



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Ingeniería

**Aplicación de la Teoría de Bifurcaciones
en Sistemas de Potencia Eléctrica**

Gustavo Revel

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2010



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Ingeniería

**Aplicación de la Teoría de Bifurcaciones
en Sistemas de Potencia Eléctrica**

Gustavo Revel

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2010

A mis seres queridos.

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica “Alfredo Desages” (IIIE, UNS - CONICET) y en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras (DIEC), durante el período comprendido entre Abril de 2005 y Octubre de 2009, bajo la dirección de los doctores Jorge L. Moiola y Diego M. Alonso, ambos profesores de este último departamento.

Agradecimientos

*Trabajé siempre para mi patria poniendo voluntad, no incertidumbre;
método, no desorden; disciplina, no caos; constancia, no improvisación;
firmeza, no blandura; magnanimidad, no condescendencia.*

Manuel Belgrano

Esta tesis es el resultado final del esfuerzo y apoyo de varias personas. Deseo entonces agradecer profundamente a mi mamá y a mi hermano, a mis tíos Ariel y Zulema, y a mi novia Yamila. A todos ustedes gracias por el apoyo incondicional que siempre me han brindado. También deseo recordar y agradecer a mi papá, quien me ha enseñando la importancia que poseen los valores humanos como la amistad, el respeto y la honestidad. Te recordaré por siempre!

Además quisiera expresar un profundo agradecimiento a mis amigos y compañeros de la universidad, Andrés G., Andrés L., Franco, Lucas, Rodrigo y Santiago. También por supuesto a mis amigos de siempre, Beto, Benjamín, Guillermo, Sebastián y Sergio.

Por otro lado, esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo y la guía que me brindaron mis directores Diego y Jorge, los cuales además de destacarse como investigadores, son por sobre todas las cosas excelentes personas. A su vez, deseo extender este reconocimiento a los restantes miembros del grupo de investigación. Belén, Eduardo y Guillermo, muchas gracias a ustedes también.

Finalmente, quisiera agradecer a los jurados de la tesis, el Dr. Claudio Cañizares, el Dr. Hernán Cendra y la Dra. María Inés Valla, ya que sus puntos de vista y sugerencias han enriquecido tanto mi formación como los contenidos de la misma.

Gustavo Revel

Bahía Blanca, 25 de Marzo de 2010.

Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Resumen

Los sistemas de potencia eléctrica se encuentran entre los sistemas ingenieriles de mayor complejidad que existen en la actualidad. Por ende, los fenómenos dinámicos que éstos experimentan son también de naturaleza compleja y a veces no se cuenta con las herramientas apropiadas para su correcto análisis. Esto es debido a que muchos de estos fenómenos son de carácter no lineal, y en algunas ocasiones se manifiestan como interacciones entre partes del sistema que *a priori* no poseen una relación evidente. Por otro lado, debido al incremento de la demanda y las restricciones económicas (entre otros factores), los sistemas de potencia se ven forzados a operar en cercanías de sus límites de estabilidad, quedando más vulnerables a perturbaciones en las condiciones de operación. Además, el desempeño del sistema en tales circunstancias muchas veces no es el adecuado, ya que las condiciones de operación distan de las que originalmente se propusieron en la etapa de diseño. Por todas estas razones resulta de interés estudiar el comportamiento del mismo ante variaciones en sus parámetros, como por ejemplo el consumo de una carga o la ganancia de un controlador, de manera de retratar los posibles escenarios dinámicos derivados de tales variaciones.

La presente tesis aborda el estudio de la dinámica de los sistemas de potencia eléctrica utilizando la teoría de bifurcaciones. Para ello se analizan los distintos comportamientos dinámicos que exhibe el sistema ante variaciones cuasiestacionarias en los parámetros, estudiando los cambios cualitativos en la dinámica (*i.e.*, bifurcaciones) originados por tales variaciones. En este sentido, en determinados casos es posible asociar el fenómeno de colapso de voltaje a la ocurrencia de una bifurcación silla-nodo. Como consecuencia de dicha singularidad, el punto de operación desaparece al aumentarse la potencia reactiva consumida por la carga y a raíz de ello las tensiones caen súbitamente, dando origen al colapso de voltaje. Otro fenómeno característico de índole no lineal son las oscilaciones sostenidas, que en muchas ocasiones pueden ser explicadas mediante el análisis de la bifurcación de Hopf. En esta singularidad el punto de equilibrio se vuelve inestable y el sistema experimenta una oscilación estable o ciclo límite. Nótese que esto implica que todas las variables del sistema de potencia oscilan de manera sostenida y, dependiendo de la amplitud, puede ser nocivo para la operación del mismo.

Previo al estudio de los sistemas de potencia se analiza la dinámica de un circuito oscilador eléctrico que puede ser considerado como una plataforma de ensayos para profundizar los conocimientos e investigar acerca de interacciones entre modos oscilatorios y resonancias para luego trasladarlos a los sistemas de potencia. En particular se estudia la dinámica asociada a una bifurcación de Hopf doble (dos bifurcaciones de Hopf simultáneas). Se presentan varios diagramas de bifurcaciones generados a partir esta singularidad, así como algunos comportamientos dinámicos hallados en cercanías de una de resonancia 2:3 en la bifurcación de Hopf doble. Esta resonancia no ha sido estudiada en la literatura especializada. Además, se consideran singularidades de tipo *fold-flip*, donde interactúan bifurcaciones de silla-nodo de ciclos límites (*fold*) y de doble período (*flip*). Esta singularidad ha sido reportada en una única ocasión en sistemas continuos y genera complejas interacciones entre ciclos límites.

En esta tesis se estudian dos modelos de sistemas de potencia con estructuras muy diferentes. En primera instancia se analiza un modelo simplificado de 3 barras (4 variables de estado), donde el énfasis no es puesto en los detalles de modelado, sino en la comprensión de los fenómenos dinámicos que éste experimenta ante la variación de uno y dos parámetros. Posteriormente, se estudia la dinámica de un modelo multimáquina de 9 barras modelado en forma detallada (70 variables de estado), que toma en cuenta tanto la dinámica mecánica y la eléctrica de los generadores y de las cargas (incluyendo los lazos de control de tensión y frecuencia), así como la respuesta dinámica de las líneas de transmisión. Ante la variación de un parámetro, la dinámica es similar a la del modelo de 3 barras (ambos experimentan bifurcaciones de Hopf y silla-nodo), pero esto no es así cuando se consideran variaciones en dos parámetros. En el modelo simplificado el escenario dinámico está dominado por una singularidad de Bogdanov-Takens, que conjuga la dinámica generada por las bifurcaciones de Hopf y silla-nodo, y en esta tesis ha sido hallada por primera vez en una región de operación factible. Por otro lado, en el modelo de 9 barras se distinguen tres singularidades cuando se consideran variaciones de dos parámetros: dos bifurcaciones de Hopf dobles, en las cuales se combinan los efectos de dos bifurcaciones de Hopf, dando como resultado soluciones cuasiperiódicas (toros 2D y 3D) y una singularidad de Gavrilov-Guckenheimer, donde también interactúan la bifurcación de Hopf y la silla-nodo. La dinámica asociada a las singularidades de Hopf doble, así como su coexistencia con una bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer, no ha

sido estudiada con anterioridad en la literatura de los sistemas de potencia.

Estas singularidades pueden ser consideradas como centros organizadores de la dinámica local del sistema, y mediante su estudio es posible inferir el comportamiento dinámico del sistema ante variaciones en los parámetros. A su vez, con el fin de ampliar el conocimiento del sistema se combinan los resultados del análisis de la dinámica con técnicas tradicionales, como por ejemplo, el cálculo de los factores de participación para identificar los modos responsables de oscilaciones producto de bifurcaciones de Hopf. Por último, como resultado de la combinación de estas técnicas, se analiza la inclusión de un estabilizador de sistemas de potencia para amortiguar un modo electromecánico problemático. La ubicación del estabilizador es determinada mediante el cálculo de los factores de participación, mientras que su efecto en la dinámica es mostrado en el nuevo diagrama de bifurcaciones mediante la ampliación de la región de operación posible del sistema. De esta forma también se pretende mostrar cómo el estudio de la dinámica de sistemas puede también auxiliar en la comprensión de los fenómenos observados en los sistemas de potencia eléctrica.

Abstract

Power systems are currently among the most complex engineering systems. Hence, their dynamical phenomena are also intricate and sometimes there are no suitable tools available for their appropriate treatment. This is due to the nonlinear nature of these phenomena, which are usually manifested as interactions between parts of the system having, *a priori*, no clear relationship. On the other hand, due to the increasing demand of power and economic restrictions (among other factors), power systems are forced to operate near their stability limits, turning them more vulnerable to perturbations in the operating conditions. In addition, the performance of the system is, many times, not appropriate in such circumstances, since the operating conditions are far from those proposed in the design stage. For all these reasons, the study of the system behavior under parameter variations, such as a load demand or a controller gain, is of great interest in order to analyze possible dynamical scenarios due to such changes.

This thesis addresses the study of power systems dynamics using the bifurcation theory. In order to achieve that, the different dynamical behaviors displayed by the system in response to quasistationary parameter variations are analyzed, studying the qualitative changes in the dynamics (*i.e.*, bifurcations) originated by these variations. In this regard, sometimes it is possible to associate the voltage collapse phenomenon to the occurrence of a saddle-node bifurcation. As consequence of this singularity, the operating point vanishes when the reactive power consumed by the load is increased, hence the voltages drop suddenly originating the voltage collapse. Other nonlinear phenomena are the sustained oscillations, which in many occasions may be explained by analyzing a Hopf bifurcation. In this singularity, the equilibrium point becomes unstable and the system undergoes a stable oscillation or limit cycle. Notice that the later means that all variables experience a sustained oscillation and, depending on the amplitude this may be dangerous for the system.

Previous to the study of power systems, the dynamics of an electric oscillator is analyzed. This circuit may be considered as a test platform to gain the proficiency about the dynamics associated to modal interactions and resonances, and then translate these results to power systems. In particular, the dynamics of a double Hopf bifurcation (two

simultaneous Hopf bifurcations) is studied. Several bifurcation diagrams generated by this singularity are presented, as well as some dynamical phenomena found in the vicinity of a 2:3 resonance of the double Hopf bifurcation are also included. This resonance has not been studied yet in the specialized literature. Furthermore, fold-flip singularities, where cyclic *fold* and period doubling (*flip*) bifurcations interact, are considered. This singularity has been reported only once in continuous time systems and generates complex interactions between limit cycles.

Two power systems with very different structure are studied in this thesis. A simplified 3-bus model (4 state variables) is analyzed in first place, where the emphasis is not in the modeling detail, but in the comprehension of the dynamical phenomena experienced by the system due to variations in one and two parameters. Then, the dynamics of a detailed model of a 9-bus multimachine power system (70 state variables) is studied. This model accounts not only for the mechanical and electrical dynamics of the generators and the loads (including their voltage and frequency control loops), but also the response of the transmission lines. The dynamics of this system is similar to the 3-bus model for variations of a single parameter (both experience Hopf and saddle-node bifurcations), but this is not the case when variations of two parameters are considered. The dynamical scenario of the simplified model is dominated by a Bogdanov-Takens singularity, which conjugates the dynamics generated by the Hopf and saddle-node bifurcations, and in this thesis for the first time, it has been found in a possible operating region. On the other hand, three singularities are recognized in the 9-bus system when two parameters are varied: two double Hopf bifurcations, where the effects of two Hopf bifurcations are combined, resulting in quasiperiodic oscillations (2D and 3D tori), and a Gavrilov-Guckenheimer singularity, where Hopf and saddle-node bifurcations interact. The dynamics associated to the double Hopf singularities, and their coexistence with a Gavrilov-Guckenheimer bifurcation, has not been previously studied in the power systems literature.

These singularities may be considered as organizing centres of the local dynamics, and their study brings the possibility to determine the dynamical behavior of the system subjected to variations in the parameters. Moreover, in order to improve the knowledge of the system, the results obtained from the dynamical analysis are combined with traditional tools such as the calculation of the participation factors to identify the responsible

modes for oscillations due to Hopf bifurcations. Finally, as a result of the combination of these techniques, the addition of a power system stabilizer to damp an electromechanical mode is analyzed. The location of the stabilizer is determined calculating the participation factors, while the effect on the dynamics is shown in the new bifurcation diagram, with an increment of the possible operating region. In this way this dissertation tries to show how the study of dynamical systems may also help with the comprehension of the complex phenomena of electric power systems.

Índice general

Prefacio	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	IX
Nomenclatura	XXV
1. Introducción	1
1.1. Estudio de la dinámica de un oscilador electrónico	6
1.2. Estudio de un modelo reducido de 3 barras	8
1.3. Análisis de un modelo multimáquina de 9 barras	10
1.4. Organización de la tesis	14
2. Bifurcaciones en sistemas dinámicos	17
2.1. Bifurcaciones de equilibrios de codimensión 1	19
2.1.1. Autovalor simple en cero	20
2.1.2. Bifurcación de Hopf	26
2.2. Bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 1	35
2.2.1. Mapa de Poincaré	36
2.2.2. Bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas	39
2.2.3. Bifurcación de doble período	41
2.2.4. Bifurcación de Neimark-Sacker	43
2.2.5. Trayectorias homóclinas y heteróclinas	49
3. Bifurcaciones locales de codimensión 2	51
3.1. Bifurcaciones de equilibrios de codimensión 2	52
3.1.1. Bifurcación <i>cusp</i>	53
3.1.2. Bifurcación de Hopf generalizada (Bautin)	55

3.1.3.	Bifurcación de Bogdanov-Takens	56
3.1.4.	Bifurcación de Khorozov-Takens	58
3.1.5.	Bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer (cero-Hopf)	60
3.1.6.	Bifurcación de Hopf doble (Hopf-Hopf)	64
3.2.	Bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 2	70
3.2.1.	Resonancia 1:1	73
3.2.2.	Resonancia 1:2	75
3.2.3.	Resonancia 1:3	77
3.2.4.	Bifurcación <i>fold-flip</i>	79
4.	Dinámica de un oscilador eléctrico	83
4.1.	Circuito oscilador	84
4.2.	Bifurcación de Hopf doble en el circuito oscilador	87
4.2.1.	Caso a: $\eta_3 = 0$	89
4.2.2.	Caso b: $\eta_3 = -0.075$	94
4.2.3.	Caso c: $\eta_3 = -0.140$	96
4.2.4.	Caso d: $\eta_3 = -0.220$	97
4.2.5.	Mecanismo de transición entre los casos c y d	104
4.3.	Diagrama de bifurcaciones global	107
4.3.1.	Bifurcaciones globales asociadas a GH_1 y GH_2	107
4.3.2.	Bifurcaciones globales asociadas a TR_1 y TR_2	108
4.4.	Bifurcaciones <i>fold-flips</i> para $\eta_3 = -0.140$	110
4.4.1.	Fold-flip FF_1	111
4.4.2.	Fold-flip FF_2	116
4.4.3.	Coexistencia de FF_1 y FF_2	119
4.5.	Evolución de la isla de doble período	121
4.6.	Simplificación del circuito del oscilador	121
4.7.	Resonancia 2:3 en la bifurcación de Hopf doble	123
4.7.1.	Dinámica asociada a las resonancias 1:2	124
4.7.2.	Dinámica asociada a la resonancia 1:3	125
4.7.3.	Vinculación de las resonancias 1:2 y 1:3	127

5. Dinámica de un sistema de potencia de tres barras	131
5.1. Bifurcaciones en sistemas de potencia	131
5.2. Modelo del sistema de 3 barras	134
5.3. Análisis de bifurcaciones variando Q_1	136
5.3.1. Cascada de doble periodo	140
5.4. Análisis de bifurcaciones variando Q_1 y P_1	144
5.4.1. Bifurcaciones globales	146
6. Dinámica de un sistema de potencia de nueve barras	149
6.1. Modelo del sistema de potencia	150
6.1.1. Generadores sincrónicos	151
6.1.2. Sistemas de excitación y AVR	155
6.1.3. Modelo Turbina- <i>Governor</i>	156
6.1.4. Modelo de las cargas	157
6.1.5. Líneas de transmisión	159
6.2. Análisis de la dinámica variando α_5	161
6.2.1. Simulaciones temporales	165
6.2.2. Factores de participación	168
6.3. Análisis de la dinámica variando α_5 y α_8	170
6.3.1. Centros organizadores de la dinámica	172
6.3.2. Bifurcaciones de Hopf dobles HH_1 y HH_2	174
6.3.3. Bifurcación cero-Hopf	178
6.4. Inclusión de un estabilizador (PSS)	179
7. Conclusiones	185
7.1. Contribuciones de la tesis	189
7.2. Líneas de trabajo futuras	190
A. Formas normales y variedades centros	191
A.1. Formas normales topológicas de bifurcaciones	191
A.1.1. Forma normal: definición	193
A.2. Bifurcaciones en sistemas n -dimensionales	194
A.2.1. Variedad centro en sistemas sin parámetros	195

A.2.2. Principio de reducción a la variedad centro	197
A.2.3. Cálculo de la variedad centro	199
A.2.4. Variedad centro en sistemas con parámetros	201
B. Forma normal de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer	205
C. Forma normal de la bifurcación de Hopf doble	209
C.1. Casos simples: $p_{11}p_{22} > 0$	209
C.2. Casos complejos: $p_{11}p_{22} < 0$	210
D. Factores de participación	217
Bibliografía	219

Índice de figuras

2.1. Bifurcación silla-nodo (despliegue para $s = 1$).	21
2.2. Bifurcación transcítica (despliegue para $s = 1$).	24
2.3. Bifurcación <i>pitchfork</i> (despliegue para $s = -1$).	26
2.4. Bifurcación de Hopf supercrítica ($s = -1$).	28
2.5. Bifurcación de Hopf subcrítica ($s = 1$).	30
2.6. Representación esquemática de un mapa de Poincaré del ciclo L	36
2.7. Autovalores críticos correspondientes a bifurcaciones de ciclos límites. a) Silla-nodo (<i>cyclic fold</i>), transcítica o <i>pitchfork</i> . b) Doble período. c) Neimark-Sacker.	39
2.8. Silla-nodo de soluciones periódicas (<i>cyclic fold</i>).	40
2.9. Bifurcación de doble período (supercrítica).	42
2.10. Bifurcación de Neimark-Sacker (supercrítica).	44
2.11. Representación esquemática de las lenguas de Arnold sobre una curva de Neimark-Sacker (TR).	46
2.12. Fenómeno de sincronización (<i>phase locking</i>) dentro de la lengua de Arnold $p/q = 1/6$	47
2.13. Representación esquemática de las trayectorias homoclina y heteroclina.	50
3.1. Diagrama de bifurcaciones de un punto cuspidal o <i>cusp</i> ($s < 0$).	54
3.2. Despliegue de la bifurcación de Hopf generalizada o de Bautin ($s < 0$).	56
3.3. Despliegue de la bifurcación de Bogdanov-Takens para $s < 0$	57
3.4. Despliegue de la bifurcación de Khorozov-Takens para $s > 0$	59
3.5. Despliegue de la bifurcación de Khorozov-Takens para $s < 0$	60
3.6. Equivalencia entre un ciclo límite en el sistema de amplitudes con un toro en la forma normal truncada de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer.	62
3.7. Despliegue de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer para $s = 1$ y $\theta < 0$ (caso III).	63
3.8. Despliegue de la bifurcación de Hopf doble. Caso I (simple) $\theta > 0$, $\delta > 0$, $\theta\delta > 1$	68

3.9. Despliegue de la bifurcación de Hopf doble. Caso VI complejo $\theta < 0$, $\delta < 0$, $\theta\delta > 1$	69
3.10. Despliegue de la resonancia 1:1 ($s > 0$).	74
3.11. Despliegue de la resonancia 1:2. a) $s > 0$. b) $s < 0$	76
3.12. Despliegue de la resonancia 1:3 para $a(0) < 0$	78
3.13. Despliegues de la bifurcación <i>fold-flip</i> . a) $a_0 < 0$ y $b_0 < 0$. b) $a_0 > 0$ y $b_0 < 0$	81
4.1. Diagrama circuital del oscilador no lineal estudiado.	86
4.2. Curvas de Hopf en el plano (η_1, η_2) para algunos valores de η_3 . Despliegue de la sombrilla de Whitney.	88
4.3. Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = 0$	90
4.4. Diagrama de bifurcaciones variando η_1 (Caso a: $\eta_3 = 0$). a) Corte para $\eta_2 = 1.71$ (arriba de <i>HH</i>). b) Corte para $\eta_2 = 1.70$ (debajo de <i>HH</i>).	91
4.5. Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente con la de la Fig. 4.3. Caso I simple.	93
4.6. Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = -0.075$	94
4.7. Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble asociado al de la Fig. 4.6. Caso II simple.	95
4.8. Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = -0.140$	96
4.9. Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente al de la Fig. 4.8. Caso III simple.	97
4.10. Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = -0.220$	98
4.11. Despliegue de la bifurcación de Hopf doble asociado con la singularidad de la Fig. 4.10. Caso VI complejo.	99
4.12. Diagrama de bifurcaciones variando η_1 (Caso d: $\eta_3 = -0.220$). a) Corte para $\eta_2 = 1.90$ (arriba de <i>HH</i>). b) Corte para $\eta_2 = 1.87$ (debajo de <i>HH</i>).	100
4.13. Oscilaciones cuasiperiódicas presentes en las regiones 19, 20 y 21.	102
4.14. Señales temporales correspondientes al toro 2D estable de la región 21.	103
4.15. Representación esquemática del mecanismo que genera la transición entre los casos simples y los complejos de la bifurcación de Hopf doble. a) $\eta_3 \simeq -0.140946$. b) $\eta_3 = -0.220$	104
4.16. Bifurcaciones de Bautin sobre la rama de Hopf H_1 para $\eta_3 = -0.220$	105

4.17. Curvas de bifurcaciones de <i>cyclic fold</i> emergentes de las bifurcaciones de Bautin de la Fig. 4.16. a) Detalle para GH_1 . b) Curvas asociadas a GH_2 .	106
4.18. Conexión global de las curvas de bifurcaciones de sillas-nodos de ciclos límites para $\eta_3 = -0.220$.	108
4.19. Diagrama de bifurcaciones globales para $\eta_3 = -0.220$.	109
4.20. Vista expandida del diagrama de bifurcaciones globales para $\eta_3 = -0.220$.	111
4.21. Diagrama esquemático de bifurcaciones en el plano de parámetros $\eta_1 - \eta_2$ ($\eta_3 = -0.140$).	112
4.22. Despliegue de la forma normal asociado a FF_1 .	113
4.23. Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.755$.	114
4.24. Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.747$.	115
4.25. Despliegue de la forma normal asociado a FF_2 .	116
4.26. Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.730$.	117
4.27. Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.728$.	119
4.28. Circuito eléctrico del oscilador modificado.	122
4.29. Diagrama de bifurcaciones para $\eta_3 = 0.77$.	123
4.30. Dinámica generada por la resonancia 2:3. Resonancias 1:2	125
4.31. Despliegues de la forma normal de la resonancia 1:2. a) $s = -1$ ($R_{1:2}^a$). b) $s = 1$ ($R_{1:2}^b$).	126
4.32. Dinámica generada por la resonancia 2:3. Resonancia 1:3	127
4.33. Despliegue de la forma normal de la resonancia 1:3 para $a(0) > 0$.	128
4.34. Transición entre un ciclo de período 2 y uno de período 3.	130
5.1. Representación del modelo de 3 barras estudiado.	134
5.2. Diagrama de bifurcaciones del sistema de 3 barras, variando Q_1 .	138
5.3. Vista detallada de la cascada de bifurcaciones de doble período.	139
5.4. Atractor caótico producto de la cascada de doble periodo ($Q_1 = 2.989790$).	141
5.5. Mapa de Lorenz del atractor caótico de la Fig. 5.4. a) Señal temporal $\delta_m(t)$. b) Mapa de Lorenz.	142
5.6. Diagrama de bifurcaciones variando Q_1 y P_1 .	144
5.7. Despliegue de la forma normal truncada de la bifurcación de Bogdanov-Takens para $s > 0$.	145

6.1. Diagrama esquemático del sistema de potencia analizado (incluyendo los correspondientes lazos de control de tensión y de frecuencia). Los valores por unidad están referidos a una base de 100 MVA.	152
6.2. Modelo de las líneas de transmisión.	159
6.3. Representación esquemática del cambio de referencia al marco sincrónico.	160
6.4. Diagrama de bifurcaciones variando α_5	162
6.5. Vista expandida del recuadro de la Fig. 6.4.	164
6.6. Simulaciones temporales con condiciones iniciales antes y después de H_1	166
6.7. Simulaciones temporales con condiciones iniciales antes y después de H_2	167
6.8. Colapso de voltaje producto de la bifurcación silla-nodo LP	167
6.9. Movimiento de los autovalores más relevantes para los diagramas de bifurcación de las Figs. 6.4 y 6.5.	169
6.10. Diagrama de bifurcaciones variando α_5 y α_8	171
6.11. Centros organizadores de la dinámica en el plano $\alpha_5 - \alpha_8$	173
6.12. Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente a HH_1 en la Fig. 6.11. Caso VI complejo.	175
6.13. Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente a HH_2 en la Fig. 6.11. Caso II simple.	177
6.14. Despliegue de la forma normal de la bifurcación cero-Hopf correspondiente a ZH en la Fig. 6.11 ($s = 1$, $\theta < 0$ y $E_0 = -1$).	179
6.15. Representación en bloques del AVR y PSS del generador #2.	180
6.16. Diagrama de bifurcaciones variando α_5 con PSS en el generador #2.	181
6.17. Vista expandida del recuadro de la Fig. 6.16.	182
6.18. Diagrama de bifurcaciones variando α_5 y α_8 con PSS en el generador #2. a) Diagrama de bifurcaciones. b) Centros organizadores.	183
A.1. Variedades centro del sistema (A.7).	196
A.2. Representación esquemática de la variedad centro ante una bifurcación de Hopf en un sistema de dimensión 3.	197
A.3. Representación de la variedad centro como el gráfico de una función $v = V(u)$	198
A.4. Variedades centros del sistema extendido (A.22).	202

B.1. Despliegue de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer. a) Caso I, $s = 1$ y $\theta > 0$. b) Caso II, $s = -1$ y $\theta < 0$	206
B.2. Despliegue de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer. a) Caso III, $s = 1$ y $\theta < 0$. b) Caso IV, $s = -1$ y $\theta > 0$	207
C.1. Despliegues de la bifurcación de Hopf doble. Casos <i>simples</i>	212
C.2. Retratos de fase del sistema de amplitudes para los casos <i>simples</i>	213
C.3. Despliegues de la bifurcación de Hopf doble. Casos <i>complejos</i>	214
C.4. Retratos de fase del sistema de amplitudes para los casos <i>complejos</i>	215

Índice de tablas

4.1. Símbolos y colores utilizados en los diagramas de bifurcaciones.	110
4.2. Multiplicadores de Floquet para $\eta_2 = 1.730$	118
4.3. Multiplicadores de Floquet para $\eta_2 = 1.728$	120
5.1. Valores de Q_1 para los cuales se tienen las primeras siete bifurcaciones de doble periodo.	140
5.2. Aproximaciones a la constante de Feigenbaum ($\delta_F = 4.6692016091\dots$). . .	143
6.1. Variables de estado del sistema de nueve barras.	153
6.2. Parámetros de los generadores del sistema de nueve barras (potencia base 100 MVA).	154
6.3. Parámetros de las cargas en las barras 5, 6 y 8. (potencia base 100 MVA)	155
6.4. Potencias generadas: nominales y luego del redespacho.	161

Nomenclatura

BT	Bogdanov-Takens
C	<i>Cusp</i> (punto cuspidal)
CF	Silla-nodo de ciclos límites (<i>cyclic fold</i>)
FF	<i>Fold-Flip</i>
GH	Hopf generalizada (Bautin)
H	Hopf
HH	Hopf doble (Hopf-Hopf)
KT	Khorozov-Takens
LP	Silla-nodo (<i>limit point</i>)
PB	<i>Pitchfork</i>
PD	Doble período (<i>period doubling</i>)
$R_{1:1}$	Resonancia 1:1
$R_{1:2}$	Resonancia 1:2
$R_{1:3}$	Resonancia 1:3
TC	Transcrítica
TR	Neimark-Sacker (<i>torus</i>)
ZH	Gavrilov-Guckenheimer (cero-Hopf)

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas de potencia eléctrica se encuentran entre los sistemas ingenieriles más sofisticados que pueden hallarse en la actualidad. Esto se debe no sólo a la gran cantidad y diversidad de elementos que lo componen, sino también a la complejidad de los mismos. Por ejemplo, es habitual hallar en un gran sistema interconectado cientos de barras o nodos unidos por medio de líneas de transmisión que actúan como medios vinculantes entre cientos de generadores y centros de consumo. Un segundo problema es la naturaleza compleja del sistema en sí, ya que por ejemplo en el mismo conviven variables con escalas de tiempo muy diferentes (en general las variables eléctricas son mucho más rápidas que las mecánicas). A su vez, el comportamiento de cada una de las partes que conforman el sistema puede ser representado utilizando varios tipos de modelos matemáticos. En este sentido, es posible hallar dentro del modelo de un sistema de potencia dispositivos modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (generadores, cierto tipo de cargas), los cuales se combinan con eventos discretos (modelos de fallas, seccionadores), ecuaciones algebraicas (líneas de transmisión, cargas estáticas), modelos discretos (convertidores de potencia, controladores), etc. Por lo tanto, resulta extremadamente difícil obtener un modelo que tome en cuenta las características de todos los elementos constitutivos del sistema y por lo general se recurre a modelos reducidos que representan los comportamientos más significativos, necesarios para el estudio de cada problema en particular. Por ejemplo, existen modelos específicos para el estudio de oscilaciones electromecánicas, para fenómenos de tensión, modelos diseñados para el análisis de resonancias, entre otros.

Por otro lado, si bien en épocas pasadas resultaba viable la construcción de un sistema de potencia en extremo robusto, por medio del sobredimensionamiento de sus partes, en la actualidad existen varios motivos por los cuales ello no es factible desde el punto de vista práctico. Sobre todo si se tienen en cuenta factores como el constante incremento en la demanda y las restricciones económicas cada vez más severas. Por lo tanto, los

sistemas de potencia se ven forzados a operar cada vez más cerca de sus límites de estabilidad y por ende son más vulnerables a perturbaciones en las condiciones de operación. Dichas perturbaciones pueden dar como resultado comportamientos transitorios indeseados que imposibilitan que el sistema opere con un perfil adecuado de tensiones en las barras. Prueba de esto es el aumento en el número de incidentes en los cuales se ha registrado un colapso de voltaje (Andersson et al., 2005; Ilić et al., 2005; Vournas et al., 2006). Algunos de los factores con mayor influencia son el incremento del consumo de las cargas, lo cual lleva a que la red de transmisión eléctrica se encuentre al límite de su capacidad, la salida de servicio de líneas y generadores, la acción de controladores mal sintonizados o interacciones (competencias) entre lazos de control, entre otros fenómenos (Dobson et al., 2002). En el primero de los casos, los problemas arriban mayormente debido al consumo excesivo de potencia reactiva en una de las barras cuya capacidad es insuficiente para satisfacer tal incremento en la demanda. Esto genera una disminución del voltaje en ese punto, llegando a veces hasta niveles inaceptables (Van Cutsem & Vournas, 1998; Van Cutsem, 2000). Por otro lado, el efecto neto de la salida de servicio de líneas o de generadores puede ser interpretado como el aumento de la “distancia eléctrica” (aumento en la impedancia equivalente) entre los centros de consumo con los de generación, lo cual se traduce en un sistema mucho más débil y a veces hasta imposible de operar. Por último, en lo que al diseño de los controladores se refiere, generalmente los lazos de control son diseñados para tener un desempeño adecuado en una condición de operación nominal predeterminada, utilizando simplificaciones en los modelos. Esto puede llevar a la aparición de comportamientos no deseados debidos a interacciones de naturaleza no lineal con otros elementos del sistema.

Dado que un sistema de potencia se encuentra constantemente enfrentando cambios de diversa índole, resulta de interés estudiar el comportamiento del mismo ante variaciones en sus parámetros, como por ejemplo el consumo de una carga o la ganancia de un controlador. Además, los sistemas de potencia son altamente no lineales y por lo tanto es posible obtener más información acerca de su comportamiento dinámico si se emplean técnicas de análisis no lineal (Hiskens, 1995; Kwatny et al., 1995; Dobson et al., 2002; Hill et al., 2003). Por estas razones, la teoría de sistemas dinámicos en general y la de bifurcaciones en particular, surgen como alternativas para analizar este tipo de sistemas. En resumidas palabras, la teoría de bifurcaciones ofrece una herramienta para

el estudio del comportamiento dinámico del sistema ante variaciones cuasiestacionarias (suaves) en los parámetros, con el objetivo de caracterizar los cambios cualitativos en la dinámica (bifurcaciones) que ocurren ante tales variaciones.

Entre las singularidades más destacadas, la bifurcación de Hopf ocupa un lugar trascendental ya que genera un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio del sistema y a su vez da origen a una oscilación periódica o ciclo límite. Este fenómeno se trata de una bifurcación de codimensión 1, ya que es necesario la variación de un único parámetro para que ocurra¹. La bifurcación de Hopf se produce cuando un par de autovalores complejos conjugados (o modo oscilatorio) de la linealización del sistema en torno al equilibrio se halla sobre el eje imaginario (además deben satisfacerse algunas condiciones de no degeneración, que en cuyas expresiones intervienen los efectos de las no linealidades del sistema). Esta singularidad ha sido estudiada en forma profusa en la literatura de sistemas dinámicos [véase por ejemplo (Marsden & McCracken, 1976; Mees, 1981; Guckenheimer & Holmes, 1983; Kuznetsov, 2004)], y ha probado ser precursora de oscilaciones en una amplia variedad de aplicaciones. Entre ellas se encuentran: los sistemas de potencia eléctrica (Chiang, 2003; Tse & Dranga, 2003), circuitos osciladores (Yu, 2002; Xu et al., 2007; Ma et al., 2008; Messias et al., 2009), láseres semiconductores (Wieczorek et al., 2001; Green et al., 2002; Wieczorek et al., 2005), motores eléctricos (Gordillo et al., 2002; Jing et al., 2004), compresores (Gu et al., 1999), satélites (Liaw & Abed, 1990), sistemas mecánicos (Chamara & Coller, 2004; Luo et al., 2006), etc.

Una situación con mayor riqueza dinámica se tiene cuando dos pares de autovalores cruzan simultáneamente el eje imaginario. Este fenómeno se conoce como bifurcación de Hopf doble (o Hopf-Hopf) y explica la aparición de fenómenos oscilatorios más complejos. Algunos ejemplos de estos comportamientos son las oscilaciones cuasiperiódicas, donde interactúan dos modos o frecuencias de oscilación cuyo cociente es irracional y que se conoce como toro bidimensional ó 2D. En ciertos casos, la bifurcación de Hopf doble también puede explicar el nacimiento de toros de dimensión 3 ó 3D, en los cuales aparece involucrada una tercera frecuencia que modula la amplitud de las oscilaciones del toro 2D. Algunas aplicaciones que presentan este tipo de comportamientos pueden consultarse en (Yu, 2002; Coller, 2003; Chamara & Coller, 2004). La bifurcación de Hopf doble es un fenómeno de codimensión 2, ya que para hallarla se necesitan variar dos parámetros.

¹En general, para una bifurcación de codimensión n se necesitan variar n parámetros.

En general, las singularidades de codimensión 2 pueden ser consideradas como centros organizadores de la dinámica. Esto se debe a que de las mismas se desprenden curvas de bifurcaciones de codimensión 1, que delimitan regiones en el plano de los parámetros con comportamientos dinámicos cualitativamente distintos. Tales comportamientos pueden ser advertidos mediante el estudio de la “forma normal” de la bifurcación.

Un panorama de la dinámica local asociada a una bifurcación determinada puede obtenerse a partir del análisis de su forma normal (cualquiera sea su codimensión). Ésta constituye el conjunto mínimo de ecuaciones que representa el comportamiento dinámico local (normalizado) generado por dicha singularidad. La importancia de las formas normales radica en que en muchos casos el sistema puede ser reducido a la forma prototípica de una bifurcación específica y los fenómenos dinámicos de esta última estarán presentes en el sistema original. Esto denota de alguna manera la potencialidad que ofrece el análisis de las formas normales. A su vez, la forma normal de una bifurcación puede tener varios despliegues posibles (la bifurcación de Hopf doble tiene once despliegues distintos), los cuales varían sensiblemente el escenario dinámico generado. Si la dinámica del sistema cambiara ante variaciones en los restantes parámetros, el despliegue de la forma normal de la singularidad también se modificará en concordancia con la nueva situación. Los valores que adoptan los coeficientes de la forma normal en una bifurcación dada establecen cual será el despliegue correspondiente. Un procedimiento usual para la obtención de estos coeficientes consiste en la reducción del sistema a la variedad centro, mediante la sucesiva aplicación de transformaciones de coordenadas (no lineales), para luego expresar el sistema en la forma normal también por medio de transformaciones no lineales (Guckenheimer & Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Kuznetsov, 2004). Según la técnica que se utilice, el mismo proceso de reducción a la variedad centro puede brindar las expresiones necesarias para el cálculo de los coeficientes.

Debido a la complejidad no sólo de los modelos sino también de la interpretación de los fenómenos físicos que experimentan los sistemas de potencia, en primera instancia se analizará la dinámica generada por un circuito eléctrico resonante. Este último se utilizará como plataforma de ensayos para profundizar los conocimientos e investigar acerca de interacciones entre modos oscilatorios y resonancias, los cuales luego serán trasladados a los sistemas de potencia. En particular se hará énfasis en el estudio de la dinámica generada por una bifurcación de Hopf doble que domina el escenario dinámico

del oscilador. Luego, haciendo uso de los conocimientos adquiridos en el estudio de la dinámica del oscilador, se procederá con el análisis de la dinámica de los sistemas de potencia eléctrica aplicando la teoría de bifurcaciones. Con este fin, se comenzará estudiando un sistema simplificado de tres barras, donde se explicará la existencia de fenómenos tales como la pérdida de estabilidad del punto de operación dando lugar a oscilaciones sostenidas (ciclos límites) y posteriormente al colapso de voltaje. Todo ello como consecuencia de la aparición de singularidades como la bifurcación de Hopf, la de doble período, la silla-nodo, etc. Se realizarán aportes concernientes a la caracterización de un fenómeno de naturaleza compleja denominado “cascada de doble período,” que involucra la sucesiva aparición de bifurcaciones de doble período (a intervalos dados por una teoría universal), culminando en un atractor caótico y el posterior colapso del sistema. Luego, mediante la variación simultánea de dos parámetros se mostrará la existencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens (doble autovalor en cero), la cual da origen a las bifurcaciones de Hopf y silla-nodo. Cabe destacar que este centro organizador se encuentra ubicado en una región factible de operación, lo cual no ha sido reportado con anterioridad en la literatura técnica internacional.

Posteriormente, se realizará el estudio de la dinámica de un sistema de potencia multimáquina de nueve barras modelado en forma detallada. Se mostrará la existencia de centros organizadores de la dinámica no descritos anteriormente en la literatura de los sistemas de potencia, más precisamente, dos bifurcaciones de Hopf doble y una de Gavrilov-Guckenheimer (un par de autovalores complejos y uno real con parte real cero). A su vez se combinará la información provista por una técnica de análisis tradicional como los factores de participación con los resultados obtenidos a través de la teoría de bifurcaciones, con lo cual se determinará cuáles son los estados del sistema responsables de las singularidades observadas. De este análisis se establecerá que los centros organizadores mencionados combinan fenómenos de distintos orígenes como son la inestabilidad de ángulo y la de tensión [las definiciones de inestabilidad de ángulo y de tensión pueden consultarse en (Kundur et al., 2004)].

La herramienta computacional principal que se utilizará para el análisis de la dinámica de los sistemas estudiados en esta tesis serán los paquetes de continuación de soluciones AUTO (Doedel et al., 2002) y MATCONT (Dhooge et al., 2006). Ambos programas no están diseñados para soportar modelos de ecuaciones diferenciales-algebraicas

(DAE: *Differential Algebraic Equations*), lo cual representará una complejidad adicional al problema ya que será necesario reformular los modelos de manera que queden expresados en la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE: *Ordinary Differential Equations*).

1.1. Estudio de la dinámica de un oscilador electrónico

Una vez descritas las bifurcaciones más características tratadas en los sistemas estudiados en esta tesis, se comenzará por el análisis de la dinámica generada por un circuito oscilador electrónico compuesto básicamente por dos circuitos resonantes RLC (R: resistencia, L: inductancia y C: capacidad) acoplados mediante un elemento no lineal, cuya característica es similar a la de un diodo túnel (Yu, 2002). En especial se abordará el estudio de una bifurcación de Hopf doble que domina el escenario dinámico. Una propiedad sobresaliente de este oscilador es que mediante la variación de un único parámetro es posible cambiar el escenario dinámico asociado a la bifurcación de Hopf doble, resultando muy útil para mostrar los diferentes comportamientos dinámicos generados por esta bifurcación. Los resultados obtenidos servirán de base para la comprensión de este tipo de fenómenos en los sistemas de potencia eléctrica, no sólo en lo que respecta a la bifurcación de Hopf doble sino a muchos otros fenómenos relacionados con interacciones de ciclos como, por ejemplo, las bifurcaciones de doble período, de Neimark-Sacker (Hopf secundaria), sillan-nodos de órbitas periódicas (Revel et al., 2007a,b, 2008b), entre otros.

Continuando con estudios realizados precedentemente (Itovich & Moiola, 2005), se presentarán resultados que muestran la existencia de varios de los diagramas de bifurcaciones asociados a la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble (Kuznetsov, 2004). Se analizarán tres casos de los denominados “simples” donde se detectan, además de las curvas de Hopf, curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker que originan toros 2D, y uno de los casos “complejos” donde existen curvas de singularidades que generan toros 3D.

La bifurcación de Neimark-Sacker ocupa un lugar primordial en el despliegue de la bifurcación de Hopf doble. Esto se debe a que en todos los despliegues de la forma normal

truncada (once en total) existen dos ramas de bifurcaciones de Neimark-Sacker que emergen de la singularidad. El caso no resonante ocurre cuando un par de autovalores complejos conjugados del mapa de Poincaré de un ciclo límite (también denominados multiplicadores de Floquet) se encuentran sobre el círculo unitario, o sea, $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, donde $\theta_0 \neq 2\pi/q$ para $q = 1, 2, 3, 4$. Luego, si se satisface la igualdad $\theta_0 = 2\pi/q$, $q = 1, 2, 3, 4$, la bifurcación se denomina “resonancia fuerte” $1:q$ de la bifurcación de Neimark-Sacker. Las resonancias fuertes generan interacciones entre oscilaciones cuasiperiódicas y ciclos límites, las cuales derivan en comportamientos complejos como ciclos de doble período, conexiones y tangencias homóclinas y heteróclinas, etc. (el escenario completo continúa siendo desconocido). Las formas normales de las resonancias $1:1$, $1:2$ y $1:3$ fueron estudiadas originalmente en (Takens, 1974), mientras que la $1:4$ fue posteriormente despiezada en forma completa en (Krauskopf, 1994). La reseña bibliográfica completa puede consultarse en (Broer et al., 2001). Cabe destacar que además de las resonancias fuertes existen múltiples puntos sobre una curva de bifurcaciones de Neimark-Sacker donde θ_0 toma valores racionales. Los mismos corresponden a “resonancias débiles” de la bifurcación de Neimark-Sacker, de las cuales emergen las denominadas lenguas de Arnold. Estas últimas delimitan regiones en el espacio de los parámetros en cuyo interior el toro deja de ser cuasiperiódico (o “lleno”) volviéndose periódico. Este fenómeno se conoce como “sincronización de fase” (*phase locking*) y ha sido estudiado en (Arnold, 1983; Schilder & Peckham, 2007), entre otros.

El escenario dinámico asociado a condiciones de resonancia en la bifurcación de Hopf doble, *i.e.* degeneraciones en las cuales las frecuencias o modos oscilatorios relativos a las bifurcaciones de Hopf intervinientes definen un número racional, ha sido estudiado en parte en (LeBlanc, 2000), para los casos en los cuales la relación de frecuencias es $1 : q$ con $q = 1, 2, 3, 4$. En el citado trabajo se determinó que ante pequeñas perturbaciones en los parámetros las resonancias se trasladan a las curvas de Neimark-Sacker. Por lo tanto, es posible estudiar el comportamiento dinámico generado por el caso resonante si se perturba sensiblemente uno de los parámetros del sistema, o sea, analizando el escenario dinámico en cercanías de la condición de resonancia.

En el caso del circuito oscilador, se verá que es posible inducir una resonancia $2:3$ en la bifurcación de Hopf doble por medio de la sintonización de tres parámetros. Luego, se analizarán los diagramas de bifurcaciones variando uno y dos parámetros en cercanías

de la resonancia 2:3, a fin de determinar el escenario dinámico que se desprende de la misma. Valiéndose de la información provista por las formas normales y su correspondiente significado en el sistema en cuestión se reconstruye su despliegue. Cabe destacar que la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble no se encuentra documentada en la literatura. Otra aplicación semejante al oscilador electrónico, donde a su vez ocurren estas resonancias, son los osciladores forzados, en los cuales existe una fuente de excitación externa representada por una señal de amplitud y frecuencia determinada que interactúa con un sistema autónomo. Existen algunos trabajos recientes donde se muestran resultados producto del acoplamiento de las frecuencias autónoma y forzante (Hilger & Luciani, 1998; Broer et al., 2007a,b), entre los cuales figuran interacciones entre curvas de bifurcaciones de doble período, de Neimark-Sacker y de sillanodos. Estas últimas investigaciones constituirán una guía para las validaciones del comportamiento dinámico en el despliegue global de la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble.

