{\mathcal{H}}(n) = \{P \in \mathbb{P}(n) : \ \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P \cong \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)\},$$

$$F_i^{\mathcal{H}}(n) = \{f : G \to \mathbf{L}_i(n) : \ S(f(G)) \cong \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)\}.$$

Similarmente podemos definir los conjuntos $P_i^{\vee}(n)$, $P_i^{Com}(n)$, $F_i^{\vee}(n)$ y $F_i^{Com}(n)$.

Finalmente consideremos

$$P_i(n) = P_i^{\mathcal{H}}(n) \cup P_i^{\vee}(n) \cup P_i^{Com}(n), \quad F_i(n) = F_i^{\mathcal{H}}(n) \cup F_i^{\vee}(n) \cup F_i^{Com}(n), \quad \mathbb{F}(n) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i(n).$$

Claramente $P_i(n) \cap P_j(n) = \emptyset$ para $i \neq j$, y $F_i(n) \neq \emptyset$ con $0 \leq i, j \leq n$.

Sea $f \in F_i^{\mathcal{H}}(n)$ y $\overline{f} : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$ la expansión de f. Entonces $\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n) = S(f(G)) = S(\overline{f}(G)) = \overline{f}(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n))$. Luego $\overline{f} : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$ es un epimorfismo, y $Ker\overline{f}$ es un filtro primo de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$. Similarmente, para $F_i^{\vee}(n)$ y $F_i^{\mathcal{H}}(n)$.

Lema 7.6.9 *Si* $f \in F_i^{\mathcal{H}}(n)$ *entonces* $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f} \cong \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$. *Si* $f \in F_i^{\vee}(n)$ *entonces* $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f} \cong \mathbf{L}_i^{\vee}(n)$. *Si* $f \in F_i^{Com}(n)$ *entonces* $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f} \cong \mathbf{L}_i^{Com}(n)$.

Demostración Supongamos que $f \in F_i^{\mathcal{H}}(n)$. Consideremos el homomorfismo natural $\gamma : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f}$. Sea $g : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f} \to \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$ definida como $g(a/Ker\overline{f}) = \overline{f}(a)$ para $a \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$.

Veamos que g está bien definida. Si $b \in a/Ker\overline{f}$ entonces existe $c \in Ker\overline{f}$ tal que $ax \wedge c = b \wedge c$. Luego $\overline{f}(a) = \overline{f}(a \wedge c) = \overline{f}(b \wedge c) = \overline{f}(b)$.

Sean $a/Ker\overline{f}, b/Ker\overline{f} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f}$ tales que $g(a/Ker\overline{f}) = g(b/Ker\overline{f})$. Entonces $\overline{f}(a) = \overline{f}(b)$. Luego $\overline{f}((a \to b) \wedge (b \to a)) = 1$ y consecuentemente, $(a \to b) \wedge (b \to a) \in Ker\overline{f}$. Además, $a \wedge (a \to b) \wedge (b \to a) = a \wedge b \wedge (b \to a) = a \wedge b \wedge a = a \wedge b = b \wedge a \wedge b = b \wedge a \wedge (a \to b) = b \wedge (b \to a) \wedge (a \to b)$. Entonces $a/Ker\overline{f} = b/Ker\overline{f}$. Luego g es inyectiva.

Ahora, para todo $a \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$, $(g \circ \gamma)(a) = g(\gamma(a)) = g(a/Ker\overline{f}) = \overline{f}(a)$, luego $g \circ \gamma = \overline{f}$.

Sea $a \in \mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}(n)$. Entonces existe $c \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ tal que $\overline{f}(c) = a$, es decir $g(\gamma(c)) = a$. Luego g es sobre.

La misma demostración puede ser desarrollada para los casos en los cuales $f \in F_i^{\vee}(n)$ ó $f \in F_i^{Com}(n)$. ■

Para evitar repeticiones innecesarias, usaremos en adelante el símbolo $*$ para sustituir los superíndices $\mathcal{H}$, $\vee$ ó Com. Por ejemplo, $F_i^*(n)$ notará cualquiera de los conjuntos $F_i^{\mathcal{H}}(n)$, $F_i^{\vee}(n)$ y $F_i^{Com}(n)$, $\mathbf{L}_i^*$ notará cualquiera de las cadenas $\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}}$, $\mathbf{L}_i^{\vee}$ ó $\mathbf{L}_i^{Com}$, etc.

Lema 7.6.10 *La función* $\psi_i^* : F_i^*(n) \to P_i^*(n)$ *definida como* $\psi_i^*(f) = Ker\overline{f}$ *es sobre.*

Demostración Para $P \in P_i^*(n)$ (es decir, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P \cong \mathbf{L}_i^*(n)$), consideremos el homomorfismo natural $\lambda : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$, y sea $f = \lambda|_G$ la restricción de λ a G. Entonces $S(f(G)) = S(\lambda(G)) = \lambda(S(G)) = \lambda(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)) \cong \mathbf{L}_i^*(n)$, luego $f \in F_i^*(n)$. Ahora, sea $\overline{f}$ la extensión de f. Claramente $\overline{f}|_G = f = \lambda|_G$ y consecuentemente, $\overline{f} = \lambda$ y $\psi_i^*(f) = Ker\overline{f} = Ker\lambda = P$. ■

Lema 7.6.11 $\mathbb{P}(n)$ *es un conjunto finito.*

Demostración Como G y $\mathbf{L}_i^*(n)$ son finitos, $F_i^*(n)$ es finito para todo $0 \leq i \leq n$. Por el lema 7.6.10, ψ_i^* es sobre y consecuentemente, $P_i^*(n)$ es finito para todo $0 \leq i \leq n$. Como $\mathbb{P}(n) = \bigcup_{i=1}^n P_i(n) = \bigcup_{i=1}^n (P_i^{\mathcal{H}}(n) \cup P_i^{\vee}(n) \cup P_i^{Com}(n))$ entonces $\mathbb{P}(n)$ es finito. ■

Teorema 7.6.12 $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ *es finita.*

Demostración De la observación 7.6.5, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \in \mathbb{IS}\left(\Pi_{P \in \mathbb{P}(n)} \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P\right)$. Por el lema 7.6.11, $\mathbb{P}(n)$ es finito y, por el corolario 7.6.8, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/P$ es finito para todo $P \in \mathbb{P}(n)$. Entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ es finita. ■

Como todo reticulado distributivo finito está determinado, a menos de isomorfismos, por su conjunto ordenado de elementos primos, nuestro siguiente objetivo es obtener una descripción de $\Pi(n)$. Para esto, vamos a representar cada elemento de $\Pi(n)$ por un elemento de $\mathbb{F}(n)$, es decir, una función f de G en $\mathbf{L}_i^*(n)$, $0 \leq i \leq n$, tal que $S(f(G)) \cong \mathbf{L}_i^*(n)$, para $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$.

Para cada $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$, consideremos los conjuntos

$$\mathbb{F}^*(n) = \bigcup_{i=0}^{n} F_i^*(n) \text{ y } \mathbb{P}^*(n) = \bigcup_{i=0}^{n} P_i^*(n),$$

y definamos $\psi^* : \mathbb{F}^*(n) \to \mathbb{P}^*(n)$ por $\psi^*(f) = \psi_i^*(f) = Ker(\overline{f})$ con $f \in \mathbb{F}^*(n)$.

Por el lema 7.6.9, ψ^* está bien definida y es inyectiva.

Si $f \in \mathbb{F}(n)$, $f \in F_i(n)$ para algún $0 \leq i \leq n$, entonces $f \in F_i^*(n)$ para algún $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$. Entonces $Ker\overline{f} \in \mathbb{P}(n)$ y $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker\overline{f} \cong \mathbf{L}_i^*$. Como $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ es finito, entonces existe $p_f \in \Pi(n)$ tal que $Ker\overline{f} = Fg(p_f)$, donde $Fg(p_f)$ es el filtro generado por p_f.

Lema 7.6.13 *La función $\Phi : \mathbb{F}(n) \to \Pi(n)$ definida como $\phi(f) = p_f$ es una biyección.*

Demostración Sea $P \in \Pi(n)$ y consideremos $Fg(p) \in \mathbb{P}(n)$. Por el corolario 7.6.4, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Fg(p)$ es una cadena y luego, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Fg(p) \cong \mathbf{L}_j^*(n)$ para algún $0 \leq j \leq n$ y $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$. Sea $\lambda : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Fg(p)$ el epimorfismo natural y $\lambda' = \lambda|_G$. Entonces $\lambda' : G \to \mathbf{L}_j^*(n)$ y $\lambda' \in F_j^*(n) \subseteq \mathbb{F}(n)$. Luego $Ker(\overline{\lambda'}) = Ker(\lambda) = Fg(p)$ y $\Phi(\lambda') = p$.

Sean $f_1, f_2 \in \mathbb{F}(n)$ tales que $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$. Entonces $p_{f_1} = p_{f_2}$ con $Ker(\overline{f_1}) = Fg(p_{f_1})$ y $Ker(\overline{f_2}) = Fg(p_{f_2})$. Como $p_{f_1} = p_{f_2}$, $Ker(\overline{f_1}) = Fg(p_{f_1}) = Fg(p_{f_2}) = Ker(\overline{f_2})$. Consecuentemente $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker(\overline{f_1}) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker(\overline{f_2})$. Del teorema 7.5.2 y el corolario 7.6.4, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker(\overline{f_1}) \cong \mathbf{L}_j^*(n)$ para algún $0 \leq j \leq n$ y $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$. Entonces $Ker(\overline{f_1}), Ker(\overline{f_2}) \in P_i^*(n)$ y $\psi^*(f_1) = Ker(\overline{f_1}) = Ker(\overline{f_2}) = \psi^*(f_2)$. Como ψ^* es inyectiva, entonces $f_1 = f_2$. ∎

Observación 7.6.14 *Si $p_f \in \Pi(n)$ es de nivel i, $1 \leq i \leq n+1$, entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Fg(p_f) \cong \mathbf{L}_{i-1}^*(n)$, con $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$.*

Lema 7.6.15 *$p_f \in \Pi(n)$ es de nivel 1 si y sólo si $f(g) \in \{0, 1\}$ para todo $g \in G$.*

Demostración Si $p_f \in \Pi(n)$ es de nivel 1, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Fg(p_f) \cong \mathbf{L}_0^*(n)$, con $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$, y esto es equivalente a afirmar que $Fg(p_f) \in P_0^*(n)$. Consideremos $\psi_0^* : F_0^*(n) \to P_0^*(n)$. Por el lema 7.6.10, ψ_0^* es biyectiva, y entonces, existe $f \in F_0^*(n) :\ \psi_0^*(f) = Fg(p_f) = Ker(\overline{f})$. Luego $f \in (\psi_0^*)^{-1}(Fg(p_f))$. Como $f \in F_0^*(n)$, entonces $S(f(G)) = \mathbf{L}_0^*(n)$. Luego $f(G) \cup \{0, 1\} = \mathbf{L}_0^*(n)$. Entonces $f(G) \subseteq \{0, 1\}$. La recíproca es inmediata. ∎

Por el lema 7.6.13 el conjunto de los elementos primos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ se corresponde con el conjunto $\mathbb{F}(n)$. Observemos que por esta relación un elemento $p \in \Pi(n)$ de nivel i se corresponde con una función $f \in F_{i-1}(n)$, es decir, $f \in F_{i-1}^{\mathcal{H}}(n) \cup F_{i-1}^{\vee}(n) \cup F_{i-1}^{Com}(n)$. En particular si $p \in \Pi(n)$ es de nivel 1 entonces $f \in F_0^{\mathcal{H}}(n) \cup F_0^{\vee}(n) \cup F_0^{Com}(n)$. Como $F_0^{\mathcal{H}}(n) = F_0^{\vee}(n)$ se tiene que $f \in F_0^{\mathcal{H}}(n) \cup F_0^{Com}(n)$. Además $|F_0^{\mathcal{H}}(n) \cup F_0^{Com}(n)| = |F_0^{\mathcal{H}}(n)| + |F_0^{Com}(n)|$ pues $F_0^{\mathcal{H}}(n) \cap F_0^{Com}(n) = \emptyset$. Luego $\Pi(n)$ tiene $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ elementos minimales, es decir, tiene 2^{n+1} elementos de nivel 1.

De manera similar por el lema 7.6.15 se puede probar el siguiente lema.

Lema 7.6.16 *$p_f \in \Pi(n)$ es de nivel i, $2 \leq i \leq n+1$, si y sólo si $f(G) \subseteq \mathbf{L}_{i-1}(n)$ y $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in f(G)$.*

Lema 7.6.17 *Sean $p, q \in \Pi(n)$. Entonces q cubre a p en $\Pi(n)$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $Fg(q) \subset Fg(p)$

(2) $Fg(p) \in P_t^*(n)$

(3) $Fg(q) \in P_{t+1}^*(n)$ *para algún* $0 \leq t \leq n-1$ *y* $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$.

Demostración Como q cubre a p, $Fg(q) \subset Fg(p)$ y no existe $P \in \mathbb{P}(n)$ tal que $Fg(q) \subset P \subset Fg(p)$. Como $Fg(p) \in \mathbb{P}(n)$, $Fg(p) \in P_t^*(n)$ para algún $0 \leq t \leq n$ y $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$. Además, $t \neq n$ siendo que la familia de filtros primos que contienen a $Fg(q)$ tiene a lo sumo n+1 elementos. Como no existe $P \in \mathbb{P}(n)$ tal que $Fg(q) \subset P \subset Fg(p)$, entonces $Fg(q) \in P_{t+1}^*(n)$.

Para la vuelta, consideremos $p, q \in \Pi(n)$ satisfaciendo las condiciones (1), (2) y (3). De (1), $p < q$. Supongamos que existe $p' \in \Pi(n)$ tal que $p < p' < q$. Entonces $Fg(q) \subset Fg(p') \subset Fg(p)$. Por (2), $Fg(p) \in P_t^*(n)$ y, consecuentemente, $Fg(q) \in P_{t+2}^*(n)$ lo cual contradice la hipótesis (3). ∎

Teorema 7.6.18 *Sean $f, h \in \mathbb{F}(n)$. Entonces $\Phi(h) = p_h = q$ cubre a $\Phi(f) = p_f = p$ si y sólo si $f \in F_t^*(n)$, $h \in F_{t+1}^*(n)$ para algún $0 \leq t \leq n-1$ y $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$, y se satisfacen las siguientes condiciones:*

(I) $f(g) = a_j$ *si y sólo si* $h(g) = a_j$ *para todo* $0 \leq j \leq t$.

(II) $f(g) = 1$ *si y sólo si* $h(g) = 1$ *ó* $h(g) = a_{t+1}$.

(III) *Existe* $g \in G: \ f(g) \neq h(g)$.

Demostración Supongamos que $\Phi(h) = p_h = q$ cubre a $\Phi(f) = p_f = p$. Por el lema 7.6.17, $Fg(q) \subset Fg(p)$, $Fg(p) \in P_t^*(n)$ y $Fg(q) \in P_{t+1}^*(n)$ para algún $0 \leq t \leq n-1$ y $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$. De $Ker(\overline{f}) = Fg(p) \in P_t^*(n)$ se tiene que $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker(\overline{f}) \cong \mathbf{L}_t^*(n)$. Consideremos el homomorfismo natural $\lambda : \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) \to \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker(\overline{f})$. Luego $\lambda = \overline{f}$ y entonces $f \in F_t^*(n)$. Similarmente $h \in F_{t+1}^*(n)$.

Como $f \in F_t^*(n)$, $S(f(G)) = f(G) \cup \{0,1\} = \mathbf{L}_t(n)$. Si $t = 0$ entonces $f(G) \subseteq \{0,1\}$ y si $t \neq 0$ se tiene como consecuencia que $a_1, \dots, a_t \in f(G)$. De una manera similar $a_1, \dots, a_t, a_{t+1} \in h(G)$. Como $P_{t+2} = Fg(p_h) \subseteq P_{t+1} = Fg(p_f) \subset P_t \subset \dots \subset P_1 \subset P_0 = \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ se tiene que

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Fg(p_f) \\ a_j & si \quad x \in P_j \setminus P_{j+1}, \ 0 \leq j \leq t \end{cases}$$

y

$$\overline{h}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Fg(p_h) \\ a_j & si \quad x \in P_j \setminus P_{j+1}, \ 0 \leq j \leq t+1 \end{cases}.$$

Tenemos que $f(g) = a_j$ si y sólo si $\overline{f}(g) = a_j$ si y sólo si $g \in P_j \backslash P_{j+1}$ si y sólo si $\overline{h}(g) = a_j$ si y sólo si $h(g) = a_j$.

Además, $f(g) = 1$ si y sólo si $\overline{f}(g) = 1$ si y sólo si $g \in Fg(p_f)$ si y sólo si $g \in (Fg(p_f) \setminus Fg(p_h)) \cup Fg(p_h)$ si y sólo si $g \in Fg(p_f) \backslash Fg(p_h)$ ó $g \in Fg(p_h)$ si y sólo si $g \in P_{t+1} \setminus P_{t+2}$ ó $g \in Fg(p_h)$ si y sólo si $\overline{h}(g) = a_{t+1}$ ó $\overline{h}(g) = 1$ si y sólo si $h(g) = a_{t+1}$ ó $h(g) = 1$.

Claramente existe $g \in G$ tal que $f(g) \neq h(g)$.

Para la recíproca, sea $f \in F_t^*(n)$, $h \in F_{t+1}^*(n)$ para algún $0 \leq t \leq n-1$ y $* \in \{\mathcal{H}, \vee, Com\}$, satisfaciendo las condiciones (I), (II) y (III). Como $f \in F_t^*(n)$, $S(f(G)) = \mathbf{L}_t^*(n)$. Luego $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Fg(p_f) = \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)/Ker(\overline{f}) = \mathbf{L}_t^*(n)$, y entonces $Fg(p_f) \in P_t^*(n)$. Similarmente $Fg(p_h) \in P_{t+1}^*(n)$.

Por el lema 7.6.17, es suficiente probar que $Fg(p_h) \subset Fg(p_f)$.

Consideremos

$$Fg(p_f) = P_{t+1} \subset P_t \subset \ldots \subset P_1 \subset P_0 = \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$$

y

$$Fg(p_h) = Q_{t+2} \subset Q_{t+1} \subset \ldots \subset Q_1 \subset Q_0 = \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$$

la cadena de filtros primos que contienen a $Fg(p_f)$ y $Fg(p_h)$ respectivamente. Sea

$$C_{t+2} = Q_{t+2} \cap P_{t+1},\ C_{t+1} = (Q_{t+1} \backslash Q_{t+2}) \cap P_{t+1} \text{ y } C_j = (Q_j \backslash Q_{j+1}) \cap (P_j \backslash P_{j+1}),\ 0 \leq j \leq t.$$

Tenemos que

$$z \in C_{t+2} \text{ si y sólo si } \overline{h}(z) = 1 \text{ y } \overline{f}(z) = 1;$$

$$z \in C_{t+1} \text{ si y sólo si } \overline{h}(z) = a_{t+1} \text{ y } \overline{f}(z) = 1;$$

$$z \in C_j \text{ si y sólo si } \overline{h}(z) = a_j \text{ y } \overline{f}(z) = a_j, 0 \leq j \leq t.$$

Observemos que los conjuntos C_j son disjuntos dos a dos, $0 \leq j \leq t+2$, y es largo pero computacional verificar que $S = \bigcup_{j=0}^{t+2} C_j$ es una subálgebra de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$.

Sea $g \in G$. Entonces $h(g) \in \{0 = a_0, a_1, \ldots, a_t, a_{t+1}, 1\}$. Si $h(g) = 1$ entonces $g \in Q_{t+2}$. Por (II), $f(g) = 1$ y consecuentemente $g \in P_{t+1}$ y $g \in C_{t+2} \subseteq S$. Si $h(g) = a_{t+1}$ entonces $g \in Q_{t+1} \setminus Q_{t+2}$ y $g \in P_{t+1}$ por (II). Luego $g \in C_{t+1} \subseteq S$. Si $h(g) = a_j$, $0 \leq j \leq t$, entonces $g \in Q_j \setminus Q_{j+1}$ y $f(g) = a_j$ por (I). Luego $g \in C_j \subseteq S$. Por lo tanto $G \subseteq S$ y, consecuentemente $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) = S$.

Entonces $Fg(p_h) = Q_{t+2} = Q_{t+2} \cap \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) = Q_{t+2} \cap \left(\bigcup_{j=0}^{t+2} C_j\right) = \bigcup_{j=0}^{t+2} (Q_{t+2} \cap C_j) = Q_{t+2} \cap C_{t+2} = Q_{t+2} \cap P_{t+1} = Fg(p_h) \cap Fg(p_f)$. En consecuencia $Fg(p_h) \subseteq Fg(p_f)$. Si $Fg(p_h) = Fg(p_f)$ entonces $Ker\overline{h} = Ker\overline{f}$. Luego $\overline{h} = \overline{f}$ y, por lo tanto $h = f$. ■

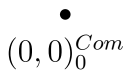
Veamos el siguiente ejemplo que permite aclarar las ideas subyacentes del teorema anterior. Supongamos que $G = \{g_1, g_2\}$, es decir, en este caso el álgebra libre está generada por dos generadores libres en la variedad $\mathcal{C}$. Por el lema 7.6.15 podemos determinar los elementos minimales de $\Pi(2)$ a partir del conjunto $\mathbb{F}_0(2)$. Luego es importante describir el conjunto $\mathbb{F}_0(2)$ como lo haremos a continuación.

Notaremos $(x, y)_i^*$ a la función $f : G \to \mathbf{L}_i(2)$ tal que $f(g_1) = x$, $f(g_2) = y$ y $S(f(g_1), f(g_2)) \cong \mathbf{L}_i^*(2)$ con $* \in \{\mathcal{H}, Com, \vee\}$ y $0 \leq i \leq 2$. Observemos que en este caso

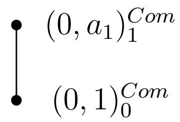
$\mathbb{F}_0(2) = \mathbb{F}_0^{\mathcal{H}}(2) \cup \mathbb{F}_0^{Com}(2)$ donde $\mathbb{F}_0^{\mathcal{H}}(2) = \{(0,0)_0^{\mathcal{H}}, (0,1)_0^{\mathcal{H}}, (1,0)_0^{\mathcal{H}}, (1,1)_0^{\mathcal{H}}\}$ y $\mathbb{F}_0^{Com}(2) = \{(0,0)_0^{Com}, (0,1)_0^{Com}, (1,0)_0^{Com}, (1,1)_0^{Com}\}$. Como $\mathbf{L}_0^{\mathcal{H}} = \mathbf{L}_0^{\vee}$ se tiene que $(x,y)_0^{\mathcal{H}} = (x,y)_0^{\vee}$ para todo $x, y \in \{0,1\}$, es decir, $\mathbb{F}_0^{\mathcal{H}}(2) = \mathbb{F}_0^{\vee}(2)$.

Utilizando las condiciones del teorema 7.6.18 vamos a construir las componentes conexas del conjunto $\Pi(2)$ de la siguiente manera teniendo en cuenta que sus elementos minimales están determinados por las funciones $\{(0,0)_0^{\mathcal{H}} = (0,0)_0^{\vee}, (0,1)_0^{\mathcal{H}} = (0,1)_0^{\vee}, (1,0)_0^{\mathcal{H}} = (1,0)_0^{\vee}, (1,1)_0^{\mathcal{H}} = (1,1)_0^{\vee}, (0,0)_0^{Com}, (0,1)_0^{Com}, (1,0)_0^{Com}, (1,1)_0^{Com}\}$. Cada figura presentada a continuación describe el comportamiento de la componente conexa determinada por un elemento primo minimal.

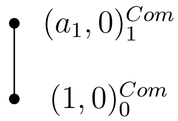
Elemento minimal $(0,0)_0^{Com}$



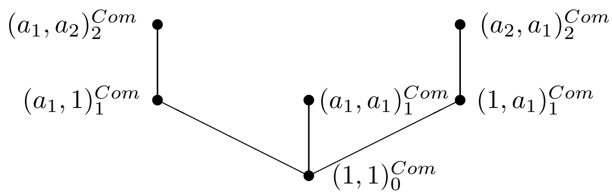
Elemento minimal $(0,1)_0^{Com}$



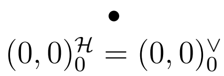
Elemento minimal $(1,0)_0^{Com}$



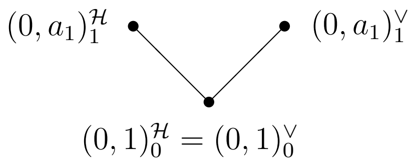
Elemento minimal $(1,1)_0^{Com}$



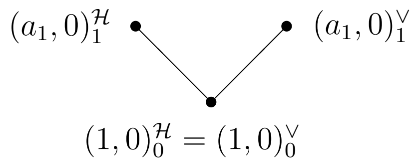
Elemento minimal $(0,0)_0^{\mathcal{H}} = (0,0)_0^{\vee}$



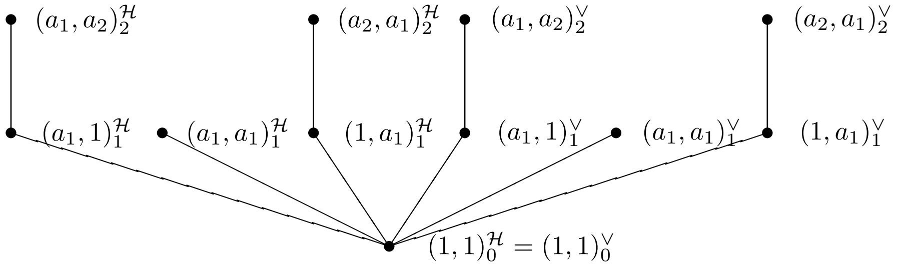
Elemento minimal $(0,1)_0^{\mathcal{H}} = (0,1)_0^{\vee}$



Elemento minimal $(1,0)_0^{\mathcal{H}} = (1,0)_0^{\vee}$



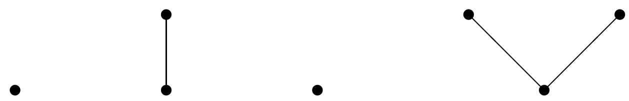
Elemento minimal $(1,1)_0^{\mathcal{H}} = (1,1)_0^{\vee}$



Veamos cómo se construye el álgebra libre $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n)$ a partir de su conjunto de elementos primos $\Pi(n)$. Sean $[f) = \{g \in \mathbb{F}(n) : \ f \leq g\}$, $K_j^{Com}(n) = \{[f) : \ |f^{-1}(1)| = j \text{ y } f \in \mathbb{F}_0^{Com}(n)\}$ y $K_j^{\mathcal{H},\vee}(n) = \{[f) : \ |f^{-1}(1)| = j \text{ y } f \in \mathbb{F}_0^{\mathcal{H}}(n)\}$ con $0 \leq j \leq n$. Si notamos por $R_j^{Com}(n)$ y $R_j^{\mathcal{H},\vee}(n)$ el reticulado distributivo tal que $\Pi(R_j^{Com}(n)) \cong M$ con $M \in K_j^{Com}(n)$ y $\Pi(R_j^{\mathcal{H},\vee}(n)) \cong M$ con $M \in K_j^{\mathcal{H},\vee}(n)$ respectivamente entonces

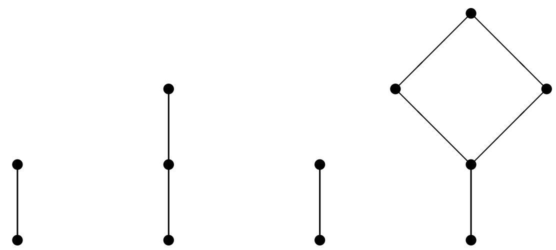
$$\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(n) = \prod_{j=0}^{n} (R_j^{\mathcal{H},\vee}(n))^{\binom{n}{j}} \times \prod_{j=0}^{n} (R_j^{Com}(n))^{\binom{n}{j}}.$$

Por ejemplo, para $n = 1$ el conjunto $\Pi(1)$ es:



$K_0^{Com}(1)$ $K_1^{Com}(1)$ $K_0^{\mathcal{H},\vee}(1)$ $K_1^{\mathcal{H},\vee}(1)$

y, por lo tanto $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(1) = R_0^{Com}(1) \times R_1^{Com}(1) \times R_0^{\mathcal{H},\vee}(1) \times R_1^{\mathcal{H},\vee}(1)$ donde

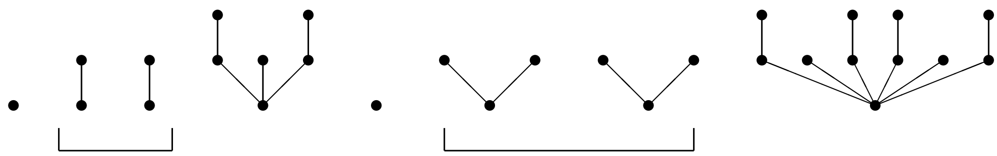


$R_0^{Com}(1)$ $R_1^{Com}(1)$ $R_0^{\mathcal{H},\vee}(1)$ $R_1^{\mathcal{H},\vee}(1)$

En el caso en que $n = 2$ se tiene que

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}(2) = R_0^{Com}(2) \times R_1^{Com}(2) \times R_2^{Com}(2) \times R_0^{\mathcal{H},\vee}(2) \times R_1^{\mathcal{H},\vee}(2) \times R_2^{\mathcal{H},\vee}(2)$$

donde



$K_0^{Com}(2)$ $K_1^{Com}(2)$ $K_2^{Com}(2)$ $K_0^{\mathcal{H},\vee}(2)$ $K_1^{\mathcal{H},\vee}(2)$ $K_2^{\mathcal{H},\vee}(2)$

Capítulo 8

Lógica semi-intuicionista

8.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es definir una nueva lógica $\mathcal{SI}$ llamada lógica semi-intuicionista de manera tal que las álgebras de semi-Heyting introducidas en [33] por Sankappanavar sean la semántica para $\mathcal{SI}$. Además, la lógica intuicionista será una extensión axiomática de $\mathcal{SI}$. Los resultados hallados en este capítulo forman parte del trabajo [13].

En este capítulo y en el siguiente usaremos el símbolo $\rightarrow$ para notar un conectivo lógico y el símbolo $\Rightarrow$ para la operación algebraica de implicación en las álgebras de semi-Heyting.

Recordemos que, para un lenguaje $\mathcal{L}$ de orden cero, un conjunto de axiomas lógicos para la lógica intuicionista $\mathcal{I}$ consiste en todas las fórmulas de la forma

(T_1) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(T_2) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(T_3) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(T_4) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$

(T_5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

(T_6) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

(T_7) $(\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$

(T_8) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

(T_9) $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$

(T_{10}) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$

(T_{11}) $(\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)) \rightarrow (\neg\alpha)$.

donde α, β, γ son fórmulas cualesquiera en $\mathcal{L}$ [31]. La única regla de inferencia es *Modus Ponens*: $\mathcal{I} \vdash \phi$ y $\mathcal{I} \vdash \phi \to \gamma$ implica $\mathcal{I} \vdash \gamma$.

Enunciaremos algunas definiciones muy usadas. Para conceptos básicos referimos al lector a trabajos conocidos como [20], [18] o [30]

Definición 8.1.1 *Una* teoría *sobre $\mathcal{I}$ es un conjunto de fórmulas. Una* demostración *en una teoría T es una sucesión finita $\phi_1, \ldots, \phi_n$ de fórmulas en las cuales cada miembro es un axioma de $\mathcal{I}$, un miembro de T o se deduce de algún miembro anterior de la sucesión usando la regla de deducción Modus Ponens. $T \vdash \phi$ significa que ϕ es demostrable en T, es decir, es el último miembro de una demostración en T.*

Definición 8.1.2 *Dada un álgebra de Heyting $\langle \mathbf{L}, \Rightarrow \rangle$, cualquier función e del conjunto de variables en $\mathbf{L}$ será llamada* $\mathbf{L}$-valuación*. Esta aplicación puede ser extendida a una valuación del conjunto de fórmulas definiendo $e(\neg\alpha) = e(\alpha) \Rightarrow 0$, $e(\alpha \wedge \beta) = e(\alpha) \wedge e(\beta)$, $e(\alpha \vee \beta) = e(\alpha) \vee e(\beta)$, $e(\alpha \to \beta) = e(\alpha) \Rightarrow e(\beta)$.*

Una fórmula α es una $\mathbf{L}$-tautología si $e(\alpha) = 1$ para cada $\mathbf{L}$-valuación e. Diremos que una fórmula α es una $\mathcal{H}$-tautología si es una $\mathbf{L}$-tautología para toda álgebra de Heyting $\mathbf{L}$.

El siguiente teorema establece una relación entre la lógica $\mathcal{I}$ y la clase de las álgebras de Heyting.

Teorema 8.1.3 [31] (Completitud) *$\mathcal{I}$ es completa, es decir, para cada fórmula ϕ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *ϕ is demostrable en $\mathcal{I}$*

(b) *Para cada álgebra de Heyting $\mathbf{L}$, ϕ es una $\mathbf{L}$-tautología.*

8.2. El cálculo proposicional semi-intuicionista

A continuación se introducirá la *lógica semi-intuicionista $\mathcal{SI}$* en términos de los siguientes axiomas. Los axiomas (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), (S_5), (S_6) y (S_7) determinarán la estructura de reticulado del álgebra de Lindenbaum correspondiente. Los axiomas (S_8) y (S_9) establecerán una relación algebraica entre la implicación y el orden. Como consecuencia de los axiomas (S_{10}), (S_{11}), (S_{12}), (S_{13}) y (S_{14}) se tendrá que el álgebra de las fórmulas equivalentes resulte ser un álgebra de semi-Heyting, donde los axiomas (S_{15}) y (S_{16}) son necesarios para la buena definición de la implicación en el álgebra de Lindenbaum. Finalmente, los últimos dos axiomas describen el comportamiento de la negación.

(S_1) $(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \to [(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge [(\beta \to (\beta \wedge \gamma)) \to [(\beta \to (\beta \wedge \gamma)) \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \gamma))]]]$

(S_2) $\alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))$

(S_3) $\beta \to (\beta \wedge (\alpha \vee \beta))$

(S_4) $(\alpha \to (\alpha \wedge \gamma))) \to [(\alpha \to (\alpha \wedge \gamma)) \wedge [(\beta \to (\beta \wedge \gamma)) \to [(\beta \to (\beta \wedge \gamma)) \wedge ((\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma))]]]$

(S_5) $(\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha)$

(S_6) $(\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \beta)$

(S_7) $(\gamma \to (\gamma \wedge \alpha)) \to [(\gamma \to (\gamma \wedge \alpha)) \wedge [(\gamma \to (\gamma \wedge \beta)) \to [(\gamma \to (\gamma \wedge \beta)) \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta)))]]]$

(S_8) $((\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)) \to (((\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)) \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge (\beta \to (\beta \wedge \gamma)))))$

(S_9) $(\alpha \to (\alpha \wedge (\beta \to (\beta \wedge \gamma)))) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge (\beta \to (\beta \wedge \gamma)))) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)))$

(S_{10}) $\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$

(S_{11}) $(\alpha \wedge (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge (\beta \to \gamma)) \wedge (\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma))))$

(S_{12}) $(\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma))) \to ((\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma))) \wedge (\alpha \wedge (\beta \to \gamma)))$

(S_{13}) $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta))$

(S_{14}) $(\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)))$

(S_{15}) $(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge ((\beta \to (\beta \wedge \alpha)) \to ((\beta \to (\beta \wedge \alpha)) \wedge ((\alpha \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma))))))$

(S_{16}) $(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge ((\beta \to (\beta \wedge \alpha)) \to ((\beta \to (\beta \wedge \alpha)) \wedge ((\gamma \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \wedge (\gamma \to \alpha))))))$

(S_{17}) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \beta)$

(S_{18}) $(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge (\neg\alpha))$.

La regla de inferencia para $\mathcal{SI}$ será $\mathcal{SI} \vdash \phi$ y $\mathcal{SI} \vdash \phi \to (\phi \wedge \gamma)$ implica que $\mathcal{SI} \vdash \gamma$. Llamaremos a esta regla *Semi-Modus Ponens* (SMP).

Los conceptos de fórmula demostrable para una teoría de la lógica $\mathcal{SI}$, **L**-valuación en un álgebra de semi-Heyting **L** y $\mathcal{SH}$-tautología son similares a las definiciones dadas en 8.1.1 y 8.1.2.

A continuación, probaremos algunas propiedades de la lógica semi-intuicionista que serán utilizadas en la sección 8.3.

Lema 8.2.1 *Las siguientes propiedades se verifican:*

(a) *Si* $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ *entonces* $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \beta)$.

(b) *Si* $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ *entonces* $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))$.

Demostración

(a) 1. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ por hipótesis.

2. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \alpha)$ por (S_5).

3. $\mathcal{SI} \vdash ((\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \alpha)) \to (((\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \alpha)) \wedge ((\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge ((\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \beta)))))$ por (S_7).

4. $\mathcal{SI} \vdash ((\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge ((\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \beta))))$ por SMP en 2 y 3.

5. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \beta)$ por SMP en 1 y 4.

(b) 1. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ por hipótesis.

2. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \beta)$ por (a).

3. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \alpha)$ por (S_5).

4. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))$ por (S_7) y SMP.

■

Notaremos $\mathcal{SI} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ cuando $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ y $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \alpha)$.

Lema 8.2.2 *En $\mathcal{SI}$ vale lo siguiente:*

(a) $\mathcal{SI} \vdash \alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \alpha)$.

(b) $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$.

Demostración

(a) 1. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \to [(\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \wedge [(\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \to [(\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \wedge \alpha)))]]]$ por (S_9).

2. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$ por (S_{10}).

3. $\mathcal{SI} \vdash [(\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \to [(\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \wedge \alpha)))]]$ por SMP en 1 y 2.

4. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \wedge \alpha)))$ por SMP en 2 y 3.

5. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \alpha) \to ((\alpha \wedge \alpha) \wedge \alpha)$ por (S_{10}).

6. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \alpha)$ por 4 y 5.

(b) 1. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \beta)$ por (S_6).

2. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha)$ por (S_5).

3. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \wedge \alpha))$ por (S_9) y SMP.

4. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \alpha) \to ((\beta \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \beta))$ por un argumento similar a 3.

5. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$ por 3 y 4.

■

Lema 8.2.3 *Si $\mathcal{SI} \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$ y $\mathcal{SI} \vdash \beta \leftrightarrow \delta$ entonces $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\gamma \to \delta)$.*

Demostración 1. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \gamma)$ y $\mathcal{SI} \vdash \gamma \to (\gamma \wedge \alpha)$ pues $\mathcal{SI} \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$.
2. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \beta))$ por (S_{15}), (S_1) y SMP.
3. Como $\mathcal{SI} \vdash \beta \leftrightarrow \delta$ entonces $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \delta)$ y $\mathcal{SI} \vdash \delta \to (\delta \wedge \beta)$.
4. $\mathcal{SI} \vdash (\gamma \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta))$ por (S_{16}), (S_1) y SMP.
5. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta))$ por (S_1) y SMP.
6. Similarmente, $\mathcal{SI} \vdash (\gamma \to \delta) \to ((\gamma \to \delta) \wedge (\alpha \to \beta))$.
7. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\gamma \to \delta)$ por 4 y 6. ■

Lema 8.2.4 *Si* $\mathcal{SI} \vdash \beta$ *entonces* $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha$.

