Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctora en Matemática

Subvariedades de MV-álgebras monádicas y de sus subreductos implicativos monádicos

Cecilia Rossana Cimadamore

Bahía Blanca Argentina

2011

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctora en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 16 de septiembre de 2003 y el 30 de junio de 2011, bajo la dirección del Dr. Manuel Abad y el Dr. José Patricio Díaz Varela.

Cecilia Rossana Cimadamore
crcima@criba.edu.ar

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, 30 de junio de 2011.

A Sebastián

Agradecimientos

Deseo agradecer ante todo al Dr. Manuel Abad y al Dr. José Patricio Díaz Varela por su buena disposición y constante consejo, gracias a los cuales he podido realizar esta tesis.

También a mi familia, que siempre confió en mí. Muy especialmente deseo agradecer a mi esposo, Sebastián, quien me acompañó y apoyó durante todos estos años.

Quisiera agradecer a mi compañera de oficina Dra. Laura Rueda, por su amistad y consejo, y al Lic. Diego Castaño, con el cual he mantenido provechosas conversaciones sobre esta tesis.

No quisiera dejar de mencionar en estas líneas al Dr. Luiz Monteiro, quien fue mi primer profesor durante la carrera de grado y el primero que me mostró la belleza de la Lógica Algebraica en los cursos de grado de Álgebras de Boole que dictaba en la Universidad Nacional del Sur.

Las investigaciones volcadas en esta tesis fueron llevadas a cabo gracias al soporte financiero provisto por una Beca Interna Doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), y cargos docentes en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Resumen

Esta tesis está dividida en dos partes. La primera parte está dedicada al estudio de la variedad $\mathcal{MMV}$ de las MV-álgebras monádicas y de sus subreductos implicativos. En primer lugar, demostramos que $\mathcal{MMV}$ está generada por sus miembros finitos, caracterizamos los miembros indescomponibles por medio del álgebra de Boole monádica de sus elementos complementados y describimos el fragmento del reticulado de subvariedades que se encuentra contenido en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, para cada k entero positivo, dando una axiomatización para dichas subvariedades. Estudiamos, además, las subvariedades simples que no están contenidas en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$ para ningún k.

Nuestro segundo objetivo es extender el funtor Γ de Mundici a la categoría de las MV-álgebras monádicas. En tal sentido, definimos el concepto de ℓ-grupo monádico y establecemos una equivalencia natural entre la categoría de los ℓ-grupos monádicos y la categoría de las MV-álgebras monádicas. También estudiamos las congruencias de un ℓ-grupo monádico y las caracterizamos por medio de ciertos ℓ-ideales que llamamos ℓ-ideales monádicos. Probamos que el reticulado de ℓ-ideales monádicos de un ℓ-grupo monádico $\mathbf{G}$ es isomorfo al reticulado de ℓ-ideales de $\exists\mathbf{G}$. Demostramos que todo ℓ-grupo monádico es producto subdirecto de una familia de ℓ-grupos monádicos $\{\mathbf{G}_i : i \in I\}$ donde $\exists\mathbf{G}_i$ es una cadena para todo $i \in I$. Por último, damos algunas aplicaciones de la equivalencia obtenida.

Dedicamos un capítulo al estudio de la clase de los $\{\odot, \rightarrow, \forall, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras monádicas, esto es, la clase de los subreductos hoop monádicos de las MV-álgebras monádicas. Demostramos que esta clase forma una variedad, e introducimos una axiomática para estos subreductos hoop monádicos. Caracterizamos a los miembros subdirectamente irreducibles de la variedad y determinamos las subvariedades de ancho k.

En el último capítulo de esta primera parte, estudiamos la clase de los subreductos implicativos monádicos de las MV-álgebras monádicas, esto es, los $\{\rightarrow, \forall, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras monádicas. Demostramos que esta clase forma una variedad, e introducimos una axiomática para la misma. Caracterizamos sus miembros subdirectamente irreducibles, describimos el reticulado de subvariedades y damos una base ecuacional para cada una de las subvariedades propias.

La segunda parte de esta tesis está dedicada a obtener representaciones topológicas de ciertas álgebras de implicación. En primer lugar, obtenemos una representación topológica para las álgebras de implicación monádicas, extendiendo la representación topológica de las álgebras de implicación. Toda álgebra de implicación monádica es representada como una unión de una familia única de filtros monádicos, dentro de una adecuada álgebra de Boole monádica. Introducimos la noción de espacio implicativo monádico, y probamos que existe una equivalencia dual entre la categoría de las álgebras de implicación monádicas

y la categoría de los espacios implicativos monádicos.

También obtenemos una representación topológica para las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes. Describimos a toda álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente como la unión de una familia única de filtros implicativos de una cierta álgebra de Łukasiewicz trivalente. Introducimos la noción de espacio topológico implicativo 3-valuado, y probamos que existe una equivalencia dual entre la categoría de los mismos y las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes. Como aplicación describimos el espacio implicativo 3-valuado del álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente libre.

Abstract

This thesis is divided into two parts. The first part is devoted to the study of the variety $\mathcal{MMV}$ of monadic MV-algebras and its implicative subreducts. First, we show that $\mathcal{MMV}$ is generated by its finite members and we characterize the indecomposable members using the monadic Boolean algebra of their complemented elements. We describe the fragment of the lattice of subvarieties that is contained in $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, for each positive integer k, and we give an axiomatization of these subvarieties. We also study simple subvarieties that are not contained in $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$ for any k.

Our second objective is to extend Mundici's functor Γ to the category of monadic MV-algebras. More precisely, we define monadic ℓ-groups and we establish a natural equivalence between the category of monadic MV-algebras and the category of monadic ℓ-groups with strong unit. We give some applications. We study the lattice of congruences of a monadic ℓ-group $\mathbf{G}$ and we prove that this lattice is isomorphic to the lattice of monadic ℓ-ideals and also to the lattice of ℓ-ideals of $\exists\mathbf{G}$. We prove that every monadic ℓ-group is a subdirect product of a family of monadic ℓ-groups $\{\mathbf{G}_i : i \in I\}$ such that every $\exists\mathbf{G}_i$ is a chain.

We devote a chapter to the study of the class of $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-subreducts of monadic MV-algebras. We prove that this class is an equational class and we introduce a set of equations that describe this variety. We characterize the subdirectly irreducible members and the lattice of congruences of every algebra. We describe the subvarieties of width k.

In the last chapter of this part, we study the class of $\{\to, \forall, 1\}$-subreducts of monadic MV-algebras. We introduce the equations that characterize this class and we prove that this class is a variety. We characterize the subdirect irreducibles members and the lattice of congruences of every algebra. We describe completely the lattice of subvarieties and we give a equational basis for every proper subvariety.

The second part of this thesis is devoted to getting topological representations for certain implication algebras. First, we extend the topological representation for implication algebras to a topological representation for monadic implication algebras. Every monadic implication algebra is represented as a union of a unique family of monadic filters of a suitable monadic Boolean algebra. Inspired by this representation, we introduce the notion of a monadic implication space, and we prove a dual equivalence between the category of monadic implication algebras and the category of monadic implication spaces.

We also obtain a topological representation for three-valued Łukasiewicz Δ-implication algebras. Every Łukasiewicz Δ-implication algebras is represented as a union of a unique family of implication filters of a suitable three-valued Łukasiewicz algebras. Inspired in this representation, we introduce the notion of topological three-valued implication space, and we prove a dual equivalence. As an application, we describe the space of free three-valued Łukasiewicz Δ-implication algebras.

Índice general

Introducción

Las MV-álgebras fueron introducidas por Chang (1958) como contrapartida algebraica de la lógica infinito-valuada de Łukasiewicz. La clase de todas las MV-álgebras es una clase ecuacional que está generada por el intervalo real $[0,1]$ enriquecido con las operaciones $\neg x = 1 - x$ y la suma truncada $x \oplus y = \text{mín}\{1, x + y\}$. Estas álgebras han sido extensamente estudiadas. Entre muchos de los autores que han estudiado esta clase de álgebras, podemos citar a Komori (1981) quien realiza una descripción completa del reticulado de subvariedades de la variedad de las MV-álgebras y demuestra que toda subvariedad propia es finitamente axiomatizable, Grigolia (1977) introduce las MV_n-álgebras, las MV-álgebras correspondientes a la lógica n-valuada de Łukasiewicz, y proporciona una axiomatización para las mismas; Di Nola y Lettieri (1999) dan una caracterización axiomática de cada una de las subvariedades propias; Mundici (1986) define el funtor Γ de la categoría de los ℓ-grupos abelianos a la categoría de las MV-álgebras, y establece una equivalencia natural entre MV-álgebras y ℓ-grupos con unidad fuerte de orden; Gispert (2002) caracteriza y axiomatiza todas las clases universales de MV-cadenas (ver también Gispert y Torrens (1998)); Panti (1999) caracteriza los objetos libres para cada subvariedad $\mathcal{V}$ de MV-álgebras. Una introducción a las MV-álgebras, así como los resultados básicos de esta variedad, se encuentran en la monografía Cignoli et. al. (2000).

Las MV-álgebras monádicas, o MMV-álgebras, fueron introducidas y estudiadas por Rutledge (1959) como un modelo algebraico del cálculo de predicados (monádico) de la lógica infinito-valuada de Łukasiewicz, donde sólo una variable ocurre. Rutledge llamó a las MV-álgebras monádicas con el nombre de álgebras de Chang monádicas. Las MV-álgebras monádicas son MV-álgebras con un operador unario $\exists$ que satisface ciertos axiomas. Más recientemente, Di Nola y Grigolia (2004) estudian estas álgebras como pares de MV-álgebras donde una de las mismas es una subálgebra relativamente completa de la otra, con ciertas propiedades adicionales. Posteriormente, Belluce et. al. (2005) obtienen un teorema de representación de ciertas clases localmente finitas de MV-álgebras monádicas, y dan una caracterización de los operadores monádicos sobre MV-álgebras finitas. También queremos citar el trabajo de Lattanzi y Petrovich (2008), quienes dan una equivalencia categórica entre las variedades de álgebras monádicas $(n+1)$-valuadas y la clase de las álgebras de Boole monádicas enriquecida con cierta familia de filtros.

Esta tesis está dividida en dos partes. En la primera parte, estudiamos y describimos parte del reticulado de subvariedades de la variedad de las MV-álgebras monádicas, analizamos la relación de las MV-álgebras con los ℓ-grupos, y estudiamos también las clases de los subreductos implicativos monádicos. En la segunda parte, se tratan representaciones topológicas de ciertas álgebras con implicación. A continuación damos más detalles.

El capítulo 1 está dedicado a las nociones generales de álgebra universal y propiedades básicas de algunas de las álgebras con las que tratamos en la tesis. Específicamente incluimos en este capítulo nociones de la teoría general de las MV-álgebras, de los hoops de Wajsberg, las álgebras implicativas de Łukasiewicz y las álgebras de Wajsberg. El tratamiento de estos temas pretende solamente otorgar un recuento de los resultados más importantes que son necesarios para el desarrollo de la tesis.

En el capítulo 2 estudiamos las variedad de las MMV-álgebras. Demostramos que la variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por sus miembros finitos y caracterizamos a las MMV-álgebras directamente indescomponibles por medio del álgebra de Boole monádica de sus elementos complementados. Definimos el concepto de radical monádico, y probamos que el radical monádico de una MMV-álgebra coincide con el radical de su MV-reducto. Estudiamos las subvariedades generadas por las álgebras $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, caracterizando a las mismas por medio de identidades. Demostramos que si un álgebra $\mathbf{A}$ pertenece a la subvariedad generada por $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, entonces es isomorfa a una subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^k$. De aquí introducimos el concepto de álgebra de ancho k. Describimos el fragmento del reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{MMV}$ que se encuentra contenido en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, para cada k entero positivo, y damos una axiomatización completa para todas las subvariedades de MMV-álgebras contenidas en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Por último, en la sección §2.8, estudiamos algunas subvariedades que están generadas por álgebras funcionales monádicas de ancho infinito. Probamos que la variedad generada por un álgebra funcional monádica de ancho infinito $\mathbf{V}^X$ es igual a la variedad generada por el conjunto infinito de álgebras de ancho finito $\mathbf{V}^k$, siendo k un entero positivo. Concluimos el capítulo estudiando las subvariedades simples de ancho infinito.

Mundici (1986) definió el funtor Γ de la categoría de los ℓ-grupos abelianos a la categoría de las MV-álgebras, y estableció una equivalencia natural entre MV-álgebras y ℓ-grupos con unidad fuerte de orden. Anteriormente, Chang había asociado un grupo abeliano a una MV-álgebra, pero su trabajo se restringía al caso totalmente ordenado (ver Chang (1959)). En el capítulo 3 definimos el concepto de *ℓ-grupo monádico*, esto es un ℓ-grupo (abeliano) $\mathbf{G}$ enriquecido con un operador unario $\exists\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ que satisface ciertos axiomas. Nuestro resultado principal con respecto a los ℓ-grupos monádicos consiste en una equivalencia entre la categoría de los mismos y la categoría de las MV-álgebras monádicas. La equivalencia obtenida extiende la equivalencia determinada por el funtor Γ para las MV-álgebras. También estudiamos las congruencias de un ℓ-grupo monádico y las caracterizamos por medio de ciertos ℓ-ideales que hemos llamado ℓ-ideales monádicos. Probamos que el reticulado de ℓ-ideales monádicos de un ℓ-grupo monádico $\mathbf{G}$ es isomorfo al reticulado de ℓ-ideales de $\exists\mathbf{G}$. Demostramos además que todo ℓ-grupo monádico es producto subdirecto de una familia de ℓ-grupos monádicos $\{\mathbf{G}_i : i \in I\}$ donde $\exists\mathbf{G}_i$ es una cadena para todo $i \in I$. Por último, damos algunas aplicaciones de la equivalencia obtenida.

En toda MV-álgebra monádica $\mathbf{A}$ se definen la constante 1 y las operaciones $\odot$, $\to$ y $\forall$ de la siguiente manera

$$1 := \neg 0,\ x \odot y := \neg(\neg x \oplus \neg y),\ \ x \to y := \neg x \oplus y \text{ y } \forall x := \neg(\exists \neg x).$$

En el capítulo 4 estudiamos la clase de los $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-subreductos de una MV-álgebra monádica, esto es, la clase de los subreductos hoop monádicos de las MV-álgebras monádicas. Demostramos que esta clase forma una variedad e introducimos una axiomática para estos subreductos hoop monádicos. Investigamos también las propiedades de estas álgebras, que llamamos *hoops de Wajsberg monádicos*, caracterizando a las álgebras subdirectamente irreducibles y a las congruencias. Estudiamos las subvariedades de hoops de Wajsberg monádicos de ancho k, describiendo por identidades a las mismas.

En el capítulo 5 estudiamos la clase de los subreductos implicativos monádicos de las MV-álgebras monádicas, esto es, los $\{\rightarrow, \forall, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras monádicas. Demostramos que esta clase es una clase ecuacional y damos el conjunto de identidades que la define. A toda álgebra perteneciente a esta variedad la llamamos *álgebra implicativa monádica de Łukasiewicz*. Estudiamos esta variedad. Caracterizamos las álgebras subdirectamente irreducibles y las congruencias y probamos que esta variedad está generada por sus miembros finitos. Por último, estudiamos el reticulado de subvariedades, hallando una descripción completa del mismo y una base ecuacional para cada una de las subvariedades propias.

En la segunda parte de la tesis estudiamos dualidades entre variedades de álgebras con implicación y espacios topológicos booleanos enriquecidos con ciertos objetos. Nuestro punto de partida será la representación topológica de las álgebras de implicación obtenida por Abad, Díaz Varela y Torrens (2004). Esta dualidad está basada en la dualidad de Stone para las álgebras de Boole. Las álgebras de implicación monádicas fueron introducidas por Monteiro y Iturrioz (1962) como una generalización de la noción de álgebra de Boole monádica (Halmos, 1959, 1962). En este trabajo fueron llamadas álgebras de Tarski monádicas. Ellas son exactamente los $\{\forall, \rightarrow, 1\}$-subreductos de las álgebras de Boole monádicas, y en consecuencia, son los modelos algebraicos del fragmento implicativo monádico de la lógica clásica de primer orden. La clase de todas las álgebras de implicación monádicas es una variedad. Más aún, es la subvariedad de las álgebras de Łukasiewicz de implicación monádicas caracterizada por la identidad

$$(\epsilon_1)\ (x \rightarrow y) \approx x \rightarrow (x \rightarrow y),$$

que se estudian en el capítulo 5 de esta tesis.

La segunda parte comienza con el capítulo 6, que está dedicado a explicar brevemente las representaciones topológicas de las álgebras de Boole y de las álgebras implicativas monádicas. En esta exposición no incluiremos las demostraciones de los resultados, remitiendo al lector a Koppelberg (1989), Burris y Sankappanavar (1981), y Abad et. al. (2004) para obtener detalles de los mismos.

El propósito del capítulo 7 es obtener una representación topológica para las álgebras de implicación monádicas, extendiendo la representación topológica de las álgebras de implicación. Obtenemos en primer lugar que toda álgebra de implicación monádica puede ser representada como una unión de una familia única de filtros monádicos de una adecuada álgebra de Boole monádica, la cual llamamos álgebra de clausura booleana monádica. Inspirados en esta representación introducimos la noción de espacio topológico implicativo monádico, que es un espacio booleano con ciertos elementos distinguidos. Finalmente, demostramos que existe una dualidad categórica entre la categoría de las álgebras de implicación monádicas y la categoría de los espacios implicativos monádicos. Nuestra representación topológica se basa en la representación dada por Halmos (1956) de las álgebras de Boole monádicas.

Es sabido que toda MV_n-álgebra es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil (ver Boicescu et. al. (1991) y Moisil (1972)). Si $n = 2$ ó $n = 3$, la recíproca también es cierta (ver Cignoli (1982) y Boicescu et. al. (1991)). Es decir, las MV_2-álgebras y las MV_3-álgebras son equivalentes a las álgebras de Łukasiewicz trivalentes y a las álgebras de Łukasiewicz 4-valentes, respectivamente. En el capítulo 8 estudiamos los $\{\rightarrow, \Delta, 1\}$-subreductos de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Las álgebras de Łukasiewicz trivalentes fueron introducidas por Moisil (1960) (ver también Monteiro (1963b)). Estas álgebras desempeñan en el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz un papel análogo al que desempeñan las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico (Tarski, 1956). La clase de todos los $\{\rightarrow, \Delta, 1\}$-subreductos de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes forma una variedad que fue axiomatizada por Figallo (1990). En el capítulo 8 damos una representación topológica para ellos que estará basada en la representación topológica de las MV_2-álgebras dada por Cignoli y Monteiro (2006). Como una aplicación de la representación obtenida describimos el espacio topológico de las álgebras libres de la variedad.

Algunos de los resultados expuestos en esta tesis han sido comunicados en reuniones científicas de carácter nacional e internacional. A saber:

- "Applications of the topological representation for implication algebras", M. Abad, C. Cimadamore, J. P. Díaz Varela, CLE 30/ XV EBL/ XIV Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Paraty, Brasil, 11-17 de mayo, 2008.

- "Topological representation for monadic implication algebras", C. Cimadamore, XIII Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática (XIII SLALM), Oaxaca, México, del 7 al 12 de agosto de 2006.

- "Equivalencia natural entre MV-álgebras monádicas y ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte", C. Cimadamore y J. P. Díaz Varela, Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina 2010, Tandil, entre los días 27 de Septiembre al 2 de Octubre de 2010,

- "MV-álgebras monádicas de ancho k", C. Cimadamore y J. P. Díaz Varela, XI Congreso Dr. Antonio Monteiro, Bahía Blanca, del 26 al 28 de mayo de 2011.

Quisiera mencionar que algunos de los capítulos expuestos en esta tesis ya han sido publicados. Más precisamente,

- "Monadic MV-algebras are equivalent to monadic ℓ-groups with strong unit", C. Cimadamore y J. P. Díaz Varela, Special Issue Algebras Related to Non-classical Logic, Studia Logica, 2011, páginas 175-201, (Cimadamore y Díaz Varela, 2011), contiene los resultados expuestos en el capítulo 3,

- "Topological representation for monadic implication algebras", M. Abad, C. Cimadamore y J. P. Díaz Varela, Central European Journal of Mathematics, volumen 7, 2009, páginas 299-309, (Abad et. al., 2009b), contiene los resultados del capítulo 7,

- "A duality for three-valued Łukasiewicz Δ-implication algebras", M. Abad, C. Cimadamore y J. P. Díaz Varela, The Many Sides of Logic, series Studies in Logic, volumen 21, páginas 339-352, 2009, (Abad et. al., 2009a), contiene los resultados del capítulo 8.

Parte I.

Subvariedades de MV-álgebras monádicas y de sus subreductos implicativos monádicos

1. Preliminares

1.1. Nociones de álgebra universal

En esta sección recordamos algunas nociones básicas de álgebra universal, y establecemos las notaciones que utilizamos en esta tesis. Supondremos familiaridad con estos conceptos pudiendo el lector consultar, por ejemplo, (Burris y Sankappanavar, 1981) y (McKenzie, McNulty y Taylor, 1987) para más información.

Un *tipo de similaridad* τ es una n-upla $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ de enteros no negativos. Un *álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo* F es un par ordenado $\mathbf{A} = \langle A; F\rangle$, donde A es un conjunto no vacío y $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ es una familia de operaciones definidas sobre A de manera tal que cada f_i es una operación m_i-aria, para todo i, $1 \leq i \leq n$. El conjunto A es el *universo* de $\mathbf{A} = \langle A; F\rangle$. Escribimos usualmente $\langle A; f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$ en vez de $\langle A; F\rangle$ y adoptamos la convención aridad $f_1 \geq$ aridad $f_2 \geq \cdots \geq$ aridad f_n. Algunos ejemplos de álgebras son los siguientes.

Ejemplo 1.1.1. Un *reticulado distributivo* es un álgebra $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ con dos operaciones binarias, es decir, de tipo $(2, 2)$, que satisface

- $x \vee y \approx y \vee x$, $x \wedge y \approx y \wedge x$,
- $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$,
- $x \vee x \approx x$, $x \wedge x \approx x$,
- $x \approx x \vee (x \wedge y)$, $x \approx x \wedge (x \vee y)$,
- $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Ejemplo 1.1.2. Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ con dos operaciones binarias, una unaria y dos 0-arias, es decir, de tipo (2,2,1,0,0), que satisface

- $\langle B; \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo,
- $x \wedge 0 \approx 0$, $x \vee 1 \approx 1$,
- $x \wedge x' \approx 0$, $x \vee x' \approx 1$.

Sea X un conjunto. El álgebra de Boole de los subconjuntos de X, $\mathbf{Su}(X)$, tiene como universo el conjunto $Su(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ y las operaciones $\cup$, $\cap$, $'$, $\emptyset$, y X. Notamos con $\mathbf{2} = \langle\{0, 1\}; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ al álgebra de Boole tal que $\langle\{0, 1\}; \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado que satisface que $0 < 1$, y donde $0' = 1$ y $1' = 0$.

Ejemplo 1.1.3. Un *monoide conmutativo* es un álgebra $\langle A; \odot, 1\rangle$ de tipo (2,1) que satisface las siguientes identidades

- $(x \odot y) \odot z \approx x \odot (y \odot z)$;
- $x \odot 1 \approx x$;
- $x \odot y \approx y \odot x$.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo F. Decimos que $\mathbf{A}$ es *subálgebra* de $\mathbf{B}$, y notamos $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ si $A \subseteq B$ y si toda operación de $\mathbf{A}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathbf{B}$, esto es, si para todo $f \in F$ de aridad n, $f^A = f^B\restriction_{A^n}$. Diremos que una función $\alpha\colon A \to B$ es un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ si para cada operación de aridad n de F y cada sucesión de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, se verifica que

$$\alpha f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^B(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Escribiremos $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para notar un homomorfismo de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Si además α es sobreyectiva entonces α es un *epimorfismo*. Diremos también en este caso que $\mathbf{B}$ es una *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$. Si α es inyectiva, entonces diremos que α es un *monomorfismo*. Por último, si α es un monomorfismo y un epimorfismo, entonces α es un *isomorfismo*. También diremos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isomorfas.

Sea K una clase de álgebras del mismo tipo y $\mathbf{A}$ un álgebra en K. Notamos al conjunto de todas las congruencias del álgebra $\mathbf{A}$ por $Con_K(\mathbf{A})$. Las congruencias de un álgebra $\mathbf{A}$ forman un reticulado que notamos con $\mathbf{Con}_K(\mathbf{A})$, o simplemente con $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$. Además $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = \langle Con(\mathbf{A}); \vee, \wedge\rangle$ donde $\bigwedge_{i\in I} \theta_i = \bigcap_{i\in I} \theta_i$ y

$$\bigvee_{i\in I} \theta_i = \bigcap \left\{ \theta \in Con(\mathbf{A}) : \bigcup_{i\in I} \theta_i \subseteq \theta \right\}.$$

Un álgebra $\mathbf{A}$ tiene *distributividad de congruencias* si $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ es un reticulado distributivo.

Dada una familia indexada de álgebras $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ del mismo tipo, definimos el *producto directo* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ como el álgebra cuyo universo es el producto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ y tal que para toda $f \in F$ de aridad n y para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$ se define

$$f^{\prod_{i\in I} A_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(i) = f^{A_i}(a_1(i), a_2(i), \ldots, a_n(i)),$$

donde $a(i)$ denota la componente i-ésima de $a \in \prod_{i\in I} A_i$.

Un álgebra $\mathbf{A}$ es un *producto subdirecto* de una familia indexada de álgebras $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ si satisface que

(1) $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, y,

(2) para todo $j \in I$ se tiene que $\pi_j(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_j$, donde $\pi_j\colon \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_j$ es la proyección definida por $\pi_j(a) = a(j)$.

Una inmersión $\alpha\colon \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es subdirecta si $\alpha(\mathbf{A})$ es un producto subdirecto de $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$.

Un álgebra $\mathbf{A}$ es *subdirectamente irreducible* si para toda inmersión subdirecta $\alpha\colon \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, existe $i \in I$ tal que $\pi_i \circ \alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo.

La siguiente es una caracterización muy útil de las álgebras subdirectamente irreducibles por medio de su reticulado de congruencias.

Teorema 1.1.4. *Un álgebra $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $\mathbf{A}$ es trivial o si existe una congruencia minimal en $Con(\mathbf{A}) - \{\Delta_{\mathbf{A}}\}$, donde $\Delta_{\mathbf{A}}$ es la congruencia $\{(a,a) : a \in A\}$.*

Sea $\mathbf{B} = \langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Un subconjunto F de B se dice un *filtro* de $\mathbf{B}$ si satisface que

- $1 \in F$,
- si $a \in F$ y $a \leq b$ entonces $b \in F$, y,
- si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$.

Un filtro F de $\mathbf{B}$ se dice un *ultrafiltro* si F es maximal con respecto a la propiedad que $0 \notin F$.

Sea $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ una familia de álgebras de un tipo dado indexada por un conjunto I. Si $a, b \in \prod_{i\in I} A_i$, el *ecualizador* de a y b es el conjunto

$$|[a = b]| = \{i \in I : a(i) = b(i)\}.$$

Sea U un ultrafiltro de $\mathbf{Su}(I)$. Definimos en $\prod_{i\in I} A_i$ la relación θ_U de la siguiente manera

$$(a, b) \in \theta_U \text{ si y sólo si } |[a = b]| \in U.$$

Es sabido que θ_U es una relación de congruencia en el álgebra $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

El *ultraproducto* de $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$, que notamos con $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/U$, es el cociente $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\theta_U$. Los elementos de $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/U$ serán notados a/U, para cada $a \in \prod_{i\in I} A_i$. Observemos que $a/U = b/U$ si y sólo si $|[a = b]| \in U$.

Introduzcamos ahora los siguientes operadores de clases de álgebras del mismo tipo:

- $\mathbf{A} \in \mathrm{I}(K)$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es isomorfa a algún miembro de K,
- $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(K)$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es una subálgebra de algún miembro de K,
- $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(K)$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es una imagen homomorfa de algún miembro de K,
- $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(K)$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es un producto directo de una familia no vacía de álgebras de K,
- $\mathbf{A} \in \mathrm{P_S}(K)$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto de una familia no vacía de álgebras de K,

- $\mathbf{A} \in \mathrm{P_U}(K)$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es un ultraproducto de una familia no vacía de álgebras de K.

Una clase no vacía K de álgebras del mismo tipo se dice una *variedad* si es cerrada bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos. Cuando K es una variedad, la notamos con $\mathcal{K}$. Uno de los resultados más importantes del álgebra universal, demostrado por Birkhoff, establece que las variedades coinciden con las clases ecuacionales, es decir, clases definidas por identidades (ver Burris y Sankappanavar (1981)). La *variedad generada* por una clase K será notada con $\mathcal{V}(K)$ y si $K = \{\mathbf{A}\}$, escribimos simplemente $\mathcal{V}(\mathbf{A})$. Además, es conocido que $\mathcal{V}(K) = \mathrm{H\,S\,P}(K)$ (Tarski, 1946).

Decimos que una variedad $\mathcal{V}$ tiene *distributividad de congruencias* si toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ tiene distributividad de congruencias. Notamos con $si(\mathcal{V})$ la familia formada por exactamente un álgebra de cada clase de isomorfismo de álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathcal{V}$. El siguiente resultado es debido a Jónsson.

Teorema 1.1.5. *(Jónsson, 1967) Si K es una clase de álgebras que genera una variedad $\mathcal{V}$ que tiene distributividad de congruencias, entonces $si(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{H\,S\,P_U}(K)$.*

La familia de subvariedades de una variedad $\mathcal{V}$ forman un reticulado que notamos con $\Lambda(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son dos subvariedades de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ y $\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$. Además, si $\mathcal{V}$ es una variedad con distributividad de congruencias entonces $\Lambda(\mathcal{V})$ es distributivo (Jónsson, 1967). También será de utilidad el siguiente resultado.

Teorema 1.1.6. *(Jónsson, 1995) Si $\mathcal{V}$ es una variedad con distributividad de congruencias y $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son dos subvariedades de $\mathcal{V}$ entonces $si(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2) = si(\mathcal{V}_1) \cup si(\mathcal{V}_2)$.*

Sea $\langle A; o\rangle_{o\in\tau}$ un álgebra de tipo de similaridad τ. Sea τ' un conjunto de operaciones que pueden ser definidas como términos en τ. El τ'-reducto de $\langle A; o\rangle_{o\in\tau}$ es el álgebra $\langle A; o\rangle_{o\in\tau'}$. Si K es una clase de álgebras del mismo tipo de similaridad, el τ'-reducto de K es la clase $K^{\tau'}$ de τ'-reductos de álgebras de K. El τ'-subreducto de K se define como $S(K^{\tau'})$, es decir, es la clase de subálgebras de $K^{\tau'}$.

1.2. MV-álgebras

Las MV-álgebras fueron introducidas por Chang (1958) como contrapartida algebraica de la lógica infinito-valuada de Łukasiewicz. Desde entonces han sido extensamente estudiadas por numerosos autores. Komori (1981) realiza una descripción completa del reticulado de subvariedades de la variedad de las MV-álgebras, y demuestra que toda subvariedad propia es finitamente axiomatizable. Grigolia (1977) introduce las MV_n-álgebras, las MV-álgebras correspondientes a la lógica n-valuada de Łukasiewicz, y proporciona una axiomatización para las mismas. Posteriormente, Di Nola y Lettieri (1999) dan una caracterización axiomática de cada una de las subvariedades propias. Mundici (1986) define el funtor Γ de la categoría de los ℓ-grupos abelianos a la categoría de las MV-álgebras, y estableció una equivalencia natural entre MV-álgebras y ℓ-grupos con unidad fuerte de orden. Anteriormente, Chang había asociado un grupo abeliano a una

MV-álgebra pero su trabajo se restringía al caso totalmente ordenado (ver Chang (1959)). Gispert (2002) caracteriza y axiomatiza todas las clases universales de MV-cadenas (ver también Gispert y Torrens (1998)). Panti (1999) caracteriza, para cada subvariedad $\mathcal{V}$ de MV-álgebras, los objetos libres de la misma. La principal referencia para las MV-álgebras la constituye el libro Cignoli et. al. (2000).

En esta sección recordamos los resultados sobre la teoría de la MV-álgebras que serán necesarios para el desarrollo de la tesis. En particular, utilizamos los mismos en el capítulo 2.

1.2.1. Definición y propiedades elementales

Definición 1.2.1. Una *MV-álgebra* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ de tipo (2,1,0) que satisface las identidades

(MV1) $(x \oplus y) \oplus z \approx x \oplus (y \oplus z)$,

(MV2) $x \oplus y \approx y \oplus x$,

(MV3) $x \oplus 0 \approx x$,

(MV4) $\neg\neg x \approx x$,

(MV5) $x \oplus \neg 0 \approx \neg 0$,

(MV6) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Notamos con $\mathcal{MV}$ a la variedad de las MV-álgebras.

Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y $a, b \in A$. Definimos las operaciones 1, $\odot$ y la operación $\to$ de la siguiente manera

$$1 := \neg 0,$$
$$a \odot b := \neg(\neg a \oplus \neg b),$$
$$a \to b := \neg a \oplus b.$$

Para todo $a \in A$, definimos $0a = 0$, y para todo número entero $n \geq 0$,

$$(n+1)a = na \oplus a.$$

Definimos $a^1 = a$, y para todo número entero $n \geq 1$,

$$a^{n+1} = a^n \odot a.$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de MV-álgebras.

Ejemplo 1.2.2. Sea $\mathbf{B} = \langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in B$, definimos

$$a \oplus b := a \vee b \ \text{ y } \ \neg a := a'.$$

Entonces el álgebra $\langle B; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos el intervalo real $[0,1]$ equipado con la negación $\neg a = 1 - a$ y la suma truncada $a \oplus b = \text{mín}\{1, a+b\}$. El álgebra $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = \langle [0,1]; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra. Observemos que $a \odot b = \text{máx}\{0, a+b-1\}$. Chang (1959) demostró que $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ genera la variedad $\mathcal{MV}$ (ver también Cignoli y Mundici (1997) y Cignoli et. al. (2000)).

Ejemplo 1.2.4. El conjunto de los números racionales en el intervalo real $[0, 1]$, es decir, $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbb{Q}$, es una MV-subálgebra de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Además esta subálgebra también genera a la variedad. Una demostración puede verse en (Cignoli et. al., 2000, Proposición 8.1.1).

Ejemplo 1.2.5. Para cada entero $n \geq 1$, consideremos el conjunto con $n + 1$ elementos

$$S_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

El álgebra $\mathbf{S}_n = \langle S_n; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-subálgebra de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Es sabido que si $1 \leq n_0 < n_1 < \ldots$ es una sucesión infinita de números naturales, entonces

$$\mathcal{V}(\{\mathbf{S}_{n_i} : i = 0, 1, \ldots\}) = \mathcal{MV}.$$

Mundici (1986) definió el funtor Γ entre la categoría de los ℓ-grupos abelianos con unidad de orden en la categoría de las MV-álgebras. Si $\langle G; +, -, 0, \vee, \wedge\rangle$ es un ℓ-grupo abeliano con unidad de orden u y $[0, u] = \{x \in G : 0 \leq x \leq u\}$, entonces

$$\Gamma(\mathbf{G}, u) = \langle [0, u]; \oplus, \neg, 0\rangle,$$

donde $x \oplus y = u \wedge (x + y)$, $\neg x = u - x$ y $0 = 0_G$, es una MV-álgebra. La operación $\odot$ está dada por $x \odot y = 0 \vee (x + y - u)$ y $1 = u$. Para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$ existe un ℓ-grupo abeliano $\mathbf{G}$ con unidad de orden u, tal que $\mathbf{A} \cong \Gamma(\mathbf{G}, u)$. Más aún, Γ define una equivalencia entre las categorías mencionadas. Observar que $\mathbf{S}_n \cong \Gamma(\mathbb{Z}, n)$.

Ejemplo 1.2.6. Consideremos el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ordenado lexicográficamente. Escribimos

$$\mathbf{S}_{n,\omega} = \Gamma(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (n, 0)).$$

El álgebra $\mathbf{S}_{1,\omega}$ es el álgebra $\mathbf{C}$ definida por Chang (1958), y $\mathbf{S}_{n,\omega}$ fue definida por Komori (1981).

Ejemplo 1.2.7. Dada una MV-álgebra $\mathbf{A}$ y un conjunto X, consideremos el conjunto A^X de todas las funciones $f : X \to A$ y definimos en él las operaciones $\oplus$, $\neg$ y 0 componente a componente. Luego, $\mathbf{A}^X = \langle A^X; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra.

Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y sean $a, b \in A$. Definimos la relación

$$a \leq b \text{ si y sólo si } \neg a \oplus b = 1.$$

No es difícil ver que $\leq$ es un orden parcial en $\mathbf{A}$, que llamamos *orden natural* de $\mathbf{A}$. Más aún, $\langle A; \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo con primer elemento 0 y último elemento 1, donde el supremo y el ínfimo de a y b están dados por

$$a \vee b = \neg(\neg a \oplus b) \oplus b = (a \odot \neg b) \oplus b,$$

$$a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b) = a \odot (\neg a \oplus b).$$

El siguiente lema será necesario en la sección §2.1.3.

Lema 1.2.8. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$ *y* $a, b, c \in A$. *Si* $a \odot c = b \odot c$, $\neg a \leq c$ *y* $\neg b \leq c$, *entonces* $a = b$.

Demostración. Observemos que bajo las condiciones que satisfacen a, b, c tenemos que

$$\neg a = \neg a \wedge c = c \odot (\neg c \oplus \neg a) = c \odot (\neg c \oplus \neg b) = \neg b \wedge c = \neg b.$$

Luego, $a = b$. □

Resumimos en el Lema 1.2.9 algunas propiedades conocidas de las MV-álgebras que serán utilizadas en esta tesis.

Lema 1.2.9. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MV-álgebra. Para todo* $a, b, c \in A$, *se satisfacen las siguientes propiedades:*

(MV7) $a \leq b$ *si y sólo si* $\neg b \leq \neg a$,

(MV8) *si* $a \leq b$ *entonces* $a \oplus c \leq b \oplus c$ *y* $a \odot c \leq b \odot c$,

(MV9) $a \odot b \leq c$ *si y sólo si* $a \leq \neg b \oplus c$ *si y sólo si* $a \leq b \to c$,

(MV10) *si* $a \leq b$ *entonces* $b \to c \leq a \to c$,

(MV11) *si* $a \leq b$ *entonces* $c \to a \leq c \to b$,

(MV12) $a \to (b \to c) = (a \odot b) \to c$,

(MV13) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

(MV14) $c \to (a \vee b) = (c \to a) \vee (c \to b)$,

(MV15) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$,

(MV16) $c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b)$,

(MV17) $a \odot b = 1$ *si y sólo si* $a = b = 1$,

(MV18) $(a \odot \neg b) \wedge (b \odot \neg a) = 0$,

(MV19) $\neg a \odot a = 0$.

(MV20) $a \wedge b = 1$ *si y sólo si* $a = b = 1$,

(MV21) $a = b$ *si y sólo si* $(a \to b) \wedge (b \to a) = 1$,

(MV22) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$,

(MV23) $a \odot (b \vee c) = (a \odot b) \vee (a \odot c)$,

(MV24) *si* $a \vee b = 1$ *entonces se tiene que* $a^n \vee b^n = 1$, *para todo entero positivo* n.

Notamos con $\mathbb{N}$ al conjunto de todos los enteros positivos.

1.2.2. Filtros y congruencias

Definición 1.2.10. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$. Un subconjunto $F \subseteq A$ se dice un *filtro* de $\mathbf{A}$ si satisface las siguientes condiciones:

(1) $1 \in F$,

(2) si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$,

(3) si $a, b \in F$ entonces $a \odot b \in F$.

Observemos que todo filtro F de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ es un filtro del reticulado $\langle A; \vee, \wedge \rangle$ pues si $a, b \in F$ entonces $a \odot b \leq a \wedge b \in F$.

Notamos con $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ a la familia de todos los filtros de $\mathbf{A}$. Si $X \subseteq A$ entonces el filtro generado por X es el conjunto

$$\mathrm{Fg}(X) = \{b \in A : a_1 \odot a_2 \odot \cdots \odot a_n \leq b, \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in X\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ con el orden dado por la inclusión de conjuntos es un reticulado.

Si θ es una congruencia de $\mathbf{A}$, notamos con a/θ a la clase del elemento a por θ. No es difícil ver que $1/\theta$ es un filtro de $\mathbf{A}$. Recíprocamente, si F es un filtro de $\mathbf{A}$, la relación

$$\theta_F = \big\{(a, b) \in A^2 : (\neg a \oplus b) \odot (\neg b \oplus a) \in F\big\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$, que además verifica que $F = 1/\theta_F$. Más aún, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.11. *(Chang, 1958) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$. La correspondencia $\mathbf{Con}_{\mathcal{MV}}(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}(\mathbf{A})$ definida por $\theta \to 1/\theta$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $F \to \theta_F$.*

Usualmente escribiremos $\mathbf{A}/F$ en lugar de $\mathbf{A}/\theta_F$.

Definición 1.2.12. Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y F un filtro de $\mathbf{A}$. Diremos que F es un filtro *primo* de $\mathbf{A}$ si $F \neq A$, y si para todo $a, b \in A$ se satisface que $a \to b \in F$ o $b \to a \in F$.

Si F es un filtro de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ entonces, F es un filtro primo de $\mathbf{A}$ si y sólo si F es un filtro primo del reticulado $\langle A; \vee, \wedge \rangle$. La importancia de los filtros primos de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ radica en el siguiente lema.

Lema 1.2.13. *Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y F un filtro propio de $\mathbf{A}$. Entonces, F es un filtro primo si y sólo si $\mathbf{A}/F$ es una MV-cadena.*

El Teorema 1.2.14 es el *Teorema de Representación Subdirecta de Chang*. Es uno de los resultado más importantes en la teoría de las MV-álgebras.

Teorema 1.2.14. *(Chang, 1959) Toda MV-álgebra no trivial es producto subdirecto de MV-cadenas.*

Como consecuencia tenemos que una identidad se satisface en todas las MV-álgebras si y sólo si se satisface en todas las MV-álgebras totalmente ordenadas.

Diremos que una MV-álgebra es *simple* si y sólo si tiene exactamente dos congruencias, más precisamente, si $Con(\mathbf{A}) = \{\Delta_{\mathbf{A}}, A^2\}$.

Teorema 1.2.15. *(Chang, 1959) Sea* $\mathbf{A}$ *una MV-álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es simple,*

(2) $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Definición 1.2.16. Llamamos *radical* de $\mathbf{A}$, y notamos $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$, a la intersección de todos los filtros maximales de $\mathbf{A}$.

Una MV-álgebra se dice *semisimple* si es no trivial y $\operatorname{Rad}\mathbf{A} = \{1\}$. Como consecuencia de la caracterización de las MV-álgebras simples, obtenemos que una MV-álgebra es semisimple si y sólo si es producto subdirecto de subálgebras de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Un elemento $a \in A$, $a \neq 1$, se dice *infinitesimal* si $\neg a \leq a^n$, para todo entero $n \geq 0$. Notamos con $\operatorname{Inf}\mathbf{A}$ al conjunto de todos los elementos infinitesimales de $\mathbf{A}$. En toda MV-álgebra $\mathbf{A}$, $\operatorname{Rad}\mathbf{A} = \operatorname{Inf}\mathbf{A} \cup \{1\}$ (Cignoli et. al., 2000, Proposition 3.6.3).

Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y $a \in A$. Definimos el *orden de a* como el menor entero positivo tal que $a^n = 0$, si tal entero existe, y escribimos $\operatorname{ord} a = n$. Si $a^n \neq 0$ para todo entero positivo n, decimos que el orden de a es infinito y escribimos $\operatorname{ord} a = \omega$. Definimos el *orden de* $\mathbf{A}$, y escribimos $\operatorname{ord}\mathbf{A}$, al supremo de los órdenes de todos sus elementos distintos de 1, esto es,

$$\operatorname{ord}\mathbf{A} = \sup\{\operatorname{ord} a, a \in A - \{1\}\}.$$

Si este supremo no existe decimos que el orden de $\mathbf{A}$ es infinito, y escribimos $\operatorname{ord}\mathbf{A} = \omega$.

Si $\mathbf{A}$ es una MV-cadena, entonces $\operatorname{Rad}\mathbf{A} = \{a \in A : \operatorname{ord} a = \omega\}$. Además, $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es un filtro propio. Definimos $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{ord}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A})$.

Si $\mathbf{A}$ es una MV-cadena, entonces $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es una MV-álgebra simple ya que $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es el único filtro maximal de $\mathbf{A}$. Luego, $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es isomorfo a una subálgebra de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

1.2.3. Subvariedades de $\mathcal{MV}$

En esta sección recordamos la descripción ecuacional de las subvariedades propias de las MV-álgebras dada por Di Nola y Lettieri (1999). Las subvariedades $\mathcal{MV}_n$, y las identidades que las caracterizan, fueron introducidas por Grigolia (1977).

Decimos que una subvariedad de MV-álgebras es propia si y sólo si es diferente de $\mathcal{MV}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la identidad

$$(\delta_n)\ x^n \approx x^{n+1}.$$

Notamos con $\mathcal{U}_n$ a la subvariedad de MV-álgebras que satisfacen la identidad (δ_n).

Proposición 1.2.17. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces,* $\mathbf{A} \in \mathcal{U}_n$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *es un producto subdirecto de álgebras* $\mathbf{S}_m$*, con* $1 \leq m \leq n$. *Más aún,* $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n\})$.

La menor subvariedad propia no trivial de MV-álgebras es la clase de las álgebras de Boole. Esta subvariedad está caracterizada por la identidad

$$(\delta_1)\ x \approx x \odot x,$$

y es la subvariedad generada por el álgebra $\mathbf{S}_1$. La subvariedad generada por el álgebra $\mathbf{S}_2$ está caracterizada por la identidad

$$(\delta_2)\ x \odot x \approx x \odot x \odot x.$$

Notamos con $\mathcal{MV}_n$ a la subvariedad de MV-álgebras generada por el álgebra $\mathbf{S}_n$.

Teorema 1.2.18. *Para todo natural* n*,* $n \geq 3$*, y para toda MV-álgebra* $\mathbf{A}$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *satisface las identidades*

$$(\delta_n)\ x^n \approx x^{n+1}$$

y

$$(\gamma_{np})\ \left(px^{p-1}\right)^{n+1} \approx (n+1)x^p$$

para todo natural $1 < p < n$ *tal que* p *no divide a* n*,*

(2) $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}_n$*,*

(3) $\mathbf{A}$ *es un producto subdirecto de subálgebras de* $\mathbf{S}_n$*.*

El Teorema 1.2.19 caracteriza a las álgebras cuyo rango es menor o igual que n.

Teorema 1.2.19. *Para todo natural* $n \geq 1$ *y para toda MV-álgebra* $\mathbf{A}$ *no trivial, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *satisface la identidad*

$$(\rho_n)\ \left((n+1)x^n\right)^2 \approx 2x^{n+1},$$

(2) $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_{1,\omega}, \dots, \mathbf{S}_{n,\omega}\})$*,*

(3) $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n\})$.

Veamos ahora las identidades que caracterizan a $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega})$, $n \geq 1$. Como corolario del Teorema 1.2.19 y observando que $\mathbf{S}_{1,\omega}$ es una subálgebra de $\mathbf{S}_{2,\omega}$, obtenemos las identidades de $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{1,\omega})$ y $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{2,\omega})$.

Corolario 1.2.20. *Para toda MV-álgebra no trivial* $\mathbf{A}$ *tenemos que:*

(1) $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}_{1,\omega})$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *satisface la identidad*

$$(\rho_1)\ (x \oplus x)^2 \approx x^2 \oplus x^2.$$

(2) $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}_{2,\omega})$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *satisface la identidad*

$$(\rho_2)\ (x^2 \oplus x^2 \oplus x^2)^2 \approx x^3 \oplus x^3.$$

Teorema 1.2.21. *(Di Nola y Lettieri, 1999) Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 3$*, la subvariedad* $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega})$ *está caracterizada por las identidades*

$$(\rho_n)\ \ ((n+1)x^n)^2 \approx 2x^{n+1},$$

y

$$(\gamma_{np})\ \ \left(px^{p-1}\right)^{n+1} \approx (n+1)x^p$$

para todo natural $1 < p < n$ *tal que* p *no divide a* n*.*

Teorema 1.2.22. *(Komori, 1981) Una clase* $\mathcal{V}$ *de MV-álgebras es una variedad propia si y sólo si existen dos conjuntos finitos* I *y* J *de enteros positivos tal que* $I \cup J \neq \emptyset$ *y* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_i\}_{i \in I}, \{\mathbf{S}_{j,\omega}\}_{j \in J})$*.*

Teorema 1.2.23. *(Di Nola y Lettieri, 1999) Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$*. Entonces,*

$$\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_i\}_{i \in I}, \{\mathbf{S}_{j,\omega}\}_{j \in J})$$

siendo I*,* J *conjuntos finitos de enteros positivos, si y sólo si,* $\mathbf{A}$ *satisface las identidades*

$$(\rho_n)\ \ ((n+1)x^n)^2 \approx 2x^{n+1}$$

donde $n = \text{máx}\{I \cup J\}$*,*

$$(\gamma_{np})\ \ \left(px^{p-1}\right)^{n+1} \approx (n+1)x^p$$

para todo entero $1 < p < n$ *tal que* p *no es un divisor de ningún entero perteneciente a* $I \cup J$*, y*

$$(n+1)x^q \approx (n+2)x^q$$

para todo $q \in \bigcup_{r \in I} \left(D(r) \setminus \bigcup_{s \in J} D(s)\right)$*, donde* $D(r)$ *y* $D(s)$ *son los conjuntos de divisores positivos de* r *y de* s*, respectivamente.*

Komori (1981) establece también la siguiente relación entre las subvariedades de MV-álgebras.

Lema 1.2.24. *Sean* $n, m \in \mathbb{N}$*.*

(1) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_n) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{S}_m)$ *si y sólo si* $n \mid m$*.*

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_n) \subseteq \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_i\}_{i \in I}, \{\mathbf{S}_{j,\omega}\}_{j \in J})$ *si y sólo si* $n \mid m$ *para algún* $m \in I \cup J$*.*

(3) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}) \subseteq \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_i\}_{i \in I}, \{\mathbf{S}_{j,\omega}\}_{j \in J})$ *si y sólo si* $n \mid m$ *para algún* $m \in J$*.*

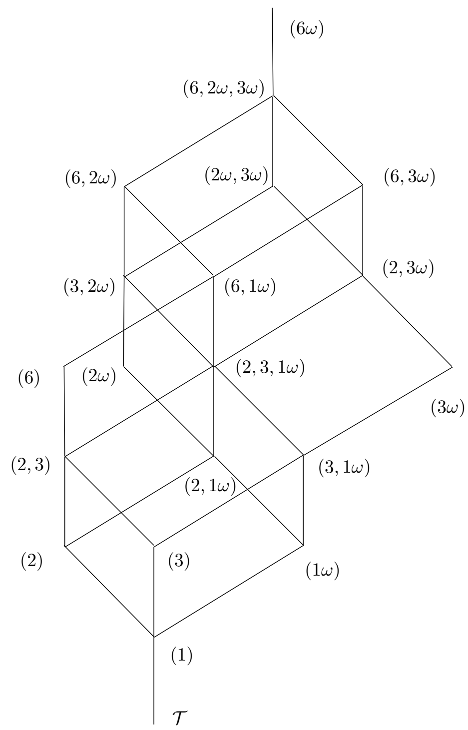
Sean I, J subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Diremos que la dupla (I, J) es *reducida* si

- $I \cup J \neq \emptyset$,
- ningún $m \in I$ divide a ningún $m' \in (I \backslash \{m\}) \cup J$,
- ningún $t \in J$ divide a ningún $t' \in J \backslash \{t\}$.

Luego, las subvariedades propias de MV-álgebras están en correspondencia 1-1 con las duplas reducidas por medio de la correspondencia

$$(I, J) \mapsto \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_i\}_{i \in I}, \{\mathbf{S}_{j,\omega}\}_{j \in J}).$$

En la siguiente figura, ilustramos el intervalo $[\mathcal{T}, \mathcal{V}(\mathbf{S}_{6,\omega})]$, donde $\mathcal{T}$ es la variedad trivial. Para simplificar la notación en el gráfico, indicamos, por ejemplo, con $(6, 2\omega, 3\omega)$ a la variedad $\mathcal{V}(\{\mathbf{S}_6, \mathbf{S}_{2,\omega}, \mathbf{S}_{3,\omega}\})$.



1.3. Álgebras de Wajsberg

Definición 1.3.1. Un *álgebra de Wajsberg* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \rightarrow, \neg, 1\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ que satisface las siguientes identidades

(W1) $1 \rightarrow x \approx x$,

(B) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \approx 1$,

(T) $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$,

(W2) $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) \approx 1$.

En el siguiente lema establecemos propiedades que serán utilizadas en esta tesis. Una demostración de las mismas puede verse en Cignoli, D'Ottaviano y Mundici (2000).

Lema 1.3.2. *Sea* $\mathbf{S} = \langle S; \to, 1\rangle$ *un álgebra que satisface (W1), (B) y (T). Entonces para todo* $a, b, c \in S$,

(W3) $a \to a = 1$,

(W4) *si* $a \to b = b \to a = 1$ *entonces* $a = b$,

(W5) $a \to 1 = 1$,

(W6) $a \to (b \to a) = 1$,

(B′) $(a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$,

(C) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

El siguiente teorema establece la equivalencia entre las álgebras de Wajsberg y las MV-álgebras. Observar que esta equivalencia es una equivalencia de términos.

Teorema 1.3.3. *(Font et. al., 1984) Si* $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ *es una MV-álgebra y definimos sobre* A

$$x \to y := \neg x \oplus y$$

y

$$1 := \neg 0,$$

entonces $\langle A; \to, \neg, 1\rangle$ *es un álgebra de Wajsberg. Recíprocamente, dada un álgebra de Wajsberg* $\mathbf{A} = \langle A; \to, \neg, 1\rangle$ *si definimos*

$$x \oplus y := \neg x \to y$$

y

$$0 := \neg 1,$$

entonces el álgebra $\langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ *es una MV-álgebra.*

1.4. Hoops y hoops de Wajsberg

Las clases de los hoops y de los hoops de Wajsberg han sido extensamente estudiadas (ver por ejemplo Aglianò y Panti (2002), Blok y Ferreirim (2000), Ferreirim (1992), Blok y Pigozzi (1994)). En esta sección damos las definiciones básicas y mostramos los resultados más relevantes de la teoría general de los hoops y los hoops de Wajsberg que serán necesarios en el desarrollo de la tesis. En particular, necesitaremos estos conceptos en el capítulo 4, donde introducimos y estudiamos la clase de los hoops de Wajsberg monádicos.

Definición 1.4.1. Un *hoop* es un álgebra $\mathbf{H} = \langle H; \rightarrow, \odot, 1\rangle$ de tipo $(2,2,0)$ tal que $\langle H; \odot, 1\rangle$ es un monoide conmutativo y tal que se satisfacen las siguientes identidades

(H1) $x \rightarrow x \approx 1$,

(H2) $x \odot (x \rightarrow y) \approx y \odot (y \rightarrow x)$,

(H3) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \approx x \odot y \rightarrow z$.

En el siguiente lema reunimos algunas propiedades de los hoops. Las demostraciones pueden verse en Blok y Pigozzi (1994) o Blok y Ferreirim (2000).

Proposición 1.4.2. *Sea* $\mathbf{H} = \langle H; \rightarrow, \odot, 1\rangle$ *un hoop, y sean* $a, b, c \in H$.

(1) $\langle H; \odot, 1\rangle$ *es un monoide conmutativo residuado naturalmente ordenado, donde el orden está definido por* $a \leq b$ *si y sólo si* $a \rightarrow b = 1$*, y el residuo es*

$$a \odot b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \rightarrow c.$$

(2) Para todo $a, b \in H$*, existe el ínfimo entre* a *y* b *y está dado por* $a \wedge b = a \odot (a \rightarrow b)$.

(3) Para todo $a, b, c \in H$*, se satisfacen:*

- *(a)* $1 \rightarrow a = a$,
- *(b)* $a \rightarrow 1 = 1$,
- *(c)* $a \rightarrow b \leq (c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)$,
- *(d)* $a \leq b \rightarrow a$,
- *(e)* $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$,
- *(f)* $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$,
- *(g)* $a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$,
- *(h) si* $a \leq b$ *entonces* $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ *y* $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$.

Notamos con $\mathcal{H}$ a la variedad de los hoops.

Un *filtro* de un hoop $\mathbf{H}$ es un subconjunto F de H tal que $1 \in F$ y tal que si $a \in F$, $a \rightarrow b \in F$, entonces $b \in F$. No es difícil ver que F es un filtro de un hoop $\mathbf{H}$ si y sólo si F verifica que $1 \in F$, F es creciente y F es cerrado por $\odot$. En particular, todo filtro de un hoop $\mathbf{H}$ es un subuniverso de $\mathbf{H}$.

Si $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ y $X \subseteq H$, entonces el filtro generado por X es el conjunto

$$\mathrm{Fg}(X) = \{b \in H : a_1 \rightarrow (a_2 \rightarrow (\dots (a_n \rightarrow b) \dots)) = 1 \text{ donde } a_1, a_2, \dots, a_n \in X\},$$

o lo que es lo mismo

$$\mathrm{Fg}(X) = \{b \in H : a_1 \odot a_2 \odot \cdots \odot a_n \leq b, \text{ donde } a_1, a_2, \dots, a_n \in X\}.$$

Definimos $a \overset{n}{\to} b$ inductivamente para todo entero no negativo n de la siguiente manera:

$$a \overset{0}{\to} b := b \quad \text{y} \quad a \overset{n}{\to} b := a \to (a \overset{n-1}{\longrightarrow} b).$$

Si en particular $X = \{a\}$ entonces $\mathrm{Fg}(a) = \left\{b \in H : a \overset{n}{\to} b = 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\right\} = \{b \in H : a^n \leq b, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.

Si θ es una congruencia de un hoop $\mathbf{H}$, entonces $1/\theta$ es un filtro de $\mathbf{H}$. Recíprocamente, si F es un filtro de $\mathbf{H}$, la relación

$$\theta_F = \left\{(a, b) \in H^2 : (a \to b) \odot (b \to a) \in F\right\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{H}$, que además verifica que $F = 1/\theta_F$. Más aún, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.4.3. *(Ferreirim, 1992) Sea $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$. La correspondencia $\mathbf{Con}_{\mathcal{H}}(\mathbf{H}) \to \mathcal{F}(\mathbf{H})$ definida por $\theta \to 1/\theta$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $F \to \theta_F$.*

Como corolario del Teorema 1.4.3, obtenemos que la variedad de los hoops tiene la propiedad de extensión de congruencias. Además, $\mathcal{H}$ es una variedad aritmética, es decir que tiene distributividad de congruencias y sus congruencias permutan.

Definición 1.4.4. Diremos que un hoop es un *hoop de Wajsberg* si satisface la identidad

$$(T)\ (x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x.$$

Notamos con $\mathcal{WH}$ a la variedad de los hoops de Wajsberg. Si $\mathbf{H}$ es un hoop de Wajsberg, entonces para todo par $a, b \in H$, existe el supremo y está dado por $a \vee b = (a \to b) \to b$. Además, $\langle H; \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo.

Como todo hoop satisface la identidad

$$(x \to y) \to (y \to x) \approx y \to x,$$

(ver Bosbach (1969)), entonces todo hoop de Wajsberg satisface la identidad

$$(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1.$$

De la anterior identidad se deduce que 1 es un elemento $\vee$-irreducible y, en consecuencia, todo hoop de Wajsberg subdirectamente irreducible es totalmente ordenado. Luego, todo hoop de Wajsberg es producto subdirecto de hoops de Wajsberg totalmente ordenados y toda subvariedad de hoops de Wajsberg está generada por sus miembros totalmente ordenados. Además, si $\mathbf{H}$ es un hoop de Wajsberg *finito*, $\mathbf{H}$ es simple si y sólo si $\mathbf{H}$ es subdirectamente irreducible totalmente ordenado.

Diremos que un hoop $\mathbf{H}$ es *acotado* si existe un elemento $0 \in H$ tal que $0 \leq a$, para todo $a \in H$.

Definición 1.4.5. Un hoop $\mathbf{H} = \langle H; \odot, \to, 1\rangle$ se dice *cancelativo* si el monoide parcialmente ordenado $\langle H; \odot, 1, \leq\rangle$ es cancelativo, es decir, si para todo $a, b, c \in H$ se verifica que:

$$\text{si } a \odot c \leq b \odot c \text{ entonces } a \leq b.$$

Los hoops cancelativos forman una variedad. Esta variedad está axiomatizada dentro de la variedad de los hoops por la identidad

$$x \approx y \to (x \odot y).$$

Además, todo hoop cancelativo es un hoop de Wajsberg. Dentro de la variedad de los hoops de Wajsberg, la variedad de los hoops cancelativos está axiomatizada por la identidad

$$x \approx x \to (x \odot x).$$

Ejemplo 1.4.6. Consideremos el ℓ-grupo de los números enteros $\mathbb{Z} = (Z; +, -, 0, \wedge, \vee)$. Notamos con $C_\omega = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq 0\}$ su cono negativo. Luego, $\mathbf{C}_\omega$ es un hoop cancelativo.

Ejemplo 1.4.7. Sea $C_\infty = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$ el monoide libre con un generador. Definimos

$$a^n \odot a^m = a^{n+m},$$

$$a^n \to a^m = a^{\text{máx}\{m-n,0\}}.$$

Luego, $\mathbf{C}_\infty = \langle C_\infty; \odot, \to, 1\rangle$ es un hoop cancelativo. No es difícil ver que $\mathbf{C}_\infty \cong \mathbf{C}_\omega$.

Proposición 1.4.8. *Todo hoop de Wajsberg totalmente ordenado es acotado o cancelativo. Además, un hoop de Wajsberg es acotado y cancelativo si y sólo si es trivial.*

1.4.1. Subvariedades de hoops de Wajsberg

El reticulado de subvariedades de la variedad de los hoops de Wajsberg fue determinado por Aglianò y Panti (2002). En esta sección, indicamos los resultados más importantes que serán necesarios en la sección §4.3 donde estudiamos el reticulado de subvariedades de los hoops de Wajsberg monádicos de ancho k.

Existe una relación importante entre las variedades de MV-álgebras y las variedades de hoops de Wajsberg. En todo hoop de Wajsberg acotado se puede definir una estructura de MV-álgebra, definiendo

$$\neg x := x \to 0,$$

$$x \odot y := \neg(x \to \neg y),$$

$$0 := \neg 1.$$

Llamamos *hoop reducto* a todo $\{\odot, \to, 1\}$-reducto, y *hoop subreducto* a todo $\{\odot, \to, 1\}$-subreducto. Si $\mathcal{K}$ es una clase de MV-álgebras, notamos con $\mathcal{S}^h(\mathcal{K})$ a la clase de subreductos hoops de las álgebras de $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{V}$ es una variedad de MV-álgebras, entonces $\mathcal{S}^h(\mathcal{V})$ es una variedad de hoops de Wajsberg. En particular, la variedad $\mathcal{WH}$ de los hoops de Wajsberg es la clase de subreductos hoop de las MV-álgebras (ver Blok y Ferreirim (2000)).

Ejemplo 1.4.9. Notamos con $\mathbf{C}_{t,\omega}$ al hoop de Wajsberg reducto acotado de la MV-álgebra $\mathbf{S}_{t,\omega}$, y con $\mathbf{C}_m$ al hoop de Wajsberg reducto acotado de la MV-álgebra $\mathbf{S}_m$.

Sea $\mathbf{A}$ un hoop de Wajsberg *acotado* totalmente ordenado no trivial, con primer elemento 0. Para todo elemento $a \in A$, definimos el *orden de* a como el menor entero positivo n tal que $a^n = 0$, si tal entero existe, y escribimos $\operatorname{ord} a = n$. Si para todo entero positivo n, se tiene que $a^n \neq 0$, entonces decimos que el orden de a es infinito y escribimos $\operatorname{ord} a = \omega$. Definimos el *orden de* $\mathbf{A}$, y escribimos $\operatorname{ord} \mathbf{A}$, como el supremo de los órdenes de todos sus elementos distintos de 1, esto es, $\operatorname{ord} \mathbf{A} = \sup\{\operatorname{ord} a, a \in A - \{1\}\}$. Si este supremo no existe decimos que el orden de $\mathbf{A}$ es infinito, y escribimos $\operatorname{ord} \mathbf{A} = \omega$. Llamamos *radical* de $\mathbf{A}$, y notamos $\operatorname{Rad} \mathbf{A}$, a la intersección de todos los filtros maximales de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ es una *cadena*, entonces $\operatorname{Rad} \mathbf{A} = \{a \in A : \operatorname{ord} a = \omega\}$. Además, $\operatorname{Rad} \mathbf{A}$ es un filtro propio y un subhoop cancelativo de $\mathbf{A}$. Definimos el rango de $\mathbf{A}$ por $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{ord}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad} \mathbf{A})$. Los conceptos recién definidos de orden y rango coinciden con aquellos definidos en Komori (1978b).

Ejemplo 1.4.10. Para todo t entero positivo, $\operatorname{Rad}(\mathbf{C}_{t,\omega}) \cong \mathbf{C}_\omega$.

Teorema 1.4.11. *(Aglianò y Panti, 2002) Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop de Wajsberg totalmente ordenado no trivial. Se verifica que:*

(1) si $\mathbf{A}$ *es cancelativo, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega)$*,*

(2) si $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \omega$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{WH}$*,*

(3) si $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$ *y* $\operatorname{ord} \mathbf{A} = \omega$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m,\omega})$*,*

(4) si $\operatorname{ord} \mathbf{A} = m$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_m)$*.*

Sabemos que la variedad de las MV-álgebras está generada por sus álgebras finitas. Es más, $\{\mathbf{S}_i : i \in I\}$ genera la variedad $\mathcal{MV}$ si y sólo si I es finito. En la variedad de los hoops de Wajsberg, tenemos que $\{\mathbf{C}_i : i \in I\}$ genera $\mathcal{WH}$ si y sólo si I es infinito.

Teorema 1.4.12. *(Aglianò y Panti, 2002) Sea* $\mathcal{V}$ *una variedad propia de hoops de Wajsberg. Entonces* $\mathcal{V}$ *tiene alguna de las tres siguientes formas:*

(1) $\mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_1}, \ldots, \mathbf{C}_{m_r})$*, donde* $r \geq 1$*;*

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_1}, \ldots, \mathbf{C}_{m_r}, \mathbf{C}_\omega)$*, donde* $r \geq 0$*;*

(3) $\mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_1}, \ldots, \mathbf{C}_{m_r}, \mathbf{C}_{t_1,\omega}, \ldots, \mathbf{C}_{t_s,\omega})$*, donde* $s \geq 0$*.*

Para todo n, m enteros positivos, $\mathbf{C}_n$ es un subhoop de $\mathbf{C}_m$ si y sólo si $\mathbf{C}_n$ es un subhoop de $\mathbf{C}_{m,\omega}$ si y sólo si $n|m$. Además, $\mathbf{C}_n \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m,\omega})$ si y sólo si $n|m$.

Sean I y J dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y sea $K \subseteq \{0\}$. Una terna (I, K, J) se dice *reducida* si:

- $I \cup K \cup J \neq \emptyset$,
- si $K = \{0\}$ entonces $J = \emptyset$,
- si $m \in I$ entonces m no divide a m', para todo $m' \in (I \backslash \{m\} \cup J)$;

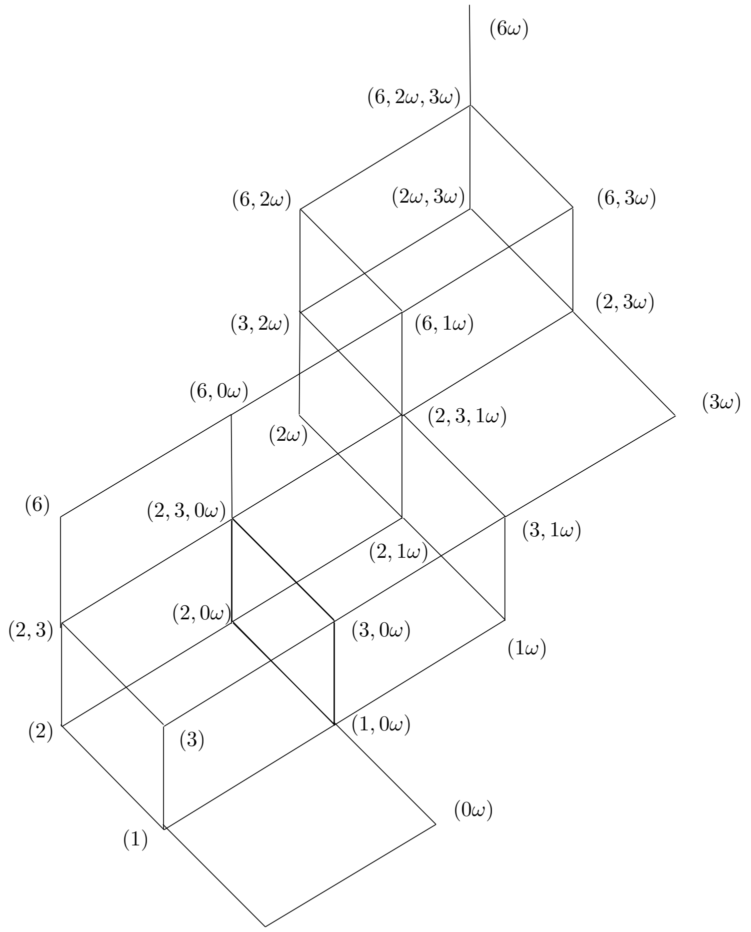
- si $t \in J$ entonces t no divide a t', para todo $t' \in J \backslash \{t\}$.

Teorema 1.4.13. *(Aglianò y Panti, 2002) Las subvariedades propias de hoops de Wajsberg están en correspondencia 1-1 con las ternas reducidas, via las correspondencias*

$$(I, \emptyset, J) \mapsto \mathcal{V}\left(\{\mathbf{C}_m : m \in I\}\right) \cup \{\mathbf{C}_{t,\omega} : t \in J\},$$

$$(I, \{0\}, \emptyset) \mapsto \mathcal{V}\left(\{\mathbf{C}_m : m \in I\}\right) \cup \{\mathbf{C}_\omega\}.$$

En la siguiente figura representamos el intervalo $[\mathcal{T}, \mathcal{V}(\mathbf{C}_{6,\omega})]$, donde $\mathcal{T}$ es la variedad trivial. Hemos notado con, por ejemplo, $(2, 3, 0\omega)$ a la variedad $\mathcal{V}(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_\omega)$ correspondiente a la terna $(\{2, 3\}, \{0\}, \emptyset)$.



Un hoop se llama n-potente si satisface la identidad

$$(\delta_n)\ x^n \approx x^{n+1},$$

para $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la identidad (δ_n) posee una versión implicacional. Esto será importante en el capítulo 5 para la determinación del reticulado de subvariedades de las álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas.