Además de la singularidad de Hopf doble se estudiarán interacciones entre bifurcaciones de soluciones periódicas. En particular se considerarán singularidades tipo *fold-flip* (Kuznetsov et al., 2004), donde confluyen curvas de bifurcaciones de sillanodos de órbitas periódicas (*fold*) y bifurcaciones de doble período (*flip*). Cabe destacar que este circuito es uno de los pocos sistemas continuos donde ha sido reportada la existencia de la bifurcación *fold-flip* (Revel et al., 2008b).

1.2. Estudio de un modelo reducido de 3 barras

La enorme dimensión de los sistemas de potencia eléctrica produce necesariamente el planteo de modelos matemáticos reducidos, de manera que el problema bajo estudio sea tratable desde el punto de vista práctico. Es por ello que en muchas ocasiones se opta por el estudio de sistemas simplificados y de menor dimensión, los cuales capturan las características más sobresalientes del problema en cuestión. A pesar de estas simplificaciones los modelos resultantes son altamente no lineales y generan comportamientos dinámicos de toda índole ante variaciones en los parámetros del sistema, como por ejemplo cambios en las potencias consumidas por las cargas. Usualmente si el consumo de una de las cargas supera un determinado valor crítico el punto de operación del sistema se torna inestable, dando lugar a oscilaciones sostenidas. Este mecanismo puede estar

asociado (localmente) a una bifurcación de Hopf.

En este sentido, en (Abed & Varaiya, 1981) se analizó la ocurrencia de una bifurcación de Hopf en un sistema de potencia utilizando distintos métodos. Dicha singularidad fue atribuida a la adición de una componente de torque no lineal dependiente de la frecuencia en la ecuación electromecánica (*swing*) del generador. Los mismos investigadores (Abed & Varaiya, 1984) mostraron la ocurrencia de una bifurcación de Hopf subcrítica en un sistema de potencia. Más tarde en (Kwatny et al., 1986), se presentaron resultados acerca de la estabilidad en estado estacionario de sistemas de potencia considerando bifurcaciones estáticas (silla-nodo). Luego, a finales de la década de los 80, Dobson y Chiang (Dobson & Chiang, 1989) propusieron un modelo simple de 3 barras compuesto por un generador, una carga (con componentes estáticas y dinámicas) y una barra infinita. El modelo diferencial resultante es de cuatro dimensiones y tiene en cuenta la dinámica de la velocidad y del ángulo del generador, así como el módulo y la fase de la tensión en la barra de carga. En el citado trabajo se muestra que es posible asociar el fenómeno de colapso de voltaje a la ocurrencia de una bifurcación silla-nodo, la cual es debida a interacciones entre la carga y el generador. Como consecuencia de dicha singularidad, el punto de operación desaparece al aumentarse la potencia reactiva consumida por la carga, y por ende la tensión en la barra de carga cae súbitamente a cero, causando el colapso de voltaje.

Este modelo de 3 barras ha sido estudiado ampliamente en la literatura especializada utilizando varios conjuntos de valores de los parámetros (Wang et al., 1994; Tan et al., 1995; Nayfeh et al., 1996; Budd & Wilson, 2002). La dinámica de este modelo simplificado ha probado ser bastante compleja, exhibiendo bifurcaciones de Hopf, de doble período y caos. En (Wang et al., 1994) se muestra otro mecanismo que deriva en el colapso de voltaje: luego de una bifurcación de Hopf supercrítica, se desarrolla una cascada de bifurcaciones de doble período que culmina en un atractor caótico. A su vez, el atractor desaparece en una crisis de frontera (bifurcación *blue sky*), produciendo así el colapso del voltaje para valores del parámetro inferiores a la bifurcación silla-nodo mencionada anteriormente. Posteriormente, en (Budd & Wilson, 2002) se mostró la existencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens (doble autovalor en cero) al considerar variaciones simultáneas en dos de los parámetros del sistema. Esta singularidad actúa como centro organizador de la dinámica y ha sido detectada para valores negativos de la potencia

activa consumida por la carga. A pesar de ello, las curvas de bifurcaciones que emergen de dicho punto afectan regiones de relevancia práctica. Además, las órbitas homóclinas asociadas a la bifurcación de Bogdanov-Takens son del tipo Šil'nikov. Esto implica que existe un número infinito de sillanodos de ciclos límites que inducen comportamientos dinámicos complejos en cercanías de la órbita homóclina.

En esta tesis se presentará un análisis de bifurcaciones variando uno y dos parámetros (Revel et al., 2006, 2008a), mostrando la existencia de bifurcaciones silla-nodo y de Hopf, las cuales actúan como mecanismos para la desaparición del punto de equilibrio o la inestabilidad, respectivamente. Además, se verá que la solución periódica que emerge de la bifurcación de Hopf experimenta una cascada de bifurcaciones de doble período que deriva en un atractor caótico, tal como fuera advertido en (Wang et al., 1994). En esta tesis se mostrará que dicha cascada cumple con la teoría propuesta por Feigenbaum (Feigenbaum, 1978, 1979), *i.e.* las sucesivas bifurcaciones de doble período ocurren a intervalos determinados que tienden (en el infinito) a una constante universal. Luego, al considerar variaciones en dos parámetros se mostrará la existencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens para valores positivos en las potencias activas y reactivas consumidas por la carga del sistema.

1.3. Análisis de un modelo multimáquina de 9 barras

El modelo de 3 barras introducido por Dobson y Chiang brinda la posibilidad, entre otras cosas, de estudiar el fenómeno de colapso de voltaje y de oscilaciones sostenidas en un sistema de potencia elemental. Por lo tanto, surge el interrogante si estos comportamientos sucederán si se aumentan las dimensiones del sistema así como la complejidad del modelo.

El sistema de 3 barras es en esencia DAE, aunque en este caso es posible despejar en forma explícita las variables algebraicas en función de las diferenciales, lo cual facilita la obtención de una realización ODE del mismo. En general esto no ocurre en todos los sistemas y la manera más usual de modelar un sistema de potencia es mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas [véase por ejemplo (Anderson & Fouad, 1994; Kundur, 1994; Sauer & Pai, 1998; Machowski et al., 2008)], donde la parte diferencial está dada por las ecuaciones dinámicas de los generadores y sus respectivos

lazos de control. Por otro lado, la transferencia de potencia en la red de transmisión y la dinámica de los estatores de los generadores y motores (estos últimos formando parte de las cargas), se consideran instantáneas y por lo tanto son descritas por medio de ecuaciones algebraicas. Entonces, el modelo DAE de un sistema de potencia queda expresado en forma genérica como,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y; \lambda), \\ 0 = g(x, y; \lambda), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ son las ecuaciones de estado diferenciales, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ las restricciones algebraicas, $x \in \mathbb{R}^n$ representan los estados diferenciales o dinámicos, $y \in \mathbb{R}^m$ los estados algebraicos, y $\lambda \in \mathbb{R}^p$ es un vector de parámetros reales.

Una técnica muy utilizada cuando se cuenta con un modelo DAE consiste en resolver el flujo de carga (con el método de Newton-Raphson o similares) para un valor determinado del parámetro, obteniendo la solución de la parte algebraica. Luego se determina el punto de equilibrio de la parte diferencial y se calculan los autovalores correspondientes a la linealización en este punto. Seguidamente, se varía el valor del parámetro y se repite el procedimiento. De esta manera es posible analizar la evolución de los autovalores en función del parámetro y determinar los posibles puntos de operación del sistema. Asimismo se pueden detectar las condiciones para las cuales se producen cambios cualitativos en el comportamiento dinámico (bifurcaciones) observando el cruce de los autovalores por el eje imaginario (Rajagopalan et al., 1992; Pai et al., 1995). Nótese que el valor *exacto* del parámetro para el cual sucede la bifurcación es difícil de determinar utilizando esta metodología, debido a que la variación del mismo corre por cuenta del usuario. Por lo tanto, una herramienta adecuada para este tipo de análisis la proveen los paquetes de continuación de soluciones, como por ejemplo AUTO (Doedel et al., 2002) y MATCONT (Dhooge et al., 2006). Sin embargo, estos paquetes no están diseñados para soportar modelos DAE, con lo cual es necesario reformular el modelo en uno completamente diferencial (ODE).

Los estados algebraicos del modelo DAE surgen de desprestigiar la dinámica de las líneas (transferencia de potencia instantánea) y de otros dispositivos. A pesar de no ser práctica común, sobre todo en sistemas de grandes dimensiones, la respuesta dinámica de los estados considerados como algebraicos (casi instantánea en comparación con otras

variables), puede ser incluida en el modelo y por lo tanto se llega a una formulación completamente diferencial (ODE) del sistema de potencia. Entonces el sistema (1.1) puede ser reformulado, quedando de la siguiente manera

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad (1.2)$$

donde, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo (suave), $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados diferenciales y $\lambda \in \mathbb{R}^p$ un vector de parámetros. Nótese que tanto la función $f(x; \lambda)$, como la dimensión del espacio de estados (n), son distintas a las de la primera ecuación de (1.1).

Una alternativa para lograr esta reformulación consiste en la consideración de la respuesta dinámica de las líneas de transmisión y de los estatores de los generadores/motores (Rosehart & Cañizares, 1998, 1999). Esta tarea es relativamente simple si se cuenta con el modelo apropiado de las líneas, e introduce modos de oscilación muy rápidos que prácticamente no interactúan con los modos originales asociados a la parte diferencial del modelo DAE. En estudios refinados las ecuaciones diferenciales de las líneas de transmisión pueden ser reemplazadas por un conjunto de ecuaciones a derivadas parciales (PDE: *Partial Differential Equations*), ya que la impedancia de las mismas se encuentra distribuida a lo largo de la línea (Ilić & Zaborszky, 2000). Además, es posible lograr un modelo del sistema de potencia más sofisticado si se considera al mismo como un conjunto de ecuaciones diferenciales, algebraicas y a diferencias (DAD: *Differential-Algebraic-Difference*). Esta clase de modelos toman en cuenta la naturaleza discreta de algunos de los componentes del sistema, como los convertidores de potencia (Hill et al., 2003).

Las desventajas de la formulación ODE del problema consisten principalmente en la coexistencia de modos rápidos y lentos (hecho que debe tenerse en cuenta para la simulación del sistema), y en que el número total de ecuaciones del modelo se ve sensiblemente incrementado. Por otro lado, una de las ventajas del uso de programas de continuación de soluciones sobre la metodología de sucesivos flujos de carga radica en que los primeros son insensibles a las condiciones iniciales del algoritmo (semilla), y a la estabilidad del punto de operación. Otra de las ventajas es que brindan la posibilidad de obtener curvas de bifurcaciones variando dos parámetros en forma simultánea, siguiendo una condición de bifurcación determinada que pueda ser importante en la dinámica del sistema, como por ejemplo una curva de bifurcaciones sillas-nodos que establece los valores límites de

los parámetros antes de la extinción de puntos de operación. Además, los paquetes de continuación cuentan con algoritmos robustos y optimizados para la continuación no sólo de equilibrios sino también de soluciones periódicas y sus bifurcaciones. Cabe mencionar que en (Ayasun et al., 2004; Guoyun et al., 2005) se presentan algoritmos similares a los utilizados por los paquetes de continuación pero para el seguimiento de bifurcaciones de equilibrios en sistemas DAE, aunque no cuentan con la posibilidad de continuar ciclos límites. Además, estos algoritmos son capaces de continuar bifurcaciones propias del modelo DAE. Más específicamente, la singularidad que se halla en los puntos donde el Jacobiano de las ecuaciones algebraicas respecto de las variables algebraicas no está definido, la cual se conoce por el nombre de “bifurcación inducida”. A su vez existen singularidades impuestas por restricciones tales como la capacidad de potencia reactiva que puede aportar un generador. Todas ellas son estudiadas en (Venkatasubramanian et al., 1995; Avalos et al., 2009). Estas singularidades no serán tenidas en cuenta en esta tesis ya que los modelos considerados estarán dados por ecuaciones diferenciales ordinarias suaves (sin restricciones).

En esta tesis se estudiará el comportamiento dinámico de un sistema de potencia ampliamente conocido en la literatura como es el WSCC (*Western Systems Coordinating Council*) de nueve barras y tres generadores (Anderson & Fouad, 1994; Pai et al., 1995; Sauer & Pai, 1998), que abarca 14 estados del oeste de Estados Unidos y parte de Canadá. Se utilizará un modelo detallado del mismo en el cual se tendrá en cuenta tanto la dinámica mecánica como la eléctrica de los generadores. También se incluirán los respectivos lazos de control de tensión (AVR: *Automatic Voltage Regulator*) y de frecuencia (GOV: *Governor*). Las cargas del sistema serán representadas como una combinación de cargas estáticas (ZIP, Z: impedancia constante, I: corriente constante, P: potencia constante) y dinámicas. Estas últimas serán representadas mediante motores de inducción. Además se tendrá en cuenta la dinámica de las líneas de transmisión y de los estatores de las máquinas a fin de contar con un modelo completamente diferencial.

Cabe mencionar que existen pocos trabajos que realicen un análisis de bifurcaciones en un sistema de potencia multimáquina, algunos ejemplos son (Srivastava & Srivastava, 1995; Lerm et al., 2003). En ellos se hace uso de la información dada por los diagramas de bifurcación para hallar valores apropiados para las ganancias de los lazos de control. En este sentido, en (Srivastava & Srivastava, 1995) se presenta un estudio similar (aunque

con menor detalle) sobre el sistema de 9 barras, donde se utiliza la teoría de bifurcaciones para obtener valores críticos de los parámetros del AVR y de las cargas. En este caso se obtuvo un modelo ODE reduciendo los nodos del sistema bajo la suposición que los rotores de los generadores son lisos y que las cargas son de impedancia constante, excepto por la inclusión de un motor de inducción.

En esta tesis, el análisis del modelo del WSCC se centrará en la descripción del comportamiento dinámico del sistema cuando el consumo de dos de las cargas varía en forma cuasiestacionaria (Revel et al., 2008c, 2010). En primera instancia se mostrará que este sistema, a pesar de ser mucho más complejo que el de tres barras, también experimenta oscilaciones producto de bifurcaciones de Hopf y la desaparición del punto de equilibrio debido a una bifurcación silla-nodo ante el incremento paulatino del consumo de una de las cargas. No obstante, se verá que el escenario dinámico al variar dos parámetros es completamente diferente al del modelo de Dobson y Chiang, ya que existen otros centros organizadores de la dinámica (de mayor complejidad). Más específicamente, se mostrará la existencia de dos bifurcaciones de Hopf doble y una bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer, también conocida como cero-Hopf, en la cual conviven la bifurcación de Hopf y silla-nodo simultáneamente. Estos centros organizadores indican la presencia de interacciones entre fenómenos asociados a la estabilidad electromécanica de los generadores, con otro vinculado con la regulación de tensión, los cuales *a priori* no poseen una relación aparente (la literatura clásica de sistemas de potencia trata ambos tópicos en forma separada y formula soluciones específicas a cada problemática en particular). Cabe destacar que el análisis de las bifurcaciones de Hopf doble en sistemas de potencia no ha sido reportado previamente en la literatura especializada.

1.4. Organización de la tesis

Esta tesis se encuentra organizada en tres partes principales. En la primera de ellas (Capítulos 2 y 3) se realiza una descripción teórica de las bifurcaciones a tratar durante el desarrollo de la misma. En la segunda parte (Capítulo 4) se aborda el estudio de la dinámica del oscilador electrónico. La tercera parte (Capítulos 5 y 6) abarca el análisis de los sistemas de potencia eléctrica. Por último, en el Capítulo 7 se expresan las conclusiones finales de la tesis.

El Capítulo 2 es dedicado a la descripción de las bifurcaciones de equilibrios de

codimensión 1. En particular, se estudiarán las formas normales correspondientes a las bifurcaciones dadas por un autovalor simple en cero (*i. e.*, silla-nodo, transcítica y *pitch-fork*), para luego continuar con el estudio de la bifurcación de Hopf (un par de autovalores complejos conjugados con parte real cero). También se enunciarán las condiciones de no degeneración de las mismas y en los casos de las singularidades silla-nodo y de Hopf, se darán las expresiones para el cálculo del coeficiente de la forma normal correspondiente. El capítulo culmina con el estudio de las bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 1, las cuales serán tratadas como bifurcaciones de puntos fijos (sistemas discretos) del correspondiente mapa de retorno de Poincaré. En particular se analizarán la silla-nodo de ciclos límites (*cyclic fold*), la bifurcación de doble período y la bifurcación de Neimark-Sacker.

En el Capítulo 3 se presentarán los despliegues de las formas normales de algunas de las bifurcaciones de codimensión 2 de puntos de equilibrio. Entre ellas se destacan las bifurcaciones de Bogdanov-Takens (doble autovalor en cero), de Gavrilov-Guckenheimer o cero-Hopf (un autovalor en el origen y un par de autovalores imaginarios puros), y la bifurcación de Hopf doble (dos pares de autovalores complejos conjugados con parte real cero), siendo esta última de especial importancia tanto para el circuito oscilador como para el sistema de potencia de nueve barras. El capítulo finaliza con la descripción de las formas normales de algunas de las bifurcaciones de codimensión 2 de ciclos límites, entre las cuales figuran la bifurcación *fold-flip* y las resonancias fuertes 1:1, 1:2 y 1:3. La resonancia 1:4 no será abordada en esta tesis ya que no forma parte de la dinámica de ninguno de los sistemas estudiados. El análisis de su forma normal puede consultarse en (Krauskopf, 1994; Kuznetsov, 2004).

Una vez introducidos los conceptos teóricos necesarios se comenzará por el estudio de la dinámica del circuito oscilador. La anteposición del mismo al estudio de los sistemas de potencia radica en que algunos de los fenómenos dinámicos exhibidos por el oscilador son de más fácil comprensión que en los sistemas de potencia, ya que el modelo en sí es mucho más sencillo, así como la interpretación física de los fenómenos. Por lo tanto, en el Capítulo 4 se estudiará en forma detallada parte de la dinámica del oscilador electrónico acoplado, haciendo hincapié en el análisis de la bifurcación de Hopf doble, para cuatro despliegues de la forma normal. A su vez, en este capítulo se mostrará parte del diagrama de bifurcaciones global del sistema, en el cual se destaca la existencia de

dos bifurcaciones *fold-flips*, entre otros fenómenos.

Posteriormente, se continuará con el análisis del oscilador, aunque se introducirán algunas modificaciones en el modelo con el objetivo de simplificar su construcción circuital. Se estudiarán los fenómenos dinámicos generados a partir de la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble. Utilizando el diagrama de bifurcaciones en dos parámetros se mostrará que ante perturbaciones paramétricas la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble da origen a sendas resonancias fuertes 1:2 y 1:3 sobre las curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker. A su vez, se describirán los fenómenos que conectan ambas resonancias utilizando la información provista por el diagrama de bifurcaciones en combinación con simulaciones temporales.

La tercer parte de la tesis se dedica enteramente al análisis de los sistemas de potencia utilizando la teoría de bifurcaciones. En el Capítulo 5 se comenzará investigando la dinámica del sistema de 3 barras introducido por Dobson y Chiang. En una primera etapa se analizará el comportamiento del mismo ante variaciones del consumo de potencia reactiva en la barra de carga. Esto revelará la presencia de bifurcaciones silla-nodo, de Hopf y de doble período, entre otras. Luego, se analizará la dinámica del sistema al variar las potencias activa y reactiva consumidas por la carga, donde se destacará la existencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens que vinculará las singularidades de silla-nodo y de Hopf.

Posteriormente, en el Capítulo 6 se abordará el análisis del sistema de nueve barras y tres generadores del WSCC (*Western Systems Coordinating Council*). En primera instancia se analizará el diagrama de bifurcaciones al variar la potencia activa consumida por una de las cargas, destacándose la presencia de bifurcaciones de Hopf y silla-nodo. Luego se obtendrá el diagrama de bifurcaciones variando el consumo de dos cargas simultáneamente. En este último se destacarán dos bifurcaciones de Hopf doble (cuyos despliegues de la forma normal habrán sido previamente estudiados en el circuito oscilador) y una bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer (cero-Hopf). Mediante un posterior análisis se determinará que estos centros organizadores resumen interacciones entre fenómenos de diversa índole, como inestabilidades de voltaje y de ángulo, las cuales por lo general son tratadas en forma independiente en la literatura de sistemas de potencia.

Por último, en el Capítulo 7 se expondrán las conclusiones finales de esta tesis.

Capítulo 2

Bifurcaciones en sistemas dinámicos

Para comenzar se considera un sistema dinámico de dimensión n y dependiente de p parámetros, los cuales varían en forma suave (cuasiestacionaria). Dicho sistema puede ser representado por la siguiente ecuación

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (2.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave, $x \in \mathbb{R}^n$ son las variables y $\alpha \in \mathbb{R}^p$ los parámetros. Si en respuesta a la variación paramétrica el sistema modifica su comportamiento dinámico en forma cualitativa, como por ejemplo cambiando la estabilidad de los puntos de equilibrio o ciclos límites, creando o destruyendo oscilaciones periódicas, etc., entonces se dice que el sistema ha sufrido una *bifurcación*. La cantidad mínima de parámetros independientes que son necesarios variar para que el sistema experimente una bifurcación determinada indica la *codimensión* de la bifurcación. Por lo tanto, para una bifurcación de codimensión k se requieren variar k parámetros.

En general, las bifurcaciones pueden ser de carácter local o global. En las bifurcaciones locales la linealización del sistema en torno a un equilibrio tendrá una determinada cantidad de autovalores con parte real nula, mientras que los restantes podrán estar ubicados tanto en el semiplano izquierdo como en el derecho¹. El caso de las bifurcaciones globales es más complejo ya que la linealización del sistema no aporta información relevante, debido a que no se originan localmente en un entorno del equilibrio.

En presencia de una bifurcación local la dinámica del sistema en torno al equilibrio puede descomponerse en tres clases de variedades: la variedad estable W^s , la inestable W^u y la variedad centro W^c . La primera de ellas es localmente tangente al subespacio T^s generado por los autovectores asociados a los autovalores estables, mientras que la variedad inestable está definida de manera local por los autovectores correspondientes

¹En los sistemas discretos las bifurcaciones locales se tienen cuando la linealización posee algunos autovalores sobre el círculo unitario, mientras que los restantes autovalores se hallan dentro o fuera del mismo.

a los autovalores inestables T^u . En presencia de una bifurcación, la componente de la dinámica asociada a la variedad centro está definida localmente por el subespacio T^c generado por los autovectores correspondientes a los autovalores con parte real cero (o sobre el círculo unitario para sistemas discretos). La dinámica definida por las variedades estable e inestable es trivial (al menos localmente) ya que se conoce de antemano cual será el comportamiento del sistema sobre ellas. Por lo tanto, para determinar los efectos causados por una bifurcación es necesario conocer la dinámica sobre la variedad centro. Para ello primero se debe “reducir” el sistema a dicha variedad, aplicando sucesivas transformaciones no lineales de coordenadas a fin de descartar la dinámica no esencial. En el Apéndice A se resumen las definiciones y teoremas que permiten la reducción de un sistema genérico de dimensión n a la variedad centro. El mismo finaliza con el planteo de un importante resultado que establece que los comportamientos dinámicos relevantes causados por una bifurcación ocurren sobre la variedad centro. Dichas definiciones y teoremas son frecuentemente enunciados en la literatura de sistemas dinámicos (Guckenheimer & Holmes, 1983; Devaney, 1989; Wiggins, 1990; Hale & Koçak, 1991; Glendinning, 1994; Kuznetsov, 2004).

Una vez que el sistema ha sido reducido a la variedad centro, se pueden aplicar transformaciones adicionales para obtener el conjunto mínimo de ecuaciones que reproducen la dinámica local generada por la bifurcación [véase el procedimiento en (Guckenheimer & Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Kuznetsov, 2004)]. Estas ecuaciones constituyen la forma normal de la bifurcación que representa de manera topológicamente equivalente² el comportamiento dinámico en la variedad centro. En general se trata de un conjunto de polinomios, donde los valores de los coeficientes determinan el despliegue correspondiente. En otras palabras, una determinada bifurcación puede generar escenarios dinámicos aparentemente disímiles pero todos son descritos por una misma forma normal. Según la metodología aplicada, el mismo proceso de reducción a la variedad centro brinda las expresiones necesarias para el cálculo de los coeficientes de la forma normal. Por lo tanto, un sistema genérico cualquiera puede ser reducido a la forma normal de una bifurcación específica, y los fenómenos dinámicos de ésta estarán presentes en el sistema original.

La clasificación de los posibles diagramas de bifurcaciones (al menos locales) que

²En ciertas ocasiones la equivalencia entre la forma normal de una bifurcación no es topológica debido al efecto de los términos no lineales de alto orden. Este es el caso de la bifurcación de Hopf doble.

puedan suceder en un sistema genérico sigue siendo un problema abierto, aunque por ejemplo el mismo se encuentra completamente resuelto para sistemas de dos dimensiones continuos y bifurcaciones de hasta codimensión 3. Lo mismo sucede para gran parte de las bifurcaciones de codimensión 2 de puntos fijos y soluciones periódicas en sistemas n -dimensionales discretos y continuos. Existen también algunos resultados para singularidades de más alta codimensión, así como también para bifurcaciones globales de codimensión 1 y 2 (Guckenheimer & Holmes, 1983; Hale & Koçak, 1991; Kuznetsov, 2004).

Este capítulo está dedicado al estudio de las formas normales de las bifurcaciones locales de puntos de equilibrio y de soluciones periódicas de codimensión 1. En todos los casos la dimensión del sistema y la cantidad de parámetros es la mínima necesaria para cada bifurcación en particular (ya que se tratan de formas normales). El capítulo culmina con una introducción a las bifurcaciones globales de mayor relevancia en la tesis. Estas son la bifurcaciones homóclinas y heteróclinas.

2.1. Bifurcaciones de equilibrios de codimensión 1

En esta sección se comenzará por el estudio de las singularidades de puntos de equilibrio donde la linealización del sistema en la condición de bifurcación posee un único autovalor con parte real cero. Posteriormente se abordará el estudio de la bifurcación de Hopf, la cual se tiene cuando la linealización en torno al equilibrio posee un par de autovalores complejos conjugados sobre el eje imaginario.

Para el análisis de las singularidades se hará uso del *diagrama de bifurcaciones*, donde se representa la evolución de la dinámica del sistema al variar el parámetro (véase por ejemplo el diagrama de la Fig. 2.1d, para el caso de la silla-nodo). Sobre el eje de las abscisas se representa la variación del parámetro, mientras que en el de las ordenadas se muestra *el valor estacionario* de algún estado del sistema que resulte de interés (o combinación de ellos). A su vez, se utilizarán como apoyo, representaciones esquemáticas de la dinámica para determinados valores del parámetro (generalmente antes y después de la bifurcación, véase por ejemplo las Figs. 2.1a-c). En tales esquemas se empleará la siguiente notación para la representación de los equilibrios: los puntos tipo nodo y foco³

³Puede demostrarse que un equilibrio tipo foco es topológicamente equivalente a un nodo.

sin importar su estabilidad serán representados mediante puntos de color negro, mientras que para los puntos silla se utilizarán puntos de color blanco. Esto se debe a que es posible obtener diagramas de bifurcación equivalentes a los mostrados si se invierte el sentido de avance del tiempo ($t \rightarrow -t$). En tal caso, aquellos puntos que eran nodos/focos estables o inestables cambiarán su estabilidad pero seguirán siendo nodos/focos, mientras que aquellos puntos que originalmente eran sillas continuarán siéndolo luego del cambio en el sentido de avance del tiempo.

2.1.1. Autovalor simple en cero

Las primeras tres bifurcaciones de codimensión 1 corresponden a un único autovalor de la linealización del sistema en torno al equilibrio cuya parte real es cero. Estas singularidades se denominan silla-nodo, transcítica⁴ y *pitchfork* (tridente), y la ocurrencia de una u otra depende de los términos no lineales y de la simetría del sistema. En todas ellas la variedad centro es unidimensional, ya que existe un único autovalor con parte real cero. Luego, la reducción a la variedad centro de un sistema genérico n -dimensional dependiente de un parámetro puede ser expresada como

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\alpha} \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

donde $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave y cuenta con un punto de equilibrio en $\tilde{x} = 0$ para $\tilde{\alpha} = 0$ con un autovalor en $\lambda = 0$. El símbolo (\sim) en (2.2) se emplea para resaltar el hecho que este sistema representa la reducción a la variedad centro del sistema n -dimensional genérico (2.1). Entonces, el sistema (2.2) resultará topológicamente equivalente a alguna de las siguientes formas normales de las bifurcaciones silla-nodo, transcítica o *pitchfork*.

Bifurcación silla-nodo

La siguiente es la *forma normal de la bifurcación silla-nodo*

$$\dot{\xi} = \beta + s\xi^2, \quad (2.3)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ es la variable, $\beta \in \mathbb{R}$ el parámetro y $s \in \mathbb{R}$ un coeficiente que define el despliegue de la bifurcación. Los fenómenos dinámicos generados por la bifurcación

⁴La bifurcación transcítica no ocurre en ninguno de los sistemas tratados en esta tesis y se incluye únicamente por completitud.

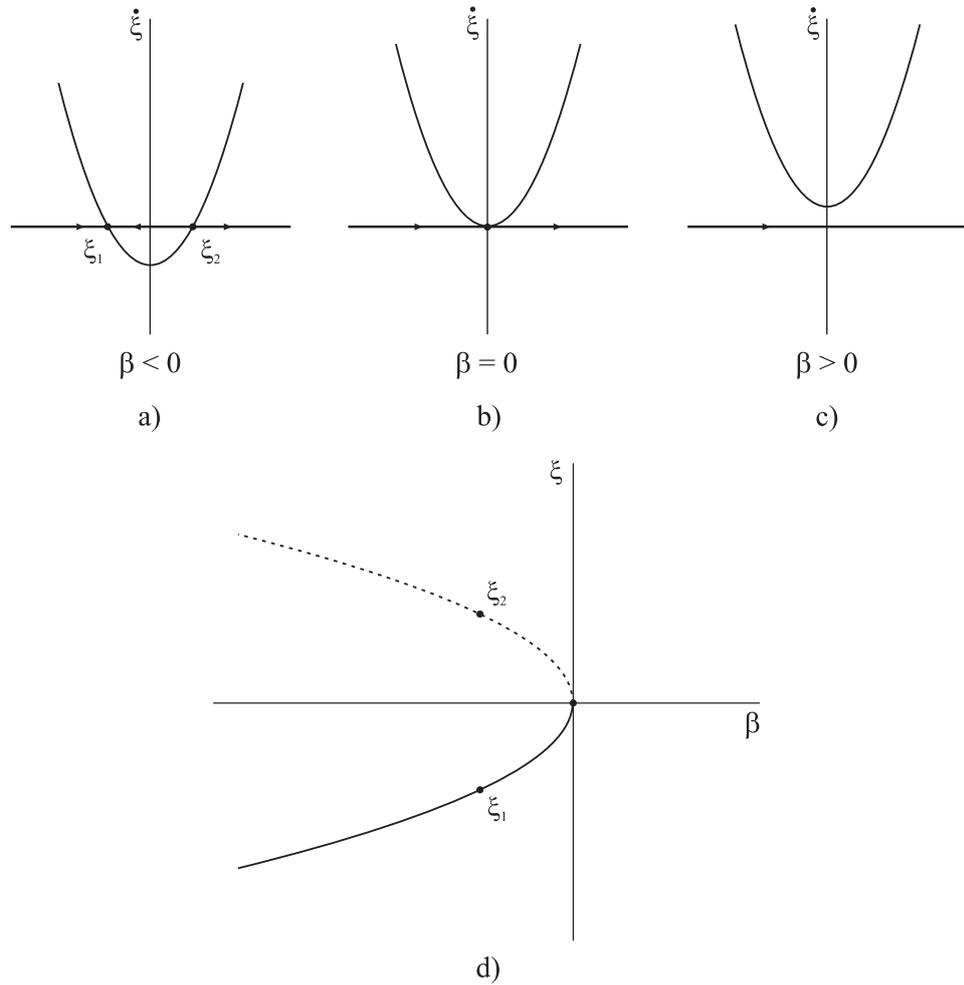


Figura 2.1: Bifurcación silla-nodo (despliegue para $s = 1$).

para $s > 0$ serán topológicamente equivalentes entre sí, pero sensiblemente diferentes para $s < 0$. El caso $s = 0$ indica una degeneración en la bifurcación y serán necesarios términos de más alto orden para describir la dinámica generada.

Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue se analizará el caso $s = 1$ ($s > 0$). Un desarrollo similar puede obtenerse para el caso $s < 0$. El sistema (2.3) posee dos puntos de equilibrio $\xi_{1,2} = \mp\sqrt{-\beta}$ para $\beta < 0$, como se indica en la Fig. 2.1a. El equilibrio $\xi_1 = -\sqrt{-\beta}$ es estable, mientras que $\xi_2 = \sqrt{-\beta}$ es inestable. Luego, a medida que el parámetro β se aproxima a cero ambos equilibrios se acercan entre sí. Cuando $\beta = 0$, existe un único punto de equilibrio no hiperbólico cuyo autovalor es $\lambda = 0$, como se muestra en la Fig. 2.1b. Luego, si $\beta > 0$ el sistema no posee puntos de equilibrios

(Fig. 2.1c). La bifurcación silla-nodo se caracteriza por el colapso (creación) de dos puntos de equilibrio al variar el parámetro.

El diagrama de bifurcaciones resultante se muestra en la Fig. 2.1d., donde la línea a trazos indica puntos de equilibrio inestables ($\xi_2 = \sqrt{-\beta}$), mientras que la línea sólida son puntos de equilibrio estables ($\xi_1 = -\sqrt{-\beta}$). El eje de las abscisas corresponde al parámetro β y el eje de las ordenadas a la variable ξ . Nótese que en la Fig. 2.1d se representan únicamente las soluciones de estado estacionario. Esto es válido para todos los diagramas de bifurcaciones que se encuentran en esta tesis.

Las condiciones de no degeneración que debe cumplir el sistema (2.2) para que la bifurcación silla-nodo no sea degenerada son las siguientes

$$\text{LP-1)} \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \neq 0.$$

$$\text{LP-2)} \quad \left. \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \neq 0.$$

Nótese que $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ representa la reducción a la variedad centro (unidimensional) del sistema n -dimensional genérico.

Para sistemas n -dimensionales, es posible hallar el coeficiente de la forma normal utilizando la información del *sistema genérico de dimensión n* (2.1). El sistema n -dimensional puede ser expresado utilizando su expansión en serie de Taylor como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha). \quad (2.4)$$

La matriz $A(\alpha)$ es el Jacobiano del sistema y $F(x, \alpha)$ contiene los términos no lineales. En particular, la última función puede expresarse como

$$F(x, \alpha) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (2.5)$$

donde $B(x, x)$ y $C(x, x, x)$ se conocen como “formas multilineales simétricas” y tienen las siguientes expresiones

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \left. \frac{\partial^2 F_i(\xi, \alpha)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right|_{(\xi, \alpha)=(0,0)} x_j y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^n \left. \frac{\partial^3 F_i(\xi, \alpha)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right|_{(\xi, \alpha)=(0,0)} x_j y_k u_l. \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

con $x, y, u \in \mathbb{R}^n$.

El coeficiente de la forma normal surge de la aplicación del método de proyección (Kuznetsov, 2004) y está dado por

$$s = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad (2.8)$$

donde $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ es el autovector correspondiente al autovalor crítico, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ es el autovector adjunto y $B(q, q)$ es la forma multilineal (2.6) evaluada en el autovector q . El coeficiente s debe ser distinto de cero para evitar la degeneración de la bifurcación (esto se cumple si se verifican LP-1 y LP-2). Cabe destacar que existen algoritmos numéricos que implementan el cálculo de este coeficiente (Dhooge et al., 2006). Por último, la notación adoptada en la tesis para indicar una bifurcación silla-nodo será *LP* (del inglés *limit point*).

Bifurcación transcítica

La forma normal de la bifurcación transcítica es

$$\dot{\xi} = \beta\xi + s\xi^2, \quad (2.9)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ es la variable, $\beta \in \mathbb{R}$ el parámetro y $s \in \mathbb{R}$ un coeficiente real ($s \neq 0$). Como en el caso anterior, existen dos situaciones topológicamente distintas para $s > 0$ y $s < 0$.

El sistema (2.9) posee una bifurcación transcítica en $\xi_0 = 0$ para $\beta = 0$. Únicamente se considerará el caso $s > 0$, sin perder generalidad se adoptará $s = 1$. El equilibrio ξ_0 es no hiperbólico ya que la linealización (2.9) en torno al origen posee un autovalor $\lambda = 0$. La bifurcación transcítica posee dos puntos de equilibrio antes y después de la singularidad, los cuales intercambian la estabilidad, *i.e.*, el equilibrio estable para $\beta < 0$ se vuelve inestable para $\beta > 0$ y viceversa. Las expresiones de ambos puntos de equilibrio en función del parámetro se obtienen fácilmente igualando (2.9) a cero. En este caso son:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 & \text{si } \beta \neq 0, \\ \xi_2 = -\beta & \text{si } \beta \neq 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Por lo tanto, para valores de β menores que cero, se tienen dos puntos de equilibrio, ξ_1 estable y ξ_2 inestable, como se muestra en la Fig. 2.2a. Luego, para $\beta = 0$ existe un único punto de equilibrio no hiperbólico (Fig. 2.2b). Por último, para $\beta > 0$ se tienen

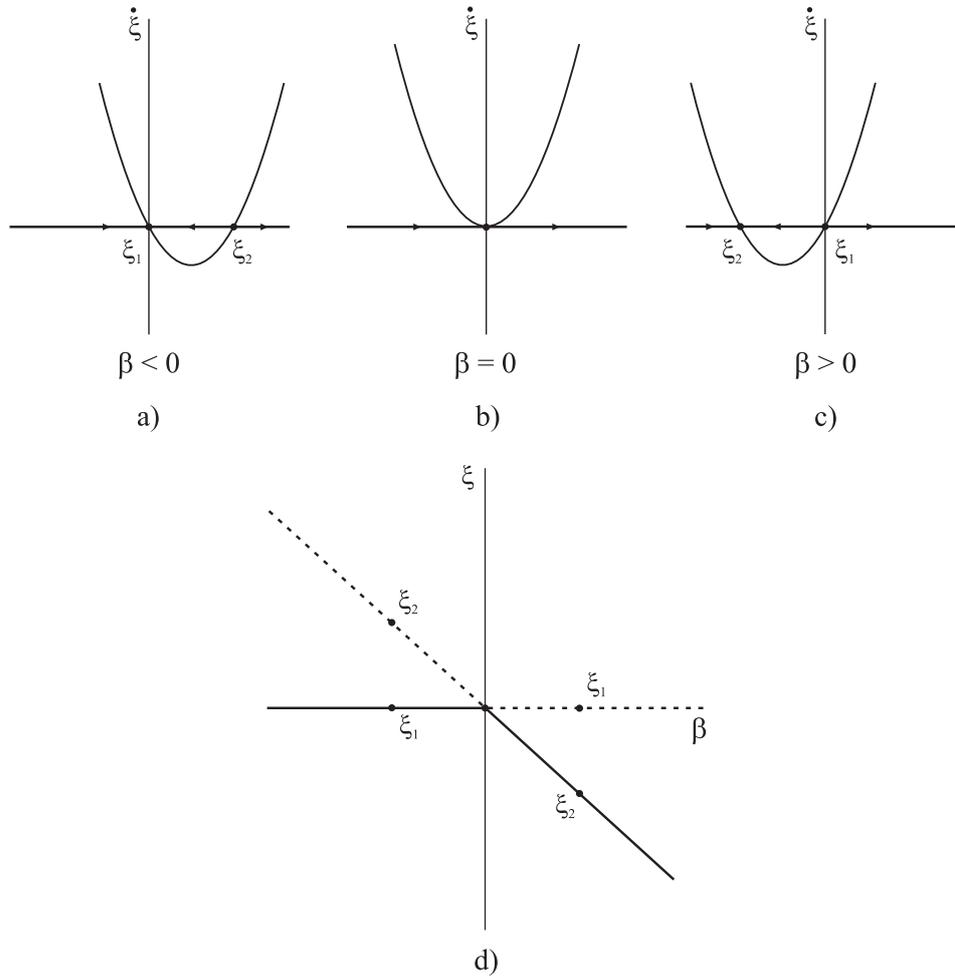


Figura 2.2: Bifurcación transcritical (despliegue para $s = 1$).

nuevamente dos puntos de equilibrio ξ_1 inestable y ξ_2 estable, como se muestra en la Fig. 2.2c.

Las condiciones de no degeneración para la bifurcación transcritical que debe satisfacer el sistema (2.2), son las siguientes (Glendinning, 1994):

$$\text{TC-1)} \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \neq 0.$$

$$\text{TC-2)} \quad \left. \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} = 0.$$

$$\text{TC-3)} \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha} \partial \tilde{x}} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} - \left(\left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \cdot \left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}^2} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \right) > 0.$$

Es importante notar la diferencia entre la bifurcación transcritical con la de silla-nodo, ya que en el caso de la transcritical los puntos de equilibrio ξ_1 y ξ_2 continúan existiendo

para valores positivos de β , aunque cambian su estabilidad. Esta diferencia se pone de manifiesto si se comparan los diagramas de bifurcaciones de las Figs. 2.1d y 2.2d. La bifurcación transcítica se indica con las siglas *TC*.

Bifurcación *pitchfork*

El último de los escenarios posibles para bifurcaciones locales de codimensión 1 con un único autovalor con parte real cero, corresponde a la bifurcación *pitchfork*. La forma normal de dicha singularidad está dada por el siguiente sistema

$$\dot{\xi} = \beta\xi + s\xi^3, \quad (2.11)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ es la variable, $\beta \in \mathbb{R}$ el parámetro y $s \in \mathbb{R}$ es un coeficiente no nulo. A diferencia de las singularidades anteriores en este caso se analizará el diagrama de bifurcaciones para $s = -1$, ya que para $s < 0$ los equilibrios emergentes de la bifurcación son estables.

Los puntos de equilibrio de la ecuación (2.11) en función del parámetro β son

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 & \text{si } \beta \neq 0, \\ \xi_2 = -\sqrt{\beta} & \text{si } \beta > 0, \\ \xi_3 = \sqrt{\beta} & \text{si } \beta > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Para valores de β menores que cero, el sistema posee un único punto de equilibrio estable $\xi_1 = 0$, tal como se muestra en la Fig. 2.3a, el cual se vuelve no hiperbólico en el origen $(\beta, \xi) = (0, 0)$. Por lo tanto, el autovalor asociado tiene parte real cero (Fig. 2.3b). A partir de este punto en adelante ($\beta > 0$) el sistema pasa a tener tres puntos de equilibrio $\xi_1 = 0$ (ahora inestable) y dos equilibrios estables adicionales $\xi_{2,3} = \mp\sqrt{\beta}$, como se muestra en la Fig. 2.3c.

El despliegue de la bifurcación se muestra en la Fig. 2.3d, donde se aprecia claramente el cambio de estabilidad del equilibrio $\xi_1 = 0$ y el nacimiento de los puntos ξ_2 y ξ_3 (estables) para $\beta > 0$. En este caso, la diferencia entre esta bifurcación con la silla-nodo y la transcítica es notoria y se debe a la simetría cúbica de (2.11).

Teniendo en consideración el sistema (2.2), las condiciones de no degeneración para la bifurcación *pitchfork* son (Glendinning, 1994):

$$\text{PB-1) } \left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} = 0.$$

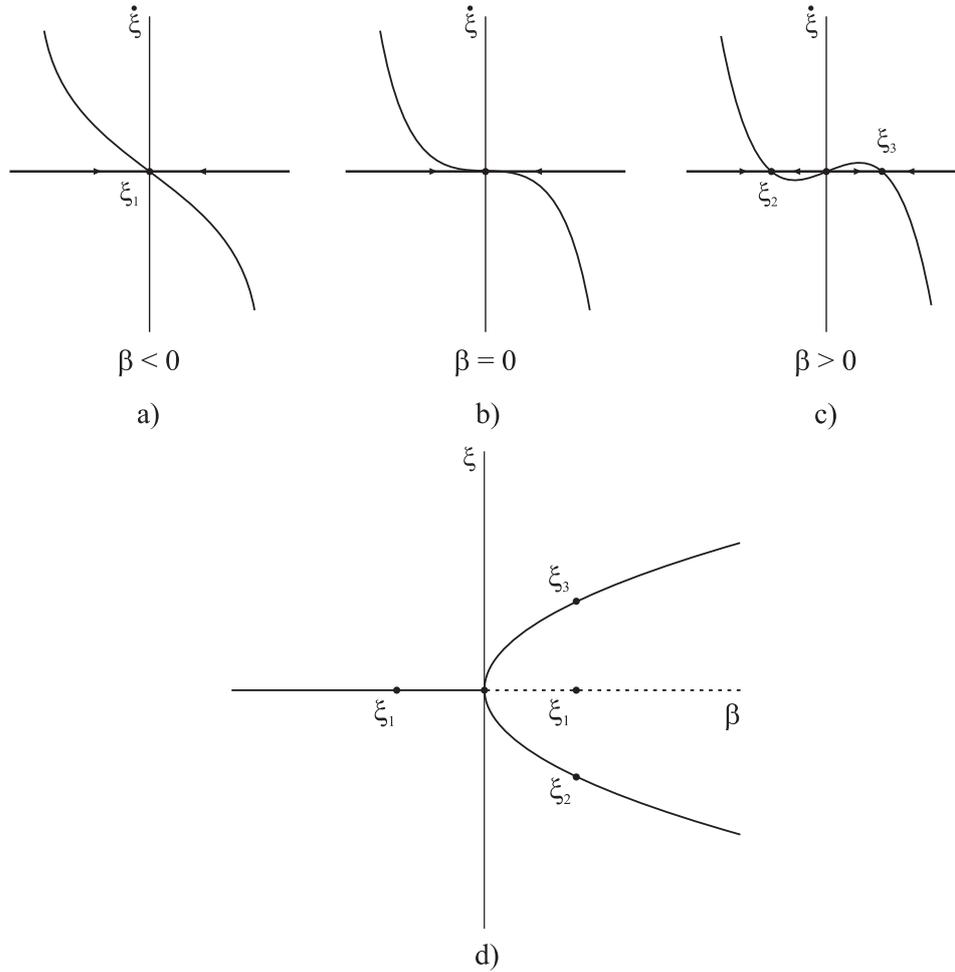


Figura 2.3: Bifurcación *pitchfork* (despliegue para $s = -1$).

$$\text{PB-2) } \left. \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} = 0.$$

$$\text{PB-3) } \left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha} \partial \tilde{x}} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \neq 0.$$

$$\text{PB-4) } \left. \frac{\partial^3 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{x}^3} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{\alpha})=(0,0)} \neq 0.$$

Las bifurcaciones *pitchfork* serán indicadas utilizando las letras *PB*.