Demostración 1. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha)$ por (S_5).
2. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \alpha) \to ((\beta \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \beta))$ por lema 8.2.2.
3. $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta))))$ por (S_8) y SMP.
4. $\mathcal{SI} \vdash \beta$ por hipótesis.
5. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta))$ SMP en 3 y 4.
6. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha$ por 1 y 5. ■

Lema 8.2.5 $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to \alpha$.

Demostración 1. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$ por el lema 8.2.2.
2. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$ por (S_{10}).
3. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$ por 2.
4. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \leftrightarrow (\alpha \to \alpha)$ por el lema 8.2.3.
5. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) \wedge (\alpha \to \alpha))$ por 4.
6. $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to \alpha$ por SMP en 2 y 5. ■

Lema 8.2.6 $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$.

Demostración 1. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$ por el lema 8.2.5.
2. $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \to (\neg\alpha \wedge (\neg\alpha \wedge ((\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \wedge \neg\alpha))))$ por el lema 8.2.4.
3. $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \to (\neg\alpha \wedge (\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$ por 2.
4. $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \to (\neg\alpha \wedge ((\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \neg\alpha)))$ por 3.
5. $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \to (\neg\alpha \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)))$ por (S_{12}) y SMP.
6. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge \neg\alpha)$ por (S_{18}).
7. $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$ por 5 y 6. ■

Lema 8.2.7 *Si* $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \alpha)$ *entonces* $\mathcal{SI} \vdash \neg\alpha \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Demostración 1. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\neg\beta \wedge \neg\alpha))$ por (S_{17}).
2. $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \beta)$ por (S_{10}).
3. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \beta) \wedge (\neg\beta \wedge \neg\alpha \wedge \beta))$ por el lema 8.2.1.
4. Utilizando un argumento similar a 3,
$\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \neg\beta \wedge \alpha) \to ((\beta \wedge \neg\beta \wedge \alpha) \wedge (\neg\alpha \wedge \neg\beta \wedge \alpha))$.
5. $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \alpha)$ por hipótesis.
6. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \alpha) \to ((\beta \wedge \alpha) \wedge \beta)$ por (S_5).
7. $\mathcal{SI} \vdash \beta \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$ por 5 y 6.

8. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \neg\alpha) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)$ por el lema 8.2.1.
9. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)$ por 8.
10. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \to (\beta \wedge (\beta \wedge \neg\alpha))) \leftrightarrow (\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)$ por (S_{13}) y (S_{14}).
11. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \to (\beta \wedge (\beta \wedge \neg\alpha))) \leftrightarrow (\beta \wedge \neg\alpha)$ por (S_1).
12. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge ((\beta \wedge \alpha) \to (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha))) \leftrightarrow (\beta \to (\beta \wedge (\beta \wedge \neg\alpha)))$ por el lema 8.2.3 en 7 y 8 y el lema 8.2.1.
13. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge ((\beta \wedge \alpha) \to (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha))) \leftrightarrow (\beta \wedge \neg\alpha)$ por (S_1).
14. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))) \leftrightarrow (\beta \wedge \neg\alpha)$ por (S_{13}), (S_{14}) y (S_1).
15. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \leftrightarrow \neg\alpha$ por el lema 8.2.6.
16. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \neg\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)$ por el lema 8.2.1.
17. $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow ((\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge (\beta \to (\beta \wedge \neg\beta)))$ por los lemas 8.2.1 y 8.2.6 y (S_1).
18. $\mathcal{SI} \vdash ((\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge (\beta \to (\beta \wedge \neg\beta))) \leftrightarrow [(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge [(\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))) \to (\beta \wedge \neg\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)))]]$ por (S_{13}) y (S_{14}).
19. $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow [(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge [(\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))) \to (\beta \wedge \neg\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)))]]$ por (S_1).
20. $\mathcal{SI} \vdash [(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge [(\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))) \to (\beta \wedge \neg\beta \wedge (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)))]] \leftrightarrow [(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge [(\beta \wedge \neg\alpha) \to (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)]]$ por 14, 16 y los lemas 8.2.3 y 8.2.1.
21. $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow [(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge [(\beta \wedge \neg\alpha) \to (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)]]$ por (S_1).
22. $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow [(\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)]]$ por el lema 8.2.3 en 8.
23. $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha))$ por (S_{17}).
24. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to ((\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha))$ por el lema 8.2.1.
25. Similarmente, $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \beta \wedge \neg\beta) \to ((\neg\alpha \wedge \beta \wedge \neg\beta) \wedge (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha))$.
26. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)$ por 24 y 25.
27. $\mathcal{SI} \vdash (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)$ por el lema 8.2.5.
28. $\mathcal{SI} \vdash [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)] \leftrightarrow [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)]$ por el lema 8.2.3.
29. En particular, $\mathcal{SI} \vdash [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)] \to ([(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)] \wedge [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)])$.
30. $\mathcal{SI} \vdash [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha)]$ por el lema 8.2.5.
31. $\mathcal{SI} \vdash [(\beta \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) \to (\neg\beta \wedge \beta \wedge \neg\alpha)]$ por SMP en 29 y 30.
32. $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$ por el lema 8.2.4 y (S_1) en 22.
33. $\mathcal{SI} \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \neg\alpha$ por el lema 8.2.6 y (S_1). ■

8.3. Álgebras de semi-Heyting: sanidad y completitud

En esta sección probaremos que las álgebras de semi-Heyting son la semántica para la lógica semi-intuicionista.

Vamos a construir el álgebra de Lindenbaum asociada a esta lógica.

Llamaremos $Form$ el conjunto de todas las fórmulas de $\mathcal{SI}$. Definimos una relación binaria sobre $Form$ como:

$$\alpha \preceq \beta \text{ si y sólo si } \mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta).$$

Lema 8.3.1 *La relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva.*

Demostración Como $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$ (axioma (S_{10})), $\alpha \preceq \alpha$ para toda fórmula α. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Form$ tal que $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \gamma$. Entonces $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ y $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \gamma)$. Usando el axioma (S_1) y la regla de deducción SMP se obtiene que $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \gamma)$. Luego $\alpha \preceq \gamma$. ■

Si definimos sobre $Form$ la relación: $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \alpha$, entonces el siguiente lema resulta inmediato.

Lema 8.3.2 *$\equiv$ es una relación de equivalencia.*

Sea $[\![\alpha]\!]$ la clase de equivalencia de α en $Form/{\equiv}$. Si definimos $[\![\alpha]\!] \preceq [\![\beta]\!]$ si y sólo si $\alpha \preceq \beta$, entonces obtenemos el siguiente lema:

Lema 8.3.3 *$\langle Form/{\equiv}, \preceq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Lema 8.3.4 *$\langle Form/{\equiv}, \preceq \rangle$ es un reticulado.*

Demostración Como $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))$, por el axioma (S_2), $[\![\alpha]\!] \preceq [\![\alpha \vee \beta]\!]$. En forma similar, usando el axioma (S_3), se obtiene que $[\![\beta]\!] \preceq [\![\alpha \vee \beta]\!]$. Consideremos $\gamma \in Form$ tal que $[\![\alpha]\!] \preceq [\![\gamma]\!]$ y $[\![\beta]\!] \preceq [\![\gamma]\!]$. Entonces $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \gamma)$ y $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge \gamma)$. Por (S_4) y SMP, $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma)$ y, en consecuencia, $[\![\alpha \vee \beta]\!] \preceq [\![\gamma]\!]$. Luego $[\![\alpha]\!] \vee [\![\beta]\!] = [\![\alpha \vee \beta]\!]$. En forma similar se prueba que $[\![\alpha]\!] \wedge [\![\beta]\!] = [\![\alpha \wedge \beta]\!]$. Luego $\langle Form/\simeq, \preceq \rangle$ es un reticulado. ■

Lema 8.3.5 *Sea α una fórmula. Entonces $\langle Form/\equiv, \wedge, \vee, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!], [\![\alpha \to \alpha]\!] \rangle$ es un reticulado acotado.*

Demostración Por el lema 8.3.4 basta ver que $[\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]$ es el primer elemento y que $[\![\alpha \to \alpha]\!]$ es el último. Sea $\beta \in Form$. Por el lema 8.2.5 $\mathcal{SI} \vdash \alpha \to \alpha$. Por el lema 8.2.4, $\mathcal{SI} \vdash \beta \to (\beta \wedge (\alpha \to \alpha))$. Entonces $[\![\beta]\!] \preceq [\![\alpha \to \alpha]\!]$. La condición $[\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!] \preceq [\![\beta]\!]$ es inmediata del axioma (S_{17}). ■

Ahora definiremos una implicación sobre $Form/{\equiv}$ como: $[\![\alpha]\!] \Rightarrow [\![\beta]\!] = [\![\alpha \to \beta]\!]$.

Teorema 8.3.6 *$\langle Form/{\equiv}, \wedge, \vee, \Rightarrow, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!], [\![\alpha \to \alpha]\!] \rangle$ es una álgebra de semi-Heyting.*

Demostración Del lema 8.2.3, $\Rightarrow$ está bien definida. Veamos que se satisfacen los axiomas de semi-Heyting. Por definición $[\![\alpha]\!] \Rightarrow [\![\alpha]\!] = [\![\alpha \to \alpha]\!]$. Por los axiomas (S_{13}) y (S_{14}), $[\![\alpha]\!] \wedge ([\![\alpha]\!] \Rightarrow [\![\beta]\!]) = [\![\alpha]\!] \wedge [\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha \wedge (\alpha \to \beta)]\!] = [\![\alpha \wedge \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \wedge [\![\beta]\!]$. Utilizando los axiomas (S_{11}) y (S_{12}), $[\![\alpha]\!] \wedge ([\![\beta]\!] \Rightarrow [\![\gamma]\!]) = [\![\alpha]\!] \wedge [\![\beta \to \gamma]\!] = [\![\alpha \wedge (\beta \to \gamma)]\!] = [\![\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma))]\!] = [\![\alpha]\!] \wedge [\![(\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma)]\!] = [\![\alpha]\!] \wedge ([\![\alpha \wedge \beta]\!] \Rightarrow [\![\alpha \wedge \gamma]\!]) = [\![\alpha]\!] \wedge (([\![\alpha]\!] \wedge [\![\beta]\!]) \Rightarrow ([\![\alpha]\!] \wedge [\![\gamma]\!]))$. ■

Nuestro próximo objetivo es probar que la lógica semi-intuicionista $\mathcal{SI}$ es sana y completa respecto de la clase de las álgebras de semi-Heyting.

Primero probaremos algunos lemas que se utilizarán más adelante.

Lema 8.3.7 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting. Para* $a, b, c \in L$, $a \wedge b \leq c$ *si y sólo si* $a \leq b \Rightarrow (b \wedge c)$.

Demostración Sea $a, b, c \in L$. Supongamos que $a \wedge b \leq c$. Entonces $a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) = a \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b \wedge c)] = a \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b)] = a \wedge 1 = a$.

Para la recíproca supongamos que $a \leq b \Rightarrow (b \wedge c)$. Luego $a \wedge b \wedge c = a \wedge b \wedge b \wedge c = a \wedge b \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) = a \wedge b$. Como consecuencia $a \wedge b \leq c$. ■

Observemos que en un álgebra de semi-Heyting el orden no está determinado por la implicación $\Rightarrow$.

El siguiente corolario resulta inmediato.

Corolario 8.3.8 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting. Para* $a, b \in L$, $a \leq b$ *si y sólo si* $1 = a \Rightarrow (a \wedge b)$.

Vamos a trabajar en la sanidad. Primero vamos a probar que si ϕ es uno de los axiomas (S_1), (S_4), (S_7), (S_{15}), (S_{16}), (S_8) o (S_9) entonces ϕ es una $\mathbf{L}$-tautología para cada álgebra de semi-Heyting $\mathbf{L}$.

Lema 8.3.9 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting.*

$\mathbf{L} \models x \Rightarrow (x \wedge y) \leq (y \Rightarrow (y \wedge z)) \Rightarrow [(y \Rightarrow (y \wedge z)) \wedge (x \Rightarrow (x \wedge z))]$.

Demostración Sean $a, b, c \in L$. Entonces $(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge c)) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b \wedge c)) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge ((a \wedge b \wedge c) \Rightarrow (a \wedge b \wedge c)) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c))$. El resultado se sigue del lema 8.3.7. ■

Lema 8.3.10 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting.*

$\mathbf{L} \models (x \Rightarrow (x \wedge z)) \Rightarrow [(x \Rightarrow (x \wedge z)) \wedge [(y \Rightarrow (y \wedge z)) \Rightarrow [(y \Rightarrow (y \wedge z)) \wedge ((x \vee y) \Rightarrow ((x \vee y) \wedge z))]]] \approx 1$.

Demostración Sean $a, b, c \in L$. Entonces $(a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge [(a \vee b) \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c)] = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge [[(a \vee b) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge c))] \Rightarrow [(a \vee b) \wedge c \wedge (a \Rightarrow (a \wedge c))]] = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge [[(a \wedge c) \vee (b \wedge (a \Rightarrow (a \wedge c)))] \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c)]$. Entonces $(a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge [(a \vee b) \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c)] = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge [[(a \wedge c) \vee (b \wedge (a \Rightarrow (a \wedge c)))] \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c)] = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge [((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c)] = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge 1 = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c))$. Luego $(a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) \leq (a \vee b) \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c)$. Del lema 8.3.7, $a \Rightarrow (a \wedge c) \leq (b \Rightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow [(b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge ((a \vee b) \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c))]$, y por el corolario 8.3.8, $1 = (a \Rightarrow (a \wedge c)) \Rightarrow [(a \Rightarrow (a \wedge c)) \wedge [(b \Rightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow [(b \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge ((a \vee b) \Rightarrow ((a \vee b) \wedge c))]]]$. ■

Lema 8.3.11 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting.*

$\mathbf{L} \models (z \Rightarrow (z \wedge x)) \Rightarrow [(z \Rightarrow (z \wedge x)) \wedge [(z \Rightarrow (z \wedge y)) \Rightarrow [(z \Rightarrow (z \wedge y)) \wedge (z \Rightarrow (z \wedge (x \wedge y)))]]] \approx 1$.

Demostración Sean $a, b, c \in L$. Entonces $(c \Rightarrow (c\wedge a))\wedge(c \Rightarrow (c\wedge(a\wedge b)))\wedge(c \Rightarrow (c\wedge b)) = (c \Rightarrow (c \wedge a)) \wedge ((c \wedge a) \Rightarrow ((c \wedge a) \wedge b)) \wedge (c \Rightarrow (c \wedge b)) = (c \Rightarrow (c \wedge a)) \wedge ((c \wedge a \wedge b) \Rightarrow (c \wedge a \wedge b)) \wedge (c \Rightarrow (c \wedge b)) = (c \Rightarrow (c \wedge a)) \wedge (c \Rightarrow (c \wedge b))$. Entonces $(c \Rightarrow (c \wedge a)) \wedge (c \Rightarrow (c \wedge b)) \leq c \Rightarrow (c \wedge (a \wedge b))$. El resultado es consecuencia del lema 8.3.7. ■

Lema 8.3.12 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting.*

Sean $a, b, c \in L$. *Entonces* $\mathbf{L} \models (x \Rightarrow (x \wedge y)) \Rightarrow [(x \Rightarrow (x \wedge y)) \wedge [(y \Rightarrow (y \wedge x)) \Rightarrow [(y \Rightarrow (y \wedge x)) \wedge [(x \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z))]]]] \approx 1$.

Demostración $(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow (c \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \wedge ((b \wedge a) \Rightarrow (c \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) = (a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))\wedge[(a\wedge(a \Rightarrow (a\wedge b))) \Rightarrow (c\wedge(a \Rightarrow (a\wedge b)))]\wedge[(b\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))) \Rightarrow (c\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a)))] = (a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))\wedge(a \Rightarrow c)\wedge[(a\wedge b) \Rightarrow (c\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a)))] = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \Rightarrow (c \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a))) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a))) \Rightarrow (c \wedge (b \Rightarrow (b\wedge a)))] = (a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))\wedge(a \Rightarrow c)\wedge[(a\wedge(a \Rightarrow (a\wedge b)))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))) \Rightarrow (c \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)))] = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge (a \Rightarrow c) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (a \Rightarrow c)$. Luego $(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge [(b \Rightarrow (b \wedge a)) \Rightarrow [(b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge [(a \Rightarrow c) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c))]]] = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge 1 = (a \Rightarrow (a \wedge b))$. El resultado es consecuencia del lema 8.3.7. ■

Lema 8.3.13 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting.*

$\mathbf{L} \models (x \Rightarrow (x \wedge y)) \Rightarrow [(x \Rightarrow (x \wedge y)) \wedge [(y \Rightarrow (y \wedge x)) \Rightarrow [(y \Rightarrow (y \wedge x)) \wedge ((z \Rightarrow y) \Rightarrow ((z \Rightarrow y) \wedge (z \Rightarrow x)))]]] \approx 1$.

Demostración Sean $a, b, c \in L$. Entonces $(a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))\wedge(c \Rightarrow b)\wedge(c \Rightarrow a) = [[c\wedge(a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))] \Rightarrow [a\wedge(a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b\wedge a))]]\wedge(a \Rightarrow (a\wedge b))\wedge(b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (c \Rightarrow b) = [[c \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a))] \Rightarrow (a \wedge b)] \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (c \Rightarrow b) = [[c \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a))] \Rightarrow [b \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a))]] \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (c \Rightarrow b) = (c \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a)) \wedge (c \Rightarrow b) = (c \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (b \wedge a))$. La identidad se satisface por el corolario 8.3.8. ■

Lema 8.3.14 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de semi-Heyting.*

(a) $\mathbf{L} \models ((x \wedge y) \Rightarrow ((x \wedge y) \wedge z)) \Rightarrow (((x \wedge y) \Rightarrow ((x \wedge y) \wedge z)) \wedge (x \Rightarrow (x \wedge (y \Rightarrow (y \wedge z))))) \approx 1$

(b) $\mathbf{L} \models (x \Rightarrow (x \wedge (y \Rightarrow (y \wedge z)))) \Rightarrow ((x \Rightarrow (x \wedge (y \Rightarrow (y \wedge z)))) \wedge ((x \wedge y) \Rightarrow ((x \wedge y) \wedge z))) \approx 1$

Demostración

(a) Por el corolario 8.3.8 debemos probar que $(a \wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c) \leq a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b\wedge c)))$. Luego $a\wedge[(a\wedge b) \Rightarrow ((a\wedge b)\wedge c)] = a\wedge[b \Rightarrow (b\wedge c)]$ y $a\wedge(b \Rightarrow (b\wedge c))\wedge((a\wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c)) = a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c))$. Consecuentemente $((a \wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c)) \wedge [a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)))] = ((a \wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c)) \wedge 1 = ((a \wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c))$.

(b) Por el corolario 8.3.8 debemos demostrar que $a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c))) \leq (a \wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$. Entonces $a \wedge b \wedge [a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)))] = b \wedge a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)) = a \wedge b \wedge c$ y, además, $a \wedge b \wedge c \wedge [a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)))] = a \wedge b \wedge c \wedge c = a \wedge b \wedge c$. Entonces $[a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)))] \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow ((a \wedge b) \wedge c)] = [a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)))] \wedge 1 = a \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow (b \wedge c)))$.

■

Los conceptos de **L**-*valuación,* **L**-*tautología y* $\mathcal{SH}$-*tautología* para las álgebras de semi-Heyting son análogos a los definidos en 8.1.2.

Teorema 8.3.15 (Sanidad) *La lógica $\mathcal{SI}$ es sana respecto de las* **L**-*tautologías: si ϕ es demostrable en $\mathcal{SI}$, entonces ϕ es una* **L**-*tautología para cada álgebra de semi-Heyting* **L**.

Demostración Supongamos que ϕ es un axioma de la lógica $\mathcal{SI}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{SH}$. Si ϕ es uno de los axiomas (S_1), (S_4), (S_7), (S_{15}), (S_{16}), (S_8) ó (S_9) resulta inmediato de los lemas 8.3.7, 8.3.9, 8.3.10, 8.3.11, 8.3.12, 8.3.13 y 8.3.14. Sea e una **L**-valuación. Luego $e(\alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))) = e(\alpha) \Rightarrow e(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) = e(\alpha) \Rightarrow (e(\alpha) \wedge (e(\alpha) \vee e(\beta))) = e(\alpha) \Rightarrow e(\alpha) = 1$. Análogamente $e(\beta \to (\beta \wedge (\beta \vee \alpha))) = 1$. Además $e((\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha)) = e(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow e(\alpha \wedge \beta \wedge \alpha) = (e(\alpha) \wedge e(\beta)) \Rightarrow (e(\alpha) \wedge e(\beta)) = 1$. En forma similar $e((\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \beta)) = 1$. Por otro lado $e(\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)) = e(\alpha) \Rightarrow e(\alpha) = 1$. Entonces $e[(\alpha \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \to ((\alpha \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \wedge (\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \gamma))))] = (e(\alpha) \wedge (e(\beta) \Rightarrow e(\gamma))) \Rightarrow ((e(\alpha) \wedge (e(\beta) \Rightarrow e(\gamma))) \wedge (e(\alpha) \wedge ((e(\alpha) \wedge e(\beta)) \Rightarrow (e(\alpha) \wedge e(\gamma))))) = (e(\alpha) \wedge (e(\beta) \Rightarrow e(\gamma))) \Rightarrow ((e(\alpha) \wedge (e(\beta) \Rightarrow e(\gamma))) \wedge (e(\alpha) \wedge (e(\beta) \Rightarrow e(\gamma)))) = 1$. Análogamente se prueba que $e[(\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \gamma))) \to ((\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \gamma))) \wedge (\alpha \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)))] = 1$. Además $e[(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)) \to ((\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta))] = (e(\alpha) \wedge (e(\alpha) \Rightarrow e(\beta))) \Rightarrow ((e(\alpha) \wedge (e(\alpha) \Rightarrow e(\beta))) \wedge (e(\alpha) \wedge e(\beta)))] = (e(\alpha) \wedge e(\beta)) \Rightarrow (e(\alpha) \wedge e(\beta) \wedge e(\alpha) \wedge e(\beta)) = 1$. Análogamente se prueba que $e[(\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)))] = 1$. Por otro lado $e[(\alpha \wedge \neg\alpha) \to ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \beta)] = (e(\alpha) \wedge e(\neg\alpha)) \Rightarrow ((e(\alpha) \wedge e(\neg\alpha)) \wedge e(\beta)) = (e(\alpha) \wedge (e(\alpha) \Rightarrow 0)) \Rightarrow (e(\alpha) \wedge (e(\alpha) \Rightarrow 0) \wedge e(\beta)) = (e(\alpha) \wedge 0) \Rightarrow (e(\alpha) \wedge 0 \wedge e(\beta)) = 0 \Rightarrow 0 = 1$ y, por otro lado, $e[(\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)) \to ((\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)) \wedge (\neg\alpha))] = ((e(\alpha)) \Rightarrow 0) \Rightarrow (((e(\alpha)) \Rightarrow 0) \wedge ((e(\alpha)) \Rightarrow 0)) = 1$. Como consecuencia de lo anterior queda probado que todo axioma de la lógica $\mathcal{SI}$ es una $\mathcal{SH}$-tautología.

Supongamos que ϕ y $\phi \Rightarrow (\phi \wedge \alpha)$ son $\mathcal{SH}$-tautologías. Entonces $e(\phi) = e(\phi \Rightarrow (\phi \wedge \alpha)) = 1$. Luego, se deduce que, $e(\alpha) \geq e(\phi) \wedge e(\alpha) = e(\phi) \wedge (e(\phi) \Rightarrow (e(\phi) \wedge e(\alpha))) = e(\phi) \wedge e(\phi \Rightarrow (\phi \wedge \alpha)) = 1 \wedge 1 = 1$. Por lo tanto $e(\alpha) = 1$. Entonces α es una $\mathcal{SH}$-tautología.
■

Teorema 8.3.16 (Completitud) *$\mathcal{SI}$ es completa: para cada fórmula ϕ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *ϕ es demostrable en $\mathcal{SI}$*

(b) *para cada álgebra de semi-Heyting* **L**, *ϕ es una* **L**-*tautología.*

Demostración (a) implica (b) resulta inmediata del teorema 8.3.15. Supongamos que ϕ es una **L**-tautología para toda álgebra de semi-Heyting **L**. Consideremos el álgebra

$\langle Form/\equiv, \wedge, \vee, \Rightarrow, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!], [\![\alpha \to \alpha]\!]\rangle$. Por el teorema 8.3.6, $\langle Form/\equiv, \wedge, \vee, \Rightarrow, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!], [\![\alpha \to \alpha]\!]\rangle$ es un álgebra de semi-Heyting. Para toda variable proposicional p definamos la valuación e de la siguiente manera: $e(p) = [\![p]\!]$ y la extendemos de manera natural al conjunto de todas las fórmulas. Por hipótesis, $e(\phi) = [\![\alpha \to \alpha]\!]$. Entonces $[\![\phi]\!] = [\![\alpha \to \alpha]\!]$ y, en consecuencia, $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \wedge \phi)$. Por los lemas 8.2.5 y 8.2.4, $\mathcal{SI} \vdash \phi$. Luego ϕ es demostrable en la lógica $\mathcal{SI}$. ■

El siguiente resultado es una variante del *teorema de la deducción.*

Teorema 8.3.17 (teorema de la deducción) *Sea T una teoría y sean ϕ, ψ fórmulas. $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ si y sólo si existe un número natural n tal que $T \vdash \phi^n \to (\phi^n \wedge \psi)$ (donde ϕ^n es $\phi \wedge \ldots \wedge \phi$, n factores). Consecuentemente, como $\mathcal{SI} \vdash \phi \wedge \phi \leftrightarrow \phi$, entonces $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ si y sólo si $T \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi)$.*

Para poder demostrar el teorema anterior necesitaremos los siguientes dos lemas.

Lema 8.3.18 *Si $\mathcal{SH} \vdash \phi \to (\phi \wedge \gamma)$ y $\mathcal{SH} \vdash \beta \to (\beta \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge \psi)))$ entonces $\mathcal{SH} \vdash (\phi \wedge \beta) \to ((\phi \wedge \beta) \wedge \psi)$.*

Demostración

1. $\mathcal{SI} \vdash \phi \to (\phi \wedge \gamma)$ por hipótesis.
2. $\mathcal{SI} \vdash (\phi \wedge \phi') \to ((\phi \wedge \phi') \wedge \gamma)$ por el lema 8.2.1.
3. $\mathcal{SI} \vdash \phi' \to (\phi' \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge \psi)))$ por hipótesis.
4. $\mathcal{SI} \vdash (\gamma \wedge \phi') \to ((\gamma \wedge \phi') \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge \psi)))$ por el lema 8.2.1.
5. $\mathcal{SI} \vdash (\phi \wedge \phi') \to ((\phi \wedge \phi') \wedge \gamma \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge \psi)))$ por transitividad en 2 y 4.
6. $\mathcal{SI} \vdash (\gamma \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge \psi))) \to ((\gamma \wedge (\gamma \to (\gamma \wedge \psi))) \wedge (\gamma \wedge \psi))$ por (S_{13}).
7. $\mathcal{SI} \vdash (\phi \wedge \phi') \to ((\phi \wedge \phi') \wedge (\gamma \wedge \psi))$ por transitividad en 5 y 6.
8. $\mathcal{SI} \vdash (\gamma \wedge \psi) \to (\gamma \wedge \psi \wedge \psi)$ por el axioma (S_6).
9. $\mathcal{SI} \vdash (\phi \wedge \phi') \to ((\phi \wedge \phi') \wedge \psi)$ por transitividad en 7 y 8.

■

Lema 8.3.19 *Sea T una teoría sobre $\mathcal{SI}$. Sean ϕ, ψ fórmulas. Si $T \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi)$ entonces $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$.*

Demostración Claramente $T \cup \{\phi\} \vdash \phi$. Como $T \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi)$ por hipótesis, entonces $T \cup \{\phi\} \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi)$. Por SMP, $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$. ■

Demostración (Teorema de la deducción) Supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T \vdash \phi^n \to (\phi^n \wedge \psi)$. Si $n = 1$ entonces $T \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi)$. Por el lema 8.3.19, $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Ahora tomemos $n \in \omega$ con $n > 1$. Luego $T \vdash \phi^n \to (\phi^n \wedge \psi)$ y, en consecuencia,

$T \vdash \phi \wedge \phi^{n-1} \to (\phi \wedge \phi^{n-1} \wedge \psi)$. Por (S_8) y SMP, $T \vdash \phi \to (\phi \wedge (\phi^{n-1} \to (\phi^{n-1} \wedge \psi)))$ y, por lo tanto, $T \cup \{\phi\} \vdash \phi \to (\phi \wedge (\phi^{n-1} \to (\phi^{n-1} \wedge \psi)))$. Como $T \cup \{\phi\} \vdash \phi$, por SMP, $T \cup \{\phi\} \vdash \phi^{n-1} \to (\phi^{n-1} \wedge \psi)$. Aplicando SMP $n-1$ veces, $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Supongamos ahora que $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Sea $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ la demostración de ψ en la teoría $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Haremos inducción sobre k. Si $k = 1$ entonces ψ es un axioma de la lógica $\mathcal{SH}$, $\psi \in T$ ó $\psi = \phi$. Como $T \cup \{\phi\} \vdash \phi$ entonces $T \cup \{\phi\} \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi)$ (por lema 8.2.4). Supongamos que $k > 1$. Entonces γ_k proviene de aplicar Semi-Modus Ponens a miembros previos $\gamma_i, \gamma_i \to (\gamma_i \wedge \gamma_k)$. Por hipótesis inductiva, existen $n, m \in \omega$ tales que $T \vdash \phi^n \to (\phi^n \wedge \gamma_i)$ y $T \vdash \phi^m \to (\phi^m \wedge (\gamma_i \to (\gamma_i \wedge \gamma_k)))$. Por el lema 8.3.18, $T \vdash (\phi^n \wedge \phi^m) \to ((\phi^n \wedge \phi^m) \wedge \gamma_k)$. Por lo tanto $T \vdash \phi^{n+m} \to (\phi^{n+m} \wedge \gamma_k)$. ∎

Definición 8.3.20 *Una teoría T se dice contradictoria (o inconsistente) si $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$ para alguna fórmula α. En otro caso T se dice consistente.*

Lema 8.3.21 *T es inconsistente si y sólo si $T \vdash \phi$ para cada fórmula ϕ.*

Demostración Si T es inconsistente, $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$ para alguna fórmula α. Sea ϕ una fórmula. Por el axioma (S_{17}), $T \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \phi)$. Por SMP, $T \vdash \phi$. La recíproca es inmediata pues si $T \vdash \phi$ para cada ϕ, en particular, $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$. ∎

Definición 8.3.22 *Sea T una teoría fija sobre $\mathcal{SI}$. Para cada fórmula ϕ, sea $[\phi]_T$ el conjunto de todas las fórmulas ψ tal que $T \vdash \phi \leftrightarrow \psi$ (fórmulas T-demostrables equivalentes a ϕ). Sea L_T el conjunto de todas las clases $[\phi]_T$. Definimos sobre L_T: $0 := [\alpha \wedge \neg\alpha]_T$, $1 := [\alpha \to \alpha]_T$, $[\phi]_T \wedge [\phi']_T = [\phi \wedge \phi']_T$, $[\phi]_T \vee [\phi']_T = [\phi \vee \phi']_T$ y $[\phi]_T \Rightarrow [\phi']_T = [\phi \to \phi']_T$. Este álgebra será notada por $\mathbf{L}_T$.*

Como en el teorema 8.3.6 puede ser demostrado que:

Lema 8.3.23 *$\mathbf{L}_T$ es una álgebra de semi-Heyting.*

De acuerdo a [21, Def. 2.4.1] adoptaremos la siguiente definición de completitud.

Definición 8.3.24 *Una teoría T es completa si para cada par de fórmulas ϕ, ψ,*

$$T \vdash (\phi \vee (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi) \quad \text{ó} \quad T \vdash \psi \to (\phi \wedge \psi).$$

Lema 8.3.25 *Una teoría T es completa si y sólo si el álgebra $\mathbf{L}_T$ es una cadena de semi-Heyting.*

Demostración Supongamos que T es completa. Sean $[\phi]_T, [\psi]_T \in L_T$. Por hipótesis, $T \vdash (\phi \vee (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi)$ ó $T \vdash \psi \to (\phi \wedge \psi)$. Entonces $[(\phi \vee (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi)]_T = 1$ ó $[\psi \to (\phi \wedge \psi)]_T = 1$. Luego $\mathbf{L}_T \models ((x \vee (x \to y)) \to (x \to y)) \vee (y \to (x \wedge y)) \approx 1$. Entonces, por el teorema 2.4.3 $\mathbf{L}_T$ es una cadena de semi-Heyting. La recíproca es inmediata pues $\mathbf{L}_T \models ((x \vee (x \to y)) \to (x \to y)) \vee (y \to (x \wedge y)) \approx 1$ siempre que $\mathbf{L}_T$ es una cadena de semi-Heyting. ∎

Definición 8.3.26 (a) *Una* axiomática *dada por una fórmula* $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ *es el conjunto de todas las fórmulas* $\Phi(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ *resultantes de sustituir* ϕ_i *por* p_i $(i = 1, \ldots, n)$ *en* $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$.

(b) *Un* cálculo lógico $\mathcal{C}$ *es una extensión axiomática de* $\mathcal{SI}$ *si resulta de* $\mathcal{SI}$ *agregando alguna axiomática (finita o infinita) a los axiomas, siendo Semi-Modus Ponens la única regla de inferencia.*

(c) *Sea* $\mathcal{C}$ *una* extensión axiomática *de* $\mathcal{SI}$ *y sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de semi-Heyting. Diremos que* $\mathbf{L}$ *es una* $\mathcal{C}$-álgebra *si todos los axiomas de* $\mathcal{C}$ *son* $\mathbf{L}$*-tautologías.*

Observemos que el álgebra $\mathbf{L}_C$ de clases de fórmulas $\mathcal{C}$-equivalentes es en si misma una $\mathcal{C}$-álgebra.

Si $\Phi(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ resulta de la axiomática $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ y $e(p_i) = [\psi_i]_C$ entonces $e(\Phi(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = [\Phi(\phi'_1, \ldots, \phi'_n)]_C$, donde ϕ'_i resulta de ϕ_i substituyendo ψ_i por p_i. Luego $\Phi(\phi'_1, \ldots, \phi'_n)$ también resulta de la axiomática y entonces $[\Phi(\phi'_1, \ldots, \phi'_n)]_C = [1]_C$.

Entonces, como en la demostración del teorema 8.3.16 podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 8.3.27 (Completitud) *Sea* $\mathcal{C}$ *una extensión axiomática de* $\mathcal{SI}$ *y sea* ϕ *una fórmula. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{C}$ *demuestra* ϕ

(b) ϕ *es una* $\mathbf{L}$*-tautología para cada* $\mathcal{C}$*-álgebra* $\mathbf{L}$.

8.4. Relación entre las lógicas $\mathcal{I}$ y $\mathcal{SI}$

En esta sección probaremos que la lógica intuicionista es una extensión axiomática de la lógica semi-intuicionista.

Lema 8.4.1 *La lógica* $\mathcal{I}$ *satisface las siguientes propiedades:*

(a) $\mathcal{I} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta))$.

(b) *Si* $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \beta$ *entonces* $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)$.

(c) $\mathcal{I} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$.

Demostración

(a) 1. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta)))$ por (T_7).

2. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \alpha) \to \alpha$ por (T_5).

3. $\mathcal{I} \vdash (((\alpha \wedge \alpha) \to \alpha) \wedge \alpha) \to \alpha$ por (T_5).

4. $\mathcal{I} \vdash [(((\alpha \wedge \alpha) \to \alpha) \wedge \alpha) \to \alpha] \to [((\alpha \wedge \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)]$ por (T_9).

5. $\mathcal{I} \vdash ((\alpha \wedge \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ por MP en 3 y 4.

6. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \alpha$ por MP en 2 y 5.

7. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta))$ por MP en 1 y 6.

(b) 1. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to \alpha$ por (T_5).
2. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \beta$ por hipótesis.
3. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to \beta$ por (T_1) y MP.
4. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to \gamma$ por (T_6).
5. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)$ por (T_7) y MP.

(c) 1. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \alpha))$ por (a).
2. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \alpha$.
3. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$ por MP.

■

El siguiente lema establece que la lógica $\mathcal{I}$ demuestra todos los axiomas de la lógica $\mathcal{SI}$.

Lema 8.4.2 *Si ϕ es un axioma de la lógica $\mathcal{SI}$ entonces $\mathcal{I} \vdash \phi$.*

Demostración Sea ϕ un axioma de la lógica $\mathcal{SI}$. Luego ϕ es demostrable en la lógica $\mathcal{SI}$. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra de Heyting. En particular $\mathbf{L}$ es un álgebra de semi-Heyting. Por el teorema 8.3.16, ϕ es una $\mathbf{L}$-tautología. Luego, ϕ es demostrable en la lógica $\mathcal{I}$ [31]. ■

En el lema siguiente probaremos que Modus Ponens coincide con semi-Modus Ponens en la lógica $\mathcal{I}$.

Lema 8.4.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Si $\mathcal{I} \vdash \alpha$ e $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \beta$ entonces $\mathcal{I} \vdash \beta$*

(b) *Si $\mathcal{I} \vdash \alpha$ e $\mathcal{I} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ entonces $\mathcal{I} \vdash \beta$.*

Demostración

(a) $\Rightarrow$ (b) 1. $\mathcal{I} \vdash \alpha$ por hipótesis.
2. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ por hipótesis.
3. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta$ por (T_6).
4. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \beta$ por (T_1) y MP.
5. $\mathcal{I} \vdash \beta$ por (a).

(b) $\Rightarrow$ (a) 1. $\mathcal{I} \vdash \alpha$ por hipótesis.
2. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to \beta$ por hipótesis.
3. $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \alpha) \to (\alpha \wedge \beta)$ por el lema 8.4.1.
4. $\mathcal{I} \vdash \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$ por el lema 8.4.1.
5. $\mathcal{I} \vdash \beta$ por (b).

■

De los lemas 8.4.2 y 8.4.3 podemos determinar que la lógica $\mathcal{I}$ es una extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$. El siguiente lema nos muestra que $\mathcal{I}$ no coincide con $\mathcal{SI}$.

Lema 8.4.4 *Existe una fórmula ϕ tal que $\mathcal{I} \vdash \phi$ y $\mathcal{SI} \not\vdash \phi$.*

Demostración Consideremos $\phi = (\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Claramente $\mathcal{I} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Consideremos ahora la cadena $\mathbf{L}$ de semi-Heyting con dos elementos tal que $0 \to 1 \approx 0$ en $\mathbf{L}$. Consideremos una valuación $e : Form \to \mathbf{L}$. Supongamos que $\mathcal{SI} \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Por el teorema 8.3.16, ϕ es una $\mathbf{L}$-tautología. Luego $e(\phi) = 1$. Se obtiene entonces que $1 = e(\phi) = e((\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)) = e(\alpha \wedge \neg\alpha) \Rightarrow e(\alpha \to \alpha) = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (contradicción). Luego $\mathcal{SI} \not\vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. ■

Capítulo 9

Implicaciones de semi-Heyting definibles por términos de Heyting y sus lógicas asociadas

9.1. Introducción

Dada un álgebra de semi-Heyting $\mathbf{A} = \langle A, \Rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$, es posible definir sobre $\mathbf{A}$ la implicación $x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y)$ sobre A de manera que $\mathbf{A} = \langle A, \Rightarrow_H, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ resulte ser un álgebra de Heyting (ver lema 7.4.1).

