



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

**Tesis de Maestría en Ingeniería**

**Transición Dúctil-Frágil de Aceros Ferríticos  
Análisis Estadístico de Resultados Experimentales**

*Ing. César Osvaldo Larrainzar*

**BAHÍA BLANCA**

**ARGENTINA**

**2010**





**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

**Tesis de Maestría en Ingeniería**

**Transición Dúctil-Frágil de Aceros Ferríticos  
Análisis Estadístico de Resultados Experimentales**

*Ing. César Osvaldo Larrainzar*

**BAHÍA BLANCA**

**ARGENTINA**

**2010**

## **PREFACIO**

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Magíster en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Laboratorio de Propiedades Mecánicas - Grupo Mecánica de Fractura (LPM - GMF) de la Universidad Nacional del Comahue, dependiente de la Facultad de Ingeniería y del Departamento de Mecánica Aplicada, durante el período comprendido entre el 29 de Septiembre del 2006 y el 1 de Noviembre del 2008, bajo la dirección del Profesor Ing. Juan Perez Ipiña, del LPM-GMF de la Universidad Nacional del Comahue y la co-dirección del Profesor Ing. Lucio Iurman, del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**  
**Secretaría General de Posgrado y Educación Continua**

**La presente tesis ha sido aprobada el .... / .... / ..... , mereciendo  
la calificación de .....(.....)**

# Resumen

La caracterización de aceros ferríticos en la región de transición Dúctil - Frágil, por medio de ensayos de tenacidad a la fractura, es problemática debido a la dispersión que muestran los resultados experimentales. Varias propuestas utilizando estadística de Weibull han sido presentadas en la bibliografía, algunas de ellas utilizan la función de Weibull en término de J y otras en términos de K. Algunos autores también utilizan una función de Weibull de dos parámetros (2P-W), mientras que otros usan una función de Weibull de tres parámetros (3P-W). En este trabajo se presenta un análisis acerca de la relación entre las distribuciones expresadas en términos de J y en términos de K.

También se muestra que una 3P-W en términos de J no corresponde a una 3P-W en términos de K, y viceversa. Una función 3P-W equivalente para la transformación puede ser aproximada, para ambas J o K, resultando en buenas aproximaciones para un amplio rango de parámetros.

Para la situación particular de una 2P-W, hay una relación exacta entre una distribución en términos de J y K, además se verifica que la relación entre la pendiente de Weibull en términos de K es dos veces la pendiente de Weibull en términos de J. Esta relación entre las pendientes de Weibull ha sido generalizada para situaciones donde se utiliza 3P-W, y esto no es correcto. En primer lugar, porque no hay una relación de una 3P-W en J a una 3P-W en K, o viceversa. En segundo lugar, en caso de utilizar una función 3P-W aproximada, se ha propuesto en esta tesis que la pendiente de Weibull de la función aproximada debería ser relacionada con la pendiente original por un factor  $\alpha$ , el cual puede variar entre 1 y 2. Únicamente para la situación de una 2P-W, el valor de éste es 2.

El análisis acerca de cual distribución (en términos de J o K) es más correcta está afuera del alcance de este trabajo de tesis.

## Abstract

The characterization of ferritic steels in the ductile-to-brittle transition, by means of fracture mechanics tests, is problematic due to the scatter of test results. Several proposals of using Weibull statistics have been made, some of them used in terms of J and others in terms of K; some authors also use a Weibull function of two parameters (2P-W), while another use a Weibull function of three parameters 3P-W. An analysis about the relationship between Weibull distributions expressed in terms of J and K is presented in this work.

It is shown that a 3P-W in terms of J does not correspond to a 3P-W in terms of K, and vice-versa. A 3P-W equivalent to the transformed distribution can be approximated, either for K or J, and it gives good fit in wide ranges of the parameters.

For the particular situation of a 2P-W, there is an exact relationship between a distribution in terms of J and K and the Weibull slope in terms of K is twice the slope in terms of J. This relationship in the Weibull slopes has been generalized to 3P-W situations, and that is not correct. In first place because there is no relation from 3P-W to 3P-W either from J to K or vice-versa. In second place, in case of using an approximated 3P-W, in this thesis was proposed that slope of the approximated 3P-W is related to the original slope by a factor that varies between 1 and 2, Only for the particular situation of the threshold null, that is, 2P-W, its value is 2.

The analysis about what distribution (in terms of J or K) is more correct is out of the scope of this work.

Quiero dedicar el presente trabajo a:  
mi madre por su apoyo permanente.  
Alejandra por acompañarme todos estos años.  
A mi familia.

# Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a las siguientes instituciones y personas que colaboraron en el presente trabajo de Tesis.

- Al Director del Trabajo de Tesis: Prof. Juan Perez Ipiña.
- Al Codirector del Trabajo de Tesis: Prof. Lucio Iurman.
- A la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT).
- Al Laboratorio de Propiedades Mecánicas (LPM) de la Universidad Nacional del Comahue y al Grupo Mecánica de Fractura (GMF).
- Al Laboratorio de Metalurgia de la Universidad Nacional del Sur.
- Al Dr. Carlos Berejnoi de la Universidad Nacional de Salta.
- A la Universidad Nacional del Sur que me permitió realizar la carrera de posgrado.
- A mis compañeros de trabajo del Laboratorio de Propiedades Mecánicas (LPM) de la Universidad Nacional del Comahue.



# ÍNDICE

<b>Capítulo 1: Introducción</b> .....	1
1.1. Introducción a la Mecánica de Fractura .....	1
1.2. Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) .....	2
1.3. Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP) .....	3
1.3.1. El criterio CTOD .....	4
1.3.2. El criterio de la integral J .....	4
1.3.3. La curva de resistencia J - R .....	6
1.4. Tenacidad a la Fractura en la Región de Transición Dúctil-Frágil .....	7
1.5. Tratamiento estadístico de los datos experimentales .....	12
1.5.1. Propuesta de Landes y Shaffer .....	13
1.5.2. Propuesta de Landes y McCabe .....	13
1.5.3. Propuesta de Kim Wallin .....	14
1.6. Objetivos de la Tesis .....	15
Referencias Bibliográficas .....	16
<b>Capítulo 2: La Función de Weibull</b> .....	17
2.1. Introducción a la Función de Weibull .....	17
2.2. Medidas de posición y de variabilidad para la Función de Weibull .....	20
2.2.1. Medidas de posición .....	20
2.2.2. Medidas de variabilidad .....	21
2.3. Comportamiento de la Función de Weibull .....	22
2.4. Estimación de parámetros a partir de datos experimentales .....	32
2.4.1. Análisis del valor umbral “ $x_u$ ” en la estimación de parámetros .....	37
2.5. Resumen .....	39
Apéndice I .....	41
Referencias Bibliográficas .....	44
<b>Capítulo 3: Función 3P-W en valores K y J</b> .....	45
3.1. Introducción .....	45
3.2. Análisis de las transformaciones .....	47
3.2.1. Transformación de valores de J en K .....	48
3.2.2. Transformación de valores de K en J .....	49
3.3. Un caso particular: la Función 2P-W .....	50
3.4. Aproximación con una 3P-W a valores transformados .....	53
3.4.1. Ejemplos para la transformación desde J a K .....	53
3.4.2. Aproximación con una 3P-W a los valores K .....	57
3.4.3. Aproximación con una 3P-W a los valores J .....	62
3.4.4. Relación entre las funciones de transformación y .....	64
3.5. Resumen .....	66
3.5.1. Transformación de 3P-W en J a una 3P-W en K .....	66
3.5.2. Transformación de 3P-W en K a una 3P-W en J .....	66
3.6. Ejemplos numéricos .....	67
3.6.1. Transformación de valores J a valores K .....	67
3.6.2. Transformación de valores de K a valores de J .....	70
Referencias Bibliográficas .....	73

<b>Capítulo 4: Aproximación a valores de la <i>Euro Fracture Toughness Dataset</i></b> .....	74
4.1. Introducción .....	74
4.2. Materiales y Métodos .....	75
4.2.1. Método de ensayo .....	77
4.2.2. Método para la estimación de los parámetros de 3P-W .....	78
4.3. Estimación de parámetros con datos experimentales .....	79
4.3.1. Aproximación a los Valores en J .....	79
4.3.2. Aproximación a los Valores en K .....	92
4.4. Comparación transformando las funciones 3P-W .....	103
4.5. Discusión de los Resultados .....	109
Referencias Bibliográficas .....	112
<b>Capítulo 5: Conclusiones de la Tesis</b> .....	113
<b>Anexo A: Datos utilizados en la estimación de parámetros</b> .....	114
<b>Anexo B: Actividades Adicionales al Trabajo de Tesis</b> .....	116

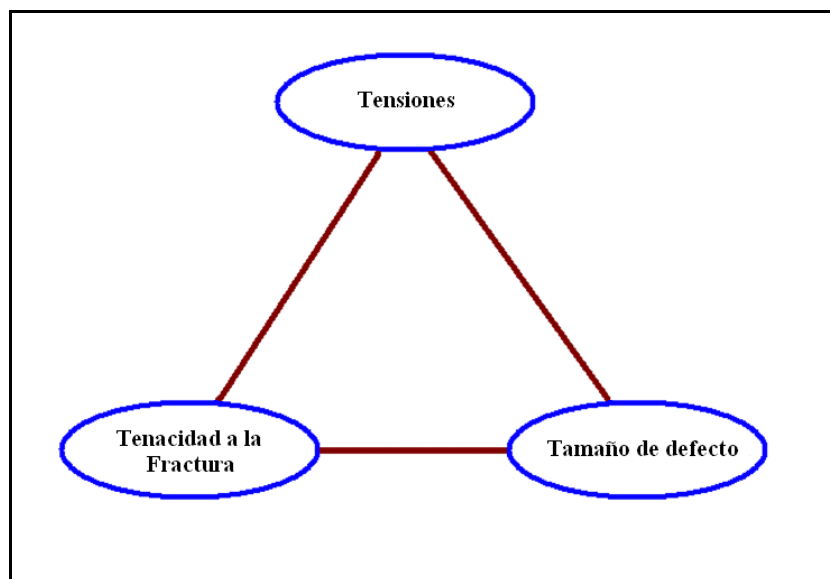
# Capítulo 1: Introducción

## 1.1. Introducción a la Mecánica de Fractura

La mecánica de fractura (MF) es una rama relativamente nueva de la ciencia de los materiales, en ella se busca cuantificar las combinaciones críticas entre tensión y tamaño de fisura que produzcan la extensión de la misma, lo cual genere la falla del material o fractura.

La aplicación de mecánica de fractura surge debido a la necesidad de evitar fallas catastróficas de gran importancia económica y también para evitar que éstas pongan en peligro vidas humanas. La MF se aplica en general a muchos campos de la ingeniería, como pueden ser: diseño de barcos, estructuras fuera de costa, recipientes de presión, cañerías, puentes, aviones, piezas para generación de energía, etc. [1].

Por lo general los criterios clásicos de diseño mecánico son inadecuados para prevenir la fractura estructural y para ello es necesario recurrir a las herramientas de mecánica de fractura. Ésta provee de un medio por el cual se puede relacionar una propiedad del material (tenacidad a la fractura o resistencia a la extensión de una fisura), con una característica de la estructura (combinación de tamaño de fisura presente y estado de tensiones de ella), y determinar si el material con un dado defecto soportará el estado de tensiones presente en la estructura [2]. Básicamente, la MF trata de explicar y predecir la interacción entre los tres vértices del triángulo de la figura 1.1.



**Figura 1.1.** Relaciones entre los tres elementos que intervienen en MF.

Para obtener la tenacidad a la fractura de un material metálico macroscópicamente homogéneo, existen numerosas normas que establecen con precisión la forma en que se deben realizar los ensayos, solo por nombrar algunas se tienen: ASTM E1290 [4], ASTM E1820 [5], BS 7448 - Part 1 [6], entre otras.

Dichos ensayos por lo general consisten en someter una probeta metálica, fisurada previamente por fatiga, a la acción de una carga monótona creciente. Así con un procedimiento estandarizado se puede conseguir la tenacidad a la fractura del material.

Los parámetros de tenacidad a la fractura que se pueden obtener por medio de los ensayos se denominan:  $K_{IC}$ , factor de intensidad de tensiones crítico, cuando es posible utilizar la mecánica de fractura lineal elástica; CTOD (*Crack Tip Opening Displacement* o apertura de la punta de la fisura) o también el parámetro denominado integral -  $J$ , para los casos en donde se utilice la mecánica de fractura elasto-plástica.

Una vez obtenida la tenacidad a la fractura del material o resistencia a la extensión de una fisura, éste dato se suele utilizar para el diseño mecánico de componentes o estructuras, de tal forma de asegurar un adecuado comportamiento en servicio, tratando de evitar fallas catastróficas en dichos componentes o estructuras; como así también para evaluar la peligrosidad de defectos presentes en componentes o en estructuras que estén en servicio.

## 1.2. Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE)

Realizando un breve resumen y considerando las hipótesis de un comportamiento lineal elástico y plasticidad en pequeña escala, existe un parámetro que gobierna el estado de tensiones en la punta de una fisura, denominado factor de intensidad de tensiones,  $K_I$ , (para mayores detalles de MFLE ver referencias [1], [7]y [8]).

Este factor puede ser evaluado para cualquier condición de carga, geometría y longitud de fisura, por medio de la ecuación 1.1.

$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.1)$$

Donde  $Y$  es un factor geométrico,  $\sigma$  es la tensión actuante en la dirección perpendicular al plano de la fisura (denominada Modo I) y  $a$  es el tamaño de la fisura.

Cuando el factor de intensidad de tensiones alcanza su valor crítico, la fisura se hace inestable y comienza a crecer rápidamente, a este valor se lo denomina tenacidad a la fractura del material, y se denota como  $K_{IC}$ . El factor de intensidad de tensiones crítico es una característica de cada material, del estado termo-mecánico, de la velocidad de aplicación de carga y de la temperatura; éste parámetro puede ser determinado experimentalmente mediante ensayos normalizados, como se mencionó anteriormente.

Luego, para prevenir la fractura frágil, en un componente fisurado, el factor de intensidad de tensiones que actúa en la punta de la fisura debe ser menor que el valor crítico para ese material, es decir, se debe cumplir que:

$$K_I < K_{IC} \quad (1.2)$$

De esta forma, por ejemplo, sería posible determinar el tamaño máximo de defecto que podría estar presente en una estructura ante ciertas condiciones de carga sin poner en peligro a la misma; de manera alternativa, si se tienen ciertos defectos, ante un estado de carga, se podría seleccionar un material con

un dado valor de tenacidad a la fractura; o si se tiene un material y se conoce su valor de  $K_{IC}$  ante la presencia de defectos sería posible determinar la tensión máxima que podría soportar.

La MFLE parecería dar una respuesta completa al problema de la fractura. Sin embargo, es muy común, especialmente en materiales metálicos de uso estructural, que la deformación plástica en la punta de la fisura no sea pequeña, con lo cual no sería posible aplicar la mecánica de fractura lineal elástica, de aquí la necesidad de recurrir a otras herramientas de la mecánica de fractura, la denominada mecánica de fractura elasto-plástica.

En la figura 1.2 se muestran dos comportamientos típicos de un material con un comportamiento lineal elástico (a) y otro con un comportamiento elasto-plástico (b).

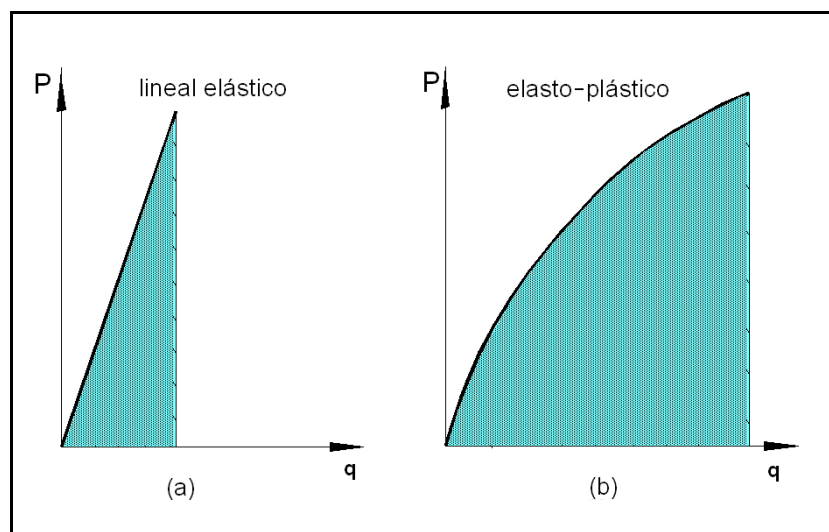


Figura 1.2

### 1.3. Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP)

La MFEP se aplica a materiales en los cuales la plasticidad asociada a la punta de la fisura no puede ser considerada como de pequeña escala. Se utilizan ahora los parámetros como la integral  $J$  o el  $CTOD$  para las evaluaciones de integridad, con los cuales se pueden relacionar la tenacidad a la fractura del material, el tamaño de los defectos y las tensiones aplicadas en un componente o estructura.

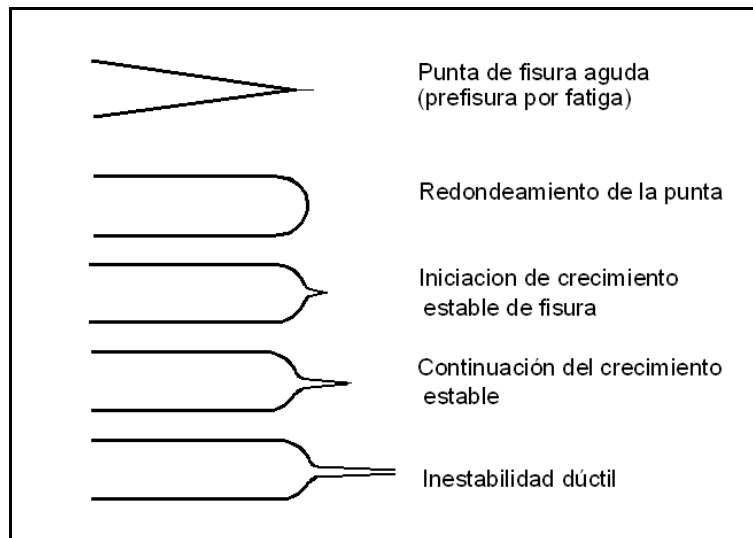


Figura 1.3. Proceso de fractura dúctil, [1].

El proceso de fractura dúctil ocurre por la iniciación y propagación en forma estable de la fisura. Este proceso comienza con la fisura aguda que va adquiriendo una forma roma a medida que se incrementa la carga (*Blunting*). Luego de que la fisura se redondeó se desarrolla una nueva punta aguda. De esta forma la fisura crece en forma estable a medida que se va incrementando la carga. Por último en algunos casos la fisura puede alcanzar una condición inestable y así llegar a la fractura en forma dúctil o frágil, tal como se muestra esquemáticamente en la figura 1.3, [1].

### 1.3.1. El criterio CTOD

Si se observa detenidamente el perfil de la punta de fisura, en la figura 1.3, se puede ver que ésta experimenta una apertura y un crecimiento aparente como consecuencia de que la punta aguda se redondea por la deformación plástica en la punta de la fisura. Esta apertura de la punta de la fisura puede ser considerada como un parámetro de fractura, según el cual, la fractura o el inicio de crecimiento estable sobreviene una vez que se alcanza un valor característico, estos valores pueden ser: el **CTOD** crítico,  $\delta_c$ , *crack tip opening displacement* para la condición de fractura, o el  $\delta_{IC}$  para el inicio de crecimiento estable, respectivamente. Mayores detalles del **CTOD** y desarrollos sobre este tema se pueden consultar en las referencias [1], [7] y [8].

### 1.3.2. El criterio de la integral J

El otro parámetro elasto-plástico que se puede utilizar es la integral-**J**. Ésta puede ser evaluada como la integral de línea alrededor de la fisura como se ve en la figura 1.4. Esta integral es independiente del camino de integración elegido. Considerando al comportamiento del material elasto-plástico como elástico no lineal y utilizando la teoría de deformación plástica total y con la condición de que no ocurran descargas, la integral se evalúa con la ecuación (1.3). Para mayores detalles se pueden consultar las referencias [1], [7] y [8].

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) \quad (1.3)$$

donde:

$\Gamma$  es cualquier camino de integración que vaya en sentido antihorario del borde inferior al superior de la fisura,

$\vec{T}$  es el vector tracción:  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ,

$n_j$  es el vector normal a la curva  $\Gamma$ ,

$\vec{u}$  es el vector desplazamiento,

$ds$  es el elemento de arco de  $\Gamma$ ,

y  $W = W(x,y) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$  es la densidad de energía de deformación (figura 1.4).

La integral (1.3) puede ser calculada para cualquier geometría y estado de carga. El Dr. Rice mostró que la integral  $J$  puede ser interpretada en términos energéticos como la tasa de liberación de energía por unidad de longitud de fisura en un componente elástico no lineal fisurado, ecuación (1.4).

$$J = - \frac{1}{B} \frac{dU_p}{da} \quad (1.4)$$

Donde  $U_p$  es la energía potencial elástica o el trabajo realizado sobre el cuerpo y  $B$  es el espesor del cuerpo.

La figura 1.5 muestra el cambio en el trabajo realizado sobre una probeta con una longitud de fisura  $a$  que incrementa su longitud  $da$ .

De acuerdo con esta definición,  $J$  es una generalización de la fuerza impulsora de la mecánica de fractura lineal elástica, y es posible demostrar que se cumple:

$$J = \frac{K^2}{E'} \quad (1.5)$$

donde:  $K$  es en factor de intensidad de tensiones,  $E' = E$  para un estado de tensión plana o  $E' = E / (1 - \nu^2)$  para un estado de deformación plana [1].

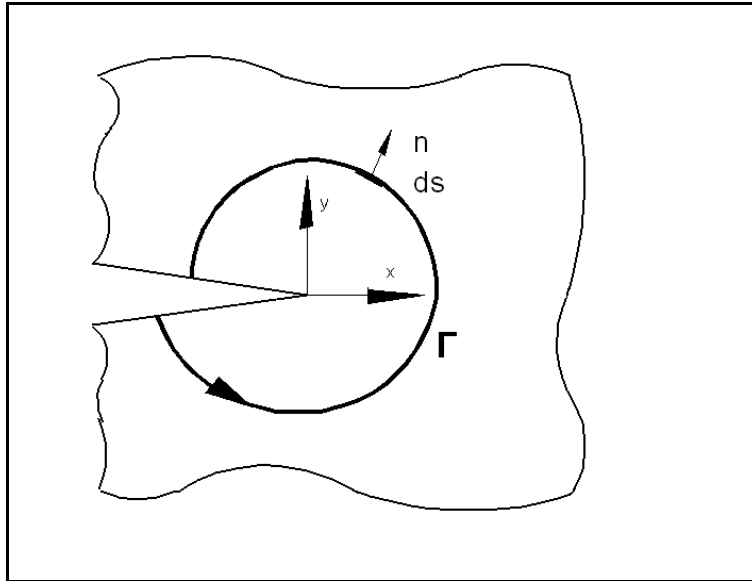


Figura 1.4. Integral de línea alrededor de la punta de fisura.

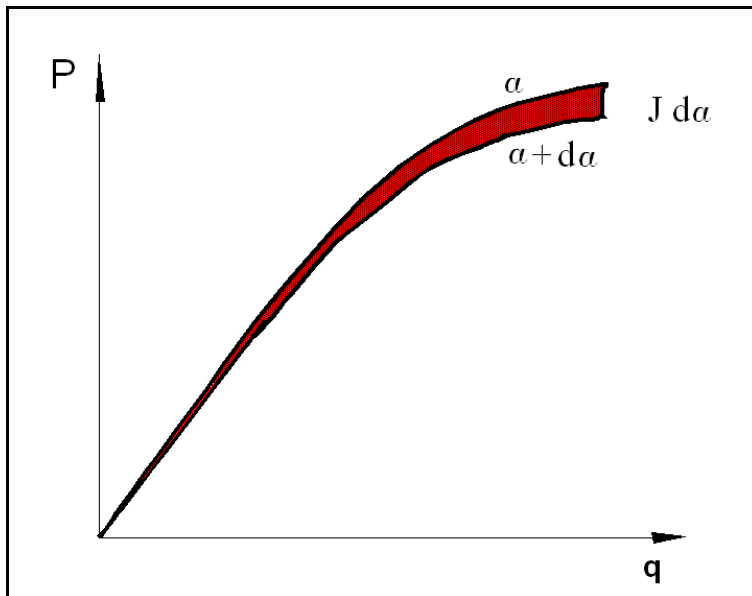


Figura 1.5. Interpretación energética de J.

### 1.3.3. La curva de resistencia J - R

Los datos experimentales de tenacidad a la fractura muestran que en materiales tenaces una fisura sometida a carga estática puede sufrir un proceso de crecimiento estable sin que se alcancen las condiciones de inestabilidad. En la figura 1.6 se representa esquemáticamente una curva de resistencia llamada también Curva R. En ella se observa que al cargar la probeta, fisurada previamente por fatiga, la fisura comienza a redondearse experimentando un crecimiento a causa de ello, cuando se alcanza el valor de  $J_{IC}$  se inicia el crecimiento estable de la fisura el cual se sigue incrementando al aumentar la



carga, y se detiene si se suprime la misma. Teniendo en cuenta esto, se puede considerar a  $J_{IC}$  como un criterio de fractura sumamente conservativo.

Begley y Landes propusieron el parámetro  $J_{IC}$  como criterio de fractura elasto-plástico. El mismo es el valor de  $J$  correspondiente al comienzo de crecimiento estable de fisura en un material elasto-plástico y bajo estado plano de deformaciones. Por lo tanto, habrá crecimiento de fisura si:

$$J_I \geq J_{IC} \quad (1.6)$$

El concepto de curva de resistencia brinda un marco de trabajo general para comprender la relación entre los efectos de la geometría y el comportamiento del material. Tal concepto debe ser entendido de la siguiente forma: se considera un cuerpo cargado en forma monótona, y se caracteriza la fuerza impulsora de la fisura por medio de  $J$ , la Curva R representa un contorno de condiciones de equilibrio donde la fisura permanece estable si la carga es detenida, habiendo equilibrio entre la fuerza impulsora y la resistencia del material al crecimiento de fisura. Se desarrolla crecimiento inestable de la fisura si la fuerza impulsora se incrementa en mayor proporción que la resistencia al crecimiento de fisura, [1].

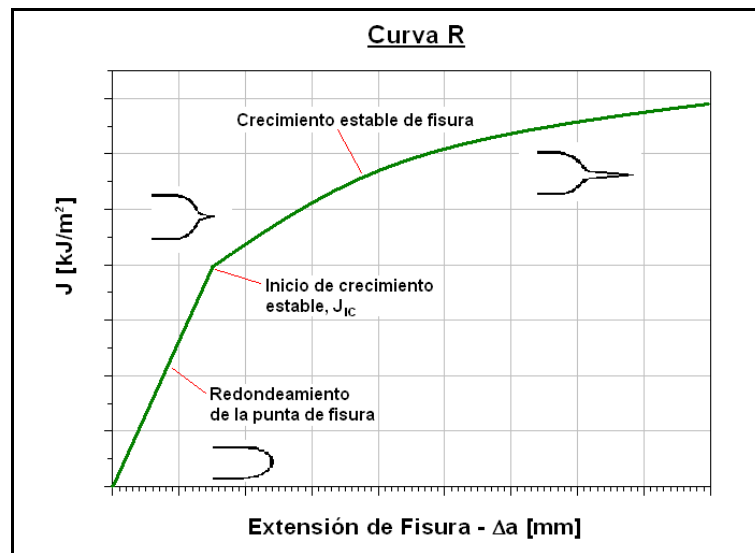


Figura 1.6. Curva de resistencia al crecimiento de fisura, [1].

#### 1.4. Tenacidad a la Fractura en la Región de Transición Dúctil-Frágil

Hasta el momento se describió el comportamiento a la fractura de diferentes materiales, y se dieron los parámetros que se utilizan para la evaluación de dichos materiales. Parecería así que la MF ya tiene todas las herramientas para la evaluación de los materiales ante la presencia de fisuras y de tensiones, sin embargo, como bien se sabe, algunos materiales pueden variar su comportamiento a la fractura en función de la temperatura.

En la figura 1.7 se puede ver que los aceros ferríticos (aleación metálica de estructura bcc), los polímeros y los cerámicos, presentan distintos modos de falla en función de la temperatura. A temperaturas elevadas el modo de falla es desgarramiento dúctil (material tenaz), mientras que a bajas temperaturas fallan por clivaje (material frágil). Existe una zona de temperaturas intermedias, en donde

estos materiales presentan un modo de falla que resulta de la competencia entre los dos anteriores. Esta región se denomina zona de transición dúctil-frágil y suele representarse a través de una curva de tenacidad en función de la temperatura denominada curva de transición dúctil-frágil.

Esta competencia de mecanismos de fractura hace que las evaluaciones de tenacidad a la fractura resulten un poco más complejas que las analizadas hasta el momento en este capítulo.

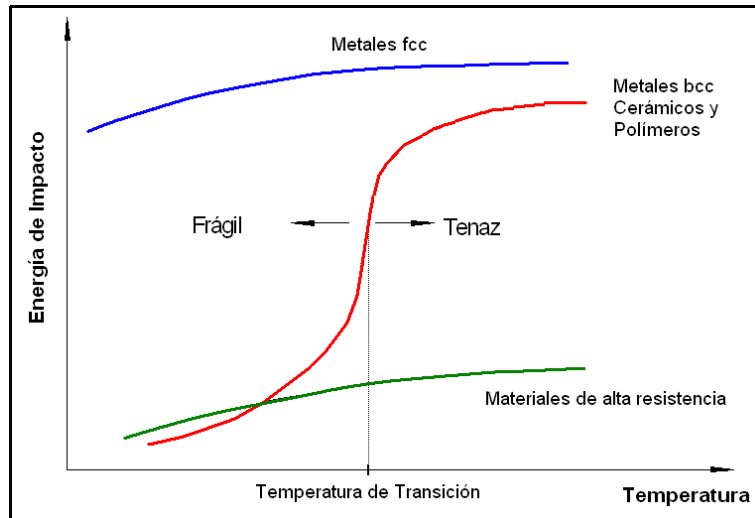


Figura 1.7. Comportamiento a la fractura con la temperatura.

En la zona de transición, se pueden dar diferentes comportamientos durante los ensayos de tenacidad, como se muestra en la figura 1.8. El ensayo de una probeta con una fisura mostrará típicamente un registro carga-desplazamiento no lineal, debido a la plasticidad, y quizá algo de crecimiento estable de fisura, interrumpido por la ocurrencia de una súbita falla por clivaje (registro 2 de la figura 1.8). El área bajo el registro carga-desplazamiento puede ser evaluado a través del parámetro elasto-plástico  $J_C$  o  $J$  al clivaje. Al incrementar la temperatura de los ensayos se podrán obtener registros como el 3 con un crecimiento estable de fisura, o como el registro 4 ya en la zona de la curva con comportamiento tenaz.

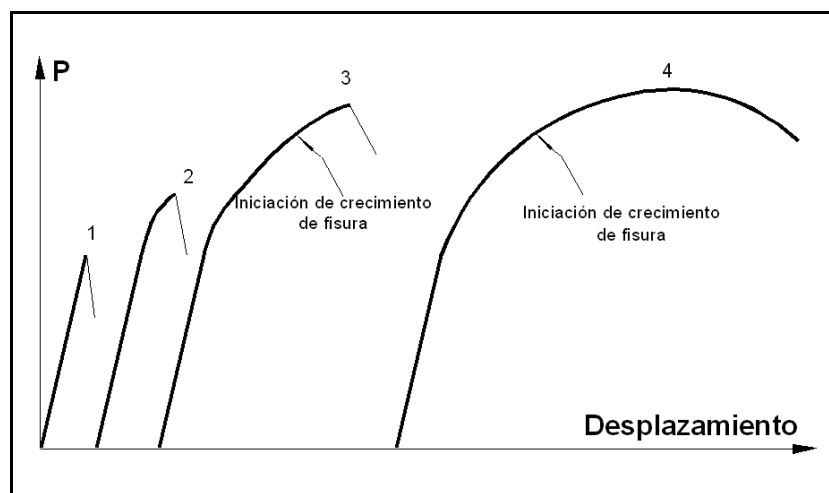


Figura 1.8. Registros de ensayos en la zona de transición.

Este fenómeno de transición tiene directa relación con la elevación de la tensión de fluencia del material al disminuir la temperatura, como se muestra en la figura 1.9. A bajas temperaturas ( $T < T_{NDT}$ ), con altas tensiones de fluencia, en las inmediaciones de la punta de la fisura se alcanzan tensiones de tracción suficientes como para iniciar el proceso de fractura frágil. En cambio, para temperaturas altas,

no se logran tensiones suficientemente altas como para que se dispare el fenómeno de clivaje y se está en la región de comportamiento dúctil o *upper shelf* de la curva de transición. En la transición propiamente dicha se requiere una deformación plástica significativa en la punta de la fisura, que será mayor en la zona superior de la transición, con menor tensión de fluencia que en la inferior. Aquí será necesario un mayor endurecimiento por deformación plástica, que puede estar acompañado o no de crecimiento estable de fisura [3].

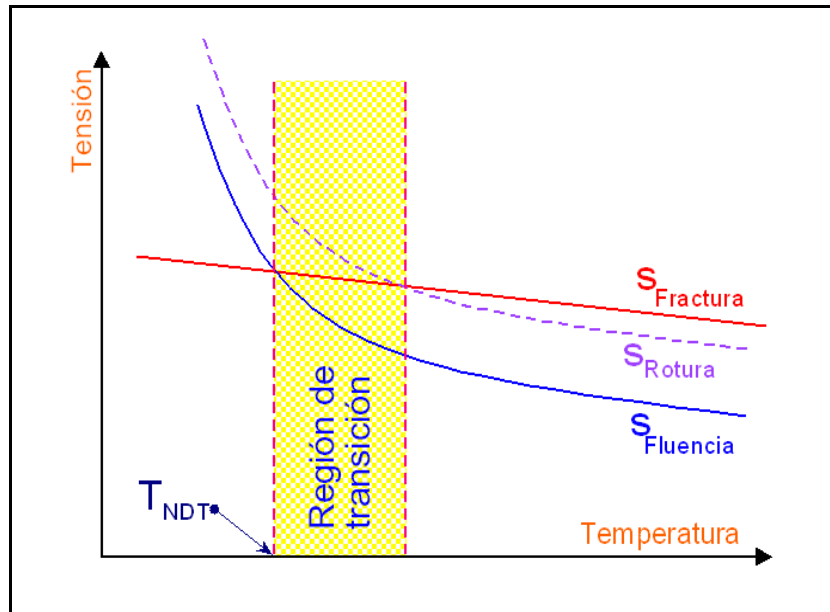


Figura 1.9. Competencia de mecanismos.

Esta zona de transición es muy problemática debido a la competencia entre los dos mecanismos arriba mencionados, lo que se pone de manifiesto en los ensayos de laboratorio. Además de la variación de tenacidad con la temperatura, en la zona de transición se da también una importante dispersión en los valores de tenacidad, como se ejemplifica en la figura 1.10. Sumado a esto, se presenta también un efecto de tamaño, tal como se muestra en la Figura 1.11 [9].

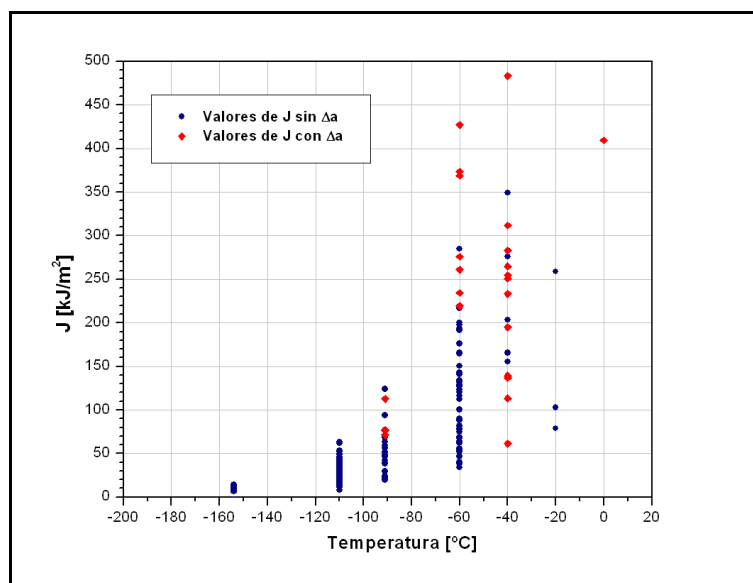
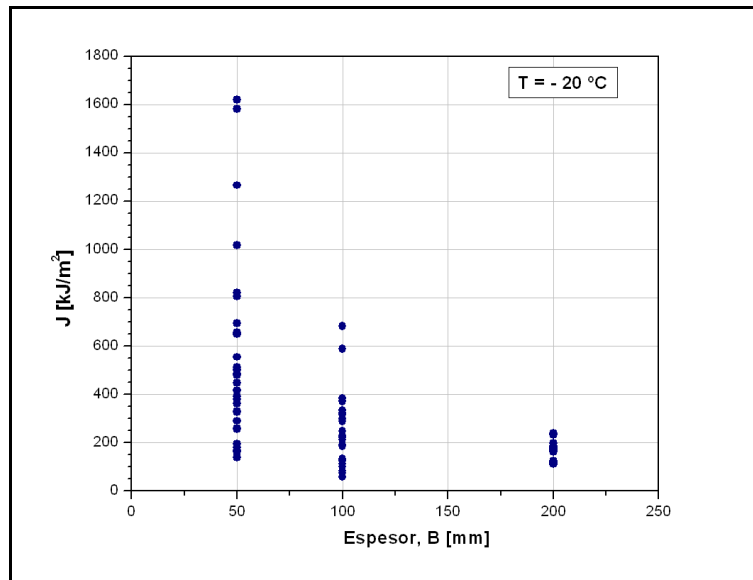


Figura 1.10. Dispersión en función de la temperatura para un acero DIN 22NiMoCr37.



**Figura 1.11.** Efecto de tamaño en la región de transición para un acero DIN 22NiMoCr37 .

Perez Ipiña *et al* [10], presentaron una re-interpretación de la curva de transición en base a la evidencia experimental de ensayos de tenacidad a la fractura (Figura 1.12). Estos autores propusieron no una sola curva sino el área comprendida entre dos curvas, una correspondiente al límite inferior de tenacidad o *lower bound* (independiente del espesor) y la otra corresponde al límite superior de la banda de dispersión o *upper bound* (dependiente del espesor, resultando bandas más gruesas para espesores pequeños).

En figura 1.12 se definen diferentes sub-zonas en la zona de transición:

- **Zona I:** habrá fractura frágil sin crecimiento estable de fisura.
- **Zona II:** habrá fractura frágil sin crecimiento estable de fisura en algunas probetas, mientras que en otras la fractura frágil ocurrirá luego de crecimiento estable de fisura.
- **Zona III:** habrá probetas que presenten clivaje sin crecimiento estable de fisura, otras que presenten clivaje con crecimiento estable de fisura y otras que alcanzarán carga máxima sin experimentar clivaje.
- **Zona IV:** habrá clivaje en algunas probetas, pero siempre con crecimiento estable de fisura, mientras que en otras se alcanzará carga máxima sin producirse el clivaje.
- **Zona V:** no habrá clivaje antes de carga máxima para ninguna probeta.

Como la curva de *upper bound*  $J_c$  es función del espesor, esta curva se desplazaría hacia arriba y hacia abajo en función del espesor y está representada por  $f(B)$  en la figura. Para un tamaño de probeta suficientemente grande esta curva debería coincidir con el *lower Bound*, curva de color rojo.

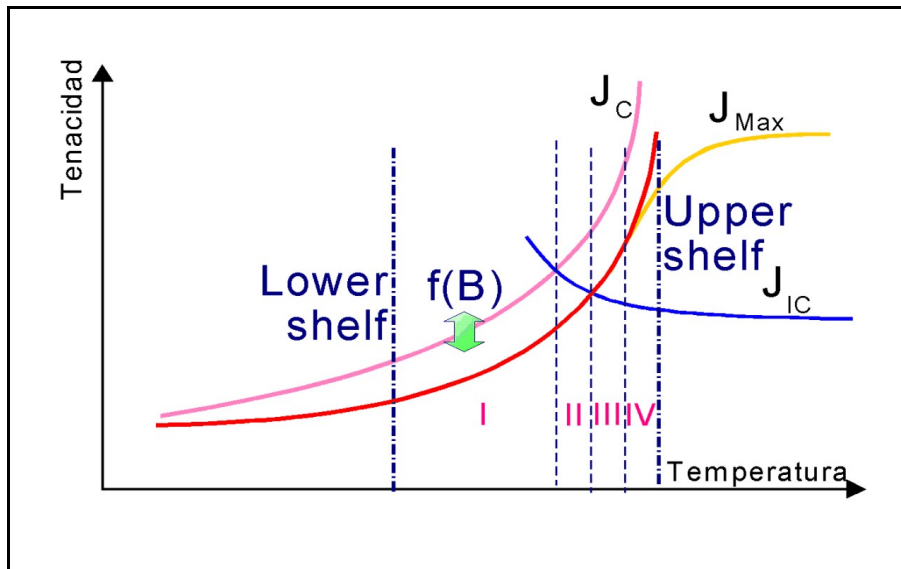


Figura 1.12. Re-interpretación de la Curva de Transición.

Para representar la dispersión de los datos y el efecto de tamaño de las probetas, en los ensayos de tenacidad a la fractura de aceros ferríticos realizados en la zona de transición dúctil-frágil, se utiliza una función de probabilidad de falla. La función que tiene más consenso dentro de la comunidad de mecánica de fractura, es la Función de Weibull. El efecto de tamaño se manifiesta por la disminución de la tenacidad media y de la dispersión en ensayos de probetas grandes comparados con ensayos en probetas de menor espesor. Si se representa la función densidad de probabilidad de falla para dos espesores diferentes, obtenemos un gráfico como el mostrado en la figura 1.13.

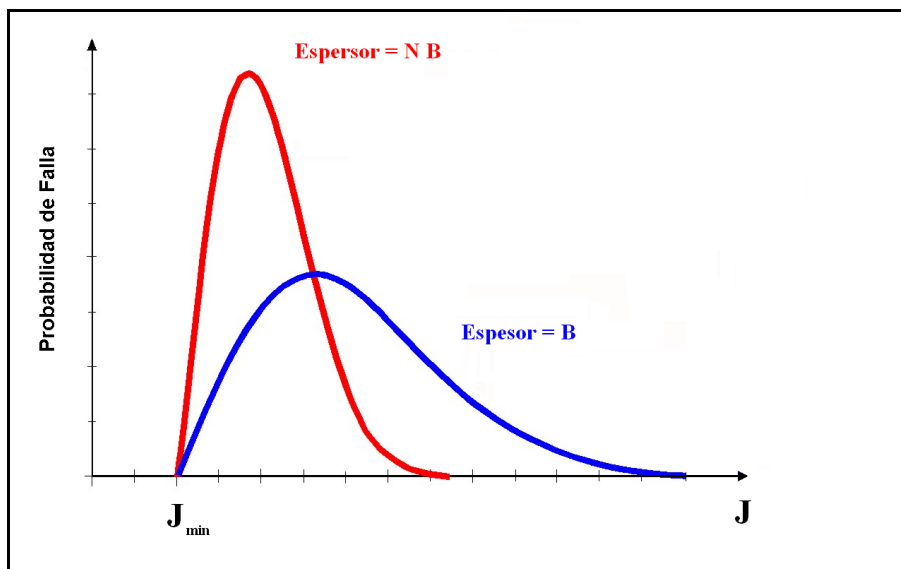


Figura 1.13. Probabilidad de falla para distintos espesores de probeta.

En la figura 1.13 se aprecia que la tenacidad media de un juego de probetas de espesor grande es menor que la correspondiente tenacidad media de un juego de probetas de espesor chico. La dispersión también aumenta para espesores pequeños.

Para explicar esta variación de tenacidad media y dispersión de resultados entre probetas de distintos espesores, originalmente surgieron dos teorías, una basada en diferencia de *constraint* entre probetas

de diferentes espesores y otra basada en la probabilidad de que el frente de fisura encuentre un sitio iniciador del clivaje [2] y que se describen brevemente a continuación:

**a) Teoría de diferencia en la restricción a la deformación plástica (diferencia de constraint):**

Esta teoría se basa en que probetas de mayor espesor tienen mayor *constraint* (restricción a la deformación plástica) respecto a probetas de menor tamaño, por lo que el valor de tenacidad promedio de un juego de ensayos de probetas de espesores grandes será menor que la correspondiente a probetas chicas. Esta teoría falla en dar una explicación de la diferencia de dispersión entre juegos de probetas de distintos espesores.