Lema 1.4.14. *Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop. Entonces,*

(a) $x \xrightarrow{n} y \approx x^n \to y$,

(b) $\mathbf{A}$ *es* n*-potente si y sólo si* $\mathbf{A}$ *satisface la identidad*

$$(\epsilon_n)\ x \xrightarrow{n} y \approx x \xrightarrow{n+1} y.$$

Observemos que en todo hoop podemos escribir la operación $\oplus$ en términos de la operación $\odot$ y la operación $\to$ de la siguiente manera:

$$a \oplus b = (a \to (a \odot b)) \to b.$$

Además, en todo hoop de Wajsberg acotado $\oplus$ es la suma usual. En efecto,

$$(a{\to}(a{\odot}b)){\to}b = (\neg a{\oplus}\neg(\neg a{\oplus}\neg b)){\to}b = (\neg a{\vee}b){\to}b = (\neg a{\to}b){\wedge}(b{\to}b) = \neg a{\to}b = a{\oplus}b.$$

Debido a esto, es posible hallar bases ecuacionales finitas para las subvariedades de hoops de Wajsberg acotados siguiendo los argumentos de Di Nola y Lettieri (1999), donde se encuentran bases ecuacionales finitas para toda subvariedad de MV-álgebras. En un hoop cancelativo $\mathbf{H}$, se satisface que $a \oplus b = 1$, para todo par de elementos $a, b \in H$. Más aún, la subvariedad de los hoops cancelativos está caracterizada por la identidad

$$(\zeta)\ x \oplus x \approx 1.$$

Del Teorema 1.4.11, el Corolario 1.2.20, el Teorema 1.2.21 y lo anterior, tenemos la siguiente caracterización ecuacional de las subvariedades de hoops de Wajsberg generadas por un álgebra subdirectamente irreducible.

Teorema 1.4.15. *Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop de Wajsberg totalmente ordenado no trivial. Entonces,*

(1) si $\mathbf{A}$ *es cancelativo, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ *está caracterizada por la identidad* (ζ),

(2) si $\operatorname{ord}\mathbf{A} = m$, *entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ *está caracterizada por la identidad* (δ_m).

(3) si $\operatorname{ord}\mathbf{A} = \omega$, *y*

(a) $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 1$, *entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{1,\omega})$ *está caracterizada por la identidad*

$$(\rho_1)\ (x \oplus x)^2 \approx x^2 \oplus x^2.$$

(b) $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$, *entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{2,\omega})$ *está caracterizada por la identidad*

$$(\rho_2)\ (x^2 \oplus x^2 \oplus x^2)^2 \approx x^3 \oplus x^3.$$

(c) $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *con* $n \geq 3$, *entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{n,\omega})$ *está caracterizada por las identidades*

$$(\rho_n)\ \ ((n+1)x^n)^2 \approx 2x^{n+1},$$

y

$$(\gamma_{np})\ \ \left(px^{p-1}\right)^{n+1} \approx (n+1)x^p$$

para todo natural $1 < p < n$ *tal que* p *no divide a* n.

1.5. Álgebras de implicación de Łukasiewicz

En esta sección recordamos los resultados básicos de las álgebras de implicación de Łukasiewicz que serán necesarios en la tesis. En particular, los utilizaremos en el capítulo 5, donde estudiamos la clase de los $\{\to, \forall, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras monádicas. Para más detalles el lector puede ver Ferreirim (1992) y/o Komori (1978b).

Definición 1.5.1. Un álgebra *de implicación de Łukasiewicz* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \to, 1\rangle$ de tipo $(2,0)$ que satisface las siguientes identidades

(W1) $1 \to x \approx x$,

(B) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$,

(T) $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$,

(L) $(x \to y) \to (y \to x) \approx y \to x$.

Notamos con $\mathcal{L}$ a la variedad de todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}$. Definimos, para todo $a, b \in A$, la relación

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1.$$

Esta relación es un orden parcial, que llamamos el *orden natural* de $\mathbf{A}$. El elemento $1 \in A$ es el mayor elemento del conjunto A con respecto a este orden. Para todo par $a, b \in A$ existe el supremo, y además $a \vee b = (a \to b) \to b$. Si $c \in A$ y $c \leq a, b$ entonces existe el ínfimo entre a y b, y está dado por $a \wedge b = ((a \to c) \vee (b \to c)) \to c$.

Sea $\mathbf{A} = \langle A; \to, 1\rangle$ un álgebra de implicación de Łukasiewicz y $c \in A$. Consideremos el conjunto

$$[c) = \{a \in A : c \leq a\},$$

y definimos en $[c)$ las operaciones

$$\neg_c x := x \to c,$$

y

$$x \to_c y := x \to y.$$

Entonces el álgebra $\mathbf{A}_c = \langle [c); \to_c, \neg_c, 1\rangle$ es un álgebra de Wajsberg. Más aún, las álgebras de implicación de Łukasiewicz son la clase de todos los $\{\to, 1\}$-subreductos de las álgebras de Wajsberg, o equivalentemente, de las MV-álgebras (Ferreirim, 1992).

Ejemplo 1.5.2. Para cada entero positivo n, sea $\mathbf{L}_n = \langle\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}; \to, 1\rangle$ el álgebra de implicación de Łukasiewicz que es el $\{\to, 1\}$-reducto de la MV-álgebra $\mathbf{S}_n$. Recordemos que $a \to b = \text{mín}\{1, 1-a+b\}$, para todo $a, b \in L_n$. Además, $\mathbf{L}_n$ es subálgebra de $\mathbf{L}_m$ si y sólo si $n \leq m$.

Ejemplo 1.5.3. Llamamos $\mathbf{L}_{1,\omega}$ al $\{\to, 1\}$-reducto de la MV-álgebra $\mathbf{S}_{1,\omega}$. Recordemos que el universo de esta álgebra es el conjunto

$$L_{1,\omega} = \{(0,y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(1,-y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Para todo $(a,b),(c,d) \in L_{1,\omega}$, $(a,b) \to (c,d) = \neg(a,b) \oplus (c,d) = (1-a+c, -b+d) \wedge (1,0)$.

Definición 1.5.4. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}$. Un subconjunto $F \subseteq A$ se dice un *filtro implicativo* de $\mathbf{A}$ si $1 \in F$ y si se satisface que, si $a \in F$ y $a \to b \in F$ entonces $b \in F$.

Observar que todo filtro implicativo es un filtro de orden, esto es, si $a \in F$ y $a \leq b$ entonces $b \in F$. Además, como para todo $a, b \in A$ se verifica que $b \leq a \to b$, tenemos que los filtros implicativos de $\mathbf{A}$ son subuniversos.

Notamos con $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ a la familia de todos los filtros implicativos de $\mathbf{A}$, ordenados por inclusión. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{L}$ y $X \subseteq A$ entonces el filtro implicativo generado por X es el conjunto

$$\mathrm{Fg}(X) = \{b \in A : a_1 \to (a_2 \to (\cdots (a_n \to b) \cdots)) = 1, \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in X\}.$$

Si en particular $X = \{a\}$ entonces $\mathrm{Fg}(a) = \{b \in A : a \overset{n}{\to} b = 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Si θ es una congruencia de un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{L}$, entonces $1/\theta$ es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$. Recíprocamente, si F es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$, entonces la relación

$$\theta_F = \left\{(a,b) \in A^2 : a \to b, b \to a \in F\right\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$, que además verifica que $F = 1/\theta_F$. Más aún, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.5. *(Ferreirim, 1992) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}$. La correspondencia $\mathbf{Con}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}(\mathbf{A})$ definida por $\theta \to 1/\theta$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $F \to \theta_F$.*

Ejemplo 1.5.6. Consideremos el álgebra $\mathbf{L}_{1,\omega}$. Llamamos $L_\omega = \{(1,-y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Este subconjunto es el único filtro implicativo maximal del álgebra $\mathbf{L}_{1,\omega}$ y además $\mathbf{L}_{1,\omega}/\theta_{L_\omega}$ es isomorfo a $\mathbf{L}_1$. Notamos por $\mathbf{L}_\omega$ a la subálgebra asociada. El álgebra $\mathbf{L}_\omega$ no es finitamente generada. Además toda subálgebra infinita de $\mathbf{L}_\omega$ es isomorfa a una copia de ella, y toda subálgebra finita no trivial de $\mathbf{L}_\omega$ es isomorfa a $\mathbf{L}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Las álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{L}$ son totalmente ordenadas, relativas al orden natural (Komori, 1978b).

Definición 1.5.7. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}$ y $x \in A$. Definimos el orden de x, y lo notamos con $\operatorname{ord} x$, como el menor entero n tal que $x \vee (x \overset{n}{\to} y) = 1$, para todo $y \in A$. Si n no existe, entonces $\operatorname{ord} x = \omega$. Definimos el orden de $\mathbf{A}$ como $\operatorname{ord} \mathbf{A} = \sup\{\operatorname{ord} x : x \in A\}$.

Teorema 1.5.8. *(Komori, 1978b) Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación de Łukasiewicz subdirectamente irreducible. Se satisface que:*

(a) si $\operatorname{ord} \mathbf{A} = m$ *entonces* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a* $\mathbf{L}_m$,

(b) si $\operatorname{ord} \mathbf{A} = \omega$ *entonces* $\mathbf{A}$ *tiene una subálgebra isomorfa a* $\mathbf{L}_m$*, para cada entero positivo* m*.*

El reticulado de subvariedades de $\mathcal{L}$ fue dado por Komori (1978b) y es una $\omega+1$-cadena

$$\mathcal{V}(\mathbf{L}_0) \subset \mathcal{V}(\mathbf{L}_1) \subset \cdots \subset \mathcal{V}(\mathbf{L}_n) \subset \cdots \subset \mathcal{V}(\mathbf{L}_\omega) = \mathcal{V}(\mathbf{L}_{1,\omega}) = \mathcal{L}.$$

Observar que $\mathcal{V}(\mathbf{L}_0)$ y $\mathcal{V}(\mathbf{L}_1)$ son la variedad trivial y la variedad de las álgebras de implicación respectivamente. Estas últimas, también llamadas álgebras de Tarski.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea la identidad

$$(\epsilon_n)\ x \overset{n}{\to} y \approx x \overset{n+1}{\longrightarrow} y.$$

La variedad $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n)$ es la variedad de todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz que satisfacen la identidad (ϵ_n).

Notamos con $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\to} = \langle [0,1]; \to, 1\rangle$ al $\{\to, 1\}$-reducto de la MV-álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}] = \langle [0,1]; \oplus, \neg, 0\rangle$. Para cada n, $\mathbf{L}_n$ es una subálgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\to}$ y además $\mathcal{L} = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\to})$.

2. MV-álgebras monádicas

Las MV-álgebras monádicas, o MMV-álgebras, fueron introducidas y estudiadas por J. D. Rutledge (1959) como un modelo algebraico del cálculo de predicados (monádico) de la lógica infinito-valuada de Łukasiewicz, donde sólo una variable ocurre. Rutledge llamó a las MV-álgebras monádicas con el nombre de álgebras de Chang monádicas.

Estas álgebras han sido estudiadas por numerosos autores. Di Nola y Grigolia (2004) estudiaron dichas álgebras como pares de MV-álgebras donde una de las mismas es una subálgebra relativamente completa, con ciertas propiedades adicionales, de la otra. Posteriormente, Belluce et. al. (2005) obtienen un teorema de representación de ciertas clases localmente finitas de MV-álgebras monádicas, y dan una caracterización de los operadores monádicos sobre MV-álgebras finitas. También queremos citar el trabajo de Lattanzi y Petrovich (2008), quienes dan una equivalencia categórica entre las variedades de álgebras monádicas $(n+1)$-valuadas y la clase de las álgebras de Boole monádicas enriquecida con cierta familia de filtros.

En este capítulo estudiamos la variedad de las MV-álgebras monádicas. En la sección §2.1 y en sus correspondientes subsecciones, se encuentran todas las definiciones y propiedades básicas de las MMV-álgebras. Indicamos las propiedades de la subálgebra $\forall\mathbf{A}$ de $\mathbf{A}$, siendo $\mathbf{A}$ una MMV-álgebra, la caracterización de los miembros subdirectamente irreducibles de la variedad, y la caracterización de las congruencias. Varios de los ejemplos que son importantes para el desarrollo de la temas se indican en esta sección. La mayoría de los resultados expuestos en esta parte ya son conocidos. Se han incluido en la tesis para facilitar la lectura de la misma.

En la sección §2.2 demostramos que la variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por sus miembros finitos y, como consecuencia importante de esto, probamos que las identidades $\exists(x \wedge \exists y) \approx \exists x \wedge \exists$ y $\forall(x \vee \forall y) \approx \forall x \vee \forall y$ se satisfacen en toda MMV-álgebra. En la sección §2.3 caracterizamos a las MMV-álgebras directamente indescomponibles por medio del álgebra de Boole monádica de sus elementos complementados. En la sección §2.4 damos un álgebra característica de la variedad y, como aplicación, demostramos varias propiedades que serán necesarias para el desarrollo de la tesis. En la sección §2.5 definimos el concepto de radical monádico, y probamos que el radical monádico de una MMV-álgebra coincide con el radical de su MV-reducto. En la sección §2.6 comenzamos a estudiar las subvariedades generadas por las álgebras $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, caracterizando a las mismas por medio de identidades. Demostramos en esta sección que si un álgebra $\mathbf{A}$ pertenece a la subvariedad generada por $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, entonces es isomorfa a una subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^k$. En la sección §2.7 describimos el fragmento del reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{MMV}$ que se encuentra contenido en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, para cada k entero positivo. Comenzaremos estudiando en la sección §2.7.1 las subvariedades generadas por álgebras simples de ancho k. En la sección §2.7.2 tratamos con las subvariedades de álgebras de rango acotado y ancho k. En la §2.7.3

damos una axiomatización completa para todas las subvariedades de MMV-álgebras de ancho k. Por último en la sección §2.8 estudiamos algunas subvariedades que están generadas por álgebras funcionales monádicas de ancho infinito. Probamos que la variedad generada por un álgebra funcional monádica de ancho infinito $\mathbf{V}^X$ es igual a la variedad generada por el conjunto infinito de álgebras de ancho finito $\mathbf{V}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Concluimos el capítulo estudiando las subvariedades simples de ancho infinito. Las caracterizamos con identidades e indicamos la relación de inclusión entre las mismas.

2.1. Nociones básicas

En esta sección damos las definiciones y propiedades básicas de las MV-álgebras monádicas, e indicamos varios de los ejemplos que serán relevantes en el estudio del reticulado de subvariedades.

Definición 2.1.1. (Rutledge, 1959) Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, \exists, 0\rangle$ de tipo $(2,1,1,0)$ se dice una *MV-álgebra monádica* si $\langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra y $\exists$ satisface las siguientes identidades:

(MMV1) $x \leq \exists x$,

(MMV2) $\exists(x \vee y) \approx \exists x \vee \exists y$,

(MMV3) $\exists\neg\exists x \approx \neg\exists x$,

(MMV4) $\exists(\exists x \oplus \exists y) \approx \exists x \oplus \exists y$,

(MMV5) $\exists(x \odot x) \approx \exists x \odot \exists x$,

(MMV6) $\exists(x \oplus x) \approx \exists x \oplus \exists x$.

Diremos también que un álgebra es una MMV-álgebra si es una MV-álgebra monádica. La clase de todas las MMV-álgebras es una variedad que notamos con $\mathcal{MMV}$.

Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra, definimos el operador $\forall\colon A \to A$ por

$$\forall a := \neg\exists\neg a,$$

para todo $a \in A$. Claramente para todo elemento $a \in A$ se verifica que $\exists a = \neg\forall\neg a$. En el Lema 2.1.2 se establecen propiedades que verifica el operador $\forall$, y que reflejan dualmente los axiomas de la definición de las MMV-álgebras.

Lema 2.1.2. *(Di Nola y Grigolia, 2004) En toda MMV-álgebra* $\mathbf{A}$ *se satisfacen las siguientes identidades.*

(MMV7) $\forall x \leq x$,

(MMV8) $\forall(x \wedge y) \approx \forall x \wedge \forall y$,

(MMV9) $\forall\neg\forall x \approx \neg\forall x$,

(MMV10) $\forall(\forall x \odot \forall y) \approx \forall x \odot \forall y$,

(MMV11) $\forall(x \odot x) \approx \forall x \odot \forall x$,

(MMV12) $\forall(x \oplus x) \approx \forall x \oplus \forall x$.

Observemos que es posible definir a las MMV-álgebras utilizando la operación $\forall$ en lugar de $\exists$. Esto es, una MMV-álgebra es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, \forall, 0\rangle$ de tipo $(2,1,1,0)$ tales que $\langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra y $\forall$ satisface las identidades (MMV7)-(MMV12). Utilizaremos una definición o la otra, de acuerdo a lo que resulte conveniente.

El siguiente lema reúne algunas de las propiedades elementales verificadas por las MMV-álgebras que serán usadas frecuentemente en la tesis. Incluimos su demostración, pudiendo también el lector encontrar demostraciones de algunas de ellas en Rutledge (1959).

Lema 2.1.3. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$*. Para todo* $a, b \in A$ *se verifican las siguientes propiedades:*

(MMV13) $\forall 0 = 0$, $\exists 1 = 1$,

(MMV14) $\forall 1 = 1$, $\exists 0 = 0$,

(MMV15) $\forall\forall a = \forall a$, $\exists\exists a = \exists a$,

(MMV16) $\forall(\forall a \oplus \forall b) = \forall a \oplus \forall b$, $\exists(\exists a \odot \exists b) = \exists a \odot \exists b$,

(MMV17) $\forall a \leq b$ *si y sólo si* $\forall a \leq \forall b$, $a \leq \exists b$ *si y sólo si* $\exists a \leq \exists b$,

(MMV18) si $a \leq b$ *entonces* $\forall a \leq \forall b$ *y* $\exists a \leq \exists b$,

(MMV19) $\forall a \odot \forall b \leq \forall(a \odot b)$, $\exists(a \oplus b) \leq \exists a \oplus \exists b$,

(MMV20) $\forall a \oplus \forall b \leq \forall(a \oplus b)$, $\exists(a \odot b) \leq \exists a \odot \exists b$,

(MMV21) $\forall(\neg a \oplus b) \leq \neg\forall a \oplus \forall b$, $\neg(\exists a) \odot \exists b \leq \exists(\neg a \odot b)$,

(MMV22) $\forall(\forall a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b$, $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$,

(MMV23) $\forall a \vee \forall b \leq \forall(a \vee b)$, $\exists(a \wedge b) \leq \exists a \wedge \exists b$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ y $a, b \in A$.

Si consideramos $a = 0$ en (MMV7), obtenemos que $\forall 0 \leq 0$. Como además 0 es el primer elemento del álgebra, tenemos que

$$\forall 0 = 0.$$

De (MMV9) y (MMV13) tenemos que

$$\forall 1 = \forall\neg 0 = \forall\neg\forall 0 = \neg\forall 0 = \neg 0 = 1.$$

De (MMV14) y (MMV10) sabemos que

$$\forall\forall a = \forall(\forall a \odot 1) = \forall(\forall a \odot \forall 1) = \forall a \odot \forall 1 = \forall a \odot 1 = \forall a.$$

De (MMV9) y (MMV10) podemos escribir

$$\begin{aligned} \forall a \oplus \forall b &= \neg(\neg\forall a \odot \neg\forall b) = \neg(\forall\neg\forall a \odot \forall\neg\forall b) = \neg\forall(\forall\neg\forall a \odot \forall\neg\forall b) \\ &= \forall\neg\forall(\forall\neg\forall a \odot \forall\neg\forall b) = \forall(\neg(\forall\neg\forall a \odot \forall\neg\forall b)) = \forall(\neg(\neg\forall a \odot \neg\forall b)) = \forall(\forall a \oplus \forall b). \end{aligned}$$

Demostremos (MMV17). Supongamos que $\forall a \leq b$. Luego, $\forall a = \forall a \wedge b$. De (MMV15) y (MMV8), obtenemos que

$$\forall a = \forall\forall a = \forall(\forall a \wedge b) = \forall\forall a \wedge \forall b = \forall a \wedge \forall b,$$

y por lo tanto $\forall a \leq \forall b$. La recíproca es consecuencia inmediata de (MMV7).

La propiedad (MMV18) es inmediata de (MMV7) y la propiedad anterior.

Observemos que $\forall a \odot \forall b \leq a \odot b$. Luego, de (MMV10) y (MMV18) tenemos que

$$\forall a \odot \forall b = \forall(\forall a \odot \forall b) \leq \forall(a \odot b).$$

Veamos que (MMV20) se verifica. Observemos que $\forall a \oplus \forall b \leq a \oplus b$. Luego, de (MMV16) y (MMV18) tenemos que

$$\forall a \oplus \forall b = \forall(\forall a \oplus \forall b) \leq \forall(a \oplus b).$$

De (MMV19) y (MMV18) tenemos que $\forall(\neg a \oplus b) \odot \forall a \leq \forall((\neg a \oplus b) \odot a) = \forall(a \wedge b) \leq \forall b$. Así,

$$\forall(\neg a \oplus b) \leq \neg\forall a \oplus \forall b,$$

demostrando (MMV21). Observemos que esta propiedad puede ser escrita equivalentemente de la siguiente forma

$$\forall(a \rightarrow b) \leq \forall a \rightarrow \forall b.$$

Veamos que (MMV22) se verifica. En efecto, $\forall(\forall a \vee \forall b) = \forall((\forall a \odot \neg\forall b) \oplus \forall b) = \forall((\forall a \odot \forall\neg\forall b) \oplus \forall b) = \forall(\forall(\forall a \odot \forall\neg\forall b) \oplus \forall b) = (\forall a \odot \forall\neg\forall b) \oplus \forall b = (\forall a \odot \neg\forall b) \oplus \forall b = \forall a \vee \forall b$.

Notemos que $\forall a \vee \forall b \leq a \vee b$. Luego, de (MMV18) y (MMV22) tenemos que

$$\forall(\forall a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b \leq \forall(a \vee b),$$

y en consecuencia (MMV23) se satisface.

Para finalizar, observemos que las restantes propiedades son las correspondientes duales a las ya demostradas. □

Observemos que si $a \in A$ es tal que $a = \forall b$, para algún $b \in A$, entonces $a = \forall a$. En efecto, $\forall a = \forall\forall b = \forall b = a$. Consideremos el conjunto $\forall A = \{a \in A \colon a = \forall a\}$.

Lema 2.1.4. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *Entonces,* $\forall\mathbf{A} = \langle\forall A; \oplus, \neg, 0\rangle$ *es una MV-subálgebra del MV-reducto de* $\mathbf{A}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (MMV15), (MMV13), (MMV16) y (MMV9). □

En lo que resta de esta sección indicaremos varios ejemplos de MMV-álgebras, que serán importantes en el estudio del reticulado de subvariedades.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos las *álgebras de Boole monádicas* (ver Halmos (1956)). Estas son álgebras $\mathbf{B} = \langle B; \vee, \wedge, ', \exists, 0, 1\rangle$ donde $\langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y $\exists$ satisface las identidades

(BM1) $\exists 0 \approx 0$,

(BM2) $x \leq \exists x$,

(BM3) $\exists(x \wedge \exists y) \approx \exists x \wedge \exists y$.

Veamos que toda álgebra de Boole monádica es una MMV-álgebra. Recordemos que si $\langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole entonces $\langle B; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra definiendo las operaciones

$$a \oplus b = a \vee b,$$

$$\neg a = a',$$

para todo $a, b \in B$. En consecuencia $a \odot b = a \wedge b$ y (MMV1), (MMV5) y (MMV6) se satisfacen inmediatamente. En el siguiente lema veremos que también se satisfacen (MMV2), (MMV3) y (MMV4), entre otras.

Lema 2.1.6. *Sea* $\mathbf{B}$ *un álgebra de Boole monádica. Para todo* $a, b \in B$ *se verifican las siguientes propiedades:*

(BM4) $\exists 1 = 1$,

(BM5) $\exists\exists a = \exists a$,

(BM6) si $a \leq b$ *entonces* $\exists a \leq \exists b$,

(BM7) $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$,

(BM8) $\exists(\exists a)' = (\exists a)'$,

(BM9) $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$,

(BM10) $\exists(\exists a \vee \exists b) = \exists a \vee \exists b$,

(BM11) $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$.

Demostración. La propiedad (BM4) se verifica fácilmente de (BM2). Veamos (BM5). En efecto, $\exists\exists a = \exists(1 \wedge \exists a) = \exists 1 \wedge \exists a = \exists a$. Para (BM6), observemos que si $a \leq b$ por (BM2) tenemos que $a \leq \exists b$. Entonces, de (BM3), $\exists a = \exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$, de donde se deduce que $\exists a \leq \exists b$. Demostremos (BM7). En efecto, de (BM3) y (BM5), $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists\exists a \wedge \exists b = \exists a \wedge \exists b$. Para (BM8) observemos en primer lugar que de (BM1), (BM3) y (BM5), tenemos que

$$0 = \exists 0 = \exists((\exists a)' \wedge \exists a) = \exists(\exists a)' \wedge \exists\exists a = \exists(\exists a)' \wedge \exists a.$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\exists a)' &= (\exists a)' \vee 0 = (\exists a)' \vee (\exists(\exists a)' \wedge \exists a) = ((\exists a)' \vee \exists(\exists a)') \wedge ((\exists a)' \vee \exists a) \\ &= (\exists a)' \vee \exists(\exists a)' = \exists(\exists a)'.\end{aligned}$$

Veamos ahora (BM9). En efecto, de (BM3) y (BM5), $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists\exists a \wedge \exists b = \exists a \wedge \exists b$. La propiedad (BM10) surge fácilmente de (BM8) y (BM9). Por último, demostremos que $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$. En efecto, sabemos que $a, b \leq a \vee b$. Luego $\exists a, \exists b \leq \exists(a \vee b)$ y en consecuencia $\exists a \vee \exists b \leq \exists(a \vee b)$. Por otro lado, $a \vee b \leq \exists a \vee \exists b$. Luego, $\exists(a \vee b) \leq \exists(\exists a \vee \exists b) = \exists a \vee \exists b$. Por lo tanto, $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$. □

A continuación vamos a definir el concepto de MV-álgebra funcional monádica. Para ello, sea X un conjunto no vacío y $\mathbf{V}$ una MV-álgebra. Si consideramos el conjunto V^X de todas las funciones de X en V, con las operaciones definidas componente a componente, entonces $\mathbf{V}^X$ es una MV-álgebra. Si $p \in V^X$ y existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{p(y) : y \in X\}$, entonces definimos las siguientes funciones constantes:

$$\exists_\vee(p)(x) = \sup\{p(y) : y \in X\}$$

y

$$\forall_\wedge(p)(x) = \text{ínf}\{p(y) : y \in X\},$$

para todo $x \in X$.

Definición 2.1.7. Una *MMV-álgebra funcional* o *MV-álgebra funcional monádica* $\mathbf{A}'$ es una MMV-álgebra cuyo MV-reducto es una MV-subálgebra de $\mathbf{V}^X$ y donde los operadores existencial y universal son las funciones $\exists_\vee$ y $\forall_\wedge$ respectivamente. Notar que en $\mathbf{A}'$ se verifica que:

(1) si $p \in A'$, entonces existen los elementos $\sup\{p(y) : y \in X\}$ e $\text{ínf}\{p(y) : y \in X\}$,

(2) si $p \in A'$ entonces las funciones $\exists_\vee(p)$ y $\forall_\wedge(p)$ pertenecen a A'.

En el siguiente ejemplo definiremos una MMV-álgebra funcional que será de gran importancia, pues posteriormente probaremos que genera a la variedad.

Ejemplo 2.1.8. Consideremos la MV-álgebra $\langle [0,1]^{\mathbb{N}}; \oplus, \neg, 0\rangle$ cuyo universo es el conjunto de todas las funciones $p\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ y las operaciones $\oplus$, $\neg$ y 0 definidas componente a componente. Para cada $p \in A$, existe $\text{ínf}\{p(i) : i \in \mathbb{N}\}$ y podemos definir la función constante $(\forall_\wedge p)(i) = \text{ínf}\{p(i) : i \in \mathbb{N}\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. A continuación veremos que $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}} = \langle [0,1]^{\mathbb{N}}; \oplus, \neg, \forall_\wedge, 0\rangle$ es una MMV-álgebra. Probaremos en el Lema 2.1.9 una propiedad que utilizaremos para demostrar las identidades (MMV11) y (MMV12). Este lema volverá a ser utilizado más adelante.

Lema 2.1.9. *Si* $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ *es una función continua a derecha y creciente, y* $X \subseteq [0,1]$ *es un subconjunto no vacío, entonces* $\text{ínf}\,\{\varphi(x) : x \in X\} = \varphi\,(\text{ínf}\{x : x \in X\})$.

Demostración. Notemos por $\bar{x} = \text{ínf}\{x : x \in X\}$. Es claro que para cada $x \in X$ se verifica que $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x)$, por ser $\bar{x} \leq x$ y φ creciente. Entonces, bastaría probar que $\varphi(\bar{x})$ es la mayor de las cotas inferiores del conjunto $\{\varphi(x) : x \in X\}$. Supongamos por el absurdo que existe una cota inferior C del conjunto $\{\varphi(x) : x \in X\}$ tal que $\varphi(\bar{x}) < C$. Sea $D = \text{ínf}\,\{y \in [0,1] : C \leq \varphi(y)\}$. Por la continuidad a derecha de φ, este ínfimo es un mínimo. Luego, $C \leq \varphi(D)$. Como $C \leq \varphi(x)$, para todo $x \in X$, resulta que $D \leq x$, para todo $x \in X$. Luego, $D \leq \bar{x}$ y por lo tanto, $\varphi(D) \leq \varphi(\bar{x})$. Lo cual es un absurdo ya que $\varphi(\bar{x}) < C \leq \varphi(D)$. □

Lema 2.1.10. *El álgebra* $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}} = \langle [0,1]^{\mathbb{N}}; \oplus, \neg, \forall_\wedge, 0\rangle$ *es una MMV-álgebra.*

Demostración. Veamos que $\forall_\wedge$ verifica las identidades (MMV7)-(MMV12).

Notemos que la identidad (MMV7) es inmediata de la definición de $\forall_\wedge$.

Sean $f, g \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Como

$$\text{ínf}\,\{\text{mín}\{f(i), g(i)\} : i \in \mathbb{N}\} = \text{mín}\,\{\text{ínf}\,\{f(i) : i \in \mathbb{N}\}\,, \text{ínf}\,\{g(i) : i \in \mathbb{N}\}\}\,,$$

la identidad (MMV8) se satisface.

Para (MMV9), basta observar que $\text{ínf}\,\{1 - \text{ínf}\{f(i) : i \in \mathbb{N}\} : i \in \mathbb{N}\} = 1 - \text{ínf}\{f(i) : i \in \mathbb{N}\}$ ya que el miembro derecho es constante. Por la misma razón, (MMV10) se satisface.

Demostremos (MMV11). Para ello, consideremos la función $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ definida mediante $\varphi(x) = x \odot x$. Esta función es continua y creciente, ya que

$$x \odot x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}.$$

Luego, por el Lema 2.1.9, sabemos que $\forall_\wedge(f \odot f) = \forall_\wedge f \odot \forall_\wedge f$.

La demostración de (MMV12) es análoga a la anterior, considerando la función continua y creciente $\varphi(x) = x \oplus x$, esto es,

$$x \oplus x = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}.$$

y aplicando el Lema 2.1.9. □

Ejemplo 2.1.11. Otra MMV-álgebra funcional que será importante más adelante es la subálgebra $\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}$ del álgebra $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$.

En lo que resta de la sección consideraremos MV-álgebras funcionales monádicas donde X es un conjunto finito. Empecemos estableciendo las siguientes propiedades de las MV-álgebras.

Lema 2.1.12. *Para todo entero positivo n, las siguientes identidades se satisfacen en toda MV-álgebra $\mathbf{A}$:*

(1) $2x_1 \vee 2x_2 \vee \cdots \vee 2x_n \approx 2(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n)$,

(2) $x_1^2 \vee x_2^2 \vee \cdots \vee x_n^2 \approx (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n)^2$.

Demostración. Por el Teorema de Representación de Chang podemos suponer que $\mathbf{A}$ es una MV-cadena. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, existe algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i \leq a_j$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, $2a_i \leq 2a_j$, para todo i. Entonces

$$2a_1 \vee 2a_2 \vee \cdots \vee 2a_n = 2a_j = 2(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n).$$

Análogamente se demuestra (2). □

La Proposición 2.1.13, nos otorga un método para construir muchos de los ejemplos que serán de importancia en esta tesis.

Proposición 2.1.13. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MV-álgebra y* $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ *un conjunto* finito. *Consideremos la MV-álgebra producto* $\mathbf{A}^X$ *donde las operaciones* $\oplus$*,* $\neg$ *y* 0 *están definidas componente a componente, y definimos* $\exists_\vee \colon A^X \to A^X$ *por* $\exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) = \langle a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n, \ldots, a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n\rangle$*. Entonces* $\mathbf{A}^X = \langle A^X; \oplus, \neg, \exists_\vee, 0\rangle$ *es una MMV-álgebra. (Observemos que* $\forall_\wedge(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) = \langle a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n, \ldots, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n\rangle$*).*

Demostración. Sean $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ y $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ dos elementos de A^X. Es claro que $\exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) \geq \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. Notemos que como X es un conjunto finito,

$$\bigvee_{i=1}^{k}(a_i \vee b_i) = \bigvee_{i=1}^{k} a_i \vee \bigvee_{i=1}^{k} b_i.$$

Entonces $\exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \vee \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle) = \exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) \vee \exists_\vee(\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle)$. Como $\neg$, $\oplus$ están definidas componente a componente y $\exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle)$ es constante en cada componente, es claro que se satisfacen las identidades (MMV3) y (MMV4). Demostremos (MMV5). Del Lema 2.1.12 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \oplus \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) = \exists_\vee(\langle 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n\rangle) \\
&= \langle 2a_1 \vee 2a_2 \vee \cdots \vee 2a_n, \ldots, 2a_1 \vee 2a_2 \vee \cdots \vee 2a_n\rangle \\
&= \langle 2(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n), \ldots, 2(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)\rangle \\
&= \exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle) \oplus \exists_\vee(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle).
\end{aligned}$$

La identidad (MMV6) se demuestra en forma análoga a la anterior, utilizando la propiedad (2) del Lema 2.1.12. □

Notemos que en la MMV-álgebra $\mathbf{A}^X$ se satisface que $\exists_\vee(\mathbf{A}^X)$, la subálgebra de todas las funciones constantes de $\mathbf{A}^X$, es isomorfa a $\mathbf{A}$.

Ejemplo 2.1.14. Si $X = \{1, \ldots, k\}$, notamos con $\mathbf{L}^k$ a la MMV-álgebra $\mathbf{L}^X$ definida en la Proposición 2.1.13. Por ejemplo, si consideramos $\mathbf{S}_n \in \mathcal{MV}$ y $X = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathbf{S}_n^3$ es una MMV-álgebra. En el teorema anterior, $\mathbf{L}$ no necesariamente es un álgebra finita. Por ejemplo, $\mathbf{S}_{n,\omega}^k$ y $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]^k$ son MMV-álgebras.

Consideremos una MMV-álgebra $\mathbf{A}$ y el conjunto $B(\mathbf{A})$ de los elementos booleanos de $\mathbf{A}$. Sabemos que $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ es una MV-subálgebra de $\mathbf{A}$. Además, si $a \in B(\mathbf{A})$ entonces $a = a \oplus a$ y de (MMV12) tenemos que

$$\forall a = \forall(a \oplus a) = \forall a \oplus \forall a.$$

Luego, $\forall a \in B(\mathbf{A})$. Luego, $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ es una MMV-subálgebra de $\mathbf{A}$.

Teorema 2.1.15. *(Belluce et. al., 2005, Theorem 3.1) Sea* $\mathbf{L}$ *una MV-álgebra* totalmente ordenada*,* k *un entero positivo y* $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ *un conjunto* finito*. Sea* $\mathbf{D}$ *la subálgebra de* $\mathbf{L}^X$ *de todas las funciones constantes de* L^X *y sea* $\mathbf{A}$ *una subálgebra de* $\mathbf{L}^X$ *tal que* $D \subseteq A$*. Definimos* $\forall_\wedge \colon A \to A$ *mediante* $\forall_\wedge a(i) = c$*, para todo* i*, donde* $c = \text{mín}_{1 \leq i \leq k}\{a(i)\}$*. Entonces* $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, \forall, 0\rangle$ *es una MMV-álgebra. Además* $\forall_\wedge \mathbf{A} = \mathbf{D} \cong \mathbf{L}$*.*

Ejemplo 2.1.16. Consideremos la MMV-álgebra $\mathbf{S}_{1,\omega}^k$. Sea $\overline{S_{1,\omega}^k}$ el subconjunto de $S_{1,\omega}^k$ definido por todos los elementos $a = \langle a(i) \rangle_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in S_{1,\omega}^k$ que satisfacen que, $a(i)$ es de orden finito para todo i, o que $a(i)$ es de orden infinito para todo i. Luego, del Teorema 2.1.15 obtenemos que $\overline{\mathbf{S}_{1,\omega}^k}$ es una MMV-subálgebra de $\mathbf{S}_{1,\omega}^k$. Observar que la subálgebra de los elementos complementados $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{S}_{1,\omega}^k})$ es isomorfa al álgebra de Boole $\mathbf{2}$ con dos elementos.

2.1.1. Subálgebras m-relativamente completas

Vimos en la sección anterior que $\forall\mathbf{A} = \langle \forall A; \oplus, \neg, 0 \rangle$ es una MV-subálgebra del MV-reducto de $\mathbf{A}$. A continuación veremos una caracterización de $\forall\mathbf{A}$ debida a Di Nola y Grigolia (2004). En este trabajo, los autores estudian a las MV-álgebras monádicas como pares de MV-álgebras $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_0)$ donde $\mathbf{A}_0$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ con ciertas propiedades especiales. Comencemos recordando la siguiente noción introducida por Halmos (1962).

Definición 2.1.17. Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y $\mathbf{A}_0$ una subálgebra de $\mathbf{A}$. Diremos que $\mathbf{A}_0$ es una subálgebra *relativamente completa* de $\mathbf{A}$, y notamos rc-subálgebra, si para todo $a \in A$, el conjunto $\{b \in A_0 : b \leq a\}$ tiene un elemento máximo.

En el Lema 2.1.18 veremos que en toda MMV-álgebra $\mathbf{A}$, la subálgebra $\forall\mathbf{A}$ es relativamente completa.

Lema 2.1.18. *(Rutledge, 1959) Si* $\mathbf{A}$ *es una MMV-álgebra, entonces* $\forall\mathbf{A}$ *es una rc-subálgebra de* $\mathbf{A}$. *Más aún, para todo* $a \in A$, *se tiene que* $\forall a = \max\{b \in \forall A : b \leq a\}$.

Demostración. Sea $a \in A$ y $b \in \forall A$ tal que $b \leq a$. Entonces $b = \forall b \leq \forall a$. Por lo tanto, $\forall a$ es el elemento máximo del conjunto $\{b \in \forall A : b \leq a\}$. □

Definición 2.1.19. (Di Nola y Grigolia, 2004) Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y $\mathbf{A}_0$ una subálgebra de $\mathbf{A}$. Decimos que $\mathbf{A}_0$ es una subálgebra *m-relativamente completa* de $\mathbf{A}$, y notamos mrc-subálgebra, si $\mathbf{A}_0$ es relativamente completa y se verifican las siguientes propiedades:

(mrc1) para todo $a \in A$ y para todo $x \in A_0$ tales que $x \geq a \odot a$ existe $v \in A_0$ tal que $x \geq v \odot v$ y $v \leq a$,

(mrc2) para todo $a \in A$ y para todo $x \in A_0$ tales que $x \geq a \oplus a$ existe $v \in A_0$ tal que $x \geq v \oplus v$ y $v \leq a$.

Lema 2.1.20. *(Di Nola y Grigolia, 2004, Theorem 4) Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra. Entonces* $\forall\mathbf{A}$ *es una mrc-subálgebra del MV-reducto de* $\mathbf{A}$.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 2.1.18, sólo resta ver que $\forall A$ verifica (mrc1) y (mrc2). Para ello, sean $a \in A$ y $x = \forall x$ tales que $x \geq a \oplus a$. Luego, $x \geq \forall(a \oplus a) = \forall a \oplus \forall a$. Tomando $v = \forall a$ tenemos (mrc2). La propiedad (mrc1) es análoga. □

Di Nola y Grigolia (2004, Theorem 5) demostraron que si $\mathbf{A}_0$ es una mrc-subálgebra de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ y si definimos $\forall\colon A \to A$ por $\forall a = \text{máx}\{b \in A_0 : b \leq a\}$, entonces $\mathbf{A}' = \langle A; \oplus, \neg, \forall, 0\rangle$ es una MMV-álgebra. Es claro que en este caso $\forall \mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$.

En el Lema 2.1.21 se indica que la única operación $\forall$ que se puede definir en una MV-álgebra $\mathbf{A}$ totalmente ordenada de forma tal que $\mathbf{A}$ enriquecida con $\forall$ sea una MMV-álgebra, es la identidad.

Lema 2.1.21. *(Di Nola y Grigolia, 2004) Si $\mathbf{A}_0$ es una mrc-subálgebra* totalmente ordenada *de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A}_0$ es una subálgebra maximal de $\mathbf{A}$ dentro de las subálgebras totalmente ordenadas. Como consecuencia, si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra totalmente ordenada entonces $\mathbf{A} = \forall \mathbf{A}$.*

2.1.2. Filtros monádicos y congruencias

En esta sección vemos que en toda MMV-álgebra $\mathbf{A}$, las congruencias están determinadas por la familia de filtros monádicos. Analizamos la relación entre la familia de filtros monádicos de $\mathbf{A}$ y la familia de filtros de $\forall \mathbf{A}$. Estos resultados fueron demostrados por Rutledge (1959), aunque en su trabajo relaciona las congruencias con ideales, que es un concepto dual al de filtros. Sin embargo, para los propósitos de esta tesis, y muy especialmente para el capítulo 4 y el capítulo 5, será importante trabajar con filtros.

Definición 2.1.22. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ y F un filtro de $\mathbf{A}$. El filtro F se dice *monádico* si para todo $a \in F$ se verifica que $\forall a \in F$.

Si $X \subseteq A, X \neq \emptyset$, el filtro monádico generado por X es el conjunto

$$\mathrm{FMg}(X) = \{b \in A : \forall a_1 \odot \forall a_2 \odot \cdots \odot \forall a_n \leq b, \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in X\}.$$

Si en particular $X = \{a\}$ entonces

$$\mathrm{FMg}(a) = \{b \in A : (\forall a)^n \leq b, \text{ para algún } n \text{ entero positivo }\}.$$

Observar que $\mathrm{FMg}(X) = \mathrm{Fg}(\forall X)$. Notamos con $\mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ al conjunto de filtros monádicos del álgebra $\mathbf{A}$, ordenados por inclusión. Claramente, $\mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ es un reticulado.

Si $\theta \in Con_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{A})$ entonces $1/\theta \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$. Si $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$, entonces la relación

$$\theta_F = \big\{(a, b) \in A^2 : (\neg a \oplus b) \odot (\neg b \oplus a) \in F\big\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Más aún, el Teorema 2.1.23 establece que el reticulado de los filtros monádicos y el reticulado de las relaciones de congruencia son isomorfos.

Teorema 2.1.23. *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. La correspondencia $\mathbf{Con}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ definida por $\theta \to 1/\theta$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $F \to \theta_F$.*

Vimos que $\forall \mathbf{A}$ es una MV-álgebra. Entonces, la familia $\mathcal{F}(\forall \mathbf{A})$ de filtros de $\forall \mathbf{A}$ es un reticulado. El siguiente teorema, también debido a Rutledge (1959) indica que $\mathcal{F}(\forall \mathbf{A})$ es isomorfa a $\mathcal{F}_M(\mathbf{A})$.

Teorema 2.1.24. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *La correspondencia* $\mathcal{F}_M(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}(\forall \mathbf{A})$ *definida por* $F \to F \cap \forall A$ *es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por* $M \to \mathrm{FMg}(M)$.

Sabemos que el reticulado de congruencias de $\forall \mathbf{A}$ es isomorfo al reticulado de filtros de $\forall \mathbf{A}$. Luego, el siguiente corolario es una consecuencia inmediata de ésto, del Teorema 2.1.23 y del Teorema 2.1.24.

Corolario 2.1.25. *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ *entonces*

$$\mathbf{Con}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{A}) \cong \mathcal{F}_M(\mathbf{A}) \cong \mathcal{F}(\forall \mathbf{A}) \cong \mathbf{Con}_{\mathcal{MV}}(\forall \mathbf{A}).$$

Del Corolario 2.1.25 y del hecho que la variedad $\mathcal{MV}$ posee distributividad de congruencias y extensión de congruencias, se tiene que la variedad $\mathcal{MMV}$ también.

2.1.3. Álgebras subdirectamente irreducibles

En esta sección vemos que toda MMV-álgebra es producto subdirecto de MMV-álgebras $\mathbf{A}_i$ donde $\forall \mathbf{A}_i$ es una MV-cadena. Además, obtenemos que para las MMV-álgebras $\mathbf{A}$ tales que $\forall \mathbf{A}$ es una cadena, podemos hallar una representación subdirecta de forma tal que se preserve la subálgebra $\forall \mathbf{A}$ en cada uno de los factores. Estos resultados son debidos a Rutledge (1959), pero los reproducimos aquí por razones de autocontenido.

Proposición 2.1.26. *(Rutledge, 1959) Toda MMV-álgebra* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a un producto subdirecto de MMV-álgebras* $\mathbf{A}_i$, $i \in I$, *tal que* $\forall \mathbf{A}_i$ *es totalmente ordenada.*

Demostración. Buscamos una familia $\mathcal{S}$ de filtros monádicos de $\mathbf{A}$ tal que $\bigcap \mathcal{S} = \{1\}$ y tal que $\forall(\mathbf{A}/F_i)$ sea totalmente ordenada, para todo $F_i \in \mathcal{S}$.

Para ello, consideremos la MV-álgebra $\forall \mathbf{A}$. Sabemos por el *Teorema de Representación de Chang* que existe una familia $\mathcal{S}' = \{P_i : i \in I\}$ de filtros primos de $\forall \mathbf{A}$ tal que $\bigcap \mathcal{S}' = \{1\}$ y tal que $(\forall \mathbf{A})/P_i$ es una cadena, para todo $i \in I$. Sea $\mathcal{S} = \{\mathrm{FMg}(P_i) : i \in I\}$. Verifiquemos en primer lugar que $\bigcap \mathcal{S} = \{1\}$. Sea $a \in A$, $a \neq 1$. Luego, $\forall a < 1$. Como $\bigcap \mathcal{S}' = \{1\}$, sabemos que existe $j \in I$ tal que $\forall a \notin P_j$. Luego $a \notin \mathrm{FMg}(P_j)$. En consecuencia $\bigcap \mathcal{S} = \{1\}$.

Probemos que para cada $i \in I$, $\forall\,(\mathbf{A}/\,\mathrm{FMg}(P_i)) \cong (\forall \mathbf{A})/P_i$. Sean $a, b \in A$ tales que $\forall\,(a/\,\mathrm{FMg}(P_i)) = \forall\,(b/\,\mathrm{FMg}(P_i))$. Entonces $(\forall a)/\,\mathrm{FMg}(P_i) = (\forall b)/\,\mathrm{FMg}(P_i)$. Sabemos que $(\forall a)/\,\mathrm{FMg}(P_i) = (\forall b)/\,\mathrm{FMg}(P_i)$ si y sólo si $(\forall a \to \forall b) \odot (\forall b \to \forall a) \in \mathrm{FMg}(P_i)$ si y sólo si $(\forall a \to \forall b) \odot (\forall b \to \forall a) \in P_i$ si y sólo si $(\forall a)/P_i = (\forall b)/P_i$. Entonces la aplicación $\phi\colon \forall\,(\mathbf{A}/\,\mathrm{FMg}(P_i)) \to (\forall \mathbf{A})/P_i$ definida por $\phi(\forall\,(a/\,\mathrm{FMg}(P_i))) = (\forall a)/P_i$ es inyectiva y sobreyectiva. Además, ϕ es un isomorfismo. Por lo tanto $\forall\,(\mathbf{A}/\,\mathrm{FMg}(P_i))$ es totalmente ordenada. $\square$

El objetivo ahora es obtener una representación de cada MMV-álgebra $\mathbf{A}$ tal que $\forall \mathbf{A}$ es totalmente ordenada, como producto subdirecto de MV-álgebras donde se preserve la subálgebra $\forall \mathbf{A}$ en cada factor de la representación de $\mathbf{A}$. Veamos en primer lugar algunos resultados que nos facilitarán la demostración.

Recordemos que en toda MV-álgebra se verifica que

$$a \oplus b = (a \oplus b) \oplus (a \odot b). \tag{2.1}$$

En efecto, es claro que $a \oplus b \leq (a \oplus b) \oplus (a \odot b)$. Además, de (MV18), tenemos que

$$((a \oplus b) \oplus (a \odot b)) \odot \neg(a \oplus b) = (a \odot b) \wedge \neg(a \oplus b) = (a \odot b) \wedge (\neg a \odot \neg b) = 0.$$

Esto es equivalente a decir que $(a \oplus b) \oplus (a \odot b) \leq a \oplus b$. Por lo tanto, $a \oplus b = (a \oplus b) \oplus (a \odot b)$.

Lema 2.1.27. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *Para todo* $a, b \in A$ *se verifica que*

$$\forall(a \oplus b) = \forall(a \oplus b) \oplus \forall(a \odot b).$$

Demostración. Es claro que $\forall(a \oplus b) \leq \forall(a \oplus b) \oplus \forall(a \odot b)$. Además, de la ecuación (2.1) y (MMV20), tenemos que

$$\forall(a \oplus b) = \forall((a \oplus b) \oplus (a \odot b)) \geq \forall(a \oplus b) \oplus \forall(a \odot b),$$

completando la demostración. □

Lema 2.1.28. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *Para todo* $a, b \in A$ *se verifica que*

$$\forall(a \odot b) = \forall(a \oplus b) \odot \forall(a \odot b).$$

Demostración. Es claro que $\forall(a \odot b) \geq \forall(a \oplus b) \odot \forall(a \odot b)$. Además, del Lema 2.1.27 y (MV19), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\forall(a \odot b) \odot \neg(\forall(a \oplus b) \odot \forall(a \odot b)) = \forall(a \odot b) \odot (\neg\forall(a \oplus b) \oplus \neg\forall(a \odot b)) = \\
&\forall(a \odot b) \wedge \neg\forall(a \oplus b) = \neg\forall(a \oplus b) \odot (\forall(a \oplus b) \oplus \forall(a \odot b)) = \\
&\neg\forall(a \oplus b) \odot \forall(a \oplus b) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\forall(a \odot b) \leq \forall(a \oplus b) \odot \forall(a \odot b)$, con lo que queda demostrada la igualdad. □

Lema 2.1.29. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra tal que* $\forall\mathbf{A}$ *es totalmente ordenada. Si* $a, b \in A$ *son tales que* $\forall(a \odot b) > 0$ *entonces* $a \oplus b = 1$.

Demostración. Sean $a, b \in A$ tales que $\forall(a \odot b) > 0$. Como $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada, dados los elementos $\forall(a \oplus b)$ y $\neg\forall(a \odot b)$ resulta que $\forall(a \oplus b) \leq \neg\forall(a \odot b)$ o $\forall(a \oplus b) \geq \neg\forall(a \odot b)$. Supongamos que $\forall(a \oplus b) \leq \neg\forall(a \odot b)$. Esto es lo mismo que decir que $\forall(a \oplus b) \odot \forall(a \odot b) = 0$. Luego, del Lema 2.1.28, tenemos que $\forall(a \odot b) = 0$, y ésto contradice la hipótesis del lema. En consecuencia, debe ocurrir que $\forall(a \oplus b) \geq \neg\forall(a \odot b)$. Además tenemos por hipótesis que $\forall(a \odot b) \geq \neg 1$ y del Lema 2.1.28 tenemos que $1 \odot \forall(a \odot b) = \forall(a \oplus b) \odot \forall(a \odot b)$. Luego, del Lema 1.2.8 tenemos que $\forall(a \oplus b) = 1$ y en consecuencia, $a \oplus b = 1$. □

Corolario 2.1.30. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra tal que* $\exists\mathbf{A}$ *es una cadena. Si* $a, b \in A$ *son tales que* $\exists(a \oplus b) < 1$ *entonces* $a \odot b = 0$.

Lema 2.1.31. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra tal que* $\forall\mathbf{A}$ *es totalmente ordenada. Si* $a, r \in A$ *son tales que* $a \neq 1$ *y* $r \neq 1$ *entonces* $a \vee \forall r < 1$.

Demostración. Supongamos por el absurdo que $a \vee \forall r = 1$. Entonces $1 = (a \odot \neg\forall r) \oplus \forall r$, o lo que es equivalente $\neg\forall r \leq a \odot \neg\forall r$. Luego, $\forall\neg\forall r \leq \forall(a \odot \neg\forall r)$ y como $\forall r \leq r < 1$ y $\forall\neg\forall r = \neg\forall r$, tenemos que $0 < \neg\forall r \leq \forall(a \odot \neg\forall r)$. Por el Lema 2.1.29, tenemos que $a \oplus \neg\forall r = 1$, es decir, $\forall r \leq a$. Pero entonces, $1 = \forall r \vee a = a$, lo cual contradice la hipótesis $a \neq 1$. □

Teorema 2.1.32. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra tal que* $\forall\mathbf{A}$ *es totalmente ordenada. Si* $a \in A$, $a \neq 1$, *entonces existe un filtro primo (no necesariamente monádico)* P_a *de* $\mathbf{A}$ *tal que*

1. $a \notin P_a$,
2. $P_a \cap \forall A = \{1\}$ *y*
3. *si* $r < 1$ *entonces* $a \vee \forall r \notin P_a$.

Demostración. Sean $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ y $a \in A$ verificando las condiciones del enunciado. Consideremos la familia de todos los filtros de $\mathbf{A}$ que satisfacen las tres condiciones del teorema. Veamos que el filtro $\{1\}$ pertenece a esta familia. En efecto, trivialmente $\{1\} \cap \forall A = \{1\}$. Además, de $a < 1$, resulta la primer condición. Si $r < 1$, del Lema 2.1.31, obtenemos que $a \vee \forall r < 1$. Luego $\{1\}$ pertenece a la familia de filtros y en consecuencia esta familia es no vacía. Aplicando el Lema de Zorn sabemos que existe un filtro P_a que es maximal con respecto a las propiedades 1, 2 y 3 del teorema.

Veamos que P_a es un filtro primo. Haremos la demostración por el absurdo. Para ello, consideremos $x, y \in A$ y supongamos que $x \to y \notin P_a$ e $y \to x \notin P_a$. Luego, $P_a \subset \mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\})$ y $P_a \subset \mathrm{Fg}(P_a \cup \{y \to x\})$.

Veamos que alguno de estos filtros satisface la condición 3. Supongamos por el absurdo que existen $p, q \in A - \{1\}$ tales que $a \vee \forall q \in \mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\})$ y $a \vee \forall p \in \mathrm{Fg}(P_a \cup \{y \to x\})$. Como $\forall A$ es totalmente ordenada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\forall p \leq \forall q$. Luego, $a \vee \forall p \leq a \vee \forall q$ y por lo tanto $a \vee \forall q \in \mathrm{Fg}(P_a \cup \{y \to x\})$. De aquí resulta que existen $m_1, m_2 \in P_a$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $a \vee \forall q \geq m_1 \odot (x \to y)^{n_1}$ y $a \vee \forall q \geq m_2 \odot (y \to x)^{n_2}$. Obtenemos de esto que $a \vee \forall q \geq (m_1 \odot (x \to y)^{n_1}) \vee (m_2 \odot (y \to x)^{n_2})$. Sean $m = m_1 \odot m_2 \in P_a$ y $n = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces, $a \vee \forall q \geq (m \odot (x \to y)^n) \vee (m \odot (y \to x)^n) = m \odot ((x \to y)^n \vee (y \to x)^n) = m \odot 1 = m \in P_a$. Entonces, $a \vee \forall q \in P_a$, lo cual es una contradicción.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\})$ satisface la condición 3. Si tomamos $r = 0$ entonces $a \vee 0 = a \notin \mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\})$. Además, si $\forall r \in \mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\}) \cap \forall A$ es tal que $\forall r < 1$, entonces de $\forall r \leq a \vee \forall r$ tenemos que $a \vee \forall r \in \mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\})$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, $\mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\}) \cap \forall A = \{1\}$. Luego, $\mathrm{Fg}(P_a \cup \{x \to y\})$ satisface las condiciones del teorema y contiene propiamente a P_a, contradiciendo su maximalidad.

Por lo tanto, para todo $x, y \in A$ se tiene que $x \to y \in P_a$ ó $y \to x \in P_a$. Luego, P_a es un filtro primo. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar que existe una representación de $\mathbf{A}$ en la cual se preserva $\forall\mathbf{A}$ como subálgebra en cada factor. Más precisamente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.33. *(Rutledge, 1959) Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra tal que $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada entonces el MV-reducto de $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de MV-álgebras $\mathbf{B}_i$ totalmente ordenadas, $i \in I$, donde las proyecciones $\pi_i\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}_i$ verifican que $\forall\mathbf{A} \cong \pi_i(\forall\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{B}_i$.*

Demostración. Consideremos la familia de todos los filtros primos del Teorema 2.1.32. Como $\bigcap_{a\in A\setminus\{1\}} P_a = \{1\}$, sabemos que $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de $\{\mathbf{A}/P_a\}_{a\in A\setminus\{1\}}$ y que $\mathbf{A}/P_a$ es una cadena para todo a. Consideremos el epimorfismo canónico $\pi_a\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/P_a$. Como $P_a \cap \forall A = \{1\}$, tenemos que $\pi_a\restriction_{\forall A}$ es inyectivo. Luego, $\pi_a(\forall\mathbf{A}) \cong \forall\mathbf{A}$, para todo $a \in A \setminus \{1\}$. $\square$

La Proposición 2.1.34 indica una caracterización de las MMV-álgebras subdirectamente irreducibles finitas que será necesaria para la determinación del reticulado de subvariedades.

Proposición 2.1.34. *(Di Nola y Grigolia, 2004) Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra* finita *tal que $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada, entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto directo finito de MV-álgebras $\mathbf{A}_i$ finitas, $i \in \{1,\ldots,n\}$, tal que $\mathbf{A}_i \cong \forall\mathbf{A}$, para todo i. Más aún, $\forall\mathbf{A}$ es isomorfa a la subálgebra diagonal del producto.*

Es decir, si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra *finita* subdirectamente irreducible entonces $\mathbf{A} \cong (\forall\mathbf{A})^k$, para algún k entero positivo (ver Ejemplo 2.1.14).

Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra subdirectamente irreducible, y en consecuencia $\forall\mathbf{A}$ es una cadena, entonces la siguiente caracterización de la subálgebra $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ de los elementos booleanos de $\mathbf{A}$ es inmediata.

Lema 2.1.35. *Si $\mathbf{A}$ es un álgebra subdirectamente irreducible entonces la subálgebra de sus elementos booleanos $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ es un álgebra de Boole monádica simple.*

Recordemos que un álgebra de Boole monádica $\mathbf{B}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $\mathbf{B}$ es simple si y sólo si $\forall\colon B \to B$ está definido por $\forall a = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$.

2.2. Generación de $\mathcal{MMV}$ por sus miembros finitos

En esta sección demostramos que la variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por sus miembros finitos. Como consecuencia importante, probamos que la variedad $\mathcal{MMV}$ satisface las identidades

$$\exists(x \wedge \exists y) \approx \exists x \wedge \exists y$$

y

$$\forall(x \vee \forall y) \approx \forall x \vee \forall y.$$

Para cada entero $n \geq 1$, sea $\mathcal{K}_n$ la clase de MMV-álgebras que satisfacen la identidad (δ_n) $x^n \approx x^{n+1}$ (Di Nola y Grigolia (2004)).

Notemos que $\mathcal{K}_1$ es la variedad de las álgebras de Boole monádicas. Claramente, si $n \leq l$ entonces $\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_l$.

Lema 2.2.1. *Toda álgebra subdirectamente irreducible de $\mathcal{K}_n$ es simple.*

Demostración. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_n$ es subdirectamente irreducible entonces $\forall\mathbf{A}$ es una MV-álgebra subdirectamente irreducible totalmente ordenada que satisface (δ_n). Luego, $\forall\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{S}_m$, para algún $1 \leq m \leq n$. En particular, $\forall\mathbf{A}$ es simple. Luego, $\mathbf{A}$ es simple. $\square$

Lema 2.2.2. *(Belluce et. al., 2005) Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra subdirectamente irreducible (simple)* finita *perteneciente a $\mathcal{K}_n$, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m^k$, $1 \leq m \leq n$, para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Es inmediato del Lema 2.2.1 y la Proposición 2.1.34. $\square$

Vamos a ver que la MMV-álgebra libre de la subvariedad $\mathcal{K}_n$ sobre un conjunto G de generadores de cardinal r finito, es finita. Notamos a esta álgebra con $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_n$ y $X \subseteq A$. Notamos con $\mathbf{S}(X)$ a la MMV-subálgebra generada por X en $\mathbf{A}$ y por $\mathbf{S}_{MV}(X)$ a la MV-subálgebra generada por X en $\mathbf{A}$.

La demostración del siguiente lema es inmediata.

Lema 2.2.3. *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ y $G \subseteq A$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{S}_{MV}(G \cup \forall A)$.*

Lema 2.2.4. *Toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_n$ finitamente generada simple es finita.*

Demostración. Sea G un conjunto finito de generadores de $\mathbf{A}$. Como $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_n$ entonces el MV-reducto de $\mathbf{A}$ y la MV-subálgebra $\forall\mathbf{A}$ pertenecen a la subvariedad de MV-álgebras que satisfacen (δ_n). Luego, $\forall\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m$ para algún $1 \leq m \leq n$. Además, la subvariedad de MV-álgebras que satisfacen (δ_n) es localmente finita (ver Cignoli et. al. (2000), sección 8.6) y $G \cup \forall A$ es un conjunto finito. Luego, $\mathbf{S}_{MV}(G \cup \forall A)$ es finita. Por el Lema 2.2.3 tenemos que $\mathbf{A}$ es finita. $\square$

Proposición 2.2.5. *La subvariedad $\mathcal{K}_n$ es localmente finita.*

Demostración. Si $\mathcal{M}$ es el conjunto de todos los filtros monádicos maximales de $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)$ y $M \in \mathcal{M}$, entonces $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)/M$ es simple y tiene un número de generadores menor o igual que r. Por el Lema 2.2.4 sabemos que $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)/M$ es finita. Además, el reducto $\mathcal{MV}$ del álgebra libre $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)/M$ pertenece a la subvariedad de MV-álgebras que satisface (δ_n). Por lo tanto, el cardinal de $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)/M$ es menor o igual que $n^{n^{r+n}}$.

Sabemos además que $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)$ es isomorfa a una subálgebra de $\prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)/M$, entonces para ver que $\mathbf{Free}_{\mathcal{K}_n}(G)$ es finita es suficiente demostrar que existe un número finito de filtros monádicos maximales.

El cardinal del conjunto $\mathcal{M}$ es menor o igual al número de funciones que se pueden definir de G en $\mathbf{S}_t^{t^{t+r}}$, para todo $t \leq n$. En efecto, basta considerar la aplicación suryectiva que asigna a cada $f\colon G \to \mathbf{S}_t^{t^{t+r}}$, el núcleo del homomorfismo extensión de f. De donde se tiene que $\mathcal{M}$ es un conjunto finito. $\square$

De la Proposición 2.2.5 tenemos que el siguiente teorema es inmediato.

Teorema 2.2.6. *La subvariedad $\mathcal{K}_n$ está generada por sus miembros finitos. Más aún,*

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}^k_m : k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n\}).$$

Rutledge (1959) demostró que

$$\mathcal{MMV} = \mathcal{V}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n\right).$$

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.7. *La variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por sus miembros finitos.*

Por lo tanto, la variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por $\{\mathbf{S}^k_n : n, k \in \mathbb{N}\}$.

Lema 2.2.8. *Para todo $a, b \in S^k_n$, se verifica que*

$$\exists_\vee(a \wedge \exists_\vee b) = \exists_\vee a \wedge \exists_\vee b,$$

y

$$\forall_\wedge(a \vee \forall_\wedge b) = \forall_\wedge a \vee \forall_\wedge b.$$

Demostración. Sean $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$ y $b = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k\rangle$ dos elementos de S^k_n. Sea $\exists_\vee b = \langle m, m, \ldots, m\rangle$ donde $m = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_k = \text{máx}\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Luego,

$$a \wedge \exists_\vee b = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle \wedge \langle m, m, \ldots, m\rangle = \langle a_1 \wedge m, a_2 \wedge m, \ldots, a_n \wedge m\rangle.$$

entonces

$$\exists_\vee(a \wedge \exists_\vee b) = \exists_\vee(\langle a_1 \wedge m, a_2 \wedge m, \ldots, a_n \wedge m\rangle).$$

Además,

$$(a_1 \wedge m) \vee (a_2 \wedge m) \vee \ldots (a_k \wedge m) = (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \wedge m.$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\exists_\vee(a \wedge \exists_\vee b) &= \langle (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \wedge m, \ldots, (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \wedge m\rangle = \\ &\langle a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k, \ldots, a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k\rangle \wedge \langle m, m, \ldots, m\rangle = \exists_\vee a \wedge \exists_\vee b.\end{aligned}$$

La otra igualdad se demuestra en forma análoga. □

El siguiente resultado se obtiene en forma inmediata del Corolario 2.2.7 y el Lema 2.2.8.

Proposición 2.2.9. *Las siguientes identidades se satisfacen en toda MMV-álgebra:*

(MMV24) $\exists(a \wedge \exists b) \approx \exists a \wedge \exists b$,

(MMV25) $\forall(a \vee \forall b) \approx \forall a \vee \forall b$.

2.3. Productos directos

En esta sección caracterizamos a las MMV-álgebras directamente indescomponibles por medio del álgebra de Boole monádica de sus elementos complementados. Probamos que una MMV-álgebra es directamente indescomponible si y sólo si $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ es simple.

Recordemos que en toda MV-álgebra $\mathbf{A}$ se tiene que $[b) = \{a \in A : b \leq a\}$ es un filtro de $\mathbf{A}$ si y sólo si $[b) = \mathrm{Fg}(b)$ si y sólo si $b \in B(\mathbf{A})$. En una MMV-álgebra las siguientes condiciones son equivalentes.

Lema 2.3.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra. Son equivalentes:*

(1) $b \in B(\mathbf{A})$ *y* $\forall b = b$*,*

(2) $[b) \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$*,*

(3) $[b) = \mathrm{FMg}(b)$*.*

Demostración. Sea $b \in B(\mathbf{A})$ tal que $\forall b = b$. Sabemos que $[b)$ es un filtro de $\mathbf{A}$. Demostremos que es monádico. En efecto, si $a \in [b)$ entonces $b \leq a$. Luego, $b = \forall b \leq \forall a$. Esto es, $\forall a \in [b)$. En consecuencia $[b) \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$.

Supongamos que $[b) \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$. Entonces, $\mathrm{FMg}(b) \subseteq [b)$. Recíprocamente, sea $a \in [b)$. Entonces $b \leq a$ y $\forall b \leq \forall a$, con lo cual tenemos que $a \in \mathrm{FMg}(b)$.

Por último, supongamos que $[b) = \mathrm{FMg}(b)$. Entonces $b \odot b \in [b)$ y por lo tanto, $b \odot b = b$. Luego, $b \in B(\mathbf{A})$. Además, $\forall b \in \mathrm{FMg}(b) = [b)$. Luego, $\forall b = b$. ☐

Sea $\mathbf{A}$ una MMV-álgebra y sea $b \in B(\mathbf{A}) - \{1\}$. Sean las funciones $\neg_b \colon A \to A$ y $h_b \colon A \to A$ definidas por $\neg_b x := \neg x \vee b$ y $h_b(x) := x \vee b$, respectivamente.

Proposición 2.3.2. *Para todo* $b \in B(\mathbf{A}) - \{1\}$ *tal que* $\forall b = b$*, se tiene que el álgebra* $[\mathbf{b}) = \langle [b); \oplus, \neg_b, \forall, b\rangle$ *es una MMV-álgebra y* h_b *es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *sobre* $[\mathbf{b})$ *tal que* $\mathrm{Nuc}(h_b) = [\neg b)$*.*

Demostración. Vimos en el Lema 2.3.1 que $[b) = \mathrm{FMg}(b)$. En particular, tenemos que $[b)$ es cerrado bajo las restricciones de las operaciones $\odot$, $\oplus$ y $\forall$ sobre $[b)$.

Observemos también que bajo estas hipótesis, $\forall \neg b = \neg b$. En efecto, si $\forall b = b$ entonces $\neg \forall b = \neg b$. Luego, $\forall \neg \forall b = \forall \neg b$. De donde se tiene que $\neg \forall b = \forall \neg b$ y, en consecuencia, $\neg b = \forall \neg b$.

Sabemos que si b es booleano, entonces $\langle [b); \oplus, \neg_b, b\rangle$ es una MV-álgebra. Recordemos que en toda MV-álgebra, si $b \in B(\mathbf{A})$ entonces $b \oplus a = b \vee a$ y $b \odot a = b \wedge a$, para todo $a \in A$. Probemos que $\forall$ satisface las identidades (MMV7)-(MMV12) en la MV-álgebra $[\mathbf{b})$.

Las identidades (MMV7), (MMV8), (MMV10), (MMV11) y (MMV12) son inmediatas.

Demostremos (MMV9). Sea $c \in [b)$. Luego,

$$\forall \neg_b \forall c = \forall(\neg \forall c \vee b) = \forall(\neg \forall c \vee \forall b) = \forall \neg \forall c \vee b = \neg \forall c \vee b = \neg_b \forall c.$$

Hemos probado que $\langle [b); \oplus, \neg_b, \forall, b\rangle$ es una MMV-álgebra.

Notemos que si $a \in A$, de la definición de h_b tenemos que $h_b(\forall a) = \forall h_b(a)$. Además sabemos que h_b es un MV-homomorfismo. Luego, h_b es un MMV-homomorfismo.

El resto de la demostración es inmediata. □

Como consecuencia de la anterior proposición obtenemos la siguiente.

Proposición 2.3.3. *Para toda MMV-álgebra* $\mathbf{A}$ *y* $b \in B(\mathbf{A}) - \{1\}$ *tal que* $\forall b = b$, *tenemos que:*

(a) la MMV-álgebra $[\mathbf{b})$ *es isomorfa a* $\mathbf{A}/[\neg b)$,

(b) $[\mathbf{b})$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $b = 0$,

(c) $B([\mathbf{b})) = [b) \cap B(\mathbf{A})$. *Si además* $[b)$ *es una cadena, entonces* b *es un antiátomo del álgebra de Boole* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.

Lema 2.3.4. *Sea* $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ *una familia no vacía de MMV-álgebras y sea* $\mathbf{P} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$. *Entonces existe un conjunto* $\{b_i : i \in I\} \subseteq B(\mathbf{P}) \cap \forall(\mathbf{P})$ *que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\bigwedge_{i\in I} b_i = 0$,

(b) si $i \neq j$ *entonces* $b_i \vee b_j = 1$, *y,*

(c) cada $\mathbf{A}_i$ *es isomorfa a* $[\mathbf{b}_i)$.