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \Rightarrow_H, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un álgebra de Heyting. Sea $t(x, y)$ un término en el lenguaje $(\wedge, \vee, \Rightarrow_H, 0, 1)$. Es fácil ver que $t(x, y)$ *define una implicación de* $\mathcal{SH}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $t(x, x) \approx 1$

(b) $x \wedge t(x, y) \approx x \wedge y$

(c) $x \wedge t(y, z) \approx x \wedge t(x \wedge y, x \wedge z)$.

Notaremos $Impl\mathcal{SH}$ al conjunto de términos de álgebra de Heyting que definen una implicación de $\mathcal{SH}$.

Observemos que el término $t(x, y) = x \Rightarrow_H y$ define una implicación de $\mathcal{SH}$ pues $\mathbf{A} = \langle A, \Rightarrow_H, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un álgebra de semi-Heyting; es decir, $x \Rightarrow_H y \in Impl\mathcal{SH}$ y, por lo tanto, $Impl\mathcal{SH} \neq \emptyset$.

Sea $t(x, y) \in Impl\mathcal{SH}$ y consideremos la identidad

$$x \Rightarrow y \approx t(x, y). \qquad \text{(t)}$$

Sea $\mathcal{SH}_t = \{\mathbf{A} \in \mathcal{SH} : \mathbf{A} \text{ satisface la identidad (t)}\}$ donde la operación $\Rightarrow_H$ se interpreta en el término $t(x, y)$ como $x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y)$ para todo $x, y \in A$. El objetivo de este capítulo es investigar las subvariedades $\mathcal{SH}_t$ y sus lógicas asociadas. Observemos que la variedad $\mathcal{SH}_t$ y la variedad $\mathcal{H}$ de la clase de las álgebras de Heyting son equivalentes por términos.

Llamaremos t-álgebra de toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}_t$.

Para estudiar las subvariedades de $\mathcal{SH}$ definidas por la ecuación (t) para algún término $t(x, y)$ y sus lógicas asociadas necesitaremos introducir las nociones de lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ y subvariedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Definición 9.1.1 *Sean α y β dos fórmulas de la lógica $\mathcal{SI}$ y sea ε el par (α, β). Llamaremos lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ a la extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ definida a partir del axioma:*

(S_ε) $(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\beta \to (\beta \wedge \alpha))$

y todas sus sustituciones.

Por ejemplo, llamaremos $\mathcal{SIC}$ a la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, y \to x)]$, es decir, la extensión axiomática de la lógica semi-intuicionista caracterizada por el axioma:

(C) $((x \to y) \to ((x \to y) \wedge (y \to x))) \wedge ((y \to x) \to ((y \to x) \wedge (x \to y)))$

y todas sus sustituciones. A los fines lógicos y algebraicos es interesante investigar la lógica $\mathcal{SIC}$. La sección 9.4 está orientada a este estudio. Observemos que $\mathcal{SI}[\emptyset]$ es la lógica $\mathcal{SI}$.

Antes de introducir las subvariedades $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ necesitamos introducir los siguientes conceptos y funciones.

Sea X un conjunto numerable de variables. El conjunto de fórmulas de X, que será notado $Form[X]$, está constituido de la siguiente manera: $X \subseteq Form[X]$, y si ϕ, ψ son fórmulas entonces $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ y $\neg\phi$ también lo son. Por otro lado el conjunto de términos generados por X, que será notado $Term[X]$, está constituido de la siguiente manera: $X \subseteq Term[X]$, $0, 1 \in Term[X]$ y si t_1, t_2 son términos entonces $t_1 \wedge t_2$, $t_1 \vee t_2$ y $t_1 \Rightarrow t_2$ también lo son.

Definición 9.1.2 *Introducimos las siguientes funciones:*

- *$f : Form[X] \to Term[X]$ es $f(x) = x$ si $x \in X$, $f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$, $f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$, $f(\alpha \to \beta) = f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, $f(\neg\alpha) = f(\alpha) \Rightarrow 0$.*
- *$g : Term[X] \to Form[X]$ es $g(x) = x$ si $x \in X$, $g(t_1 \wedge t_2) = g(t_1) \wedge g(t_2)$, $g(t_1 \vee t_2) = g(t_1) \vee g(t_2)$, $g(t_1 \Rightarrow t_2) = g(t_1) \to g(t_2)$, $g(1) = x \to x$ y $g(0) = \neg(x \to x)$.*

Definición 9.1.3 *Dada $\alpha \in Form[X]$, llamaremos* término asociado a α *a $f(\alpha)$ y lo notaremos t_α.*

Por ejemplo, si $\alpha = (x \wedge y) \to (\neg z)$, $t_\alpha = (x \wedge y) \Rightarrow (z \Rightarrow 0)$.

Definición 9.1.4 *Sea ε un par de fórmulas (α, β). Llamaremos $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ a la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por la identidad:*

$$t_\alpha \approx t_\beta.$$

La subvariedad $\mathcal{SH}[(x \to y, y \to x)]$ es la subvariedad de las álgebras de semi-Heyting caracterizada por la identidad $x \Rightarrow y \approx y \Rightarrow x$, es decir, las álgebras de semi-Heyting conmutativas introducidas en [33].

Vamos a demostrar que las subvariedades de $\mathcal{SH}$ definidas por la ecuación (t) para algún término $t(x, y)$ son de la forma $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ para algún par de fórmulas. Probaremos que su lógica asociada $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es equivalente a la lógica intuicionista [30] y resulta ser una extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$.

El objetivo central de este capítulo es obtener teoremas tanto algebraicos como lógicos y establecer resultados puente entre la semántica de cada variedad y su lógica correspondiente.

En la sección 9.2 demostraremos que la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es sana y completa respecto de la variedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Ha sido de gran interés estudiar relaciones entre las lógicas implicativas y las lógicas algebrizables. En la sección 9.3 demostraremos un teorema que como caso particular establecerá que la lógica $\mathcal{SI}$ es algebrizable respecto de la clase de álgebras $\mathcal{SH}$ en el sentido de Blok y Pigozzi [9]. Sin embargo, como veremos, $\mathcal{SI}$ no es una lógica implicativa [30].

En la sección 9.4 investigaremos la lógica $\mathcal{SIC}$. Esta lógica resulta ser la extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ asociada la variedad de las álgebras de semi-Heyting conmutativas, es decir, definidas por la identidad $x \Rightarrow y \approx y \Rightarrow x$ (introducidas en el capítulo 1). Estudiar la lógica $\mathcal{SIC}$ es interesante pues provee una nueva interpretación del conectivo implicativo; se tiene, por ejemplo, que $F \to T = F$ donde F, T nota respectivamente el valor de falsedad y verdad. Veremos relaciones estrechas entre ésta y el cálculo proposicional intuicionista $\mathcal{I}$. También se utilizará esta lógica como ejemplo en las secciones venideras. Veremos propiedades algebraicas que se utilizarán en algunos resultados del resto del capítulo, por ejemplo, vamos a probar que la implicación conmutativa es la menor entre todas las implicaciones de semi-Heyting definibles sobre un reticulado acotado.

En la sección 9.5 vamos a demostrar que existe un par de fórmulas ε de manera tal que $\mathcal{SH}_t = \mathcal{SH}[\varepsilon]$ para todo término $t(x, y)$ que defina una implicación de semi-Heyting. Además probaremos que las lógicas $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ son equivalentes a la lógica intuicionista, $\mathcal{I}$, en el sentido de la definición 9.5.8. Veremos que toda extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ equivalente al cálculo proposicional intuicionista es de la forma $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ para algún par de fórmulas ε.

El objetivo de la sección 9.6 es dar una semántica de Kripke para cada una de las lógicas semi-intuicionistas equivalentes a $\mathcal{I}$. Definiremos la noción de *modelo de Kripke* y de *modelo algebraico* de la lógica proposicional $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x, y)))]$ para un término $t(x, y)$ de manera similar a lo realizado en [17] para la lógica intuicionista y probaremos que toda fórmula α es válida en todo modelo algebraico de la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x, y)))]$ si y sólo si α es válida en todo modelo de Kripke asociado a esta lógica.

En la sección 9.7 demostraremos que el espacio de Priestley dual de las álgebras de Heyting coincide con el espacio dual de las t-álgebras de semi-Heyting.

9.2. El álgebra de Lindenbaum de la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$

A continuación estudiaremos el álgebra de Lindenbaum correspondiente a la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$. Luego probaremos teoremas de sanidad y completitud para la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ respecto de la clase de álgebras $\mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Definición 9.2.1 *Sea* $\Gamma \subseteq Form[X]$. *Llamaremos* teoría generada *por* Γ *en* $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ *al conjunto* $\{\phi \in Form[X] : \ \Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \phi\}$ *y se notará* $Th^{\varepsilon}(\Gamma)$.

En adelante notaremos $\alpha \twoheadrightarrow \beta = \alpha \to (\alpha \wedge \beta)$.

Sea $\Gamma \subseteq Form[X]$ y $\Delta = Th(\Gamma)$. En $Form[X]$ definimos la siguiente relación:

$$\alpha \equiv_{\Delta} \beta \text{ si sólo si } \alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha \in \Delta.$$

La relación $\equiv_{\Delta}$ depende del par de fórmulas ε. Observemos que

$$\text{si } \Gamma = \emptyset \text{ entonces } \alpha \equiv_{\Delta} \beta \text{ si sólo si } \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \alpha \to (\alpha \wedge \beta) \text{ y } \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \beta \to (\beta \wedge \alpha).$$

Lema 9.2.2 $\equiv_{\Delta}$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración La reflexividad y simetría resultan inmediatas. Probemos la transitividad. Supongamos que $\alpha \equiv_{\Delta} \beta$ y $\beta \equiv_{\Delta} \gamma$. Entonces $\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha, \beta \twoheadrightarrow \gamma, \gamma \twoheadrightarrow \beta \in \Delta$. Por el axioma (S_1) (ver sección 8.2) obtenemos que $\alpha \twoheadrightarrow \gamma, \gamma \twoheadrightarrow \alpha \in \Delta$. ■

En adelante, $[\![\alpha]\!]_{\varepsilon}$ denota la clase de α en el cojunto cociente $Form[X]/\equiv_{\Delta}$.

Definición 9.2.3 *En* $Form[X]/\equiv_{\Delta}$ *definimos* $[\![\alpha]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\beta]\!]_{\varepsilon}$ *si y sólo si* $\alpha \twoheadrightarrow \beta \in \Delta$.

Como consecuencia inmediata de lo anterior se obtiene el siguiente lema:

Lema 9.2.4 $\langle Form[X]/\equiv_{\Delta}, \leq_{\varepsilon}\rangle$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Lema 9.2.5 $\langle Form[X]/\equiv_{\Delta}, \leq_{\varepsilon}\rangle$ *es un reticulado.*

Demostración Como $\vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \alpha \to (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))$, por el axioma (S_2), $[\![\alpha]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\alpha \vee \beta]\!]_{\varepsilon}$. En forma similar, usando el axioma (S_3), se obtiene que $[\![\beta]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\alpha \vee \beta]\!]_{\varepsilon}$.

Consideremos $\gamma \in Form[X]$ tal que $[\![\alpha]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\gamma]\!]_{\varepsilon}$ y $[\![\beta]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\gamma]\!]_{\varepsilon}$. Entonces $\alpha \twoheadrightarrow \gamma \in \Delta$ y $\beta \twoheadrightarrow \gamma \in \Delta$. Por (S_4) y SMP, $\vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} (\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma)$ y, en consecuencia, $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\gamma]\!]_{\varepsilon}$. Luego $[\![\alpha]\!]_{\varepsilon} \vee [\![\beta]\!]_{\varepsilon} = [\![\alpha \vee \beta]\!]_{\varepsilon}$. En forma similar se prueba que $[\![\alpha]\!]_{\varepsilon} \wedge [\![\beta]\!]_{\varepsilon} = [\![\alpha \wedge \beta]\!]_{\varepsilon}$. Luego $\langle Form[X]/\equiv_{\Delta}, \leq_{\varepsilon}\rangle$ es un reticulado. ■

Lema 9.2.6 $\langle Form[X]/\equiv_{\Delta}, \wedge, \vee, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]_{\varepsilon}, [\![\alpha \to \alpha]\!]_{\varepsilon}\rangle$ *es un reticulado acotado con* $\alpha \in Form[X]$.

Demostración Por el lema 8.3.4 basta ver que $[\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]_{\varepsilon}$ es el primer elemento y que $[\![\alpha \to \alpha]\!]_{\varepsilon}$ es el último. Sea $\beta \in Form[X]$. Por el lema 8.2.5, $\alpha \to \alpha \in \Delta$. Por el lema 8.2.4, $\beta \twoheadrightarrow (\alpha \to \alpha) \in \Delta$. Entonces $[\![\beta]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\alpha \to \alpha]\!]_{\varepsilon}$. La condición $[\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]_{\varepsilon} \leq_{\varepsilon} [\![\beta]\!]_{\varepsilon}$ es inmediata del axioma (S_{17}). ■

Definición 9.2.7 *En $Form[X]$ definimos:* $[\![\alpha]\!]_\varepsilon \Rightarrow [\![\beta]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \to \beta]\!]_\varepsilon$.

Teorema 9.2.8 $\langle Form[X]/\equiv_\Delta, \wedge, \vee, \Rightarrow, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]_\varepsilon, [\![\alpha \to \alpha]\!]_\varepsilon\rangle \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Demostración Por el lema 8.2.3, $\Rightarrow$ está bien definida. Veamos que se satisfacen los axiomas de semi-Heyting. Por definición $[\![\alpha]\!]_\varepsilon \Rightarrow [\![\alpha]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \to \alpha]\!]_\varepsilon$. Por los axiomas (S_{13}) y (S_{14}), $[\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge ([\![\alpha]\!]_\varepsilon \Rightarrow [\![\beta]\!]_\varepsilon) = [\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge [\![\alpha \to \beta]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \wedge (\alpha \to \beta)]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \wedge \beta]\!]_\varepsilon = [\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge [\![\beta]\!]_\varepsilon$. Utilizando los axiomas (S_{11}) y (S_{12}), $[\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge ([\![\beta]\!]_\varepsilon \Rightarrow [\![\gamma]\!]_\varepsilon) = [\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge [\![\beta \to \gamma]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \wedge (\beta \to \gamma)]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma))]\!]_\varepsilon = [\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge [\![(\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \gamma)]\!]_\varepsilon = [\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge ([\![\alpha \wedge \beta]\!]_\varepsilon \Rightarrow [\![\alpha \wedge \gamma]\!]_\varepsilon) = [\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge (([\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge [\![\beta]\!]_\varepsilon) \Rightarrow ([\![\alpha]\!]_\varepsilon \wedge [\![\gamma]\!]_\varepsilon))$. ■

A continuación probaremos sanidad y completitud de la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ respecto de la variedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$.

De manera similar al capítulo 8 se definen los conceptos de *fórmula demostrable en* $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ y $\mathcal{SH}[\varepsilon]$*-tautologías.*

Teorema 9.2.9 *(sanidad) La lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es sana respecto de las $\mathcal{SH}[\varepsilon]$-tautologías: si ϕ es demostrable en $\mathcal{SI}[\varepsilon]$, entonces ϕ es una $\mathcal{SH}[\varepsilon]$-tautología.*

Demostración Supongamos que ϕ es un axioma de la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$. Si ϕ es un axioma (S_1) al (S_{18}), ϕ es una $\mathbf{A}$-tautologia. Si ϕ es el axioma (S_ε) resulta inmediato. Supongamos que ϕ y $\phi \to (\phi \wedge \alpha)$ son demostrables en $\mathcal{SI}[\varepsilon]$. Por hipótesis inductiva, ϕ y $\phi \to (\phi \wedge \alpha)$ son $\mathcal{SH}[\varepsilon]$-tautologías. Entonces, por SMP, α es una $\mathcal{SH}[\varepsilon]$-tautología. ■

Teorema 9.2.10 *(completitud) $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es completa respecto de las $\mathcal{SH}[\varepsilon]$-tautologías. Es decir, son equivalentes las siguientes condiciones:*

(a) *ϕ es demostrable en $\mathcal{SI}[\varepsilon]$*

(b) *ϕ es una $\mathcal{SH}[\varepsilon]$-tautología.*

Demostración (a) implica (b) es el teorema 9.2.9. Supongamos que ϕ es una $\mathbf{A}$-tautología para toda $\mathbf{A}$ álgebra de semi-Heyting perteneciente a la variedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$. Consideremos el álgebra $\langle Form[X]/\equiv_\Delta, \wedge, \vee, \Rightarrow, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]_\varepsilon, [\![\alpha \to \alpha]\!]_\varepsilon\rangle$ con $\Gamma = \emptyset$. Por el teorema 9.2.8, $\langle Form[X]/\equiv_\Delta, \wedge, \vee, \Rightarrow, [\![\alpha \wedge \neg\alpha]\!]_\varepsilon, [\![\alpha \to \alpha]\!]_\varepsilon\rangle$ es un álgebra de semi-Heyting perteneciente a la variedad $\mathcal{SH}[\varepsilon]$. Definimos una valuación $e : X \to Form[X]/\equiv_\Delta$ como $e(x) = [\![x]\!]_\varepsilon$ para toda variable proposicional x. Al extender la valuación de manera natural se obtiene que $e(\alpha) = [\![\alpha]\!]_\varepsilon$ para toda fórmula α. Por hipótesis, $e(\phi) = [\![\alpha \to \alpha]\!]_\varepsilon$. Entonces $[\![\phi]\!]_\varepsilon = [\![\alpha \to \alpha]\!]_\varepsilon$ y, en consecuencia, $\vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} (\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \wedge \phi)$. Por lo tanto $\vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \phi$. Luego ϕ es demostrable en la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$. ■

En particular, el teorema 9.2.10 demuestra que la lógica $\mathcal{SIC}$ es completa respecto de las álgebras de semi-Heyting conmutativas.

9.3. Algebrización de la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$

En esta sección veremos que la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es algebrizable respecto de la clase de álgebras $\mathcal{SH}[\varepsilon]$. Como caso particular, estableceremos que la lógica $\mathcal{SI}$ es algebrizable respecto de la clase de álgebras $\mathcal{SH}$ en el sentido de Blok y Pigozzi (ver 9.3.3). Referimos al lector interesado en leer conceptos básicos acerca de lógicas algebraicas o algebrizables a trabajos relevantes como lo son [14], [18], [20], [30], [34]. Además vamos a mostrar, mediante un ejemplo, que la lógica $\mathcal{SI}$ no es implicativa (ver definición 9.3.11).

Definición 9.3.1 *Sea $Eq = \{t_1 \approx t_2 : \ t_1, t_2 \in Term[X]\}$ y sea $\Theta_1 \cup \Theta_2 \subseteq Eq$. Sea K una clase de álgebras. Diremos que $\Theta_1 \models_{\mathsf{K}} \Theta_2$ si para toda $A \in \mathsf{K}$ y toda interpretación $h : Term[X] \to A$ se verifica que si $ht_1 = hr_1$ para todo $t_1 \approx r_1 \in \Theta_1$ entonces $ht_2 = hr_2$ para todo $t_2 \approx r_2 \in \Theta_2$.*

Definición 9.3.2 *Un* transformador de ida *(*de vuelta*) es una aplicación $\tau : Form[X] \to \mathcal{P}(Eq)$ ($\rho : Eq \to \mathcal{P}(Form[X])$). Se dice que τ (ρ) es* estructural *si $\tau\sigma = \sigma\tau$ ($\rho\sigma = \sigma\rho$) para toda sustitución σ.*

Definición 9.3.3 [9] *Sean $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form[X], \Theta \cup \{t_1 \approx t_2\} \subseteq Eq$. Una lógica $\mathcal{L}$ es* algebrizable *si existe una clase K de álgebras y transformadores estructurales de ida τ y de vuelta ρ tales que:*

(ALG 1) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ *si y sólo si* $\tau\Gamma \vDash_{\mathsf{K}} \tau\varphi$

(ALG 2) $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} t_1 \approx t_2$ *si y sólo si* $\rho\Theta \vdash_{\mathcal{L}} \rho(t_1 \approx t_2)$

(ALG 3) $\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{L}} \rho\tau(\varphi)$

(ALG 4) $t_1 \approx t_2 \ \dashv\!\models_{\mathsf{K}} \tau\rho(t_1 \approx t_2)$.

Los transformadores estructurales que usaremos son:

Definición 9.3.4 *Sea $\tau : Form[X] \to \mathcal{P}(Eq)$ definido por $\tau\alpha = \{f\alpha \approx 1\}$ y sea $\rho : Eq \to \mathcal{P}(Form[X])$ definido por $\rho(t_1 \approx t_2) = \{gt_1 \to gt_2, gt_2 \to gt_1\}$ donde f y g son las funciones introducidas en 9.1.2.*

Probaremos ahora dos lemas que resultarán útiles en adelante.

Lema 9.3.5 *Sea $\phi \in Form[X]$. Entonces $\vdash_{\mathcal{SI}} g(f(\phi)) \to (g(f(\phi)) \wedge \phi)$ y $\vdash_{\mathcal{SI}} \phi \to (\phi \wedge g(f(\phi)))$. Es decir las fórmulas ϕ y $g(f(\phi))$ son equivalentes en la lógica $\mathcal{SI}$.*

Demostración Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow\rangle \in \mathcal{SH}$ y sea $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow\rangle$ una valuación. Por completitud basta probar que $e(g(f(\phi))) = e(\phi)$. Lo demostraremos por inducción sobre la construcción de ϕ.

- Si $\phi = x$ con $x \in X$ entonces $e(g(f(x))) = e(g(x)) = e(x)$.

- Si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ con $\phi_1, \phi_2 \in Form[X]$ entonces $e(g(f(\phi))) = e(g(f(\phi_1 \wedge \phi_2))) = e(g(f(\phi_1) \wedge f(\phi_2))) = e(g(f(\phi_1)) \wedge g(f(\phi_2))) = e(g(f(\phi_1))) \wedge e(g(f(\phi_2)))$. Por hipótesis inductiva se tiene que $e(g(f(\phi_1))) \wedge e(g(f(\phi_2))) = e(\phi_1) \wedge e(\phi_2)$. En consecuencia, $e(g(f(\phi))) = e(\phi_1) \wedge e(\phi_2) = e(\phi_1 \wedge \phi_2) = e(\phi)$.

- Si $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ con $\phi_1, \phi_2 \in Form[X]$ entonces $e(g(f(\phi))) = e(g(f(\phi_1 \vee \phi_2))) = e(g(f(\phi_1) \vee f(\phi_2))) = e(g(f(\phi_1)) \vee g(f(\phi_2))) = e(g(f(\phi_1))) \vee e(g(f(\phi_2)))$. Por hipótesis inductiva se tiene que $e(g(f(\phi_1))) \vee e(g(f(\phi_2))) = e(\phi_1) \vee e(\phi_2)$. En consecuencia, $e(g(f(\phi))) = e(\phi_1) \vee e(\phi_2) = e(\phi_1 \vee \phi_2) = e(\phi)$.

- Si $\phi = \neg\psi$ con $\psi \in Form[X]$ entonces $e(g(f(\phi))) = e(g(f(\neg\psi))) = e(g(f(\psi) \Rightarrow 0)) = e(g(f(\psi)) \to g(0)) = e(g(f(\psi)) \to \neg(x \to x)) = e(g(f(\psi)) \Rightarrow e(\neg(x \to x)) = e(g(f(\psi)) \Rightarrow (e(x \to x) \Rightarrow 0) = e(g(f(\psi)) \Rightarrow ((e(x) \Rightarrow e(x)) \Rightarrow 0) = e(g(f(\psi)) \Rightarrow 0$. Por hipótesis inductiva, $e(g(f(\psi)) \Rightarrow 0 = e(\psi) \Rightarrow 0$. Luego $e(g(f(\phi))) = e(\psi) \Rightarrow 0 = e(\neg\psi) = e(\phi)$.

- Si $\phi = \phi_1 \to \phi_2$ con $\phi_1, \phi_2 \in Form[X]$ entonces $e(g(f(\phi))) = e(g(f(\phi_1 \to \phi_2))) = e(g(f(\phi_1) \Rightarrow f(\phi_2))) = e(g(f(\phi_1)) \to g(f(\phi_2))) = e(g(f(\phi_1))) \Rightarrow e(g(f(\phi_2)))$. Por hipótesis inductiva se tiene que $e(g(f(\phi_1))) \Rightarrow e(g(f(\phi_2))) = e(\phi_1) \Rightarrow e(\phi_2)$. En consecuencia, $e(g(f(\phi))) = e(\phi_1) \Rightarrow e(\phi_2) = e(\phi_1 \to \phi_2) = e(\phi)$.

■

Lema 9.3.6 *Sea $A \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$ y sea $h : Term[X] \to A$ un homomorfismo. Entonces $h \circ f \circ g = h$.*

Demostración Sea $t \in Term[X]$. Demostraremos este lema por inducción sobre la construcción del término t.

- Si $t = x$ con $x \in X$ entonces $h \circ f \circ g(x) = h \circ f(x) = h(x)$.

- Si $t = t_1 \wedge t_2$ con $t_1, t_2 \in Term[X]$, $h \circ f \circ g(t_1 \wedge t_2) = h \circ f(g(t_1) \wedge g(t_2)) = h(f(g(t_1)) \wedge f(g(t_2))) = h \circ f \circ g(t_1) \wedge h \circ f \circ g(t_2) = h(t_1) \wedge h(t_2) = h(t_1 \wedge t_2)$.

- Si $t = t_1 \vee t_2$ con $t_1, t_2 \in Term[X]$ se demuestra como en el caso anterior.

- Si $t = t_1 \Rightarrow t_2$ con $t_1, t_2 \in Term[X]$, $h \circ f \circ g(t_1 \Rightarrow t_2) = h \circ f(g(t_1) \to g(t_2)) = h(f(g(t_1)) \Rightarrow f(g(t_2))) = h \circ f \circ g(t_1) \Rightarrow h \circ f \circ g(t_2) = h(t_1) \Rightarrow h(t_2) = h(t_1 \Rightarrow t_2)$.

- Si $t = 1$, $h \circ f \circ g(1) = h \circ f(x \to x) = h(x \Rightarrow x) = h(1)$.

- Si $t = 0$, $h \circ f \circ g(0) = h \circ f(\neg(x \to x)) = h((x \Rightarrow x) \Rightarrow 0) = h(1 \Rightarrow 0) = h(0)$.

■

El siguiente resultado demuestra la condición (ALG1) para la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$.

Lema 9.3.7 *Sean $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form[X]$. Entonces*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \varphi \text{ si y sólo si } \tau\Gamma \models_{\mathcal{SH}[\varepsilon]} \tau\varphi.$$

Demostración Supongamos por hipótesis que $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \varphi$. Sea $A \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$ y sea $h : Term[X] \to A$ un homomorfismo tal que $h(f\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Probaremos que $h(f\varphi) = 1$.

Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \varphi$ existe una demostración de φ utilizando como única regla de inferencia el SMP a partir de los axiomas o fórmulas de Γ. Procederemos por inducción sobre la longitud de la demostración. Si φ es un axioma, por completitud (teorema 9.2.10), $h(f\varphi) = 1$. Si $\varphi \in \Gamma$, por hipótesis, entonces $h(f\varphi) = 1$. Supongamos que φ se demuestra utilizando al menos una vez SMP. Entonces existe $\varphi_0 \in Form[X]$ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \varphi_0 \to (\varphi_0 \wedge \varphi)$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} \varphi_0$. Por hipótesis inductiva, $h(f(\varphi_0 \to (\varphi_0 \wedge \varphi))) = h(f(\varphi_0)) = 1$. Luego $h(f\varphi) = 1 \Rightarrow (1 \wedge h(f\varphi)) = h(f(\varphi_0)) \Rightarrow (h(f(\varphi_0)) \wedge h(f(\varphi))) = h(f(\varphi_0 \to (\varphi_0 \wedge \varphi))) = 1$.

Veamos la recíproca. Por hipótesis $\tau\Gamma \vDash_{\mathcal{SH}[\varepsilon]} \tau\varphi$. Consideremos $\Delta = Th(\Gamma)$ y el álgebra $Form[X]/\equiv_\Delta$. Por el lema 9.2.8, $\langle Form[X]/\equiv_\Delta, \Rightarrow, \wedge, \vee, [\![\neg x \wedge x]\!], [\![x \to x]\!]\rangle \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$. Definimos $h : Term[X] \to Form[X]/\equiv_\Delta$ como $h(t_1) = [\![gt_1]\!]$. Por el lema 9.3.5 se tiene que $[\![g(f\phi)]\!] = [\![\phi]\!]$ para toda $\phi \in Form[X]$. Sea $\gamma \in \Gamma$. Entonces $\gamma \twoheadrightarrow (x \to x), (x \to x) \twoheadrightarrow \gamma \in \Delta$ y, en consecuencia, $[\![\gamma]\!] = [\![x \to x]\!]$. Luego $h(f\gamma) = [\![g(f\gamma)]\!] = [\![\gamma]\!] = [\![x \to x]\!]$. Como $\tau\Gamma \vDash_{\mathcal{SH}[\varepsilon]} \tau\varphi$, por el lema 9.2.8, $h(f\varphi) = [\![x \to x]\!]$. Entonces $[\![\varphi]\!] = [\![x \to x]\!]$ y, consecuentemente, $\varphi \in \Delta$. ■

A continuación demostraremos la condición (ALG4) para la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$.

Lema 9.3.8 *Sea $t_1 \approx t_2 \in Eq$. Entonces*

$$t_1 \approx t_2 \dashv\vDash_{\mathcal{SH}[\varepsilon]} \tau\rho(t_1 \approx t_2).$$

Demostración Observemos que

$$\tau\rho(t_1 \approx t_2) = \{f \circ g(t_1 \Rightarrow t_2) \approx 1, f \circ g(t_2 \Rightarrow t_1) \approx 1\}.$$

Veamos primero que $t_1 \approx t_2 \vDash_{\mathcal{SH}[\varepsilon]} \tau\rho(t_1 \approx t_2)$. Sea $A \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$ y sea $h : Term[X] \to A$ un homomorfismo tal que $h(t_1) = h(t_2)$. Por el lema 9.3.6, $h(f \circ g(t_1 \Rightarrow t_2)) = h(t_1 \Rightarrow t_2) = 1$. En forma similar se prueba que $h(f \circ g(t_2 \Rightarrow t_1)) = 1$.

Para la recíproca consideremos $A \in \mathcal{SH}[\varepsilon]$ y un homomorfismo $h : Term[X] \to A$ tal que $h(f \circ g(t_1) \Rightarrow f \circ g(t_2)) = h(f \circ g(t_2) \Rightarrow f \circ g(t_1)) = 1$. Entonces $h(f \circ g(t_1)) \Rightarrow h(f \circ g(t_2)) = h(f \circ g(t_2)) \Rightarrow h(f \circ g(t_1)) = 1$ y, consecuentemente, $h(f \circ g(t_1)) = h(f \circ g(t_2))$. Por el lema 9.3.6, $h(t_1) = h(t_2)$. Lo que prueba que $\tau\rho(t_1 \approx t_2) \vDash_{\mathcal{SH}[\varepsilon]} t_1 \approx t_2$. ■

El siguiente resultado es esencial para concretar uno de los objetivos de esta sección:

Proposición 9.3.9 [30] *Una lógica $\mathcal{L}$ es algebrizable si y sólo si existe una clase de álgebras K y transformadores estructurales τ, ρ tal que se satisfacen las condiciones* (ALG1) *y* (ALG4)

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de la proposición 9.3.9 y de los lemas 9.3.7 y 9.3.8 previamente demostrados.

Teorema 9.3.10 *$\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es algebrizable respecto de la clase de álgebras $\mathcal{SH}[\varepsilon]$ y los transformadores τ y ρ.*

Vamos a probar que $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ no es una lógica implicativa según la siguiente definición.

Definición 9.3.11 *Una* lógica implicativa *es una lógica $\mathcal{A}$ del tipo de lenguaje $\mathcal{L}$ que satisface las siguientes condiciones:*

(IL 1) $\vdash_{\mathcal{A}} x \to x$

(IL 2) $x \to y, y \to z \vdash_{\mathcal{A}} x \to z$

(IL 3) *Para cada $\lambda \in \mathcal{L}$, de aridad $n > 0$,* $\left\{ \begin{array}{c} x_1 \to y_1, \ldots, x_n \to y_n \\ y_1 \to x_1, \ldots, y_n \to x_n \end{array} \right\} \vdash_{\mathcal{A}} \lambda(x_1, \ldots, x_n) \to \lambda(y_1, \ldots, y_n)$

(IL 4) $x, x \to y \vdash_{\mathcal{A}} y$

(IL 5) $x \vdash_{\mathcal{A}} y \to x$.

El siguiente ejemplo demuestra que la lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ no satisface la condición (IL 5).

Consideremos el álgebra de semi-Heyting conmutativa con dos elementos, $\bar{\mathbf{2}}$. Si $x \vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} y \to x$ entonces, por el teorema de la deducción 8.3.17, se tiene que $\vdash_{\mathcal{SI}[\varepsilon]} x \to (x \wedge (y \to x))$. Por completitud (teorema 9.2.10), $\bar{\mathbf{2}} \models x \Rightarrow (x \wedge (y \Rightarrow x)) \approx 1$ lo cual es un absurdo basta, considerar $x = 1$ e $y = 0$.

9.4. Sobre la lógica $\mathcal{SIC}$

En la presente sección focalizaremos nuestra atención en la lógica $\mathcal{SIC}$. Creemos que resulta interesante desde el punto de vista lógico pues provee una nueva interpretación del conectivo implicativo; se tiene, por ejemplo, que $F \to T = F$ donde F, T nota respectivamente el valor de falsedad y verdad. Vamos a establecer relaciones con las lógicas $\mathcal{I}$ y $\mathcal{SI}$.

Los siguientes lemas resultarán útiles para la demostración de algunos resultados.

Recordemos el siguiente lema demostrado en el capítulo 7.

Lema 9.4.1 *Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ un álgebra de semi-Heyting. Si en $\mathbf{A}$ definimos la implicación*

$$x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y),$$

entonces se verifican las siguientes condiciones.

(a) $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ *es un álgebra de Heyting.*

(b) $\mathbf{A} \models x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow_H y$.

El siguiente resultado muestra que si bien puede haber más de una forma de definir una implicación de semi-Heyting sobre un reticulado distributivo el pseudocomplemento es único.

Corolario 9.4.2 *Sea* $(\mathbf{A}, \wedge, \vee \Rightarrow, 0, 1) \in \mathcal{SH}$*. Entonces* $\mathbf{A} \models x \Rightarrow 0 \approx x \Rightarrow_H 0$*, donde la operación* $\Rightarrow_H$ *está definida como en el lema 9.4.1.*

Demostración Sea $a \in \mathbf{A}$. Del lema 9.4.1 se tiene que $a \Rightarrow 0 = a \Rightarrow (a \wedge 0) = a \Rightarrow_H 0$. ■

En el lema 9.4.1 vimos que a partir de cualquier implicación de semi-Heyting $\Rightarrow$ podemos obtener la implicación de Heyting definiendo $x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y)$. El siguiente resultado establece una relación entre ambas implicaciones. Observemos que para definir la implicación $\Rightarrow$ basta hacerlo para $x < y$.

Lema 9.4.3 *Sea* $(\mathbf{A}, \wedge, \vee \Rightarrow, 0, 1) \in \mathcal{SH}$*. Entonces*

$$\mathbf{A} \models x \Rightarrow y \approx (x \Rightarrow_H y) \wedge ((x \wedge y) \Rightarrow y).$$

Demostración

Sean $a, b \in A$. Entonces

$$\begin{array}{ll}
(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow b) = & \\
(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \Rightarrow b] = & \text{por (SH 2)} \\
(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \Rightarrow (b \wedge ((b \wedge a) \Rightarrow (b \wedge a \wedge b)))] = & \text{por (SH 4)} \\
(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \Rightarrow (b \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)))] = & \text{por (SH 3)} \\
(a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (a \Rightarrow b) = & \text{por (SH 3)} \\
(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) = & \text{por (SH 1)} \\
(a \Rightarrow b) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (a \wedge b \wedge (a \Rightarrow b))] = & \text{por (SH 3)} \\
(a \Rightarrow b) \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b)) = & \text{por (SH 2)} \\
(a \Rightarrow b) \wedge 1 = & \text{por (SH 4)} \\
a \Rightarrow b. &
\end{array}$$

■

Recordemos que la clase de las álgebras de semi-Heyting conmutativas está constituida por las álgebras de semi-Heyting que satisfacen la identidad $x \Rightarrow y \approx y \Rightarrow x$.

El siguiente resultado generaliza el lema 7.4.3.

Lema 9.4.4 *Sea* $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ *un álgebra de semi-Heyting. Si en* $\mathbf{A}$ *definimos la implicación*

$$x \Rightarrow_C y = (x \Rightarrow_H y) \wedge (y \Rightarrow_H x),$$

entonces se verifican las siguientes condiciones:

(a) $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_C \rangle$ *es un álgebra de semi-Heyting conmutativa*

(b) $\mathbf{A} \models x \Rightarrow_C y \leq x \Rightarrow y$

(c) $\Rightarrow_C$ *es la única implicación de semi-Heyting conmutativa definible sobre* $\mathbf{A}$.

Demostración

(a) Veamos que $\Rightarrow_C$ es una implicación de semi-Heyting conmutativa. Veamos primero que se satisfacen los axiomas de semi-Heyting. Primero $a \Rightarrow_C a = (a \Rightarrow_H a) \wedge (a \Rightarrow_H a) = 1 \wedge 1 = 1$. Además $a \wedge (a \Rightarrow_C b) = a \wedge (a \Rightarrow_H b) \wedge (b \Rightarrow_H a) = a \wedge b \wedge (b \Rightarrow_H a) = a \wedge b \wedge a = a \wedge b$. Por último $a \wedge (b \Rightarrow_C c) = a \wedge (b \Rightarrow_H c) \wedge (c \Rightarrow_H b) = a \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow_H (a \wedge c))] \wedge [(a \wedge c) \Rightarrow_H (a \wedge b))] = a \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow_C (a \wedge c))]$. Además $a \Rightarrow_C b = (a \Rightarrow_H b) \wedge (b \Rightarrow_H a) = (b \Rightarrow_H a) \wedge (a \Rightarrow_H b) = b \Rightarrow_C a$. Entonces la implicación es una implicación de semi-Heyting conmutativa.