2.1.2. Bifurcación de Hopf

La bifurcación de Hopf constituye uno de los pilares en los que se basa esta tesis, por lo tanto, se estudiará su forma normal más detalladamente. Esta singularidad ha sido

estudiada ampliamente en la literatura, como por ejemplo en (Marsden & McCracken, 1976; Hassard et al., 1981; Mees, 1981; Moiola & Chen, 1996), entre otros (las últimas dos referencias abordan el estudio de la bifurcación de Hopf mediante una aproximación en el dominio frecuencia).

El siguiente sistema de dimensión dos es la *forma normal de la bifurcación de Hopf*, en coordenadas rectangulares

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \beta\xi_1 - \xi_2 + s\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \beta\xi_2 + s\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ son las variables, $\beta \in \mathbb{R}$ el parámetro y $s \neq 0$ un coeficiente real. El origen del sistema (2.13), $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$, es un punto de equilibrio para todo β . Además, el Jacobiano evaluado en dicho punto tiene autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \beta \pm i$.

Debido a las características del sistema resulta conveniente realizar un cambio de coordenadas, de manera tal de que quede expresado en coordenadas polares. Para ello, en primer lugar se define la variable compleja $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ ($\bar{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2$, $|\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta} = \xi_1^2 + \xi_2^2$). Luego, el sistema (2.13) queda expresado en variable compleja como,

$$\dot{\zeta} = \dot{\xi}_1 + i\dot{\xi}_2 = \beta(\xi_1 + i\xi_2) + i(\xi_1 + i\xi_2) + s(\xi_1 + i\xi_2)(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad (2.14)$$

por lo tanto,

$$\dot{\zeta} = (\beta + i)\zeta + s\zeta|\zeta|^2. \quad (2.15)$$

Definiendo $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ (y por lo tanto, $\dot{\zeta} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi}$) se tiene,

$$\dot{\zeta} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\beta + i + s\rho^2), \quad (2.16)$$

separando la última ecuación en parte real e imaginaria se llega a la expresión del sistema (2.13) en coordenadas polares

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta + s\rho^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Ambas ecuaciones de (2.17) se encuentran desacopladas entre sí. Luego, la primer ecuación marca la dinámica del módulo $\rho \geq 0$, mientras que la segunda impone una rotación a velocidad constante.

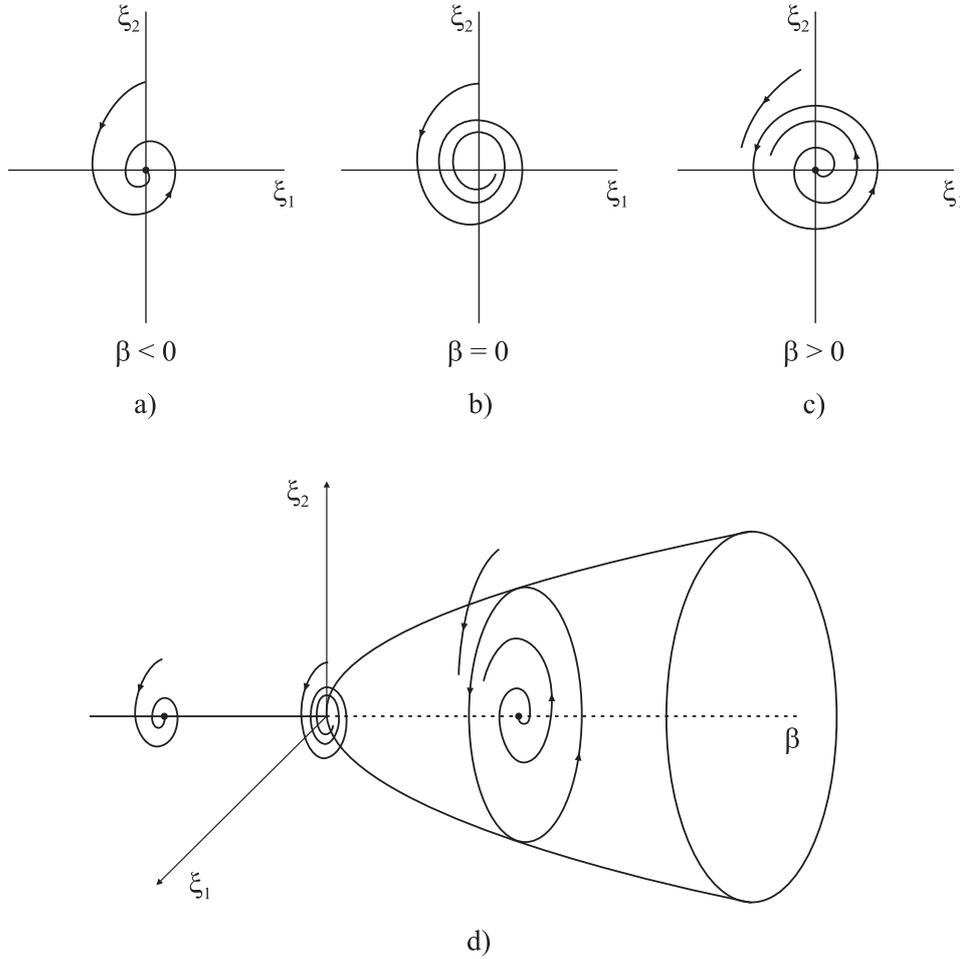


Figura 2.4: Bifurcación de Hopf supercrítica ($s = -1$).

Bifurcación de Hopf supercrítica

Si el coeficiente $s < 0$ la bifurcación se conoce con el nombre de *bifurcación de Hopf supercrítica*. Sin pérdida de generalidad se considerará el caso $s = -1$. Claramente, de (2.17) $\rho = 0$ es un punto de equilibrio para todo valor de β , y es un foco estable para $\beta < 0$ como se indica en el retrato de fases de la Fig. 2.4a. Luego, en $\beta = 0$ el sistema tiene un punto de equilibrio no hiperbólico con autovalores complejos conjugados con parte real cero⁵. El retrato de fase correspondiente se muestra en la Fig. 2.4b. Para $\beta > 0$ el equilibrio se vuelve un foco inestable, debido al cruce hacia el semiplano derecho de los autovalores. A su vez, también para $\beta > 0$ la primera ecuación de (2.17) posee

⁵En el caso del equilibrio no hiperbólico la estabilidad está determinada por los términos no lineales.

dos equilibrios adicionales, dados por $\rho = \pm\sqrt{\beta}$. La dinámica para $\beta > 0$ se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.4c. Es importante notar que en este último caso los nuevos puntos de equilibrio se tienen para $\rho \neq 0$, y debido a que la segunda ecuación de (2.17) constituye una rotación a velocidad constante, los equilibrios nuevos corresponden a un ciclo límite estable del sistema (2.13), cuya amplitud crece como $\sqrt{\beta}$ al incrementar el valor del parámetro.

El diagrama de bifurcaciones se muestra en la Fig. 2.4d, donde la recta $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ representa un punto de equilibrio estable para $\beta < 0$, el cual se vuelve inestable luego de la bifurcación ($\beta > 0$). El paraboloides representa la evolución de la amplitud del ciclo límite estable que emerge de la bifurcación a medida que se incrementa el parámetro β .

Dada una condición inicial de (2.13) cercana al equilibrio inestable para $\beta > 0$, el sistema convergerá asintóticamente al ciclo límite estable en forma oscilatoria. Por lo tanto, los estados ξ_1 y ξ_2 evidenciarán una oscilación sostenida. Una situación similar sucederá si la condición inicial es tal que $\|(\xi_1, \xi_2)\| > \sqrt{\beta}$ ($\beta > 0$), *i.e.*, fuera del paraboloides.

Bifurcación de Hopf subcrítica

El caso complementario se tiene para $s > 0$, donde la singularidad se conoce como *bifurcación de Hopf subcrítica*. En particular se estudiará el caso $s = 1$. En esta ocasión la oscilación resultante es inestable y su amplitud aumenta para $\beta < 0$ (en este caso crece como $\sqrt{-\beta}$). El punto de equilibrio en el origen posee la misma estabilidad para $\beta < 0$ y $\beta > 0$ que en el caso anterior (Figs. 2.5a y 2.5c), pero es inestable (no lineal) para $\beta = 0$ (Fig. 2.5b).

El diagrama de bifurcaciones correspondiente se muestra en la Fig. 2.5d. En esta ocasión si la condición inicial se encuentra en el interior del paraboloides, el sistema convergerá en forma asintótica al equilibrio estable, ya que las trayectorias son repelidas por el ciclo límite inestable. Si la condición inicial se encuentra fuera del paraboloides o en cualquier punto para $\beta > 0$, el sistema divergirá. Esto marca una diferencia notoria con el caso anterior, ya que las trayectorias no se encuentran confinadas.

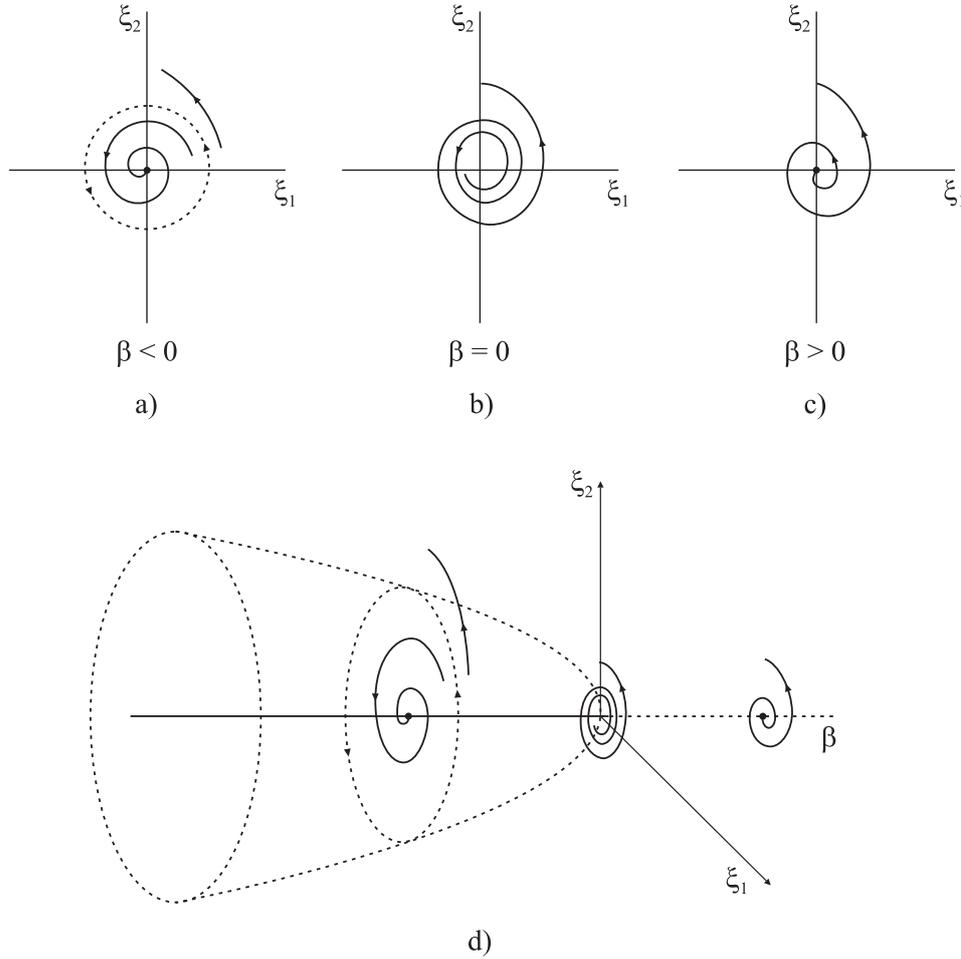


Figura 2.5: Bifurcación de Hopf subcrítica ($s = 1$).

Términos de alto orden

El sistema (2.13) expresado en forma vectorial con el agregado de términos de alto orden resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + s(\xi_1^2 + \xi_2^2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^4), \quad (2.18)$$

donde $O(\|\xi\|^4)$ representan los términos de alto orden, que pueden depender en forma suave del parámetro β .

Lema 2.1 *El sistema (2.18) es localmente topológicamente equivalente al sistema (2.13), en un entorno del origen.*

La prueba de este lema puede consultarse en (Kuznetsov, 2004).

En otras palabras, el Lema 2.1 establece que el agregado de términos de orden superior no influyen en la dinámica local generada por la forma normal de la bifurcación de Hopf.

Bifurcación de Hopf genérica para sistemas en \mathbb{R}^2

Los siguientes teoremas brindan las condiciones de no degeneración y la forma normal topológica de la bifurcación de Hopf en sistemas de dos dimensiones.

Teorema 2.2 *Sea el siguiente sistema diferencial*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

donde f es una función suave y tiene un punto de equilibrio en $x = 0$, para valores de $|\alpha|$ suficientemente pequeños, cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha), \quad (2.20)$$

donde, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Además se satisfacen las siguientes condiciones

H-1) $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov o coeficiente de curvatura (más adelante se verá como se obtiene),

H-2) $\left. \frac{d\mu(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \neq 0$.

Entonces, existen un cambio de coordenadas y una reparametrización, ambos invertibles, y un escalado temporal, que transforma el sistema (2.19) en

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + s(\xi_1^2 + \xi_2^2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^4), \quad (2.21)$$

donde $s = l_1(0)$.

La condición (H-1) establece la no degeneración de la bifurcación, mientras que la condición de transversalidad está dada por (H-2). Esta última asegura que exista un cruce efectivo del par de autovalores críticos por el eje imaginario. Utilizando el Lema 2.1 es posible descartar los términos de alto orden $O(\|\xi\|^4)$, y enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf) *Todo sistema genérico de dimensión 2, dependiente de un parámetro*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (2.22)$$

que posea un punto de equilibrio en $x = 0$ para $\alpha = 0$, con autovalores

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0, \quad (2.23)$$

es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a la siguiente forma normal:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + s(\xi_1^2 + \xi_2^2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Nótese que el sistema (2.24) es idéntico al expresado en (2.13).

Si se observa la ecuación (2.24) el único coeficiente de la forma normal a especificar es s , el cual se denomina primer coeficiente de Lyapunov (también conocido como primer coeficiente de curvatura) $l_1(0)$. De (2.24) es fácil ver que si $s = l_1(0) = 0$ la bifurcación de Hopf será degenerada y se necesitarán términos de más alto orden para describir la dinámica en torno a la singularidad. Resta entonces hallar una expresión para calcular dicho coeficiente a partir del sistema genérico de dimensión dos (2.22).

Cálculo del primer coeficiente de curvatura $l_1(\alpha)$

El sistema (2.22) puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (2.25)$$

donde, la matriz $A(\alpha)$ es el Jacobiano del sistema y F es una función vectorial suave cuyas componentes tienen expansiones en serie de Taylor que comienzan (al menos) a partir del coeficiente cuadrático, o sea, $F = O(\|x\|^2)$.

El primer coeficiente de Lyapunov para un sistema de dos dimensiones tiene la siguiente expresión

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21}). \quad (2.26)$$

Los coeficientes g_{20} , g_{11} y g_{21} se calculan de acuerdo a

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, \quad (2.27)$$

donde $B(x, y)$ y $C(x, y, u)$ contienen los términos de las derivadas segundas y terceras de $F(x, \alpha)$ (ecuaciones (2.6) y (2.7) con $n = 2$), respectivamente, y q es el autovector asociado a uno de los autovalores críticos y p su adjunto. La expresión (2.26) surge de la aplicación del método de proyección sobre el sistema genérico (2.22) para obtener la forma normal de la bifurcación de Hopf (2.24). La demostración completa de este proceso puede consultarse en (Kuznetsov, 2004). Mediante la aplicación de (2.26) a un sistema genérico de dos dimensiones que cuente con una bifurcación de Hopf es posible determinar si la oscilación resultante será estable (supercrítica) o inestable (subcrítica).

Para sistemas n -dimensionales, la expresión del primer coeficiente de curvatura es idéntica a la indicada en la ecuación (2.26), la única diferencia radica en el cálculo del coeficiente g_{21} (las expresiones g_{20} y g_{11} no varían), el cual en este caso se define como

$$\begin{aligned} g_{21} = & \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle \\ & + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q, q)) \rangle + \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \\ & - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{2}{3i\omega_0} |\langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde, q y p son los autovectores asociado y adjunto, respectivamente. I_n es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo tanto, la expresión (2.26) para un sistema n -dimensional resulta

$$\begin{aligned} l_1(0) = & \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle \\ & + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q, q)) \rangle]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Es importante destacar que la fórmula (2.29) permite calcular el coeficiente de curvatura en forma analítica utilizando únicamente la información del Jacobiano del sistema y los autovectores q y p .

En adelante se utilizará la letra H para indicar una bifurcación de Hopf (o alternativamente H^\pm , donde el superíndice indica el signo del coeficiente de curvatura).

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo del primer coeficiente de curvatura en un sistema de tres dimensiones [véase (Kuznetsov, 2004)].

Ejemplo 2.4 (Bifurcación de Hopf en un sistema de tres dimensiones) *Sea la siguiente ecuación diferencial no lineal dependiente de los parámetros (α, β) , ambos positivos*

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y + y(1 - y) = 0. \quad (2.30)$$

Una representación de (2.30) en variables de estado puede ser

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - \beta x_2 - \alpha x_3 + x_1^2. \end{cases} \quad (2.31)$$

El sistema (2.31) posee dos puntos de equilibrio para todos los valores de (α, β) , $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ y $x^{(1)} = (1, 0, 0)$. El análisis se centrará en el equilibrio en el origen. El Jacobiano de (2.31) evaluado en $x^{(0)}$ tiene la siguiente ecuación característica

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0. \quad (2.32)$$

Luego, para hallar los puntos donde sucede la bifurcación de Hopf se reemplaza $\lambda = i\omega$ en (2.32) y se obtiene la siguiente relación entre los parámetros α y β ,

$$\alpha = \alpha_0(\beta) = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0, \quad (2.33)$$

además, $x^{(0)}$ es estable para $\alpha > \alpha_0$ e inestable para $\alpha < \alpha_0$, debido al cruce de un par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ para $\alpha = \alpha_0$. Por otro lado, el restante autovalor es estable ($\lambda_3 = -\frac{1}{\beta}$ para α_0), y continúa siéndolo al menos para valores cercanos al crítico. Por lo tanto, hay una bifurcación de Hopf para α_0 , donde la frecuencia de cruce de los autovalores es

$$\omega^2 = \beta. \quad (2.34)$$

Entonces, fijando $\alpha = \alpha_0$ y reemplazando $\beta = \omega^2$, el Jacobiano de (2.31) resulta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\omega^2 & -\frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Los autovectores q y p normalizados ($\langle p, q \rangle = 1$) son

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\omega(\omega^3 + i)} \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Debido a que la no linealidad del sistema (2.31) es cuadrática resulta que $C(x, y, u) = 0$, ya que involucra derivadas de tercer orden. Luego, $B(x, y)$ con $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ e $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, es

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1y_1 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

por lo tanto,

$$B(q, q) = B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2q_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

La expresión del primer coeficiente de Lyapunov en función de ω resulta

$$l_1(0) = -\frac{\omega^3(1 + 8\omega^6)}{(1 + 4\omega^6)(1 + \omega^6)}, \quad (2.39)$$

sustituyendo $\omega^2 = \beta$,

$$l_1(0) = -\frac{\beta\sqrt{\beta}(1 + 8\beta^3)}{(1 + 4\beta^3)(1 + \beta^6)} < 0, \quad \beta > 0, \quad (2.40)$$

entonces, la bifurcación de Hopf es supercrítica, i.e., se genera una solución periódica estable en torno al origen para $\alpha > \alpha_0$.

2.2. Bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 1

En la sección anterior han sido consideradas las bifurcaciones locales de codimensión 1 de puntos de equilibrio. Entre ellas la bifurcación de Hopf provee un mecanismo de generación de soluciones periódicas, donde a raíz del cruce por el eje imaginario de un par de autovalores complejos conjugados se genera una oscilación periódica sostenida (estable o inestable según el signo de l_1) que nace del punto de bifurcación e incrementa su amplitud proporcionalmente a la raíz cuadrada del parámetro (al menos localmente)⁶. Puede ocurrir que dicha solución periódica sufra también de bifurcaciones a medida que

⁶La bifurcación de Hopf no es el único mecanismo de generación de ciclos límites.

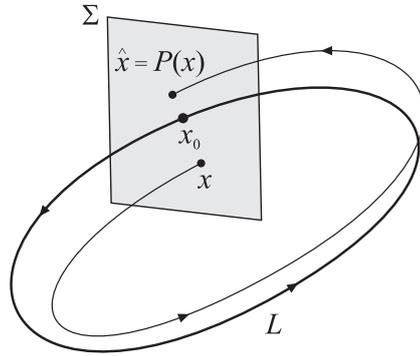


Figura 2.6: Representación esquemática de un mapa de Poincaré del ciclo L .

se varía el parámetro, por ejemplo, puede colapsar con otro ciclo límite en una bifurcación silla-nodo, de manera análoga a lo que sucede con los puntos de equilibrio.

Una manera de estudiar las bifurcaciones de soluciones periódicas es mediante el análisis de la dinámica de los impactos de la trayectoria sobre un hiperplano transversal. De esta forma se define un mapa discreto que registra la dinámica (ante perturbaciones) del ciclo límite en cuestión. Por lo tanto, antes de comenzar con el estudio de las bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 1 es necesario definir las herramientas básicas para el análisis de soluciones periódicas en sistemas diferenciales de tiempo continuo.

2.2.1. Mapa de Poincaré

Sea el siguiente sistema diferencial continuo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.41)$$

donde f es un campo vectorial suave que tiene una solución periódica L y sea $x_0 \in L$ un punto de la misma. Luego, se define una sección Σ , transversal al ciclo L en el punto x_0 , como se representa esquemáticamente en la Fig. 2.6. La sección Σ es una hipersuperficie suave de dimensión $(n - 1)$, que intercepta transversalmente a L .

El comportamiento de las órbitas cercanas al ciclo L puede interpretarse de la siguiente manera. El ciclo por sí mismo define una órbita que comienza en $x_0 \in \Sigma$ y regresa a Σ luego de un período. Como las soluciones de (2.41) dependen en forma suave de las condiciones iniciales, si se toma un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cercano a x_0 , la solución retornará a Σ en un punto \hat{x} . Por ende, las órbitas cercanas son también

transversales a Σ . Entonces, es posible definir el siguiente mapa

$$x \mapsto \hat{x} = P(x), \quad (2.42)$$

donde P se conoce como el *mapa de Poincaré* asociado al ciclo límite L .

El mapa de Poincaré está definido de manera local y posee la misma suavidad que el campo f . Además, P es invertible en un entorno de x_0 . El mapa inverso $P^{-1} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ puede construirse a partir de la integración del sistema (2.41) con el tiempo en sentido reverso, de manera tal que partiendo de un punto sobre el mapa e integrando hacia atrás se llega a la que sería la intersección previa con Σ .

Es importante observar que el punto $x_0 \in L$ es un *punto fijo* del mapa de Poincaré, ya que satisface que $P(x_0) = x_0$. Por lo tanto, un ciclo límite del sistema (2.41) se representa mediante un punto fijo del mapa de Poincaré correspondiente. Entonces, el estudio de las bifurcaciones de ciclos límites se reduce al estudio de los puntos fijos del mapa de Poincaré asociado a la solución periódica.

Es posible definir un sistema de coordenadas $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})^T$ sobre Σ tal que el origen $\xi = 0$ coincida con x_0 , de manera que la estabilidad del ciclo límite L se encuentra unívocamente determinada por la estabilidad del punto fijo $\xi_0 = 0$ del mapa de Poincaré. Por lo tanto, el ciclo L será estable si todos los autovalores (también llamados multiplicadores) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ de la linealización del mapa P

$$A = \left. \frac{dP}{d\xi} \right|_{\xi=0}, \quad (2.43)$$

se encuentran dentro del círculo unitario, o sea $|\mu_i| < 1$, $i = 1, \dots, n-1$. Es importante destacar que los multiplicadores no dependen de la elección particular de x_0 , ni de las coordenadas ξ sobre el mapa de Poincaré.

Matriz de monodromía

La relación entre los autovalores del mapa de Poincaré para el ciclo L con el sistema (2.41) está determinada por la matriz de monodromía.

Sea $x^0(t) = x^0(t+T)$ una solución periódica (de período T) del sistema (2.41) y $u(t)$ una perturbación de dicha solución, de manera tal que

$$x(t) = x^0(t) + u(t), \quad (2.44)$$

entonces

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^0(t) = f(x^0(t) + u(t)) - f(x^0(t)) = A(t)u(t) + O(\|u(t)\|^2) \quad (2.45)$$

donde $A(t) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^0(t)}$, y $A(t) = A(t+T)$ (periódica).

Truncando los términos de orden superior $O(\|u(t)\|^2)$ se llega al siguiente sistema periódico de período T ,

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t). \quad (2.46)$$

El sistema (2.46) se conoce como la ecuación variacional del ciclo L y representa la parte lineal de la dinámica del sistema ante perturbaciones del ciclo límite. Por lo tanto, la estabilidad de L depende de las propiedades de $A(t)$.

Luego, se define como la solución matricial fundamental de (2.41) a la matriz $M(t)$ que satisface

$$\dot{M} = A(t)M, \quad (2.47)$$

con condiciones iniciales $M(0) = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$.

Toda solución de (2.46) satisface

$$u(T) = M(T)u(0), \quad (2.48)$$

donde $M(T_0)$ es la denominada *matriz de monodromía* del ciclo L .

Teorema 2.5 *Los autovalores de la matriz de monodromía $M(T_0)$ son*

$$1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \quad (2.49)$$

donde μ_i son los multiplicadores del mapa de Poincaré asociado a L .

La prueba puede consultarse en (Kuznetsov, 2004). Los autovalores de la matriz de monodromía son también denominados *multiplicadores de Floquet*. Nótese que toda solución periódica tiene asociado un multiplicador de la matriz de monodromía en 1.

Por lo tanto, un ciclo límite será estable si todos los multiplicadores de Floquet se encuentran comprendidos dentro del círculo unitario, ya que el punto fijo sobre el mapa de Poincaré es estable. Los mecanismos más simples por medio de los cuales un ciclo límite puede experimentar una bifurcación y volverse inestable están dados por el cruce de un multiplicador por el círculo unitario y de un par de multiplicadores complejos conjugados (exceptuando el multiplicador trivial en 1). Estas son bifurcaciones de codimensión

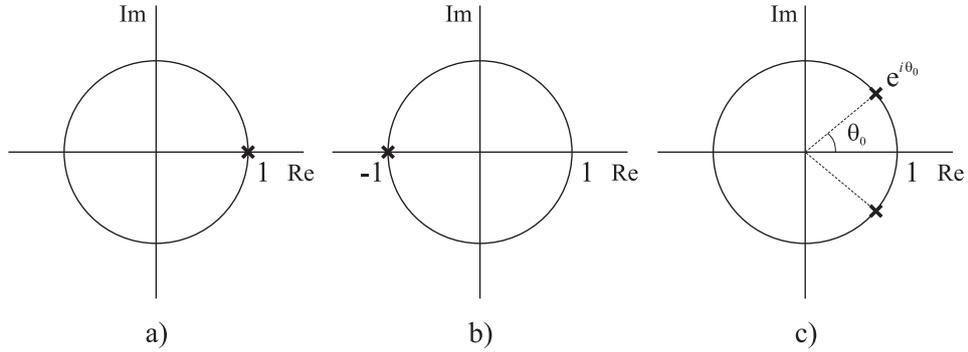


Figura 2.7: Autovalores críticos correspondientes a bifurcaciones de ciclos límites. a) Silla-nodo (*cyclic fold*), transcítica o *pitchfork*. b) Doble período. c) Neimark-Sacker.

1 y existen tres casos cualitativamente diferentes: $\mu_1 = 1$, $\mu_1 = -1$ y $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ (un par de multiplicadores sobre el círculo unitario), como se muestra en la Fig. 2.7. En el caso que existan más multiplicadores, estos no se encuentran sobre el círculo unitario (por supuesto sin contar el trivial en 1). Si el cruce se da por un multiplicador $\mu_1 = 1$ (Fig. 2.7a), entonces la bifurcación será silla-nodo (también conocida como *cyclic fold*), *pitchfork* o transcítica, de forma análoga a lo que sucedía en las bifurcaciones de puntos de equilibrio con un autovalor en cero. Si el multiplicador cruza por -1 (Fig. 2.7b), la singularidad resultante se denomina de doble período. Finalmente, en el caso de contar con un par de multiplicadores complejos conjugados $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ (Fig. 2.7c), la bifurcación se denomina Neimark-Sacker (o Hopf secundaria).

La reducción de un mapa genérico a la variedad centro y luego el posterior cálculo de los coeficientes de la forma normal de estas bifurcaciones se realiza de forma similar a la expuesta en la Sec. A.2.1 del Apéndice A, para ecuaciones diferenciales.

2.2.2. Bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas

Si un multiplicador (no trivial) de la linealización del mapa de Poincaré se encuentra ubicado en 1 ($\mu_1 = 1$) existen tres posibles bifurcaciones: silla-nodo de órbitas periódicas (*cyclic fold*), transcítica y *pitchfork*. Estas últimas dos ocurren si el mapa satisface ciertas condiciones de simetría. En esta ocasión se estudiará únicamente el caso de la silla-nodo de ciclos. Los restantes casos son similares a los vistos para bifurcaciones de puntos de equilibrio y los diagramas de bifurcación correspondientes son idénticos, con

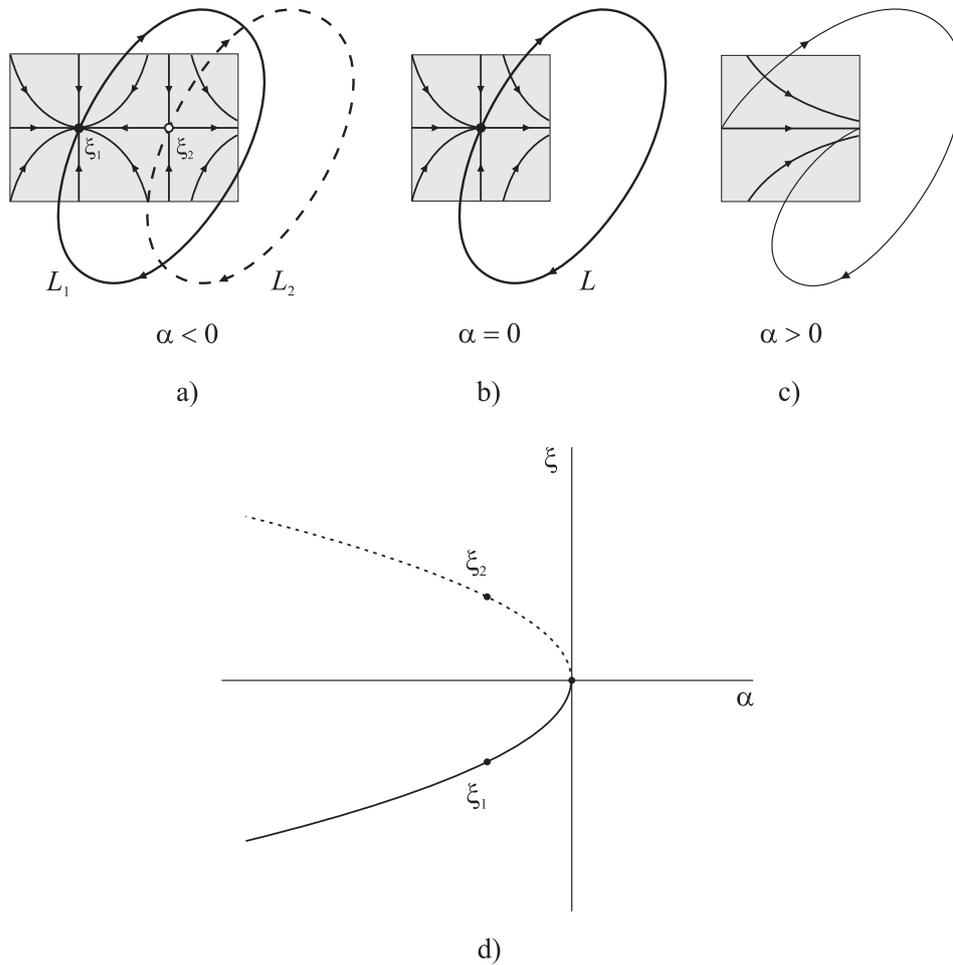


Figura 2.8: Silla-nodo de soluciones periódicas (*cyclic fold*).

la salvedad que los que antes eran puntos de equilibrio ahora corresponden a puntos fijos sobre el mapa de Poincaré.

Sea el siguiente sistema diferencial

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n \ (n \geq 2), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.50)$$

cuya dinámica posee un ciclo límite L que sufre una bifurcación silla-nodo para $\alpha = 0$. Entonces, la linealización del mapa de Poincaré de L tiene un multiplicador $\mu_1 = 1$ y el punto fijo correspondiente es no hiperbólico. Para valores del parámetro α menores que cero (Fig. 2.8a) se tienen dos ciclos límites, uno estable L_1 y el otro inestable L_2 , los cuales tienen asociados los puntos fijos ξ_1 y ξ_2 , respectivamente. Siendo ξ_1 un nodo estable y ξ_2 un punto silla. A medida que el parámetro se aproxima al valor crítico,

ambos puntos fijos se acercan entre sí hasta que para $\alpha = 0$ colapsan formando un punto fijo no hiperbólico, como se muestra en la Fig. 2.8b. Para valores positivos de α no existen ciclos límites y por lo tanto, tampoco puntos fijos sobre el mapa (Fig. 2.8c).

El diagrama de bifurcaciones correspondiente se muestra en la Fig. 2.8d, donde se representa la variación de los puntos fijos del mapa ξ_i ($i = 1, 2$), en función del parámetro α . Un diagrama equivalente puede constituirse indicando para cada valor del parámetro las amplitudes máximas de los ciclos L_1 y L_2 .

El comportamiento del sistema (2.50) ante una silla-nodo de soluciones periódicas puede determinarse analizando la dinámica de los puntos fijos del mapa de Poincaré, el cual será topológicamente equivalente al determinado por la *forma normal de la bifurcación silla-nodo para mapas*, la cual puede expresarse como

$$\xi \mapsto \beta + \xi + s\xi^2, \quad (2.51)$$

donde s es el coeficiente de la forma normal. Además debe satisfacerse $s \neq 0$ para evitar degeneraciones. El diagrama de bifurcaciones de (2.51) es equivalente al mostrado en la Fig. 2.8d.

Finalmente, para un mapa n -dimensional, el coeficiente s puede calcularse utilizando la siguiente expresión

$$s = \langle p, B(q, q) \rangle. \quad (2.52)$$

Nótese que en este caso, el autovector q y su adjunto p , así como $B(q, q)$ [véase (2.6)] se calculan utilizando la expresión del mapa de Poincaré y no del sistema (2.50).

Las bifurcaciones de silla-nodo de órbitas periódicas se notarán con las letras CF (del inglés *cyclic fold*).

2.2.3. Bifurcación de doble período

Sea el siguiente sistema diferencial,

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n \ (n \geq 3), \ \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.53)$$

el cual tiene una solución periódica L para $\alpha = 0$ con un único multiplicador $\mu_1 = -1$. Entonces, la órbita L sufre una bifurcación de doble período y puede caracterizarse de la siguiente manera. Para valores de α menores que cero, existe un único ciclo límite estable L_1 el cual tiene asociado el punto fijo ξ_1 (nodo estable) sobre el mapa de Poincaré,

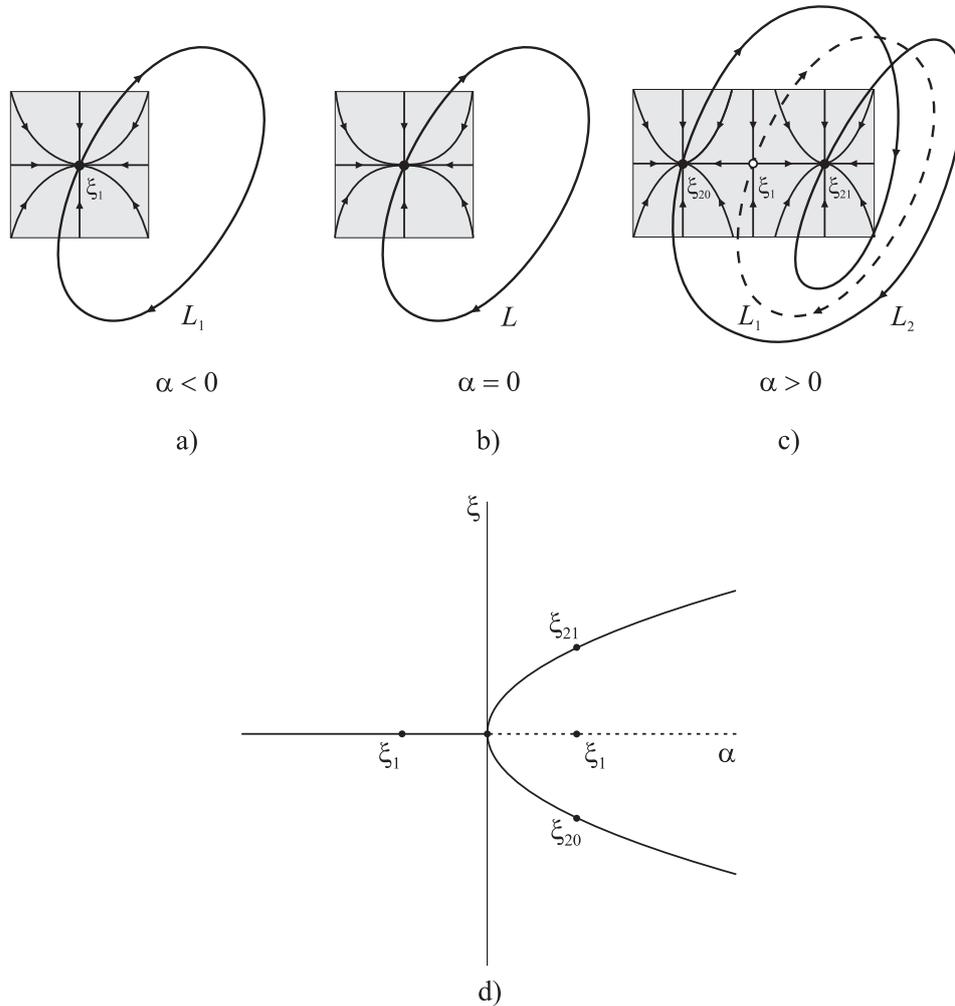


Figura 2.9: Bifurcación de doble período (supercrítica).

como se muestra en la Fig. 2.9a. Luego, para $\alpha = 0$ uno de los multiplicados del ciclo se encuentra en -1 , de manera tal que el punto fijo correspondiente es no hiperbólico (Fig. 2.9b). Para valores de α mayores que cero, el punto fijo ξ_1 (asociado al ciclo L_1) se convierte en un equilibrio silla, debido al cruce del multiplicador crítico por el círculo unitario. A partir de este punto se generan dos nuevos impactos en el mapa, ξ_{20} y ξ_{21} (ver Fig. 2.9c) los cuales están asociados a una (única) solución periódica L_2 , cuyo periodo es aproximadamente el doble que el del ciclo L_1 (que le dio origen).

Es importante notar que ξ_{20} y ξ_{21} registran los impactos del ciclo L_2 sobre el mapa de Poincaré P del ciclo L_1 . A su vez se satisface que $\xi_{21} = P(\xi_{20})$ y $\xi_{20} = P(\xi_{21})$, por lo tanto, estos últimos son puntos fijos de la segunda iteración del mapa, ya que

$$\xi_{20} = P(P(\xi_{20})) \text{ y } \xi_{21} = P(P(\xi_{21})).$$

La Fig. 2.9d muestra el diagrama de bifurcaciones asociado a la singularidad de doble período. Nuevamente, el mismo muestra la posición de los puntos fijos del mapa al variar el parámetro α . En el caso de ξ_{20} y ξ_{21} existe una alternancia en los impactos. Además, el diagrama de bifurcaciones del doble período corresponde al de una bifurcación *pitchfork* de puntos fijos de la segunda iteración del mapa.

El diagrama de bifurcaciones de la Fig. 2.9d corresponde al caso supercrítico de la singularidad de doble período, ya que el ciclo límite de período dos es estable. A su vez, existe la bifurcación de doble período subcrítica, donde el ciclo límite de período dos es inestable. De manera similar a la bifurcación de Hopf ambos casos se distinguen mediante el signo de un coeficiente de la forma normal.

Como en el caso anterior, el comportamiento de los puntos fijos del mapa de Poincaré es topológicamente equivalente al de la forma normal de la bifurcación de doble período para mapas discretos, la cual está dada por

$$\xi \mapsto -(1 + \beta)\xi + s\xi^3, \quad (2.54)$$

donde el coeficiente s es equivalente al primer coeficiente de Lyapunov en la bifurcación de Hopf aunque en este caso si $s > 0$ la bifurcación es supercrítica y si $s < 0$ es subcrítica. En el caso de contar con un mapa n -dimensional, el valor de s se calcula utilizando la siguiente expresión

$$s = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q) \rangle - \frac{1}{2}\langle p, B(q, (A - I_n)^{-1}B(q, q)) \rangle, \quad (2.55)$$

donde la matriz A es el Jacobiano del mapa de Poincaré, q y p son el autovector asociado al multiplicador crítico y su adjunto, respectivamente. Además, $B(x, y)$ y $C(x, y, u)$ son las formas multilineales definidas en (2.6) y (2.7). Las mismas se calculan también utilizando la expresión del mapa de Poincaré.

Se utilizará la notación PD (del inglés *period doubling*) para indicar la ocurrencia de bifurcaciones de doble período.

2.2.4. Bifurcación de Neimark-Sacker

La última bifurcación de ciclos límites de codimensión 1 es la denominada bifurcación de Neimark-Sacker o Hopf secundaria. Para su análisis considérese el siguiente sistema

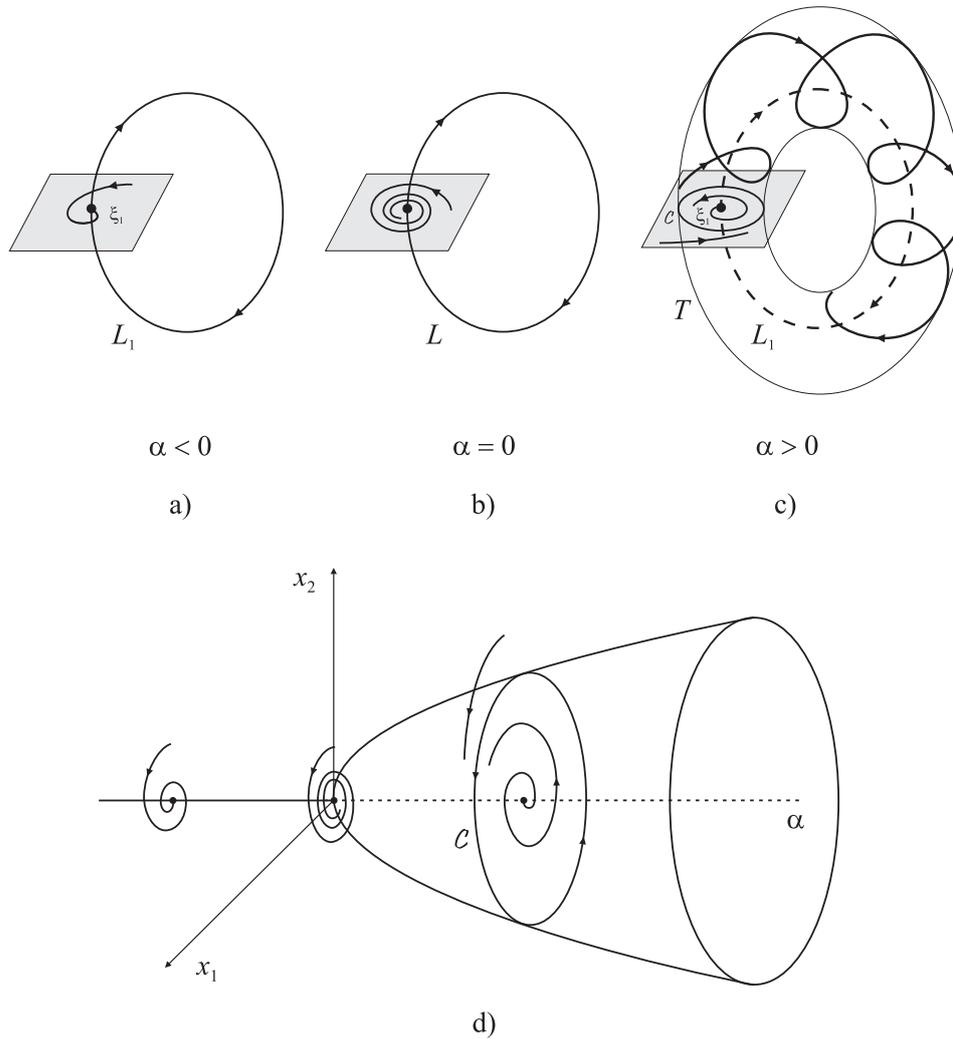


Figura 2.10: Bifurcación de Neimark-Sacker (supercrítica).

diferencial

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n \ (n \geq 3), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.56)$$

el cual tiene una solución periódica L para $\alpha = 0$, cuya matriz de monodromía cuenta con un par de multiplicadores complejos conjugados sobre el círculo unitario, $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$. Por lo tanto, L sufre una bifurcación de Neimark-Sacker.