**b) Teoría estadística:**

Según esta teoría existen en el frente de fisura pequeñas zonas de baja tenacidad, denominadas *weak links* (posibles sitios iniciadores de clivaje) distribuidos aleatoriamente, por lo que la fractura frágil es un evento estadístico. Al ser la fractura por clivaje un proceso de fractura local controlado por tensiones críticas, ésta se producirá si en uno de esos *weak links* se alcanza la tensión crítica. Además de la dispersión que se presenta en esta zona, el modelo de *weakest link* o eslabón más débil también explica el efecto de tamaño de probeta, ya que un incremento de la longitud del frente de fisura incrementa el volumen de material altamente tensionado en la punta de la fisura, aumentando también la probabilidad de que la fisura encuentre un eslabón débil.

**1.5. Tratamiento estadístico de los datos experimentales**

Para describir el comportamiento de la dispersión que tienen los valores de tenacidad a la fractura en la región de transición, lo usual es utilizar la función Weibull de tres parámetros (3P-W) [11]. En general la función de Weibull se puede expresar, para una variable **x**, por la ecuación (1.7),

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{x - x_{\min}}{x_0 - x_{\min}}\right)^{b_x}} \tag{1.7}$$

Donde:

**P** = probabilidad acumulada

**x** = variable medida (valores de tenacidad a la fractura en **J** o en **K** para el caso presente)

**b<sub>x</sub>** = es el parámetro de forma de la función de Weibull (o también llamada pendiente de Weibull).

**x<sub>0</sub>** = es el parámetro de escala de la función de Weibull.

**x<sub>min</sub>** = es el parámetro umbral de la función de Weibull.

Cuando se trabaja en la zona de transición y sobre todo con la función de Weibull, se infieren los parámetros de la función de Weibull a partir de datos experimentales aplicando diferentes métodos, como pueden ser: el método de máxima verosimilitud o el método de regresión lineal. Con lo cual, a partir de una cierta cantidad de datos experimentales o muestra, se puede predecir el comportamiento de una población mucho mayor, y entonces, luego de obtener los parámetros de la función de Weibull se puede trabajar con ella en diferentes aplicaciones e incluso inferir distribuciones de muestras de diferentes tamaño con un confianza preestablecida. Diferentes modelos basados en estadística de Weibull se proponen en la bibliografía especializada para describir el comportamiento de la tenacidad a la fractura en la región de transición dúctil-frágil. A continuación se describe una revisión simplificada de las propuestas más destacadas en cuanto al tratamiento estadístico.

### 1.5.1. Propuesta de Landes y Shaffer

En el año 1980 Landes y Shaffer [12] presentaron un trabajo donde muestran como se puede aproximar una función 2P-W para describir la dispersión de valores de tenacidad a la fractura en términos de **J** en la zona de transición. Ellos propusieron utilizar la siguiente función:

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J}{J_0}\right)^{b_J}} \quad (1.8)$$

Donde:

**P** = probabilidad acumulada de falla de un individuo elegido arbitrariamente de una población.

**J** = tenacidad a la fractura del material en términos de la integral-J.

**b<sub>J</sub>** = parámetro de forma o pendiente de Weibull.

**J<sub>0</sub>** = parámetro de escala de la función de Weibull (**J<sub>0</sub>** = **J** cuando **P** = 0,632).

Para tener en cuenta las diferencias de tenacidad a la fractura entre un juego de probetas grandes y un juego de probetas pequeñas, Landes y Shaffer usaron la ecuación (1.9).

$$P = 1 - e^{-N\left(\frac{J}{J_0}\right)^{b_J}} \quad (1.9)$$

Donde **N** es la relación de tamaño entre las probetas de mayor espesor y las de menor espesor.

Esta propuesta presentaba algunas inconsistencias: para cualquier valor de **J** se tiene una probabilidad de falla, es decir, no tiene un valor umbral de tenacidad por debajo del cual no existe falla, y además, para tamaños de probetas muy grandes, la probabilidad de falla tiende a 1 para cualquier valor de **J**.

### 1.5.2. Propuesta de Landes y McCabe

Posteriormente en el año 1982 [13], Landes y McCabe introdujeron un valor umbral **J<sub>min</sub>** como tercer parámetro, y propusieron utilizar una función de Weibull de tres parámetros (3P-W), ecuación (1.10). Este cambio de una 2P-W a una 3P-W fue justificado porque en la función propuesta originalmente, una 2P-W, el valor de la media tendía a cero cuando el espesor de la probeta se incrementaba.

Por otro lado, el parámetro umbral propuesto, representa un valor mínimo de tenacidad en una población de **J<sub>c</sub>** a partir del cual comienzan las fallas por fractura.

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J}} \quad (1.10)$$

Donde **J<sub>min</sub>** es el parámetro umbral o el menor valor de **J** en una población.

### 1.5.3. Propuesta de Kim Wallin

Luego, en el año 1984, Kim Wallin [14] propuso describir la dispersión de tenacidad a la fractura con una función 2P-W en términos del factor de intensidad de tensiones  $\mathbf{K}$ :

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K}{K_0}\right)^{bK}} \quad (1.11)$$

Con ciertas hipótesis y simplificaciones, Wallin propuso que para una función 2P-W, la pendiente “teórica” de la función es fija e igual a 4, resultando,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K}{K_0}\right)^4} \quad (1.12)$$

En el mismo trabajo Wallin dice que es físicamente razonable la existencia de un valor umbral,  $\mathbf{K}_{\min}$ , por lo tanto la función se convertiría en una 3P-W, y él propone,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^4} \quad (1.13)$$

El mismo Wallin en el año 1993 [15] dice que introducir el valor del parámetro umbral  $\mathbf{K}_{\min}$  en la ecuación (1.12) es problemático, y que a primera vista parecería natural escribir esta ecuación como:

$$P = 1 - e^{-\alpha_b (K^4 - K_{\min}^4)} \quad (1.14)$$

Sin embargo, establece que esta ecuación no describe correctamente el comportamiento de los valores de tenacidad a la fractura. Pero la ecuación (1.13) sí aproxima bien la dispersión de los resultados de tenacidad a la fractura. Wallin dice que al utilizar una 3P-W se observa un error en la pendiente de la función obtenida de los datos experimentales, pero si se corrige dicho error la pendiente seguiría siendo 4, ecuación (1.13). Las justificaciones de Wallin son de carácter empírico no teóricas. En este mismo trabajo Wallin propuso que el valor del parámetro umbral sea  $\mathbf{K}_{\min} = 20 \text{ MPa m}^{1/2}$ , justificando este valor también de forma empírica, sin fundamentos físicos.

Las propuestas de Wallin fueron tomadas posteriormente por la Norma ASTM E 1921 - 2002, [16]. Este método de ensayo cubre la determinación de la temperatura de referencia,  $T_0$ , para la cual el valor de la mediana de la distribución de  $\mathbf{K}_{Jc}$  es  $100 \text{ MPa m}^{1/2}$  para una probeta de tamaño 1T (1 pulgada de espesor). De esta forma se utiliza el concepto de la *Master Curve* para caracterizar la tenacidad a la fractura de aceros ferríticos que experimentan clivaje, o inestabilidad elasto-plástica  $\mathbf{K}_{Jc}$ , o ambas [19-21]. La posición de la curva en el eje de las abscisas queda establecido por la Temperatura de Referencia,  $T_0$ . En este método normalizado está implícito que los valores de  $\mathbf{K}_{Jc}$  se distribuyen según una 3P-W con pendiente fija  $\mathbf{b} = 4$  y parámetro umbral  $\mathbf{K}_{\min} = 20 \text{ MPa m}^{1/2}$ .

Como se ha mencionado, para medir tenacidad a la fractura de aceros ferríticos en la región de transición dúctil frágil se suelen utilizar ensayos de  $\mathbf{J}_C$ , ya que los valores de  $\mathbf{K}_{Jc}$  para las dimensiones de probetas usadas son frecuentemente no válidos por no lograrse condiciones de plasticidad en pequeña escala. Sin embargo, las evaluaciones estructurales de mecánica de fractura se realizan con parámetros



lineales elásticos, por lo que se hace imperioso, una vez obtenidos los valores de  $J_c$ , transformarlos en valores equivalentes en términos de  $K_{jc}$ . Este procedimiento está muy aceptado y también se utiliza en las normas de tenacidad a la fractura antes mencionadas.

## 1.6. Objetivos de la Tesis

En la presente tesis se estudian algunos aspectos relacionados con la transición dúctil frágil de aceros ferríticos, especialmente en lo referente a las funciones estadísticas empleadas para la descripción de la dispersión de resultados y para los efectos de tamaño. Se mostrará que las distintas propuestas existentes en la bibliografía, y utilizadas ampliamente, presentan inconsistencias. Se demostrará que si los datos de tenacidad a la fractura en valores de  $J$  se distribuyen según una 3P-W, los valores equivalentes en términos de  $K$  no se distribuyen exactamente según una 3P-W. Una 3P-W podría dar una buena aproximación, aunque la pendiente ya no sería 4 como propone Kim Wallin.

También se demostrará que para el caso de una 2P-W las relaciones encontradas en la bibliografía se cumplen matemáticamente, pero al tratar de generalizar esas relaciones para una función 3P-W los errores que se cometen pueden llegar a ser muy importantes.

Se propone una aproximación para la transformación de los datos en  $J$  a datos en términos de  $K$ , y además, como sería posible transformar la función 3P-W expresada en  $J$  a su expresión en términos de  $K$ , y viceversa.

Posteriormente, se analizarán juegos de datos del denominado Euro Data Set para mostrar los resultados que se pueden obtener con la propuesta de la presente tesis.

El trabajo de tesis está organizado de la siguiente forma: luego de la introducción a la temática de la tesis presentada en este capítulo, se continúa con el Capítulo 2, donde se analiza en profundidad el comportamiento de la función de Weibull. Seguidamente, en el Capítulo 3 se detalla la transformación desde valores  $J$  a valores  $K$  y se propone una transformación para la 3P-W expresada en términos de  $J$  a una 3P-W en términos de  $K$ , y viceversa. Posteriormente, en el Capítulo 4 se analizan los datos experimentales de la Euro Data Set con las propuestas de esta tesis. Por último, en el Capítulo 5, se dan las conclusiones de la presente tesis.

## Referencias Bibliográficas

- [1] Perez Ipiña, J., “Mecánica de Fractura”, Editorial Alsina, primera edición, 2004.
- [2] Berejnoi, C., “Incidencia del fenómeno Pop-in en la tenacidad a la fractura de uniones soldadas”, Tesis Doctoral, U N de la Plata, Facultad de Ingeniería, 2001.
- [3] Perez Ipiña, J., “Transición dúctil frágil de aceros ferríticos. Algunos aspectos todavía abiertos”, Revista de la Asociación Argentina de Materiales - SAM, N° 3 - Año 2007.
- [4] ASTM E 1290, “Standard Test Method for Crack-Tip Opening Displacement(CTOD) Fracture Toughness Measurement”, Annual Book of ASTM Standards, 2002.
- [5] ASTM E 1820, “Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness”, Annual Book of ASTM Standards, 2005.
- [6] BS 7448 - Part 1, “Fracture Mechanics Toughness Test. Part 1: Method for determination of  $K_{IC}$ , critical CTOD and critical J values of metallic materials”, British Standards, 1991.
- [7] Anderson, T.L., “Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications”, CRC Press, second edition, 1995.
- [8] Chapetti, M.D., “Mecánica de Materiales Teoría de Elasticidad, Plasticidad y Mecánica de Fractura”, Ediciones al Margen, primera edición, 2005.
- [9] Landes, J.D., McCabe, D.E., “The Effect of Section Size on the Transition Behavior of Structural Steels”, Scientific Paper de Westinghouse, 1982.
- [10] Perez Ipiña, J.E., Centurion, S.M.C., Aasta, E., “Minimum Number of Specimens to Characterize Fracture Toughness in the Ductile-to-Brittle Transition Region”, Eng. Fracture Mechanics, Vol. 47 (3), pp. 457-463, 1994.
- [11] Weibull, W., “A Statistical Distribution Function of Wide Applicability”, Journal of Applied Mechanics, pp. 293-297, 1951.
- [12] Landes, J.D., Shaffer, D.H., “Statistical Characterization of Fracture in the Transition Region”, Fract.Mech., 12th Conference, ASTM STP 700, pp. 368-382, 1980.
- [13] Landes, J. D. and McCabe, D. E., “The Effect of Section Size on the Transition Behavior of Structural Steels”, Scientific Paper de Westinghouse R&D Center, 1982.
- [14] Wallin, K., “The Scatter in  $K_{IC}$  - Results”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, No. 6, pp. 1085-1093, 1984.
- [15] Wallin, K., “Statistical Aspects of Constraint with Emphasis on Testing and Analysis of Laboratory Specimens in the Transition Region,” Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, pp. 264-288, 1993.
- [16] ASTM E 1921, “Standard Test Method for Determination of Reference Temperature,  $T_0$ , for Ferritic Steels in the Transition Range”, Annual Book of ASTM Standards, Vol. 03.01, 2002.
- [17] McCabe, D.E., “A Comparison of Weibull and  $\beta_{IC}$  Analyses of Transition Range Data,” Fract. Mech.: 23-rd Symposium, ASTM STP 1189, pp. 80-94, 1993.
- [18] Anderson, T.L., Stienstra, D., Dodds, R.H., “A Theoretical Framework for Addressing Fracture in the Ductile-Brittle Transition Region,” Fracture Mechanics - 24 th volume, STP 1207, pp. 186-214, 1994.
- [19] Heerens, J., Zerbst, U., Schwalbe, K.H., “Strategy for Characterizing Fracture Toughness in the Ductile to Brittle Transition Regime,” Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 16 (11), pp. 1213-1230, 1993.
- [20] McCabe, D.E., Zerbst, U., Heerens, J., “Development of Test Practice Requirements for a Standard Method on Fracture Toughness Testing in the Transition Range,” GKSS Publicaciones, 93/E/81, 1993.
- [21] Landes, J. D., Zerbst, U., Heerens, J., “Single-Specimen Test Analysis to Determine Lower-Bound Toughness in the Transition”, Fracture Mechanics - 24<sup>th</sup> volume, ASTM STP 1207, pp. 171-185, 1994.

## Capítulo 2: La Función de Weibull

### 2.1. Introducción a la Función de Weibull

El Dr. Wallodi Weibull (1887 - 1979) fue un científico e ingeniero sueco, quien realizó contribuciones a la ciencia en temas referidos a resistencia de materiales, fractura, fatiga, estadística, confiabilidad de componentes, etc.

En el año 1951 publicó el trabajo titulado *A Statistical Distribution Function of Wide Applicability* [1], en el cual presentó una función distribución de probabilidad con aplicaciones a problemas de ingeniería. En ese trabajo también mostraba diferentes ejemplos aplicando dicha función. Con los años, en reconocimiento a su contribución, esta función llevaría su nombre, la función distribución de Weibull.

Originalmente la función presentada por Weibull tenía la siguiente forma.

$$F(x) = 1 - e^{-\phi(x)} = 1 - e^{-\left[\frac{x-x_u}{x_0}\right]^m} \quad (2.1)$$

Donde:

$F(x)$  expresa la probabilidad acumulada de que un individuo tenga una propiedad  $x \geq x_u$ .

$\phi(x)$  es una función de la propiedad  $x$ .

$m$  es el parámetro de forma de la función de Weibull (o también se suele denominar la pendiente de la función).

$x_u$  es el parámetro umbral de la función de Weibull.

$x_0$  es el parámetro de escala de la función de Weibull.

Esta función se puede expresar en términos de la función densidad de probabilidad,  $f(x)$  que se obtiene derivando (2.1) [2],

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = e^{-\phi(x)} \frac{d\phi}{dx} \quad (2.2)$$

con lo cual  $f(x)$  resulta,

$$f(x) = \frac{m}{x_0} \left[ \frac{x - x_u}{x_0} \right]^{m-1} e^{-\left[\frac{x-x_u}{x_0}\right]^m} \quad (2.3)$$

la función  $f(x)$  expresa la forma en que se distribuye la densidad de probabilidad.

La figura 2.1 muestra una  $F(x)$  para valores típicos de las pendientes,  $m = 2$  y  $m = 4$ ,  $x_0 = 35$  y  $x_u = 20$ . Mientras que la figura 2.2 muestra la  $f(x)$  para los mismos valores de estos parámetros.

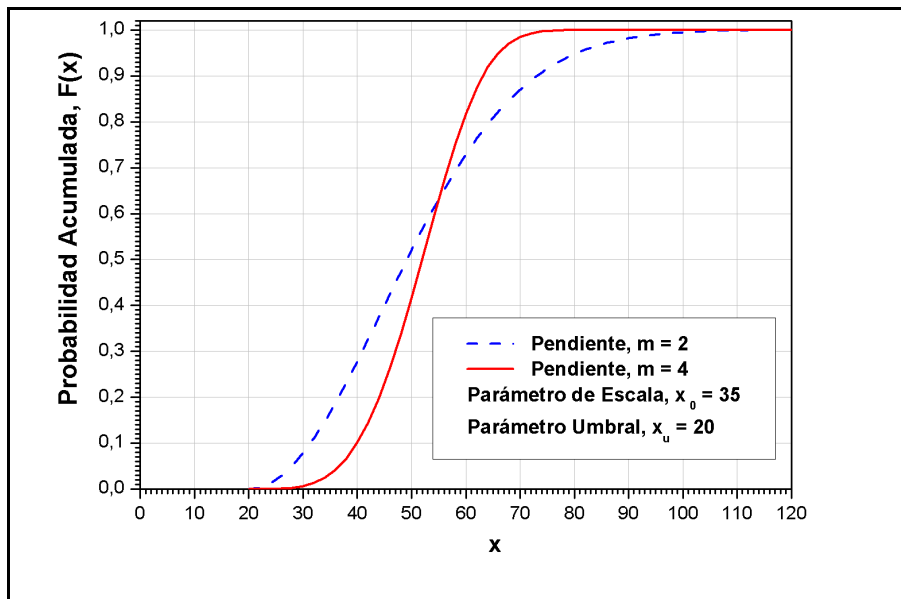


Figura 2.1. La función de Probabilidad acumulada de Weibull.

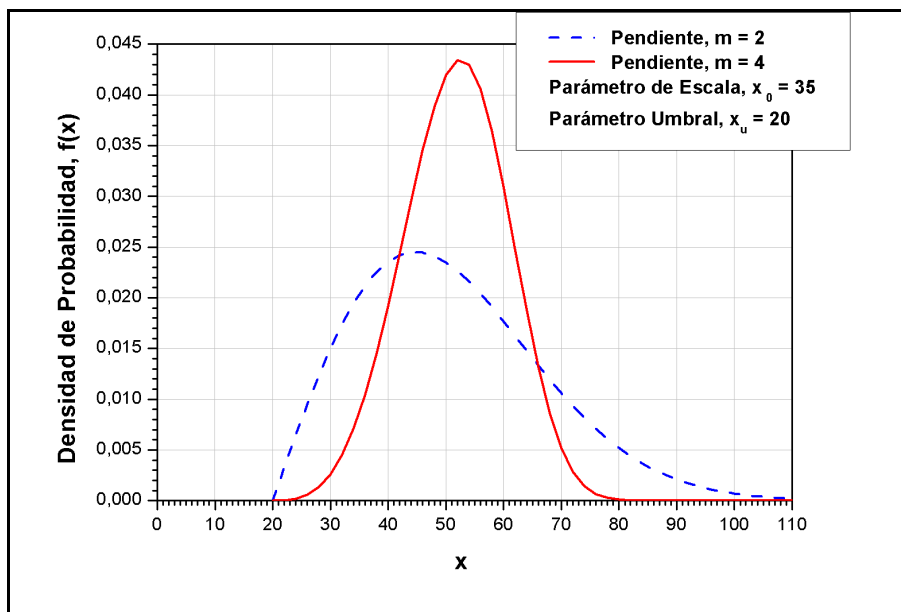


Figura 2.2. La función Densidad de Probabilidad de Weibull.

Como se observa en las figura 2.2, la función de Weibull está definida para valores mayores o iguales al valor umbral.

Al cambiar la pendiente de la función, ésta cambia de forma. Para valores cercanos a 2 la forma es de una función asimétrica a la derecha con el umbral bien definido. Para valores de la pendiente entre 3 y 4, la forma se hace simétrica respecto a la media de la distribución, asemejándose a la función Normal. Para estos casos, si bien el valor umbral sigue existiendo,

ya no es tan claro como en el caso de pendiente 2.

Esta función tiene muchas otras características interesantes las que se irán detallando a lo largo del texto.

Antes de continuar con el estudio de la función de Weibull, sería conveniente aclarar algunos términos referidos a la nomenclatura utilizada.

Es común encontrar en la literatura, que a la ecuación (2.1) se la denomine función de Weibull de tres parámetro (**3P - W**). También un caso particular de ésta, cuando el parámetro umbral es nulo  $x_u = 0$ , se la suele encontrar denominada como la función de Weibull de dos parámetros (**2P - W**).

Otra aclaración que corresponde hacer, referida a nomenclatura, es acerca del parámetro de escala,  $x_0$ . En la bibliografía se puede encontrar a la función  $\phi(x)$  de muchas formas equivalentes, algunas de ellas pueden ser:

$$\phi(x) = \frac{(x - x_u)^m}{x_0} = \left[ \frac{x - x_u}{x_{0A}} \right]^m = \left[ \frac{x - x_u}{x_{0B} - x_u} \right]^m \quad (2.4)$$

donde

$$x_0 = (x_{0A})^m = (x_{0B} - x_u)^m \quad (2.5)$$

la diferencia está en el valor numérico que se tome en cada caso para el parámetro de escala.

En el presente trabajo cuando se haga referencia al “parámetro de escala”, se estará haciendo referencia al valor de “ $x_{0B}$ ”, es decir, con el siguiente denominador: “ $x_{0B} - x_u$ ”; refiriéndose entonces a la función  $\phi(x)$  de la forma que se muestra en la ecuación (2.6). Cuando se haga referencia a otra forma, de las tantas que pueda tomar dicha función, se aclarará oportunamente.

$$\phi(x) = \left[ \frac{x - x_u}{x_0 - x_u} \right]^m \quad (2.6)$$

En general, en el presente trabajo a la función de Probabilidad Acumulada de Weibull de tres parámetros se la considerará como,

$$F(x) = 1 - e^{-\left[ \frac{x - x_u}{x_0 - x_u} \right]^m} \quad (2.7)$$

$$f(x) = \frac{m}{(x_0 - x_u)} \left[ \frac{x - x_u}{x_0 - x_u} \right]^{m-1} e^{-\left[ \frac{x - x_u}{x_0 - x_u} \right]^m} \quad (2.8)$$

## 2.2. Medidas de posición y de variabilidad para la Función de Weibull

Los datos de las medidas de posición y de variabilidad para el análisis de las funciones estadísticas suelen resultar de gran utilidad, es por ello que a continuación se resumen algunas de mayor uso para la función de Weibull [3].

### 2.2.1. Medidas de posición

Las medidas de posición más utilizadas en general son los valores de tendencia central como pueden ser la media aritmética, la mediana y el modo. Estas medidas proporcionan la localización de la distribución sobre el eje de las abscisas.

#### Media aritmética o Esperanza ( Average )

La media aritmética (también llamada Esperanza o valor esperado) se define para una función densidad de probabilidad de Weibull, como:

$$\mu_{Weibull} = \int_{x_u}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.9)$$

Remplazando la ecuación (2.8) en la (2.9) y resolviendo, se obtiene la ecuación (2.10), la cual expresa la media aritmética de la función de Weibull

$$\mu_{Weibull} = x_u + (x_0 - x_u) \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \quad (2.10)$$

Donde  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler y viene dada por la expresión de (2.11).

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad \text{para } r > 0 \quad (2.11)$$

#### Mediana ( Median )

La Mediana se define como el valor  $x_i$  de la variable  $x$  para el cual  $F(x) = 0.5$ .  
Para el caso de la función de Weibull,

$$x_i = x_u + (x_0 - x_u) \left[ -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (2.12)$$

### **Modo ( Mode o Modus )**

Se define como el valor  $x_{\text{Modo}}$  de la variable  $x$  para el cual la función densidad de probabilidad alcanza su valor máximo. Derivando la ecuación (2.8), igualando a cero y resolviendo se obtiene:

$$x_{\text{Modo}} = x_u + (x_0 - x_u) \left[ \frac{m-1}{m} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (2.13)$$

### **Parámetro de escala**

Otro punto interesante de analizar en la función de Weibull, es el punto para el cual corresponde el valor de probabilidad acumulada  $F(x) = 0.632$ , a este valor de  $x$  se lo denomina parámetro de escala “  $x_0$  ”. Posteriormente en el texto se volverá a hacer referencia sobre este punto especial de la función de Weibull.

### **2.2.2. Medidas de variabilidad**

Las medidas de variabilidad o de dispersión indican la intensidad con que se dispersan o concentran los valores de la variable con respecto a las medidas de tendencia central. La más utilizada de estas medidas de variabilidad, es en general el desvío estándar, aunque el coeficiente de variación también puede resultar de utilidad.

### **Desvío Estándar**

Se define como la raíz cuadrada de la media de las desviaciones al cuadrado con respecto a la media aritmética  $\mu$ , y se calcula, para el caso de la función de Weibull, de la siguiente forma,

$$\sigma = \left[ \int_{x_u}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

al reemplazar (2.8) y resolviendo, se obtiene:

$$\sigma = (x_0 - x_u) \left( \Gamma \left( \frac{2}{m} + 1 \right) - \left[ \Gamma \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

### **Coefficiente de variación**

El coeficiente de variación se define como el cociente entre el desvío estándar y la media aritmética de la variable, resultando un coeficiente adimensional.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.16)$$

Suele ser utilizado cuando es necesario comparar la dispersión de dos poblaciones en las cuales se estudia la misma variable pero con diferentes valores en la media aritmética, ya que una misma dispersión no expresa lo mismo si las medias son diferentes. También, cuando se desea comparar la dispersión de dos poblaciones en las cuales se estudian variables diferentes con diferentes unidades de medidas.

### 2.3. Comportamiento de la Función de Weibull

En las figuras 2.3 y 2.4 se puede observar la gran variedad de formas que puede tomar la función de Weibull descrita en las ecuaciones (2.7) y (2.8), para los valores de  $m = 0.5, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 20$  y  $50$ . Manteniendo fijos los valores de  $x_u = 20$  y  $x_0 = 55$ .

Para un valor en la pendiente  $m = 2$  se tiene una función asimétrica a la derecha, es decir que la Moda < Mediana < Media, mientras que para valores de la pendiente entre  $m = 3$  y  $m = 4$  la función es aproximadamente simétrica, y para valores de la pendiente mayores a 4 tiende a ser una función asimétrica a la izquierda, es decir Media < Mediana < Modo.

Un caso particular de la función de Weibull es para la pendiente  $m = 1$ , donde la función de Weibull se transforma en la función exponencial.

Al observar las figuras, también se puede ver que al aumentar el valor de la pendiente la dispersión disminuye y el valor máximo de la función densidad se va corriendo hacia la derecha.

Otra característica que se puede observar en las funciones de densidad de probabilidad es la pendiente o la tangente que tiene la función al inicio de su recorrido, más precisamente en el punto inicial de la función, en  $x = x_u$ . Se observa que para  $m = 0.5$ , la pendiente tiende a ser infinita, para  $m = 1$  la pendiente en el punto umbral es finita y negativa, para  $m = 2$  es finita y positiva, y para valores de  $m$  mayores o iguales a 3 tiene una pendiente inicial prácticamente nula.

Un punto particular de la figura 2.3, es aquel donde se interceptan las funciones distribución acumulada, el valor en el eje de las abscisas corresponde al valor del parámetro de escala " $x_0$ " y en ordenadas  $F(x_0) = 0.632$ . Es decir que para cualquier valor de la pendiente  $m$ , este punto de probabilidad acumulada permanece constante.



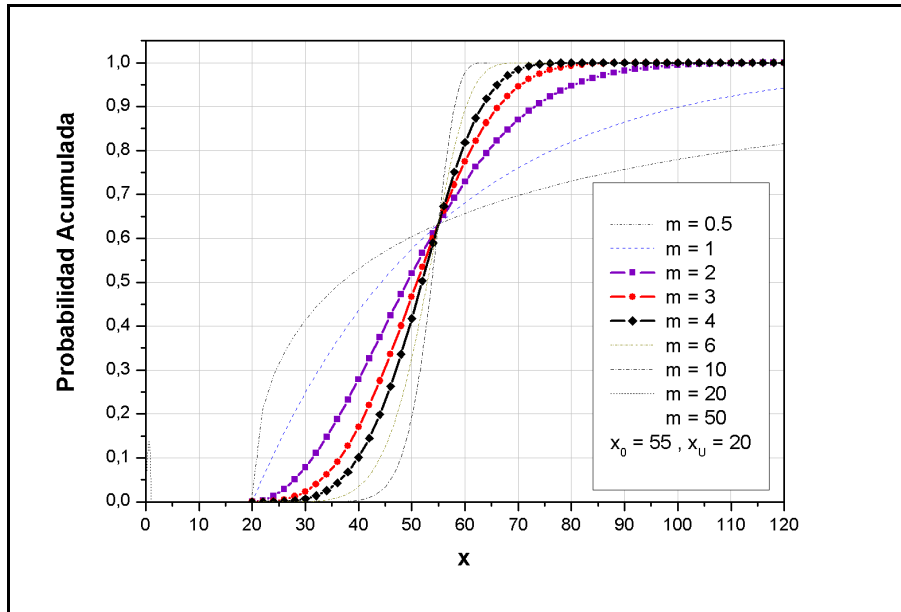


Figura 2.3. Funciones de Probabilidad acumulada para distintas pendientes.

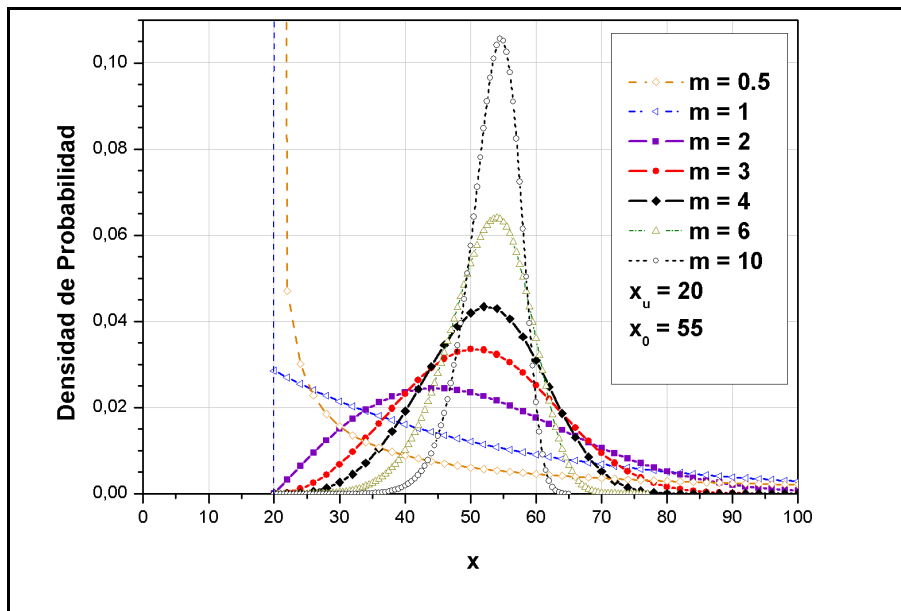


Figura 2.4. Funciones Densidad de Probabilidad para distintas pendientes.

Como ya se ha dicho, la forma de la distribución estará definida por el valor de “**m**”. A continuación se mostrará como influyen los otros parámetros de Weibull, tanto en la forma de la función, como así también en las medidas de posición y de dispersión. En estos ejemplos se tomarán dos valores de pendientes que son de interés en algunas aplicaciones ingenieriles, y especialmente en el campo de transición dúctil frágil de aceros, **m = 2** y **m = 4**, figuras 2.5 y 2.6.

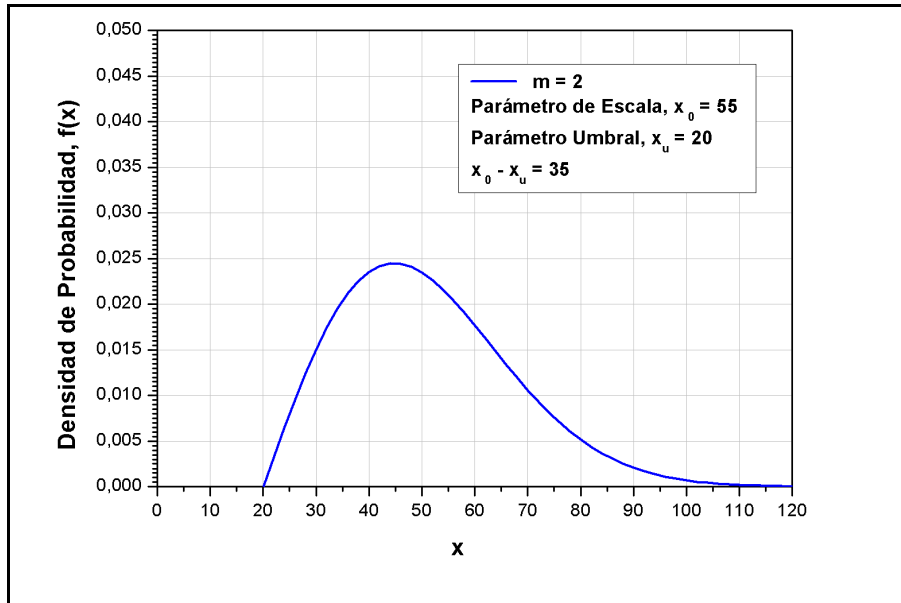


Figura 2.5. Función densidad de probabilidad 3P-W.

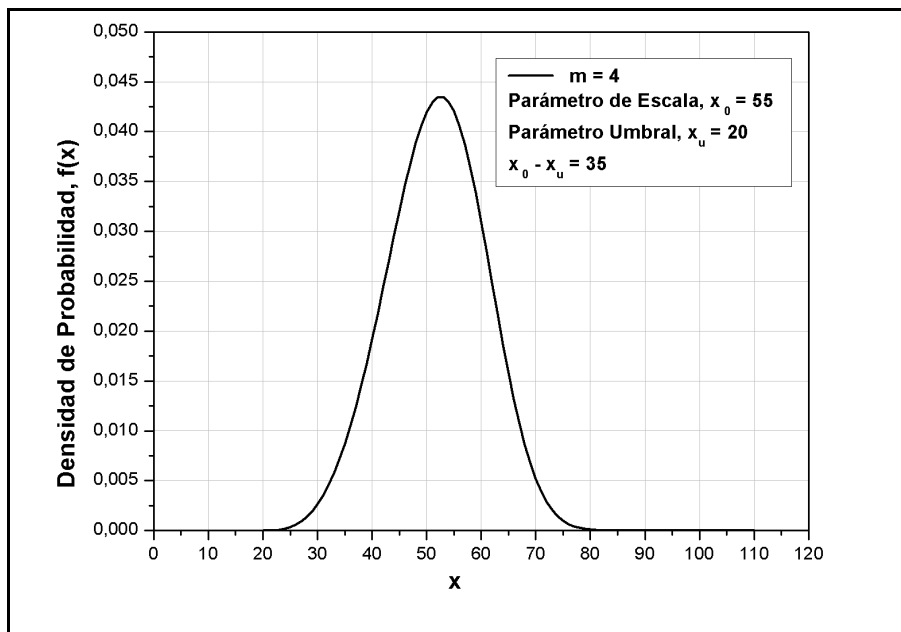


Figura 2.6. Función densidad de probabilidad 3P-W.

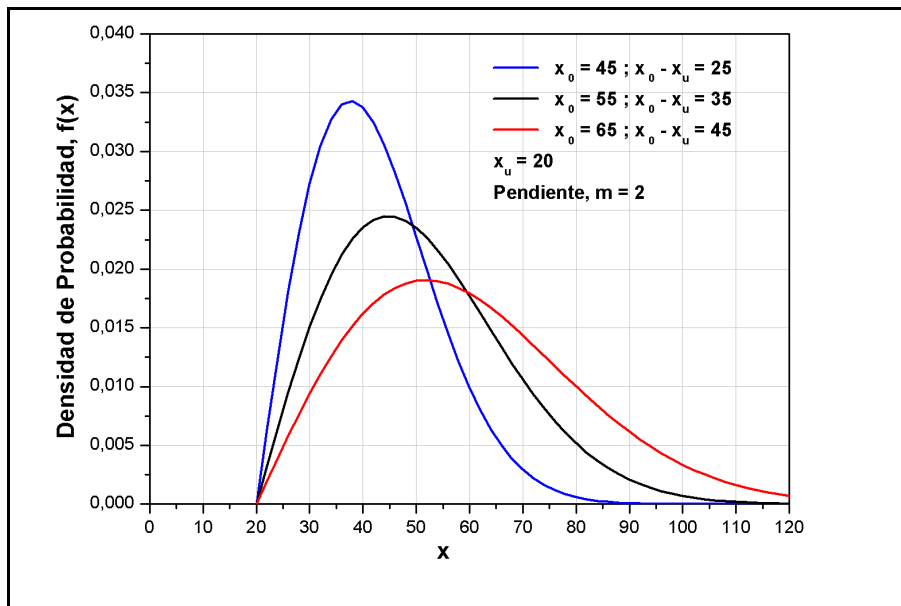
En las figuras 2.7 a 2.10 se muestran las funciones densidad de probabilidad y acumulada para diferentes valores de “ $x_0$ ” y manteniendo constante el umbral “ $x_u$ ”.

Se puede ver que al aumentar el valor del parámetro de escala “ $x_0$ ”, aumenta la dispersión y los valores de las medidas de posición (Media, Mediana y Modo) se corren a valores mayores, para el caso de un mismo valor en la pendiente. Los valores se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla I**

Parámetros	Figuras 7 y 9			Figuras 8 y 10		
	<b>m</b>	2	2	2	4	4
<b><math>x_0</math></b>	45	55	65	45	55	65
<b><math>x_u</math></b>	20	20	20	20	20	20
<b>Media</b>	42.2	51.0	59.9	42.7	51.7	60.8
<b>Mediana</b>	40.8	49.1	57.5	42.8	51.9	61.1
<b>Modo</b>	37.7	44.7	51.8	43.3	52.6	61.9
<b>Desvío Estándar</b>	11.6	16.2	20.8	6.4	8.9	11.4
<b>CV</b>	0.27	0.32	0.35	0.15	0.17	0.19

También, si se comparan las funciones con pendiente 2 con las de pendiente 4, se observa que, como ya se había mencionado anteriormente, estas últimas tienen menor dispersión que las primeras, a iguales valores de los otros parámetros.



**Figura 2.7.** Densidad de probabilidad 3P-W.

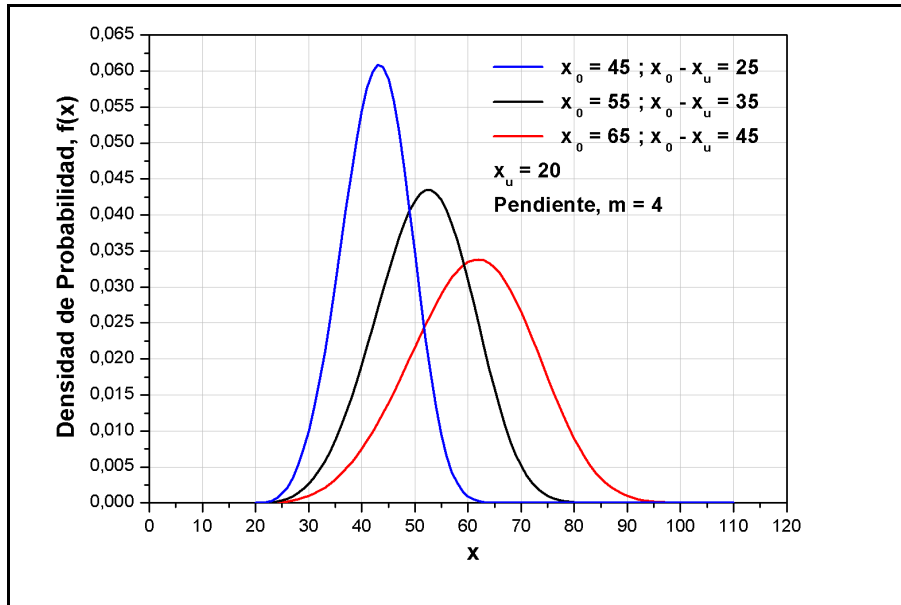


Figura 2.8. Densidad de probabilidad 3P-W.

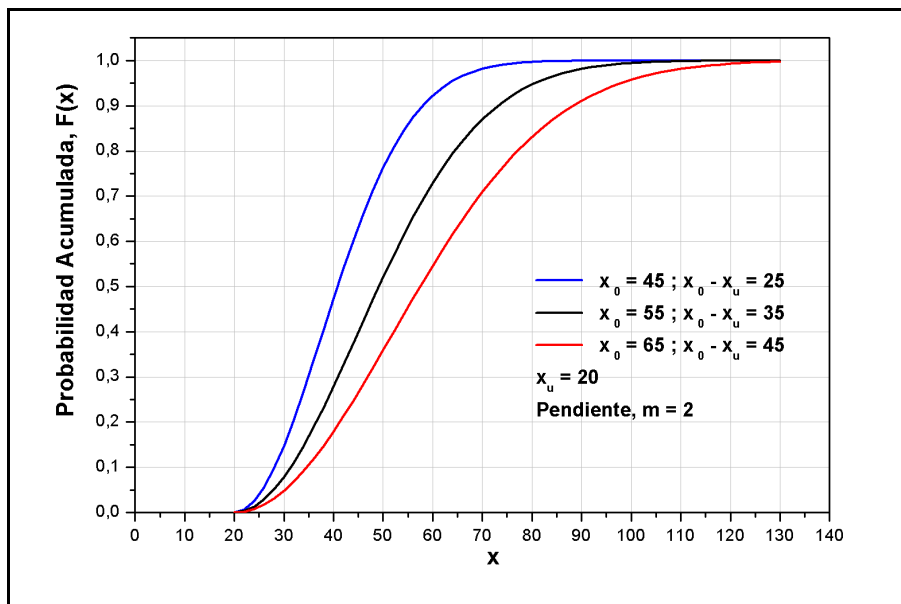


Figura 2.9 . Probabilidad acumulada 3P-W.

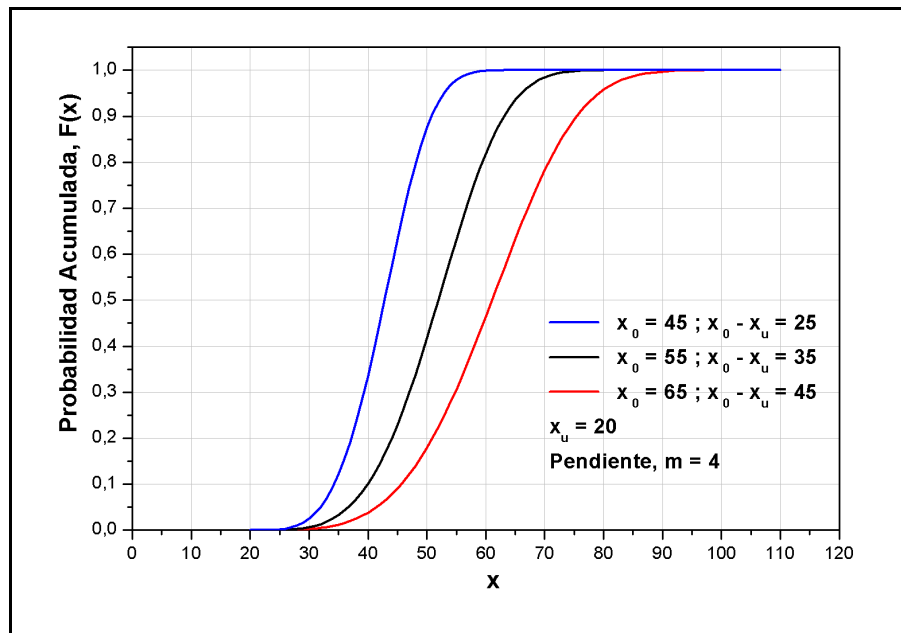


Figura 2.10 . Probabilidad acumulada 3P-W.

En las figuras 2.11 y 2.12 se muestran las funciones densidad de probabilidad para valores de la pendiente  $m = 2$  y  $m = 4$ , respectivamente, para un valor constante de “  $x_0$  ” y diferentes valores del parámetro umbral “  $x_u$  ”; sus funciones de probabilidad acumulada se muestran en las figuras 2.13 y 2.14. Se puede ver, para un valor constante en la pendiente, que al aumentar el valor del parámetro umbral y manteniendo fijo el valor del parámetro de escala, las medidas de posición se corren a valores un poco mayores, mientras que la dispersión disminuye. Los valores de las medidas de posición y de variabilidad para estas figuras, se muestran en la Tabla II.