(b) Vamos a probar que $a \Rightarrow_C b \leq a \Rightarrow b$ en $\mathbf{A}$. En efecto $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow_C b) = (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = [(a \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b))) \Rightarrow (b \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)))] \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = ((a \wedge b) \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = [(a \wedge b \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b))) \Rightarrow (b \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)))] \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = ((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = 1 \wedge (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = (a \Rightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Rightarrow (a \wedge b)) = a \Rightarrow_C b$. Luego $a \Rightarrow_C b \leq a \Rightarrow b$.

(c) Supongamos que existen dos implicaciones de semi-Heyting conmutativas $\Rightarrow$ y $\Rightarrow'$ definibles sobre $\mathbf{A}$. Entonces $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow' b) = (a \Rightarrow b) \wedge [(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow' (b \wedge (a \Rightarrow b))] = (a \Rightarrow b) \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow' (b \wedge (b \Rightarrow a))] = (a \Rightarrow b) \wedge [(a \wedge b) \Rightarrow' (b \wedge a)] = a \Rightarrow b$. Luego $(a \Rightarrow b) \leq (a \Rightarrow' b)$. En forma similar se prueba que $(a \Rightarrow' b) \leq (a \Rightarrow b)$.

■

Lema 9.4.5 *Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ un álgebra de semi-Heyting. Si en $\mathbf{A}$ definimos los operadores $x \Leftrightarrow y$ y $x \Leftrightarrow_H y$ por $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ y $x \Leftrightarrow_H y = (x \Rightarrow_H y) \wedge (y \Rightarrow_H x)$ respectivamente, entonces $x \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow_H y$.*

Demostración Por el lema 9.4.1, $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \leq (a \Rightarrow_H b) \wedge (b \Rightarrow_H a) = a \Leftrightarrow_H b$. Por otra parte, $a \Leftrightarrow_H b = (a \Rightarrow_H b) \wedge (b \Rightarrow_H a) = a \Rightarrow_C b$ por el lema 9.4.4. Además $a \Rightarrow_C b = (a \Rightarrow_C b) \wedge (b \Rightarrow_C a) \leq (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = a \Leftrightarrow b$ por el lema 9.4.4 ■

En el capítulo 8 se prueba que si ϕ es un teorema de la lógica $\mathcal{SI}$ entonces ϕ es un teorema de la lógica intuicionista. Vamos a ver que esta condición no es válida para la lógica $\mathcal{SIC}$, es decir, no es cierto que si $\mathcal{SIC} \vdash \phi$ entonces ϕ es un teorema de la lógica $\mathcal{I}$.

Basta considerar la fórmula $\phi = ((\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)) \to (((\alpha \wedge \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha)) \wedge ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)))$. Es fácil probar que $\mathcal{SIC} \vdash \phi$ sustituyendo convenientemente en el axioma (C) que define la lógica $\mathcal{SIC}$. Sin embargo si consideramos la cadena de Heyting $\mathbf{A}$ con dos elementos y e una $\mathbf{A}$-valuación entonces $e(\phi) = (0 \Rightarrow 1) \Rightarrow ((0 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 0)) = 1 \Rightarrow 0 = 0$. Como la lógica $\mathcal{I}$ es completa respecto de las álgebras de Heyting, ϕ no es teorema de la lógica $\mathcal{I}$.

El ejemplo anterior muestra también que no es cierto que si $\mathcal{SIC} \vdash \phi$ entonces $\mathcal{SI} \vdash \phi$.

En la sección siguiente probaremos un teorema que como caso particular determinará que la lógica $\mathcal{SIC}$ es equivalente a lógica intuicionista.

9.5. Lógicas semi-intuicionistas equivalentes a la lógica $\mathcal{I}$

Sea $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$. Vamos a demostrar que el término $t(x,y)$ induce un par de fórmulas $\varepsilon = (x \to y, g(t(x,y)))$ de manera tal que $\mathcal{SH}_t = \mathcal{SH}[\varepsilon]$. Recordemos que si $\varepsilon = (\alpha, \beta)$ entonces $\mathcal{SH}[(\alpha,\beta)]$ es la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por la identidad

$$t_\alpha \approx t_\beta$$

y $\mathcal{SH}_t$ es la subvariedad definida por la identidad

$$x \Rightarrow y \approx t(x,y) \qquad\qquad \text{(t)}.$$

Por otro lado probaremos que las lógicas $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ son equivalentes a la lógica intuicionista $\mathcal{I}$ en el sentido de la definición 9.5.8. Para concretar este objetivo introduciremos traducciones $\cdot^\circ, \cdot^* : Form[X] \to Form[X]$ de manera tal que para $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$ se van a satisfacer las siguientes condiciones:

(a) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$ entonces $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$.

(b) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \phi$ entonces $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$.

(c) $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} (\alpha^\circ)^*$.

(d) $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \alpha$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} (\alpha^*)^\circ$.

En la definición 9.1.3 se introdujo el concepto de término asociado en el cual se obtenía un término en el lenguaje $\{\Rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1\}$ a partir de una fórmula dada en el lenguaje lógico de la lógica semi-intuicionista $\{\to, \wedge, \vee, \neg\}$. Veamos a continuación una definición que nos brinda el proceso inverso que se utilizará en los resultados expuestos a continuación para demostrar que $\mathcal{SH}_t = \mathcal{SH}[\varepsilon]$.

Definición 9.5.1 *Dado $t \in Term[X]$, diremos que $g(t)$ es la* fórmula asociada *a t.*

Por ejemplo si $t = (x \Rightarrow (y \Rightarrow 0)) \vee z$ entonces $g(t) = (x \to (y \to \neg(x \to x))) \vee z$.

Lema 9.5.2 *Sea $t(x,y) \in Term[X]$. Entonces $f \circ g(t(x,y)) \approx t(x,y)$.*

Demostración Veamos que $f \circ g(t(x,y)) \approx t(x,y)$ para todo término $t(x,y)$. Lo demostraremos por inducción sobre el término $t(x,y)$. Si $t(x,y) = t_1(x,y) \Rightarrow t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$ entonces $f \circ g(t(x,y)) = f(g(t_1(x,y) \Rightarrow t_2(x,y))) = f(g(t_1(x,y)) \to g(t_2(x,y))) = f(g(t_1(x,y))) \Rightarrow f(g(t_2(x,y))) = t_1(x,y) \Rightarrow t_2(x,y) = t(x,y)$ por hipótesis inductiva. Si $t(x,y) = 0$ entonces $f \circ g(t(x,y)) = f(g(0)) = f(\neg(x \to x)) = f(x \to x) \Rightarrow 0 = (f(x) \Rightarrow f(x)) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$. Si $t(x,y) = 1$ entonces $f \circ g(t(x,y)) = f(g(1)) = f(x \to x) = f(x) \Rightarrow f(x) = 1$. Los otros casos son similares. ■

Lema 9.5.3 *Sean $\alpha = x \to y$ y $\beta = g(t(x,y))$ (la fórmula asociada al término $t(x,y)$). Entonces las ecuaciones $t_\alpha \approx t_\beta$ y $x \Rightarrow y \approx t(x,y)$ son equivalentes.*

Demostración Por el lema 9.5.2, $t_\beta = f(\beta) = f(g(t(x,y))) = f(g(t(x,y))) \approx t(x,y)$. Por otro lado $t_\alpha = f(\alpha) = f(x \to y) = x \Rightarrow y$. ■

Corolario 9.5.4 $\mathcal{SH}_t = \mathcal{SH}[(x \to y, g(t(x,y)))]$.

Por el lema 9.4.4 y el corolario 9.5.4 es inmediato el siguiente corolario.

Corolario 9.5.5 $\mathcal{SH}[(x \to y, g(((x \Rightarrow_H y) \wedge (y \Rightarrow_H x))))] = \mathcal{SH}[(x \to y, y \to x)]$ *representa la variedad de las álgebras de semi-Heyting conmutativas.*

Del teorema 9.3.10 y el corolario 9.5.4 resulta el siguiente corolario.

Lema 9.5.6 *La lógica asociada a la variedad $\mathcal{SH}_t$ es $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$.*

Definición 9.5.7 [15, Definition 2.1] *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos lógicas del tipo de lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ y $\vdash_{\mathcal{A}}$ y $\vdash_{\mathcal{B}}$ sus relaciones de consecuencia asociadas. Una* traducción *de la lógica $\mathcal{A}$ en la lógica $\mathcal{B}$ es una función $h : Form[X] \to Form[X]$ tal que para toda $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$ se tiene que*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \phi \text{ entonces } h(\Gamma) \vdash_{\mathcal{B}} h(\phi).$$

Definición 9.5.8 *Dos lógicas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ del tipo de lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ se dicen* lógicas equivalentes *si existen traducciones $h_1, h_2 : Form[X] \to Form[X]$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ respectivamente tal que para toda $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \phi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} h_2(h_1(\phi))$

(b) $\Gamma \vdash_{\mathcal{B}} \phi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{B}} h_1(h_2(\phi))$.

A continuación vamos a demostrar que las lógicas $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ son equivalentes a la lógica intuicionista $\mathcal{I}$ en el sentido de la definición 9.5.8. Es más, veremos que toda lógica equivalente al intuicionismo clásico es de la forma $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ para algún par de fórmulas ε.

Sea $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$. Veamos cómo definir una traducción $\cdot^\circ$ de manera tal que si $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ entonces $\vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha^\circ$.

Definición 9.5.9 *Definamos una función $\cdot^\circ : Form[X] \to Form[X]$ de la siguiente manera:*

- $x^\circ = x$ *si x es una variable proposicional.*
- $(\alpha \wedge \beta)^\circ = \alpha^\circ \wedge \beta^\circ$
- $(\alpha \vee \beta)^\circ = \alpha^\circ \vee \beta^\circ$
- $(\alpha \to \beta)^\circ = \alpha^\circ \to (\alpha^\circ \wedge \beta^\circ)$
- $(\neg\alpha)^\circ = \neg\alpha^\circ$

Vamos a probar que $\circ$ es una traducción de la lógica intuicionista $\mathcal{I}$ en la lógica $\mathcal{SI}$ y, como consecuencia, lo es en la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$.

Teorema 9.5.10 *Si* $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ *entonces* $\vdash_{\mathcal{SI}} \alpha^\circ$.

Demostración Consideremos una fórmula α tal que $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha$. Queremos probar que $\vdash_{\mathcal{SI}} \alpha^\circ$. Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ un álgebra de semi-Heyting. Sea $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ una valuación sobre $\mathbf{A}$. Por completitud (teorema 8.3.16), basta probar que $e(\alpha^\circ) = 1$. En $\mathbf{A}$ consideremos la implicación definida como $x \Rightarrow_H y = x \Rightarrow (x \wedge y)$. Por el lema 9.4.1, $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ es un álgebra de Heyting. Ahora, definamos una valuación $e' : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ de la siguiente manera: $e'(x) = e(x)$ si x es una variable proposicional, $e'(\gamma \wedge \delta) = e'(\gamma) \wedge e'(\delta)$, $e'(\gamma \vee \delta) = e'(\gamma) \vee e'(\delta)$, $e'(\neg\gamma) = e'(\gamma) \Rightarrow_H 0$, $e'(\gamma \to \delta) = e'(\gamma) \Rightarrow_H e'(\delta)$.

Vamos a probar por inducción sobre la construcción de la fórmula α que $e(\alpha^\circ) = e'(\alpha)$.

- Si $\alpha = x$ si x es una variable proposicional, $e(\alpha^\circ) = e(x^\circ) = e(x) = e'(x) = e'(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, $e(\alpha^\circ) = e((\alpha_1 \wedge \alpha_2)^\circ) = e(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ) = e(\alpha_1^\circ) \wedge e(\alpha_2^\circ) = e'(\alpha_1) \wedge e'(\alpha_2) = e'(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = e'(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$, $e(\alpha^\circ) = e((\alpha_1 \vee \alpha_2)^\circ) = e(\alpha_1^\circ \vee \alpha_2^\circ) = e(\alpha_1^\circ) \vee e(\alpha_2^\circ) = e'(\alpha_1) \vee e'(\alpha_2) = e'(\alpha_1 \vee \alpha_2) = e'(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$, $e(\alpha^\circ) = e((\alpha_1 \to \alpha_2)^\circ) = e(\alpha_1^\circ \to (\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)) = e(\alpha_1^\circ) \Rightarrow (e(\alpha_1^\circ) \wedge e(\alpha_2^\circ)) = e'(\alpha_1) \Rightarrow (e'(\alpha_1) \wedge e'(\alpha_2))$. Por el lema 9.4.1, $e'(\alpha_1) \Rightarrow (e'(\alpha_1) \wedge e'(\alpha_2)) = e'(\alpha_1) \Rightarrow_H e'(\alpha_2)$. Entonces $e(\alpha^\circ) = e'(\alpha_1) \Rightarrow_H e'(\alpha_2) = e'(\alpha_1 \to \alpha_2) = e'(\alpha)$.
- Si $\alpha = \neg\beta$, $e(\alpha^\circ) = e((\neg\beta)^\circ) = e(\neg\beta^\circ) = e(\beta^\circ) \Rightarrow 0 = e'(\beta) \Rightarrow 0 = e'(\beta) \Rightarrow (e'(\beta) \wedge 0) = e'(\beta) \Rightarrow_H 0 = e'(\neg\beta) = e'(\alpha)$.

Como $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha$, por completitud, $e'(\alpha) = 1$. Entonces $e(\alpha^\circ) = 1$. ■

Corolario 9.5.11 *Sea* $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$. *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$ *entonces* $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$.

Demostración Sea $\Gamma \subseteq Form[X]$ y $\phi \in Form[X]$. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$. Vamos a probar por inducción sobre la longitud de la demostración de ϕ que $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$. Si ϕ es un axioma de la lógica, entonces $\vdash_{\mathcal{I}} \phi$. Por el teorema 9.5.10, se tiene que $\vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$. Luego $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$. Supongamos que ϕ proviene de aplicar MP en las demostraciones de $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \psi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \psi \to \phi$ para alguna fórmula ψ. Por hipótesis inductiva, $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \psi^\circ$ y $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} (\psi \to \phi)^\circ$. Entonces $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \psi^\circ$ y $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \psi^\circ \to (\psi^\circ \wedge \phi^\circ)$. Aplicando la regla de inferencia SMP se obtiene que $\Gamma^\circ \vdash_{\mathcal{SI}} \phi^\circ$ ■

Corolario 9.5.12 *La función* $\cdot^\circ$ *es una traducción de la lógica intuicionista* $\mathcal{I}$ *en la lógica* $\mathcal{SI}$ *y, como consecuencia, lo es en la lógica* $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$.

Con el objetivo de probar que las lógicas $\mathcal{I}$ y $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$, para un término $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$, son equivalentes introduciremos una función $\cdot^*$ de manera que resulte ser una traducción de la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ en la lógica $\mathcal{I}$.

Definición 9.5.13 *Sea $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$. Definimos la función $\cdot^* : Form[X] \to Form[X]$ de la siguiente manera:*

- *$x^* = x$ si x es variable proposicional.*
- $(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$
- $(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$
- $(\alpha \to \beta)^* = g(t(f(\alpha^*), f(\beta^*)))$
- $(\neg\alpha)^* = \neg\alpha^*$

Observemos que la traducción $\cdot^*$ depende del término de Heyting $t(x,y)$.
En el caso de la lógica $\mathcal{SIC}$, $x \Rightarrow y = (x \Rightarrow_H y) \wedge (y \Rightarrow_H x)$. Luego $(\alpha \to \beta)^* = (\alpha^* \to (\alpha^* \wedge \beta^*)) \wedge (\beta^* \to (\alpha^* \wedge \beta^*))$.

El siguiente lema se utilizará para demostrar el teorema desarrollado más abajo.

Lema 9.5.14 *Sea $t(x,y) \in Term[X]$ y $\alpha, \beta \in Form[X]$. Si $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ es un álgebra de semi-Heyting y $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ es una valuación sobre $\mathbf{A}$ entonces*

$$e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = t(e(\alpha), e(\beta)).$$

Demostración Demostraremos este lema por inducción sobre la construcción del término $t(x,y)$.

- Si $t(x,y) = x$ entonces $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(f(\alpha)))$. Por el lema 9.3.5, $e(g(f(\alpha))) = e(\alpha)$. Luego $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(\alpha) = t(e(\alpha), e(\beta))$.
- Si $t(x,y) = y$ entonces $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(f(\beta)))$. Por el lema 9.3.5, $e(g(f(\beta))) = e(\beta)$. Luego $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(\beta) = t(e(\alpha), e(\beta))$.
- Si $t(x,y) = 0$ entonces $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(0)) = e(\neg(x \to x)) = e(x \to x) \Rightarrow 0 = (e(x) \Rightarrow e(x)) \Rightarrow 0 = 0 = t(e(\alpha), e(\beta))$.
- Si $t(x,y) = 1$ entonces $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(1)) = e(x \to x) = e(x) \Rightarrow e(x) = 1 = t(e(\alpha), e(\beta))$.
- Si $t(x,y) = t_1(x,y) \wedge t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$ entonces por hipótesis inductiva $e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))) = t_1(e(\alpha), e(\beta))$ y $e(g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = t_2(e(\alpha), e(\beta))$. Luego
$e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \wedge t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \wedge g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \wedge e(g(t_2(f(\alpha), f(\beta))) = t_1(e(\alpha), e(\beta)) \wedge t_2(e(\alpha), e(\beta)) = t(e(\alpha), e(\beta))$.
- Si $t(x,y) = t_1(x,y) \vee t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$ entonces por hipótesis inductiva $e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))) = t_1(e(\alpha), e(\beta))$ y $e(g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = t_2(e(\alpha), e(\beta))$. Luego $e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \vee t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \vee g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \vee e(g(t_2(f(\alpha), f(\beta))) = t_1(e(\alpha), e(\beta)) \vee t_2(e(\alpha), e(\beta)) = t(e(\alpha), e(\beta))$.

- Si $t(x,y) = t_1(x,y) \Rightarrow t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$, entonces por hipótesis inductiva $e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))) = t_1(e(\alpha), e(\beta))$ y $e(g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))) = t_2(e(\alpha), e(\beta))$. Luego

$$\begin{aligned} e(g(t(f(\alpha), f(\beta)))) &= e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \Rightarrow t_2(f(\alpha), f(\beta)))) \\ &= e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \to g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))) \\ &= e(g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \Rightarrow e(g(t_2(f(\alpha), f(\beta))) \\ &= t_1(e(\alpha), e(\beta)) \Rightarrow t_2(e(\alpha), e(\beta)) \\ &= t(e(\alpha), e(\beta)). \end{aligned}$$

■

Teorema 9.5.15 *Sea $\alpha \in Form[X]$. Si $\vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha$ entonces $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha^*$.*

Demostración Consideremos una fórmula α tal que $\vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha$. Queremos probar que $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha^*$. Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ un álgebra de Heyting. Sea $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ una valuación sobre $\mathbf{A}$. Por completitud basta probar que $e(\alpha^*) = 1$. En $\mathbf{A}$ consideremos la implicación $x \Rightarrow y = t(x,y)$. Luego $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle \in \mathcal{SH}[(x \to y, g(t(x,y)))]$. Ahora, definamos una valuación $e' : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ de la siguiente manera: $e'(x) = e(x)$ si x es una variable proposicional, $e'(\gamma \wedge \delta) = e'(\gamma) \wedge e'(\delta)$, $e'(\gamma \vee \delta) = e'(\gamma) \vee e'(\delta)$, $e'(\neg\gamma) = e'(\gamma) \Rightarrow 0$, $e'(\gamma \to \delta) = e'(\gamma) \Rightarrow e'(\delta)$.

Vamos probar por inducción sobre la construcción de la fórmula α que $e(\alpha^*) = e'(\alpha)$.

- Si $\alpha = x$ con $x \in X$ entonces $e(\alpha^*) = e(x^*) = e(x) = e'(x) = e'(\alpha)$.

- Si $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in Form[X]$ entonces $e(\alpha^*) = e((\alpha_1 \wedge \alpha_2)^*) = e(\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*) = e(\alpha_1^*) \wedge e(\alpha_2^*) = e'(\alpha_1) \wedge e'(\alpha_2) = e'(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = e'(\alpha)$.

- Si $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in Form[X]$ entonces $e(\alpha^*) = e((\alpha_1 \vee \alpha_2)^*) = e(\alpha_1^* \vee \alpha_2^*) = e(\alpha_1^*) \vee e(\alpha_2^*) = e'(\alpha_1) \vee e'(\alpha_2) = e'(\alpha_1 \vee \alpha_2) = e'(\alpha)$.

- Si $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in Form[X]$ entonces $e(\alpha^*) = e((\alpha_1 \to \alpha_2)^*) = e(g(t(f(\alpha_1^*), f(\alpha_2^*))))$. Por el lema 9.5.14 se tiene que

  $e(g(t(f(\alpha_1^*), f(\alpha_2^*)))) = t(e(\alpha_1^*), e(\alpha_2^*))$. Por hipótesis inductiva, $e(\alpha_1^*) = e'(\alpha_1)$ y $e(\alpha_2^*) = e'(\alpha_2)$. Luego $e(\alpha^*) = t(e(\alpha_1^*), e(\alpha_2^*)) = t(e'(\alpha_1), e'(\alpha_2)) = e'(\alpha_1) \Rightarrow e'(\alpha_2)$. Como e' es una valuación sobre $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$, $e'(\alpha_1) \Rightarrow e'(\alpha_2) = e'(\alpha_1 \to \alpha_2) = e'(\alpha)$. Entonces $e(\alpha^*) = e'(\alpha)$.

- Si $\alpha = \neg\beta$, $e(\alpha^*) = e((\neg\beta)^*) = e(\neg\beta^*)$. Como e es una valuación sobre $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$, $e(\neg\beta^*) = e(\beta^*) \Rightarrow_H 0 = e'(\beta) \Rightarrow_H 0$. Por el lema 9.4.2, $e'(\beta) \Rightarrow_H 0 = e'(\beta) \Rightarrow 0$. Como e' es una valuación sobre $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$, $e'(\beta) \Rightarrow 0 = e'(\neg\beta) = e'(\alpha)$.

Como $\vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha$, por completitud, $e'(\alpha) = 1$. Entonces $e(\alpha^*) = 1$. ■

Veamos algunas propiedades de la función $*$ que resultarán útiles en los próximos resultados.

Lema 9.5.16 *Sean $\alpha, \beta \in Form[X]$. Si $\vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha \to \beta$ entonces $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha^* \to \beta^*$.*

Demostración Supongamos que $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \alpha \to \beta$. Queremos probar que $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha^* \to \beta^*$. Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ un álgebra de Heyting y sea $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ una valuación sobre $\mathbf{A}$. Por completitud (teorema 8.1.3), basta probar que $e(\alpha^* \to \beta^*) = 1$.

En $\mathbf{A}$ consideremos la implicación $x \Rightarrow y = t(x,y)$. Luego $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle \in \mathcal{SH}[(x \to y, g(t(x,y))]$. Ahora, definamos una valuación $e' : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ de la siguiente manera: $e'(x) = e(x)$ si x es una variable proposicional, $e'(\gamma \wedge \delta) = e'(\gamma) \wedge e'(\delta)$, $e'(\gamma \vee \delta) = e'(\gamma) \vee e'(\delta)$, $e'(\neg\gamma) = e'(\gamma) \Rightarrow 0$, $e'(\gamma \to \delta) = e'(\gamma) \Rightarrow e'(\delta)$. Como en la demostración del teorema 9.5.15 se prueba que para toda fórmula γ se tiene que $e(\gamma^*) = e'(\gamma)$.

Por completitud (teorema 9.2.10), como $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \alpha \to \beta$, se prueba que $e'(\alpha \to \beta)$. Por el lema 9.4.1, como $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$, $e'(\alpha) \Rightarrow e'(\beta) \leq e'(\alpha) \Rightarrow_H e'(\beta)$. Entonces $1 = e'(\alpha \to \beta) = e'(\alpha) \Rightarrow e'(\beta) \leq e'(\alpha) \Rightarrow_H e'(\beta) = e(\alpha^*) \Rightarrow_H e(\beta^*) = e(\alpha^* \to \beta^*)$. ■

Lema 9.5.17 *Sean $\Gamma \cup \{\psi, \phi\} \subseteq Form[X]$. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \psi^*$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} (\psi \to (\psi \wedge \phi))^*$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$.*

Demostración Sea Δ la teoría generada por Γ en la lógica $\mathcal{I}$. Por el lema 9.4.5, la relación $\alpha \equiv_\Delta \beta$ equivale a la condición $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Delta$. Consideremos ahora el álgebra de Lindembaum $Form[X]/\equiv_\Delta$ asociada a la relación de equivalencia $\equiv_\Delta$. Como $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \psi^*$, $[\![\psi^*]\!] = [\![x \to x]\!]$. De manera similar se tiene que $[\![(\psi \to (\psi \wedge \phi))^*]\!] = [\![x \to x]\!]$. Entonces $[\![x \to x]\!] = [\![\psi^*]\!] = [\![\psi^*]\!] \wedge [\![(\psi \to (\psi \wedge \phi))^*]\!] = [\![\psi^* \wedge (\psi \to (\psi \wedge \phi))^*]\!] = [\![(\psi \wedge (\psi \to (\psi \wedge \phi)))^*]\!]$. Por completitud sobre las álgebras de Heyting es fácil ver que $\vdash_{\mathcal{I}} (\psi \wedge \phi) \leftrightarrow (\psi \wedge (\psi \to (\psi \wedge \phi)))$. Por el lema 9.5.16 se tiene que $[\![(\psi \wedge (\psi \to (\psi \wedge \phi)))^*]\!] = [\![(\psi \wedge \phi)^*]\!]$. Entonces $[\![x \to x]\!] = [\![(\psi \wedge \phi)^*]\!] = [\![\psi^* \wedge \phi^*]\!] = [\![\psi^*]\!] \wedge [\![\phi^*]\!]$. Luego $[\![x \to x]\!] = [\![\phi^*]\!]$ y, consecuentemente, $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$. ■

Veamos que la función $\cdot^*$ es una traducción de la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ en la lógica intuicionista $\mathcal{I}$.

Corolario 9.5.18 *Sean $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Form[X]$. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \phi$ entonces $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$.*

Demostración Sea $\Gamma \subseteq Form[X]$ y $\phi \in Form[X]$. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \phi$. Vamos a probar por inducción sobre la longitud de la demostración de ϕ que $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$. Si ϕ es un axioma de la lógica entonces $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \phi$. Por el teorema 9.5.15, se tiene que $\vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$. Luego $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$. Supongamos que ϕ proviene de aplicar SMP en las demostraciones de $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \psi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \psi \to (\psi \wedge \phi)$ para alguna fórmula ψ. Por hipótesis inductiva se tiene que $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \psi^*$ y $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} (\psi \to (\psi \wedge \phi))^*$. Por el lema 9.5.17, $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{I}} \phi^*$. ■

Corolario 9.5.19 *La función $\cdot^*$ es una traducción de la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ en la lógica intuicionista $\mathcal{I}$.*

Los siguientes resultados permiten demostrar que las lógicas $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ son equivalentes a la lógica intuicionista, $\mathcal{I}$, en el sentido de la definición 9.5.8. Recordemos que toda lógica $\mathcal{SI}[\varepsilon]$ es de la forma $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ para algún término $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$.

Teorema 9.5.20 *Consideremos la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ y su traducción $*$ asociada. Entonces para toda fórmula α se tiene que*

$$\vdash_{\mathcal{I}} \alpha \leftrightarrow (\alpha^\circ)^*,$$

es decir, toda fórmula α es equivalente a la fórmula $(\alpha^\circ)^*$ en la lógica del cálculo proposicional intuicionista.

Demostración Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ una álgebra de Heyting. Sea $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$ una $\mathbf{A}$-valuación. En $\mathbf{A}$ consideremos la implicación $x \Rightarrow y = t(x,y)$. Usando completitud basta probar que $e(\alpha) = e((\alpha^\circ)^*)$. Lo haremos por inducción sobre α.

- Si $\alpha = p$ con p una variable proposicional, $e((\alpha^\circ)^*) = e((p^\circ)^*) = e(p^*) = e(p) = e(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, $e((\alpha^\circ)^*) = e(((\alpha_1 \wedge \alpha_2)^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ)^* \wedge (\alpha_2^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ)^*) \wedge e((\alpha_2^\circ)^*) = e(\alpha_1) \wedge e(\alpha_2) = e(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = e(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$, $e((\alpha^\circ)^*) = e(((\alpha_1 \vee \alpha_2)^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ \vee \alpha_2^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ)^* \vee (\alpha_2^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ)^*) \vee e((\alpha_2^\circ)^*) = e(\alpha_1) \vee e(\alpha_2) = e(\alpha_1 \vee \alpha_2) = e(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$, $e((\alpha^\circ)^*) = e(((\alpha_1 \to \alpha_2)^\circ)^*) = e((\alpha_1^\circ \to (\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ))^*) = e(g(t(f((\alpha_1^\circ)^*), f((\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ))^*)))$. Por el lema 9.5.14, $e((\alpha^\circ)^*) = t(e((\alpha_1^\circ)^*), e((\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)^*)) = t(e((\alpha_1^\circ)^*), e((\alpha_1^\circ)^* \wedge (\alpha_2^\circ)^*)) = t(e((\alpha_1^\circ)^*), e((\alpha_1^\circ)^*) \wedge e((\alpha_2^\circ)^*))$. Por hipótesis inductiva, $e((\alpha^\circ)^*) = t(e(\alpha_1), e(\alpha_1) \wedge e(\alpha_2)) = e(\alpha_1) \Rightarrow (e(\alpha_1) \wedge e(\alpha_2))$. Como $\Rightarrow$ es una implicación de semi-Heyting, por el lema 9.4.1, $e(\alpha_1) \Rightarrow [e(\alpha_1) \wedge e(\alpha_2)] = e(\alpha_1) \Rightarrow_H e(\alpha_2)$. Como e es una valuación sobre $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$, $e(\alpha_1) \Rightarrow_H e(\alpha_2) = e(\alpha_1 \to \alpha_2)$.
- Si $\alpha = \neg\beta$, $e((\alpha^\circ)^*) = e(((\neg\beta)^\circ)^*) = e((\neg\beta^\circ)^*) = e(\neg(\beta^\circ)^*) = e((\beta^\circ)^*) \Rightarrow 0 = e(\beta) \Rightarrow 0$. Por el lema 9.4.2, $e(\beta) \Rightarrow 0 = e(\beta) \Rightarrow_H 0$. Como e es una valuación sobre $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow_H \rangle$, $e(\beta) \Rightarrow_H 0 = e(\neg\beta) = e(\alpha)$.

$\blacksquare$

Corolario 9.5.21 *Consideremos la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ y su traducción $\cdot^*$ asociada. Entonces para toda $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Form[X]$ se tiene que*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \alpha \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathcal{I}} (\alpha^\circ)^*.$$

Demostración Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \alpha$. Como, por el teorema 9.5.20, $\vdash_{\mathcal{I}} \alpha \to (\alpha^\circ)^*$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \alpha \to (\alpha^\circ)^*$. Luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} (\alpha^\circ)^*$. La vuelta es similar. $\blacksquare$

Lema 9.5.22 *Sean $\alpha, \beta \in Form[X]$ y $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$. Entonces las fórmulas*

$$[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \quad y \quad g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$$

son equivalentes en la lógica $\mathcal{I}$.

Demostración Procederemos por inducción sobre la construcción del término $t(x,y)$.

- Si $t(x,y) = x$ entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(f(\alpha))]^\circ$. Por el lema 9.3.5 se tiene que $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \equiv \alpha^\circ \equiv g(f(\alpha^\circ)) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.
- Si $t(x,y) = y$ entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(f(\beta))]^\circ$. Por el lema 9.3.5 se tiene que $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \equiv \beta^\circ \equiv g(f(\beta^\circ)) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.
- Supongamos que $t(x,y) = 0$. Entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(0)]^\circ = [\neg(x \to x)]^\circ = \neg(x \to x)^\circ = \neg(x \to (x \wedge x))$. Por el lema 8.2.5, $x \to x \equiv x \to (x \wedge x)$. Entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = \neg(x \to (x \wedge x)) \equiv \neg(x \to x) = g(0) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.
- Supongamos que $t(x,y) = 1$. Entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(1)]^\circ = [x \to x]^\circ = x \to (x \wedge x)$. Por el lema 8.2.5, $x \to x \equiv x \to (x \wedge x)$. Entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = x \to (x \wedge x) \equiv x \to x = g(1) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.
- Si $t(x,y) = t_1(x,y) \wedge t_2(x,y)$ entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \wedge t_2(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \wedge g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \wedge [g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ$. Por hipótesis inductiva, $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \equiv g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) \wedge g(t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) = g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)) \wedge t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.
- Si $t(x,y) = t_1(x,y) \vee t_2(x,y)$ entonces $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \vee t_2(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \vee g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ = [g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \vee [g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ$. Por hipótesis inductiva, $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \equiv g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) \vee g(t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) = g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)) \vee t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.
- Si $t(x,y) = t_1(x,y) \Rightarrow_H t_2(x,y)$ entonces

  $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ =$

  $[g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \Rightarrow_H t_2(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ =$

  $[g(t_1(f(\alpha), f(\beta)) \Rightarrow (t_1(f(\alpha), f(\beta)) \wedge t_2(f(\alpha), f(\beta))))]^\circ =$

  $[g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \Rightarrow (g(t_1(f(\alpha), f(\beta))) \wedge g(t_2(f(\alpha), f(\beta))))]^\circ \equiv$

  $[g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \to [[g(t_1(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \wedge [g(t_2(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ]$.

  Por hipótesis inductiva se tiene que
  $[g(t(f(\alpha), f(\beta)))]^\circ \equiv g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) \to [g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) \wedge g(t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))] = g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)) \Rightarrow (t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)) \wedge t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))) = g(t_1(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)) \Rightarrow_H t_2(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ))) = g(t(f(\alpha^\circ), f(\beta^\circ)))$.

■

Teorema 9.5.23 $\vdash_{\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]} \alpha \leftrightarrow (\alpha^*)^\circ$, *es decir, toda fórmula* α *es equivalente a la fórmula* $(\alpha^*)^\circ$ *en la lógica* $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$.

Demostración Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ una álgebra de semi-Heyting en la variedad $\mathcal{SH}[(x \to y, g(x \Rightarrow y))]$ donde $x \Rightarrow y = t(x,y)$. Sea $e : Form[X] \to \langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ una $\mathbf{A}$- valuación. Usando completitud basta probar que $e(\alpha) = e((\alpha^*)^\circ)$. Lo haremos por inducción sobre α.

- Si $\alpha = x$ con x una variable proposicional entonces $e((\alpha^*)^\circ) = e((x^*)^\circ) = e(x^\circ) = e(x) = e(\alpha)$.

- Si $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ entonces $e((\alpha^*)^\circ) = e(((\alpha_1 \wedge \alpha_2)^*)^\circ) = e((\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*)^\circ) = e((\alpha_1^*)^\circ \wedge (\alpha_2^*)^\circ) = e((\alpha_1^*)^\circ) \wedge e((\alpha_2^*)^\circ) = e(\alpha_1) \wedge e(\alpha_2) = e(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = e(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$ entonces $e((\alpha^*)^\circ) = e(((\alpha_1 \vee \alpha_2)^*)^\circ) = e((\alpha_1^* \vee \alpha_2^*)^\circ) = e((\alpha_1^*)^\circ \vee (\alpha_2^*)^\circ) = e((\alpha_1^*)^\circ) \vee e((\alpha_2^*)^\circ) = e(\alpha_1) \vee e(\alpha_2) = e(\alpha_1 \vee \alpha_2) = e(\alpha)$.
- Si $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$ entonces $e((\alpha^*)^\circ) = e(((\alpha_1 \to \alpha_2)^*)^\circ) = e((g(t(f(\alpha_1^*), f(\alpha_2^*))))^\circ)$. Por el lema 9.5.22, $e((g(t(f(\alpha_1^*), f(\alpha_2^*))))^\circ) = e(g(t(f((\alpha_1^*)^\circ), f((\alpha_2^*)^\circ))))$. Por el lema 9.5.14, $e(g(t(f((\alpha_1^*)^\circ), f((\alpha_2^*)^\circ)))) = t(e((\alpha_1^*)^\circ), e((\alpha_2^*)^\circ)) = e((\alpha_1^*)^\circ) \Rightarrow e((\alpha_2^*)^\circ)$. Por hipótesis inductiva, $e((\alpha^*)^\circ) = e((\alpha_1^*)^\circ) \Rightarrow e((\alpha_2^*)^\circ) = e(\alpha_1) \Rightarrow e(\alpha_2)$. Entonces $e((\alpha^*)^\circ) = e(\alpha_1 \to \alpha_2) = e(\alpha)$.
- Si $\alpha = \neg\beta$ entonces $e((\alpha^*)^\circ) = e(((\neg\beta)^*)^\circ) = e((\neg\beta^*)^\circ) = e(\neg(\beta^*)^\circ) = e((\beta^*)^\circ) \Rightarrow 0 = e(\beta) \Rightarrow 0 = e(\neg\beta) = e(\alpha)$.

■

De manera similar al corolario 9.5.21 se demuestra el siguiente resultado.

Corolario 9.5.24 *Consideremos la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ y su traducción $\cdot^*$ asociada. Entonces para toda fórmula α y $\Gamma \subseteq Form[X]$ se tiene que*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} \alpha \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y, g(t(x,y)))]} (\alpha^*)^\circ.$$

De los corolarios 9.5.12, 9.5.19, 9.5.21 y 9.5.24 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 9.5.25 *Las lógicas $\mathcal{I}$ y $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ son equivalentes.*

En particular la lógica $\mathcal{SIC}$ es equivalente a la lógica $\mathcal{I}$.

A continuación probaremos que toda extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ equivalente al intuicionismo debe ser de la forma $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ para algún $t(x,y) \in Impl\mathcal{SH}$.

Sea $\mathcal{A}$ una lógica semi-intuicionista equivalente a la lógica $\mathcal{I}$. Por definición existen funciones $h_1, h_2 : Form[X] \to Form[X]$ tal que para toda $\Gamma \subseteq Form[X]$ y $\phi \in Form[X]$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$ entonces $h_1\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} h_1\phi$

(b) $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \phi$ entonces $h_2\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} h_2\phi$

(c) $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \phi$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} h_2(h_1(\phi))$

(d) $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \phi$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} h_1(h_2(\phi))$.

Sea $t(x,y)$ el término asociado a la fórmula $(h_2(x \to y))^\circ$. Vamos a probar que la lógica $\mathcal{A}$ coincide con la lógica $\mathcal{SI}[x \to y, g(t(x,y))]$. Recordemos que $g(t(x,y))$ es una fórmula equivalente a $(h_2(x \to y))^\circ$. Luego basta probar que la lógica $\mathcal{A}$ coincide con la lógica $\mathcal{SI}[x \to y, (h_2(x \to y))^\circ]$.

Lema 9.5.26 *Sea $\alpha \in Form[X]$. Entonces $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{SI}[x\to y,(h_2(x\to y))^\circ]} (h_2(\alpha))^\circ$.*

Demostración Supongamos que $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha$. Entonces, por la condición (b), $\vdash_{\mathcal{I}} h_2(\alpha)$. Por el teorema 9.5.10, $\vdash_{\mathcal{SI}[x\to y,(h_2(x\to y))^\circ]} (h_2(\alpha))^\circ$.