La Fig. 2.10 muestra la dinámica asociada a la bifurcación de Neimark-Sacker supercrítica. En primera instancia, para valores negativos del parámetro α , se tiene un punto fijo ξ_1 sobre el mapa de Poincaré asociado a una solución periódica estable L_1 del sistema (2.56), como se muestra en la Fig. 2.10a. La linealización del mapa asociado al ciclo L

para $\alpha = 0$ posee un par de multiplicadores complejos conjugados con módulo unitario $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, por lo tanto, el punto fijo es no hiperbólico (Fig. 2.10b). Para valores de α superiores al crítico, el ciclo límite L_1 se torna inestable debido a que $|\mu_{1,2}| > 1$, con lo cual ξ_1 es ahora un punto fijo inestable, y a su vez existe una curva cerrada invariante \mathcal{C} estable sobre el mapa de Poincaré, como se muestra en la Fig. 2.10c. Dicha curva registra los impactos sobre el mapa de un toro estable T (ver Fig. 2.10c). Esta singularidad se conoce como bifurcación de Neimark-Sacker supercrítica.

Si se observa el comportamiento dinámico sobre el mapa de Poincaré, el mismo es muy similar al descrito por la bifurcación de Hopf, aunque la dinámica puede llegar a ser mucho más complicada. Por ejemplo, si los multiplicadores críticos se encuentran posicionados en las cuatro primeras raíces de la unidad, la curva invariante \mathcal{C} puede no existir, o en su defecto la dinámica en un entorno del punto singular es extremadamente compleja e incluye un número indeterminado de órbitas de períodos arbitrariamente grandes. Este es el caso de las llamadas resonancias fuertes de Neimark-Sacker las cuales son bifurcaciones de codimensión 2 que se estudiarán en el capítulo siguiente (Broer et al., 2001). Por lo tanto, para evitar estos casos es necesario que se satisfaga la siguiente desigualdad,

$$e^{ik\theta_0} \neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.57)$$

Otro fenómeno muy importante asociado con la bifurcación de Neimark-Sacker es el de sincronización (*phase locking*) y la generación de las lenguas de Arnold (Arnold, 1983). Supongamos que se tiene un sistema con dos parámetros de bifurcación (α_1, α_2) . Como la bifurcación de Neimark-Sacker es de codimensión 1 es posible trazar una curva unidimensional en el espacio de parámetros donde se cumpla la condición de bifurcación correspondiente (evitando las condiciones de resonancias fuertes). Luego, para cada punto sobre la curva se tendrá un par de multiplicadores complejos conjugados

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi p}{q} \quad (q \neq 1, 2, 3, 4), \quad (2.58)$$

los cuales tienen una posición determinada (sobre el círculo de radio 1) en cada uno de los puntos de la curva. Por lo tanto, la relación p/q tomará valores irracionales y racionales. Luego, si p/q es irracional al menos en un entorno de la bifurcación la curva \mathcal{C} será densa sobre el mapa (no existirán puntos fijos sobre \mathcal{C}) y por lo tanto el toro asociado T será también denso. En este caso, la solución se denomina *cuasiperiódica*. Por otro lado, si

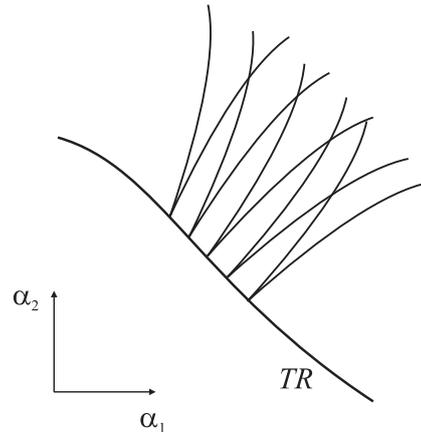


Figura 2.11: Representación esquemática de las lenguas de Arnold sobre una curva de Neimark-Sacker (TR).

la relación p/q es racional existirá una región en el espacio de parámetros en torno a la bifurcación donde la curva \mathcal{C} está formada por la unión de las variedades de q puntos fijos silla y q nodos estables de la iteración p del mapa. Esto implica que el toro T dejará de ser cuasiperiódico (denso) y únicamente se registrarán q impactos sobre el mapa.

A partir de cada uno de estos puntos sobre la curva de Neimark-Sacker donde la relación p/q es racional se desprenden dos curvas de bifurcaciones sillas-nodos las cuales determinan el área donde existe sincronismo o periodicidad (*phase locking*) o sea, la estructura de órbitas sobre la curva invariante \mathcal{C} es la descrita anteriormente. A dichas regiones se las denomina *lenguas de Arnold*. Esto se representa esquemáticamente en la Fig. 2.11, mientras que en la Fig. 2.12 se muestra la estructura de órbitas dentro de la curva \mathcal{C} para la relación $p/q = 1/6$. En este caso, para un punto dentro de la lengua de Arnold $1/6$, existen seis puntos fijos tipo silla ($\zeta_i, i = 1, \dots, 6$) y seis puntos fijos tipo nodo estable ($\xi_i, i = 1, \dots, 6$), los cuales definen los impactos del ciclo generado por la bifurcación de Neimark-Sacker. Luego, sobre las curvas LP la sincronización se rompe debido a la colisión de los puntos fijos ξ_i con los ζ_i en bifurcaciones sillas-nodos. La dinámica sobre el toro T es cuasiperiódica fuera de la lengua de Arnold.

Es importante destacar que existirán regiones en el espacio de parámetros donde las lenguas de Arnold se intersectan entre sí. En tales regiones la curva invariante \mathcal{C} se destruye debido a que no es posible la existencia de una solución cuasiperiódica con dos números de rotación distintos. El comportamiento dinámico del sistema en tales regiones

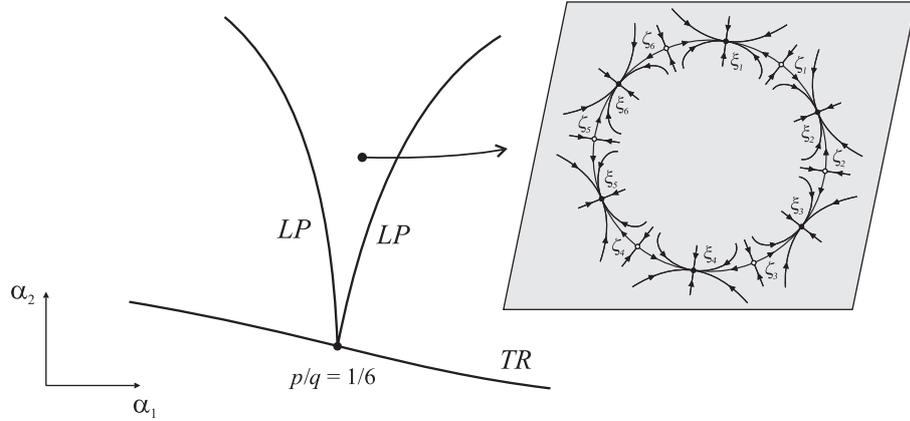


Figura 2.12: Fenómeno de sincronización (*phase locking*) dentro de la lengua de Arnold $p/q = 1/6$.

es muy complejo (Arnold, 1983).

La bifurcación de Neimark-Sacker es también parte importante del desarrollo de esta tesis, y por ende se enunciarán dos teoremas que establecen las condiciones de no degeneración y la forma normal topológica de la singularidad para el caso de mapas discretos (tal como se hiciera con la bifurcación de Hopf). Las demostraciones pueden consultarse en (Kuznetsov, 2004).

Teorema 2.6 *Sea el mapa de dos dimensiones*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.59)$$

donde f es una función suave y tiene un punto fijo $x = 0$ para $\alpha = 0$, con multiplicadores

$$\mu_{1,2} = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)}, \quad (2.60)$$

donde $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$. Además, se satisfacen las siguientes condiciones de no degeneración

TR-1) $\left. \frac{dr(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \neq 0$

TR-2) $e^{\pm ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

Entonces, existe un cambio de coordenadas y del parámetro, ambos invertibles, que transforma el mapa (2.59) en

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.61) \\ + (\xi_1^2 + \xi_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -a \\ a & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^4),$$

donde θ , a y s son funciones del parámetro β . En particular $\theta(0) = \theta_0$ y $s(0)$ tiene la siguiente expresión

$$s(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0}}{2} g_{21} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20}g_{11} \right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2, \quad (2.62)$$

con,

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle. \quad (2.63)$$

El sistema (2.61) puede expresarse en variable compleja como

$$\zeta \mapsto \mu\zeta + c\zeta^2\bar{\zeta} + O(|\zeta|^4), \quad (2.64)$$

donde, el coeficiente c para el valor crítico se calcula como

$$c = \frac{g_{20}g_{11}(1 - 2\mu_0)}{2(\mu_0^2 - \mu_0)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\mu}_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\mu_0^2 - \bar{\mu}_0)} + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.65)$$

La ecuación (2.64) es la forma normal de la bifurcación de Neimark-Sacker.

Teorema 2.7 (Bifurcación de Neimark-Sacker genérica) *Sea el sistema discreto genérico de dos dimensiones dependiente de un parámetro*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad (2.66)$$

que posee un punto fijo en $x = 0$ para $\alpha = 0$ con multiplicadores complejos $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$. Entonces, existe un entorno de x_0 en el cual hay una única curva cerrada invariante \mathcal{C} , que bifurca de x_0 cuando $\alpha = 0$.

En el teorema anterior, se entiende por sistema discreto genérico aquél que satisface las condiciones de no degeneración (TR-1) y (TR-2). Para mapas n -dimensionales el coeficiente s se calcula de acuerdo a la siguiente expresión

$$s = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta_0} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle + 2\langle p, B(q, (I_n - A)^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (e^{2i\theta_0}I_n - A)^{-1}B(q, q)) \rangle] \right\} \quad (2.67)$$

luego, si $s < 0$ la bifurcación es supercrítica y si $s > 0$ es subcrítica.

Por último, a lo largo de la tesis las bifurcaciones de Neimark-Sacker serán indicadas con las letras TR .

2.2.5. Trayectorias homóclinas y heteróclinas

Además de las bifurcaciones descritas anteriormente existen otros fenómenos de carácter global en donde las variedades de un punto de equilibrio (por lo general una silla) retornan al equilibrio o en su defecto se conectan con otro equilibrio. Estas soluciones particulares se denominan trayectorias homóclinas (en el primer caso) y heteróclinas (en el segundo).

Sea el sistema diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.68)$$

donde f es suave y tiene puntos de equilibrios x_0 , x_1 y x_2 . Además, sea φ^t el flujo del sistema (2.68).

Definición 2.8 Una solución Γ_0 que comienza en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ del sistema (2.68) se denomina homóclina a un punto de equilibrio x_0 si $\varphi^t x \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definición 2.9 Una solución Γ_0 que comienza en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ del sistema (2.68) se denomina heteróclina a los puntos de equilibrio x_1 y x_2 si $\varphi^t x \rightarrow x_1$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y $\varphi^t x \rightarrow x_2$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

La Fig. 2.13a muestra en forma esquemática un órbita homóclina al punto x_0 , mientras que en la Fig. 2.13b se muestra una solución heteróclina entre los puntos x_1 y x_2 . Ambos fenómenos son estructuralmente inestables ya que cualquier perturbación en los parámetros destruye la conexión. Esto implica que en el plano de parámetros están definidos únicamente a lo largo de una curva unidimensional. A su vez, como se verá

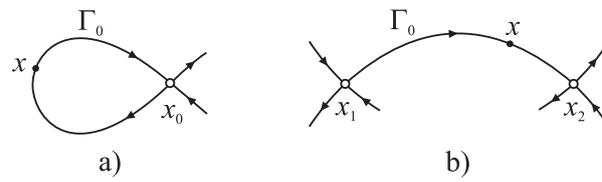


Figura 2.13: Representación esquemática de las trayectorias homoclina y heteroclina.

luego, las bifurcaciones homoclina y heteroclina pueden ser interpretadas como un mecanismo global de destrucción (generación) de soluciones periódicas.

Capítulo 3

Bifurcaciones locales de codimensión 2

Las bifurcaciones de codimensión 1, ya sean éstas de equilibrios u órbitas periódicas, se distinguen mediante una determinada condición de bifurcación y algunas condiciones de no degeneración. Por ejemplo, para la bifurcación de Hopf la condición necesaria se tiene cuando un par de autovalores complejos conjugados se encuentran sobre el eje imaginario, mientras que las condiciones de no degeneración son la no nulidad del primer coeficiente de Lyapunov ($l_1(0) \neq 0$) y el cruce efectivo de los autovalores por el eje imaginario al variar el parámetro (transversalidad).

Si se introduce un segundo parámetro, es posible *seguir o continuar* la condición de bifurcación variando ambos parámetros simultáneamente, y definiendo así una curva unidimensional \mathcal{B} en el espacio de los parámetros. Por lo tanto, cada punto de \mathcal{B} satisface la condición de la bifurcación en cuestión (por ejemplo, un par de autovalores complejos conjugados con parte real cero). No obstante, en general pueden existir puntos aislados de \mathcal{B} donde es factible que sucedan dos hechos relevantes

- i) No se satisface alguna de las condiciones de no degeneración de la bifurcación.
- ii) La variedad centro W^c aumenta su dimensión.

El caso i) implica una degeneración en la bifurcación que no es contemplada por la forma normal (por ejemplo, la falla del primer coeficiente de curvatura $l_1(0) = 0$ para la bifurcación de Hopf). La condición ii) implica que en tales puntos existen más autovalores críticos (o multiplicadores críticos para el caso discreto). Por ejemplo, siguiendo con la bifurcación de Hopf, es posible que ante variaciones en los parámetros cuando se continúa la curva \mathcal{B} se halle un punto donde se incorpore un autovalor real sobre el eje imaginario (además del par de imaginarios puros).

En el caso que cualquiera de las condiciones i) y ii) se satisfagan, se estará en presencia de una bifurcación de codimensión 2. Esto implica que en tales condiciones las formas normales de las bifurcaciones de codimensión 1 (Capítulo 2) ya no describen

completamente la dinámica local en un entorno de la singularidad. Por lo tanto será necesario el agregado de más información, como por ejemplo la inclusión de términos de orden superior o el aumento de la dimensión de la forma normal, a fin de completar el escenario dinámico (despliegue) originado por la singularidad de codimensión 2. La descripción de los despliegues de las formas normales de las singularidades de codimensión 2 se realizará mediante el análisis de la dinámica generada en un entorno del origen del espacio de parámetros, describiendo la dinámica en cada una de las regiones adyacentes delimitadas por las curvas de bifurcación. Como en el caso de las singularidades de codimensión 1 se describen bifurcaciones de puntos de equilibrio y de soluciones periódicas.

3.1. Bifurcaciones de equilibrios de codimensión 2

A continuación se presentarán las formas normales de las bifurcaciones de codimensión 2 de puntos de equilibrio. En cada uno de los casos, se describirán las características más sobresalientes de la dinámica generada por la singularidad. Para ello se considerará un sistema genérico cuya reducción a la variedad centro posee n autovalores críticos (la cantidad de autovalores dependerá de la singularidad en cuestión). Continuando una curva de bifurcaciones de puntos de equilibrio de codimensión 1 es posible hallar alguna de las siguientes bifurcaciones locales de codimensión 2 (λ_i , $i = 1, \dots, 4$ indica el o los autovalores críticos):

- 1) *Cusp*: $\lambda_1 = 0$, $s = 0$.
- 2) *Bautin*: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$), $s = 0$.
- 3) *Bogdanov-Takens*: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, simetría par.
- 4) *Khorozov-Takens*: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, simetría impar.
- 5) *Gavrilov-Guckenheimer*: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_1$ ($\omega_1 \neq 0$).
- 6) *Bifurcación de Hopf doble*: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ (ω_1/ω_2 irracional).

Nótese que las dos primeras singularidades están asociadas a la condición i), ya que $s = 0$ es el coeficiente de la forma normal para una bifurcación de codimensión 1. En las

restantes aumenta la dimensión de la variedad centro, es decir, se corresponden con la condición ii).

El caso 1) representa una degeneración de la bifurcación silla-nodo (nótese que $\lambda_1 = 0$) en la cual se anula el coeficiente de la forma normal, *i.e.*, $s = 0$. Algo similar sucede en el caso 2) para la bifurcación de Bautin, aunque en esta ocasión se trata de una degeneración de la bifurcación de Hopf (nótese que $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$) en la cual se anula el primer coeficiente de Lyapunov, o sea, el coeficiente de la forma normal es cero ($s = 0$). Esto implica que en los casos 1) y 2), será necesario agregar términos no lineales de mayor orden en las formas normales de las bifurcaciones silla-nodo y de Hopf, respectivamente.

Los casos 3) y 4) corresponden al doble autovalor en cero y se distinguen por la simetría del sistema. La bifurcación de Bogdanov-Takens corresponde a sistemas con simetría par y la de Khorozov-Takens a los que poseen simetría impar. En ambos casos la dimensión de la variedad centro es dos.

El caso 5) indica la ocurrencia simultánea de las bifurcaciones silla-nodo y de Hopf, por lo tanto el despliegue de esta singularidad poseerá curvas de tales bifurcaciones (entre otras). A esta singularidad también se la conoce como cero-Hopf. A diferencia de los casos anteriores, la variedad centro W^c es de dimensión tres.

Por último, el caso 6) indica la existencia simultánea de dos bifurcaciones de Hopf. Ésta es tal vez la bifurcación local de puntos de equilibrios de codimensión 2 de mayor complejidad, no sólo por los fenómenos dinámicos que origina sino también por la cantidad de despliegues de la forma normal que posee (once en total). También es conocida por el nombre Hopf-Hopf. Además, en este caso la variedad centro es de dimensión cuatro.

Dada la cantidad de singularidades y de los posibles despliegues en cada una de ellas, se describirán en forma detallada aquellos casos que son relevantes para los sistemas estudiados en esta tesis, mientras que los restantes son mostrados a título informativo en los Apéndices B y C. La interpretación de los mismos puede realizarse fácilmente siguiendo un razonamiento similar al de los casos descriptos a continuación.

3.1.1. Bifurcación *cusp*

Esta singularidad se da cuando falla la condición de no degeneración de la bifurcación silla-nodo [$\langle p, B(q, q) \rangle = 0$ para un sistema n -dimensional, véase (2.8)]. Esta bifurcación

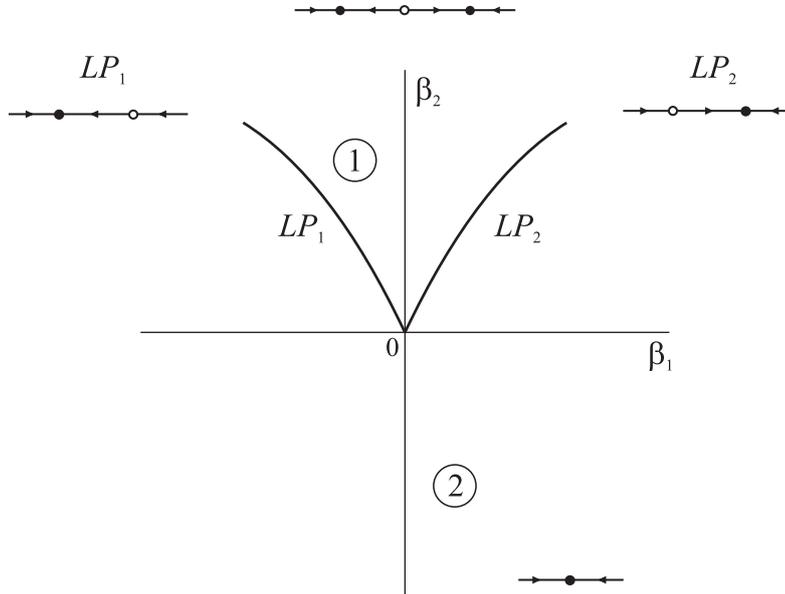


Figura 3.1: Diagrama de bifurcaciones de un punto cuspidal o *cusp* ($s < 0$).

se conoce con el nombre de *cusp* o punto cuspidal, y su forma normal está dada por

$$\dot{\xi} = \beta_1 + \beta_2\xi + s\xi^3, \quad (3.1)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ es la variable, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son los parámetros y $s \neq 0$ es el coeficiente de la forma normal. Cabe destacar que el coeficiente s en (3.1) es diferente al de la forma normal de la bifurcación silla-nodo (2.3). La Fig. 3.1 muestra la dinámica asociada al caso $s < 0$. El escenario para $s > 0$ es complementario al mostrado, y se obtiene invirtiendo el sentido del tiempo y los parámetros, de manera tal que $t \rightarrow -t$ y $\beta \rightarrow -\beta$. En otras palabras invirtiendo el sentido de las flechas y de los ejes.

El despliegue de esta singularidad es bastante peculiar ya que consta de dos curvas de bifurcaciones silla-nodo (LP_1 y LP_2) unidas en un punto cuspidal (de ahí el nombre de la singularidad), tal como se muestra en la Fig. 3.1. La dinámica en un entorno del punto crítico puede describirse de la siguiente manera. Si se recorre el diagrama en sentido antihorario, comenzando en la región 1, el sistema posee tres puntos de equilibrio, dos nodos estables separados por un punto silla. Luego, al cruzar la curva LP_1 el punto silla

colapsa con el nodo de la derecha en una bifurcación silla-nodo. Entonces, en la región 2 existe un único punto de equilibrio tipo nodo estable. Al cruzar la curva LP_2 se generan dos puntos de equilibrio, una silla y un nodo estable. Por lo tanto se tiene nuevamente el comportamiento de la región 1.

Nótese que la forma normal (3.1) contiene términos de tercer orden, mientras que la forma normal de la bifurcación silla-nodo (2.3) tiene términos de hasta segundo orden. En lo que sigue las bifurcaciones *cusp* se indicarán con la letra C .

3.1.2. Bifurcación de Hopf generalizada (Bautin)

La bifurcación de Hopf generalizada, también denominada bifurcación de Bautin, se tiene cuando el primer coeficiente de Lyapunov es cero [véase (2.26)]. Por lo tanto, esta singularidad divide (localmente) la curva de Hopf en dos partes, una correspondiente a bifurcaciones supercríticas y la otra a subcríticas. La forma normal de la bifurcación de Hopf generalizada está dada por la siguiente ecuación en variable compleja

$$\dot{\zeta} = (\beta_1 + i)\zeta + \beta_2\zeta|\zeta|^2 + s\zeta|\zeta|^4, \quad (3.2)$$

donde $\zeta \in \mathbb{C}$ es la variable, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son los parámetros y s es el coeficiente de la forma normal. Este último está dado por el segundo coeficiente de Lyapunov $s = l_2(0) \neq 0$. La expresión para el cálculo de $l_2(0)$, tanto para sistemas de dimensión dos como para sistemas n -dimensionales puede consultarse en (Kuznetsov, 2004).

La Fig. 3.2 muestra el despliegue de la singularidad cuando $s < 0$. En la región 1 se tiene un punto de equilibrio tipo foco estable. Al cruzar la curva H^- (el superíndice indica el signo del primer coeficiente de Lyapunov) el equilibrio sufre una bifurcación de Hopf supercrítica, por lo tanto en la región 2 es inestable y existe además una solución periódica estable. El punto de equilibrio vuelve a ser estable en la región 3 debido a la ocurrencia de una bifurcación de Hopf subcrítica en H^+ . Entonces, en la región 3 se tienen dos ciclos límites anidados (uno estable y el otro inestable) y un punto de equilibrio estable. Por último, ambos ciclos desaparecen en una bifurcación silla-nodo al cruzar la curva CF para volver a la región 1. Nótese que la curva de silla-nodo de soluciones periódicas nace en forma tangencial a la curva de Hopf en el punto de degeneración.

Cabe destacar que en este caso la forma normal (3.2) contiene términos de hasta quinto orden inclusive, mientras que para la bifurcación de Hopf no degenerada sólo son

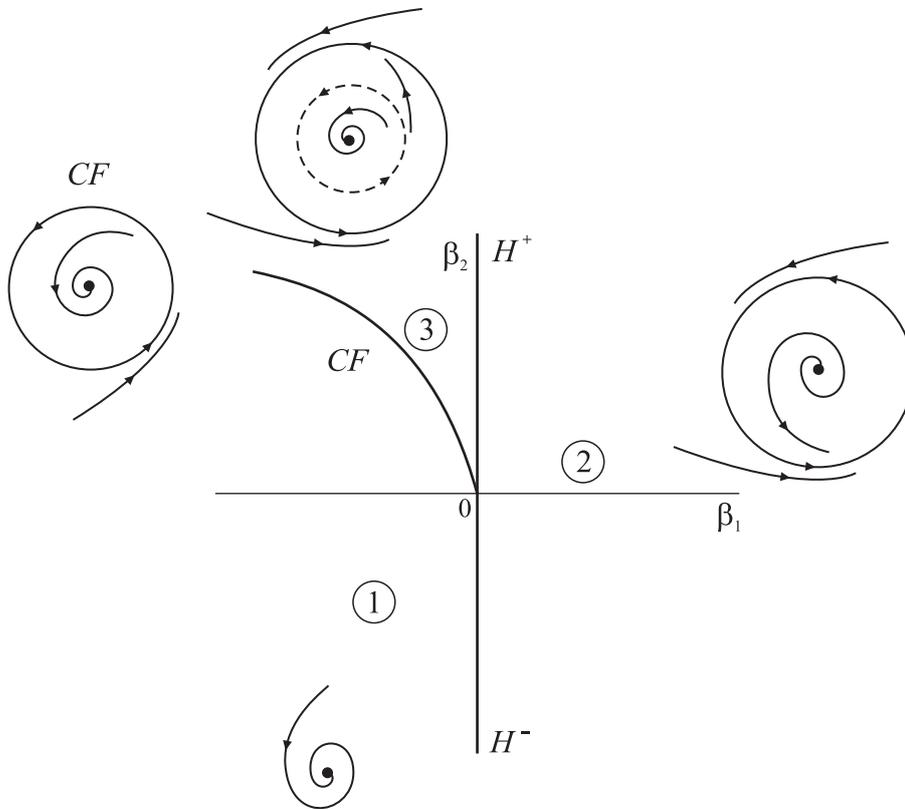


Figura 3.2: Despliegue de la bifurcación de Hopf generalizada o de Bautin ($s < 0$).

necesarios términos de hasta tercer orden inclusive [véase (2.15)]. Las fallas del primer coeficiente de curvatura se notarán usando las siglas GH (del inglés *generalized Hopf*).

3.1.3. Bifurcación de Bogdanov-Takens

La bifurcación de Bogdanov-Takens se origina cuando el sistema posee simetría par y la linealización tiene dos autovalores en el origen. La forma normal de esta singularidad es

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \beta_1 + \beta_2 \xi_1 + \xi_1^2 + s \xi_1 \xi_2, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ son las variables, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ los parámetros y $s \neq 0$ el coeficiente de la forma normal. El despliegue de la forma normal para $s < 0$ se muestra en la Fig. 3.3.

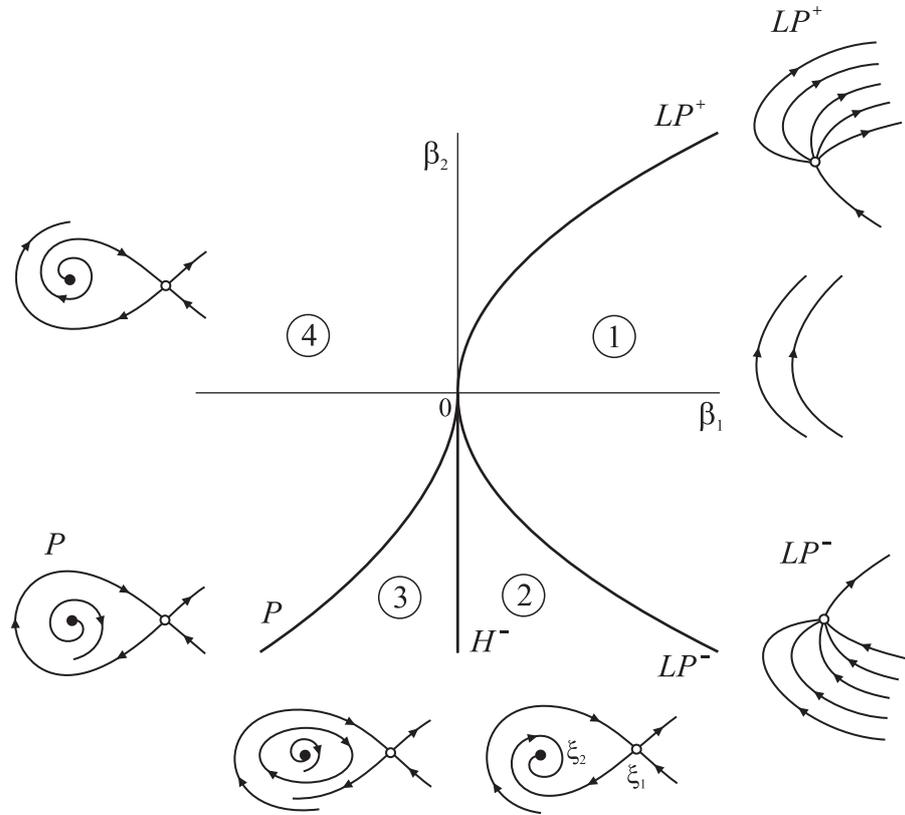


Figura 3.3: Despliegue de la bifurcación de Bogdanov-Takens para $s < 0$.

La dinámica en un entorno del origen se puede describir de la siguiente manera. En la región 1 no existen puntos de equilibrio ni ciclos límites. Por lo tanto, la dinámica es divergente en esta región. Al cruzar la curva LP^- se crean dos puntos de equilibrio debido a una bifurcación silla-nodo. Entonces, en la región 2 hay un punto silla y un foco estable que se denominarán ξ_1 y ξ_2 , respectivamente. El punto singular ξ_2 experimenta una bifurcación de Hopf supercrítica al cruzar la curva H^- y entrar en la región 3, donde se tienen el punto silla ξ_1 , un foco inestable ξ_2 y un ciclo límite estable. Luego, la amplitud del ciclo se incrementa hasta colisionar con ξ_1 , formando una órbita homoclina sobre la curva P , que divide las regiones 3 y 4. La órbita homoclina destruye el ciclo límite, dejando en la región 4 únicamente los equilibrios ξ_1 y ξ_2 . Por último, ambos colapsan y desaparecen en una bifurcación silla-nodo al cruzar LP^+ al volver a la región 1.

El caso $s > 0$ es similar al de la Fig. 3.3, con la salvedad que el ciclo límite es inestable

producto de una bifurcación de Hopf subcrítica. El mismo se puede construir realizando el cambio de coordenadas $\xi_2 \rightarrow -\xi_2$ y $t \rightarrow -t$.

La bifurcación de Bogdanov-Takens se indicará usando las letras BT .

3.1.4. Bifurcación de Khorozov-Takens

La bifurcación de Khorozov-Takens ocurre cuando el sistema tiene simetría impar y la linealización posee un par de autovalores en el origen. La siguiente es la forma normal de la bifurcación

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + s \xi_1^3 - \xi_1^2 \xi_2, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ son las variables, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ los parámetros y $s \neq 0$ el coeficiente de la forma normal. Como la forma normal posee simetría impar el despliegue contiene una curva de bifurcaciones *pitchfork*.

El escenario correspondiente al caso $s > 0$ se muestra en la Fig. 3.4. El comportamiento dinámico alrededor de la bifurcación es el siguiente. En la región 1, existe un punto silla aislado ξ_1 . Al cruzar la curva PB^- este último sufre una bifurcación *pitchfork* volviéndose estable y a su vez generando dos puntos de equilibrio nuevos ξ_2 y ξ_3 . Por lo tanto, en la región 2 se tiene un foco estable y dos puntos sillas (ξ_1, ξ_2 y ξ_3 , respectivamente). Luego, en la región 3 el equilibrio ξ_1 se vuelve inestable producto de una bifurcación de Hopf supercrítica (curva H^-), de la cual se desprende un ciclo límite estable. Al variar el parámetro el ciclo colapsa con los puntos sillas ξ_2 y ξ_3 , formando una órbita heteroclina sobre la curva P que divide las regiones 3 y 4, quedando en la región 4 únicamente los puntos silla y un foco inestable. Por último, los puntos sillas colapsan con el equilibrio restante en una bifurcación *pitchfork* al cruzar la curva PB^+ , retornando a la región 1.

El despliegue correspondiente al caso $s < 0$, representado esquemáticamente en la Fig. 3.5, no puede obtenerse con un simple cambio de coordenadas e invirtiendo la evolución temporal. Este caso es más complicado que el anterior debido a la existencia de fenómenos dinámicos adicionales generados por los puntos de equilibrio originados en la bifurcación *pitchfork*. La dinámica en un entorno de la bifurcación puede describirse de la siguiente manera. En la región 1, hay un único punto de equilibrio estable tipo foco ξ_1 , el cual pierde su estabilidad debido a una bifurcación de Hopf supercrítica al

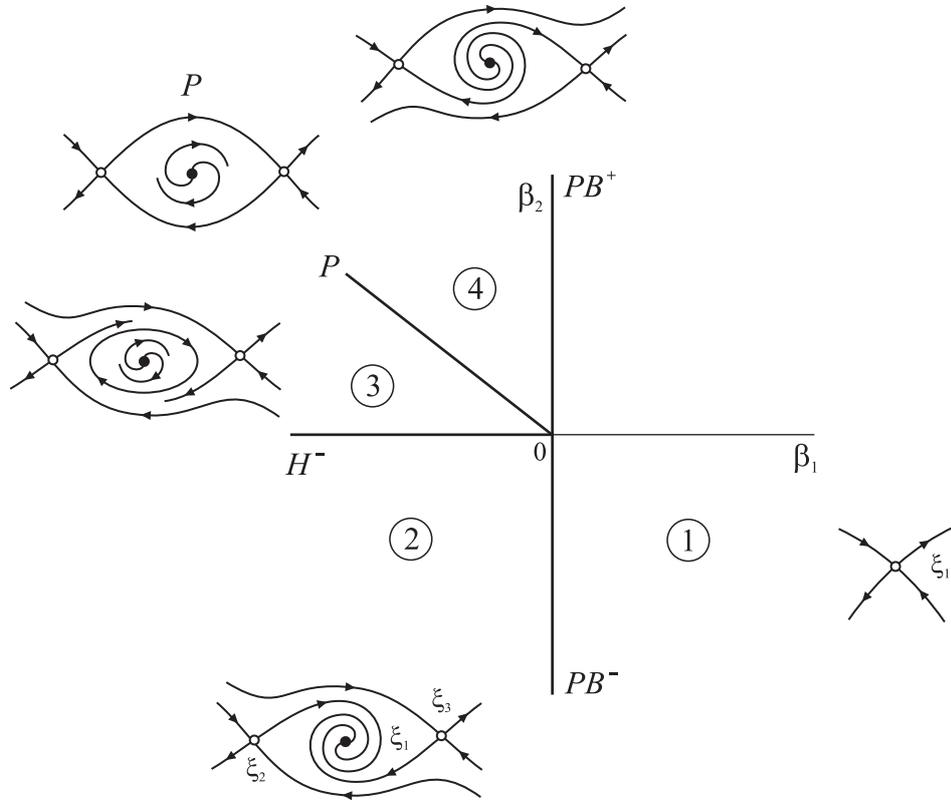


Figura 3.4: Despliegue de la bifurcación de Khorozov-Takens para $s > 0$.

cruzar la curva H^- que separa las regiones 1 y 2. Por lo tanto, la dinámica en la región 2 está comprendida por un foco inestable rodeado por un ciclo límite estable. Luego, ξ_1 se convierte en silla y se generan dos equilibrios adicionales inestables ξ_2 y ξ_3 , debido a una bifurcación *pitchfork* PB^+ al cruzar a la región 3. A su vez, ξ_2 y ξ_3 se vuelven estables simultáneamente mediante una bifurcación de Hopf subcrítica $H^{+(2)}$ entrando en la región 4. En esta región se tiene un comportamiento dinámico bastante rico, por un lado existe un ciclo límite estable (grande) generado anteriormente por la bifurcación de Hopf H^- , además se tienen los tres puntos de equilibrio de la *pitchfork* PB^+ y dos ciclos límites inestables producto de $H^{+(2)}$. Estos últimos forman una doble órbita homóclina con el punto silla sobre la curva P , de la cual se desprende un nuevo ciclo límite inestable que engloba a los equilibrios ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 . Esta situación se muestra en la región 5 de la Fig. 3.5. Luego, el ciclo inestable colapsa con el ciclo estable producto

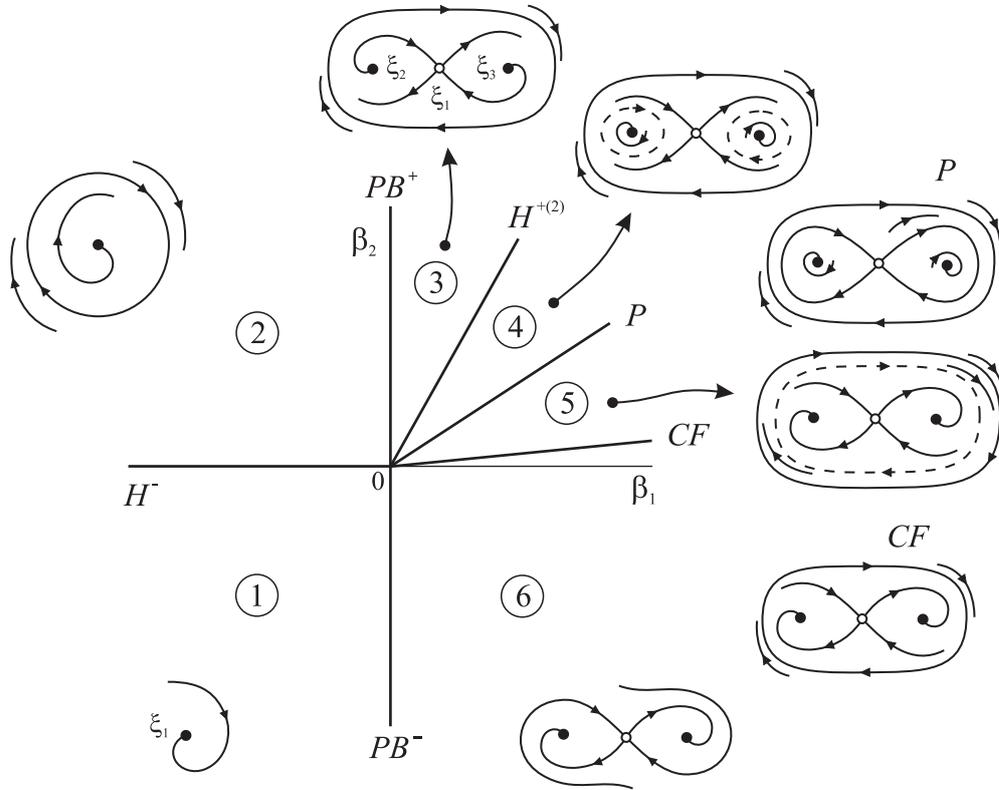


Figura 3.5: Despliegue de la bifurcación de Khorozov-Takens para $s < 0$.

de H^- en una bifurcación silla-nodo de soluciones periódicas (curva CF) al pasar a la región 6, quedando en esta última únicamente los puntos de equilibrio, dos focos estables y una silla. Finalmente, los equilibrios ξ_2 y ξ_3 colapsan en una bifurcación *pitchfork* PB^- , quedando un único punto de equilibrio estable tipo foco en la región 1. La bifurcación de Khorozov-Takens se indicará utilizando la sigla KT .

3.1.5. Bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer (cero-Hopf)

La bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer, también conocida como cero-Hopf, se caracteriza por tener un autovalor real $\lambda_1 = 0$ y un par de autovalores complejos conjugados ($\lambda_{2,3} = \pm i\omega_1$) sobre el eje imaginario. Entonces, en la singularidad se tienen simultáneamente una bifurcación de Hopf y una silla-nodo y por ende es de esperar que el despliegue

de la forma normal incluya dichas curvas (entre otras).

La siguiente es la forma normal de bifurcación cero-Hopf

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s|\zeta|^2 + O(\|\xi, \zeta, \bar{\zeta}\|^4), \\ \dot{\zeta} = (\beta_2 + i\omega_1)\zeta + (\theta + i\vartheta)\xi\zeta + \xi^2\zeta + O(\|\xi, \zeta, \bar{\zeta}\|^4), \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ y $\zeta \in \mathbb{C}$ son variables, $\beta_{1,2}$ los parámetros y $\theta = \theta(\beta)$, $\vartheta = \vartheta(\beta)$, $\omega_1 = \omega_1(\theta)$ son funciones suaves de los parámetros con $\omega_1(0) \neq 0^1$. La forma normal (3.5) se conoce como la forma normal de Gavrilov. Existe una alternativa a esta última desarrollada por Guckenheimer, la cual brinda diagramas de bifurcación equivalentes [véase (Guckenheimer & Holmes, 1983; Kuznetsov, 2004)].

Forma normal truncada

El sistema (3.5) puede expresarse, utilizando coordenadas polares ($\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\rho \geq 0$) y despreciando los términos de orden superior $O(\|\xi, \zeta, \bar{\zeta}\|^4)$, de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2), \\ \dot{\varphi} = \omega_1 + \vartheta\xi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Si se considera $|\xi|$ suficientemente pequeño, la última ecuación de (3.6) representa una rotación sobre el eje ξ a velocidad constante ω_1 . Luego, las dos primeras ecuaciones resultan desacopladas de la tercera y por lo tanto es posible considerar únicamente las bifurcaciones del siguiente *sistema de amplitudes*²

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

Luego, puntos de equilibrio de (3.7) con $\rho = 0$, o sea sobre el eje ξ , corresponden a puntos de equilibrio de la forma normal truncada (3.6), mientras que equilibrios no triviales con $\rho \neq 0$ corresponden a ciclos límites de (3.6), la cual tiene en cuenta la rotación impuesta por la tercer ecuación. Por último, un ciclo límite generado a partir

¹La condición $\omega_1 \neq 0$ excluye el caso del triple autovalor en cero (bifurcación de codimensión 3).

²El sistema (3.7) es invariante a la transformación $\rho \rightarrow -\rho$, por lo tanto existirá una reflexión de la dinámica debido a la simetría respecto al eje ξ , con lo cual *si no se restringe el análisis a valores de $\rho \geq 0$* , las soluciones que existen para ρ positivos también existen para ρ negativos.

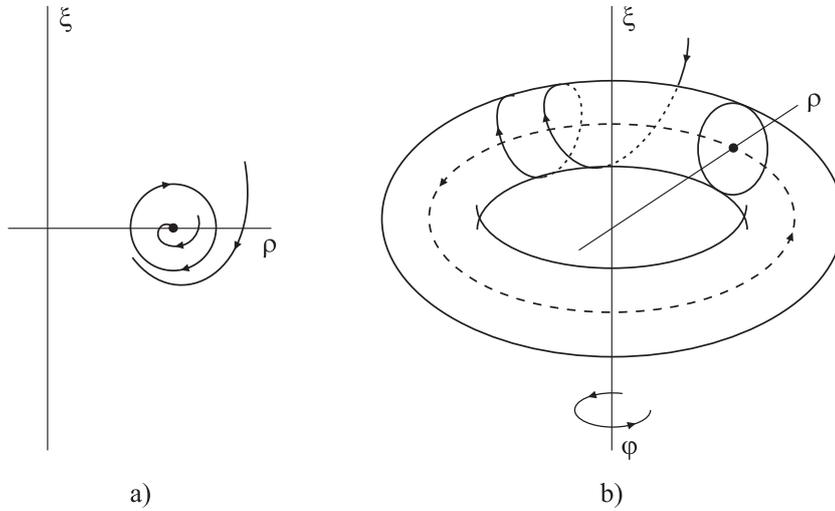


Figura 3.6: Equivalencia entre un ciclo límite en el sistema de amplitudes con un toro en la forma normal truncada de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer.

de un equilibrio no trivial (Fig. 3.6a), corresponde a un toro en el sistema (3.6), como se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.6b.

La forma normal truncada posee 4 despliegues cualitativamente diferentes según los valores que adopten sus coeficientes s y θ . Los cuatro casos son:

- I. $s = 1, \theta > 0$,
- II. $s = -1, \theta < 0$,
- III. $s = 1, \theta < 0$,
- IV. $s = -1, \theta > 0$.

A continuación se describirá el comportamiento dinámico asociado al caso III ($s = 1$ y $\theta < 0$), ya que el mismo se estudiará más adelante como parte del diagrama de bifurcaciones de un sistema de potencia eléctrica. Los restantes casos pueden consultarse en el Apéndice B, y pueden interpretarse siguiendo un razonamiento similar al que se expone a continuación.