Tabla II

Parámetros	Figuras 11 y 13			Figuras 12 y 14		
	2	2	2	4	4	4
$m$	2	2	2	4	4	4
$x_0$	55	55	55	55	55	55
$x_u$	10	20	30	10	20	30
<b>Media</b>	49.9	51.0	52.2	50.8	51.7	52.7
<b>Mediana</b>	47.5	49.1	50.8	51.1	51.9	52.8
<b>Modo</b>	41.8	44.7	47.7	51.9	52.6	53.3
<b>Desvío Estándar</b>	20.8	16.2	11.6	11.4	8.9	6.4
<b>CV</b>	0.42	0.32	0.22	0.23	0.17	0.12

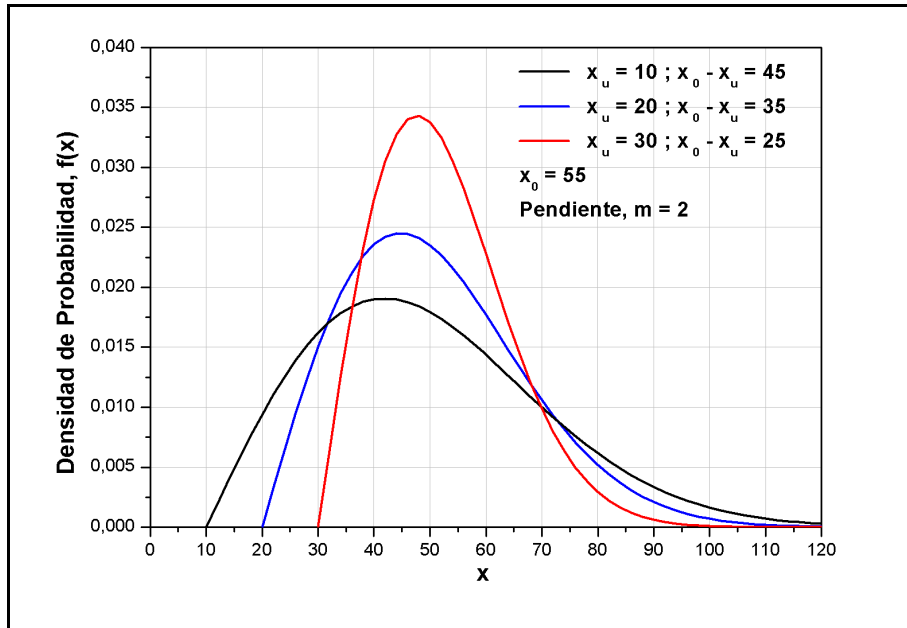


Figura 2.11. Densidad de probabilidad 3P-W.

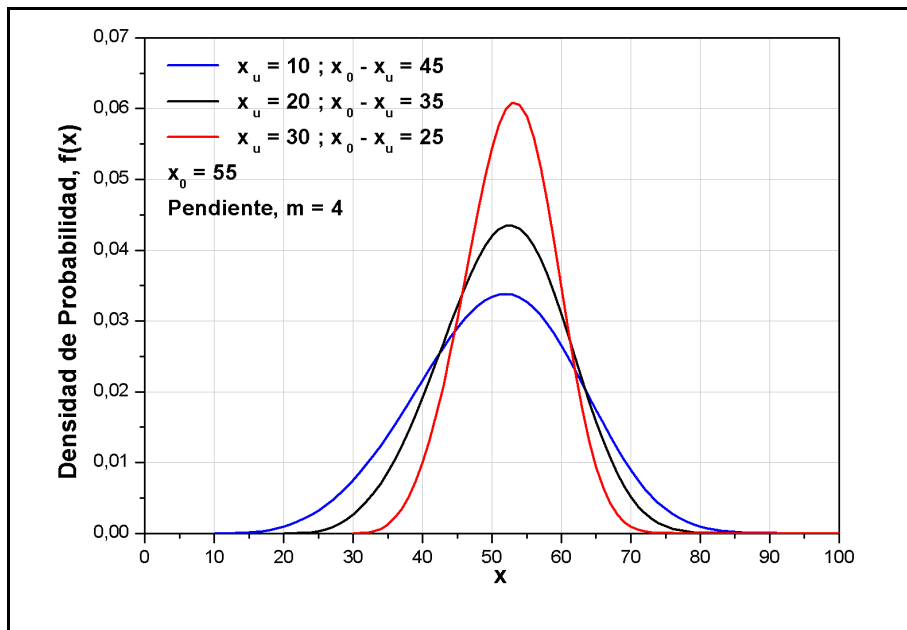


Figura 2.12 Densidad de probabilidad 3P-W.

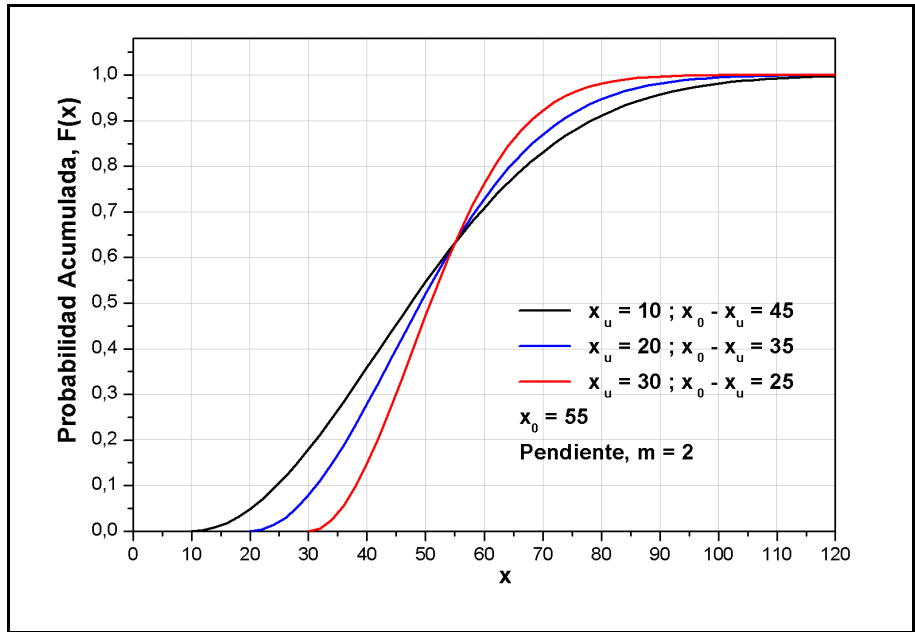


Figura 2.13 . Probabilidad acumulada 3P-W.

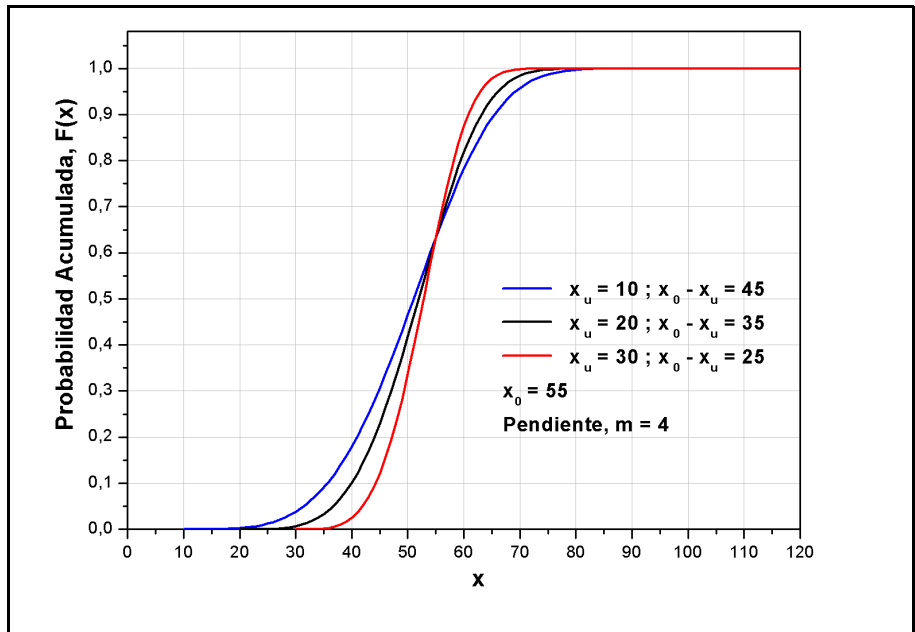


Figura 2.14 . Probabilidad acumulada 3P-W.

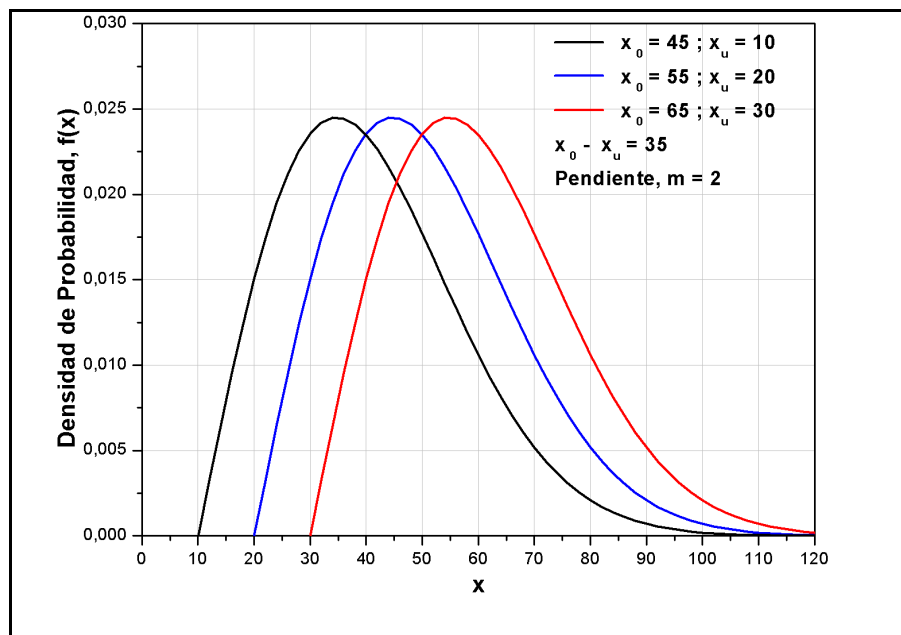
En las figuras 2.15 a 2.18 se muestra la función 3P-W para diferentes valores del parámetro umbral “ $x_u$ ” y del parámetro de escala “ $x_0$ ”; de tal forma de mantener constante el valor de la diferencia “ $x_0 - x_u$ ”. Como se ve, de esta forma se logra desplazar la función sin ningún cambio en la forma.

Al observar los valores de la Tabla III, se ve que al aumentar los valores de los parámetros de escala y umbral, y manteniendo constante la diferencia “ $x_0 - x_u$ ”, las medidas de posición toman valores mayores, y éstos aumentan en la misma proporción que aumentaron los parámetros de escala y umbral. También se puede apreciar que el desvío estándar permanece constante para cada valor de la pendiente, mientras que el coeficiente de variación, **CV**, tiene valores menores

al aumentar los parámetros. Esto se debe a que un mismo valor del desvío estándar no expresa la misma dispersión si la media aritmética tiene un valor mayor.

**Tabla III**

Parámetros	Figuras 15 y 17			Figuras 16 y 18		
	<b>m</b>	2	2	2	4	4
<b><math>x_0</math></b>	45	55	65	45	55	65
<b><math>x_u</math></b>	10	20	30	10	20	30
<b>Media</b>	41.0	51.0	61.0	41.7	51.7	61.7
<b>Mediana</b>	39.1	49.1	59.1	41.9	51.9	61.9
<b>Modo</b>	34.7	44.7	54.7	42.6	52.6	62.6
<b>Desvío Estándar</b>	16.2	16.2	16.2	8.9	8.9	8.9
<b>CV</b>	0.40	0.32	0.27	0.21	0.17	0.14



**Figura 2.15** Densidad de probabilidad 3P-W.



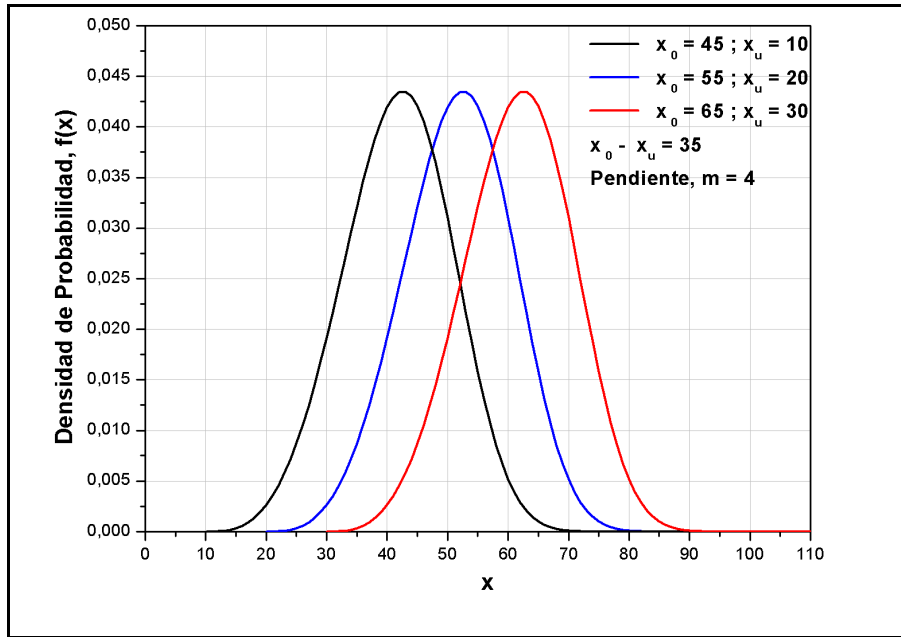


Figura 2.16 Densidad de probabilidad 3P-W.

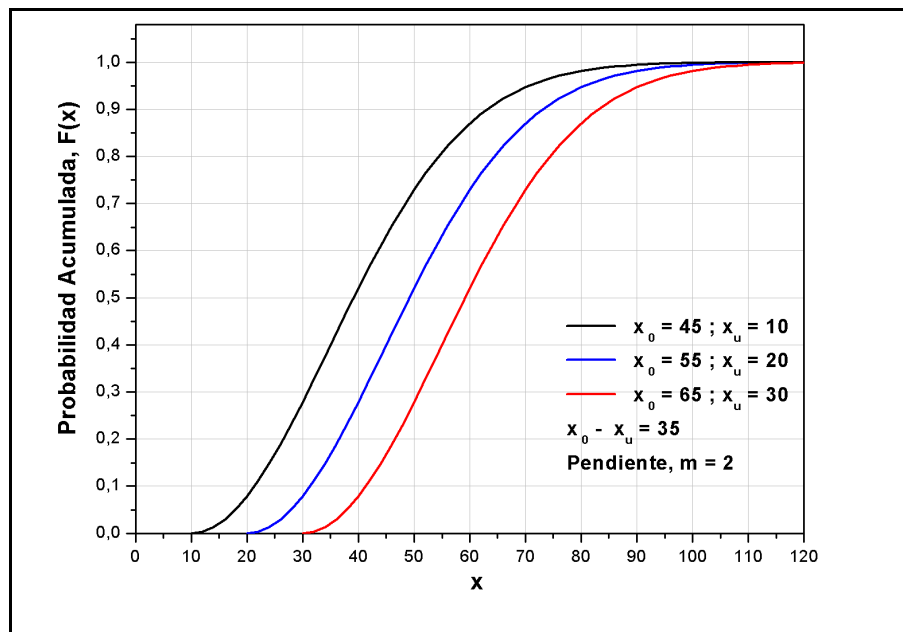


Figura 2.17 . Probabilidad acumulada 3P-W.

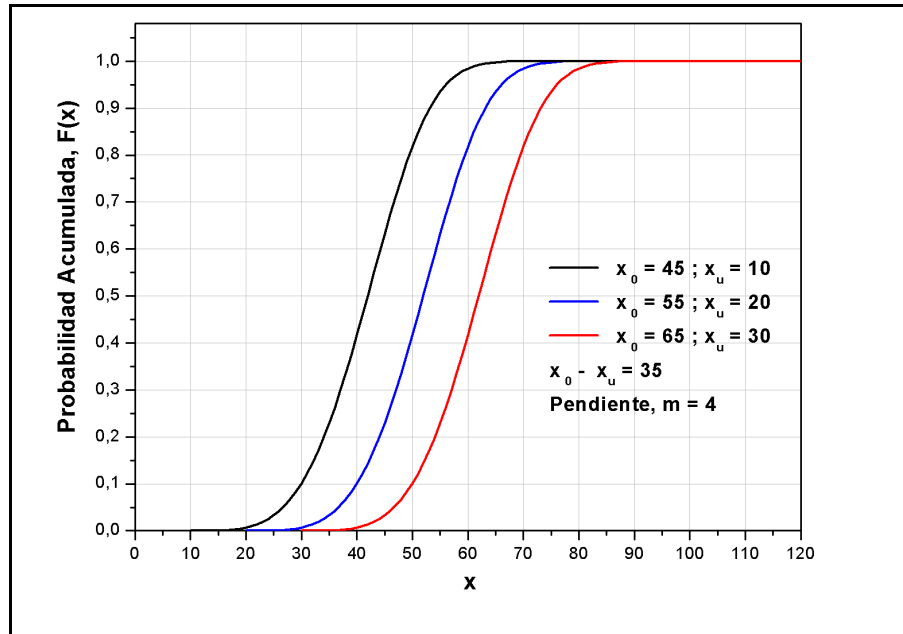


Figura 2.18 . Probabilidad acumulada 3P-W.

## 2.4. Estimación de los parámetros de Weibull a partir de datos experimentales

En general, cuando se tiene una distribución de datos experimentales, éstos están distribuidos en forma discreta dentro del recorrido de la variable. Es decir, cuando se lleva a cabo un estudio estadístico, se realiza una muestra finita de individuos dentro de una población y esta muestra, en el mejor de los casos debería representar el comportamiento de la población de la mejor manera posible. El procedimiento consiste en realizar un muestreo aleatorio de la población y a partir de esta muestra se idealiza un modelo estadístico de la distribución que puede llegar a tener la población, es decir se realiza una inferencia. Este procedimiento para el caso de la función de Weibull consiste en estimar los parámetros de la función, y entonces luego poder trabajar con un modelo matemático continuo que representaría el comportamiento de la población. Para la estimación de los parámetros de Weibull existen diversos métodos, siendo algunos de los métodos más utilizados el de máxima verosimilitud y el de regresión lineal, los que se describen a continuación.

### Método de Máxima Verosimilitud

Este es un método de estimación de parámetros que consiste en encontrar los estimadores de los parámetros de tal forma que maximicen la función de probabilidad o función verosimilitud. Para ello, es necesario conocer la distribución de la variable de la población. Para el caso en estudio sabemos que los datos se distribuyen según una 3P-W. El procedimiento consiste en obtener la función verosimilitud de la muestra [6],

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (2.17)$$

donde:

$x_1, x_2, \dots, x_n$  son valores observados en una muestra aleatoria de tamaño  $n$ .  
 $\theta$  es un parámetro desconocido a determinar.

Nótese que la ecuación (2.17) está ahora en función del parámetro  $\theta$  y entonces el valor del estimador de  $\theta$  es aquel que maximice la función verosimilitud  $L(\theta)$ .

El próximo paso es aplicar logaritmo natural a la función verosimilitud con el fin de simplificar la derivada,

$$L(\theta) = f(x_i, \theta) \quad (2.18)$$

luego se busca el máximo de la ecuación (2.18),

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.19)$$

Al resolver la ecuación (2.19) se consigue el valor de  $\theta$  que verifica la igualdad y así se obtiene el valor del estimador buscado.

### **Método de Regresión Lineal**

Suponiendo que se tiene la función de Weibull dada por,

$$P = 1 - e^{-\left[\frac{x-x_u}{x_0-x_u}\right]^m} \quad (2.20)$$

Ahora, si en la ecuación (2.20) se opera y se aplica logaritmo natural dos veces a ambos lados de la igualdad, se obtiene,

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1-P} \right] = m \ln(x - x_u) - m \ln(x_0 - x_u) \quad (2.21)$$

considerado el siguiente cambio de variables,

$$\begin{aligned} y &= \ln \ln \left[ \frac{1}{1-P} \right] \\ A &= m \\ B &= -m \ln(x_0 - x_u) \\ \xi &= \ln(x - x_u) \end{aligned} \quad (2.22)$$

y al remplazar en la ecuación (2.21), se obtiene la ecuación lineal dada en (2.23).

$$y = A\xi + B \quad (2.23)$$

Con lo cual, al representar la función de Weibull en las escalas mencionadas se obtiene una recta. Es decir, si se dispone de datos experimentales y estos se pueden describir mediante estadística de Weibull, los valores de los parámetros se pueden obtener de una regresión lineal de los datos experimentales, siempre que se utilicen las escalas adecuadas en los ejes de coordenadas. A partir de esa recta, se pueden obtener, por regresión lineal, la pendiente “ $A = m$ ” y la ordenada al origen “ $B$ ”.

Utilizando las ecuaciones de (2.22) se pueden obtener solo algunos de los parámetros de la función de Weibull, la pendiente “ $m$ ” en forma directa y el valor de la diferencia “ $x_0 - x_u$ ” dado por la ecuación (2.24).

$$x_0 - x_u = e^{-\frac{B}{A}} \quad (2.24)$$

Para tener todos los parámetros de la función de Weibull, solo faltaría determinar el valor del parámetro umbral  $x_u$ .

Para continuar con el análisis de la función de Weibull, en la figura 19 se representa la ecuación (2.21), suponiendo que todos los parámetros de Weibull son conocidos, para diferentes valores en la pendiente  $m$ , manteniendo constante los valores del parámetro de escala  $x_0$  y del parámetro umbral  $x_u$ .

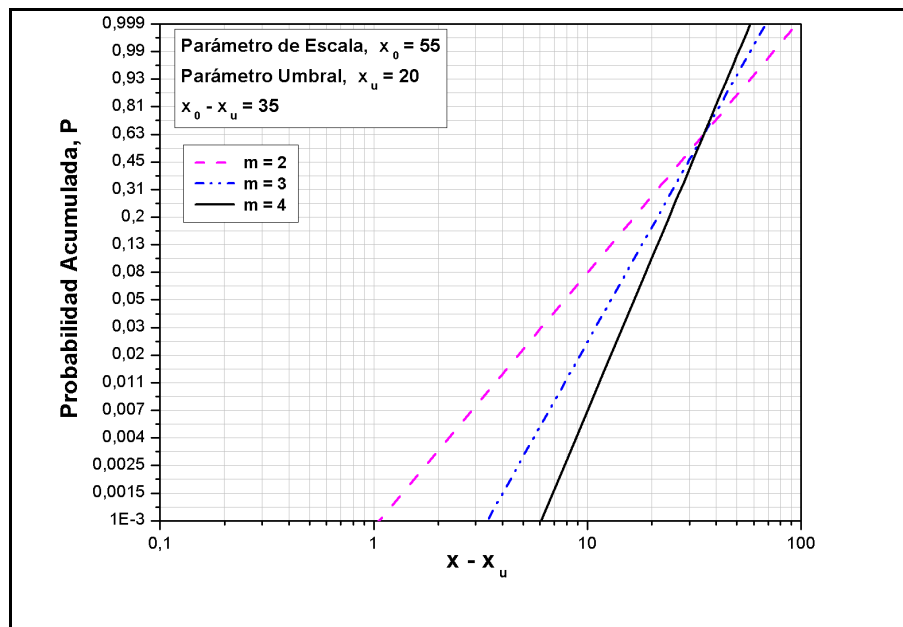


Figura 2.19. Gráfico de Weibull para diferentes valores de la pendiente.

Es oportuno aclarar que para los denominados “ **Gráficos de Weibull** ” se representan los valores de la diferencia  $x - x_u$  en el eje de las abscisas en escala logarítmica, y en el eje de las ordenadas los valores de la probabilidad acumulada,  $P$ . Se presentan los gráficos de esta forma ya que es más práctico, con fines explicativos, poder observar los valores de cada variable en sus respectivos ejes. Pero de estos gráficos no se pueden obtener en forma directa las pendientes ni las ordenadas al origen de las rectas representadas allí. Para el cálculo de las pendientes y de las ordenadas al origen de las rectas, se deben utilizar las escalas de acuerdo al cambio de variables de la ecuaciones (2.22). De esta forma la figura 2.20 estaría en las escalas correctas para realizar la regresión lineal, es decir, en un gráfico con las escalas adecuadas sería  $\ln \ln (1 / (1 - P))$  vs.  $\ln (x - x_u)$ .

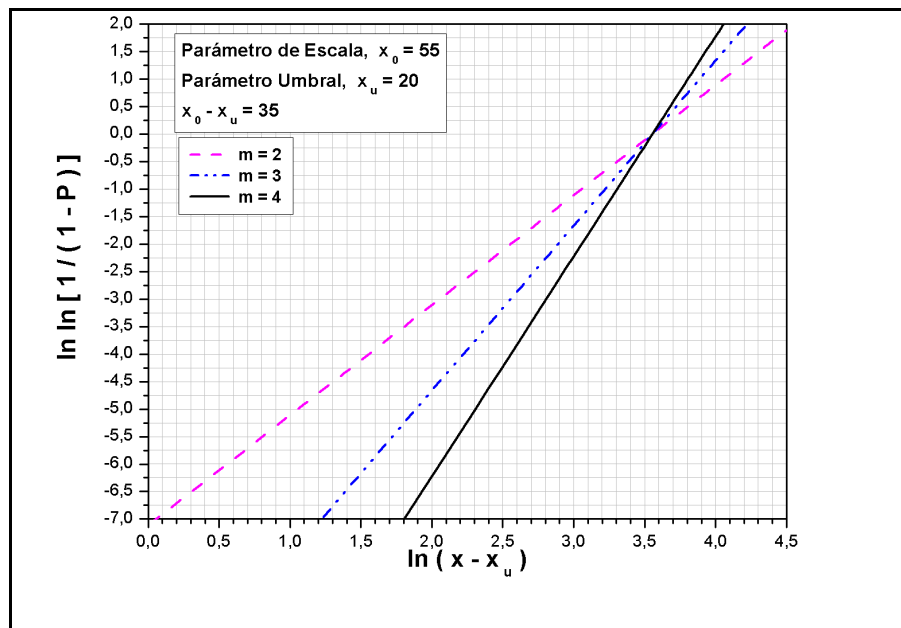


Figura 2.20. Gráfico para obtener la pendiente y la ordenada al origen.

En la figura 2.21 se muestra la función acumulada de Weibull en escala doble logarítmica, para diferentes valores del parámetro de escala  $x_0$  y manteniendo constantes los valores de la pendiente  $m$  y el umbral  $x_u$ . Se ve que a mayores valores de  $x_0$ , las rectas se corren hacia la derecha. En la figura 2.22 se muestra la  $3P - W$  para diferentes valores del parámetro umbral  $x_u$ , manteniendo constantes los valores de la pendiente  $m$  y el parámetro de escala  $x_0$ . A valores mayores del umbral las rectas se corren hacia la izquierda.

En la figura 2.23 se muestra la  $3P - W$  para diferentes valores del parámetro umbral  $x_u$  y del parámetro de escala  $x_0$ , de tal forma de mantener constante la diferencia “  $x_0 - x_u$  ”, y para un valor de  $m = 2$ . Se puede observar que todas las rectas están superpuestas.

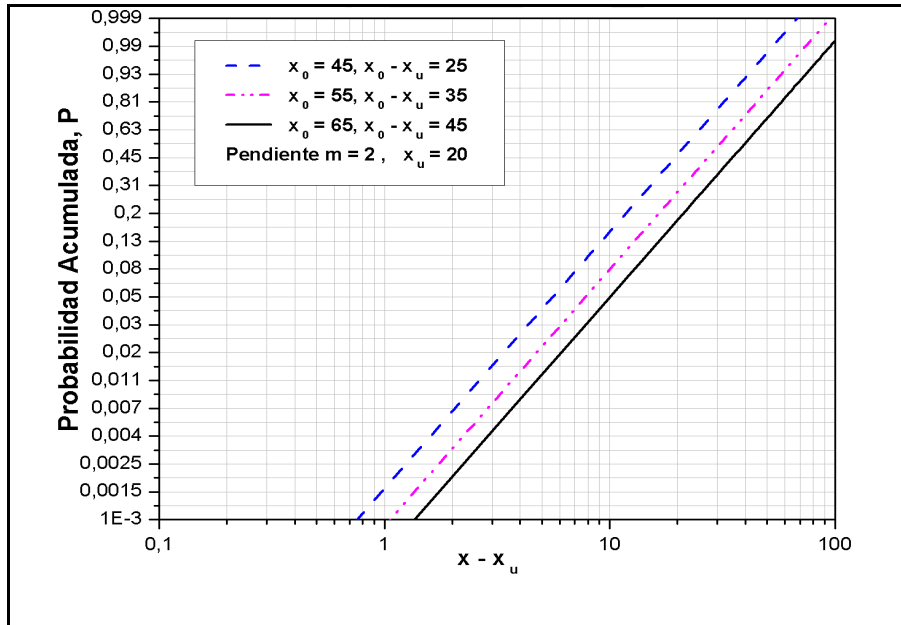


Figura 2.21. Gráfico de Weibull para diferentes valores del parámetro de escala.

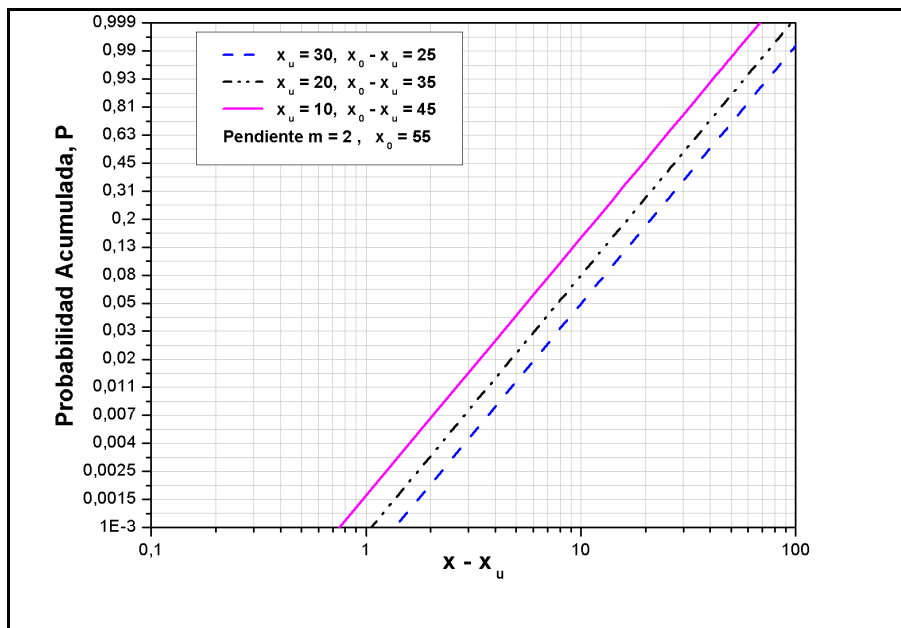


Figura 2.22 Gráfico de Weibull para diferentes valores del parámetro umbral.

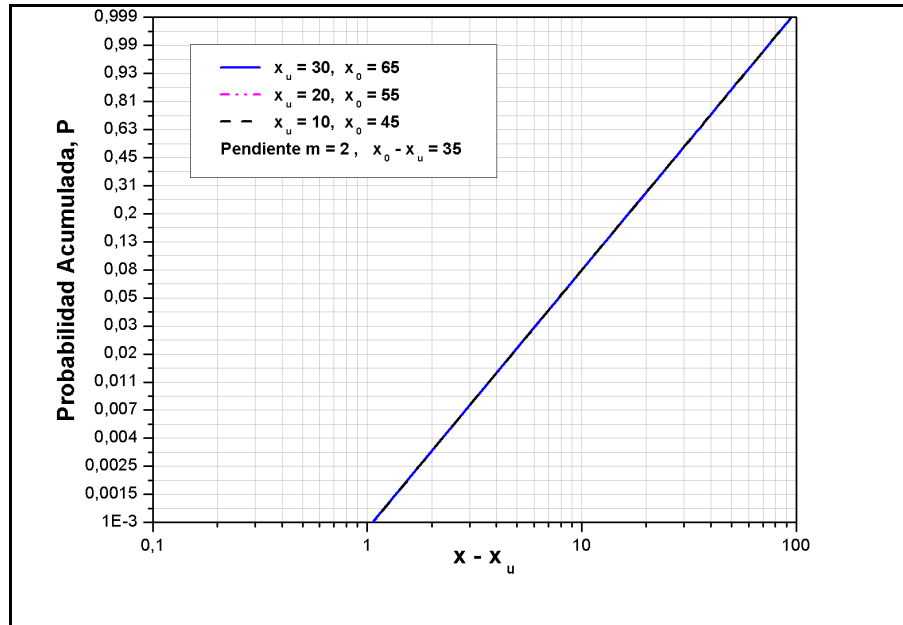


Figura 2.23. Gráfico de Weibull para diferentes valores de  $x_u$  y  $x_0$ , constante  $x_0 - x_u$ .

#### 2.4.1. Análisis del valor umbral “ $x_u$ ” en la estimación de parámetros

Recordando del punto anterior, que en general el método de regresión lineal es uno de los más utilizados para obtener los parámetros de Weibull, y que para este método, al representar la **3P-W** en escala doble logarítmica se obtienen la pendiente y la ordenada al origen de la recta, y luego con las ecuaciones de (2.22) se pueden obtener: la pendiente “ $m$ ” de Weibull en forma directa, y el valor de “ $x_0 - x_u$ ” con la ecuación (2.24). Para tener los tres parámetros de la función de Weibull solo faltaría determinar el valor del umbral “ $x_u$ ”. A continuación se explica uno de los métodos que se suele utilizar para obtener este parámetro.

Para aplicar el método de regresión lineal primero se deben disponer de datos experimentales de la variable  $x$ , que en general provienen de un muestreo aleatorio. Luego se deben tabular los datos de  $x$  del menor valor al mayor, en orden ascendente. Posteriormente se les da un número de orden  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  donde  $N$  es el número total de valores de  $x$  que se disponen para el cálculo.

Es así que, por ejemplo, para el valor menor de  $x$  en una muestra se tiene  $i = 1$ , para el siguiente valor de  $x$  se tiene  $i = 2$ , etc, hasta llegar al valor mayor de  $x$  en la muestra para el cual  $i = N$ .

Hecho esto, el siguiente paso es el cálculo -o estimación- de la probabilidad acumulada  $P(x_i)$ , para cada valor de  $x$  en la muestra. Para la estimación de la probabilidad existen varios estimadores, algunos de los más frecuentemente utilizados [4], son:

$$P(x_i) = \frac{i - 0,5}{N} \quad (2.25)$$

$$P(x_i) = \frac{i - \frac{3}{8}}{N + \frac{1}{4}} \quad (2.26)$$

$$P(x_i) = \frac{i - 0.3}{N + 0.4} \quad (2.27)$$

Luego, utilizando uno de los estimadores anteriores, se obtienen los valores de  $P(x_i)$  y se grafica,

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1 - P(x_i)} \right] \text{ vs } \ln(x_i - x_j) \quad (2.28)$$

Donde  $x_j$  es un valor arbitrario definido con anterioridad, que se utiliza en el eje de las abscisas para poder representar los datos. Posteriormente se prueban diferentes valores de  $x_j$  y se grafican los datos. De todos los valores de  $x_j$  probados, el valor del parámetro umbral “ $x_u = x_j$ ”, será aquel que dé el coeficiente de determinación,  $R^2$ , más próximo a 1. Es decir, el valor que arroje la mejor linealidad en la gráfica, como se puede ver en la figura 2.24 [6]. En dicha figura se muestran también valores para una función  $3P-W$ , en la cual se fueron cambiando los valores de  $x_j$  de forma muy exagerada para hacer notar la falta de linealidad. Para los valores que no se corresponden con el valor verdadero del parámetro umbral, se observa una falta de linealidad importante, solo para el valor del umbral la gráfica sería una recta y el coeficiente de determinación resultaría,  $R^2 = 1$ .



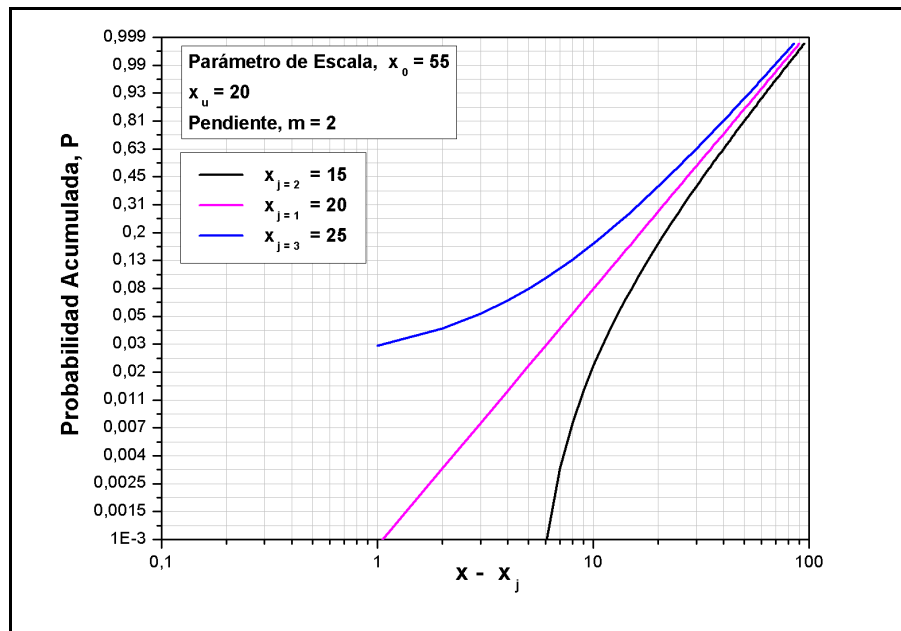


Figura 2.24 Gráfico de Weibull para distintos valores de  $x_j$ .

## 2.5. Resumen

La función de Weibull se puede encontrar en diversas aplicaciones de ingeniería. Esto se debe a su amplio espectro de formas que puede tomar, una característica que le da a la función una gran aptitud para representar distribuciones de datos experimentales de diferentes disciplinas. Con relación a sus parámetros, se puede decir que la forma de la función se la da la pendiente. Entonces la función puede pasar desde la función exponencial para una pendiente  $m = 1$ , a una distribución asimétrica a la derecha por ejemplo para  $m = 2$ , pasando por una forma muy similar a la distribución normal para valores entre  $m = 3$  a  $m = 4$ , hasta una distribución asimétrica a la izquierda para valores de  $m > 5$ . En general las funciones con mayor pendiente presentan menor dispersión que las de pendiente menores, a iguales valores de los restantes parámetros. Relacionado al parámetro umbral, se puede decir que es el valor de la variable a partir del cual para valores mayores o iguales se desarrolla la función. Es el mínimo valor que puede tomar la variable. En funciones con pendiente 2 el umbral se encuentra bien definido y claro, mientras que para funciones con pendiente 4 esto no sería así; si bien existe, no se hace tan claro a simple vista.

Otra característica que se puede observar en las funciones de densidad de probabilidad de Weibull es la pendiente o la tangente que tiene la función al inicio de su recorrido, más precisamente en el punto inicial de la función, en  $x = x_u$ , para diferentes valores de la pendiente “ $m$ ”. Se observa que para  $m = 0.5$ , la pendiente en este punto tiende a ser infinita, para  $m = 1$  la pendiente en el punto umbral es fina y negativa, para  $m = 2$  es finita y positiva, y para valores de  $m$  mayores o iguales a 3 tiene una pendiente inicial prácticamente nula.

Respecto a la influencia del parámetro umbral en el comportamiento de la función, se puede señalar que al aumentar su valor, manteniendo el resto de los parámetros constantes, la dispersión de la función, en general, disminuye.

El parámetro de escala es un punto interesante dentro de la función, su valor de probabilidad acumulada,  $F(x_0) = 0.632$ , permanece constante al cambiar los valores de la pendiente y manteniendo constante el valor del umbral. Es decir que es el punto donde se interceptan las curvas de probabilidad acumulada para diferentes valores de la pendiente, y un valor fijo del umbral y del parámetro de escala. La influencia del parámetro de escala en el comportamiento de la función, es que al aumentar su valor la dispersión de la función en general también aumenta.

Otro dato para remarcar de la influencia de los parámetros en el comportamiento de la función de Weibull, es que para diferentes valores del umbral " $x_u$ " y del parámetro de escala " $x_0$ "; de tal forma de mantener constante el valor de la diferencia " $x_0 - x_u$ ", se logra desplazar la función en el eje de las abscisas sin ningún cambio de forma.

Para la estimación de los parámetros de la función de Weibull existen diferentes métodos, en el presente capítulo se describió en profundidad uno de ellos, el método de regresión lineal.

## Apéndice I:

Originalmente la función de Weibull fue presentada de la siguiente manera [1]:

Si una variable  $\mathbf{X}$  es atribuida a un individuo de una población, la función distribución de probabilidad acumulada de  $\mathbf{X}$ , denotada  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , puede ser definida como el número de todos los individuos que tienen propiedad  $\mathbf{X} \leq \mathbf{x}$ , dividido por el número total de individuos. Esta función también da la probabilidad  $\mathbf{P}$  de escoger al azar un individuo que tiene una propiedad  $\mathbf{X}$  menor o igual que  $\mathbf{x}$ , y de este modo se tiene,

$$P(X \leq x) = F(x) \quad (2.29)$$

Una función de probabilidad acumulada puede ser escrita de la siguiente forma,

$$F(x) = 1 - e^{-\phi(x)} \quad (2.30)$$

Esto parece ser una complicación, pero la ventaja de esta transformación depende de la relación,

$$(1 - P)^n = e^{-n\phi(x)} \quad (2.31)$$

El mérito de esta fórmula se mostrará con un simple ejemplo.

Asumiendo que se tiene una cadena que contiene varios eslabones. Si se tiene la probabilidad de falla  $\mathbf{P}$  para alguna carga  $\mathbf{x}$  aplicada a un “eslabón simple”, y si se necesita encontrar la probabilidad de falla  $\mathbf{P}_n$  de una cadena que consiste de  $\mathbf{n}$  eslabones, se puede basar la deducción sobre la suposición que la cadena falló cuando lo hizo alguno de sus eslabones. Se puede decir que la cadena falló por el eslabón más débil (*weakest link*).

Asumiendo que la probabilidad de “no falla” de la cadena,  $(1 - \mathbf{P}_n)$ , es igual a la probabilidad de “no falla” simultánea de todos sus eslabones. Entonces se tiene,

$$(1 - P_n) = (1 - P)^n \quad (2.32)$$

Luego, tomando la ecuación (2.30) para un eslabón simple y reemplazando se obtiene:

$$P_n = 1 - e^{-n\phi(x)} \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) da la expresión matemática adecuada para el principio de *weakest link* en la cadena, o más generalmente, para el efecto de tamaño en la fallas de sólidos.

Ahora se tiene que especificar la función  $\phi(\mathbf{x})$ . Las condiciones necesarias que esta función tienen que satisfacer es ser una función positiva y no decreciente, y debe ser nula para valores menores a  $x_u$ , el cual no necesariamente es igual a cero.

Estas condiciones también se pueden expresar en términos de la función densidad de probabilidad  $f(\mathbf{x})$ , la cual esta dada por la ecuación (2.34),

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \phi(x) e^{-\phi(x)} \frac{d\phi}{dx} \quad (2.34)$$

y se deben cumplir las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ \int f(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (2.35)$$

La función  $\phi(\mathbf{x})$  puede tener muchas formas, pero la que propuso Weibull originalmente -que satisface las condiciones necesarias para que  $f(x)$  sea función de densidad de probabilidad- es,

$$\phi(x) = \left[ \frac{x - x_u}{x_0} \right]^m \quad (2.36)$$

entonces la función distribución de probabilidad acumulada, resulta,

$$F(x) = 1 - e^{-\left[ \frac{x - x_u}{x_0} \right]^m} \quad (2.37)$$

Donde:

- $m$  = pendiente de la función de Weibull (ó parámetro de forma).
- $x_u$  = parámetro umbral de la función de Weibull.
- $x_0$  = parámetro de escala de la función de Weibull.

El mérito de esta función de probabilidad acumulada es que su expresión matemática es simple, y una objeción que ha tenido es que esta función de probabilidad acumulada no tuvo una base teórica.

En su trabajo, Weibull aplicando esta función distribución a diferentes casos, presentó, entre otros, los siguientes ejemplos:

- Resistencia a la fluencia de un acero.
- Distribución del tamaño de unas partículas.
- Vida a la fatiga de un acero St - 37.
- Resistencia de unas fibras de algodón.
- Estatura de los hombres adultos, nacidos en Inglaterra.