Supongamos ahora que $\vdash_{\mathcal{SI}[x\to y,(h_2(x\to y))^\circ]} (h_2(\alpha))^\circ$. Consideremos la traducción $*$ asociada a la lógica $\mathcal{SI}[x \to y, (h_2(x \to y))^\circ]$ introducida en la definición 9.5.13. Por el teorema 9.5.15, $\vdash_{\mathcal{I}} ((h_2(\alpha))^\circ)^*$. En consecuencia, por el teorema 9.5.20, se tiene que $\vdash_{\mathcal{I}} h_2(\alpha)$. De la condición (a) se obtiene que $\vdash_{\mathcal{A}} h_1(h_2(\alpha))$. Por último es válido que $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ por la condición (d). ■

Lema 9.5.27 *$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to \beta$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} \alpha \to \beta$.*

Demostración Como en la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, (h_2(x \to y))^\circ)]$ las fórmulas $x \to y$ y $(h_2(x \to y))^\circ$ son equivalentes, entonces $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} \alpha \to \beta$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} (h_2(\alpha \to \beta))^\circ$. Por el lema 9.5.26, $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} \alpha \to \beta$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to \beta$. ■

Teorema 9.5.28 *$\mathcal{A}$ coincide con la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, (h_2(x \to y))^\circ)]$.*

Demostración Para probar nuestro objetivo determinaremos que $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ si y sólo si $\mathcal{SI}[(x \to y, (h_2(x \to y))^\circ)] \vdash \alpha$. Por el lema 8.2.2, $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{A}} (\beta \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \wedge \alpha)$. Por el lema 9.5.27, $\vdash_{\mathcal{A}} (\beta \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \wedge \alpha)$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} (\beta \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \wedge \alpha)$. Nuevamente por el lema 8.2.2, $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} (\beta \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \wedge \alpha)$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{SI}[(x\to y,(h_2(x\to y))^\circ)]} \alpha$. ■

De los resultados anteriores se deduce el siguiente corolario.

Corolario 9.5.29 *Toda extensión axiomática de la lógica $\mathcal{SI}$ equivalente al intuicionismo debe ser de la forma $\mathcal{SI}[x \to y, g(t(x, y))]$ para algún término $t(x, y)$ que defina una implicación de $\mathcal{SH}$.*

9.6. Modelo de Kripke equivalente a la semántica algebraica de la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x, y)))]$

Definición 9.6.1 [17] *Un* modelo de Kripke para el cálculo proposicional intuicionista *es una terna $\langle W, R, \Vdash_{\mathcal{I}}\rangle$ donde W es un conjunto, $R \subseteq W \times W$ es una relación reflexiva y transitiva y $\Vdash_{\mathcal{I}} \subseteq W \times Form[X]$ tal que para $v, w \in W$ se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *Si $w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ y wRv entonces $v \Vdash \alpha$ cuando α es atómica.*

(2) *$w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha \wedge \beta$ si y sólo si $w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ y $w \Vdash_{\mathcal{I}} \beta$.*

(3) *$w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha \vee \beta$ si y sólo si $w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ ó $w \Vdash_{\mathcal{I}} \beta$.*

(4) *$w \Vdash_{\mathcal{I}} \neg\alpha$ si y sólo si para todo v tal que wRv, $v \nVdash_{\mathcal{I}} \alpha$.*

(5) *$w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha \to \beta$ si y sólo si para todo v tal que wRv, si $w \Vdash_{\mathcal{I}} \alpha$ entonces $w \Vdash_{\mathcal{I}} \beta$.*

En [17] se demuestra que la clase de todas las fórmulas válidas en todo modelo de Kripke coincide con el conjunto de los teoremas lógicos del intuicionismo proposicional.

En esta sección vamos a dar una semántica de Kripke para cada una de las lógicas semi-intuicionistas equivalentes a $\mathcal{I}$.

Definiremos la noción de modelo de Kripke y de modelo algebraico de la lógica proposicional $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ de manera similar a lo realizado en [17] para la lógica intuicionista. Observar que la definición dada coincide con la de Fitting [17] (ver definición 9.6.1) excepto en la condición (5) que varía según cada lógica.

Definición 9.6.2 $\langle W, R, \Vdash_t \rangle$ *es un* modelo de Kripke de la lógica proposicional $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ (ó $t(x,y)$-modelo de Kripke) *si W es un conjunto, $R \subseteq W \times W$ es una relación reflexiva y transitiva y $\Vdash_t \subseteq W \times Form[X]$ es una relación tal que para $v, w \in W$ se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *Si $w \Vdash_t \alpha$ y wRv entonces $v \Vdash_t \alpha$ cuando α es atómica*

(2) *$w \Vdash_t \alpha \wedge \beta$ si y sólo si $w \Vdash_t \alpha$ y $w \Vdash_t \beta$*

(3) *$w \Vdash_t \alpha \vee \beta$ si y sólo si $w \Vdash_t \alpha$ ó $w \Vdash_t \beta$*

(4) *$w \Vdash_t \neg\alpha$ si y sólo si para todo v tal que wRv, $v \nVdash_t \alpha$*

(5) *$w \Vdash_t \alpha \to \beta$ si y sólo si $\mathbf{P}_t(w)$*

siendo $\mathbf{P}_t(w)$ un predicado asociado al término $t(x,y)$ definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_t(w) \textit{ si y sólo si } \begin{cases} w \Vdash_t \alpha & si \;\; t(x,y) = x \\ w \Vdash_t \beta & si \;\; t(x,y) = y \\ w \Vdash_t \alpha \textit{ y } w \nVdash_t \alpha & si \;\; t(x,y) = 0 \\ \mathbf{P}_{t_1}(w) \textit{ y } \mathbf{P}_{t_2}(w) & si \;\; t(x,y) = t_1(x,y) \wedge t_2(x,y) \\ \mathbf{P}_{t_1}(w) \textit{ ó } \mathbf{P}_{t_2}(w) & si \;\; t(x,y) = t_1(x,y) \vee t_2(x,y) \\ \textit{para todo } v \in W \textit{ tal que } wRv, & \\ \textit{si } \mathbf{P}_{t_1}(v) \textit{ entonces } \mathbf{P}_{t_2}(v) & si \;\; t(x,y) = t_1(x,y) \Rightarrow_H t_2(x,y) \end{cases}$$

con $t_1(x,y)$ y $t_2(x,y)$ términos de Heyting.

Por ejemplo, consideremos el término $(x \Rightarrow_H y) \wedge (y \Rightarrow_H x)$. En este caso $\mathbf{P}_{(x \Rightarrow_H y) \wedge (y \Rightarrow_H x)}(w)$ es el predicado si $w \Vdash \alpha$ entonces $w \Vdash \beta$ y si $w \Vdash \beta$ entonces $w \Vdash \alpha$. Es decir, $w \Vdash \alpha$ si y sólo si $w \Vdash \beta$.

Definición 9.6.3 *Una terna $\langle A, \Rightarrow, m \rangle$ se dice un* $t(x,y)$-modelo algebraico para la lógica proposicional $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ *si $\langle A, \Rightarrow \rangle$ es un álgebra de semi-Heyting en la variedad $\mathcal{SH}[(x \to y, g(t(x,y)))]$ y $m : Form[X] \to A$ es una aplicación que satisface las siguientes condiciones:*

(a) *$m(\alpha \wedge \beta) = m(\alpha) \wedge m(\beta)$.*

(b) $m(\alpha \vee \beta) = m(\alpha) \vee m(\beta)$.

(c) $m(\neg\alpha) = m(\alpha) \Rightarrow 0$.

(d) $m(\alpha \to \beta) = m(\alpha) \Rightarrow m(\beta)$.

Observemos que $m(\alpha \to \beta) = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

A partir de un $t(x, y)$-modelo de Kripke $\langle W, R, \Vdash_t\rangle$, construiremos un $t(x, y)$-modelo algebraico $\langle A, \Rightarrow, m\rangle$ para la lógica $\mathcal{SI}[(x \to y, g(t(x, y)))]$ tal que $m(\alpha) = 1$ si y sólo si $w \Vdash_t \alpha$ para todo $w \in W$.

Consideremos $\langle W, R, \Vdash_t\rangle$ un $t(x, y)$-modelo de Kripke. Diremos que un conjunto $X \subseteq W$ es *creciente* si para todo $x \in X$ y $v \in W$ si xRv entonces $v \in X$. Sea A el conjunto de crecientes de W. En A definimos $X \Rightarrow_H Y$ como el mayor creciente contenido en $(W\backslash X)\cup Y$. La implicación $\Rightarrow_H$ es de Heyting ([17]). Entonces en A definimos la operación $X \Rightarrow Y = t^{\mathbf{A}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in A$ y la función $m : Form[X] \to A$ como $m(\alpha) = \{w \in W : \ w \Vdash_t \alpha\}$. Vamos a demostrar que $\langle A, \Rightarrow, m\rangle$ es un $t(x, y)$-modelo algebraico.

Para lograr el objetivo propuesto en el párrafo anterior demostraremos algunos lemas necesarios.

Lema 9.6.4 *La función $m : Form[X] \to A$ definida como $m(\alpha) = \{w \in W : \ w \Vdash_t \alpha\}$ está bien definida.*

Demostración Sea $\alpha \in Form[X]$. Queremos determinar que $m(\alpha) \in A$, es decir, que $m(\alpha)$ es un conjunto creciente de W. Sean $w \in m(\alpha)$ y $v \in W$ tal que wRv. Observemos que como $m(\alpha) = \{w \in W : \ w \Vdash_t \alpha\}$ queremos probar que si $w \Vdash_t \alpha$ entonces $v \Vdash_t \alpha$. En efecto veamos, procediendo por inducción sobre la construcción de la fórmula α, que si $w \Vdash_t \alpha$ y wRv entonces $v \Vdash_t \alpha$.

Supongamos que α es atómica. Por (1) resulta inmediato que $v \Vdash_t \alpha$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in Form[X]$ tales que $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$. Como $w \Vdash_t \alpha$, de (2), se tiene que $w \Vdash_t \alpha_1$ y $w \Vdash_t \alpha_2$. Por hipótesis inductiva sobre las fórmulas α_1 y α_2, $v \Vdash_t \alpha_1$ y $v \Vdash_t \alpha_2$. Entonces $v \Vdash_t \alpha$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in Form[X]$ tales que $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$. Como $w \Vdash_t \alpha$, de (3), se tiene que $w \Vdash_t \alpha_1$ ó $w \Vdash_t \alpha_2$. Por hipótesis inductiva sobre las fórmulas α_1 y α_2, $v \Vdash_t \alpha_1$ ó $v \Vdash_t \alpha_2$. Entonces $v \Vdash_t \alpha$.

Supongamos ahora que $\alpha = \neg\beta$ con $\beta \in Form[X]$. Como $w \Vdash_t \neg\beta$, por (4), se tiene que para todo $z \in W$ tal que wRz, $z \nVdash \beta$. Sea $z' \in W$ tal que vRz'. Como wRv, vRz' y R es transitiva entonces wRz'. Luego, de lo anterior, $z' \nVdash \beta$. Consecuentemente $v \Vdash_t \neg\beta$.

Por último, consideremos $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in Form[X]$. Como $w \Vdash_t \alpha_1 \to \alpha_2$, se satisface $\mathbf{P}_t(w)$. Ahora vamos a probar, por inducción sobre la construcción del término $t(x, y)$, que

$$\text{si } \mathbf{P}_t(w) \text{ entonces } \mathbf{P}_t(v).$$

- Si $t(x, y) = x$ y $\mathbf{P}_t(w)$ entonces, de (5), $w \Vdash_t \alpha_1$. Luego por hipótesis inductiva sobre α_1, $v \Vdash_t \alpha_1$. Entonces, nuevamente por (5), $\mathbf{P}_t(v)$.

- Si $t(x,y) = y$ y $\mathbf{P}_t(w)$ entonces, de (5), $w \Vdash_t \alpha_2$. Luego por hipótesis inductiva sobre α_2, $v \Vdash_t \alpha_2$. Entonces, nuevamente por (5), $\mathbf{P}_t(v)$.
- Supongamos que $t(x,y) = 0$ y $\mathbf{P}_t(w)$. Entonces, por la condición (5), $w \Vdash_t \alpha$ y $w \nVdash_t \alpha$ (contradicción).
- Sean $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$ tales que $t(x,y) = t_1(x,y) \wedge t_2(x,y)$. Si $\mathbf{P}_t(w)$ entonces $\mathbf{P}_{t_1}(w)$ y $\mathbf{P}_{t_2}(w)$. Por hipótesis inductiva, $\mathbf{P}_{t_1}(v)$ y $\mathbf{P}_{t_2}(v)$. En consecuencia $\mathbf{P}_t(v)$.
- Sean $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$ tales que $t(x,y) = t_1(x,y) \vee t_2(x,y)$. Si $\mathbf{P}_t(w)$ entonces $\mathbf{P}_{t_1}(w)$ ó $\mathbf{P}_{t_2}(w)$. Por hipótesis inductiva, $\mathbf{P}_{t_1}(v)$ ó $\mathbf{P}_{t_2}(v)$. En consecuencia $\mathbf{P}_t(v)$.
- Supongamos que $t(x,y) = t_1(x,y) \Rightarrow_H t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$. Queremos probar en este caso que para todo $z \in W$ que satisface que vRz y $\mathbf{P}_{t_1}(z)$ entonces se tiene que $\mathbf{P}_{t_2}(z)$. Sea $z \in W$ tal que vRz y $\mathbf{P}_{t_1}(z)$. Como $\mathbf{P}_t(w)$ entonces para todo $z' \in W$ tal que wRz', si $\mathbf{P}_{t_1}(z')$ entonces $\mathbf{P}_{t_2}(z')$. Como wRv y vRz entonces wRz. Luego $\mathbf{P}_{t_2}(z)$. Por lo tanto $\mathbf{P}_t(v)$.

Luego, de los casos anteriores, si $\mathbf{P}_t(w)$ entonces $\mathbf{P}_t(v)$. Entonces como $w \Vdash_t \alpha_1 \to \alpha_2$ se tiene $\mathbf{P}_t(w)$. Entonces $\mathbf{P}_t(v)$. Consecuentemente $v \Vdash_t \alpha_1 \to \alpha_2$. ■

Lema 9.6.5 *La función $m : Form[X] \to A$ definida como $m(\alpha) = \{w \in W : \ w \Vdash_t \alpha\}$ satisface las condiciones de la definición 9.6.3.*

Demostración Por el lema 9.6.4, m está bien definida. Veamos que esta función satisface las condiciones (a) a (d) de la definición 9.6.3. Consideremos $\alpha, \beta \in Form[X]$.

Veamos que $m(\alpha \wedge \beta) = m(\alpha) \cap m(\beta)$. Sea $w \in m(\alpha \wedge \beta)$. Entonces, por definición de la función m, $w \Vdash_t \alpha \wedge \beta$. Luego $w \Vdash_t \alpha$ y $w \Vdash_t \beta$. Como consecuencia, $w \in m(\alpha)$ y $w \in m(\beta)$. Por lo tanto $m(\alpha \wedge \beta) \subseteq m(\alpha) \cap m(\beta)$. La otra inclusión es similar.

Veamos ahora que $m(\alpha \vee \beta) = m(\alpha) \cup m(\beta)$. Sea $w \in m(\alpha \vee \beta)$. Entonces, por definición de la función m, $w \Vdash_t \alpha \vee \beta$. Luego $w \Vdash_t \alpha$ ó $w \Vdash_t \beta$. Como consecuencia, $w \in m(\alpha)$ ó $w \in m(\beta)$. Por lo tanto $m(\alpha \vee \beta) \subseteq m(\alpha) \cup m(\beta)$. La otra inclusión es similar.

A continuación queremos probar que $m(\neg\alpha) = m(\alpha) \Rightarrow \emptyset$. Observemos, por un lado, que $m(\neg\alpha) = \{w \in W : \ w \Vdash_t \neg\alpha\}$ y, por otro lado, por definición de la implicación, $m(\alpha) \Rightarrow \emptyset = W \setminus m(\alpha) = \{w \in W : \ w \nVdash_t \alpha\}$. Veamos primero que $\{w \in W : \ w \Vdash_t \neg\alpha\} \subseteq \{w \in W : \ w \nVdash_t \alpha\}$. Sea $w \in W$ tal que $w \Vdash_t \neg\alpha$. Como R es reflexiva entonces $w \nVdash_t \alpha$. Para la otra inclusión, supongamos que $w \nVdash_t \alpha$ y consideremos $v \in W$ tal que wRv. Como m está bien definida, $m(\alpha) \Rightarrow \emptyset \in A$ y, en consecuencia, $m(\alpha) \Rightarrow \emptyset$ es un conjunto creciente de W. Luego $v \in m(\alpha) \Rightarrow \emptyset$. Entonces $v \nVdash_t \alpha$. Por lo tanto $w \Vdash_t \neg\alpha$.

Por último vamos a probar que $m(\alpha \to \beta) = m(\alpha) \Rightarrow m(\beta)$. Observemos que $m(\alpha \to \beta) = \{w \in W : \ w \Vdash_t \alpha \to \beta\} = \{w \in W : \ \mathbf{P}_t(w)\}$ y que $m(\alpha) \Rightarrow m(\beta) = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Ahora demostraremos que

$$\{w \in W : \ \mathbf{P}_t(w)\} = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$$

procediendo por inducción sobre la construcción del término $t(x,y)$.

- Supongamos que $t(x, y) = x$. Entonces $\{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\} = \{w \in W : w \Vdash_t \alpha\} = m(\alpha) = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

- Supongamos que $t(x, y) = y$. Entonces $\{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\} = \{w \in W : w \Vdash_t \beta\} = m(\beta) = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

- Si $t(x, y) = 0$ entonces $\{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\} = \{w \in W : w \Vdash_t \alpha \text{ y } w \nVdash_t \alpha\} = \emptyset = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

- Estudiemos el caso en que $t(x, y) = t_1(x, y) \wedge t_2(x, y)$ con $t_1(x, y), t_2(x, y) \in Term[X]$. Luego $\{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\} = \{w \in W : \mathbf{P}_{t_1}(w) \text{ y } \mathbf{P}_{t_2}(w)\} = \{w \in W : \mathbf{P}_{t_1}(w)\} \cap \{w \in W : \mathbf{P}_{t_2}(w)\} = t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \cap t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

- Estudiemos el caso en que $t(x, y) = t_1(x, y) \vee t_2(x, y)$ con $t_1(x, y), t_2(x, y) \in Term[X]$. Luego $\{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\} = \{w \in W : \mathbf{P}_{t_1}(w) \text{ ó } \mathbf{P}_{t_2}(w)\} = \{w \in W : \mathbf{P}_{t_1}(w)\} \cup \{w \in W : \mathbf{P}_{t_2}(w)\} = t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \cup t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) = t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

- Supongamos ahora que $t(x, y) = t_1(x, y) \Rightarrow_H t_2(x, y)$ con $t_1(x, y), t_2(x, y) \in Term[X]$. Observemos que en este caso $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) = t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \Rightarrow_H t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ es el mayor creciente contenido en $\big(W \setminus t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))\big) \cup t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Probaremos la igualdad por doble inclusión.

  Veamos que $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \subseteq \{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\}$. Sea $w \in t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Por (5) de la definición 9.6.2 basta considerar $v \in W$ tal que wRv y $\mathbf{P}_{t_1}(v)$ y probar $\mathbf{P}_{t_2}(v)$. Como $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ es creciente se tiene que $v \in t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Como $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \subseteq \big(W \setminus t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))\big) \cup t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ entonces $v \in W \setminus t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ ó $v \in t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Por hipótesis inductiva sobre el término $t_1(x, y)$ se tiene que $\{w \in W : \mathbf{P}_{t_1}(w)\} = t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Entonces, como $\mathbf{P}_{t_1}(v)$, $v \in t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Consecuentemente $v \in t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Luego $\mathbf{P}_{t_2}(v)$ pues, por hipótesis inductiva sobre el término $t_2(x, y)$, $\{w \in W : \mathbf{P}_{t_2}(w)\} = t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

  Veamos ahora que $\{w \in W : \mathbf{P}_t(w)\} \subseteq t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Sea $w \in W$ tal que $\mathbf{P}_t(w)$. Consideremos el conjunto creciente $M = \{v \in W : wRv\}$. Vamos a probar que $M \subseteq t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ y, consecuentemente, $w \in t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ pues R es una relación reflexiva. Sea $v \in M$. Si $v \notin W \setminus t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ entonces $v \in t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Por hipótesis inductiva sobre el término $t_1(x, y)$, $\mathbf{P}_{t_1}(v)$. Como se verifica $\mathbf{P}_t(w)$ tenemos que $\mathbf{P}_{t_2}(v)$ pues wRv. Por hipótesis inductiva sobre el término $t_2(x, y)$, $v \in t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Por lo tanto $M \subseteq \big(W \setminus t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))\big) \cup t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Como $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$ es el mayor creciente, $M \subseteq t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$.

■

Teorema 9.6.6 *$\langle A, \Rightarrow, m\rangle$ es un $t(x, y)$-modelo algebraico tal que para toda fórmula α, $m(\alpha) = W$ si y sólo si $w \Vdash_t \alpha$ para todo $w \in W$.*

Demostración Es claro que $\mathbf{A} = \langle A, \cap, \cup, \emptyset, W\rangle$ es un reticulado acotado. En A definimos $X \Rightarrow_H Y$ como el mayor creciente contenido en $(W \setminus X) \cup Y$. La implicación $\Rightarrow_H$ es de Heyting ([17]). Entonces en A definimos la implicación $X \Rightarrow Y = t^{\mathbf{A}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in A$ y, en consecuencia, se tiene que $\langle A, \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, W\rangle$ es un álgebra de semi-Heyting en la variedad $\mathcal{SH}[(x \to y, g(t(x,y)))]$. Por el lema 9.6.5, la función $m : Form[X] \to A$ satisface las condiciones (a) a (d) de la definición 9.6.3. De la definición de m, $m(\alpha) = W$ si y sólo si $w \Vdash_t \alpha$ para todo $w \in W$. ∎

A continuación, a partir de un $t(x,y)$-modelo algebraico $\langle A, \Rightarrow, m\rangle$ queremos hallar un $t(x,y)$–modelo de Kripke $\langle W, R, \Vdash_t\rangle$ tal que $(W,R) \Vdash_t \alpha$ si y sólo si $m(\alpha) = 1$.

Sea $\langle A, \Rightarrow, m\rangle$ un $t(x,y)$-modelo algebraico. Sean W el conjunto de filtros primos de A, R la relación de inclusión y $\Vdash_t$ definida como $F \Vdash_t \alpha$ si y sólo si $m(\alpha) \in F$. El objetivo será determinar que $\langle W, R, \Vdash_t\rangle$ es un $t(x,y)$-modelo de Kripke.

Veamos el siguiente lema que será utilizado en el teorema presentado más abajo.

Lema 9.6.7 *Sea $F \in W$. Entonces $\mathbf{P}_t(F)$ si y sólo si $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$.*

Demostración Demostraremos este lema por inducción sobre la construcción del término $t(x,y)$.

- Supongamos que $t(x,y) = x$. Si $\mathbf{P}_t(F)$ entonces $F \Vdash_t \alpha$. Luego, por definición de $\Vdash_t$, $m(\alpha) \in F$. Entonces $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. La recíproca es análoga.

- Supongamos que $t(x,y) = y$. Si $\mathbf{P}_t(F)$ entonces $F \Vdash_t \beta$. Luego, por definición de $\Vdash_t$, $m(\beta) \in F$. Entonces $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. La recíproca es análoga.

- Si $t(x,y) = 0$ y $\mathbf{P}_t(F)$ entonces $F \Vdash_t \alpha$ y $F \not\Vdash_t \alpha$ (contradicción). Por otra parte como F es filtro primo, $0 \notin F$.

- Estudiemos el caso en que $t(x,y) = t_1(x,y) \wedge t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$. Si $\mathbf{P}_t(F)$ entonces $\mathbf{P}_{t_1}(F)$ y $\mathbf{P}_{t_2}(F)$. Por hipótesis inductiva sobre los términos $t_1(x,y)$ y $t_2(x,y)$, $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$ y $t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. Como F es un filtro primo, $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. La recíproca es similar.

- Veamos si $t(x,y) = t_1(x,y) \vee t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$. Si $\mathbf{P}_t(F)$ entonces $\mathbf{P}_{t_1}(F)$ ó $\mathbf{P}_{t_2}(F)$. Por hipótesis inductiva sobre los términos $t_1(x,y)$ y $t_2(x,y)$, $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$ ó $t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. Como F es un filtro primo, $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. La recíproca es similar.

- Supongamos ahora que $t(x,y) = t_1(x,y) \Rightarrow_H t_2(x,y)$ con $t_1(x,y), t_2(x,y) \in Term[X]$.

  Si $\mathbf{P}_t(F)$ entonces para todo $F_1 \in W$ tal que $F \subseteq F_1$ si $\mathbf{P}_{t_1}(F_1)$ entonces $\mathbf{P}_{t_2}(F_1)$. Supongamos que $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \notin F$. Es decir, $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \Rightarrow_H t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \notin F$. Por [17, Lemma 6.2] se tiene que el filtro generado por F y $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$, $Fg(F, t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)))$, no contiene al elemento $t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))$. Entonces por [17, Lemma 6.4], existe un filtro primo F_1 tal que $Fg(F, t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))) \subseteq F_1$ y $t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \notin F_1$. Luego $F \subseteq F_1$ y, por hipótesis inductiva sobre el término $t_2(x,y)$, no es cierto que $\mathbf{P}_{t_2}(F_1)$. Como $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F_1$, por hipótesis inductiva sobre el término $t_1(x,y)$, se tiene que $\mathbf{P}_{t_1}(F_1)$ (contradicción). Por lo tanto $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$.

Para la recíproca supongamos que $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. Entonces $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \Rightarrow_H t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. Sea $F_1 \in W$ tal que $F \subseteq F_1$ y supongamos que $P_{t_1}(F_1)$. Resta probar que se satisface la condición $\mathbf{P}_{t_2}(F_1)$. Como $P_{t_1}(F_1)$, entonces, por hipótesis inductiva sobre el término $t_1(x, y)$, $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F_1$. Además $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \Rightarrow_H t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F_1$ pues $F \subseteq F_1$. Como consecuencia que F_1 es un filtro, $t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \wedge (t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \Rightarrow_H t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))) = t_1^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \wedge t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F_1$. Luego $t_2^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta))) \in F_1$ y, por hipótesis inductiva sobre el término $t_2(x, y)$, $\mathbf{P}_{t_2}(F_1)$.

■

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.6.8 *$\langle W, R, \Vdash_t \rangle$ es un $t(x, y)$-modelo de Kripke tal que $(W, R) \Vdash_t \alpha$ si y sólo si $m(\alpha) = 1$.*

Demostración Las condiciones (1), (2) y (3) de la definición 9.6.2 resultan inmediatas y se demuestran como en [17].

Veamos la condición (4). Queremos probar que $F \Vdash_t \neg\alpha$ si y sólo si para todo filtro primo F' tal que $F \subseteq F'$, $F' \nVdash_t \alpha$. Como m satisface las condiciones (a) a (d) de la definición 9.6.3, $F \Vdash_t \neg\alpha$ si y sólo si $m(\neg\alpha) \in F$ si y sólo si $m(\alpha) \Rightarrow 0 \in F$. En [17] se prueba que para todo filtro primo F' tal que $F \subseteq F'$, $F' \nVdash_t \alpha$ si y sólo si $m(\alpha) \Rightarrow_H 0 \in F$. Por el lema 9.4.2, $m(\alpha) \Rightarrow 0 = m(\alpha) \Rightarrow_H 0$.

Por último, probemos la condición (5). Es decir queremos probar que $F \Vdash_t \alpha \to \beta$ si y sólo si $\mathbf{P}_t(F)$. Por definición de la relación $\Vdash_t$, $F \Vdash_t \alpha \to \beta$ si y sólo si $m(\alpha \to \beta) \in F$. Como m satisface las condiciones (a) a (d), $F \Vdash_t \alpha \to \beta$ si y sólo si $t^{\mathbf{A}}(m(\alpha), m(\beta)) \in F$. Por el lema 9.6.7, tenemos que $F \Vdash_t \alpha \to \beta$ si y sólo si $\mathbf{P}_t(F)$. La condición $(W, R) \Vdash_t \alpha$ si y sólo si $m(\alpha) = 1$ es inmediata. ■

De los teoremas 9.6.6 y 9.6.8 se deduce el siguiente teorema.

Teorema 9.6.9 *α es válida en todo $t(x, y)$-modelo algebraico si y sólo si α es válida en todo $t(x, y)$-modelo de Kripke.*

9.7. Dualidad Topológica

El objetivo principal de la sección es, dado un término de Heyting $t(x, y)$, determinar cuáles son los espacios de Priestley duales de las t-álgebras y los morfismos de estos espacios que se corresponden con los homomorfismos entre las t-álgebras.

Un *espacio topológico ordenado* es una terna $(X, \tau, \leq)$, donde X es un conjunto, τ una topología definida en X y $\leq$ una relación de orden parcial definida sobre X. Además $(X, \tau, \leq)$ se dice *totalmente disconexo en el orden* si para cada $x, y \in X$, si $x \nleq y$ entonces existe un abierto, cerrado y creciente U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Un *espacio de Priestley* es un espacio topólogico ordenado, totalmente disconexo en el orden y compacto.

Consideremos un reticulado distributivo acotado $\mathbf{A}$ y $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley y llamemos $\mathbb{X}(\mathbf{A})$ el conjunto de filtros primos de $\mathbf{A}$ y $\mathbb{D}(X)$ el conjunto de abiertos, cerrados y crecientes de X.

En [28] se demuestran los siguientes resultados:

1. $(\mathbb{X}(\mathbf{A}), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Priestley, donde τ es la topología con subbase formada por los conjuntos de la forma $\sigma(a) = \{P \in \mathbb{X}(\mathbf{A}) : \ a \in P\}$ y $\sigma(a)^c = \{P \in \mathbb{X}(\mathbf{A}) : a \notin P\}$.

2. $(\mathbb{D}(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$ es un reticulado distributivo acotado.

3. $\mathbf{A} \simeq \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{A}))$ donde el isomorfismo está determinado por la aplicación $a \mapsto \sigma(a)$.

4. X y $\mathbb{X}(\mathbb{D}(X))$ son isomorfos como conjuntos ordenados y homeomorfos como espacios topológicos.

5. Si $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ es un homomorfismo de reticulados entonces la función $\mathbb{X}(h) : \mathbb{X}(\mathbf{A}_2) \to \mathbb{X}(\mathbf{A}_1)$ definida como $\mathbb{X}(h)(P) = h^{-1}(P)$ es una función continua y creciente.

6. Si $\phi : X \to Y$ es una función continua y creciente entonces la función $\mathbb{D}(\phi) : \mathbb{D}(Y) \to \mathbb{D}(X)$ definida como $\mathbb{D}(\phi)(U) = \phi^{-1}(U)$ es un homomorfismo de reticulados distributivos acotados.

7. La categoría $\mathcal{D}$ de reticulados distributivos acotados y homomorfismos y la categoría $\mathcal{P}$ de espacios de Priestley con las funciones continuas y crecientes son naturalmente equivalentes.

Para lo que sigue, necesitaremos las siguientes definiciones: Un espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ es un *espacio de Heyting* si para todo W abierto y cerrado de X, $(W]$ es un abierto y cerrado. Si $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ es un homomorfismo de conjuntos ordenados, diremos que f es un *h-morfismo* si para todo $x \in X$ y $z \in Y$ con $f(x) \leq z$ existe un $x' \in X$ tal que $x \leq x'$ y $f(x') = z$. Notaremos $\mathcal{HP}$ a la categoría cuyos objetos son espacios de Heyting y cuyos morfimos son funciones continuas, crecientes y h-morfimos.

En [29] se demuestra que la categoría de las álgebras de Heyting con los homomorfismos de Heyting es naturalmente equivalente a la categoría $\mathcal{HP}$.

Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle$ un álgebra de semi-Heyting y consideremos su dual como reticulado distributivo acotado. Veamos algunas propiedades que serán útiles en el resto de la sección.

Lema 9.7.1 *Sea $\langle \mathbf{A}, \Rightarrow \rangle \in \mathcal{SH}$ y sean $a, b \in A$. Entonces $\sigma(a \Rightarrow (a \wedge b)) = \sigma(a \Rightarrow_H b) = (\sigma(a) \cap \sigma(b)^c]^c$.*

Del lema 9.4.1 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.7.2 *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}$, entonces $(\mathbb{X}(\mathbf{A}), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Heyting.*

Teorema 9.7.3 *Sean $\mathbf{A}_1 = \langle A_1; \wedge, \vee, \Rightarrow_1, 0, 1\rangle, \mathbf{A}_2 = \langle A_2; \wedge, \vee, \Rightarrow_2, 0, 1\rangle \in \mathcal{SH}$ y $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ un homomorfismo de semi-Heyting. Entonces $\mathbb{X}(h) : \mathbb{X}(\mathbf{A}_2) \to \mathbb{X}(\mathbf{A}_1)$ es un h-morfismo.*

Demostración Como $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ es un homomorfismo de semi-Heyting entonces h es homomorfismo de Heyting. En efecto, $h(a \Rightarrow_{H_1} b) = h(a \Rightarrow_1 (a \wedge b)) = h(a) \Rightarrow_2 (h(a) \wedge h(b)) = h(a) \Rightarrow_{H_2} h(b)$. Luego, por [29], $\mathbb{X}(h)$ es un h-morfismo. ■

Veamos cómo se define la implicación en el espacio dual a través del término de Heyting $t(x, y)$.

Lema 9.7.4 *Sea* $(X, \tau, \leq) \in \mathcal{HP}$. *Entonces* $(\mathbb{D}(X), \Rightarrow) \in \mathcal{SH}_t$ *donde* $U \Rightarrow V = t^{\mathbb{D}(X)}(U, V)$ *siendo* $U \Rightarrow_H V = (U \cap V^c]^c$.

Demostración En [29], se demuestra que si $U \Rightarrow_H V = (U \cap V^c]^c$ entonces se tiene que $(\mathbb{D}(X), \Rightarrow_H) \in \mathcal{H}$. De lo anterior resulta el hecho que $(\mathbb{D}(X), \Rightarrow) \in \mathcal{SH}_t$. ■

Lema 9.7.5 *Sea* $g : X \to Y$ *un morfismo de la categoría* $\mathcal{HP}$. *Entonces* $\mathbb{D}(g) : \mathbb{D}(Y) \to \mathbb{D}(X)$ *es un homomorfismo de semi-Heyting.*

Demostración De [28] sabemos que $\mathbb{D}(g)$ es un homorfismo de reticulados. En [29] se demuestra que $\mathbb{D}(g)\left((U \cap V^c]^c\right) = (\mathbb{D}(g)(U) \cap \mathbb{D}(g)(V)^c]^c$. Por construcción de la función $\Rightarrow$ en el dual resulta el lema. ■

La demostración del siguiente teorema resulta inmediata del lema 9.7.1.

Teorema 9.7.6 *Sea* $(\mathbf{A}, \Rightarrow) \in \mathcal{SH}_t$ *y sean* $a, b \in \mathbf{A}$. *Entonces* $\sigma(a \Rightarrow b) = \sigma(a) \Rightarrow \sigma(b)$.

Haciendo abuso de notación, llamamos $\mathcal{SH}_t$, también, a la categoría cuyos objetos son las t-álgebras y las flechas son los homomorfismos de semi-Heyting. El siguiente teorema central se deduce de los resultados previos:

Teorema 9.7.7 *La categoría* $\mathcal{SH}_t$ *es naturalmente equivalente a la categoría* $\mathcal{HP}$.

Corolario 9.7.8 *El espacio de Priestley dual de las álgebras de Heyting coincide con el espacio dual de las* t*-álgebras de semi-Heyting.*

Capítulo 10

Apéndice

10.1. Demostraciones del capítulo 2

Demostración 10.1.1 Veamos primero la implicación (1) $\Rightarrow$ (2). Como $\mathbf{L} =< L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1 >\in \mathcal{SH}$, $\mathbf{L}$ satisface (2)(a) y (2)(b). Sean $a, b, c \in L$ tal que $b < a < c$. Luego $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c] = a \wedge [b \rightarrow a]$.

Ahora veamos la recíproca. Sean $a, b, c \in L$. Basta ver que $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c)]$.

Caso 1: $b > c$ $(a \wedge b \geq a \wedge c)$.

*) Si $a \wedge b = a \wedge c$ entonces, como L es una cadena, $a \wedge c = a$ ó $a \wedge c = b$. Si $a \wedge c = b$, $a \wedge c = b > c$ (absurdo). Luego $a \wedge c = a$.

*) Si $a \wedge b > a \wedge c$ entonces, por hipótesis, $a \wedge b \rightarrow a \wedge c = a \wedge c$.

Ahora, por hipótesis, $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge c$. Entonces

$$\begin{aligned} a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c)] &= \begin{cases} a \wedge 1, & a \wedge b = a \wedge c \\ a \wedge a \wedge c, & a \wedge b > a \wedge c \end{cases} \\ &= \begin{cases} a, & a \wedge b = a \wedge c \\ a \wedge c, & a \wedge b > a \wedge c \end{cases} \\ &= \begin{cases} a \wedge c, & a \wedge b = a \wedge c \\ a \wedge c, & a \wedge b > a \wedge c \end{cases} \\ &= a \wedge c. \end{aligned}$$

Caso 2: $b = c$. En este caso $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge (b \rightarrow b) = a \wedge 1 = a$. Entonces $a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c] = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge b)] = a \wedge 1 = a$.

Caso 3: $a \leq b$ $(b < c)$. En este caso

$$\begin{aligned} a \wedge (b \rightarrow c) &= a \wedge b \wedge (b \rightarrow c) && \text{pues } a = a \wedge b \\ &= a \wedge b \wedge c \\ &= a. && \text{pues } a \leq b < c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c)] &= a \wedge [a \rightarrow (a \wedge c)] && \text{pues } a = a \wedge b \\ &= a \wedge a \wedge c \\ &= a. && \text{pues } a \leq b < c \end{aligned}$$

Caso 4: $a > c$ ($b < c$, $b < a$). Como $a \wedge b = b$ y $a \wedge c = c$, $a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)] = a \wedge (b \to c)$.

Caso 5: $a = c$ ($b < c$, $b < a$). Entonces

$$\begin{array}{rcll} a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)] & = & c \wedge [(c \wedge b) \to (c \wedge c)] & \text{pues } c = a \\ & = & c \wedge (b \to c) & \text{pues } b < c \\ & = & a \wedge (b \to c). & \text{pues } c = a \end{array}$$

Caso 6: $b < a < c$. En este caso

$$\begin{array}{rcll} a \wedge (b \to c) & = & a \wedge (b \to a) & \text{por hipótesis} \\ & = & a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)]. & \text{pues } b < a < c \end{array}$$

De los casos anteriores, $a \wedge (b \to c) = a \wedge [(a \wedge b) \to (a \wedge c)]$.