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $b_i\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ definido por

$$b_i(j) = \begin{cases} 1_{A_j} & \text{si } i = j \\ 0_{A_j} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Entonces $b_i \in B(\mathbf{P})$ y $\forall b_i = b_i$. Además, se satisfacen las dos primeras condiciones. Sea $\pi_i\colon \mathbf{P} \to \mathbf{A}_i$ la proyección canónica, y $h_{b_i}\colon \mathbf{P} \to [\mathbf{b}_i)$ definida como en la Proposición 2.3.2. Luego,

$$\mathrm{Nuc}(h_{b_i}) = [\neg b_i) = \{f \in P : f(i) = 1\} = \mathrm{Nuc}(\pi_i).$$

Por lo tanto $[\mathbf{b}_i)$ es isomorfa a $\mathbf{A}_i$, para cada $i \in I$. □

Lema 2.3.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra. Si existen* $b_1, \ldots, b_k$, *con* $k \geq 2$, *elementos booleanos de* $\mathbf{A}$ *tales que*

(a) $\forall b_i = b_i$, *para todo* i,

(b) si $i \neq j$ *entonces* $b_i \vee b_j = 1$, *y,*

(c) $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k = 0$,

entonces $\mathbf{A}$ *es isomorfa a* $[\mathbf{b}_1) \times \cdots \times [\mathbf{b}_k)$.

Demostración. Consideremos la aplicación $h\colon \mathbf{A} \to [\mathbf{b}_1) \times \cdots \times [\mathbf{b}_k)$ definida por $h(a) = (a \vee b_1, \ldots, a \vee b_k)$. De (c) tenemos que $\bigcap_{i=1}^{k}[\neg b_i) = \{1\}$. Luego, h es un monomorfismo. Sea $(a_1, \ldots, a_k) \in [b_1) \times \cdots \times [b_k)$, y consideremos el elemento $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \in A$. Luego, de (b), tenemos que $h(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) = (a_1, \ldots, a_k)$. Por lo tanto, h es epiyectiva. $\square$

Como consecuencia de los lemas anteriores, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.6. *Una MMV-álgebra* $\mathbf{A}$ *es directamente indescomponible si y sólo si el álgebra de Boole monádica* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ *es simple.*

Corolario 2.3.7. *Si* $\mathbf{A}$ *es una MMV-álgebra y* $b \in B(\mathbf{A})$ *es un antiátomo tal que* $\forall b = b$*, entonces la MMV-álgebra* $[\mathbf{b})$ *es directamente indescomponible.*

2.4. $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$ genera la variedad $\mathcal{MMV}$

En esta sección probamos que la variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por la MV-álgebra funcional monádica $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$. Como consecuencia, demostramos algunas propiedades que serán necesarias posteriormente.

Teorema 2.4.1. *La variedad* $\mathcal{MMV}$ *está generada por el álgebra* $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sean n y k números enteros positivos. Consideremos la MMV-álgebra $\mathbf{S}_n^k$ y la aplicación $h\colon \mathbf{S}_n^k \to [\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$ definida por $h(\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle) = b \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ donde, para cada $i \in \mathbb{N}$, $b(i) = a_j$ si $i \equiv j \pmod k$. No es difícil demostrar que h es un monomorfismo de MMV-álgebras. Luego, para todo n y todo k, $\mathcal{V}(\mathbf{S}_n^k) \subseteq \mathcal{V}\left([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}\right)$. Del Corolario 2.2.7 tenemos que $\mathcal{MMV} = \mathcal{V}\left(\{\mathbf{S}_n^k :\ n,k \in \mathbb{N}\}\right) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}) \subseteq \mathcal{MMV}$. $\square$

Terminaremos la sección demostrando identidades que serán necesarias en lo que sigue.

Lema 2.4.2. *Las siguientes identidades se satisfacen en toda MMV-álgebra, para todo* n *entero positivo.*

(MMV26) $\forall(nx) \approx n(\forall x)$,

(MMV27) $\forall(x^n) \approx (\forall x)^n$,

(MMV28) $\exists(x^n) \approx (\exists x)^n$,

(MMV29) $\exists(nx) \approx n(\exists x)$.

Demostración. Vamos a probar que estas identidades se satisfacen en el álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$, y por el Teorema 2.4.1 tendremos que se satisfacen en $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$.

Consideremos $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ definida por $\varphi(x) = nx$, esto es,

$$\varphi(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 1 & \text{si } x \in (1/n, 1] \end{cases}.$$

Esta función es creciente y continua. Luego, por el Lema 2.1.9, sabemos que $\forall(nf) = n(\forall f)$, para todo $f \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$.

Sea ahora $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ definida por $\varphi(x) = x^n$, es decir,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{n-1}{n}] \\ nx - (n-1) & \text{si } x \in (\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases} .$$

Esta función es creciente y continua. Luego, por el Lema 2.1.9, sabemos que $\forall(f^n) = (\forall f)^n$, para todo $f \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$.

Las otras dos identidades se demuestran en forma inmediata de las dos primeras, reemplazando $\forall$ por $\neg\exists\neg$. □

2.5. El radical monádico

Definición 2.5.1. Llamamos *radical monádico* de una MMV-álgebra $\mathbf{A}$ a la intersección de todos los filtros monádicos maximales de $\mathbf{A}$. Notamos al radical monádico de $\mathbf{A}$ con $\operatorname{RadMon}\mathbf{A}$.

Del Teorema 2.1.24 es fácil ver que $\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A} = \operatorname{RadMon}\mathbf{A} \cap \forall A$. En particular, $\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A} = \{1\}$ si y sólo si $\operatorname{RadMon}\mathbf{A} = \{1\}$.

Recordemos el siguiente resultado de MV-álgebras.

Lema 2.5.2. *En toda MV-álgebra $\mathbf{A}$, $x \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$ si y sólo si para todo entero positivo n se verifica que $2x^n = 1$.*

Corolario 2.5.3. *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ entonces $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es un filtro monádico.*

Demostración. Sabemos que $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es un filtro. Sea $x \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$. Por el Lema 2.5.2 tenemos que $2x^n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, de (MMV11) y de (MMV27), tenemos que

$$1 = \forall(2x^n) = 2\forall(x^n) = 2(\forall x)^n.$$

Nuevamente del Lema 2.5.2, tenemos que $\forall x \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$. □

Teorema 2.5.4. *En toda MMV-álgebra $\mathbf{A}$, se verifica que $\operatorname{RadMon}\mathbf{A} = \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.*

Demostración. Veamos que $\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A} = \operatorname{Rad}\mathbf{A} \cap \forall\mathbf{A}$. En efecto, $\forall x \in \operatorname{Rad}\mathbf{A} \cap \forall\mathbf{A}$ si y sólo si $2(\forall x)^n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, si y sólo si $\forall x \in \operatorname{Rad}\forall\mathbf{A}$. Pero también sabemos que $\operatorname{RadMon}\mathbf{A} \cap \forall\mathbf{A} = \operatorname{Rad}\forall\mathbf{A}$. Luego, $\operatorname{Rad}\mathbf{A} \cap \forall\mathbf{A} = \operatorname{RadMon}\mathbf{A} \cap \forall\mathbf{A}$. Del Corolario 2.5.3 sabemos que $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ es un filtro monádico y del isomorfismo establecido en el Teorema 2.1.24 debe ser $\operatorname{Rad}\mathbf{A} = \operatorname{RadMon}\mathbf{A}$. □

2.6. Subvariedades generadas por las álgebras $[0,1]^k$

En esta sección introducimos un conjunto de subvariedades de la variedad de las MMV-álgebras. Estas subvariedades son las subvariedades generadas por las álgebras

$$[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k = \langle [0,1]^k; \oplus, \neg, \forall_\wedge, 0\rangle,$$

donde k es un entero positivo. Demostramos que dichas subvariedades forman una cadena cuya unión genera la variedad $\mathcal{MMV}$ e indicamos además una base ecuacional para cada una de ellas.

Notemos que las operaciones $\oplus$, $\neg$ y $\forall_\wedge$ son funciones continuas sobre $[0,1]^k$ con la topología producto. Esta topología es la topología de $[0,1]^k$ inducida por la métrica

$$d(x,y) = \max_{1\leq j\leq k}\{|x_j - y_j|\}.$$

Luego, para cada MMV-término $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, la función término $\tau^{[0,1]^k}\colon \left([0,1]^k\right)^s \to [0,1]^k$ es continua.

Lema 2.6.1. *Sea k un número entero positivo fijo. Si $1 \leq n_0 < n_1 < \ldots$ es una sucesión infinita de números enteros, entonces $\mathcal{V}(\{\mathbf{S}^k_{n_i} : i = 0, 1, \ldots\}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$.*

Demostración. Sea $a = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ un elemento de $[0,1]^k$ y $\epsilon > 0$ un número real. Consideremos un entorno abierto $U \subseteq [0,1]^k$ de a tal que $d(x,a) < \epsilon$, para todo $x \in U$. Sea n_e un entero de la sucesión $\{n_i\}$ suficientemente grande tal que $\dfrac{1}{n_e} < \epsilon$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, existe un entero b_j tal que $0 \leq b_j \leq n_e$ y $\left|a_j - \dfrac{b_j}{n_e}\right| < \dfrac{1}{n_e}$. Luego, $b_e = \langle \dfrac{b_1}{n_e}, \ldots, \dfrac{b_k}{n_e}\rangle \in S^k_{n_e}$ y $d(a, b_e) = \max\limits_{1\leq j\leq k}\left\{\left|a_j - \dfrac{b_j}{n_e}\right|\right\} < \dfrac{1}{n_e}$. En consecuencia, el conjunto $\{S^k_{n_i} : i = 0, 1, \ldots\}$ es denso en $[0,1]^k$.

Por la continuidad de los términos, tenemos que una ecuación se satisface en $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$ si y sólo si se satisface en $\{\mathbf{S}^k_{n_i} : i = 0, 1, \ldots\}$. Luego, $\mathcal{V}(\{\mathbf{S}^k_{n_i} : i = 0, 1, \ldots\}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. $\square$

Recordemos el siguiente resultado de MV-álgebras.

Proposición 2.6.2. *(Cignoli et. al., 2000, Prop. 3.5.3) Sea $\mathbf{A}$ una subálgebra de la MV-álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Si el ínfimo del conjunto $\{x \in A : x > 0\}$ es igual a 0, entonces A es una subcadena densa de $[0,1]$.*

Teniendo en cuenta este resultado y la continuidad de los términos en $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, obtenemos lo siguiente.

Lema 2.6.3. *Si $\mathbf{A}$ es una subálgebra infinita de la MV-álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, entonces*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}\left(\mathbf{A}^k\right) = \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}\left([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k\right).$$

En lo que sigue vamos a caracterizar con identidades a las subvariedades generadas por $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$.

Lema 2.6.4. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ *un álgebra subdirectamente irreducible. Entonces,* $\mathbf{A}$ *es una cadena si y sólo si* $\mathbf{A}$ *satisface la identidad* (α_1) $\forall x \approx x$.

Demostración. Del Lema 2.1.21 sabemos que si $\mathbf{A}$ es una cadena entonces $\forall\mathbf{A} = \mathbf{A}$, de donde se deduce que $a = \forall a$, para todo $a \in A$. Recíprocamente, sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_1). Sean a_1, a_2 elementos de A. Entonces $a_1 = \forall a_1$ y $a_2 = \forall a_2$. Como $\forall\mathbf{A}$ es una cadena, tenemos que $\forall a_1 \leq \forall a_2$ o $\forall a_2 \leq \forall a_1$. Entonces $a_1 \leq a_2$ o $a_2 \leq a_1$. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es una cadena. $\square$

Para cada entero $k \geq 2$, consideremos la identidad

$$(\alpha_k)\ \ \forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1}\bigwedge X_i^-\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1}\forall x_j \approx 1,$$

donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ y $X_i^- = X - \{x_i\}$.

Observación 2.6.5. Si $k = 1$ entonces la identidad anterior es igual a

$$\forall\,(x_1 \vee x_2) \to (\forall x_1 \vee \forall x_2) \approx 1.$$

Recordemos que en toda MMV-álgebra, se verifica que $\forall x_1 \vee \forall x_2 \leq \forall\,(x_1 \vee x_2)$. Luego, si (α_1) se satisface en un álgebra $\mathbf{A}$, entonces $\forall\,(a_1 \vee a_2) = \forall a_1 \vee \forall a_2$, para todo $a_1, a_2 \in A$. No es difícil probar que la identidad $\forall\,(x_1 \vee x_2) \approx \forall x_1 \vee \forall x_2$ es equivalente a (α_1) $x \approx \forall x$, aunque la demostración es extensa. De todas formas, utilizaremos en las demostraciones la identidad (α_1).

Notemos que la ecuación (α_k) puede ser escrita de la siguiente manera

$$(\alpha_k)\ \ \left(\bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots,k+1\},\ i\neq j}\forall(x_i \vee x_j)\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1}\forall x_j \approx 1,$$

y también

$$(\alpha_k)\ \ \bigvee_{i,j\in\{1,\ldots,k+1\},\ i\neq j}\left(\forall(x_i \vee x_j) \to \bigvee_{j=1}^{k+1}\forall x_j\right) \approx 1.$$

Poder expresar esta identidad en términos de supremos e implicaciones será importante en el capítulo 5, donde estudiaremos los $\{\to, \forall, 1\}$-subreductos de las MMV-álgebras monádicas. En este capítulo, usaremos una forma de la identidad o la otra de acuerdo resulte más conveniente en cada caso.

Una *representación funcional* de una MMV-álgebra monádica $\mathbf{A}$ es un álgebra funcional monádica $\mathbf{A}'$ (ver Definición 2.1.7) tal que $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{A}'$. El siguiente resultado es uno de los teoremas principales de la tesis de Rutledge (1959).

Teorema 2.6.6. *(Rutledge, 1959) Sea $\langle A;\forall\rangle$ una MMV-álgebra tal que $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada. Entonces $\langle A;\forall\rangle$ es isomorfa a una MMV-álgebra funcional, cuyos elementos son funciones de un conjunto I a una MV-álgebra $\mathbf{V}$ totalmente ordenada.*

El conjunto I del teorema anterior es el conjunto de filtros primos $\{P_a : a \in A \setminus \{1\}\}$ del Teorema 2.1.32. Referimos al lector a Rutledge (1959) si desea conocer los detalles de la contrucción de la MV-cadena $\mathbf{V}$.

Vamos a considerar el conjunto $\bar{I}$ de los filtros primos minimales de $\mathbf{A}$. Como para todo $P_i \in \bar{I}$ se tiene que $P_i \subseteq P_a$ para algún $P_a \in I$, entonces es claro que $P_i \cap \forall A = \{1\}$, para todo $P_i \in \bar{I}$. Análogamente a la demostración de la Proposición 2.1.33, es posible ver que el MV-reducto de $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de MV-álgebras $\mathbf{A}/P_i$ totalmente ordenadas, donde las proyecciones $\pi_i\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/P_i$ verifican que $\forall\mathbf{A} \cong \pi_i(\forall\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}/P_i$. Decimos que esta representación de $\mathbf{A}$ es una representación de $\mathbf{A}$ *minimal* pues la intersección de todos los filtros excepto uno de ellos es siempre distinta de $\{1\}$, y la intersección de todos es $\{1\}$. Luego, la MV-álgebra $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto de $\mathbf{A}/P_i$, $P_i \in \bar{I}$. Probaremos, en la Proposición 2.6.7, que si $\mathbf{A}$ satisface (α_k), entonces posee una representación funcional monádica minimal con a lo sumo k factores.

Proposición 2.6.7. *Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra tal que $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada y tal que satisface (α_k), entonces el conjunto $\bar{I}$ no posee más de k elementos.*

Demostración. Supongamos que el cardinal de $\bar{I}$ es mayor o igual que $k+1$. Consideremos $k+1$ elementos y_j, $j \in \{1,\ldots,k+1\}$, tales que para todo j se tiene que $y_j \in \bigcap_{i\neq j} P_i$, $y_j \notin P_j$ e $y_j < 1$. Del Teorema 2.6.6 sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra funcional monádica de $\mathbf{V}^{\bar{I}}$. Como $y_j \in P_i$ para todo $i \in \bar{I} \setminus \{j\}$, la representación del elemento y_j en $V^{\bar{I}}$ tiene todas sus componentes iguales a 1, excepto en el lugar j, donde es un elemento $v_j < 1$. Esto es, $y_j(i) = \begin{cases} 1_V & \text{si } i \neq j \\ v_j & \text{si } i = j \end{cases}$, donde $v_j \in V \setminus \{1\}$. Luego, $\forall_\wedge(y_j) = \langle v_j\rangle_{i\in\bar{I}} < \langle 1\rangle_{i\in\bar{I}}$. Además, si $i \neq j$, entonces $y_j \vee y_i = \langle 1\rangle_{i\in\bar{I}}$. Luego,

$$\left(\bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots k+1\},\, i\neq j} \forall_\wedge(y_i \vee y_j)\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1} \forall_\wedge y_j = \langle 1\rangle_{i\in\bar{I}} \to \langle\bigvee_{j=1}^{k+1} v_j\rangle_{i\in\bar{I}} < \langle 1\rangle_{i\in\bar{I}},$$

contradiciendo (α_k). □

Proposición 2.6.8. *Si $\mathbf{A}$ es una MMV-subálgebra de una MV-álgebra funcional monádica $\langle V^n;\forall\rangle$ tal que $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada, siendo $\mathbf{V}$ una MV-cadena y n un número entero positivo, entonces $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^n$.*

Demostración. Sea $\pi_i \restriction_A\colon A \to V$ la proyección sobre la i-ésima componente, donde $i \in \{1,\ldots,n\}$. Demostraremos que para todo i, $\pi_i \restriction_A (\forall A) = \pi_i \restriction_A (A)$. Claramente, $\pi_i \restriction_A (\forall A) \subseteq \pi_i \restriction_A (A)$. Debemos probar que para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y para todo $b \in A$, existe $c \in \forall A$ tal que $\pi_i(b) = \pi_i(c)$. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Si $n = 1$ entonces $A = \forall A$ y el resultado es trivial.

Supongamos que vale para $n = k$ (hipótesis inductiva), y probemos que vale para $n = k+1$. Sea $A \subseteq V^{k+1}$, y sea $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\rangle \in A$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le a_{k+1}$, pues $a_i \in V$ y $\mathbf{V}$ es una MV-cadena. Si $i = 1$ e $i = k+1$, tenemos que $\pi_1(a) = a_1 = \pi_1(\forall a)$ y $\pi_{k+1}(a) = a_{k+1} = \pi_{k+1}(\exists a)$. Calculemos $(a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)$. Tenemos que

$$a \to \forall a = \langle 1, a_2 \to a_1, \ldots, a_{k+1} \to a_1 \rangle$$

y

$$\exists a \to a = \langle a_{k+1} \to a_1, a_{k+1} \to a_2, \ldots, a_{k+1} \to a_k, 1 \rangle.$$

Luego,

$$(a \to \forall a) \vee (\exists a \to a) = \langle 1, (a_2 \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_2), \ldots, (a_k \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_k), 1 \rangle.$$

Sea $\mathbf{B}$ la subálgebra de $\mathbf{V}^{k+1}$ cuyo universo es el conjunto $B = \{a \in V^{k+1} : a_1 = a_{k+1}\}$. Luego, $\mathbf{B} \cong \mathbf{V}^k$ y $(a \to \forall a) \vee (\exists a \to a) \in B$. Más precisamente, $(a \to \forall a) \vee (\exists a \to a) \in A \cap B$.

Consideremos i tal que $1 < i < k+1$. Tenemos que $\pi_i((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) = (a_i \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_i)$. Como V es una cadena, pueden ocurrir dos casos.

Supongamos que $a_i \to a_1 \ge a_{k+1} \to a_i$. Entonces $\pi_i((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) = a_i \to a_1$. Luego, $((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) \to \forall a = \langle e_j \rangle_{1 \le j \le k+1}$ donde

$$\langle e_j \rangle_{1 \le j \le k+1} = \begin{cases} a_1 & \text{si } j = 1 \text{ o } j = k+1 \\ ((a_j \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_j)) \to a_1 & \text{si } j \notin \{1, i, k+1\} \\ (a_i \to a_1) \to a_1 & \text{si } j = i \end{cases} .$$

Entonces, la componente i-ésima de $((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) \to \forall a$ es igual a $a_i \vee a_1 = a_i$. Además, $((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) \to \forall a \in B \cap A$ y por hipótesis inductiva sobre $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cong \mathbf{A} \cap \mathbf{V}^k$ existe $c \in \forall(A \cap B) \subseteq \forall A$ tal que $\pi_i(c) = a_i$.

Supongamos que $a_i \to a_1 \le a_{k+1} \to a_i$. Entonces $\pi_i((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) = a_{k+1} \to a_i$. Luego, $((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) \odot \exists a = \langle e_j \rangle_{1 \le j \le k+1}$ donde

$$\langle e_j \rangle_{1 \le j \le k+1} = \begin{cases} a_{k+1} & \text{si } j = 1 \text{ o } j = k+1 \\ ((a_j \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_j)) \odot a_{k+1} & \text{si } j \notin \{1, i, k+1\} \\ (a_{k+1} \to a_i) \odot a_{k+1} & \text{si } j = i \end{cases} .$$

Luego, $\pi_i(((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) \odot \exists a) = a_{k+1} \wedge a_i = a_i$. Entonces, $((a \to \forall a) \vee (\exists a \to a)) \odot \exists a \in A \cap B$, y por hipótesis inductiva tenemos que existe $d \in \forall(A \cap B) \subseteq \forall A$ tal que $\pi_i(d) = a_i$. □

La siguiente proposición es inmediata de las dos proposiciones anteriores.

Proposición 2.6.9. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra subdirectamente irreducible que satisface* (α_k), *entonces* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $(\forall \mathbf{A})^k$.

Demostración. Consideremos la representación funcional minimal de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{V}^{\bar{I}}$ donde sabemos de la Proposición 2.6.7 que $|\bar{I}| \le k$. Entonces de la Proposición 2.6.8, tenemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $(\forall \mathbf{A})^k$. □

Como corolario de la Proposición 2.6.9 tenemos el siguiente resultado que será importante para la determinación de las subvariedades de la variedad de las MMV-álgebras que satisfacen la identidad (α_k).

Corolario 2.6.10. *Si* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra subdirectamente irreducible que satisface* (α_k) *entonces el álgebra de los elementos complementados* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ *es isomorfa a una subálgebra del álgebra de Boole monádica simple* $\mathbf{2}^k$*.*

Proposición 2.6.11. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos MV-álgebras tales que* $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}(\mathbf{B})$ *entonces, para todo entero positivo* k*, se tiene que* $\mathbf{A}^k \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}^k)$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}(\mathbf{B}) = \mathrm{H\,S\,P}(\mathbf{B})$. Luego, existe $\mathbf{W} \in \mathrm{S\,P}(\mathbf{B})$ tal que $\mathbf{A}$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{W}$. Sea

$$h\colon \mathbf{W} \to \mathbf{A}$$

el epimorfismo de MV-álgebras. Este epimorfismo induce un MV-epimorfismo

$$\bar{h}\colon \mathbf{W}^k \to \mathbf{A}^k$$

definido por $\bar{h}(\langle w_1, \ldots, w_k\rangle) = \langle h(w_1), \ldots, h(w_k)\rangle$. Sabemos de la Proposición 2.1.13 que $\langle W^k; \exists_\vee\rangle$ y $\langle \mathbf{A}^k; \exists_\vee\rangle$ son MMV-álgebras donde $\exists_\vee$ está definido como la k-upla constante que en cada componente es el supremo de las componentes. Veamos que $\bar{h}$ es un homomorfismo de MMV-álgebras. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\bar{h}(\exists_\vee\langle w_1, \ldots, w_k\rangle)) = \bar{h}\langle w_1 \vee \cdots \vee w_k, \ldots, w_1 \vee \cdots \vee w_k\rangle)\\
&= \langle h(w_1) \vee \cdots \vee h(w_k), \ldots, h(w_1) \vee \cdots \vee h(w_k)\rangle\\
&= \exists_\vee\langle h(w_1), \ldots, h(w_k)\rangle = \exists_\vee \bar{h}\langle w_1, \ldots, w_k\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathbf{W}$ es una subálgebra de un producto directo de $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{W} \hookrightarrow \textstyle\prod_{i\in I} \mathbf{B}.$$

En forma análoga a la demostración recién realizada, podemos ver que $\langle W^k; \exists_\vee\rangle$ es una MMV-subálgebra de $\left(\prod_{i\in I}\mathbf{B}\right)^k$,

$$\mathbf{W}^k \hookrightarrow \left(\textstyle\prod_{i\in I}\mathbf{B}\right)^k.$$

Veamos ahora que $\left(\prod_{i\in I}\mathbf{B}\right)^k$ es isomorfa a la MMV-álgebra $\prod_{i\in I}\mathbf{B}^k$. Sea

$$\varphi\colon \left(\prod_{i\in I}\mathbf{B}\right)^k \to \prod_{i\in I}\mathbf{B}^k$$

definida de la siguiente manera $\varphi\langle (a_i^1)_{i\in I}, \ldots, (a_i^k)_{i\in I}\rangle = (\langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle)_{i\in I}$. Como $\oplus$, $\neg$ y 0 se definen componente a componente, es inmediato que φ respeta estas operaciones. Veamos que φ respeta los cuantificadores. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\varphi\exists_\vee\langle (a_i^1)_{i\in I}, \ldots, (a_i^k)_{i\in I}\rangle = \varphi\langle (a_i^1)_{i\in I} \vee \cdots \vee (a_i^k)_{i\in I}, \ldots, (a_i^1)_{i\in I} \vee \cdots \vee (a_i^k)_{i\in I}\rangle\\
&= \varphi\langle \left(a_i^1 \vee \cdots \vee a_i^k\right)_{i\in I}, \ldots, \left(a_i^1 \vee \cdots \vee a_i^k\right)_{i\in I}\rangle = \left(\langle a_i^1 \vee \cdots \vee a_i^k, \ldots, a_i^1 \vee \cdots \vee a_i^k\rangle\right)_{i\in I}\\
&= \left(\exists_\vee\langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle\right)_{i\in I} = \exists_\vee\left(\langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle_{i\in I}\right) = \exists_\vee\varphi\langle (a_i^1)_{i\in I}, \ldots, (a_i^k)_{i\in I}\rangle.
\end{aligned}$$

Es claro que φ es inyectiva y sobreyectiva. Luego, φ es un MMV-isomorfismo.

Hemos probado que $\mathbf{A}^k \in \mathrm{H\,S\,P}(\mathbf{B}^k)$. Y en consecuencia, $\mathbf{A}^k \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}^k)$. $\square$

En el siguiente teorema se demuestra que (α_k) es la identidad que caracteriza a la subvariedad $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, dentro de la variedad $\mathcal{MMV}$.

Teorema 2.6.12. *La subvariedad de $\mathcal{MMV}$ generada por el álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ está caracterizada por la identidad*

$$(\alpha_1)\ \ \forall x \approx x,$$

y la subvariedad $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, $k \geq 2$, está caracterizada por la identidad

$$(\alpha_k)\ \ \forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge X_i^-\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1} \forall x_j \approx 1,$$

donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ y $X_i^- = X - \{x_i\}$.

Demostración. Consideremos $k = 1$. Claramente, $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ verifica (α_1). Por otro lado, si $\mathbf{A}$ es un álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_1), del Lema 2.6.4 tenemos que $\mathbf{A}$ es una cadena. Luego, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$.

Sea $k \geq 2$ y veamos que (α_k) se satisface en $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$. Observemos en primer lugar que

$$\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge X_i^-\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1} \forall x_j = \bigvee_{j=1}^{k+1}\left(\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge X_i^-\right) \to \forall x_j\right).$$

Vamos a probar que existe $j \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ tal que

$$\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge X_i^-\right) \to \forall x_j = 1,$$

entonces

$$\bigvee_{j=1}^{k+1}\left(\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge X_i^-\right) \to \forall x_j\right) = 1.$$

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \in [0,1]^k$. Llamemos $\mathbf{a}$ al conjunto $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$, y para cada $j \in \{1, \ldots, k+1\}$, sea $\mathbf{a}_j^- = \mathbf{a} - \{a_j\}$. Consideremos $\bigwedge \mathbf{a}$, esto es, el ínfimo de todos los elementos de $\mathbf{a}$. Como $\mathbf{a}$ posee $k+1$ elementos, tenemos que existe al menos un j tal que $\bigwedge \mathbf{a} = \bigwedge \mathbf{a}_j^-$. Entonces, $\bigwedge \mathbf{a}_j^- \leq a_j$. Además, si $i \neq j$ entonces $\bigwedge \mathbf{a}_i^- \leq a_j$. Luego, $\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge \mathbf{a}_i^- \leq a_j$. Así, $\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge \mathbf{a}_i^-\right) \leq \forall a_j$, de donde obtenemos que $\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge \mathbf{a}_i^-\right) \to \forall a_j = 1$. Por lo tanto, (α_k) se satisface.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible que satisface la ecuación (α_k). De la Proposición 2.6.9, sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^k$. Además, sabemos que la MV-álgebra $\forall\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$. Luego, de la Proposición 2.6.11, tenemos que $(\forall\mathbf{A})^k \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Luego, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. $\square$

Corolario 2.6.13. *$\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^s)$ si y sólo si $t \leq s$.*

Demostración. Como en la demostración del Teorema 2.6.12, podemos ver que si $t \leq s$ entonces $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^t$ satisface (α_s). Luego, si $t \leq s$ entonces $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^s)$. Veamos que si $t > s$ entonces $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^t$ no satisface (α_s). Para ello consideremos la subálgebra $\mathbf{B}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t)$ de los elementos booleanos de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^t$. Como $t > s$ podemos considerar el conjunto $\{x_1,\ldots,x_{s+1}\}$ cuyos elementos son $s+1$ antiátomos de $\mathbf{B}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t)$. Entonces $\forall x_j = 0$, para todo $j \in \{1,\ldots,s+1\}$. Por otro lado, si $i \neq j$ resulta que $x_i \vee x_j = 1$. Luego,

$$\left(\bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots,s+1\},\, i\neq j} \forall(x_i \vee x_j)\right) \to \bigvee_{j=1}^{s+1} \forall x_j = \left(\bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots,s+1\},\, i\neq j} 1\right) \to \bigvee_{j=1}^{s+1} 0 = 1 \to 0 = 0.$$

Por lo tanto, $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^t$ no satisface (α_s). ☐

El siguiente lema es consecuencia inmediata del Lema 2.6.1 y el Corolario 2.2.7.

Lema 2.6.14. *Si $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$ es una sucesión infinita de números naturales, entonces $\mathcal{V}\left(\left\{[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_i} : i = 1,2,\ldots\right\}\right) = \mathcal{MMV}$.*

Luego, en el reticulado de subvariedades de $\mathcal{MMV}$ tenemos una ω-cadena

$$\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]) \subset \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^2) \subset \cdots \subset \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k) \subset \cdots \subset \mathcal{MMV}.$$

Definición 2.6.15. Diremos que un álgebra es de *ancho 1*, si satisface la ecuación (α_1). Diremos que un álgebra es de *ancho finito* k, $k \geq 2$, si satisface la ecuación (α_k) y no satisface la ecuación (α_{k-1}). Si un álgebra no satisface (α_k) para ningún k, decimos que el álgebra es de *ancho infinito*. Notamos con $\operatorname{width}\mathbf{A} = k$ o $\operatorname{width}\mathbf{A} = \omega$, según sea $\mathbf{A}$ de ancho k o de ancho infinito, respectivamente.

Concluimos la sección con la demostración de un lema que será utilizado posteriormente.

Lema 2.6.16. *Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra subdirectamente irreducible tal que $\mathbf{A} = (\forall\mathbf{A})^k$, siendo k un entero positivo, y $\operatorname{rank}\forall\mathbf{A} = \omega$, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$.*

Demostración. Como en la demostración del Teorema 2.6.12, podemos ver que $\mathbf{A}$ satisface (α_k). Luego, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Por otro lado, sabemos que $\forall\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A}$ es una MV-álgebra simple. Luego, $\forall\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A}$ es una subálgebra de la MV-álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Además, es infinita pues $\operatorname{ord}(\forall\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A}) = \omega$. Del Lema 2.6.3 tenemos que

$$\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k) = \mathcal{V}\left((\forall\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\forall\mathbf{A})^k\right) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A}),$$

y por lo tanto $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. ☐

2.7. Subvariedades de ancho k

En esta sección describimos el fragmento del reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{MMV}$ que se encuentra contenido en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, para cada k entero positivo. Comenzamos estudiando en la sección §2.7.1 las subvariedades generadas por álgebras simples de ancho k. En la sección §2.7.2 tratamos con las subvariedades de álgebras de rango acotado y ancho k. En la §2.7.3 damos una axiomatización completa para todas las subvariedades de MMV-álgebras de ancho k.

2.7.1. Subvariedades generadas por álgebras simples

En esta sección estudiamos todas las subvariedades de MMV-álgebras generadas por álgebras simples de ancho k, clarificamos las propiedades de inclusión entre las mismas y damos una base ecuacional para cada una de ellas.

En lo que sigue k, s, n y m son números enteros positivos.

En la §2.2 definimos la variedad $\mathcal{K}_n$ como la clase de MMV-álgebras que satisfacen la identidad

$$(\delta_n) \;\; x^n \approx x^{n+1}.$$

Si $n \leq m$ entonces $\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_m$. Además, el álgebra $\mathbf{S}_n$ satisface la ecuación (δ_n) y no satisface la ecuación (δ_{n+1}). Luego, estas subvariedades forman una cadena estrictamente creciente

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n \subset \ldots .$$

Consideremos las siguientes subvariedades de $\mathcal{K}_n$. Sea $\mathcal{K}_n^k$ la subvariedad generada por $\{\mathbf{S}_1^k, \mathbf{S}_2^k, \ldots, \mathbf{S}_n^k\}$, esto es,

$$\mathcal{K}_n^k = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^k, \mathbf{S}_2^k, \ldots, \mathbf{S}_n^k\}).$$

Notemos que la variedad $\mathcal{K}_1$ es la variedad de las álgebras de Boole monádicas y es bien conocido el hecho que el reticulado de subvariedades de $\mathcal{K}_1$ es una cadena $\omega + 1$

$$\mathcal{K}_1^1 \subset \mathcal{K}_1^2 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_1^k \subset \cdots \subset \mathcal{K}_1.$$

Más generalmente, es inmediato que

$$\mathcal{K}_n^1 \subset \mathcal{K}_n^2 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n^k \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n,$$

y $\mathcal{K}_n^k \subseteq \mathcal{K}_m^s$ si y sólo si $n \leq m$ y $k \leq s$ (ver también Belluce et. al. (2005)).

Lema 2.7.1. *Una MMV-álgebra* $\mathbf{A}$ *pertenece a* $\mathcal{K}_n^k$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *satisface* (α_k) *y* (δ_n).

Demostración. Sabemos que si $m \leq n$ entonces $\mathbf{S}_m$ satisface (δ_n). Luego, $\mathbf{S}_m^k$ satisface (δ_n). Además, $\mathbf{S}_m^k$ es una subálgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$. En consecuencia, del Teorema 2.6.12, tenemos que (α_k) se satisface en $\mathbf{S}_m^k$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_n^k = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^k, \mathbf{S}_2^k, \ldots, \mathbf{S}_n^k\})$, entonces $\mathbf{A}$ satisface (α_k) y (δ_n).

Recíprocamente, sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_k) y (δ_n). Entonces $\forall\mathbf{A}$ es una MV-cadena que satisface (δ_n). Luego, $\forall\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{S}_m$ para algún $m \leq n$. De la Proposición 2.6.9, tenemos que $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\mathbf{S}_m^k$. Luego, $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_n^k = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^k, \mathbf{S}_2^k, \ldots, \mathbf{S}_n^k\})$. □

Veremos para finalizar esta sección subvariedades que están generadas por exactamente un álgebra simple.

Lema 2.7.2. *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ *es subdirectamente irreducible tal que* $\mathrm{ord}\,\forall\mathbf{A} = m$ *y ancho* k*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{S}_m^k)$.

Demostración. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ es subdirectamente irreducible y $\mathrm{ord}\,\forall\mathbf{A} = m$, entonces $\forall\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m$. De $\mathrm{width}\,\mathbf{A} = k$ y la Proposición 2.6.9, tenemos que $\mathbf{A} \leq \mathbf{S}_m^k$. Del Lema 2.2.2 y por ser $\mathbf{A}$ subdirectamente irreducible, tenemos que $\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m^{k'}$, con $k' \leq k$. Pero si $\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m^{k'}$, con $k' < k$ entonces $\mathbf{A}$ satisface $(\alpha_{k'})$, lo cual es una contradicción. Luego, $\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m^k$ de donde se deduce que $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{S}_m^k)$. □

Notamos a la subvariedad generada por el álgebra $\mathbf{S}_m^k$ por $\mathcal{MMV}_m^k$.

Corolario 2.7.3. *La subvariedad* $\mathcal{V}(\mathbf{S}_1^k) = \mathcal{MMV}_1^k$*, está caracterizada por las identidades* (δ_1) *y* (α_k)*. La subvariedad* $\mathcal{V}(\mathbf{S}_2^k) = \mathcal{MMV}_2^k$ *está caracterizada por las identidades* (δ_2) *y* (α_k)*.*

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata del Lema 2.7.1. Teniendo en cuenta que $\mathbf{S}_1^k$ es subálgebra de $\mathbf{S}_2^k$, sabemos que una identidad se satisface simultáneamente en $\mathbf{S}_1^k$ y $\mathbf{S}_2^k$, si y sólo si, se satisface en $\mathbf{S}_2^k$. Luego, del Lema 2.7.1, tenemos que $\mathcal{V}(\mathbf{S}_2^k)$ está caracterizada por las ecuaciones (α_k) y (δ_2). □

Proposición 2.7.4. *La subvariedad* $\mathcal{V}(\mathbf{S}_n^k)$*, siendo* n *y* k *enteros positivos y* $n \geq 3$*, está caracterizada por las ecuaciones:*

$$(\alpha_k)\forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1}\bigwedge X_i^-\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1}\forall x_j \approx 1,$$

$$(\delta_n)\quad x^n \approx x^{n+1},$$

$$(\gamma_{np})\quad (px^{p-1})^{n+1} \approx (n+1)x^p$$

para todo entero $p = 2, \ldots, n-1$ *tal que* p *no divide a* n*.*

Demostración. Sabemos que (δ_n) y (γ_{np}) son las identidades que caracterizan a la variedad de MV-álgebras generada por $\mathbf{S}_n$ (ver la sección §1.2.3). Luego, $\mathbf{S}_m^k$ satisface las identidades (δ_n) y (γ_{np}). Del Teorema 2.6.12 y teniendo en cuenta que $\mathbf{S}_m^k$ es subálgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, tenemos que $\mathbf{S}_m^k$ satisface (α_k).

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_k), (δ_n) y (γ_{np}). Entonces $\forall\mathbf{A}$ es una MV-cadena que satisface (δ_n) y (γ_{np}). Luego, $\forall\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{S}_m$ para algún m tal que $m|n$. Además, de la Proposición 2.6.9, tenemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{S}_m^k$. Luego, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}_n^k)$. □

Como $\mathbf{S}_n^k$ es subálgebra de $\mathbf{S}_m^s$ si y sólo si $n \mid m$ y $k \leq s$, obtenemos la siguiente relación entre las subvariedades $\mathcal{MMV}_n^k$.

Lema 2.7.5. *Sean* n*,* m*,* k *y* s *números enteros positivos. Entonces,* $\mathcal{MMV}_n^k \subseteq \mathcal{MMV}_m^s$ *si y sólo si* $n|m$ *y* $k \leq s$*.*

2.7.2. Subvariedades de rango acotado

Recordemos que una MV-cadena es de rango finito menor o igual que n si y sólo si satisface la identidad (ρ_n) $((n+1)x^n)^2 \approx 2x^{n+1}$. Más aún, para toda MV-álgebra $\mathbf{A}$ no trivial, las siguientes condiciones son equivalentes (ver Di Nola y Lettieri (1999)):

1. $\mathbf{A}$ satisface la identidad (ρ_n),
2. $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}(\{\mathbf{S}_{1,\omega}, \ldots, \mathbf{S}_{n,\omega}\})$,
3. $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}(\{\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n\})$.

Diremos que una MMV-álgebra $\mathbf{A}$ subdirectamente irreducible tiene *rango acotado* si $\operatorname{rank}\forall\mathbf{A}$ es finito, y que tiene *rango n* si $\operatorname{rank}\forall\mathbf{A} = n$.

Comenzamos esta sección caracterizando con identidades a la subvariedades generadas por $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$, para cada entero positivo n y cada entero positivo k. Luego, determinamos todas las subvariedades de la variedad generada por $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$, clarificamos las propiedades de inclusión entre las mismas y damos una base ecuacional para cada una de ellas.

Sea $\mathcal{MMV}^k_{n,\omega}$ la subvariedad de MMV-álgebras caracterizada por las identidades (α_k), (ρ_n) y (γ_{np}), para todo entero $p = 2, \ldots, n-1$ tal que p no divide a n. Veremos a continuación que la variedad $\mathcal{MMV}^k_{n,\omega}$ es exactamente la variedad generada por $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$.

Proposición 2.7.6. *Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_k) y $\forall\mathbf{A}$ es una MV-cadena no simple de rango n, entonces $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega})$.*

Demostración. Si $\forall\mathbf{A}$ es una MV-cadena no simple de rango n, sabemos que $\mathcal{V}_{\mathcal{MV}}(\forall\mathbf{A}) = \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}(\mathbf{S}_{n,\omega})$ (ver Komori (1981)). Entonces, de la Proposición 2.6.11, tenemos que

$$\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}((\forall\mathbf{A})^k) = \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{S}^k_{n,\omega}).$$

De la Proposición 2.6.9, tenemos que $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}((\forall\mathbf{A})^k)$. Por lo tanto, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega})$. $\square$

Sea $\mathbf{A}$ una MMV-álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_k), y tal que $\forall\mathbf{A}$ es una MV-cadena no simple de rango n. De la Proposición 2.6.9, sabemos que $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^k$

$$\mathbf{A} \hookrightarrow (\forall\mathbf{A})^k.$$

Luego,

$$\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A}) \hookrightarrow (\forall\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\forall\mathbf{A}))^k \cong \mathbf{S}^k_n.$$

Proposición 2.7.7. *Si $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra subdirectamente irreducible que satisface (α_k), $\forall\mathbf{A}$ es una MV-cadena no simple de rango n y $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$ es isomorfa a $\mathbf{S}^k_n$, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega})$.*

Demostración. Si $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$ es isomorfo a $\mathbf{S}^k_n$, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $a_i \in A$ tal que $(a_i/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})(j) = 0/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$ si $i \neq j$, y $(a_i/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})(j) = 1/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$ si $i = j$. Identificando $\mathbf{A}$ con la subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^k$, tenemos que $a_i = \langle a_{ij}\rangle_{j\in\{1,\ldots,k\}}$ donde $a_{ij} \in \neg\operatorname{Rad}(\forall\mathbf{A})$, para $i \neq j$, y $a_{ii} \in \operatorname{Rad}(\forall\mathbf{A})$. Entonces existen en $\mathbf{A}$, k elementos booleanos dados por $b_i = 2a_i^2 = \langle 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle$. Luego, $\mathbf{A}$ es isomorfa a $(\forall\mathbf{A})^k$. Entonces, de la Proposición 2.6.11, tenemos que $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}((\forall\mathbf{A})^k) = \mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega})$. $\square$

Corolario 2.7.8. *Sean n y k enteros positivos, $\mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega}) = \mathcal{MMV}^k_{n,\omega}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible que satisface las identidades (ρ_n), (γ_{np}), para todo entero $1 < p < n$ tal que p no divide a n, y (α_k). De la Proposición 2.7.6 resulta que $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega})$. Luego, $\mathcal{MMV}^k_{n,\omega} \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega})$.

Las identidades (ρ_n) y (γ_{np}) caracterizan a la variedad de MV-álgebras generada por $\mathbf{S}_{n,\omega}$. Luego, $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$ satisface (ρ_n) y (γ_{np}). Además, $\mathbf{S}_{n,\omega} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$. De la Proposición 2.6.11 sabemos que $\mathbf{S}^k_{n,\omega} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, y del Teorema 2.6.12, resulta que $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$ satisface (α_k). Por lo tanto, $\mathcal{V}(\mathbf{S}^k_{n,\omega}) \subseteq \mathcal{MMV}^k_{n,\omega}$. $\square$

Como $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$ y $\mathbf{S}^k_n$ son subálgebras de $\mathbf{S}^s_{m,\omega}$ si y sólo si $n \mid m$ y $k \leq s$, obtenemos la siguiente relación de inclusión entre las subvariedades $\mathcal{MMV}^k_{n,\omega}$ y $\mathcal{MMV}^k_n$.

Lema 2.7.9. *Sean n, m, k y s enteros positivos. Entonces*

(1) $\mathcal{MMV}^k_n \subseteq \mathcal{MMV}^s_{m,\omega}$ si y sólo si $n \mid m$ y $k \leq s$.

(2) $\mathcal{MMV}^k_{n,\omega} \subseteq \mathcal{MMV}^s_{m,\omega}$ si y sólo si $n \mid m$ y $k \leq s$.

En Abad (1988) se caracterizan las subálgebras del álgebra de Łukasiewicz n-valente funcional monádica $\mathbf{C}^k_n$. En forma análoga, podemos dar la siguiente caracterización de las subálgebras de $\mathbf{S}^k_n$.

Sea $\mathbf{C}$ una MV-subálgebra de $\mathbf{S}_n$ y sea $\mathbf{B}_s$ una subálgebra (booleana) del álgebra de Boole de los elementos complementados $\mathbf{B}(\mathbf{S}^k_n)$. Observemos que $\mathbf{B}(\mathbf{S}^k_n) \cong \mathbf{2}^k$. En efecto, $f \in B(\mathbf{S}^k_n)$ si y sólo si $f(i) \in \{0,1\}$, para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Sabemos que existe una correspondencia biunívoca entre la familia de las subálgebras de $\mathbf{2}^k$ y las particiones del conjunto de sus antiátomos. Además, cada partición del conjunto de antiátomos de $\mathbf{2}^k$ se corresponde en forma natural con una partición del conjunto $\{1,\ldots,k\}$. Existe una correspondencia biunívoca entre subálgebras de $\mathbf{2}^k$ y particiones del conjunto $\{1,\ldots,k\}$.

Sea $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ la partición del conjunto $\{1,\ldots,k\}$ determinada por la subálgebra $\mathbf{B}_s$. Es sabido que los elementos de $\mathbf{B}_s$ están caracterizados como los elementos $f \in S^k_n$ tales que $f(r) \in \{0,1\}$, para todo $r \in \{1,\ldots,k\}$, y tales que $f(i) = f(j)$ si $i,j \in P_t$, para algún $t \in \{1,\ldots,s\}$.

Consideremos el conjunto:

$$S[\mathbf{C},\mathbf{B}_s] = \{f \in S^k_n : \ f(r) \in C \text{ y } f(i) = f(j), \text{ si } i,j \in P_t\}.$$

No es difícil probar que $S[\mathbf{C},\mathbf{B}_s]$ es el universo de una subálgebra $\mathbf{S}[\mathbf{C},\mathbf{B}_s]$ de $\mathbf{S}^k_n$.

En el siguiente teorema se establece que estas son las únicas subálgebras de $\mathbf{S}^k_n$.

Teorema 2.7.10. *(Abad, 1988) $\mathbf{S}$ es una subálgebra de $\langle \mathbf{S}^k_n; \forall_\wedge \rangle$ si y sólo si $\mathbf{S} = \mathbf{S}[\mathbf{C},\mathbf{B}_s]$, donde $\mathbf{C}$ es una subálgebra de $\mathbf{S}_n$ y $\mathbf{B}_s$ es una subálgebra de $\mathbf{B}(\mathbf{S}^k_n)$.*

A continuación analizaremos el caso en que $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}[\mathbf{S}_n, \mathbf{B}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A}))] \cong \mathbf{S}^s_n$ es una subálgebra propia de $\mathbf{S}^k_n$.

Comencemos analizando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7.11. Notamos con $\mathbf{S}^{k,1}_{n,\omega}$ a la subálgebra de $\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}$ generada por $\mathrm{Rad}(\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}) \cup \forall_\wedge(\mathbf{S}^{k}_{n,\omega})$. Veamos que la variedad generada por la subálgebra $\mathbf{S}^{2,1}_{1,\omega}$ está contenida propiamente en la variedad generada por $\mathbf{S}^{2}_{1,\omega}$. Para ello, sea $t_1(x) = 2x^2$ y sea la identidad

$$(\beta_1)\ \ \forall(2x^2) \approx 2x^2,$$

es decir, $\forall t_1(x) \approx t_1(x)$.

Veamos que $\mathbf{S}^{2}_{1,\omega}$ no satisface la identidad (β_1). En efecto, sea $y = \langle(1, z_1), (0, z_2)\rangle \in S^2_{1,\omega}$. Entonces

$$\forall_\wedge(t_1(y)) = \forall_\wedge\langle(1, 0), (0, 0)\rangle = \langle(0, 0), (0, 0)\rangle.$$

Por otro lado, $t_1(y) = \langle(1, 0), (0, 0)\rangle$. Sin embargo, $\mathbf{S}^{2,1}_{1,\omega}$ satisface la identidad (β_1). En efecto, sea $y \in S^{2,1}_{1,\omega}$. Si $y = \langle(1, z_1), (1, z_2)\rangle$, entonces $\forall_\wedge(t_1(y)) = t_1(y) = \langle(1, 0), (1, 0)\rangle$. Si $y = \langle(0, z_1), (0, z_2)\rangle$, entonces $\forall_\wedge(t_1(y)) = t_1(y) = \langle(0, 0), (0, 0)\rangle$. Luego, $\forall t_1(x) \approx t_1(x)$ se satisface en $\mathbf{S}^{2,1}_{1,\omega}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{V}(\mathbf{S}^{2,1}_{1,\omega}) \subsetneq \mathcal{V}(\mathbf{S}^{2}_{1,\omega}).$$

Sea $\mathbf{S}$ una subálgebra de $\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}$ tal que $\forall_\wedge\mathbf{S}$ es una cadena de rango n. Sabemos que $\mathbf{B}(\mathbf{S})$ es una subálgebra de Boole monádica simple de $\mathbf{B}(\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}) \cong \mathbf{2}^k$. Supongamos que $\mathbf{B}(\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}) \cong \mathbf{2}^s$, con $s < k$. Luego, existe una partición $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ del conjunto de antiátomos del álgebra de Boole $\mathbf{2}^k$ asociada a la subálgebra $\mathbf{2}^s$. Recíprocamente, dada una partición $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ del conjunto de antiátomos del álgebra de Boole $\mathbf{2}^k$, consideremos asociada a la misma la subálgebra

$$\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega} = \{a \in \mathbf{S}^{k}_{n,\omega} : a(i)/\operatorname{Rad}(\mathbf{S}_{n,\omega}) = a(j)/\operatorname{Rad}(\mathbf{S}_{n,\omega}) \text{ si } i, j \in P_t \text{ para algún } t\}.$$

Observar que la subálgebra $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ es isomorfa, como MV-álgebra, a la subálgebra $\mathbf{S}^{p_1,1}_{n,\omega} \times \cdots \times \mathbf{S}^{p_s,1}_{n,\omega}$ de $\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}$ donde $p_i = |P_i|$, para cada i. En efecto, la aplicación $\psi\colon \mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega} \to \mathbf{S}^{p_1,1}_{n,\omega} \times \cdots \times \mathbf{S}^{p_s,1}_{n,\omega}$ definida por $\psi(a) = \langle a \vee b_1, \ldots, a \vee b_s\rangle$ es un isomorfismo donde $b_i = \bigwedge_{j=1}^{p_i} b_{i_j}$ es el antiátomo de $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ determinado por $P_i \in \mathbf{P}$, para todo i. Observar también que $\forall_\wedge(\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}) \subseteq \mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$.

Si el cardinal de la partición $\mathbf{P}$ es uno, la subálgebra $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ es igual a $\mathbf{S}^{k,1}_{n,\omega}$.

Lema 2.7.12. *Sea* $\mathbf{S}$ *una subálgebra de* $\langle\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}; \forall_\wedge\rangle$ *de ancho* k *y tal que* $\forall_\wedge\mathbf{S}$ *es una cadena no simple de rango* n *y* $\mathbf{B}(\mathbf{S})$ *posee* s *antiátomos. Entonces existe una partición* $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ *de los antiátomos de* $\mathbf{B}(\mathbf{S}^{k}_{n,\omega})$ *tal que* $\mathbf{S}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$.

Consideremos el término $t_m(x) = 2(x^{m+1})$. Es fácil ver que si $n \leq m$, entonces para $(s, z) \in S_{n,\omega}$ vale que

$$t_m^{S_{n,\omega}}(s, z) = \begin{cases} (n, 0) & \text{si } s = n \text{ y } z \leq 0 \\ (0, 0) & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Sea la identidad

$$(\beta_n)\ \ \forall(2x^{n+1}) \approx 2x^{n+1},$$

es decir, $\forall t_n(x) \approx t_n(x)$.

Es claro que el álgebra $\mathbf{S}^{k,1}_{n,\omega}$ satisface la identidad (β_n). En efecto, si $a \in S^{k,1}_{n,\omega}$ entonces $2a^{n+1} \in B(S^{k,1}_{n,\omega}) = \{(0,0),(n,0)\}$. Además, si el número de antiátomos de un álgebra $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ es $r > 1$, entonces el álgebra $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ no satisface la identidad (β_n), pues si $a = 2a^{n+1}$ es un antiátomo entonces $\forall(2a^{n+1}) = (0,0)$ y $2a^{n+1} \neq (0,0)$.

Lema 2.7.13. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra y* $b \in B(\mathbf{A})-\{1\}$. *Sean las funciones* $\neg_b\colon A \to A$ *y* $\forall_b\colon A \to A$ *definidas por* $\neg_b x := \neg x \vee b$ *y* $\forall_b(x) := \forall x \vee b$, *respectivamente. El álgebra* $\langle [b); \odot, \neg_b, \forall_b, 1\rangle$ *es una MMV-álgebra.*

Demostración. Notemos que $[b)$ es cerrado bajo la restricción de la operación $\odot$ sobre $[b)$.

Sabemos que si b es booleano, entonces $\langle [b); \odot, \neg_b, 1\rangle$ es una MV-álgebra. Recordemos que en toda MV-álgebra, si $b \in B(\mathbf{A})$ entonces $b \oplus a = b \vee a$ y $b \odot a = b \wedge a$, para todo $a \in A$. Probemos que $\forall_b$ satisface las identidades (MMV7)-(MMV12). Consideremos $c, d \in [b)$.

De $\forall c \leq c$ y $b \leq c$, tenemos que $\forall_b c = \forall c \vee b \leq c$. Por lo tanto, (MMV7) se satisface.

Veamos (MMV8). En efecto,

$$\forall_b(c \wedge d) = \forall(c \wedge d) \vee b = (\forall c \wedge \forall d) \vee b = (\forall c \vee b) \wedge (\forall d \vee b) = \forall_b c \wedge \forall_b d.$$

Demostremos (MMV9). Veamos primero que $\neg_b \forall_b c = \neg\forall c \vee b$. En efecto,

$$\neg_b\forall_b c = \neg_b(\forall c \vee b) = \neg(\forall c \vee b) \vee b = \neg(\forall c \oplus b) \vee b = (\neg\forall c \odot \neg b) \vee b = (\neg\forall c \wedge \neg b) \vee b = \neg\forall c \vee b.$$

Luego,

$$\forall_b\neg_b\forall_b c = \forall_b(\neg\forall c \vee b) = \forall(\neg\forall c \vee b) \vee b = \forall(\forall\neg\forall c \vee b) \vee b = (\forall\neg\forall c) \vee \forall b \vee b = \neg\forall c \vee b = \neg_b\forall_b c.$$

Veamos (MMV10). En efecto,

$$\forall_b a \odot \forall_b c = (\forall a \vee b) \odot (\forall c \vee b) = ((\forall a \vee b) \odot \forall c) \vee ((\forall a \vee b) \odot b) = (\forall a \odot \forall c) \vee (b \odot \forall c) \vee (\forall a \odot b) \vee b.$$

Además, $(\forall a \odot b) \vee b = (\forall a \wedge b) \vee b = b$ y análogamente $(\forall c \odot b) \vee b = b$. Entonces $\forall_b a \odot \forall_b c = (\forall a \odot \forall c) \vee b$. Por otro lado, $\forall_b(\forall_b a \odot \forall_b c) = \forall(\forall a \odot \forall c) \vee b = (\forall a \odot \forall c) \vee b = \forall_b a \odot \forall_b c$. Luego, (MMV10) se satisface.

Del Lema 2.1.12, tenemos que

$$\forall_b(c \odot c) = \forall(c \odot c) \vee b = (\forall c \odot \forall c) \vee b = (\forall c \odot \forall c) \vee (b \odot b) = (\forall c \vee b) \odot (\forall c \vee b) = \forall_b c \odot \forall_b c.$$

Por lo tanto (MMV11) se satisface.

Nuevamente del Lema 2.1.12, sabemos que $\forall_b(c \oplus c) = \forall(c \oplus c) \vee b = (\forall c \oplus \forall c) \vee (b \oplus b) = (\forall c \oplus b) \vee (\forall c \oplus b) = \forall_b c \oplus \forall_b c$, de donde se tiene (MMV12).

Hemos probado que $\langle [b); \odot, \neg_b, \forall_b, 1\rangle$ es una MMV-álgebra. $\square$

Consideremos la subálgebra $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}$. Sea $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ la partición asociada, donde $P_i = \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_{p_i}}\}$. Sea $b_i = b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_{p_i}}$, un antiátomo de la subálgebra. Del Lema 2.7.13 sabemos que $\langle [b_i) \cap S_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}; \forall_{b_i} \rangle$ es una MMV-álgebra, que además, es isomorfa a $\mathbf{S}_{n,\omega}^{p_i,1}$. Luego, la identidad

$$(\alpha_{p_i}^{\forall_{b_i}}) \;\; \forall_{b_i} \left(\bigvee_{i=1}^{p_i+1} \bigwedge X_i^- \right) \to \bigvee_{j=1}^{p_i+1} \forall_{b_i} x_j \approx 1,$$

donde $X = \{x_1, \ldots, x_{p_i+1}\}$ y $X_i^- = X - \{x_i\}$, se satisface en $\langle [b_i) \cap S_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}; \forall_b \rangle$.

Lema 2.7.14. *Si $s > 1$, $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ una partición de $\{1, \ldots, k\}$ y $(f_n^{k,\mathbf{P}})$ la identidad*

$$\begin{aligned}
&\left[\left((\bigwedge_{i=1}^{s} 2x_i^{n+1}) \leftrightarrow 0 \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \neq j} ((2x_i^{n+1} \vee 2x_j^{n+1}) \leftrightarrow 1) \right) \wedge \right. \\
&\left. \left(\bigvee_{i=1}^{s} (\forall 2x_i^{n+1} \leftrightarrow 0) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{s} (\exists 2x_i^{n+1} \leftrightarrow 1) \right) \right] \\
&\to \left[\bigvee_{\{q_1, \ldots, q_s\} \in \mathbb{P}(\{p_1, \ldots, p_s\})} \left(\bigwedge_{i=1}^{s} \alpha_{q_j}^{\forall 2x_i^{n+1}} (z_1^i, \ldots, z_{q_{j+1}}^i) \right) \right] \approx 1,
\end{aligned}$$

donde el cardinal de cada subconjunto P_i perteneciente a la partición $\mathbf{P}$ se nota con p_i, $\mathbb{P}(\{p_1, \ldots, p_s\})$ es el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, s\}$ y donde se nota con $\alpha_{q_j}^{\forall 2x_i^{n+1}} (z_1^i, \ldots, z_{q_{j+1}}^i)$ a

$$\forall_{2x_i^{n+1}} \left(\bigvee_{r=1}^{q_j+1} \bigwedge Z_r^- \right) \to \bigvee_{j=1}^{q_j+1} \forall_{2x_i^{n+1}} z_j^i,$$

donde $Z = \{z_1^i, \ldots, z_{q_j+1}^i\}$ y $Z_r^- = Z - \{z_r^i\}$. Entonces $(f_n^{k,\mathbf{P}})$ se satisface en $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}$.

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_s$ elementos de $S_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
&\left[\left((\bigwedge_{i=1}^{s} 2a_i^{n+1}) \leftrightarrow 0 \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \neq j} ((2a_i^{n+1} \vee 2a_j^{n+1}) \leftrightarrow 1) \right) \wedge \right. \\
&\left. \left(\bigvee_{i=1}^{s} (\forall 2a_i^{n+1} \leftrightarrow 0) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{s} (\exists 2a_i^{n+1} \leftrightarrow 1) \right) \right] = 1
\end{aligned}$$

si y sólo si el conjunto $\{2a_1^{n+1}, \ldots, 2a_s^{n+1}\}$ es el conjunto de antiátomos de $\mathbf{B}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}})$. Además, si el conjunto anterior no coincide con el conjunto de antiátomos, entonces

$$\begin{aligned}
&\left[\left((\bigwedge_{i=1}^{s} 2a_i^{n+1}) \leftrightarrow 0 \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \neq j} ((2a_i^{n+1} \vee 2a_j^{n+1}) \leftrightarrow 1) \right) \wedge \right. \\
&\left. \left(\bigvee_{i=1}^{s} (\forall 2a_i^{n+1} \leftrightarrow 0) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{s} (\exists 2a_i^{n+1} \leftrightarrow 1) \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que existe una permutación $\{q_1, \ldots, q_s\}$ del conjunto $\{1, \ldots, s\}$ tal que $\{2a_{q_1}^{n+1}, \ldots, 2a_{q_s}^{n+1}\}$ es el conjunto de antiátomos asociados a $\mathbf{P}$. Vimos anteriormente que $\langle [2a_{q_j}^{n+1}) \cap S_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}; \forall_{2a_{q_j}^{n+1}} \rangle$ satisface la identidad $\alpha_{q_j}^{\forall 2a_{q_j}^{n+1}} \approx 1$, para todo j, $1 \leq j \leq s$. Luego, $\bigwedge_{i=1}^{s} \alpha_{q_j}^{\forall 2a_{q_i}^{n+1}}(z_1^i, \ldots, z_{q_{j+1}}^i) = 1$ y en consecuencia

$$\bigvee_{\{q_1,\ldots,q_s\} \in \mathbb{P}(\{p_1,\ldots,p_s\})} \left(\bigwedge_{i=1}^{s} \alpha_{q_j}^{\forall 2a_{q_i}^{n+1}}(z_1^i, \ldots, z_{q_{j+1}}^i) \right) = 1.$$

Por lo tanto, la identidad se satisface en $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}$. □

Lema 2.7.15. *Toda subálgebra de* $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k}$ *que satisface la identidad* $(f_n^{k,\mathbf{P}})$ *y que posee* $|\mathbf{P}|$ *antiátomos es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}$.

El siguiente teorema es consecuencia de los teoremas 5.8 y 5.10 de Gispert (1998).

Teorema 2.7.16. *(Gispert, 1998) Si* $\mathbf{V}$ *es una MV-cadena de rango* n*, entonces* $\mathbf{V} \in \mathrm{I\,S\,P_{U\mathcal{MV}}}(\mathbf{S}_{n,\omega})$.

Proposición 2.7.17. *Si* $\mathbf{V}$ *es una MV-cadena de rango* n *entonces* $\mathbf{V}^k \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{S}_{n,\omega}^k)$*, para todo entero positivo* k.

Demostración. Sea k un número entero positivo, y $\mathbf{V}$ una MV-cadena de rango n. Luego, existe una MV-álgebra $\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{V}$ es isomorfa a $\mathbf{W}$ y $\mathbf{W} \in \mathrm{S\,P_{U\mathcal{MV}}}(\mathbf{S}_{n,\omega})$. Luego, existen un conjunto de índices I, un ultrafiltro U de $\mathbf{Su}(I)$ y un MV-homomorfismo inyectivo $h\colon \mathbf{W} \to \prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U$. Notemos que $\prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U$ es totalmente ordenada, ya que la propiedad de ser totalmente ordenada es una propiedad de primer orden, y en consecuencia, se preserva por ultraproductos. Luego, de la Proposición 2.1.13, sabemos que $\langle \left(\prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U\right)^k; \forall_\wedge \rangle$ es una MMV-álgebra, donde $\forall_\wedge \left\langle \langle a_i^1 \rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle a_i^k \rangle_{i\in I}/U \right\rangle$ se define mediante la k-upla constante $\langle c, \ldots, c \rangle$ donde $c = \bigwedge_{j=1}^{k} \langle a_i^j \rangle_{i\in I}/U$.

El MV-homomorfismo inyectivo $h\colon \mathbf{W} \to \prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U$, induce de manera natural un MMV-homomorfismo inyectivo $\bar{h}\colon \langle W^k; \forall_\wedge \rangle \to \langle \left(\prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U\right)^k; \forall_\wedge \rangle$ definido mediante $\bar{h}(\langle w_1, \ldots, w_k \rangle) = \langle h(w_1), \ldots, h(w_k) \rangle$. Notemos que $\langle W^k; \forall_\wedge \rangle$ es una MMV-álgebra donde $\forall_\wedge$ está definido como la k-upla constante en la cual cada componente es el ínfimo de las componentes.

Veamos que $\langle \left(\prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U\right)^k; \forall_\wedge \rangle$ es isomorfa a $\langle \prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}^k/U; \forall \rangle$. Definimos

$$\phi\colon \left(\prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}/U \right)^k \to \langle \prod_{i\in I} \mathbf{S}_{n,\omega}^k/U; \forall \rangle$$

de la siguiente manera

$$\phi\left(\left\langle \langle a_i^1 \rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle a_i^k \rangle_{i\in I}/U \right\rangle \right) = \langle a_i^1, \ldots, a_i^k \rangle_{i\in I}/U.$$

Es claro que ϕ es un MV-homomorfismo y que es sobreyectivo. Veamos que ϕ es un MMV-homomorfismo y que es inyectivo. En efecto,

$$\begin{aligned}\forall_\wedge \langle \langle a_i^1\rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle a_i^k\rangle_{i\in I}/U\rangle &= \langle \bigwedge_{j=1}^{k}(\langle a_i^j\rangle_{i\in I}/U), \ldots, \bigwedge_{j=1}^{k}(\langle a_i^j\rangle_{i\in I}/U)\rangle \\ &= \langle \langle \bigwedge_{j=1}^{k} a_i^j\rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle \bigwedge_{j=1}^{k} a_i^j\rangle_{i\in I}/U\rangle = \langle \langle c_i\rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle c_i\rangle_{i\in I}/U\rangle,\end{aligned}$$

donde $c_i = \bigwedge_{j=1}^{k} a_i^j$. Entonces

$$\begin{aligned}&\phi\langle \langle c_i\rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle c_i\rangle_{i\in I}/U\rangle = \langle c_i, \ldots, c_i\rangle_{i\in I}/U = \left(\forall_\wedge \langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle\right)_{i\in I}/U \\ &= \forall\left(\langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle_{i\in I}/U\right) = \forall\left(\phi\left(\langle \langle a_i^1\rangle_{i\in I}/U, \ldots, \langle a_i^k\rangle_{i\in I}/U\rangle\right)\right).\end{aligned}$$

Demostremos ahora la inyectividad. Supongamos que $\langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle_{i\in I}/U = \langle 1, \ldots, 1\rangle_{i\in I}/U$. Esto es equivalente a que $\{i \in I : \langle a_i^1, \ldots, a_i^k\rangle = \langle 1, \ldots, 1\rangle\} \in U$. Entonces, $\{i \in I : a_i^1 = \cdots = a_i^k = 1\} \in U$. Como para todo j, $\{i \in I : a_i^1 = \cdots = a_i^k = 1\} \subseteq \{i \in I : a_i^j = 1\}$, tenemos que $\{i \in I : a_i^j = 1\} \in U$. Luego $\langle a_i^j\rangle_{i\in I}/U = \langle 1\rangle_{i\in I}/U$, para todo j. En consecuencia ϕ es inyectiva.

Por lo tanto, $\mathbf{V}^k \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{S}_{n,\omega}^k)$. $\square$

Como consecuencia inmediata de la Proposición 2.7.17 y la Proposición 2.6.9, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.18. *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ *es subdirectamente irreducible tal que* $\operatorname{width}\mathbf{A} = k$ *y* $\forall\mathbf{A}$ *es una MV-cadena de rango* n*, entonces* $\mathbf{A} \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{S}_{n,\omega}^k)$.

Lema 2.7.19. *Si* $\mathbf{A} \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{B})$ *y* $\mathbf{A}$ *satisface una identidad del tipo* $\tau(x_1, \ldots, x_n) \approx 1$*, entonces existe* $\mathbf{S}$ *tal que* $\mathbf{A} \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{S})$ *tal que* $\mathbf{S}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{S}$ *satisface* $\tau \approx 1$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{B})$. Luego, $\mathbf{A}$ es isomorfa a un subálgebra del ultraproducto $\prod_{i\in I}\mathbf{B}/U$. Para simplificar la notación identificaremos $\mathbf{A}$ con dicha subálgebra. Sean $\bar{a}_1$, $\ldots$, $\bar{a}_n$ elementos cualesquiera de A. Entonces $a_1(i), \ldots, a_n(i) \in B$. De $\tau(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \approx \bar{1}$, entonces $|[\tau(a_1, \ldots, a_n) = 1]| = \{i \in I : \tau(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = 1\} \in U$. Sean y_j los elementos definidos de la siguiente manera $y_j(i) = \begin{cases} a_j(i) & \text{si } i \in U \\ 1 & \text{si } i \notin U \end{cases}$. Luego, $\bar{y}_j = \bar{a}_j$. Entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de un ultraproducto $\prod_{i\in I}\mathbf{S}/U$ donde $\mathbf{S}$ es una subálgebra de $\mathbf{B}$ que satisface la identidad $\tau \approx 1$. $\square$

Corolario 2.7.20. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra subdirectamente irreducible de rango* n*, de ancho* k*, y que satisface la identidad* $(f_n^{k,\mathbf{P}})$*, entonces* $\mathbf{A} \in \mathrm{I\,S\,P_U}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}})$*. En particular,* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}})$.

Proposición 2.7.21. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra de ancho* k *tal que* $\forall\mathbf{A}$ *es una MV-cadena no simple de rango* n *y tal que* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ *posee* s *antiátomos. Entonces existe una partición* $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ *tal que* $\mathbf{A}$ *satisface la identidad* $(f_n^{k,\mathbf{P}})$ *y* $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A})$.

Como corolario, obtenemos los siguientes teoremas.

Teorema 2.7.22. *Si $n = 1$ o $n = 2$, entonces las identidades (β_n), (α_k) y (ρ_n), caracterizan a la subvariedad generada por $\mathbf{S}^{k,1}_{n,\omega}$. Si $n > 3$, entonces las identidades (β_n), (α_k), (ρ_n) y*

$$(\gamma_{np}) \quad \left(px^{p-1}\right)^{n+1} \approx (n+1)x^p,$$

para todo natural $1 < p < n$ tal que p no divide a n, caracterizan a la subvariedad generada por $\mathbf{S}^{k,1}_{n,\omega}$.