## Referencias Bibliográficas

- [1] Weibull, W., “ A Statistical Distribution Function of Wide Applicability ”, Journal of Applied Mechanics, pp. 293-297, 1951.
- [2] Plait, A., “ The Weibull Distribution ”, Industrial Quality Control, pp. 17 - 26, 1962.
- [3] Montgomery, D.C. y Runger,G.C., “Probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería”, McGraw - Hill, primera edición, 1996.
- [4] Perez Ipiña, J., “Mecánica de Fractura”, Editorial Alsina, primera edición, 2004.
- [5] Landes, J. D. and McCabe, D. E., “The Effect of Section Size on the Transition Behavior of Structural Steels”, Scientific Paper de Westinghouse R&D Center, 1982.
- [6] Berejnoi, C., “ Incidencia del fenómeno Pop-in en la tenacidad a la fractura de uniones soldadas ”, Tesis Doctoral, U N de la Plata, Facultad de Ingeniería, 2001.

## Capítulo 3: Función 3P-W en valores K y J

### 3.1. Introducción

Para medir la tenacidad a la fractura de aceros ferríticos en la región de transición dúctil frágil se suelen utilizar ensayos de  $J_C$ , ya que los valores de  $K_{IC}$  para las dimensiones de probetas usadas son frecuentemente no válidos por no lograrse las condiciones de plasticidad en pequeña escala. Como las evaluaciones estructurales de mecánica de fractura se realizan con parámetros lineales elásticos, una vez obtenidos los valores de  $J_C$  se hace necesario transformar los resultados en  $J_C$  a sus valores equivalentes en términos de  $K_{Jc}$ .

Recordando del Capítulo 1, es usual utilizar la función Weibull de tres parámetros (3P-W) para describir el comportamiento de la dispersión que tienen los valores de tenacidad a la fractura en la región de transición [1].

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{x - x_{\min}}{x_0 - x_{\min}}\right)^{b_x}} \quad (3.1)$$

Donde:

$P$  = probabilidad acumulada

$x$  = variable medida (valores de tenacidad a la fractura en  $J$  o en  $K$  para el presente caso de estudio)

$b_x$  = es el parámetro de forma de la función de Weibull (o también llamada pendiente de Weibull).

$x_0$  = es el parámetro de escala de la función de Weibull.

$x_{\min}$  = es el parámetro umbral de la función de Weibull.

Diferentes variantes basadas en estadística de Weibull han sido propuestas en la bibliografía, las cuales incluyen 2P-W y 3P-W, tanto en términos de  $J$  como también en términos de  $K$  [2-6]. Han sido propuestas pendientes teóricas de la función de Weibull con un valor **4** cuando se trabaja con valores en  $K$  y una pendiente con un valor **2** cuando se trabaja con datos en  $J$  [9,11]. Además, también fue propuesto un valor umbral fijo de  $K_{\min} = 20 \text{ MPa m}^{1/2}$  [2,3]. McCabe avaló la pendiente 4 propuesta por Wallin pero no el valor del parámetro umbral fijo e igual a  $20 \text{ MPa m}^{1/2}$ , [7].

Por otro lado, Anderson, Stienstra y Dodds dicen que si se utiliza 3P-W estaría bien considerar el valor de la pendiente  $b = 4$  cuando se trabaja con valores de  $K$ , [8]. Heerens, Zerbst y Schwalde, [9], utilizaron valores de  $J$ , y para la estimación de los parámetros de la función 3P-W emplean una pendiente de Weibull igual a 2. En trabajos posteriores, McCabe, Zerbst y Heerens utilizaron también la pendiente 4 trabajando con  $K$ , [10]. En otro trabajo de Landes, Zerbst y Heerens para la determinación de un valor límite inferior (*lower bound*) ingenieril [11], utilizaron 2P-W con una pendiente 2 al trabajar con valores de  $J$ .

Del Capítulo 2 se sabe que el valor de la pendiente de Weibull define la forma que tiene la

función densidad de probabilidad. Al trabajar con valores de **K**, aceptando lo expresado en el párrafo anterior, se tendrá una función con pendiente igual a 4 y con una forma simétrica que se aproxima a la de la función normal [12]. En cambio, si se trabaja con valores de **J**, se tendrá una función asimétrica a la derecha por ser la pendiente de Weibull igual a 2, ver figuras 3.1 y 3.2 para el caso de una 2P-W. Es por todo ello que la pendiente de la función de Weibull tiene una importancia significativa en el comportamiento de la función.

La nomenclatura utilizada para definir la función de Weibull de tres parámetros (3P - W) en términos de **K**, es la siguiente:

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{b_K}} \quad (3.2)$$

donde:

- P** = es la probabilidad de falla de un individuo seleccionado arbitrariamente de una población.
- K** = expresaría la tenacidad a la fractura [MPa m<sup>1/2</sup>] del material.
- K<sub>min</sub>** = parámetro umbral de la función de Weibull.
- b<sub>K</sub>** = pendiente de la función de Weibull en valores **K**.
- K<sub>0</sub>** = parámetro de escala de la función de Weibull (**K<sub>0</sub>** = **K** cuando P = 0,632).

Por lo general, cuando se realizan ensayos de tenacidad a la fractura, los resultados se obtienen en términos de **J** y son necesarios conocer los valores equivalentes en términos de **K**. Para la transformación de los valores es común que se utilice la siguiente ecuación, para una condición de deformación plana [6]:

$$K_x = \sqrt{\frac{E J_c}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.3)$$

Como ya fue explicado, cuando se trabaja en la zona de transición y con la función de Weibull, se infieren los parámetros de la función a partir de datos experimentales. Sin embargo, para obtener la descripción de dichos valores experimentales se tienen dos posibilidades:

- ▶ Hacer los ensayos de **J<sub>c</sub>**, luego transformar estos valores en valores de **K<sub>J<sub>c</sub></sub>**, y a partir de estos últimos valores calcular los parámetros de 3P-W en términos de **K**.
- ▶ Otra alternativa es: obtener los valores de **J<sub>c</sub>** de los ensayos, con ellos calcular los parámetros de 3P-W en términos de **J** y entonces, posteriormente, transformar los parámetros de la función de Weibull obtenidos a sus equivalentes en términos de **K**.

Estas dos alternativas de obtención de la distribución 3P-W en términos de **K** presentan algunas diferencias y, sin embargo, los parámetros obtenidos de una u otra forma deberían ser comparables o equivalentes. En el presente Capítulo se mostrará que si los datos de tenacidad a la fractura en valores de **J** se distribuyen según una 3P-W, los valores equivalentes en términos de **K** no se distribuyen exactamente según una 3P-W, pero sin embargo, con una 3P-W sería posible lograr una buena aproximación a estos datos. También se demostrará que para el caso de



una 2P-W las pendientes de las expresiones en términos de **K** y **J** están exactamente relacionadas por un factor 2, pero esta relación no se cumple para una función 3P-W, pudiendo ser muy importantes los errores que se cometen si se utiliza éste factor.

### 3.2. Análisis de las transformaciones

Antes de comenzar con el análisis teórico de la transformación de los valores cuando se utiliza estadística de Weibull, primero se discutirá sobre el significado de cada uno de los parámetros en dicha función.

#### Los parámetros de la función de Weibull

Para el caso del parámetro umbral, ya sea en valores de **J** o en valores de **K**, es un valor a partir del cual se producirían las fallas por fractura, o dicho en otras palabras, sería el valor mínimo donde se define la función 3P-W. Por lo tanto, el parámetro umbral sería el valor de mínima tenacidad dentro de una población, ya sea que se estén analizando valores de **J** o de **K**. Así, suponiendo que se tiene un valor de  $J_{\min}$  a partir del cual comienzan las fallas por fractura, ese mismo valor transformado a su equivalente en **K** debería ser el  $K_{\min}$ . Por lo mencionado, y considerando los valores teóricos, se debería cumplir:

$$K_{\min} = K_{J_{\min}} = \sqrt{\frac{E J_{\min}}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.4)$$

Es decir, que los valores del parámetro umbral deberían ser equivalentes ya sea que se esté trabajando con valores de **J** o con valores de **K**.

Por otro lado, para el caso del parámetro de escala, ya sea  $J_0$  o  $K_0$ , estos valores deberían también ser equivalentes. Para justificar lo expresado, se puede decir que por definición el parámetro de escala  $J_0$  es el valor de la variable al cual le corresponde una probabilidad acumulada de 0.632. Al transformar este parámetro en su equivalente  $K_{J_0}$ , su valor de probabilidad acumulada no cambia y sigue siendo 0.632. Entonces se debe cumplir que,

$$K_0 = K_{J_0} = \sqrt{\frac{E J_0}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.5)$$

Entonces, para la función 3P-W solo faltaría determinar la equivalencia para el parámetro de forma -o pendiente de Weibull- **b**, y se tendría la equivalencia entre las funciones de Weibull en **J** y en **K**. Sin embargo esto no es tan sencillo, tal como se mostrará a continuación.

### 3.2.1. Transformación de los valores J en K

Aceptando la hipótesis que los valores de **J** se distribuyen según una 3P-W y suponiendo que se dispone de una muestra suficientemente grande que representa aceptablemente a la población. Entonces, con algún método de estimación de parámetros, es posible obtener los valores de los tres parámetros de la función de Weibull en valores de **J** y por lo tanto la ecuación (3.6) queda perfectamente determinada.

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J}} \quad (3.6)$$

Ahora transformando los parámetros de **J** en sus equivalentes en valores **K** con la ecuación (3.3) resulta:

$$K_{J_0}^2 = \frac{E J_0}{(1 - \nu^2)} \quad y \quad K_{J_{\min}}^2 = \frac{E J_{\min}}{(1 - \nu^2)} \quad (3.7)$$

Al reemplazar en (3.6) se obtiene la siguiente ecuación,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K^2 - K_{J_{\min}}^2}{K_{J_0}^2 - K_{J_{\min}}^2}\right)^{b_J}} = 1 - e^{-\left(\frac{(K - K_{J_{\min}})(K + K_{J_{\min}})}{(K_{J_0} - K_{J_{\min}})(K_{J_0} + K_{J_{\min}})}\right)^{b_J}} \quad (3.8)$$

Como se observa, la ecuación (3.8) no se corresponde con una función de 3P-W en términos de **K**, la cual debería ser escrita como en la ecuación (3.9).

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{b_K}} \quad (3.9)$$

Comparando las ecuaciones (3.8) y (3.9), se puede ver que,

$$\left(\frac{K^2 - K_{J_{\min}}^2}{K_{J_0}^2 - K_{J_{\min}}^2}\right)^{b_J} = \left(\frac{(K - K_{J_{\min}})(K + K_{J_{\min}})}{(K_{J_0} - K_{J_{\min}})(K_{J_0} + K_{J_{\min}})}\right)^{b_J} \neq \left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{b_K} \quad (3.10)$$

Se puede decir que: si los datos de tenacidad a la fractura en valores de **J** se distribuyen según una función 3P-W, los datos equivalentes en valores de **K** no lo hacen según una 3P-W, sino que se distribuyen según una función como la representada en la ecuación (3.8).

### 3.2.2. Transformación de los valores $\mathbf{K}$ en $\mathbf{J}$

De igual forma que en la demostración anterior; si ahora se acepta que se dispone de una población en valores de  $\mathbf{K}$  y ésta se distribuye según una 3P-W, es decir, se disponen de suficientes valores de  $\mathbf{K}$  para poder determinar los parámetros de la 3P-W de la ecuación (3.11).

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{b_K}} \quad (3.11)$$

Ahora se quiere obtener la expresión equivalente en  $\mathbf{J}$ , entonces transformando los valores de  $\mathbf{K}$  en término de  $\mathbf{J}$ , como,

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1 - \nu^2)}} \quad y \quad K_{\min} = \sqrt{\frac{E J_{\min}}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.12)$$

Reemplazando en (3.11) se obtiene la siguiente ecuación,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_{\min}}}{\sqrt{J_0} - \sqrt{J_{\min}}}\right)^{b_K}} \quad (3.13)$$

Como se observa, la ecuación (3.13) no se corresponde con la función de 3P-W en términos de  $\mathbf{J}$ , la que debería tener la forma,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J}} \quad (3.14)$$

Comparando las ecuaciones (3.13) y (3.14), se puede ver que,

$$\left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_{\min}}}{\sqrt{J_0} - \sqrt{J_{\min}}}\right)^{b_K} \neq \left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J} \quad (3.15)$$

Se puede concluir que: si los datos de tenacidad a la fractura en valores de  $\mathbf{K}$  se distribuyen según una función 3P-W, los datos equivalentes en valores de  $\mathbf{J}$  no lo hacen según una 3P-W, sino que se distribuye según una función como la expresada en la ecuación (3.13).

### 3.3. Un caso particular: la Función 2P-W

Una situación particular se da cuando se trabaja con una 2P-W. Con esta función es posible encontrar una equivalencia matemática para la 2P-W en valores de  $\mathbf{J}$  con su equivalente en términos de  $\mathbf{K}$ . Como ya fuera expresado por Anderson et. al. [13] existe una equivalencia matemática para la 2P-W en valores de  $\mathbf{J}$  con la 2P-W expresada en términos de  $\mathbf{K}$  y es posible demostrar la equivalencia encontrada en la bibliografía  $\mathbf{b}_K = 2\mathbf{b}_J$  cuando se trabaja con 2P-W. Se puede escribir la función de Weibull de dos parámetros en términos de  $\mathbf{J}$  como,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J}{J_0}\right)^{b_J}} \quad (3.16)$$

Si se transforman los valores de  $\mathbf{J}$  en  $\mathbf{K}$  con la siguiente ecuación,

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.17)$$

se obtiene,

$$P = 1 - e^{-\left(\left(\frac{K}{K_0}\right)^2\right)^{b_J}} \quad (3.18)$$

La función de 2P-W en términos de  $\mathbf{K}$  se puede escribir como,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K}{K_0}\right)^{b_K}} \quad (3.19)$$

Comparando las ecuaciones (3.18) y (3.19) se obtiene,

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^{2b_J} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{b_K} \quad (3.20)$$

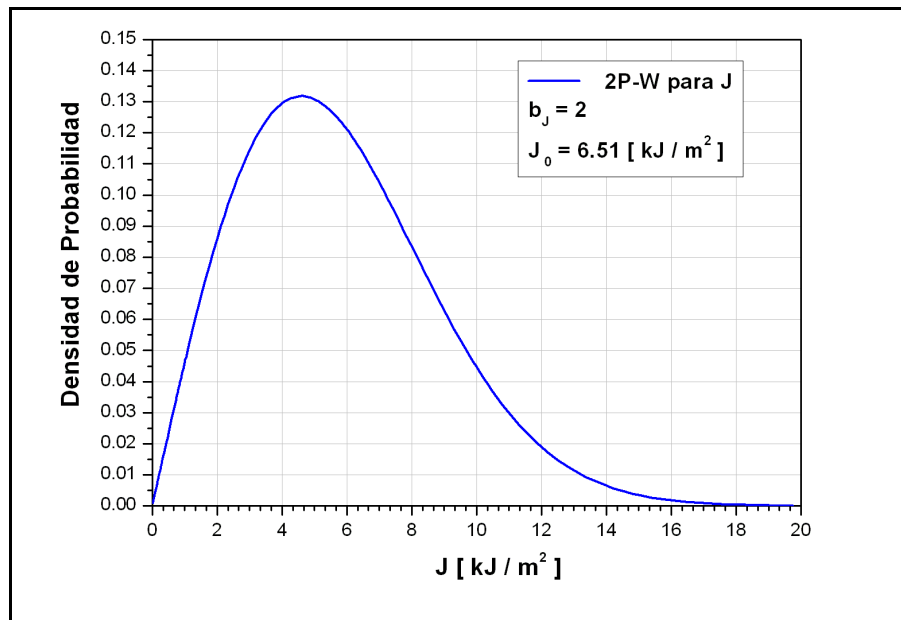
De la ecuación (3.20) se puede obtener la equivalencia entre las pendientes para la transformación mencionada, la cual resulta,

$$b_K = 2b_J \quad (3.21)$$

para el caso del parámetro de escala, la equivalencia es por la transformación de los valores,

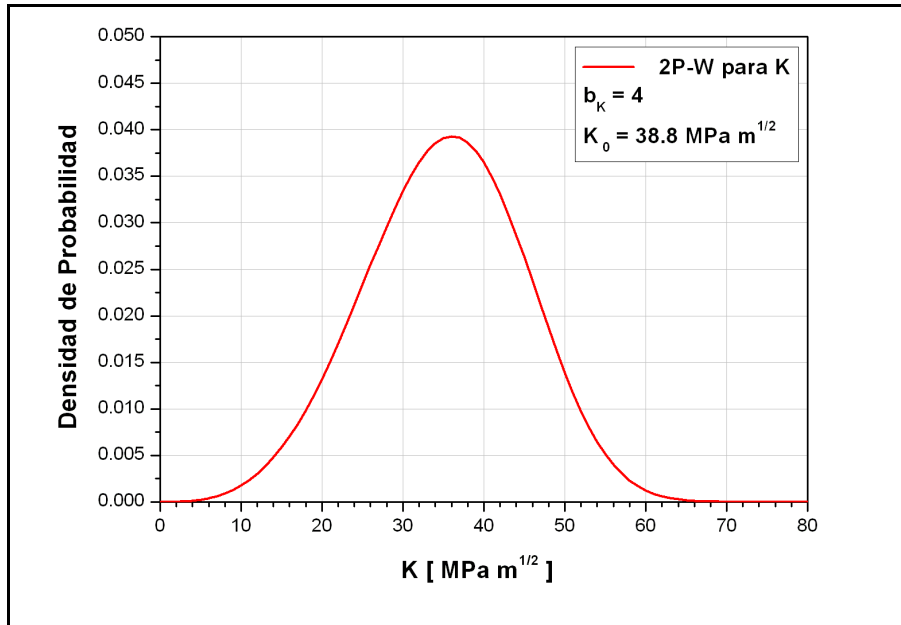
$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1-\nu^2)}} \quad (3.22)$$

Como se ve en estas ecuaciones, se cumple matemáticamente que la pendiente de Weibull para valores de **K** es el doble que para valores de **J** (4 y 2 respectivamente según los valores encontrados en la bibliografía). Esto es válido solo cuando se trabaja con 2P-W. Se puede ver gráficamente, con un ejemplo numérico, qué sucede con los valores de **J**. Suponiendo que se tienen los valores experimentales de tenacidad a la fractura perfectamente distribuidos como se muestra en la figura 3.1, con los dos parámetros de la función conocidos. Entonces, al realizar la transformación de los valores de **J** en valores de **K** -como puede observarse en las figuras 3.1 y 3.2- hay un cambio en la forma de la función densidad de probabilidad, causado por un cambio en la pendiente de Weibull que se originó por la transformación de los valores de tenacidad al pasar de **J** a **K**.



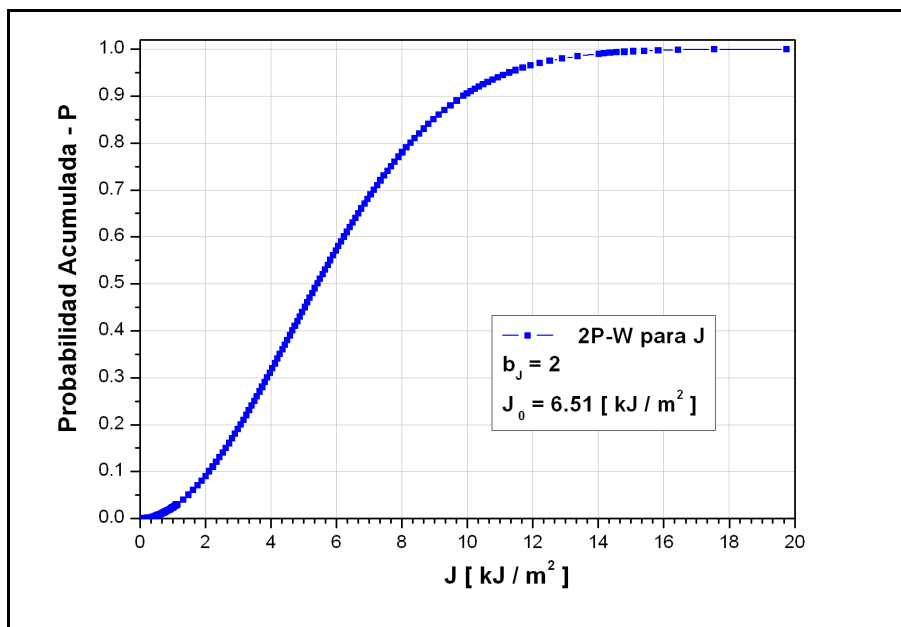
**Figura 3.1.** Función densidad de probabilidad 2P-W en términos de **J**.

Sin embargo, este cambio en la pendiente no influye en el valor de la probabilidad acumulada. Es decir, para un dado valor de **J** que tiene una probabilidad acumulada **P<sub>1</sub>**, luego de transformar ese valor de **J** en **K**, sigue manteniendo su valor de probabilidad **P<sub>1</sub>**.



**Figura 3.2.** Función densidad de probabilidad 2P-W en términos de **K**.

Este cambio en la pendiente de la función al transformar los datos tampoco influye en el recorrido de la variable. Por ejemplo, el valor máximo considerado en este ejemplo en términos de **J** fue de  $16 \text{ kJ/m}^2$ , es decir, para cualquier individuo con un valor de tenacidad a la fractura mayor o igual a este valor, tiene un 99,9 % de probabilidad de fallar por fractura. Su valor transformado en **K** es igual a  $60,8 \text{ MPa m}^{1/2}$ , que también, para cualquier individuo con un valor de tenacidad a la fractura mayor o igual a ese valor en **K** tiene un 99,9 % de probabilidad de fallar por fractura, manteniéndose la equivalencia en una y otra variable.



**Figura 3.3.** Función probabilidad acumulada 2P-W en términos **J**.

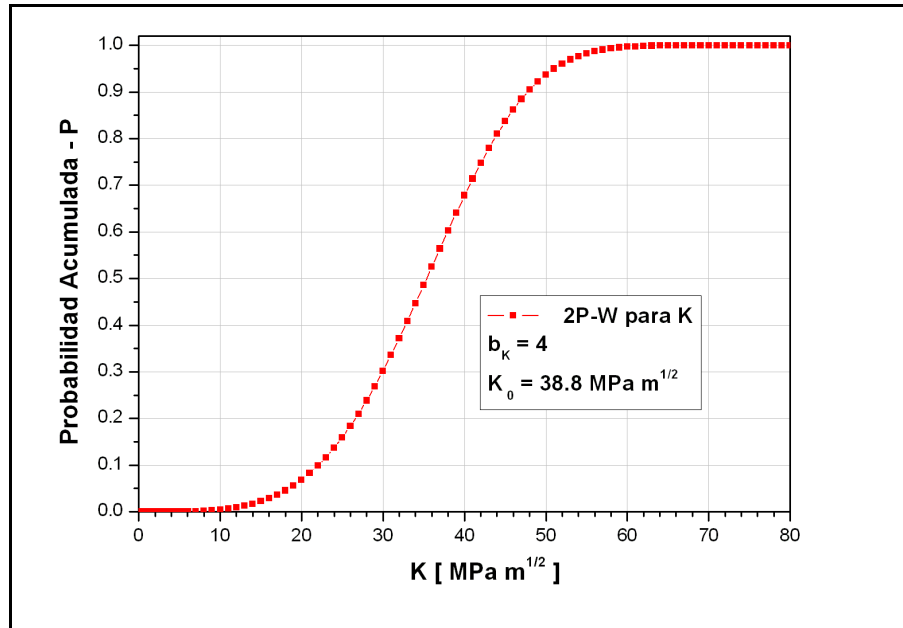


Figura 3.4 .Función probabilidad acumulada 2P-W en términos de **K**.

Entonces, cuando se trabaja con una 2P-W, es decir, cuando el valor del parámetro umbral es nulo, son equivalentes cualquiera de las siguientes alternativas:

- a) Transformar los valores de **J** en valores de **K** y luego con estos estimar los dos parámetros de la función de Weibull.
- b) Estimar los dos parámetros de la función con los valores de **J**, y luego transformar dichos parámetros en sus equivalentes en términos de **K** por medio de las ecuaciones (3.23):

$$b_K = 2b_J$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1-\nu^2)}} \tag{3.23}$$

### 3.4. Aproximación con una 3P-W a valores transformados

Retomando el análisis para una 3P-W, a continuación se muestra qué sucede cuando se transforman valores de **J** a **K** y viceversa. Como ayuda se hará uso de diferentes ejemplos numéricos.

#### 3.4.1. Ejemplos para la transformación desde **J** a **K**

Suponiendo que se dispone de una muestra suficientemente grande de tenacidad a la fractura en valores de **J**, de tal forma que se asegura la adecuada descripción de la población. Y

suponiendo también que estos datos se distribuyen según una 3P-W, figuras 3.5 y 3.6. Para obtener los parámetros de la 3P-W se realiza la regresión de la figura 3.7, como es de esperar los datos coinciden perfectamente sobre la recta,  $R^2 = 1$ . Y de esta forma los tres parámetros de la función de Weibull son conocidos. Es decir, la siguiente función está perfectamente determinada.

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J}} \quad (3.24)$$

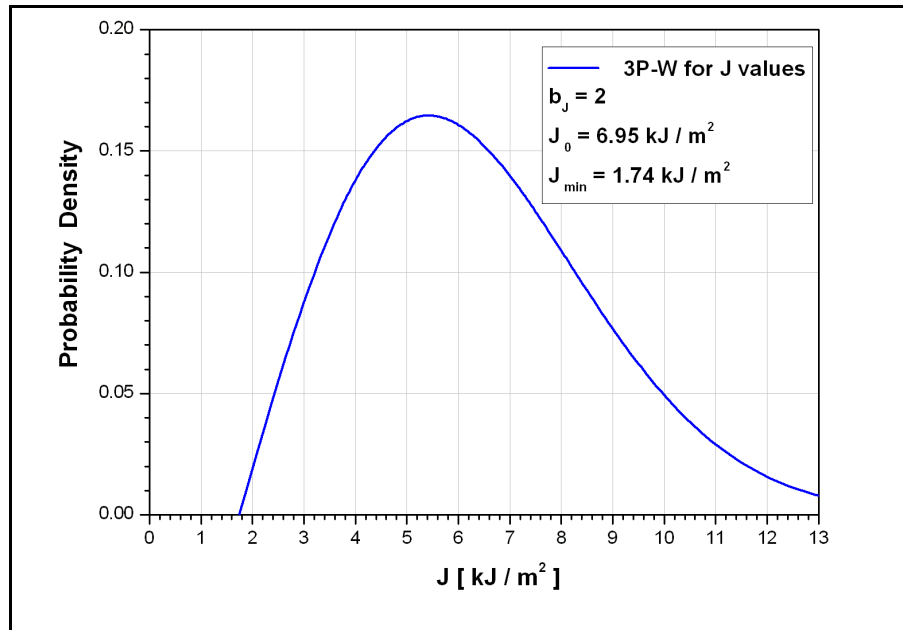


Figura 3.5 .Función densidad de probabilidad 3P-W.

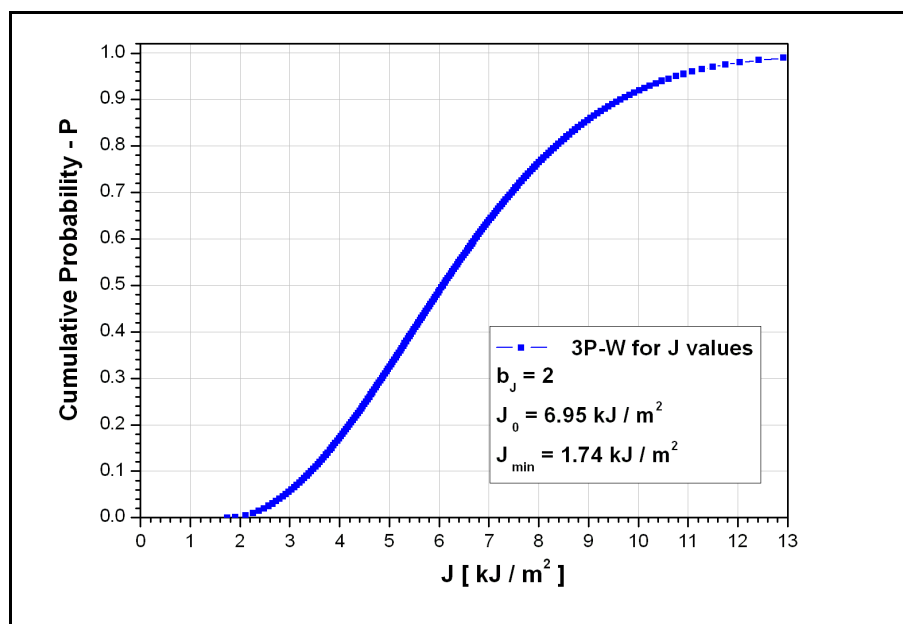


Figura 3.6 .Función densidad de probabilidad 3P-W.



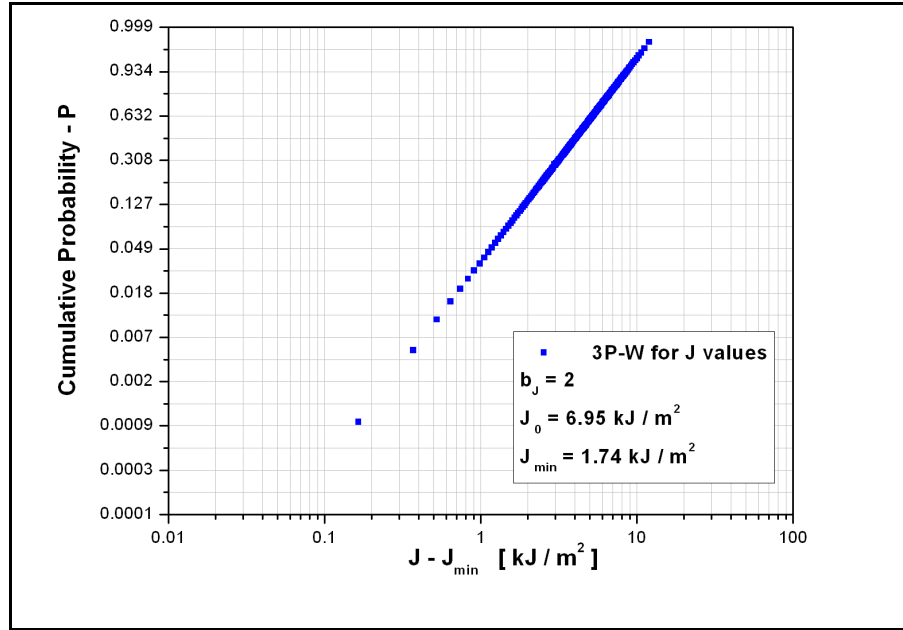


Figura 3.7. Gráfico de Weibull para 3P-W.

Para generar estos datos de  $\mathbf{J}$  el procedimiento utilizado fue el siguiente: primero se tomaron 200 valores de probabilidades acumuladas,  $\mathbf{P}_i$ , entre 0.001 y 0.995; igualmente espaciados. Luego, se prefijaron los valores de los parámetros de Weibull, de forma tal que pueden corresponder típicamente a un acero ferrítico en la zona de transición dúctil frágil, para este caso los valores prefijados fueron:  $\mathbf{b} = 2$ ,  $\mathbf{J}_0 = 6.95 \text{ kJ/m}^2$  y  $\mathbf{J}_{\min} = 1.74 \text{ kJ/m}^2$ . Posteriormente, con la ecuación (3.25) se obtuvieron 200 valores de  $\mathbf{J}_i$  cada uno asociado a un valor de  $\mathbf{P}_i$ .

$$J_i = \left\{ \left[ -\ln(1 - P_i) \right]^{\frac{1}{b_J}} \right\} (J_0 - J_{\min}) + J_{\min} \quad (3.25)$$

Si estos datos de  $\mathbf{J}$  son transformados en valores de  $\mathbf{K}$ , se obtienen los resultados mostrados en la figura 3.8 en puntos rojos. Es oportuno aclarar que los datos utilizados de  $\mathbf{K}_0$  y  $\mathbf{K}_{\min}$  provienen de la transformación de  $\mathbf{J}_0$  y  $\mathbf{J}_{\min}$  respectivamente.

En la figura 3.8 también se muestra una aproximación a los valores de  $\mathbf{K}$  con una 3P-W (línea llena). Como se puede observar, y tal cual fue demostrado más arriba, no se describe exactamente el comportamiento de los datos con la función 3P-W de la ecuación (3.11).

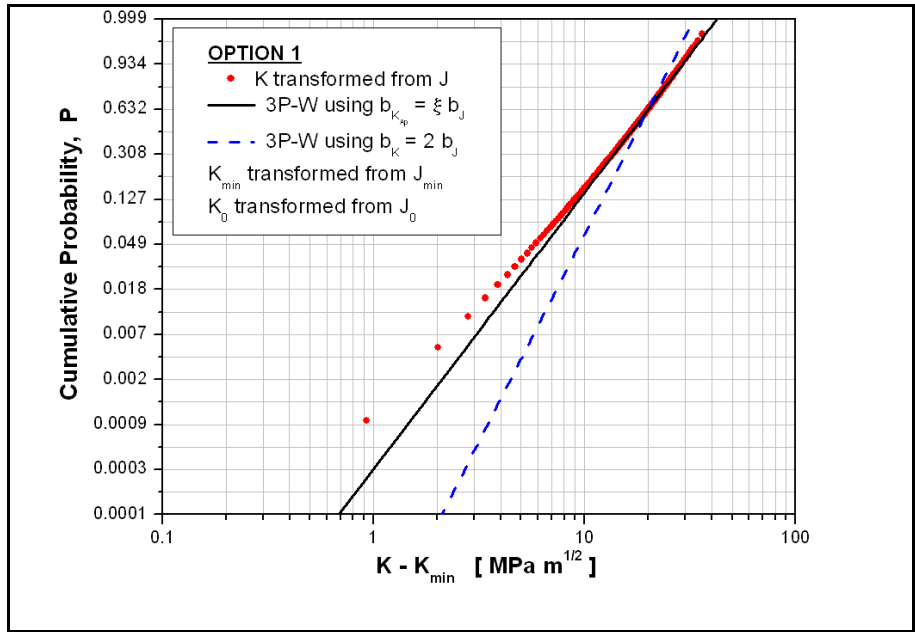


Figura 3.8. Gráfico de Weibull para 3P-W.

En la Figura 3.8 se muestra también la 3P-W transformada a partir de la conversión de la pendiente  $b_K = 2 b_J$  (línea punteada). Como se ve, esa transformación no da buenos resultados.

Repitiendo el procedimiento anterior para diferentes valores de los parámetros, en la figura 3.9 se muestra la representación de los gráficos de Weibull para diferentes valores de parámetro de escala  $K_0$ . En la figura 3.10, la representación de los gráficos de Weibull para diferentes valores de parámetro umbral  $K_{min}$ . Y en la figura 3.11, se ve la representación de los gráficos de Weibull para diferentes valores del parámetro de forma o pendiente de Weibull.

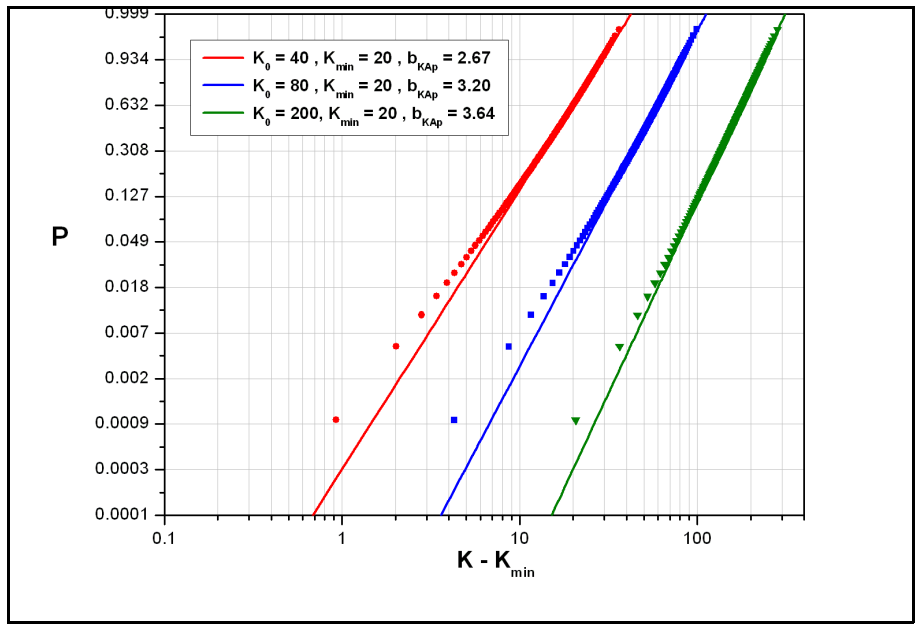


Figura 3.9. Gráfico de Weibull para diferentes  $K_0$ .

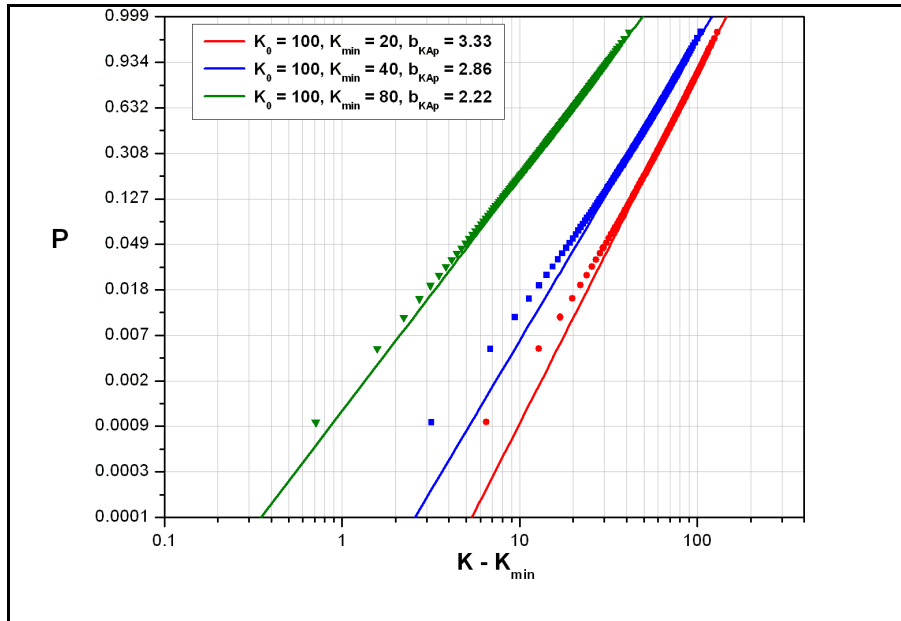


Figura 3.10 . Gráfico de Weibull para diferentes  $K_{\min}$ .

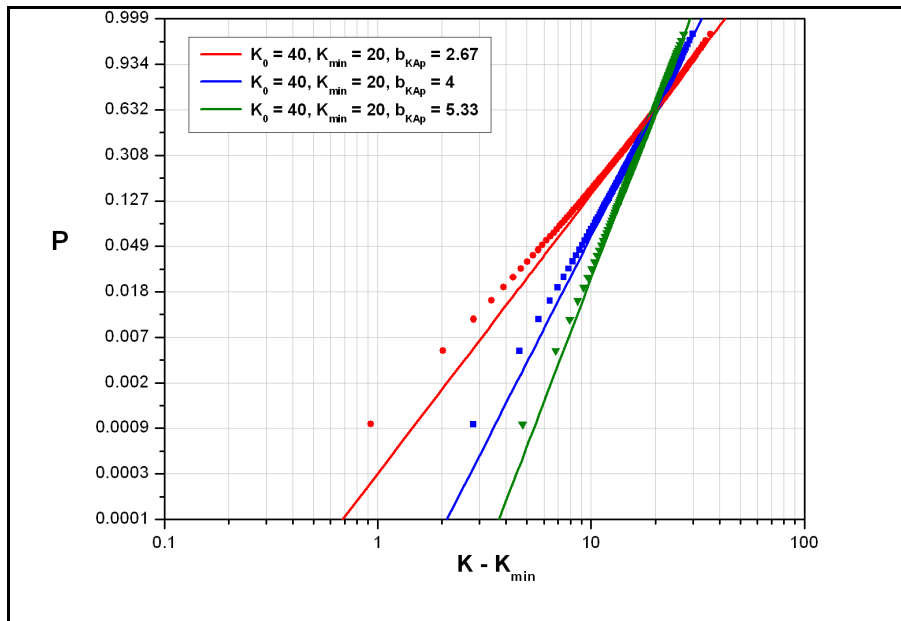


Figura 3.11 . Gráfico de Weibull para diferentes  $b_{KAp}$ .

### 3.4.2. Aproximación con una 3P-W a los valores K

Como se mostro en la figura 3.8, y luego en las figuras 3.9 a 3.11, es posible lograr una buena aproximación con una 3P-W. Seguidamente, se analiza cómo se puede obtener esta aproximación a partir de los parámetros en **J**.

En las figuras anteriores, al variar los diferentes parámetros se puede ver que en la mayoría de los casos existe un punto en los valores transformados para el cual la pendiente en ese punto se aproxima a la pendiente de la función 3P-W, línea punteada. Este punto se podría considerar que permanece constante para ciertos valores de los parámetros, ver figura 3.12. En esta figura

se puede inferir que la 3P-W aproxima muy bien a los valores  $\mathbf{K}$  al menos para un cierto rango de probabilidades.

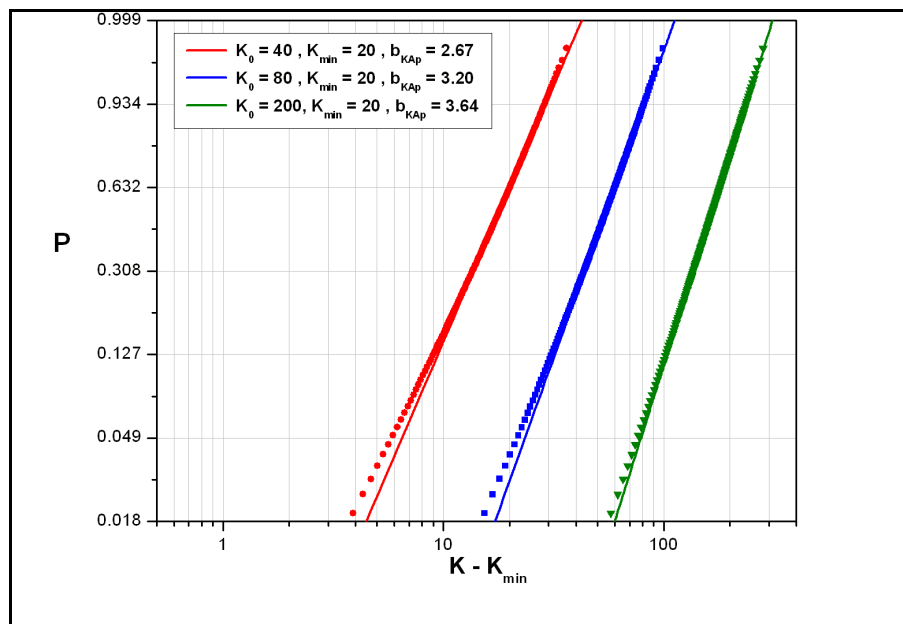


Figura 3.12 . Gráfico de Weibull para diferentes  $K_0$ .

Para los parámetros considerados en el presente estudio, el valor de probabilidad acumulada para el cual la tangente a los valores transformados se aproximan a la pendiente de la 3P-W, se puede considerar que es,

$$P_i = 0.632 \quad (3.26)$$

Éste es un valor particular de la 3P-W que corresponde al parámetro de escala.