■

Demostración 10.1.2 Queremos probar que $L \models x \wedge (y \Rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)]$. Sean $b, c, d \in L$ con $c < b < d$. Entonces $c = a_r, b = a_l, d = a_m$ con $0 \leq r < l < m \leq n-1$. Por lo tanto $c \Rightarrow b = a_r \Rightarrow a_l = x(r)_{j_r}(n-l)$. Entonces $c \Rightarrow d = a_r \Rightarrow a_m = x(r)_{j_r}(n-m)$. Por un lado

$$x(r)_{j_r}(n-l) \in E^{j_r}_{n-l} = \begin{cases} \{a_{j_r}\} & \text{si } \; n-l < n-j_r \\ \left[a_{n-(n-l)}\right) & \text{si } \; n-l \geq n-j_r \end{cases}$$

y por el otro

$$x(r)_{j_r}(n-m) \in E^{j_r}_{n-m} = \begin{cases} \{a_{j_r}\} & \text{si } \; n-m < n-j_r \\ \left[a_{n-(n-m)}\right) & \text{si } \; n-m \geq n-j_r \end{cases} .$$

Como $l < m$ entonces $n-l > n-m$.

Caso 1: $n - j_r \leq n - m < n - l$. En este caso $x(r)_{j_r}(n-l) \geq a_l$ y $x(r)_{j_r}(n-m) \geq a_m$. Entonces $a_l \wedge x(r)_{j_r}(n-l) = a_l$ y $a_l \wedge x(r)_{j_r}(n-m) = a_l$.

Caso 2: $n-m < n-j_r \leq n-l$. En este caso $x(r)_{j_r}(n-l) \geq a_l$ y $x(r)_{j_r}(n-m) = a_{j_r}$. Como $n - j_r \leq n - l$, entonces $j_r \geq l$. Luego $a_{j_r} \geq a_l$. Entonces $a_l \wedge x(r)_{j_r}(n-l) = a_l$ y $a_l \wedge x(r)_{j_r}(n-m) = a_l$.

Caso 3: $n - m < n - l < n - j_r$. En este caso $x(r)_{j_r}(n-l) = a_{j_r}$ y $x(r)_{j_r}(n-m) = a_{j_r}$. Luego $a_l \wedge x(r)_{j_r}(n-l) = a_l \wedge x(r)_{j_r}(n-m)$.

De los casos anteriores, $b \wedge (c \Rightarrow b) = b \wedge (c \Rightarrow d)$.

■

Demostración 10.1.3 Claramente, $\mathbf{L}^i \models x \Rightarrow x \approx 1$.

Veamos que $\mathbf{L}^i \models x \wedge (x \Rightarrow y) \approx x \wedge y$. Sean $b, c \in L^i$ con $b < c$.

Caso 1: $b, c \in L$. En este caso $b \wedge (b \Rightarrow c) = b \wedge (b \to c) = b \wedge c$.

Caso 2: $b = b_i$ y $c = a_r$ con $i + 1 \leq r \leq n - 1$.

Caso 2.1: $\alpha_2 \in F^i_{k_0}$ con $i+1 \leq k_0 \leq n-1$. En este caso $b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_r) = b_i \wedge \alpha_2(r)$. Si $r = n-1$, $b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_{n-1}) = b_i \wedge \alpha_2(n-1) = b_i \wedge a_{k_0} = b_i = b_i \wedge a_{n-1}$. Si $r < n-1$,

$$b_i \Rightarrow a_r = \begin{cases} a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < r \\ x & \text{si} \quad k_0 \geq r \quad \text{con} \quad x \geq a_r \end{cases}$$

entonces

$$b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_r) = \begin{cases} b_i & \text{si} \quad k_0 < r \\ b_i & \text{si} \quad k_0 \geq r \end{cases} = b_i \wedge a_r\,.$$

Caso 2.2: $\alpha_2 \in F^i_0$. En este caso $b_i \wedge (b_i \Rightarrow a_r) = b_i \wedge \alpha_2(r) = b_i \wedge b_i = b_i = b_i \wedge a_r$.

Caso 3: $b = b_i$ y $c = a_r$ con $0 \leq r \leq i$. En este caso $a_r \wedge (a_r \Rightarrow b_i) = a_r \wedge \alpha_1(r)$.

Como

$$\alpha_1(r) = \begin{cases} a_r \to a_{i+1} & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ x & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \quad \text{con} \quad x \geq b_i \end{cases}$$

entonces

$$a_r \wedge \alpha_1(r) = \begin{cases} a_r \wedge (a_r \to a_{i+1}) & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ a_r \wedge x & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \quad \text{con} \quad x \geq b_i \end{cases}$$

Luego $a_r \wedge (a_r \Rightarrow b_i) = a_r \wedge \alpha_1(r) = a_r = a_r \wedge b_i$.

De los casos anteriores, $b \wedge (b \Rightarrow c) = b \wedge c$. Por el lema 2.2.2, $\mathbf{L}^i \models x \wedge (x \Rightarrow y) \approx x \wedge y$.

Veamos ahora que $\mathbf{L}^i \models x \wedge (y \Rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)]$.

Sean $b, c, d \in L^i$ con $c < b < d$. Queremos probar que $b \wedge (c \Rightarrow b) = b \wedge (c \Rightarrow d)$.

Caso 1: $c, b, d \in L$. Claramente se verifica que $b \wedge (c \Rightarrow b) = b \wedge (c \Rightarrow d)$.

Caso 2: $c = a_r, b = a_m, d = b_i$ con $0 \leq r < m \leq i$. En este caso $a_m \wedge (a_r \Rightarrow a_m) = a_m \wedge (a_r \to a_m)$ y $a_r \Rightarrow b_i = \alpha_1(r)$. Como

$$\alpha_1(r) = \begin{cases} a_r \to a_{i+1} & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ b & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \quad \text{con} \quad b \geq b_i \end{cases}$$

entonces

$$a_m \wedge \alpha_1(r) = \begin{cases} a_m \wedge (a_r \to a_{i+1}) & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ a_m & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \end{cases}.$$

Si $a_r \to a_{i+1} > a_i$ entonces $a_m = a_m \wedge (a_r \to a_{i+1}) = a_m \wedge (a_r \to a_m)$. Luego

$$a_m \wedge \alpha_1(r) = \begin{cases} a_m \wedge (a_r \to a_m) & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ a_m & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \end{cases} = a_m \wedge (a_r \to a_m).$$

Caso 3: $c = a_r, b = b_i, d = a_m$ con $0 \leq r \leq i$ e $i+1 \leq m \leq n-1$.

En este caso $b_i \wedge (a_r \tilde{\to} b_i) = b_i \wedge \alpha_1(r) = \begin{cases} a_r \to a_{i+1} & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ b_i & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \end{cases}.$

Si $a_r \to a_m = a_l$ con $r \leq l \leq i$ entonces $a_{i+1} \wedge (a_r \to a_m) = a_{i+1} \wedge a_l$. Luego $a_r \to a_{i+1} = a_l$. Entonces

$$b_i \wedge (a_r \tilde{\to} a_m) = b_i \wedge (a_r \to a_m) = \begin{cases} a_r \to a_{i+1} & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} \leq a_i \\ b_i & \text{si} \quad a_r \to a_{i+1} > a_i \end{cases}.$$

Como consecuencia $b_i \wedge (a_r \tilde{\to} b_i) = b_i \wedge (a_r \tilde{\to} a_m)$.

<u>Caso 4:</u> $c = b_i, b = a_r, d = a_m$ con $i+1 \leq r < m \leq n-1$.

<u>Caso 4.1:</u> $\alpha_2 \in F^i_{k_0}$. En este caso $b \wedge (c \tilde{\to} b) = a_r \wedge (b_i \tilde{\to} a_r) = a_r \wedge \alpha_2(r)$. Como $\alpha_2(r) \in F^{k_0}_r$ se verifica que

$$\alpha_2(r) = \begin{cases} a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < r \\ b & \text{si} \quad k_0 \geq r \quad \text{con} \quad b \geq a_r \end{cases}.$$

Luego

$$a_r \wedge \alpha_2(r) = \begin{cases} a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < r \\ a_r & \text{si} \quad k_0 \geq r \end{cases}$$

y, en consecuencia, $b \wedge (c \tilde{\to} d) = a_r \wedge (b_i \tilde{\to} a_m) = a_r \wedge \alpha_2(m)$.

Si $m = n-1$ entonces $\alpha_2(n-1) = a_{k_0}$ y $a_r \wedge \alpha_2(n-1) = \begin{cases} a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < r \\ a_r & \text{si} \quad k_0 \geq r \end{cases}$.

Si $m < n-1$,

$$\alpha_2(m) = \begin{cases} a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < m \\ b & \text{si} \quad k_0 \geq m \quad \text{con} \quad b \geq a_m \end{cases}$$

y, por lo tanto,

$$a_r \wedge \alpha_2(m) = \begin{cases} a_r \wedge a_{k_0} & \text{si} \quad k_0 < m \\ a_r & \text{si} \quad k_0 \geq m \end{cases}.$$

Como $k_0 < r < m$, $r \leq k_0 < m$ ó $r < m \leq k_0$, $a_r \wedge (b_i \tilde{\to} a_r) = a_r \wedge (b_i \tilde{\to} a_m)$.

<u>Caso 4.2:</u> $\alpha_2 \in F^i_0$. En este caso $a_r \wedge (b_i \tilde{\to} a_r) = a_r \wedge \alpha_2(r) = a_r \wedge b_i = a_r \wedge \alpha_2(m) = a_r \wedge (b_i \tilde{\to} a_m)$.

De los casos anteriores, $b \wedge (c \tilde{\to} b) = b \wedge (c \tilde{\to} d)$. Por el lema 2.2.3, $\mathbf{L}^i_{\tilde{\to}} \in \mathcal{SH}$.

■

10.2. Demostraciones del capítulo 4

Demostración 10.2.1 $\tilde{2} \models x \vee x^* \approx 1$ entonces $\tilde{2} \in \mathcal{BSH}$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$ subdirectamente irreducible. Por el lema 1.0.20, $\mathbf{L} \simeq 2$ ó $\mathbf{L} \simeq \tilde{2}$. Si $\mathbf{L} \simeq 2$ entonces $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$ y $\mathbf{L} \models (x \wedge y) \to y \approx 1$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2$. Si $\mathbf{L} \simeq \tilde{2}$ entonces $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \approx 1$ y $\mathbf{L} \models x \vee x^* \approx 1$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$ subdirectamente irreducible. Sea $a \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface la identidad (4.6), $a \wedge (a \to a) = a$ y $0 \to 1 = 1$ ó $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Es decir, $0 \to 1 = 1$ ó $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$ Por lo tanto $\mathcal{E}_6 \subseteq \mathcal{E}_9$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$ subdirectamente irreducible. Sea $a \in L$. Reemplazando en (4.9) obtengo que $(0 \to 1) \vee [(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^*] = 1$. Entonces $0 \to 1 = 1$ ó $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Luego $(0 \to 1)^{**} = 1$ ó $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{12}$ y, en consecuencia, $\mathcal{E}_9 \subseteq \mathcal{E}_{12}$.

■

Demostración 10.2.2 Sea $\mathbf{L} \in com\mathcal{SH}$. Entonces $\mathbf{L} \models x \to y \approx y \to x$ y $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 0$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$. Por lo tanto $com\mathcal{SH} \subseteq \mathcal{E}_1$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$ subdirectamente irreducible. Sean $a, b \in L$. Si $((a \wedge b) \to b) = 0 \to 1 = 1$, por el lema 4.2.1, $b \wedge (a \to b) = b$ y $0 \to 1 = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$ y subdirectamente irreducible. Como $\mathbf{L}$ satisface la identidad (4.7), $0 \to 1 = 1$ en $\mathbf{L}$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$.

Claramente, $\mathcal{E}_{10} \subseteq \mathcal{E}_{13}$.

■

Demostración 10.2.3

(1) Claramente $\tilde{2} \in com\mathcal{SH}$.

Para probar que $\mathcal{V}(\tilde{2}) \neq com\mathcal{SH}$ basta tomar $\mathbf{L}_1$.

(2) Es claro que $\mathcal{V}(2) \subsetneq \mathcal{BSH}$.

Ahora, $2 \models (x \vee x^*) \approx 1$ y $2 \models 0 \to 1 \approx 1$. Entonces $2 \in \mathcal{E}_1$. Además, $\tilde{2} \models x \to y \approx y \to x$ por el lema 4.2.7 y $\tilde{2} \models 0 \to 1 \approx 0$. Entonces $\tilde{2} \in \mathcal{E}_1$. Por el lema 1.0.20, $\mathcal{BSH} \subseteq \mathcal{E}_1$ y. Para probar que $\mathcal{BSH} \neq \mathcal{E}_1$ basta considerar $\mathbf{L}_1$. Es claro que $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_5$ y. Para ver la relación indicada basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_6$ considerando $x = a,\ y = 1$ en la identidad

(3) Claramente $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_2$. Como $\tilde{2} \models 0 \to 1 \approx 0$, $\tilde{2} \notin \mathcal{H}$. Pero $\tilde{2} \in \mathcal{E}_2$ pues $\tilde{2} \models (0 \to 1)^* \wedge (x \vee x^*) \wedge (y \vee y^*) \approx 1$. Entonces $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{E}_2$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2$ subdirectamente irreducible. Sean $a, b \in L$. Supongamos que $(0 \to 1)^* \wedge (a \vee a^*) \wedge (b \vee b^*) = 1$. Como $(0 \to 1)^* = 1$ entonces $0 \to 1 = 0$. Como $(a \vee a^*) = 1$, $a = 1$ ó $a^* = 1$. Entonces $a = 1$ ó $a = 0$. Análogamente $b \in \{0, 1\}$. Como $0 \to 1 = 0$, $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$. Para ver que $\mathcal{E}_2 \subsetneq \mathcal{E}_3$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_1$, considerando $x = y = a$.

Es claro que $\mathcal{E}_3$ y $\subseteq \mathcal{E}_4$. Para ver que $\mathcal{E}_3 \subsetneq \mathcal{E}_4$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_6$, considerando $x = a,\ y = 1$.

(4) Es claro que $\mathcal{QH} \subseteq \mathcal{E}_6$. Para ver que $\mathcal{QH} \subsetneq \mathcal{E}_6$ y basta tomar el álgebra $\tilde{2}$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$ subdirectamente irreducible. Sean $a, b \in L$. Supongamos que $(a \vee a^*) \wedge (b \vee b^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Luego $(a \vee a^*) = (b \vee b^*) = 1$ y $(0 \to 1)^* = 1$ entonces

$a, b \in \{0,1\}$ y $0 \to 1 = 0$. Por lo tanto $a \to b = b \to a$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$. Para ver que $\mathcal{E}_6 \subsetneqq \mathcal{E}_7$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_1$, considerando $x = y = a$.

Es claro que $\mathcal{E}_7 \subseteq \mathcal{E}_8$. Para ver que $\mathcal{E}_7 \subsetneqq \mathcal{E}_8$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_6$, considerando $x = a,\ y = 1$.

(5) Es claro que $\mathcal{FTT} \subseteq \mathcal{E}_9$. Para ver que $\mathcal{FTT} \subsetneqq \mathcal{E}_9$ basta tomar el álgebra $\tilde{2}$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$ subdirectamente irreducible. Sean $a, b \in L$. Si $0 \to 1 \neq 1$, $(a \vee a^*) = (b \vee b^*) = (0 \to 1)^* = 1$. Entonces $a, b \in \{0,1\}$ y, luego, $a \to b = b \to a$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$. Para ver que $\mathcal{E}_9 \subsetneqq \mathcal{E}_{10}$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_1$.

Es claro que $\mathcal{E}_{10} \subseteq \mathcal{E}_{11}$. Para ver que $\mathcal{E}_{10} \subsetneqq \mathcal{E}_{11}$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_6$.

(6) Es claro que $\mathcal{FTD} \subseteq \mathcal{E}_{12}$. Para ver que $\mathcal{FTD} \subsetneqq \mathcal{E}_{12}$ basta tomar el álgebra $\tilde{2}$.

Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{12}$ subdirectamente irreducible. Sean $a, b \in L$. Si $(0 \to 1)^{**} \neq 1$, $(a \vee a^*) = (b \vee b^*) = (0 \to 1)^* = 1$. Entonces $a, b \in \{0,1\}$ y, luego, $a \to b = b \to a$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{13}$. Para ver que $\mathcal{E}_{12} \subsetneqq \mathcal{E}_{13}$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_1$.

Es claro que $\mathcal{E}_{13} \subseteq \mathcal{ISSH}$. Para ver que $\mathcal{E}_{13} \subsetneqq \mathcal{ISSH}$ basta tomar el álgebra $\mathbf{L}_6$.

■

Demostración 10.2.4

(1)

(a) Es claro que $\tilde{2} \in \mathcal{BSH}$ y $\tilde{2} \in com\mathcal{SH}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH} \cap com\mathcal{SH}$ subdirectamente irreducible. Por el lema 1.0.20, $\mathbf{L} \simeq 2$ ó $\mathbf{L} \simeq \tilde{2}$. Como $\mathbf{L} \in com\mathcal{SH}$, $\mathbf{L} \simeq \tilde{2}$.

(b) Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$ subdirectamente irreducible. Tomaremos casos sobre $0 \to 1$ en $\mathbf{L}$. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Reemplazando en (4.1) se obtiene que $a \to b = b \to a$. Como consecuencia $\mathbf{L} \in com\mathcal{SH}$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sea $a \in L$. Reemplazando en (4.2) se obtiene que $(a \vee a^*) = 1$. Como consecuencia $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$. Además, por los lemas 4.2.7 y 4.2.5, $\mathcal{BSH} \subseteq \mathcal{E}_1$ y $com\mathcal{SH} \subseteq \mathcal{E}_1$.

(2)

(a) Por los lemas 4.2.2 y 4.2.7, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{QH}$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_2$. Luego $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{QH} \cap \mathcal{E}_2$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$y $\cap \mathcal{QH}$ subdirectamente irreducible. Como $\mathbf{L} \in \mathcal{QH}$, $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$. Sean $a, b \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.2), $((a \wedge b) \to b) \approx 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $\mathcal{QH} \cap \mathcal{E}_2$ $= \mathcal{H}$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.4, $\mathcal{V}(\mathcal{QH}, \mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_6$ y. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$ subdirectamente irreducible. Tomaremos casos sobre $0 \to 1$ en $\mathbf{L}$. Caso 1: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Reemplazando en (4.6) se obtiene que $b \wedge (a \to b) = b$. Como consecuencia $\mathbf{L} \in \mathcal{QH}$. Caso 2: $0 \to 1 = 0$. Sea $a \in L$. Reemplazando en (4.6) se obtiene que $(a \vee a^*) = 1$. Como consecuencia $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$. Por el lema 4.2.4, $\mathcal{BSH} \subseteq \mathcal{E}_2$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$.

(3)

(a) Por el lema 4.2.4, $\mathcal{BSH} \subseteq \mathcal{E}_2$. Por el lema 4.2.7, $\mathcal{BSH} \subseteq \mathcal{E}_1$. Por lo tanto $\mathcal{BSH} \subseteq \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_1$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_1$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sea $a \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.2), $(a \vee a^*) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sea $a \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.1), $(a \vee a^*) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.5, $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_3$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.3), $a \to b = b \to a$. Luego $\mathbf{L} \in com\mathcal{SH}$. Por el lema 4.2.5, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.3), $((a \wedge b) \to b) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{H}$. Por el lema 4.2.7, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$.

(4)

(a) Por los lemas 4.2.5 y 4.2.3, $com\mathcal{SH} \subseteq \mathcal{FTF}$ y $com\mathcal{SH} \subseteq \mathcal{E}_1$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{FTF}$ subdirectamente irreducible. Como $\mathbf{L} \in \mathcal{FTF}$, $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 0$. Sean $a, b \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.1), $a \to b = b \to a$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in com\mathcal{SH}$.

(b) Por los lemas 4.2.6 y 4.2.7, $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_5$ y $\mathcal{FTF} \subseteq \mathcal{E}_5$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_5$ y subdirectamente irreducible. Si $0 \to 1 = 0$, $\mathbf{L} \in \mathcal{FTF}$. Supongamos que $0 \to 1 = 1$. Sea $a \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.5), $(a \vee a^*) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$. Por el lema 4.2.7, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$.

(5)

(a) Por los lemas 4.2.2 y 4.2.7, $\mathcal{QH} \subseteq \mathcal{FTT}$ y $\mathcal{QH} \subseteq \mathcal{E}_6$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6 \cap \mathcal{FTT}$ subdirectamente irreducible. Como $\mathbf{L} \in \mathcal{FTT}$, $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$. Sean $a, b \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.6), $((a \wedge b) \to b) = b$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{QH}$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.4, $\mathcal{FTT} \subseteq \mathcal{E}_9$ y $\mathcal{E}_6 \subseteq \mathcal{E}_9$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$ subdirectamente irreducible. Si $0 \to 1 = 1$, $\mathbf{L} \in \mathcal{FTT}$. Supongamos que $0 \to 1 = 0$. Sea $a \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.9), $(a \vee a^*) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{BSH}$. Por el lema 4.2.4, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$.

(6)

(a) Por los lemas 4.2.4 y 4.2.7, $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_6$ y $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_3$ y. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$ y $\cap \mathcal{E}_3$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.6), $(a \vee a^*) \wedge (b \vee b^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.3), $((a \wedge b) \to b) \wedge (0 \to 1) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_2$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.5, $\mathcal{E}_6 \subseteq \mathcal{E}_7$ y $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{E}_7$ y. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.7), $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.7), $b \wedge (a \to b) = b$ y $0 \to 1 = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$.

(7)

(a) Por los lemas 4.2.5 y 4.2.7, $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_5$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_5$ y $\cap \mathcal{E}_3$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.3), $a \to y = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$ y. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.5), $(a \vee a^*) \wedge (b \vee b^*) \wedge (0 \to 1) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_1$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.6, $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{E}_4$ y $\mathcal{E}_5 \subseteq \mathcal{E}_4$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_4$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Entonces $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \approx 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_5$ Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.4), $((a \wedge b) \to b) = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$.

(8)

(a) Por los lemas 4.2.2 y 4.2.7, $\mathcal{FTT} \subseteq \mathcal{FTD}$ y $\mathcal{FTT} \subseteq \mathcal{E}_9$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{FTD} \cap \mathcal{E}_9$ subdirectamente irreducible. Como $\mathbf{L} \in \mathcal{FTD}$, $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \approx 0$. Sea $a \in L$. Por (4.9), $0 \to 1 = 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{FTT}$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.4, $\mathcal{FTD} \subseteq \mathcal{E}_{12}$ y $\mathcal{E}_9 \subseteq \mathcal{E}_{12}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{12}$ subdirectamente irreducible. Si $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \approx 0$, $\mathbf{L} \in \mathcal{FTD}$. Supongamos, entonces, que $(0 \to 1)^* \neq 0$. Sea $a \in L$. Como $\mathbf{L}$ satisface (4.12), $(0 \to 1)^{**} \vee [(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^*] = 1$. Entonces, $(0 \to 1)^{**} = 1$ ó $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Como $(0 \to 1)^* \neq 0$, $(0 \to 1)^{**} \neq 1$. Luego $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* = 1$. Como consecuencia $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$.

(9)

(a) Por los lemas 4.2.4 y 4.2.7, $\mathcal{E}_6 \subseteq \mathcal{E}_9$ y y $\mathcal{E}_6 \subseteq \mathcal{E}_7$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$ y $\cap \mathcal{E}_9$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Por la identidad (4.9), $\mathbf{L} \models (a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* \approx 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.7), $b \wedge (a \to b) = b$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_6$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.5, $\mathcal{E}_9$ y $\subseteq \mathcal{E}_{10}$ y $\mathcal{E}_7 \subseteq \mathcal{E}_{10}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$ Caso 2: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.10), $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$.

(10)

(a) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.5, $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{E}_7$ y $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{E}_4$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7 \cap \mathcal{E}_4$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.7), $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.4), $((a \wedge b) \to b) = 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_3$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.6, $\mathcal{E}_7 \subseteq \mathcal{E}_8$ y $\mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{E}_8$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_8$ subdirectamente irreducible. Si $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 0$, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_4$. Supongamos que $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.8), $b \wedge (a \to b) = b$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$.

(11)

(a) Por los lemas 4.2.4 y 4.2.7, $\mathcal{E}_9 \subseteq \mathcal{E}_{12}$ y $\mathcal{E}_9 \subseteq \mathcal{E}_{10}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{12} \cap \mathcal{E}_{10}$ subdirectamente irreducible. Si $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$. Supongamos que $0 \to 1 = 0$. Sea $a \in L$. Por la identidad (4.12), $(a \vee a^*) \wedge (0 \to 1)^* \approx 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_9$.

(b) Por los lemas 4.2.5 y 4.2.6, $\mathcal{E}_{12} \subseteq \mathcal{E}_{13}$ y $\mathcal{E}_{10} \subseteq \mathcal{E}_{13}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{13}$ subdirectamente irreducible. Si $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^{**} \approx 1$, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{12}$. Supongamos que $(0 \to 1)^{**} \neq 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.13), $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$.

(12)

(a) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.5, $\mathcal{E}_7 \subseteq \mathcal{E}_{10}$ y $\mathcal{E}_7 \subseteq \mathcal{E}_8$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10} \cap \mathcal{E}_8$ subdirectamente irreducible. Caso 1: $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.10), $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$. Caso 2: $0 \to 1 = 1$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.8), $b \wedge (a \to b) = b$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_7$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.6, $\mathcal{E}_{10} \subseteq \mathcal{E}_{11}$ y $\mathcal{E}_8 \subseteq \mathcal{E}_{11}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{11}$ subdirectamente irreducible. Si $\mathbf{L} \models (0 \to 1) \approx 1$, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$. Si $\mathbf{L} \models (0 \to 1) \approx 0$, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_8$.

(13)

(a) Por los lemas 4.2.5 y 4.2.7, $\mathcal{E}_{10} \subseteq \mathcal{E}_{13}$ y $\mathcal{E}_{10} \subseteq \mathcal{E}_{11}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{13} \cap \mathcal{E}_{11}$ subdirectamente irreducible. Si $\mathbf{L} \models 0 \to 1 \approx 1$, $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$. Supongamos que $0 \to 1 = 0$. Sean $a, b \in L$. Por la identidad (4.13), $a \to b = b \to a$ y $(0 \to 1)^* = 1$. Luego $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{10}$.

(b) Por los lemas 4.2.7 y 4.2.6, $\mathcal{E}_{13} \subseteq \mathcal{ISSH}$ y $\mathcal{E}_{11} \subseteq \mathcal{ISSH}$. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{ISSH}$ subdirectamente irreducible. Como $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$ y $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible, $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^* \approx 1$ ó $\mathbf{L} \models (0 \to 1)^{**} \approx 1$. Por lo tanto $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{11}$ ó $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{13}$.

■

10.3. Demostraciones del capítulo 5

Demostración 10.3.1 (a) Claramente $\mathbf{L}' \models x \tilde{\to} x \approx 1$.

(b) Veamos que $\mathbf{L}' \models x \wedge (x \tilde{\to} y) \approx x \wedge y$. Sean $x, y \in L'$ con $x < y$.

<u>Caso 1:</u> $x, y \in \beta(\mathbf{L})$. Entonces $x = \beta(a)$, $y = \beta(b)$ con $a, b \in L$. Luego $x \wedge (x \tilde{\to} y) = \beta(a) \wedge (\beta(a) \tilde{\to} \beta(b)) = \beta(a) \wedge \beta(a \to b) = \beta(a \wedge (a \to b)) = \beta(a \wedge b) = \beta(a) \wedge \beta(b) = x \wedge y$.

<u>Caso 2:</u> $x = a_i$, $y \in \beta(\mathbf{L})$. Como $y \in \beta(\mathbf{L})$, $y = a_k$. Como $x < y$, $i < k$. Luego $y = a_k = \beta(A_{k-1})$. Entonces $a_i \wedge (a_i \tilde{\to} a_k) = \begin{cases} a_i \wedge a_r & \text{si } k \geq j \\ a_i \wedge a_k & \text{si } k < j \end{cases} =$
$= \begin{cases} a_i & \text{si } k \geq j \\ a_i & \text{si } k < j \end{cases} = a_i = a_i \wedge a_k$.

<u>Caso 3:</u> $x = a_k$ con $\beta(A_k) = a_k$ e $y = a_i$.
$$a_k \wedge (a_k \tilde{\to} a_i) = \begin{cases} a_k \wedge a_m & \text{si } A_k \to A_{n-2} = A_m \text{ y } k \leq m < i \\ a_k \wedge a_i & \text{si } A_k \to A_{n-2} = A_m \text{ y } m \geq i \end{cases} =$$
$a_k = a_k \wedge a_i$.

De los casos anteriores, por el lema 2.2.2, $\mathbf{L}' \models x \wedge (x \tilde{\to} y) \approx x \wedge y$.

(c) Queremos probar que $\mathbf{L}' \models x \wedge (y \tilde{\to} z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \tilde{\to} (x \wedge z)]$. Sean $x', y', z' \in L'$ con $y < x < z$. Queremos probar que $x \wedge (y \tilde{\to} x) = x \wedge (y \tilde{\to} z)$.

<u>Caso 1:</u> $x, y, z \in \beta(\mathbf{L})$. Entonces existen $a, b, c \in L :\ \beta(a) = x, \beta(b) = y, \beta(c) = z$. En consecuencia $x \wedge (y \tilde{\to} z) = \beta(a) \wedge (\beta(b) \tilde{\to} \beta(c)) = \beta(a) \wedge \beta(b \to c) = \beta(a \wedge (b \to c)) = \beta(a \wedge ((a \wedge b) \to (a \wedge c))) = \beta(a \wedge (b \to a)) = \beta(a) \wedge \beta(b \to a) = x \wedge (y \tilde{\to} x)$.

Caso 2: $x = a_i, y, z \in \beta(\mathbf{L})$. Como $y \in \beta(\mathbf{L})$ e $y < x$, $y = a_{l_1} = \beta(A_{l_1})$ y Como $z \in \beta(\mathbf{L})$ y $x < z$, $z = a_{l_2} = \beta(A_{l_2-1})$ con $l_1 < i < l_2$. $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z) = a_i \wedge (a_{l_1} \tilde{\rightarrow} a_{l_2}) = a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2})$.

Caso 2.1: $A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m$ con $m \geq i$.

Caso 2.1.1: $l_2 - 1 \leq m$. En este caso $A_{l_2-1} \wedge (A_{l_1} \rightarrow A_{l_2}) = A_{l_2-1} \wedge (A_{l_1} \rightarrow A_{n-2}) = A_{l_2} \wedge A_m = A_{l_2-1}$. Entonces $A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1} \geq A_{l_2-1}$. Como consecuencia $\beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) \geq \beta(A_{l_2-1}) = a_{l_2}$. Luego $a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) \geq a_i \wedge a_{l_2} = a_i$ pues $i < l_2$. Por lo tanto, $a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = a_i$.

Caso 2.1.2: $l_2 - 1 > m$. En este caso $A_{l_2-1} \wedge (A_{l_1} \rightarrow A_{l_2}) = A_{l_2-1} \wedge (A_{l_1} \rightarrow A_{n-2}) = A_{l_2} \wedge A_m = A_m$. Entonces $A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1} = A_m$. Como consecuencia $\beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = \beta(A_m) = a_{m+1}$ pues $m \geq i$. Luego $a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = a_i \wedge a_{m+1} = a_i$ pues $i < m+1$. Por lo tanto, $a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = a_i$.

De los casos 2.1.1 y 2.1.2, si $A_{l_1} \rightarrow A_{l_2} = A_m$ con $m \geq i$ entonces $a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = a_i$.

Caso 2.2: $A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m$ con $m < i$. En este caso $A_{l_2-1} \wedge (A_{l_1} \rightarrow A_{l_2}) = A_{l_2-1} \wedge (A_{l_1} \rightarrow A_{n-2}) = A_{l_2} \wedge A_m = A_m$ pues $m < i < l_2$. Entonces $A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1} = A_m$. Como consecuencia $\beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = \beta(A_m) = a_m$ pues $m > i$. Luego $a_i \wedge \beta(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}) = a_i \wedge a_m = a_m$. De los casos 2.1 y 2.2, $a_i \wedge \beta\left(A_{l_1} \rightarrow A_{l_2-1}\right) = \begin{cases} A_i & \text{si} \quad A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad i \leq m \\ A_m & \text{si} \quad A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad m < i \end{cases}$. Además,

$$\begin{aligned} x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x) &= a_i \wedge (a_{l_1} \tilde{\rightarrow} a_i) \\ &= \begin{cases} A_i \wedge A_i & \text{si} \quad A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad i \leq m \\ A_i \wedge A_m & \text{si} \quad A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad m < i \end{cases} \\ &= \begin{cases} A_i & \text{si} \quad A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad i \leq m \\ A_m & \text{si} \quad A_{l_1} \rightarrow A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad m < i \end{cases}. \end{aligned}$$

Entonces $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z) = x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x)$.

Caso 3: $y = a_i$, $x, z \in \beta(\mathbf{L})$. Como $x \in \beta(\mathbf{L})$, $x = a_{l_1} = \beta(A_{l_1-1})$ y como $z \in \beta(\mathbf{L})$, $z = a_{l_2} = \beta(A_{l_2-1})$ pues $i < l_1 < l_2$. $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z) = a_{l_1} \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_{l_2}) = \begin{cases} A_{l_1} \wedge A_r & \text{si} \quad l_2 \geq j \\ A_{l_1} \wedge A_{l_2} & \text{si} \quad l_2 < j \end{cases}$. Por lo tanto $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x) = a_{l_1} \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_{l_1})$ $= \begin{cases} A_{l_1} \wedge A_r & \text{si} \quad l_1 \geq j \\ A_{l_1} \wedge A_{l_1} & \text{si} \quad l_1 < j \end{cases}$. Tomaremos casos sobre j.

Caso 3.1: $j \leq l_1 < l_2$. $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z) = a_{l_1} \wedge a_r = x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x)$.

Caso 3.2: $l_1 < j \leq l_2$. $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z) = a_{l_1} \wedge a_r = a_{l_1}$ pues $l_1 < j \leq r$. Además $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x) = a_{l_1}$.

Caso 3.3: $l_1 < l_2 < j$. $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z) = a_{l_1} \wedge a_{l_2} = a_{l_1} = = a_{l_1} \wedge a_{l_1} = x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x)$.

De los casos 3.1, 3.2 y 3.3, $x \wedge (y \tilde{\rightarrow} x) = x \wedge (y \tilde{\rightarrow} z)$.

Caso 4: $x, y \in \beta(\mathbf{L})$ y $z = a_i$. Como $x \in \beta(\mathbf{L})$, $x = a_{l_1} = \beta(A_{l_1})$ pues $l_1 < i$. Como $y \in \beta(\mathbf{L})$, $y = a_{l_2} = \beta(A_{l_2})$ pues $l_2 < l_1 < i$. Entonces

$$\begin{aligned} x \wedge (y \tilde{\to} z) &= a_{l_1} \wedge (a_{l_2} \tilde{\to} a_i) \\ &= \begin{cases} A_{l_1} \wedge A_m & \text{si} \quad A_{l_2} \to A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad l_2 \leq m < i \\ A_{l_1} \wedge A_i & \text{si} \quad A_{l_2} \to A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad m \geq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} A_{l_1} \wedge A_m & \text{si} \quad A_{l_2} \to A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad l_2 \leq m < i \\ A_{l_1} & \text{si} \quad A_{l_2} \to A_{n-2} = A_m \quad \text{con} \quad m \geq i \end{cases}. \end{aligned}$$

Por otro lado $x \wedge (y \tilde{\to} x) = a_{l_1} \wedge (a_{l_2} \tilde{\to} a_{l_1}) = a_{l_1} \wedge \beta(A_{l_2} \to A_{l_1})$.

Caso 4.1: $A_{l_2} \to A_{n-1} = A_m$ con $l_2 \leq m < i$ y $l_1 \leq m$. En este caso $A_{l_1} \wedge (A_{l_2} \to A_{n-2}) = A_{l_1} \wedge A_m$. Luego $A_{l_1} \wedge (A_{l_2} \to A_{l_1}) = A_{l_1}$. Entonces $A_{l_2} \to A_{l_1} \geq A_{l_1}$. $\beta(A_{l_2} \to A_{l_1}) \geq \beta(A_{l_1}) = a_{l_1}$. Como consecuencia, $a_{l_1} \wedge \beta(A_{l_2} \to A_{l_1}) = a_{l_1} = a_{l_1} \wedge a_m$.

Caso 4.2: $A_{l_2} \to A_{n-1} = A_m$ con $l_2 \leq m < i$ y $l_1 > m$. En este caso $A_{l_1} \wedge (A_{l_2} \to A_{n-2}) = A_{l_1} \wedge A_m$. Luego $A_{l_1} \wedge (A_{l_2} \to A_{l_1}) = A_m$. Entonces $A_{l_2} \to A_{l_1} = A_m$. Como consecuencia, $a_{l_1} \wedge \beta(A_{l_2} \to A_{l_1}) = a_{l_1} \wedge \beta(A_m) = a_{l_1} \wedge a_m$.

Caso 4.3: $A_{l_2} \to A_{n-1} = A_m$ con $m \geq i$. $A_{l_1} \wedge (A_{l_2} \to A_{n-2}) = A_{l_1} \wedge A_m$. Luego $A_{l_1} \wedge (A_{l_2} \to A_{l_1}) = A_{l_1}$. Entonces $A_{l_2} \to A_{l_1} \geq A_{l_1}$. $\beta(A_{l_2} \to A_{l_1}) \geq \beta(A_{l_1}) = a_{l_1}$. Como consecuencia, $a_{l_1} \wedge \beta(A_{l_2} \to A_{l_1}) = a_{l_1}$.

De los casos 4.1, 4.2 y 4.3, $x \wedge (y \tilde{\to} z) = x \wedge (y \tilde{\to} x)$.

De los casos 1, 2, 3 y 4 y por el lema 2.2.3, $\mathbf{L}' \in \mathcal{SH}$.

■

Demostración 10.3.2 Veamos que $\langle \mathbf{L}, \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. Claramente, $\mathbf{L} \models x \tilde{\to} x \approx 1$.

Veamos que $\mathbf{L} \models x \wedge (x \tilde{\to} y) \approx x \wedge y$. Sean $a, b \in L :\ a < b$. $a = a_i, b = a_j$ con $i < j$.

Caso 1 $a_i, a_j \in \gamma(\mathbf{L}')$. Entonces $a_i = \gamma(A_{l_1})$ y $a_j = \gamma(A_{l_2})$. $a_i \wedge (a_i \tilde{\to} a_j) = \gamma(A_{l_1}) \wedge \gamma(A_{l_1} \to A_{l_2}) = \gamma(A_{l_1} \wedge (A_{l_1} \to A_{l_2})) = \gamma(A_{l_1} \wedge A_{l_2}) = \gamma(A_{l_1}) \wedge \gamma(A_{l_2}) = a_i \wedge a_j$.

Caso 2 $a_i \in \gamma(\mathbf{L}'), a_j \notin \gamma(\mathbf{L}')$. Como $a_i \in \gamma(\mathbf{L}')$, $a_i = \gamma(A_{i_0})$ con $A_{i_0} \in L'$.

$$\begin{aligned} a_i \wedge (a_i \tilde{\to} a_j) &= \begin{cases} a_i \wedge \gamma(A_l) & \text{si} \quad A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < j \\ a_i \wedge a_j & \text{si} \quad A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \text{ con } j \leq l \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma(A_{i_0} \wedge A_l) & \text{si} \quad A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < j \\ a_i & \text{si} \quad A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \text{ con } j \leq l \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma(A_{i_0}) & \text{si} \quad A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < j \\ a_i & \text{si} \quad A_{i_0} \to A_{k-1} = A_l \text{ con } j \leq l \end{cases} \\ &= a_i \\ &= a_i \wedge a_j. \end{aligned}$$

Caso 3 $a_i \notin \gamma(\mathbf{L}')$. $a_i \wedge (a_i \tilde{\to} a_j) = a_i \wedge 1 = a_i = a_i \wedge a_j$.