Teorema 2.7.23. *Sea $s > 1$. Si $n = 1$ o $n = 2$, entonces las identidades $(f^{k,\mathbf{P}}_n)$, (α_k) y (ρ_n), caracterizan a la subvariedad generada por $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$, siendo $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$. Si $n > 3$, entonces las identidades $(f^{k,\mathbf{P}}_n)$, (α_k), (ρ_n) y*

$$(\gamma_{np}) \quad \left(px^{p-1}\right)^{n+1} \approx (n+1)x^p,$$

para todo natural $1 < p < n$ tal que p no divide a n, caracterizan a la subvariedad generada por $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$.

Veremos ahora la relación de inclusión que existe entre las subvariedades propias de la variedad generada por $\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}$.

Sean $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ y $\mathbf{P}' = \{P'_1, \ldots, P'_{s'}\}$ dos particiones del conjunto $\{1, \ldots, k\}$, y consideremos las subálgebras $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ y $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega}$ de $\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}$ asociadas a cada una de las particiones. Si $\mathbf{S}_1$ es una subálgebra de $\mathbf{S}_2$ entonces $\mathbf{P}$ es más gruesa que $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{B}(\mathbf{S}_1)$ es una subálgebra de $\mathbf{B}(\mathbf{S}_2)$. Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{B}(\mathbf{S}_1)$ es una subálgebra de $\mathbf{B}(\mathbf{S}_2)$. Entonces, la partición $\mathbf{P}'$ asociada a $\mathbf{B}(\mathbf{S}_2)$ es una subpartición de la partición $\mathbf{P}$ asociada a $\mathbf{B}(\mathbf{S}_1)$. Esto es, todo elemento de $\mathbf{P}$ es unión de elementos de $\mathbf{P}'$ ($\mathbf{P}'$ es un refinamiento de $\mathbf{P}$). Sea $a \in S^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$, y queremos ver que $a \in S^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega}$. Sean $i, j \in P'_t \in \mathbf{P}'$. Como $\mathbf{P}'$ es más fina que $\mathbf{P}$ entonces existe $P_h \in \mathbf{P}$ tal que $P'_t \subseteq P_h$. Entonces a satisface que $a(i)/\operatorname{Rad}(\mathbf{S}_{n,\omega}) = a(j)/\operatorname{Rad}(\mathbf{S}_{n,\omega})$. Esto es, $a \in S^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega}$. Entonces el siguiente lema es inmediato.

Lema 2.7.24. *Sean $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ y $\mathbf{P}' = \{P'_1, \ldots, P'_{s'}\}$ dos particiones del conjunto $\{1, \ldots, k\}$, y consideremos las subálgebras $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ y $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega}$ de $\mathbf{S}^{k}_{n,\omega}$ asociadas a cada una de las particiones. Entonces $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}$ es una subálgebra de $\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega}$ si y sólo si $\mathbf{P}'$ es más fina que $\mathbf{P}$.*

Observemos que si $\mathbf{P}'$ es más fina que $\mathbf{P}$ entonces $\mathbf{B}(\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega})$ es una subálgebra de Boole monádica de $\mathbf{B}(\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega})$.

Como consecuencia inmediata del Lema 2.7.24 obtenemos la siguiente ordenación de las subvariedades.

Corolario 2.7.25. *Sean $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ y $\mathbf{P}' = \{P'_1, \ldots, P'_{s'}\}$ dos particiones del conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Entonces, $\mathcal{V}(\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}}_{n,\omega}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{S}^{k,\mathbf{P}'}_{n,\omega})$ si y sólo si $\mathbf{P}'$ es más fina que $\mathbf{P}$.*

Dadas dos particiones $\mathbf{P}' = \{P'_1, \ldots, P'_s\}$ y $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ de $\{1, \ldots, k'\}$ y $\{1, \ldots, k\}$ respectivamente, diremos que $\mathbf{P}$ es menor o igual que $\mathbf{P}'$, y notamos $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$, si existe un subconjunto de $\mathbf{P}'$ que es un refinamiento de $\mathbf{P}$. Por ejemplo, si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ son particiones de un mismo conjunto, entonces si $\mathbf{P}'$ es más fina que $\mathbf{P}$, entonces $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$.

Sabemos que $\mathbf{S}_m$ y $\mathbf{S}_{m,\omega}$ son subálgebras de $\mathbf{S}_{n,\omega}$ si y sólo si m divide a n. En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.7.26. *(1) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{m,\omega}^{t,\mathbf{P}}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}'})$ si y sólo si m divide a n, $t \leq k$, y $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$.*

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_m^t) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}})$ si y sólo si m divide a n y $t \leq |\mathbf{P}|$.

Vimos en el Lema 2.6.1 que una clase $\{\mathbf{S}_i^k : i \in I\}$ genera $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$ si y sólo si I es un conjunto infinito.

Lema 2.7.27. *Sea $\{\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}_s} : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito de álgebras tal que el cardinal de cada una de las particiones $\mathbf{P}_s$ es s. Entonces, $\mathcal{V}(\{\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}_s} : n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^s)$.*

Demostración. Notemos que $\mathbf{S}_{n,\omega}^s$ es subálgebra de $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}_s}$ y $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}_s}) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^s)$, ya que $\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}_s}$ satisface la identidad (α_s). Luego,

$$\mathcal{V}(\{\mathbf{S}_n^s : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_{n,\omega}^{k,\mathbf{P}_s} : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^s).$$

Pero, del Lema 2.6.1, sabemos que $\mathcal{V}(\{\mathbf{S}_n^s : n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^s)$, de donde se tiene el lema. □

2.7.3. Bases ecuacionales

En lo que sigue, $\{m_1, \ldots, m_r\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Si $r = 0$ entonces $\{m_1, \ldots, m_r\} = \emptyset$. Similarmente para el conjunto $\{s_1, \ldots, s_p\}$.

Teorema 2.7.28. *Si $\mathcal{V}$ es una subvariedad no trivial de MMV-álgebras tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, entonces $\mathcal{V}$ tiene alguna de las siguientes tres formas:*

(F1) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{S}_{m_1}^{t_1}, \ldots, \mathbf{S}_{m_r}^{t_r})$, $r \geq 1$, y $t_i \leq k$, para todo i,

(F2) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{S}_{m_1}^{t_1}, \ldots, \mathbf{S}_{m_r}^{t_r}, \mathbf{S}_{n_1,\omega}^{s_1,\mathbf{P}_1}, \ldots, \mathbf{S}_{n_s,\omega}^{s_p,\mathbf{P}_p})$, $r \geq 0$, $s \geq 1$, $t_i \leq k$ y $s_i \leq k$, para todo i,

(F3) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{S}_{m_1}^{t_1}, \ldots, \mathbf{S}_{m_r}^{t_r}, \mathbf{S}_{n_1,\omega}^{s_1,\mathbf{P}_1}, \ldots, \mathbf{S}_{n_s,\omega}^{s_p,\mathbf{P}_p}, [\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $t_i \leq k$ y $s_i \leq k$, para todo i, y además $k_1 \leq k$.

Demostración. Si $\mathcal{V} = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, entonces $\mathcal{V}$ es de la forma (F3) y no hay nada que probar. Sea $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Supongamos en primer lugar que para algún $t \leq k$, tenemos que $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) \subseteq \mathcal{V}$. Luego, existe $k_1 = \max\{r : \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^r) \subseteq \mathcal{V}\}$. Si $\mathcal{V} = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$ entonces $\mathcal{V}$ es de la forma (F3). Supongamos que $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1}) \subsetneq \mathcal{V}$. Sean $I = \{m : \mathbf{S}_m^t \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})\}$, y $J = \{n : \mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})\}$. Si $I \cup J = \emptyset$ entones $\mathcal{V} = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$ y este caso ya lo consideramos. Luego, $I \cup J \neq \emptyset$. Del Lema 2.6.1 y del Lema 2.7.27, se tiene que tanto I

como J son subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Si no lo fueran, k_1 no es un elemento maximal dentro del conjunto $\{r : \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^r) \subseteq \mathcal{V}\}$. Sea $\mathcal{W}$ la subvariedad de $\mathcal{V}$ generada por

$$\{[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1}\} \cup \{\mathbf{S}_m^t : m \in I\} \cup \{\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}} : n \in J\}.$$

Queremos probar que $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. Para ello, consideremos $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V})$. En particular, sabemos que $\mathbf{A}$ es de ancho menor o igual que k.

Supongamos que $\mathbf{A}$ es un álgebra finita. Luego, de la Proposición 2.1.34, sabemos que $\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_m^t$ y como pertenece a $\mathcal{V}$ resulta que $t \leq k_1$, o, $m \in I$. Luego, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{S}_m^t) \subseteq \mathcal{W}$.

Si $\mathbf{A}$ no es finita y $\operatorname{rank}(\forall\mathbf{A}) = n$, entonces $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}})$, para alguna partición $\mathbf{P}$ siendo $t \leq k_1$, o, $n \in J$. Luego, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{W}$.

Por último si $\operatorname{rank}(\forall\mathbf{A}) = \omega$ y $\mathbf{A}$ es de ancho t, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t)$ con $t \leq k_1$. Luego, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{W}$.

Si $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t)$ no está contenida en $\mathcal{V}$, para ningún t, tomando los conjuntos $I = \{m : \mathbf{S}_m^t \in \mathcal{V}\}$ y $J = \{m : \mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}} \in \mathcal{V}\}$, y razonando de manera análoga al caso considerado anteriormente, se tiene que $\mathcal{V}$ es de la forma (F1) o (F2). $\square$

Recordemos que todas las variedades de MMV-álgebras poseen la propiedad de distributividad de congruencias. Luego, si $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_l$ son subdirectamente irreducibles pertenecientes al conjunto $\{[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{S}_m^t : m, t \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}} : n, t \in \mathbb{N}\}$, entonces por los teoremas de Jónsson sabemos que $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_l) = \mathcal{V}(\mathbf{B}_1) \vee \cdots \vee \mathcal{V}(\mathbf{B}_l)$ si y sólo si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{B}_i)$ para algún i. Teniendo en cuenta esto y el Teorema 2.7.28, tenemos que si $\mathcal{V}$ es una subvariedad no trivial contenida en $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, entonces $\mathcal{V}$ tiene alguna de las siguientes formas

(F1) $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^r \mathcal{V}(\mathbf{S}_{m_i}^{t_i})$, donde $t_i \leq k$, para todo i,

(F2) $\mathcal{V} = \bigvee_{i=0}^r \mathcal{V}(\mathbf{S}_{m_i}^{t_i}) \vee \bigvee_{i=1}^s \mathcal{V}(\mathbf{S}_{n_i,\omega}^{s_i,\mathbf{P}_i})$, donde $t_i \leq k$ y $s_i \leq k$, para todo i,

(F3) $\mathcal{V} = \bigvee_{i=0}^r \mathcal{V}(\mathbf{S}_{m_i}^{t_i}) \vee \bigvee_{i=1}^s \mathcal{V}(\mathbf{S}_{n_i,\omega}^{s_i,\mathbf{P}_i}) \vee \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$, donde $t_i \leq k$ y $s_i \leq k$, para todo i, y $k_1 \leq k$.

Resumimos las propiedades de inclusión entre las subvariedades de las MMV-álgebras de ancho menor o igual que k, en la siguiente proposición.

Proposición 2.7.29. *Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Entonces:*

(1) $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) \subseteq \mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}$ es de la forma (F3) y $t \leq k_1$,

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}'}) \subseteq \mathcal{V}$ si y sólo si alguna de la siguientes condiciones se satisface:

(2a) $\mathcal{V}$ es de la forma (F2), n divide a algún $n_i \in \{n_1, \ldots, n_p\}$, $t \leq s_i$ y $\mathbf{P}' \leq \mathbf{P}_i$,

(2b) $\mathcal{V}$ es de la forma (F3) y $t \leq k_1$, o, n divide a algún $n_i \in \{n_1, \ldots, n_p\}$, $t \leq s_i$ y $\mathbf{P}' \leq \mathbf{P}_i$.

(3) $\mathcal{V}(\mathbf{S}_m^t) \subseteq \mathcal{V}$ si y sólo alguna de las tres condiciones siguientes se satisface:

(3a) $m|m_i$ para algún $m_i \in \{m_1, \ldots, m_r\}$ y $t \leq t_i$,

(3b) $m|s_i$ *para algún* $s_i \in \{s_1, \ldots, s_p\}$ *y* $t \leq s_i$,

(3c) $t \leq k_1$.

Ya tenemos bases ecuacionales para cada una de las subvariedades en el conjunto $\{\mathcal{V}(\mathbf{S}_m^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}}) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) : t \leq k\}$. Vamos a dar ahora las identidades que caracterizan a una subvariedad propia de la subvariedad generada por $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$.

Observemos en primer lugar que toda identidad $\tau_1 \approx \tau_2$ es equivalente a la identidad $(\tau_1 \to \tau_2) \wedge (\tau_2 \to \tau_1) \approx 1$. Además, $\eta_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \approx 1, \ldots, \eta_r(x_{r1}, \ldots, x_{rn_r}) \approx 1$ caracterizan a una variedad $\mathcal{V}$ si y sólo si $\eta_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge \eta_r(x_{r1}, \ldots, x_{rn_r}) \approx 1$ se satisface en $\mathcal{V}$. Luego, toda subvariedad $\mathcal{V} \in \{\mathcal{V}(\mathbf{S}_m^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}}) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) : t \leq k\}$ está caracterizada por una sola identidad $\lambda_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_n) \approx 1$.

Teorema 2.7.30. *Si* $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^s \mathcal{V}_i$, *donde* $\mathcal{V}_i \in \{\mathcal{V}(\mathbf{S}_m^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{S}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}}) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) : t \leq k\}$, *entonces la identidad que caracteriza a* $\mathcal{V}$ *es*

$$\lambda_{\mathcal{V}}(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, x_{s1}, \ldots, x_{sn_s}) = \bigvee_{i=1}^{s} \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1,$$

donde $\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \approx 1$ *caracteriza a la variedad* $\mathcal{V}_i$, *para cada* $i = 1, \ldots, s$.

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible. Supongamos que $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V})$. Sabemos que $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V}_i)$ para algún $i = 1, \ldots, s$. Entonces, $\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \approx 1$ se satisface en $\mathbf{A}$ y por lo tanto $\forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1$ también se satisface en $\mathbf{A}$. Luego, $\mathbf{A} \models \bigvee_{i=1}^s \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1$. Supongamos ahora que $\mathbf{A} \notin si(\mathcal{V})$. Luego, para todo $i = 1, \ldots, s$, se tiene que $\mathbf{A} \notin si(\mathcal{V}_i)$. Elegimos para cada i elementos $a_{i1}, \ldots, a_{in_i} \in A$ tales que $\lambda_{\mathcal{V}_i}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i}) < 1$. Luego, $\forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})) < 1$, para todo i. Como $\forall A$ es una cadena, existe $t \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\bigvee_{i=1}^s \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})) = \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_t}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})) < 1$. Por lo tanto, $\bigvee_{i=1}^s \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1$ no se satisface en $\mathbf{A}$. □

2.8. Subvariedades generadas por álgebras de ancho infinito

En esta sección probamos que si $\mathbf{V}^X$ es una MMV-álgebra funcional donde el cardinal de X es infinito entonces $\mathcal{V}(\mathbf{V}^X) = \mathcal{V}(\{\mathbf{V}^k : k \text{ entero positivo}\})$. Como consecuencia, indicamos para las subvariedades $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{MMV}_n$ un conjunto finito de álgebras de ancho infinito que las generan. Los resultados de esta sección serán necesarios en el capítulo 5.

Recordemos que en toda MV-álgebra se satisface que

1. $\bigvee_{x\in X}(a_x \oplus a) = \left(\bigvee_{x\in X} a_x\right) \oplus a$

2. $\neg\left(\bigwedge_{x\in X} a_x\right) = \bigvee_{x\in X} \neg a_x$,

si los supremos, y/o ínfimos, existen.

Consideremos una MMV-álgebra funcional $\mathbf{V}^X$, siendo X un conjunto de cardinal infinito y $\mathbf{V}$ una MV-álgebra totalmente ordenada. Recordemos que en $\mathbf{V}^X$ se satisface que

1. si $a \in V^X$, entonces existen los elementos $\sup\{a_x : x \in X\}$ e $\operatorname{ínf}\{a_x : x \in X\}$ en V,
2. si $a \in V^X$ entonces las funciones $\exists_\vee(a)$ y $\forall_\wedge(a)$ pertenecen a V^X.

Luego, para cada $(a_x)_{x \in X} \in V^X$ entonces existe $\bigvee_{x \in X} \neg a_x$ y

$$\bigvee_{x \in X} \left(\neg a_x \oplus \left(\bigwedge_{x \in X} a_x \right) \right) = \left(\bigvee_{x \in X} \neg a_x \right) \oplus \left(\bigwedge_{x \in X} a_x \right) = \neg \left(\bigwedge_{x \in X} a_x \right) \oplus \left(\bigwedge_{x \in X} a_x \right) = 1.$$

Teorema 2.8.1. *Si* $\mathbf{V}^X$ *es una MMV-álgebra funcional entonces*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{V}^X) \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}} \left(\{ \mathbf{V}^k : k \text{ entero positivo} \} \right).$$

Demostración. Vamos a considerar la MMV-álgebra cuyo universo es el producto infinito de MMV-álgebras $\langle \mathbf{V}^Y ; \forall_\wedge \rangle$ indexado por el conjunto

$$I = \{ Y \in \mathcal{S}u(X) : |Y| \text{ es finito } \}.$$

Sea

$$i \colon \mathbf{V}^X \longrightarrow \prod_{Y \in I} \mathbf{V}^Y$$

el MV-homomorfismo definido mediante

$$(i(a))_Y = (i\left((a_x)_{x \in X}\right))_Y = \langle a_{y_1}, \ldots, a_{y_n} \rangle,$$

donde $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Sea $z = \bigwedge_{x \in X} a_x$. Sabemos que $\forall_\wedge(a) \in V^X$ es la "sucesión" constante (z), es decir, es la sucesión tal que todos sus elementos son iguales al supremo de todos los elementos $\{a_x : x \in X\}$.

La MMV-álgebra $\prod_{Y \in I} \mathbf{V}^Y$ tiene la operación $\forall$ definida componente a componente. En particular, para todo $a \in V^X$, se tiene que

$$(\forall(i(a)))_Y = \langle \bigwedge_{j=1}^{n} a_{y_j}, \ldots, \bigwedge_{j=1}^{n} a_{y_j} \rangle,$$

es una $|Y|$-upla constante.

Consideremos ahora el filtro monádico F generado en $\prod_{Y \in I} \mathbf{V}^Y$ por todos los elementos de la forma

$$\forall(i(a)) \to i(\forall_\wedge(a)),$$

para todo $a \in V^X$. Y sea, $\bar{i}$ el MMV-homomorfismo

$$\bar{i} \colon \mathbf{V}^X \longrightarrow \left(\prod_{Y \in I} \mathbf{V}^Y \right) / F.$$

Veamos que $\bar{i}$ es inyectivo. En efecto, si $i(b) \in F$ entonces *para todo* $Y \in I$, se tiene que

$$(i(b))_Y \geq [\forall(i(a)) \to i(\forall_\wedge(a))]_Y,$$

para algún $a \in V^X$. Esto es, si notamos $z = \bigwedge_{x \in X} a_x$ entonces

$$\langle b_{y_1}, \ldots, b_{y_n} \rangle \geq \langle \bigwedge_{j=1}^{n} a_{y_j}, \ldots, \bigwedge_{j=1}^{n} a_{y_j} \rangle \to \langle z, \ldots, z \rangle.$$

Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que

$$b_{y_j} \geq \left(\bigwedge_{j=1}^{n} a_{y_j} \right) \to z = \bigvee_{j=1}^{n} \left(a_{y_j} \to z \right).$$

Pero además, si $Y' \supseteq Y$ entonces b_{y_j} es uno de los elementos seleccionados para conformar la $|Y'|$-upla y se tiene que

$$b_{y_j} \geq \bigvee_{j=1}^{n'} \left(a_{y_j} \to z \right),$$

siendo $n' = |Y'|$.

Entonces de las observaciones anteriores a la proposición tenemos que

$$b_{y_j} \geq \bigvee_{x \in X} (a_x \to z) = 1,$$

para todo $Y \in I$. Luego, $b_x = 1$ para todo $x \in X$. $\square$

Del Teorema 2.8.1 y teniendo en cuenta que si X es infinito entonces $\mathbf{V}^k$ es subálgebra de $\mathbf{V}^X$, para todo entero positivo k, resulta el siguiente corolario.

Corolario 2.8.2. *Sea X un conjunto infinito. Entonces $\mathcal{V}\left(\mathbf{V}^X\right) = \mathcal{V}\left(\{\mathbf{V}^k : k \in \mathbb{N}\}\right)$. En particular, $\mathcal{V}(\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}) = \mathcal{V}\left(\{\mathbf{S}_n^k : k \in \mathbb{N}\}\right)$.*

Consideremos la variedad de MMV-álgebras $\mathcal{K}_n$ determinada por la identidad (δ_n) $x^n \approx x^{n+1}$.

Corolario 2.8.3. *Para todo n entero positivo, $\mathcal{K}_n = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^{\mathbb{N}}, \mathbf{S}_2^{\mathbb{N}}, \ldots, \mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}\})$.*

Demostración. Sea m un entero positivo tal que $m \leq n$. Entonces $\mathbf{S}_m^{\mathbb{N}}$ satisface (δ_n). Luego, $\mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^{\mathbb{N}}, \mathbf{S}_2^{\mathbb{N}}, \ldots, \mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}\}) \subseteq \mathcal{K}_n$. Vimos en el Corolario 2.2.6 que

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{V}(\big\{\mathbf{S}_m^k : k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n\big\}).$$

Como $\mathbf{S}_m^k$ es subálgebra de $\mathbf{S}_m^{\mathbb{N}}$, para todo entero positivo k, entonces

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{V}(\big\{\mathbf{S}_m^k : k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n\big\}) \subseteq \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^{\mathbb{N}}, \mathbf{S}_2^{\mathbb{N}}, \ldots, \mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}\}).$$

Por lo tanto, $\mathcal{K}_n = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_1^{\mathbb{N}}, \mathbf{S}_2^{\mathbb{N}}, \ldots, \mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}\})$. $\square$

Consideremos las siguientes subvariedades de $\mathcal{K}_n$. Para cada $n \geq 3$, sea $\mathcal{MMV}_n$ la subvariedad caracterizada por las identidades

$$(\delta_n) \ \ x^n \approx x^{n+1}$$

y

$$(\gamma_{np}) \ \ (n+1)\left((p-1)x^p\right) \approx (px)^{n+1}$$

para todo entero $p = 2, \ldots, n-1$ tal que p no divide a n (Di Nola y Grigolia (2004)). Definimos $\mathcal{MMV}_1 = \mathcal{K}_1$, definida por (δ_1), y $\mathcal{MMV}_2 = \mathcal{K}_2$, definida por (δ_2). Si $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}_n$ es subdirectamente irreducible entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle \mathbf{S}_n^X; \forall_\wedge \rangle$, para cierto conjunto no vacío X (Rutledge (1959), Lattanzi y Petrovich (2008)). Teniendo en cuenta esto y el Corolario 2.8.2, resulta inmediato el siguiente lema.

Lema 2.8.4. *Para todo n entero positivo, la subvariedad $\mathcal{MMV}_n = \mathcal{V}(\{\mathbf{S}_n^k : k \geq 1\}) = \mathcal{V}(\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}})$.*

Como consecuencia de que $\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}$ es subálgebra de $\mathbf{S}_m^{\mathbb{N}}$ si y sólo si $n|m$, y el Lema 2.8.4 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.8.5. *Sean n y m enteros positivos. Entonces, $\mathcal{MMV}_n \subseteq \mathcal{MMV}_m$ si y sólo si $n|m$.*

3. ℓ-grupos monádicos

En este capítulo definimos el concepto de ℓ-grupo monádico. El resultado principal consiste en una equivalencia entre la categoría de los ℓ-grupos monádicos y la categoría de las MV-álgebras monádicas. La equivalencia obtenida extiende la equivalencia determinada por el funtor Γ de Mundici para las MV-álgebras.

También estudiamos las congruencias de un ℓ-grupo monádico y las caracterizamos por medio de ciertos ℓ-ideales que llamamos ℓ-ideales monádicos. Probamos que el reticulado de ℓ-ideales monádicos de un ℓ-grupo monádico $\mathbf{G}$ es isomorfo al reticulado de ℓ-ideales de $\exists\mathbf{G}$. Demostramos además que todo ℓ-grupo monádico es producto subdirecto de una familia de ℓ-grupos monádicos $\{\mathbf{G}_i : i \in I\}$ donde $\exists\mathbf{G}_i$ es una cadena para todo $i \in I$.

Demostramos también algunas aplicaciones de la equivalencia entre la categoría de los ℓ-grupos monádicos y la categoría de las MMV-álgebras. Entre ellas, demostramos que si $\mathbf{G}$ es un ℓ-grupo monádico con unidad fuerte de orden u, y consideramos la MV-álgebra monádica cuyo universo es el segmento $[0, u]$ entonces existe un isomorfismo de orden entre el conjunto de los ideales monádicos del álgebra y el conjunto de los ℓ-ideales monádicos de $\mathbf{G}$, ambos ordenados por inclusión.

Este capítulo se estructura de la siguiente manera. En la sección §3.1 incluimos las definiciones y resultados básicos sobre MV-álgebras y ℓ-grupos, que serán necesarios en el resto del capítulo. Los mismos son incluidos en la tesis por razones de autocontenido. El lector podrá ver detalles en el libro Cignoli et. al. (2000). En la sección §3.2 definimos cuantificadores sobre el monoide reticulado de las sucesiones buenas de una MV-álgebra, y probamos propiedades de los mismos que serán necesarias para definir cuantificadores en el ℓ-grupo de Chang. En la sección §3.3 introducimos la noción de ℓ-grupo monádico y construimos el ℓ-grupo de Chang monádico. Definimos el funtor $\Gamma_\exists$ de la categoría de los ℓ-grupos monádicos a la categoría de las MMV-álgebras. El objetivo de la sección §3.4 es definir el funtor $\Xi_\exists$ de la categoría de las MMV-álgebras a la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte de orden, y demostrar la equivalencia natural entre las categorías. Finalmente, damos algunos aplicaciones de esta equivalencia en la sección §3.5.

3.1. Preliminares

Un *grupo abeliano parcialmente ordenado* es un grupo abeliano $\mathbf{G} = \langle G; +, -, 0\rangle$ enriquecido con una relación de orden parcial $\leq$ que es invariante por traslación. Esto es, para todo $a, b, t \in G$, si $a \leq b$ entonces $a + t \leq b + t$.

En este trabajo todos los grupos en consideración son *abelianos*. Luego, por grupo entendemos grupo abeliano. El *cono positivo* G^+ de $\mathbf{G}$ es el conjunto $\{x \in G : 0 \leq x\}$.

Es claro que si el orden del grupo es total entonces $G = G^{+} \cup -G^{+}$.

Cuando el orden de $\mathbf{G}$ determina una estructura de reticulado, $\mathbf{G}$ se dice un *ℓ-grupo*. En todo ℓ-grupo $\mathbf{G}$ se verifica que

$$t + (a \vee b) = (t + a) \vee (t + b),$$

$$t + (a \wedge b) = (t + a) \wedge (t + b),$$
$$t - (a \vee b) = (t - a) \wedge (t - b),$$
$$t - (a \wedge b) = (t - a) \vee (t - b)$$

para todo $a, b, t \in G$.

Para todo elemento a perteneciente a un ℓ-grupo $\mathbf{G}$, definimos la *parte positiva* a^{+}, la *parte negativa* a^{-} y el valor absoluto $|a|$ respectivamente por

$$a^{+} = a \vee 0,$$

$$a^{-} = -a \vee 0,$$
$$|a| = a^{+} + a^{-} = a \vee -a.$$

Un elemento u de un ℓ-grupo $\mathbf{G}$ se dice una *unidad fuerte de orden* si es un elemento arquimedeano. Esto es, si $0 \leq u$ y si se verifica que para todo $x \in G$, existe un entero $n \geq 0$ tal que $|x| \leq nu$. Notamos a un ℓ-grupo $\mathbf{G}$ con unidad fuerte de orden u con $\langle G, u\rangle$. Sin embargo, en los casos donde no haya ambigüedad de la unidad fuerte del grupo, lo notamos simplemente con $\mathbf{G}$.

Llamamos *ℓ-subgrupo* a todo subgrupo subreticulado de un ℓ-grupo.

Decimos que un ℓ-subgrupo K de un ℓ-grupo G es *convexo* si para todo $h, k \in K$ y $g \in G$ tal que $h < g < k$, se tiene que $g \in K$.

Un *ℓ-ideal* de un ℓ-grupo $\mathbf{G}$ es un ℓ-subgrupo convexo J de $\mathbf{G}$. (Recordar que todos los ℓ-grupos en consideración son abelianos). Es conocido que J es un ℓ-ideal de un ℓ-grupo $\mathbf{G}$ si y sólo si J es un subgrupo de $\mathbf{G}$ que satisface la siguiente condición:

$$\text{si } x \in J \text{ y } |y| \leq |x| \text{ entonces } y \in J.$$

Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos ℓ-grupos. Decimos que $f\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ es un *ℓ-homomorfismo* si f es un homomorfismo de grupos y de reticulados. Si G y H tienen unidad fuerte de orden u y v respectivamente, decimos que f es un ℓ-homomorfismo *unitario* si $f(u) = v$. El siguiente teorema es un resultado básico de la teoría de ℓ-grupos (ver por ejemplo Glass y Holland (1989)).

Teorema 3.1.1. *Sea $f\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ un ℓ-homomorfismo. Entonces,*

1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ *es un ℓ-ideal de $\mathbf{G}$,*

2. *si J es un ℓ-ideal de $\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{G}/J$ es un ℓ-grupo, y por lo tanto el epimorfismo natural $\pi_J\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}/J$ es un ℓ-epimorfismo tal que $\mathrm{Ker}(\pi_J) = J$, Más aún, si u es una unidad fuerte de orden de $\mathbf{G}$ entonces $\pi_J(u)$ es una unidad fuerte de $\mathbf{G}/J$.*

3. $\mathbf{G}/\operatorname{Ker}(f)$ *es isomorfo al ℓ-subgrupo $f(\mathbf{G})$ de $\mathbf{H}$.*

Sea J un ℓ-ideal de $\mathbf{G}$ y consideremos el ℓ-grupo $\mathbf{G}/J$. Notamos a la clase de equivalencia de un elemento $g \in G$ con $J + g$. Luego,

$$(J+g)+(J+h) = J+(g+h),$$

$$-(J+g) = J+(-g).$$

La relación de orden en $\mathbf{G}/J$ se define de la siguiente manera:

$$J+g \geq J+h \text{ si y sólo si existe } k \in J \text{ tal que } k+g \geq h.$$

Además, $(J+g) \vee (J+h) = J+(g \vee h)$ y $(J+g) \wedge (J+h) = J+(g \wedge h)$.

Un ℓ-ideal J de $\mathbf{G}$ se dice *primo* si J es propio y el cociente $\mathbf{G}/J$ es totalmente ordenado. El siguiente también es un resultado básico de la teoría de ℓ-grupos.

Proposición 3.1.2. *Todo ℓ-grupo $\mathbf{G}$ es producto subdirecto de ℓ-grupos totalmente ordenados.*

Demostración. Sea $a \neq 0 \in G$. Consideremos la familia de todos los ℓ-ideales de $\mathbf{G}$ que no contienen al elemento a. Si J es maximal en esta familia, entonces J es primo. Luego, la intersección de todos los ℓ-ideales primos de $\mathbf{G}$ es $\{0\}$ y consecuentemente $\mathbf{G}$ puede ser inmerso en el producto de todos los cocientes $\mathbf{G}/J$, con J primo. Luego, $\mathbf{G}$ es producto subdirecto de ℓ-grupos totalmente ordenados. $\square$

En lo que resta de esta sección, explicaremos brevemente la equivalencia natural entre MV-álgebras y ℓ-grupos con unidad fuerte de orden demostrada por Mundici (1986). Para más detalles el lector puede consultar Mundici (1986), Cignoli y Mundici (1997) y Cignoli et. al. (2000).

Sea $\mathbf{G}$ un ℓ-grupo y u un elemento de G, $u > 0$ (no necesariamente una unidad fuerte de orden). Consideremos $[0, u] = \{x \in G : 0 \leq x \leq u\}$ y definimos para $a, b \in [0, u]$ las operaciones:

$$a \oplus b = u \wedge (a+b),$$

$$\neg a = u - a,$$

$$0 = 0_G.$$

Entonces $\Gamma(\mathbf{G}, u) = \langle [0, u]; \oplus, \neg, 0 \rangle$ es una MV-álgebra.

A diferencia del resto de la tesis, en este capítulo trabajaremos con el concepto de ideales en lugar de filtros. Recordemos que un ideal de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ es un subconjunto I de A que satisface las siguientes condiciones:

(I1) $0 \in I$,

(I2) si $x \in I$, $y \in A$ e $y \leq x$ entonces $y \in I$,

(I3) si $x \in I$ e $y \in I$ entonces $x \oplus y \in I$.

Un ideal I de una MMV-álgebra se dice un ideal monádico si $\exists x \in I$, para todo $x \in I$.

Si $h\colon \langle G, u\rangle \to \langle H, v\rangle$ es un ℓ-homomorfismo unitario entonces

$$\Gamma(h)\colon \Gamma(\mathbf{G}, u) \to \Gamma(\mathbf{H}, v)$$

definido por $\Gamma(h) = h\restriction_{[0,u]}$ es un homomorfismo de MV-álgebras. Más aún, Γ es un funtor de la categoría de los ℓ-grupos con unidad fuerte de orden a la categoría de las MV-álgebras.

Una sucesión $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de elementos de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ se dice *buena* si para todo $i = 1, 2, \ldots$ se verifica que $a_i = a_i \oplus a_{i+1}$, y si existe n tal que $a_r = 0$ para todo $r > n$. Notamos $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. En particular, $(a, 0, \ldots) = (a)$.

Sea M_A el conjunto de todas las sucesiones buenas definidas sobre una MV-álgebra $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{M}_A = \langle M_A; +, (0), \leq\rangle$ es un monoide abeliano reticulado, donde la *suma* $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ de dos sucesiones buenas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ está definida por

$$c_i = a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus (a_{i-2} \odot b_2) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i,$$

para $i = 1, 2, \ldots,$ y donde $\bar{b} \leq \bar{a}$ si y sólo si existe una sucesión $\bar{c}$ tal que $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$. Además, el orden definido en M_A es invariante por traslación. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos sucesiones buenas entonces la sucesión $\bar{a} \vee \bar{b} = (a_1 \vee b_1, \ldots, a_n \vee b_n, \ldots)$ es el supremo de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, y la sucesión $\bar{a} \wedge \bar{b} = (a_1 \wedge b_1, \ldots, a_n \wedge b_n, \ldots)$ es el ínfimo de $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Recordemos que si $\bar{a} \geq \bar{b}$ entonces

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$$

es la sucesión buena que se obtiene de **omitir** los primeros n términos de

$$(a_1, \ldots, a_n) + (\neg b_n, \ldots, \neg b_1).$$

Recordemos ahora la construcción del ℓ-grupo de Chang $\mathbf{G}_A$. Consideremos la relación de equivalencia definida sobre $M_A \times M_A$ por

$$(\bar{a}, \bar{b}) \equiv (\bar{c}, \bar{d}) \text{ si y sólo si } \bar{a} + \bar{d} = \bar{b} + \bar{c}.$$

La clase de equivalencia del par $(\bar{a}, \bar{b})$ será notada con $[\bar{a}, \bar{b}]$. Sea $\mathbf{G}_A = \langle G_A; +, -, [(0), (0)]\rangle$ donde G_A es el conjunto de todas las clases de equivalencia, $[\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{c}, \bar{d}] = [\bar{a} + \bar{c}, \bar{b} + \bar{d}]$ y $-[\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{b}, \bar{a}]$. Resulta que $\mathbf{G}_A$ es un grupo (abeliano) donde $[(0), (0)]$ es el neutro con respecto a $+$. Decimos que $[\bar{c}, \bar{d}]$ domina a $[\bar{a}, \bar{b}]$, y escribimos $[\bar{a}, \bar{b}] \preccurlyeq [\bar{c}, \bar{d}]$, si y sólo si $[\bar{c}, \bar{d}] - [\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{e}, (0)]$, para algún $\bar{e} \in M_A$. Observemos que $[\bar{a}, \bar{b}] \preccurlyeq [\bar{c}, \bar{d}]$ si y sólo si $\bar{a} + \bar{d} \leq \bar{c} + \bar{b}$. La relación $\preccurlyeq$ es invariante por traslación. Es más, $\mathbf{G}_A$ es un ℓ-grupo donde para todo par $[\bar{a}, \bar{b}], [\bar{c}, \bar{d}] \in G_A$ se verifica que

$$[\bar{a}, \bar{b}] \vee [\bar{c}, \bar{d}] = [(\bar{a} + \bar{d}) \vee (\bar{c} + \bar{b}), \bar{b} + \bar{d}]$$

y

$$[\bar{a}, \bar{b}] \wedge [\bar{c}, \bar{d}] = [(\bar{a} + \bar{d}) \wedge (\bar{c} + \bar{b}), \bar{b} + \bar{d}].$$

No es difícil ver que $u_A = [(1), (0)]$ es una unidad fuerte de $\mathbf{G}_A$. Además, la aplicación $\mathbf{M}_A \to \mathbf{G}_A^+$ definida por $\bar{a} \mapsto [\bar{a}, (0)]$ es un isomorfismo de monoides y de reticulados.

Teorema 3.1.3. *(Mundici, 1986) La correspondencia* $\alpha_A\colon \mathbf{A} \to \Gamma(\mathbf{G}_A, u_A)$ *definida por* $\alpha_A(a) = [(a), (0)]$ *es un isomorfismo de MV-álgebras.*

Recordemos ahora la definición del funtor Ξ de la categoría de las MV-álgebras a la categoría de los ℓ-grupos. Dada una MV-álgebra $\mathbf{A}$, consideremos el ℓ-grupo de Chang $\Xi(\mathbf{A}) = \mathbf{G}_A$. Sea $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un MV-homomorfismo y

$$h^*\colon \mathbf{M}_A \to \mathbf{M}_B$$

definida por $h^*((a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)) = (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n), \ldots)$. La aplicación h^* es un homomorfismo de monoide y de reticulado, esto es,

$$h^*(\bar{a} + \bar{b}) = h^*(\bar{a}) + h^*(\bar{b}),$$

$$h^*(\bar{a} \vee \bar{b}) = h^*(\bar{a}) \vee h^*(\bar{b}),$$
$$h^*(\bar{a} \wedge \bar{b}) = h^*(\bar{a}) \wedge h^*(\bar{b}).$$

Sea $\Xi(h)\colon \mathbf{G}_A \to \mathbf{G}_B$ definida por $\Xi(h)([\bar{a}, \bar{b}]) = [h^*(\bar{a}), h^*(\bar{b})]$. Entonces, $\Xi(h)$ es un ℓ-homomorfismo unitario de ℓ-grupos. Más aún, Ξ es un funtor de la categoría $\mathcal{MV}$ a la categoría de ℓ-grupos con unidad fuerte de orden.

Teorema 3.1.4. *(Mundici, 1986)(Cignoli et. al., 2000)* $\Gamma\Xi$ *es naturalmente equivalente al funtor identidad en la categoría* $\mathcal{MV}$ *de las MV-álgebras, y* $\Xi\Gamma$ *es naturalmente equivalente al funtor identidad de la categoría de los* ℓ*-grupos.*

3.2. El monoide reticulado monádico M_A

Sea $\mathbf{A}$ una MMV-álgebra y consideremos el monoide reticulado de las sucesiones buenas $\mathbf{M}_A$. Como $\exists\mathbf{A}$ es también una MV-álgebra, podemos considerar el monoide reticulado de las sucesiones buenas de elementos de $\exists A$, que notamos con $\mathbf{M}_{\exists A}$. Es claro que $\mathbf{M}_{\exists A}$ es un submonoide subreticulado de $\mathbf{M}_A$. En esta sección definimos $\exists_M\colon M_A \to M_A$ y $\forall_M\colon M_A \to M_A$ tales que $\exists_M(M_A) = M_{\exists A}$ y $\forall_M(M_A) = M_{\exists A}$.

Lema 3.2.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra subdirectamente irreducible. Si* $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *es una sucesión buena en* $\mathbf{A}$*, entonces* $(\exists a_1, \exists a_2, \ldots, \exists a_n)$ *es una sucesión buena de* $\exists\mathbf{A}$*.*

Demostración. Queremos ver que $\exists a_i \oplus \exists a_{i+1} = \exists a_i$. Como $\exists\mathbf{A}$ es una MV-álgebra totalmente ordenada, demostrar la igualdad anterior es equivalente a demostrar que $\exists a_i = 1$ o $\exists a_{i+1} = 0$. Supongamos que $\exists a_i < 1$. Como $a_i \oplus a_{i+1} = a_i$, resulta que $\exists(a_i \oplus a_{i+1}) < 1$. Del Corolario 2.1.30 obtenemos que $a_i \odot a_{i+1} = 0$. Además, $a_i \odot a_{i+1} = \neg(\neg a_i \oplus \neg a_{i+1}) = \neg\neg a_{i+1} = a_{i+1}$. Luego, $a_{i+1} = 0$. Por lo tanto, $\exists a_{i+1} = 0$. □

Análogamente a la demostración anterior, pero utilizando el Lema 2.1.29, se demuestra el siguiente resultado.

Lema 3.2.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra subdirectamente irreducible. Si* $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *es una sucesión buena en* $\mathbf{A}$*, entonces* $(\forall a_1, \forall a_2, \ldots, \forall a_n)$ *es una sucesión buena de* $\forall\mathbf{A}$*.*

Lema 3.2.3. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *Supongamos que* $\mathbf{A} \subseteq \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *es un producto subdirecto de una familia* $\{\mathbf{A}_i\}$ *de MMV-álgebras. Para cada* $i \in I$, *sea* π_i *el epimorfismo canónico. Una sucesión* $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *de elementos de* A *es una sucesión buena en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si para cada* $i \in I$, *la sucesión*

$$\bar{a}_i = (\pi_i(a_1), \pi_i(a_2), \ldots, \pi_i(a_n))$$

es una sucesión buena en $\mathbf{A}_i$, *y si existe* $n_0 \geq 0$ *tal que* $\pi_i(a_n) = 0$, *para todo* $n > n_0$ *y para* $i \in I$.

Demostración. Basta observar que $a_j = a_{j+1} \oplus a_j$ si y sólo si $\pi_i(a_j) = \pi_i(a_{j+1}) \oplus \pi_i(a_j)$, para todo $i \in I$. $\square$

Como consecuencia del Lema 3.2.3, del Lema 3.2.1 y del Lema 3.2.2, obtenemos en forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 3.2.4. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *Si* $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_A$ *entonces las sucesiones* $(\exists a_1, \exists a_2, \ldots, \exists a_n)$ *y* $(\forall a_1, \forall a_2, \ldots, \forall a_n)$ *son sucesiones buenas de* $\exists\mathbf{A}$.

Los resultados previos nos permiten definir las siguientes aplicaciones. Sea $\exists_M \colon M_A \to M_A$ definida por

$$\exists_M(\bar{a}) = (\exists a_1, \exists a_2, \ldots, \exists a_n)$$

y sea $\forall_M \colon M_A \to M_A$ definida por

$$\forall_M(\bar{a}) = (\forall a_1, \forall a_2, \ldots, \forall a_n).$$

Observemos que si $\exists\mathbf{A}$ es totalmente ordenada, las sucesiones buenas $M_{\exists A}$ tienen la forma

$$(1^p, \exists a),$$

para algún número entero no negativo p y algún $a \in A$.

En lo que resta de la sección demostraremos varias propiedades que satisfacen $\exists_M$ y $\forall_M$, y que serán utilizadas más adelante.

Lema 3.2.5. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. *Para todo* $\bar{a}, \bar{b} \in M_A$ *se verifican las siguientes propiedades:*

(1) $\bar{a} \leq \exists_M(\bar{a})$, $\forall_M(\bar{a}) \leq \bar{a}$,

(2) $\exists_M(\exists_M(\bar{a})) = \exists_M(\bar{a})$, $\forall_M(\forall_M(\bar{a})) = \forall_M(\bar{a})$, $\exists_M(\forall_M(\bar{a})) = \forall_M(\bar{a})$, $\forall_M(\exists_M(\bar{a})) = \exists_M(\bar{a})$,

(3) $\exists_M(\bar{a} \vee \bar{b}) = \exists_M\bar{a} \vee \exists_M\bar{b}$, $\forall_M(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \forall_M\bar{a} \wedge \forall_M\bar{b}$,

(4) *si* $\bar{a} \leq \bar{b}$ *entonces* $\exists_M(\bar{a}) \leq \exists_M(\bar{b})$,

(5) $\exists_M((0)) = (0)$, $\exists_M((1)) = (1)$, $\forall_M((0)) = (0)$, $\forall_M((1)) = (1)$,

(6) $\exists_M(\exists_M\bar{a} + \exists_M\bar{b}) = \exists_M\bar{a} + \exists_M\bar{b}$, $\forall_M(\forall_M\bar{a} + \forall_M\bar{b}) = \forall_M\bar{a} + \forall_M\bar{b}$,

(7) $\exists_M(\bar{a} \wedge \exists_M \bar{b}) = \exists_M \bar{a} \wedge \exists_M \bar{b}$.

En particular, $\exists_M(\bar{a})$ *es el primer elemento del conjunto* $[\bar{a}) \cap M_{\exists A}$ *y* $\forall_M(\bar{a})$ *es el último elemento de* $(\bar{a}] \cap M_{\exists A}$.

Demostración. Las propiedades (1)-(6) son inmediatas de la definición de $\forall_M$ y $\exists_M$, la Definición 2.1.1, el Lema 2.1.2 y el Lema 2.1.3. La propiedad (7) es consecuencia de la Proposición 2.2.9. □

Lema 3.2.6. *Para toda sucesión buena* $\bar{a}$ *de elementos de una MMV-álgebra* $\mathbf{A}$*, se verifica que*

$$\exists_M(\bar{a} + \bar{a}) = \exists_M \bar{a} + \exists_M \bar{a}.$$

Demostración. Podemos asumir que $\mathbf{A}$ es un álgebra subdirectamente irreducible, y entonces $\exists \mathbf{A}$ es totalmente ordenada. Es claro que si $\bar{a} = (0)$ entonces la propiedad vale. Sea $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0)$ una sucesión buena de longitud n, esto es, $a_n \neq 0$ y $a_i = 0$ para todo $i > n$. Luego,

$$\exists_M \bar{a} = (1^{n-1}, \exists a_n),$$

donde $n - 1$ podría ser cero. Luego,

$$\begin{aligned} &\exists_M \bar{a} + \exists_M \bar{a} = (1^{n-1}, \exists a_n) + (1^{n-1}, \exists a_n) = (1^{2(n-1)}, \exists a_n \oplus \exists a_n, \exists a_n \odot \exists a_n) \\ &= (1^{2(n-1)}, \exists(a_n \oplus a_n), \exists(a_n \odot a_n)). \end{aligned}$$

Notemos que si $\exists(a_n \oplus a_n) < 1$ entonces, del Corolario 2.1.30, tenemos que $\exists(a_n \odot a_n) = 0$.

Sabemos que $\bar{a} + \bar{a} = \bar{s}$ donde

$$s_i = a_i \oplus (a_{i-1} \odot a_1) \oplus (a_{i-2} \odot a_2) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot a_{i-1}) \oplus a_i,$$

para todo i entero no negativo. En particular, y teniendo en cuenta que $a_n \oplus a_{n-1} = a_{n-1}$ si y sólo si $\neg a_n \oplus \neg a_{n-1} = \neg a_n$ si y sólo si $a_n \odot a_{n-1} = a_n$, tenemos que

$$s_{2n-1} = (a_n \odot a_{n-1}) \oplus (a_{n-1} \odot a_n) = a_n \oplus a_n,$$

$$s_{2n} = a_n \odot a_n,$$

y

$$s_{2n+1} = 0.$$

Como $a_n \neq 0$ entonces $s_{2n-1} \neq 0$. Luego,

$$\exists_M(\bar{a} + \bar{a}) = (1^{2n-2}, \exists(a_n \oplus a_n), \exists(a_n \odot a_n)).$$ □

Lema 3.2.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$*. Si* $\bar{a}, \bar{b}$ *son dos sucesiones buenas de* $\mathbf{A}$ *tales que* $\bar{a} \wedge \bar{b} = (0)$ *entonces*

$$\exists_M \bar{a} \wedge \forall_M \bar{b} = (0).$$

Demostración. Como $\forall_M \bar{b} \leq \bar{b}$, entonces $\bar{a} \wedge \forall_M \bar{b} \leq \bar{a} \wedge \bar{b} = (0)$. Luego, $\bar{a} \wedge \forall_M \bar{b} = (0)$ y en consecuencia $\exists_M(\bar{a} \wedge \forall_M \bar{b}) = (0)$. Por otro lado, $\exists_M \forall_M \bar{b} = \forall_M \bar{b}$. Entonces, de la propiedad (7) del Lema 3.2.5,

$$\exists_M \bar{a} \wedge \forall_M \bar{b} = \exists_M \bar{a} \wedge \exists_M \forall_M \bar{b} = \exists_M(\bar{a} \wedge \exists_M \forall_M \bar{b}) = \exists_M(\bar{a} \wedge \forall_M \bar{b}) = (0).$$ □

3.3. ℓ-grupos monádicos y el funtor $\Gamma_\exists$

En esta sección definimos el concepto de ℓ-grupo monádico. Vemos que la clase de todos los ℓ-grupos monádicos forman una variedad. Analizamos los miembros subdirectamente irreducibles y las congruencias. Vemos también que podemos definir cuantificadores en el ℓ-grupo de Chang $\mathbf{G}_A$ de una MMV-álgebra $\mathbf{A}$, de manera que $\mathbf{G}_A$ es un ℓ-grupo monádico. Además, definimos el funtor $\Gamma_\exists$ de la categoría de los ℓ-grupos monádicos a la categoría de las MMV-álgebras.

Dada una MMV-álgebra $\mathbf{A}$, consideremos el ℓ-grupo de Chang $\mathbf{G}_A$. Definimos $\exists_G\colon \mathbf{G}_A \to \mathbf{G}_A$ por

$$\exists_G([\bar{a},\bar{b}]) = [\exists_M(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{b}), \forall_M(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a})].$$

Veamos que $\exists_G$ está bien definida. Para ello, sea $(\bar{a},\bar{b}) \equiv (\bar{c},\bar{d})$. Esto es, $\bar{a}+\bar{d} = \bar{b}+\bar{c}$. Luego, $(\bar{a}+\bar{d})\vee(\bar{b}+\bar{d}) = (\bar{b}+\bar{c})\vee(\bar{b}+\bar{d})$. Entonces, $(\bar{a}\vee\bar{b})+\bar{d} = (\bar{d}\vee\bar{c})+\bar{b}$, de donde se deduce que $(\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{b} = (\bar{d}\vee\bar{c})-\bar{d}$. Similarmente, de $\bar{a}+\bar{d} = \bar{b}+\bar{c}$ y haciendo supremo en ambos miembros de la igualdad por $(\bar{a}+\bar{c})$, obtenemos que $\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a} = \bar{c}\vee\bar{d}-\bar{c}$. En consecuencia, $\exists_G([\bar{a},\bar{b}]) = \exists_G([\bar{c},\bar{d}])$.

Lema 3.3.1. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}$. *Si* $\bar{a},\bar{b}$ *son sucesiones buenas de* $\mathbf{A}$ *tales que* $\bar{a}\wedge\bar{b} = (0)$ *entonces* $\bar{a}+\bar{b} = \bar{a}\vee\bar{b}$.

Demostración. De la definición de $+$ en $\mathbf{M}_A$ sabemos que $\bar{a}+\bar{b} \geq \bar{a}\vee\bar{b}$. Como $\mathbf{M}_A$ es isomorfo al cono positivo $\mathbf{G}_A^+$ entonces $(\bar{a}+\bar{b})-(\bar{a}\vee\bar{b}) = ((\bar{a}+\bar{b})-\bar{a})\wedge((\bar{a}+\bar{b})-\bar{b}) = \bar{a}\wedge\bar{b} = (0)$. □

Corolario 3.3.2. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$ *y* $\mathbf{G}_A$ *el ℓ-grupo de Chang de* $\mathbf{A}$. *Si* $\bar{a}\wedge\bar{b} = (0)$ *entonces* $\exists_G([\bar{a},\bar{b}]) = [\exists_M(\bar{a}), \forall_M(\bar{b})]$.

Observar que $[\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{b}, \bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a}]$ y $(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{b})\wedge(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a}) = (\bar{a}\vee\bar{b})-(\bar{a}\vee\bar{b}) = (0)$. En consecuencia, dado un elemento $[\bar{c},\bar{d}] \in \mathbf{G}_A$ siempre podemos elegir un representante de clase $[\bar{a},\bar{b}]$ tal que $\bar{a}\wedge\bar{b} = (0)$.

Lema 3.3.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra y* $\mathbf{G}_A$ *el ℓ-grupo de Chang de* $\mathbf{A}$. *La aplicación* $\exists_G\colon \mathbf{G}_A \to \mathbf{G}_A$ *definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:*

(1) $[\bar{a},\bar{b}] \preceq \exists_G[\bar{a},\bar{b}]$,

(2) $\exists_G\exists_G[\bar{a},\bar{b}] = \exists_G[\bar{a},\bar{b}]$,

(3) *si* $[\bar{a},\bar{b}] \preceq [\bar{c},\bar{d}]$ *entonces* $\exists_G[\bar{a},\bar{b}] \preceq \exists_G[\bar{c},\bar{d}]$.

Esto es, $\exists_G$ *es un operador de clausura.*

Demostración. Como $\forall_M((\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{a}) \leq (\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{a}$ y $(\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{b} \leq \exists_M((\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{b})$, tenemos que $\bar{a}+\forall_M((\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{a}) \leq \bar{a}\vee\bar{b} \leq \bar{b}+\exists_M((\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{b})$. De donde se deduce que $[\bar{a},\bar{b}] \preceq [\exists_M((\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{b}), \forall_M((\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{a})] = \exists_G[\bar{a},\bar{b}]$. Para (2), sea $[\bar{c},\bar{d}] = [\bar{a},\bar{b}]$ tal que $\bar{c} \wedge \bar{d} = (0)$. Del Corolario 3.3.2, tenemos que $\exists_G[\bar{a},\bar{b}] = \exists_G[\bar{c},\bar{d}] = [\exists_M\bar{c}, \forall_M\bar{d}]$. Del Lema 3.2.7 obtenemos que $\exists_M\bar{c} \wedge \forall_M\bar{d} = (0)$. Luego, nuevamente por el Corolario 3.3.2,

$$\exists_G\exists_G[\bar{c},\bar{d}] = \exists_G[\exists_M\bar{c}, \forall_M\bar{d}] = [\exists_M\exists_M\bar{c}, \forall_M\forall_M\bar{d}] = [\exists_M\bar{c}, \forall_M\bar{d}] = \exists_G[\bar{c},\bar{d}].$$

Demostremos (3). Supongamos que $[\bar{a},\bar{b}] \preceq [\bar{c},\bar{d}]$. Esto es, $\bar{a}+\bar{d} \leq \bar{b}+\bar{c}$. Luego,

$$(\bar{a}+\bar{d}) \vee (\bar{a}+\bar{c}) \leq (\bar{b}+\bar{c}) \vee (\bar{a}+\bar{c}).$$

Entonces

$$(\bar{c} \vee \bar{d}) + \bar{a} \leq (\bar{a} \vee \bar{b}) + \bar{c},$$

y

$$(\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{c} \leq (\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{a}.$$

Así

$$\forall_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{c}) \leq \forall_M((\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{a}).$$

Por otro lado, de la hipótesis, tenemos que

$$(\bar{a}+\bar{d}) \vee (\bar{b}+\bar{d}) \leq (\bar{b}+\bar{c}) \vee (\bar{b}+\bar{d}).$$

Entonces

$$(\bar{a} \vee \bar{b}) + \bar{d} \leq (\bar{c} \vee \bar{d}) + \bar{b},$$

esto es,

$$(\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{b} \leq (\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{d}.$$

En consecuencia,

$$\exists_M((\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{b}) \leq \exists_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{d}).$$

Por lo tanto

$$\exists_M((\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{b}) + \forall_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{c}) \leq \forall_M((\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{a}) + \exists_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{d}),$$

y finalmente

$$[\exists_M((\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{b}), \forall_M((\bar{a} \vee \bar{b}) - \bar{a})] \preceq [\exists_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{d}), \forall_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{c})]. \qquad \square$$

Consideremos el ℓ-grupo $\mathbf{G}_{\exists A}$ de Chang de la MV-álgebra $\exists\mathbf{A}$. Es claro que $\mathbf{G}_{\exists A}$ es un subreticulado y un subgrupo de $\mathbf{G}_A$. Sea $[\bar{c},\bar{d}] \in G_{\exists A}$ tal que $\bar{c},\bar{d} \in M_{\exists A}$. Luego, $\exists_G[\bar{c},\bar{d}] = [\bar{c},\bar{d}]$ ya que $\forall_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{c}) = (\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{c}$ y $\exists_M((\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{d}) = (\bar{c} \vee \bar{d}) - \bar{d}$. Por lo tanto, $\exists_G(G_A) = G_{\exists A}$.

Como $\exists_G$ es un operador de clausura, $G_{\exists A}$ es el conjunto de subconjuntos cerrados de $\exists_G$ y $\mathbf{G}_{\exists A}$ es un subreticulado de $\mathbf{G}_A$, resulta el siguiente corolario.

Corolario 3.3.4. *Para cada $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A$, $\exists_G[\bar{a},\bar{b}]$ es el menor elemento de $\big[[\bar{a},\bar{b}]\big) \cap G_{\exists A}$. Además, $\exists_G$ es un operador de clausura aditivo, esto es,*

$$\exists_G([\bar{a},\bar{b}] \vee [\bar{c},\bar{d}]) = \exists_G([\bar{a},\bar{b}]) \vee \exists_G([\bar{c},\bar{d}]).$$

Veamos en el siguiente lema más propiedades verificadas por $\exists_G$.

Lema 3.3.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra y* $\mathbf{G}_A$ *el* ℓ*-grupo de Chang de* $\mathbf{A}$*. La aplicación* $\exists_G\colon \mathbf{G}_A \to \mathbf{G}_A$ *definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:*

(1) $\exists_G([(0),(0)]) = [(0),(0)]$,

(2) $\exists_G([(1),(0)]) = [(1),(0)]$,

(3) $\exists_G -\exists_G[\bar{a},\bar{b}] = -\exists_G[\bar{a},\bar{b}]$,

(4) $\exists_G(\exists_G[\bar{a},\bar{b}] + \exists_G[\bar{c},\bar{d}]) = \exists_G[\bar{a},\bar{b}] + \exists_G[\bar{c},\bar{d}]$,

(5) *si* $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A^+$ *entonces* $\exists_G\left([\bar{a},\bar{b}] + [\bar{a},\bar{b}]\right) = \exists_G[\bar{a},\bar{b}] + \exists_G[\bar{a},\bar{b}]$,

(6) *si* $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A^+$ *entonces* $\exists_G\left([\bar{a},\bar{b}] \wedge [(1),(0)]\right) = \exists_G[\bar{a},\bar{b}] \wedge [(1),(0)]$,

(7) $\exists_G\left([\bar{a},\bar{b}] \wedge [(0),(0)]\right) = \exists_G[\bar{a},\bar{b}] \wedge [(0),(0)]$.

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son inmediatas de la definición. Como $\exists_G(G_A) = G_{\exists A}$ y $\mathbf{G}_{\exists A}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}_A$ tenemos (3) y (4).

Demostremos (5). Supongamos que $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A^+$. Entonces $[\bar{a},\bar{b}] = [\bar{e},(0)]$, siendo $\bar{e} = \bar{a} - \bar{b}$. Luego, del Lema 3.2.6, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\exists_G\left([\bar{a},\bar{b}] + [\bar{a},\bar{b}]\right) = \exists_G([\bar{e},(0)] + [\bar{e},(0)]) = \exists_G([\bar{e}+\bar{e},(0)]) = [\exists_M(\bar{e}+\bar{e}),(0)] \\
&= [\exists_M\bar{e} + \exists_M\bar{e},(0)] = [\exists_M\bar{e},(0)] + [\exists_M\bar{e},(0)] = \exists_G[\bar{e},(0)] + \exists_G[\bar{e},(0)] = \exists_G[\bar{a},\bar{b}] + \exists_G[\bar{a},\bar{b}].
\end{aligned}$$

Para (6), sea $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A^+$ y $\bar{e} = \bar{a} - \bar{b}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\exists_G\left([\bar{a},\bar{b}] \wedge [(1),(0)]\right) &= \exists_G([\bar{e},(0)] \wedge [(1),(0)]) = [\exists_M(\bar{e} \wedge (1)),(0)] = [\exists_M\bar{e} \wedge (1),(0)] \\
&= [\exists_M\bar{e},(0)] \wedge [(1),(0)] = \exists_G[\bar{e},(0)] \wedge [(1),(0)] = \exists_G[\bar{a},\bar{b}] \wedge [(1),(0)].
\end{aligned}$$

Probemos (7). Dado $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A$, elegimos un representante de la clase $[\bar{c},\bar{d}]$ cuyas sucesiones buenas sean disjuntas. Es decir, sea $[\bar{c},\bar{d}] = [\bar{a},\bar{b}]$ tal que $\bar{c} \wedge \bar{d} = (0)$. Luego,

$$\exists_G\left([\bar{a},\bar{b}] \wedge [(0),(0)]\right) = \exists_G\left([\bar{c},\bar{d}] \wedge [(0),(0)]\right) = \exists_G\left([\bar{c} \wedge \bar{d},\bar{d}]\right) = \exists_G\left([(0),\bar{d}]\right) = [(0),\forall_M\bar{d}].$$

Por otro lado, del Lema 3.2.7, tenemos que

$$\begin{aligned}
\exists_G[\bar{a},\bar{b}] \wedge [(0),(0)] &= \exists_G[\bar{c},\bar{d}] \wedge [(0),(0)] = [\exists_M\bar{c},\forall_M\bar{d}] \wedge [(0),(0)] = [\exists_M\bar{c} \wedge \forall_M\bar{d},\forall_M\bar{d}] \\
&= [(0),\forall_M\bar{d}].
\end{aligned}$$

□

Los lemas anteriores inducen la definición de ℓ-grupo monádico.

Definición 3.3.6. Sea $\langle G;+,-,0,\leq\rangle$ un ℓ-grupo y $u > 0$ un elemento fijo de G. Diremos que $\mathbf{G} = \langle G;+,-,0,\leq u,\exists\rangle$ es un ℓ-grupo monádico si $\exists\colon G \to G$ satisface las siguientes condiciones:

(G1) $x \leq \exists x$,

(G2) $\exists(x \vee y) \approx \exists x \vee \exists y$,

(G3) $\exists 0 \approx 0$,

(G4) $\exists u \approx u$,

(G5) $\exists(-\exists x) \approx -\exists x$,

(G6) $\exists(\exists x + \exists y) \approx \exists x + \exists y$,

(G7) si $x \in G^+$ entonces $\exists(x \wedge u) = \exists x \wedge u$,

(G8) si $x \in G^+$ entonces $\exists(x + x) = \exists x + \exists x$,

(G9) $\exists(x \wedge 0) \approx \exists x \wedge 0$.

Usualmente escribiremos $\langle G; u, \exists\rangle$ en lugar de $\langle G; +, -, 0, \leq, u, \exists\rangle$. Notemos que para todo $x \in G$, se verifica que $x^+ = x \vee 0 \in G^+$, y si $x \in G^+$ entonces $x = x^+ = x \vee 0$. Luego, las propiedades (G7) y (G8) pueden ser escritas como ecuaciones de la siguiente manera:

$$\exists(x^+ \wedge u) \approx \exists x^+ \wedge u$$

y

$$\exists(x^+ + x^+) \approx \exists x^+ + \exists x^+.$$

En consecuencia, la clase de todos los ℓ-grupos monádicos es una variedad.

Observemos que en todo ℓ-grupo monádico se verifica que

(G10) $\exists\exists x \approx \exists x$.

Para verificarlo, consideremos un elemento $a \in G$. De (G3) y (G6) $\exists\exists a = \exists(\exists a + 0) = \exists(\exists a + \exists 0) = \exists a + \exists 0 = \exists a$.

Sea $\langle G; u, \exists\rangle$ un ℓ-grupo monádico y sea $\exists G = \{\exists x : x \in G\}$. De (G10), tenemos que $a \in \exists G$ si y sólo si $a = \exists a$. Además, de (G3), (G6) y (G5), obtenemos que $\exists\mathbf{G}$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$.

Lema 3.3.7. *Sea $\langle G; u, \exists\rangle$ un ℓ-grupo monádico. Para todo $a, b \in G$, se verifican las siguientes propiedades:*

(G11) si $a \leq b$ entonces $\exists a \leq \exists b$,

(G12) $\exists(a + b) \leq \exists a + \exists b$,

(G13) $\exists(a - \exists b) = \exists a - \exists b$.

Demostración. Si $a \leq b$ entonces $a \vee b = b$. Luego, de (G2), tenemos que $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b = \exists b$. Esto es, $\exists a \leq \exists b$, y por lo tanto vale (G11).

Demostremos (G12). De $a \leq \exists a$ y de $b \leq \exists b$, tenemos que $a + b \leq \exists a + \exists b$. Luego, por (G11) y (G6), tenemos que $\exists(a + b) \leq \exists(\exists a + \exists b) = \exists a + \exists b$.

Veamos que (G13) se satisface. Por un lado, $\exists(a - \exists b) + \exists b = \exists(a + (-\exists b)) + \exists b \leq \exists a + \exists(-\exists b) + \exists b = \exists a - \exists b + \exists b = \exists a$. Por otro lado, $\exists a = \exists(a - \exists b + \exists b) \leq \exists(a - \exists b) + \exists\exists b = \exists(a - \exists b) + \exists b$. Luego, $\exists(a - \exists b) + \exists b = \exists a$. O lo que es lo mismo, $\exists(a - \exists b) = \exists a - \exists b$. □

De (G11), (G1), (G10) y (G2), tenemos que $\exists$ es un operador de clausura aditivo sobre el reticulado $\langle G, \leq \rangle$. En particular, se satisfacen las siguientes propiedades:

(G14) $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$, para todo $a, b \in G$,

(G15) $\exists\mathbf{G}$ es un subreticulado de $\mathbf{G}$,

(G16) para todo $a \in G$, existe el primer elemento del conjunto $[a) \cap \exists G$.

Sea $\mathbf{G} = \langle G; +, 0, u, \leq \rangle$ un ℓ-grupo con unidad totalmente ordenado y $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ un conjunto *finito*. Sabemos que $\langle G^X; +, 0, u, \leq \rangle$ es un ℓ-grupo con unidad fuerte u con las operaciones definidas componente a componente, y en donde $0(i) = 0$ y $u(i) = u$, para todo $i \in X$. En el siguiente lema veremos que podemos definir un operador existencial $\exists_\vee$ en G^X de forma tal que $\mathbf{G}^X = \langle G^X; +, 0, u, \exists_\vee \rangle$ es un ℓ-grupo monádico.

Lema 3.3.8. *Sea $\mathbf{G} = \langle G; +, 0, u \rangle$ un ℓ-grupo con unidad totalmente ordenado, $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ un conjunto* finito. *Dado $g \in G^X$, sea $c = \bigvee_{1 \leq i \leq k} g(i) = \max_{1 \leq i \leq k}\{g(i)\}$. Definimos $\exists_\vee \colon G^X \to G^X$ mediante $(\exists_\vee)g(i) = c$, para todo i. Entonces $\mathbf{G}^X = \langle G^X; +, 0, u, \exists_\vee \rangle$ es un ℓ-grupo monádico. Además $\exists_\vee \left(\mathbf{G}^X\right) \cong \mathbf{G}$.*

Demostración. De la definición de $\exists_\vee$ son inmediatas (G1), (G3) y (G4).

Como $\mathbf{G}$ es totalmente ordenado, tenemos que

$$\max_{1 \leq i \leq k}\{g(i) \vee h(i)\} = \max_{1 \leq i \leq k}\{g(i)\} \vee \max_{1 \leq i \leq k}\{h(i)\}.$$

Luego, $\exists_\vee(g \vee h) = \exists_\vee g \vee \exists_\vee h$, demostrando (G2).

Veamos que (G5) se verifica. Notemos que $-\exists_\vee g \in G^X$ es constante. Luego, $\exists_\vee -\exists_\vee g = -\exists_\vee g$.

Para (G6), de $\exists_\vee g$ y $\exists_\vee h$ constantes, se tiene que $\exists_\vee g + \exists_\vee h$ es constante. Luego, $\exists_\vee(\exists_\vee g + \exists_\vee h) = \exists_\vee g + \exists_\vee h$.

Sabemos que $\max_{1 \leq i \leq k}\{g(i) \wedge u\} = \max_{1 \leq i \leq k}\{g(i)\} \wedge u$. Luego, $\exists_\vee(g \wedge u) = \exists_\vee g \wedge u$, demostrando (G7).

Veamos que (G8) se verifica. Como G es totalmente ordenado, tenemos que

$$\max_{1 \leq i \leq k}\{g(i) + g(i)\} = 2 \max_{1 \leq i \leq k}\{g(i)\}.$$

Luego, $\exists_\vee(g + g) = \exists_\vee g + \exists_\vee g$.

Probemos (G9). Sabemos que

$$\max_{1 \leq i \leq k}\{g(i) \wedge 0\} = \max_{1 \leq i \leq k}\{g(i)\} \wedge 0.$$

Luego, $\exists_\vee(g \wedge 0) = \exists_\vee g \wedge 0$. □

El siguiente teorema se deduce como consecuencia del Lema 3.3.3, del Corolario 3.3.4 y del Lema 3.3.5.

Teorema 3.3.9. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MMV-álgebra. Entonces* $\Xi_M(\mathbf{A}) = \langle G_A; [(1),(0)], \exists_G\rangle$ *es un ℓ-grupo monádico, que llamaremos el ℓ-*grupo de Chang monádico de $\mathbf{A}$.

Dado un ℓ-grupo monádico $\langle G; u, \exists\rangle$, sabemos que $\Gamma(\mathbf{G}, u) = \langle [0,u]; \oplus, 0, \neg\rangle$ es una MV-álgebra. Consideremos el cuantificador $\exists$ definido en $[0,u]$ como la restricción del cuantificador $\exists$ de $\mathbf{G}$ al segmento $[0,u]$. De (G11), (G3) y (G4), tenemos que $\exists\colon [0,u] \to [0,u]$. El siguiente teorema nos dice que $\langle [0,u]; \oplus, 0, \neg, \exists\rangle$ es una MMV-álgebra.

Teorema 3.3.10. *Si* $\langle G; u, \exists\rangle$ *es un ℓ-grupo monádico entonces*

$$\Gamma_\exists(\mathbf{G}, u) = \langle [0,u]; \oplus, 0, \neg, \exists\rangle$$

es una MMV-álgebra donde $\exists$ es la restricción del cuantificador de $\mathbf{G}$ *al segmento* $[0,u]$.