El diagrama de bifurcaciones correspondiente al caso III se muestra en la Fig. 3.7. Por comodidad, en los diagramas de fase el eje ξ se encuentra rotado 90° respecto a los gráficos mostrados en la Fig. 3.6. Sobre la línea horizontal se ubican los puntos

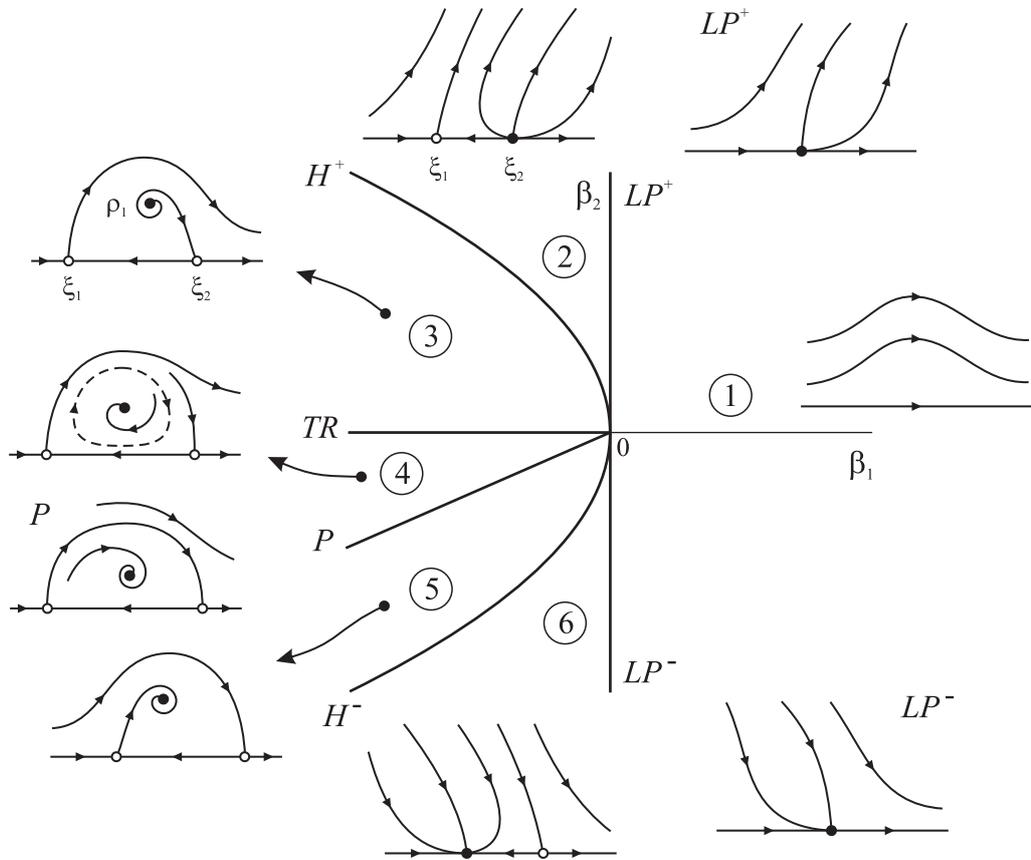


Figura 3.7: Despliegue de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer para $s = 1$ y $\theta < 0$ (caso III).

de equilibrio ξ_i , $i = 1, 2$ con $\rho = 0$, también puntos de equilibrio de la forma normal truncada (3.6). A su vez, el punto ρ_1 representa un ciclo límite de (3.6).

El comportamiento dinámico del sistema de amplitudes (3.7) alrededor de la singularidad puede describirse de la siguiente manera. En la región 1 no existen equilibrios de ningún tipo. Al cruzar la curva LP^+ en dirección a la región 2 se crean dos puntos de equilibrio, una silla ξ_1 y un nodo inestable ξ_2 . A su vez ξ_2 sufre una bifurcación al cruzar la curva H^+ , convirtiéndose en un punto silla y generando el foco inestable ρ_1 . Por lo tanto en la región 3, el sistema (3.7) posee dos equilibrios sillas $\xi_{1,2}$ y un foco inestable ρ_1 . El foco ρ_1 se vuelve estable al cruzar la curva TR , y a consecuencia de ello se genera un ciclo límite inestable en la región 4. La amplitud del ciclo aumenta hasta colapsar con las variedades de los puntos sillas ξ_1 y ξ_2 , formando una órbita heteróclina sobre la

curva P que separa las regiones 4 y 5. En la región 5 se tiene el foco estable ρ_1 y los dos puntos silla ξ_1 y ξ_2 . El equilibrio ρ_1 colapsa con la silla ξ_1 al cruzar la curva H^- y pasar a la región 6. Luego, ξ_1 es estable en esta región. Finalmente, ξ_1 y ξ_2 colapsan y desaparecen sobre la curva LP^- al pasar de la región 6 a la región 1.

La dinámica de la Fig. 3.7 está relacionada con la de la forma normal truncada (3.6) de la siguiente manera. Los equilibrios ξ_1 y ξ_2 son también puntos de equilibrio de (3.6). El punto ρ_1 equivale a un ciclo límite de la forma normal truncada, mientras que el ciclo límite de la región 4 de la Fig. 3.7 corresponde a un toro 2D. Por lo tanto, las curvas LP^\pm y H^\pm corresponden a bifurcaciones sillan-nodos y de Hopf, respectivamente. Además, TR es una curva de bifurcaciones de Neimark-Sacker. Cabe destacar que los casos III y IV (ver Apéndice B, Fig. B.2) son los únicos que poseen órbitas cuasiperiódicas ya que el equilibrio ρ_1 es tipo foco, mientras que en los casos I y II es siempre silla (ver Apéndice B, Fig. B.1).

Para indicar una bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer se utilizará ZH .

3.1.6. Bifurcación de Hopf doble (Hopf-Hopf)

Entre las bifurcaciones de codimensión 2 de puntos de equilibrio una de las más complejas es la bifurcación de Hopf doble (también conocida como Hopf-Hopf). La misma sucede cuando dos pares de autovalores complejos conjugados de la linealización del sistema en torno a un equilibrio, tienen parte real nula simultáneamente, esto es

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2. \quad (3.8)$$

En coordenadas polares la forma normal de la bifurcación de Hopf doble está dada por el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1 (\beta_1 + p_{11}(\beta)r_1^2 + p_{12}(\beta)r_2^2 + s_1(\beta)r_1^4) + \Phi_1(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \beta), \\ \dot{r}_2 = r_2 (\beta_2 + p_{21}(\beta)r_1^2 + p_{22}(\beta)r_2^2 + s_2(\beta)r_1^4) + \Phi_2(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \beta), \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1(\beta) + \Psi_1(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \beta), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2(\beta) + \Psi_2(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \beta), \end{cases} \quad (3.9)$$

donde los términos de orden superior $\Phi_k = O((r_1^2 + r_2^2)^3)$ y $\Psi_k = O(r_1^2 + r_2^2)$ son funciones 2π -periódicas en φ_k ; $p_{jk}(0)$, $s_k(0)$ con $j, k = 1, 2$, son funciones suaves de los parámetros

y $\omega_1(0) = \omega_1$, $\omega_2(0) = \omega_2$ son las frecuencias de los autovalores críticos. A su vez, se requiere que la relación ω_1/ω_2 sea irracional a fin de evitar degeneraciones (resonancia).

Forma normal truncada

Despreciando los términos de orden superior en (3.9) se llega a la siguiente forma normal truncada

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1 (\beta_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 = r_2 (\beta_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4), \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde, para simplificar la notación se ha descartado la dependencia con los parámetros β de los coeficientes p_{jk} , s_k ($j, k = 1, 2$) y de las frecuencias ω_1 y ω_2 . Observando el sistema (3.10) resulta evidente que las dos primeras ecuaciones están desacopladas de las últimas dos (de manera similar a lo expuesto para la bifurcación cero-Hopf). A su vez estas últimas constituyen rotaciones sobre los ejes $r_2 = 0$ y $r_1 = 0$ a velocidades constantes ω_1 y ω_2 , respectivamente. Por lo tanto, a fin de analizar las bifurcaciones de (3.10) resulta suficiente estudiar el siguiente *sistema de amplitudes*³

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1 (\beta_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 = r_2 (\beta_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4), \end{cases} \quad (3.11)$$

con $r_1 \geq 0$ y $r_2 \geq 0$.

El sistema de amplitudes siempre posee un equilibrio trivial para $(r_1, r_2) = (0, 0)$, el cuál es también un punto de equilibrio del sistema (3.10). Un punto de equilibrio de (3.11) donde $r_2 = 0$ y $r_1 > 0$ corresponde a un ciclo límite de (3.10) cuya frecuencia es ω_1 , y por supuesto de forma análoga si se tiene un equilibrio con $r_1 = 0$ y $r_2 > 0$ corresponderá a un ciclo límite de la forma normal truncada, y la frecuencia en este caso será ω_2 . Por otro lado, un punto de equilibrio con $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ de (3.11) corresponde a una oscilación cuasiperiódica o toro 2D en (3.10), de manera que las frecuencias de oscilación involucradas (en un entorno de la bifurcación de Hopf doble) serán similares a ω_1 y ω_2 . Por último, un ciclo límite en el sistema de amplitudes (que puede ser generado

³El sistema (3.11) es invariante al cambio de coordenadas $r_1 \rightarrow -r_1$ y $r_2 \rightarrow -r_2$, por lo tanto el mismo posee simetría respecto de los ejes coordenados r_1 y r_2 .

mediante una bifurcación de Hopf del equilibrio con $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$) representa un toro 3D en la forma normal truncada. La descomposición espectral de un toro 3D asociado a una bifurcación de Hopf doble tendrá tres componentes principales de frecuencia, dos de ellas serán heredadas del toro 2D antecesor, mientras que la tercera será impuesta por el mecanismo de generación del toro 3D y no necesariamente estará asociada con las anteriores frecuencias.

Para estudiar el despliegue de la forma normal resulta conveniente expresar el sistema (3.11) de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2\rho_1 (\beta_1 + p_{11}\rho_1 + p_{12}\rho_2 + s_1\rho_2^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2\rho_2 (\beta_2 + p_{21}\rho_1 + p_{22}\rho_2 + s_2\rho_1^2), \end{cases} \quad (3.12)$$

donde, por definición $\rho_k = r_k^2$, $k = 1, 2$. El sistema (3.12) es también un sistema de amplitudes.

Los despliegues del sistema de amplitudes (3.12) pueden separarse en dos grupos dependiendo de los signos de los coeficientes p_{11} y p_{22} . Si ambos coeficientes poseen el mismo signo se tendrán los denominados casos *simples*, mientras que si los signos son opuestos los despliegues corresponden a los casos *complejos*. Debido al gran número de posibles despliegues de la forma normal (once en total), en este capítulo se analizarán uno de los casos simples y uno de los complejos. En el Apéndice C se muestran la totalidad de los despliegues. La interpretación de los mismos puede extrapolarse de las expuestas a continuación.

Casos simples: $p_{11}p_{22} > 0$

En lo que sigue se analizará el caso $p_{11} < 0$, $p_{22} < 0$, mientras que el caso complementario ($p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$) se obtiene haciendo $t \rightarrow -t$. Para ello es conveniente realizar el siguiente cambio de coordenadas y escalado temporal que se detalla a continuación

$$\xi_1 = -p_{11}\rho_1, \quad \xi_2 = -p_{22}\rho_2, \quad \tau = 2t. \quad (3.13)$$

Entonces, para los casos simples, el sistema de amplitudes (3.12) queda expresado de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 (\beta_1 - \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2 (\beta_2 - \delta\xi_1 - \xi_2 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \quad (3.14)$$

donde,

$$\theta = \frac{p_{12}}{p_{22}}, \quad \delta = \frac{p_{21}}{p_{11}}, \quad \Theta = \frac{s_1}{p_{22}}, \quad \Delta = \frac{s_2}{p_{11}}. \quad (3.15)$$

Según los valores de θ y δ , se distinguen cinco casos simples

- I. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta > 1$.
- II. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta < 1$.
- III. $\theta > 0, \delta < 0$.
- IV. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta < 1$.
- V. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta > 1$.

La Fig. 3.8 muestra el despliegue del sistema de amplitudes para el caso I ($\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta > 1$). La dinámica en torno a la bifurcación es la siguiente. En la región 1 existe un único punto de equilibrio tipo nodo estable ξ_0 . Luego, al cruzar la curva H_1 hacia la región 2, ξ_0 se convierte en un equilibrio silla y se crea un segundo equilibrio ξ_1 estable. El punto silla ξ_0 vuelve a sufrir una bifurcación convirtiéndose ahora en nodo inestable y generando un nuevo equilibrio tipo silla ξ_2 en la región 3, luego de cruzar la curva H_2 . El punto singular ξ_2 se convierte en un nodo estable debido a la bifurcación indicada como TR_2 , y a su vez este último genera un nuevo punto de equilibrio silla ξ_3 (región 4), el cual colapsa con ξ_1 al cruzar la curva TR_1 entrando en la región 5. De manera opuesta a como fueron creados, los equilibrios ξ_1 y ξ_2 desaparecen al cruzar nuevamente las curvas H_1 y H_2 , respectivamente, pasando por las regiones 5 y 6.

La dinámica de la Fig. 3.8 está relacionada con la de la forma normal truncada de la siguiente manera. El equilibrio ξ_0 es también un punto de equilibrio de (3.10). Los puntos ξ_1 y ξ_2 equivalen a ciclos límites de la forma normal truncada y el punto ξ_3 corresponde a un toro 2D. Por lo tanto, las curvas $H_{1,2}$ son curvas de bifurcaciones de Hopf y $TR_{1,2}$ son bifurcaciones de Neimark-Sacker.

Casos complejos: $p_{11}p_{22} < 0$

Para el análisis de los casos complejos se tomará en consideración $p_{11} > 0$ y $p_{22} < 0$ y en esta ocasión el cambio de coordenadas adoptado será

$$\xi_1 = p_{11}\rho_1, \quad \xi_2 = -p_{22}\rho_2, \quad \tau = 2t. \quad (3.16)$$

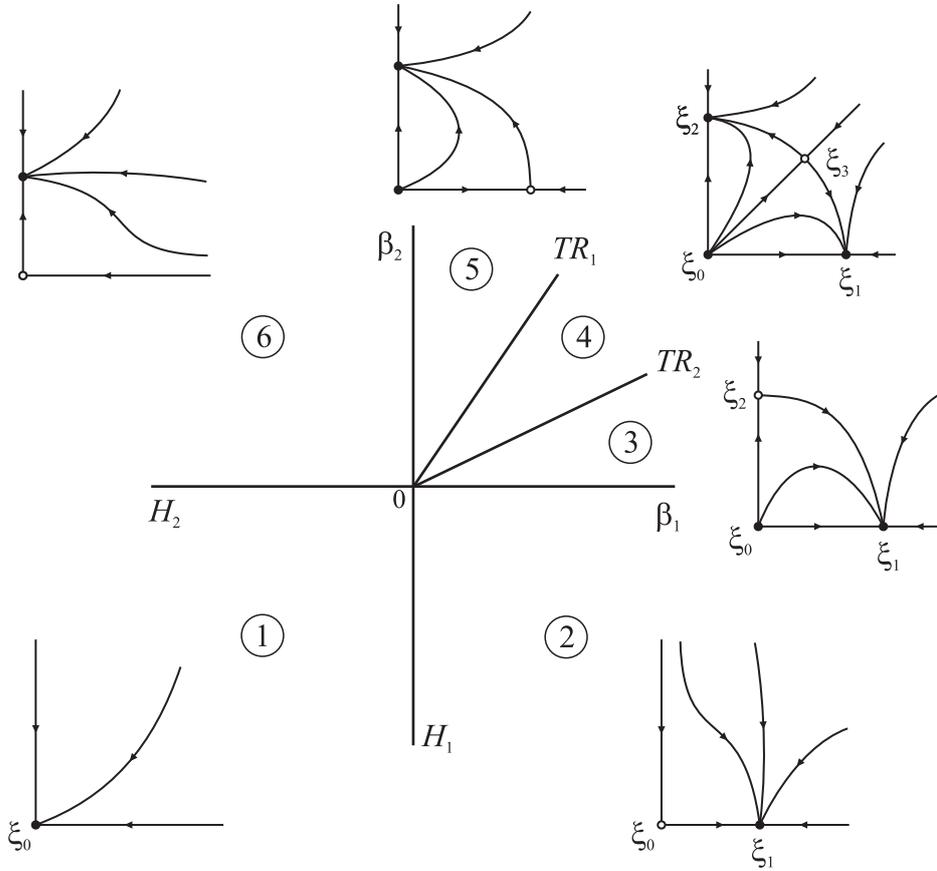


Figura 3.8: Despliegue de la bifurcación de Hopf doble. Caso I (simple) $\theta > 0$, $\delta > 0$, $\theta\delta > 1$.

Por lo tanto, el sistema de amplitudes (3.12) resulta

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 (\beta_1 + \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2 (\beta_2 + \delta\xi_1 - \xi_2 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \quad (3.17)$$

donde, θ , δ , Θ y Δ se definen de la misma manera que en los casos simples [véase (3.15)].

Luego, según los valores adoptados por θ y δ se distinguen seis casos complejos

- I. $\theta > 1$, $\delta > 1$.
- II. $\theta > 1$, $\delta < 1$, $\theta\delta > 1$.
- III. $\theta > 0$, $\delta > 0$, $\theta\delta < 1$.
- IV. $\theta > 0$, $\delta < 0$.

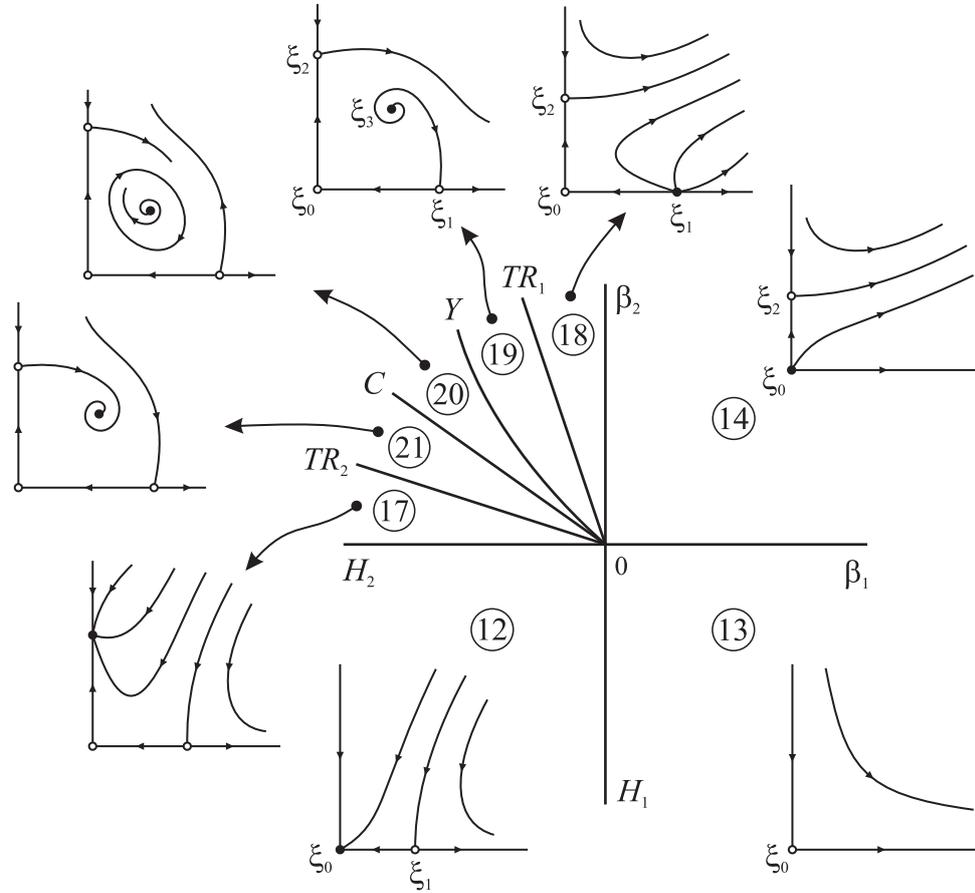


Figura 3.9: Despliegue de la bifurcación de Hopf doble. Caso VI complejo $\theta < 0$, $\delta < 0$, $\theta\delta > 1$.

V. $\theta < 0$, $\delta < 0$, $\theta\delta < 1$.

VI. $\theta < 0$, $\delta < 0$, $\theta\delta > 1$.

En esta oportunidad se analizará el comportamiento dinámico asociado al caso VI, ya que el mismo es de especial importancia en esta tesis. Los restantes casos pueden consultarse en el Apéndice C.

La Fig. 3.9 muestra el despliegue del sistema de amplitudes para este caso ($\theta < 0$, $\delta < 0$, $\theta\delta > 1$). La numeración de las regiones está en concordancia con los diagramas de fase mostrados en el Apéndice C. En la región 12, el equilibrio ξ_0 es estable mientras que ξ_1 es un equilibrio silla. En la región 13, ξ_0 se convierte en un equilibrio silla debido al colapso con ξ_1 en la bifurcación H_1 . El equilibrio en el origen sufre una segunda bifurcación H_2

en la transición entre las regiones 13 y 14, con lo cual ξ_0 es ahora un nodo inestable y existe un nuevo equilibrio silla ξ_2 . Al cruzar nuevamente H_1 hacia la región 18, ξ_0 se convierte nuevamente en silla y reaparece el equilibrio ξ_1 como un nodo inestable. Este último genera un nuevo punto de equilibrio ξ_3 tipo foco inestable al cruzar la curva TR_1 en la transición a la región 19. La curva Y denota una bifurcación heteroclina, la cual es responsable de generar el ciclo límite estable presente en la región 20. Dicho ciclo desaparece sobre la curva C debido a una bifurcación de Hopf de ξ_3 , al cruzar a la región 21. Luego, ξ_3 colapsa con ξ_2 sobre la curva TR_2 que separa las regiones 21 y 17. Por último, el nodo estable ξ_2 desaparece debido a la bifurcación H_2 , volviendo a la región 12.

Los retratos de fases del sistema de amplitudes mostrados en la Fig. 3.9 se relacionan con la forma normal truncada (3.10) de la siguiente manera. El equilibrio trivial ξ_0 es también un punto de equilibrio del sistema (3.10), mientras que $\xi_{1,2}$ representan ciclos límites de la forma normal truncada. El cuarto equilibrio ξ_3 representa un toro 2D y el ciclo límite de la región 20 simboliza un toro 3D en la dinámica del sistema (3.10).

Efecto de los términos de alto orden

El truncamiento de los términos de alto orden ejerce un rol importante en la bifurcación de Hopf doble, ya que el sistema (3.9) *no* es topológicamente equivalente a la forma normal truncada (3.10). Sin embargo, el comportamiento dinámico de la forma normal truncada captura los aspectos más trascendentes de la dinámica del sistema completo (Kuznetsov, 2004).

En lo que sigue la bifurcación de Hopf doble se indicará usando las letras HH .

3.2. Bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 2

En la Sec. 2.2 se mostró que es posible estudiar las bifurcaciones de ciclos límites observando el comportamiento de los impactos de las trayectorias sobre un hiperplano transversal. Esto define un mapa discreto (mapa de Poincaré) donde el ciclo límite se manifiesta como un punto fijo y por lo tanto la estabilidad del ciclo se puede estudiar analizando los multiplicadores asociados. A su vez, existen tres tipos de bifurcaciones de codimensión 1 de ciclos límites dadas por las siguientes condiciones en los multiplicadores: $\mu_1 = 1$, $\mu_1 = -1$ y $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ (un par de multiplicadores sobre el círculo

unitario), las cuales indican bifurcaciones silla-nodo o *cyclic fold* (*pitchfork* o transcítica), de doble período y de Neimark-Sacker, respectivamente.

Por lo tanto, el estudio de las bifurcaciones de ciclos límites de codimensión 2 puede realizarse analizando las bifurcaciones de codimensión 2 de puntos fijos. En este sentido, es posible hallar once singularidades de codimensión 2 en puntos aislados sobre curvas de bifurcaciones de codimensión 1 en sistemas discretos, las cuales se enuncian a continuación

- 1) *Cusp*: $\mu_1 = 1, s = 0$.
- 2) Doble período generalizado: $\mu_1 = -1, s = 0$.
- 3) Bifurcación de Chenciner: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, s = 0$.
- 4) Resonancia 1:1: $\mu_1 = \mu_2 = 1$.
- 5) Resonancia 1:2: $\mu_1 = \mu_2 = -1$.
- 6) Resonancia 1:3: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \theta_0 = \frac{2\pi}{3}$.
- 7) Resonancia 1:4: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \theta_0 = \frac{\pi}{2}$.
- 8) *Fold-flip*: $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$.
- 9) *Fold* - Neimark-Sacker: $\mu_1 = 1, \mu_{2,3} = e^{\pm i\theta_0}$.
- 10) *Flip* - Neimark-Sacker: $\mu_1 = -1, \mu_{2,3} = e^{\pm i\theta_0}$.
- 11) Doble Neimark-Sacker: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \mu_{3,4} = e^{\pm i\theta_1}$.

En los casos anteriores μ_i ($i = 1, \dots, 4$) son los multiplicadores críticos y $s = 0$ es el coeficiente de la forma normal de la bifurcación de codimensión 1 correspondiente en cada caso.

El caso 1) corresponde a la falla de la condición de no degeneración de la forma normal de la silla-nodo de mapas (2.51). El despliegue de la singularidad es análogo al de la bifurcación *cusp* de la Sec. 3.1.1. Por lo tanto, en el plano de los parámetros se tendrán dos curvas de bifurcaciones de sillanodos de ciclos límites que se unen en un punto cuspidal (véase la Fig. 3.1).

Los casos 2) y 3) se relacionan con la falla del primer coeficiente de curvatura de las bifurcaciones de doble período y de Neimark-Sacker, respectivamente. Los mismos pueden interpretarse de forma similar a la bifurcación de Bautin estudiada en la Sec. 3.1.2. O sea, existirá una curva de bifurcaciones de órbitas de doble período (caso 2) o de soluciones cuasiperiódicas (caso 3) que emerge tangencialmente de la singularidad. Cabe destacar que en el caso de la bifurcación de Chenciner la dinámica en un entorno de la bifurcación puede ser más complicada que en el caso de la bifurcación de Bautin debido a la existencia de tangencias heteróclinas (Kuznetsov, 2004).

Los casos 4) al 7) están dados por las resonancias fuertes $1:q$ ($q = 1, 2, 3, 4$), o sea, degeneraciones de la bifurcación de Neimark-Sacker en las cuales no se garantiza la existencia de la curva invariante \mathcal{C} (véase la Fig. 2.10c) en un entorno del punto singular, o bien la dinámica es complicada debido al efecto de bifurcaciones globales (tangencias homóclinas/heteróclinas). Los casos 4), 5) y 6) serán abordados más adelante, mientras que la dinámica referida al caso 7) puede consultarse en (Krauskopf, 1994, 2001; Kuznetsov, 2004).

El caso 8) corresponde a la bifurcación *fold-flip* que consiste en la ocurrencia simultánea de una bifurcación silla-nodo (*fold*) con una de doble período (*flip*). Las ecuaciones dinámicas que determinan su forma normal han sido obtenidas en forma completa recientemente y su ocurrencia en sistemas continuos ha sido estudiada hasta el momento únicamente sobre el modelo de Lorenz-84 en (Kuznetsov et al., 2004).

Por último, los restantes casos 9), 10) y 11) corresponden a la adición de multiplicadores críticos a los ya impuestos por la bifurcación de Neimark-Sacker, incrementando la dimensión de la variedad centro. Estos casos no serán estudiados en esta tesis. Algunos resultados acerca de estas singularidades pueden consultarse en (Kuznetsov & Meijer, 2006; Broer et al., 2008).

A continuación se describirán los despliegues asociados a las resonancias $1:q$ ($q = 1, 2, 3$) de Neimark-Sacker y la bifurcación *fold-flip*. Para ello se asumirá que el mapa de Poincaré correspondiente ha sido reducido a la variedad centro resultando el siguiente mapa de dos dimensiones dependiente de dos parámetros

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}), \quad (3.18)$$

donde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ son los estados del sistema reducido y $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ los parámetros. Para estas singularidades los dos multiplicadores del mapa (3.18) estarán sobre el círculo unitario

[véase los casos 4) al 8)]. Cabe destacar que la reducción a la variedad centro de un mapa genérico n -dimensional, así como el cálculo de los coeficientes de la forma normal de estas bifurcaciones se realiza de forma similar a la expuesta en la Sec. A.2.1 del Apéndice A, para ecuaciones diferenciales.

3.2.1. Resonancia 1:1

En el caso de la resonancia fuerte 1:1, el mapa (3.18) posee un punto fijo para $\tilde{x} = 0$ y $\tilde{\alpha} = 0$ con multiplicadores $\mu_1 = \mu_2 = 1$. El mismo puede ser reducido a la siguiente forma normal de la resonancia 1:1

$$N_\nu : \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_1 + A(\nu)\varepsilon_1^2 + B(\nu)\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix} + O(\|\varepsilon\|^3), \quad (3.19)$$

donde $A(\nu)$ y $B(\nu)$ son funciones suaves de los parámetros ν . Para $\|\nu\|$ suficientemente pequeños el mapa (3.19) puede ser aproximado por

$$N_\nu(\varepsilon) = \varphi_\nu^1(\varepsilon) + O(\|\nu\|^2) + O(\|\varepsilon\|^2\|\nu\|) + O(\|\varepsilon\|^3), \quad (3.20)$$

donde φ_ν^t es el flujo de un sistema suave continuo

$$\dot{\varepsilon} = F(\varepsilon, \nu), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^2, \nu \in \mathbb{R}^2. \quad (3.21)$$

Además (3.21) resulta localmente topológicamente equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \beta_1 + \beta_2\xi_1 + \xi_1^2 + s\xi_1\xi_2, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde ξ_1, ξ_2 son las variables, β_1, β_2 los parámetros y $s \neq 0$ es el coeficiente de la forma normal. Nótese que el sistema (3.22) es idéntico a la forma normal de la bifurcación de Bogdanov-Takens estudiada en la Sec. 3.1.3.

La Fig. 3.10 muestra el despliegue de la resonancia 1:1 de Neimark-Sacker para $s > 0$. En líneas generales el despliegue resulta análogo al ya visto para la bifurcación de Bogdanov-Takens, con lo cual la interpretación de la dinámica asociada es similar a la expuesta en la Sec. 3.1.3, con la salvedad que la curva de Hopf es ahora reemplazada por una curva de Neimark-Sacker TR^- , la silla-nodo de equilibrios se transforma en

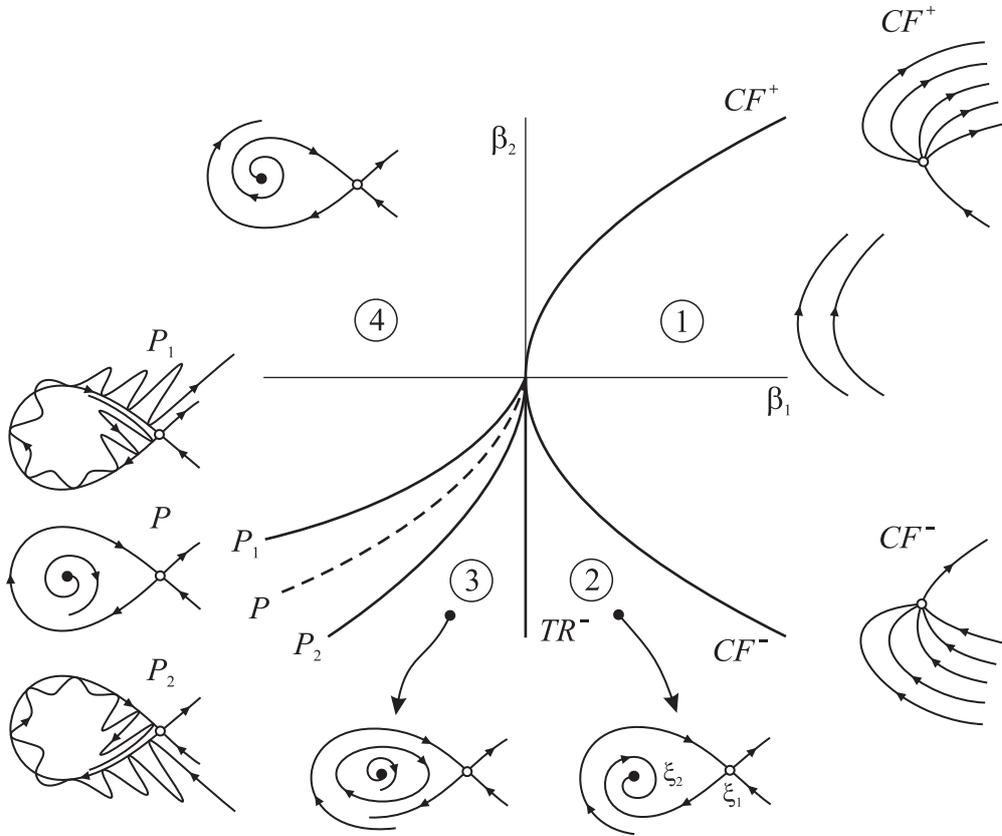


Figura 3.10: Despliegue de la resonancia 1:1 ($s > 0$).

silla-nodo de soluciones periódicas CF^\pm . Además, los equilibrios ξ_1 y ξ_2 en la Fig. 3.10 representan soluciones periódicas y el ciclo límite de la región 3 corresponde a un toro 2D.

La diferencia radica en los fenómenos globales ya que la curva de bifurcaciones homoclínicas P de la aproximación (3.22) debe ser interpretada en el mapa (3.19) como la región delimitada por las curvas P_1 y P_2 que marcan la existencia de tangencias homoclínicas. Las órbitas dentro de esta región tienen un comportamiento extremadamente complejo denominado estructura homoclínica en la cual existen soluciones de períodos arbitrariamente altos, y sobre las curvas P_1 y P_2 se tienen las denominadas tangencias homoclínicas. A su vez, desde las curvas P_1 y P_2 se desprenden infinitas lenguas de Arnold, las cuales culminan en puntos sobre la curva de Neimark-Sacker TR^- . Estas son las razones por la cual el diagrama de bifurcaciones del sistema continuo (3.22) no es topológicamente equivalente al diagrama de bifurcaciones del mapa (3.19).

Las resonancias fuertes 1:1 se indicarán como $R_{1:1}$.

3.2.2. Resonancia 1:2

Considere ahora un sistema continuo que experimenta una resonancia fuerte 1:2. Entonces (3.18) tiene un punto fijo para $\tilde{x} = 0$ y $\tilde{\alpha} = 0$ con multiplicadores $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Además el mapa (3.18) puede ser reducido a la siguiente forma normal de la resonancia 1:2

$$N_\nu : \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \nu_1 & -1 + \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C(\nu)\varepsilon_1^3 + D(\nu)\varepsilon_1^2\varepsilon_2 \end{pmatrix} + O(\|\varepsilon\|^4), \quad (3.23)$$

donde $C(\nu)$ y $D(\nu)$ son funciones suaves de los parámetros ν .

La segunda iteración del mapa (3.23) se puede representar por

$$N_\nu^{(2)}(\varepsilon) = \varphi_\nu^1(\varepsilon) + O(\|\varepsilon\|^4), \quad (3.24)$$

donde φ_ν^t es el flujo del siguiente sistema continuo de dos dimensiones

$$\dot{\varepsilon} = F(\varepsilon, \nu), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^2, \nu \in \mathbb{R}^2. \quad (3.25)$$

Este sistema resulta localmente topológicamente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + s\xi_1^3 - \xi_1^2\xi_2, \end{cases} \quad (3.26)$$

donde ξ_1, ξ_2 son las variables, β_1, β_2 los parámetros y $s \neq 0$ es el coeficiente de la forma normal. Cabe destacar que el sistema (3.26) es la forma normal de la bifurcación de Khorozov-Takens vista en la Sec. 3.1.4.

La Fig. 3.11 muestra los despliegues del sistema continuo equivalente a la forma normal de la resonancia 1:2. Más específicamente, la Fig. 3.11a corresponde al caso $s > 0$ y la Fig. 3.11b a $s < 0$. La dinámica en torno al origen es equivalente a la de la bifurcación de Khorozov-Takens (Sec. 3.1.4), teniendo en cuenta que en este caso el equilibrio ξ_1 representa un ciclo límite, ξ_2 y ξ_3 son los impactos sobre el mapa de un ciclo de doble período y los ciclos límites representan soluciones cuasiperiódicas. Por ejemplo, en la región 4 de la Fig. 3.11b se tiene un ciclo límite silla y un ciclo de doble

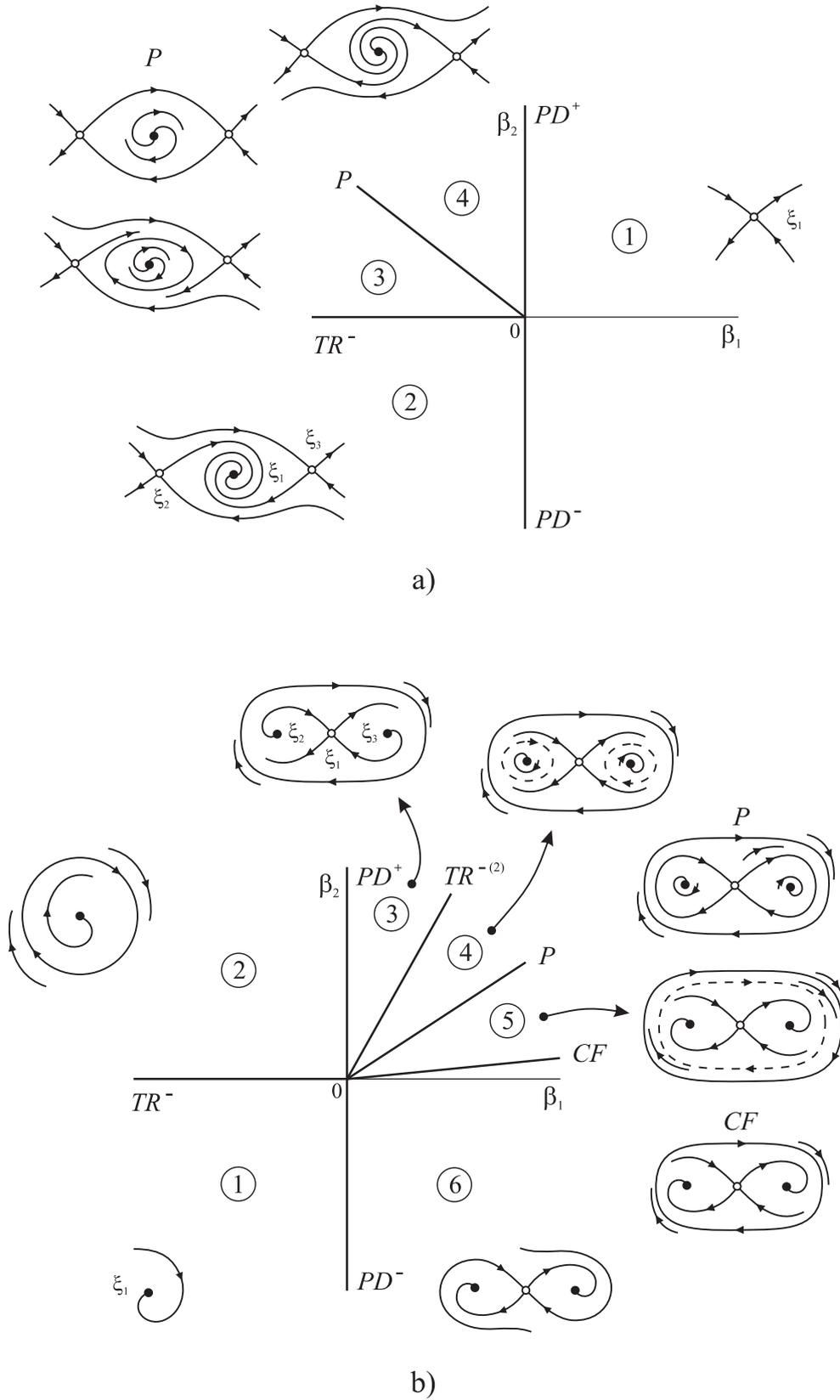


Figura 3.11: Despliegue de la resonancia 1:2. a) $s > 0$. b) $s < 0$.

período estable, juntamente con dos órbitas cuasiperiódicas, una estable proveniente de una bifurcación de Neimark-Sacker del ciclo ξ_1 y una inestable asociada a la solución de doble período. Teniendo en cuenta esto, la curva PD^\pm corresponde a bifurcaciones de doble período, TR^- indican bifurcaciones de Neimark-Sacker de los ciclos límites, CF es una bifurcación silla-nodo de ciclos y las curvas P son conexiones homóclinas. Es importante destacar que al igual que lo sucedido en la resonancia 1:1, las curvas P presentan una situación análoga a las regiones delimitadas por las tangencias homóclinas (P_1 y P_2 en la Fig. 3.10).

En lo que sigue, las resonancias 1:2 serán indicadas mediante la sigla $R_{1:2}$.

3.2.3. Resonancia 1:3

En el caso de la resonancia fuerte 1:3, el sistema (3.18) posee un punto fijo para $\tilde{x} = 0$ y $\tilde{\alpha} = 0$ con multiplicadores $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$. El mapa (3.18) puede ser reducido a la forma normal de la resonancia 1:3, la cual expresada en función de la variable compleja ζ resulta ser

$$N_\nu(\zeta) = \mu(\nu) + B(\nu)\bar{\zeta}^2 + C(\nu)\zeta|\zeta|^2 + O(|\zeta|^4), \quad (3.27)$$

con

$$\mu(\nu) = e^{\epsilon(\nu) + i\theta(\nu)}, \quad (3.28)$$

donde $\epsilon(0) = 0$ y $\theta(0) = \frac{2\pi}{3}$. Además, $B(\nu)$ y $C(\nu)$ son funciones suaves de los parámetros.

La tercera iteración del mapa N_ν puede representarse para $\|\nu\|$ suficientemente pequeños como

$$N_\nu^{(3)}(\zeta) = \varphi_\nu^1 \zeta + O(|\zeta|^4), \quad (3.29)$$

donde φ_ν^t es el flujo de un sistema suave diferencial

$$\dot{\zeta} = F(\zeta, \nu), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \nu \in \mathbb{R}^2. \quad (3.30)$$

Luego de un cambio de coordenadas apropiado (3.30) queda expresado como

$$\dot{\xi} = (\beta_1 + i\beta_2)\xi + \bar{\xi}^2 + c(\beta)\xi|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}^2, \quad (3.31)$$

donde $c(\beta)$ es una función suave dependiente de los parámetros β . Luego, el sistema

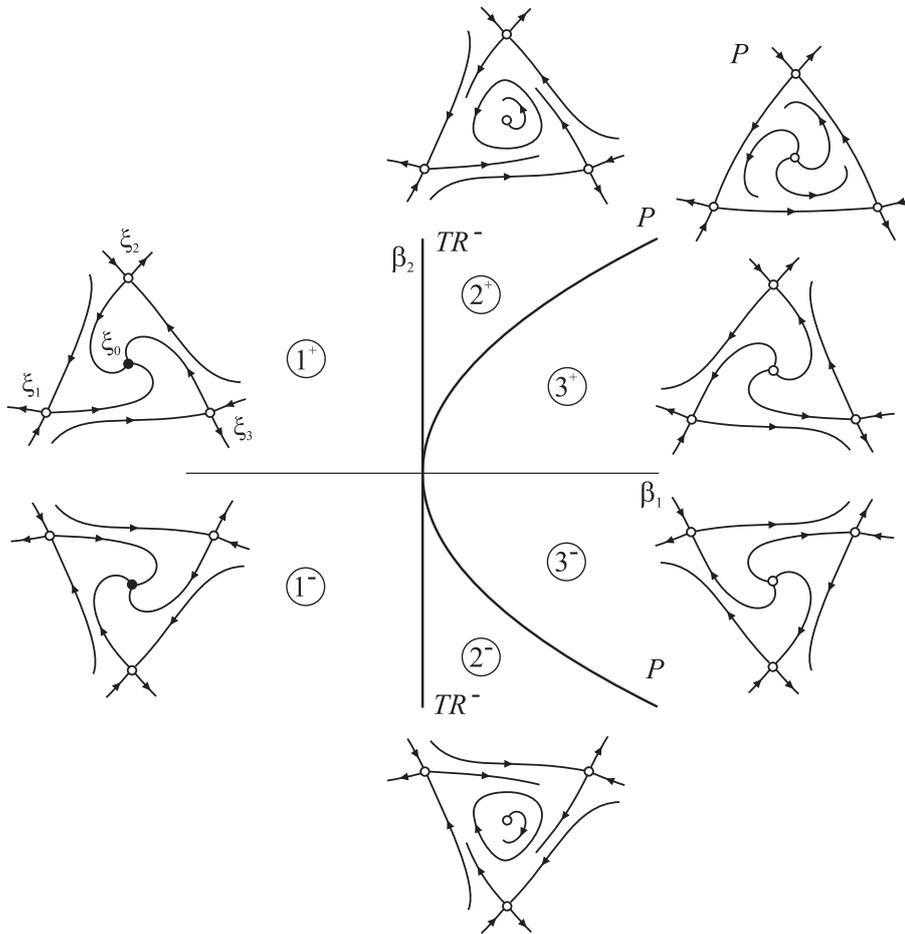


Figura 3.12: Despliegue de la resonancia 1:3 para $a(0) < 0$.

(3.31) en coordenadas polares $\xi = \rho e^{i\varphi}$ resulta,

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \beta_1 \rho + \rho^2 \cos 3\varphi + a(\beta) \rho^3, \\ \dot{\varphi} = \beta_2 - \rho \sin 3\varphi + b(\beta) \rho^2, \end{cases} \quad (3.32)$$

donde $a(\beta) = \text{Re } c(\beta)$ y $b(\beta) = \text{Im } c(\beta)$. Cabe destacar que el sistema (3.32) es invariante ante la rotación en un ángulo $\varphi = \theta_0 = \frac{2\pi}{3}$.