De los casos anteriores, $a \wedge (a \tilde{\to} b) = a \wedge b$. Por el lema 2.2.2, $\mathbf{L} \models x \wedge (x \tilde{\to} y) \approx x \wedge y$.

Veamos que $\mathbf{L} \models x \wedge (y \tilde{\to} z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \tilde{\to} (x \wedge z)]$. Sean $a, b, c \in L$ con $b < a < c$. Luego $b = a_i, a = a_j, c = a_m$ con $i < j < m$. Queremos probar que $a \wedge (b \tilde{\to} a) = a \wedge (b \tilde{\to} c)$.

Caso 1 $a_i, a_j, a_m \in \gamma(\mathbf{L}')$. Entonces $a_i = \gamma(A_{i_0}), a_j = \gamma(A_{j_0}), a_m = \gamma(A_{m_0})$ con $i_0 < j_0 < m_0$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\to} a_j) = \gamma(A_{j_0}) \wedge \gamma(A_{i_0} \to A_{j_0}) = = \gamma(A_{j_0} \wedge ((A_{i_0} \wedge A_{j_0}) \to (A_{j_0} \wedge A_{m_0}))) = = \gamma(A_{j_0}) \wedge \gamma(A_{i_0} \to A_{m_0}) = a_j \wedge (a_i \tilde{\to} a_m)$.

Caso 2 $a_i, a_j \in \gamma(\mathbf{L}')$, $a_m \notin \gamma(\mathbf{L}')$. Luego $a_i = \gamma(A_{i_0}), a_j = \gamma(A_{j_0})$ con $i_0 < j_0$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = \begin{cases} a_j \wedge \gamma(A_l) & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < m \\ a_j \wedge a_m & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } m \leq l \end{cases}$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = \gamma(A_{j_0}) \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}) = \gamma(A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}))$. Como $j \geq j_0$ y $j < m$, $j_0 < m$. Tomaremos casos sobre l.

Caso 2.1 $l \geq m > j_0$. $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$. Entonces $A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = A_{j_0} \wedge A_l$. $A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}) = A_{j_0}$. Como consecuencia $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = \gamma(A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0})) = \gamma(A_{j_0}) = a_j = a_j \wedge a_m = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m)$.

Caso 2.2 $j_0 \leq l < m$. $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$. Luego $A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = A_{j_0} \wedge A_l$. $A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}) = A_{j_0}$. Como consecuencia $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = \gamma(A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0})) = \gamma(A_{j_0}) = \gamma(A_{j_0} \wedge A_l) = \gamma(A_{j_0}) \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m)$.

Caso 2.3 $l < j_0 < m$. $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$. $A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = A_{j_0} \wedge A_l$. $A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}) = A_l$. Entonces $A_{i_0} \rightarrow A_{j_0} = A_l$ pues $\mathbf{L}'$ es una cadena. Luego $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = \gamma(A_{j_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{j_0})) = \gamma(A_{j_0}) \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m)$.

De los casos 2.1, 2.2 y 2.3, $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m)$.

Caso 3 $a_i, a_m \in \gamma(\mathbf{L}')$, $a_j \notin \gamma(\mathbf{L}')$. Entonces $a_i = \gamma(A_{i_0}), a_m = \gamma(A_{m_0})$ con $i_0 < m_0$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0})$.

$$a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = \begin{cases} a_j \wedge \gamma(A_l) & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < j \\ a_j \wedge a_j & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } j \leq l \end{cases}.$$

Caso 3.1: $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$ con $i_0 \leq l < j$ y $m_0 \leq l$. $A_{m_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = A_{m_0} \wedge A_l$. Entonces $A_{m_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) = A_{m_0}$ y $A_{m_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = A_{m_0}$. Luego $A_{i_0} \rightarrow A_{m_0} \geq A_{m_0}$ y $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} \geq A_{m_0}$. $\gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) \geq \gamma(A_{m_0}) = a_m > a_j$ y $\gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) \geq \gamma(A_{m_0}) = a_m > a_j$. Entonces $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) = a_j = a_j \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = a_j \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j)$.

Caso 3.2: $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$ con $i_0 \leq l < j$ y $m_0 > l$. $A_{m_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) = A_{m_0} \wedge A_l$. Entonces $A_{m_0} \wedge (A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) = A_l$. Luego $A_{i_0} \rightarrow A_{m_0} = A_l$. Entonces $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) = a_j \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j)$.

Caso 3.3: $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$ con $l \geq j$ y $m_0 \leq l$. Como antes, $\gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) > a_j$ y $\gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{k-1}) > a_j$. Entonces $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) = = a_j = a_j \wedge a_j = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j)$.

Caso 3.4: $A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l$ con $l \geq j$ y $m_0 > l$. Como antes, $A_{i_0} \rightarrow A_{m_0} = A_l$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge \gamma(A_{i_0} \rightarrow A_{m_0}) = = a_j \wedge \gamma(A_l)$. Ahora $\gamma(A_l) = a_x$ con $l \leq x$. Como $j \leq l \leq x$, $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge a_x = a_j = = a_j \wedge a_j = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j)$.

De los casos 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4, $a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j)$.

Caso 4 $a_i \in \gamma(\mathbf{L}')$, $a_j, a_m \notin \gamma(\mathbf{L}')$. Entonces $a_i = \gamma(A_{i_0})$ con $i_0 \leq i$.

$a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_j) = \begin{cases} a_j \wedge \gamma(A_l) & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < j \\ a_j & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } j \leq l \end{cases}$. Por otro lado

$$a_j \wedge (a_i \tilde{\rightarrow} a_m) = \begin{cases} a_j \wedge \gamma(A_l) & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } i_0 \leq l < m \\ a_j & \text{si } A_{i_0} \rightarrow A_{k-1} = A_l \text{ con } m \leq l \end{cases}.$$

Como $j < m$ basta considerar el caso en que $m > l \geq j$. $\gamma(A_l) = a_x$ con $l \leq x$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\to} a_j) = a_j$ y $a_j \wedge (a_i \tilde{\to} a_m) = a_j \wedge \gamma(A_l) = a_j \wedge a_x = a_j$.

Caso 5 $a_i \notin \gamma(\mathbf{L}')$. $a_j \wedge (a_i \tilde{\to} a_m) = a_j \wedge 1 = a_j \wedge (a_i \tilde{\to} a_j)$.

De los casos 1, 2, 3, 4 y 5, $a \wedge (b \tilde{\to} a) = a \wedge (b \tilde{\to} c)$. Por el lema 2.2.3, $\langle \mathbf{L}, \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$.

■

Demostración 10.3.3 Sea $\langle \mathbf{L}, \to \rangle$ una cadena de semi-Heyting. Entonces $\mathbf{L} : A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1}$. Ahora, consideremos la cadena $\mathbf{L}' : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n < \ldots < a_{n+l-1}$ donde $a_k = A_k$ si $0 \leq k \leq n-1$ y $a_k \notin L$ si $n \leq k \leq n+l-1$. Definimos $\tilde{\to}: \mathbf{L}' \times \mathbf{L}' \to \mathbf{L}'$ como:

$$a_k \tilde{\to} a_t = \begin{cases} a_t & \text{si} \quad k > t \\ 1 & \text{si} \quad k = t \\ a_k \to a_t & \text{si} \quad a_k, a_t \in L \text{ y } k < t \\ a_k \to a_{n-1} & \text{si} \quad a_k \in L, a_t \notin L \text{ y } k < t \\ 1 & \qquad \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Veamos que $\langle \mathbf{L}', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. Por definición $\mathbf{L}' \models x \tilde{\to} x \approx 1$. Veamos, ahora, que $\mathbf{L}' \models x \wedge (x \tilde{\to} y) \approx x \wedge y$. Sean $a, b \in L'$ con $a < b$. $a = a_k$ e $b = a_t$ con $k < t$.

Caso 1: $a_k, a_t \in L$. Luego $a_k = A_k$ y $a_t = A_t$. Luego $a_k \wedge (a_k \tilde{\to} a_t) = A_k \wedge (A_k \to A_t) = A_k \wedge A_t = a_k \wedge a_t$.

Caso 2: $a_k \in L$, $a_t \notin L$. Entonces $a_k = A_k$ y $n \leq t \leq n+l-1$. Como consecuencia $a_k \wedge (a_k \tilde{\to} a_t) = A_k \wedge (A_k \to A_{n-1}) = A_k \wedge A_{n-1} = A_k = a_k = a_k \wedge a_t$.

Caso 3: $a_k, a_t \notin L$. En este caso $a_k \wedge (a_k \tilde{\to} a_t) = a_k \wedge 1 = a_k = a_k \wedge a_t$.

De los casos anteriores, $a \wedge (a \tilde{\to} b) = a \wedge b$. Por el lema 2.2.2, $\mathbf{L}' \models x \wedge (x \tilde{\to} y) \approx x \wedge y$. Basta ver que $\mathbf{L}' \models x \wedge (y \tilde{\to} z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$. Sean $a, b, c \in L'$ tal que $b < a < c$. Por el lema 2.2.3 es suficiente probar que $a \wedge (b \tilde{\to} a) = a \wedge (b \tilde{\to} c)$. Entonces $a = a_t, b = a_k, c = a_p$ con $k < t < p$.

Caso 1: $a_k \notin L$. Como $a_k < a_t < a_p$, entonces $a_t, a_p \notin L$. $a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_t) = a_t \wedge 1 = a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_p)$.

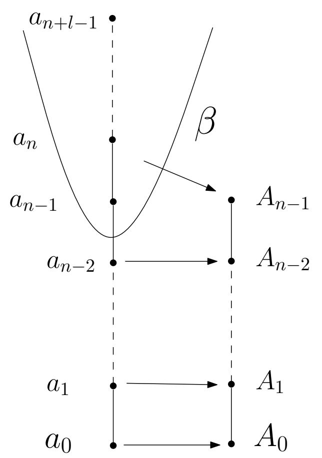
Caso 2: $a_k \in L$ y $a_t \notin L$. Como $a_t < a_p$, $a_p \notin L$. Luego $a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_t) = a_t \wedge (a_k \to a_{n-1}) = a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_p)$.

Caso 3: $a_k, a_t, a_p \in L$. En este caso $a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_t) = a_t \wedge (a_k \to a_t) = a_t \wedge (a_k \to a_p) = a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_p)$.

Caso 4: $a_k, a_t \in L$ y $a_p \notin L$. $a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_p) = a_t \wedge (a_k \to a_{n-1}) = a_t \wedge (a_k \to a_t) = a_t \wedge (a_k \tilde{\to} a_t)$.

De los casos anteriores $\langle \mathbf{L}', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$.

Consideremos el filtro $[a_{n-1})$ y el conjunto cociente asociado al mismo $\mathbf{L}'/[a_{n-1})$. Definimos $\beta : \mathbf{L}'/[a_{n-1}) \to \mathbf{L}$ como $\beta(\overline{a_k}) = A_k$ con $0 \leq k \leq n-1$.



Sea $a_t \in \overline{a_k}$. Si $a_t = a_k$, $\beta(\overline{a_k}) = \beta(\overline{a_t})$. Si $a_t \neq a_k$. Entonces $n-1 \leq k, t \leq n+l-1$. Luego $\overline{a_k} = \overline{a_t}$. Entonces $\beta(\overline{a_k}) = \beta(\overline{a_t})$. Luego β está bien definida. Además, $\beta(\overline{a_0}) = A_0$ y $\beta(\overline{a_{n+l-1}}) = \beta(\overline{a_{n-1}}) = A_{n-1}$. Sean $\overline{a_k}, \overline{a_t} \in L'/[a_{n-1})$. Supongamos que $0 \leq k \leq t \leq n-1$. $\beta(\overline{a_k} \wedge \overline{a_t}) = \beta(\overline{a_k \wedge a_t}) = \beta(\overline{a_k}) = A_k = A_k \wedge A_t = \beta(\overline{a_k}) \wedge \beta(\overline{a_t})$. $\beta(\overline{a_k} \overset{\sim}{\to} \overline{a_t}) = \beta(\overline{a_k \overset{\sim}{\to} a_t}) = \beta(\overline{a_k \to a_t}) = A_k \to A_t = \beta(\overline{a_k}) \overset{\sim}{\to} \beta(\overline{a_t})$. Luego β es un isomorfismo. Luego $\mathbf{L} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}')$.

■

Demostración 10.3.4 Por definición $\mathbf{L}' \models x \overset{\sim}{\to} x \approx 1$. Veamos, ahora, que $\mathbf{L}' \models x \wedge (x \overset{\sim}{\to} y) \approx x \wedge y$. Sean $x, y \in L'$ con $x < y$. $x = a_i$ e $y = a_j$ con $i < j$.

<u>Caso 1:</u> $x, y \in \gamma(\mathbf{L})$, $(x, y) \neq (a_0, a_{n+l-1})$. Como $x, y \in \gamma(\mathbf{L})$, $x = \gamma(a)$ e $y = \gamma(b)$ con $a, b \in L$. $x \wedge (x \overset{\sim}{\to} y) = \gamma(a) \wedge \gamma(a \to b) = \gamma(a \wedge (a \to b)) == \gamma(a \wedge b) = \gamma(a) \wedge \gamma(b) = x \wedge y$.

<u>Caso 2:</u> $x, y \in \gamma(\mathbf{L})$, $(x, y) = (a_0, a_{n+l-1})$. $x \wedge (x \overset{\sim}{\to} y) = a_0 \wedge (a_0 \overset{\sim}{\to} a_{n+l-1}) = a_0 \wedge a_{n+l-2} = a_0 = a_0 \wedge a_{n+l-1}$.

<u>Caso 3:</u> $x \in \gamma(\mathbf{L})$, $y \notin \gamma(\mathbf{L})$. Como $x \in \gamma(\mathbf{L})$, $x = \gamma(a)$ con $a \in L$. Luego

$$\begin{aligned}
x \wedge (x \overset{\sim}{\to} y) &= \begin{cases} \gamma(a) \wedge y & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a) \wedge \gamma(a \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge y & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a \wedge (a \to A_{n-1})) & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge y & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a \wedge A_{n-1}) & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge y & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a) \wedge \gamma(A_{n-1}) & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge y & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a) \wedge a_{n+l-1} & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge y & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a) & \text{si } \gamma(a \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \gamma(a) \wedge y.
\end{aligned}$$

De los casos anteriores, $x \wedge (x \overset{\sim}{\to} y) = x \wedge y$. Por el lema 2.2.2, $\mathbf{L}' \models x \wedge (x \overset{\sim}{\to} y) \approx x \wedge y$. Basta ver que $\mathbf{L}' \models x \wedge (y \overset{\sim}{\to} z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$. Sean $x, y, z \in L'$ tal que $y < x < z$. Por el lema 2.2.3 es suficiente probar que $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x) = x \wedge (y \overset{\sim}{\to} z)$. Entonces $x = a_j, y = a_i, z = a_m$ con $i < j < m$.

<u>Caso 1:</u> $x, y, z \in \gamma(\mathbf{L})$, $(y, z) \neq (a_0, a_{n+l-1})$. Como $x, y, z \in \gamma(\mathbf{L})$, $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$, $z = \gamma(c)$ con $a, b, c \in L$ y $b < a < c$. $\gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(c)) = \gamma(a \wedge (b \to c)) = \gamma(a \wedge (b \to a)) = \gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(a))$.

<u>Caso 2:</u> $x, y, z \in \gamma(\mathbf{L})$, $(y, z) = (a_0, a_{n+l-1})$. Como $x, y, z \in \gamma(\mathbf{L})$, $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$, $z = \gamma(c)$ con $a, b, c \in L$ y $b < a < c$. $\gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(c)) = \gamma(a) \wedge a_{n+l-2}$. Como $x < z$, $\gamma(a) \leq a_{n+l-2}$. Luego $\gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(c)) = \gamma(a)$. Además $\gamma(a) = \gamma(a) \wedge a_{n+l-2} = \gamma(a) \wedge (a_0 \overset{\sim}{\to} a_{n+l-1}) == \gamma(a) \wedge (a_0 \overset{\sim}{\to} \gamma(a)) = \gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(a))$.

<u>Caso 3:</u> $y \notin \gamma(\mathbf{L})$. $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x) = x \wedge 1 = x \wedge (y \overset{\sim}{\to} z)$.

<u>Caso 4:</u> $x, y \in \gamma(\mathbf{L})$ y $z \notin \gamma(\mathbf{L})$. Como $x, y \in \gamma(\mathbf{L})$, $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$ con $a, b \in L$ y $b < a$. Luego

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \overset{\sim}{\to} z) &= \begin{cases} \gamma(a) \wedge z & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a) \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a \wedge (b \to A_{n-1})) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge a_{n+l-1} & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a \wedge (b \to a)) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \gamma(a) \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(a)) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} \\
&= \gamma(a) \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(a)) \\
&= x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x).
\end{aligned}$$

<u>Caso 5:</u> $z, y \in \gamma(\mathbf{L})$ y $x \notin \gamma(\mathbf{L})$. Como $z, y \in \gamma(\mathbf{L})$, $z = \gamma(c)$, $y = \gamma(b)$ con $c, b \in L$ y $b < c$. $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x) = \begin{cases} x \wedge x & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ x \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases}$. Si $x \notin \gamma(\mathbf{L})$ y $\gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2}$ entonces $x \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) = \gamma(b \to A_{n-1})$. Luego $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases}$. Como $x < z$ y $x \notin \gamma(\mathbf{L})$, $z = a_{n+l-1}$. Luego $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} z) = x \wedge (\gamma(b) \overset{\sim}{\to} \gamma(A_{n-1})) = x \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases}$.

<u>Caso 6:</u> $y \in \gamma(\mathbf{L})$ y $x, z \notin \gamma(\mathbf{L})$. Como $y \in \gamma(\mathbf{L})$, $y = \gamma(b)$ con $b \in L$. $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x) = \begin{cases} x \wedge x & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ x \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases}$. Si $x \notin \gamma(\mathbf{L})$ y $\gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2}$ entonces $x \wedge \gamma(b \to A_{n-1}) = \gamma(b \to A_{n-1})$.

Luego $x \wedge (y \overset{\sim}{\to} x) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si } \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases}$.

Análogamente, usando que $x < z$,

$$x \wedge (y \overset{\sim}{\to} z) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \gamma(b \to A_{n-1}) = a_{n+l-1} \\ \gamma(b \to A_{n-1}) & \text{si} \quad \gamma(b \to A_{n-1}) \leq a_{n-2} \end{cases} .$$

De los casos anteriores $\langle \mathbf{L}', \overset{\sim}{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$.

■

Demostración 10.3.5 Sea $\mathbf{L} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ una cadena de semi-Heyting tal que $a_0 \to a_i = a_j$ y $a_0 \to a_{n-1} = a_i$. $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \vee (a_0 \to a_{n-1}) = (a_0 \to a_i) \vee a_i = = a_j \vee a_i = a_j = a_0 \to a_i = a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.5). $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \to (a_0 \to a_{n-1}) = (a_0 \to a_i) \to a_i = a_j \to a_i = a_i = a_0 \to a_{n-1}$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.6).

Sea k con $n - i < k \leq n - 1$ y $k \geq 4$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{k-2} \in L$. Si $x_m \in \{a_0, a_{n-1}\}$ para algún $1 \leq m \leq k - 2$, $x_m \vee x_m^* = 1$. Si $x_m \geq x_{m+1}$ para algún $1 \leq m \leq k - 3$, $x_m \vee x_{m+1} = x_m$. Podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} < x_{k-n+i}$. Entonces $a_i < x_{k-n+i}$. Como consecuencia $a_{i+1} \leq x_{k-n+i}$. Entonces $\{c_{k-n+i}, c_{k-n+i+1}, \ldots, c_{k-2}\} \subseteq [a_{i+1}) \backslash \{a_{n-1}\}$. Luego $|\{c_{k-n+i}, c_{k-n+i+1}, \ldots, c_{k-2}\}| \leq |[a_{i+1}) \backslash \{a_{n-1}\}|$. Entonces $k-2-(k-n+i) \leq n-2-(i+1)$. Luego $-2 \leq -3$ (absurdo). Por lo tanto $a_0 \to a_{n-1} \geq x_{k-n+i}$. Entonces $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.7).

Sea k con $n - j < k \leq n - 1$, $k \geq 3$ y supongamos que $j \neq n - 2$. Queremos verificar que el álgebra satisface la identidad (5.8). Como en el caso anterior, podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Supongamos que $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) < x_{k-n+j}$. Entonces $a_j < x_{k-n+j}$. Luego $a_{j+1} \leq x_{k-n+j}$. Luego $k - 2 - (k - n + j) \leq n - 2 - (j + 1)$. Por lo tanto $-2 \leq -3$ (absurdo). Luego $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) \geq x_{k-n+j}$. Como consecuencia $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.8).

Ahora supongamos que $j = n - 2$. Sea $a \in \mathbf{L}$. Si $a \in \{0; 1\}$ entonces $a \vee a^* = 1$. Entonces, supongamos que $a \notin \{0; 1\}$. Basta ver que $0 \to (0 \to 1) \geq a$. Si $a = a_{n-2}$ entonces $0 \to (0 \to 1) = 0 \to a_i = a_j = a_{n-2}$. Luego, resta verificar el caso en que $a = x_m$ con $1 \leq m < n - 2$. Como antes, se puede probar que $0 \to (0 \to 1) = a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) \geq x_{k-n+j} = x_{k-2}$ para $k \geq 3$. Es decir $0 \to (0 \to 1) \geq x_m$ para $1 \leq m \leq n - 3$ (pues $k \leq n - 1$). Como consecuencia $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.9).

Sea k con $i \leq k - 2 \leq n - 3$ y $k \geq 4$ y supongamos que $i \neq 1$. Nuevamente podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} > x_i$. Entonces $a_i > x_i$. Luego $a_{i-1} \geq x_i$. Como consecuencia $\{c_1, c_2, \ldots, c_i\} \subseteq (a_{i-1}] \backslash \{a_0\}$. Luego $|\{c_1, c_2, \ldots, c_i\}| \leq |(a_{i-1}] \backslash \{a_0\}|$. Entonces $i-1 \leq i-2$ (absurdo). Luego $a_0 \to a_{n-1} \leq x_i$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.10).

Supongamos ahora que $i = 1$ y sea $a \in \mathbf{L}$ tal que $a \notin \{0; 1\}$. Queremos probar que $0 \to 1 \leq a$. Supongamos que $0 \to 1 > a$. Entonces $a_1 = a_i = 0 \to 1 > a$. Luego $a = 0$ (absurdo). Entonces $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.11).

Sea k con $j \leq k - 2 \leq n - 3$ y $k \geq 4$. Tomamos $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Supongamos que $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) > x_j$. Entonces $a_j > x_j$. Luego $a_{j-1} \geq x_j$. Entonces $\{c_1, c_2, \ldots, c_j\} \subseteq (a_{j-1}] \setminus \{a_0\}$. Luego

$|\{c_1, c_2, \ldots, c_j\}| \leq |(a_{j-1}] \setminus \{a_0\}|$. Entonces $j - 1 \leq j - 2$ (absurdo). Luego $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) \leq x_j$. Entonces $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.12).

Sean t, a con $1 \leq t \leq i$ y $j - i + 1 \leq a \leq k - 2 - t$. Tomamos $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Si $a_0 \to a_{n-1} < x_t$. Luego $x_t \to (a_0 \to a_{n-1}) = a_0 \to a_{n-1}$. Si $a_0 \to a_{n-1} > x_t$. Como consecuencia $(a_0 \to a_{n-1}) \to x_t = x_t$. Ahora, supongamos que $a_0 \to a_{n-1} = x_t$ y supongamos que $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) = x_{t+a}$ con $j - i + 1 \leq a \leq k - 2 - t$. Por lo tanto $\{x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+a}\} \subseteq \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j\}$. Luego $t + a - t \leq j - i$. Entonces $j - i + 1 \leq a \leq j - i$. Luego $1 \leq 0$ (absurdo). Por lo tanto $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) > x_{t+a}$ ó $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) < x_{t+a}$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.13).

Sea k con $i \leq k - 2 \leq n - 3$ y $k \geq 4$. Considero $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Si $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) \leq x_{k-2}$, $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \vee x_{k-2} = x_{k-2}$. Supongamos que $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) > x_{k-2}$. Por lo tanto $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \vee x_{k-2} = a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})$ y $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \to x_{k-2} = x_{k-2}$. Además, como $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) > x_{k-2}$, $a_j > x_{k-2}$. Entonces $a_{j-1} \geq x_{k-2}$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} < x_i$. Luego $a_i < x_i$. Luego $a_{i+1} \leq x_i$. Entonces $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{k-2}\} \subseteq \{a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}\}$. Luego $k - 2 - i \leq j - 1 - (i + 1)$. Como $i \leq k - 2$ y $i < j$, $j \leq k - 1$. Luego $k - 2 - i \leq k - 2 - i - 1$. Por lo tanto $0 \leq -1$ (absurdo). Como consecuencia $(a_0 \to a_{n-1}) \vee x_i = a_0 \to a_{n-1}$. Entonces $\mathbf{L}$ satisface las identidades (5.14).

Sea $i = 1$, $j = 2$ y sea $a \in \mathbf{L}$ tal que $a \notin \{0, 1\}$. En este caso si $a \geq a_j$ entonces $a \vee (0 \to (0 \to 1)) = a$. Supongamos que $a < a_j = a_2$. Entonces $a \vee (0 \to (0 \to 1)) = 0 \to (0 \to 1)$ y $(0 \to (0 \to 1)) \to a = a$. Como $0 \to 1 = a_i = a_1$ y $a \notin \{0, 1\}$, entonces $0 \to 1 = a_i = a_1 = a$ verificándose así la identidad (5.15).

Sea k con $i \leq k - 2 \leq n - 3$, $1 \leq k - j + i - 1$, $j > k - 1$ y $k \geq 4$. Considero $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para todo $1 \leq m \leq k - 2$. Si $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) = x_{k-2}$, $((a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \leftrightarrow x_{k-2}) = a_{n-1}$. Si $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) < x_{k-2}$, $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \vee x_{k-2} = x_{k-2}$ y $x_{k-2} \to (a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) = (a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}))$. Supongamos que $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) > x_{k-2}$. Por lo tanto $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \vee x_{k-2} = a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})$ y $(a_0 \to (a_0 \to a_{n-1})) \to x_{k-2} = x_{k-2}$. Además, si $a_0 \to a_{n-1} < x_{k-j+i-1}$. Entonces $a_i < x_{k-j+i-1}$. Luego $a_{i+1} \leq x_{k-j+i-1}$. Como $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) > x_{k-2}$. Luego $a_j > x_{k-2}$. Entonces $a_{j-1} \geq x_{k-2}$. Luego $\{x_{k-j+i-1}, \ldots, x_{k-2}\} \subseteq \{a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}\}$. Por lo tanto $k - 2 - (k - j + i - 1) \leq j - 1 - (i + 1)$. Por lo tanto $-1 \leq -2$ (absurdo). Entones $a_0 \to a_{n-1} \geq x_{k-j+i-1}$. Como consecuencia, $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.16).

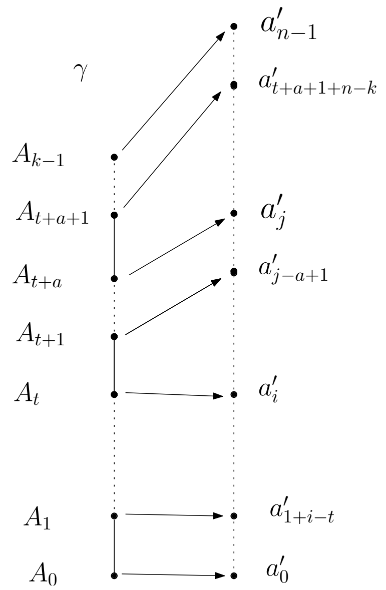
Supongamos que $i = 1$. Vamos a verificar que $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.17). Observemos que $0 \to (0 \to 1) = 0 \to a_i = a_j$. Sea $a \in \mathbf{L}$. Si $a \in \{0; 1\}$ entonces $a \vee a^* = 1$. Luego, podemos suponer que $a \neq 0, 1$. Si $a > a_j$ entonces $0 \to (0 \to 1) = a_j < a$ y $a \to (0 \to (0 \to 1)) = 0 \to (0 \to 1)$. Si $a = a_j$ entonces $0 \to (0 \to 1) = a$. Entonces, resta suponer que $a < a_j$. En ese caso $0 \to (0 \to 1) = a_j > a$ y $(0 \to (0 \to 1)) \to a = a$. Basta ver que $0 \to 1 \leq a$. Como $0 \to 1 = a_i = a_1 \leq a$ pues $a \neq 0, 1$. Entonces $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.17).

Veamos, ahora, la recíproca. Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), (H_n), (5.1), $\alpha(a_0 \to a_i = a_j)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_i)$, con $0 < i < j < n - 1$, (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17). Sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible. Como antes, podemos suponer que $|\mathbf{L}'| = k$

con $2 \leq k \leq n-1$. Si $k = 2$, existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos que satisface las identidades $\alpha(a_0 \to a_i = a_j)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_i)$ tal que $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Entonces, supongamos que $k \neq 2$. $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-2}$. A partir de ahora, tomo $x_m = A_m$ con $1 \leq m \leq k-2$ en las identidades. Supongamos que $k > n-i$, por la identidad (5.7), $(A_0 \to A_{k-1}) \vee A_{k-n+i} = A_0 \to A_{k-1}$. Luego $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-n+i}$. Supongamos que $k > n-j$, por las identidades (5.8) y (5.9). $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \vee A_{k-n+i} = A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$. Luego $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \geq A_{k-n+j}$. Supongamos que $i \leq k-2$, por la identidad (5.10), $(A_0 \to A_{k-1}) \vee A_i = A_i$. Luego $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$. Supongamos que $j \leq k-2$, por la identidad (5.12), $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \vee A_j = A_j$. Luego $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \leq A_j$. Tomaremos casos sobre k.

Caso 1: $k \leq n-j < n-i$ e $i < j \leq k-2$. Como $i \leq k-2$ y $j \leq k-2$, $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$ y $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \leq A_j$. Por la identidad (5.5), $A_0 \to A_{k-1} \leq A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$. Si $A_0 \to A_{k-1} = A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$, por la identidad (5.6), $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$ (absurdo, pues $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$). Entonces $A_0 \to A_{k-1} < A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$. Como $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.1), $A_0 \to A_{k-1} \geq A_1$. Luego $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq i$ y $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{t+a}$ con $1 \leq a \leq j-t$. Supongamos que $j-i+1 \leq a$. Por la identidad (5.13); Si $(A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})) \to A_{t+a} = A_{t+a}$ ó $A_{t+a} \to (A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})) = A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$, $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{t+a} = A_{k-1}$ (absurdo). Luego $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{t+a}$ con $a \leq j-i$. Entonces $n-1-j \geq k-1 > k-1-(t+a)$, $(t+a)-t = a \leq j-i$ y $t \leq i$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. Luego podemos definir el siguiente homomorfismo $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$:

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+n-k} & \text{si} \quad t+a+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_{x+j-t-a} & \text{si} \quad t+1 \leq x \leq t+a \\ a'_{x+i-t} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq t \\ a'_0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$



Como en el lema 5.1.4, defino una implicación $\tilde{\to}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}''$. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_t) = a'_i$ y $a'_0 \tilde{\to} a'_i = a'_0 \tilde{\to} (a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1}) = \gamma(A_0 \to$

$(A_0 \to A_{k-1})) = \gamma(A_{t+a}) = a'_j$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_i)}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_i)}$.

<u>Caso 2:</u> $k \leq n-j < n-i$ e $i \leq k-2 < j$. Como $i \leq k-2$, $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$. Por la identidad (5.1), $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq i$. Por la identidad (5.6), $A_0 \to A_{k-1} < A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$.

<u>Caso 2.1:</u> $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{t+a}$ con $1 \leq a \leq k-2-t$. Por la identidad (5.13), $1 \leq a \leq j-i$. Como en el caso 1, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_i)}$.

<u>Caso 2.2:</u> $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1}$ y $j = k-1$.

<u>Caso 2.2.1:</u> Si $k \geq 4$ entonces $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) > A_{k-2}$. Por la identidad (5.14) , se obtiene que $A_0 \to A_{k-1} \geq A_i$. Luego $A_0 \to A_{k-1} = A_i$. Considero la cadena $\mathbf{L}'' : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ donde $a_m = A_m$ si $0 \leq m \leq k-1$ y $a_m \notin L'$ si $k \leq m \leq n-1$. Definimos $\overset{\sim}{\to}: \mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}''$ como:

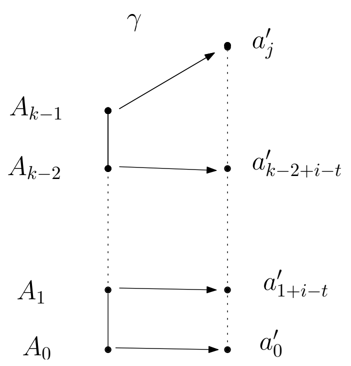
$$a_m \overset{\sim}{\to} a_r = \begin{cases} a_r & \text{si} \quad m > r \\ a_{n-1} & \text{si} \quad m = r \\ a_m \to a_r & \text{si} \quad a_m, a_r \in L \text{ e } m < r \\ a_m \to a_{k-1} & \text{si} \quad a_m \in L, a_r \notin L \text{ e } m < r \\ a_{n-1} & \quad\;\; \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como en el lema 5.1.6, $\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. En el $\mathbf{L}''$, $a_0 \overset{\sim}{\to} a_{n-1} = A_0 \to A_{k-1} = A_i = a_i$ y $a_0 \overset{\sim}{\to} a_i = A_0 \to A_i = A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1} = a_j$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_i)}$. Como en el lema 5.1.6, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_i)}$.

<u>Caso 2.2.2:</u> Si $k = 3$ entonces $j = 2$ pues $j = k-1$. Luego, como $0 < i < j = 2$, se tiene que $i = 1$. Como $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) > A_1$ y $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.15) se tiene que $A_0 \to A_{k-1} \geq A_1 = A_i$ y, en consecuencia, $A_0 \to A_{k-1} = A_i$ y se prosigue como en el caso anterior.

<u>Caso 2.3:</u> $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1}$, $j > k-1$ y $k-j+i-1 < 1$. Como $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq i$, $1 \leq t$. Entonces $k-2 \geq k-1-t$. Además, como $k-j+i-1 < 1$. Luego $k-2 < j-i$. Por lo tanto $k-1-t < j-i$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_j$ una cadena. Definimos $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como:

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_j & \text{si} \quad x = k-1 \\ a'_{x+i-t} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq k-2 \\ a'_0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$



Definimos $\tilde{\to}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}''$ como en el lema 5.1.4. $a'_0 \tilde{\to} a'_j = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_t) = a'_i$. $a'_0 \tilde{\to} a'_i = \gamma(A_0 \to A_i) = \gamma(A_{k-1}) = a'_j$. Considero la cadena $\mathbf{L}''' : a''_0 < a''_1 < \ldots < a''_{n-1}$ donde $a''_i = a'_i$ si $0 \leq i \leq j$ y $a''_i \notin L'$ si $j+1 \leq i \leq n-1$. Definimos $\tilde{\to}$: $\mathbf{L}''' \times \mathbf{L}''' \to \mathbf{L}'''$ como:

$$a''_m \tilde{\to} a''_r = \begin{cases} a''_r & \text{si } m > r \\ a''_{n-1} & \text{si } m = r \\ a'_m \to a'_r & \text{si } a''_m, a''_r \in L \text{ e } m < r \\ a'_m \to a'_r & \text{si } a''_m \in L, a''_r \notin L \text{ e } m < r \\ a''_{n-1} & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Como en el lema 5.1.6, $\langle \mathbf{L}''', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. En $\mathbf{L}'''$, $a''_0 \tilde{\to} a''_{n-1} = a'_0 \to a'_j = a'_i = a''_i$ y $a''_0 \tilde{\to} a''_i = a'_0 \to a'_i = a'_j = a''_j$. Luego $\mathbf{L}''' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$. Como en el lema 5.1.6, $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 2.4: $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1}$, $j > k-1$ y $k-j+i-1 \geq 1$.

Caso 2.4.1: $k \geq 4$. Como $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1} > A_{k-2}$, usando la identidad (5.16) , se obtiene que $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-j+i-1}$. Luego $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $k-j+i-1 \leq t \leq i$. Como $k-j+i-1 \leq t \leq i$, $j-i > k-2-t$. Como en el caso 2.3, se prueba que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 2.4.2: $k = 3$. Como $i \leq k-2$ y $0 < i$ entonces $i = 1$. Como $A_0 \to (A_0 \to A_2) = A_2 > A_1$ y como $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.17) se tiene que $A_0 \to A_2 = A_1 = A_i$. Como en el caso 2.3, se prueba que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 3: $k \leq n-j < n-i$ y $k-2 < i < j$.

Caso 3.1: $A_0 \to A_{k-1} = A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1}$. Como $k-2 < i$, $k-1 \leq i$. Considero la cadena $\mathbf{L}'' : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ donde $a_m = A_m$ si $0 \leq m \leq k-1$ y $a_m \notin L'$ si $k \leq m \leq n-1$. Definimos $\tilde{\to}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}''$ como:

$$a_r \tilde{\to} a_m = \begin{cases} a_m & \text{si } r > m \\ a_{n-1} & \text{si } r = m \\ a_r \to a_m & \text{si } 0 < r < m \leq k-1 \\ a_{n-1} & \text{si } 0 < r \leq k-1 < m \\ a_{n-1} & \text{si } k-1 \leq r < m \\ a_0 \to a_m & \text{si } r = 0, 0 < m \leq k-1 \\ a_j & \text{si } r = 0, k \leq m \leq i \\ a_i & \text{si } r = 0, i < m \end{cases}.$$

Así definida $\langle \mathbf{L}'', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$ y $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. En $\mathbf{L}''$, $a_0 \tilde{\to} a_{n-1} = a_i$ y $a_0 \tilde{\to} a_i = a_j$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.
Como consecuencia $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 3.2: $A_0 \to A_{k-1} < A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1}$. Como se satisface la identidad (5.1), $A_0 \to A_{k-1} \geq A_1$. Como $A_0 \to A_{k-1} < A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_{k-1}$, $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2 < i$. Como en el caso 2.3 se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 3.3: $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2 < i$ y $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) = A_l$ con $1 \leq l \leq k-2 < j$. Como en el caso 2.1 se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 4: $n-j < k \leq n-i$ y $i < j \leq k-2$. Como $i < k-2$ y $1 \leq i$ entonces $k \geq 4$. Utilizando la identidad (5.8) ó la identidad (5.9), $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \geq A_{k-n+j}$. Como $i < j \leq k-2$, $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$ y $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \leq A_j < A_{k-1}$. Como en el caso 2.1 se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 5: $n-j < k \leq n-i$ y $i \leq k-2 < j$. Por la identidad (5.8) ó la identidad (5.9), $A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \geq A_{k-n+j}$. Por la identidad (5.10), $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$. Como en el caso 2 se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 6: $n-j < k \leq n-i$ y $k-2 < i < j$. Como en el caso 3 se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 7: $n-j < n-i < k$ y $i < j \leq k-2$. Por las identidades (5.7), (5.8), (5.9), (5.10) y (5.12), $A_{k-n+i} \leq A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$ y $A_{k-n+j} \leq A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}) \leq A_j$. El resto de la demostración de este caso es análoga al caso 1.