Pasando estos valores a sus equivalentes en escala logarítmica, resulta,

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1 - P_i} \right] = 0 \quad (3.27)$$

Luego, para este valor de probabilidad acumulada se puede calcular el valor de  $\mathbf{K}_i$  que le corresponde, entonces despejando de la ecuación (3.11) el valor de  $\mathbf{K}_i$  resulta como es de esperar,

$$K_i = K_0 \quad (3.28)$$

Retomando la ecuación (3.8), operando y aplicando logaritmo natural dos veces para obtener una ecuación lineal, se obtiene la siguiente expresión,

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1 - P} \right] = b_j \ln \left[ K^2 - K_{\min}^2 \right] - b_j \ln \left[ K_0^2 - K_{\min}^2 \right] \quad (3.29)$$

considerado el siguiente cambio de variables,

$$\begin{aligned}
 y &= \ln \ln \left[ \frac{1}{1-P} \right] \\
 A &= m \\
 B &= -m \ln ( K_0^2 - K_{\min}^2 ) \\
 x &= \ln ( K^2 - K_{\min}^2 )
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Para obtener el valor de la pendiente en el punto mencionado, se deriva la función(3.29), teniendo en cuenta el cambio de variable (3.30); se consigue aproximar el valor del parámetro de forma de la función 3P-W (pendiente de Weibull) con la pendiente en el punto considerado.

$$b_{K_{Aprox}} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dK} \frac{dK}{dx}
 \tag{3.31}$$

Resolviendo se obtiene:

$$b_{K_{Aprox}} = \frac{dy}{dx} = \frac{2b_J K_i}{K_i + K_{\min}}
 \tag{3.32}$$

Recordando que se va a considerar la aproximación para el valor de probabilidad del parámetro de escala, reemplazando (3.28) en (3.32), se obtiene la pendiente en el punto de probabilidad acumulada 0.632, para aproximar el parámetro de forma de la función 3P-W,

$$b_{K_{Aprox}} = 2b_J \frac{K_0}{K_0 + K_{\min}}
 \tag{3.33}$$

para simplificar la ecuación se puede considerar,

$$b_{K_{Aprox}} = b_J \xi
 \tag{3.34}$$

donde,

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}}
 \tag{3.35}$$

luego, como condiciones límites de la función , se tiene,

$$\text{Si } K_{\min} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 2 \quad \Rightarrow \quad b_{K_{\text{Aprox}}} = 2b_J \quad (3.36)$$

$$\text{Si } K_{\min} = K_0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 1 \quad \Rightarrow \quad b_{K_{\text{Aprox}}} = b_J$$

Es decir, la función  $\xi$  puede tomar cualquier valor entre 1 y 2 dependiendo de los valores de  $K_{\min}$  y de  $K_0$ , los cuales son transformados desde  $J_{\min}$  y de  $J_0$  respectivamente.

En la figura 3.13 se muestran algunos valores que puede tomar la función  $\xi$  para diferentes valores de los parámetros de escala y umbral.

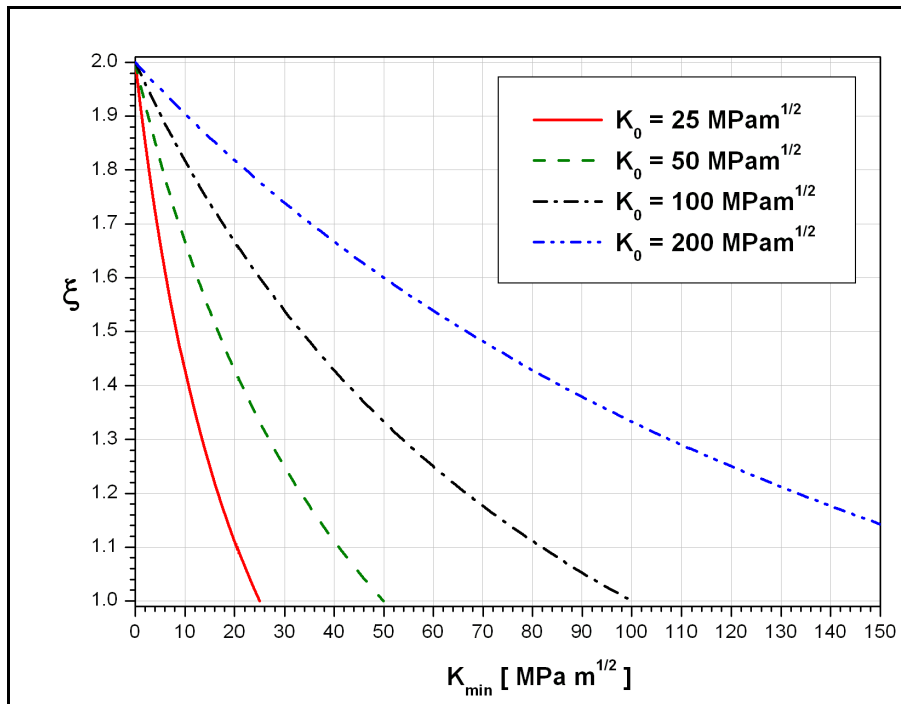


Figura 3.13. Gráfico de  $\xi$  para diferentes valores de  $K_0$  y  $K_{\min}$ .

A continuación se dan dos ejemplos numéricos para mostrar el resultado obtenido al trabajar con la propuesta del presente capítulo. Además, se compara con la propuesta encontrada en la bibliografía  $b_K = 2 b_J$ .

En la siguiente tabla se detallan los valores de los parámetros utilizados en la 3P-W en términos de  $J$ , y los valores obtenidos al transformar estos parámetros a valores  $K$ , por medio de las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.34) y (3.35).

$J_0$ [kJ/m <sup>2</sup> ]	$K_0$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$J_{\min}$ [kJ/m <sup>2</sup> ]	$K_{\min}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$b_J$		$b_{K_{Ap}} = b_J$
6.95	40	1.74	20	2	1.33	2.66
173.3	200	1.74	20	2	1.82	3.64

\* Los valores fueron transformados con  $E = 210$  GPa y  $\nu = 0,3$ .

Como se puede observar en las figuras 3.14 y 3.15, la aproximación obtenida con la transformación de la pendiente como se propone en este capítulo, presenta muy buenos resultados. Lo contrario ocurre con la propuesta encontrada en la bibliografía.

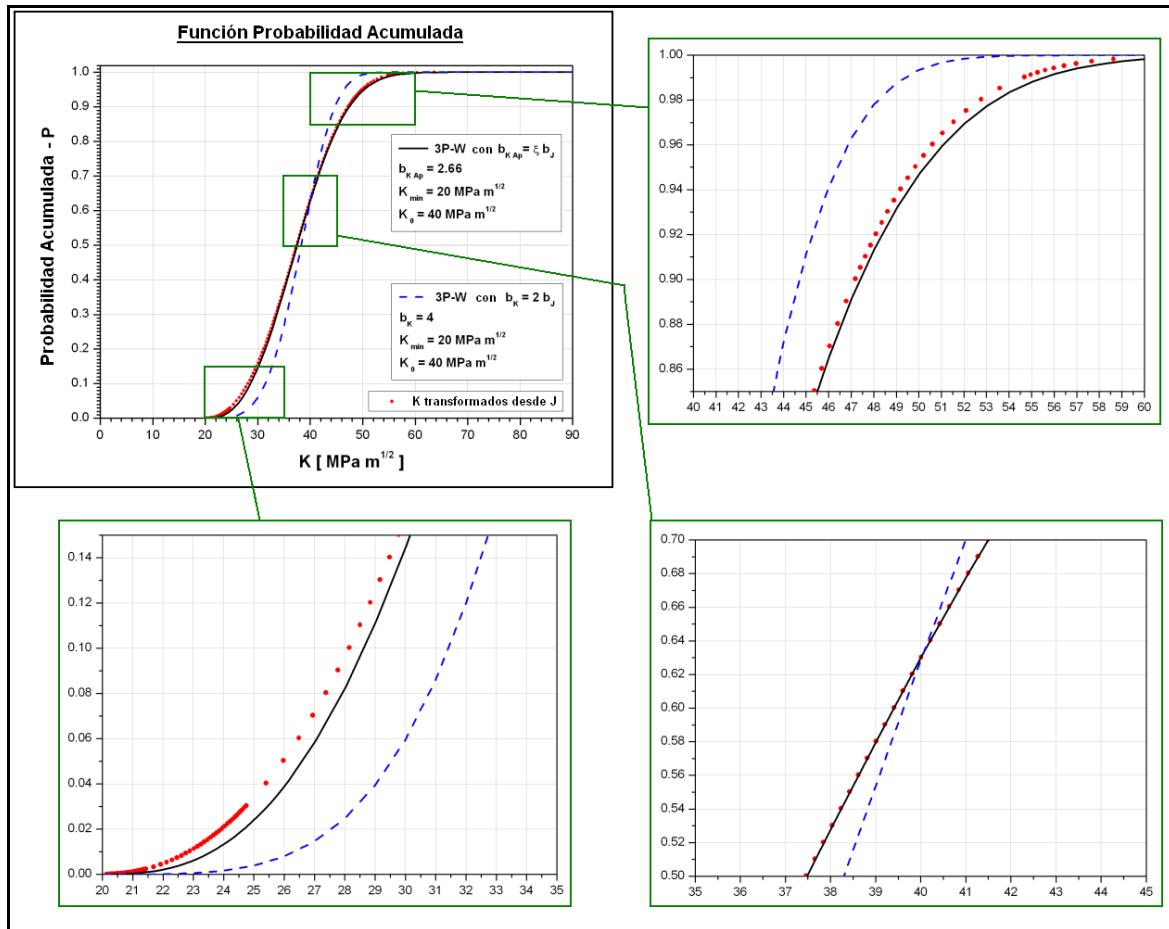


Figura 3.14. Comparación de funciones 3P-W.

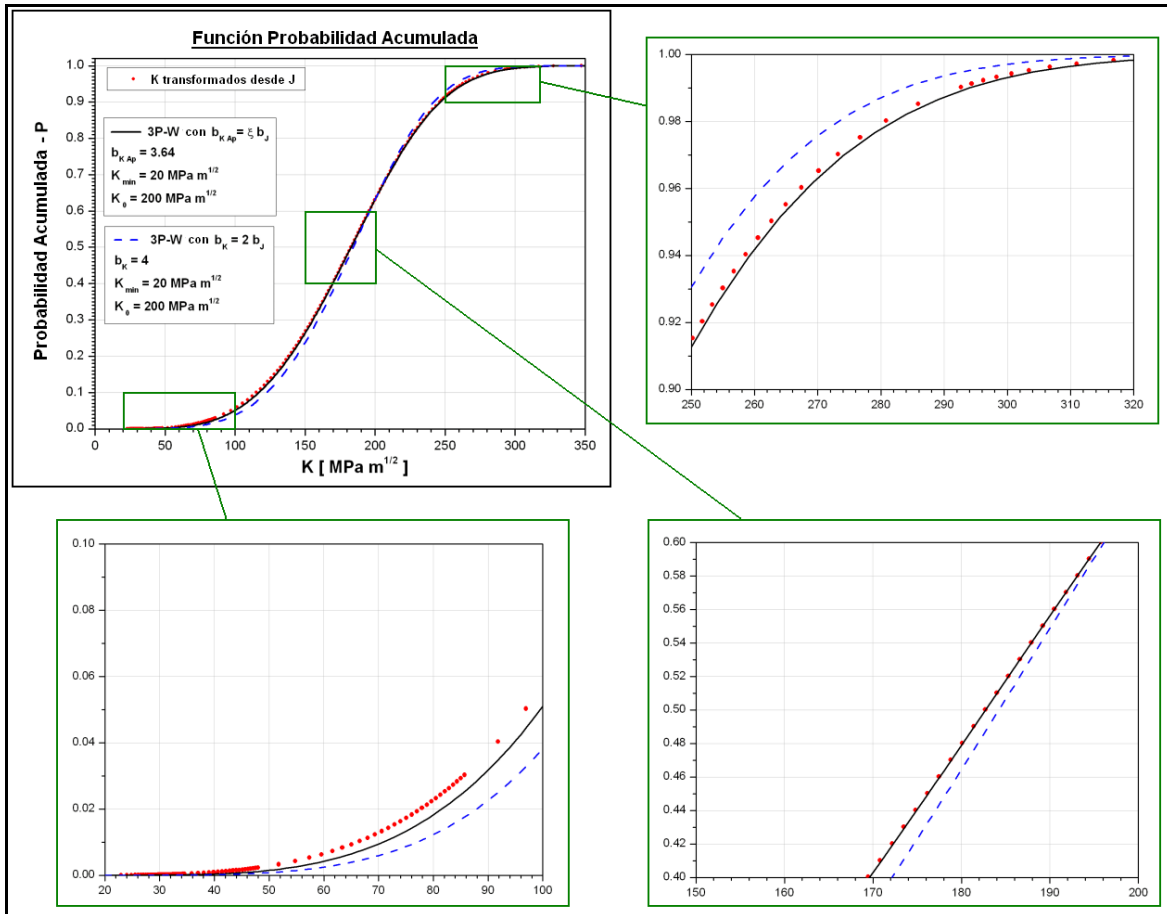


Figura 3.15. Comparación de funciones 3P-W.

### 3.4.3. Aproximación con una 3P-W a los valores J

Suponiendo que se dispone de una muestra suficientemente grande de datos de tenacidad a la fractura expresados en términos de  $\mathbf{K}$ , de tal forma que se asegura una adecuada descripción de la población. Suponiendo también que estos datos se distribuyen según una 3P-W y se obtuvieron todos los parámetros de dicha función. Ahora se quiere obtener la función 3P-W pero en valores de  $\mathbf{J}$ .

Razonando de forma análoga al punto anterior, es posible aproximar con una 3P-W a los datos  $\mathbf{J}$ , los cuales han sido transformados desde valores de  $\mathbf{K}$ .

Aproximando la 3P-W en el valor de probabilidad de 0,632. Transformando este valor a su equivalente en logaritmo, resulta,

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1 - F_i} \right] = 0 \quad (3.37)$$

Para este valor de probabilidad acumulada se puede obtener matemáticamente el valor de  $\mathbf{J}_i$  que le corresponde,  $\mathbf{J}_0$ .



Retomando la ecuación (3.13), operando y aplicando logaritmo natural dos veces, se obtiene la siguiente expresión,

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1-P} \right] = b_K \ln \left[ \sqrt{J} - \sqrt{J_{\min}} \right] - b_K \ln \left[ \sqrt{J_0} - \sqrt{J_{\min}} \right] \quad (3.38)$$

Para obtener el valor de la pendiente en el punto mencionado, se deriva la función de (3.38), de forma análoga al punto anterior, y teniendo en cuenta el cambio de variable de (3.39);

$$\begin{aligned} y &= \ln \ln \left[ \frac{1}{1-P} \right] \\ A &= m \\ B &= -m \ln(\sqrt{J_0} - \sqrt{J_{\min}}) \\ x &= \ln(\sqrt{J} - \sqrt{J_{\min}}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

luego,

$$b_{J_{Aprox}} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dJ} \frac{dJ}{dx} \quad (3.40)$$

resolviendo se obtiene:

$$b_{J_{Aprox}} = \frac{dy}{dx} = \frac{b_K}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{J_{\min}}{J_i}} \right) \quad (3.41)$$

Reemplazando  $J_0$ , se obtiene la pendiente en el punto de probabilidad acumulada 0.632, para aproximar el parámetro de forma de la función 3P-W,

$$b_{J_{Aprox}} = \frac{b_K}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{J_{\min}}{J_0}} \right) \quad (3.42)$$

para simplificar la ecuación anterior se puede considerar,

$$b_{J_{Aprox}} = \psi b_K \quad (3.43)$$

donde,

$$\psi = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{J_{\min}}{J_0}} \right) \quad (3.44)$$

Luego, las condiciones límites de la función resultan,

$$\text{Si } J_{\min} = 0 \Rightarrow \psi = \frac{1}{2} \Rightarrow b_{J_{\text{aprox}}} = \frac{b_K}{2} \quad (3.45)$$

$$\text{Si } J_{\min} = J_0 \Rightarrow \psi = 1 \Rightarrow b_{J_{\text{aprox}}} = b_K$$

Por lo tanto, la función puede tomar diferentes valores entre  $\frac{1}{2}$  y 1 dependiendo de los valores de  $J_0$  y de  $J_{\min}$ . En la figura 3.16 se muestra la función en función de diferentes valores que pueden tomar los parámetros de escala y umbral.

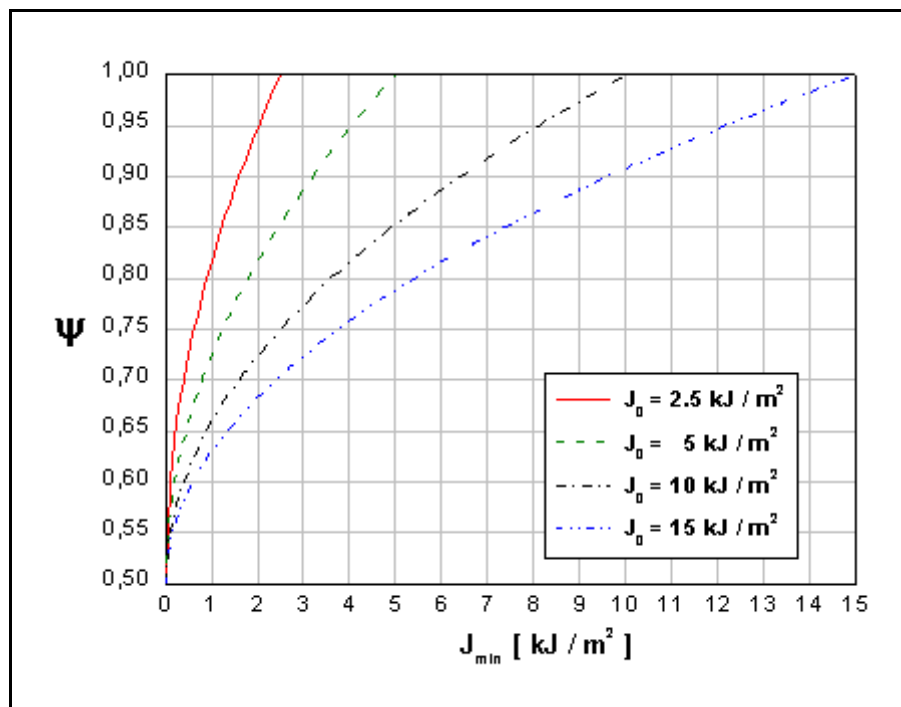


Figura 3.16 . Gráfico de  $\psi$  para diferentes valores de  $J_0$  y  $J_{\min}$ .

### 3.4.4. Relación entre las funciones de transformación y

Recordando que la función de transformación para la pendiente de la 3P-W para pasar de valores de  $J$  a  $K$  era,

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}} \quad (3.46)$$

la cual se puede también escribir como,

$$\frac{1}{\xi} = \frac{K_0 + K_{\min}}{2 K_0} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{K_{\min}}{K_0} \right) \quad (3.47)$$

recordando que se cumple que,

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1 - \nu^2)}} \quad K_{\min} = \sqrt{\frac{E J_{\min}}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.48)$$

Si se reemplaza (3.48) en (3.47) se obtiene,

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{J_{\min}}{J_0}} \right) = \psi \quad (3.49)$$

Reemplazando la (3.49) en la ecuación (3.43) se obtiene,

$$b_{J_{Aprox}} = \frac{b_K}{\xi} \quad (3.50)$$

Donde,

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{J_{\min}}{J_0}} \right) \quad (3.51)$$

o

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}} \quad (3.52)$$

Con lo cual, se logra demostrar que la función de transformación para la pendiente cuando se quiere pasar de una 3P-W en valores **J** a valores **K** es la inversa que para pasar una 3P-W en valores **K** a valores **J**.

### 3.5. Resumen

#### 3.5.1. Transformación de 3P-W en J a una 3P-W en K

Si se tienen valores de **J** distribuidos según una 3P-W, y por lo tanto están perfectamente determinados sus tres parámetros,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J}} \quad (3.53)$$

Los valores **J** transformados en sus equivalentes en término de **K**, podrían ser aproximados con una 3P-W dada por:

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{\xi b_J}} \quad (3.54)$$

donde:

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1 - \nu^2)}} \quad K_{\min} = \sqrt{\frac{E J_{\min}}{(1 - \nu^2)}} \quad (3.55)$$

y

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}} \quad (3.56)$$

#### 3.5.2. Transformación de 3P-W en K a una 3P-W en J

De forma análoga, si se tienen valores de **K** distribuidos según una 3P-W, y por lo tanto los tres parámetros que describen la distribución están bien determinados,

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{b_K}} \quad (3.57)$$

Sería posible aproximar los valores **K** transformados en sus equivalentes en término de **J**, con una 3P-W, dada por:

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{\frac{b_K}{\xi}}} \quad (3.58)$$

Donde:

$$J_0 = \frac{(1 - \nu^2) K_0^2}{E} \quad y \quad J_{\min} = \frac{(1 - \nu^2) K_{\min}^2}{E} \quad (3.59)$$

y

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}} \quad (3.60)$$

### 3.6. Ejemplos numéricos

Para finalizar el presente capítulo, se analizan distintos ejemplos numéricos para mostrar los resultados que se obtienen con la propuesta para la transformación de la función de Weibull de tres parámetros.

#### 3.6.1. Transformación de valores J a valores K

En las siguientes figuras se muestran los valores **K** correspondientes a los valores **J** transformados valor a valor. También en las figuras se muestran las funciones 3P-W obtenidas con la transformación. Además, en las tablas se muestran los valores considerados en la 3P-W para **J** y los resultados de la transformación con las ecuaciones (3.56) y (3.57) para obtener los parámetros en valores **K**.

Parámetros	Figura 3.17	
	Valores en J	Resultado en K
P. de Forma	2	2,54
P. de Escala	5,31	35,01
P. umbral	1,74	20,04

Figura 3.18	
Valores en J	Resultado en K
2	3,36
47,78	105,01
1,74	20,04

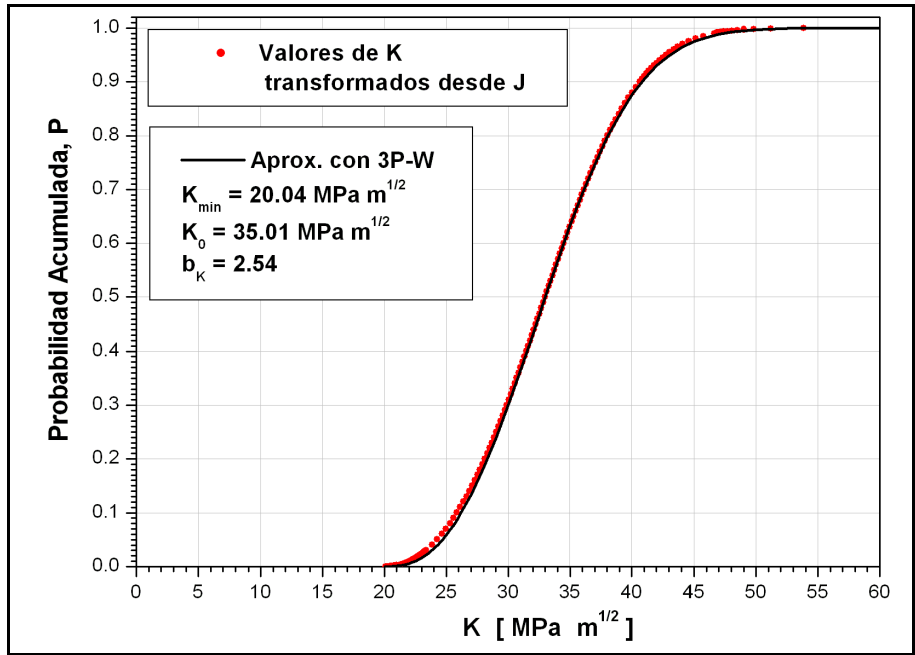


Figura 3.17. Comparación de funciones 3P-W.

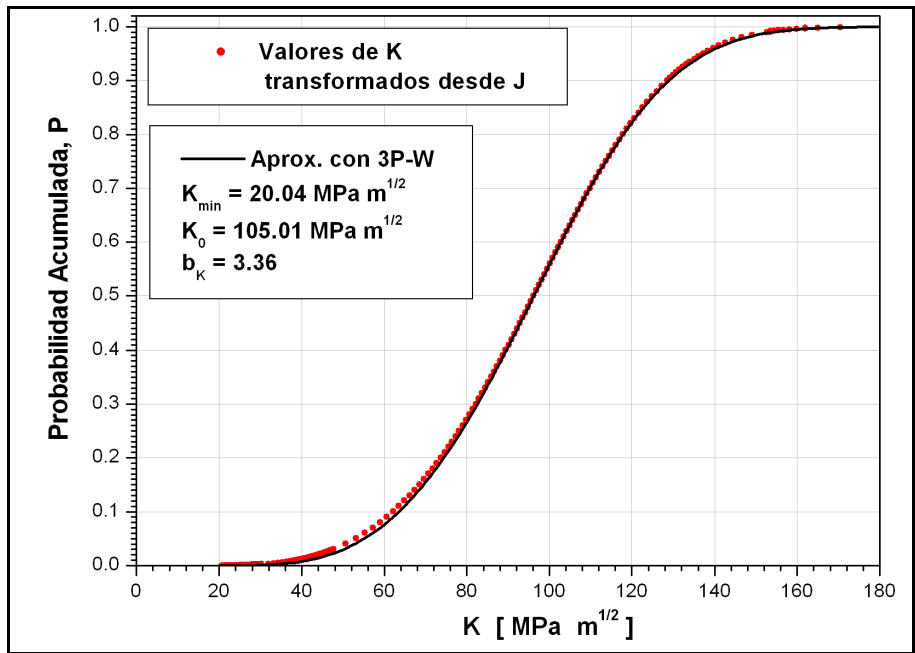


Figura 3.18 . Comparación de funciones 3P-W.

Parámetros	Figura 3.19	
	Valores en J	Resultado en K
P. de Forma	2	3,65
P. de Escala	195	212,13
P. umbral	1,74	20,04

Figura 3.20	
Valores en J	Resultado en K
2	3
47,78	105,01
5,31	35,01

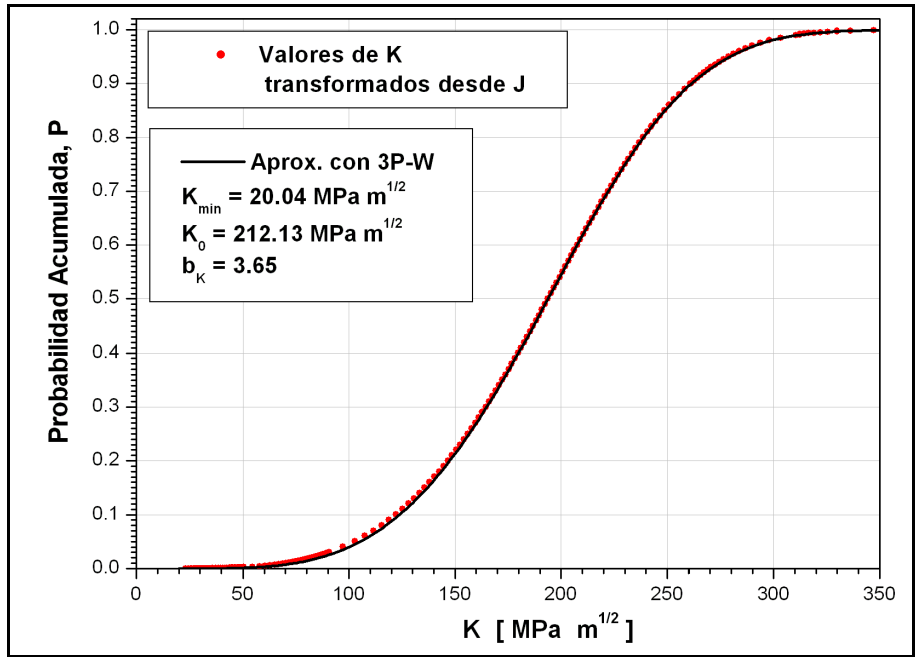


Figura 3.19 . Comparación de funciones 3P-W.

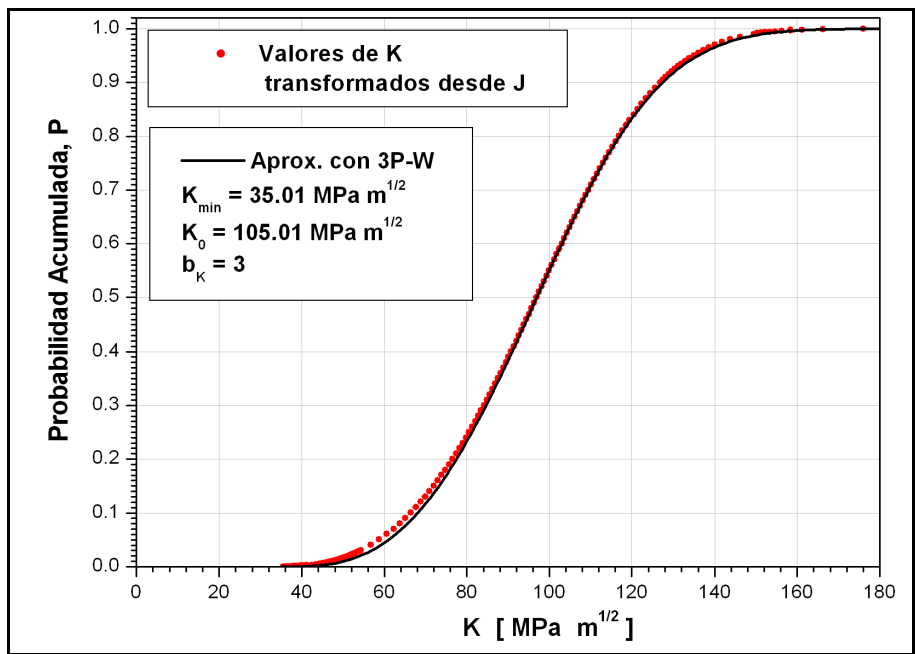


Figura 3.20 . Comparación de funciones 3P-W.

Parámetros	Figura 3.21	
	Valores en J	Resultado en K
P. de Forma	2	2,59
P. de Escala	47,78	105,01
P. umbral	14,1	57,04

Figura 3.22	
Valores en J	Resultado en K
2,5	4,2
47,78	105,01
1,74	20,04

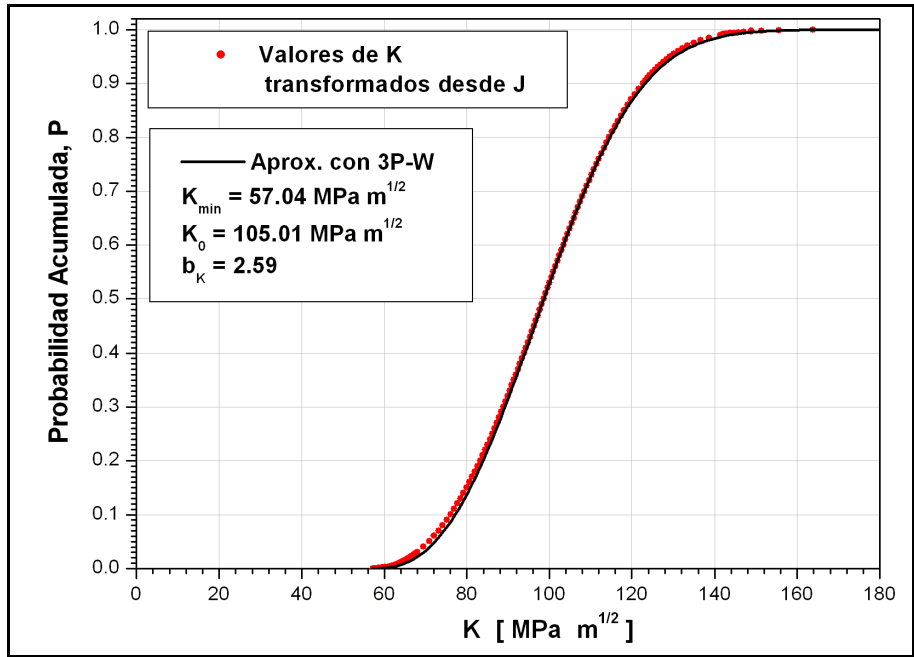


Figura 3.21 . Comparación de funciones 3P-W.

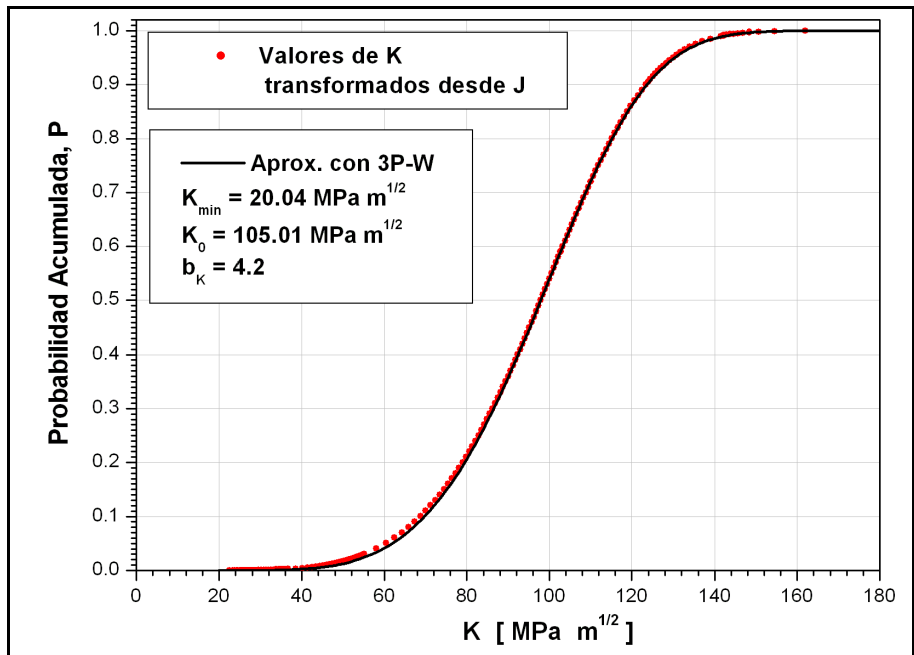


Figura 3.22 . Comparación de funciones 3P-W.

En todos los casos se observa una excelente aproximación entre los valores transformados y la función 3P-W obtenida por la transformación propuesta.

### 3.6.2. Transformación de valores de K a valores de J

De forma análoga, en las siguientes figuras se muestran las transformaciones inversas, los valores  $J$  correspondientes para cada valor  $K$  y las funciones 3P-W obtenidas con la



transformación. Además, en las tablas se muestran los valores considerados en la 3P-W para **K** y los resultados de la transformación de los parámetros a valores **J**.

Parámetros	Figura 3.23	
	Valores en J	Resultado en K
P. de Forma	4	2,63
P. de Escala	95	39,1
P. umbral	30	3,9

Figura 3.24	
Valores en J	Resultado en K
4	2,3
200	173,3
30	3,9

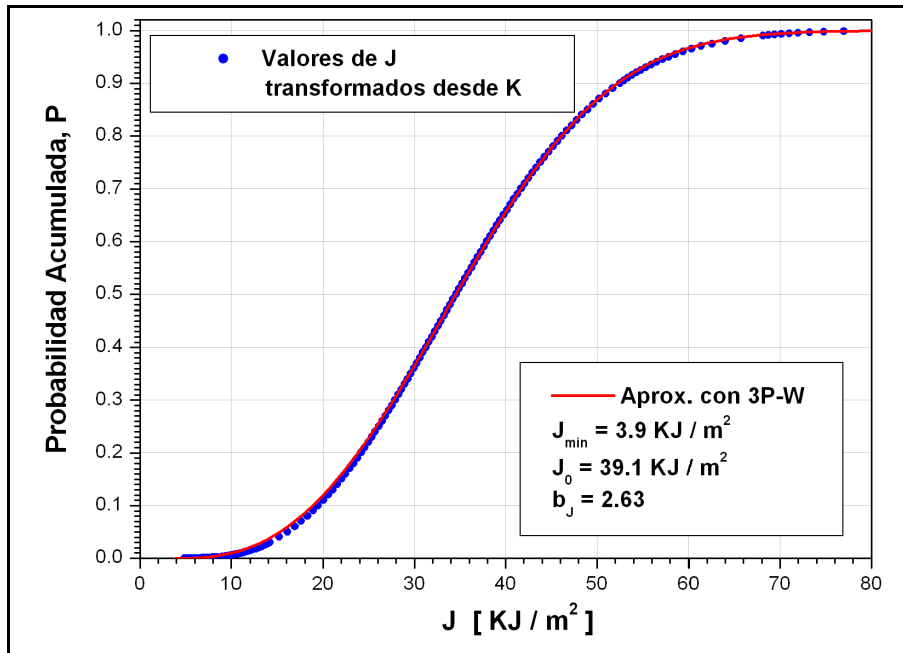


Figura 3.23 . Comparación de funciones 3P-W.

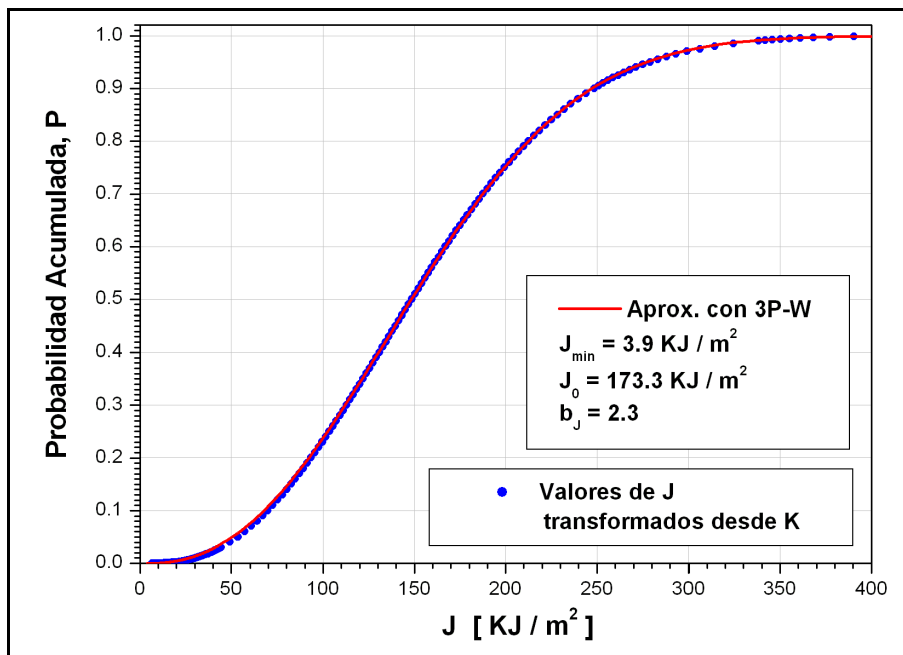


Figura 3.24 . Comparación de funciones 3P-W.

Parámetros	Figura 3.25	
	Valores en J	Resultado en K
P. de Forma	4	3,26
P. de Escala	95	39,1
P. umbral	60	15,6

Figura 3.26	
Valores en J	Resultado en K
3	1,97
95	39,1
30	3,9

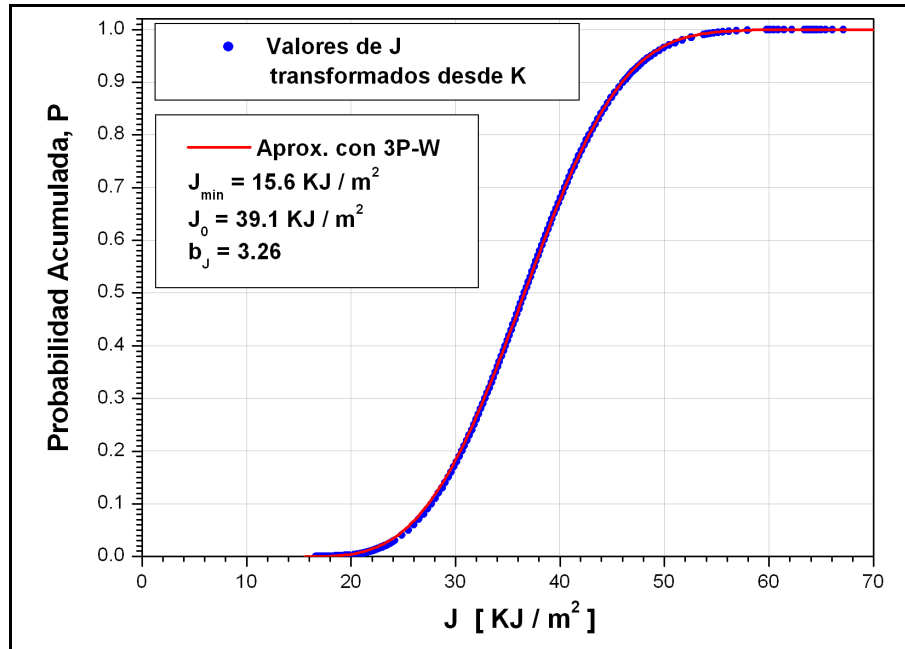


Figura 3.25 . Comparación de funciones 3P-W.

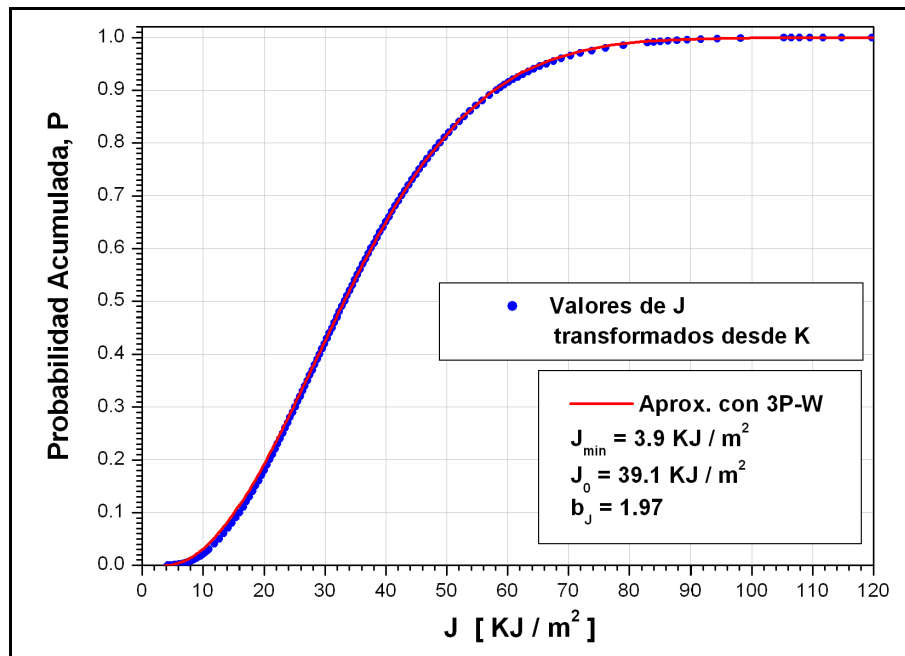


Figura 3.26 . Comparación de funciones 3P-W.

En todos los casos se observa una excelente aproximación entre los valores transformados y la función 3P-W obtenida por la transformación propuesta.

## Referencias Bibliográficas

- [1] Weibull, W., "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability", Journal of Applied Mechanics, pp. 293-297, 1951.
- [2] Wallin, K., "The Scatter in  $K_{IC}$  - Results", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, No. 6, pp. 1085-1093, 1984.
- [3] Wallin, K., "Statistical Aspects of Constraint with Emphasis on Testing and Analysis of Laboratory Specimens in the Transition Region," Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, pp. 264-288, 1993.
- [4] Landes, J.D., Shaffer, D.H., "Statistical Characterization of Fracture in the Transition Region", Fract. Mech., 12th Conference, ASTM STP 700, pp. 368-382, 1980.
- [5] Landes, J. D. and McCabe, D. E., "The Effect of Section Size on the Transition Behavior of Structural Steels", Scientific Paper de Westinghouse R&D Center, 1982.
- [6] ASTM E 1921, "Standard Test Method for Determination of Reference Temperature,  $T_0$ , for Ferritic Steels in the Transition Range", Annual Book of ASTM Standards, Vol. 03.01, 2002.
- [7] McCabe, D.E., "A Comparison of Weibull and  $\beta_{IC}$  Analyses of Transition Range Data," Fract. Mech.: 23-rd Symposium, ASTM STP 1189, pp. 80-94, 1993.
- [8] Anderson, T.L., Stienstra, D., Dodds, R.H., "A Theoretical Framework for Addressing Fracture in the Ductile-Brittle Transition Region," Fracture Mechanics - 24 th volume, STP 1207, pp. 186-214, 1994.
- [9] Heerens, J., Zerbst, U., Schwalbe, K.H., "Strategy for Characterizing Fracture Toughness in the Ductile to Brittle Transition Regime," Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 16 (11), pp. 1213-1230, 1993.
- [10] McCabe, D.E., Zerbst, U., Heerens, J., "Development of Test Practice Requirements for a Standard Method on Fracture Toughness Testing in the Transition Range," GKSS Publicaciones, 93/E/81, 1993.
- [11] Landes, J. D., Zerbst, U., Heerens, J., "Single-Specimen Test Analysis to Determine Lower-Bound Toughness in the Transition", Fracture Mechanics - 24<sup>th</sup> volume, ASTM STP 1207, pp. 171-185, 1994.
- [12] Plait, A., "The Weibull Distribution", Industrial Quality Control, pp. 17 - 26, 1962.
- [13] Anderson, T. L., Stienstra, D., Dodds, R. H., "A Theoretical Framework for Addressing Fracture in the Ductile - Brittle Transition Region", Fracture Mechanics - 24<sup>th</sup> volume, STP 1207, pp. 186-214, 1994.