La Fig. 3.12 muestra el despliegue de la resonancia 1:3 para el caso $a(0) < 0$. La dinámica sobre el mapa puede describirse de la siguiente manera. En la región 1^+ el equilibrio ξ_0 es un foco inestable y se encuentra rodeado de tres puntos sillas ξ_i , $i = 1, 2, 3$. Luego ξ_0 sufre una bifurcación de Neimark-Sacker supercrítica sobre la curva TR^- , por lo tanto en la región 2^+ el equilibrio ξ_0 es inestable y a su vez existe un ciclo límite estable

producto de dicha bifurcación. La amplitud de dicha oscilación se ve incrementada hasta colapsar con las variedades de las sillas $\xi_{1,2,3}$, formando una órbita heteroclina sobre la curva P que divide las regiones 2^+ y 3^+ . Luego, en la región 3^+ no existen más soluciones periódicas sobre el mapa, quedando ξ_0 como foco inestable y las sillas $\xi_{1,2,3}$. Las restantes regiones 3^- , 2^- y 1^- son simétricas a las explicadas anteriormente.

Luego, el punto fijo ξ_0 puede ser asociado al impacto sobre el mapa de retorno de Poincaré que sirve para estudiar bifurcaciones de ciclos límites. Mientras que los puntos sillas $\xi_{1,2,3}$ corresponden a un ciclo con el triple del período que el de ξ_0 , o sea, de manera general corresponden a un ciclo de período tres. Por último, el ciclo límite de las regiones 2^\pm indica una oscilación cuasiperiódica o toro 2D.

Al igual que en los casos anteriores, la curva P representa una región delgada en el espacio de parámetros donde se tienen estructuras homoclina. El despliegue para $a(0) > 0$ es similar al mostrado en la Fig. 3.12 y se obtiene haciendo $\beta_2 \rightarrow -\beta_2$ y $t \rightarrow -t$.

En lo que sigue, las resonancias 1:3 serán indicadas usando $R_{1:3}$.

3.2.4. Bifurcación *fold-flip*

En presencia de una bifurcación *fold-flip* el sistema (3.18) tiene un punto fijo en $\tilde{x} = 0$ para $\tilde{\alpha} = 0$, con multiplicadores $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = -1$. El mapa (3.18) puede ser reducido a la siguiente forma normal truncada

$$N_\nu : \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + \nu_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 + a(\nu)\varepsilon_1^2 + b(\nu)\varepsilon_2^2 + c(\nu)\varepsilon_1^3 + d(\nu)\varepsilon_1\varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix} + O(\|\varepsilon\|^4), \quad (3.33)$$

donde $a(\nu)$, $b(\nu)$, $c(\nu)$ y $d(\nu)$ son funciones suaves de ν . Además se satisface que

$$RN_\nu(\varepsilon) = N_\nu(R\varepsilon), \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Luego, la forma normal truncada (3.33) puede ser aproximada por

$$RN_\nu(\varepsilon) = \varphi_\nu^1(\varepsilon) + O(\|\nu\|^2) + O(\|\varepsilon\|^2\|\nu\|) + O(\|\varepsilon\|^4), \quad (3.35)$$

donde φ_ν^t es el flujo del siguiente sistema continuo

$$\dot{\varepsilon} = F(\varepsilon, \nu), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^2, \nu \in \mathbb{R}^2, \quad (3.36)$$

el cual resulta topológicamente equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \beta_1 + (-a_0\beta_1 + \beta_2)\xi_1 + a_0\xi_1^2 + b_0\xi_2^2 + d_1\xi_1^3 + d_2\xi_1\xi_2^2, \\ \dot{\xi}_2 = \frac{1}{2}\beta_1\xi_2 - \xi_1\xi_2 + d_3\xi_1^2\xi_2 + d_4\xi_2^3, \end{cases} \quad (3.37)$$

con $a_0 = a(0)$, $b_0 = b(0)$, $c_0 = c(0)$ y $d_0 = d(0)$, de manera tal que los coeficientes d_i , $i = 1, \dots, 4$ son

$$d_1 = c_0 - a_0^2, \quad d_2 = d_0 - a_0b_0, \quad d_3 = \frac{1}{2}(a_0 - 1), \quad d_4 = \frac{1}{2}b_0. \quad (3.38)$$

Los despliegues de esta singularidad son equivalentes a los vistos para la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer (Sec. 3.1.5). Por lo tanto, se tienen cuatro despliegues característicos de los cuales se describirán únicamente dos de ellos, mientras que el comportamiento dinámico para los restantes casos puede ser extrapolado de la bifurcación cero-Hopf.

Por otro lado, el sistema (3.37) es invariante ante la transformación $\xi_2 \rightarrow -\xi_2$, de manera tal que los retratos de fase serán simétricos respecto al eje horizontal, con lo cual, únicamente se mostrará la parte superior del plano. A su vez, la reflexión R provoca que los puntos alternen su posición arriba y abajo del eje horizontal en cada iteración del mapa.

En la Fig. 3.13 se muestran los despliegues del sistema (3.37) para los casos $a_0 < 0$, $b_0 < 0$ (Fig. 3.13a) y $a_0 > 0$, $b_0 < 0$ (Fig. 3.13b). La dinámica mostrada en los retratos de fase puede interpretarse de la siguiente manera. Los puntos de equilibrio ξ_1 y ξ_2 sobre el eje horizontal simbolizan los impactos de ciclos límites sobre el mapa, mientras que el equilibrio ξ_3 representa un ciclo de período dos. En caso de existir una solución periódica sobre el mapa (esto no corresponde a los despliegues de la Fig. 3.13), representará una oscilación cuasiperiódica generada a partir del ciclo de período dos. Luego, las curvas CF^\pm corresponden a bifurcaciones silla-nodo de ciclos límites y PD^\pm a bifurcaciones de doble período.

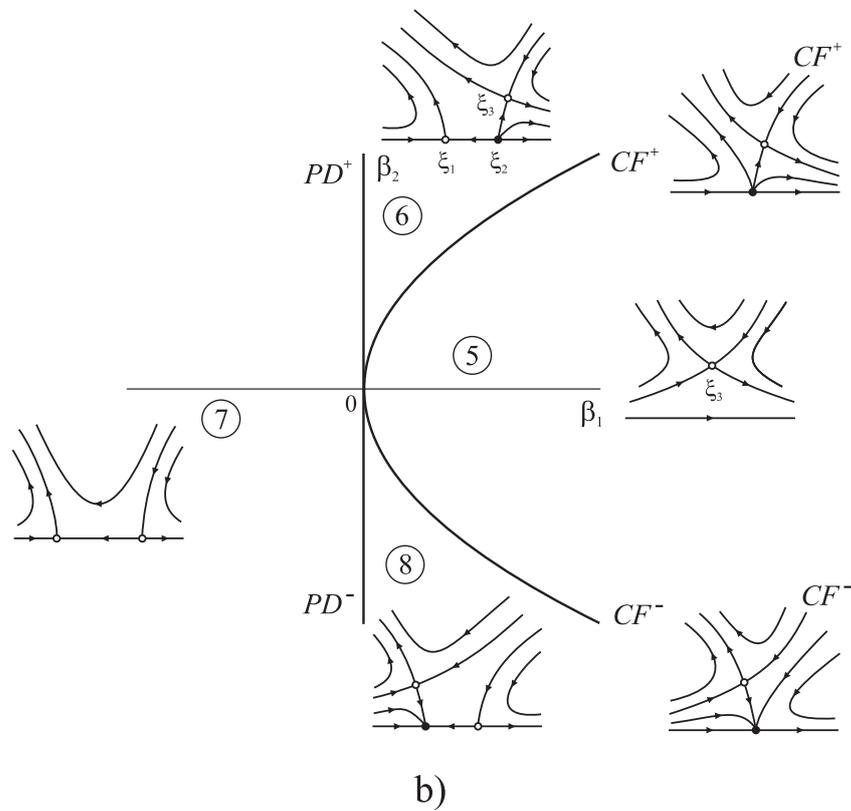
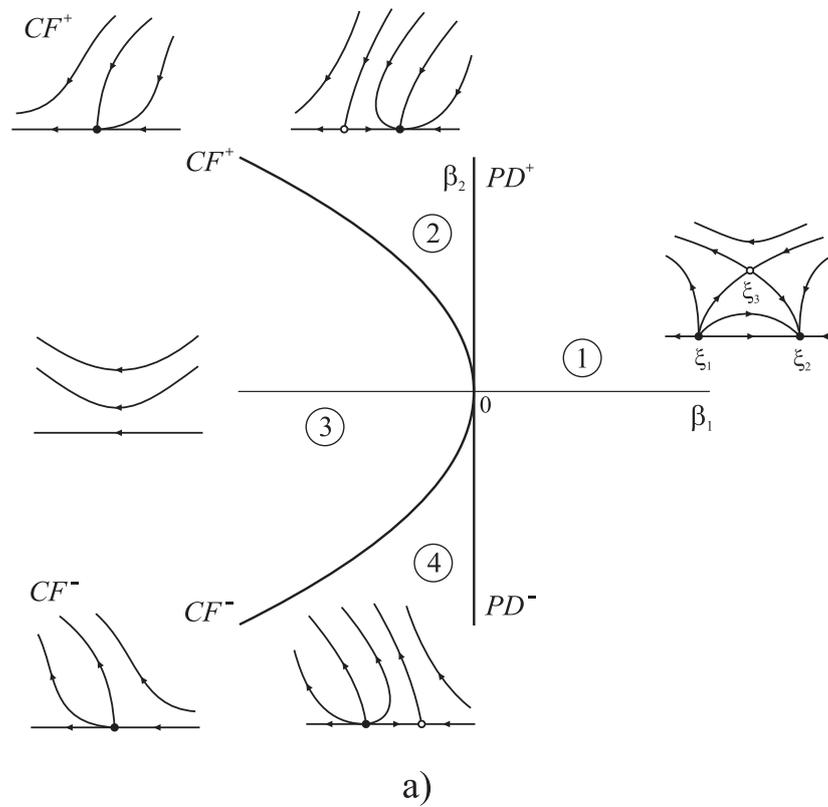


Figura 3.13: Despliegues de la bifurcación *fold-flip*. a) $a_0 < 0$ y $b_0 < 0$. b) $a_0 > 0$ y $b_0 < 0$.

El caso $a_0 < 0$ y $b_0 < 0$ se muestra en la Fig. 3.13a. El comportamiento dinámico asociado es el siguiente. En la región 1 existen tres equilibrios ξ_i , $i = 1, 2, 3$. Al pasar a la región 2 el ciclo de período dos, representado por ξ_3 colapsa con ξ_1 sobre la curva PD^+ . Luego, los puntos ξ_1 y ξ_2 desaparecen en una bifurcación *cyclic fold* CF^+ , dejando a la región 3 libre de ciclos límites (puntos de equilibrio). Por otro lado, en la región 4 existen dos equilibrios $\xi_{1,2}$ (ciclos), los cuales fueron creados mediante la bifurcación silla-nodo CF^- . Por último, ξ_2 sufre una bifurcación de doble período y crea el punto fijo ξ_3 al cruzar la curva PD^- en la transición de la región 4 a la 1.

El despliegue con $a_0 > 0$ y $b_0 < 0$ es representado en la Fig. 3.13b). En esta ocasión, en la región 5 se tiene un ciclo silla de período dos (ξ_3). Luego, al entrar en la región 6 cruzando la curva CF^+ se crean los equilibrios (ciclos) ξ_1 y ξ_2 , una silla y un nodo inestable, respectivamente. El ciclo de período dos ξ_3 colapsa con ξ_2 en una bifurcación de doble período al cruzar la curva PD^+ que separa las regiones 6 y 7. Después ξ_1 se vuelve estable en PD^- y se genera nuevamente un ciclo de período 2 en la región 8. Finalmente, ξ_1 y ξ_2 colapsan y desaparecen debido a una silla-nodo de soluciones periódicas en CF^- al volver a la región 5.

Las bifurcaciones *fold-flip* serán indicadas con las siglas FF .

Capítulo 4

Dinámica de un oscilador eléctrico

En los Capítulos 2 y 3 se han presentado las formas normales de las bifurcaciones de codimensión 1 y 2, respectivamente. Si bien las mismas permiten describir el comportamiento dinámico de un sistema en un entorno de la singularidad, éstas no brindan información de las interacciones con otras bifurcaciones. Por otro lado, desde el punto de vista ingenieril la dinámica generada por estas singularidades requiere una interpretación acorde con la aplicación, y en última instancia un análisis de las posibles consecuencias que estos comportamientos inducen en el sistema.

En este capítulo se estudiarán los efectos dinámicos de bifurcaciones de codimensión 1 y 2 (así como interacciones entre singularidades), en una aplicación relacionada con la ingeniería eléctrica. Se trata de un oscilador eléctrico que posee una representación circuital simple y puede considerarse como un ejemplo con valor académico, ya que contrasta comportamientos dinámicos relativamente sencillos y naturales en la aplicación (por ejemplo, ciclos límites), con otros de gran complejidad derivados de interacciones locales y globales.

Existen varios puntos de contacto entre el análisis de la dinámica del circuito oscilador con la de los sistemas de potencia eléctrica, no sólo en lo referido a las bifurcaciones que ambos sistemas experimentan, sino desde el punto de vista de la interacción entre modos oscilatorios. En el primer caso los modos son propios del circuito oscilador, mientras que en el otro son provistos, por ejemplo, por las ecuaciones electromecánicas de los generadores (entre otros). Nótese que en ciertas oportunidades es posible pensar al sistema de potencia como un gran sistema de masas-resortes rotando a velocidad sincrónica, donde las complejas relaciones de acoplamiento generan interacciones entre modos oscilatorios. La simpleza del circuito oscilador en contraste con su riqueza dinámica, permitirá obtener un amplio grado de conocimiento de ciertas bifurcaciones y su implicancia en la dinámica del sistema. Estas experiencias servirán para el posterior análisis y comprensión de la dinámica en los sistemas de potencia.

Una de las características principales del oscilador es que posee una bifurcación de Hopf doble que gobierna el escenario dinámico. El despliegue de la misma puede ser modificado variando un único parámetro del circuito, lo cual es de gran utilidad si se pretenden estudiar los distintos diagramas asociados y sus efectos en el comportamiento dinámico del oscilador, como por ejemplo la aparición de oscilaciones cuasiperiódicas. Continuando con análisis realizados anteriormente (Yu, 2002; Itovich & Moiola, 2005) se presentarán resultados que muestran la existencia de varios despliegues de la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble (Revel et al., 2007b, 2008b). En particular, se abordarán tres casos de los denominados simples donde se detectan, además de las curvas de Hopf, curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker que originan toros 2D, y uno de los casos complejos donde existen curvas de singularidades que generan toros 3D. A su vez se expondrá un mecanismo de transición entre los casos simples y los complejos, por medio de bifurcaciones degeneradas de Hopf asociadas a la falla del primer coeficiente de curvatura.

Además de la singularidad de Hopf doble, se estudiará el panorama global de la dinámica extendiendo el diagrama de bifurcaciones más allá de una vecindad de la singularidad. De esta manera se determinará la evolución de las curvas emanadas de la bifurcación al variar los parámetros del sistema y sus interacciones con fenómenos globales. El capítulo concluye con el estudio de la dinámica asociada a dos singularidades *fold-flips* localizadas sobre una curva cerrada de bifurcaciones de doble período muy cercana a la bifurcación de Hopf doble.

En todos los casos, el análisis se completará mediante simulaciones temporales y diagramas de continuación. Para el estudio numérico se utilizaron los paquetes de continuación AUTO y MATCONT (Doedel et al., 2002; Dhooge et al., 2006), mientras las simulaciones se realizaron con XPPAUT (Ermentrout, 2002). En forma adicional, algunos resultados también se obtuvieron con LOCBIF (Khibnik et al., 1993).

4.1. Circuito oscilador

La aparición de fenómenos oscilatorios en sistemas físicos puede explicarse, en varios casos, a través del mecanismo de la bifurcación de Hopf. Como se expuso en el Capítulo 2, este fenómeno ocurre cuando al variar algún parámetro del sistema un par de

autovalores del modelo linealizado cruza el eje imaginario dando origen a un ciclo límite. Esta bifurcación ha sido ampliamente estudiada en la literatura (Marsden & McCracken, 1976; Hassard et al., 1981; Moiola & Chen, 1996), abordando una importante cantidad de aplicaciones en sistemas reales [véase por ejemplo (Liaw & Abed, 1990; Mohamed & Emad, 1993; Gu et al., 1999; Gordillo et al., 2002)].

Supóngase ahora que ante la variación de un parámetro un sistema experimenta dos bifurcaciones de Hopf asociadas a un mismo equilibrio. Si se varían dos parámetros en forma simultánea siguiendo ambas bifurcaciones, se tendrán dos curvas de bifurcaciones de Hopf en el espacio de los parámetros. Luego, si ambas curvas se intersectan en un punto la linealización del sistema en torno al equilibrio tendrá dos pares de autovalores en el eje imaginario. Este fenómeno se conoce como bifurcación de Hopf doble y, además de los ciclos límites correspondientes a ambas bifurcaciones de Hopf, explica la aparición de fenómenos oscilatorios más complejos como oscilaciones cuasiperiódicas en un entorno de la singularidad. En ellas existe una interacción de dos modos o frecuencias de oscilación cuyo cociente es irracional y que genera toros bidimensionales o 2D. Estas oscilaciones cuasiperiódicas son producto de bifurcaciones de Neimark-Sacker. En ciertos casos especiales también puede dar origen a fenómenos más complejos como los toros de dimensión 3 ó 3D, en los cuales existe una tercera frecuencia que modula la amplitud de las oscilaciones del toro 2D. Algunas aplicaciones que presentan este tipo de comportamientos pueden consultarse en (Yu, 2002; Coller, 2003; Chamara & Coller, 2004).

Por otro lado, si la relación entre las frecuencias de las bifurcaciones de Hopf intervinientes es un número racional, la bifurcación de Hopf doble se dice resonante. En tales casos el escenario dinámico en un entorno de la singularidad es más complejo debido a la aparición de fenómenos adicionales, que involucran bifurcaciones de las órbitas cuasiperiódicas. Al final de este capítulo se estudiará el caso particular de una resonancia 2:3.

El diagrama circuital del oscilador estudiado se muestra en la Fig. 4.1. El modelo diferencial se obtiene muy fácilmente aplicando las leyes de Kirchhoff y tomando como estados las tensiones en los capacitores y las corrientes en las inductancias. El mismo está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

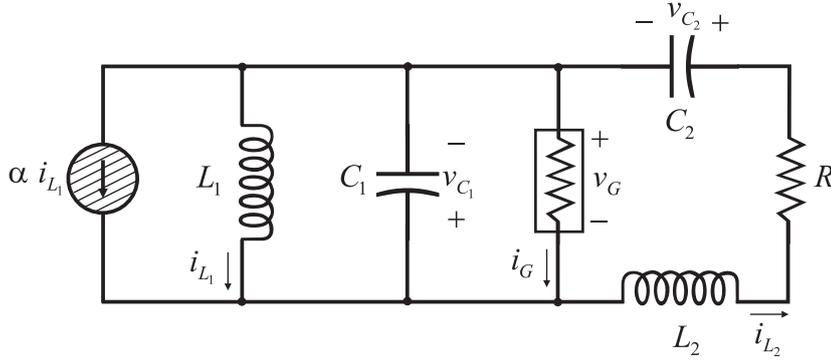


Figura 4.1: Diagrama circuital del oscilador no lineal estudiado.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1(\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_4 - \alpha_2 x_1^2 - \alpha_3 x_1^3) + \eta_3 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1, \\ \dot{x}_3 = (1 + \sqrt{2})x_4, \\ \dot{x}_4 = (2 - \sqrt{2})(x_1 - x_3 - \eta_2 x_4), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (v_{C_1}, i_{L_1}, v_{C_2}, i_{L_2})$ son los estados del sistema y η_1 , η_2 y η_3 son los parámetros de bifurcación. Los valores de los parámetros físicos del circuito¹ son $C_1 = \frac{1}{\eta_1}$, $R = \eta_2$ y $\alpha = \frac{\eta_3}{\eta_1}$, $C_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $L_1 = \sqrt{2}$ y $L_2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$, y el elemento no lineal está caracterizado por la relación $i_G = -\frac{1}{2}v_G - \alpha_2 v_G^2 + \alpha_3 v_G^3$, con α_2 y α_3 constantes.

Este oscilador se basa en el estudiado en (Yu, 2002). Sin embargo, en este caso, se adiciona la fuente de corriente controlada (αi_{L_1}), la cual fue incorporada en (Itovich & Moiola, 2005), a los efectos de estudiar las transiciones entre casos resonantes y no resonantes de la bifurcación de Hopf doble. Posteriormente se determinó que esto era igualmente posible si se eliminaba la fuente de corriente y se tomaba como parámetro de bifurcación $1/L_1$. Por lo tanto, más adelante se estudiará la bifurcación de Hopf resonante 2:3, usando el circuito oscilador con inductancia variable, en lugar del presentado en este capítulo.

El sistema (4.1) tiene un único punto de equilibrio en el origen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Mediante cálculos de rutina es posible determinar que la linealización del

¹Los valores de C_2 , L_1 y L_2 son los propuestos en (Yu, 2002). Con estos valores es posible hallar una bifurcación de Hopf doble (sintonizando C_1 y R) cuyos autovalores son $\lambda_{1,2} = \pm i$ y $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$, por lo tanto la bifurcación es *no resonante*, ya que la relación de frecuencias de los modos es irracional.

sistema en el punto de equilibrio posee dos pares de autovalores sobre el eje imaginario cuando

$$\eta_1 = 2 - \eta_3, \quad \eta_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\eta_3\right), \quad (4.2)$$

con las correspondientes frecuencias

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\gamma \mp \sqrt{-2 + \gamma^2}}, \quad (4.3)$$

donde $\gamma = \frac{1}{2} [3 - (1 - \sqrt{2})\eta_3 - \frac{1}{4}\eta_3^2]$. Nótese que para el caso particular $\eta_3 = -6 + 4\sqrt{2} \approx -0.3432$ se tienen frecuencias coincidentes $\omega_1 = \omega_2 = 2^{\frac{1}{4}}$, dando lugar a una bifurcación de Hopf doble resonante 1:1. Además, la ubicación de la singularidad en el espacio de los parámetros (η_1, η_2) , así como las frecuencias ω_1 y ω_2 dependen exclusivamente del valor de η_3 .

La variación del parámetro η_3 produce un fenómeno denominado sombrilla de Whitney que ha sido estudiada en (Itovich & Moiola, 2005). En la Fig. 4.2 se muestra la evolución de la curva de bifurcaciones de Hopf en el plano (η_1, η_2) para distintos valores de η_3 . Comenzando por $\eta_3 = 0$ se observa que la curva de Hopf forma un bucle donde la intersección define la bifurcación de Hopf doble HH (no resonante). Luego, al disminuir η_3 , el bucle es cada vez más pequeño (véanse las curvas para $\eta_3 = -0.075, -0.140, -0.220$) hasta desaparecer en la bifurcación de Hopf doble resonante 1:1, como se muestra en la curva para $\eta_3 \approx -0.3432$ de la Fig. 4.2. Para valores de $\eta_3 < -0.3432$ la curva de Hopf se vuelve suave porque el oscilador no presenta más una bifurcación de Hopf doble y no se intersecta a sí misma. Cabe destacar que la sombrilla de Whitney es un fenómeno de carácter global a la bifurcación de Hopf doble y no necesariamente sucede cada vez que un sistema experimente dicha singularidad.

4.2. Bifurcación de Hopf doble en el circuito oscilador

En esta sección, la atención se centra en el análisis del comportamiento en un entorno de la bifurcación de Hopf doble. En este punto organizador de la dinámica confluyen, entre otras, dos curvas de bifurcaciones de Hopf. Dado que estas singularidades generan órbitas periódicas, desde el punto de vista de aplicaciones en osciladores electrónicos, el estudio de la bifurcación de Hopf doble resulta útil para interpretar las interacciones

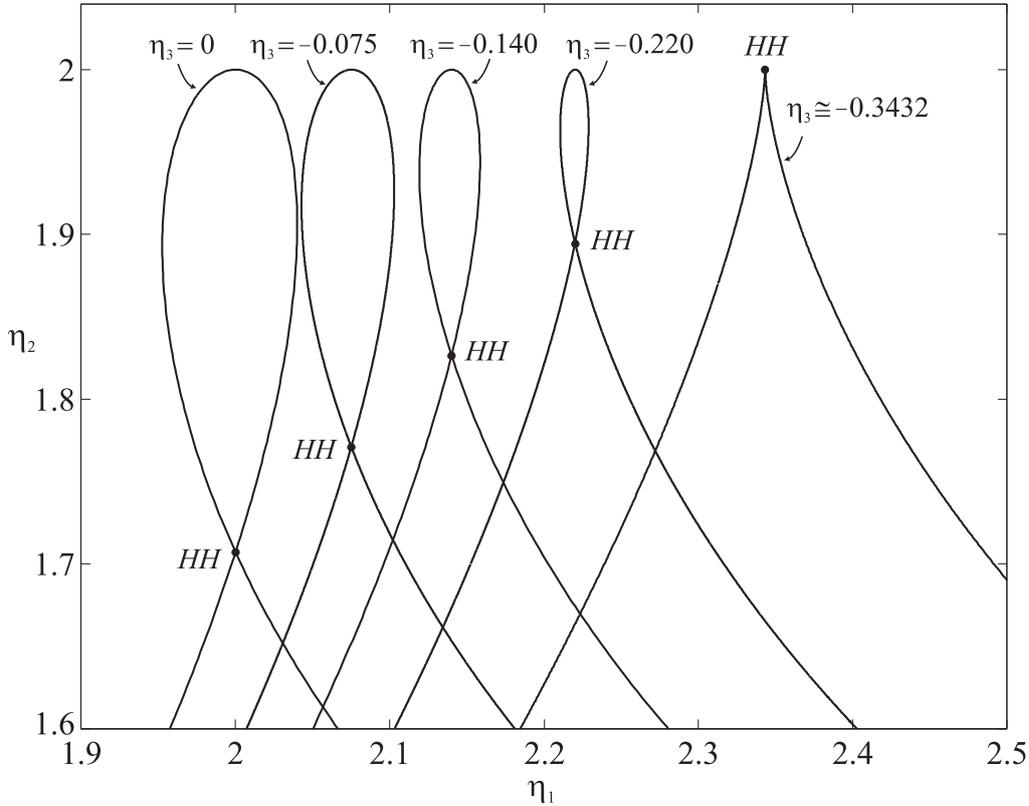


Figura 4.2: Curvas de Hopf en el plano (η_1, η_2) para algunos valores de η_3 . Despliegue de la sombrilla de Withney.

entre dos modos de oscilación cuando varían los parámetros, y el consecuente efecto sobre el contenido espectral de las formas de onda.

Si bien en cercanías de una bifurcación de Hopf el ciclo límite generado posee una componente de frecuencia principal (determinada por la frecuencia de cruce de los autovalores críticos), a medida que se varía el parámetro las no linealidades del sistema toman cada vez más relevancia, distorsionando la órbita periódica con componentes de frecuencia distintas a la original. Esto último puede deberse también a una bifurcación experimentada por la solución periódica. Por ejemplo, en el caso de la bifurcación de Hopf doble, los dos ciclos límites generados sufren bifurcaciones de Neimark-Sacker (véase la Sec. 2.2.4), dando origen a oscilaciones cuasiperiódicas con dos componentes de frecuencia (toros 2D), las cuales en un entorno de la singularidad de Hopf doble son

muy similares a las de los ciclos límites.

Dada la importancia que posee la bifurcación de Hopf doble en el escenario dinámico del circuito oscilador, se comenzará por el estudio de la dinámica local generada por la misma. Para ello, se considerarán cuatro despliegues diferentes cuya transición está determinada por el parámetro η_3 . En los tres primeros casos se verá que aunque no son topológicamente equivalentes, las transiciones entre los mismos no son abruptas y se asocian al cambio de posición de una de las curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker al variar η_3 . Esto no sucede en la transición del tercer al cuarto despliegue, ya que ésta es debida a otros fenómenos globales a la singularidad de Hopf doble.

El procedimiento de reducción de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del sistema a la forma normal no es trivial y puede resultar muy laborioso de aplicar aún para casos aparentemente simples. Por lo tanto, se seguirá un camino alternativo que consiste en realizar un análisis numérico de la dinámica. El estudio de las bifurcaciones asociadas a la singularidad de Hopf doble se realizará en función de los parámetros η_1 y η_2 (variaciones de la capacidad C_1 y de la resistencia R , respectivamente), para diferentes valores del parámetro η_3 (relacionado con la fuente de corriente controlada). Las constantes del elemento no lineal se mantendrán fijas en $\alpha_2 = 0.6$ y $\alpha_3 = 1$ para todos los casos estudiados.

A continuación se describirán cuatro despliegues para $\eta_3 = 0, -0.075, -0.140$ y -0.220 , es decir que se analizará la dinámica generada en un entorno del punto HH para los cuatro caos no resonantes de la Fig. 4.2.

4.2.1. Caso a: $\eta_3 = 0$

El diagrama de bifurcaciones en el plano de parámetros $\eta_1 - \eta_2$ correspondiente a $\eta_3 = 0$, es decir, sin el efecto de la fuente de corriente controlada ($\alpha = \eta_3/\eta_1$), se muestra en la Fig. 4.3. El punto $(\eta_1, \eta_2) = (2, 1.7071)$ corresponde a la bifurcación de Hopf doble (HH), donde se cortan las dos curvas de bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 . Para esta condición se tienen autovalores en $\lambda_{1,2} = \pm i$ y $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$ (nótese que la relación es irracional).

Para facilitar la descripción de la dinámica asociada, es conveniente realizar dos cortes horizontales en la Fig. 4.3 variando el parámetro η_1 con η_2 fijo, primero en $\eta_2 = 1.71$ y luego en $\eta_2 = 1.70$. La dinámica asociada a estos cortes pueden verse

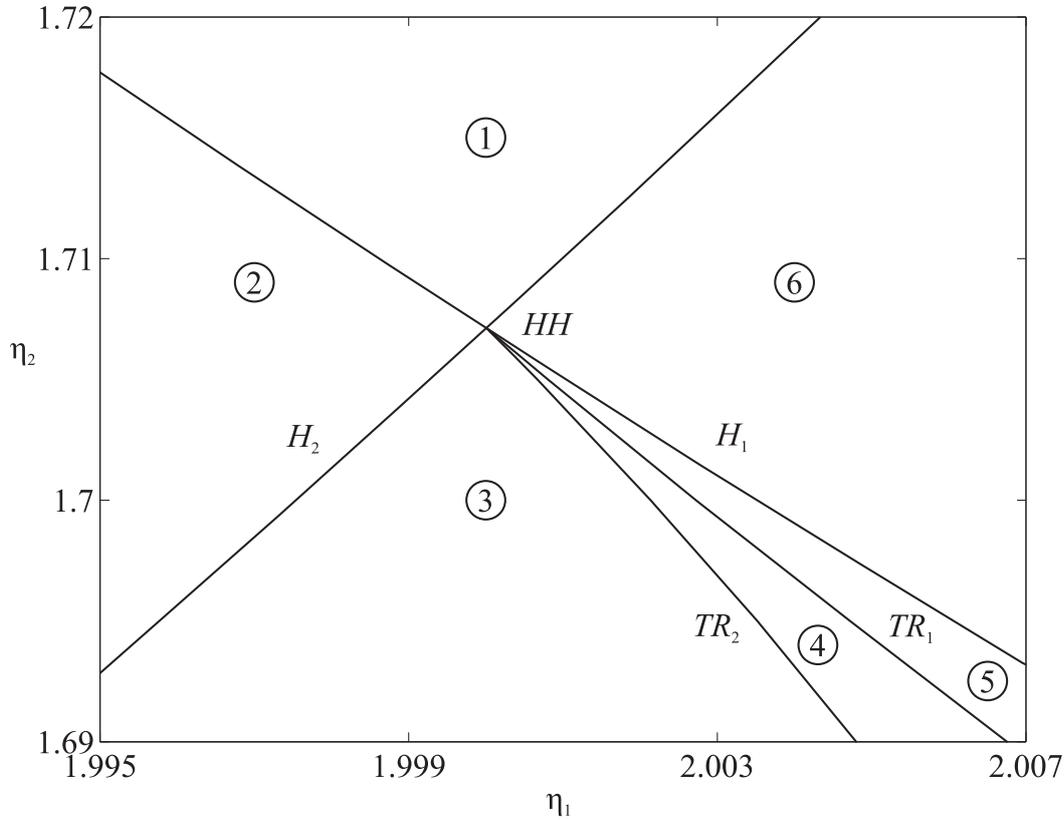


Figura 4.3: Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = 0$.

en las Figs. 4.4a y 4.4b, respectivamente, donde las líneas llenas indican que el punto de equilibrio es estable y las líneas de trazos que es inestable; los círculos llenos indican la amplitud de los ciclos límites estables y los vacíos la de los inestables. Comenzando con el corte para $\eta_2 = 1.71$ (Fig. 4.4a), se observa que el origen (único punto de equilibrio del sistema) es estable en el segmento comprendido entre las bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 , e inestable a la izquierda de H_1 y a la derecha de H_2 . En H_1 nace un ciclo límite estable hacia la izquierda, en tanto que en H_2 el ciclo estable se extiende hacia la derecha. Esto puede corroborarse calculando los autovalores del sistema linealizado y el coeficiente de curvatura (2.29). De esta descripción se desprende que en la región 1 de la Fig. 4.3 el equilibrio es estable, mientras que en las regiones 2 y 6 es inestable. Asimismo, en las regiones 2 y 6 se tendrán ciclos límites estables en un entorno del punto de equilibrio.

La dinámica correspondiente al corte con $\eta_2 = 1.70$ se indica en la Fig. 4.4b. Se

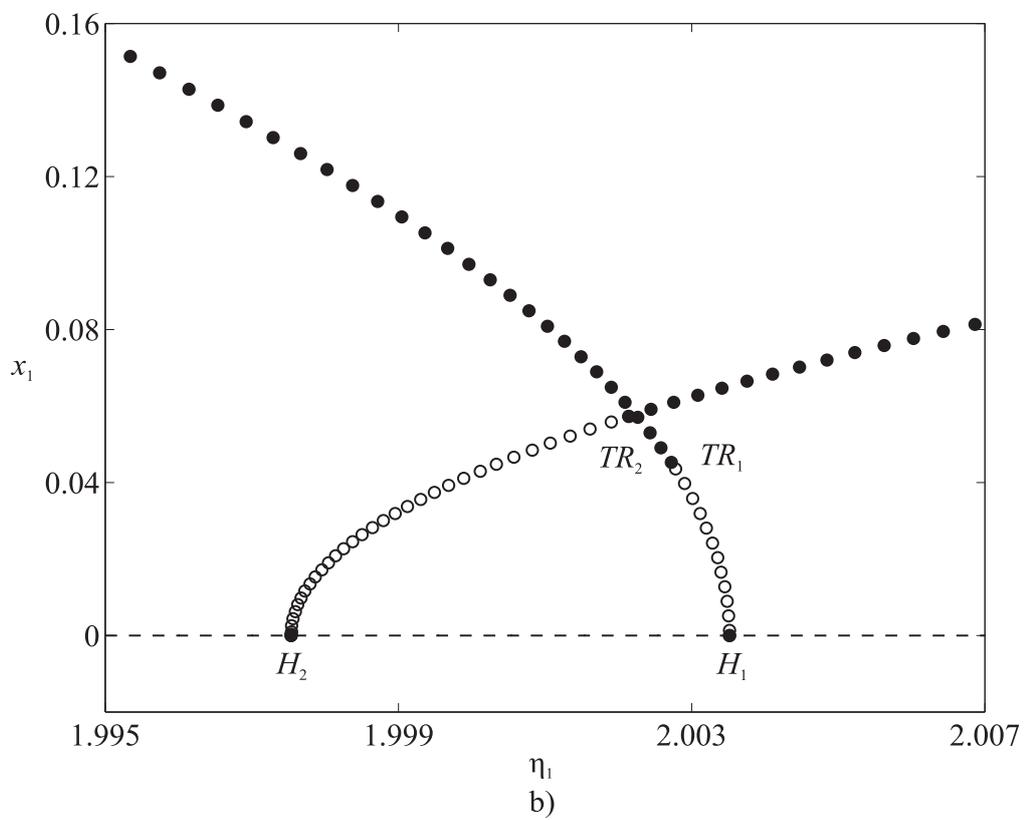
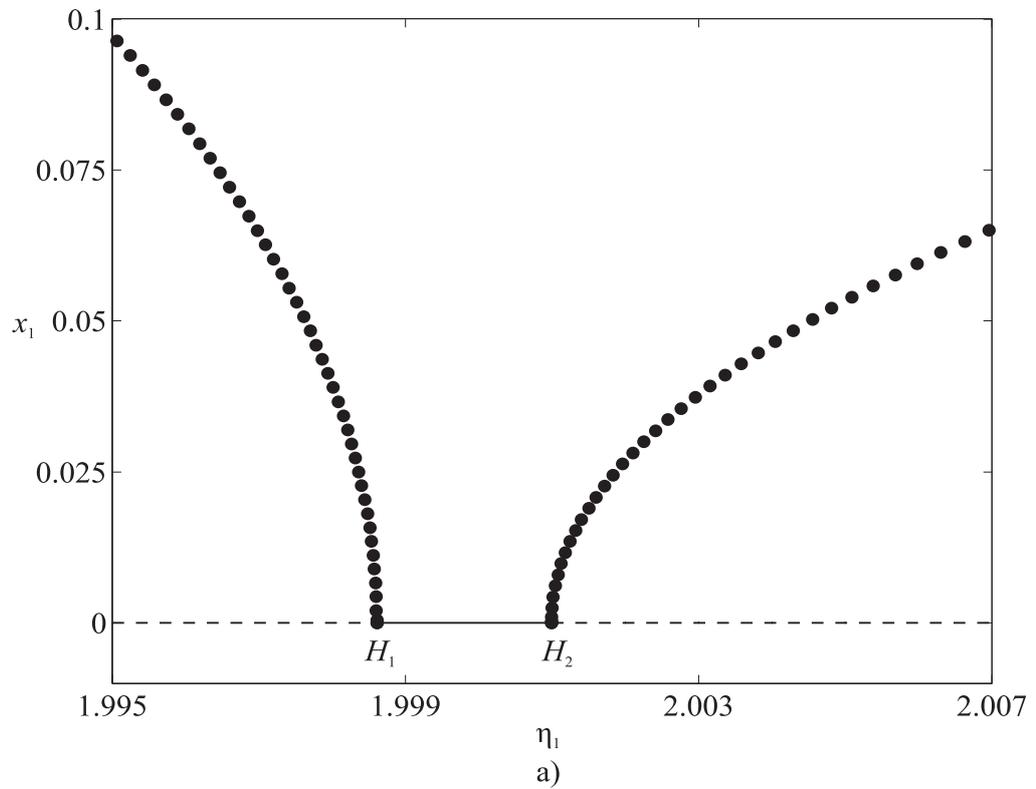


Figura 4.4: Diagrama de bifurcaciones variando η_1 (Caso a: $\eta_3 = 0$). a) Corte para $\eta_2 = 1.71$ (arriba de HH). b) Corte para $\eta_2 = 1.70$ (debajo de HH).

observa que el origen es siempre inestable y en los puntos de bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 nacen ciclos límites también inestables hacia la izquierda y derecha, respectivamente. El ciclo límite creado en H_1 sufre una bifurcación de Neimark-Sacker en el punto TR_1 (dos multiplicadores de la linealización de la dinámica sobre la solución periódica cruzan el círculo unitario). A partir de este punto el ciclo pasa a ser estable y se crea una oscilación cuasiperiódica para valores decrecientes del parámetro η_1 (su evolución no se indica en la figura). Por su parte el ciclo límite que nace en H_2 también evidencia una bifurcación de Neimark-Sacker TR_2 dando origen a una solución cuasiperiódica para valores crecientes de η_1 . Las simulaciones realizadas indican que las soluciones cuasiperiódicas (toros) que nacen en TR_1 y TR_2 están conectadas o simplemente son la misma solución. Esto lo predice la forma normal de la bifurcación de Hopf doble. Recientemente se han propuesto algoritmos para la continuación de toros, lo cual permitiría confirmar esta aseveración, pero aún es una tarea dificultosa de realizar (Schilder et al., 2006), y escapa al propósito de esta tesis. Por el momento estos algoritmos no se encuentran implementadas en ninguno de los paquetes de continuación más populares, como AUTO o MATCONT.

Todos los fenómenos mencionados se conectan a través de la bifurcación de Hopf doble y, por lo tanto, podrían ser predichos a partir de la forma normal de esta singularidad. Por otro lado, el paquete de continuación de soluciones MATCONT posee implementadas las rutinas de cálculo de los coeficientes de la forma normal (3.14), los cuales en este caso toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} p_{11}p_{22} &= 1, \quad \theta = 13.03352, \quad \delta = 0.1267352, \\ \Theta &= 7.551756 \cdot 10^3, \quad \Delta = 15.34216. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por lo tanto, el despliegue de la singularidad corresponde al Caso I simple ($\theta > 0$, $\delta > 0$, $\theta\delta > 1$) de la forma normal truncada. Nótese que el diagrama de la Fig. 4.3 es equivalente al despliegue de la forma normal mostrado en la Fig. 3.8 (véase la Sec. 3.1.6), el cual por comodidad se repite en la Fig. 4.5. Para describir la conexión entre los diferentes comportamientos dinámicos se consideran los retratos de fase de la Fig. 4.5 que indican, en forma esquemática, los escenarios de cada una de las regiones indicadas en la Fig. 4.3. Es conveniente recordar que en estos retratos de fase el origen representa el punto de equilibrio del circuito, los puntos que se indican sobre los ejes de coordenadas

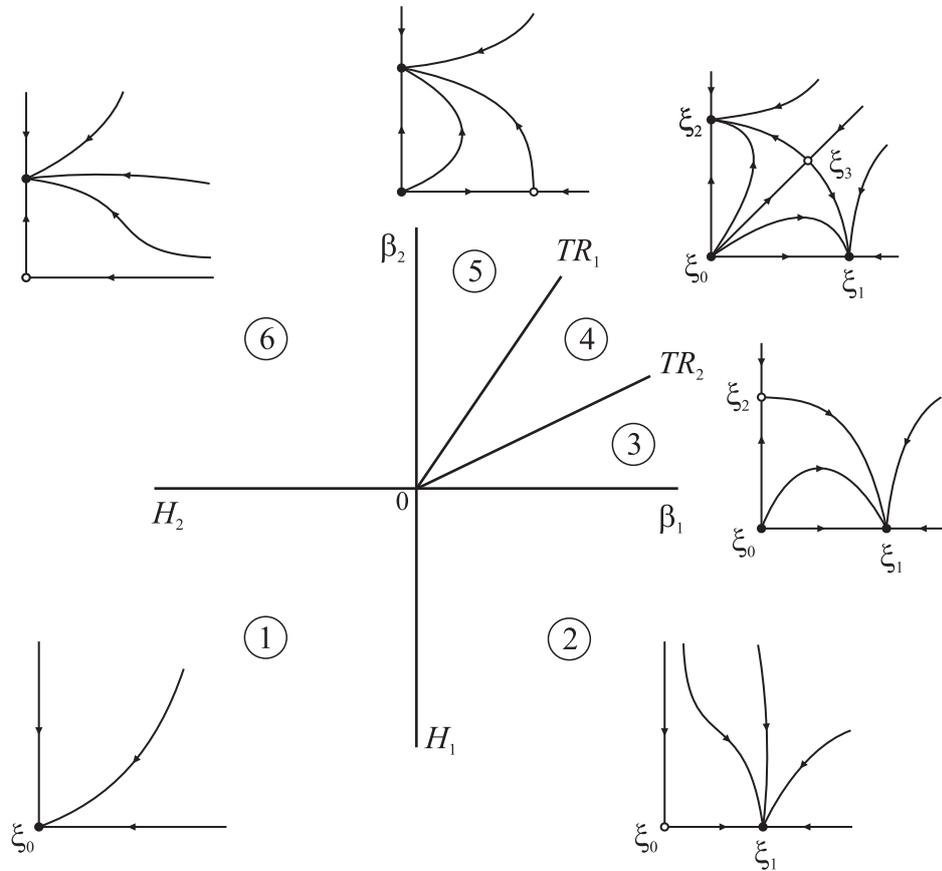


Figura 4.5: Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente con la de la Fig. 4.3. Caso I simple.

representan ciclos límites (el ciclo que se origina en H_1 corresponde al indicado en el eje de abscisas y el originado en H_2 al del eje de ordenadas), en tanto que el punto fuera de los ejes de coordenadas representa un toro 2D.