Demostración. La identidad (MMV1) es trivial de (G1). De (G2) y recordando que el orden natural en la MV-álgebra $[0,u]$ coincide con el orden del grupo, resulta (MMV2). De (G13) y (G4) tenemos que

$$\exists\neg\exists x = \exists(u - \exists x) = \exists u - \exists x = u - \exists x = \neg\exists x,$$

de donde obtenemos (MMV3). De (G6), (G4) y (G14), tenemos que

$$\exists(\exists x \oplus \exists y) = \exists((\exists x + \exists y) \wedge u) = \exists(\exists(\exists x + \exists y) \wedge \exists u) =$$
$$\exists(\exists x + \exists y) \wedge \exists u = (\exists x + \exists y) \wedge \exists u = \exists x \oplus \exists y.$$

Demostremos (MMV5). De (G8), (G4), (G13), (G3) y (G2) resulta que

$$\exists x \odot \exists x = 0 \vee (\exists x + \exists x - u) = 0 \vee (\exists(x + x) - u) = 0 \vee (\exists(x+x) - \exists u) =$$
$$0 \vee \exists((x+x) - \exists u) = 0 \vee \exists((x+x) - u) = \exists 0 \vee \exists((x+x) - u) = \exists(0 \vee ((x+x) - u))$$
$$= \exists(x \odot x).$$

Veamos que (MMV6) se satisface. Notemos que si $x \in G^+$ entonces $x + x \in G^+$. Luego, de (G8) y (G7),

$$\exists x \oplus \exists x = (\exists x + \exists x) \wedge u = \exists(x+x) \wedge u = \exists((x+x) \wedge u) = \exists(x \oplus x). \qquad \square$$

Definición 3.3.11. Diremos que $f\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$ es un *homomorfismo de ℓ-grupos monádicos*, o un *ℓ-homomorfismo monádico*, si f es un homomorfismo de grupos y de reticulados, $f(u) = v$, y $f(\exists x) = \exists' f(x)$, para todo $x \in G$.

Veamos que si $f\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$ es un homomorfismo de ℓ-grupos monádicos entonces

$$\Gamma_\exists(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \restriction [0,u],$$

es un homomorfismo de MMV-álgebras. En efecto, para todo $x \in [0,u]$, tenemos que

$$\Gamma_\exists(f)(\exists x) = f(\exists x) = \exists' f(x) = \exists' \Gamma_\exists(f)(x).$$

Proposición 3.3.12. *La aplicación $\Gamma_\exists$ es un funtor de la categoría $\mathcal{MG}$ de los grupos monádicos a la categoría $\mathcal{MMV}$ de las MMV-álgebras.*

Demostración. Del Teorema 3.3.10 sabemos que para todo ℓ-grupo monádico $\langle G; u, \exists\rangle$, $\Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$ es una MMV-álgebra. Vimos que si $f\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$ es un homomorfismo de ℓ-grupos monádicos entonces $\Gamma_\exists(f)$ es un homomorfismo de MMV-álgebras. Además, las condiciones

- $\Gamma_\exists(id_G) = id_{\Gamma_\exists(G,u)}$, para todo objeto $\mathbf{G}$ de la categoría $\mathcal{MG}$,
- $\Gamma_\exists(g \circ f) = \Gamma_\exists(g) \circ \Gamma_\exists(f)$, para todo $g\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ y para todo $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{Z}$,

son inmediatas. Luego, $\Gamma_\exists$ es un funtor. □

En el resto de la sección, demostraremos varias propiedades de los ℓ-grupos monádicos. Dado un ℓ-grupo monádico $\langle G; u, \exists\rangle$, definimos $\forall\colon G \to G$ por

$$\forall x = -\exists -x.$$

Consideremos la MMV-álgebra $\mathbf{A} = \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$ donde $\exists_A = \exists$ es el operador original del grupo, y definamos en $[0, u]$ un operador dual a $\exists_A$ de la siguiente manera:

$$\forall_A x = \neg\exists_A\neg x,$$

donde $\neg x = u - x$. Esto es,

$$\forall_A x = u - \exists(u - x).$$

Veamos que $\forall_A x = \forall x$, para todo $x \in [0, u]$. De (G4), (G5) y (G13) tenemos que

$$\exists(-x) + u = \exists(-x) - (-\exists u) = \exists(-x) - \exists(-\exists u) = \exists((-x) - \exists(-\exists u)) = \exists(-x + u).$$

Entonces, $u - \exists(-x + u) = -\exists(-x)$. Por lo tanto, $\forall_A x = \forall x$.

Definición 3.3.13. Diremos que un ℓ-ideal J de un ℓ-grupo monádico $\langle G; u, \exists\rangle$ es un *ℓ-ideal monádico* si $\exists x \in J$, para todo $x \in J$.

Observemos que si J es un ℓ-ideal monádico de $\mathbf{G}$ y $x \in J$ entonces $\forall x \in J$. En efecto, si $x \in J$ entonces $-x \in J$. Luego, $\exists -x \in J$ y $-\exists -x = \forall x \in J$.

Lema 3.3.14. *Si $f\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$ es un ℓ-homomorfismo monádico entonces* $\mathrm{Ker}(f)$ *es un ℓ-ideal monádico.*

Proposición 3.3.15. *Si J es un ℓ-ideal monádico de $\langle G; u, \exists\rangle$ entonces $\mathbf{G}/J$ es un ℓ-grupo monádico.*

Demostración. Sabemos que si J es un ℓ-ideal de $\langle G; u, \exists\rangle$ entonces $\mathbf{G}/J$ es un ℓ-grupo. Definimos

$$\exists\colon \mathbf{G}/J \to \mathbf{G}/J$$

por $\exists(J+x) = J + \exists x$. Veamos que $\exists$ está bien definido. Para ello, sea $J+x = J+y$. Luego, existe $n \in J$ tal que $x+n = y$ y entonces $\exists y = \exists(x+n)$. De donde $\exists y \leq \exists x + \exists n$. Por otro lado, también sabemos que existe $n' \in J$ tal que $y + n' = x$ (observemos que $n' = -n$). Luego, $\exists x = \exists(y+n') \leq \exists y + \exists n'$. Obtuvimos que

$$\forall n = -\exists{-n} = -\exists n' \leq \exists y - \exists x \leq \exists n.$$

Como J es monádico, sabemos que $\exists n$, $\forall n \in J$, y por ser J convexo, obtenemos que $\exists y - \exists x \in J$. Luego, $J + \exists x = J + \exists y$.

De la definición de $\exists$ y por ser $\mathbf{G}$ un ℓ-grupo monádico, es fácil ver $\mathbf{G}/J$ es un ℓ-grupo monádico. $\square$

Proposición 3.3.16. *Sea $f\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ un ℓ-homomorfismo monádico. Entonces $\mathbf{G}/\operatorname{Ker}(f)$ es isomorfo al ℓ-subgrupo monádico $f(\mathbf{G})$ de $\mathbf{H}$.*

Sea $\mathcal{I}(\exists\mathbf{G})$ el reticulado de ℓ-ideales del ℓ-grupo $\exists\mathbf{G}$, y sea $\mathcal{IM}(\mathbf{G})$ el reticulado de los ℓ-ideales monádicos del ℓ-grupo monádico $\mathbf{G}$.

Teorema 3.3.17. *Sea $\langle G; u, \exists\rangle$ un ℓ-grupo monádico. El reticulado $\mathcal{I}(\exists\mathbf{G})$ de ℓ-ideales de $\exists\mathbf{G}$ y el reticulado $\mathcal{IM}(\mathbf{G})$ de ℓ-ideales monádicos de $\mathbf{G}$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\rho\colon \mathcal{I}(\exists\mathbf{G}) \to \mathcal{IM}(\mathbf{G})$ la aplicación definida para cada ℓ-ideal F de $\exists\mathbf{G}$ por $\rho(F) = \{g \in G : \forall g \in F \text{ y } \exists g \in F\}$. Demostremos que $\rho(F)$ es un ℓ-ideal monádico de $\mathbf{G}$.

Veamos primero que $\rho(F)$ es un subgrupo de $\mathbf{G}$. En efecto, $0 \in \rho(F)$ pues $0 = \exists 0 = \forall 0 \in F$. Sea $x \in \rho(F)$. Luego, $\exists x \in F$ y, como F es un ℓ-ideal de $\exists\mathbf{G}$, resulta que $-\exists x \in F$. Entonces $\forall{-x} \in F$. Análogamente, de $\forall x \in F$ resulta que $-\forall x \in F$, es decir, $\exists{-x} \in F$. Con lo cual tenemos que $-x \in \rho(F)$. Consideremos ahora $x, y \in \rho(F)$ y veamos que $x + y \in \rho(F)$. Observemos que $\forall x + \forall y \leq \forall(x+y) \leq \exists(x+y) \leq \exists x + \exists y$. Por ser F un subgrupo de $\exists\mathbf{G}$, sabemos que $\forall x + \forall y \in F$ y $\exists x + \exists y \in F$. Como F es convexo, tenemos que $\forall(x+y) \in F$ y $\exists(x+y) \in F$. Por lo tanto, $\rho(F)$ es un subgrupo.

Demostremos ahora que $\rho(F)$ es un subreticulado de $\mathbf{G}$. Sean $x, y \in \rho(F)$ y veamos que $x \vee y \in \rho(F)$. Observemos que por ser F un subreticulado de $\exists\mathbf{G}$, tenemos que $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y \in F$. Además $\forall x \vee \forall y \leq \forall(x \vee y) \leq \exists(x \vee y)$ y por ser F convexo, obtenemos que $\forall(x \vee y) \in F$. Luego, $x \vee y \in \rho(F)$. Análogamente se demuestra que $x \wedge y \in \rho(F)$.

Veamos que $\rho(F)$ es convexo. Sean $x, y \in \rho(F)$, y $g \in G$ tales que $x \leq g \leq y$. Luego, $\exists x \leq \exists g \leq \exists y$ y $\forall x \leq \forall g \leq \forall y$ y, como F es convexo en $\exists G$, entonces $\exists g, \forall g \in F$. Y en consecuencia $g \in \rho(F)$.

Además, $\rho(F)$ es claramente cerrado por $\exists$, ya que $\exists\exists x = \exists x$ y $\forall\forall x = \forall x$, y por lo tanto es monádico. Luego ρ está bien definida.

Definimos ahora para todo ℓ-ideal monádico J de $\mathbf{G}$, $\phi(J) = J \cap \exists G$. Es claro que $\phi(J)$ es un ℓ-ideal del ℓ-grupo $\exists\mathbf{G}$.

Veamos ahora que $F = \phi(\rho(F)) = \rho(F) \cap \exists G$. Claramente, $F \subseteq \rho(F) \cap \exists G$. Sea $x \in \rho(F) \cap \exists G$. Por definición, $\exists x = x \in F$, y en consecuencia $\rho(F) \cap \exists G \subseteq F$.

Recíprocamente, sea J un ℓ-ideal monádico de $\mathbf{G}$. De $\exists J \subseteq J \cap \exists G$ y $\forall J \subseteq J \cap \exists G$, resulta que $J \subseteq \rho(J \cap \exists G)$. Si $g \in \rho(J \cap \exists G)$ entonces $\exists g \in J \cap \exists G$ y $\forall g \in J \cap \exists G$. En particular, tenemos que $\exists g \in J$ y $\forall g \in J$. De la convexidad de J, tenemos que $g \in J$. Luego, $J \supseteq \rho(J \cap \exists G)$. Por lo tanto, $J = \rho(J \cap \exists G)$.

Por último, es claro que si $F \subseteq F'$ entonces $\rho(F) \subseteq \rho(F')$, y si $J \subseteq J'$ entonces $J \cap \exists G \subseteq J' \cap \exists G$. $\square$

Teorema 3.3.18. *Todo ℓ-grupo monádico $\langle G; u, \exists\rangle$ es isomorfo a un producto subdirecto de ℓ-grupos monádicos $\langle G_i; u_i, \exists\rangle$, $i \in I$, tal que $\exists \mathbf{G}_i$ es totalmente ordenado.*

Demostración. Buscamos una familia $\mathcal{S}$ de ℓ-ideales monádicos de $\mathbf{G}$ tal que $\bigcap \mathcal{S} = \{0\}$ y tal que $\exists(\mathbf{G}/F_i)$ sea totalmente ordenado, para todo $F_i \in \mathcal{S}$.

Sabemos que existe una familia $\mathcal{S}' = \{P_i : i \in I\}$ de ℓ-ideales primos de $\exists\mathbf{G}$ tal que $\bigcap \mathcal{S}' = \{0\}$, y tal que $\exists\mathbf{G}/P_i$ es una cadena, para todo $i \in I$. Sea $\mathcal{S} = \{\rho(P_i) : i \in I\}$. Verifiquemos en primer lugar que $\bigcap \mathcal{S} = \{0\}$. Sea $a \in G$, $a > 0$. Luego, $\exists a > 0$. Como $\bigcap \mathcal{S}' = \{0\}$, sabemos que existe $j \in I$ tal que $\exists a \notin P_j$. Luego, $a \notin \rho(P_j)$, y así $\bigcap \mathcal{S} = \{0\}$. Para ver que $\exists\,(\mathbf{G}/\rho(P_i))$ es una cadena, consideremos dos clases de equivalencia $\rho(P_i)+\exists x$ y $\rho(P_i) + \exists y$. Como $\exists\mathbf{G}/P_i$ es una cadena sabemos que las clases de equivalencia de $\exists x$ y $\exists y$ determinadas por P_i verifican que $P_i + \exists x \leq P_i + \exists y$ o $P_i + \exists y \leq P_i + \exists x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $P_i + \exists x \leq P_i + \exists y$. Luego existe $z \in P_i$ tal que $\exists x \leq z + \exists y$. Pero entonces $z \in \rho(P_i)$. De donde se tiene que $\rho(P_i) + \exists x \leq \rho(P_i) + \exists y$. $\square$

3.4. Equivalencia

En la sección anterior definimos un funtor $\Gamma_\exists$ de la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte a la categoría de las MMV-álgebras. El objetivo de esta sección es invertir el funtor $\Gamma_\exists$. Para ello, definimos un funtor $\Xi_\exists$ de la categoría $\mathcal{MMV}$ a la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte y demostramos una equivalencia natural entre ellos.

Para toda MMV-álgebra $\mathbf{A}$, definimos $\Xi_M(\mathbf{A})$ como el ℓ-grupo de Chang monádico de $\mathbf{A}$, esto es, $\Xi_\exists(\mathbf{A}) = \langle G_A; [(1),(0)], \exists_G\rangle$ (Ver Teorema 3.3.9).

Sea $h\colon \langle A; \exists\rangle \to \langle B; \exists'\rangle$ un homomorfismo de MMV-álgebras y consideremos el homomorfismo de monoide y de reticulado

$$h^*\colon \mathbf{M}_A \to \mathbf{M}_B$$

definido por $h^*((a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)) = (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n), \ldots)$. Veamos que $h^*(\exists_M \bar{a}) = \exists'_M(h^*\bar{a})$, para toda $\bar{a} \in M_A$. En efecto,

$$\begin{aligned} &h^*(\exists_M(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = h^*((\exists a_1, \exists a_2, \ldots, \exists a_n)) = (h(\exists a_1), h(\exists a_2), \ldots, h(\exists a_n)) = \\ &(\exists' h a_1, \exists' h a_2, \ldots, \exists' h a_n) = \exists'_M(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) = \exists'_M h^*((a_1, a_2, \ldots, a_n)). \end{aligned}$$

Similarmente, se demuestra que $h^*(\forall_M \bar{a}) = \forall'_M(h^*\bar{a})$, para toda $\bar{a} \in M_A$.

Definimos ahora

$$\Xi_M(h)\colon \mathbf{G}_A \to \mathbf{G}_B$$

por $\Xi_M(h)([\bar{a},\bar{b}]) = [h^*(\bar{a}), h^*(\bar{b})]$. Sabemos que $\Xi_M(h)$ es un homomorfismo de ℓ-grupos unitario (Cignoli et. al., 2000). Veamos que $\Xi_M(h)$ es un homomorfismo monádico. Esto es, veamos que para todo $[\bar{a},\bar{b}] \in G_A$ se verifica que

$$\Xi_M(h)\exists_G[\bar{a},\bar{b}] = \exists'_{G'}\Xi_M(h)[\bar{a},\bar{b}].$$

En efecto, como h^* respeta $+$ y $\vee$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Xi_M(h)\exists_G[\bar{a},\bar{b}] = \Xi_M(h)\left[\exists_M(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{b}), \forall_M(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a})\right] \\
&\quad = \left[h^*\exists_M(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{b}), h^*\forall_M(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a})\right] = \left[\exists'_M h^*(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{b}), \forall'_M h^*(\bar{a}\vee\bar{b}-\bar{a})\right] \\
&\quad = \left[\exists'_M(h^*\bar{a}\vee h^*\bar{b}-h^*\bar{b}), \forall'_M(h^*\bar{a}\vee h^*\bar{b}-h^*\bar{a})\right] = \exists'_{G'}[h^*\bar{a}, h^*\bar{b}] = \exists'_{G'}\Xi_M(h)[\bar{a},\bar{b}].
\end{aligned}$$

Proposición 3.4.1. *La aplicación Ξ_M es un funtor de la categoría $\mathcal{MMV}$ a la categoría $\mathcal{MG}$ de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte.*

Demostración. Sabemos del Teorema 3.3.9 que $\Xi_M(\mathbf{A})$ es un ℓ-grupo monádico, para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{MMV}$. Acabamos de ver que si $h\colon \langle A;\exists\rangle \to \langle B;\exists'\rangle$ es un homomorfismo de MMV-álgebras entonces $\Xi_M(h)\colon \mathbf{G}_A \to \mathbf{G}_B$ es un ℓ-homomorfismo monádico. Del hecho que Ξ es un funtor de la categoría de las MV-álgebras a la categoría de los ℓ-grupos con unidad fuerte, resulta que Ξ_M respeta la identidad y es compatible con la composición. $\square$

Teorema 3.4.2. *$\Gamma_\exists\Xi_\exists$ es naturalmente equivalente al funtor identidad en la categoría $\mathcal{MMV}$ de las MMV-álgebras. Más precisamente, la correspondencia $\varphi_A\colon \mathbf{A} \to \Gamma_\exists\Xi_M(\mathbf{A})$ definida por $\varphi_A(a) = [(a),(0)]$ es un isomorfismo de MMV-álgebras, y para todo par de MMV-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y todo homomorfismo monádico $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\varphi_B"] \\
\Gamma_\exists\Xi_\exists(\mathbf{A}) \arrow[r, "\Gamma_\exists\Xi_\exists(h)"] & \Gamma_\exists\Xi_\exists(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Observemos que si α_A es el isomorfismo natural del MV-reducto de $\mathbf{A}$ sobre $\Gamma\Xi(\mathbf{A})$, entonces $\alpha_A = \varphi_A$. Luego, para demostrar que φ_A es un isomorfismo de MMV-álgebras sólo resta verificar que $\varphi_A(\exists a) = \exists_{G_A}\varphi_A(a)$, para todo $a \in A$. En efecto,

$$\exists_G\varphi_A(a) = \exists_G[(a),(0)] = [\exists_M((a)), \forall_M((0))] = [(\exists a),(0)] = \varphi_A(\exists a).$$

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos MMV-álgebras y $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo monádico. Entonces de la Proposición 3.3.12, la Proposición 3.4.1, la definición de φ y del hecho que α es una transformación natural de $\Gamma\Xi$ a la identidad, tenemos que el diagrama conmuta. $\square$

En lo que sigue demostraremos que el funtor composición $\Xi_\exists\Gamma_\exists$ es naturalmente equivalente al funtor identidad de la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte.

Recordemos primeramente el siguiente resultado.

Lema 3.4.3. *(Cignoli et. al., 2000) Sea* $\mathbf{G}$ *un* ℓ*-grupo con unidad fuerte de orden* u *y sea* $\mathbf{A} = \Gamma(\mathbf{G}, u)$*. Para cada* $0 \leq a \in G$ *existe una única sucesión buena* $g(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *de* $\mathbf{A}$ *tal que* $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$*.*

Esta sucesión se define inductivamente para cada $k \geq 1$ de la siguiente manera:

$$a_1 = a \wedge u,$$

$$a_{k+1} = (a - a_1 - \cdots - a_k) \wedge u.$$

Además, se verifica que $a - a_1 - \cdots - a_k = (a - ku)^+$.

Del Lema 3.4.3 tenemos que la correspondencia $a \mapsto g(a)$ define una biyección del cono positivo G^+ de $\mathbf{G}$ sobre el monoide reticulado $\mathbf{M}_{\Gamma(G,u)}$ de sucesiones buenas de $\Gamma(\mathbf{G}, u)$. Esta biyección es además un isomorfismo de monoide y de reticulado. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.4.4. *(Cignoli et. al., 2000) Sea* $\mathbf{G}$ *un* ℓ*-grupo con unidad fuerte de orden* u*. Entonces la aplicación* g *del Lema 3.4.3 satisface las siguientes condiciones, para todo* $a, b \in G^+$*:*

(a) $g(a + b) = g(a) + g(b)$,

(b) $g(a \vee b) = g(a) \vee g(b)$,

(c) $g(a \wedge b) = g(a) \wedge g(b)$,

(d) $g(u) = u$.

Consideremos un ℓ-grupo monádico $\langle G; u, \exists\rangle$ con unidad fuerte de orden u, y sea $\mathbf{A} = \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$. Probaremos en lo que sigue que la aplicación g satisface $g(\exists a) = \exists_M(g(a))$ y $g(\forall a) = \forall_M(g(a))$, para todo $a \in G^+$.

Proposición 3.4.5. *Sea* $\mathbf{G}$ *un* ℓ*-grupo monádico con unidad fuerte de orden* u *y sea* $\langle A; \exists\rangle = \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$*. Para cada* $0 \leq a \in G$*, si* $a \in \exists G$ *entonces la sucesión buena* $g(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ *satisface que* $\exists a_i = a_i$*, para todo* i*. Es decir, si* $a \in \exists G^+$ *entonces* $\exists_M(g(a)) = g(\exists a) = g(a)$ *y* $\forall_M(g(a)) = g(\forall a) = g(a)$*.*

Demostración. Sea $a \in \exists G^+$ y consideremos la sucesión buena $g(a)$. Demostraremos por inducción que $\exists a_i = a_i$, para todo i. Si $i = 1$, de (G7), tenemos que

$$\exists a_1 = \exists(a \wedge u) = \exists a \wedge u = a \wedge u = a_1.$$

Supongamos que $\exists a_i = a_i$, para $1 \leq i \leq k$. Luego,

$$\begin{aligned}(a - ku)^+ &= a - a_1 - \cdots - a_k = a - (a_1 + \cdots + a_k) = a - (\exists a_1 + \cdots + \exists a_k) \\ &= a - \exists(\exists a_1 + \cdots + \exists a_k) = a - \exists(a_1 + \cdots + a_k).\end{aligned}$$

Luego, $a - \exists(a_1 + \cdots + a_k) \in G^+$. Entonces de (G7) y (G13) tenemos que

$$\begin{aligned}\exists a_{k+1} &= \exists((a - \exists(a_1 + \cdots + a_k)) \wedge u) = \exists(a - \exists(a_1 + \cdots + a_k)) \wedge u \\ &= (\exists a - \exists(a_1 + \cdots + a_k)) \wedge u = (a - a_1 - \cdots - a_k) \wedge u = a_{k+1}.\end{aligned}$$

□

Lema 3.4.6. *Para todo $a \in G^+$, $g(\exists a) = \exists_M g(a)$.*

Demostración. Sea $a \in G^+$ y consideremos la sucesión buena $g(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ del Lema 3.4.3, tal que $a = a_1 + \cdots + a_n$. De la Proposición 3.4.5 y como $\exists a \in G^+$, existe una única sucesión buena $(c_1, \ldots, c_m)$ tal que $\exists a = c_1 + \cdots + c_m$, y además $c_i = \exists c_i$, para todo i.

Como $a \leq \exists a$ entonces $(a_1, \ldots, a_n) \leq (c_1, \ldots, c_m)$, esto es, $g(a) \leq g(\exists a)$. Entonces $\exists_M g(a) \leq \exists_M g(\exists a)$. Por la Proposición 3.4.5, tenemos que $\exists_M g(a) \leq g(\exists a)$.

Por otro lado, de (G12), tenemos que $\exists a = \exists(a_1 + \cdots + a_n) \leq \exists a_1 + \cdots + \exists a_n$. Luego, $g(\exists a) \leq g(\exists a_1 + \cdots + \exists a_n) = (\exists a_1, \ldots, \exists a_n) = \exists_M g(a)$. □

Análogamente se demuestra el siguiente resultado.

Lema 3.4.7. *Para todo $a \in G^+$, $g(\forall a) = \forall_M g(a)$.*

Teorema 3.4.8. *(Cignoli et. al., 2000) La aplicación $\beta_{\langle G,u \rangle} \colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}_{\Gamma(\mathbf{G},u)}$ definida por $\beta_{\langle G,u \rangle}(a) = [g(a^+), g(a^-)]$ es un ℓ-isomorfismo donde $\beta_{\langle G,u \rangle}(u) = [(u), (0)]$.*

Teorema 3.4.9. *La aplicación $\psi_G \colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}_{\Gamma_\exists(G,u)}$ definida por $\psi_G(a) = [g(a^+), g(a^-)]$ es un ℓ-isomorfismo monádico.*

Demostración. Observemos que si $\beta_{\langle G,u \rangle}$ es el ℓ-isomorfismo del ℓ-grupo $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{G}_{\Gamma(G,u)}$, entonces $\beta_{\langle G,u \rangle} = \psi_G$. Luego, ψ_G es un ℓ-isomorfismo donde $\psi_G(u) = [(u), (0)])$. Veamos que $\psi(\exists a) = \exists_G \psi(a)$. Teniendo en cuenta las definiciones de ψ_G y de $\exists_G$, tenemos que

$$\exists_G \psi_G(a) = \exists_G [g(a^+), g(a^-)] = [\exists_M \left(g(a^+) \vee g(a^-) - g(a^-)\right), \forall_M \left(g(a^+) \vee g(a^-) - g(a^+)\right)].$$

Para todo $a \in G$, $a^+ + a^- = a^+ \vee a^-$. Como g respeta $+$ y $\vee$, tenemos que $g(a^+) + g(a^-) = g(a^+) \vee g(a^-)$. Luego,

$$\left(g(a^+) \vee g(a^-)\right) - g(a^+) = g(a^-)$$

y

$$\left(g(a^+) \vee g(a^-)\right) - g(a^-) = g(a^+).$$

Entonces, $\exists_G [g(a^+), g(a^-)] = [\exists_M (g(a^+)), \forall_M (g(a^-))]$.

Además, $\exists_M (g(a^+)) = g(\exists a \vee 0)$. En efecto, del Lema 3.4.6, (G2) and (G3),

$$\exists_M (g(a^+)) = g(\exists(a \vee 0)) = g(\exists a \vee \exists 0) = g(\exists a \vee 0).$$

Veamos que $\forall_M (g(a^-)) = g(-\exists a \vee 0)$. En efecto, del Lema 3.4.7 y de (G9), obtenemos que

$$\forall_M (g(a^-)) = g(\forall(a^-)) = g(\forall(-a \vee 0)) = g(\forall(-a) \vee 0) = g(-\exists a \vee 0).$$

Luego,

$$\exists_G \psi(a) = [g(\exists a \vee 0), g(-\exists a \vee 0)] = \psi_G(\exists a).$$

Por lo tanto, ψ_G es un ℓ-isomorfismo monádico. □

Teorema 3.4.10. *El funtor composición $\Xi_\exists\Gamma_\exists$ es naturalmente equivalente al funtor identidad de la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte. En otras palabras, si $f\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$ es un ℓ-homomorfismo monádico entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\langle G; u, \exists\rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_G"'] & \langle H; v, \exists'\rangle \arrow[d, "\psi_H"] \\
\Xi_\exists\Gamma_\exists(\mathbf{G}, u) \arrow[r, "\Xi_\exists\Gamma_\exists(f)"] & \Xi_\exists\Gamma_\exists(\mathbf{H}, v)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Se deduce de la Proposición 3.3.12, la Proposición 3.4.1, el Teorema 3.4.9 y del hecho que β es una transformación natural de $\Xi\Gamma$ en la identidad de la categoría de los ℓ-grupos con unidad fuerte. $\square$

Corolario 3.4.11. *El funtor $\Gamma_\exists$ define una equivalencia natural entre la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte, y la categoría de las MMV-álgebras.*

3.5. Aplicaciones

En esta sección demostramos algunas aplicaciones de la equivalencia entre la categoría de los ℓ-grupos monádicos con unidad fuerte de orden y la categoría de las MMV-álgebras.

Lema 3.5.1. *Sean $\langle G; u, \exists\rangle$ y $\langle H; v, \exists'\rangle$ dos ℓ-grupos monádicos. Si $h\colon \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u) \to \Gamma_\exists(\mathbf{H}, v)$ es un homomorfismo monádico de MMV-álgebras entonces existe un único ℓ-homomorfismo monádico $f\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$ tal que $h = \Gamma_\exists(f)$. Además*

(1) si h es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva,

(2) si h es inyectiva entonces f es inyectiva.

Demostración. Del Teorema 3.4.9 y del Teorema 3.4.10 definimos

$$f = \psi_H^{-1}\Xi(h)\psi_G.$$

Veamos que $\Gamma_\exists(f)(a) = h(a)$, para todo $a \in [0, u]$. Notemos que si $a \in [0, u]$ entonces $g(a^+) = g(a) = (a)$ y $g(a^-) = (0)$. En vista de esto,

$$\begin{aligned}
f(a) &= \psi_H^{-1}\Xi(h)\left[g(a^+), g(a^-)\right] = \psi_H^{-1}\Xi(h)\left[(a), (0)\right] = \psi_H^{-1}\left[h^*((a)), h^*((0))\right] \\
&= \psi_H^{-1}\left[(h(a)), (h(0))\right] = \psi_H^{-1}\left[(h(a)), (0)\right] = h(a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $h = \Gamma_\exists(f)$. Para demostrar la unicidad de f, supongamos que existe

$$f'\colon \langle G; u, \exists\rangle \to \langle H; v, \exists'\rangle$$

que extiende a h y que $f(b) \neq f'(b)$, para algún $b \in G^+$.

De la Proposición 3.4.5 sabemos que existen $a_1, \ldots a_n \in \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$ tales que $b = a_1 + \cdots + a_n$. Luego,

$$f(b) = f(a_1) + \cdots + f(a_n) = h(a_1) + \cdots + h(a_n) = f'(a_1) + \cdots + f'(a_n) = f'(b),$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos que h es sobreyectiva, y sea $b \in \Gamma_\exists(\mathbf{H}, v)$. Luego, existe $a \in \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$ tal que $h(a) = f(a) = b$. De la Proposición 3.4.5 sabemos que todo elemento de H^+ se escribe como suma de elementos de $\Gamma_\exists(\mathbf{H}, v)$, y respectivamente todo elemento de G^+ se escribe como suma de elementos de $\Gamma_\exists(\mathbf{G}, v)$. Entonces $f\colon G^+ \to H^+$ es sobreyectiva, y en consecuencia f es sobreyectiva.

Supongamos que h es inyectiva, y que f no lo es. Luego, existe $a \neq 0 \in G$ tal que $f(a) = 0$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a > 0$. Luego, $0 = f(a \wedge u) = h(a \wedge u)$, contradicción. $\square$

Recordemos que si $\mathbf{G}$ es un ℓ-grupo con unidad fuerte de orden u y $\mathbf{A} = \Gamma(\mathbf{G}, u)$, entonces la correspondencia

$$\sigma\colon \mathcal{I}(\mathbf{A}) \to \mathcal{I}(\mathbf{G})$$

definida por $\sigma(J) = \{x \in G : |x| \wedge u \in J\}$ es un isomorfismo de orden entre el conjunto $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ de los ideales de la MV-álgebra $\mathbf{A}$ y el conjunto $\mathcal{I}(\mathbf{G})$ de los ℓ-ideales de $\mathbf{G}$. El isomorfismo inverso τ está dado por $\tau(H) = H \cap [0, u]$, para todo $H \in \mathcal{I}(\mathbf{G})$ (Cignoli et. al., 2000, Theorem 7.2.2). En el caso de los ℓ-grupos monádicos tenemos lo siguiente.

Teorema 3.5.2. *Sea $\langle G; u, \exists\rangle$ un ℓ-grupo monádico con unidad fuerte u, y sea $\mathbf{A} = \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$. Entonces la correspondencia*

$$\sigma\colon J \mapsto \{x \in G : |x| \wedge u \in J\}$$

es un isomorfismo de orden entre el conjunto $\mathcal{IM}(\mathbf{A})$ de los ideales monádicos de la MMV-álgebra $\mathbf{A}$, ordenados por inclusión, y el conjunto ordenado $\mathcal{IM}(\mathbf{G})$ de los ℓ-ideales monádicos de $\mathbf{G}$. La aplicación $\tau\colon \mathcal{IM}(\mathbf{G}) \to \mathcal{IM}(\mathbf{A})$, definida por $\tau(H) = H \cap [0, u]$, es el isomorfismo inverso.

Demostración. Sea J un ideal monádico de $\mathbf{A}$. Sabemos que $\sigma(J)$ es un ℓ-ideal de $\mathbf{G}$. Veamos que $\sigma(J)$ es un ℓ-ideal monádico. Para ello, sea $x \in \sigma(J)$. Queremos ver que $|\exists x| \wedge u \in J$. Observemos en primer lugar que $|\exists x| = \exists x^+ + \forall x^-$. En efecto, de (G9),

$$\begin{aligned} |\exists x| &= (\exists x)^+ + (\exists x)^- = \exists x^+ + (-\exists x \vee 0) = \exists x^+ + (\forall -x \vee 0) \\ &= \exists x^+ + \forall(-x \vee 0) = \exists x^+ + \forall x^-. \end{aligned}$$

Como J es un ideal monádico de $\mathbf{A}$, de $|x| \wedge u \in J$ y (G7), tenemos que $\exists(|x| \wedge u) = \exists|x| \wedge u \in J$.

Además, $x^+ \leq |x|$. Entonces $\exists x^+ \leq \exists|x|$ y $\exists x^+ \wedge u \leq \exists|x| \wedge u$. En consecuencia, $\exists x^+ \wedge u \in J$. De la misma manera, obtenemos que $\exists x^- \wedge u \in J$. Luego, de $\forall x^- \wedge u \leq \exists x^- \wedge u$, y por ser J decreciente, tenemos que $\forall x^- \wedge u \in J$. Como J es un ideal de $\mathbf{A}$, tenemos que $(\exists x^+ \wedge u) \oplus (\forall x^- \wedge u) \in J$. Pero,

$$\begin{aligned}
&(\exists x^+ \wedge u) \oplus (\forall x^- \wedge u) = \big((\exists x^+ \wedge u) + (\forall x^- \wedge u)\big) \wedge u \\
&= \big(((\exists x^+ \wedge u) + \forall x^-) \wedge ((\exists x^+ \wedge u) + u)\big) \wedge u = ((\exists x^+ \wedge u) + \forall x^-) \wedge u \\
&= \big(\exists x^+ + \forall x^-\big) \wedge (u + \forall x^-) \wedge u = (\exists x^+ + \forall x^-) \wedge u \in J.
\end{aligned}$$

Luego, $|\exists x| \wedge u \in J$. Por lo tanto, $\sigma(J)$ es un ℓ-ideal monádico de $\mathbf{G}$. Si H es un ℓ-ideal monádico de $\mathbf{G}$, es claro que $\tau(H) = H \cap [0,u]$ es un ideal monádico de $\mathbf{A}$. $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema 3.5.2 y del Teorema 3.3.17, tenemos lo siguiente.

Corolario 3.5.3. *Sea $\langle G; u, \exists\rangle$ un ℓ-grupo monádico con unidad fuerte u, y sea $\mathbf{A} = \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$. Entonces,*

$$\mathcal{IM}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{I}(\exists \mathbf{G}) \cong \mathcal{IM}(\mathbf{A}) \cong \mathcal{I}(\exists \mathbf{A}).$$

Corolario 3.5.4. *Bajo el isomorfismo establecido en el Teorema 3.5.2, el conjunto de ℓ-ideales monádicos maximales de $\mathbf{G}$ se corresponde con los ideales monádicos maximales de $\Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$, y el conjunto de ℓ-ideales monádicos primos de $\mathbf{G}$ se corresponde con los ideales monádicos primos de $\Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$.*

Teorema 3.5.5. *Sea $\langle G; u, \exists\rangle$ un ℓ-grupo monádico con unidad fuerte u. Entonces para todo ℓ-ideal monádico J de $\mathbf{G}$ son isomorfos*

$$\Gamma_\exists\left(\mathbf{G}/J, u + J\right) \cong \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)/(J \cap [0,u]).$$

Demostración. Sea $\pi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}/J$ el epimorfismo canónico. Del Teorema 3.5.2, sabemos que $J \cap [0,u]$ es un ideal monádico de la MMV-álgebra $\Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)$. Además, $\Gamma_\exists(\pi)\colon \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u) \to \Gamma_\exists\left(\mathbf{G}/J, u + J\right)$ es un epimorfismo tal que $\mathrm{Ker}(\Gamma_\exists(\pi)) = J \cap [0,u]$. Luego, $\Gamma_\exists\left(\mathbf{G}/J, u + J\right) \cong \Gamma_\exists(\mathbf{G}, u)/(J \cap [0,u])$. $\square$

4. Hoops de Wajsberg monádicos

La clase de los hoops de Wajsberg han sido extensamente estudiados (ver por ejemplo Ferreirim (1992), Blok y Pigozzi (1994), Blok y Ferreirim (2000), Aglianò y Panti (2002)). Es sabido que existe una relación entre los hoops de Wajsberg y las MV-álgebras. En todo hoop de Wajsberg acotado se puede definir una estructura de MV-álgebra, definiendo

$$\neg x := x \to 0,$$

$$x \oplus y := \neg(\neg x \odot \neg y),$$

$$0 := \neg 1,$$

y si $\mathbf{A}$ es una MV-álgebra, entonces $\langle A; \odot, \to, 1\rangle$ es un hoop de Wajsberg. Más aún, los hoops de Wajsberg constituyen la clase ecuacional de todos los $\{\odot, \to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras (ver la sección §1.4).

Motivados por esto, en este capítulo estudiamos la clase de todos los $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras monádicas. Demostramos que esta clase es una variedad y damos el conjunto de identidades que la define. A toda álgebra perteneciente a esta clase la llamamos *hoop de Wajsberg monádico*. En este capítulo estudiamos la variedad de los hoops de Wajsberg monádicos. Caracterizamos los miembros subdirectamente irreducibles y las congruencias por medio de filtros que llamamos filtros monádicos. Estos son filtros que poseen la propiedad adicional de que $\forall a$ pertenece al filtro, para todo a perteneciente al filtro. Demostramos también que el reticulado de los filtros monádicos de un hoop de Wajsberg monádico es isomorfo al reticulado de los filtros de la subálgebra de los elementos constantes del hoop. Demostramos además que la variedad está generada por sus miembros finitos. Analizamos la relación entre las subvariedades de los hoops de Wajsberg monádicos y las subvariedades de las MV-álgebras monádicas. Determinamos las subvariedades de la variedad de los hoops de Wajsberg monádicos de ancho k.

El capítulo se estructura de la siguiente manera. En la sección 4.1 damos la definición de un hoop de Wajsberg monádico, estudiamos los filtros monádicos, las congruencias, y caracterizamos a los miembros subdirectamente irreducibles de la variedad. En la sección §4.2 demostramos que la clase de los hoops de Wajsberg monádicos es exactamente la clase de todos los hoop subreductos monádicos de las MV-álgebras monádicas. Finalmente, en la §4.3 estudiamos las subvariedades de hoops de Wajsberg monádicos de ancho k.

4.1. Definición y propiedades

Sea $\mathbf{A}$ una MMV-álgebra, y consideremos el $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-reducto de la misma. A todo $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-reducto de un álgebra $\mathbf{A}$, lo llamamos un *reducto hoop monádico* de $\mathbf{A}$. En el Lema 4.1.1, reunimos algunas de las propiedades que son verificadas por el reducto hoop mónadico de una MMV-álgebra.

Lema 4.1.1. *Las siguientes identidades se satisfacen en el reducto hoop monádico de toda MMV-álgebra:*

(MH1) $\forall 1 \approx 1$,

(MH2) $\forall x \to x \approx 1$,

(MH3) $\forall((x \to \forall y) \to \forall y) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall y$,

(MH4) $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) \approx 1$,

(MH5) $\forall(\forall x \to \forall y) \approx \forall x \to \forall y$,

(MH6) $\forall(x \odot x) \approx \forall x \odot \forall x$,

(MH7) $\forall((x \to \forall y) \to x) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall x$,

(MH8) $\forall(x \wedge y) \approx \forall x \wedge \forall y$,

(MH9) $\forall(\forall x \odot \forall y) \approx \forall x \odot \forall y$.

Demostración. Las identidades (MH1), (MH2), (MH4), (MH6), (MH8) y (MH9), son inmediatas de (MMV14), (MMV7), (MMV21), (MMV11), (MMV8) y (MMV10), respectivamente.

Notemos que la identidad (MH3) es equivalente a la identidad

$$\forall(x \vee \forall y) \approx \forall x \vee \forall y.$$

En consecuencia, de la Proposición 2.2.9, tenemos que (MH3) se satisface.

Veamos que (MH5) se satisface en toda MMV-álgebra $\mathbf{A}$. Para ello, consideremos $a, b \in A$. Entonces

$$\forall(\forall a \to \forall b) = \forall(\neg\forall a \oplus \forall b) = \forall(\forall\neg\forall a \oplus \forall b) = \forall\neg\forall a \oplus \forall b = \neg\forall a \oplus \forall b = \forall a \to \forall b.$$

Demostremos ahora que (MH7) se satisface en toda MV-álgebra $\mathbf{S}_n^t$, para todo $n, t \in \mathbb{N}$. Como estas álgebras generan la variedad $\mathcal{MV}$ obtendremos como consecuencia que (MH7) se satisface en toda MV-álgebra.

Sean $a = \langle a_i \rangle$ y $b = \langle b_i \rangle$ dos elementos de S_n^t. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 = \text{mín}_{1\leq i\leq t}\{a_i\}$ y que $b_1 = \text{mín}_{1\leq i\leq t}\{b_i\}$. Luego, $\forall_\wedge a$ es la t-upla constante $\forall_\wedge a = \langle a_1, a_1, \ldots, a_1 \rangle$ y, análogamente, $\forall_\wedge b = \langle b_1, b_1, \ldots, b_1 \rangle$. Para todo j, $a_1 \leq a_j$. Luego, $a_j \to b_1 \leq a_1 \to b_1$. Entonces, $(a_1 \to b_1) \to a_1 \leq (a_j \to b_1) \to a_1 \leq (a_j \to b_1) \to a_j$. Luego, $\text{mín}_{1\leq j\leq t}\{(a_j \to b_1) \to a_j\} = (a_1 \to b_1) \to a_1$. Por lo tanto, $\forall((a \to \forall b) \to a) \approx (\forall a \to \forall b) \to \forall a$.

Hemos probado que (MH7) se satisface en $\mathbf{S}_n^t$. Del Corolario 2.2.7, sabemos que las álgebras $\mathbf{S}_n^t$ generan la variedad $\mathcal{MMV}$. Luego, (MH7) se satisface en toda MMV-álgebra. $\square$

Motivados por el Lema 4.1.1, definimos el concepto de hoop de Wajsberg monádico.

Definición 4.1.2. Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \odot, \to, \forall, 1\rangle$ de tipo (2,2,1,0) es un *hoop de Wajsberg monádico* si $\langle A; \odot, \to, 1\rangle$ es un hoop de Wajsberg, y si se satisfacen las siguientes identidades:

(MH1) $\forall 1 \approx 1$,

(MH2) $\forall x \to x \approx 1$,

(MH3) $\forall((x \to \forall y) \to \forall y) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall y$,

(MH4) $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) \approx 1$,

(MH5) $\forall(\forall x \to \forall y) \approx \forall x \to \forall y$,

(MH6) $\forall(x \odot x) \approx \forall x \odot \forall x$,

(MH7) $\forall((x \to \forall y) \to x) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall x$,

(MH8) $\forall(x \wedge y) \approx \forall x \wedge \forall y$,

(MH9) $\forall(\forall x \odot \forall y) \approx \forall x \odot \forall y$.

La clase de los hoops de Wajsberg monádicos es una variedad, que notamos con $\mathcal{MWH}$.
De la identidad (MH3), tenemos que la siguiente identidad se satisface en todo hoop de Wajsberg monádico:

(MH10) $\forall x \approx \forall\forall x$.

Si $\mathbf{H}$ es un hoop de Wajsberg monádico acotado con primer elemento 0, entonces $\forall 0 = 0$. En el siguiente lema probaremos que en todo hoop de Wajsberg monádico acotado podemos definir una estructura de MMV-álgebra.

Lema 4.1.3. *Sea* $\mathbf{H} = \langle H; \odot, \to, \forall, 1\rangle$ *un hoop de Wajsberg monádico acotado con primer elemento 0. Si definimos*

$$\neg x = x \to 0,$$

$$x \oplus y = \neg x \to y,$$

entonces $\langle H; \oplus, \neg, \forall, 0\rangle$ *es una MMV-álgebra.*

Demostración. Sabemos que si $\langle H; \odot, \to, 1\rangle$ es un hoop de Wajsberg acotado entonces $\langle H; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra. Veamos ahora que $\forall$ satisface las ecuaciones (MMV7)-(MMV12) del Lema 2.1.2. Las ecuaciones (MMV7), (MMV8), (MMV10) y (MMV11) son inmediatas de (MH2), (MH8), (MH9) y (MH6), respectivamente.

Sea $a \in H$. De (MH5) y teniendo en cuenta que $\forall 0 = 0$, tenemos que $\forall(\neg\forall a) = \forall(\forall a \to 0) = \forall a \to 0 = \neg\forall a$. Luego, (MMV9) se verifica. Por último, (MMV12) se deduce de (MH7). En efecto, $\forall(a \oplus a) = \forall((a \to 0) \to a) = \forall((a \to \forall 0) \to a) = (\forall a \to 0) \to \forall a = \forall a \oplus \forall a$. $\square$

Observemos en la demostración anterior, que en un hoop de Wajsberg monádico acotado demostramos la identidad $\forall(x \oplus x) \approx \forall x \oplus \forall x$ a partir de la identidad (MH7). Esta identidad volverá a ser importante en el capítulo 5, donde estudiaremos los $\{\rightarrow, \forall, 1\}$-subreductos de las MMV-álgebras.

Como consecuencia inmediata del Lema 4.1.1, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1.4. *El reducto hoop monádico de toda MMV-álgebra, es un hoop de Wajsberg monádico.*

Ejemplo 4.1.5. Notamos con $\mathbf{C}^k_{n,\omega}$ al hoop de Wajsberg monádico que es el reducto hoop monádico de la MMV-álgebra $\mathbf{S}^k_{n,\omega}$, y con $\mathbf{C}^k_m$ al hoop de Wajsberg monádico reducto de la MMV-álgebra $\mathbf{S}^k_m$.

Sea $\mathbf{H}$ un hoop de Wajsberg monádico. Consideremos el conjunto $\forall H = \{\forall x : x \in H\}$. De (MH1), (MH5), (MH9) y (MH10), obtenemos que $\forall \mathbf{H} = \langle \forall H; \odot, \rightarrow, \forall, 1\rangle$ es una subálgebra de $\mathbf{H}$.

Sea $\mathbf{A}$ un hoop de Wajsberg, y consideremos el hoop de Wajsberg producto directo $\mathbf{A}^k$, siendo k un entero positivo. Definimos en $\mathbf{A}^k$ el operador $\forall_\wedge \colon A^k \rightarrow A^k$ por $\forall_\wedge(\langle a_1, \ldots, a_k\rangle) = \langle c, \ldots, c\rangle$ donde $c = \bigwedge_{i=1}^k a_i$. Entonces tenemos la siguiente proposición.

Lema 4.1.6. *Si* $\mathbf{A}$ *es un hoop de Wajsberg entonces* $\mathbf{A}^k = \langle A^k; \odot, \rightarrow, \forall_\wedge, 1\rangle$ *es un hoop de Wajsberg monádico, para todo entero positivo* k.

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un hoop de Wajsberg. Sabemos que existe una MV-álgebra $\mathbf{B}$ y un $\{\odot, \rightarrow, 1\}$-monomorfismo $\phi \colon \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, y ϕ induce un $\{\odot, \rightarrow, 1\}$-monomorfismo $\bar{\phi}$ de forma natural $\bar{\phi} \colon \mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{B}^k$. De la Proposición 2.1.13 sabemos que $\mathbf{B}^k = \langle B^k; \forall_\wedge\rangle$ es una MMV-álgebra y del Lema 4.1.4, tenemos que $\mathbf{B}^k$ es un hoop de Wajsberg monádico. Luego, $\mathbf{A}^k$ es un hoop de Wajsberg monádico. $\square$

El Lema 4.1.6 nos permite encontrar ejemplos de hoops de Wajsberg monádicos que serán importantes para el desarrollo del capítulo. En particular, trabajaremos con el hoop de Wajsberg monádico cancelativo $\mathbf{C}^k_\omega$.

4.1.1. Filtros monádicos y congruencias

En esta sección definimos el concepto de filtro monádico. Caracterizamos a las congruencias de todo hoop de Wajsberg monádico por medio del conjunto de filtros monádicos. Más precisamente, establecemos un isomorfismo entre el reticulado de congruencias de un hoop de Wajsberg monádico $\mathbf{H}$ y el reticulado de filtros monádicos de $\mathbf{H}$. Probamos también que el reticulado de filtros monádicos de $\mathbf{H}$ es isomorfo al reticulado de filtros de $\forall \mathbf{H}$.

Definición 4.1.7. Sea $\mathbf{H} \in \mathcal{MWH}$. Un filtro F de $\mathbf{H}$ se dice un *filtro monádico* de $\mathbf{H}$, si verifica que $\forall a \in F$, para todo $a \in F$.

Notamos con $\mathcal{F}_M(\mathbf{H})$ al conjunto de todos los filtros monádicos de $\mathbf{H}$, ordenados por inclusión. Observemos que si $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{H})$ entonces, F es cerrado por $\to$, $\odot$, $\forall$ y $1 \in F$. Luego, todo filtro monádico F es un subuniverso de $\mathbf{H}$.

Si $\mathbf{H} \in \mathcal{MWH}$ y $X \subseteq H, X \neq \emptyset$, el filtro monádico generado por X es el conjunto

$$\mathrm{FMg}(X) = \{b \in H : \forall a_1 \to (\forall a_2 \to (\ldots(\forall a_n \to b)\ldots)) = 1 \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in X\},$$

o lo que es lo mismo,

$$\mathrm{FMg}(X) = \{b \in H : \forall a_1 \odot \forall a_2 \odot \cdots \odot \forall a_n \leq b, \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in X\}.$$

Si en particular $X = \{a\}$ entonces $\mathrm{FMg}(a) = \left\{b \in H : \forall a \overset{n}{\to} b = 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\right\}$. Observar que $\mathrm{FMg}(X) = \mathrm{Fg}(\forall X)$.

Teorema 4.1.8. *Sea $\mathbf{H} \in \mathcal{MWH}$. La correspondencia $\mathbf{Con}_{\mathcal{MWH}}(\mathbf{H}) \to \mathcal{F}_M(\mathbf{H})$ definida por $\theta \to 1/\theta$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $F \to \theta_F$.*

Demostración. Sea $\theta \in Con_{\mathcal{MWH}}(\mathbf{H})$. Consideremos el filtro $1/\theta$ y sea $x \in 1/\theta$. Entonces $(x, 1) \in \theta$. Luego, $(\forall x, \forall 1) \in \theta$. De (MH1), tenemos que $(\forall x, 1) \in \theta$. Luego, $\forall x \in 1/\theta$ y en consecuencia $1/\theta$ es un filtro monádico.

Sea $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{H})$. Veamos que la relación

$$\theta_F = \left\{(a, b) \in H^2 : (a \to b) \odot (b \to a) \in F\right\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{H}$. Para ello, sean $a, b \in H$ tal que $(a \to b) \odot (b \to a) \in F$. Luego, $a \to b \in F$ y $b \to a \in F$. Como F es monádico, tenemos que $\forall(a \to b) \in F$ y $\forall(b \to a) \in F$. Por (MH4) y por ser F creciente, tenemos que $\forall a \to \forall b \in F$ y $\forall b \to \forall a \in F$. Por lo tanto, $(\forall a \to \forall b) \odot (\forall b \to \forall a) \in F$. $\square$

El siguiente teorema establece el isomorfismo entre el reticulado de filtros monádicos de $\mathbf{H}$ y el reticulado de filtros de $\forall\mathbf{H}$.

Teorema 4.1.9. *Sea $\mathbf{H} \in \mathcal{MWH}$. La correspondencia $\mathcal{F}_M(\mathbf{H}) \to \mathcal{F}(\forall\mathbf{H})$ definida por $F \to F \cap \forall H$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $M \to \mathrm{FMg}(M)$.*

Demostración. Es claro que si $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{H})$ entonces $F \cap \forall H \in \mathcal{F}(\forall\mathbf{H})$.

Sea $M \in \mathcal{F}(\forall\mathbf{H})$. Veamos que $\mathrm{FMg}(M) \cap \forall H = M$. Claramente, $M \subseteq \mathrm{FMg}(M) \cap \forall H$. Sea $z \in \mathrm{FMg}(M) \cap \forall H$. Luego, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ tales que $\forall a_1 \odot \forall a_2 \odot \cdots \odot \forall a_n \leq z$. Como M es un filtro monádico de $\forall\mathbf{H}$, sabemos que $\forall a_1 \odot \forall a_2 \odot \cdots \odot \forall a_n \in M$. Como $z \in \forall H$ y M es creciente, obtenemos que $z \in M$.

Consideremos F un filtro monádico de $\mathbf{H}$, y probemos que $\mathrm{FMg}(F \cap \forall H) = F$. De $F \cap \forall H \subseteq F$ sabemos que $\mathrm{FMg}(F \cap \forall H) \subseteq F$. Sea $f \in F$. Luego, $\forall f \in F \cap \forall H$ y entonces $\forall f \in \mathrm{FMg}(F \cap \forall H)$. Pero $\mathrm{FMg}(F \cap \forall H)$ es creciente en H y como $\forall f \leq f$, entonces $f \in \mathrm{FMg}(F \cap \forall H)$. $\square$

Corolario 4.1.10. *Si $\mathbf{H} \in \mathcal{MWH}$ entonces*

$$\mathbf{Con}_{\mathcal{MWH}}(\mathbf{H}) \cong \mathcal{F}_M(\mathbf{H}) \cong \mathcal{F}(\forall\mathbf{H}) \cong \mathbf{Con}_{\mathcal{WH}}(\forall\mathbf{H}).$$

Como consecuencia, la variedad $\mathcal{MWH}$ tiene la propiedad de distributividad de congruencias.

4.1.2. Álgebras subdirectamente irreducibles

En esta sección caracterizamos a los miembros subdirectamente irreducibles de la variedad $\mathcal{MWH}$. Como consecuencia demostramos que si $\mathbf{H}$ es un hoop de Wajsberg subdirectamente irreducible entonces $\mathbf{H}$ es acotado o $\mathbf{H}$ es cancelativo. Este resultado será importante en la sección §4.3.

Como consecuencia inmediata del Corolario 4.1.10, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.1.11. *Sea* $\mathbf{H} \in \mathcal{MWH}$. *Entonces,* $\mathbf{H}$ *es subdirectamente irreducible (simple) si y sólo si* $\forall\mathbf{H}$ *es un hoop de Wajsberg subdirectamente irreducible (simple).*

Sabemos que las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{WH}$ son totalmente ordenadas. Luego, del Corolario 4.1.11 obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.1.12. *Si* $\mathbf{H}$ *es un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible entonces* $\forall\mathbf{H}$ *es totalmente ordenada.*

Proposición 4.1.13. *Todo hoop de Wajsberg monádico es producto subdirecto de una familia de hoops de Wajsberg monádicos* $\{\mathbf{A}_i\}$, $i \in I$, *tales que* $\forall\mathbf{A}_i$ *es totalmente ordenada.*

Observemos que en todo hoop podemos escribir la operación $\oplus$ en términos de la operación $\odot$ y de $\rightarrow$ de la siguiente manera:

$$a \oplus b = (a \rightarrow (a \odot b)) \rightarrow b,$$

Además, en todo hoop de Wajsberg acotado $\oplus$ es la suma usual (ver §1.4). Si $\mathbf{H}$ es un hoop cancelativo, entonces $a \oplus b = 1$ para todo $a, b \in H$. Más aún, un hoop de Wajsberg es cancelativo si y sólo si satisface la identidad $x \oplus x \approx 1$.

Teorema 4.1.14. *Sea* $\mathbf{H}$ *un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible. Entonces* $\mathbf{H}$ *es acotado o* $\mathbf{H}$ *es cancelativo.*

Demostración. Si $\mathbf{H}$ es subdirectamente irreducible, sabemos que $\forall\mathbf{H}$ es un hoop de Wajsberg totalmente ordenado. Luego, $\forall\mathbf{H}$ es acotado o $\forall\mathbf{H}$ es cancelativo. Si $\forall\mathbf{H}$ es acotado, entonces $\mathbf{H}$ es acotado. Supongamos ahora que $\forall\mathbf{H}$ es cancelativo, luego para todo $a \in H$ tenemos que $\forall a \oplus \forall a = 1$. Entonces, de (MH2) y (MH7), $a \oplus a \geq \forall(a \oplus a) = \forall a \oplus \forall a = 1$. Luego, $\mathbf{H}$ es cancelativo. $\square$

4.2. Subreductos hoop monádicos de las MV-álgebras monádicas

En esta sección demostramos que la variedad de los hoops de Wajsberg monádicos es exactamente la clase de subreductos hoops monádicos de las MMV-álgebras, y probamos que existe una estrecha relación entre las variedades de las MMV-álgebras y variedades de hoops de Wajsberg monádicos.

Vimos que los hoops de Wajberg monádicos acotados son los $\{\odot, \rightarrow, \forall, 1\}$-reductos de las MMV-álgebras. Veremos en esta sección que los hoops de Wajsberg monádicos son los $\{\odot, \rightarrow, \forall, 1\}$-subreductos de las MMV-álgebras.

Lema 4.2.1. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A; \odot, \rightarrow, \forall, 1\rangle \in \mathcal{MWH}$ *y* $a \in \forall A$. *Definimos para* $x, y \in [a)$, $x \odot_a y = (x \odot y) \vee a$. *Entonces* $[\mathbf{a}) = \langle [a); \odot_a, \rightarrow, \forall, 1\rangle$ *es un hoop de Wajsberg monádico acotado.*

Demostración. Notemos en primer lugar que si $a \in \forall A$, entonces $a = \forall a$. Sabemos que $\langle [a); \odot_a, \rightarrow, 1\rangle$ es un hoop de Wajsberg acotado. Sean $x, y \in [a)$. Las propiedades (MH1), (MH2), (MH3), (MH4), (MH5) y (MH7) son inmediatas.

Probemos (MH6), esto es, $\forall(x \odot_a x) = \forall x \odot_a \forall x$. En efecto, $\forall(x \odot_a x) = \forall((x \odot x) \vee a) = \forall(x \odot x) \vee a = (\forall x \odot \forall x) \vee a = \forall x \odot_a \forall x$.

Veamos ahora que (MH8) se satisface. En efecto,

$$\begin{aligned}\forall(x \wedge_a y) &= \forall(x \odot_a (x \rightarrow y)) = \forall((x \odot (x \rightarrow y)) \vee a) = \forall(x \odot (x \rightarrow y)) \vee a \\ &= (\forall x \wedge \forall y) \vee a = (\forall x \odot (\forall x \rightarrow \forall y)) \vee a = \forall x \odot_a (\forall x \rightarrow \forall y) = \forall x \wedge_a \forall y.\end{aligned}$$

Por último, veamos que $\forall(\forall x \odot_a \forall y) = \forall x \odot_a \forall y$. En efecto, $\forall(\forall x \odot_a \forall y) = \forall((\forall x \odot \forall y) \vee a) = \forall(\forall x \odot \forall y) \vee a = \forall x \odot_a \forall y$. Hemos probado (MH9). $\square$

Teorema 4.2.2. *Si* $\mathbf{A}$ *es un hoop de Wajsberg monádico, entonces*

$$\mathbf{A} \in \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}\left(\{[\forall \mathbf{a}) : a \in A\}\right).$$

Demostración. Consideremos la familia $\{(a] = \{x \in A : x \leq a\} : a \in A\}$. Como $(a \wedge b] = (a] \cap (b]$, la familia $\{(a] : a \in A\}$ tiene la propiedad de intersecciones finitas. Por lo tanto, existe un ultrafiltro $F \subseteq \mathcal{P}(A) = Su(A)$ que contiene a todos los miembros de la familia.

Sea

$$\psi \colon \mathbf{A} \rightarrow \left(\prod_{z \in A} [\forall \mathbf{z})\right) / F,$$

definido de la siguiente manera $\psi(a) = (a \vee \forall z)_{z \in A}/F$. Observemos que dados $a, b \in A$,

$$\psi(a) = \psi(b) \text{ si y sólo si } \{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\} \in F.$$

Veamos que $\psi(\forall a) = \forall(\psi a)$, $\psi(a \odot b) = \psi(a) \odot \psi(b)$, $\psi(a \rightarrow b) = \psi(a) \rightarrow \psi(b)$ y que ψ es inyectiva.

Observemos que $\forall(\psi a) = \forall\left((a \vee \forall z)_{z \in A}/F\right) = \forall\left((a \vee \forall z)_{z \in A}\right)/F = \left(\forall(a \vee \forall z)\right)_{z \in A}/F$. Luego,

$$\psi(\forall a) = \forall(\psi a) \text{ si y sólo si } \{z \in A : \forall z \vee \forall a = \forall(a \vee \forall z)\} \in F.$$

Pero en $\mathbf{A}$ se verifica que $\forall z \vee \forall a = \forall(a \vee \forall z)$. Entonces, $\{z \in A : \forall z \vee \forall a = \forall(a \vee \forall z)\} = A$ y $A \in F$.

Veamos que $\psi(a \odot b) = \psi(a) \odot \psi(b)$. Si $z \leq a \odot b$ entonces $\forall z \vee (a \odot b) = a \odot b = (\forall z \vee a) \odot (\forall z \vee b)$. Luego,

$$(a \odot b] \subseteq \{z \in A : \forall z \vee (a \odot b) = (\forall z \vee a) \odot (\forall z \vee b)\}.$$

Luego, $\{z \in A : \forall z \vee (a \odot b) = (\forall z \vee a) \odot (\forall z \vee b)\} \in F$.

Notemos que $\psi(a \to b) = \psi(a) \to \psi(b)$ si y sólo si

$$\{z \in A : \forall z \vee (a \to b) = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b)\} \in F.$$

Sabemos que existe $c \in A$ tal que $c \leq a, b$. Veamos que

$$(c] \subseteq \{z \in A : \forall z \vee (a \to b) = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b)\}.$$

En efecto, si $z \in (c]$, entonces $\forall z \leq z \leq c \leq a, b$. Luego, $\forall z \leq a \to b$. Así,

$$\forall z \vee (a \to b) = a \to b = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b).$$

Como $(c] \in F$ deducimos que $\{z \in A : \forall z \vee (a \to b) = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b)\} \in F$. Sean $a, b \in A$ tales que $\psi(a) = \psi(b)$. Como $(a] \in F$, entonces la intersección

$$(a] \cap \{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\} \in F.$$

En particular, esta intersección es no vacía. Sea $w \in (a] \cap \{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\}$. Luego, $a = \forall w \vee a = \forall w \vee b$ y por lo tanto $b \leq a$. Análogamente, considerando $(b] \in F$, obtenemos que $a \leq b$. Luego, $a = b$. $\square$

Del teorema anterior, tenemos que todo hoop de Wajsberg monádico se puede sumergir en un hoop de Wajsberg monádico acotado, es decir, se puede sumergir en una MMV-álgebra.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de MMV-álgebras, sea $\mathcal{S}^{hm}(\mathcal{K})$ la clase de los subreductos hoop monádicos de álgebras de $\mathcal{K}$, esto es, aquellos hoops monádicos que son subhoops monádicos de algún álgebra en $\mathcal{K}$.

Proposición 4.2.3. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de MMV-álgebras, entonces $\mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$ es una variedad de hoops de Wajsberg monádicos. En particular, $\mathcal{MWH}$ es la clase de todos los subreductos hoop monádicos de las MMV-álgebras.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$ es cerrado por subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{A}$ es isomorfa a un subhoop monádico de $\mathbf{B}$. Identifiquemos $\mathbf{A}$ con dicho subhoop para facilitar la notación.

Sea $\mathbf{C}$ un subhoop monádico de $\mathbf{A}$. Luego, $\mathbf{C}$ es un subhoop monádico de $\mathbf{B}$. Por lo tanto, $\mathbf{C} \in \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$.

Consideremos $\mathbf{A}_i \in \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$, para todo $i \in I$, y sean $\mathbf{B}_i \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{A}_i$ es isomorfa a un subhoop monádico de $\mathbf{B}_i$. Sean $\alpha_i \colon \mathbf{A}_i \to \mathbf{B}_i$ homomorfismos inyectivos. Sabemos que $\alpha \colon \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \to \prod_{i \in I} \mathbf{B}_i$ definido por $\alpha(a)(i) = \alpha_i(a(i))$ es un homomorfismo. Es claro también α es inyectivo, ya que para todo $i \in I$, α_i es inyectivo. Por lo tanto, $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \in \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$.

Consideremos F un filtro monádico de $\mathbf{A}$, y sea $F' = \mathrm{FMg}_B(F)$ el filtro monádico generado por F en $\mathbf{B}$. Como F es monádico, sabemos que $F' = \mathrm{Fg}_B(F)$. Es claro que $F \subseteq F' \cap A$. Veamos que $F = F' \cap A$. Para ello, sea $a \in F' \cap A$. Luego, existen $a_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, tales que $a_1 \to (a_2 \to (\dots (a_n \to a) \dots)) = 1 \in F$. Aplicando modus ponens, obtenemos que $a \in F$. Luego, $F = F' \cap A$. Sean $x, y \in A$ tales que $x/F \neq y/F$. Veamos que $x/F' \neq y/F'$. En efecto, supongamos por el absurdo que x e y tienen la misma clase módulo F'. Entonces $(x \to y) \odot (y \to x) \in F' \cap A$, lo cual es una contradicción. Luego, la aplicación $\mathbf{A}/F \hookrightarrow \mathbf{B}/F'$ definida por $a/F \mapsto a/F'$ es un homomorfismo inyectivo. Como $\mathbf{B}/F' \in \mathcal{V}$, tenemos que $\mathbf{A}/F \in \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V})$. □

Corolario 4.2.4. *Sea* $\mathbf{B}$ *una MMV-álgebra y sea* $\mathbf{A}$ *su reducto hoop monádico. Entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V}(\mathbf{B}))$.

Demostración. De la Proposición 4.2.3, sabemos que $\mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}))$ es una variedad de hoops de Wajsberg monádicos y es claro que $\mathcal{V}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}))$.

Sea $\mathbf{C} \in \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}))$, y sea $\mathbf{D} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B})$ tal que existe una $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-inmersión de $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{D}$. Como $\mathbf{D} \in \mathrm{H\,S\,P}(\mathbf{B})$, entonces $\mathbf{D}$ es una imagen homomorfa de una MMV-álgebra $\mathbf{S}$, tal que $\mathbf{S}$ es isomorfa a una MMV-subálgebra de $\mathbf{B}^I$. Sea $g \colon \mathbf{S} \to \mathbf{D}$ el MMV-epimorfismo. Consideremos $S' = g^{-1}(C)$ y el epimorfismo $g \restriction S' \colon \mathbf{S}' \to \mathbf{C}$. Luego, $\mathbf{S}'$ es una $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-subálgebra de $\mathbf{A}^I$ y $\mathbf{A}^I$ es el $\{\odot, \to, \forall, 1\}$-reducto de $\mathbf{B}^I$. Luego, $\mathbf{C} \in \mathcal{V}(\mathbf{A})$. Por lo tanto, $\mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B})) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A})$. □

Vimos que la variedad de las MMV-álgebras está generada por sus álgebras finitas (Corolario 2.2.7). De este resultado y la Proposición 4.2.3 obtenemos lo siguiente.

Corolario 4.2.5. *La variedad de los hoops de Wajsberg monádicos está generada por* $\{\mathbf{C}_n^k : n, k \in \mathbb{N}\}$.

4.3. Variedades de hoops de Wajsberg monádicos de ancho k

Como en la sección §2.6 vamos a considerar la identidad

$$(\alpha_k) \;\; \forall\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \bigwedge X_i^-\right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1} \forall x_j \approx 1,$$

donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$, $X_i^- = X - \{x_i\}$, siendo k un número entero no negativo.

Análogamente a las MMV-álgebras, diremos que un hoop de Wajsberg monádico $\mathbf{A}$ es de ancho 1 si satisface la identidad (α_1), y que es de ancho k, para $k > 1$, si satisface la identidad (α_k) y no satisface la identidad (α_{k-1}). Si $\mathbf{A}$ no satisface (α_k) para ningún k, decimos que el álgebra es de ancho infinito. Notamos $\operatorname{width} \mathbf{A} = k$ o $\operatorname{width} \mathbf{A} = \omega$, según sea el caso finito o infinito.

Sea $\mathbf{A}$ un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible que satisface la identidad (α_k), para cierto k entero positivo. Sabemos que $\mathbf{A}$ es un subreducto hoop monádico de una MMV-álgebra $\mathbf{B}$. Por la construcción de $\mathbf{B}$, resulta que $\mathbf{B}$ satisface (α_k). Además, sabemos que $\forall \mathbf{B}$ es totalmente ordenada. Luego, de la Proposición 2.6.8, obtenemos que $\mathbf{B}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle (\forall \mathbf{B})^k; \forall_\wedge \rangle$. Entonces, $\mathbf{A}$ es un subreducto hoop monádico de la MMV-álgebra $\langle (\forall \mathbf{B})^k; \forall_\wedge \rangle$. Si consideremos $\exists \colon A \to A$

definido por $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to \forall a$, para todo $a \in A$, entonces el siguiente lema es inmediato. Su demostración es análoga a la Proposición 2.6.8.

Lema 4.3.1. *Si* $\mathbf{A}$ *es un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible que satisface* (α_k) *entonces* $\mathbf{A}$ *es isomorfo a una subálgebra de* $(\forall\mathbf{A})^k$.

Notamos también con $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$ al reducto hoop monádico de la MMV-álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$.

Consideremos un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible $\mathbf{A}$ que satisface la identidad (α_k). Del Teorema 4.1.14 sabemos que $\mathbf{A}$ es acotado o $\mathbf{A}$ es cancelativo.