## **Capítulo 4: Aproximación a valores de la** ***Euro Fracture Toughness Dataset***

### **4.1. Introducción**

Dada la dificultad práctica para un laboratorio en particular de llevar adelante un plan de investigación amplio con abundantes juegos de datos a fin de avanzar con el estudio de los aceros ferríticos en la región de transición dúctil-frágil, la *European Structural Integrity Society* (ESIS) con la coordinación del Dr. Heerens del GKSS (*Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt - Society for the Utilisation of Atomic Energy in Shipbuilding and Shipping*) y la participación de numerosos laboratorios europeos generaron un conjunto de datos de tenacidad a la fractura, denominado *Euro Fracture Toughness Dataset*. El mismo tuvo la finalidad de proveer una base de datos experimental suficientemente grande y así poder estudiar los efectos de la temperatura y del tamaño de las probetas sobre la tenacidad a la fractura en la región de transición dúctil-frágil [1]. El conjunto de datos de tenacidad a la fractura europeo cuantificó el comportamiento a la fractura de un acero DIN 22NiMoCr37 usado en recipientes a presión de centrales nucleares. Fueron realizados alrededor de 800 ensayos de tenacidad a la fractura utilizando probetas del tipo compactas C(T) con tamaños variando desde ½ pulgada hasta 4 pulgadas de espesor, B, y una relación espesor a ancho de  $B/W=0,5$ .

Debido al gran número de ensayos y al amplio rango de condiciones ensayadas, el conjunto de datos de la *Euro Fracture Toughness Dataset* da una visión clara de los efectos de tamaño y temperatura en la región de transición [1]. Pero sin embargo, algunos temas aún siguen abiertos y son necesarios más esfuerzos en este sentido que ayuden a entender el comportamiento de los aceros ferríticos en la zona de transición dúctil-frágil [2].

El desarrollo de métodos estadísticos confiables para el tratamiento de los datos experimentales de tenacidad a la fractura es aún un tópico a desarrollar. En particular, es necesario la validación de los métodos existentes. El problema principal es que son necesarios juegos de datos muy grandes para validar los métodos estadísticos, que no siempre están disponibles y generarlos suele ser muy costoso y se la considera una tarea prohibitiva para un solo laboratorio.

En el presente capítulo se utilizaron los datos de la *Euro Fracture Toughness Dataset* para estimar los parámetros de la función de Weibull de tres parámetros (3P-W), tanto en valores de **J** como en valores de **K**. Primero se detallan algunas características de los datos experimentales, luego se muestran los resultados obtenidos al estimar los parámetro de 3P-W para los resultados experimentales en valores de **J**, para las diferentes temperaturas. Seguidamente, se presentan los valores obtenidos de los parámetros de la 3P-W cuando se utilizan los valores experimentales en términos de **K**. Posteriormente se utiliza la transformación propuesta en esta tesis para la transformación de 3P-W en términos de **J** a su equivalente en términos de **K**. Al final del capítulo se muestra una comparación de los resultados obtenidos.

## 4.2. Materiales y Métodos

El trabajo experimental de la *Euro Fracture Toughness Dataset* fue compartido entre diez laboratorio de Bélgica, Francia, Finlandia, Alemania, Italia y el Reino Unido. El coordinador del proyecto fue el Centro de Investigaciones GKSS de Alemania [1].

El material usado en el proyecto fue un acero ferrítico DIN 22NiMoCr37 forjado, templado y revenido. Este material es similar a un acero tipo ASTM A508 C1.3, y siendo ampliamente utilizado en plantas de energía nuclear. El peso del segmento de acero utilizado fue de alrededor de 12 toneladas, donde además fueron designado cada uno de los sub-segmentos extraídos del bloque principal, como se muestra en la figura 4.1. El material fue originalmente planeado para utilizarse en un recipiente de presión de una planta de energía nuclear y por lo tanto, este acero fue cuidadosamente manufacturado y tratado térmicamente. Los datos técnicos del ciclo térmico del tratamiento sometido al material se muestran en la figura 4.2. Además, la composición química del acero se detalla en la tabla 1 [1].

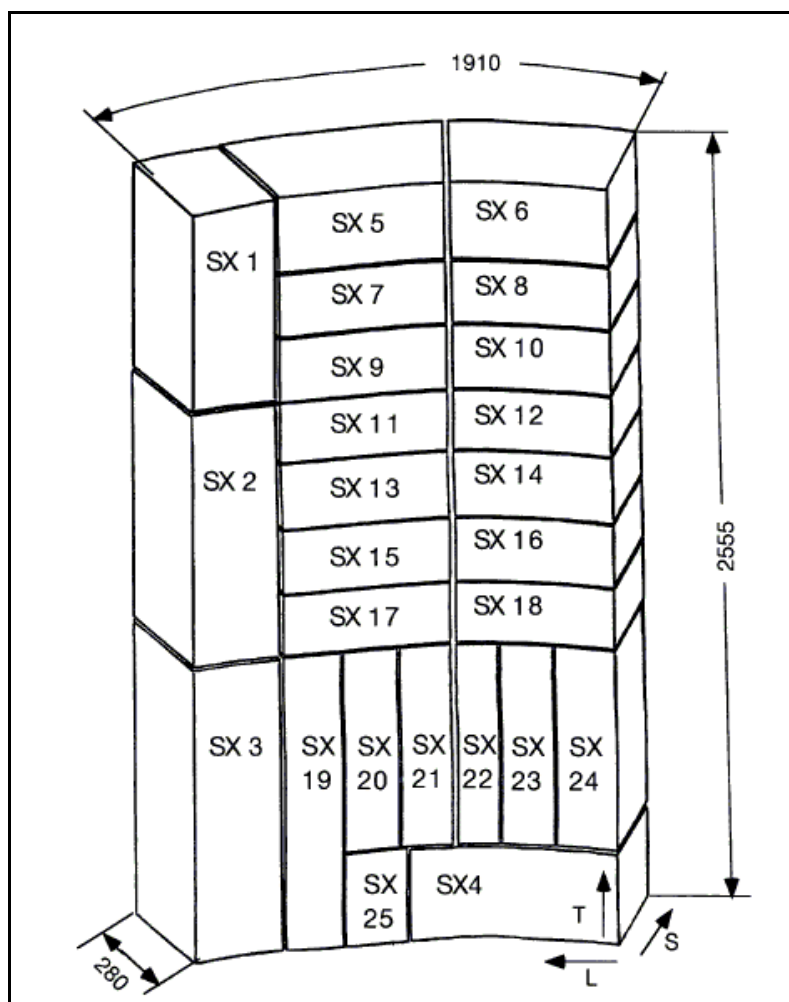


Figura 4.1. Esquema de extracción del material y nomenclatura utilizada.

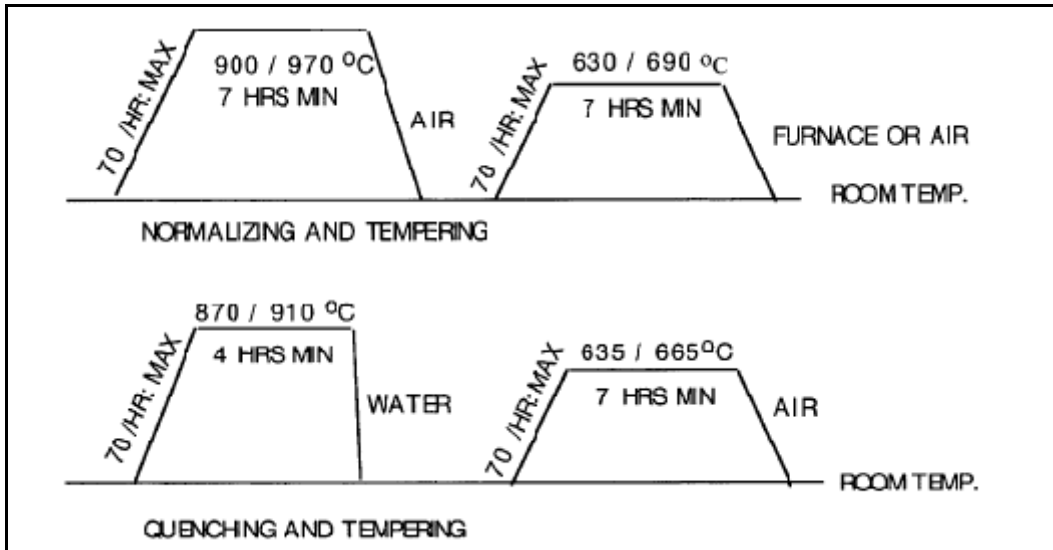


Figura 4.2. Ciclo térmico sometido al material de las probetas.

Tabla I

Chemical composition of 22NiMoCr37 (wt.%)

C	Si	P	S	Cr	Mn	Ni	Cu	Mo
0.21	0.24	0.003	0.004	0.003	0.82	0.79	0.049	0.56

Debido a que se esperaba una gran dispersión en los resultados experimentales, un número suficientemente grande de ensayos fueron previamente planeados. Basado en la cantidad de material disponible, los ensayos fueron realizados de acuerdo a la matriz mostrada en la figura 4.3. Esta matriz de ensayos cubre probetas C(T) de ½ pulgada, 1 pulgada, 2 pulgadas y 4 pulgadas de espesor, con una relación de espesor a ancho de  $B/W=0,5$ .

Las probetas fueron pre-fisuradas por fatiga hasta una relación de longitud de fisura a ancho dentro del rango  $0,52 < a_0/W < 0,6$ .

Se realizaron ensayos a ocho diferentes temperaturas:  $-154^{\circ}\text{C}$ ,  $-110^{\circ}\text{C}$ ,  $-91^{\circ}\text{C}$ ,  $-60^{\circ}\text{C}$ ,  $-40^{\circ}\text{C}$ ,  $-20^{\circ}\text{C}$ ,  $0^{\circ}\text{C}$  y  $20^{\circ}\text{C}$ .

1/2T □	31	55	31	31 31	32	31	32
1T □	34		34	34	32	30 20SG	5 41 10
2T □	30		30	30	30	30	30
4T □			15			15	15 15
	-154	-110	-91	-60	-40	-20	0 20
	Temperature, °C						

Figura 4.3. Matriz de ensayos planeados.

#### 4.2.1. Método de ensayo

Todos los laboratorios realizaron los ensayos de tenacidad a la fractura de acuerdo con el procedimiento de ensayo ESIS P2-92. Además, todos los ensayos se realizaron en condición de control de desplazamiento, es decir, después de alcanzada la temperatura del ensayo, la probeta fue cargada a una velocidad de desplazamiento de la línea de carga constante. Todas las probetas fueron prefisuradas por fatiga y solo unas pocas fueron mecanizadas con entalla lateral (*side grooves*) después de la prefisuración, indicadas con SG en la figura 4.3. Los ensayos se realizaron para obtener valores de tenacidad a la fractura al momento de la fractura, **J<sub>c</sub>**.

Los resultados obtenidos fueron recopilados por el coordinador del programa, y publicados en forma de resumen en “*Development of the fracture toughness Dataset*”, de la revista *Engineering Fracture Mechanics*. Además todos los datos con sus detalles están disponibles en la página web: <ftp://ftp.gkss.de/pub/eurodataset>

Para la transformación de valores de **J** en valores **K**, se puede realizar con la siguiente ecuación [3, 7],

$$K = \sqrt{E' J} \quad (4.1)$$

donde:

$E' = E$  es el módulo de elasticidad del material para una condición de tensión plana.

$E' = E / (1 - \nu^2)$  para una condición de deformación plana.

La transformación se debería realizar en general para una condición plana de deformaciones, entonces la ecuación (4.1) resulta,

$$K = \sqrt{\frac{E J}{(1 - \nu^2)}} \quad (4.2)$$

En la figura 4.4 se muestran los datos obtenidos, discriminados por temperaturas, pero no por tamaño [1].

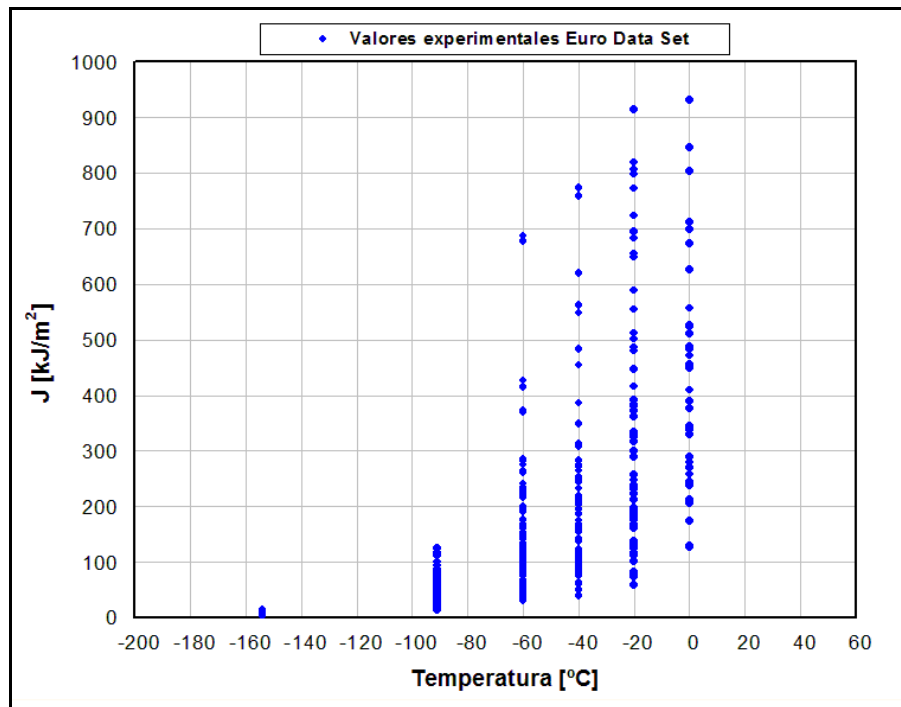


Figura 4.4. Distribución de los ensayos en función de la temperatura.

#### 4.2.2. Método para la estimación de los parámetros de 3P-W

Recordando de los capítulos anteriores, en general el Método de Regresión Lineal (MRL) es uno de los más utilizados para obtener los parámetros de la función de Weibull [5, 6].

Para aplicar el método de regresión lineal primero se deben disponer de los datos experimentales, en este caso valores de  $J$ , pero también pueden ser valores de  $K$ , que en general provienen de un muestreo aleatorio. Luego se deben tabular los datos de  $J$  desde el menor valor al mayor, en orden ascendente. Posteriormente se les da un número de orden  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  donde  $N$  es el número total de valores de  $J$  que se disponen para el cálculo.

Es así que, por ejemplo, para el menor valor de  $J$  en una muestra se tiene  $i = 1$ , para el siguiente valor de  $J$  se tiene  $i = 2$ , etc, hasta llegar al mayor valor de  $J$  en la muestra para el cual  $i = N$ .

Hecho esto, el siguiente paso es el cálculo -o estimación- de la probabilidad acumulada  $P(J_i)$ , para cada valor de  $J$  en la muestra.

Para la estimación de la probabilidad existen varios estimadores, sin embargo el más utilizado es el que se da en la ecuación (4.3).

$$P(J_i) = \frac{i - 0.3}{N + 0.4} \quad (4.3)$$

Luego, se obtiene para cada valor de  $J_i$  un valor correspondiente de probabilidad  $P(J_i)$ , de esta



forma es posible representar los datos en un gráfico doble logarítmico, de la siguiente forma:

$$\ln \ln \left[ \frac{1}{1 - P(J_i)} \right] \text{ vs } \ln (J_i - J_{\min_j}) \quad (4.4)$$

Donde  $J_{\min_j}$  es un valor estimado para el valor umbral definido con anterioridad, que se utiliza en el eje de las abscisas para poder representar los datos.

Posteriormente se prueban diferentes valores de  $J_{\min_j}$  y se calculan las correspondientes regresiones lineales. De todos los valores de  $J_{\min_j}$  probados, el valor del parámetro umbral " $J_{\min} = J_{\min_j}$ ", será aquel que dé el coeficiente de determinación,  $R^2$ , más próximo a 1. Es decir, el valor que mejor aproxime a los datos experimentales y que arroje la mejor linealidad en la gráfica.

El procedimiento para la estimación de los parámetros de la 3P-W en valores de  $K$  es el mismo que fue descrito anteriormente. Pero, en primer lugar se deben transformar los datos experimentales en  $J$  a sus equivalentes en valores  $K$ , por medio de la ecuación (4.2), con un módulo de elasticidad  $E = 210 \text{ GPa}$  y un módulo de Poisson,  $\nu = 0,3$  para el caso en estudio.

### 4.3. Estimación de parámetros con datos experimentales

En este punto se estiman los parámetros de la función de Weibull para los siguientes conjuntos de datos: probetas 1T C(T) con  $W = 50 \text{ mm}$  y 2T C(T) con  $W = 100 \text{ mm}$  para las temperaturas:  $-154^\circ\text{C}$ ,  $-91^\circ\text{C}$ ,  $-60^\circ\text{C}$ ,  $-40^\circ\text{C}$ ,  $-20^\circ\text{C}$ . Solo se utilizaron estos conjuntos de datos en la estimación de los parámetros, para evitar la influencia de la pérdida de *constraint* y/o efecto de tamaño que presentan los demás juegos de datos, temas que escapan de los alcances de la presente tesis.

#### 4.3.1. Aproximación a los Valores en J

A continuación se muestran los resultados de las estimaciones realizadas con valores de  $J$  para las probetas 1T C(T) con  $W = 50 \text{ mm}$ .

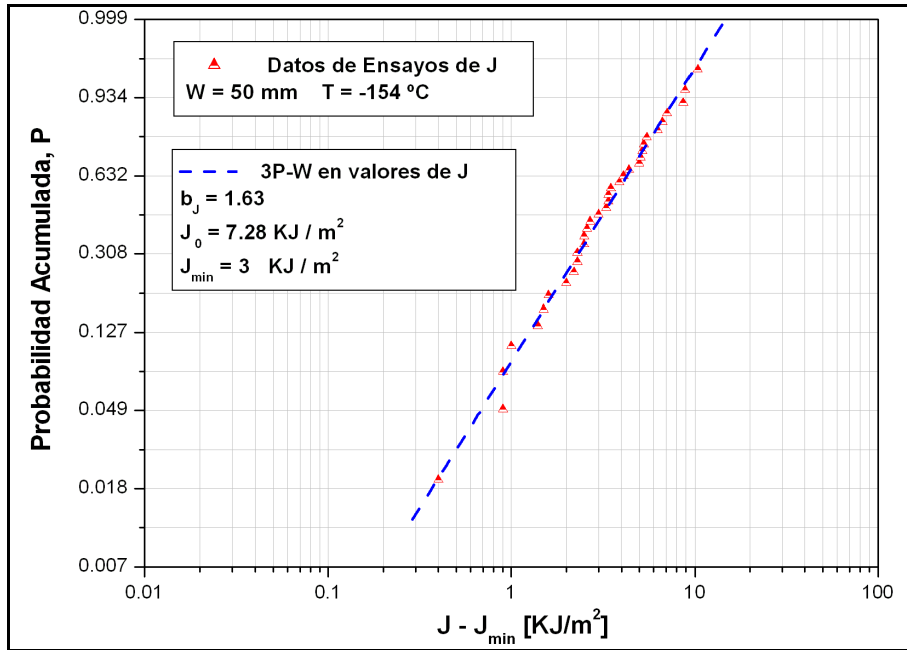


Figura 4.5. Gráfico de Weibull.

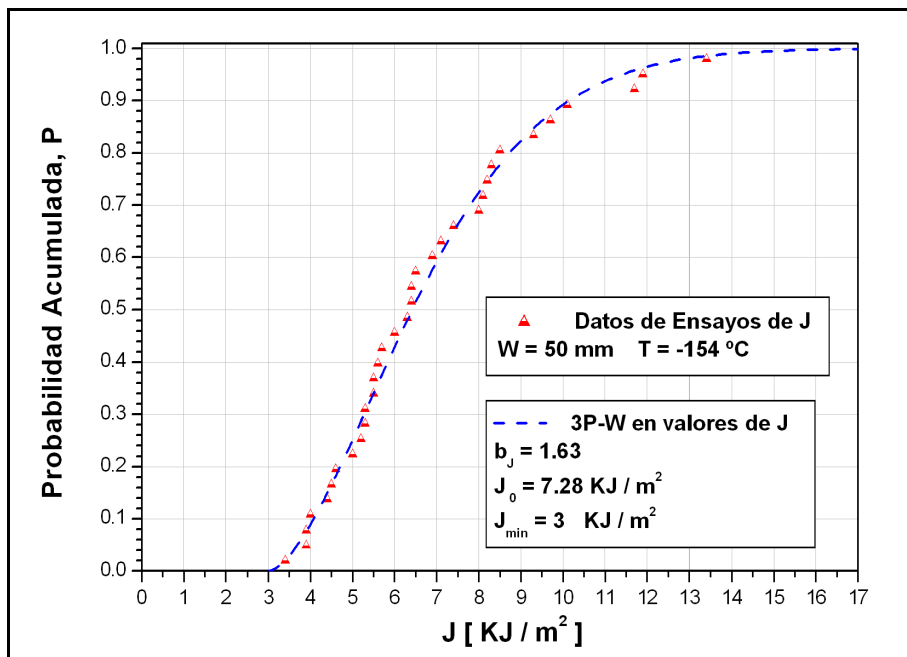


Figura 4.6. Probabilidad Acumulada de Weibull.

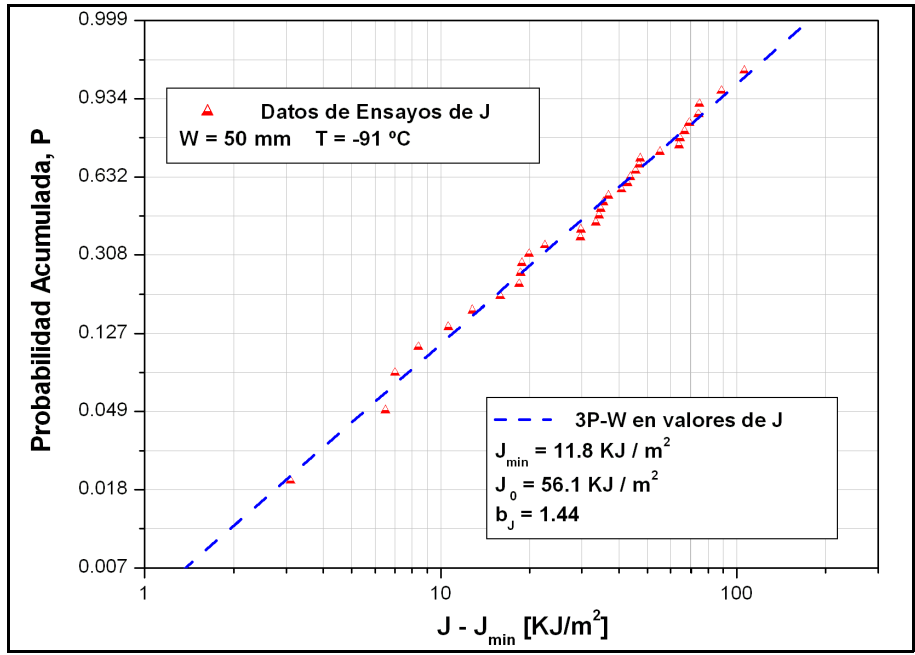


Figura 4.7. Gráfico de Weibull.

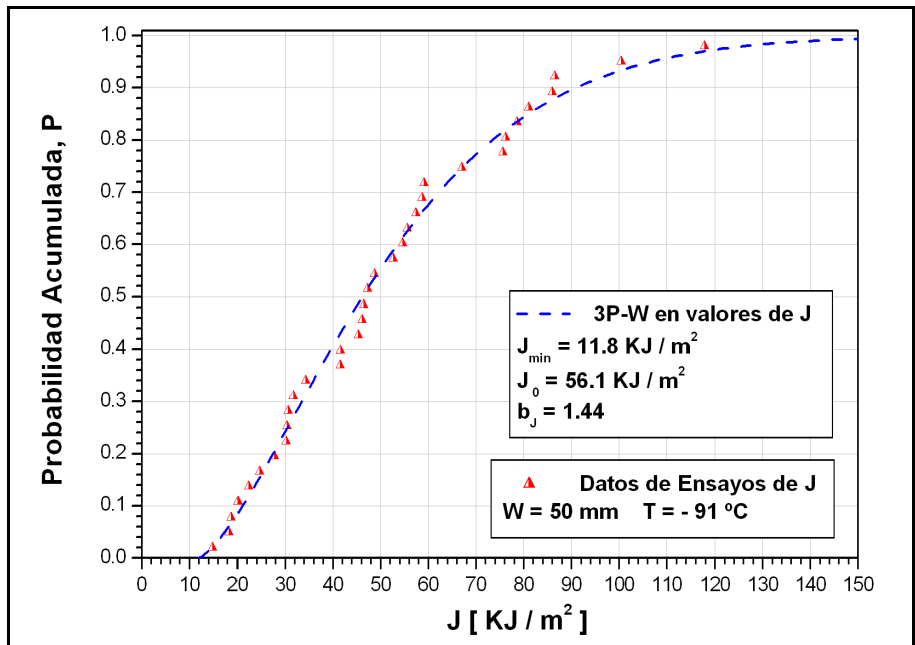


Figura 4.8 . Probabilidad acumulada de Weibull.

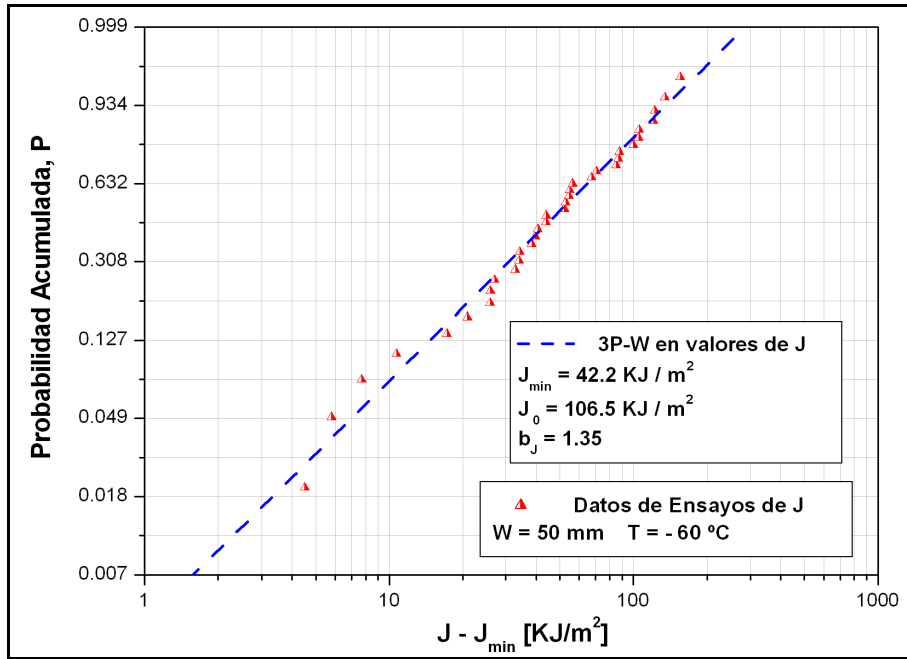


Figura 4.9. Gráfico de Weibull.

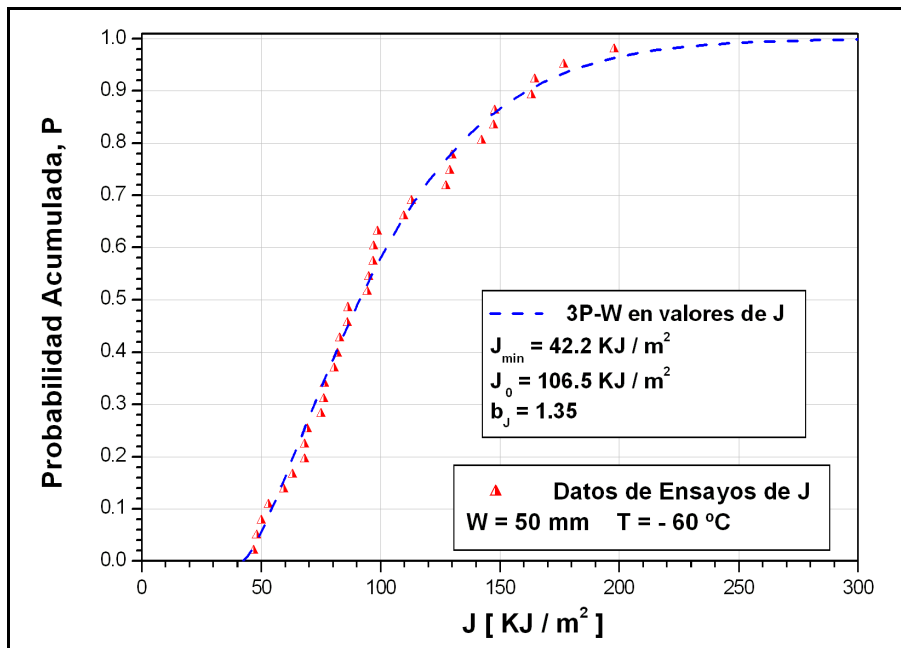


Figura 4.10 . Probabilidad acumulada de Weibull.

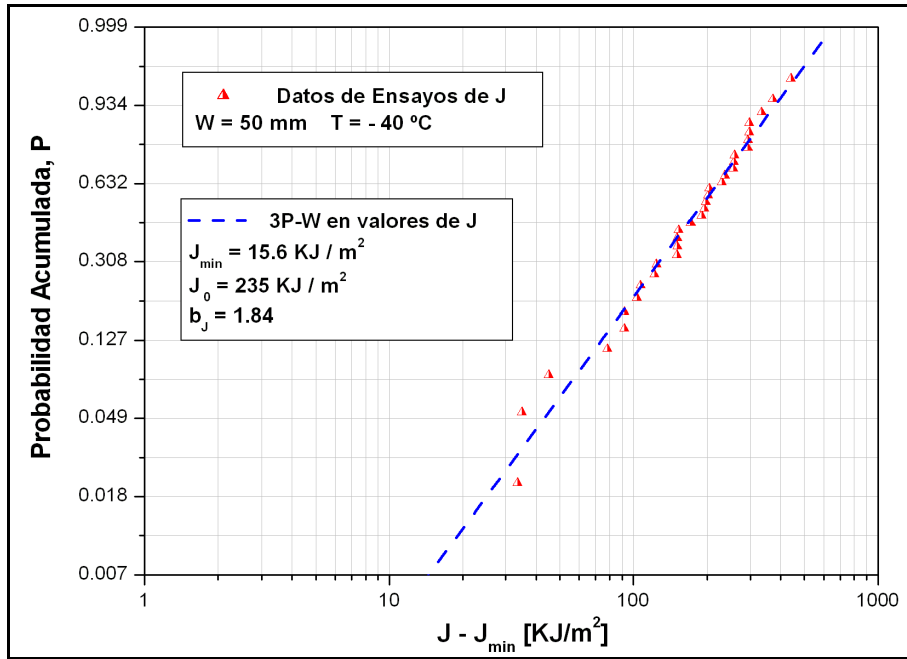


Figura 4.11. Gráfico de Weibull.

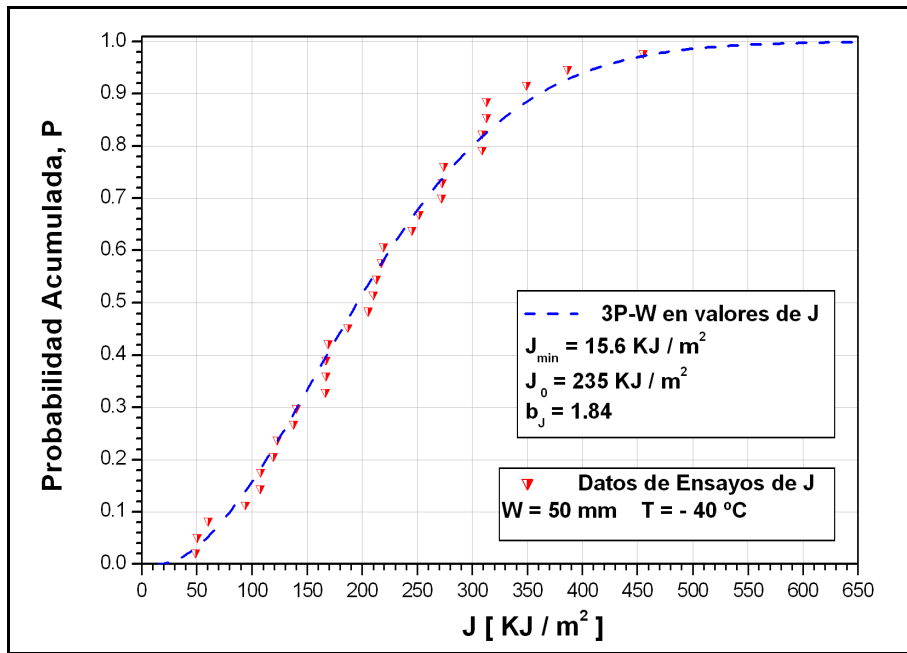


Figura 4.12 . Probabilidad acumulada de Weibull.

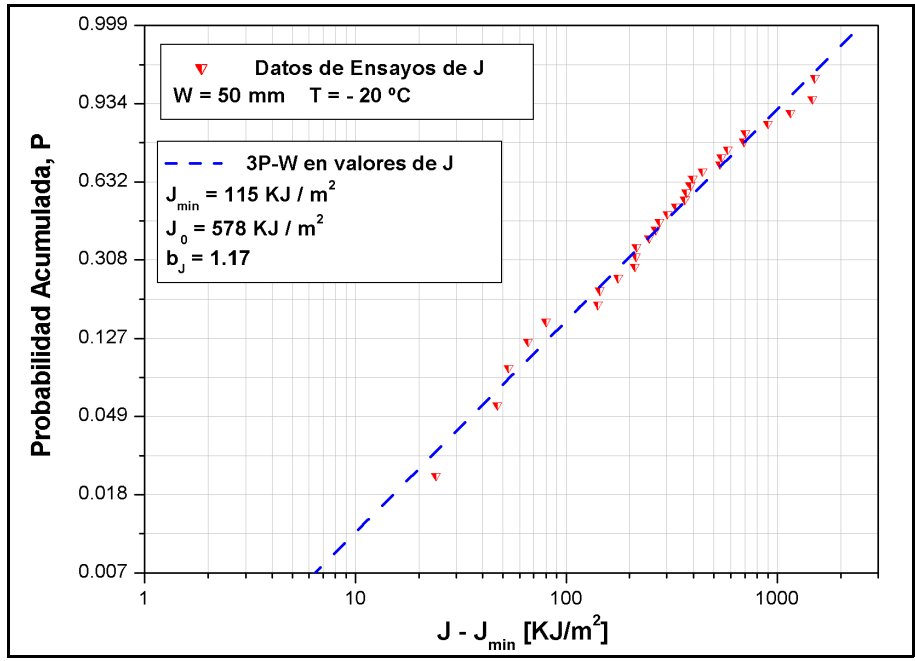


Figura 4.13. Gráfico de Weibull.

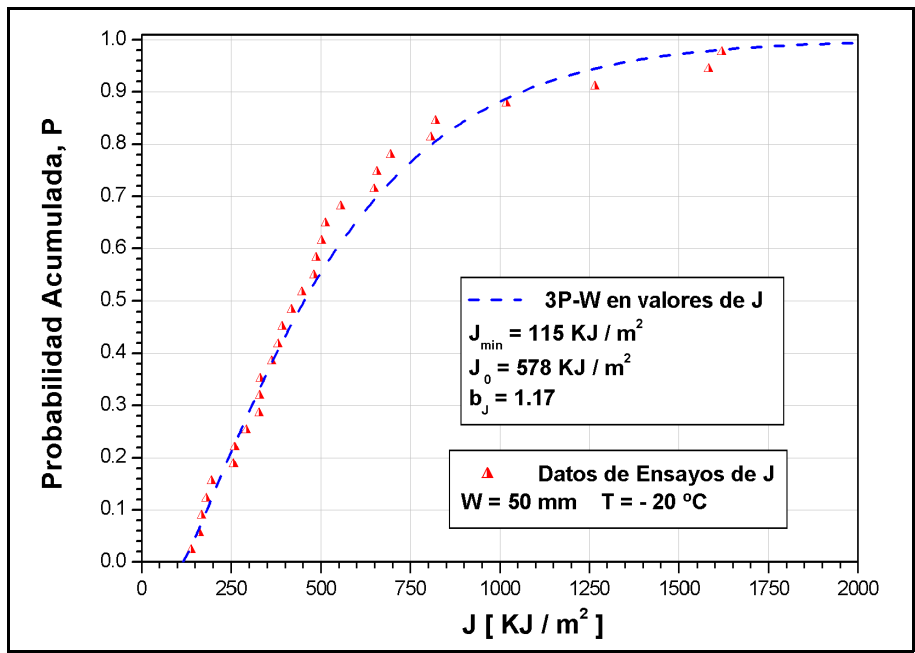


Figura 4.14 . Probabilidad acumulada de Weibull.

El resumen de los parámetros estimados se muestra en la tabla II.

**Tabla II.** Parámetros de la 3P-W en valores  $J$ ,  $W = 50$  mm.

Probetas 1T C(T), $W = 50$ mm			
Temperatura [°C]	$J_0$ [kJ/m <sup>2</sup> ]	$J_{min}$ [kJ/m <sup>2</sup> ]	$b_J$
-154	7,28	3	1,63
-91	56,1	11,8	1,44
-60	106,5	42,2	1,35
-40	235	15,6	1,84
-20	578	115	1,17

A continuación se muestran las estimaciones de los parámetros en valores **J** para las probetas 2T C(T), W=100 mm, y para las mismas temperaturas -154°C, -91°C, -60°C, -40°C y -20°C.

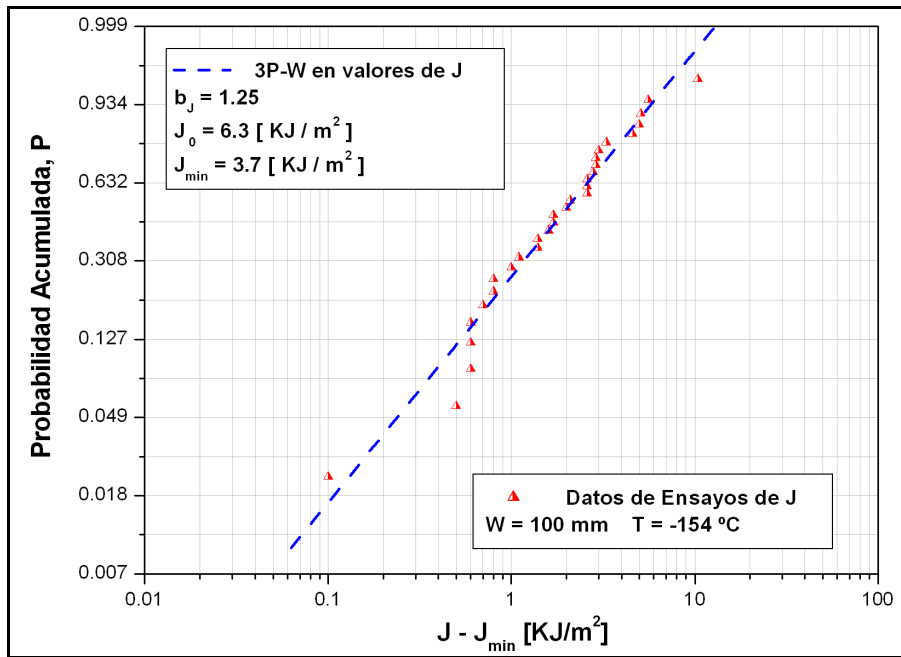


Figura 4.15. Gráfico de Weibull.

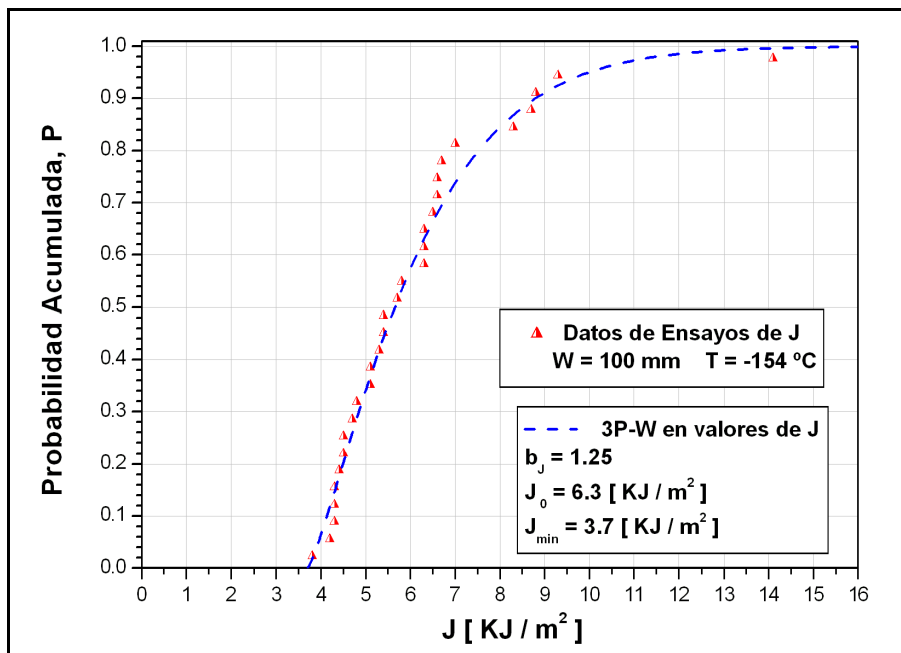


Figura 4.16 . Probabilidad acumulada de Weibull.



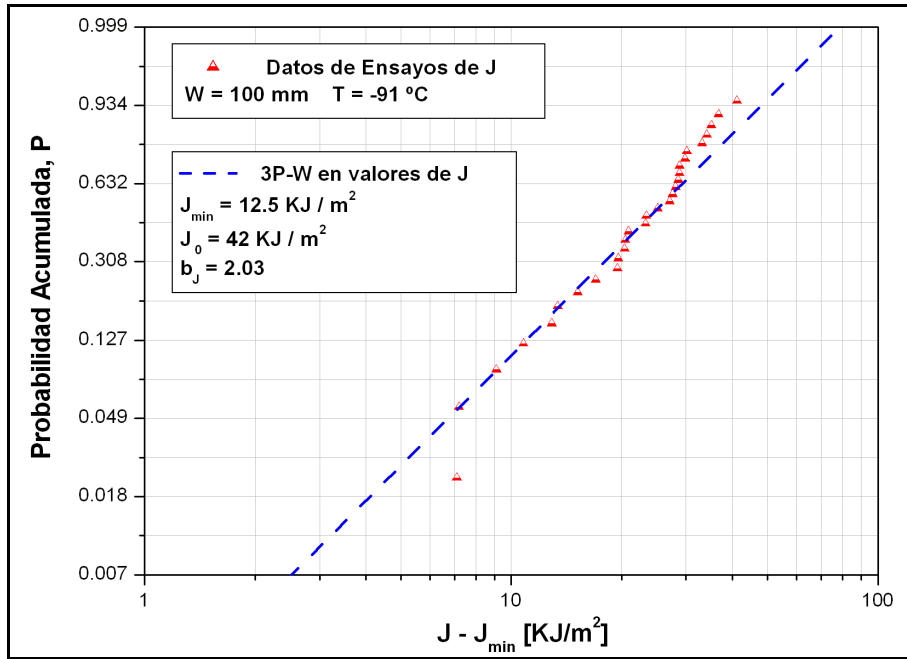


Figura 4.17 . Gráfico de Weibull.

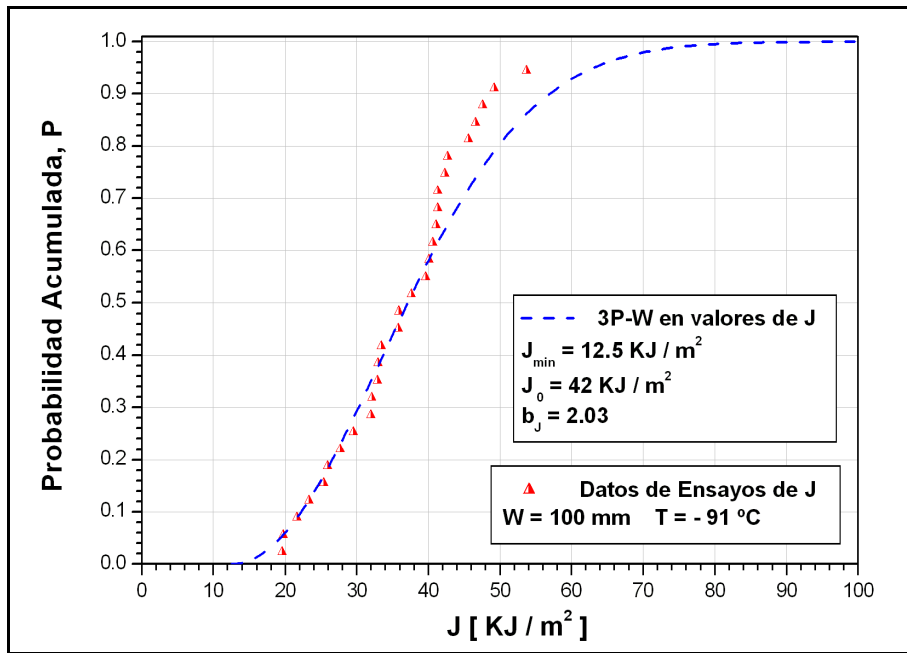


Figura 4.18 . Probabilidad acumulada de Weibull.

