Resumen

Con el objeto de iniciarme en la tarea de realizar investigación en Matemática y Lógica Matemática, Aldo V. Figallo, mi padre y director de este trabajo, me sugirió comenzar con el análisis de un sistema proposicional algebrizable, o más precisamente, la versión algebraica de ese sistema proposicional. Entonces, con este objetivo, me propuso en primer lugar que estudiara un trabajo bastante reciente y de complejidad considerable, cuyo autor es N. Bezhanishvili, al que tituló *Varieties of two-dimensional cylindric algebras. Part I: Diagonal-free case*, el cuál fue publicado en el año 2002, en las páginas 11 a 42 de la primera sección del volumen **48** de la prestigiosa revista Algebra universalis.

Entre otros resultados, Bezhanishvili estableció que la variedad de las álgebras cilíndricas de dimensión 2 libre de elementos diagonales (o Df_2-álgebras), tiene la particularidad que toda subvariedad propia es localmente finita. Este hecho sugiere de manera natural, investigar a las álgebras finitas.

Por otra parte, como las Df_2-álgebras constituyen una ampliación de las álgebras de Boole monádicas de Halmos, también hemos extendido algunos resultados sobre las álgebras de Boole Monádicas al caso de las Df_2-álgebras, que por supuesto no fueron

establecidos previamente por Bezhanishvili.

Al trabajo lo hemos organizado en cuatro capítulos.

El Capítulo I, **Introducción y preliminares**, contiene cuatro secciones y los temas que hemos incluido en ellas son resultados bien conocidos, pero necesarios tanto para facilitar la lectura, como para introducir notaciones y dejar fijadas cuáles serán las definiciones que utilizaremos posteriormente.

El Capítulo II, **Representaciones de las Df_2 álgebras**, tiene tres secciones y en él obtenemos dos representación para las Df_2 álgebras. La primera "via" álgebras de equivalencia y la segunda por medio álgebras funcionales. Es en este capítulo donde extendemos resultados de Halmos para las álgebras de Boole monádicas.

El Capítulo III, **Df_2 álgebras finitas**, consta de cinco secciones. En una de ellas describimos las Df_2 álgebras subdirectamente irreducibles, en otra probamos que en este caso toda álgebra no trivial es producto directo de álgebras subdirectamente irreducibles, y en la sección final utilizamos resultados que hemos obtenido para las Df_2 álgebras y los utilizamos para obtener una nueva solución del problema de determinar las subálgebras monádicas de un álgebra de Boole monádica finita.

Finalmente, el Capítulo IV, **Variedades de Df_2-álgebras**, tiene dos secciones. En la primera nos abocamos al problema de determinar las subálgebras de un álgebra finita dada, y en la segunda analizamos el retículo de las subvariedades de la variedad de las Df_2-álgebras.

Casi todos los resultados obtenidos en esta tesis los hemos expuesto en congresos nacionales e internacionales (ver [15, 16, 17, 18, 18, 19]). Algunos de estos resultados los hemos publicado ([20]) y otros están en vias de publicación ([21]).

Abstract

In 1955, P. Halmos introduced the notion of (existential) quantifier on a Boolea algebra and called monadic Boolean algebras any pair $(A, \exists)$ formed by a Boolean algebı A and a quantifier $\exists$ defined on A (see [23]). It is well-known that these algebras constitu the algebraic counterpart of the monadic predicate calculus of classical logic.

In 1968 A. Diego and R. Panzone, while investigating certain type of problems r lated with the theory of probabilities, considered Boolean set algebras endowed with tw quantifiers which, in addition, commuted (see [14]). They introduced what they calle biadic Boolean algebras as triples $(A, \exists_1, \exists_2)$, where A is a Boolean algebra, $\exists_1$, $\exists_2$ ar quantifiers on A that commute, i.e., they satisfy the additional property: $\exists_1\exists_2 x = \exists_2\exists_1$ for all $x \in A$.

These algebras constitute a particular case of the cylindric algebras introduced by A Tarski, L. Chin y F. Thompson with the purpose of providing a device for an algebrai study of first-order predicate calculus. A detailed study of cylindric algebras can be see in [27].

From now on, following Henkin, Monk and Tarski we shall call the Boolean biadi algebras diagonal–free two–dimensional cylindric algebras (or $\mathbf{Df}_2$-algebras) and denote the variety of Df_2-algebras by $\mathbf{Df}_2$.

It should be noted that Df_2 has been widely investigated by different authors but little has been studied on those problems inherent to finite algebras.

Among other known results of this variety, the subdirectly irreducible Df_2-algebras were described and it was shown that they coincide with the simple ones (see [27]). Recently, N. Bezhanishvili, in [5], studied the lattice $\Lambda(\mathrm{Df}_2)$ of all subvarieties of $\mathbf{Df}_2$ and he proved that every proper subvariety of $\mathbf{Df}_2$ is locally finite although $\mathbf{Df}_2$ is not.

We have organized our work in four chapters.

Chapter I, **Introduction and preliminaries**, contains four sections and the topics included there are well-known but necessary for the understanding of the following chapters as well as for introducing notations and the definitions that will be used later.

Chapter II, **Representations of $\mathbf{Df}_2$-algebras**, has three sections and there are exhibited two representations theorems for Df_2 algebras. The firs one is "via" *equivalence algebras* and the second by means of algebras of functions. It is here where we extend the results obtained by Halmos for monadic Boolean algebras.

Chapter III, **Finite $\mathbf{Df}_2$-algebras**, has five sections. In this chapter the we describe the subdirectly irreducible Df_2-algebras, also we proved that every non-trivial finite algebra is direct product of subdirectly irreducible algebras; and then we use these results in order to obtain a nw solution of the problem of determining all monadic subalgebras of a given finite monadic Boolean algebra.

Finally, in Chapter IV, **Varieties of $\mathbf{Df}_2$-algebras**, we determine all subalgebras of a finite Df_2-algebras and we study the lattice of all subvarieties of the variety Df_2.

All these results have been exposed in national and international meetings (see [15, 16, 17, 18, 18, 19]) and some of the have been published ([20]) or are to be published ([21]).