Supongamos en primer lugar que $\mathbf{A}$ es un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible acotado. Sea $\mathbf{B}$ la MMV-álgebra que se obtiene de $\mathbf{A}$ considerando el primer elemento de A como constante. Por el Corolario 4.2.4, sabemos que $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}^{hm}(\mathcal{V}(\mathbf{B}))$. Como consecuencia de esto, la Proposición 4.2.3 y el Teorema 2.7.28, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Si* $\mathcal{V}$ *es una subvariedad no trivial de hoops de Wajsberg monádicos* ***acotados*** *tal que* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, *entonces* $\mathcal{V}$ *tiene alguna de las siguientes tres formas:*

(F1) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_1}^{t_1}, \ldots, \mathbf{C}_{m_r}^{t_r})$, $r \geq 1$, *y* $t_i \leq k$, *para todo* i,

(F2) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_1}^{t_1}, \ldots, \mathbf{C}_{m_r}^{t_r}, \mathbf{C}_{n_1,\omega}^{s_1,\mathbf{P}_1}, \ldots, \mathbf{C}_{n_s,\omega}^{s_p,\mathbf{P}_p})$, $r \geq 0$, $s \geq 1$, $t_i \leq k$ *y* $s_i \leq k$, *para todo* i,

(F3) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_1}^{t_1}, \ldots, \mathbf{C}_{m_r}^{t_r}, \mathbf{C}_{n_1,\omega}^{s_1,\mathbf{P}_1}, \ldots, \mathbf{C}_{n_s,\omega}^{s_p,\mathbf{P}_p}, [\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $t_i \leq k$ *y* $s_i \leq k$, *para todo* i, *y además* $k_1 \leq k$, *donde* $\{m_1, \ldots, m_r\}$ *es un subconjunto finito de* $\mathbb{N}$. *Si* $r = 0$ *entonces* $\{m_1, \ldots, m_r\} = \emptyset$. *Similarmente, para el conjunto* $\{s_1, \ldots, s_p\}$.

De los teoremas de Jónsson y del Teorema 4.3.2, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.3. *Si* $\mathcal{V}$ *es una subvariedad no trivial de hoops de Wajsberg* ***acotados*** *contenida en* $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, *entonces* $\mathcal{V}$ *tiene alguna de las siguientes formas*

(F1) $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^{r} \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_i}^{t_i})$, *donde* $t_i \leq k$, *para todo* i,

(F2) $\mathcal{V} = \bigvee_{i=0}^{r} \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_i}^{t_i}) \vee \bigvee_{i=1}^{s} \mathcal{V}(\mathbf{C}_{n_i,\omega}^{s_i,\mathbf{P}_i})$, *donde* $t_i \leq k$ *y* $s_i \leq k$, *para todo* i,

(F3) $\mathcal{V} = \bigvee_{i=0}^{r} \mathcal{V}(\mathbf{C}_{m_i}^{t_i}) \vee \bigvee_{i=1}^{s} \mathcal{V}(\mathbf{C}_{n_i,\omega}^{s_i,\mathbf{P}_i}) \vee \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$, *donde* $t_i \leq k$ *y* $s_i \leq k$, *para todo* i, *y* $k_1 \leq k$.

Consideremos ahora el caso en que $\mathbf{A}$ es un hoop de Wajsberg monádico cancelativo de ancho k.

Recordemos que $\mathbf{A}$ satisface que $a \oplus b = 1$, para todo $a, b \in A$. Más aún, la subvariedad de los hoops cancelativos está caracterizada por la identidad

$$(\zeta)\ x \oplus x \approx 1.$$

El siguiente lema será necesario en la demostración del Teorema 4.3.5. Su demostración es análoga a la de la Proposición 2.6.11.

Lema 4.3.4. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos hoops de Wajsberg. Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathcal{WH}}(\mathbf{B})$ *entonces* $\mathbf{A}^k \in \mathcal{V}_{\mathcal{MWH}}((\mathbf{B})^k)$.

Teorema 4.3.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop de Wajsberg monádico subdirectamente irreducible cancelativo de ancho* k*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^k)$.

Demostración. Si $k = 1$, sabemos que $\mathcal{V}_{\mathcal{WH}}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}_{\mathcal{WH}}(\mathbf{C}_\omega)$ (ver Aglianò y Panti (2002)). Como $\mathbf{A}$ es una cadena, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega)$.

Supongamos ahora que $k > 1$. Como $\mathbf{A}$ es de ancho k, del Lema 4.3.1, sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle (\forall \mathbf{A})^k ; \forall_\wedge \rangle$. Identificamos $\mathbf{A}$ con dicha subálgebra para simplificar la notación. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, como $\mathbf{A}$ es de ancho k podemos elegir los siguientes elementos de $A \subseteq (\forall A)^k$:

$$a_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ c_j & \text{si } i = j \end{cases},$$

donde $c_j \in \forall A - \{1\}$. Como $\forall \mathbf{A}$ es totalmente ordenada podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c_1 \leq \cdots \leq c_j \leq \cdots \leq c_k$. Para cada j, consideremos el elemento $b_j \in A$

$$b_j = \left(\bigodot_{s \in \{1,\ldots,k\} \setminus \{j\}} a_s \right) \to \forall a_k.$$

Observemos que $b_j(i) = \begin{cases} c_k & \text{si } j = i \\ 1 & \text{si } j \neq i \end{cases}$. Entonces la subálgebra de $\mathbf{A}$ generada por el conjunto $\{b_j : 1 \leq j \leq k\}$ es isomorfa a $\mathbf{C}_\omega^k$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^k) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A})$. Por otro lado, sabemos que $\mathcal{V}_{\mathcal{WH}}(\mathbf{C}_\omega) = \mathcal{V}_{\mathcal{WH}}(\forall \mathbf{A})$. Luego, del Lema 4.3.4, sabemos que $\mathcal{V}_{\mathcal{MWH}}(\mathbf{C}_\omega^k) = \mathcal{V}_{\mathcal{MWH}}((\forall \mathbf{A})^k)$. Entonces $\mathbf{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^k)$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^k)$. $\square$

Corolario 4.3.6. *La subvariedad de hoops de Wajsberg monádicos cancelativos de ancho* k *está caracterizada por las identidades* (α_k) *y* (ζ) $x \oplus x \approx 1$.

Es claro que $\mathbf{C}_\omega^k$ es subálgebra de $\mathbf{C}_\omega^s$ si y sólo si $k \leq s$, y también que $\mathbf{C}_\omega^k$ es isomorfa al radical de $\mathbf{C}_{n,\omega}^k$ para todo entero positivo n. Luego el siguiente lema es inmediato.

Lema 4.3.7. $\mathbf{C}_\omega^k \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^s)$ *si y sólo si* $k \leq s$*. Para todo entero positivo* n*,* $\mathbf{C}_\omega^k \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_{n,\omega}^{s,\mathbf{P}})$ *si y sólo si* $k \leq s$.

En el siguiente corolario, que es inmediato de la Proposición 2.7.29 y del Corolario 4.3.3, resumimos las propiedades de inclusión entre las subvariedades de hoops de Wajsberg monádicos *acotados* de ancho menor o igual que k.

Proposición 4.3.8. *Sea* $\mathcal{V}$ *una variedad de hoops de Wajsberg monádicos* acotados *tal que* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0}, \mathbf{1}]^k)$*. Entonces:*

(1) $\mathcal{V}([\mathbf{0}, \mathbf{1}]^t) \subseteq \mathcal{V}$ *si y sólo si* $\mathcal{V}$ *es de la forma (F3) y* $t \leq k_1$,

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{C}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}'}) \subseteq \mathcal{V}$ *si y sólo si alguna de la siguientes condiciones se satisface:*

(2a) *$\mathcal{V}$ es de la forma (F2) y n divide a algún $n_i \in \{n_1, \ldots, n_p\}$ y t es menor a algún $\{s_1, \ldots, s_p\}$, o, n divide a algún $n_i \in \{n_1, \ldots, n_p\}$, t es menor o igual que algún $s_i \in \{s_1, \ldots, s_p\}$ y $\mathbf{P}' \leq \mathbf{P}_i$,*

(2b) *$\mathcal{V}$ es de la forma (F3) y $t \leq k_1$,*

(3) *$\mathcal{V}(\mathbf{C}_m^t) \subseteq \mathcal{V}$ si y sólo si $m|q$ para algún $q \in \{m_1, \ldots, m_r, s_1, \ldots, s_p\}$ y $t \leq t_q$, o, $t \leq k_1$.*

Recordemos además que todo hoop de Wajsberg acotado $\oplus$ es la suma usual (ver §1.4.1). Entonces podemos hallar bases ecuacionales para cada una de las subvariedades de hoops de Wajsberg monádicos acotados de ancho k, siguiendo los argumentos de la sección §2.7, donde se encuentran bases ecuacionales finitas para toda subvariedad de MMV-álgebras de ancho k. Observar que en la identidad $(f_n^{k,\mathbf{P}})$ debe reemplazarse las dos apariciones de 0 por $\forall\left(\bigwedge_{i=1}^{s} 2x_i^{n+1}\right)$. Entonces tenemos bases ecuacionales para cada una de las subvariedades $\{\mathcal{V}(\mathbf{C}_m^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}}) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) : t \leq k\}$.

Vamos a dar ahora las identidades que caracterizan a una subvariedad propia de la subvariedad generada por $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$.

Es claro que toda identidad $\tau_1 \approx \tau_2$ es equivalente a la identidad $(\tau_1 \to \tau_2) \wedge (\tau_2 \to \tau_1) \approx 1$. Además, $\eta_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \approx 1, \ldots, \eta_r(x_{r1}, \ldots, x_{rn_r}) \approx 1$ caracterizan a una variedad $\mathcal{V}$ si y sólo si $\eta_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge \eta_r(x_{r1}, \ldots, x_{rn_r}) \approx 1$ se satisface en $\mathcal{V}$. Luego, toda subvariedad $\mathcal{V} \in \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_m^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}}) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) : t \leq k\}$ está caracterizada por una sola identidad $\lambda_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_n) \approx 1$. El siguiente teorema nos da la caracterización por identidades de toda subvariedad de hoop de Wajsberg monádicos de ancho menor o igual que k. La demostración es análoga a la demostración del Teorema 2.7.30 para el caso de las MMV-álgebras.

Teorema 4.3.9. *Si $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^{s} \mathcal{V}_i$, donde $\mathcal{V}_i \in \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_\omega^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_m^t) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{C}_{n,\omega}^{t,\mathbf{P}}) : t \leq k\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^t) : t \leq k\}$, entonces la identidad que caracteriza a $\mathcal{V}$ es*

$$\lambda_{\mathcal{V}}(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, x_{s1}, \ldots, x_{sn_s}) = \bigvee_{i=1}^{s} \forall\left(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})\right) \approx 1,$$

donde $\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \approx 1$ caracteriza a la variedad $\mathcal{V}_i$, para cada $i = 1, \ldots, s$.

5. Álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas

Las álgebras de implicación de Łukasiewicz constituyen la contrapartida algebraica del fragmento implicacional de la lógica *Super-Łukasiewicz* estudiada por Komori (1978b). Fueron llamadas C-álgebras en Komori (1978b) (ver también Komori (1978a)), y *Łukasiewicz residuation algebras* en Berman y Blok (2004). También han sido estudiadas por otros autores (ver Ferreirim (1992), Díaz Varela y Torrens Torrell (2006), Díaz Varela (2008), Campercholi et. al. (2011)).

La clase de todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz es exactamente la clase de todos los $\{\to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras (Ferreirim, 1992).

Motivados por este resultado, en este capítulo estudiamos la clase de los $\{\to, \forall, 1\}$-subreductos de las MMV-álgebras. Demostramos que esta clase es una variedad, e indicamos el conjunto de identidades que la definen. A toda álgebra perteneciente a esta variedad, la llamamos *álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica*.

Además realizamos un estudio completo de la variedad. Caracterizamos los miembros subdirectamente irreducibles y a las congruencias por sus filtros monádicos. Demostramos que la variedad está generada por sus miembros finitos. Damos una descripción completa del reticulado de subvariedades, indicando también una base ecuacional para cada una de las subvariedades propias.

El presente capítulo se estructura de la siguiente manera. En la sección §5.1 definimos la variedad de las álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas e indicamos varias de las propiedades que serán necesarias para el desarrollo del capítulo. En la sección §5.1.1 demostramos que existe un isomorfismo entre el reticulado de congruencias de un álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica $\mathbf{A}$ y el reticulado de filtros implicativos monádicos de $\mathbf{A}$. Probamos también que el reticulado de filtros implicativos monádicos de $\mathbf{A}$ es isomorfo al reticulado de filtros implicativos de $\forall\mathbf{A}$. Además, caracterizamos los miembros subdirectamente irreducibles y los simples finitos de la variedad. En la sección §5.2 demostramos que la clase de todos los subreductos implicativos monádicos de las MMV-álgebras es exactamente la clase de las álgebras implicativas monádicas de Łukasiewicz. Como aplicación, demostramos que la variedad está generada por sus miembros finitos. Damos también un álgebra característica de la variedad. Por último, la sección §5.3 está dedicada al estudio del reticulado de subvariedades. Hallamos los miembros $\vee$-irreducibles del mismo y caracterizamos a cada una de las subvariedades propias por medio de identidades.

5.1. Definición y propiedades básicas

En esta sección definimos a las álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas. Comenzamos la sección estudiando las propiedades del $\{\to, \forall, 1\}$-reducto de una MV-álgebra monádica. Además, indicamos varias propiedades que serán de utilidad en el desarrollo del capítulo.

Lema 5.1.1. *El $\{\to, \forall, 1\}$-reducto de una MMV-álgebra satisface las siguientes identidades:*

(ML1) $\forall 1 \approx 1$,

(ML2) $\forall x \to x \approx 1$,

(ML3) $\forall((x \to \forall y) \to \forall y) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall y$,

(ML4) $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) \approx 1$,

(ML5) $\forall(\forall x \to \forall y) \approx \forall x \to \forall y$,

(ML6) $\forall((y \to (y \to \forall x)) \to \forall x) \approx (\forall y \to (\forall y \to \forall x)) \to \forall x$,

(ML7) $\forall((x \to \forall y) \to x) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall x$.

Demostración. Las identidades (ML1), (ML2) y (ML4) son inmediatas de (MMV14), (MMV7) y (MMV21), respectivamente. De la Proposición 2.2.9 se deduce (ML3). Del Lema 4.1.1, sabemos que (ML7) se satisface en toda MMV-álgebra.

Sea $\mathbf{A}$ el $\{\to, \forall, 1\}$-reducto de una MMV-álgebra, y sean $a, b \in A$. Veamos que (ML5) se satisface en $\mathbf{A}$. En efecto,

$$\forall(\forall a \to \forall b) = \forall(\neg\forall a \oplus \forall b) = \forall(\forall\neg\forall a \oplus \forall b) = \forall\neg\forall a \oplus \forall b = \neg\forall a \oplus \forall b = \forall a \to \forall b.$$

Probemos ahora que (ML6) se satisface. En efecto, $\forall((b \to (b \to \forall a)) \to \forall a) = \forall((b^2 \to \forall a) \to \forall a) = \forall(b^2 \vee \forall a) = \forall b^2 \vee \forall a = (\forall b)^2 \vee \forall a = ((\forall b)^2 \to \forall a) \to \forall a = (\forall b \to (\forall b \to \forall a)) \to \forall a$. $\square$

El lema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 5.1.2. Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \to, \forall, 1\rangle$ de tipo (2,1,0) es un *álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica* si $\langle A; \to, 1\rangle$ es un álgebra de implicación de Łukasiewicz y si se satisfacen las siguientes identidades:

(ML1) $\forall 1 \approx 1$,

(ML2) $\forall x \to x \approx 1$,

(ML3) $\forall((x \to \forall y) \to \forall y) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall y$,

(ML4) $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) \approx 1$, (ML5) $\forall(\forall x \to \forall y) \approx \forall x \to \forall y$,

(ML6) $\forall((y \to (y \to \forall x)) \to \forall x) \approx (\forall y \to (\forall y \to \forall x)) \to \forall x$,

(ML7) $\forall((x \to \forall y) \to x) \approx (\forall x \to \forall y) \to \forall x$.

Suponemos que el lector está familiarizado con la teoría de las álgebras de implicación de Łukasiewicz. En la sección §1.5 se dan la definición y las propiedades más importantes. Para más información, el lector puede consultar la bibliografía indicada en esa sección.

Con esta definición, el Lema 5.1.1 puede ser reformulado de la siguiente manera.

Lema 5.1.3. *El $\{\to, \forall, 1\}$-reducto de una MMV-álgebra es un álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica.*

Ejemplo 5.1.4. Notamos con $\mathbf{L}_n^k$ al $\{\to, \forall, 1\}$-reducto de la MMV-álgebra $\mathbf{S}_n^k$, donde n y k son enteros positivos.

Notamos con $\mathcal{ML}$ a la variedad de todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas.

Teniendo en cuenta la definición del orden en un álgebra de implicación de Łukasiewicz, la identidad (ML2) es equivalente a $\forall x \leq x$. Sabemos además que para todo a y b en un álgebra de implicación de Łukasiewicz, existe el supremo y está dado por $a \vee b = (a \to b) \to b$. Entonces (ML3) es equivalente a $\forall(x \vee \forall y) \approx \forall x \vee \forall y$.

Lema 5.1.5. *En toda álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica $\mathbf{A}$ se satisfacen las siguientes identidades y propiedades, para todo $a, b \in A$:*

(ML8) $\forall\forall x \approx \forall x$,

(ML9) si $a \leq b$ entonces $\forall a \leq \forall b$,

(ML10) el ínfimo entre $\forall a$ y $\forall b$ existe si y sólo si existe el ínfimo entre a y b,

(ML11) $\forall(\forall x \vee \forall y) \approx \forall x \vee \forall y$,

(ML12) si existe $\forall a \wedge \forall b$ entonces $\forall(\forall a \wedge \forall b) = \forall a \wedge \forall b$,

(ML13) si existe $a \wedge b$ entonces $\forall(a \wedge b) = \forall a \wedge \forall b$.

Demostración. De (ML3) y (ML2), tenemos que $\forall a = \forall\forall a \vee \forall a = \forall(\forall a \vee \forall a) = \forall\forall a$. Luego, (ML8) se satisface.

Demostremos (ML9). Consideremos $a \leq b$. Luego, de (ML4) y (ML1), tenemos

$$1 = \forall(a \to b) \to (\forall a \to \forall b) = \forall 1 \to (\forall a \to \forall b) = 1 \to (\forall a \to \forall b) = \forall a \to \forall b.$$

Por lo tanto, $\forall a \leq \forall b$.

Supongamos que existe $\forall a \wedge \forall b$. Es claro que $\forall a \wedge \forall b \leq a$ y $\forall a \wedge \forall b \leq b$. Luego existe $a \wedge b$. Recíprocamente, supongamos que existe $a \wedge b$. De $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, y (ML9), tenemos que $\forall(a \wedge b) \leq \forall a$ y $\forall(a \wedge b) \leq \forall b$. Luego, existe el ínfimo entre $\forall a$ y $\forall b$, y además $\forall(a \wedge b) \leq \forall a \wedge \forall b$.

Demostremos (ML11). En efecto, de (ML3) y (ML8) tenemos que $\forall(\forall a \vee \forall b) = \forall\forall a \vee \forall b = \forall a \vee \forall b$.

Veamos (ML12). Supongamos que existe $\forall a \wedge \forall b$. Entonces, de (ML10), sabemos que existe $a \wedge b$ y que además $\forall(a \wedge b) \leq \forall a \wedge \forall b$. Para simplificar la notación, escribimos $z = a \wedge b$. Luego, de (ML5) y (ML11), obtenemos que

$$\forall a \wedge \forall b = ((\forall a \to \forall z) \vee (\forall b \to \forall z)) \to \forall z = \forall\left[\forall(\forall(\forall a \to \forall z) \vee \forall(\forall b \to \forall z)) \to \forall z\right] = \forall(\forall a \wedge \forall b).$$

Demostremos (ML13). Supongamos que existe $a \wedge b$. Sabemos que $\forall(a \wedge b) \leq \forall a \wedge \forall b$. De $\forall a \wedge \forall b \leq a \wedge b$ obtenemos que $\forall(\forall a \wedge \forall b) \leq \forall(a \wedge b)$ y, de (ML11), tenemos que $\forall a \wedge \forall b \leq \forall(a \wedge b)$. Por lo tanto, $\forall a \wedge \forall b = \forall(a \wedge b)$. □

Consideremos el conjunto $\forall A = \{\forall x : x \in A\}$. De (ML1), (ML5) y (ML8), tenemos que $\forall \mathbf{A} = \langle \forall A; \to, \forall, 1\rangle$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$.

Lema 5.1.6. *Sea $\mathbf{A} = \langle A; \to, \forall, 1\rangle$ un álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica, y sea $c \in \forall A$. Si definimos en $[c) = \{a \in A : c \leq a\}$, las operaciones $\neg_c x := x \to c$ y $x \oplus_c z := \neg_c x \to z$, entonces $\mathbf{A}_c = \langle [c); \oplus_c, \neg_c, \forall, c\rangle$ es una MMV-álgebra.*

Demostración. Observemos en primer lugar que como $c \in \forall A$, entonces $c = \forall c$. Sabemos que $\langle [c); \to, \neg_c, 1\rangle$ es un álgebra de Wajsberg. Luego, $\langle [c); \oplus_c, \neg_c, c\rangle$ es una MV-álgebra.

Las propiedades (MMV7) y (MMV9) son inmediatas de (ML2) y (ML5), respectivamente.

Sean $a, b \in [c)$. Notemos que $a \wedge b$ existe y además $c \leq a \wedge b$. Luego, de (ML13), tenemos que $\forall(a \wedge b) = \forall a \wedge \forall b$. Esto es, (MMV8) se satisface.

Veamos que (MMV10) se satisface. En efecto, $\forall(\forall a \odot_c \forall b) = \forall(\neg_c(\forall a \to \neg_c \forall b)) = \forall((\forall a \to (\forall b \to \forall c)) \to \forall c) = (\forall a \to (\forall b \to \forall c)) \to \forall c = \neg_c(\forall a \to \neg_c \forall b) = \forall a \odot_c \forall b$.

Probemos ahora (MMV11). De (ML6), tenemos que $\forall(a \odot_c a) = \forall(\neg_c(a \to \neg_c a)) = \forall((a \to (a \to \forall c)) \to \forall c) = (\forall a \to (\forall a \to \forall c)) \to \forall c = \forall a \odot_c \forall a$.

Por último demostremos (MMV12). En efecto, de (ML7), obtenemos que $\forall(a \oplus_c a) = \forall((a \to \forall c) \to a) = (\forall a \to \forall c) \to \forall a = \forall a \oplus_c \forall a$. □

Decimos que una ML-álgebra es *acotada* si tiene primer elemento. El Corolario 5.1.7 es inmediato del Lema 5.1.6.

Corolario 5.1.7. *Toda ML-álgebra acotada es una MMV-álgebra.*

Del Lema 5.1.3 y del Corolario 5.1.7, obtenemos que las ML-álgebras *acotadas* son los $\{\to, \forall, 1\}$-reductos de las MMV-álgebras. Veremos en la sección §5.2 que las ML-álgebras son exactamente los $\{\to, \forall, 1\}$-subreductos de las MMV-álgebras.

5.1.1. Filtros monádicos y congruencias

Definición 5.1.8. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$. Un subconjunto $F \subseteq A$ se dice un *filtro implicativo monádico* de $\mathbf{A}$ si F es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ y si se satisface que si $a \in F$ entonces $\forall a \in F$.

Notamos con $\mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ al conjunto de todos los filtros implicativos monádicos del álgebra $\mathbf{A}$, ordenados por inclusión. Si $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ entonces, en particular, F es un filtro de orden. Luego, F es cerrado por $\to$. Además, F es cerrado por $\forall$ y $1 \in F$. Luego, tenemos que todo filtro implicativo monádico F es un subuniverso de $\mathbf{A}$.

Si $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$ y $X \subseteq A, X \neq \emptyset$, el filtro implicativo monádico generado por X es el conjunto

$$\mathrm{FMg}(X) = \{b \in A : \forall a_1 \to (\forall a_2 \to (\cdots (\forall a_n \to b) \cdots)) = 1 \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in X\}.$$

En particular, si $X = \{a\}$ entonces $\mathrm{FMg}(a) = \Big\{b \in A : \forall a \overset{n}{\to} b = 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\Big\}$. Observar que $\mathrm{FMg}(X) = \mathrm{Fg}(\forall X)$.

A continuación estableceremos un isomorfismo entre el reticulado de congruencias de un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$ y el reticulado de filtros implicativos monádicos de $\mathbf{A}$. Veremos también que el reticulado de filtros implicativos monádicos de $\mathbf{A}$ es isomorfo al reticulado de filtros implicativos de $\forall\mathbf{A}$.

Teorema 5.1.9. *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$. La correspondencia $\mathbf{Con}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ definida por $\theta \to 1/\theta$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $F \to \theta_F$.*

Demostración. Sea $\theta \in Con_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A})$. Sabemos que $1/\theta$ es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$. Veamos que $1/\theta$ es un filtro implicativo monádico de $\mathbf{A}$. Para ello, sea $x \in 1/\theta$. Como θ es una congruencia en $\mathbf{A}$ y $\forall 1 = 1$, entonces $\forall x \in 1/\theta$. Luego, $1/\theta \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$.

Sea $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$. Veamos que la relación

$$\theta_F = \big\{(a,b) \in A^2 : a \to b \in F \text{ y } b \to a \in F\big\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Sean $a, b \in A$ tal que $a \to b \in F$ y $b \to a \in F$. Luego, $\forall(a \to b) \in F$ y $\forall(b \to a) \in F$. De $\forall(a \to b) \leq \forall a \to \forall b$ y $\forall(b \to a) \leq \forall b \to \forall a$, y teniendo en cuenta que F es un filtro, obtenemos que $\forall a \to \forall b \in F$ y $\forall b \to \forall a \in F$. Además, sabemos que θ_F respeta la operación $\to$ (ver §1.5). Luego, θ_F es una congruencia en $\mathbf{A}$.

Consideremos $\theta \in Con_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A})$. Veamos que $\theta_{1/\theta} = \theta$. En efecto, si $(a,b) \in \theta$ entonces $(a \to b, b \to b) \in \theta$, o lo que es lo mismo, $(a \to b, 1) \in \theta$. Análogamente $(b \to a, 1) \in \theta$. Luego, $a \to b \in 1/\theta$ y $b \to a \in 1/\theta$. Es decir que, $(a,b) \in \theta_{1/\theta}$. Recíprocamente, sea $(a,b) \in \theta_{1/\theta}$. Esto es, $(a \to b, 1) \in \theta$ y $(b \to a, 1) \in \theta$. Luego, $((a \to b) \to b, 1 \to b) \in \theta$ y $((b \to a) \to a, 1 \to a) \in \theta$. Entonces, $(a \vee b, b) \in \theta$ y $(a \vee b, a) \in \theta$. Luego, $(a,b) \in \theta$. Veamos ahora que $1/\theta_F = F$, para todo F. En efecto, $x \in F$ si y sólo si $(x, 1) \in \theta_F$ si y sólo si $x \in 1/\theta_F$.

Es inmediato que si $\theta_1 \subseteq \theta_2$ entonces $1/\theta_1 \subseteq 1/\theta_2$, y si $F_1 \subseteq F_2$ entonces $\theta_{F_1} \subseteq \theta_{F_2}$. Luego, la aplicación $\theta \mapsto 1/\theta$ es un isomorfismo de orden. □

El siguiente teorema establece el isomorfismo entre el reticulado de filtros implicativos monádicos de $\mathbf{A}$ y el reticulado de filtros implicativos de $\forall\mathbf{A}$.

Teorema 5.1.10. *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$. La correspondencia $\mathcal{F}_M(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}(\forall\mathbf{A})$ definida por $F \to F \cap \forall A$ es un isomorfismo de orden, cuya inversa está dada por $M \to \mathrm{FMg}(M)$.*

Demostración. Es claro que si $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$ entonces $F \cap \forall A \in \mathcal{F}(\forall\mathbf{A})$.

Sea $M \in \mathcal{F}(\forall\mathbf{A})$. Veamos que $\mathrm{FMg}(M) \cap \forall A = M$. Claramente, $M \subseteq \mathrm{FMg}(M) \cap \forall A$. Sea $z \in \mathrm{FMg}(M) \cap \forall A$. Luego, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ tales que $a_1 \to (a_2 \to (\ldots (a_n \to z) \ldots)) = 1$. Como $a_1 \in M$ y $a_1 \to (a_2 \to (\ldots (a_n \to z) \ldots)) = 1 \in M$, y dado que M es un filtro implicativo, obtenemos que $a_2 \to (\ldots (a_n \to z) \ldots) \in M$. Realizando un proceso inductivo análogo al paso anterior, obtendremos que $z \in M$.

Sea $F \in \mathcal{F}_M(\mathbf{A})$. Veamos que $\mathrm{FMg}(F \cap \forall A) = F$. Como $F \cap \forall A \subseteq F$, entonces $\mathrm{FMg}(F \cap \forall A) \subseteq F$. Consideremos $f \in F$. Luego $\forall f \in F \cap \forall A$. Entonces $\forall f \in \mathrm{FMg}(F \cap \forall A)$. De $\forall f \leq f$, obtenemos que $f \in \mathrm{FMg}(F \cap \forall A)$.

Por último, es claro que si $F_1 \subseteq F_2$ entonces $F_1 \cap \forall A \subseteq F_2 \cap \forall A$, y que si $M_1 \subseteq M_2$ entonces $\mathrm{FMg}(M_1) \subseteq \mathrm{FMg}(M_2)$, con lo que queda demostrado el teorema. □

Corolario 5.1.11. *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$ entonces*

$$\mathbf{Con}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A}) \cong \mathcal{F}_M(\mathbf{A}) \cong \mathcal{F}(\forall\mathbf{A}) \cong \mathbf{Con}_{\mathcal{L}}(\forall\mathbf{A}).$$

Como consecuencia del Corolario 5.1.11, y teniendo en cuenta que la variedad $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de distributividad de congruencias y la propiedad de extensión de congruencias (C.E.P.), obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.12. *La variedad $\mathcal{ML}$ tiene la propiedad de distributividad de congruencias y la* C.E.P.

5.1.2. Álgebras subdirectamente irreducibles

En esta sección caracterizamos a los miembros subdirectamente irreducibles de la variedad y a los miembros simples finitos. Probamos que toda ML-álgebra es producto subdirecto de ML-álgebras $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ tales que $\forall\mathbf{A}_i$ es totalmente ordenada.

Como consecuencia inmediata del Corolario 5.1.11 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.13. *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$. Entonces, $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible (simple) si y sólo si $\forall\mathbf{A}$ es una L-álgebra subdirectamente irreducible (simple).*

Sabemos que las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{L}$ son totalmente ordenadas. Entonces, como consecuencia del Corolario 5.1.13, obtenemos la siguiente caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{ML}$.

Lema 5.1.14. *Si $\mathbf{A}$ es una ML-álgebra subdirectamente irreducible entonces $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada.*

Entonces la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 5.1.15. *Toda ML-álgebra es producto subdirecto de una familia* $\{\mathbf{A}_i\}$, $i \in I$, *de ML-álgebras tales que* $\forall\mathbf{A}_i$ *es totalmente ordenada.*

En el Lema 5.1.16 caracterizamos a las álgebras simples finitas de la variedad $\mathcal{ML}$.

Lema 5.1.16. *Las álgebras simples finitas de* $\mathcal{ML}$ *son las álgebras* $\mathbf{L}_n^k$*, donde* n *y* k *son números enteros positivos.*

Demostración. Del Corolario 5.1.13, obtenemos que $\mathbf{L}_n^k$ es un álgebra simple pues $\forall(\mathbf{L}_n^k) \cong \mathbf{L}_n$ es un álgebra de implicación de Łukasiewicz simple.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$ un álgebra simple finita. Del Corolario 5.1.13, sabemos que $\forall\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación de Łukasiewicz simple finita. Luego, $\forall\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_n$, para algún entero positivo n (Komori, 1978b). En particular, tenemos que $\mathbf{A}$ tiene primer elemento 0. Del Lema 5.1.6, sabemos que $\mathbf{A}_0 = \langle [0); \to, \forall, 1\rangle$ es una MMV-álgebra que además es simple y finita. Luego, de la Proposición 2.1.34, obtenemos que $\mathbf{A}_0 \cong \mathbf{S}_n^k$, para algún entero positivo k. Por lo tanto, $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_n^k$. □

5.2. Subreductos implicativos monádicos de las MV-álgebras monádicas

Llamamos *reductos implicativos* (*subreductos implicativos*) a los $\{\to, 1\}$-reductos ($\{\to, 1\}$-subreductos) de un álgebra $\mathbf{A}$. Llamamos *reductos implicativos monádicos* (*subreductos implicativos monádicos*) a los $\{\to, \forall, 1\}$-reductos ($\{\to, \forall, 1\}$-subreductos) de $\mathbf{A}$.

Decimos que un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$ es *dirigida* si para todo $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que $c \leq a, b$.

Lema 5.2.1. *Toda ML-álgebra dirigida se puede sumergir en una ML-álgebra acotada.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una ML-álgebra dirigida. Para cada $z \in A$, el conjunto $[\forall z) = \{x \in A : \forall z \leq x\}$ es cerrado por $\forall$ y por $\to$. Además $1 \in [\forall z)$. Luego, $[\forall \mathbf{z}) = \langle [\forall z); \to, \forall, 1\rangle$ es una ML-subálgebra de $\mathbf{A}$. En consecuencia, $[\forall \mathbf{z})$ es una ML-álgebra acotada con primer elemento $\forall z$. Veamos que $\mathbf{A} \in \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}\,(\{[\forall \mathbf{z}) : z \in A\})$.

Para cada $a \in A$, sea $(a] = \{x \in A : x \leq a\}$. Consideremos la familia $\{(a] : a \in A\}$. Como $\mathbf{A}$ es dirigida, para todo par $a, b \in A$ existe $c \in A$ tal que $(c] \subseteq (a] \cap (b]$. Luego, la familia $\{(a] : a \in A\}$ tiene la propiedad de intersecciones finitas. Por lo tanto, existe un ultrafiltro $F \subseteq \mathcal{P}(A) = Su(A)$ que contiene a todos los miembros de la familia.

Sea

$$\psi\colon \mathbf{A} \to \left(\prod_{z\in A} [\forall \mathbf{z})\right) / F,$$

definido por $\psi(a) = (a \vee \forall z)_{z\in A}/F$. Observemos que dados $a, b \in A$,

$$\psi(a) = \psi(b) \text{ si y sólo si } \{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\} \in F.$$

Veamos que $\psi(\forall a) = \forall(\psi a)$, $\psi(a \to b) = \psi(a) \to \psi(b)$ y que ψ es inyectiva.

Notemos que $\forall(\psi a) = \forall\left((a \vee \forall z)_{z\in A}/F\right) = \forall\left((a \vee \forall z)_{z\in A}\right)/F = \left(\forall(a \vee \forall z)\right)_{z\in A}/F$. Luego, $\psi(\forall a) = \forall(\psi a)$ si y sólo si $\{z \in A : \forall z \vee \forall a = \forall(a \vee \forall z)\} \in F$. Como $\mathbf{A}$ satisface $\forall z \vee \forall a = \forall(a \vee \forall z)$, entonces $\{z \in A : \forall z \vee \forall a = \forall(a \vee \forall z)\} = A \in F$. Luego, $\psi(\forall a) = \forall(\psi a)$.

Observemos que $\psi(a \to b) = \psi(a) \to \psi(b)$ si y sólo si

$$\{z \in A : \forall z \vee (a \to b) = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b)\} \in F.$$

Sabemos que existe $c \in A$ tal que $c \leq a, b$. Veamos que

$$(c] \subseteq \{z \in A : \forall z \vee (a \to b) = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b)\}.$$

En efecto, si $z \in (c]$, entonces $\forall z \leq z \leq c \leq a, b$. Luego, $\forall z \leq a \to b$. Así,

$$\forall z \vee (a \to b) = a \to b = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b).$$

Como $(c] \in F$, deducimos que $\{z \in A : \forall z \vee (a \to b) = (\forall z \vee a) \to (\forall z \vee b)\} \in F$. Por lo tanto, $\psi(a \to b) = \psi(a) \to \psi(b)$.

Sean $a, b \in A$ tales que $\psi(a) = \psi(b)$. Esto es, $\{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\} \in F$. Como $(a] \in F$, obtenemos que la intersección $(a] \cap \{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\} \in F$. En particular, esta intersección es no vacía. Sea $w \in (a] \cap \{z \in A : \forall z \vee a = \forall z \vee b\}$. Luego, $a = \forall w \vee a = \forall w \vee b$ y por lo tanto $b \leq a$. Análogamente, considerando $(b] \in F$, obtenemos que $a \leq b$. Luego, $a = b$. En consecuencia ψ es inyectiva. □

Lema 5.2.2. *Toda ML-álgebra subdirectamente irreducible es isomorfa a un subreducto implicativo monádico de una ML-álgebra acotada* $\mathbf{B}$*, donde además* $\forall\mathbf{B}$ *es totalmente ordenada.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una ML-álgebra subdirectamente irreducible. Entonces $\mathbf{A}$ es dirigida. En efecto, sean $a, b \in A$. Como $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada, podemos considerar $\forall z = \min\{\forall a, \forall b\}$. Luego, $\forall z \leq a, b$ y por lo tanto $\mathbf{A}$ es dirigida. Del Lema 5.2.1, sabemos que existe $\mathbf{B} \in \mathcal{ML}$ acotada tal que $\mathbf{A}$ se sumerge en $\mathbf{B}$. Para cada $z \in A$, $\forall([\forall \mathbf{z}))$ es totalmente ordenada, dado que $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenada. Como la propiedad de ser totalmente ordenado es una propiedad de primer orden, y por lo tanto se preserva por ultraproductos, tenemos que $\forall\mathbf{B}$ es totalmente ordenada. □

Recordemos que toda ML-álgebra acotada es una MMV-álgebra. Luego, en el lema anterior demostramos que toda ML-álgebra subdirectamente irreducible es isomorfa a un subreducto implicativo monádico de una MMV-álgebra.

Proposición 5.2.3. *Toda ML-álgebra es isomorfa a un subreducto implicativo monádico de una MMV-álgebra.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$. Consideremos $\varphi\colon \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, la representación subdirecta de $\mathbf{A}$ en álgebras subdirectamente irreducibles. Del Lema 5.2.2, sabemos que existen $\mathbf{B}_i \in \mathcal{MMV}$ tales que $\forall\mathbf{B}_i$ es totalmente ordenada y tal que $\mathbf{A}_i$ es isomorfa a un subreducto implicativo monádico de $\mathbf{B}_i$, para cada $i \in I$. Luego, $\mathbf{A}$ es isomorfa a un subreducto implicativo monádico de $\prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$. □

Proposición 5.2.4. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de MMV-álgebras, entonces $\mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$ es una variedad de ML-álgebras.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$ es cerrado por subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una ML-subálgebra de $\mathbf{B}$. Identificaremos $\mathbf{A}$ con dicha subálgebra para facilitar la notación.

Sea $\mathbf{C}$ una ML-subálgebra de $\mathbf{A}$. Luego, $\mathbf{C}$ es una ML-subálgebra de $\mathbf{B}$. Esto es, $\mathbf{C}$ es un subreducto implicativo monádico de $\mathbf{B}$. Por lo tanto, $\mathbf{C} \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$.

Consideremos F un filtro implicativo monádico de $\mathbf{A}$, y sea $F' = \mathrm{FMg}_B(F)$ el filtro implicativo monádico generado por F en $\mathbf{B}$. Como F es monádico, sabemos que $F' = \mathrm{Fg}_B(F)$. Es claro que $F \subseteq F' \cap A$. Veamos que $F = F' \cap A$. Para ello, sea $a \in F' \cap A$. Luego, existen $a_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, tales que $a_1 \to (a_2 \to (\dots(a_n \to a)\dots)) = 1 \in F$. Aplicando modus ponens, obtenemos que $a \in F$. Luego, $F = F' \cap A$. Sean $x, y \in A$ tales que $x/F \neq y/F$. Veamos que $x/F' \neq y/F'$. En efecto, supongamos por el absurdo que x e y tienen la misma clase módulo F'. Entonces $x \to y \in F'$ e $y \to x \in F'$. Luego, $x \to y \in F' \cap A$ e $y \to x \in F' \cap A$. De donde se deduce que $x \to y \in F$ e $y \to x \in F$, lo cual es una contradicción. La aplicación $\psi\colon \mathbf{A}/F \to \mathbf{B}/F'$ definida por $\psi(a/F) = a/F'$ es un ML-homomorfismo inyectivo. Como $\mathbf{B}/F' \in \mathcal{V}$, tenemos que $\mathbf{A}/F \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$.

Consideremos $\mathbf{A}^i \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$, $i \in I$, y sean $\mathbf{B}^i \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{A}^i$ es isomorfa a una ML-subálgebra de $\mathbf{B}^i$. Sean $\alpha_i\colon \mathbf{A}^i \to \mathbf{B}^i$ ML-homomorfismos inyectivos. Sabemos que $\alpha\colon \prod_{i\in I} \mathbf{A}^i \to \prod_{i\in I} \mathbf{B}^i$ definido por $\alpha(a)(i) = \alpha_i(a(i))$ es un ML-homomorfismo. Es claro también α es inyectivo, ya que para todo $i \in I$, α_i es inyectivo. Por lo tanto, $\prod_{i\in I} \mathbf{A}^i \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V})$. □

Corolario 5.2.5. *Si $\mathbf{B}$ es una MMV-álgebra y $\mathbf{A}$ es su $\{\to,\forall,1\}$-reducto, entonces*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B})).$$

Demostración. De la Proposición 5.2.4, sabemos que $\mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}))$ es una variedad de ML-álgebras y es claro que $\mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}))$.

Sea $\mathbf{C} \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B}))$. Luego existen $\mathbf{D} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B})$ y $\psi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tal que ψ es un $\{\to,\forall,1\}$-monomorfismo. Como $\mathbf{D} \in \mathrm{H\,S\,P}(\mathbf{B})$, entonces $\mathbf{D}$ es una imagen homomorfa de una MMV-álgebra $\mathbf{S}$, tal que $\mathbf{S}$ es isomorfa a una MMV-subálgebra de $\mathbf{B}^I$. Sea $g\colon \mathbf{S} \to \mathbf{D}$ el MMV-epimorfismo. Consideremos $S' = g^{-1}(C)$ y el ML-epimorfismo $g \restriction S'\colon \mathbf{S}' \to \mathbf{C}$. Luego, $\mathbf{S}'$ es una ML-subálgebra de $\mathbf{A}^I$ y $\mathbf{A}^I$ es el $\{\to,\forall,1\}$-reducto de $\mathbf{B}^I$. Luego, $\mathbf{C} \in \mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A})$. Por lo tanto, $\mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{B})) \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A})$. □

Corolario 5.2.6. *El reducto implicativo monádico de la MMV-álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}$ genera la variedad de las álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas. Esto es,*

$$\mathcal{ML} = \mathcal{V}(\langle [0,1]^{\mathbb{N}}; \to, \forall, 1\rangle).$$

Demostración. Del corolario anterior, la Proposición 5.2.3 y el Teorema 2.4.1, tenemos que $\mathcal{ML} = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{MMV}) = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}(\langle [0,1]^{\mathbb{N}}; \oplus, \neg, 0\rangle)) = \mathcal{V}(\langle [0,1]^{\mathbb{N}}; \to, \forall, 1\rangle)$. □

Como la variedad $\mathcal{MMV}$ está generada por sus miembros finitos y $\mathcal{ML}$ es la clase de los subreductos implicativos monádicos de $\mathcal{MMV}$, obtenemos en forma inmediata el siguiente resultado.

Corolario 5.2.7. *La variedad $\mathcal{ML}$ está generada por sus miembros finitos. Más precisamente, $\mathcal{ML} = \mathcal{V}\left(\{\mathbf{L}_n^k : n, k \in \mathbb{N}\}\right)$.*

5.3. Reticulado de subvariedades

En esta sección describimos en forma completa el reticulado de subvariedades de las ML-álgebras. Damos también una base ecuacional para cada una de las subvariedades propias.

En el Teorema 2.6.12 demostramos que la subvariedad de MV-álgebras monádicas generada por el álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ está caracterizada con la identidad (α_1) $x \approx \forall x$, y si $k \geq 2$ entonces la subvariedad generada por $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$ está caracterizada por la identidad

$$(\alpha_k) \qquad \bigvee_{i,j\in\{1,\ldots,k+1\}, i\neq j} \left(\forall(x_i \vee x_j) \to \bigvee_{s=1}^{k+1} \forall x_s\right) \approx 1.$$

donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$.

Decimos que una ML-álgebra $\mathbf{A}$ es de *ancho 1*, y notamos $\operatorname{width}\mathbf{A} = 1$, si $\mathbf{A}$ satisface la identidad (α_1). Una ML-álgebra $\mathbf{A}$ es de *ancho k*, con k entero mayor o igual que 2, si $\mathbf{A}$ satisface la identidad (α_k) y $\mathbf{A}$ no satisface la identidad (α_{k-1}). En este caso, notamos $\operatorname{width}\mathbf{A} = k$. Si $\mathbf{A}$ no satisface la identidad (α_k), para ningún k, decimos que el ancho de $\mathbf{A}$ es infinito y escribimos $\operatorname{width}\mathbf{A} = \omega$.

Consideremos un álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica subdirectamente irreducible $\mathbf{A}$ que satisface la identidad (α_k), para cierto k entero positivo. Sabemos que $\mathbf{A}$ es un subreducto implicativo monádico de una MMV-álgebra $\mathbf{B}$, y por la construcción de $\mathbf{B}$, tenemos que $\mathbf{B}$ satisface (α_k). Además, sabemos que $\forall\mathbf{B}$ es totalmente ordenada. Luego, de la Proposición 2.6.8, obtenemos que $\mathbf{B}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle(\forall\mathbf{B})^k; \forall_\wedge\rangle$. Vamos a demostrar que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $(\forall\mathbf{A})^k$, siendo $\forall\mathbf{A}$ un cadena. La demostración es similar a la realizada en la Proposición 2.6.8, aunque con algunos cambios.

Definimos en toda álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica $\mathbf{A}$, el operador $\exists\colon A \to A$ de la siguiente manera $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to \forall a$, para todo $a \in A$.

Si el cuantificador de $\mathbf{A}$ es $\forall_\wedge$ entonces el operador existencial anteriormente definido es igual a $\exists_\vee$.

Proposición 5.3.1. *Si $\mathbf{A}$ es una subálgebra de implicación de Łukasiewicz monádica de $\langle\mathbf{V}^n; \forall_\wedge\rangle$ tal que $\forall_\wedge\mathbf{A}$ es totalmente ordenada, siendo $\mathbf{V}$ una $\mathcal{L}$-cadena y n un número entero positivo, entonces $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $(\forall_\wedge\mathbf{A})^n$.*

Demostración. Sea $\pi_i\restriction_A\colon A \to V$ la proyección sobre la i-ésima componente, donde $i \in \{1,\ldots,n\}$. Demostraremos que para todo i, $\pi_i\restriction_A(\forall_\wedge A) = \pi_i\restriction_A(A)$. Es inmediato que $\pi_i\restriction_A(\forall_\wedge A) \subseteq \pi_i\restriction_A(A)$. Debemos probar que para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y para todo $b \in A$, existe $c \in \forall_\wedge A$ tal que $\pi_i(b) = \pi_i(c)$. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Si $n = 1$ entonces $A = \forall_\wedge A$ y el resultado es trivial.

Supongamos que vale para $n = k$ (hipótesis inductiva), y probemos que vale para $n = k+1$. Sea $A \subseteq V^{k+1}$, y sea $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\rangle \in A$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1}$, pues $a_i \in V$ y $\mathbf{V}$ es una cadena. Entonces $\pi_1(a) = a_1 = \pi_1(\forall_\wedge a)$ y $\pi_{k+1}(a) = a_{k+1} = \pi_{k+1}(\exists_\vee a)$. Calculemos $(a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)$. Tenemos que

$$a \to \forall_\wedge a = \langle 1, a_2 \to a_1, \ldots, a_{k+1} \to a_1\rangle$$

y

$$\exists_\vee a \to a = \langle a_{k+1} \to a_1, a_{k+1} \to a_2, \ldots, a_{k+1} \to a_k, 1\rangle.$$

Luego,

$$(a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a) = \langle 1, (a_2 \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_2), \ldots, (a_k \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_k), 1\rangle.$$

Sea $\mathbf{B}$ la subálgebra de $\mathbf{V}^{k+1}$ cuyo universo es el conjunto $B = \{a \in V^{k+1} : a_1 = a_{k+1}\}$. Luego, $\mathbf{B} \cong \mathbf{V}^k$ y $(a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a) \in B$. Más precisamente, $(a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a) \in A \cap B$.

Consideremos i tal que $1 < i < k+1$. Tenemos que $\pi_i((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) = (a_i \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_i)$. Como $\mathbf{V}$ es una cadena, pueden ocurrir dos casos.

Supongamos que $a_i \to a_1 \geq a_{k+1} \to a_i$. Entonces $\pi_i((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) = a_i \to a_1$. Luego, $((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \to \forall_\wedge a = \langle e_j\rangle_{1\leq j\leq k+1}$ donde

$$\langle e_j\rangle_{1\leq j\leq k+1} = \begin{cases} a_1 & \text{si } j = 1 \text{ o } j = k+1 \\ ((a_j \to a_1) \vee (a_{k+1} \to a_j)) \to a_1 & \text{si } j \notin \{1, i, k+1\} \\ (a_i \to a_1) \to a_1 & \text{si } j = i \end{cases}.$$

Entonces, la componente i-ésima de $((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \to \forall_\wedge a$ es igual a $a_i \vee a_1 = a_i$. Además, $((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \to \forall_\wedge a \in B \cap A$ y por hipótesis inductiva sobre $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cong \mathbf{A} \cap \mathbf{V}^k$ existe $c \in \forall_\wedge(A \cap B) \subseteq \forall_\wedge A$ tal que $\pi_i(c) = a_i$.

Supongamos que $a_i \to a_1 \leq a_{k+1} \to a_i$. Entonces $\pi_i((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) = a_{k+1} \to a_i$. Consideremos la MMV-álgebra $[\forall_\wedge \mathbf{a})$, donde $\neg_{\forall_\wedge a} x := x \to \forall_\wedge a$ y $x \odot_{\forall_\wedge a} y := \neg_{\forall_\wedge a}(x \to \neg_{\forall_\wedge a} y)$. Notemos que $\forall_\wedge a \leq (a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)$ y $\forall_\wedge a \leq \exists_\vee a$. Entonces, $((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \odot_{\forall_\wedge a} \exists_\vee a \in [\forall_\wedge a)$. Además, $\pi_1(((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \odot_{\forall_\wedge a} \exists_\vee a) = a_1 = \pi_{k+1}(((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \odot_{\forall_\wedge a} \exists_\vee a)$. Luego, $((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \odot_{\forall_\wedge a} \exists_\vee a \in [\forall_\wedge a) \cap B \subseteq A \cap B$, y por hipótesis inductiva tenemos que existe $d \in \forall_\wedge(A \cap B) \subseteq \forall_\wedge A$ tal que

$$\begin{aligned} \pi_i(d) &= \pi_i(((a \to \forall_\wedge a) \vee (\exists_\vee a \to a)) \odot_{\forall_\wedge a} \exists_\vee a) = ((a_{k+1} \to a_i) \to (a_{k+1} \to a_1)) \to a_1 \\ &= ((a_i \to a_{k+1}) \to (a_i \to a_1)) \to a_1 = (a_i \to a_1) \to a_1 = a_i. \end{aligned}$$

□

Lema 5.3.2. *Sea k un número entero positivo. La subvariedad de ML-álgebras generada por el álgebra $\langle [0,1]^k; \to, \forall, 1\rangle$ está caracterizada por la identidad (α_k).*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible perteneciente a la variedad $\mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\langle [0,1]^k; \to, \forall, 1\rangle)$. Del Corolario 5.2.5, sabemos que $\mathcal{V}_{\mathcal{ML}}\left(\langle [0,1]^k; \to, \forall, 1\rangle\right) = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k))$. Del Lema 2.6.12, sabemos que (α_k) se satisface en $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$. En consecuencia, (α_k) se satisface en todo subreducto implicativo monádico de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$. En particular, tenemos que $\mathbf{A}$ satisface (α_k).

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{ML}$ un álgebra subdirectamente irreducible que verifica la identidad (α_k). Del Lema 5.2.2, sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a un subreducto implicativo monádico de una MMV-álgebra $\mathbf{B}$, y por la construcción de $\mathbf{B}$ es claro que $\mathbf{B}$ satisface la identidad (α_k). Luego, $\mathbf{B} \in \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Por lo tanto, $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)) = \mathcal{V}_{\mathcal{ML}}\left(\langle [0,1]^k; \to, \forall, 1\rangle\right)$. □

Corolario 5.3.3. *La variedad $\mathcal{V}(\{\mathbf{L}_n^k : n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, para todo entero positivo k.*

Como consecuencia inmediata del Lema 5.3.2 y del Corolario 2.6.13, tenemos lo siguiente.

Corolario 5.3.4. *Las subvariedades generadas por las ML-álgebras $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$ forman una cadena creciente*

$$\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^1) \subset \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^2) \subset \cdots \subset \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k) \subset \cdots \subset \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}) = \mathcal{ML}.$$

Recordemos que el reticulado de subvariedades de las álgebras de implicación de Łukasiewicz es una $\omega + 1$-cadena

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}_0) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}_1) \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}_n) \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}_\omega) = \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}_{1,\omega}) = \mathcal{L},$$

donde $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}_n)$ es la variedad de todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz que satisfacen la identidad

$$(\epsilon_n)\ x \overset{n}{\to} y \approx x \overset{n+1}{\longrightarrow} y,$$

con n entero positivo. En la sección §2.8 vimos que la subvariedad de MMV-álgebras $\mathcal{K}_n = \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\{\mathbf{S}_1^{\mathbb{N}}, \mathbf{S}_2^{\mathbb{N}}, \ldots, \mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}\})$ está caracterizada por la identidad $(\delta_n)\ x^n \approx x^{n+1}$.

Notamos con $\mathbf{L}_k^{\mathbb{N}}$ al reducto implicativo monádico de la MMV-álgebra $\mathbf{S}_k^{\mathbb{N}}$. Del Corolario 5.2.5, tenemos que $\mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\{\mathbf{S}_1^{\mathbb{N}}, \ldots, \mathbf{S}_n^{\mathbb{N}}\}) = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}})) = \mathcal{V}_{\mathcal{ML}}\left(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}}\right)$. En consecuencia, tenemos el siguiente lema.

Lema 5.3.5. *Para cada n entero positivo, la subvariedad $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}})$ está caracterizada por la identidad (ϵ_n).*

Notemos que la identidad (ϵ_n) es equivalente a la identidad $(x \overset{n+1}{\to} y) \to (x \overset{n}{\to} y) \approx 1$, dado que $x \overset{n}{\to} y \leq x \overset{n+1}{\to} y$ se satisface en toda álgebra.

Del Lema 5.3.5 y de la Proposición 5.2.6, obtenemos la siguiente relación entre las subvariedades $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}})$.

Corolario 5.3.6. *Las subvariedades $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}})$ forman una cadena creciente en el reticulado de subvariedades de $\mathcal{ML}$,*

$$\mathcal{V}(\mathbf{L}_1^{\mathbb{N}}) \subset \mathcal{V}(\mathbf{L}_2^{\mathbb{N}}) \subset \cdots \subset \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}}) \subset \cdots \subset \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}}) = \mathcal{ML}.$$

Teorema 5.3.7. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación de Łukasiewicz monádica subdirectamente irreducible.*

(1) Si $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = n < \omega$ *y* $\operatorname{width}\mathbf{A} = k < \omega$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k)$.

(2) Si $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = n < \omega$ *y* $\operatorname{width}\mathbf{A} = \omega$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}})$.

(3) Si $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = \omega$ *y* $\operatorname{width}\mathbf{A} = k < \omega$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$.

(4) Si $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = \omega$ *y* $\operatorname{width}\mathbf{A} = \omega$*, entonces* $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{ML}$.

Demostración. Demostremos (1). Si $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = n < \omega$ y $\forall\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible, sabemos que $\forall\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{L}_n$. En particular, tenemos que $\mathbf{A}$ es acotada. Del Lema 5.1.6, sabemos que $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra. Además $\mathbf{A}$ satisface (α_k) y no satisface (α_{k-1}), entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a $(\forall\mathbf{A})^k \approx \mathbf{L}_n^k$ (ver Lema 2.7.2). En consecuencia, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k)$.

Veamos (2). Dado que $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = n < \omega$, analizando como en (1), obtenemos que $\mathbf{A}$ es una MMV-álgebra y $\forall\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{L}_n$. Como $\mathbf{A}$ es de ancho infinito, sabemos del Corolario 2.8.2 y del Lema 2.8.4, que $\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}})$. Entonces, del Corolario 5.2.5, tenemos que

$$\mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{A})) = \mathcal{S}^{\{\to,\forall,1\}}(\mathcal{V}_{\mathcal{MMV}}(\mathbf{S}_n^{\mathbb{N}})) = \mathcal{V}_{\mathcal{ML}}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}}).$$

Demostremos (3). Si $\mathbf{A}$ es de ancho k, por el Lema 5.3.2 tenemos que $\mathbf{A} \in \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Por otro lado, consideremos la subálgebra $[\forall\mathbf{a})$, para $a \in A$. Como $[\forall\mathbf{a})$ es acotada, podemos definir en $[\forall a)$ una estructura de MMV-álgebra. Esta álgebra es simple y de ancho k. Si existe $\forall a$ tal que el $\operatorname{ord}(\forall a) = \omega$ entonces $[\forall\mathbf{a})$ es isomorfa a una subálgebra infinita de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$, y por el Lema 2.6.3 tenemos que $\mathcal{V}([\forall\mathbf{a})) = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$. Supongamos que el orden de todos los elementos de $\forall\mathbf{A}$ es finito. Como el $\operatorname{ord}(\forall\mathbf{A}) = \omega$, sabemos que para todo n existe $\forall a \in \forall A$ tal que $\operatorname{ord}(\forall a)$ es mayor que n. Supongamos que $\operatorname{ord}\forall a = m > n$ entonces $[\forall\mathbf{a})$ es isomorfa a $\mathbf{L}_m^k$. Luego, $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A})$, para todo n. Por lo tanto, del Corolario 5.3.3, obtenemos que $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k) = \mathcal{V}(\mathbf{A})$.

Por último, supongamos que $\operatorname{ord}\forall\mathbf{A} = \omega$ y $\operatorname{width}\mathbf{A} = \omega$. Como en (3) podemos ver que $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A})$, para todo n y para todo k. Entonces, de la Proposición 5.2.7, obtenemos que $\mathcal{ML} = \mathcal{V}(\mathbf{A})$. □

Como consecuencia inmediata del Teorema 5.3.7, el Lema 2.7.1, y teniendo en cuenta que $\mathbf{L}_n^k$ es el reducto implicativo monádico de la MMV-álgebra $\mathbf{S}_n^k$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.3.8. *Sean n y k enteros positivos. Entonces, la variedad* $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k)$ *está caracterizada por las ecuaciones* (ϵ_n) *y* (α_k).

El siguiente lema será de utilidad para la determinación de las identidades que caracterizan a una subvariedad propia.

Lema 5.3.9. *Sean n y k enteros positivos. Entonces, la variedad $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k)$ está caracterizada por la identidad (β_n^k) siguiente*

$$\left[\left(\forall\left((x \overset{n+1}{\to} y) \to (x \overset{n}{\to} y)\right) \to \forall z\right) \bigvee \left(\forall(\bigvee_{i,j\in\{1,\ldots,k+1\}, i\neq j} (\forall(x_i \vee x_j) \to \bigvee_{s=1}^{k+1} \forall x_s)) \to \forall z\right)\right]$$
$$\to \forall z \approx 1.$$

Demostración. Si (ϵ_n) y (α_k) se satisfacen, entonces (β_n^k) se satisface. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible que satisface la identidad (β_n^k). Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $\epsilon_n(a,b) = (a \overset{n+1}{\to} b) \to (a \overset{n}{\to} b) < 1$ y existen $a_1, \ldots, a_{k+1} \in A$ tales que $\alpha_k(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \bigvee_{i,j\in\{1,\ldots,k+1\}, i\neq j} \left(\forall(a_i \vee a_j) \to \bigvee_{s=1}^{k+1} \forall a_s\right) < 1$. Como $\forall\mathbf{A}$ es una cadena, sabemos que existe $c \in A$ tal que $\forall c \leq \forall(\epsilon_n(a,b)) < 1$ y $\forall c \leq \forall(\alpha_k(a_1, \ldots, a_{k+1})) < 1$. Si elegimos $c = z$, entonces

$$[(\forall\,(\epsilon_n(a,b)) \to \forall c) \vee (\forall(\alpha_k(a_1,\ldots,a_{k+1})) \to \forall c)] \to \forall c =$$
$$\forall\,(\epsilon_n(a,b)) \wedge \forall\,(\alpha_k(a_1,\ldots,a_{k+1})) < 1,$$

lo cual es una contradicción porque (β_n^k) se satisface en $\mathbf{A}$. $\square$

Como $\mathcal{ML}$ tiene distributividad de congruencias, por los resultados de Jónsson sabemos que el reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{ML})$ también es distributivo. Para determinar $\Lambda(\mathcal{ML})$, vamos a caracterizar el conjunto ordenado $\mathcal{J}(\Lambda(\mathcal{ML}))$ de sus elementos supremo-irreducibles.

Corolario 5.3.10. *Sean n, m, s y t números enteros positivos. Si $n \leq m$ y $s \leq t$, entonces $\mathbf{L}_n^s$ es subálgebra de $\mathbf{L}_m^t$ y $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^s) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_m^t)$.*

Además, si en el corolario anterior tenemos que $s < t$ o $n < m$, entonces la inclusión $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^s) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_m^t)$ es propia.

Sabemos que para todo entero positivo n, $\mathbf{L}_n^k$ es subálgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]^k$. Además, $\mathbf{L}_n^k$ es subálgebra de $\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}}$, para todo k. Entonces tenemos la siguiente relación de inclusión entre las subvariedades $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k)$, $\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$ y $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}})$.

Lema 5.3.11. *Sean n y k enteros positivos. Entonces, $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k) \subseteq \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k)$, para todo n, y $\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}})$.*

Todas las variedades definidas hasta este momento son supremo-irreducibles pues cada una de ellas está generada por un álgebra subdirectamente irreducible. Veamos ahora que toda variedad propia de ML-álgebras se puede escribir como supremo finito de éstas.

Proposición 5.3.12. *El conjunto de subvariedades $\vee$-irreducibles es*

$$\mathcal{J}(\Lambda(\mathcal{ML})) = \left\{\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k) : n,k \in \mathbb{N}\right\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k) : k < \omega\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}}) : n < \omega\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbb{N}})\}.$$

Si $\mathcal{V}$ una variedad propia no trivial de ML-álgebras, entonces $\mathcal{V}$ es igual a un supremo de un número finito de subvariedades $\{\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^k) : n,k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^k) : k < \omega\} \cup \{\mathcal{V}(\mathbf{L}_n^{\mathbb{N}}) : n < \omega\}$.

Para seguir la demostración, sugerimos al lector observar la Figura 5.1.

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una variedad propia de ML-álgebras. Consideremos el conjunto de pares

$$\mathfrak{A} = \{(n,k) \in (\mathbb{N} \cup \{\omega\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\}) : \text{existe}\, \mathbf{A} \in si(\mathcal{V}) \text{ tal que} \operatorname{ord} \forall \mathbf{A} = n \text{ y} \operatorname{width} \mathbf{A} = k\}\,.$$

Como $\mathcal{V}$ no es la variedad trivial, entonces $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. Consideramos en $\mathfrak{A}$ el orden parcial $(n,s) \leq (m,t)$ si y sólo si $n \leq m$ y $s \leq t$.

Del Teorema 5.3.7 (4), sabemos que no existe $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V})$ tal que $\operatorname{ord} \forall \mathbf{A} = \omega$ y $\operatorname{width} \mathbf{A} = \omega$ porque $\mathcal{V}$ es propia. Por la misma razón tampoco existen $\mathbf{A}_i \in si(\mathcal{V})$ tales que $(\operatorname{ord} \forall \mathbf{A}_i, \operatorname{width} \mathbf{A}_i)$ formen una sucesión infinita creciente.

Probaremos que existe un conjunto finito $\mathfrak{B} = \{(n_i,k_i) : 1 \leq i \leq p\}$ de elementos maximales en $(\mathbb{N} \cup \{\omega\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\})$ tal que $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^{p} \mathcal{V}(\mathbf{A}_i)$, donde $\operatorname{ord} \forall \mathbf{A}_i = n_i$ y $\operatorname{width} \mathbf{A}_i = k_i$, para todo i.

Supongamos que existe en $\mathfrak{A}$ un elemento de la forma (ω, k_1) o que existen (n_i, k_1) tales que n_i es una sucesión infinita estrictamente creciente. En este caso, existe un elemento maximal de la forma $m_1 = (\omega, k_1)$, $k_1 \in \mathbb{N}$ que además es único. Análogamente si existe un maximal de la forma $m_2 = (n_2, \omega)$ también es único.

Sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \{(n,k) : (n,k) \leq m_1 \text{ o } (n,k) \leq m_2\}$. Si $\mathfrak{A}' = \emptyset$, entonces $\mathcal{V}$ posee una de las siguientes formas:

(a) $\mathcal{V} = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1})$,

(b) $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{L}_{n_2}^{\mathbb{N}})$,

(c) $\mathcal{V} = \mathcal{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]^{k_1}) \vee \mathcal{V}(\mathbf{L}_{n_2}^{\mathbb{N}})$.

Supongamos que $\mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Observemos que $\mathfrak{A}' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y es necesariamente finito. Luego, existe en $\mathfrak{A}'$ un conjunto finito de elementos maximales (n_i,k_i), para $i \in I'$. Sea $I = I' \cup \{m_1, m_2\}$. Es claro que $\bigvee_{i \in I} \mathcal{V}(\mathbf{A}_i) \subseteq \mathcal{V}$. Sea $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V})$. Luego, $(\operatorname{ord} \forall \mathbf{A}, \operatorname{width} \mathbf{A}) \in \mathfrak{A}$. Entonces existe (n_i,k_i) maximal tal que $(\operatorname{ord} \forall \mathbf{A}, \operatorname{width} \mathbf{A}) \leq (n_i,k_i)$. Entonces, $\mathcal{V}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{A}_i)$. Por lo tanto, $\mathcal{V} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{V}(\mathbf{A}_i)$. $\square$

De la Proposición 5.3.12, del Corolario 5.3.10, del Lema 5.3.11, del Corolario 5.3.6 y el Corolario 5.3.4, obtenemos que el conjunto ordenado $\mathcal{J}(\Lambda(\mathcal{ML}))$ es el indicado en la Figura 5.1.

En el Lema 5.3.9, el Lema 5.3.2 y el Lema 5.3.5, vimos la identidad que caracteriza a cada una de las subvariedades supremo-irreducibles en $\mathcal{ML}$.

Teorema 5.3.13. *Si $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^{s} \mathcal{V}_i$, donde $\mathcal{V}_i$ son supremo-irreducibles en $\Lambda(\mathcal{ML})$, entonces la identidad que caracteriza a $\mathcal{V}$ es $\lambda_{\mathcal{V}}(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, x_{s1}, \ldots, x_{sn_s}) = \bigvee_{i=1}^{s} \forall\left(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})\right) \approx 1$, donde $\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \approx 1$ caracteriza a la variedad $\mathcal{V}_i$, para cada $i = 1, \ldots, s$.*

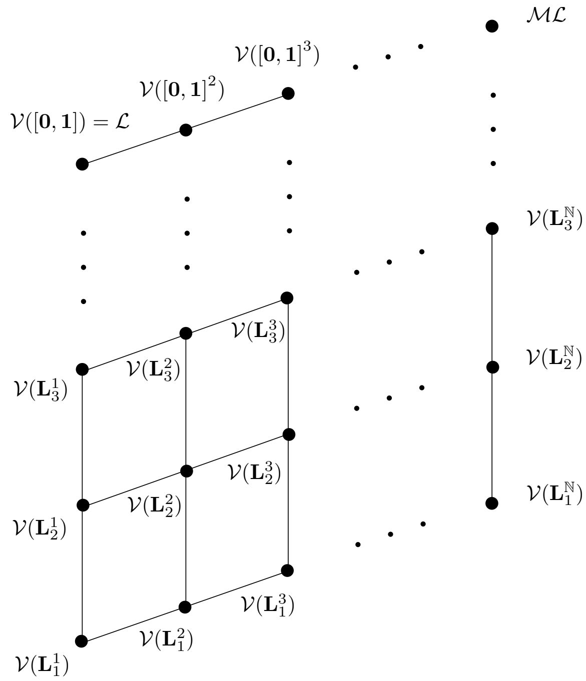


Figura 5.1.: $\mathcal{J}(\Lambda(\mathcal{ML}))$

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra subdirectamente irreducible. Supongamos que $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V})$. Sabemos que $\mathbf{A} \in si(\mathcal{V}_i)$ para algún $i = 1, \ldots, s$. Entonces, $\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \approx 1$ se satisface en $\mathbf{A}$ y por lo tanto $\forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1$ también se satisface en $\mathbf{A}$. Luego, $\mathbf{A} \models \bigvee_{i=1}^{s} \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1$. Supongamos ahora que $\mathbf{A} \notin si(\mathcal{V})$. Luego, para todo $i = 1, \ldots, s$, se tiene que $\mathbf{A} \notin si(\mathcal{V}_i)$. Elegimos para cada i elementos $a_{i1}, \ldots, a_{in_i} \in A$ tales que $\lambda_{\mathcal{V}_i}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i}) < 1$. Luego, $\forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})) < 1$, para todo i. Como $\forall\mathbf{A}$ es una cadena, existe $t \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\bigvee_{i=1}^{s} \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})) = \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_t}(a_{t1}, \ldots, a_{tn_t})) < 1$. Por lo tanto, $\bigvee_{i=1}^{s} \forall\,(\lambda_{\mathcal{V}_i}(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})) \approx 1$ no se satisface en $\mathbf{A}$. $\square$

Parte II.

Representaciones topológicas de álgebras con implicación

6. Preliminares

Este capítulo se estructura de la siguiente manera. Comenzamos dando en la sección §6.1 los resultados básicos de la dualidad de Stone. En la sección §6.2 exponemos la dualidad para las álgebras de implicación.

6.1. Representación topológica de las álgebras de Boole

En esta sección recordamos la dualidad establecida por Stone entre las álgebras de Boole y los espacios booleanos. Nos referimos a esta dualidad como dualidad de Stone. Aquí sólo hacemos un resumen de los principales resultados. Para más información sobre la misma el lector puede consultar, por ejemplo, Koppelberg (1989) y/o Burris y Sankappanavar (1981).

Sea $\mathbf{B} = \langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Si $Y \subseteq B$ notamos con $\mathrm{Fg}(Y)$ al filtro generado por Y en $\mathbf{B}$. Sabemos que

$$\mathrm{Fg}(Y) = \left\{ b \in B : b \geq \bigwedge_{i=1}^{n} y_i, y_i \in Y, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

No es difícil demostrar que si Y es un subconjunto creciente entonces

$$\mathrm{Fg}(Y) = \left\{ b \in B : b = \bigwedge_{i=1}^{n} y_i, y_i \in Y, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Recordemos que un subconjunto C de B satisface la *finite meet property*, y notamos fmp para abreviar, si 0 no puede ser obtenido por ínfimos finitos de elementos de C, esto es, si el filtro generado por C en $\mathbf{B}$ es propio.