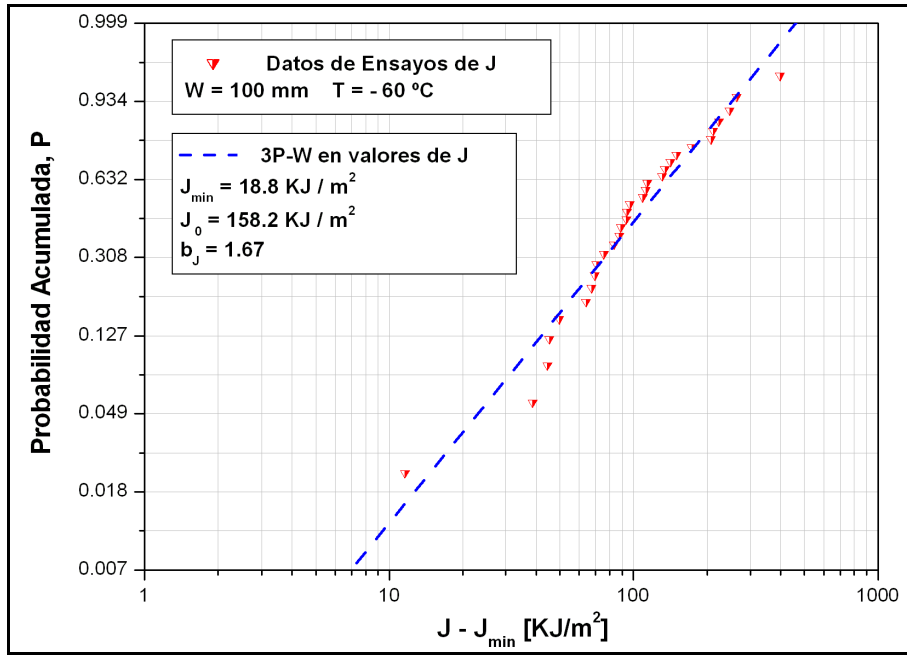


Figura 4.19 . Gráfico de Weibull.

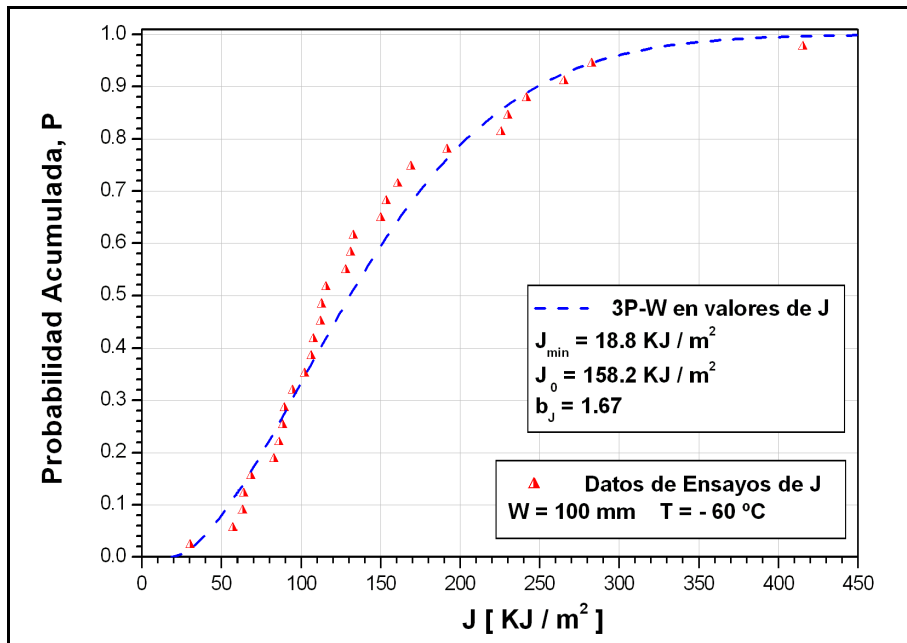


Figura 4.20 . Probabilidad acumulada de Weibull.

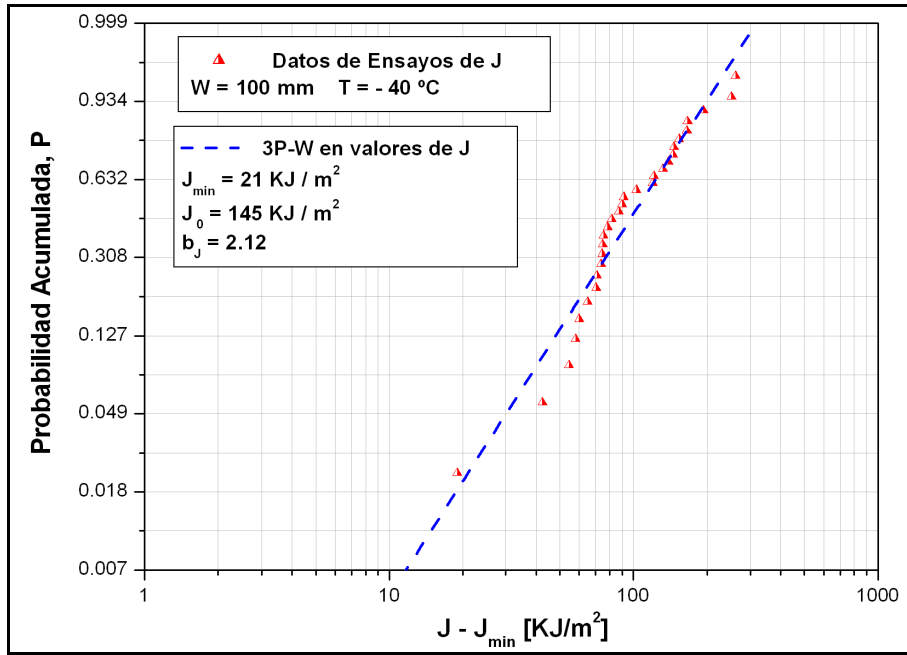


Figura 4.21 . Gráfico de Weibull.

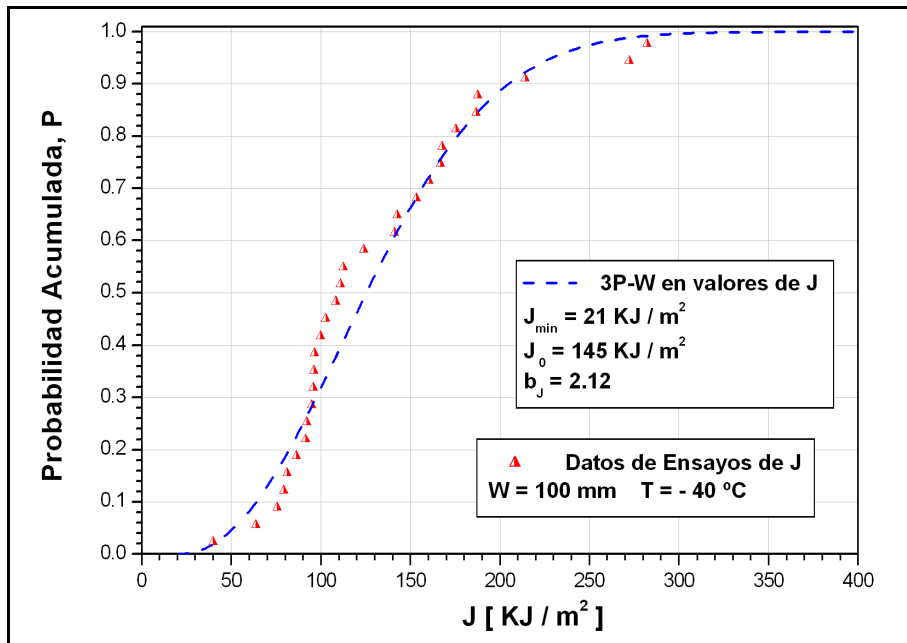


Figura 4.22. Probabilidad acumulada de Weibull.

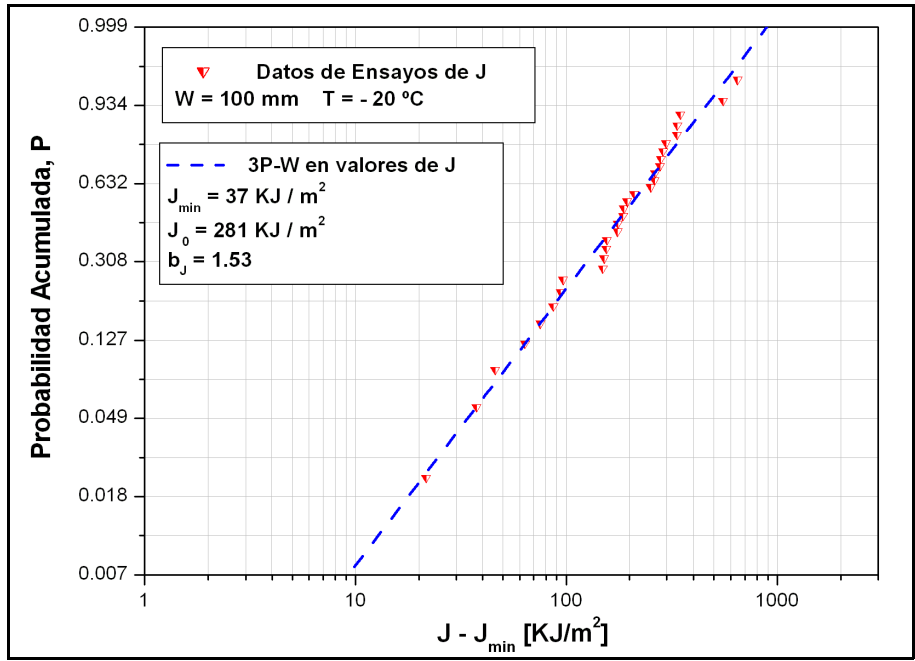


Figura 4.23 . Gráfico de Weibull.

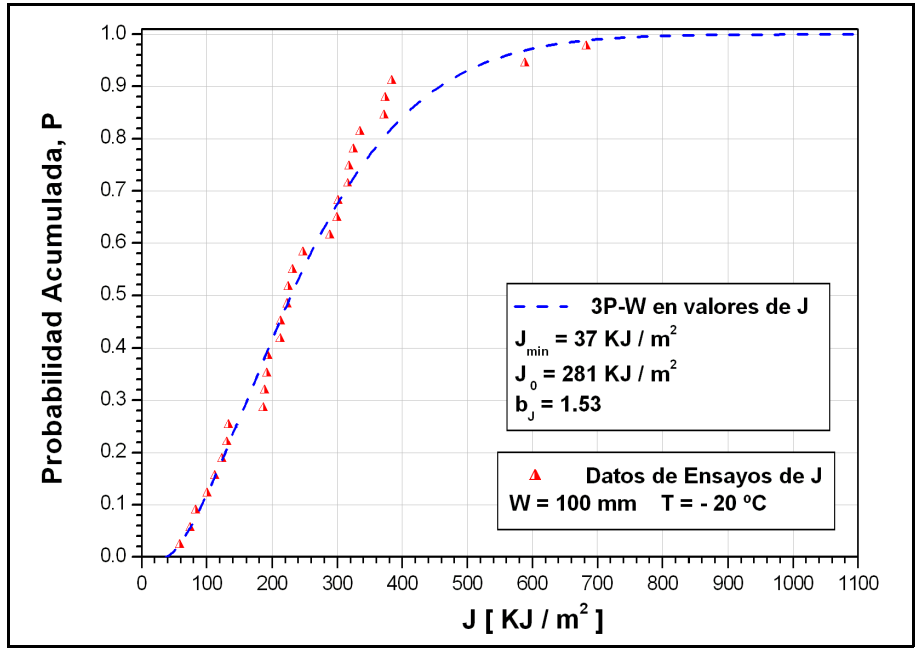


Figura 4.24. Probabilidad acumulada de Weibull.

El resumen de los parámetros estimados se muestra en la tabla III.

**Tabla III.** Parámetros de la 3P-W en valores **J**,  $W = 100$  mm.

Probetas 2T C(T), $W = 100$ mm			
Temperatura [°C]	$J_0$ [kJ/m <sup>2</sup> ]	$J_{min}$ [kJ/m <sup>2</sup> ]	$b_J$
-154	6,3	3,7	1,25
-91	42	12,5	2,03
-60	158,2	18,8	1,67
-40	145	21	2,12
-20	281	37	1,53

### 4.3.2. Aproximación a los Valores en K

A continuación se muestran los resultados de las estimaciones de los parámetros de la función 3P-W en valores **K**, para probetas 1T C(T),  $W = 50$  mm, y para las temperaturas  $-154^{\circ}\text{C}$ ,  $-91^{\circ}\text{C}$ ,  $-60^{\circ}\text{C}$ ,  $-40^{\circ}\text{C}$  y  $-20^{\circ}\text{C}$ . Los datos experimentales en valores de **K** provienen de la transformación de los datos experimentales en valores **J** utilizados en el punto anterior.

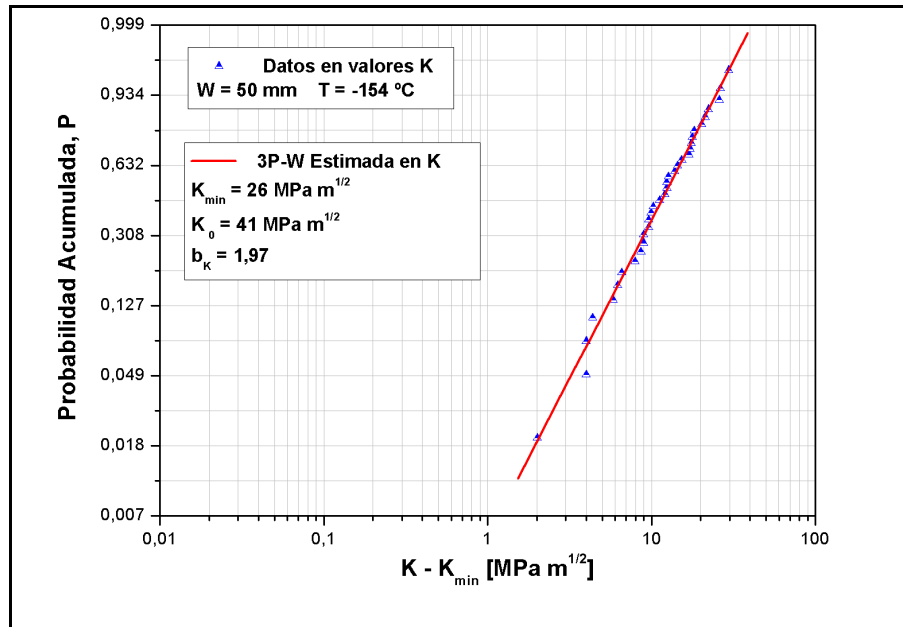


Figura 4.25. Gráfico de Weibull.

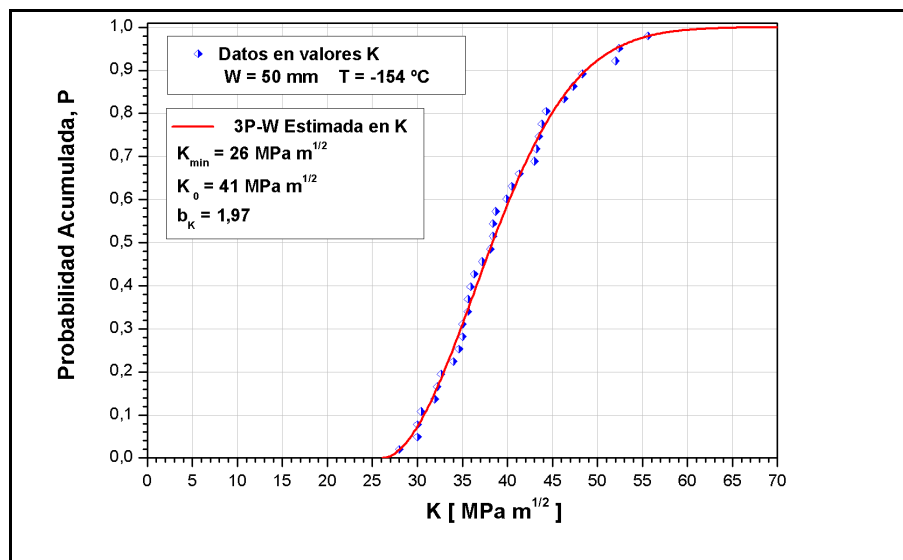


Figura 4.26 . Probabilidad acumulada de Weibull.

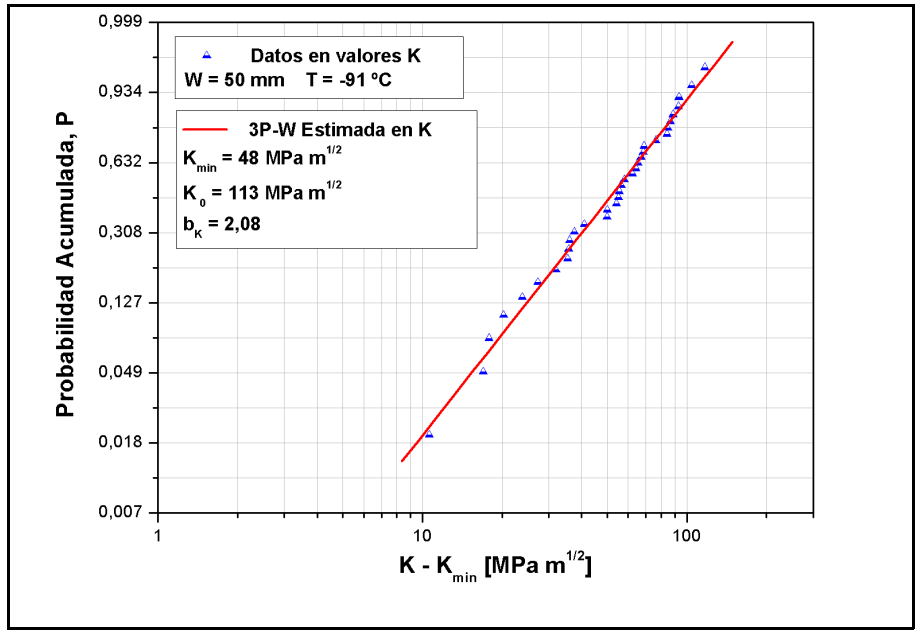


Figura 4.27. Gráfico de Weibull.

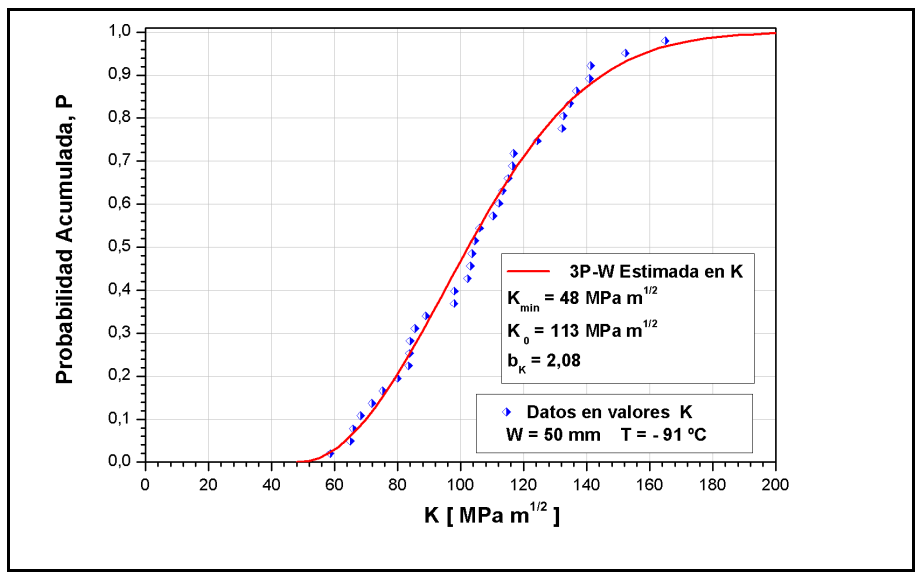


Figura 4.28 . Probabilidad acumulada de Weibull.

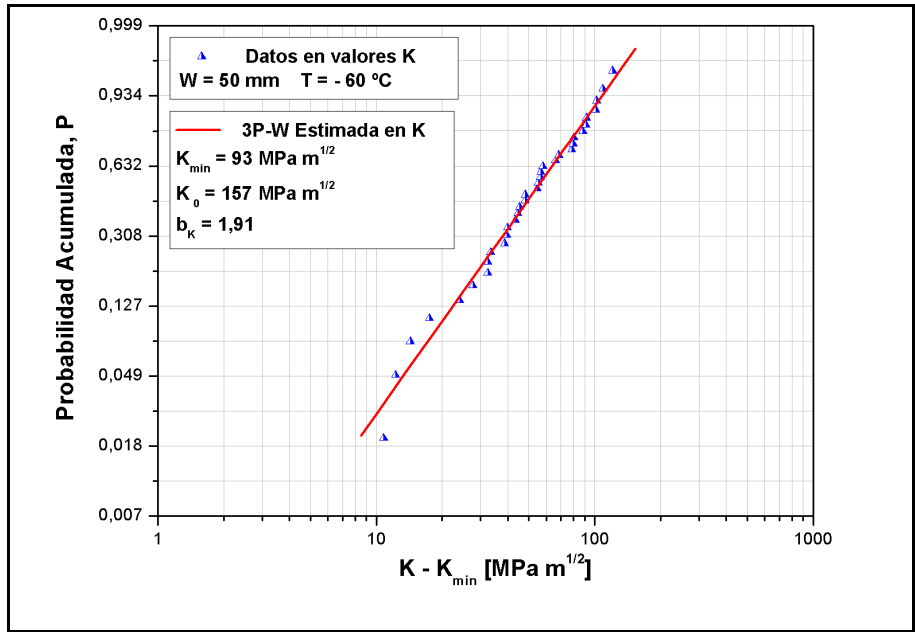


Figura 4.29. Gráfico de Weibull.

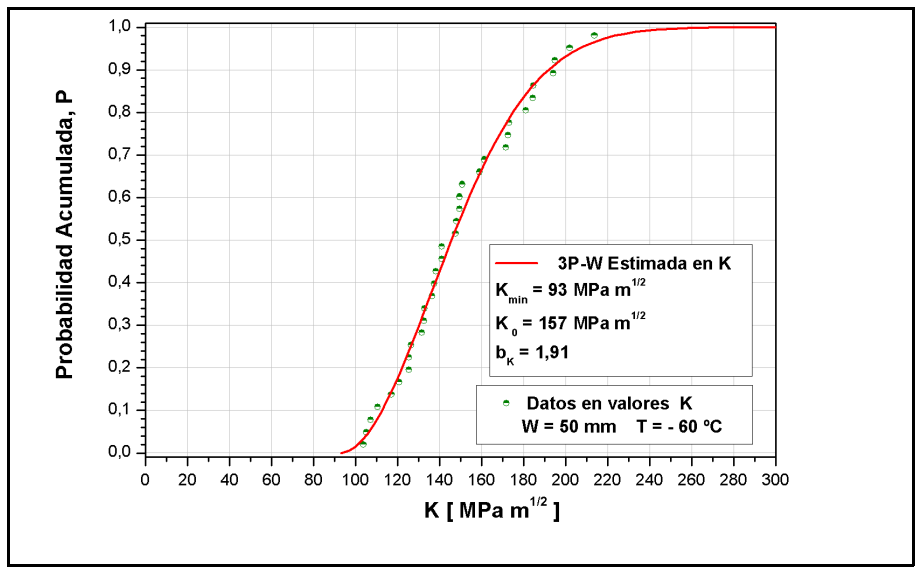


Figura 4.30 . Probabilidad acumulada de Weibull.



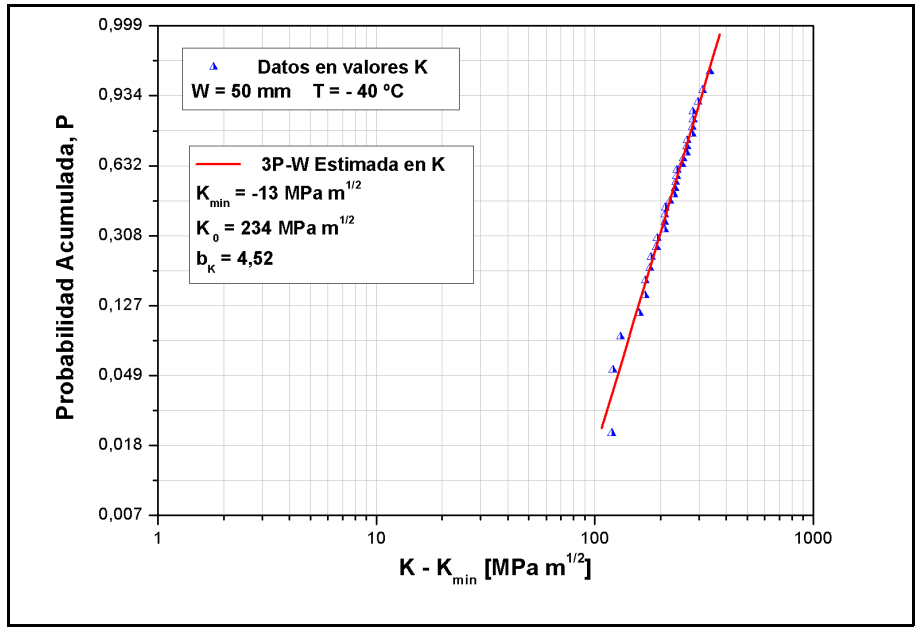


Figura 4.31. Gráfico de Weibull.

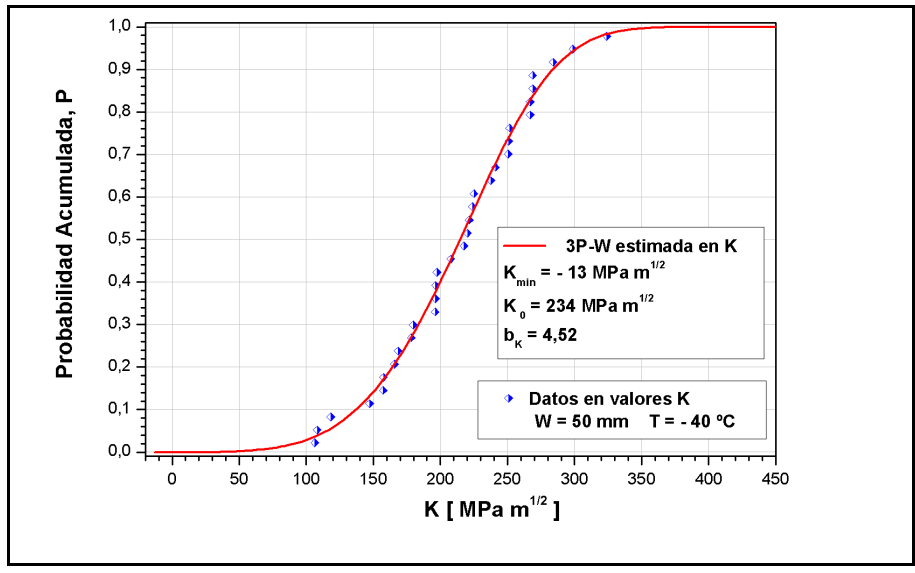


Figura 4.32 . Probabilidad acumulada de Weibull.

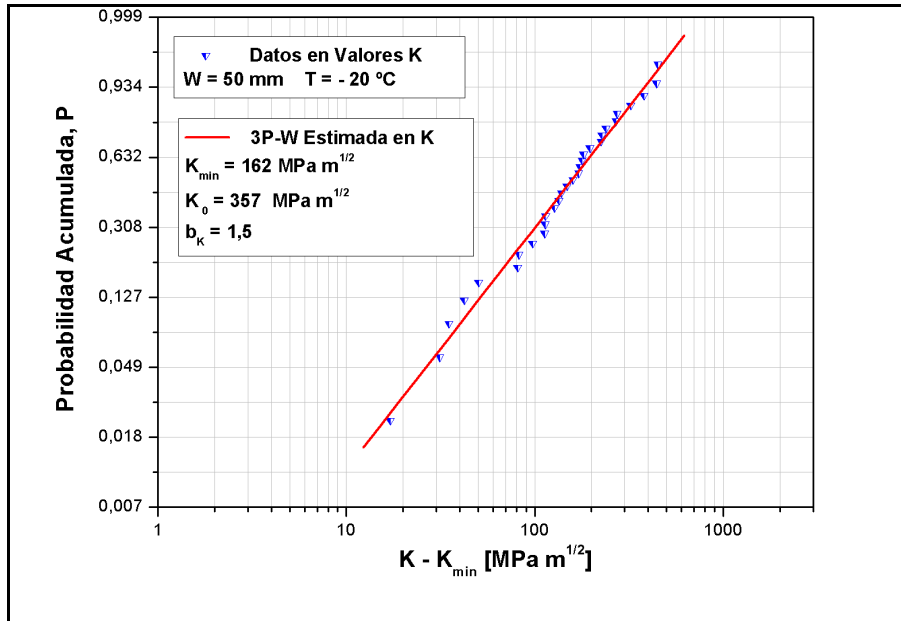


Figura 4.33. Gráfico de Weibull.

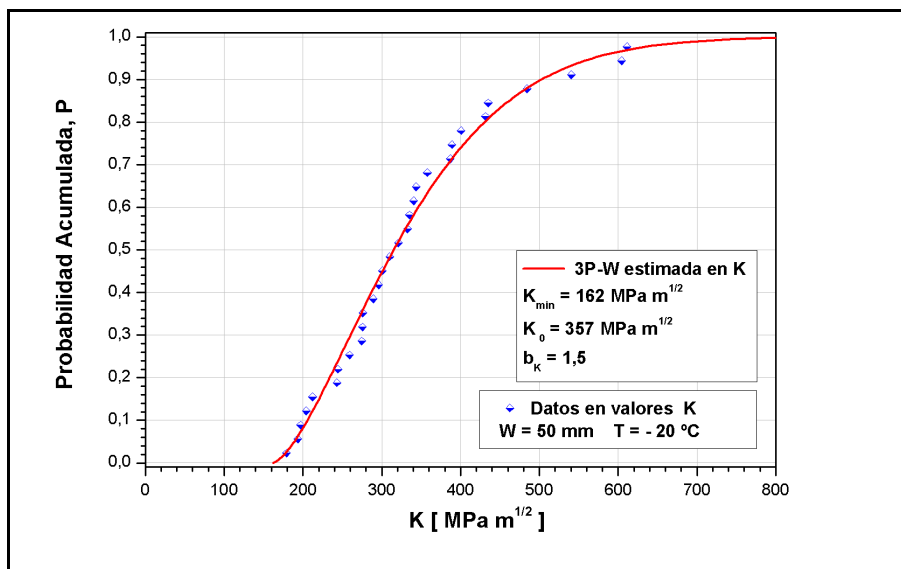


Figura 4.34 . Probabilidad acumulada de Weibull.

El resumen de los parámetros estimados se muestra en la tabla IV.

**Tabla IV.** Parámetros de la 3P-W en valores **K**, W = 50 mm.

Probetas 1T C(T), W = 50 mm			
Temperatura [°C]	$K_0$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$K_{min}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$b_K$
-154	41	26	1,97
-91	113	48	2,08
-60	157	93	1,91
-40	234	-13	4,52
-20	357	162	1,5

A continuación se muestran los resultados para las estimaciones de los parámetros en valores  $K$  para las probetas 2T C(T). Los parámetros estimados se muestran en la tabla V.

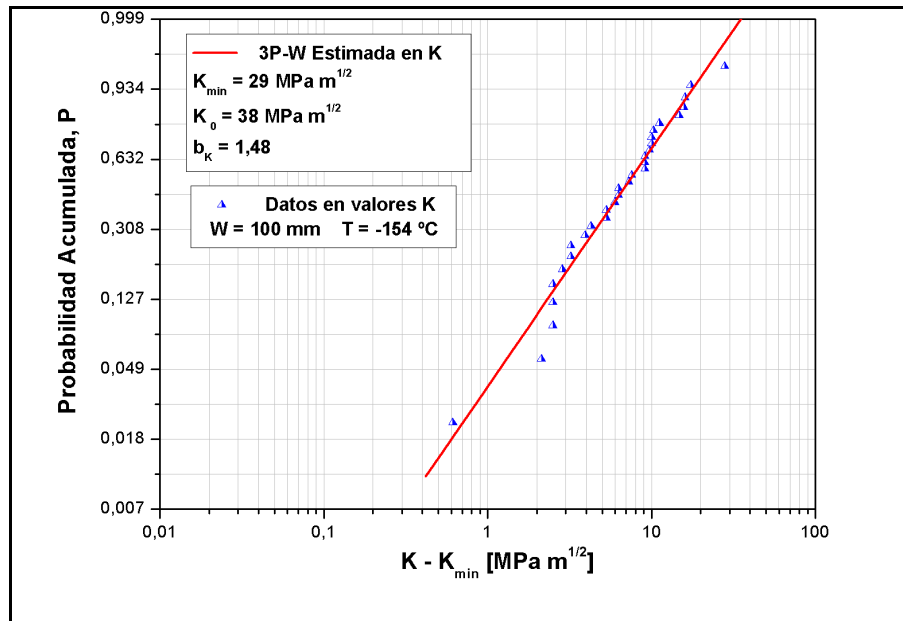


Figura 4.35. Gráfico de Weibull.

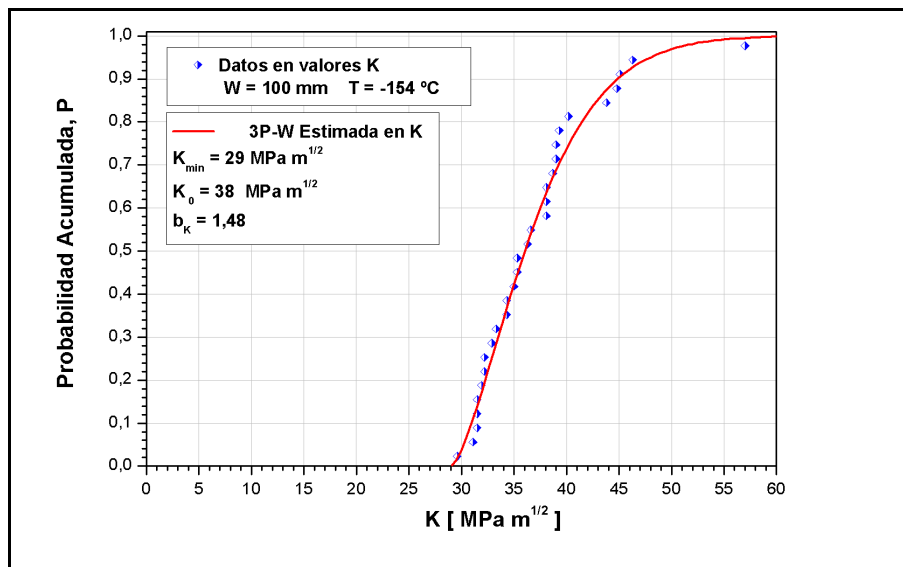


Figura 4.36 . Probabilidad acumulada de Weibull.

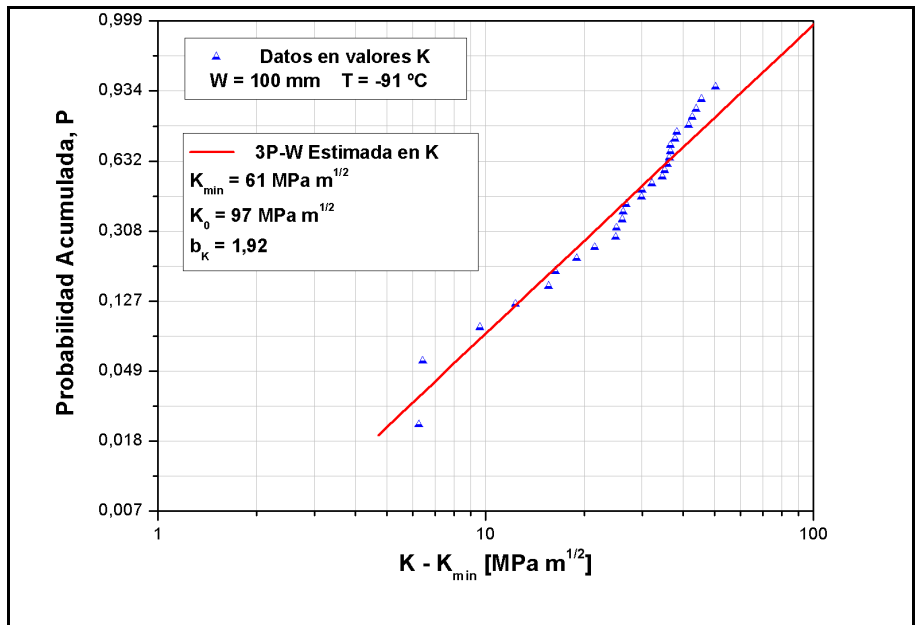


Figura 4.37. Gráfico de Weibull.

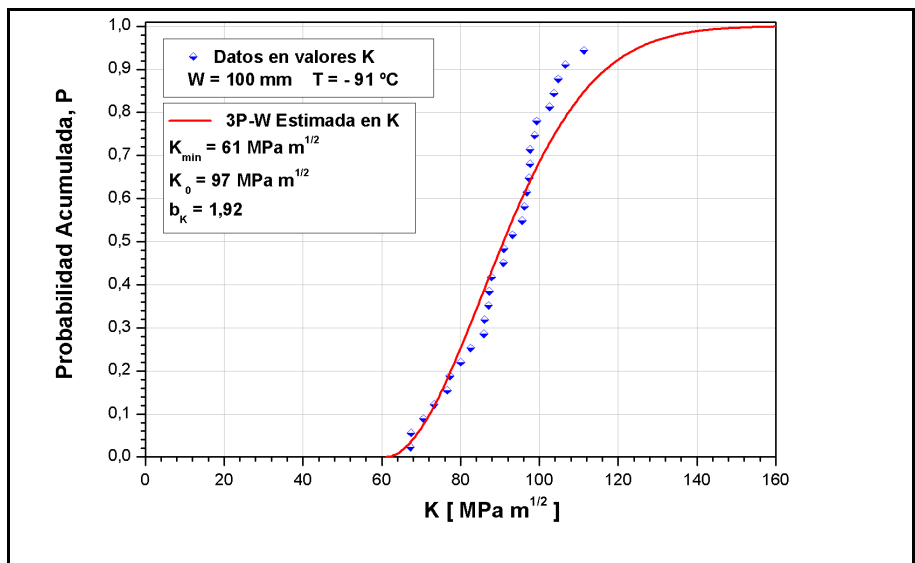


Figura 4.38 . Probabilidad acumulada de Weibull.

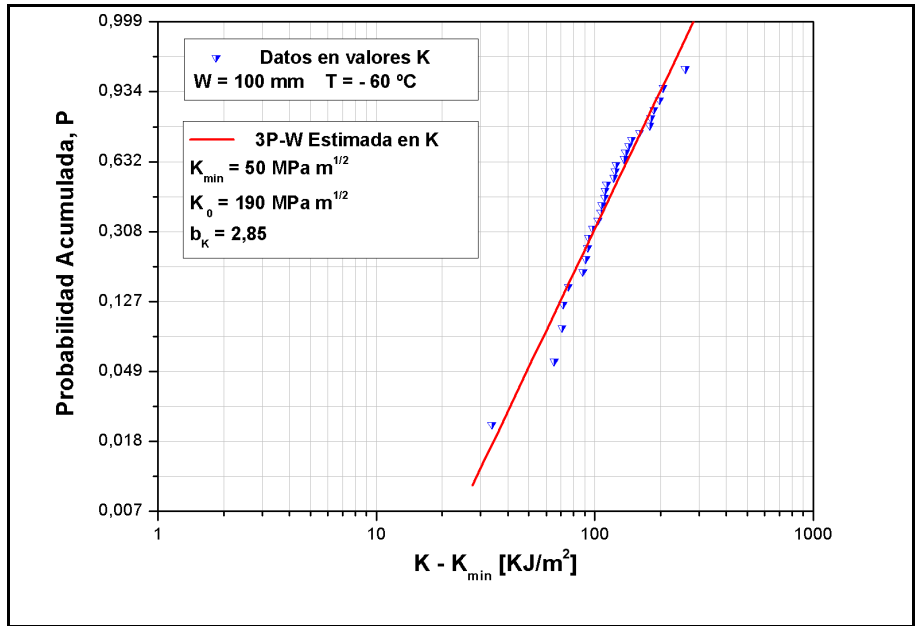


Figura 4.39. Gráfico de Weibull.

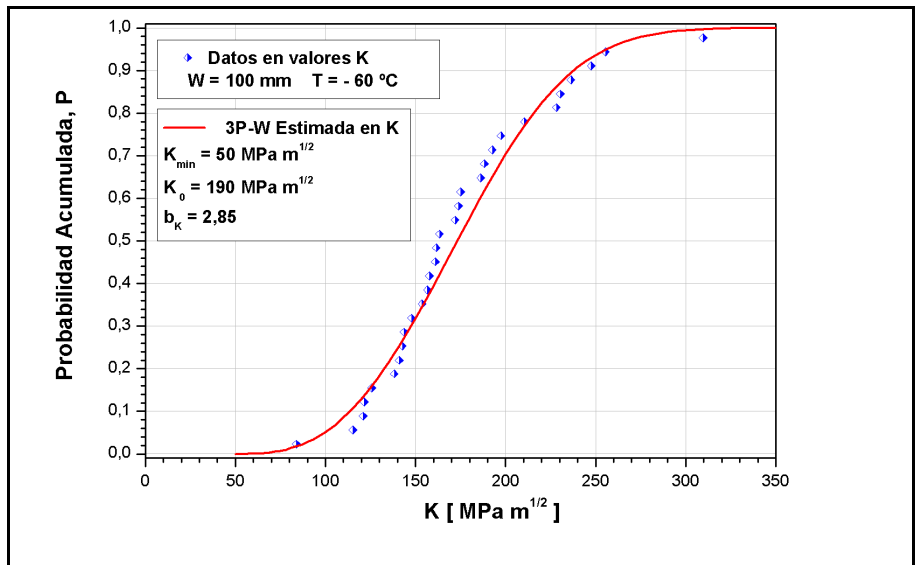


Figura 4.40 . Probabilidad acumulada de Weibull.

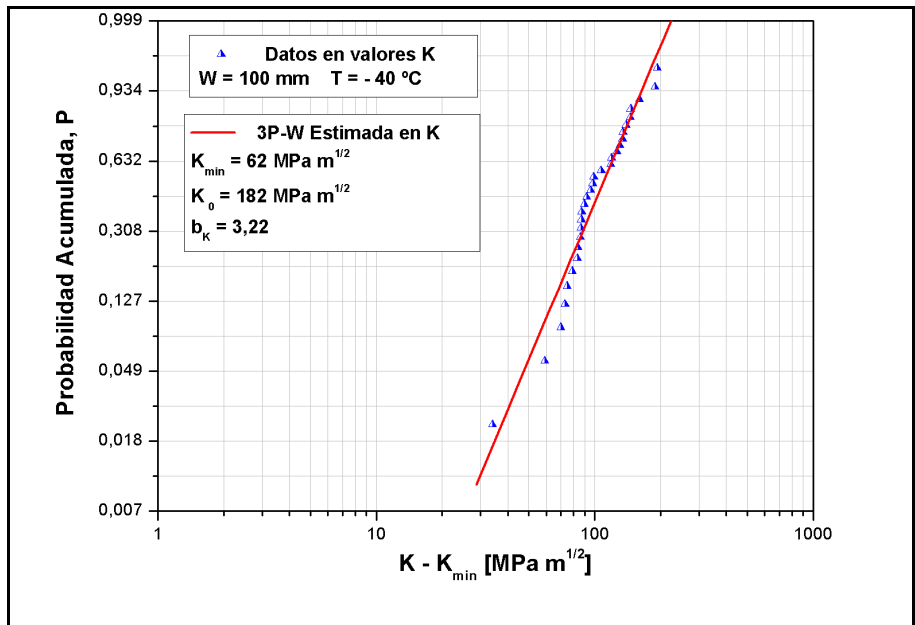


Figura 4.41. Gráfico de Weibull.