Comenzando por la región 1 del diagrama de bifurcaciones de la Fig. 4.3 donde el punto de equilibrio es estable, y recorriendo el diagrama en sentido antihorario, primero se observa que el equilibrio pierde la estabilidad en H_1 y se crea un ciclo límite estable (región 2). En la región 3 se tiene un segundo ciclo, pero en este caso inestable, creado en la bifurcación de Hopf H_2 . El ciclo inestable pasa a ser estable a causa de la bifurcación de Neimark-Sacker TR_2 y se crea un toro inestable (región 4). Este toro colapsa en una segunda bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 , por lo que en la región 5 se vuelven a tener dos ciclos, uno estable y otro inestable. El ciclo inestable se desvanece en la bifurcación

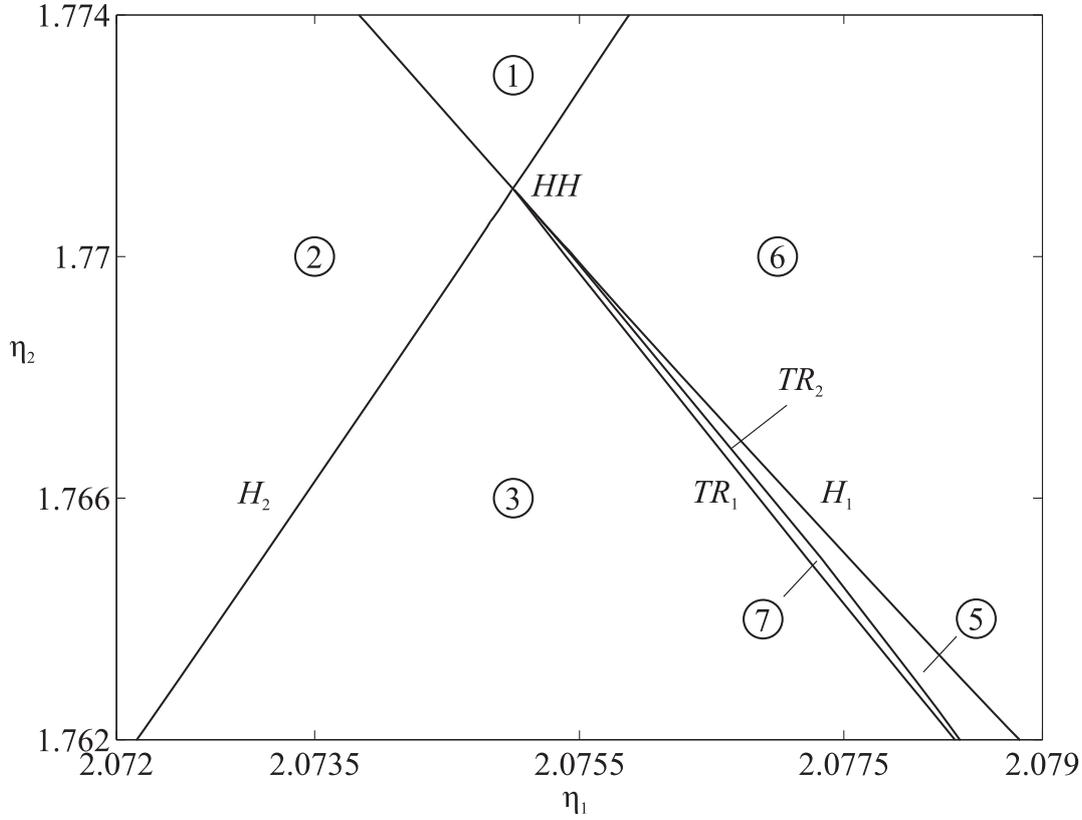


Figura 4.6: Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = -0.075$.

de Hopf H_1 , por ello en la región 6 se tiene un ciclo estable que colapsa al pasar a la región 1 por efecto de la bifurcación de Hopf H_2 .

4.2.2. Caso b: $\eta_3 = -0.075$

Fijando $\eta_3 = -0.075$, resulta el diagrama de bifurcaciones de la Fig. 4.6. La bifurcación de Hopf doble se produce para $(\eta_1, \eta_2) = (2.0750, 1.7711)$, con autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i1.0173$ y $\lambda_{3,4} = \pm i1.3902$. Los valores de los coeficientes de la forma normal son

$$\begin{aligned}
 p_{11}p_{22} &= 1, \quad \theta = 22.78323, \quad \delta = 2.500476 \cdot 10^{-3}, \\
 \Theta &= 2.388363 \cdot 10^6, \quad \Delta = 24.97502.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

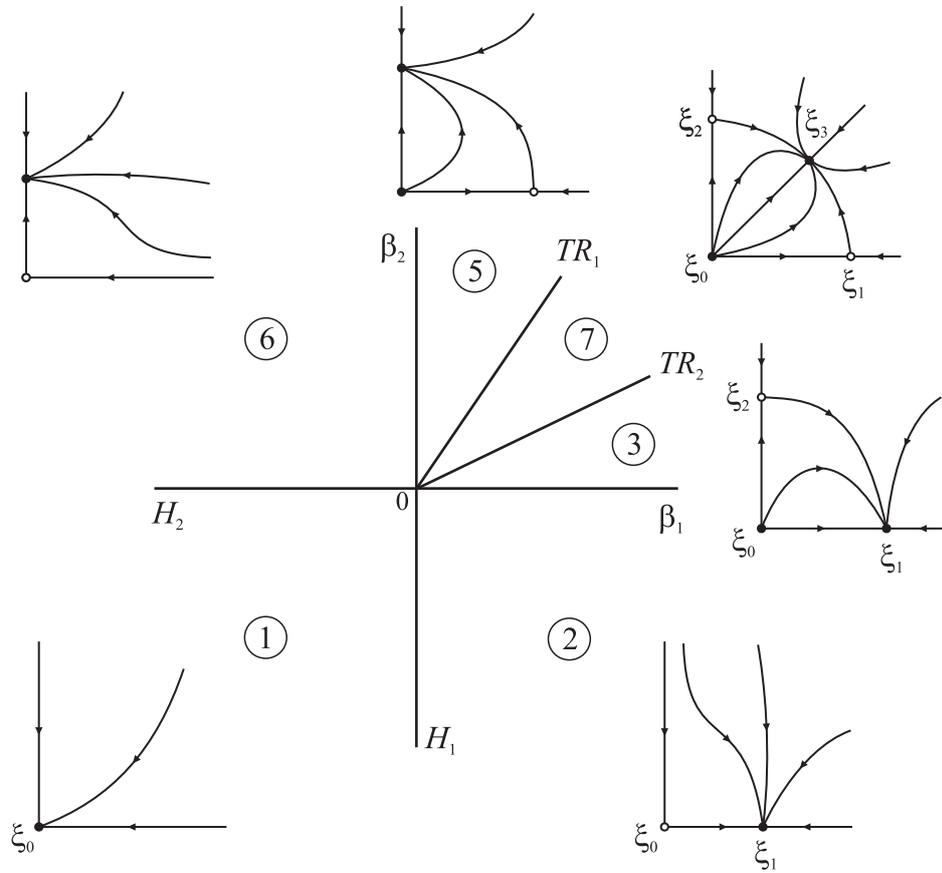


Figura 4.7: Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble asociado al de la Fig. 4.6. Caso II simple.

Entonces el despliegue de la singularidad se asocia con el Caso II simple de la forma normal (3.14), mostrado en las Figs. C.1 y C.2 del Apéndice C, el cual por comodidad se repite en la Fig. 4.7.

Nótese que respecto del caso descrito anteriormente se han invertido las posiciones de las curvas de Neimark-Sacker TR_1 y TR_2 . Por esta razón al pasar de la región 3 a la 7, el ciclo estable se convierte en inestable y se genera un toro 2D estable en TR_1 . Este toro colapsa en la curva TR_2 y el ciclo inestable creado en H_2 se estabiliza (región 5). La dinámica en las demás regiones es análoga al caso $\eta_3 = 0$.

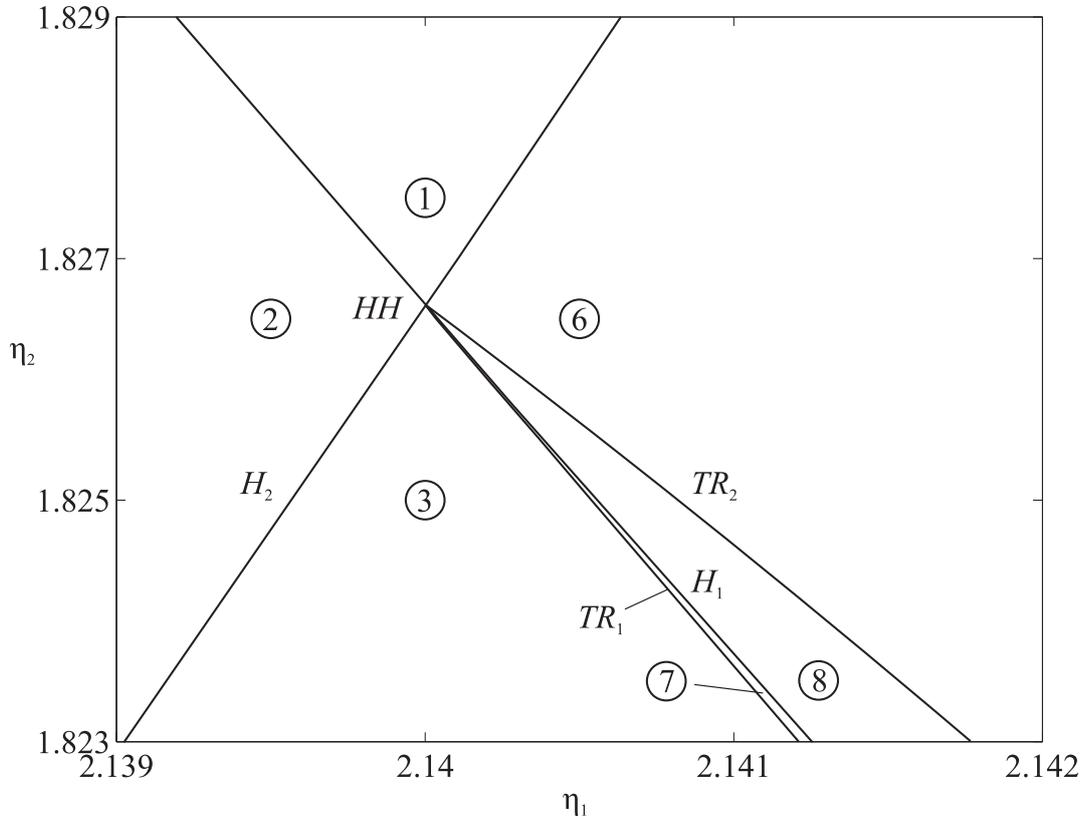


Figura 4.8: Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = -0.140$.

4.2.3. Caso c: $\eta_3 = -0.140$

En la Fig. 4.8 se presentan las curvas de bifurcaciones correspondientes a $\eta_3 = -0.140$. En esta ocasión la bifurcación de Hopf doble se tiene para $(\eta_1, \eta_2) = (2.140, 1.8266)$, con autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i1.0357$ y $\lambda_{3,4} = \pm i1.3654$. Los coeficientes de la forma normal (3.14) calculados con MATCONT son

$$\begin{aligned}
 p_{11}p_{22} &= 1, \quad \theta = 152.7846, \quad \delta = -0.1342981, \\
 \Theta &= -1.491124 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta = 71.11361.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Por lo tanto, el diagrama esquemático correspondiente es el del Caso III simple, mostrado en la Fig. 4.9 (véase las Figs. C.1 y C.2 del Apéndice C).

En esta oportunidad la curva de Neimark-Sacker TR_2 traspasa la curva de Hopf H_1 . En la región 7 se tiene un equilibrio y dos ciclos inestables y un toro 2D estable. Luego,

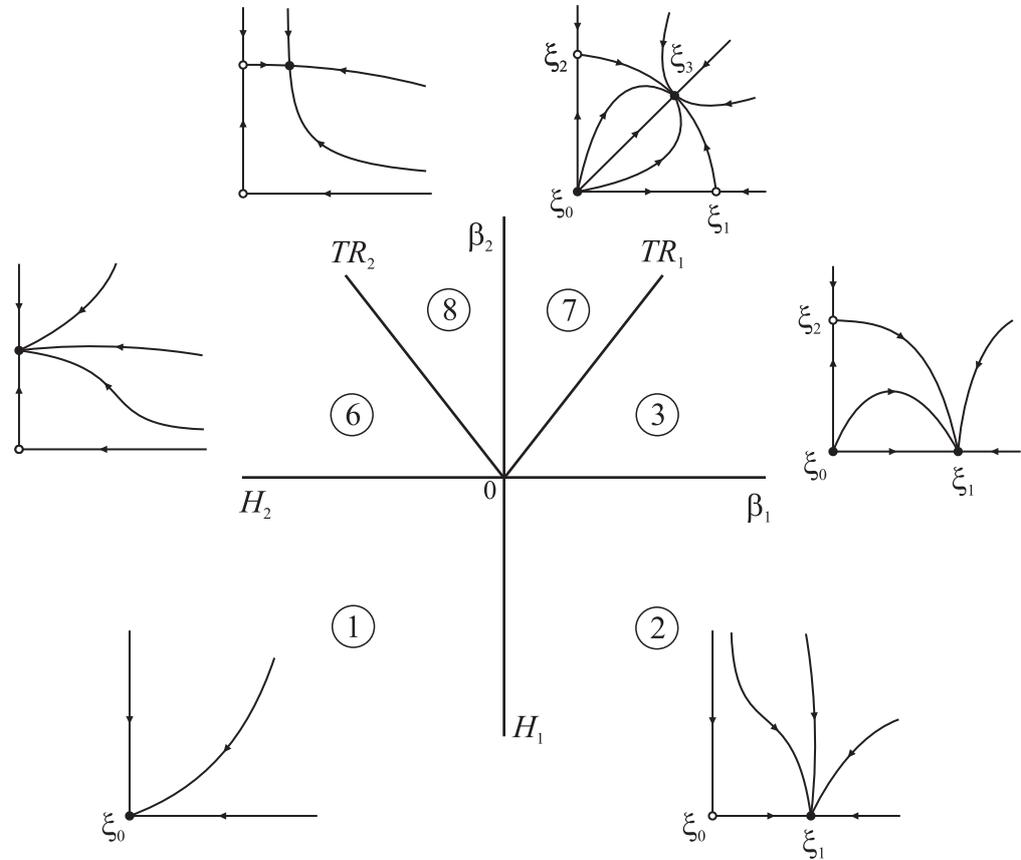


Figura 4.9: Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente al de la Fig. 4.8. Caso III simple.

en la región 8 persiste únicamente uno de los ciclos inestables ya que el restante colapsa en la bifurcación de Hopf H_1 . Finalmente el toro 2D se extingue en la bifurcación TR_2 y el ciclo pasa a ser estable (región 6).

4.2.4. Caso d: $\eta_3 = -0.220$

Fijando $\eta_3 = -0.220$ se obtiene el diagrama de la Fig. 4.10 que puede asociarse al esquema de la Fig. 3.9. La bifurcación de Hopf doble ocurre para $(\eta_1, \eta_2) = (2.220, 1.8949)$, con autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i1.0656$ y $\lambda_{3,4} = \pm i1.3271$. Los coeficientes de la forma normal tienen los siguientes valores numéricos

$$p_{11}p_{22} = -1, \theta = -16.56878, \delta = -0.3729562, \quad (4.7)$$

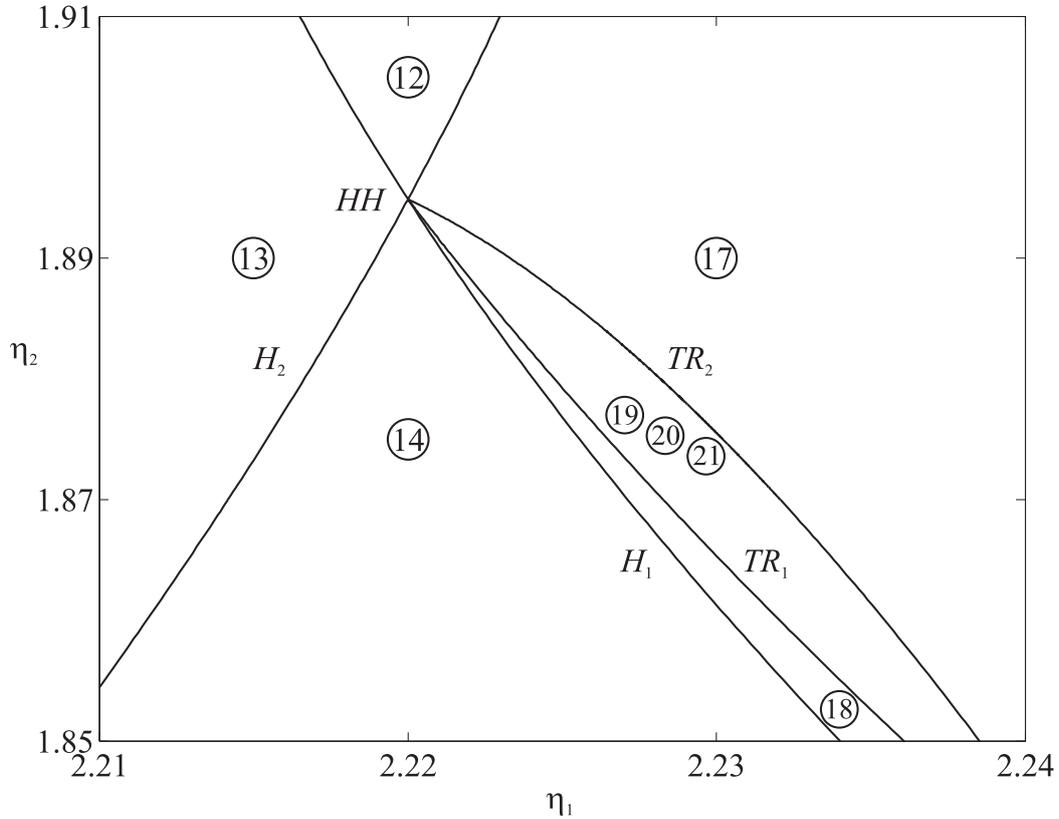


Figura 4.10: Despliegue de la singularidad de Hopf doble para $\eta_3 = -0.220$.

$$\Theta = 5.356356 \cdot 10^3, \Delta = 45.56888.$$

El escenario dinámico en este caso es más rico que en los descritos anteriormente y corresponde al Caso IV complejo de la forma normal truncada (3.17), cuyo despliegue se repite en la Fig. 4.11, e involucra bifurcaciones de toros (curvas Y y C en la Fig. 4.11). En las Figs. C.3 y C.4 del Apéndice C se pueden apreciar el resto de los denominados casos complejos.

En principio se puede observar que la curva de Neimark-Sacker TR_1 también cruza la curva H_1 . Una diferencia sustancial con los casos anteriores es el cambio de curvatura o criticidad en la bifurcación H_1 . Esto puede verse comparando los cortes horizontales realizados para $\eta_2 = 1.90$ (Fig. 4.12a) y $\eta_2 = 1.87$ (Fig. 4.12b) con los cortes de las Figs. 4.4a y 4.4b, respectivamente. En los casos vistos anteriormente (para $\eta_3 = 0$, -0.075 y -0.140 , respectivamente), la bifurcación de Hopf H_1 siempre origina un ciclo

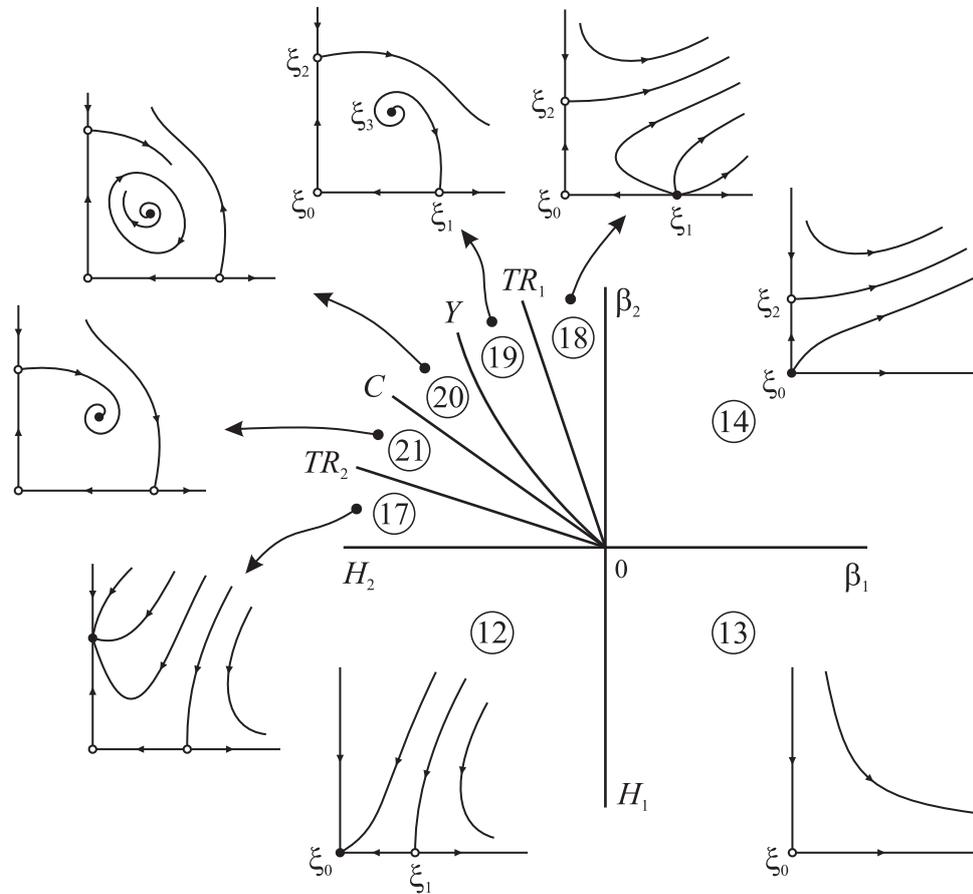


Figura 4.11: Despliegue de la bifurcación de Hopf doble asociado con la singularidad de la Fig. 4.10. Caso VI complejo.

hacia la izquierda (valores decrecientes de η_1), y el ciclo que nace es estable en la región 2 (o sea, arriba de la bifurcación de Hopf doble en las Figs. 4.3, 4.6 y 4.8), e inestable en la región 5 (Figs. 4.3 y 4.6) o en la región 7 (Fig. 4.8) debajo de la bifurcación de Hopf doble. Esta diferencia en la estabilidad del ciclo que nace en H_1 puede apreciarse en las Figs. 4.4a y 4.4b. En cambio, en esta ocasión, el ciclo nace hacia la derecha de H_1 y es inestable en toda la curva (Figs. 4.12a y 4.12b). Esto produce un cambio completo de los diagramas de fase asociados cuya descripción se presenta a continuación.

En la región 13 (Fig. 4.10) el origen es inestable y es el único conjunto límite en su entorno. En la región 14 se tiene también un ciclo inestable a causa de la bifurcación de Hopf H_2 . En H_1 se crea un segundo ciclo inestable originando la situación de la región 18. La bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 crea un toro 2D inestable en la región 19.

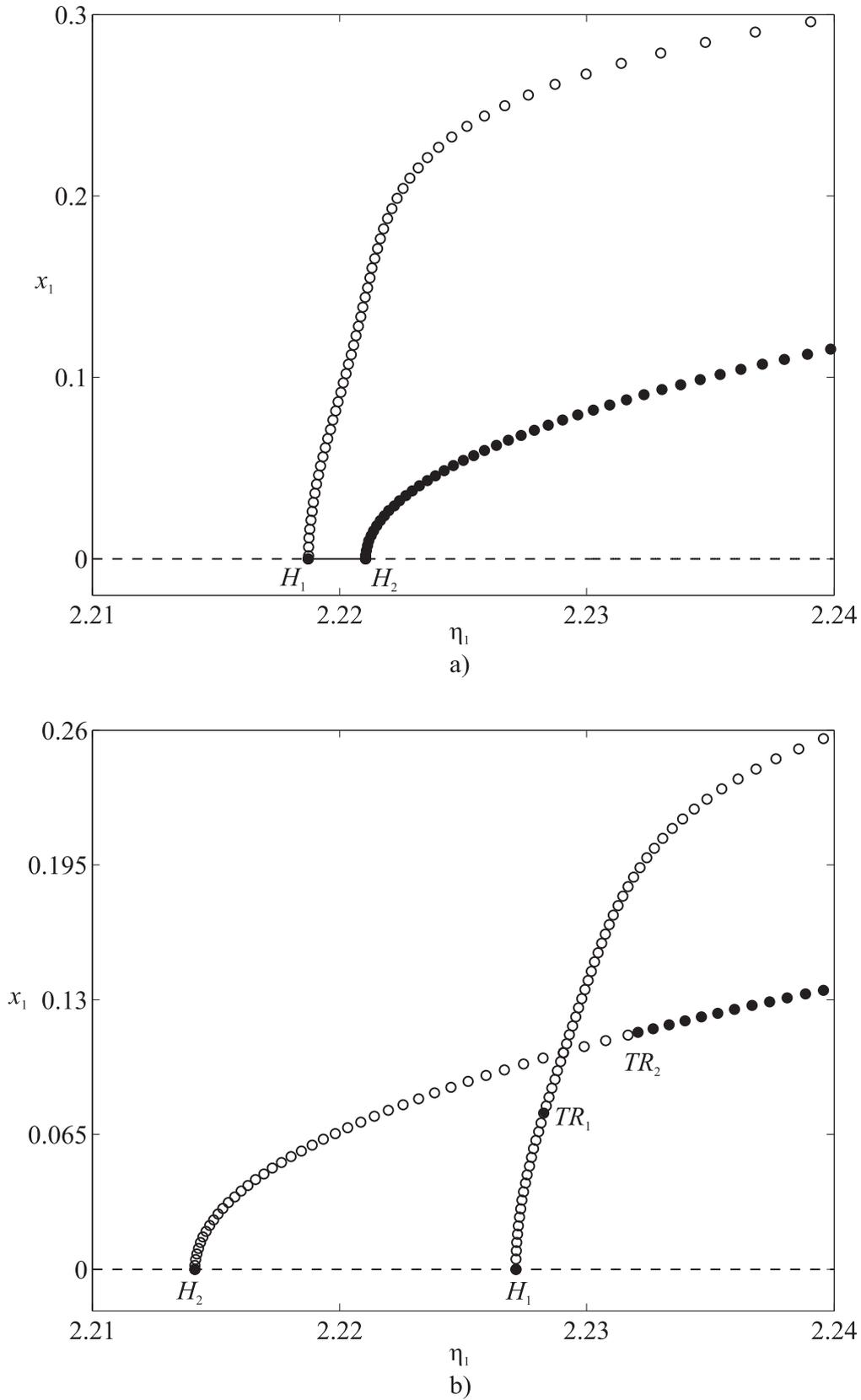


Figura 4.12: Diagrama de bifurcaciones variando η_1 (Caso d: $\eta_3 = -0.220$). a) Corte para $\eta_2 = 1.90$ (arriba de HH). b) Corte para $\eta_2 = 1.87$ (debajo de HH).

Nótese que en la Fig. 4.10 no se indican las curvas Y y C presentes en la forma normal (compárese con la Fig. 3.9) ya que corresponden a bifurcaciones de toros y hasta el momento no se cuenta con la implementación necesaria para su continuación numérica [véase (Schilder et al., 2006)]. Sin embargo se han efectuado simulaciones para comprobar la presencia de los conjuntos límites asociados a las regiones 19-21.

Continuando con la descripción de la dinámica, el toro 2D inestable presente en la región 19 (Fig. 4.13a) experimenta una bifurcación (curva Y) que da origen a un toro tridimensional estable (región 20). El toro 3D colapsa sobre la curva C y en la región 21 el toro 2D se estabiliza. Seguidamente la órbita cuasiperiódica colapsa en la bifurcación de Neimark-Sacker TR_2 y uno de los ciclos inestables pasa a ser estable (región 17). Este ciclo se desvanece en la bifurcación de Hopf H_2 y el origen pasa a ser estable (región 12). Cruzando la curva H_1 se retorna a la situación inicial (región 13).

Debido a que la dinámica del sistema en la región delimitada por las curvas TR_1 y TR_2 no es trivial, se realizaron simulaciones temporales fijando $\eta_2 = 1.888$ y variando sensiblemente η_1 . La Fig. 4.13 muestra la evolución de la órbita cuasiperiódica en las regiones 19, 20 y 21. La fila superior corresponde al toro 2D inestable de la región 19 (Figs. 4.13a-c), la central al toro 3D de la región 20 (Figs. 4.13d-f) y la inferior al toro 2D estable presente en la región 21 (Figs. 4.13g-i). En las Figs. 4.13a, 4.13d y 4.13g (primera columna) se muestra la proyección de la solución cuasiperiódica en el plano (x_1, x_2) . Las Figs. 4.13b, 4.13e y 4.13h (segunda columna) exhiben las señales temporales, mientras que el espectro de frecuencias de éstas se muestra en las Figs. 4.13c, 4.13f y 4.13i (tercera columna).

Si bien todos los espectros muestran la existencia de dos frecuencias o modos en $f_1 \cong 0.1685$ Hz y $f_2 \cong 0.2130$ Hz, se puede observar claramente que la señal correspondiente al toro 3D (Fig. 4.13f) presenta una modulación en amplitud que en el espectro se manifiesta por la aparición de componentes frecuenciales en torno a f_1 y f_2 (compárese los recuadros de la segunda columna en la Fig. 4.13). Esta tercera frecuencia (moduladora) es de aproximadamente $f_3 = 0.0001$ Hz. Al realizar la simulación temporal del toro 3D es posible advertir cómo su amplitud varía en forma periódica (modulada) al evolucionar el tiempo. Por otro lado, la Fig. 4.14 muestra en detalle las formas de onda correspondientes al toro 2D estable de la región 21.

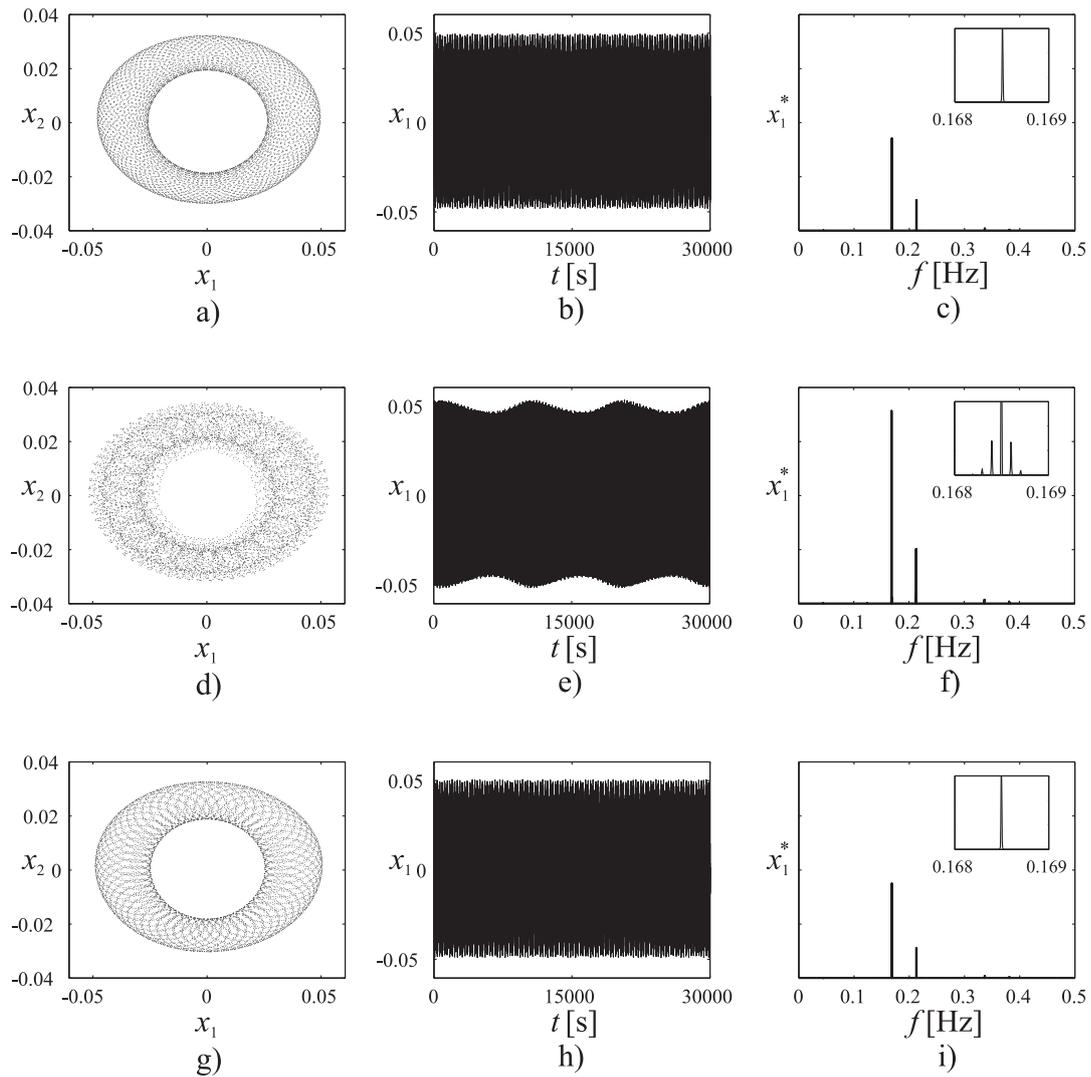


Figura 4.13: Oscilaciones cuasiperiódicas presentes en las regiones 19, 20 y 21.

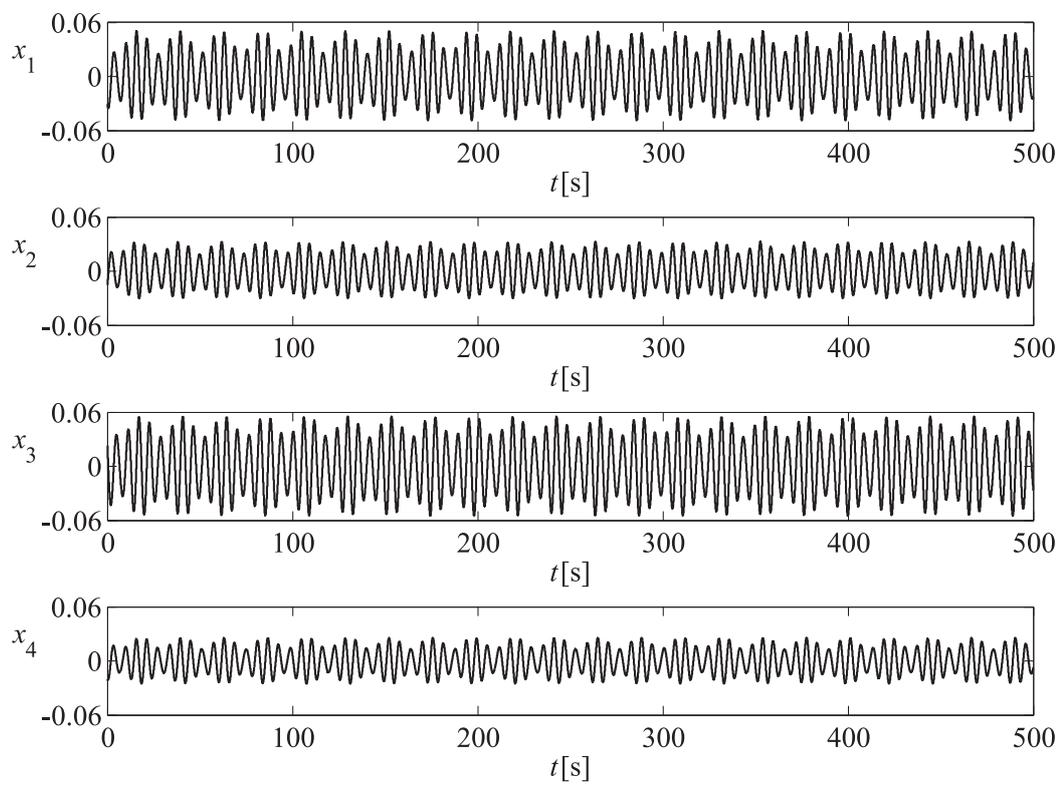


Figura 4.14: Señales temporales correspondientes al toro 2D estable de la región 21.

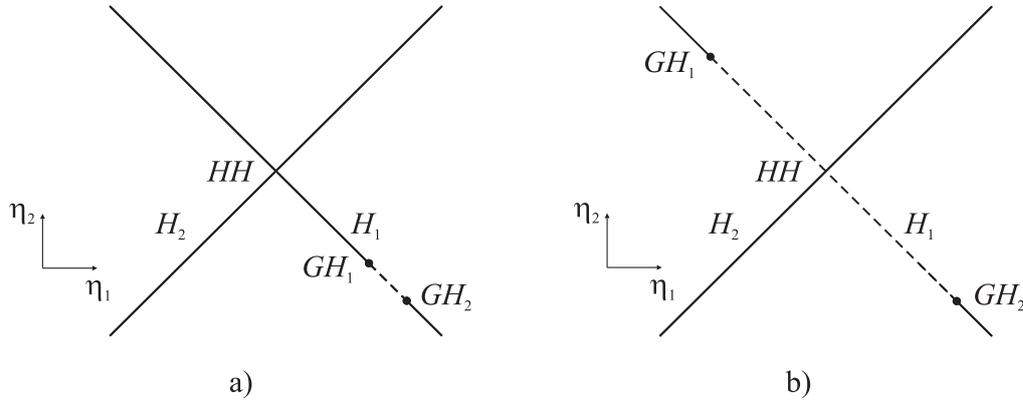


Figura 4.15: Representación esquemática del mecanismo que genera la transición entre los casos simples y los complejos de la bifurcación de Hopf doble. a) $\eta_3 \simeq -0.140946$. b) $\eta_3 = -0.220$.

4.2.5. Mecanismo de transición entre los casos c y d

A continuación se describirá el mecanismo que posibilita la transición entre el caso c (simple) y el caso d (complejo). En el caso c ($\eta_3 = -0.140$) la bifurcación H_1 genera un ciclo límite cuya amplitud se incrementa hacia la izquierda de la bifurcación, *i.e.*, para valores decrecientes del parámetro. Mientras que en el caso d ($\eta_3 = -0.220$), de la bifurcación H_1 nace un ciclo límite hacia la derecha (al menos en un entorno de la bifurcación de Hopf doble).

Para $\eta_3 \simeq -0.140946$ (el despliegue local es similar al de $\eta_3 = -0.140$) la curva de Hopf H_1 sufre dos fallas del primer coeficiente de curvatura, dando lugar a dos bifurcaciones generalizadas de Hopf (Bautin, Sec. 3.1.2) GH_1 y GH_2 para valores de η_2 menores que la bifurcación de Hopf doble HH , como se muestra en forma esquemática en la Fig. 4.15a. Sobre el segmento indicado con línea a trazos se genera un ciclo límite inestable hacia la derecha de la curva H_1 . A medida que η_3 disminuye el punto de degeneración GH_1 se desplaza hacia arriba por la curva H_1 . Para $\eta_3 = -0.14965$ la degeneración GH_1 coincide con el punto de Hopf doble, mientras que para $\eta_3 < -0.14965$, GH_1 se encuentra por encima del punto HH , como se indica esquemáticamente en la Fig. 4.15b. Esto provoca que el ciclo límite producto de H_1 se desarrolle hacia la derecha antes y después de la bifurcación de Hopf doble (como ocurre en las Figs. 4.12a y 4.12b para $\eta_3 = -0.220$) y por ende el despliegue de la singularidad corresponde a uno de los

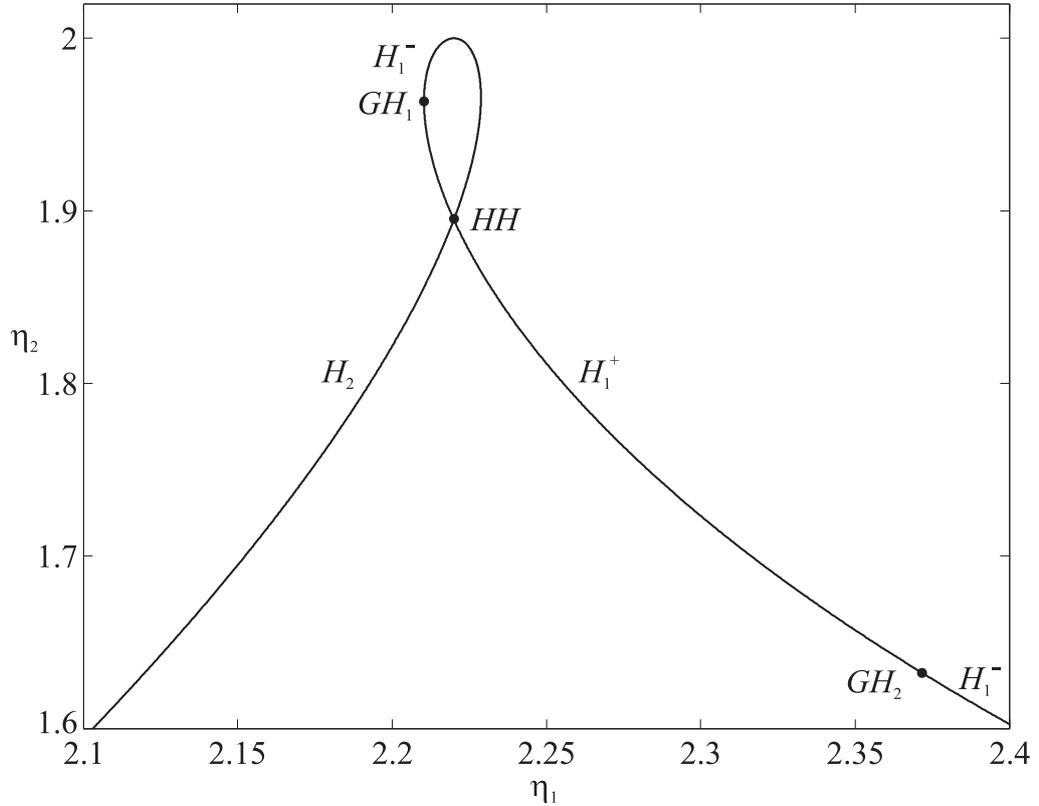


Figura 4.16: Bifurcaciones de Bautin sobre la rama de Hopf H_1 para $\eta_3 = -0.220$.

casos complejos.

La Fig. 4.16 muestra la ubicación sobre la curva de Hopf de las bifurcaciones de Bautin para $\eta_3 = -0.220$. En este caso, la bifurcación GH_1 se encuentra situada en $(\eta_1, \eta_2) = (2.210334, 1.963316)$ y el segundo coeficiente de Lyapunov es $l_2 = -7.261074$, mientras que GH_2 se encuentra en $(\eta_1, \eta_2) = (2.371691, 1.632233)$ y $l_2 = -0.6972019$. Nótese que en ambos casos el signo del segundo coeficiente de Lyapunov es negativo, con lo cual los despliegues de GH_1 y GH_2 son topológicamente equivalentes al mostrado en la Fig. 3.2 (Sec. 3.1.2).

Dado que GH_1 y GH_2 son bifurcaciones de Bautin, existen además curvas de sillanodo de soluciones periódicas que emergen de estos puntos. Esto introduce nuevos “ingredientes” en la dinámica que no están asociados a la forma normal de la bifurcación de Hopf doble, y cuyos efectos se analizarán en la sección siguiente.

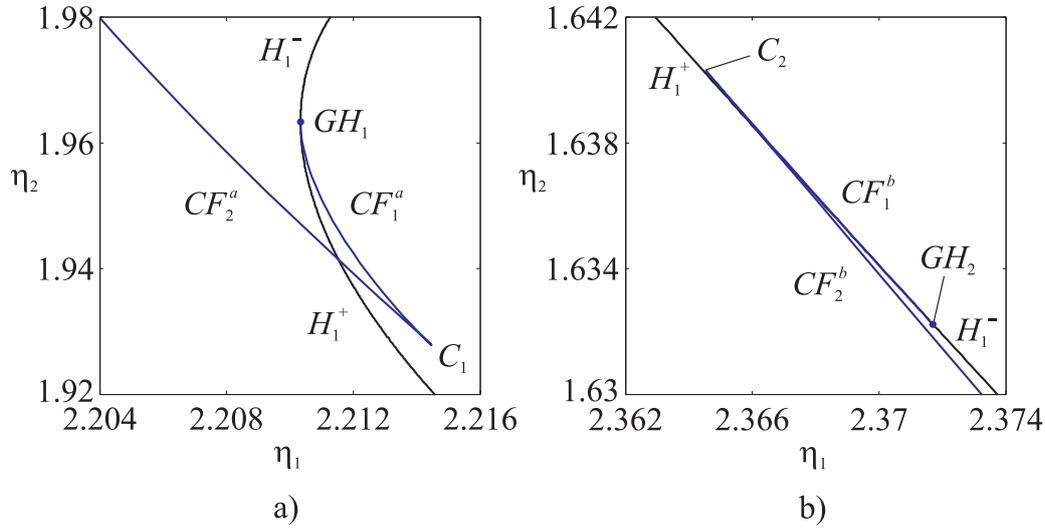


Figura 4.17: Curvas de bifurcaciones de *cyclic fold* emergentes de las bifurcaciones de Bautin de la Fig. 4.16. a) Detalle para GH_1 . b) Curvas asociadas a GH_2 .

La Fig. 4.17a muestra el diagrama de bifurcaciones en un entorno de GH_1 . La degeneración divide la curva de Hopf en dos mitades H_1^+ subcrítica y H_1^- supercrítica. Además, de la degeneración nace la curva de sillanodos de ciclos CF_1^a , como lo establece la forma normal de la bifurcación de Bautin (Sec. 3.1.2). A su vez, esta última forma el punto cuspidal C_1 con otra curva de silla-nodo CF_2^a . Una situación similar ocurre para la degeneración GH_2 , como se muestra en la Fig. 4.17b. En este caso, la curva de sillanodos asociada es CF_1^b e interacciona con CF_2^b en la bifurcación *cusp* C_2 .

Mediante el estudio de la dinámica asociada a la falla del segundo coeficiente de Lyapunov, utilizando las expresiones de cálculo provistas por el método de análisis de oscilaciones en el dominio frecuencia (Mees & Chua, 1979; Mees, 1981; Moiola & Chen, 1996), se mostró que los puntos C_1 y C_2 no están asociados a la falla de dicho coeficiente sino que derivan de una interacción global entre curvas de sillanodos de soluciones periódicas (Revel et al., 2007a). Además, mediante la realización de continuaciones adicionales se vio que $CF_1^{a,b}$ y $CF_2^{a,b}$ forman dos curvas independientes al variar el parámetro η_3 , la unión de $CF_1^{a,b}$ conecta las degeneraciones GH_1 y GH_2 , mientras que $CF_2^{a,b}$ se une mediante bifurcaciones *cusp* con otras dos curvas de sillanodos de ciclos, como se verá en la sección siguiente. Luego, CF_1^a y CF_2^a interactúan para cierto valor de η_3 dando

origen al punto cuspidal C_1 , mientras que CF_1^b y CF_2^b forman C_2 .