Un espacio topológico $\mathbf{X} = \langle X, \tau\rangle$ se dice un *espacio booleano*, o *espacio de Stone*, si es Hausdorff, compacto y si posee una base de subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados. Como es usual, un subconjunto que es simultáneamente abierto y cerrado lo llamamos *clopen*.

Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$, notamos $\mathrm{St}(\mathbf{B})$ al espacio topológico cuyo conjunto subyacente es la familia de ultrafiltros de $\mathbf{B}$ y cuya topología tiene como subbase a los subconjuntos de la forma

$$N_a = \{U \in \mathrm{St}(\mathbf{B}) : a \in U\}$$

para cada $a \in B$. Este espacio es un *espacio booleano*. El siguiente lema establece que la familia $\{N_a\}_{a\in B}$ es una base para la topología del espacio.

Lema 6.1.1. *Si* $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole y* $a, b \in B$. *Entonces*

(a) $N_a \cap N_b = N_{a\wedge b}$,

(b) $N_a \cup N_b = N_{a\vee b}$,

(c) $N_{a'} = (N_a)'$.

Dado un espacio booleano $\mathbf{X}$, notamos $\mathrm{Clop}(\mathbf{X})$ al álgebra de Boole cuyo universo está formado por la colección de todos los subconjuntos clopen de $\mathbf{X}$.

El siguiente teorema nos dice que toda álgebra de Boole puede considerarse como el reticulado de los subconjuntos clopen de un espacio booleano, y recíprocamente, todo espacio booleano se lo puede considerar como el conjunto de ultrafiltros de un álgebra de Boole.

Teorema 6.1.2. *(Stone, 1937)*

(a) Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$*, el homomorfismo* $\sigma_B\colon \mathbf{B} \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(\mathbf{B}))$ *definido por* $\sigma_B(a) = N_a$ *es un isomorfismo booleano.*

(b) Dado un espacio booleano $\mathbf{X}$*, la función* $\varepsilon_X\colon \mathbf{X} \to \mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X}))$ *definida por* $\varepsilon_X(x) = \{U \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : x \in U\}$ *es un homeomorfismo de espacios booleanos.*

Es conocida la correspondencia entre los homomorfismos de álgebras de Boole y las funciones continuas definidas sobre espacios booleanos:

1. si $h\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ es un homomorfismo booleano entonces $\mathrm{St}(h)\colon \mathrm{St}(\mathbf{B}_2) \to \mathrm{St}(\mathbf{B}_1)$ definido por $\mathrm{St}(h)(U) = h^{-1}(U)$ es una función continua,

2. si $f\colon \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ es una función continua entonces $\mathrm{Clop}(f)\colon \mathrm{Clop}(\mathbf{X}_2) \to \mathrm{Clop}(\mathbf{X}_1)$ definido por $\mathrm{Clop}(f)(N) = f^{-1}(N)$ es un homomorfismo booleano.

Es conocido que St y Clop definen funtores contravariantes entre la categoría $\mathcal{B}$ cuyos objetos son álgebras de Boole y sus morfismos son los homomorfismos booleanos, y la categoría $\mathcal{E}$ cuyos objetos son los espacios booleanos y los morfismos las funciones continuas. Más aún, las composiciones $\mathrm{Clop}\circ\mathrm{St}$ y $\mathrm{St}\circ\mathrm{Clop}$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{E}$ respectivamente. Es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_{B_1}"'] & \mathbf{B}_2 \arrow[d, "\sigma_{B_2}"'] \\
\mathrm{Clop}(\mathrm{St}(\mathbf{B}_1)) \arrow[r, "\mathrm{Clop}(\mathrm{St}(h))"'] & \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(\mathbf{B}_2))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo homomorfismo h, y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_{X_1}"'] & \mathbf{X}_2 \arrow[d, "\varepsilon_{X_2}"'] \\
\mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X}_1)) \arrow[r, "\mathrm{St}(\mathrm{Clop}(f))"'] & \mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X}_2))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para toda función continua f.

La siguiente relación entre los filtros de un álgebra de Boole y los subconjuntos cerrados del espacio de Stone asociado a la misma será necesaria para nuestro desarrollo.

Lema 6.1.3. *Sea* $\mathbf{B}$ *un álgebra de Boole. La transformación*

$$\vartheta\colon \mathcal{F}(\mathbf{B}) \to \mathfrak{C}(\mathrm{St}(\mathbf{B})),$$

definida por $F \mapsto C_F = \{U \in \mathrm{St}(\mathbf{B}) : F \subseteq U\}$ *es un isomorfismo dual entre el conjunto* $\mathcal{F}(\mathbf{B})$ *de todos los filtros de* $\mathbf{B}$ *y el conjunto* $\mathfrak{C}(\mathrm{St}(\mathbf{B}))$ *de todos los subconjuntos cerrados del espacio de Stone, ordenados por inclusión. La inversa se define haciendo corresponder a cada cerrado* C*, el filtro* $F_C = \{a \in B : C \subseteq N_a\}$.

6.2. Álgebras de implicación

En esta sección exponemos la dualidad establecida entre las álgebras de implicación y los espacios de implicación desarrollada en Abad et. al. (2004).

6.2.1. Nociones básicas

Comenzamos dando la definición de las álgebras de implicación y algunas propiedades básicas.

Definición 6.2.1. Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \to \rangle$ de tipo (2) es un álgebra de implicación si $\mathbf{A}$ satisface las siguientes identidades

(T1) $(x \to y) \to x \approx x$,

(T) $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$,

(C) $x \to (y \to z) \approx y \to (x \to z)$.

En la sección §1.5 indicamos que la variedad de las álgebras de implicación es la subvariedad $\mathcal{V}(\mathbf{L}_1)$ de la variedad $\mathcal{L}$ de las álgebras de Łukasiewicz de implicación. Recordemos que esta subvariedad está caracterizada por la identidad

$$(\epsilon_1)\ x \to y \approx x \to (x \to y).$$

No es difícil ver que en toda L-álgebra $\mathbf{A}$, las siguientes son equivalentes:

(a) $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación,

(b) $\mathbf{A}$ satisface la identidad (ϵ_1),

(c) $\mathbf{A}$ satisface la identidad $(x \to y) \vee x \approx 1$.

Notamos con $\mathcal{I}$ a la variedad de las álgebras de implicación.

En toda álgebra de implicación $\mathbf{A}$, el término $x \to x$ es constante y se representa por 1. Recordemos que la relación $a \leq b$ si y sólo si $a \to b = 1$ es un orden parcial, llamado el orden natural de $\mathbf{A}$. Además 1 es el último elemento de A y $\mathbf{A}$ es un $\vee$-semireticulado donde el supremo de dos elementos está dado por $a \vee b = (a \to b) \to b$.

Ejemplo 6.2.2. Sea $\mathbf{B} = \langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Definimos $a \to b = a' \vee b$, para todo par de elementos $a, b \in B$, . Es fácil ver que $\langle B; \to\rangle$ es un álgebra de implicación.

El siguiente resultado puede verse en Abbott (1967a).

Lema 6.2.3. *Si $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación con primer elemento 0, entonces $\langle A; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole donde el complemento de un elemento $a \in A$ está definido por $a' = a \to 0$ y el ínfimo entre dos elementos a y b por $a \wedge b = (b \to a')'$.*

Es sabido que si $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación, entonces para cada $a \in A$ el conjunto $[a) = \{x \in A : a \leq x\}$ es un álgebra de Boole en la cual, si $b, c \geq a$, entonces $b \wedge c = (b \to (c \to a)) \to a$ y $b' = b \to a$. Más aún, si $\mathbf{R}$ es un $\vee$-semireticulado con último elemento 1 en el cual para todo $a \in R$ el conjunto $[a)$ es un álgebra de Boole, entonces $\mathbf{R}$ es un álgebra de implicación (ver Abbott (1967b)).

Como en toda L-álgebra, las congruencias de un álgebra de implicación están determinadas por sus filtros implicativos. No es difícil demostrar que F es un filtro implicativo si y sólo si F verifica las siguientes condiciones

(1) F es un subconjunto creciente no vacío,

(2) si $a, b \in F$ y existe $a \wedge b \in A$, entonces $a \wedge b \in F$.

Lema 6.2.4. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación. El filtro implicativo generado por un elemento $a \in A$ es el conjunto $\{x \in A : a \to x = 1\} = \{x \in A : a \leq x\} = [a)$.*

Del lema anterior es claro que la única álgebra simple es el álgebra $\mathbf{L}_1 = \langle\{0, 1\}; \to\rangle$. Por otro lado, dada un álgebra $\mathbf{A}$, la intersección de todos los filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$ es $\{1\}$. Luego, la aplicación $\mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}/D_i$, donde $\{D_i\}_{i \in I}$ es la familia de todos los filtros implicativos de $\mathbf{A}$, es un embedding subdirecto. Además, si D es un filtro implicativo maximal entonces $\mathbf{A}/D$ es un álgebra simple. Luego, toda álgebra subdirectamente irreducible es simple. Con lo cual tenemos el siguiente teorema.

Lema 6.2.5. *La única álgebra subdirectamente irreducible en la variedad $\mathcal{I}$ es el álgebra simple $\mathbf{L}_1 = \langle\{0, 1\}; \to\rangle$.*

6.2.2. Representación topológica de las álgebras de implicación

En esta sección recordamos el concepto de espacio de implicación, y la relación entre las álgebras de implicación y dichos espacios.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación, y consideremos la representación subdirecta de $\mathbf{A}$. Sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de implicación $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{B} = \prod \{\mathbf{A}/M, M \in \mathrm{M}\}$, donde M es el conjunto de los filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$ (ver (Abbott, 1967b, Teorema 17)). Como la única álgebra de implicación subdirectamente irreducible es el álgebra $\mathbf{L}_1$, entonces $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole. De ahora en adelante, identificaremos $\mathbf{A}$ con $\mathbf{A}'$.

Sea $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ la subálgebra booleana generada por A en $\mathbf{B}$, y $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ el filtro generado por A en $\mathbf{B}(\mathbf{A})$. Es sabido que el álgebra de implicación $\mathbf{A}$ es creciente en $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ (Abad et. al., 2004, Lema 1.1), y en consecuencia, A es una unión de filtros de $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.

Consideremos la siguiente álgebra de Boole, llamada la *clausura booleana* of $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Bo}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{A}) & \text{si } \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \neq B(\mathbf{A}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{A}) \times \{0,1\} & \text{si } \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = B(\mathbf{A}) \end{cases}.$$

El álgebra $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ es la menor álgebra de Boole, a menos de isomorfismos, en la cual el filtro $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es un ultrafiltro (Abad et. al., 2004, Teorema 2.2).

Como dos álgebras de implicación pueden tener la misma clausura booleana, ellas son distinguidas por medio de la familia de todos los elementos maximales del conjunto de todos los filtros de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ contenidos en A. Notamos esta familia con $\mathsf{M}(\mathbf{A})$.

Además, todo homomorfismo $f\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ entre dos álgebras de implicación, se extiende a un homomorfismo booleano $\hat{f}\colon \mathbf{Bo}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{Bo}(\mathbf{A}_2)$ (Abad et. al., 2004, Corolario 2.3).

Definición 6.2.6. Un *espacio de implicación* es una terna $\langle \mathbf{X}, u, \mathcal{C}\rangle$ tal que

(E1) $\mathbf{X}$ es un espacio booleano con conjunto subyacente X,

(E2) u es un elemento fijo de X,

(E3) $\mathcal{C}$ es una anticadena, con respecto a la inclusión, de subconjuntos cerrados de $\mathbf{X}$ tal que $\bigcap \mathcal{C} = \{u\}$,

(E4) si C es un cerrado de $\mathbf{X}$ que verifica que

(E) para todo clopen N de $\mathbf{X}$, si $C \subseteq N$ entonces existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq N$,

entonces existe $D' \in \mathcal{C}$ tal que $D' \subseteq C$.

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación, entonces el espacio

$$\mathbb{X}(\mathbf{A}) := \langle \mathrm{St}(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})), \mathrm{Fg}(\mathbf{A}), \mathcal{C}(\mathbf{A})\rangle,$$

es un espacio implicativo, donde $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{C_F : F \in \mathsf{M}(\mathbf{A})\}$ es la familia de subconjuntos cerrados correspondientes a $\mathsf{M}(\mathbf{A})$.

Veamos ahora la noción de función entre dos espacios de implicación.

Definición 6.2.7. Sean $\langle \mathbf{X}_1, u_1, \mathcal{C}_1\rangle$ y $\langle \mathbf{X}_2, u_2, \mathcal{C}_2\rangle$ dos espacios implicativos. Decimos que $f\colon \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ es *i-continua* si

(1) f es continua,

(2) $f(u_1) = u_2$,

(3) para todo $C \in \mathcal{C}_2$ existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $D \subseteq f^{-1}[C]$.

Si f es un homeomorfismo y su inversa también es i-continua, decimos que f es un *i-homeomorfismo.*

Si $f\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ es un homomorfismo entre dos álgebras de implicación y consideramos el homomorfismo booleano $\hat{f}\colon \mathbf{Bo}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{Bo}(\mathbf{A}_2)$, entonces la aplicación

$$\mathbb{X}(f) := \mathrm{St}(\hat{f})\colon \mathrm{St}(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}_2)) \to \mathrm{St}(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}_1))$$

definida por $\mathrm{St}(\hat{f})(U) = \hat{f}^{-1}(U)$ es i-continua.

Dado un espacio de implicación $\langle \mathbf{X}, u, \mathcal{C} \rangle$, el álgebra

$$\mathbb{I}(\mathbf{X}) := \{N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : C \subseteq N \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}$$

es un álgebra de implicación. Para cada función i-continua $h\colon \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ entre dos espacios implicativos $\langle \mathbf{X}_1, u_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{X}_2, u_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, el homomorfismo

$$\mathbb{I}(h) := \mathrm{Clop}(h)\restriction_{\mathbb{I}(\mathbf{X}_2)}\colon \mathbb{I}(\mathbf{X}_2) \to \mathbb{I}(\mathbf{X}_1)$$

define un homomorfismo implicativo.

Notamos con $\mathcal{I}$ a la categoría cuyos objetos son álgebras de implicación y sus morfismos son los homomorfismos implicativos, y con $\mathcal{X}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios implicativos y sus morfismos son funciones i-continuas.

Proposición 6.2.8. *(Abad et. al., 2004, Teorema 4.1, 4.2) La correspondencia $\mathbb{X}\colon \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{X}$ definida por*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_1 \arrow[r, squiggly, "\mathbb{X}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{X}(\mathbf{A}_1) \\
\mathbf{A}_2 \arrow[r, squiggly, "\mathbb{X}"] & \mathbb{X}(\mathbf{A}_2) \arrow[u, "\mathrm{St}(\hat{f})"']
\end{tikzcd}$$

es un funtor contravariante. La correspondencia $\mathbb{I}\colon \mathcal{X} \rightsquigarrow \mathcal{I}$ definida por

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_1 \arrow[r, squiggly, "\mathbb{I}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{I}(\mathbf{X}_1) \\
\mathbf{X}_2 \arrow[r, squiggly, "\mathbb{I}"] & \mathbb{I}(\mathbf{X}_2) \arrow[u, "\mathbb{I}(h)"']
\end{tikzcd}$$

es un funtor contravariante.

El Teorema 6.2.9 establece la equivalencia dual entre las categorías.

Teorema 6.2.9. *(Abad et. al., 2004, Theorem 4.3) Los funtores $\mathbb{I}$ y $\mathbb{X}$ definen una equivalencia entre las categorías $\mathcal{I}$ y $\mathcal{X}$. Más específicamente,* *(1) si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación*

$$\sigma_A \colon \mathbf{A} \to \mathbb{IX}(\mathbf{A})$$

definido por $\sigma_A(a) = N_a$ *define una transformación natural del funtor* $\mathbb{IX}$ *en el funtor identidad* $Id_{\mathcal{I}}$.

(2) si $\langle \mathbf{X}, u, \mathcal{C} \rangle$ *es un espacio implicativo, la aplicación*

$$\tau_X \colon \mathbf{X} \to \mathbb{XI}(\mathbf{X})$$

definida por $\tau_X(x) = \varepsilon_X(x)$ *define una transformación natural del funtor* $\mathbb{XI}$ *en el funtor identidad* $Id_{\mathcal{X}}$*, donde* ε_X *es el isomorfismo natural del espacio booleano* $\mathbf{X}$ *sobre* $\mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X}))$.

7. Álgebras de implicación monádicas

Las álgebras de implicación monádicas fueron introducidas por Monteiro y Iturrioz (1962) como una generalización de la noción de álgebra de Boole monádica (ver Halmos (1956)). Iturrioz y Monteiro llamaron a dichas álgebras, álgebras de Tarski monádicas. Ellas son exactamente los $\{\to, \forall, 1\}$-subreductos de las álgebras de Boole monádicas, y en consecuencia, son los modelos algebraicos del fragmento implicativo monádico de la lógica clásica de primer orden. La clase de todas las álgebras de implicación monádicas es una variedad. Más aún, es la subvariedad de las álgebras de implicación de Łukasiewicz monádicas caracterizada por la identidad (ϵ_1) $x \to y \approx x \to (x \to y)$, que fue estudiada en el capítulo 5.

En este capítulo obtenemos una representación topológica para las álgebras de implicación monádicas, extendiendo la representación topológica de las álgebras de implicación. En primer lugar, describimos a toda álgebra de implicación monádica como una unión de una familia única de filtros monádicos dentro de una adecuada álgebra de Boole monádica, la cual llamamos álgebra de clausura booleana monádica. A partir de esta representación, introducimos la noción de espacio topológico implicativo monádico, que es un espacio booleano con ciertos elementos distinguidos. Finalmente, demostramos que existe una dualidad categórica entre la categoría cuyos objetos son las álgebras implicativas monádicas y la categoría de los espacios implicativos monádicos. La representación topológica obtenida está también basada en la representación dada por Halmos (1956) de las álgebras de Boole monádicas.

El capítulo se estructura de la siguiente manera. La sección §7.1 está dedicada a exponer los conceptos preliminares con los que trabajamos en este capítulo. En la sección §7.1.1 damos la definición y propiedades básicas de las álgebras de implicación monádicas. En la sección §7.1.2 explicamos brevemente la dualidad de las álgebras de Boole monádicas. En la sección §7.2, definimos la clausura booleana monádica de un álgebra de implicación monádica y estudiamos sus propiedades. En la sección §7.3 damos la definición de espacio implicativo monádico y definimos el funtor (contravariante) $\mathbb{X}_M$ de la categoría de las álgebras de implicación monádicas a la categoría de los espacios implicativos monádicos. Por último, en la sección §7.4 definimos el funtor (contravariante) $\mathbb{I}_M$ de la categoría de los espacios implicativos monádicos a la categoría de las álgebras de implicación monádicas, y probaremos que $\mathbb{X}_M$ e $\mathbb{I}_M$ definen una equivalencia dual entre las categorías.

7.1. Preliminares

7.1.1. Álgebras de implicación monádicas

Definición 7.1.1. Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \rightarrow, \forall, 1\rangle$ de tipo (2,1,0) es un *álgebra de implicación monádica* si $\langle A; \rightarrow\rangle$ es un álgebra de implicación y $\forall$ satisface las siguientes identidades

(ML1) $\forall 1 \approx 1$,

(ML2) $\forall x \rightarrow x \approx 1$,

(ML3) $\forall((x \rightarrow \forall y) \rightarrow \forall y) \approx (\forall x \rightarrow \forall y) \rightarrow \forall y$,

(ML4) $\forall(x \rightarrow y) \rightarrow (\forall x \rightarrow \forall y) \approx 1$.

Notamos con $\mathcal{MI}$ a la variedad de las álgebras de implicación monádicas.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MI}$. Consideraremos A ordenado por el orden natural del álgebra de implicación $\langle A; \rightarrow\rangle$, esto es,

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \rightarrow b = 1,$$

para todo $a, b \in A$. Observemos que (ML3) puede ser escrita $\forall(x \vee \forall y) \approx \forall x \vee \forall y$, y que (ML2) nos dice que $\forall a \leq a$, para todo $a \in A$. Luego,

$$\forall a = \forall\forall a \vee \forall a = \forall(\forall a \vee \forall a) = \forall\forall a. \tag{7.1}$$

Si $a \leq b$, de (ML4) y (ML14), tenemos que $1 = \forall 1 = \forall(a \rightarrow b) \leq \forall a \rightarrow \forall b$, esto es, $\forall a \leq \forall b$.

Recordemos que si $\mathbf{A}$ pertenece a la variedad $\mathcal{ML}$ de las álgebras de implicación monádicas de Łukasiewicz y satisface la identidad

$$(\epsilon_1)\ (x \rightarrow y) \approx x \rightarrow (x \rightarrow y),$$

entonces $\langle A; \rightarrow\rangle$ es un álgebra de implicación. Luego, $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación monádica. El siguiente lema nos dice que la recíproca también es cierta.

Lema 7.1.2. *La variedad $\mathcal{MI}$ de las álgebras de implicación monádicas es equivalente a la subvariedad de la variedad $\mathcal{ML}$ caracterizada por la identidad (ϵ_1).*

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MI}$. Sabemos que el reducto implicativo de $\mathbf{A}$ es un álgebra de Łukasiewicz de implicación que satisface (ϵ_1). Veamos que se satisfacen (ML5), (ML6) y (ML7). En efecto, de $\forall b \leq \forall a \rightarrow \forall b$ tenemos que $\forall b \leq \forall(\forall a \rightarrow \forall b)$. Luego, $\forall a \rightarrow \forall b \leq \forall a \rightarrow \forall(\forall a \rightarrow \forall b)$ y $(\forall a \rightarrow \forall(\forall a \rightarrow \forall b)) \rightarrow \forall(\forall a \rightarrow \forall b) \leq (\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow \forall(\forall a \rightarrow \forall b)$. Entonces $\forall a \vee \forall(\forall a \rightarrow \forall b) \leq (\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow \forall(\forall a \rightarrow \forall b)$. Además, $\forall a \vee \forall(\forall a \rightarrow \forall b) = \forall(\forall a \vee (\forall a \rightarrow \forall b)) = \forall 1 = 1$. Por lo tanto $(\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow \forall(\forall a \rightarrow \forall b) = 1$. Además, de (ML2), tenemos que $\forall(\forall a \rightarrow \forall b) \leq \forall a \rightarrow \forall b$. Con lo que queda demostrado (ML5).

Probemos (ML6). De (ϵ_1), (ML3), tenemos que

$$\forall((b\to(b\to\forall a))\to\forall a)=\forall((b\to\forall a)\to\forall a)=(\forall b\to\forall a)\to\forall a=(\forall b\to(\forall b\to\forall a))\to\forall a.$$

Por último, de la identidad (T1) que satisfacen las álgebras de implicación (ver la Definición 6.2.1), tenemos que $\forall((a\to\forall b)\to a)=\forall a=(\forall a\to\forall b)\to\forall a$. Luego, (ML7) se satisface en toda álgebra de implicación monádica. $\square$

El primer ejemplo no trivial de un álgebra de implicación monádica es un álgebra de Boole monádica.

Ejemplo 7.1.3. Dada un álgebra de Boole monádica $\mathbf{A}=\langle A;\vee,\wedge,',\exists,0\rangle$, si definimos para todo $a,b\in A$

$$a\to b=a'\vee b$$

y

$$\forall a=(\exists a')'$$

entonces $\langle A;\to,\forall,1\rangle$ es un álgebra de implicación monádica.

Ejemplo 7.1.4. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación monádica con primer elemento 0. Definimos para todo $a,b\in A$,

$$a'=a\to 0,$$

$$\exists a=(\forall a')'$$

y

$$a\wedge b=(b\to a')'$$

entonces $\mathbf{A}=\langle A;\vee,\wedge,',\exists,0\rangle$ es un álgebra de Boole monádica.

Notamos $\forall A=\{\forall x:x\in A\}$. Luego, de (ML1), (7.1) y de (ML5), tenemos que $\forall\mathbf{A}=\langle\forall A;\to,\forall,1\rangle$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$. En particular, el $\{\to,1\}$-reducto de $\forall\mathbf{A}$ es un álgebra implicativa.

Como en toda ML-álgebra, el reticulado de congruencias de un álgebra de implicación monádica $\mathbf{A}$, el reticulado de los filtros implicativos monádicos y el reticulado de filtros implicativos de $\forall\mathbf{A}$, son isomorfos (ver la sección §5.1.1).

Un álgebra de implicación monádica no trivial $\mathbf{A}$ se dice *simple* si y sólo si los únicos filtros implicativos monádicos son los triviales, es decir, si los únicos filtros implicativos monádicos son A y $\{1\}$. Además, las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{MI}$ son simples. La siguiente caracterización de las álgebras simples será importante para el desarrollo de nuestro trabajo.

Lema 7.1.5. *(Monteiro et. al., 1997) Un álgebra de implicación monádica* $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible (simple) si y sólo si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de Boole monádica simple.*

Recordemos que un álgebra de Boole monádica es simple si y sólo si $\exists x=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$.

7.1.2. Representación topológica de las álgebras de Boole monádicas

Halmos (1956) estableció una dualidad entre cuantificadores de un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ y ciertas relaciones de equivalencias sobre el espacio de Stone de $\mathbf{B}$. Posteriormente, Cignoli (1991) mostró que existe una dualidad entre cuantificadores sobre un reticulado distributivo acotado y ciertas relaciones de equivalencia definidas sobre su espacio de Priestley, y que además esa dualidad restringida al caso de las álgebras de Boole monádicas coincide con la descripta por Halmos. En esta sección explicamos cómo se construye la dualidad para las álgebras de Boole monádicas. No incluiremos las demostraciones de los resultados, pudiendo el lector consultar los trabajos citados anteriormente para encontrar los detalles de las mismas.

Sea $\mathbf{X} = \langle X, \tau \rangle$ un espacio booleano y R una relación de equivalencia definida sobre X. Si $C \subseteq X$, notamos por RC a la unión de todas las clases de equivalencia que contienen un elemento de C.

Definición 7.1.6. Diremos que $\langle \mathbf{X}, R \rangle$ es un B*-espacio* si $\mathbf{X}$ es un espacio booleano y R es una relación de equivalencia definida sobre X que satisface las siguientes propiedades:

(BE1) las clases de equivalencia de R son subconjuntos cerrados de $\mathbf{X}$,

(BE2) si C es clopen entonces RC es clopen.

Definición 7.1.7. Sean $\langle \mathbf{X}_1, R_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{X}_2, R_2 \rangle$ dos B-espacios. Una función $f\colon \langle \mathbf{X}_1, R_1 \rangle \to \langle \mathbf{X}_2, R_2 \rangle$ se dice un B*-morfismo* si f es continua y si para todo $V \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}_2)$ se satisface que

$$R_1\left(f^{-1}(V)\right) = f^{-1}\left(R_2(V)\right).$$

Sea $\mathbf{B} = \langle B; \wedge, \vee, ', \exists, 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole monádica. Para abreviar algunas veces notamos a un álgebra de Boole monádica $\mathbf{B}$ con $\langle \mathbf{B}, \exists \rangle$. Sea $\mathrm{St}(\mathbf{B})$ el espacio de Stone del reducto booleano de $\mathbf{B}$. Si definimos $R_\exists$ sobre $\mathrm{St}(\mathbf{B})$ por

$$U R_\exists V \text{ si y sólo si } U \cap \exists B = V \cap \exists B,$$

para $U, V \in \mathrm{St}(\mathbf{B})$ entonces $\mathfrak{B}^*(\langle \mathbf{B}, \exists \rangle) = \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}), R_\exists \rangle$ es un B-espacio. Recíprocamente, si $\langle \mathbf{X}, R \rangle$ es un $\mathbf{B}$-espacio y definimos

$$\exists_R\colon \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) \to \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$$

por

$$\exists_R(N) = RN,$$

para todo $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$, entonces $\mathfrak{B}(\langle \mathbf{X}, R \rangle) = \langle \mathrm{Clop}(\mathbf{X}), \exists_R \rangle$ es un álgebra de Boole monádica. Además si $h\colon \langle \mathbf{B}_1, \exists_1 \rangle \to \langle \mathbf{B}_2, \exists_2 \rangle$ es un homomorfismo monádico, entonces la función continua $\mathfrak{B}^*(h)\colon \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}_2), R_{\exists_2} \rangle \to \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}_1), R_{\exists_1} \rangle$ definida por $\mathfrak{B}^*(h)(U) = h^{-1}(U)$, es un B-morfismo. Si $f\colon \langle \mathbf{X}_1, R_1 \rangle \to \langle \mathbf{X}_2, R_2 \rangle$ es un B-morfismo, entonces el homomorfismo booleano

$$\mathfrak{B}(f)\colon \langle \mathrm{Clop}(\mathbf{X}_2), \exists_{R_2} \rangle \to \langle \mathrm{Clop}(\mathbf{X}_1), \exists_{R_1} \rangle$$

definido por $\mathfrak{B}(f)(U) = f^{-1}(U)$ es un homomorfismo monádico. Es más, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}^*$ definen funtores contravariantes entre la categoría de B-espacios y B-morfismos, y la categoría de álgebras de Boole monádicas y homomorfismos monádicos.

Finalmente,

$$\sigma_B \colon \langle \mathbf{B}, \exists \rangle \to \langle \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(\mathbf{B})), \exists_R \rangle$$

definido con la fórmula

$$\sigma_B(a) = N_a = \{U \in \mathrm{St}(\mathbf{B}) : a \in U\}$$

para cada $a \in B$, es un isomorfismo de álgebras de Boole monádicas y

$$\varepsilon_X \colon \langle \mathbf{X}, R \rangle \to \langle \mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X})), R_{\exists_R} \rangle$$

definido como

$$\varepsilon_X(x) = \{U \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : x \in U\}$$

es un homeomorfismo de B-espacios. Así, los funtores $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}^*$ establecen una dualidad entre las categorías.

Congruencias Sabemos que para las álgebras de Boole existe una correspondencia entre el conjunto de todos los filtros de un álgebra y el conjunto de todos los subconjuntos cerrados del espacio dual asociado, al álgebra dada por la aplicación $F \mapsto C_F = \{U \in \mathrm{St}(\mathbf{B}) : F \subseteq U\}$. La inversa se define haciendo corresponder a cada cerrado C el filtro $F_C = \{a \in B : C \subseteq N_a\}$ (ver Lema 6.1.3). Lo que vamos a ver ahora es que en el caso de las álgebras de Boole monádicas, los filtros monádicos se corresponden con cerrados C tales que $R_\exists C = C$. El siguiente resultado será necesario.

Lema 7.1.8. *(Cignoli, 1991, Teorema 2.2) Sea $\langle \mathbf{B}, \exists \rangle$ un álgebra de Boole monádica. Para todo $a \in B$, se satisface que $R_\exists N_a = N_{\exists a}$.*

Sea F un filtro monádico y consideremos el cerrado C_F definido anteriormente. Queremos probar que $R_\exists C_F = F$. Claramente, $R_\exists C_F \supseteq F$. Sea $V \in R_\exists C_F$. Luego, existe $U \in C_F$ tal que $V R_\exists U$. Lo que queremos ver es que $F \subseteq V$. Como $F = \mathrm{Fg}(\forall F)$, debemos demostrar que si $k \in F \cap \exists B$ entonces $k \in V$. Pero $F \cap \exists B \subseteq U \cap \exists B = V \cap \exists B$ y por lo tanto $k \in V$. Luego, $V \in C_F$. Consideremos ahora un cerrado C tal que $R_\exists C = C$ y el filtro F_C. Queremos ver que F_C es monádico. Para ello, tomamos $f \in F_C$. Luego, se verifica que $C \subseteq N_f$. Entonces, $(R_\exists C')' \subseteq (R_\exists (N_f)')'$, donde $'$ indica complemento. Como C verifica que $R_\exists C = C$, es fácil ver que $C' = R_\exists C'$. Así $(R_\exists C')' = C$. Además,

$$N_{\forall f} = N_{(\exists f')'} = (N_{\exists f'})' = (R_\exists N_{f'})' = (R_\exists (N_f)')' \supseteq C.$$

Luego, $C \subseteq N_{\forall f}$ y por lo tanto $\forall f \in F_C$. Por lo tanto, F_C es un filtro monádico.

7.2. Clausura booleana monádica

En esta sección definimos para toda álgebra de implicación monádica $\mathbf{A}$, la clausura booleana monádica de $\mathbf{A}$. Esta álgebra, que notamos con $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$, es un álgebra de Boole monádica que posee la característica de ser la menor álgebra de Boole monádica, a menos de isomorfismos, tal que el filtro monádico generado por $\mathbf{A}$ es maximal y el cociente $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})/\operatorname{FMg}(\mathbf{A})$ es isomorfo a $\mathbf{2}$. Además, demostramos que toda álgebra de implicación monádica se puede describir como la unión de una familia única de filtros monádicos de su clausura booleana monádica.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación monádica y consideremos el conjunto M de todos los filtros implicativos monádicos maximales de $\mathbf{A}$. Considerando la representación subdirecta de $\mathbf{A}$, sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de implicación monádica $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{P} = \prod \{\mathbf{A}/D, D \in \mathrm{M}\}$. Para cada $D \in \mathrm{M}$, el cociente $\mathbf{A}/D$ es un álgebra de implicación monádica simple, y del Lema 7.1.5, tenemos que $\mathbf{A}/D$ es un álgebra de Boole monádica simple. Así, $\mathbf{P}$ es un álgebra de Boole monádica. En adelante, identificaremos $\mathbf{A}$ con la subálgebra $\mathbf{A}'$ para simplificar la notación.

Consideremos ahora la subálgebra booleana monádica generada por A en $\mathbf{P}$, que notamos $\mathbf{B}_M(\mathbf{A})$, y la subálgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ generada por A en $\mathbf{P}$.

Necesitaremos recordar para la demostración de la próxima proposición la siguiente relación entre los cuantificadores en un álgebra de Boole monádica.

Lema 7.2.1. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B; \wedge, \vee, ', \exists, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole monádica. Entonces*

$$\exists x \approx \forall(x \to \forall x) \to \forall x.$$

Demostración. Sea $c \in B$. Entonces,

$$\begin{aligned}\forall(c \to \forall c) \to \forall c &= (\forall(c' \vee \forall c))' \vee \forall c = \exists(c' \vee \forall c)' \vee \forall c = \exists(c \wedge (\forall c)') \vee \exists\forall c\\ &= \exists\left((c \wedge (\forall c)') \vee \forall c\right) = \exists\left((c \vee \forall c) \wedge ((\forall c)' \vee \forall c)\right) = \exists(c \wedge 1) = \exists c. \qquad \square\end{aligned}$$

Proposición 7.2.2. *El álgebra de Boole monádica* $\mathbf{B}_M(\mathbf{A})$ *es igual al álgebra de Boole* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ *generada por* A *en* $\mathbf{P}$.

Demostración. Es claro que $B(\mathbf{A}) \subseteq B_M(\mathbf{A})$. Veamos que $B_M(\mathbf{A}) \subseteq B(\mathbf{A})$. Para ello, vamos a demostrar que la subálgebra de Boole $B(\mathbf{A})$ es cerrada por $\forall$ en $\mathbf{P}$. Consideremos $b \in B(\mathbf{A})$. Sabemos que b puede escribirse de la siguiente manera

$$b = \bigwedge_{k=1}^{r} \left[\left(\bigvee_{i \in I_k} g_i \right) \vee \left(\bigvee_{j \in J_k} \neg g_j \right) \right] \tag{7.2}$$

donde para todo k se tiene que $I_k \cap J_k = \emptyset$, $\bigcup_{k=1}^{r} (I_k \cup J_k) \neq \emptyset$ es un conjunto finito, y $g_i, g_j \in A$. Luego,

$$\forall b = \bigwedge_{k=1}^{r} \forall \left[\left(\bigvee_{i \in I_k} g_i \right) \vee \left(\bigvee_{j \in J_k} \neg g_j \right) \right].$$

Veamos que para todo k, el elemento $b_k = \forall\left[\left(\bigvee_{i\in I_k} g_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} \neg g_j\right)\right] \in B(\mathbf{A})$.

Si $I_k \neq \emptyset$ y $J_k = \emptyset$, entonces $b_k = \forall\left(\bigvee_{i\in I_k} g_i\right) \in A$, ya que $g_i \in A$. Si $I_k \neq \emptyset$ y $J_k \neq \emptyset$, entonces

$$\left(\bigvee_{i\in I_k} g_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} \neg g_j\right) = \bigvee_{j\in J_k}\left(g_j \to \bigvee_{i\in I_k} g_i\right) \in A,$$

pues $g_j \in A$ y $\bigvee_{i\in I_k} g_i \in A$. Luego, $b_k \in A$.

Si $I_k = \emptyset$ (y en consecuencia $J_k \neq \emptyset$), entonces

$$b_k = \forall\left(\bigvee_{j\in J_k} \neg g_j\right) = \forall\left(\neg \bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) = \neg\exists\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right).$$

Veamos que $\exists\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \in B(\mathbf{A})$. Luego,

$$\begin{aligned}
\exists\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) &= \forall\left[\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \to \forall\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right)\right] \to \forall\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right)\\
&= \forall\left[\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \to \bigwedge_{j\in J_k} \forall g_j\right] \to \left(\bigwedge_{j\in J_k} \forall g_j\right)\\
&= \bigwedge_{m\in J_k}\left[\forall\left[\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \to \bigwedge_{j\in J_k} \forall g_j\right] \to \forall g_m\right].
\end{aligned}$$

Veamos que $\forall\left[\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \to \bigwedge_{j\in J_k} \forall g_j\right] \to \forall g_m \in A$, para todo $m \in J_k$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\forall\left[\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \to \bigwedge_{j\in J_k} \forall g_j\right] \to \forall g_m = \forall\left[\bigwedge_{n\in J_k}\left[\left(\bigwedge_{j\in J_k} g_j\right) \to \forall g_n\right]\right] \to \forall g_m\\
&= \forall\left[\bigwedge_{n\in J_k}\bigvee_{j\in J_k}(g_j \to \forall g_n)\right] \to \forall g_m = \left[\bigwedge_{n\in J_k} \forall\left(\bigvee_{j\in J_k}(g_j \to \forall g_n)\right)\right] \to \forall g_m\\
&= \bigvee_{n\in J_k}\left[\forall\left(\bigvee_{j\in J_k}(g_j \to \forall g_n)\right) \to \forall g_m\right] \in A.
\end{aligned}$$

Entonces $\exists(\bigwedge_{j\in J_k} g_j) \in B(\mathbf{A})$. Luego, $b_k \in B(\mathbf{A})$.

Hemos visto que $b_k \in B(\mathbf{A})$, para todo k. Luego, $\forall b = \bigwedge_{k=1}^{r} b_k \in B(\mathbf{A})$. □

Como consecuencia de la proposición anterior y del Lema 1.1 de Abad et. al. (2004), tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.2.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación monádica. Luego,* $\mathbf{A}$ *es creciente en* $\mathbf{B}_M(\mathbf{A})$ *y por lo tanto,* $\mathbf{A}$ *es unión de filtros monádicos de* $\mathbf{B}_M(\mathbf{A})$*.*

Sean $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ y $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ el filtro monádico generado por A en $\mathbf{B}_M(\mathbf{A})$ y el filtro generado por A en $\mathbf{B}_M(\mathbf{A})$ respectivamente. Observemos que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\forall\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ y $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Luego, $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Como además A es creciente en $B_M(\mathbf{A})$ (Corolario 7.2.3), resulta la siguiente caracterización de los elementos pertenecientes a $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$.

Lema 7.2.4. *Un elemento $b \in B_M(\mathbf{A})$ pertenece a $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ si y sólo si $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$, donde $a_i \in A$.*

Definamos ahora la clausura booleana monádica de un álgebra de implicación monádica.

Definición 7.2.5. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación monádica. Llamaremos la *clausura booleana monádica de* $\mathbf{A}$ al álgebra de Boole monádica definida como:

$$\mathbf{Bm}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathbf{B}_M(\mathbf{A}) & \text{si } \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \neq B_M(\mathbf{A}) \\ \mathbf{B}_M(\mathbf{A}) \times \{0,1\} & \text{si } \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = B_M(\mathbf{A}) \end{cases}.$$

Si $\mathbf{Bm}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}_M(\mathbf{A}) \times \{0,1\}$, entonces definimos $\exists$ componente a componente.

El siguiente lema nos indica una de las características fundamentales que posee la clausura booleana monádica de $\mathbf{A}$.

Lema 7.2.6. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación monádica. Entonces el filtro monádico generado por $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ es maximal. Más aún, se verifica que $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})/\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cong \{0,1\}$.*

Demostración. Analicemos primero el caso en que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \neq B_M(\mathbf{A})$. Consideremos el conjunto $\neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = \{\neg b : b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})\}$. Como $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ es propio entonces $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cap \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Veamos ahora que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ es una subálgebra booleana monádica de $B_M(\mathbf{A})$. Claramente $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ es cerrada por $\neg$ y $\{0,1\} \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Sean $a, b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Veamos que $a \vee b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Si $a \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ ó $b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ entonces es claro que $a \vee b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Si $a, b \in \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ entonces $a = \neg c$ y $b = \neg d$ para ciertos $c, d \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Luego, $c \wedge d \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ y entonces $a \vee b = \neg(c \wedge d) \in \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Por último veamos que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ es cerrado por $\forall$. Para ello, sea $a \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Si $a \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ entonces sabemos que $\forall a \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Supongamos que $a \in \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Luego, $\forall a = \forall\neg c = \neg\exists c$, para algún $c \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Luego, de $\exists c \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ tenemos que $\forall a \in \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Por lo tanto $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ es una subálgebra. Entonces,

$$B_M(\mathbf{A}) \subseteq B_M(\mathrm{FMg}(\mathbf{A})) = \mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \subseteq B_M(\mathbf{A}).$$

Luego,

$$\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cup \neg\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = B_M(\mathbf{A}).$$

Entonces $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ es un filtro monádico maximal y $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})/\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) \cong \{0,1\}$. Si $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}) = B_M(\mathbf{A})$, identificando los elementos de $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ con aquellos de $B_M(\mathbf{A}) \times \{0,1\}$ cuya segunda componente es igual a 1, tenemos que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ puede ser considerado un ultrafiltro de $\mathbf{B}_M(\mathbf{A}) \times \{0,1\}$. $\square$

Teorema 7.2.7. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación monádica, entonces existe un álgebra de Boole monádica* $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ *tal que:*

(1) *A es un subconjunto creciente de* $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ *es un filtro monádico maximal de* $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ *tal que* $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})/\operatorname{FMg}(\mathbf{A}) \cong \{0,1\}$*,*

(2) *si* $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole monádica y* $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un* $\{\to, \forall\}$*-homomorfismo tal que* $h[\mathbf{A}]$ *satisface la* fmp *en* $\mathbf{B}$*, entonces existe un homomorfismo monádico* $\hat{h}\colon \mathbf{Bm}(\mathbf{A}) \to \mathbf{B}$ *tal que* $\hat{h}{\restriction}_A = h$*, esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{Bm}(\mathbf{A}) \arrow[dl, "\hat{h}"] \\
\mathbf{B} &
\end{tikzcd}$$

Demostración. La condición (1) ya ha sido probada en el Corolario 7.2.3 y en el Lema 7.2.6.

Para demostrar (2), consideremos $b \in \mathbf{Bm}(\mathbf{A})$. Si $b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in A$, tal que $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$. Definimos en este caso $\hat{h}(b) = \bigwedge_{i=1}^{n} h(a_i)$. Si $b \notin \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$, definimos $\hat{h}(b) = \neg\hat{h}(\neg b)$. De (Abad et. al., 2004, Theorem 2.2) sabemos que $\hat{h}$ está bien definida, preserva $\to$ y $\hat{h}(0) = 0$. Demostremos que $\hat{h}(\forall b) = \forall\hat{h}(b)$. Supongamos en primer lugar que $b \in \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Entonces $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$, donde $a_i \in A$, para todo i. Así, $\forall b = \bigwedge_{i=1}^{n} \forall a_i$ y entonces $\hat{h}(\forall b) = \bigwedge_{i=1}^{n} h(\forall a_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} \forall h(a_i) = \forall(\bigwedge_{i=1}^{n} h(a_i)) = \forall\hat{h}(b)$. Supongamos ahora que $b \notin \mathrm{FMg}(\mathbf{A})$. Luego, $\hat{h}(\forall b) = \hat{h}(\neg\exists\neg b) = \neg\hat{h}(\exists\neg b)$. Observemos que $\exists\neg b = \forall(\neg b \to \forall\neg b) \to \forall\neg b$. Más aún, $\hat{h}$ preserva $\to$ y $\neg b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$, luego $\neg\hat{h}(\exists\neg b) = \neg\exists\hat{h}(\neg b) = \neg\exists\neg\hat{h}(b) = \forall\hat{h}(b)$. Hemos probado que $\hat{h}$ es un homomorfismo monádico. □

Como consecuencia del Teorema 7.2.7, tenemos que todo homomorfismo de álgebras de implicación monádicas induce un homomorfismo booleano monádico de sus respectivas clausuras booleanas monádicas, y que la clausura booleana monádica es única a menos de isomorfismos.

Corolario 7.2.8. *Sea* $h\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *un homomorfismo de álgebras de implicación monádicas. Entonces existe un homomorfismo booleano monádico* $\hat{h}\colon \mathbf{Bm}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{Bm}(\mathbf{A}_2)$ *tal que* $\hat{h}{\restriction}_{\mathbf{A}_1} = h$ *y* $\hat{h}^{-1}[\mathrm{FMg}(\mathbf{A}_2)] = \mathrm{FMg}(\mathbf{A}_1)$*. En particular, si h es un isomorfismo entonces* $\hat{h}$ *también es un isomorfismo.*

Demostración. Del Teorema 7.2.7 obtenemos la existencia del homomorfismo booleano monádico $\hat{h}\colon \mathbf{Bm}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{Bm}(\mathbf{A}_2)$ tal que $\hat{h}{\restriction}_{\mathbf{A}_1} = h$, considerando $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ y $\mathbf{B} = \mathbf{Bm}(\mathbf{A}_2)$. Sabemos que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}_1) \subseteq \hat{h}^{-1}[\mathrm{FMg}(\mathbf{A}_2)]$. Por la maximalidad de ambos, tenemos que $\mathrm{FMg}(\mathbf{A}_1) = \hat{h}^{-1}[\mathrm{FMg}(\mathbf{A}_2)]$. Por último, si h es un isomorfismo entonces $\widehat{h^{-1}} = \hat{h}^{-1}$. □

Observemos que la clausura booleana monádica de un álgebra de implicación monádica no es suficiente para describir a la misma ya que dos álgebras de implicación monádicas no isomorfas pueden tener la misma álgebra de clausura booleana monádica.

Hemos probado en el Corolario 7.2.3 que toda álgebra $\mathbf{A}$ es unión de filtros monádicos de $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$. Utilizando el Lema de Zorn podemos demostrar que la familia de filtros monádicos de $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ contenidos en el álgebra $\mathbf{A}$ posee elementos maximales. Sea $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ la familia de todos los elementos maximales en el conjunto de todos los filtros monádicos de $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ contenidos en el álgebra $\mathbf{A}$. El siguiente resultado resulta como consecuencia del Corolario 7.2.3 y la definición de $\mathsf{M}(\mathbf{A})$.

Corolario 7.2.9. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación monádica. La familia $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ satisface las siguientes condiciones:*

(a) $A = \bigcup_{F\in\mathsf{M}(\mathbf{A})} F$*,*

(b) $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ *es una anticadena, con respecto a la inclusión,*

(c) si M es un filtro monádico de $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ contenido en A, entonces $M \subseteq F$ para algún $F \in \mathsf{M}(\mathbf{A})$.

7.3. Espacios implicativos monádicos

En la sección anterior hemos visto que podemos describir a un álgebra implicativa monádica $\mathbf{A}$ por medio de:

(1) su clausura booleana monádica $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$,

(2) el filtro monádico $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$, y,

(3) la familia de filtros monádicos $\mathsf{M}(\mathbf{A})$.

Usaremos esto para dar una representación topológica de las álgebras de implicación monádicas. Esta representación estará basada en la representación dada por Halmos (1956) de las álgebras de Boole monádicas y la representación dada en Abad et. al. (2004).

Sabemos que dada la clausura booleana monádica $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$, podemos considerar el espacio topológico $\langle \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A})), R_\exists\rangle$. Hemos visto también que todo filtro monádico en un álgebra de Boole monádica, se corresponde con cierto subconjunto cerrado en su correspondiente espacio dual. Luego, dada la familia de filtros monádicos $\mathsf{M}(\mathbf{A})$, obtenemos una familia de cerrados distinguidos, que notamos $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, definida por

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{C_F : F \in \mathsf{M}(\mathbf{A})\}.$$

Recordemos que $C_F = \{U \in \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A})) : F \subseteq U\}$. Como consecuencia del Teorema 7.2.7 y el Corolario 7.2.9 se deduce el siguiente lema.

Lema 7.3.1. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación monádica. Entonces la 4-upla*

$$\mathbb{X}_M(\mathbf{A}) := \langle \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A})), R_\exists, \mathrm{FMg}(\mathbf{A}), \mathcal{C}(\mathbf{A})\rangle$$

satisface las siguientes condiciones:

(1) $\langle \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A})), R_\exists \rangle$ *es un B-espacio, es decir,*

(a) las clases de equivalencia de $R_\exists$ *son subconjuntos cerrados de* $\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}))$,

(b) si C *es clopen entonces* $R_\exists C$ *es clopen.*

(2) $\mathrm{FMg}(\mathbf{A})$ *es un elemento de* $\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}))$,

(3) $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ *es una anticadena, con respecto a la inclusión, de subconjuntos cerrados de* $\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}))$ *tales que* $R_\exists C = C$*, para todo* $C \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$*, donde* $\bigcap \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{\mathrm{FMg}(\mathbf{A})\}$.

(4) si C *es un subconjunto cerrado de* $\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}))$ *tal que* $R_\exists C = C$ *y que verifica que para todo* $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$*,* $C \subseteq N$ *implica* $D \subseteq N$ *para algún* $D \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$*, entonces existe* $D' \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ *tal que* $D' \subseteq C$.

El Lema 7.3.1 motiva la siguiente definición.

Definición 7.3.2. Llamamos *espacio implicativo monádico* a toda 4-upla $\langle \mathbf{X}, R, u, \mathcal{C} \rangle$ tal que

(1) $\langle \mathbf{X}, R \rangle$ es un B-espacio,

(2) u es un elemento fijo de $\mathbf{X}$,

(3) $\mathcal{C}$ es una anticadena, con respecto a la inclusión, de cerrados de $\mathbf{X}$ tales que $RC = C$, para todo $C \in \mathcal{C}$, y además $\bigcap \mathcal{C} = \{u\}$,

(4) si C es un cerrado de $\mathbf{X}$ tal que $RC = C$ y tal que para cada $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$, que verifique $C \subseteq N$ implica que existe $D \in \mathcal{C}$ que $D \subseteq N$, entonces existe $D' \in \mathcal{C}$ tal que $D' \subseteq C$.

Del Lema 7.3.1, sabemos que si $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación monádica entonces $\mathbb{X}_M(\mathbf{A})$ es un espacio implicativo monádico.

En lo que sigue definiremos la noción de morfismo entre dos espacios implicativos monádicos. Para ello, consideremos un homomorfismo $f\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ de álgebras de implicación monádicas, y sea $\mathbb{X}_M(f) := \mathrm{St}(\hat{f})\colon \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}_2)) \to \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}_1))$ definido por $\mathrm{St}(\hat{f})(U) = \hat{f}^{-1}(U)$. Del Corolario 7.2.8 (ver también la sección §7.1.2), sabemos que se verifican las siguientes condiciones:

(1) $\mathbb{X}_M(f)$ es un B-morfismo,

(2) $\mathbb{X}_M(f)(\mathrm{FMg}(\mathbf{A}_2)) = \mathrm{FMg}(\mathbf{A}_1)$.

Lema 7.3.3. *Si* $F \in \mathsf{M}(\mathbf{A}_1)$ *entonces existe* $H \in \mathsf{M}(\mathbf{A}_2)$ *tal que* $C_H \subseteq \mathrm{St}(\hat{f})^{-1}[C_F]$.

Demostración. Observar que $\mathrm{St}(\hat{f})^{-1}[C_F] = C_{\mathrm{Fg}(f[F])}$ y $\mathrm{Fg}(f[F]) \subseteq \mathbf{A}_2$. Probemos que $\mathrm{Fg}(f[F])$ es monádico. Para ello, sean $b \in \mathrm{Fg}(f[F])$ y $a_i \in F$ tales que $b \geq \bigwedge_{i=1}^n f(a_i)$. Como f preserva $\forall$, tenemos que

$$\forall b \geq \forall \left(\bigwedge_{i=1}^n f(a_i) \right) = \bigwedge_{i=1}^n \forall f(a_i) = \bigwedge_{i=1}^n f(\forall a_i).$$

Como F monádico, tenemos que $\forall a_i \in F$ y por lo tanto $\forall B \in \mathrm{Fg}(f[F])$. Por la condición de maximalidad de los elementos de $\mathsf{M}(\mathbf{A}_2)$, sabemos que existe $H \in \mathsf{M}(\mathbf{A}_2)$ tal que $\mathrm{Fg}(f[F]) \subseteq H$ y por lo tanto $C_H \subseteq C_{\mathrm{Fg}(f[F])}$. $\square$

Los resultados anteriores sugieren la noción de morfismo entre espacios implicativos monádicos.

Definición 7.3.4. Sean $\langle \mathbf{X}_1, R_1, u_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{X}_2, R_2, u_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ dos espacios implicativos monádicos. Decimos que $f\colon X_1 \to X_2$ es *iB-continua* si

(1) f es un B-morfismo, esto es,

  (a) f es continua

  (b) para todo $V \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}_2)$ se satisface que $R_1\left(f^{-1}(V)\right) = f^{-1}\left(R_2(V)\right)$

(2) f es i-continua, es decir,

  (a) $f(u_1) = u_2$

  (b) para todo $C \in \mathcal{C}_2$ existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $D \subseteq f^{-1}[C]$.

Como consecuencia inmediata del Lema 7.3.3 y los resultados previos a dicho lema, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 7.3.5. *Si $f\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ es un homomorfismo de álgebras de implicación monádicas entonces $\mathbb{X}_M(f)\colon \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}_2)) \to \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}_1))$ es una función iB-continua.*

Si f es iB-continua tal que f es un homeomorfismo y además su inversa también es iB-continua, diremos que f es un *iB-homeomorfismo*. De (Abad et. al., 2004, Corolario 3.2) y (Cignoli, 1991, Corolario 2.9), obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.3.6. *Si $f\colon \langle \mathbf{X}_1, R_1, u_1, \mathcal{C}_1 \rangle \to \langle \mathbf{X}_2, R_2, u_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ es iB-continua tal que f es un homeomorfismo. Entonces f es un iB-homeomorfismo si y sólo si se verifican las condiciones:*

(1) para todo $D \in \mathcal{C}_1$, $f[D] \in \mathcal{C}_2$,

(2) xR_1y si y sólo si $f(x)R_2f(y)$.

Notamos con $\mathcal{MI}$ a la categoría cuyos objetos son álgebras de implicación monádicas y sus morfismos homomorfismos monádicos, y con $\mathcal{ME}$ a la categoría de los espacios implicativos monádicos cuyos morfismos son las funciones iB-continuas. Como consecuencia del Lema 7.3.1, del Lema 7.3.5 y del hecho que St es un funtor, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.3.7. *La aplicación $\mathbb{X}_M$ es un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{MI}$ a la categoría $\mathcal{ME}$.*

7.4. La equivalencia dual

En esta sección definimos un funtor contravariante $\mathbb{I}_M$ de la categoría $\mathcal{ME}$ de los espacios implicativos monádicos a la categoría $\mathcal{MI}$ de las álgebras de implicación monádicas, y probamos que $\mathbb{X}_M$ y $\mathbb{I}_M$ definen una equivalencia dual entre las categorías.

Sea $\langle \mathbf{X}, R, u, \mathcal{C}\rangle$ un espacio implicativo monádico. Consideremos

$$\mathbb{I}_M(\mathbf{X}) := \{N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : C \subseteq N, \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Como $\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$ es un subconjunto creciente en el álgebra de Boole monádica

$$\langle \mathrm{Clop}(\mathbf{X}); \cap, \cup, ', \exists_R, \emptyset, X\rangle,$$

entonces $\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$ es un álgebra de implicación. Más aún:

Lema 7.4.1. *Para todo espacio implicativo monádico $\langle \mathbf{X}, R, u, \mathcal{C}\rangle$, el álgebra $\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$ es un álgebra de implicación monádica.*

Demostración. Recordemos que para todo $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$, $\forall N = (\exists_R(N'))' = (RN')'$. Veamos que $\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$ es cerrado por $\forall$ en $\mathrm{Clop}(\mathbf{X})$. En efecto, si $N \in \mathbb{I}_M(\mathbf{X})$ entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq N$. Luego, $RN' \subseteq RC' = (RC)' = C'$. Por lo tanto, $C \subseteq \forall N$, o lo que es lo mismo $\forall N \in \mathbb{I}_M(\mathbf{X})$. □

Observemos además que $\mathbb{I}_M(\mathbf{X}) = \bigcup_{c\in\mathcal{C}} F_C$, donde $F_C = \{N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : C \subseteq N\}$.

Lema 7.4.2. *Para todo espacio implicativo monádico $\langle \mathbf{X}, R, u, \mathcal{C}\rangle$, las siguientes propiedades se verifican en el álgebra $\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$:*

(1) $\mathrm{FMg}(\mathbb{I}_M(\mathbf{X})) = \{N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : u \in N\} = \varepsilon_{\mathbf{X}}(u)$,

(2) $\mathbf{Bm}(\mathbb{I}_M(\mathbf{X})) = \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$,

(3) $\mathsf{M}(\mathbb{I}_M(\mathbf{X})) = \{F_C : C \in \mathcal{C}\}$.

Demostración. La demostración de (1) es consecuencia de que $\bigcap \mathcal{C} = \{u\}$ (ver también (ver (Abad et. al., 2004, Lemma 3.4)). La propiedad (2) es inmediata de (1), y (3) se de deduce de la última condición de la definición de espacio implicativo monádico. □

Lema 7.4.3. *Si $h\colon \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ es iB-continua, entonces $\mathbb{I}_M(h) := \mathrm{Clop}(h){\restriction}_{\mathbb{I}_M(\mathbf{X}_2)} \colon \mathbb{I}_M(\mathbf{X}_2) \to \mathbb{I}_M(\mathbf{X}_1)$ define un homomorfismo monádico. Más aún, si h es un iB-homeomorfismo entonces $\mathbb{I}_M(h)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Es consecuencia de que $\mathfrak{B}(h) = \mathrm{Clop}(h)$ es un homomorfismo Booleano monádico y de que $\mathrm{Clop}(h)[\mathbb{I}_M(\mathbf{X}_2)] \subseteq \mathbb{I}_M(\mathbf{X}_1)$. La demostración de esta última inclusión es análoga al caso de las álgebras implicativas (ver la demostración de (Abad et. al., 2004, Lemma 3.5)). □

Del Lema 7.4.1, Lema 7.4.3 y el hecho de que Clop es un funtor, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.4.4. *La correspondencia* $\mathbb{I}_M$ *definida entre la categoría* $\mathcal{ME}$ *y la categoría* $\mathcal{MI}$ *es un funtor contravariante.*

Teorema 7.4.5. *Los funtores* $\mathbb{I}_M$ *y* $\mathbb{X}_M$ *definen una equivalencia dual entre las categorías* $\mathcal{MI}$ *y* $\mathcal{ME}$. *Más precisamente, si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de de implicación monádica*

$$\sigma_A \colon \mathbf{A} \to \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A})$$

definido por $\sigma_A(a) = N_a = \{U \in \mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A})) : a \in U\}$ *define una equivalencia natural del funtor* $\mathbb{I}_M\mathbb{X}_M$ *en la identidad* $Id_{\mathcal{MI}}$. *Para cada espacio implicativo monádico* $\langle \mathbf{X}, R, u, \mathcal{C}\rangle$, *la aplicación*

$$\tau_X \colon \mathbf{X} \to \mathbb{X}_M\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$$

definido por $\tau_X(x) = \varepsilon_X(x) = \{U \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : x \in U\}$ *define una equivalencia natural del funtor* $\mathbb{X}_M\mathbb{I}_M(\mathbf{X})$ *en el funtor identidad* $Id_{\mathcal{ME}}$.

Demostración. Recordemos que $\sigma_{Bm(A)} \colon \mathbf{Bm}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Clop}\,\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}))$ es un isomorfismo de álgebras de Boole monádicas. Como $\sigma_A = \sigma_{Bm(A)}\restriction_A$, para ver que σ_A es un isomorfismo de álgebras de implicación monádicas basta ver que

$$\sigma_{Bm(A)}[\mathbf{A}] = \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A}).$$

Si $a \in A$ entonces existe $F \in \mathsf{M}(\mathbf{A})$ tal que $a \in F$. Entonces $C_F \subseteq N_a$ donde $C_F \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Por lo tanto, $\sigma_A(a) = N_a \in \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A})$. Si $N \in \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A})$ entonces existe $a \in Bm(\mathbf{A})$ tal que $\sigma_{Bm(A)}(a) = N_a = N$. Queremos ver que $a \in A$. De $N_a \in \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A})$, sabemos que existe $C \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ tal que $C \subseteq N_a$. Esto es equivalente a decir que existe $F \in \mathsf{M}(\mathbf{A})$ tal que $C_F \subseteq N_a$. Luego, todo ultrafiltro de $\mathbf{Bm}(\mathbf{A})$ que contiene a F también contiene a a. Entonces $a \in F$. Pero además, $F \subseteq A$. Por lo tanto, $a \in A$. Hemos probado que σ_A es un isomorfismo de álgebras de implicación monádicas.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ dos álgebras de implicación monádicas y $f \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ un homomorfismo. Observar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Bm}(\mathbf{A}) \arrow[r, "\sigma_{Bm(A)}"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & \mathrm{Clop}\,\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A})) \arrow[d, "\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}(\hat{f})"] \\
\mathbf{Bm}(\mathbf{A}') \arrow[r, "\sigma_{Bm(A')}"] & \mathrm{Clop}\,\mathrm{St}(\mathbf{Bm}(\mathbf{A}'))
\end{tikzcd}$$

conmuta por ser $\sigma_{Bm(A)}$ una transformación natural entre el funtor $\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}$ y el funtor identidad en la categoría de las álgebras de Boole monádicas (ver §7.1.2). Además $\sigma_{\mathbf{A}} = \sigma_{\mathbf{Bm(A)}}\restriction_A$, $f = \hat{f}\restriction_A$ y $\mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(f) = \mathrm{Clop}\restriction_{\mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(A)}(\mathrm{St}(\hat{f})) = \mathfrak{B}^*\mathfrak{B}(\hat{f})\restriction_{\mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(A)}$. Así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(f)"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, "\sigma_{A'}"] & \mathbb{I}_M\mathbb{X}_M(\mathbf{A}')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, $\sigma_{\mathbf{A}}$ es una transformación natural.

Sea $\langle \mathbf{X}, R, u, \mathcal{C}\rangle$ un espacio implicativo monádico. Del Lema 7.4.2, sabemos que

$$\mathbb{X}_M\mathbb{I}_M(\mathbf{X}) = \langle \mathrm{Clop}(\mathbf{X}), R_{\exists_R}, \varepsilon_X(u), \{C_{F_C} : C \in \mathcal{C}\}\rangle.$$

Llamemos $\mathcal{C}_2 = \{C_{F_C} : C \in \mathcal{C}\}$. Notemos que $\tau_X[C] = C_{F_C}$. Luego, $C \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\tau_X[C] \in \mathcal{C}_2$. Además que $\varepsilon_{\mathbf{X}}$ es un B-homeomorfismo entre $\langle \mathbf{X}, R\rangle$ y $\langle \mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X})), R_{\exists_R}\rangle$ (ver §7.1.2). Luego, τ_X es un iB-homeomorfismo.

Si $f\colon \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ es iB-continua, del Lema 7.3.5, Lema 7.4.3 y de que ε es una transformación natural entre el funtor identidad en la categoría de los B-espacios y el funtor $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*$, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_1 \arrow[r, "\tau_{X_1}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{X}_M\mathbb{I}_M(\mathbf{X}_1) \arrow[d, "\mathbb{X}_M\mathbb{I}_M(f)"] \\
\mathbf{X}_2 \arrow[r, "\tau_{X_2}"] & \mathbb{X}_M\mathbb{I}_M(\mathbf{X}_2)
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

8. Álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes

Las álgebras de Łukasiewicz trivalentes fueron introducidas por Moisil (1960) y han sido extensamente estudiadas en la literatura (ver Monteiro (1963a), Cignoli (1970), Boicescu et. al. (1991), Monteiro (1996)). Estas álgebras desempeñan en el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz un papel análogo al que desempeñan las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico (ver Tarski (1956)).

Es sabido que toda MV_n-álgebra es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil (ver Boicescu et. al. (1991) y Moisil (1972)). Si $n = 2$ o $n = 3$, la recíproca también es cierta (ver Cignoli (1982) y Boicescu et. al. (1991)). Es decir, que las MV_2-álgebras, y las MV_3-álgebras, son equivalentes a las álgebras de Łukasiewicz trivalentes y a las álgebras de Łukasiewicz 4-valentes, respectivamente.

En este capítulo estudiamos la clase de todos los $\{\to, \Delta, 1\}$-subreductos de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Llamamos álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente a toda álgebra perteneciente a esta clase. Esta clase es una clase ecuacional, que fue axiomatizada por Figallo (1990). Nuestro objetivo es obtener una representación topológica para las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes. Nuestro tratamiento está inspirado en la representación dada para las álgebras de implicación. Para toda álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{A}$, construimos un álgebra de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ tal que el filtro implicativo $F(\mathbf{A})$ generado por $\mathbf{A}$ en $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ es maximal y además $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})/F(\mathbf{A})$ es la cadena de 2 elementos. Más aún, demostramos que $\mathbf{A}$ es representada como una unión de una familia única de filtros implicativos de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$. Inspirados en esto, introducimos la noción de espacio topológico implicativo 3-valuado, y obtenemos una representación topológica para estas álgebras. La representación topológica obtenida está basada en la representación topológica dada por Cignoli y Monteiro (2006) para las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Como una aplicación, describimos el espacio topológico de las álgebras libres de la variedad.

Este capítulo se estructura de la siguiente manera. La sección §8.1 está dedicada a preliminares. En ella se encuentran las definiciones de las álgebras con las que trabajaremos en el capítulo, y sus propiedades básicas. También explicamos brevemente la representación topológica de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes dada por Cignoli y Monteiro (2006). En esta sección no se pretende realizar un estudio exhaustivo, sino que daremos los resultados más importantes (sin demostraciones) por razones de autocontenido. El lector podrá encontrar en la bibliografía de referencia todos los detalles. En la sección §8.2, definimos el álgebra de clausura trivalente $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ y describimos a toda álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz como unión de una familia única de filtros implicativos dentro del álgebra de clausura $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$. En la sección 8.3 definimos la noción de espacio implicativo 3-valuado, y definimos el funtor $\mathbb{F}$ de la categoría $\mathbb{D}_3$ de las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes a la categoría $\mathbb{E}_3$ de los espacios implicativos 3-valuados. En la sección §8.4, definimos el funtor $\mathbb{G}$ de la categoría $\mathbb{E}_3$ a la categoría $\mathbb{D}_3$, y en la sección §8.5 probamos que $\mathbb{F}$ define una equivalencia natural dual. Por último, la sección §8.6 está dedicada a la descripción del espacio implicativo asociado a las álgebras libres de la variedad.

8.1. Preliminares

En las secciones §8.1.1 y §8.1.2 damos la definición y propiedades básicas de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes y de las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes, respectivamente. En la sección §8.1.3 explicamos la representación topológica de las MV_2-álgebras.

8.1.1. Álgebras de Łukasiewicz trivalentes

La siguiente definición, dada por Monteiro (1963b), es equivalente a la indicada por Moisil (1960).

Definición 8.1.1. Un *álgebra de Łukasiewicz trivalente* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0)$ que satisface las siguientes identidades:

(Ł1) $1 \vee x \approx 1$,

(Ł2) $x \wedge (x \vee y) \approx x$,

(Ł3) $x \wedge (y \vee z) \approx (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(Ł4) $\sim\sim x \approx x$,

(Ł5) $\sim(x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y$,

(Ł6) $\sim x \vee \nabla x \approx 1$,

(Ł7) $\sim x \wedge x \approx \sim x \wedge \nabla x$,

(Ł8) $\nabla(x \wedge y) \approx \nabla x \wedge \nabla y$.

Observemos que de (Ł1), (Ł2) y (Ł3), resulta que $\langle A; \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo.

Notamos $\mathcal{L}_3$ a la variedad de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes.

La cadena L_3, $0 < 1/2 < 1$, con la estructura natural de reticulado y las operaciones $\sim$ y ∇ definidas por

$$\sim 0 = 1,\ \sim 1/2 = 1/2,\ \sim 1 = 0,$$
$$\nabla 0 = 0,\ \nabla 1/2 = 1,\ \nabla 1 = 1,$$

será notada $\mathbf{Ł}_3$. Es sabido que $\mathbf{Ł}_3$ y su subálgebra $\mathbf{Ł}_2 = \langle L_2 = \{0, 1\}; \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ son las álgebras subdirectamente irreducibles de la variedad $\mathcal{L}_3$ y que son simples.

En toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3$, definimos las operaciones Δ e $\to$ de la siguiente manera:

$$\Delta x \approx \sim\nabla\sim x,$$
$$x \to y \approx (\nabla\sim x \vee y) \wedge (\nabla y \vee \sim x).$$

En el Lema 8.1.2 resumimos algunas propiedades conocidas de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes que serán utilizadas posteriormente.

Lema 8.1.2. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3$. *Para todo* $a, b \in A$ *se verifican las siguientes propiedades:*

(Ł9) $\Delta a \leq a \leq \nabla a$,

(Ł10) $\nabla \Delta a = \Delta a$,

(Ł11) $\sim\nabla a = \Delta{\sim}a$,

(Ł12) $\Delta(a \wedge b) = \Delta a \wedge \Delta b$,

(Ł13) $\Delta(a \vee b) = \Delta a \vee \Delta b$,

(Ł14) $a \to \Delta b = {\sim}a \vee \Delta b$,

(Ł15) $\nabla a = {\sim}a \to a$,

(Ł16) $\nabla a = (a \to \Delta a) \to a$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de Łukasiewicz trivalente. Un subconjunto $F \subseteq A$, se dice un *filtro implicativo* de $\mathbf{A}$ si $1 \in F$, y si $a \in F$ y $a \to b \in F$ entonces $b \in F$. Se sabe que F es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ si y sólo si F es un filtro de reticulado de $\mathbf{A}$ que además satisface que $\Delta a \in F$, para todo $a \in F$. Dado $X \subseteq A$, sea $\Delta X = \{\Delta x : x \in X\}$. El filtro implicativo $\mathrm{Fg}(X)$ generado por X en $\mathbf{A}$, coincide con el filtro reticular generado por ΔX. Es decir,

$$\mathrm{Fg}(X) = \left\{ a \in A : a \geq \bigwedge_{i=1}^{n} x_i, \text{ donde } x_i \in \Delta X, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es sabido que las congruencias en un álgebra de Łuksiewicz trivalente están determinadas por los filtros.