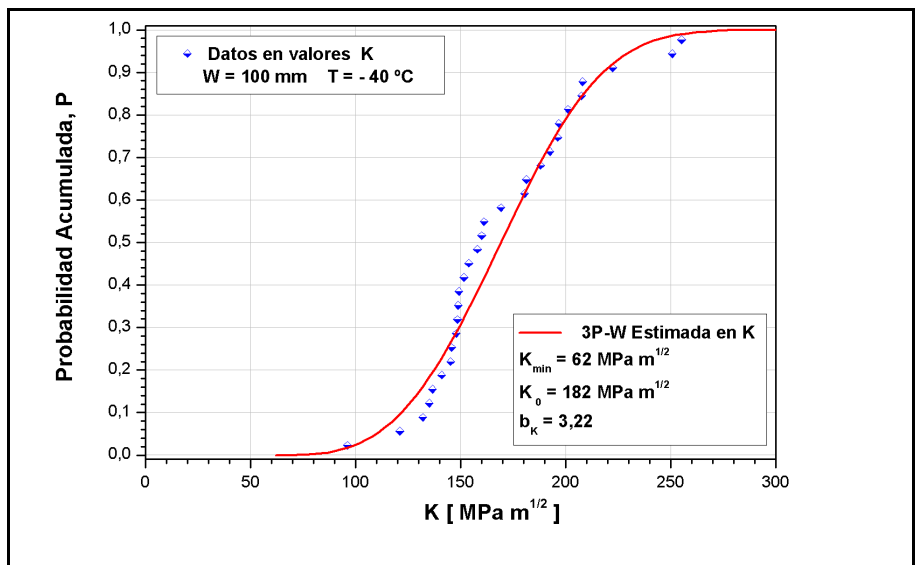


Figura 4.42 . Probabilidad acumulada de Weibull.

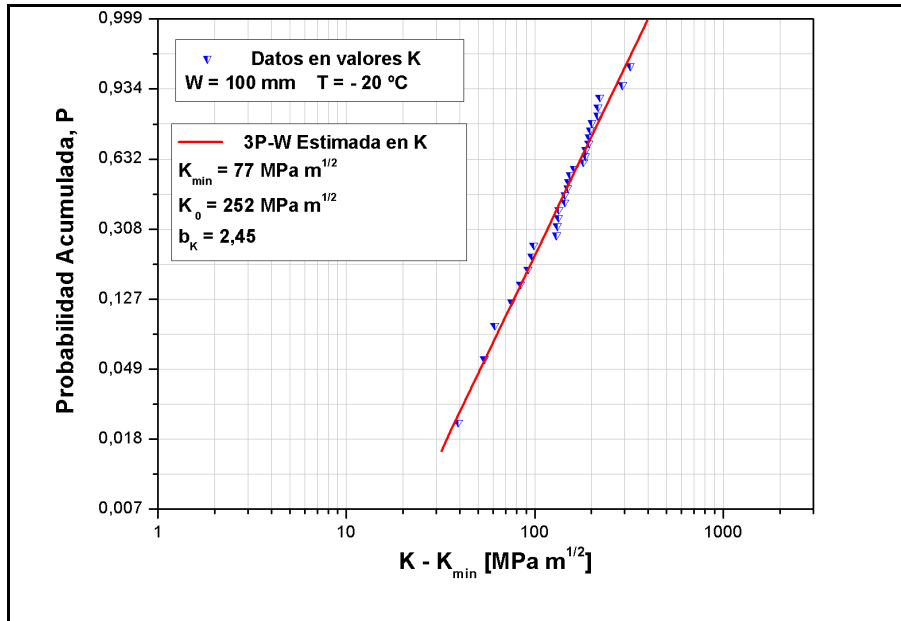


Figura 4.43. Gráfico de Weibull.

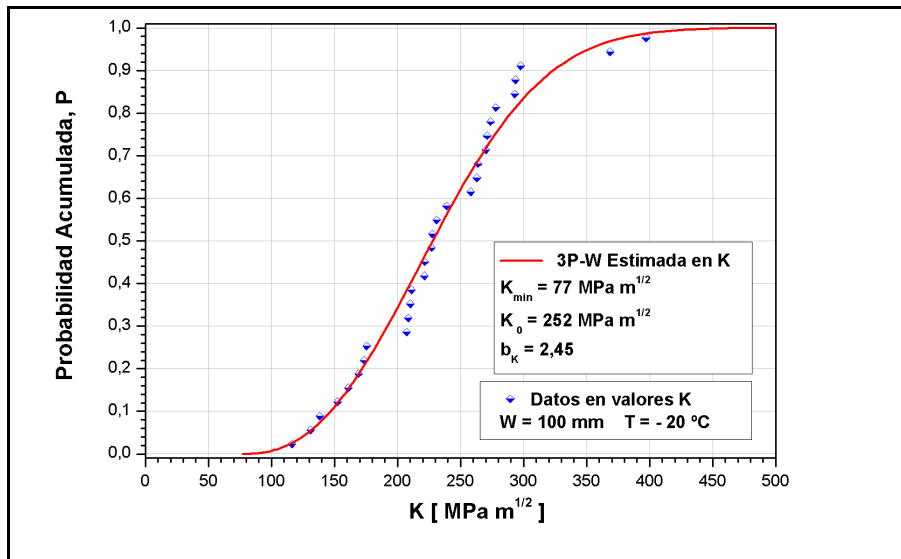


Figura 4.44 . Probabilidad acumulada de Weibull.

Tabla V. Parámetros de la 3P-W en valores K, W = 100 mm.

Probetas 2T C(T), W = 100 mm			
Temperatura [°C]	$K_0$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$K_{min}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$b_K$
-154	38	29	1,48
-91	97	61	1,92
-60	190	50	2,85
-40	182	62	3,22
-20	252	77	2,45



#### 4.4. Comparación transformando las funciones 3P-W

Para poder mostrar los resultados que se obtienen utilizando la transformación propuesta en el presente trabajo de tesis. Se toman los resultados de los parámetros de las 3P-W obtenidos en valores de **J** (punto 4.3.1 del presente capítulo), tanto para probetas 1C(T) W = 50 mm, como para las probetas 2 C(T) W = 100 mm. Y se los transforma en sus equivalentes en valores **K** por medio de las ecuaciones de transformación.

Es decir, para cada una de las temperaturas consideradas en el estudio, se tienen determinados los tres parámetros de la función de Weibull en valores **J**, Tablas II y III.

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{J - J_{\min}}{J_0 - J_{\min}}\right)^{b_J}} \quad (4.5)$$

Luego, por medio de las ecuaciones (4.7) y (4.8) se obtiene la función de Weibull transformada en términos de **K**, ecuación (4.6).

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{K - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}}\right)^{\xi b_J}} \quad (4.6)$$

Donde:

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1 - \nu^2)}} \quad K_{\min} = \sqrt{\frac{E J_{\min}}{(1 - \nu^2)}} \quad (4.7)$$

y

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}} \quad (4.8)$$

Seguidamente, los valores de los parámetros de la 3P-W(K) transformada desde **J**, se los compara con los parámetros de la 3P-W(K) estimados con el MRL utilizando los valores en **K** (punto 4.3.2 del presente capítulo, Tablas IV y V) para cada una de las temperaturas.

La comparación gráfica para las probetas 1T C(T), W = 50 mm, para las diferentes temperaturas se muestran en los siguientes gráficos, figura 4.45 a 4.49.

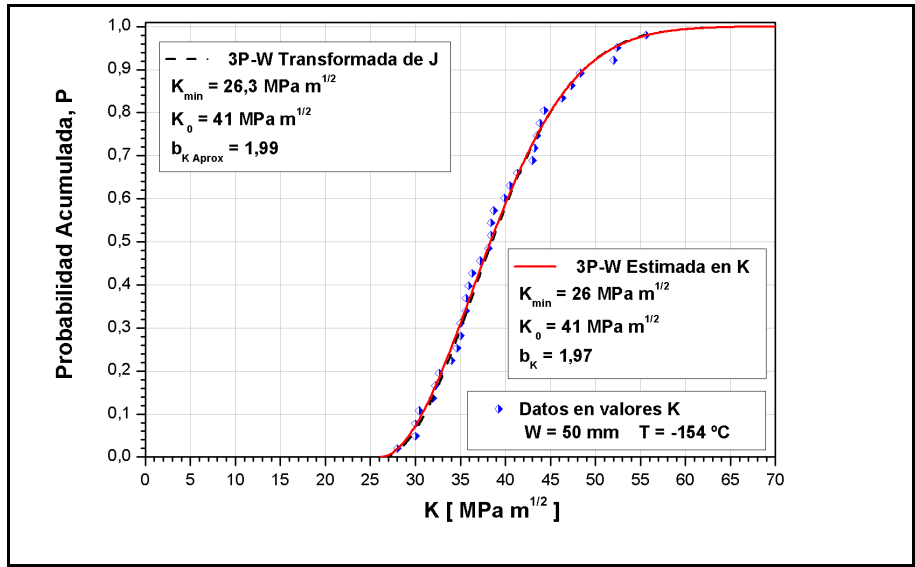


Figura 4.45 . Probabilidad acumulada de Weibull.

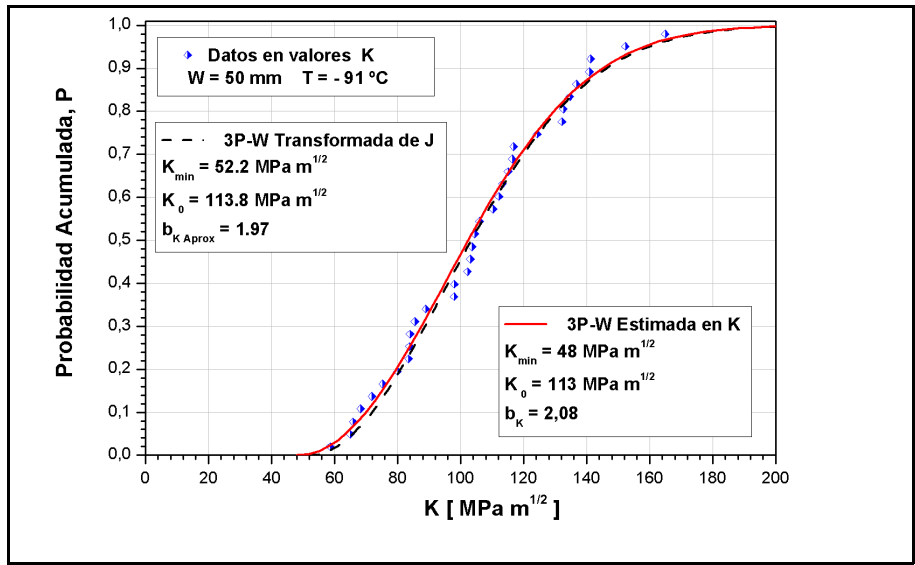


Figura 4.46 . Probabilidad acumulada de Weibull.

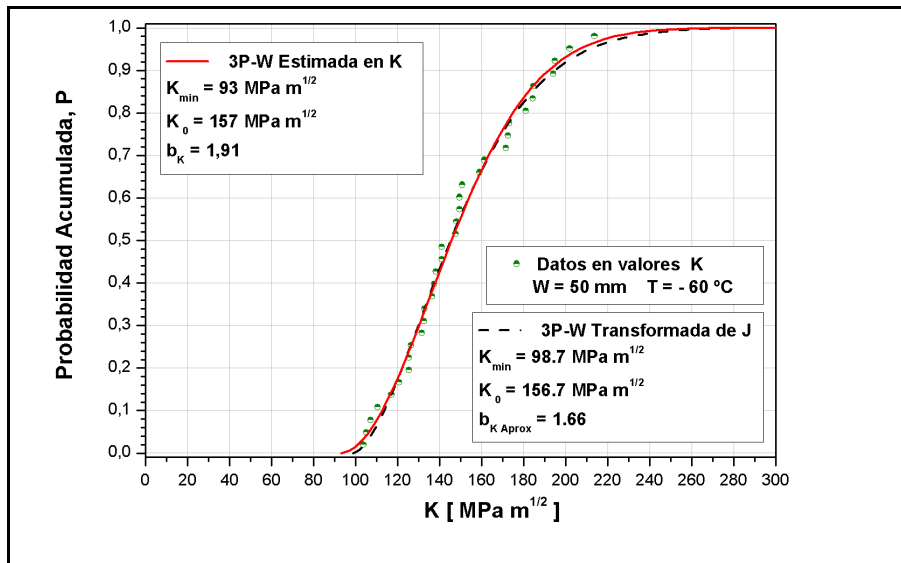


Figura 4.47 . Probabilidad acumulada de Weibull.

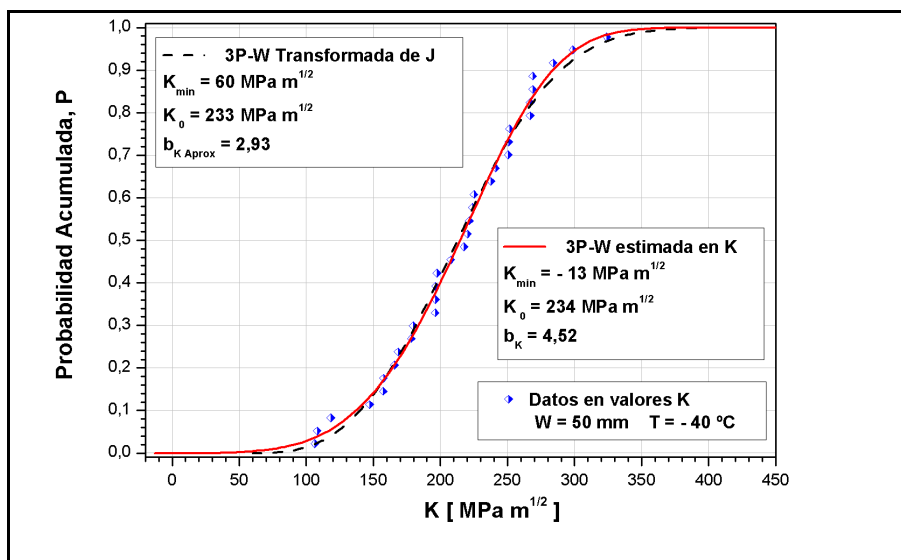


Figura 4.48 . Probabilidad acumulada de Weibull.

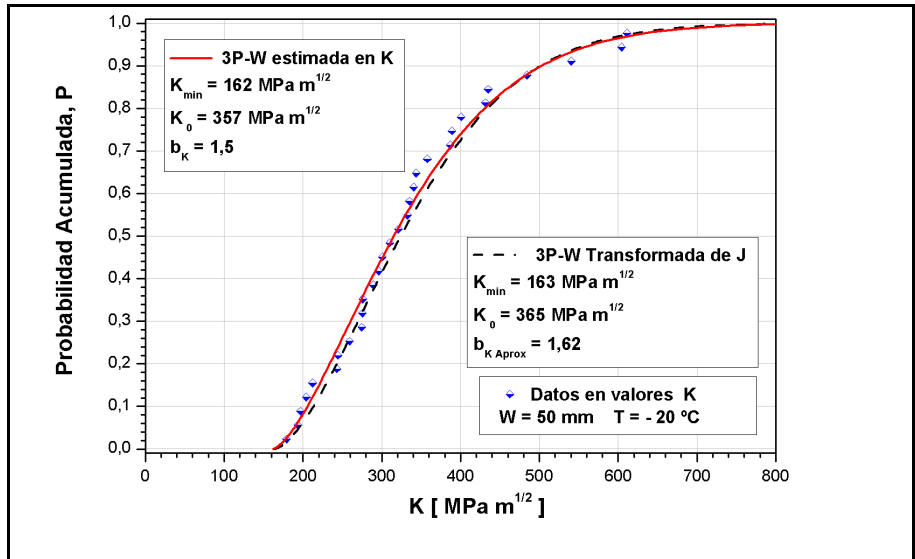


Figura 4.49 . Probabilidad acumulada de Weibull.

El resumen de las comparaciones se muestra en la tabla VI.

Tabla VI. Comparación de los parámetros obtenidos.

3P-W(K) Transformada desde J, W = 50 mm				3P-W(K) Estimada en K, W = 50 mm		
T [°C]	K <sub>0</sub>	K <sub>min</sub>	b <sub>K Aprox</sub>	K <sub>0</sub>	K <sub>min</sub>	b <sub>K</sub>
-154	41	26,3	1,99	41	26	1,97
-91	113,8	52,2	1,97	113	48	2,08
-60	156,7	98,7	1,66	157	93	1,91
-40	233	60	2,93	234	-13	4,52
-20	365	163	1,62	357	162	1,5

\* Los valores fueron transformados con E = 210 GPa y ν = 0,3.

La comparación gráfica para las probetas 2T C(T), W = 100 mm, para las diferentes temperaturas se muestran en los siguientes gráficos, figura 4.50 a 4.54.

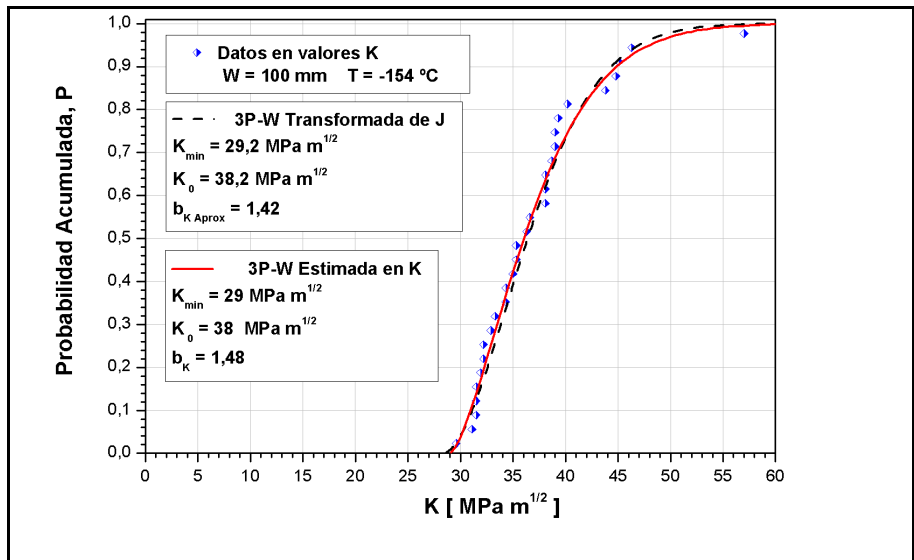


Figura 4.50 . Probabilidad acumulada de Weibull.

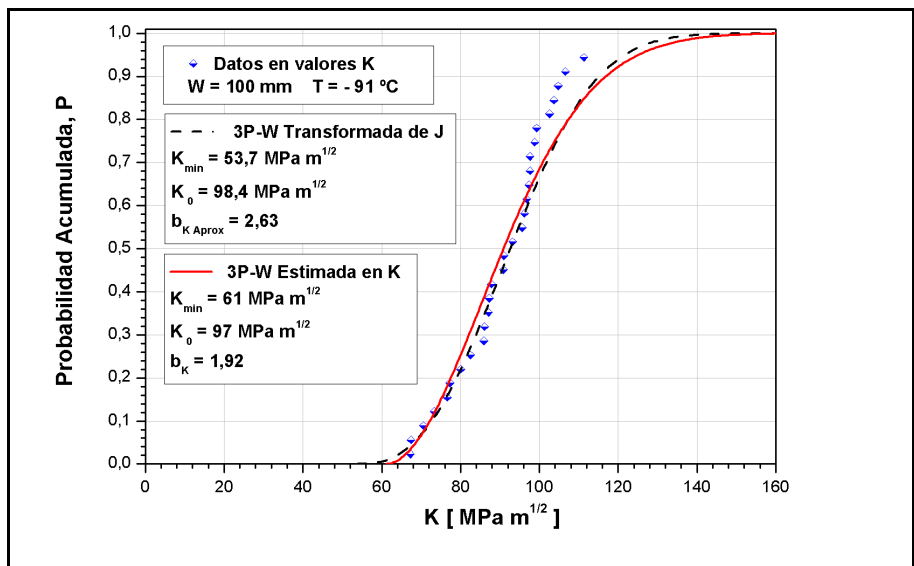


Figura 4.51 . Probabilidad acumulada de Weibull.

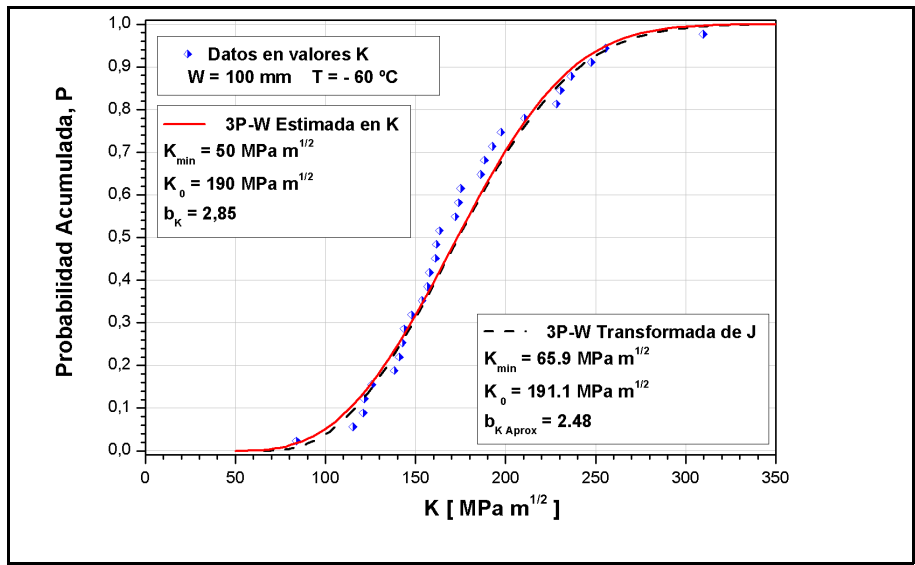


Figura 4.52 . Probabilidad acumulada de Weibull.

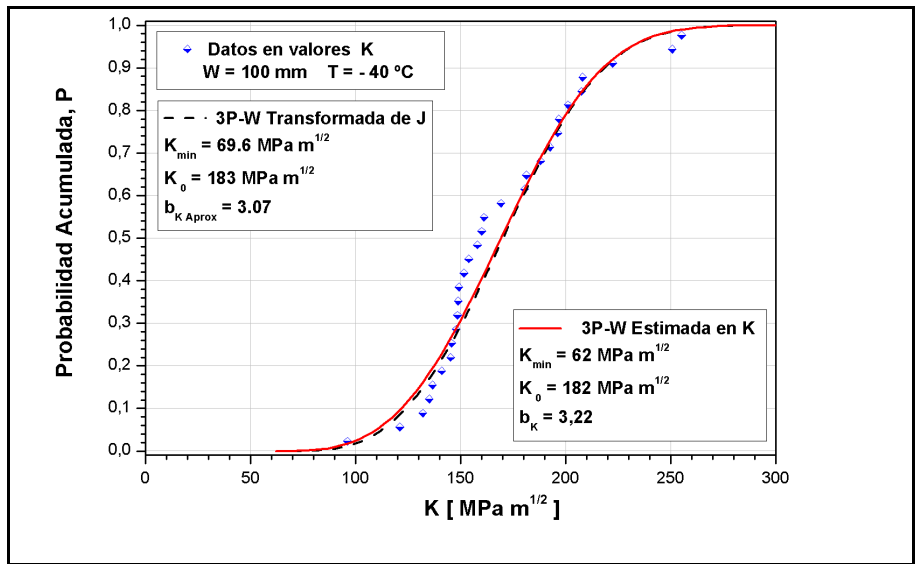


Figura 4.53 . Probabilidad acumulada de Weibull.

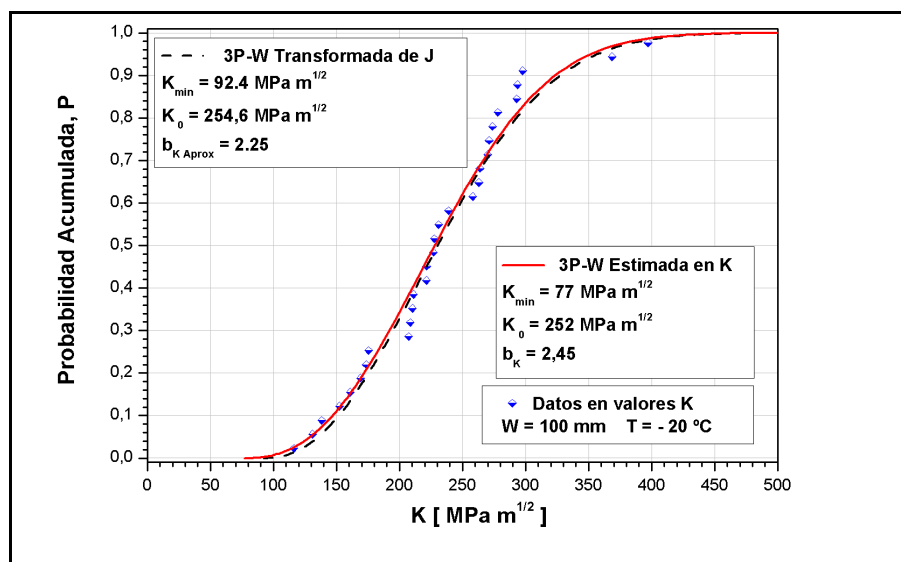


Figura 4.54 . Probabilidad acumulada de Weibull.

El resumen de las comparaciones se muestra en la tabla VII.

Tabla VII. Comparación de los parámetros obtenidos.

3P-W Transformada desde J, W = 100 mm				3P-W Estimada en K, W = 100 mm		
T [°C]	$K_0$	$K_{\min}$	$b_{K \text{ Aprox}}$	$K_0$	$K_{\min}$	$b_K$
-154	38,2	29,2	1,42	38	29	1,48
-91	98,4	53,7	2,63	97	61	1,92
-60	191,1	65,9	2,48	190	50	2,85
-40	183	69,6	3,07	182	62	3,22
-20	254,6	92,4	2,26	252	77	2,45

\* Los valores fueron transformados con  $E = 210 \text{ GPa}$  y  $\nu = 0,3$ .

## 4.5. Discusión de los Resultados

Como se puede observar a lo largo del presente capítulo, los valores de tenacidad a la fractura en la región de transición dúctil - frágil, tanto en valores **J** como en valores **K**, pueden ser aproximados por una función de Weibull de tres parámetros. Obteniendo buenas aproximaciones a los datos experimentales en ambos casos.

En el punto 4.3.1 del presente capítulo, se aproximaron con una 3P-W los datos experimentales en valores **J**. Si se analizan los parámetros obtenidos, para las probetas 1T C(T), se puede observar que el parámetro de escala  $J_0$  incrementa su valor a medida que se incrementa la temperatura. Lo mismo ocurre en general para el parámetro umbral  $J_{\min}$ . El parámetro de forma o pendiente  $b_J$ , para las temperaturas consideradas, resultó en un valor menor a 2 en todos los casos.

Para las probetas 2T C(T) se puede observar que los valores obtenidos para el parámetro umbral  $\mathbf{J}_{\min}$ , incrementa su valor a medida que se incrementa la temperatura. Una particularidad se observó en los valores obtenidos de  $\mathbf{J}_{\min}$ , para una misma temperatura, el valor umbral obtenido para probetas 1T C(T) es menor que el obtenido para probetas 2T C(T) en tres de las temperaturas consideradas (-154°C, -91°C y -40°C).

Para el caso del valor del parámetro de escala  $\mathbf{J}_0$  estimado de las probetas 2T C(T), éste resultó menor que el obtenido con las probetas 1T C(T), salvo para la temperatura -60°C donde tiene un valor mayor.

El parámetro de forma  $\mathbf{b}_J$  obtenido para las probetas 2T C(T) presentó valores cercanos a 2 a las temperaturas -91°C y -40°C, y valores menores a 2 para las restantes tres temperaturas.

En el punto 4.3.2, se aproximaron con una 3P-W los datos experimentales en valores  $\mathbf{K}$ . Analizando los parámetros obtenidos para las probetas 1T C(T) se puede observar que: el parámetro de escala  $\mathbf{K}_0$  incrementa su valor a medida que se incrementa la temperatura. Lo mismo ocurre en general para el parámetro umbral  $\mathbf{K}_{\min}$ , con excepción en la temperatura -40°C donde se obtuvo un valor de  $\mathbf{K}_{\min} = -13 \text{ MPa m}^{1/2}$  físicamente inconsistente. El parámetro de forma o pendiente  $\mathbf{b}_K$ , para las temperaturas consideradas, resultó por lo general en un valor menor a 4, salvo para la temperatura -40°C donde resultó igual a 4,52.

Para las probetas 2T C(T) se observó que los valores obtenidos para el parámetro umbral  $\mathbf{K}_{\min}$ , incrementan su valor a medida que se incrementa la temperatura, con excepción en la temperatura -60°C donde resultó un valor menor que a -91°C. Por otro lado, se observó que el parámetro de escala  $\mathbf{K}_0$  en general incrementa su valor a medida que aumenta la temperatura, salvo para la temperatura -40°C donde tiene un valor menor que a -60°C. El parámetro de forma  $\mathbf{b}_K$  obtenido para las probetas 2T C(T) presentó valores menores a 4 para todas las temperaturas consideradas.

Por último, en el punto 4.4, se realizó la comparación de las funciones 3P-W obtenidas por MRL y utilizando la transformación propuesta en la presente tesis. Se observó que al transformar las 3P-W obtenidas con valores  $\mathbf{J}$  a sus equivalentes en  $\mathbf{K}$ , las funciones 3P-W(K) obtenidas con la transformación aproximan en forma equivalentes que las funciones obtenidas por MRL a los datos experimentales expresados en  $\mathbf{K}$ . Mostrando en las comparaciones gráficas las excelentes aproximaciones obtenidas.

Sin embargo de las tablas VI y VII, se puede observar que los valores de los parámetros obtenidos por ambos métodos no siempre son equivalentes y/o comparables. Las mayores diferencias se encuentran en las predicciones de los valores umbrales y en las pendientes, para ambos métodos.

Tal como se mostró en el capítulo 3, no hay equivalencia exacta en los parámetros obtenidos con valores de  $\mathbf{J}_C$  que con los valores  $\mathbf{K}_{Jc}$ , aunque las funciones probabilidad acumulada describan bien los resultados experimentales. Es oportuno recordar la importancia práctica que tiene la determinación del valor umbral  $\mathbf{K}_{\min}$ , dado que este valor determina la probabilidad nula de falla, es decir, cualquier valor ya sea en  $\mathbf{J}$  o en  $\mathbf{K}$  menor al valor umbral  $\mathbf{J}_{\min}$  o  $\mathbf{K}_{\min}$ , la probabilidad de fallar por fractura es nula.



Una inconsistencia física que se observó, la cual es de suma importancia por lo mencionado anteriormente, fue el valor umbral obtenido por MRL en valores  $\mathbf{K}$  para las probetas 1T C(T) a la temperatura  $-40^{\circ}\text{C}$ ,  $\mathbf{K}_{\min} = -13 \text{ MPa m}^{1/2}$ . Sin embargo, dicha inconsistencia no se presentó con la propuesta de transformación de los parámetros desde la función estimada a partir de  $\mathbf{J}$ . Es decir, aparentemente sería más apropiado para evitar este tipo de inconsistencias físicas, estimar los parámetros por MRL de la función 3P-W utilizando valores  $\mathbf{J}$  y luego transformar los parámetros a sus equivalentes en términos de  $\mathbf{K}$  para obtener así la función de Weibull 3P-W(K) en valores de  $\mathbf{K}$ .

Para finalizar se puede indicar que el comportamiento de los parámetros transformados en función de la temperatura fue el mismo que se observó con los parámetros obtenidos por MRL con los valores  $\mathbf{K}$ .

## Referencias Bibliográficas

- [1] Heerens J., Hellmann D., “Development of the fracture toughness Dataset”, Engineering Fracture Mechanics vol 69, pp. 421-449, 2002.
- [2] Perez Ipiña, J., “Transición dúctil frágil de aceros ferríticos. Algunos aspectos todavía abiertos”, Revista de la Asociación Argentina de Materiales - SAM, N° 3 - Año 2007.
- [3] ASTM E 1820, “Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness”, Annual Book of ASTM Standards, 2005.
- [4] Korin I., Larrainzar C., Perez Ipiña J., “Crack length and stable crack extension measurements from images acquired by means of a conventional flatbed scanner”, Fatigue Fract Engng Mater Struct - vol 30, pp. 876–884, Blackwell Publishing Ltd, 2008.
- [5] Berejnoi, C., “Incidencia del fenómeno Pop-in en la tenacidad a la fractura de uniones soldadas”, Tesis Doctoral, U N de la Plata, Facultad de Ingeniería, 2001.
- [6] Perez Ipiña J, Centurion SMC, Asta E, “Minimum Number of Specimens to Characterize Fracture Toughness in the Ductile-to-Brittle Transition Region”, Eng. Fracture Mechanics, Vol. 47 (3), pp. 457-463, 1994.
- [7] ASTM E 1921, “Standard Test Method for Determination of Reference Temperature,  $T_0$ , for Ferritic Steels in the Transition Range”, Annual Book of ASTM Standards, Vol. 03.01, 2002.
- [8] Landes, J. D. and McCabe, D. E., “ The Effect of Section Size on the Transition Behavior of Structural Steels”, Scientific Paper de Westinghouse R&D Center, 1982.
- [9] Perez Ipiña J, “Mecánica de Fractura”, Editorial Alsina, primera edición, 2004.

## Capítulo 5: Conclusiones de la Tesis

1. En el Capítulo 3 se demostró que si los valores de tenacidad a la fractura en términos de **J** se distribuyen según una función de Weibull de tres parámetros (3P-W), los valores transformados en **K** no lo hacen exactamente según una función 3P-W ( y viceversa), pero sin embargo, estos valores en términos de **K** se podrían aproximar con una 3P-W.
2. Se demostró que la equivalencia entre las pendientes  $\mathbf{b}_K = 2 \mathbf{b}_J$  solo se cumple para la función 2P-W, y si esta equivalencia se trata de aplicar a una 3P-W los errores pueden ser importantes.
3. Se mostró que los parámetros de escala y umbral deben ser equivalentes y consistentes en sus valores, tanto si son expresados en términos de **J** como en términos de **K**.

$$K_0 = \sqrt{\frac{E J_0}{(1-\nu^2)}} \qquad K_{\min} = \sqrt{\frac{E J_{\min}}{(1-\nu^2)}}$$

4. El parámetro de forma o pendiente de Weibull en término de **K** puede ser aproximado por  $\mathbf{b}_{KAp} = \xi \mathbf{b}_J$  donde  $1 < \xi < 2$  y depende de  $K_0$  y  $K_{\min}$ .

$$\xi = \frac{2 K_0}{K_0 + K_{\min}}$$

5. El parámetro de forma o pendiente de Weibull en término de **J** puede ser aproximado por  $\mathbf{b}_{JAp} = \mathbf{b}_K / \xi$ , donde  $1 < \xi < 2$  y depende de  $J_0$  y  $J_{\min}$ .
6. Estimando los parámetros de la función 3P-W con datos en **J**, por medio del Método de Regresión Lineal, y luego transformando los parámetros a sus equivalentes en **K**, se evitarían inconsistencias físicas que pueden aparecer estimando los parámetros con el MRL directamente con los valores experimentales expresados en **K**.
7. A pesar de que en el análisis teórico del Capítulo 3 no se hicieron suposiciones acerca de cual función describe mejor el comportamiento de la dispersión de los datos experimentales de tenacidad a la fractura en la región de transición dúctil - frágil, los resultados experimentales analizados parecen indicar que las evaluaciones en términos de **J** dieron siempre valores físicamente consistentes. Tal cosa no ocurrió con las estimaciones realizadas en términos de **K**.

Por ello, no está definido aún qué función describiría mejor el comportamiento de la dispersión de los datos experimentales de tenacidad a la fractura en la región de transición dúctil - frágil: una función 3P-W en término de **J** o una 3P-W en término de **K**. Éste es un tema que está fuera de los objetivos de la presente tesis.

## Anexo A: Datos utilizados en la estimación de parámetros

A continuación se detallan todos los datos utilizados en el presente trabajo de Tesis para la estimación de los parámetros de la función de Weibull, estos fueron extraídos de la *Euro Fracture Toughness Dataset*. Se detallan dos tablas, en la primer tabla, están los datos de las probetas C(T) con un espesor  $W = 50$  mm, en la siguiente tabla, están los datos de las probetas C(T) con un espesor  $W = 100$  mm. En ambas tablas se encuentran los valores de  $J$  [ $\text{KJ/m}^2$ ] para las temperaturas:  $-20^\circ\text{C}$ ,  $-40^\circ\text{C}$ ,  $-60^\circ\text{C}$ ,  $-91^\circ\text{C}$  y  $-154^\circ\text{C}$  consideradas en el estudio.

Probetas C(T) - $W$ [mm] = 50					
Temperatura [ $^\circ\text{C}$ ] =	-20	-40	-60	-91	-154
Datos	J [ $\text{KJ/m}^2$ ]	J [ $\text{KJ/m}^2$ ]	J [ $\text{KJ/m}^2$ ]	J [ $\text{KJ/m}^2$ ]	J [ $\text{KJ/m}^2$ ]
1	139	49.1	46.7	14.9	3.4
2	162	50.6	48	18.3	3.9
3	168.1	60.6	49.9	18.8	3.9
4	180.6	93.8	52.9	20.2	4
5	195.2	107.4	59.4	22.4	4.4
6	256	107.5	63.1	24.6	4.5
7	259	119	68.1	27.7	4.6
8	291	122.7	68.2	30.2	5
9	326.5	137.8	69.2	30.4	5.2
10	328.8	139.9	75.1	30.6	5.3
11	330	166.5	76.2	31.7	5.3
12	362.3	167	76.5	34.3	5.5
13	380	167	80.6	41.5	5.5
14	392	168.9	81.9	41.6	5.6
15	417	187	82.9	45.3	5.7
16	447	205.3	86.1	46.1	6
17	480	210	86.2	46.5	6.3
18	486.8	212.8	94.4	47.3	6.4
19	502	217.1	95.1	48.7	6.4
20	512	219.3	96.8	52.7	6.5
21	555	245	97	54.6	6.9
22	648.8	251.8	98.6	55.6	7.1
23	655.6	271.9	109.7	57.4	7.4
24	695	272.7	112.9	58.7	8
25	807	274.2	127.4	59.1	8.1
26	820	308.7	129.1	67	8.2
27	1017	308.8	129.9	75.7	8.3
28	1266	313.1	142.3	76.2	8.5
29	1582	313.1	147.4	78.6	9.3
30	1619	349.4	147.8	81	9.7
31	-	386.6	163.2	86	10.1
32	-	455.2	164.7	86.5	11.7
33	-	-	176.8	100.5	11.9
34	-	-	198	117.8	13.4

Probetas C(T) - W [mm] = 100					
Temperatura [°C] =	-20	-40	-60	-91	-154
Datos	J [KJ/m <sup>2</sup> ]	J [KJ/m <sup>2</sup> ]	J [KJ/m <sup>2</sup> ]	J [KJ/m <sup>2</sup> ]	J [KJ/m <sup>2</sup> ]
1	58.6	40	30.4	19.6	3.8
2	74.4	63.5	57.5	19.7	4.2
3	82.8	75.5	63.3	21.6	4.3
4	100.6	79.1	64	23.3	4.3
5	112.2	81	68.5	25.4	4.3
6	123.7	86.1	82.8	25.9	4.4
7	130.8	91.5	86.1	27.7	4.5
8	133.4	92.1	88.3	29.5	4.5
9	186.1	94.8	89.4	32	4.7
10	188.4	95.6	94.5	32.1	4.8
11	191.7	96	102.2	32.9	5.1
12	193	96.4	106.3	33	5.1
13	212.3	99.6	107.7	33.4	5.3
14	212.5	102.6	112.3	35.8	5.4
15	223	108.2	113	35.9	5.4
16	224.4	110.9	115.5	37.6	5.7
17	231.2	112.4	128.1	39.6	5.8
18	247.3	124	131.1	40.1	6.3
19	288.5	141.2	132.7	40.6	6.3
20	299.8	142.5	150.2	41.1	6.3
21	301.3	153.4	153.5	41.3	6.5
22	315.9	160.5	160.8	41.3	6.6
23	318.2	166.8	168.9	42.3	6.6
24	324.6	167.8	191.9	42.7	6.7
25	334.9	175.4	225.7	45.6	7
26	371.9	186.7	230	46.6	8.3
27	373.5	187.7	241.9	47.6	8.7
28	384.1	214.1	265.4	49.2	8.8
29	588.7	272.3	282.6	53.7	9.3
30	683.1	282.2	415.3	126.4	14.1

Todo los resultados obtenidos en la *Euro Fracture Toughness Dataset* fueron recopilados y publicados en forma de resumen en el documento: **Heerens J., Hellmann D., “Development of the fracture toughness Dataset”, Engineering Fracture Mechanics vol 69, pp. 421-449, 2002.**

Además estos datos están disponibles con todos sus detalles en la página web: <ftp://ftp.gkss.de/pub/eurodataset>

## **Anexo B: Actividades Adicionales al Trabajo de Tesis**

Para el desarrollo del presente trabajo de tesis se contó con una beca doctoral de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT). Durante los tres años que duró la beca se realizaron tareas de: formación académica, investigación y vinculación con la industria. Los trabajos se desarrollaron en el Laboratorio de Propiedades Mecánicas (LPM) de la Universidad Nacional del Comahue, como así también en el Laboratorio de Metalurgia de la Universidad Nacional del Sur. Los mismos estuvieron bajo la dirección del Prof. Juan Perez Ipiña y la codirección del Prof. Lucio Iurman.

### **Cursos de Posgrado**

- **Metodología de la investigación científica** - Universidad Nacional del Sur - Departamento de Ingeniería - 2006. Dictado por la Mg. Fabiana Tolcachier
- **Mecánica de Fractura** - Universidad Nacional del Sur - Departamento de Ingeniería - 2007. Dictado por el Prof. Juan Perez Ipiña.
- **Estructura y Propiedades de los Materiales** - Universidad Nacional del Sur - Departamento de Ingeniería - 2007. Dictado por el Prof. Lucio Iurman y Prof. Alberto Lucaioli.
- **Análisis de Fallas y Selección de Materiales** - Universidad Nacional del Sur - Departamento de Ingeniería - 2007. Dictado por el Dr. Alberto Monsalves.
- **Análisis de regresión** - Universidad Nacional del Sur - Departamento de Matemática - 2007. Dictado por Dra. Nelida Winzer.
- **Tratamientos Térmicos y Termomecánicos** - Universidad Nacional del Sur - Departamento de Ingeniería - 2007. Dictado por Prof. Lucio Iurman y Prof. Alberto Lucaioli.

### **Publicaciones Internacionales**

- **Crack Length and Stable Crack Extension Measurements from Images Acquired by means of a Conventional Flatbed Scanner** - I. Korin, C. Larrainzar and J. Perez Ipiña - *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 30 pp 876-884, 2008.
- **Comparison of 3P-Weibull in data sets based on J and K** - Larrainzar César, Berejnoi Carlos, Perez Ipiña Juan - Trabajo aceptado para publicación el 04 de Mayo del 2010 en *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*.
- **Analysis of Fatigue Crack Growth and Estimation of Residual Life of the Walking Beam of an Oilfield Pumping Unit** - Larrainzar César, Korin Ivan, Perez Ipiña Juan - *Engineering Failure Analysis*, Vol. 17 pp 1038-1050, 2010.

## Congresos

- **Estimation of Fatigue Residual Life of the Superior I-Beam of an Oilfield Pumping Unit** - Larrainzar César, Perez Ipiña Juan - 19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2007 - Brasilia - Brasil.
- **Estimación de la vida residual a fatiga de la viga superior de un equipo de extracción de petróleo** - Larrainzar César, Perez Ipiña Juan - SAM / CONAMET 2006 - Santiago de Chile.
- **Transformaciones de valores  $J_c$  en  $K_{Jc}$  usando la función de Weibull** - Larrainzar César, Berejnoi Carlos, Perez Ipiña Juan - II Jornadas Regionales de Ciencia y Tecnología de las Facultades de Ingeniería del NOA - CT06 - Catamarca 2006.
- **Medición óptica de longitud y crecimiento estable de fisura mediante la adquisición de imágenes con un escáner convencional** - Korin Iván, Larrainzar César, Perez Ipiña Juan - SAM / CONAMET 2007 - San Nicolás.

## Vinculación con la Industria

- Se realizaron numerosos ensayos Normalizados de Tenacidad a la Fractura, en total más de 200 ensayos, se evaluaron: CTOD,  $J_5$ , Integral-J,  $K_{Jc}$  y Curvas R, estos ensayos fueron realizados para varias empresas como: IMPSA S.A., INVAP Ingeniería, TENARIS - CINI, Techint Construcciones. Utilizando normas internacionales tales como: ASTM E 1820, ASTM E1921, ASTM E399, BS 7448 part 1 to 4, API 1104 y DNV-RP-F108.
- Ensayos en Materiales Compuestos. Ensayos normalizados para determinar propiedades mecánicas en materiales compuestos fueron realizados para la empresa IMPSA WIND, utilizando las norma internacionales: ASTM D3039, ASTM D3410, ASTM D7078, ASTM D2344.