Caso 8: $n-j < n-i < k$ y $i \leq k-2 < j$. Por las identidades (5.7), (5.8), (5.9) y (5.10) $A_{k-n+j} \leq A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$ y $A_{k-n+i} \leq A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$. El resto de la demostración de este caso es análoga al caso 2.

Caso 9: $n-j < n-i < k$ y $k-2 < i < j$. Por las identidades (5.7), (5.8) ó (5.9), $A_{k-n+j} \leq A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})$ y $A_{k-n+i} \leq A_0 \to A_{k-1}$. Se concluye de manera análoga al caso 3.

De los casos anteriores, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

■

Demostración 10.3.6 Sea $\mathbf{L} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ una cadena de semi-Heyting con n elementos tal que $a_0 \to a_i = a_i$ y $a_0 \to a_{n-1} = a_i$. Entonces $a_0 \to (a_0 \to a_{n-1}) = a_0 \to a_i = a_i = a_0 \to a_{n-1}$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.18). Sea k con $2 \leq k \leq n-1$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{k-2} \in L$. Podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$ para $1 \leq m \leq k-2$.

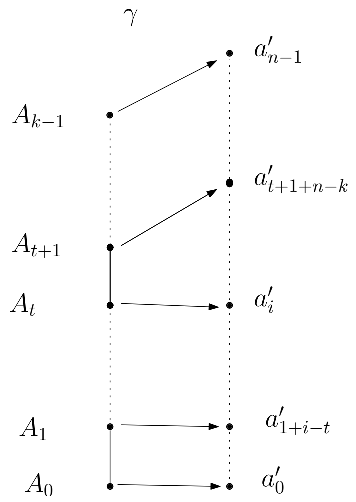
Caso 1: $n-i < k \leq n-1$, $k \geq 3$. Si $x_{k-n+i} > a_0 \to a_{n-1}$. Entonces $x_{k-n+i} > a_i$. Luego $x_{k-n+i} \geq a_{i+1}$. Luego $\{c_{k-n+i}, c_{k-n+i+1}, \ldots, c_{k-2}\} \subseteq [a_{i+1}) \setminus \{a_{n-1}\}$. Entonces $|\{c_{k-n+i}, c_{k-n+i+1}, \ldots, c_{k-2}\}| \leq |[a_{i+1}) \setminus \{a_{n-1}\}|$. Luego $k-2-(k-n+i) \leq n-2-(i+1)$. Luego $0 \leq -1$ (contradicción). Luego $x_{k-n+i} \leq a_0 \to a_{n-1}$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ satisface (5.19) y (5.20).

Caso 2: $i \leq k-2 \leq n-3$. Si $x_i < a_0 \to a_{n-1}$. Entonces $x_i < a_i$. Luego $x_i \leq a_{i-1}$. Entonces $\{c_1, c_2, \ldots, c_i\} \subseteq (a_{i-1}] \setminus \{a_0\}$. Luego $|\{c_1, c_2, \ldots, c_i\}| \leq |(a_{i-1}] \setminus \{a_0\}|$. Entonces $i-1 \leq i-2$. Luego $-1 \leq -2$ (contradicción). Como consecuencia $x_i \geq a_0 \to a_{n-1}$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ satisface (5.21) y (5.22).

Veamos, ahora, la recíproca. Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), (H_n), (5.1), (5.18) $\alpha(a_0 \to a_i = a_i)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_i)$,(5.19), (5.20), (5.21) y (5.22). Sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible. Como antes, podemos suponer que $|\mathbf{L}'| = k$ con $2 \leq k \leq n-1$. Si $k = 2$, existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos que satisface las identidades $\alpha(a_0 \to a_i = a_i)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_i)$ tal que $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Entonces, supongamos que $k \neq 2$. $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-2}$. A partir de ahora, tomo $x_m = A_m$ con $1 \leq m \leq k-2$ en las identidades. Supongamos que $k > n-i$, por la identidad (5.19) ó (5.20), $(A_0 \to A_{k-1}) \vee A_{k-n+i} = A_0 \to A_{k-1}$. Luego $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-n+i}$. Supongamos que $i \leq k-2$, por la identidad (5.21) ó (5.22), $(A_0 \to A_{k-1}) \vee A_i = A_i$. Luego $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$. Tomaremos casos sobre k.

Caso 1: $k > n-i$ e $i \leq k-2$. Entonces, por lo anterior, $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $k-n+i \leq t \leq i$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. $k-n+i \leq t$. Entonces $k-t \leq n-i$. Luego $k-1-t \leq n-1-i$. Además, como $t \leq i$, podemos definir el siguiente monomorfismo $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$.

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+n-k} & \text{si} \quad t+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_{x+i-t} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq t \\ a'_0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$



Definimos una implicación $\tilde{\to}$ sobre $\mathbf{L}''$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_t) = a'_i$ y $a'_0 \tilde{\to} a'_i = \gamma(A_0 \to A_t) = \gamma(A_0 \to (A_0 \to A_{k-1}))$. Por la identidad (5.18), $\gamma(A_0 \to (A_0 \to A_{k-1})) = \gamma(A_0 \to A_{k-1})$. Luego $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_t) = a'_i$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 2: $k > n-i$ e $i > k-2$. Como $k > n-i$, $A_0 \to A_{k-1} \geq A_{k-n+i}$. Luego $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $k-n+i \leq t \leq k-2$ ó $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$.

Caso 2.1: $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $k-n+i \leq t \leq k-2$. $k-n+i \leq t$. Entonces $k-1-t \leq n-1-i$. $t \leq k-2 < i$. Como en el caso 1, se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 2.2: $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$. Como $k-2 < i$, $k-1 \leq i$. Considero la cadena $\mathbf{L}'' : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ donde $a_m = A_m$ si $0 \leq m \leq k-1$ y $a_m \notin L'$ si $k \leq m \leq n-1$. Definimos $\tilde{\to}$: $\mathbf{L}'' \times \mathbf{L}'' \to \mathbf{L}''$ como:

$$a_r \tilde{\to} a_m = \begin{cases} a_m & \text{si } r > m \\ a_{n-1} & \text{si } r = m \\ a_r \to a_m & \text{si } 0 < r < m \leq k-1 \\ a_{n-1} & \text{si } 0 < r \leq k-1 < m \\ a_{n-1} & \text{si } k-1 \leq r < m \\ a_0 \to a_m & \text{si } r = 0, 0 < m \leq k-1 \\ a_i & \text{si } r = 0, k \leq m \end{cases}.$$

Así definida $\langle \mathbf{L}'', \tilde{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$ y $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. En $\mathbf{L}''$, $a_0 \tilde{\to} a_{n-1} = a_i$ y $a_0 \tilde{\to} a_i = a_i$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.
Como consecuencia $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 3: $k \leq n-i$ e $i \leq k-2$. Como $i \leq k-2$, $A_0 \to A_{k-1} \leq A_i$. Además $n-1-i \geq k-i > k-1-t$. Como en el caso 1, se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 4: $k \leq n-i$ e $i > k-2$. Entonces $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-1$.

Caso 4.1: $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2$. Como $k \leq n-i$, $n-1-i > k-1-t$. Si $t > i$. Entonces $t > k-2$ (absurdo). Luego $t \leq i$. Como en el caso 1, se demuestra que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_i)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_i)}$.

Caso 4.2: $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$. Este caso es análogo al caso 2.2.

■

Demostración 10.3.7 Sea $\mathbf{L} : a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ una cadena de semi-Heyting con n elementos tal que $a_0 \to a_i = a_i$ y $a_0 \to a_{n-1} \geq a_{i+1}$. Como en demostraciones anteriores, podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-2}$ con $x_m \notin \{a_0, a_{n-1}\}$.

Caso 1: Supongamos que $r \leq k-2 < j$, $k \geq 4$. Si $a_0 \to a_{n-1} < x_r$, $x_r \vee (a_0 \to a_{n-1}) = x_r$ y $x_r \to (a_0 \to a_{n-1}) = a_0 \to a_{n-1}$. Si $a_0 \to a_{n-1} > x_r$, $x_r \vee (a_0 \to a_{n-1}) = a_0 \to a_{n-1}$ y $(a_0 \to a_{n-1}) \to x_r = x_r$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} = x_r$. Entonces $a_r = x_r$. Sea $1 \leq m \leq r$. Si $x_m > a_m$. Entonces $x_m \geq a_{n+1}$. Luego $\{c_m, c_{m+1}, \ldots, c_r\} \subseteq [a_{m+1}) \setminus \{a_{n-1}\}$. Entonces $r-m \leq r-m-1$ (contradicción). Si $x_m < a_m$. Luego $x_m \leq a_{m-1}$. Por lo tanto $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\} \subseteq (a_{m-1}] \setminus \{a_0\}$. Entonces $m-1 \leq m-1-1$ (absurdo). Por lo tanto $x_m = a_m$ si $1 \leq m \leq r$. Entonces

$$\begin{array}{rcll} a_0 \to x_i & = & a_0 \to a_i & \text{pues } 1 \leq i < r \\ & = & a_j & \text{pues } a_0 \to a_i = a_j \\ & > & a_r & \text{pues } j > r \\ & = & x_r. & \end{array}$$

Entonces $(a_0 \to x_i) \vee x_r = a_0 \to x_i$ y $(a_0 \to x_i) \to x_r = x_r$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.25).

Caso 2: $r \leq k-2 < j$, $k \geq 4$ entonces $k > n-j$. Como antes si $a_0 \to a_{n-1} = x_r$, $x_m = a_m$ con $1 \leq m \leq r$. Supongamos que $a_0 \to x_i < x_{k-n+j}$. Como $i < r$, $a_0 \to a_i < x_{k-n+j}$. Entonces $a_j < x_{k-n+j}$. Luego $a_{j+1} \leq x_{k-n+j}$. Entonces $\{c_{k-n+j}, c_{k-n+j+1}, \ldots, c_{k-2}\} \subseteq [a_{j+1}) \setminus \{a_{n-1}\}$. Luego $0 \leq -1$ (absurdo). Como consecuencia $a_0 \to x_i \geq x_{k-n+j}$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.26).

Caso 3: $k-2 < r < j,\ i < k-1,\ r = k-1$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} > x_{r-1}$. Entonces $a_r > x_{r-1}$. Luego $a_{r-1} \geq x_{r-1}$. Luego $x_i = a_i$. Entonces $a_0 \to x_i = a_0 \to a_i = a_j < a_r = a_0 \to a_{n-1}$. Luego $(a_0 \to x_i) \vee (a_0 \to a_{n-1}) = a_0 \to x_i$. Así se satisface (5.27) ó (5.28).

Caso 4: $n-r < k \leq n-1,\ k \geq 4,\ r \neq n-2$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} < x_{k-n+r}$. Entonces $a_r < x_{k-n+r}$. Luego $a_{r+1} \leq x_{k-n+r}$. Luego $\{c_{k-n+r}, c_{k-n+r+1}, \ldots, c_{k-2}\} \subseteq [a_{r+1}) \setminus \{a_{n-1}\}$. Entonces $0 \leq -1$ (absurdo). Por lo tanto $a_0 \to a_{n-1} \geq x_{k-n+r}$.

Caso 5: $n-r < k \leq n-1,\ k \geq 4,\ r = n-2$. Si $x \vee x^* \neq a_{n-1}$. Entonces $x \notin \{a_0, a_{n-1}\}$. Luego $x \leq a_r$. Entonces $x \leq a_0 \to a_{n-1}$.

Caso 6.1: $r \leq k-2, j > r,\ k \geq 5$. Si $a_0 \to a_{n-1} > x_r$. Entonces $a_r > x_r$. Luego $a_{r-1} \geq x_r$. Por lo tanto $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\} \subseteq (a_{r-1}] \setminus \{a_0\}$. Luego $r-1 \leq r-2$ (contradicción). Entonces $a_0 \to a_{n-1} \leq x_r$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.31). Supongamos que $x_r = a_0 \to a_{n-1}$. Luego $x_m = a_m$ con $1 \leq m \leq r$. Por lo tanto $a_0 \to x_i = a_0 \to a_i = a_j$. Si $a_j > x_j$ entonces $a_{j-1} \geq x_j$. Luego $\{c_1, c_2, \ldots, c_j\} \subseteq (a_{j-1}] \setminus \{a_0\}$. Por lo tanto $j-1 \leq j-2$ (absurdo). Por lo tanto $a_j \leq x_j$, entonces $a_0 \to x_i \leq x_j$. Además, $a_0 \to x_i = a_0 \to a_i = a_j > a_r = x_r$. Por lo tanto $\mathbf{L}$ verifica la identidad (5.32).

Caso 6.2: $r \leq k-2, j < r,\ k \geq 5$. Como en el caso anterior, si $x_r = a_0 \to a_{n-1}$. Luego $x_m = a_m$ con $1 \leq m \leq r$. Entonces $a_0 \to x_i = a_0 \to a_i = a_j$. Si $a_j > x_j$. Entonces $a_{j-1} \geq x_j$. Luego $\{c_1, c_2, \ldots, c_j\} \subseteq (a_{j-1}] \setminus \{a_0\}$. Por lo tanto $j-1 \leq j-2$ (absurdo). Por lo tanto $a_j \leq x_j$, entonces $a_0 \to x_i \leq x_j$. Además, $a_0 \to x_i = a_0 \to a_i = a_j < a_r = x_r$. Luego $\mathbf{L}$ verifica la identidad (5.35).

Caso 7: $r < j \leq k-2 \leq n-3,\ k \geq 5,\ n-j < k \leq n-1$. Como antes, si $a_0 \to a_{n-1} = x_r$, $x_m = a_m$ con $1 \leq m \leq r$. Como consecuencia $a_0 \to x_i = a_0 \to a_i = a_j$. Si $a_0 \to x_i < x_{k-n+j}$ entonces $0 \leq -1$ (contradicción). Luego $a_0 \to x_i \geq x_{k-n+j}$. Como consecuencia se satisface la identidad (5.33).

Caso 8: $j \leq k-2 < r,\ k \geq 4$. Supongamos que $a_0 \to a_{n-1} > x_{k-2}$. Como $r = k-1$, Como $i < j \leq k-2$, $a_0 \to X_i = a_0 \to a_i = a_j = x_j$. Luego se satisface (5.34).

Caso 9: $j < r \leq k-2 \leq n-3,\ k \geq 5,\ n-r < k \leq n-1$. Si $x_r = a_0 \to a_{n-1}$, $x_m = a_m$ si $1 \leq m \leq r$. Como $i < j < r$, $a_0 \to X_i = a_0 \to a_i = a_j = x_j$. Luego se satisface (5.36).

Caso 10: $j = r \leq k-2 \leq n-3,\ k \geq 4$. Como en la demostración para la identidad (5.36), Si $x_r = a_0 \to a_{n-1}$, $x_m = a_m$ si $1 \leq m \leq r$. Como $i < j < r$, $a_0 \to X_i = a_0 \to a_i = a_j = a_r = x_r$. Luego $\mathbf{L}$ satisface la identidad (5.37).

<u>Caso 11:</u> $j = r,\ k-2 < r,\ i < k-1,\ r = k-1$. Idem para probar que se verificaban las identidades (5.27) y (5.28) pero $a_0 \to X_i = a_0 \to a_i = a_j = a_r = a_0 \to a_{n-1}$. Luego $\mathbf{L}$ satisface (5.38) y (5.39).

Veamos, ahora, la recíproca. Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de $\mathcal{SH}$ definida por las identidades (Ch), (H_n), (5.1), $\alpha(a_0 \to a_i = a_j)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_r)$, (5.25), (5.26), (5.27), (5.28), (5.29), (5.30), (5.31), (5.32), (5.33), (5.34), (5.35), (5.36), (5.37), (5.38), (5.39) . Sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}$ subdirectamente irreducible. Como antes, podemos suponer que $|\mathbf{L}'| = k$ con $2 \leq k \leq n-1$. Si $k = 2$, existe una cadena de semi-Heyting $\mathbf{L}''$ con n elementos que satisface las identidades $\alpha(a_0 \to a_i = a_j)$, $\alpha(a_0 \to a_{n-1} = a_r)$ tal que $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Entonces, supongamos que $k \neq 2$. $\mathbf{L}' : A_0 < A_1 < \ldots < A_{k-1}$. A partir de ahora, tomo $x_m = A_m$ con $1 \leq m \leq k-2$ en las identidades.

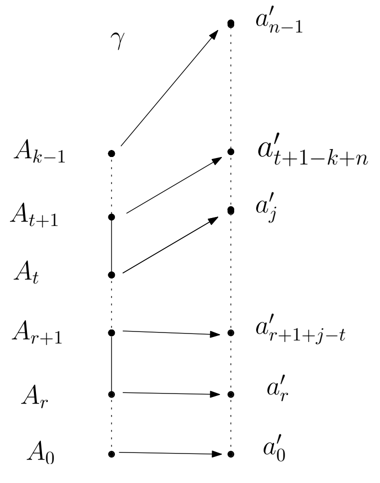
<u>Caso 1:</u> $r \leq k-2 < j$ Por la identidad (5.31), $A_0 \to A_{n-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq r$.

<u>Caso 1.1:</u> $A_0 \to A_{n-1} = A_r$. Por la identidad (5.25), $A_0 \to A_i > A_r$. Luego $A_0 \to A_i = A_t$ con $r+1 \leq t \leq k-1$.

<u>Caso 1.1.1:</u> $A_0 \to A_i = A_t$ con $r+1 \leq t \leq k-2$. Además $j - r \geq k-1-r > p-r$.

<u>Caso 1.1.1.1:</u> $k \leq n-j$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. $k \leq n-j$. Entonces $k-1 \leq n-j-1$. Luego $k-1-t \leq k-1 \leq n-j-1$. Entonces $k-1-t \leq n-j-1$. Luego podemos definir un monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x-k+n} & \text{si } \ t+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_{x+j-t} & \text{si } \ r+1 \leq x \leq t \\ a'_x & \text{si } \ 0 \leq x \leq r \end{cases} .$$



Definimos una implicación $\tilde{\to}$ sobre $\mathbf{L}''$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_r) = a'_r$ y $a'_0 \tilde{\to} a'_i = \gamma(A_0 \to A_i) = \gamma(A_t) = a'_j$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$.

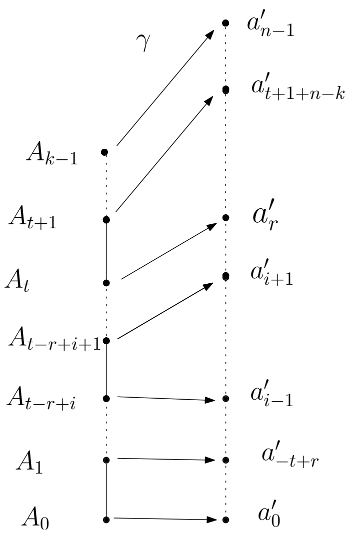
<u>Caso 1.1.1.2:</u> $k > n-j$. Por (5.26), $A_0 \to A_i = A_t$ con $k-n+j \leq t \leq k-2$. Entonces $k-1-t \leq k-1-(k-n+j) \leq n-1-j$. Como en el caso 1.1.1.1, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$.

Caso 1.1.2: $A_0 \rightarrow A_i = A_{k-1}$. Existe una cadena de semi-Heyting $\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\rightarrow} \rangle$ con $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ tal que $a'_0 \overset{\sim}{\rightarrow} a'_{n-1} = a'_r$, $a'_0 \overset{\sim}{\rightarrow} a'_i = a'_j$ y $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \rightarrow a_i = a_j) \& (a_0 \rightarrow a_{n-1} = a_r)}$.

Caso 1.2: $A_0 \rightarrow A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq r-1$.

Caso 1.2.1: $k > n - r$. Por (5.29) ó (5.30) $A_0 \rightarrow A_{k-1} = A_t$ con $k - n + r \leq t \leq r - 1$. Sea $\mathbf{L}' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. $k - n + r \leq t$. Entonces $k - t \leq n - r$. Luego $k - 1 - t \leq n - 1 - r$. Entonces podemos definir el siguiente monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \rightarrow \mathbf{L}''$.

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+n-k} & \text{si} \quad t+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_{x-t+r} & \text{si} \quad t-r+i+1 \leq x \leq t \\ a'_{x-t+r-1} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq t-r+i \\ a'_0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$



Definimos en $\mathbf{L}''$ una implicación $\overset{\sim}{\rightarrow}$ como:

$a'_m \overset{\sim}{\rightarrow} a'_r =$

$$\begin{cases} a'_r & \text{si} \quad m > r \\ a'_{n-1} & \text{si} \quad m = r \\ \gamma(a \rightarrow b) & \text{si} \quad \gamma(a) = a_m, \gamma(b) = a_r, m < r \\ \gamma(a \rightarrow A_{k-1}) & \text{si} \quad \gamma(a \rightarrow A_{k-1}) < a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r \\ a'_j & \text{si} \quad \gamma(a \rightarrow A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), (m,r) = (0,i) \\ a'_r & \text{si} \quad \gamma(a \rightarrow A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r, (m,r) \neq (0,i) \\ a'_{n-1} & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases}.$$

$\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\rightarrow} \rangle \in \mathcal{SH}$. $a'_0 \overset{\sim}{\rightarrow} a'_i = a'_j$. $a'_0 \overset{\sim}{\rightarrow} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \rightarrow A_{k-1}) = \gamma(A_t) = a'_r$. Entonces $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \rightarrow a_i = a_j) \& (a_0 \rightarrow a_{n-1} = a_r)}$. Como $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}'')$, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \rightarrow a_i = a_j) \& (a_0 \rightarrow a_{n-1} = a_r)}$.

Caso 1.2.2: $k \leq n - r$. Como $k \leq n - r$, $k - 1 - t \leq n - 1 - r$. Se prueba que $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}'')$, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \rightarrow a_i = a_j) \& (a_0 \rightarrow a_{n-1} = a_r)}$ como en el caso 1.2.1.

<u>Caso 2:</u> $k-2<r<j$. $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-1$.

<u>Caso 2.1:</u> $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$.

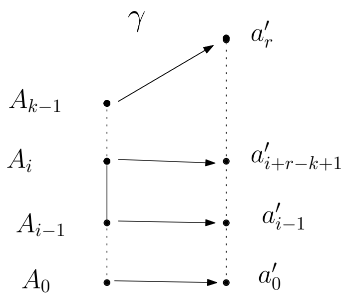
<u>Caso 2.1.1:</u> $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$ e $i \geq k-1$. Existe una cadena de semi-Heyting $\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\to} \rangle$ con $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ tal que $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_{n-1} = a'_r$, $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_i = a'_j$ y $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$.

<u>Caso 2.1.2:</u> $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i < k-1$.

<u>Caso 2.1.2.1:</u> $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i < k-1$, $r = k-1$. $(A_0 \to A_{k-1}) \vee A_{r-1} = A_{k-1} \vee A_{k-2} = A_{k-2} = A_{r-1}$ y $(A_0 \to A_{k-1}) \to A_{r-1} = A_r \to A_{r-1} = A_{r-1}$. Por (5.27) ó (5.28), $A_0 \to A_i \geq A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$. Luego $A_0 \to A_i = A_{k-1}$. Existe una cadena de semi-Heyting $\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\to} \rangle$ con $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ tal que $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_{n-1} = a'_r$, $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_i = a'_j$ y $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$.

<u>Caso 2.1.2.2:</u> $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i < k-1$, $r > k-1$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_r$ una cadena. Definimos $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$.

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x+r-k+1} & \text{si} \quad i \leq x \leq k-1 \\ a'_x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq i-1 \end{cases}.$$



Definimos en $\mathbf{L}''$ una implicación $\overset{\sim}{\to}$ como:

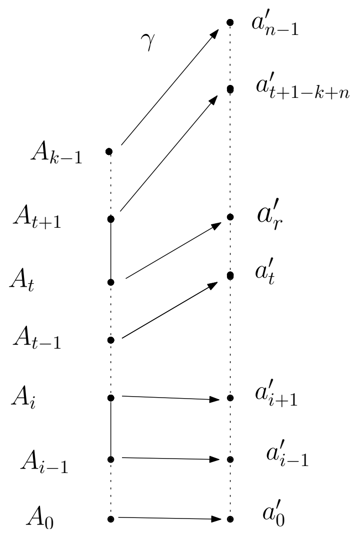
$$a'_m \overset{\sim}{\to} a'_r = \begin{cases} a'_r & \text{si} \quad m > r \\ a'_{n-1} & \text{si} \quad m = r \\ \gamma(a \to b) & \text{si} \quad \gamma(a) = a_m, \gamma(b) = a_r, m < r \\ \gamma(a \to A_{k-1}) & \text{si} \quad \gamma(a \to A_{k-1}) < a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r \\ a'_j & \text{si} \quad \gamma(a \to A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, \\ & \quad\quad a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), (m,r) = (0,i) \\ a'_r & \text{si} \quad \gamma(a \to A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r, \\ & \quad\quad (m,r) \neq (0,i) \\ a'_{n-1} & \text{si} \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\to} \rangle \in \mathcal{SH}$. $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$. Entonces $\gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_{k-1})$. Luego $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_r = a'_r$. $\gamma(A_0 \to A_{k-1}) = a'_r \geq a'_{i+1} > a'_i$. Luego $a'_0 \overset{\sim}{\to} a'_i = a'_j$. Entonces $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}'')$. Existe una cadena de semi-Heyting $\langle \mathbf{L}''', \overset{\sim}{\to}_1 \rangle$ con $\mathbf{L}''' : a''_0 < a''_1 < \ldots < a''_{n-1}$ tal que $a''_0 \overset{\sim}{\to}_1 a''_{n-1} = a''_r$, $a''_0 \overset{\sim}{\to}_1 a''_i = a''_j$ y $\mathbf{L}'' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}''')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j) \& (a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$.

Caso 2.2: $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2$. Si $r \leq t$. Entonces $k-2 < r \leq t$. Luego $k-1 \leq t$ (absurdo). Luego $t < r$.

Caso 2.2.1: $n - r \geq t$. Sea $\mathbf{L}' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. $n-1-r \geq k-1 > k-2 \geq k-1-t$. Entonces podemos definir el siguiente monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$.

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x-k+n} & \text{si } \; t+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_r & \text{si } \; x = t \\ a'_{x+1} & \text{si } \; i \leq x \leq t-1 \\ a'_x & \text{si } \; 0 \leq x \leq i-1 \end{cases}.$$



Definimos en $\mathbf{L}''$ una implicación $\overset{\sim}{\rightarrow}$ como:

$$a'_m \overset{\sim}{\rightarrow} a'_r = \begin{cases} a'_r & \text{si } \; m > r \\ a'_{n-1} & \text{si } \; m = r \\ \gamma(a \to b) & \text{si } \; \gamma(a) = a_m, \gamma(b) = a_r, m < r \\ \gamma(a \to A_{k-1}) & \text{si } \; \gamma(a \to A_{k-1}) < a_r, \gamma(a) = a_m, a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r \\ a'_j & \text{si } \; \gamma(a \to A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, \\ & \quad\; a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), (m,r) = (0,i) \\ a'_r & \text{si } \; \gamma(a \to A_{k-1}) \geq a_r, \gamma(a) = a_m, \\ & \quad\; a_r \notin \gamma(\mathbf{L}'), m < r, (m,r) \neq (0,i) \\ a'_{n-1} & \quad\; \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\langle \mathbf{L}'', \overset{\sim}{\rightarrow} \rangle \in \mathcal{SH}$. $a'_0 \overset{\sim}{\rightarrow} a'_i = a'_j$. $a'_0 \overset{\sim}{\rightarrow} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_t) = a'_r$. Entonces $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$. Como $\mathbf{L}' \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}'')$, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$.

Caso 2.2.2: $n - r < k$. Como $n - r < k$, $1 \leq k - n + r$. Por (5.29) ó (5.30), $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2$. Como $k - n + r \leq t$, $k - 1 - t \leq n - 1 - r$. Se prueba que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0 \to a_i = a_j)\&(a_0 \to a_{n-1} = a_r)}$ como en el caso 2.2.1.

Caso 3: $r < j \leq k-2$. Por la identidad (5.31), $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq r$.

Caso 3.1: $r < j \leq k-2,\ t < r$. Se prueba que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_r)}$ como en el caso 2.2.

Caso 3.2: $r < j \leq k-2,\ t = r$. Entonces $A_0 \to A_{k-1} = A_r$. Por (5.32), $A_0 \to A_i = A_l$ con $r \leq l \leq j$.

Caso 3.2.1: $r < j \leq k-2,\ t = r,\ n-j < k$. Por (5.33), $A_0 \to A_i \geq A_{k-n+j}$. Luego $A_0 \to A_i = A_l$ con $k-n+j \leq l \leq j$. Sea $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ una cadena. Como $k-n+j \leq l$, $k-1-l \leq n-j-1$. Luego podemos definir un monomorfismo de reticulados $\gamma : \mathbf{L}' \to \mathbf{L}''$ como

$$\gamma(A_x) = \begin{cases} a'_{x-k+n} & \text{si} \quad l+1 \leq x \leq k-1 \\ a'_{x-l+j} & \text{si} \quad r+1 \leq x \leq l \\ a'_x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq r \end{cases}.$$

Definimos una implicación $\tilde{\to}$ sobre $\mathbf{L}''$ como en el lema 5.1.4. En $\mathbf{L}''$, $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = \gamma(A_0 \to A_{k-1}) = \gamma(A_r) = a'_r$ y $a'_0 \tilde{\to} a'_i = \gamma(A_0 \to A_i) = \gamma(A_l) = a'_j$. Luego $\mathbf{L}'' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_r)}$. Por el lema 5.1.4, $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_r)}$.

Caso 3.2.1: $r < j \leq k-2,\ t = r,\ n-j \geq k$. Si $n-j \geq k$. Entonces $n-j \geq k > k-l$. Por lo tanto $n-j-1 > k-1-l$. Se prueba que $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_r)}$ como en el caso 3.2.1.

Caso 4: $j \leq k-2 < r$. $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-1$.

Caso 4.1: $j \leq k-2 < r$ y $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$.

Caso 4.1.1: $j \leq k-2 < r$, $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$ y $r = k-1$. Por (5.34), $A_0 \to A_i = A_j$. Existe una cadena de semi-Heyting $\langle \mathbf{L}'', \tilde{\to} \rangle$ con $\mathbf{L}'' : a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{n-1}$ tal que $a'_0 \tilde{\to} a'_{n-1} = a'_r$, $a'_0 \tilde{\to} a'_i = a'_j$ y $\mathbf{L}' \in \mathbb{H}(\mathbf{L}'')$. Luego $\mathbf{L}' \in \mathcal{V}^n_{(a_0\to a_i=a_j)\&(a_0\to a_{n-1}=a_r)}$.

Caso 4.1.2: $j \leq k-2 < r$, $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$ y $r > k-1$. Se sigue como el caso 2.1.2.2.

Caso 4.2: $j \leq k-2 < r$, $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2$. Si $t \geq r$. Entonces $k-1 < r \leq t \leq k-2$ (absurdo). Se sigue como el caso 2.2.

Caso 5: $k-2 < j < r$. $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-1$.

Caso 5.1: $k-2 < j < r$ y $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$.

Caso 5.1.1: $k-2 < j < r$, $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$ e $i \geq k-1$. Se sigue como el caso 2.1.1.

Caso 5.1.2: $k-2 < j < r$, $A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$ e $i < k-1$. Si $r = k-1$, $k-2 < j < r = k-1$ (absurdo). Luego $r > k-1$. Se sigue como el caso 2.1.2.2.

Caso 5.2: $k-2 < j < r$ y $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2$. Se sigue como el caso 2.2.

Caso 6: $j < r \leq k-2$. Se demuestra como en el caso 3 intercambiando j con r. Pero debe modificarse el caso 3.2.1 de la siguiente forma: Como $A_0 \to A_{k-1} = A_r$, por la identidad (5.36), $A_0 \to A_i = A_j$.

<u>Caso 7:</u> $j = r$, $r \leq k-2$. Por (5.33), $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq r$.

<u>Caso 7.1:</u> $j = r$, $r \leq k-2$ y $A_0 \to A_{k-1} = A_r$. Entonces, por (5.37), $A_0 \to A_i = A_r$.

<u>Caso 7.2:</u> $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq r-1$. Se sigue como en el caso 1.2.

<u>Caso 8:</u> $j = r$, $r > k-2$. $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-1$.

<u>Caso 8.1:</u> $j = r$, $r > k-2$,$A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$.

<u>Caso 8.1.1:</u> $j = r$, $r > k-2$,$A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i \geq k-1$. Se sigue como en el caso 2.1.1.

<u>Caso 8.1.2:</u> $j = r$, $r > k-2$,$A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i < k-1$.

<u>Caso 8.1.2.1:</u> $j = r$, $r > k-2$,$A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i < k-1, r = k-1$. Por las identidades (5.38) y (5.39), $A_0 \to A_i = A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$. Se sigue como en el caso 2.1.2.1.

<u>Caso 8.1.2.2:</u> $j = r$, $r > k-2$,$A_0 \to A_{k-1} = A_{k-1}$, $i < k-1, r > k-1$. Idem al caso 2.1.2.2.

<u>Caso 8.2:</u> $j = r$, $r > k-2$, $A_0 \to A_{k-1} = A_t$ con $1 \leq t \leq k-2$. Idem al caso 2.2 .

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] M. ABAD, J. M. CORNEJO AND J. P. DÍAZ VARELA, *Free-decomposability in Varieties of Semi-Heyting Algebras*, Aceptado para ser publicado en Mathematical Logic Quarterly (2011).

[2] M. ABAD, J. M. CORNEJO AND J. P. DÍAZ VARELA, *Semi-Heyting Algebras Term Equivalent to Gödel Algebras*, Enviado para ser publicado en ORDER (2011).

[3] M. ABAD, J. M. CORNEJO AND J. P. DÍAZ VARELA, *The variety generated by semi-Heyting chains*, Soft Computing: Volume 15, Issue 4 (2011), Page 721.

[4] M. ABAD, J. M. CORNEJO AND J. P. DÍAZ VARELA, *The Variety of Semi-Heyting Algebras Satisfying the equation* $(0 \to 1)^* \vee (0 \to 1)^{**} \approx 1$, Reports on Mathematical Logic 46 (2011), 75-90.

[5] M. ABAD AND L. MONTEIRO, *On free L-algebras*, Notes on Mathematical Logic. No. 34, 35 (Spanish), No. 2, 20 pp., Notas Lógica Mat., 34, 35, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca (1987).

[6] R. BALBES AND P. DWINGER, *Distributive lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Mo. (1974). xiii+294 pp.

[7] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, revised edition. American Mathematical Society, New York, N. Y. (1948). xiii+283 pp.

[8] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, third. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1979). vi+418 pp.

[9] W. J. BLOK AND D. PIGOZZI, *Algebraizable logics*, Mem. Amer. Math. Soc. 77 (1989), no. 396, vi+78 pp.

[10] W. J. BLOK AND J. G. RAFTERY, *Varieties of commutative residuated integral pomonoids and their residuation subreducts*, J. Algebra 190 (1997), no. 2, 280–328.

[11] S. BURRIS AND H. P. SANKAPPANAVAR, *A course in universal algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 78. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. xvi+276 pp.

[12] D. CASTAÑO, J. P. DÍAZ VARELA AND A. TORRENS, *Free-decomposability in Varieties of Pseudocomplemented Residuated Lattices*, Special Issue of Studia Logica - Algebras Related to Non-classical Logic 98, 1-2 (June/July 2011), 223-235.

[13] J. M. CORNEJO, *Semi-Intuitionistic Logic*, Special Issue of Studia Logica - Algebras Related to Non-classical Logic 98, 1-2 (June/July (2011), 9-25.

[14] J. Czelakowski, *Protoalgebraic logics*, Trends in Logic - Studia Logica Library, 10. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2001). xii+452 pp.

[15] J. J. Da Silva, I. M. L. D'Ottaviano and A. M. Sette, *Translations between logics*, Models, algebras, and proofs (Bogotá, 1995), 435–448, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 203, Dekker, New York, 1999.

[16] A. Diego, *Sur les algèbres de Hilbert*, (French) Translated from the Spanish by Luisa Iturrioz. Collection de Logique Mathématique, Sér. A, Fasc. XXI Gauthier-Villars, Paris; E. Nauwelaerts, Louvain 1966 viii+55 pp.

[17] M. C. Fitting, *Intuitionistic logic, model theory and forcing*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London 1969 191 pp.

[18] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 151. Elsevier B. V., Amsterdam, 2007. xxii+509 pp.

[19] G. Grätzer, *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1971. xv+212 pp.

[20] P. Hájek, *Metamathematics of fuzzy logic*, Trends in Logic - Studia Logica Library, 4. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, viii+297pp.

[21] P. Hájek, *On the metamathematics of fuzzy logic*, Discovering the world with fuzzy logic, 155–174, Stud. Fuzziness Soft Comput., 57, Physica, Heidelberg, 2000.

[22] T. Hecht and T. Katriňák, *Equational classes of relative Stone algebras*, Notre Dame J. Formal Logic 13 (1972), 248–254.

[23] K. Iseki, *An algebra related with a propositional calculus*, Proc. Japan Acad. 42 1966 26–29.

[24] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 3. Cambridge University Press, Cambridge, 1982. xxi+370 pp.

[25] Y. Komori, *Super-Lukasiewicz propositional logics*, Nagoya Math. J. 84 (1981), 119-133.

[26] R. N. McKenzie, G. F. McNulty and W. F. Taylor, *Algebras, lattices, varieties. Vol. I*, The Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Monterey, CA, 1987. xvi+361 pp.

[27] A. A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Special issue in honor of António Monteiro. Portugal. Math. 39 (1980), no. 1-4, 1–237 (1985).

[28] H. A. Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces*, Bull. London Math. Soc. 2 1970 186–190.

[29] H. A. Priestley, *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Orders: description and roles (L'Arbresle, 1982), 39–60, North-Holland Math. Stud., 99, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[30] H. RASIOWA, *An algebraic approach to non-classical logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 78. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1974. xv+403 pp.

[31] H. RASIOWA AND R. SIKORSKI, *The mathematics of metamathematics*, Third edition. Monografie Matematyczne, Tom 41. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1970. 519 pp.

[32] H. P. SANKAPPANAVAR, *Expansions of Semi-Heyting Algebras I: Discriminator Varieties*, Special Issue of Studia Logica - Algebras Related to Non-classical Logic 98, 1-2 (June/July (2011), 27-81.

[33] H. P. SANKAPPANAVAR, *Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras*, Proceedings of the 9th "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress (Spanish), 33–66, Actas Congr. "Dr. Antonio A. R. Monteiro", Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 2008.

[34] R. WÓJCICKI, *Theory of logical calculi*, Basic theory of consequence operations. Synthese Library, 199. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. xviii+473 pp.