Notamos con $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ al álgebra de Boole de los elementos complementados del álgebra $\mathbf{A}$. No es difícil ver que un elemento $a \in A$ es complementado si y sólo si $\nabla a = a$ si y sólo si $\Delta a = a$. Además, si a es complementado entonces el complemento booleano de a es ${\sim}a$.

Sean $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{F}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$ los conjuntos de todos los filtros implicativos de $\mathbf{A}$ y de todos los filtros del álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{A})$, respectivamente, ordenados por inclusión. La siguiente proposición indica la relación que existe entre ambos.

Proposición 8.1.3. *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3$. La transformación*

$$\eta \colon \mathcal{F}(\mathbf{A}) \to \mathcal{F}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$$

definida por $\eta(D) = D \cap B(A)$, es un isomorfismo de orden del conjunto ordenado $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ en el conjunto ordenado $\mathcal{F}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$, donde $\eta^{-1}(Q) = \mathrm{Fg}(Q)$, para $Q \in \mathcal{F}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$. Además, para todo $D \in \mathcal{F}(\mathbf{A})$ se verifica que $D \cap B(A) = \Delta D$.

8.1.2. Álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes

La clase de todas las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes forma una clase ecuacional que fue axiomatizada y estudiada por Figallo (1990). En ese trabajo dichas álgebras fueron llamadas $I\Delta_3$-álgebras. Damos a continuación su definición y sus propiedades básicas.

Definición 8.1.4. Un álgebra Δ-*implicativa de Łukasiewicz trivalente* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \to, \Delta, 1 \rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ que satisface las siguientes identidades:

(ŁD1) $x \to (y \to x) \approx 1$,

(ŁD2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$,

(ŁD3) $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$,

(ŁD4) $((x \to y) \to (y \to x)) \to (y \to x) \approx 1$,

(ŁD5) $((x \to (x \to y)) \to x) \to x \approx 1$,

(ŁD6) $1 \to x \approx x$,

(ŁD7) $\Delta x \to y \approx x \to (x \to y)$,

(ŁD8) $\Delta(\Delta x \to y) \approx \Delta x \to \Delta y$.

Notamos con $\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$ a la variedad de todas las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes. Esta notación se debe a que esta clase ecuacional coincide con la clase de todos los $\{\to,\Delta,1\}$-subreductos de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Observemos que el reducto $\langle A;\to,1\rangle$ de toda álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente es un álgebra de implicación de Łukasiewicz trivalente (ver Iturrioz y Rueda (1977)). Luego, sabemos que la relación

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1,$$

es un orden parcial sobre A, y que $a \leq 1$, para todo $a \in A$. Además, $\langle A;\leq\rangle$ es un $\vee$-semireticulado donde el supremo de dos elementos a y b es $a \vee b = (a \to b) \to b$, para todo $a, b \in A$. Además, si $c \in A$ y $c \leq a, b$ entonces existe el ínfimo entre a y b, y está dado por $a \wedge b = ((a \to c) \vee (b \to c)) \to c$.

Es sabido que si $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$, las congruencias de $\mathbf{A}$ coinciden con las congruencias del $\{\to,1\}$-reducto de $\mathbf{A}$. En consecuencia, las congruencias de $\mathbf{A}$ están determinadas por los filtros implicativos de $\mathbf{A}$.

Sea $\mathbf{Ł}_3^{\{\to,\Delta\}} = \langle L_3;\to,\Delta,1\rangle$ el $\{\to,\Delta,1\}$-reducto del álgebra de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{Ł}_3$, y sea $\mathbf{Ł}_2^{\{\to,\Delta\}}$ la subálgebra de $\mathbf{Ł}_3^{\{\to,\Delta\}}$ cuyo subuniverso consiste en la cadena con 2 elementos.

Lema 8.1.5. *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) M es un filtro implicativo maximal de $\mathbf{A}$,

(2) $\mathbf{A}/M$ es un álgebra simple,

(3) $\mathbf{A}/M$ es isomorfa a $\mathbf{Ł}_3^{\{\to,\Delta\}}$ o a $\mathbf{Ł}_2^{\{\to,\Delta\}}$.

El siguiente teorema nos dice que la variedad de las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes es semisimple.

Teorema 8.1.6. *(Figallo, 1990) Toda álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente es producto subdirecto de álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes simples.*

Las álgebras $\mathbf{Ł}_3^{\{\to,\Delta\}}$ y $\mathbf{Ł}_2^{\{\to,\Delta\}}$ son las álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$, y además son simples.

8.1.3. Representación topológica de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes

Cignoli y Monteiro (2006) demuestran que toda MV_n-álgebra, donde n es un entero positivo, puede ser representada por funciones continuas definidas sobre un cierto espacio booleano en la cadena $L_{n+1} = \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ considerada con la topología discreta. A continuación explicamos brevemente esta caracterización, restringiéndonos solamente al caso $n = 2$, que es el que nos interesa para nuestros propósitos.

Definición 8.1.7. Un *espacio booleano 3-valuado* es un par $\langle \mathbf{X}, V \rangle$ tal que $\mathbf{X}$ es un espacio booleano y V es un subconjunto cerrado de $\mathbf{X}$.

Consideremos el espacio topológico $\mathbf{L}_3$ cuyo conjunto subyacente es el conjunto L_3 y su topología la topología discreta, y sea $\langle \mathbf{X}, V \rangle$ un espacio booleano 3-valuado. Notamos $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$ al álgebra de Łukasiewicz trivalente formada por todas las funciones continuas $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{L}_3$ tal que $f(V) \subseteq L_2$, con las operaciones definidas componente a componente.

Teorema 8.1.8. *(Cignoli y Monteiro, 2006) Para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3$, existe un espacio booleano 3-valuado $\langle \mathbf{X}(\mathbf{A}), V_A \rangle$ tal que $\mathbf{A} \cong \mathbf{C}_3(\mathbf{X}(\mathbf{A}), V_A)$. Más aún, $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ es isomorfo al espacio de Stone del álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.*

Veamos cómo se define el espacio $\langle \mathbf{X}(\mathbf{A}), V_A \rangle$ del Teorema 8.1.8. Sea $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente lo forman todos los homomorfismos de álgebras de Łukasiewicz trivalentes $\chi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ł}_3$ y cuya topología es la topología heredada del espacio producto $\mathbf{L}_3^A$, donde L_3 es considerado con la topología discreta. Este espacio es un espacio booleano. Una subbase para la topología la forman los conjuntos de la forma

$$\left\{\chi \in X(\mathbf{A})\colon \chi(a) = \frac{j}{2}\right\}, a \in A, 0 \leq j \leq 2.$$

Sea $\mathbf{X}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es el conjunto de todos los homomorfismos $\chi\colon \mathbf{B}(\mathbf{A}) \to \mathbf{Ł}_2$. Sabemos que $\mathbf{X}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$ coincide con el espacio de Stone del algebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{A})$. Además la aplicación

$$\varphi_A\colon \mathbf{X}(\mathbf{A}) \to \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$$

definida por $\varphi_A(\chi) = \chi^{-1}(\{1\}) \cap B(\mathbf{A})$ es un homeomorfismo.

El cerrado V_A está definido por

$$V_A = \{\chi \in X(\mathbf{A})\colon \chi(A) \subseteq L_2\}.$$

Si identificamos $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ con $\mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$, entonces $V_A = \{U \in \mathrm{St}(B(\mathbf{A})) : \mathbf{A}/\,\mathrm{Fg}(U) \cong \mathbf{Ł}_2\}$.

Para cada $a \in A$, asociamos la función $\bar{a}\colon \mathbf{X}(\mathbf{A}) \to \mathbf{L}_3$ definida por $\bar{a}(\chi) = \chi(a)$ para todo $\chi \in X(\mathbf{A})$. Luego, $\bar{a}$ es una función continua y la correspondencia

$$\alpha_A\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}_3(\mathbf{X}(\mathbf{A}), V_A)$$

definida por $a \mapsto \bar{a}$ es un isomorfismo en $\mathcal{L}_3$. Observar que $V_A = \bigcap_{a\in A} \bar{a}^{-1}(L_2)$. Identificando $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ con $\mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{A}))$, $\bar{a}\colon \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{A})) \to \mathbf{L}_3$ está definido por $\bar{a}(U) = a/\,\mathrm{Fg}(U)$.

La función característica sobre un subconjunto $S \subseteq X$ será notada γ_S. Es fácil de demostrar que la correspondencia $S \mapsto \gamma_S$ define un isomorfismo entre $\mathrm{Clop}(\mathbf{X})$ y $B(\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V))$. El siguiente es un resultado que utilizaremos en las siguientes secciones. Su demostración puede verse en la demostración de (Cignoli y Monteiro, 2006, Teorema 1.5).

Lema 8.1.9. *(Cignoli y Monteiro, 2006) Para todo $U \in \mathrm{Clop}(X(\mathbf{A}))$ existe $b \in B(\mathbf{A})$ tal que $\bar{b} = \gamma_U$.*

8.2. Álgebra de Clausura Trivalente

En esta sección demostramos que para toda álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{A}$, existe un álgebra de Łukasiewicz trivalente que llamamos la clausura trivalente de $\mathbf{A}$ y notamos $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$, con la característica de ser la menor álgebra de Łukasiewicz trivalente tal que el filtro implicativo generado por $\mathbf{A}$ en ella sea un filtro maximal y que el cociente de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ por él sea la cadena con dos elementos. Además asociamos a cada álgebra $\mathbf{A}$ una familia de filtros implicativos de su clausura trivalente que nos permitirá recuperar el álgebra original $\mathbf{A}$ a partir de ésta y su clausura trivalente.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente, y sea $\mathfrak{M}$ el conjunto de filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$. Sabemos que $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{P} = \prod_{D\in\mathfrak{M}} \mathbf{A}/D$. Para cada $D \in \mathfrak{M}$, sabemos que $\mathbf{A}/D$ es isomorfo a $\mathbf{Ł}_3^{\{\to,\Delta\}}$ o a $\mathbf{Ł}_2^{\{\to,\Delta\}}$. Luego, $\mathbf{P}$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente. De ahora en adelante identificaremos $\mathbf{A}$ con la subálgebra $\mathbf{A}'$ para simplificar la notación. Consideremos el álgebra de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$ generada por $\mathbf{A}$ en $\mathbf{P}$. En el Lema 8.2.1, caracterizamos la forma de los elementos del álgebra $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$.

Lema 8.2.1. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente, y sea $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$ el álgebra de Łukasiewicz trivalente construida anteriormente. Un elemento $b \in P$ pertenece a $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$ si y sólo si*

$$b = \bigwedge_{k=1}^{r} \left[\left(\bigvee_{i\in I_k} a_i \right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} {\sim} c_j \right) \right], \tag{8.1}$$

donde $I_k \cap J_k = \emptyset$, para todo k, $\bigcup_{k=1}^{r}(I_k \cup J_k) \neq \emptyset$ es un conjunto finito, y a_i, $c_j \in A$ para todo $i \in I_k$, $j \in J_k$.

Demostración. Sea B el conjunto de todos los elementos de $\mathbf{P}$ que se escriben de la forma (8.1). Es claro que si $b \in B$ entonces $b \in L_3(\mathbf{A})$. Veamos ahora que $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{P}$. No es difícil ver que el conjunto B es cerrado por $\vee$ y $\sim$. Veamos que B es cerrado por Δ. Para ello, sea $b \in B$, y consideremos Δb. Del Lema 8.1.2, sabemos que

$$\Delta b = \bigwedge_{k=1}^{r} \left[\left(\bigvee_{i\in I_k} \Delta a_i \right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} {\sim}\nabla c_j \right) \right].$$

Como $a_i \in A$ y $\mathbf{A}$ es un álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente, entonces $\Delta a_i \in A$. Nuevamente del Lema 8.1.2, sabemos que $\nabla c_j = (c_j \to \Delta c_j) \to c_j$. Entonces $\nabla c_j \in A$. Luego, $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{P}$ que además contiene a A. Por lo tanto, $L_3(\mathbf{A}) \subseteq B$, concluyendo lo que queríamos probar. □

La siguiente proposición proporciona más información sobre $\mathbf{A}$ en $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$.

Proposición 8.2.2. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra* Δ*-implicativa de Łukasiewicz trivalente y* $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$ *es el álgebra de Łukasiewicz trivalente construida anteriormente, entonces* $\mathbf{A}$ *es creciente en* $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$*, y en consecuencia es igual a una unión de filtros implicativos de* $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$*.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $b = \bigwedge_{k=1}^{r} \left[\left(\bigvee_{i\in I_k} a_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} {\sim} c_j\right)\right] \in L_3(\mathbf{A})$ tal que $a \leq b$. Observemos que es suficiente probar que

$$b_k = \left(\bigvee_{i\in I_k} a_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} {\sim} c_j\right) \in A,$$

para todo $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Sea $k \in \{1, \ldots, r\}$. Si $J_k = \emptyset$ entonces $b_k = \bigvee_{i\in I_k} a_i$ pertenece a A, ya que $a_i \in A$, para todo i. Supongamos ahora que $J_k \neq \emptyset$. Luego,

$$b_k = \left(\bigvee_{i\in I_k} a_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J_k} {\sim} c_j\right) \vee \Delta a = \left(\bigvee_{i\in I_k} a_i\right) \vee \bigvee_{j\in J_k} ({\sim} c_j \vee \Delta a) = \left(\bigvee_{i\in I_k} a_i\right) \vee \bigvee_{j\in J_k} (c_j \to \Delta a) .$$

Como $a_i, c_j \in A$, para todo i y para todo j, y $\Delta a \in A$, entonces $b_k \in A$. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es creciente en $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$. □

Sea $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ el filtro implicativo generado por $\mathbf{A}$ en $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$. Sabemos que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ coincide con el filtro reticular generado por ΔA, esto es,

$$\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \left\{ b \in L_3(\mathbf{A}) : b \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \Delta a_i, \text{ donde } a_i \in A \right\}.$$

Como $\mathbf{A}$ es una $\{\Delta, \to, 1\}$-subálgebra de $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$, tenemos que $\Delta A \subseteq A$. Luego,

$$\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \left\{ b \in L_3(\mathbf{A}) : b \geq \bigwedge_{i=1}^{n} a_i, \text{ donde } a_i \in A \right\}.$$

Finalmente, por el Lema 8.2.2, tenemos que

$$\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \left\{ b \in L_3(\mathbf{A}) : b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i, \text{ donde } a_i \in A \right\}.$$

En la Proposición 8.2.3 obtenemos una relación entre $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$ que nos permitirá construir el álgebra de clausura trivalente de $\mathbf{A}$.

Proposición 8.2.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra* Δ*-implicativa de Łukasiewicz trivalente y consideremos* $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ *como antes. Entonces,* $\mathbf{L}_3(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. *En particular, si* $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ *es un filtro propio entonces* $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})/\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cong \boldsymbol{Ł}_2$.

Demostración. Es claro que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es cerrado por $\sim$. Veamos que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es cerrado por $\vee$ y por Δ.

Sean $a, b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Si $a \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ entonces $a \vee b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Análogamente si $b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Si $a, b \in \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$, entonces $a \vee b = \sim c \vee \sim d = \sim(c \wedge d)$, donde $c, d \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Luego, $a \vee b \in \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$.

Sea $a \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Si $a \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ entonces sabemos que $\Delta a \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Supongamos ahora que $a \in \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$, esto es, $a = \sim c$, para algún $c \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Luego,

$$\Delta a = \Delta\sim c = \sim\nabla c \in \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A}).$$

Luego, $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es la subálgebra generada por $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ en $\mathbf{P}$. Entonces, $\mathbf{L}_3(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Por lo tanto, $\mathbf{L}_3(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cup \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$.

Supongamos que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es propio, y que existe un elemento $d \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cap \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Luego $d, \sim d \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ y, por ser $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ un filtro implicativo, tenemos que $\sim d \wedge d \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ y $\Delta(\sim d \wedge d) \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Pero $\Delta(\sim d \wedge d) = \Delta\sim d \wedge \Delta d = \sim\nabla d \wedge \Delta d$. Como $\Delta d \leq \nabla d$, tenemos que $\Delta d \wedge \sim\nabla d \leq \nabla d \wedge \sim\nabla d = 0$. Luego, $\Delta(\sim d \wedge d) = 0 \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$, contradiciendo que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es propio. Por lo tanto, $\mathbf{L}_3(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \dot{\cup} \sim\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})/\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{Ł}_2$. $\square$

Para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$, llamaremos la *clausura trivalente de* $\mathbf{A}$ al álgebra de Łukasiewicz trivalente

$$\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathbf{L}_3(\mathbf{A}) & \text{si } \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{L}_3(\mathbf{A}) \\ \mathbf{L}_3(\mathbf{A}) \times \mathbf{Ł}_2 & \text{si } \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \mathbf{L}_3(\mathbf{A}) \end{cases}.$$

Notemos que si $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es un filtro propio en $\mathbf{L}_3(\mathbf{A})$, de la Proposición 8.2.3, resulta que $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})/\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es la cadena con dos elementos. Si $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \mathbf{L}_3(\mathbf{A})$, identificando los elementos del filtro $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ con los de la forma $(-, 1)$ en $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$, también obtenemos que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es un filtro maximal y que $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})/\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{Ł}_2$. El siguiente teorema asegura que $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ es la menor álgebra de Łukasiewicz trivalente, a menos de isomorfismos, con la propiedad que el $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es un filtro implicativo maximal tal que el cociente $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})/\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ es isomorfo a $\mathbf{Ł}_2$.

Teorema 8.2.4. *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$ *entonces:*

(1) *A es creciente en $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ y satisface la propiedad de intersecciones finitas (*fmp*). Más aún,* $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})/\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \cong \boldsymbol{Ł}_2$,

(2) *si* $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_3$ *y* $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{L}$ *es un* $\{\to, \Delta\}$*-homomorfismo, tal que* $h[\mathbf{A}]$ *verifica la* fmp *en* $\mathbf{L}$, *entonces existe un homomorfismo* $\hat{h}\colon \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) \to \mathbf{L}$ *tal que* $\hat{h}\restriction_A = h$, *esto es el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) \arrow[dl, "\hat{h}"] \\ \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. (1) es consecuencia inmediata de la Proposición 8.2.2 y de la Proposición 8.2.3.

Sea $\mathbf{L}$ y h como en (2) del enunciado, y sea $b \in \mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$. Vimos que si $b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ entonces $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$, donde $a_i \in A$. Luego, si $b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ definimos $\hat{h}(b) = \bigwedge_{i=1}^{n} h(a_i)$. Si $b \notin \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ sabemos, de la Proposición 8.2.3, que $\sim b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Luego, si $b \notin \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$ definimos $\hat{h}(b) = \sim\hat{h}(\sim b)$. Es decir que $\hat{h}\colon \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) \to \mathbf{L}$ está definida por

$$\hat{h}(b) = \begin{cases} \bigwedge_{i=1}^{n} h(a_i) & \text{si } b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \\ \sim\hat{h}(\sim b) & \text{si } b \notin \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \end{cases}.$$

Observemos que $\hat{h}$ está definida en forma análoga a la definición del homomorfismo booleano monádico de la clausura booleana monádica de un álgebra implicativa monádica a un álgebra de Boole monádica, definido en el Teorema 7.2.7 del capítulo 7. Luego, la demostración que $\hat{h}$ está bien definida y que preserva la operación $\to$, es también análoga al caso de las álgebras implicativas monádicas (ver demostración Teorema 7.2.7).

Veamos que $\hat{h}$ preserva Δ. Para ello, supongamos en primer lugar que $b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Luego, $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in A$, y $\Delta b = \bigwedge_{i=1}^{n} \Delta a_i \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Como h respeta Δ y de la definición de $\hat{h}$, tenemos que

$$\hat{h}(\Delta b) = \bigwedge_{i=1}^{n} h(\Delta a_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} \Delta h(a_i) = \Delta \bigwedge_{i=1}^{n} h(a_i) = \Delta\hat{h}(b).$$

Supongamos ahora que $b \notin \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Luego, $\Delta b \notin \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$. Así, de la definición de $\hat{h}$, Lema 8.1.2 y de que $\hat{h}$ respeta $\to$, resulta que

$$\hat{h}(\Delta b) = \sim\hat{h}(\sim\Delta b) = \sim\hat{h}(\nabla\sim b) = \sim\hat{h}[(\sim b\to\Delta\sim b)\to\sim b] = \sim[(\hat{h}(\sim b)\to\hat{h}(\Delta\sim b))\to\hat{h}(\sim b)].$$

Como $\sim b \in \mathrm{Fg}(\mathbf{A})$, y por lo antes demostrado, sabemos que $\hat{h}(\Delta\sim b) = \Delta\hat{h}(\sim b)$. Luego,

$$\hat{h}(\Delta b) = \sim\nabla\hat{h}(\sim b) = \Delta\sim\hat{h}(\sim b) = \Delta\hat{h}(b).$$

Es fácil ver que $\hat{h}(0) = 0$ y por la definición de $\hat{h}$ es inmediato que $\hat{h}\restriction_A = h$. Además, si $a, b \in CL_3(\mathbf{A})$ sabemos que $a \vee b = (a \to b) \to b$ y $\sim a = a \to 0$. Luego, $\hat{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Łukasiewicz trivalentes. $\square$

El siguiente corolario nos dice que todo homomorfismo de álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes se extiende a un homomorfismo de las respectivas clausuras trivalentes.

Corolario 8.2.5. *Sean* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$ *y* $h\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *un homomorfismo. Entonces existe un homomorfismo de álgebras de Łukasiewicz trivalentes* $\hat{h}\colon \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$ *tal que* $\hat{h}\restriction_{A_1} = h$ *y* $\hat{h}^{-1}[\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)] = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1)$*. En particular, si* h *es un isomorfismo entonces* $\hat{h}$ *también es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $h\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ un homomorfismo de álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes. Si aplicamos el teorema anterior tomando $\mathbf{L} = \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$

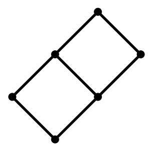
$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1) \arrow[ddl, "\hat{h}"] \\ \mathbf{A}_2 \arrow[d, hook, "i"] & \\ \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2) & \end{tikzcd}$$

podemos concluir que existe un homomorfismo de álgebras de Łukasiewicz trivalentes $\hat{h}\colon \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$ tal que $\hat{h}{\restriction}_{A_1} = h$. Observar además que de la definición de $\hat{h}$ obtenemos que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1) \subseteq \hat{h}^{-1}[\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)]$. Por otro lado, como $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)$ es propio, $\hat{h}^{-1}[(\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2))]$ también lo es. Luego, de la maximalidad de $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1)$, obtenemos que $\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1) = \hat{h}^{-1}[\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)]$.

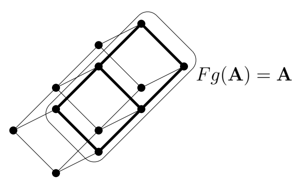
Si h es un isomorfismo, entonces $\hat{h}^{-1} = \widehat{h^{-1}}$ y por lo tanto $\hat{h}$ también es un isomorfismo. $\square$

Dos álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes no isomorfas pueden tener la misma álgebra de clausura trivalente. Veamos dos ejemplos sencillos que muestran este hecho.

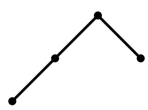
Ejemplo 8.2.6. Sea $\mathbf{A} = \text{Ł}_2 \times \text{Ł}_3$. Entonces $\mathbf{P} = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$.



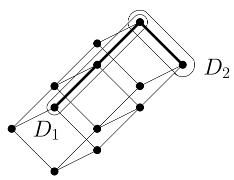
Luego, $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \times \text{Ł}_2$.



Ejemplo 8.2.7. Sea $\mathbf{A}$



$\mathbf{P} = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) = \text{Ł}_2 \times \text{Ł}_3$ y nuevamente $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \times \text{Ł}_2$.



Para distinguir dos álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes que poseen la misma clausura trivalente, consideraremos los filtros implicativos de la clausura trivalente contenidos en ellas. Más específicamente, consideraremos para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$, los elementos maximales en la familia de todos los filtros implicativos de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ que están contenidos en A, ordenados por inclusión. Notamos a este conjunto por $\mathsf{M}(\mathbf{A})$, esto es,

$$\mathsf{M}(\mathbf{A}) = \max_{\subseteq}\{D \text{ filtros implicativos de } \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}) : D \subseteq A\}.$$

Lema 8.2.8. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra* Δ*-implicativa de Łukasiewicz trivalente. La familia* $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ *es no vacía y satisface las siguientes propiedades:*

(1) $A = \bigcup_{D \in \mathsf{M}(\mathbf{A})} D$,

(2) $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ *es una anticadena, con respecto a la inclusión,*

(3) si M *es un filtro implicativo de* $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ *contenido en* A *entonces* $M \subseteq D$ *para algún* $D \in \mathsf{M}(\mathbf{A})$.

Demostración. Observemos en primer lugar que la familia de filtros implicativos del álgebra $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ que están contenidos en A es no vacía, pues el filtro implicativo $\{1\}$ pertenece a ella, y además es un conjunto parcialmente ordenado bajo la inclusión. Sea $\{D_i\}_{i\in I}$ una cadena en la familia. Es fácil ver que $\bigcup_{i\in I} D_i$ es un filtro implicativo de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ que además está contenido en A, pues $D_i \subseteq A$, para todo $i \in I$. Aplicando el Lema de Zorn, sabemos que existe al menos un elemento maximal en esta familia. Luego, $\mathsf{M}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$.

La condición (1) es inmediata de la definición de $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ y de ser $\mathbf{A}$ creciente en $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$ (Teorema 8.2.4). Las condiciones (2) y (3) se deducen de la definición de $\mathsf{M}(\mathbf{A})$. $\square$

Ejemplo 8.2.9. En el ejemplo 8.2.6 tenemos que $\mathsf{M}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\}$, y en el ejemplo 8.2.7 $\mathsf{M}(\mathbf{A}) = \{D_1, D_2\}$.

8.3. Espacios implicativos 3-valuados

En esta sección asociamos a cada álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente un espacio topológico enriquecido con ciertos objetos distinguidos, que llamamos espacio implicativo 3-valuado. Definimos la noción de función entre dos espacios implicativos 3-valuados y demostramos que para todo homomorfismo entre álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes, existe una función entre los respectivos espacios implicativos 3-valuados asociados. Con estos resultados, definimos un funtor contravariante de la categoría de las álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes a la categoría cuyos objetos son los espacios implicativos 3-valuados.

Consideremos en primer lugar un álgebra de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{L}$. La siguiente relación entre los filtros implicativos de $\mathbf{L}$ y los subconjuntos cerrados del espacio de Stone del álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{L})$ de los elementos complementados de $\mathbf{L}$, se deduce en forma inmediata de la Proposición 8.1.3 y el Lema 6.1.3, definiendo $\kappa = \vartheta \circ \eta$.

Lema 8.3.1. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_3$*. La transformación*

$$\kappa\colon \mathcal{F}(\mathbf{L}) \to \mathfrak{C}(\mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{L})))$$

definida por $\kappa(D) = C_{\Delta D} = \{U \in \mathrm{St}(B(\mathbf{L})) : \Delta D \subseteq U\}$ *es un isomorfismo de orden dual del conjunto* $\mathcal{F}(\mathbf{L})$ *de todos los filtros implicativos de* $\mathbf{L}$ *en el conjunto* $\mathfrak{C}(\mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{L})))$ *de todos los subconjuntos cerrados del espacio de Stone* $\mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{L}))$*, ordenados ambos conjuntos por inclusión.*

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente. Consideremos su clausura trivalente $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$, el filtro generado por $\mathbf{A}$ en $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$, $\mathrm{Fg}(\mathbf{A})$, y la familia de filtros maximales $\mathsf{M}(\mathbf{A})$ del Lema 8.2.8. Para cada $D \in \mathsf{M}(\mathbf{A})$, consideremos el cerrado $\kappa(D) = C_{\Delta D}$ definido en el Lema 8.3.1, y sea

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{C_{\Delta D} : D \in \mathsf{M}(\mathbf{A})\}.$$

Definimos

$$\mathbb{F}(\mathbf{A}) := \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}))), V_{CL_3(A)}, \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}), \mathcal{C}(\mathbf{A})\rangle,$$

donde $V_{CL_3(A)} = \{U \in \mathrm{St}(B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}))) : \mathbf{CL}_3(\mathbf{A})/\,\mathrm{Fg}(U) \cong \mathbf{Ł}_2\}$. Observemos que las siguientes propiedades se satisfacen en el espacio $\mathbb{F}(\mathbf{A})$:

(1) del Teorema 8.1.8 tenemos que $\langle \mathrm{St}(B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}))), V_{CL_3(A)}\rangle$ es un espacio booleano 3-valuado,

(2) del Teorema 8.2.4 tenemos que $\Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}) \in V_{CL_3(A)}$,

(3) del Lema 8.2.8 y del Lema 8.3.1 sabemos que $\langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}))), \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}), \mathcal{C}(\mathbf{A})\rangle$ es un espacio implicativo (§6.2.2).

Las propiedades verificadas por $\mathbb{F}(\mathbf{A})$ motivan la definición de espacio implicativo 3-valuado.

Definición 8.3.2. Llamaremos *espacio implicativo 3-valuado* a una 4-upla $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$ tal que:

(1) $\langle \mathbf{X}, V\rangle$ es un espacio booleano 3-valuado,

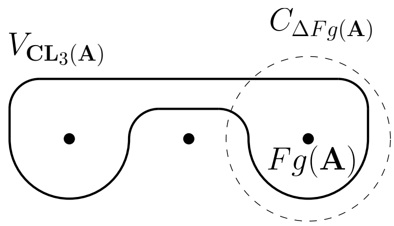
(2) u es un elemento fijo de $\mathbf{X}$ tal que $u \in V$,

(3) $\langle \mathbf{X}, u, \mathcal{C}\rangle$ es un espacio implicativo, esto es,
   - (a) $\mathcal{C}$ es una anticadena, con respecto a la inclusión, de cerrados de $\mathbf{X}$ tales que $\bigcap \mathcal{C} = \{u\}$,
   - (b) si C es un cerrado de $\mathbf{X}$ tal que para cada $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$, que verifique $C \subseteq N$ implica que existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq N$, entonces existe $D' \in \mathcal{C}$ tal que $D' \subseteq C$.

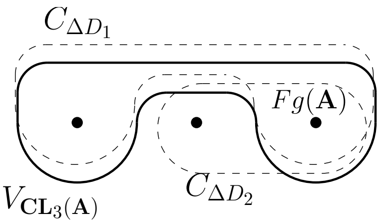
De las observaciones realizadas antes de la definición, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 8.3.3. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra* Δ*-implicativa de Łukasiewicz trivalente, entonces* $\mathbb{F}(\mathbf{A})$ *es un espacio implicativo 3-valuado.*

Ejemplo 8.3.4. El espacio implicativo 3-valuado del ejemplo 8.2.6 es



y el del ejemplo 8.2.7 es



Ahora definiremos la noción de morfismo entre dos espacios implicativos 3-valuados.

El siguiente resultado, que es conocido en la literatura, sobre homomorfismos de álgebras de Łukasiewicz trivalentes será necesario.

Lema 8.3.5. *Si* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{L}'$ *son álgebras de Łukasiewicz trivalentes y* $h\colon \mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ *es un homomorfismo, entonces* $h(B(\mathbf{L})) \subseteq B(\mathbf{L}')$ *y la restricción* $h'\colon \mathbf{B}(\mathbf{L}) \to \mathbf{B}(\mathbf{L}')$ *de* h *a* $B(\mathbf{L})$ *es un homomorfismo booleano.*

Sean $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$ y

$$h\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$$

un homomorfismo de álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz. Consideremos el homomorfismo de álgebras de Łukasiewicz trivalente

$$\hat{h}\colon \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$$

definido en el Corolario 8.2.5. Sabemos del Lema 8.3.5, que la restricción h' de $\hat{h}$ a $B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1))$, esto es,

$$h'\colon B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)) \to B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2))$$

es un homomorfismo booleano. Definimos

$$\mathbb{F}(h)\colon \mathbb{F}(\mathbf{A}_2) \to \mathbb{F}(\mathbf{A}_1)$$

mediante $\mathbb{F}(h)(U) := \mathrm{St}(h')(U) = h'^{-1}(U)$, para todo $U \in \mathrm{St}(B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)))$.

Proposición 8.3.6. *Sea $h\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ un homomorfismo de álgebras Δ-implicativas de Łukasiewicz trivalentes. La función $\mathbb{F}(h)$*

$$\langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2))), V_{CL_3(A_2)}, \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2), \mathcal{C}(\mathbf{A}_2)\rangle \to \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1))), V_{CL_3(A_1)}, \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1), \mathcal{C}(\mathbf{A}_1)\rangle$$

satisface las siguientes condiciones:

(1) $\mathbb{F}(h)$ *es i-continua, esto es,*

  (a) $\mathbb{F}(h)$ *es continua,*

  (b) $\mathbb{F}(h)(\Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)) = \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1)$,

  (c) para todo $C \in \mathcal{C}(\mathbf{A}_1)$ *existe* $D \in \mathcal{C}(\mathbf{A}_2)$ *tal que* $D \subseteq \mathbb{F}(h)^{-1}[C]$,

(2) $\mathbb{F}(h)(V_{CL_3(A_2)}) \subseteq V_{CL_3(A_1)}$.

Demostración. De la dualidad de Stone es sabido que $\mathbb{F}(h)$ es continua.
En el Corolario 8.2.5 vimos que $\hat{h}^{-1}[\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)] = \mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1)$. Luego,

$$\mathbb{F}(h)(\Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)) = h'^{-1}(\Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)) = \left(\hat{h}\restriction_{B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1))}\right)^{-1}(\Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2)) = \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1).$$

Consideremos ahora $C_{\Delta F} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}_1)$. Luego, $F \in \mathsf{M}(\mathbf{A}_1)$. Veamos en primer lugar que $\mathbb{F}(h)^{-1}[C_{\Delta F}] = C_{\Delta\,\mathrm{Fg}(h'(\Delta F))}$, esto es, el cerrado perteneciente a la familia $\mathcal{C}(\mathbf{A}_2)$ que le corresponde al filtro implicativo generado por $h'(\Delta F)$ en $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned}&U \in \mathbb{F}(h)^{-1}[C_{\Delta F}] \text{ si y sólo si } \mathbb{F}(h)(U) \in C_{\Delta F} \text{ si y sólo si}\\ &\Delta F \subseteq \mathbb{F}(h)(U) \text{ si y sólo si } \Delta F \subseteq h'^{-1}(U) \text{ si y sólo si } h'(\Delta F) \subseteq U.\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\mathrm{Fg}(h'(\Delta F)) \subseteq A_2$. Para ello consideremos el subconjunto

$$D = \{a \in A_2 \colon a \geq b \text{ para algún } b \in h'[\Delta F]\} \subseteq A_2.$$

Veamos que D es un filtro implicativo de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$. Es claro que $1 \in D$ y que D es creciente. Sean $a, c \in D$. Luego existen $f_1, f_2 \in F$ tales que

$$a \geq h'(\Delta f_1) \text{ y } c \geq h'(\Delta f_2).$$

Luego, $a \wedge c \geq h'(\Delta f_1) \wedge h'(\Delta f_2) = h'(\Delta f_1 \wedge \Delta f_2)$. Como F es un filtro implicativo de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)$ entonces $\Delta f_1 \wedge \Delta f_2 \in F$, y por lo tanto, $a \wedge c \in D$. Sea $a \in D$. Luego existe $f \in F$ tal que $a \geq h'(\Delta f)$. Entonces,

$$\Delta a \geq \Delta h'(\Delta f) = h'(\Delta f),$$

y por lo tanto $\Delta a \in D$.
Luego, D es un filtro implicativo de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)$. Además, $\mathrm{Fg}(h'[\Delta F]) \subseteq D$. En efecto, sea $x \in \mathrm{Fg}(h'[\Delta F])$. Luego, existen $y_i \in h'(\Delta D)$, $1 \leq i \leq r \in \mathbb{N}$, tales que

$$x \geq \bigwedge_{i=1}^{r} y_i = \bigwedge_{i=1}^{r} h'(\Delta f_i) = h'\left(\Delta \bigwedge_{i=1}^{r} f_i\right),$$

donde $f_i \in F$, para todo i. Como F es un filtro implicativo de $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)$, tenemos que $\bigwedge_{i=1}^{r} f_i \in F$. Por lo tanto, $x \in D$.

En consecuencia, $\mathrm{Fg}(h'[\Delta F]) \subseteq A_2$. Del Lema 8.2.8, más específicamente, de la propiedad (3) de $\mathsf{M}(\mathbf{A}_2)$ establecida en ese lema, sabemos que existe $H \in \mathsf{M}(\mathbf{A}_2)$ tal que $\mathrm{Fg}(h'[\Delta F]) \subseteq H$. De donde resulta que

$$C_{\Delta H} \subseteq C_{\Delta\,\mathrm{Fg}(h'(\Delta F))} = \mathbb{F}(h)^{-1}[C_{\Delta F}].$$

Hemos probado que $\mathbb{F}(h)$ es una función i-continua.

Demostremos ahora que $\mathbb{F}(h)\left(V_{CL_3(A_2)}\right) \subseteq V_{CL_3(A_1)}$. Sea $U \in \mathbb{F}(h)\left(V_{CL_3(A_2)}\right)$, esto es, $U = h'^{-1}(V)$ para algún $V \in V_{CL_3(A_2)}$. Consideramos los homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1) \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[d, "\pi_U"'] & \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2) \arrow[r, "\pi_V"] & \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2)/\,\mathrm{Fg}(V) \cong \textbf{\L}_2 \\
\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)/\,\mathrm{Fg}(U) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

donde π_U y π_V son los epimorfismos canónicos. Observemos que los homomorfismos $\pi_V \circ \hat{h}$ y π_U son epiyectivos. Vamos a ver ahora que $\mathrm{Fg}(U) = \mathrm{Nuc}(\pi_V \circ \hat{h})$. Notemos que $a \in \mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)$ verifica que $a \in \mathrm{Nuc}(\pi_V \circ \hat{h})$ si y sólo si $a \in \hat{h}^{-1}(\mathrm{Fg}(V))$. Observemos además que $\mathrm{Fg}(U) = \mathrm{Fg}(h'^{-1}(V))$. Luego, lo que vamos a ver es que

$$\mathrm{Fg}(h'^{-1}(V)) = \hat{h}^{-1}(\mathrm{Fg}(V)).$$

Sabemos de ser $h'^{-1}(V)$ un ultrafiltro del álgebra de Boole $B(\mathbf{CL}_3(A_1))$, que $\mathrm{Fg}(h'^{-1}(V))$ es un filtro implicativo maximal de $\mathbf{CL}_3(A_1)$. Por otro lado, $\hat{h}^{-1}(\mathrm{Fg}(V))$ es un filtro implicativo propio, ya que también $\mathrm{Fg}(V)$ es maximal en $\mathbf{CL}_3(A_2)$. Además, $\mathrm{Fg}(h'^{-1}(V)) \subseteq \hat{h}^{-1}(\mathrm{Fg}(V))$. En efecto, si $x \in \mathrm{Fg}(h'^{-1}(V))$ entonces existen $y_i \in h'^{-1}(V)$ tales que

$$x \geq \bigwedge_{i=1}^{r} \Delta y_i.$$

Como todos los elementos de $h'^{-1}(V)$ son booleanos, sabemos que $\Delta y_i = y_i$. Entonces,

$$\hat{h}(x) \geq \bigwedge_{i=1}^{r} \hat{h}(y_i) = \bigwedge_{i=1}^{r} h'(y_i),$$

pues $h' = \hat{h}\restriction_{B(\mathbf{CL}_3(A_1))}$. Además, $h'(y_i) \in V$, para todo i. Luego, $\hat{h}(x) \in \mathrm{Fg}(V)$, y en consecuencia, $x \in \hat{h}^{-1}(\mathrm{Fg}(V))$.

Luego, $\mathrm{Fg}(h'^{-1}(V)) = \hat{h}^{-1}(\mathrm{Fg}(V))$. Por lo tanto, $\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)/\,\mathrm{Fg}(U) \cong \textbf{\L}_2$, esto es, $U \in V_{\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1)}$. □

La proposición anterior motiva la definición de morfismo entre dos espacios implicativos 3-valuados.

Definición 8.3.7. Una función $f\colon \langle \mathbf{X}_1, V_1, u_1, \mathcal{C}_1 \rangle \to \langle \mathbf{X}_2, V_2, u_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ es *i3-continua* si

(1) f es i-continua, esto es,

(a) f es continua,

(b) $f(u_1) = u_2$,

(c) para todo $C \in \mathcal{C}_2$ existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $D \subseteq f^{-1}[C]$,

(2) $f(V_1) \subseteq V_2$.

Si f es $i3$-continua y además es un homeomorfismo tal que su inversa también es una función $i3$-continua, entonces diremos que f es un $i3$-*homeomorfismo*.

La siguiente proposición es inmediata del Lema 8.3.6.

Proposición 8.3.8. *Si* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$ *y* $h\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *es un homomorfismo de álgebras* Δ*-implicativas de Łukasiewicz trivalentes, entonces la aplicación* $\mathbb{F}(h)\colon \mathbb{F}(\mathbf{A}_2) \to \mathbb{F}(\mathbf{A}_1)$ *es una función* $i3$*-continua.*

Corolario 8.3.9. *Si* $f\colon \langle \mathbf{X}_1, V_1, u_1, \mathcal{C}_1\rangle \to \langle \mathbf{X}_2, V_2, u_2, \mathcal{C}_2\rangle$ *es* $i3$*-continua tal que* f *es un homeomorfismo. Entonces* f *es un* $i3$*-homeomorfismo si y sólo si* f *verifica que para todo* $D \in \mathcal{C}_1$ *se tiene que* $f[D] \in \mathcal{C}_2$ *y si* $f(V_1) = V_2$*.*

Demostración. Supongamos que f es $i3$-homeomorfismo, y sea $D \in \mathcal{C}_1$. Como $f^{-1}\colon \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_1$ es un función $i3$-continua, sabemos que existe $C \in \mathcal{C}_2$ tal que

$$C \subseteq (f^{-1})^{-1}[D] = f[D].$$

Por la maximalidad de los elementos de $\mathcal{C}_2$, tenemos que $C = f[D]$ y en consecuencia $f[D] \in \mathcal{C}_2$.

Supongamos ahora que f verifica que para todo $D \in \mathcal{C}_1$ se tiene que $f[D] \in \mathcal{C}_2$ y si $f(V_1) = V_2$. Notemos que si f es un homeomorfismo entonces trivialmente se verifica $f^{-1}(V_2) = V_1$. Consideremos $D \in \mathcal{C}_1$. Buscamos $C \in \mathcal{C}_2$ tal que $C \subseteq f[D]$. Pero por hipótesis podemos tomar $C = f[D] \in \mathcal{C}_2$ que verifica la condición trivialmente. □

De la Proposición 8.3.3, de la Proposición 8.3.8 y del hecho que St es un funtor, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 8.3.10. *Sea* $\mathbb{D}_3$ *la categoría cuyos objetos son álgebras* Δ*-implicativas de Łukasiewicz trivalentes y* $\mathbb{E}_3$ *la categoría de los espacios implicativos 3-valuados cuyos morfismos son las funciones i3-continuas. Entonces* $\mathbb{F}\colon \mathbb{D}_3 \to \mathbb{E}_3$*,*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_1 \arrow[r, squiggly, "\mathbb{F}"] \arrow[d, "h"'] & \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_1))), V_{CL_3(A_1))}, \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1), \mathcal{C}_1\rangle \\
\mathbf{A}_2 \arrow[r, squiggly, "\mathbb{F}"'] & \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}_2))), V_{CL_3(A_2))}, \Delta\,\mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2), \mathcal{C}_2\rangle. \arrow[u, "\mathbb{F}(h)=\mathrm{St}(h')"']
\end{tikzcd}$$

es un funtor contravariante.

El objetivo de las próximas secciones será probar que $\mathbb{F}$ es una equivalencia natural entre $\mathbb{D}_3$ y $\mathbb{E}_3$.

8.4. Invirtiendo el funtor $\mathbb{F}$

En esta sección probamos que a todo espacio implicativo 3-valuado le corresponde un álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente, y a toda función entre dos espacios implicativos 3-valuados, un homomorfismo entre las correspondientes álgebras asociadas.

Sea $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$ un espacio implicativo 3-valuado. Consideremos

$$\mathbb{G}(\mathbf{X}) := \{f \in \mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V) : f \geq \gamma_N \text{ para algún } N \in \mathbb{I}(\mathbf{X})\},$$

donde γ_N es la función característica sobre el subconjunto $N \subseteq X$ y

$$\mathbb{I}(\mathbf{X}) = \{N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) : C \subseteq N \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposición 8.4.1. *Para todo espacio implicativo 3-valuado $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$, el álgebra $\mathbb{G}(\mathbf{X})$ es un álgebra Δ-implicativa de Łukasiewicz trivalente.*

Demostración. Sea $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$ un espacio implicativo 3-valuado y consideremos el álgebra de Łukasiewicz trivalente $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$ y $\mathbb{G}(\mathbf{X})$. Como $\mathbb{G}(\mathbf{X})$ es creciente en $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$, resulta que $\mathbb{G}(\mathbf{X})$ es cerrado por $\to$. Además si $f \in \mathbb{G}(\mathbf{X})$, entonces existe $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$ tal que $C \subseteq N$ para algún $C \in \mathcal{C}$ y $f \geq \gamma_N$. Luego, $\Delta f \geq \Delta\gamma_N = \gamma_N$. Por lo tanto, $\mathbb{G}(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$. □

Lema 8.4.2. *Sea $h\colon \langle \mathbf{X}_1, V_1, u_1, \mathcal{C}_1\rangle \to \langle \mathbf{X}_2, V_2, u_2, \mathcal{C}_2\rangle$ una función i3-continua, entonces $\mathbb{G}(h)\colon \mathbb{G}(\mathbf{X}_2) \to \mathbb{G}(\mathbf{X}_1)$ definida por $\mathbb{G}(h)(f) = f \circ h$, para cada $f \in \mathbb{G}(\mathbf{X}_2)$, es un homomorfismo de $\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$-álgebras.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathbb{G}(h)$ está bien definida. Como f y h son continuas, $\mathbb{G}(h)$ es continua. De $h(V_1) \subseteq V_2$ y $f(V_2) \subseteq L_2$, tenemos que $\mathbb{G}(h)(f)(V_1) = f(h(V_1)) \subseteq L_2$.

Vamos a ver ahora que existe $U \in \mathbb{I}(\mathbf{X}_1)$ tal que $\mathbb{G}(h)(f) \geq \gamma_U$. Como $f \in \mathbb{G}(\mathbf{X}_2)$, existe $S \in \mathbb{I}(\mathbf{X}_2)$ tal que $f \geq \gamma_S$ y $C \in \mathcal{C}_2$ tal que $C \subseteq S$. Luego, existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $D \subseteq h^{-1}[C]$. Así, $h^{-1}[S] \supseteq h^{-1}[C] \supseteq D$, esto es, $h^{-1}[S] \in \mathbb{I}(\mathbf{X}_1)$. Si $x \in h^{-1}[S]$ entonces $f(h(x)) = 1$, ya que $h(x) \in S$ y $f \geq \gamma_S$. Por lo tanto, $\mathbb{G}(h)(f) \geq \gamma_{h^{-1}[S]}$. Finalmente, como las operaciones en $\mathbb{G}(\mathbf{X}_1)$ y $\mathbb{G}(\mathbf{X}_2)$ están definidas componente a componente, tenemos que $\mathbb{G}(h)$ es un homomorfismo. □

De la Proposición 8.4.1 y del Lema 8.4.2, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 8.4.3. *La aplicación $\mathbb{G}\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{D}_3$*

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathbf{X}(\mathbf{A}_1), V_{A_1}, \mathrm{Fg}(\mathbf{A}_1), \mathcal{C}_1\rangle \arrow[r, squiggly, "\mathbb{G}"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{G}(\mathbf{X}_1) \\
\langle \mathbf{X}(\mathbf{A}_2), V_{A_2}, \mathrm{Fg}(\mathbf{A}_2), \mathcal{C}_2\rangle \arrow[r, squiggly, "\mathbb{G}"'] & \mathbb{G}(\mathbf{X}_2) \arrow[u, "\mathbb{G}(h)"']
\end{tikzcd}$$

es un funtor contravariante.

8.5. La equivalencia natural dual

En esta sección demostramos que las aplicaciones $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ definen una equivalencia natural dual entre las categorías $\mathbb{D}_3$ y $\mathbb{E}_3$.

Lema 8.5.1. *Sea $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$ un espacio implicativo 3-valuado y $C \in \mathcal{C}$ un cerrado fijo perteneciente a la familia $\mathcal{C}$. Entonces*

$$F_C = \{f \in \mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V) : f \geq \gamma_N, N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) \text{ y } C \subseteq N\}$$

es un filtro implicativo de $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$. Más aún,

$$\mathbb{G}(\mathbf{X}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} F_C.$$

Demostración. Claramente F_C es creciente y $1 \in F_C$. Si $f, g \in F_C$ entonces $f \geq \gamma_U$ y $g \geq \gamma_V$ para ciertos $U, V \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$ tales que $C \subseteq U, V$. Luego, $f \wedge g \geq \gamma_{U \cap V}$, donde $C \subseteq U \cap V$. Finalmente si $f \in F_C$ entonces $\Delta f \geq \Delta \gamma_U = \gamma_U$. Por lo tanto F_C es un filtro implicativo de $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$. La segunda afirmación es inmediata de las definiciones. □

Lema 8.5.2. *Sea $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$ un espacio implicativo 3-valuado. Las siguientes propiedades valen en $\mathbb{G}(\mathbf{X})$:*

(1) el filtro $\mathrm{Fg}[\mathbb{G}(\mathbf{X})]$ generado por $\mathbb{G}(\mathbf{X})$ en $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$ es maximal y además

$$\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)/\,\mathrm{Fg}[\mathbb{G}(\mathbf{X})] \cong \boldsymbol{Ł}_2,$$

(2) $\mathbf{CL}_3(\mathbb{G}(\mathbf{X})) = \mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$,

(3) $\mathsf{M}(\mathbb{G}(\mathbf{X})) = \{F_C : C \in \mathcal{C}\}$.

Demostración. Sea $t_3 \colon \langle \mathbf{X}, V\rangle \to \langle \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)), V_{C_3(X,V)}\rangle$ el homeomorfismo definido por $t_3(x) = \{\gamma_N : N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) \text{ y } x \in N\}$. Sabemos que para todo $x \in X$, se verifica que $x \in V$ si y sólo si $t_3(x) \in V_{C_3(X,V)}$. Consideremos el filtro implicativo de $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$, $F = \{f \geq \gamma_N : N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X}) \text{ y } u \in N\}$. Notemos que $F \cap B(\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)) = t_3(u) \in V_{\mathbf{C}_3(\mathbf{X},V)}$, ya que $u \in V$. Luego, F es un filtro implicativo maximal tal que $\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)/F \cong \mathbf{Ł}_2$. Si $f \in F_C$, entonces existe $N \in \mathrm{Clop}(\mathbf{X})$ tal que $C \subseteq N$ y $\gamma_N \leq f$. Pero como $u \in C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, tenemos que $u \in N$ y por lo tanto $f \in F$. Luego, $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} F_C \subseteq F$. Y por lo tanto $F[\bigcup_{C \in \mathcal{C}} F_C] = F[\mathbb{G}(\mathbf{X})] = F$. Luego, de esto, del Lema 8.5.1 y la condición (iv) de la definición de espacio implicativo 3-valuado, deducimos que $\mathbf{CL}_3(\mathbb{G}(\mathbf{X})) = \mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)$ y que $\mathsf{M}(\mathbb{G}(\mathbf{X})) = \{F_C : C \in \mathcal{C}\}$. □

Teorema 8.5.3. *Los funtores $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ establecen una equivalencia dual natural entre las categorías $\mathbb{D}_3$ y $\mathbb{E}_3$. Más precisamente,*

(1) si $\mathbf{A}$ es un álgebra implicativa de Łukasiewicz trivalente con Δ, entonces

$$s_A \colon \mathbf{A} \to \mathbb{G}(X(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})))$$

definida por $s_A(a) = \bar{a}$, es una equivalencia natural del funtor $\mathbb{GF}$ al funtor identidad.

(2) para todo espacio implicativo 3-valuado $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$, la aplicación

$$\tau_X \colon \langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle \to \langle \mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X})), V_{C3(X,V)}, F[\mathbb{G}(\mathbf{X})], \mathcal{C}(\mathbb{G}(\mathbf{X}))\rangle$$

definida por $\tau_X(x) = t_3(x)$, es una equivalencia natural del funtor $\mathbb{FG}$ al funtor identidad.

Demostración. Demostremos (1). Observar que por definición $s_A = \alpha_{CL3(A)}\restriction_A$. Luego, para ver que s_A es un isomorfismo es suficiente demostrar que $\alpha_{CL3(A)}[A] = \mathbb{G}(X(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})))$. Si $a \in A$, entonces existe $D \in \mathsf{M}(\mathbf{A})$ tal que $a \in D$. Luego, $C_{\Delta D} \subseteq N_{\Delta a}$. Como $\bar{a} \geq \overline{\Delta a} = \gamma_{N_{\Delta a}}$, tenemos que $\alpha_{CL3(A)}[A] \subseteq \mathbb{G}(\mathbf{X}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})))$. Si $f \in \mathbb{G}(X(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A})))$ entonces $f = \bar{a}$, para algún $a \in \mathbf{CL}_3(\mathbf{A})$. Veamos que $a \in A$. Sabemos que $f \geq \gamma_U$, para algún $U \in \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}))))$, y existe $C \in \mathcal{C}_{CL3(A)}$ tal que $C \subseteq U$. Del Lema 8.1.9, tenemos que existe $b \in B(\mathbf{CL}_3(\mathbf{A}))$ tal que $\gamma_U = \bar{b} = \gamma_{N_b}$. De $C \subseteq U = N_b$, deducimos que $b \in A$. Luego, $a \leq b$, ya que $\alpha_{CL3(A)}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $a \in A$.

Probemos (2). Sea $\langle \mathbf{X}, V, u, \mathcal{C}\rangle$, y consideremos $\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbf{X}))$. Del Lema 8.5.2, sabemos que $X(\mathbf{CL}_3(\mathbb{G}(\mathbf{X}))) = X(\mathbf{C}_3(\mathbf{X}, V)) \cong \mathrm{St}(\mathrm{Clop}(\mathbf{X}))$. De la demostración de (1) en el Lema 8.5.2, sabemos que $\tau_X(u) = F[\mathbb{G}(\mathbf{X})]$, y por (3) del mismo lema, tenemos que para todo cerrado C, $C \in \mathcal{C}$ si y sólo si $F_C \in \mathrm{M}(\mathbb{G}(\mathbf{X}))$ si y sólo si $\tau_X[C] \in \mathcal{C}(\mathbb{G}(\mathbf{X}))$. Entonces τ_X es un $i3$-homeomorfismo. □

8.6. El espacio asociado a las álgebras libres

En esta sección utilizamos la representación obtenida para describir el espacio topológico de las álgebras libres de la variedad $\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$.

Notamos con $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X)$ al álgebra libre en una variedad $\mathcal{K}$ con un conjunto de generadores X.

Sea $\mathbf{S}^{\{\to,\Delta\}}[X]$ la $\{\to, \Delta, 1\}$-subálgebra generada por X en el álgebra libre $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$. Como la variedad $\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$ es la clase de todos los $\{\to, \Delta, 1\}$-subreductos de $\mathcal{L}_3$, el siguiente lema es claro.

Lema 8.6.1. *El álgebra libre $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)$ es isomorfa a la subálgebra $\mathbf{S}^{\{\to,\Delta\}}[X]$ generada por X en el álgebra libre $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$.*

No es difícil ver que el conjunto de elementos minimales del álgebra libre $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)$ es el conjunto $\{\Delta x : x \in X\}$. Una demostración de este resultado puede verse en Figallo (1990). Además, si $x \in X$ entonces el filtro implicativo generado por Δx en $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$ es igual al subconjunto creciente $[\Delta x) = \{a \in \mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X) : a \geq \Delta x\}$. Luego,

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X) = \bigcup_{x\in X} [\Delta x).$$

Es sabido que $\mathbf{B}(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X))$, el álgebra de Boole de los elementos complementados del álgebra libre $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$, es el álgebra de Boole libre $\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y)$ sobre el poset $Y = \{\Delta x, \nabla x : x \in X\}$.

Más aún, existe una biyección entre el conjunto de subconjuntos crecientes $S \subseteq Y$ sobre el conjunto de ultrafiltros de $\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y)$, dado por

$$S \to \mathrm{Fg}(S \cup \{\neg y : y \in Y \backslash S\}) = U_S.$$

Para cada $x \in X$, $\{\Delta x, \nabla x\}$ es una cadena que llamaremos *cadena principal.* Luego, $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$ es isomorfa al álgebra $\mathbf{C}_3(\mathrm{St}(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y)), V_{F_{\mathcal{L}_3}(X)})$, donde $U_S \in V_{F_{\mathcal{L}_3}(X)}$ si y sólo si S es unión de cadenas principales (Busaniche y Cignoli, 2006, Teorema 2.1). En particular, $U_Y \in V_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)}$. Como $\mathrm{Fg}(X)$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$ es igual al filtro implicativo generado por U_Y, obtenemos que $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)/\,\mathrm{Fg}(X) \cong \mathbf{Ł}_2$. Luego,

$$\mathbf{CL}_3(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)) = \mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X).$$

El siguiente lema nos indica cuál es la familia de filtros implicativos maximales correspondiente al álgebra libre.

Lema 8.6.2. $\mathsf{M}(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)) = \{\mathrm{Fg}(\Delta x) : x \in X\}$.

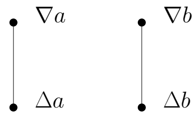
Demostración. Probemos en primer lugar que $\mathrm{Fg}(\Delta x) = [\Delta x) \in \mathsf{M}(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X))$, para todo $x \in X$, esto es, probemos que $[\Delta x)$ es un filtro implicativo de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$ maximal con respecto a la propiedad de estar contenido en $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}$. Para ello, consideremos un filtro implicativo propio D del álgebra libre $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$ tal que $D \subseteq \mathrm{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)$, y supongamos que $[\Delta x) \subseteq D$. Supongamos por el absurdo que existe $y \in D \backslash [\Delta x)$. Entonces, $y \wedge \Delta x \in D$. Además, existe $y' \in X$ tal que $\Delta y' \leq y \wedge \Delta x < \Delta y$. Consideremos la aplicación $f \colon X \to L_2$ definida por $f(y) = 0$ y $f(z) = 1$, para todo $z \neq y$, y sea $g \colon \mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X) \to \mathbf{L}_2$ su extensión. Entonces $g(\Delta y') = 1$ y $g(\Delta y) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $D = \mathrm{Fg}(\Delta x)$.

Recordemos que si $y \in \mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$, $y \neq 1$, el conjunto $P(y) = \{x \in X : x \leq y\}$ es finito. Veamos ahora que si D es un filtro implicativo de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)$ tal que $D \subseteq \bigcup_{x \in X}[\Delta x)$, entonces $D \subseteq [\Delta x)$ para algún $x \in X$. Para ello, sea $n = \min\{|P(y)| : y \in D\}$ y sea $d \in D$ tal que $|P(d)| = n$. Para cada $z \in D$ tenemos que $z \wedge d \in D$ y $P(d) = P(z \wedge d) \subseteq P(z)$. De este modo, $x \leq z$ para todo $x \in P(d)$, y como $\Delta x \leq x$, tendremos finalmente que $z \in [\Delta x)$. Por lo tanto $D \subseteq [\Delta x)$ (ver Lema 5.1, Abad et. al. (2004)). $\square$

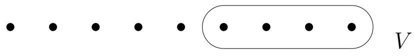
Tenemos finalmente que $\mathbf{X}(\mathbf{CL}_3(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X))) \cong \mathbf{X}(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X)) \cong \mathrm{St}(\mathbf{B}(\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3}(X))) \cong \mathrm{St}(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y))$. Para cada $x \in X$, $C_{[\Delta x)} = \{U_S \in \mathrm{St}(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y) : \Delta x \in U_S\}$. Observar que $\bigcap C_{[\Delta x)} = \{U_Y\}$. Entonces, $\langle \mathrm{St}(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y)), V, \{C_{[\Delta x)} : x \in X\}, U_Y\rangle$ es el espacio implicativo 3-valuado de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)$, donde $U_S \in V$ si y sólo si S es unión de cadenas principales.

Ejemplo 8.6.3. El álgebra libre con 2 generadores en la variedad $\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}$.

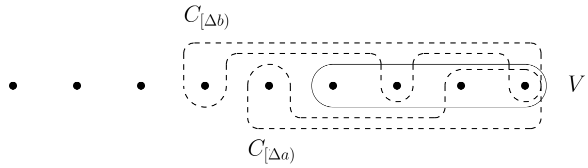
Sea $X = \{a, b\}$ el conjunto de generadores libres de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)$. Consideremos el poset $Y = \{\Delta a, \nabla a, \Delta b, \nabla b\}$.



Tenemos $3^2 = 9$ conjuntos crecientes en Y. Por lo tanto 9 ultrafiltros en $\mathrm{St}(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y))$ y $2^2 = 4$ conjuntos crecientes de Y pertenecientes a V. De esta manera $\langle \mathrm{St}(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(Y)), V\rangle$ es



Por último, $C_{[\Delta a)} = \{U_S : \Delta a \in S\}$. Así $S \in \{\{\Delta a, \nabla a\}, \{\Delta a, \nabla a, \nabla b\}, Y\}$. Análogamente, $C_{[\Delta b)} = \{U_S : \Delta b \in S\}$, donde $S \in \{\{\Delta b, \nabla b\}, \{\Delta b, \nabla b, \nabla a\}, Y\}$. Finalmente el espacio 3-implicativo asociado a $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_3^{\{\to,\Delta\}}}(X)$ es



Bibliografía

Abad, Manuel. *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Łukasiewicz n-valente*, volumen 36 de *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1988).

Abad, Manuel; Cimadamore, Cecilia Rossana y Díaz Varela, José Patricio. A duality for three-valued Łukasiewicz Δ-implication algebras. *The Many Sides of Logic, series Studies in Logic*, 21:339–352 (2009a).

Abad, Manuel; Cimadamore, Cecilia Rossana y Díaz Varela, José Patricio. Topological representation for monadic implication algebras. *Cent. Eur. J. Math.*, 7(2):299–309 (2009b).

Abad, Manuel; Díaz Varela, José Patricio y Torrens, Antoni. Topological representation for implication algebras. *Algebra Universalis*, 52(1):39–48 (2004).

Abbott, James C. Implicational algebras. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 11 (59):3–23 (1968) (1967a).

Abbott, James C. Semi-boolean algebras. *Mat. Vesnik*, 4 (19):177–198 (1967b).

Aglianò, Paolo y Panti, Giovanni. Geometrical methods in Wajsberg hoops. *J. Algebra*, 256(2):352–374 (2002).

Belluce, Lawrence Peter; Grigolia, Revaz y Lettieri, Ada. Representations of monadic MV-algebras. *Studia Logica*, 81(1):123–144 (2005).

Berman, Joel y Blok, Willem Johannes. Free Łukasiewicz and hoop residuation algebras. *Studia Logica*, 77(2):153–180 (2004).

Blok, Willem Johannes y Ferreirim, Isabel M. A. On the structure of hoops. *Algebra Universalis*, 43(2-3):233–257 (2000).

Blok, Willem Johannes y Pigozzi, Don. On the structure of varieties with equationally definable principal congruences. III. *Algebra Universalis*, 32(4):545–608 (1994).

Boicescu, V.; Filipoiu, A.; Georgescu, G. y Rudeanu, S. *Łukasiewicz-Moisil algebras*, volumen 49 de *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1991).

Bosbach, Bruno. Komplementäre Halbgruppen: Axiomatik und Arithmetik. *Fund. Math.*, 64:257–287 (1969).

Burris, Stanley y Sankappanavar, H. P. *A course in Universal Algebra.* Springer-Verlag New York Inc. (1981).

Busaniche, Manuela y Cignoli, Roberto. Free algebras in varieties of BL-algebras generated by a BL_n-chain. *J. Aust. Math. Soc.*, 80(3):419–439 (2006).

Campercholi, Miguel; Castaño, Diego y Díaz Varela, José Patricio. Quasivarieties and permutability of Łukasiewicz implication algebras. *Studia Logica, Special Issue: Algebras Related to Non-classical Logic*, 98:263–279 (2011).

Chang, Chen-Chung. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490 (1958).

Chang, Chen-Chung. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:74–80 (1959).

Cignoli, Roberto. *Moisil algebras*, volumen 27 de *Notas de Lógica Matemática.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1970).

Cignoli, Roberto. Proper n-valued Łukasiewicz algebras as S-algebras of Łukasiewicz n-valued propositional calculi. *Studia Logica*, 41(1):3–16 (1983) (1982).

Cignoli, Roberto. Quantifiers on distributive lattices. *Discrete Mathematics*, (96):183–197 (1991).

Cignoli, Roberto; D'Ottaviano, Itala y Mundici, Daniele. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, volumen 7 de *Trends in Logic—Studia Logica Library.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

Cignoli, Roberto y Monteiro, Luiz. Maximal subalgebras of MV_n-algebras. A proof of a conjecture of A. Monteiro. *Studia Logica*, 84(3):393–405 (2006).

Cignoli, Roberto y Mundici, Daniele. An elementary proof of Chang's completeness theorem for the infinite-valued calculus of Łukasiewicz. *Studia Logica*, 58(1):79–97 (1997).

Cimadamore, Cecilia Rossana y Díaz Varela, José Patricio. Monadic MV-algebras are equivalent to monadic ℓ-groups with strong unit. *Studia Logica, Special Issue Algebras Related to Non-classical Logics*, (98):175–201 (2011).

Di Nola, Antonio y Grigolia, Revaz. On monadic MV-algebras. *Ann. Pure Appl. Logic*, 128(1-3):125–139 (2004).

Di Nola, Antonio y Lettieri, Ada. Equational characterization of all varieties of MV-algebras. *J. Algebra*, 221(2):463–474 (1999).

Díaz Varela, José Patricio. Free Łukasiewicz implication algebras. *Arch. Math. Logic*, 47(1):25–33 (2008).

Díaz Varela, José Patricio y Torrens Torrell, Antoni. Decomposability of free Łukasiewicz implication algebras. *Arch. Math. Logic*, 45(8):1011–1020 (2006).

Ferreirim, Isabel M. A. *On varieties and quasivarieties of hoops and their reducts.* Tesis doctoral, Graduate College of the University of Illinois, Chicago (1992).

Figallo, Aldo V. IΔ_3-algebras. *Rep. Math. Logic*, (24):3–16 (1991) (1990).

Font, Josep M.; Rodríguez, Antonio J. y Torrens, Antoni. Wajsberg algebras. *Stochastica*, 8(1):5–31 (1984).

Gispert, Joan. *Estudi algebraic de les extensions dels càlculs multivalorats de Łukasiewicz.* Tesis doctoral, Universitat de Barcelona (1998).

Gispert, Joan. Universal classes of MV-chains with applications to many-valued logics. *MLQ Math. Log. Q.*, 48(4):581–601 (2002).

Gispert, Joan y Torrens, Antoni. Quasivarieties generated by simple MV-algebras. *Studia Logica*, 61(1):79–99 (1998). Many-valued logics.

Glass, A.M.W. y Holland, W. Charles. *Lattice-ordered groups. Advances and Techniques.* Kluwer Academic Publishers (1989).

Grigolia, Revaz. Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski's n-valued logical systems. En *Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi*, páginas 81–92. Zakład Narod. im. Ossoliń. Wydawn. Polsk. Akad. Nauk, Wrocław (1977).

Halmos, Paul R. Algebraic logic. I. Monadic Boolean algebras. *Compositio Math.*, 12:217–249 (1956).

Halmos, Paul R. Free monadic algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:219–227 (1959).

Halmos, Paul R. *Algebraic logic.* Chelsea Publishing Co., New York (1962).

Iturrioz, Luisa y Rueda, Olga. Algèbres implicatives trivalentes de Łukasiewicz libres. *Discrete Math.*, 18(1):35–44 (1977).

Jónsson, Bjarni. Algebras whose congruence lattices are distributive. *Math. Scand.*, 21:110–121 (1968) (1967).

Jónsson, Bjarni. Congruence distributive varieties. *Math. Japon.*, 42(2):353–401 (1995).

Komori, Yuichi. The separation theorem of the $\aleph_0$-valued Łukasiewicz propositional logic. *Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ.*, 12:1–5 (1978a).

Komori, Yuichi. Super-Łukasiewicz implicational logics. *Nagoya Math. J.*, 72:127–133 (1978b).

Komori, Yuichi. Super-Łukasiewicz propositional logics. *Nagoya Math. J.*, 84:119–133 (1981).

Koppelberg, Sabine. *Handbook of Boolean Algebras*, volumen 1. Elsevier Science Publishers B. V. (1989).

Lattanzi, Marina Beatriz y Petrovich, Alejandro Gustavo. A duality for monadic $(n+1)$-valued MV-algebras. En *Proceedings of the 9th "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress (Spanish)*, Actas Congreso "Dr. Antonio A. R. Monteiro", páginas 107–117. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (2008).

McKenzie, Ralph N.; McNulty, George F. y Taylor, Walter F. *Algebras, lattices, varieties. Vol. I.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA (1987).

Moisil, Grigore C. Sur les idéaux des algèbres Łukasiewicziennes trivalentes. *An. Univ. "C. I. Parhon" Bucureşti Ser. Acta Logica*, 3(1):83–95 (1960).

Moisil, Grigore C. *Essais sur les logiques non chrysippiennes.* Éditions de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucharest (1972).

Monteiro, Antonio. Álgebras de Łukasiewicz trivalentes, Lectures at the Universidad Nacional del Sur. *Informe Técnico, INMABB* (1963a).

Monteiro, Antonio. Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine (N.S.)*, 7 (55):3–12 (1963b).

Monteiro, Antonio. Représentation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles. Caractère universel de la construction Ł des algèbres de Łukasiewicz trivalentes. En *Unpublished papers, I*, volumen 40 de *Notas Lógica Mat.*, página 32. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1996).

Monteiro, Antonio y Iturrioz, Luisa. Représentation des algèbres de Tarski monadiques (1962). Preprint.

Monteiro, Luiz; Abad, Manuel; Savini, Sonia y Sewald, Julio. Free monadic Tarski algebras. *Algebra Universalis*, 37(1):106–118 (1997).

Mundici, Daniele. Interpretation of AF C^*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *J. Funct. Anal.*, 65(1):15–63 (1986).

Panti, Giovanni. Varieties of MV-algebras. *J. Appl. Non-Classical Logics*, 9(1):141–157 (1999). Multi-valued logics.

Rutledge, Joseph D. *A preliminary investigation of the infinitely many-valued predicate calculus.* Tesis doctoral, Cornell University (1959).

Stone, M. H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(3):375–481 (1937).

Tarski, Alfred. A remark on functionally free algebras. *Ann. of Math. (2)*, 47:163–165 (1946).

Tarski, Alfred. *Logic, semantics, metamathematics. Papers from 1923 to 1938.* Oxford at the Clarendon Press (1956).