4.3. Diagrama de bifurcaciones global

Hasta el momento se ha analizado el escenario dinámico en una vecindad de la bifurcación de Hopf doble. Si bien esta última constituye un centro organizador de gran importancia, existen otras singularidades relevantes si se considera una región más amplia del plano de parámetros. En general, el escenario dinámico de un sistema no está determinado por un único centro organizador. Esto se debe principalmente a que los fenómenos dinámicos originados por una singularidad muchas veces interactúan con otros provenientes de otras bifurcaciones, formando nuevos centros organizadores. Por ejemplo, al continuar una de las ramas de bifurcaciones de Neimark-Sacker que emanan del punto de Hopf doble, puede ocurrir que ésta experimente una resonancia fuerte 1:2 (multiplicadores en -1). Esta nueva singularidad genera una curva de bifurcaciones de doble período que *a priori* no tiene relación con la singularidad de Hopf doble. Por lo tanto, se puede determinar parte de la dinámica global del sistema haciendo la continuación de las curvas de bifurcaciones que emanan de las singularidades. A su vez, es importante mencionar que resulta prácticamente imposible conocer completamente el escenario dinámico global de un sistema genérico.

4.3.1. Bifurcaciones globales asociadas a GH_1 y GH_2

Teniendo en cuenta lo anterior, las fallas del primer coeficiente de curvatura sobre la rama de Hopf H_1 brindan un punto de partida para el estudio de fenómenos de carácter global que no se desprenden de la bifurcación de Hopf doble. La Fig. 4.18 muestra el comportamiento global de las curvas de sillan-nodos de ciclos límites asociadas a las bifurcaciones de Bautin GH_1 y GH_2 para $\eta_3 = -0.220$.

La curva de sillan-nodos de órbitas periódicas CF_1^a que nace en la bifurcación de Hopf generalizada GH_1 , forma con la curva CF_2^a el punto cuspidal C_1 (Fig. 4.17a). A su vez, CF_2^a se conecta con la curva CF_3 mediante la bifurcación *cuspidal* C_3 . Además, la curva CF_3 forma el punto cuspidal C_4 con CF_4 , como se indica en la Fig. 4.18. Luego, CF_4 y CF_2^b se conectan por medio de C_5 y por último, se llega a la degeneración GH_2 a través de la cúspide C_2 que une las curvas CF_2^b y CF_1^b , como se indica en la Fig. 4.17b.

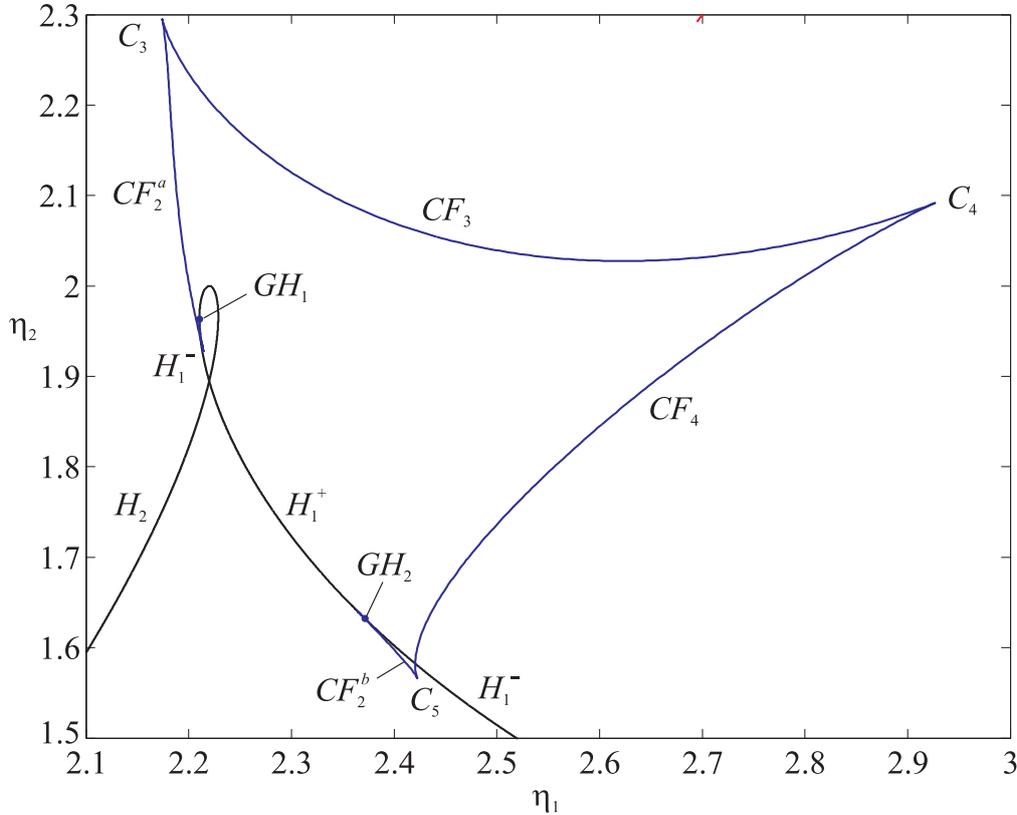


Figura 4.18: Conexión global de las curvas de bifurcaciones de sillas-nodos de ciclos límites para $\eta_3 = -0.220$.

Esta particular estructura de curvas de sillas-nodos de ciclos límites, más precisamente CF_2 ($CF_2^a \cup CF_2^b$) junto con una curva cerrada de bifurcaciones de doble período que se describe a continuación juegan un rol importante en la dinámica del sistema, ya que para valores mayores de η_3 , dan lugar a dos bifurcaciones *fold-flips*.

4.3.2. Bifurcaciones globales asociadas a TR_1 y TR_2

En la Fig. 4.19 se muestra el escenario de bifurcaciones global generado por las curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker TR_1 y TR_2 . Además, en la Tabla 4.1 figuran los colores y los símbolos asociados a cada bifurcación en particular. Nótese que ambas curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker culminan en puntos de resonancias fuertes 1:2, de los cuales se desprenden curvas de bifurcaciones de doble período.

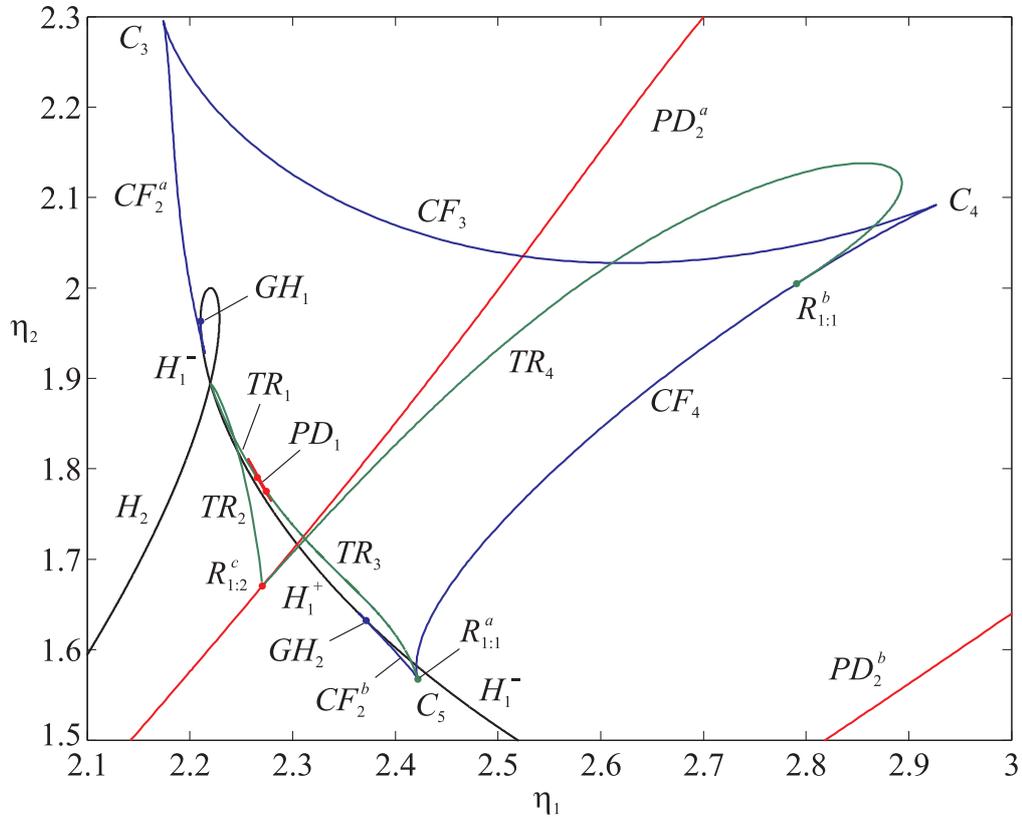


Figura 4.19: Diagrama de bifurcaciones globales para $\eta_3 = -0.220$.

La curva de bifurcaciones Neimark-Sacker TR_1 , originada en la bifurcación de Hopf doble, culmina en un punto resonante $R_{1:2}^a$ para $(\eta_1, \eta_2) = (2.26559, 1.79021)$, del cual se genera la curva cerrada de doble período mencionada anteriormente, PD_1 en la Fig. 4.20. Existe una segunda resonancia 1:2 sobre la curva PD_1 , $R_{1:2}^b$ para $(\eta_1, \eta_2) = (2.27452, 1.77531)$. Además, de este punto se origina la curva de Neimark-Sacker TR_3 , la cual finaliza en la resonancia $R_{1:1}^a$ sobre la curva CF_4 (justo antes del punto cuspidal C_5) como se aprecia en la Fig. 4.19. Esta última singularidad se halla en $(\eta_1, \eta_2) = (2.42222, 1.56755)$. Cabe aclarar que las resonancias fuertes de Neimark-Sacker serán abordadas con profundidad más adelante cuando se estudie la bifurcación de Hopf doble resonante 2:3, utilizando una versión levemente modificada del circuito oscilador.

Si se continúa la segunda curva de Neimark-Sacker (TR_2) desde la bifurcación de Hopf doble HH se ve que ésta culmina también en una resonancia 1:2, $R_{1:2}^c$ sobre la

Bifurcación	Símbolo	Color
Hopf	H	Negro
Bautin	GH	Punto azul
Silla-nodo de órbitas	CF	Azul
Neimark-Sacker	TR	Verde
Doble período	PD	Rojo
<i>Cusp</i>	C	-
Resonancia 1:1	$R_{1:1}$	Punto verde
Resonancia 1:2	$R_{1:2}$	Punto rojo
<i>Fold-flip</i>	FF	Punto negro

Tabla 4.1: Símbolos y colores utilizados en los diagramas de bifurcaciones.

curva de doble período PD_2^a , como se muestra en la Figs. 4.19 y 4.20. La curva de doble período PD_2^a forma también una curva cerrada en conjunto con PD_2^b , aunque la misma no se muestra en su totalidad. A su vez, la resonancia $R_{1:2}^c$ genera una curva de bifurcaciones de Neimark-Sacker (del ciclo de período dos) la cual se conecta de manera global con una resonancia 1:1, $R_{1:1}^b$ ubicada sobre la curva de sillanodos de ciclos CF_4 (ver Fig. 4.19).

4.4. Bifurcaciones *fold-flips* para $\eta_3 = -0.140$

Como se adelantara en la sección anterior, la isla de doble período PD_1 y la curva de sillanodos de soluciones periódicas CF_2 poseen un rol importante en la dinámica del sistema, ya que la interacción entre ellas genera dos bifurcaciones *fold-flips* (ver Sec. 3.2.4). Este tipo de estructura dinámica es interesante, no sólo porque allí se originan comportamientos oscilatorios complejos, sino porque la existencia de dos puntos *fold-flips* sobre una misma curva da lugar al nacimiento de otras bifurcaciones que pueden afectar el comportamientos oscilatorio en regiones alejadas del espacio de parámetros.

Por otro lado, la curva cerrada de bifurcaciones de doble período para $\eta_3 = -0.220$ no interacciona con la curva CF_2 ya que ésta se encuentra interrumpida por los puntos cuspidales C_1 y C_2 . Entonces, para este valor de η_3 no se tienen singularidades *fold-flips*, como se aprecia en el diagrama de bifurcaciones de la Fig. 4.20. Por lo tanto, el análisis de la dinámica asociada a las bifurcaciones *fold-flips* se realizará para $\eta_3 = -0.140$

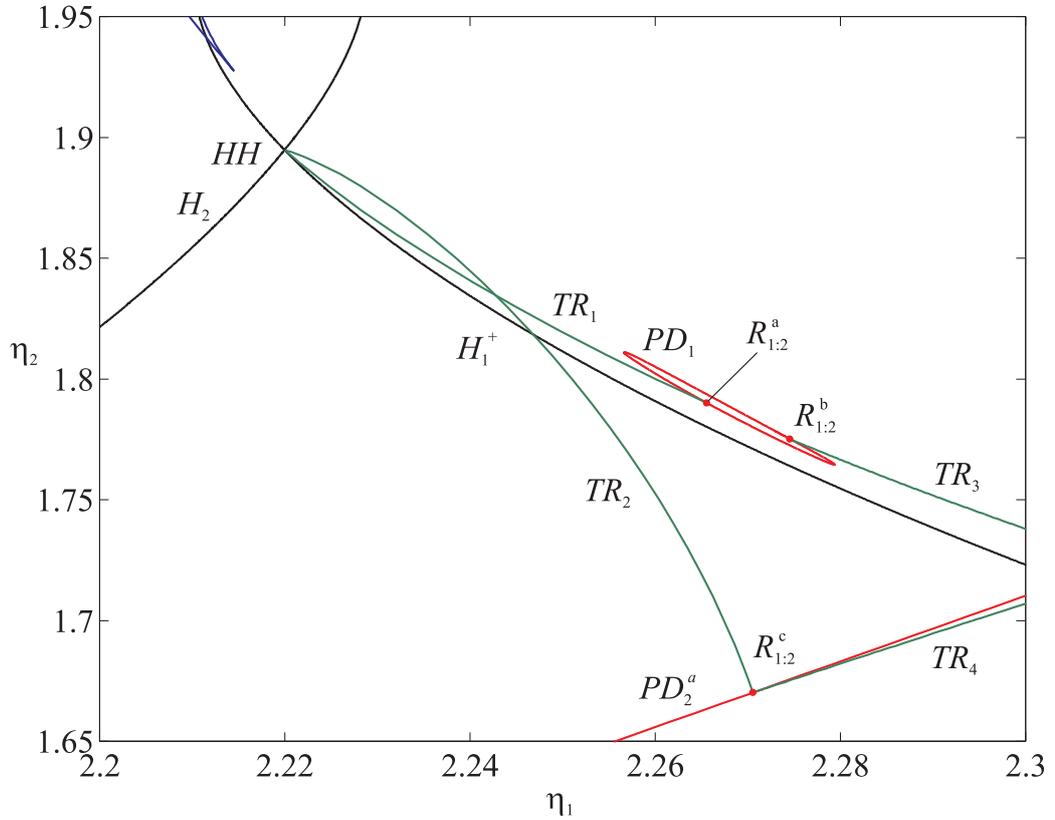


Figura 4.20: Vista expandida del diagrama de bifurcaciones globales para $\eta_3 = -0.220$.

(donde la bifurcación de Hopf doble corresponde al Caso III de los despliegues simples). Dado que los puntos *fold-flips* se encuentran en una región muy diminuta del espacio de parámetros, resulta prácticamente imposible distinguirlos visualmente en una figura que contenga las continuaciones realizadas variando dos parámetros. Por lo tanto, se optará por representar en forma esquemática las curvas de bifurcación, como se muestra en la Fig. 4.21. Para confirmar y describir los diferentes comportamientos se realizaron continuaciones variando η_1 con η_2 fijo (líneas de trazos horizontales en la Fig. 4.21) en cercanías de ambas singularidades *fold-flips*, denominadas FF_1 y FF_2 .

4.4.1. Fold-flip FF_1

La primera singularidad FF_1 ocurre para $(\eta_1, \eta_2) = (2.173411, 1.748704)$. La dinámica en un entorno de FF_1 puede asociarse al despliegue de la forma normal truncada

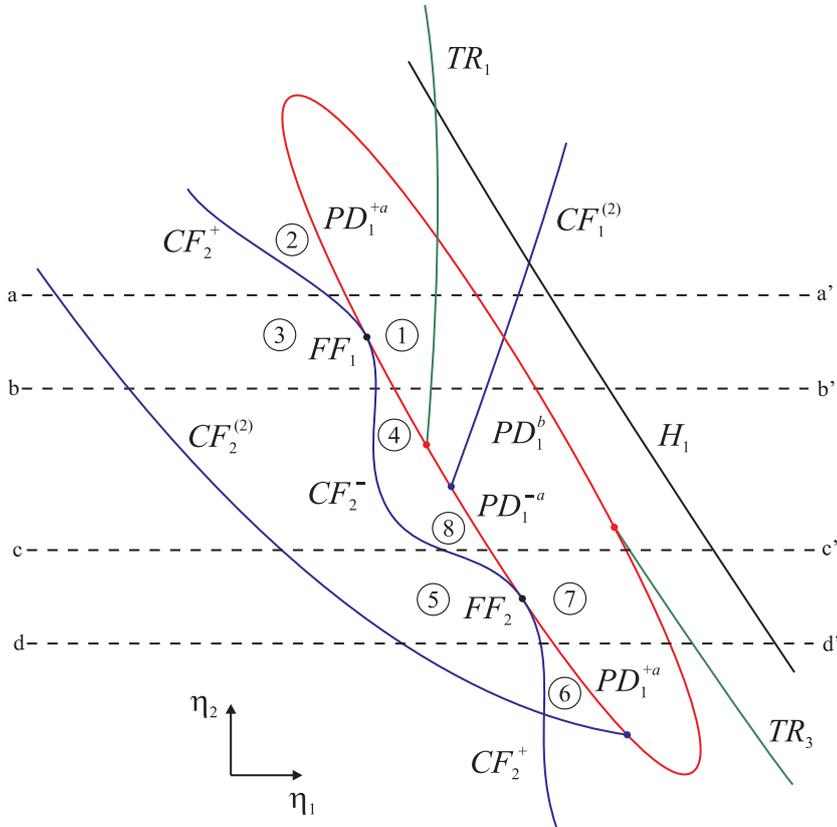


Figura 4.21: Diagrama esquemático de bifurcaciones en el plano de parámetros $\eta_1 - \eta_2$ ($\eta_3 = -0.140$).

obtenido con $a_0 < 0$ y $b_0 < 0$, representado en la Fig. 3.13a, que por comodidad se repite en la Fig. 4.22. Para verificar este hecho se efectuaron continuaciones numéricas con η_2 fijo en $\eta_2 = 1.755$ y $\eta_2 = 1.747$, es decir cortes horizontales sobre y debajo del punto FF_1 en la Fig. 4.21.

El diagrama correspondiente a $\eta_2 = 1.755$ (corte a-a' en la Fig. 4.21) se muestra en la Fig. 4.23. En todos los casos las líneas de trazo lleno indican ciclos límites estables y las de trazo discontinuo ciclos inestables; los círculos llenos indican ciclos de doble período estables y los vacíos ciclos de doble período inestables². El superíndice (2) se utilizará para distinguir fenómenos que sufren los ciclos de período dos. Las bifurcaciones

²Nótese que a diferencia de las figuras anteriores en este caso el ciclo límite proveniente de la bifurcación de Hopf H_1 se representa mediante líneas y no con círculos, los cuales se reservan para los ciclos de período 2.

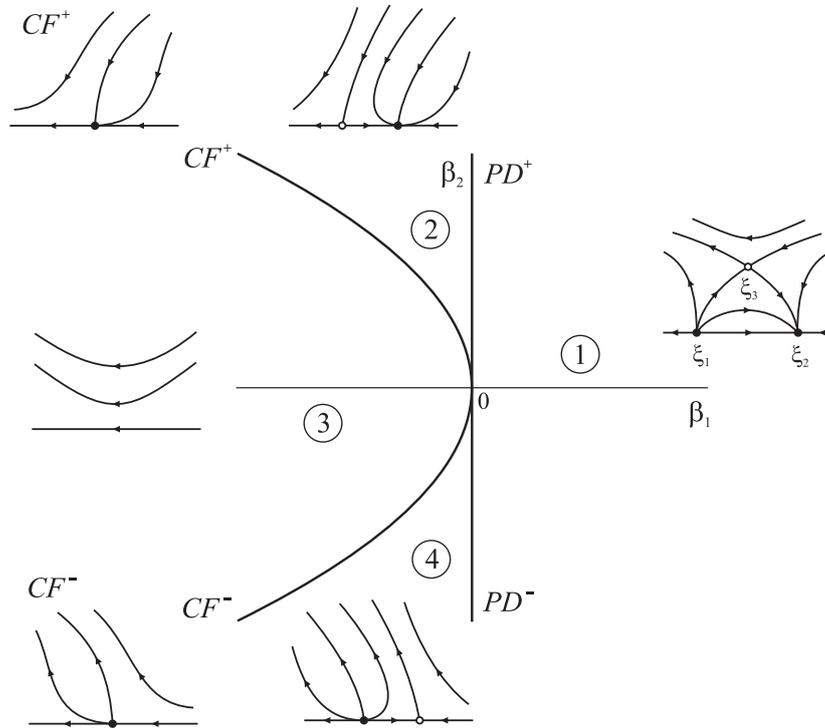


Figura 4.22: Despliegue de la forma normal asociado a FF_1 .

que están directamente relacionadas con la forma normal del *fold-flip* son las indicadas como $PD_1^{\pm a}$ y CF_2^{\pm} , que se asocian a PD^{\pm} y CF^{\pm} , respectivamente, de la Fig. 4.22. Sin embargo, debido a la complejidad de toda la estructura existen bifurcaciones adicionales (PD_1^b , TR_1 , $CF_1^{(2)}$, $CF_2^{(2)}$ y $CF_3^{(2)}$ en la Fig. 4.23) que hacen posible la coexistencia de ambos *fold-flips*.

La descripción del diagrama puede iniciarse a partir del punto de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, indicado como CF_2^+ . En este punto se originan dos ciclos límites hacia la derecha, uno de tipo silla que evoluciona hacia arriba, y uno de tipo nodo estable que lo hace hacia abajo (región 2 de la Fig. 4.22). También puede considerarse que en CF_2^+ colapsan ambos ciclos y por lo tanto no existen a la izquierda de este punto (región 3). Para valores crecientes del parámetro η_1 , el primer fenómeno que se detecta es que el ciclo silla experimenta una bifurcación de doble período PD_1^{+a} (PD^+ en la forma normal) pasando a ser de tipo nodo inestable y creándose un ciclo de doble

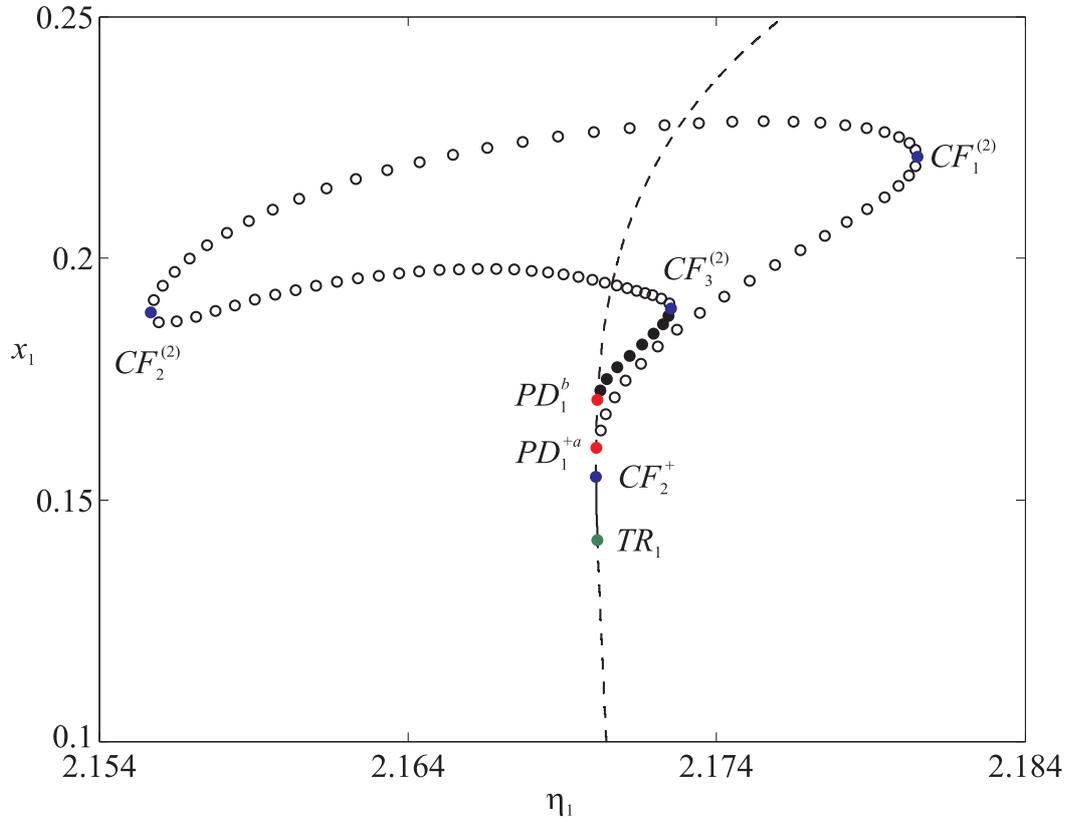


Figura 4.23: Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.755$.

período también inestable. Si se considera que en esta región se tiene además el ciclo nodo estable creado en CF_2^+ , se alcanza la situación indicada en la región 1 de la forma normal. Estos puntos de bifurcación son los asociados directamente a la forma normal, pero existen otros que completan el escenario dinámico general.

El ciclo nodo inestable superior experimenta una segunda bifurcación de doble período PD_1^b . Los ciclos de período 2 que nacen en PD_1^a y PD_1^b (indicados con círculos en la Fig. 4.23) están conectados mediante los puntos $CF_1^{(2)}$, $CF_2^{(2)}$ y $CF_3^{(2)}$ que corresponden a bifurcaciones sillanodos de órbitas de período 2. Finalmente el ciclo estable que nació hacia abajo en CF_2^+ , pierde la estabilidad en una bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 , y se crea una solución cuasiperiódica o toro 2D (su evolución no se muestra en la Fig. 4.23). Para valores crecientes de η_1 el ciclo se desvanece en la bifurcación de Hopf H_1 (no se indica en la Fig. 4.23).

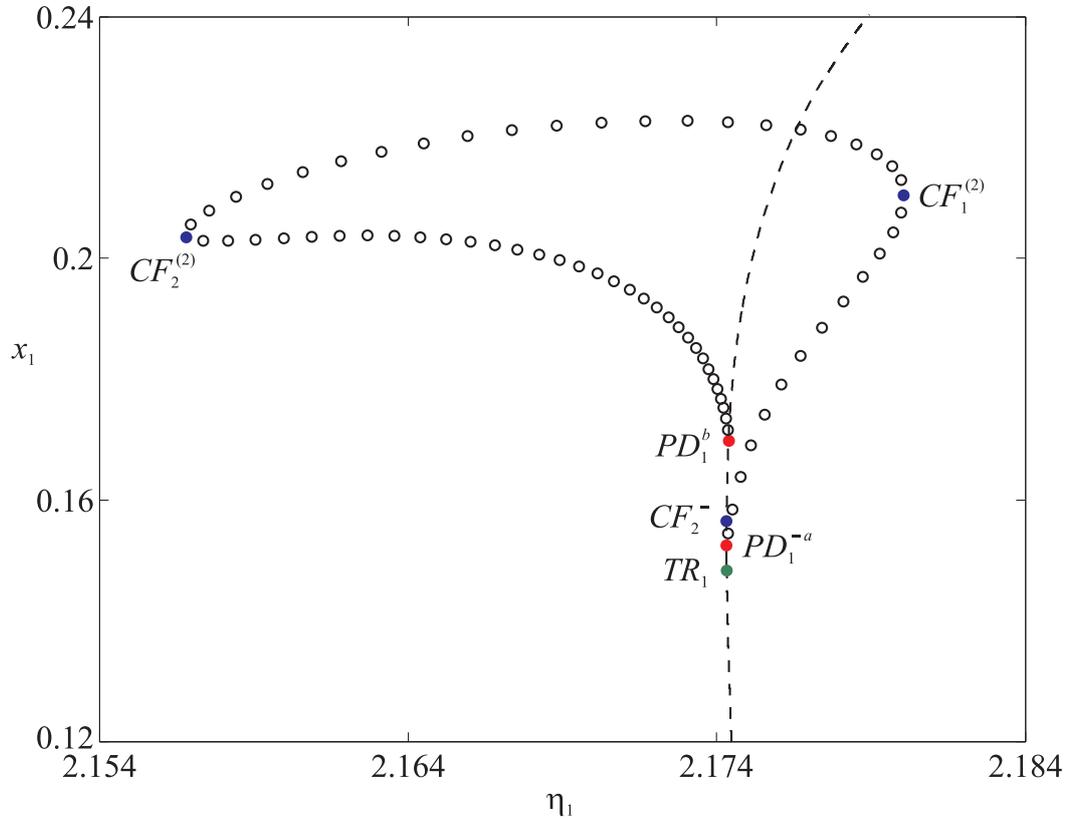


Figura 4.24: Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.747$.

Para completar la clasificación se analiza el corte con $\eta_2 = 1.747$ (línea horizontal b-b' en la Fig. 4.21), presentado en la Fig. 4.24. En este caso las bifurcaciones PD_1^{-a} y CF_2^- se asocian a PD^- y CF^- , respectivamente en la Fig. 4.22. Comenzando por el fold CF_2^- , hacia la derecha se crean dos ciclos (o colapsan y no existen hacia la izquierda, región 3). En este caso ambos ciclos son inestables, uno de tipo nodo hacia arriba y uno silla hacia abajo (región 4 de la forma normal). Este último experimenta una bifurcación de doble período PD_1^{-a} para valores crecientes de η_1 , estabilizándose y originando un ciclo de período 2 hacia la derecha (región 1). Así se completan las cuatro regiones predichas por el despliegue de la forma normal. El diagrama se completa con la evolución del ciclo inferior hacia una bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 y luego se destruye en la bifurcación de Hopf H_1 (no mostrada en la Fig. 4.24).

El ciclo superior, experimenta una bifurcación de doble período en PD_1^b . Como en

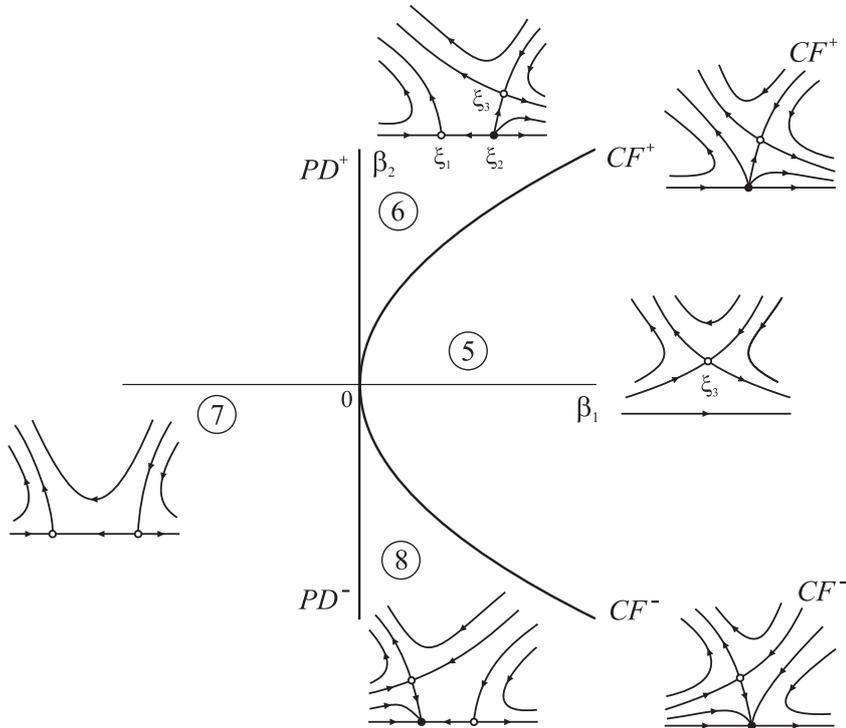


Figura 4.25: Despliegue de la forma normal asociado a FF_2 .

el caso anterior los ciclos que nacen en PD_1^{-a} y PD_1^b están conectados y evidencian dos bifurcaciones fold adicionales $CF_1^{(2)}$ y $CF_2^{(2)}$.

4.4.2. Fold-flip FF_2

El *fold-flip* FF_2 se encuentra ubicado en $(\eta_1, \eta_2) = (2.184536, 1.728625)$ y el diagrama asociado de la forma normal truncada es el correspondiente a $a_0 > 0$ y $b_0 < 0$, representado en la Fig. 3.13b, el cual por comodidad se repite en la Fig. 4.25. El reconocimiento del diagrama no es tan directo como en el caso anterior y requiere un análisis de los multiplicadores de Floquet asociados a las soluciones periódicas, ya que existe una variedad siempre inestable que no interviene en la bifurcación. Para el estudio se realizaron cortes para $\eta_2 = 1.730$ y $\eta_2 = 1.728$ constantes.

El corte efectuado con $\eta_2 = 1.730$ (línea c-c' en la Fig. 4.21) se muestra en la Fig. 4.26.

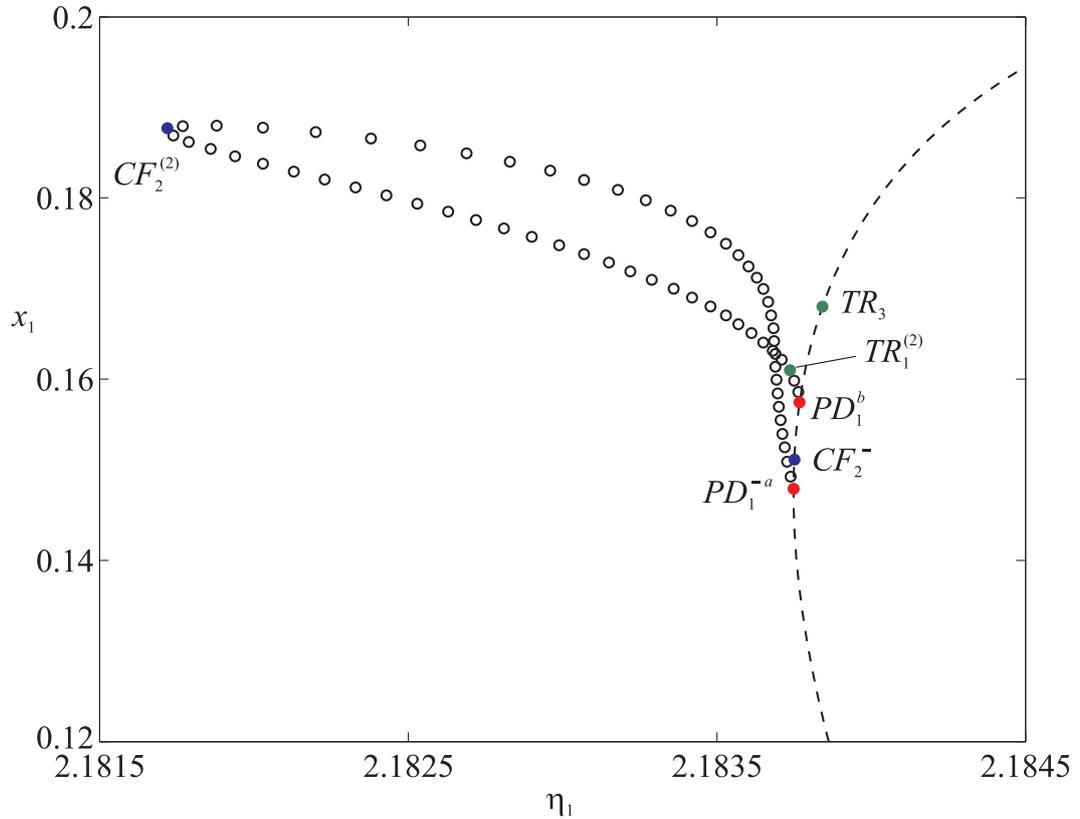


Figura 4.26: Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.730$.

Partiendo de la bifurcación silla nodo de ciclos CF_2^- , se observa que para valores crecientes (decrecientes) de η_1 , se originan (colapsan) dos ciclos inestables. Los multiplicadores de Floquet de ambos ciclos, para una condición muy cercana a la bifurcación, se incluyen en la Tabla 4.2. La columna indicada con $\overline{CF_2^-}$ corresponde a los multiplicadores del ciclo superior y la indicada con $\underline{CF_2^-}$ al inferior. Se observa que el multiplicador m_1 está siempre en 1, pues es una condición necesaria por tratarse de una órbita periódica, y m_4 está siempre fuera del círculo unitario. El multiplicador m_4 está asociado a una variedad inestable que no participa en el escenario del *fold-flip* y por lo tanto puede no tenerse en cuenta en el análisis de la forma normal. De esta manera, los multiplicadores necesarios para determinar el despliegue asociado son m_2 y m_3 . Nótese que la diferencia de multiplicadores entre las columnas $\overline{CF_2^-}$ y $\underline{CF_2^-}$, es el cruce por 1 de m_3 , es decir la bifurcación *cyclic fold*. Restringiendo el análisis a los multiplicadores m_2 y m_3 , el ciclo

	$\overline{CF_2^-}$	$\underline{CF_2^-}$	$\overline{PD_1^{-a}}$	$\underline{PD_1^{-a}}$
m_1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
m_2	-0.994599	-0.994626	-0.999996	-1.000001
m_3	1.000001	0.999999	0.999883	0.999988
m_4	-1.110714	-1.110728	-1.112253	-1.112254

Tabla 4.2: Multiplicadores de Floquet para $\eta_2 = 1.730$.

superior $\overline{CF_2^-}$ corresponde a un ciclo silla y el inferior $\underline{CF_2^-}$ a un nodo estable. Esta situación se asocia con la región 8 de la forma normal de la Fig. 4.25. Además se tiene un ciclo de doble período producto de la bifurcación $\underline{PD_1^{-a}}$ que experimenta el ciclo inferior. Los multiplicadores del ciclo antes de la bifurcación (arriba de $\underline{PD_1^{-a}}$) se incluyen en la columna $\overline{PD_1^{-a}}$. Al sufrir esta bifurcación el ciclo pierde la estabilidad (véanse los multiplicadores m_2 y m_3 en la columna $\underline{PD_1^{-a}}$) y se alcanza la situación de la región 7. Se observa que en este caso el multiplicador m_2 cruza el círculo unitario por -1. Por lo tanto $\underline{PD_1^{-a}}$ y $\underline{CF_2^-}$ se identifican con PD^- y CF^- de la Fig. 4.25. Finalmente, el ciclo inferior se desvanece en una bifurcación de Hopf para valores de η_1 crecientes (no se indica en la Fig. 4.26). El ciclo de la rama superior a $\overline{CF_2^-}$, experimenta una bifurcación de doble período $\overline{PD_1^b}$ y luego una Neimark-Sacker TR_3 para valores crecientes del parámetro. Como en el caso anterior, el ciclo de doble período que nace en $\overline{PD_1^{-a}}$ se conecta con el que nace en $\overline{PD_1^b}$, existiendo sobre esta curva una única bifurcación silla-nodo de ciclos de período 2 denominada $\overline{CF_2^{(2)}}$.

Para $\eta_2 = 1.728$ (corte d-d' en la Fig. 4.21) se tiene la situación de la Fig. 4.27. Comenzando por la bifurcación *cyclic fold* $\overline{CF_2^+}$ y restringiendo el análisis de la estabilidad de los ciclos a los multiplicadores m_2 y m_3 de la Tabla 4.3, se observa que para valores crecientes de η_1 nacen dos ciclos inestables, uno silla hacia abajo y uno nodo hacia arriba de $\overline{CF_2^+}$. Esta situación se identifica con la región 6 de la Fig. 4.25. El ciclo de doble período correspondiente a dicha región se origina en la bifurcación $\overline{PD_1^{+a}}$ experimentada por el ciclo superior de tipo nodo. Para valores superiores de η_1 el ciclo se convierte de nodo inestable (columna $\underline{PD_1^{+a}}$) a silla (columna $\overline{PD_1^{+a}}$), resultando la situación de la región 5. Este ciclo luego experimenta una segunda bifurcación de doble período indicada como $\overline{PD_1^b}$ y finalmente una Neimark-Sacker TR_3 , que no intervienen

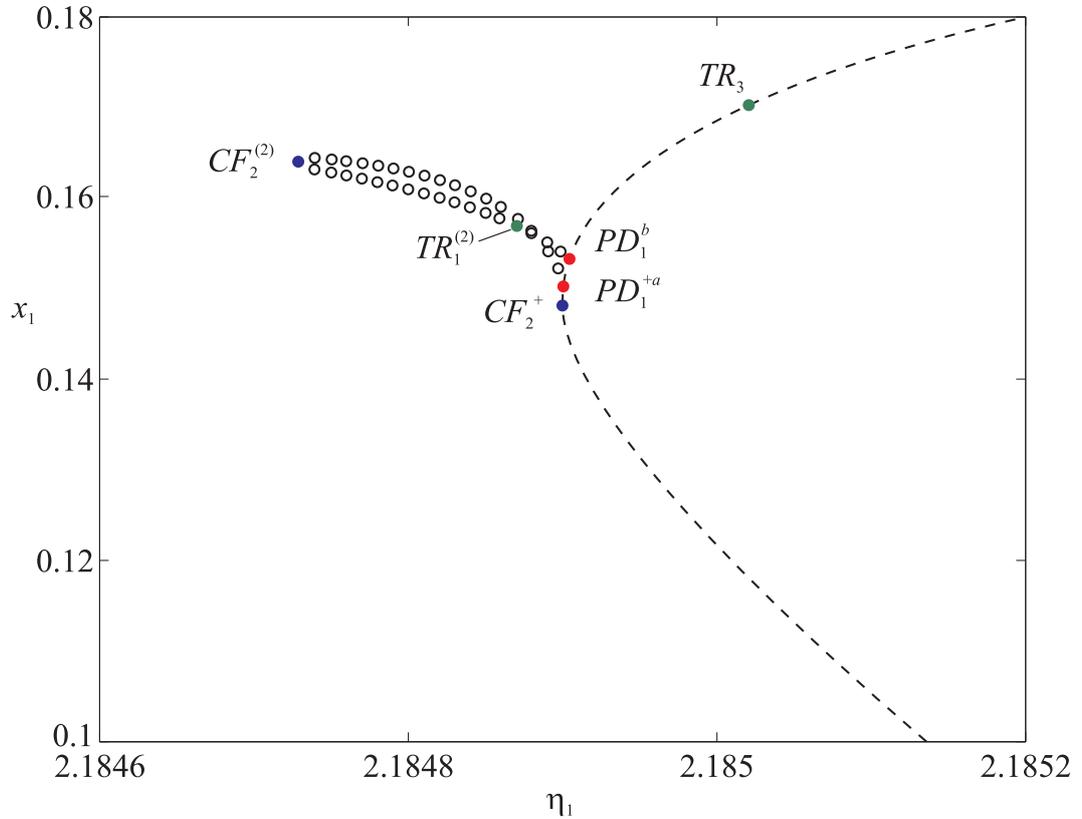


Figura 4.27: Continuaciones variando el parámetro η_1 para $\eta_2 = 1.728$.

en la forma normal del *fold-flip*. El ciclo inferior colapsa en una bifurcación de Hopf para valores crecientes del parámetro. Nuevamente PD_1^{+a} y PD_1^b están conectadas.

4.4.3. Coexistencia de FF_1 y FF_2

De acuerdo al análisis anterior, el escenario dinámico restringido a la variedad centro en un entorno de la singularidad *fold-flip* FF_1 está dado por el despliegue de la forma normal de la Fig. 4.22, en tanto que el de FF_2 corresponde al diagrama de la Fig. 4.25 rotado 180° . Para que coexistan ambos fenómenos tal como se representa esquemáticamente en la Fig. 4.21, es necesaria la presencia de las curvas de bifurcaciones silla-nodo de doble período $CF_1^{(2)}$ y $CF_2^{(2)}$ y de la curva de bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 .

La singularidad $CF_2^{(2)}$, que no está presente en la forma normal y no produce ningún efecto dinámico sobre la variedad centro donde se desarrolla el *fold-flip*, tiene efectos

	$\overline{CF_2^+}$	$\underline{CF_2^+}$	$\overline{PD_1^{+a}}$	$\underline{PD_1^{+a}}$
m_1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
m_2	-1.002262	-1.002278	-1.000002	-0.999998
m_3	1.000001	0.999999	1.000105	1.000105
m_4	-1.116728	-1.116747	-1.112859	-1.112851

Tabla 4.3: Multiplicadores de Floquet para $\eta_2 = 1.728$.

globales generando o destruyendo ciclos de doble período que permiten que globalmente las regiones 3-5 y 4-8 tengan los mismos comportamientos. Asimismo $CF_1^{(2)}$ y TR_1 , hacen que globalmente la dinámica de la región 1 se transforme en la 7.

El punto donde la curva TR_1 alcanza a la curva PD_1^{-a} determina una resonancia 1:2, y es de esperar que en un entorno de este punto aparezcan fenómenos globales adicionales. En tanto que los puntos donde las curvas $CF_1^{(2)}$ y $CF_2^{(2)}$ alcanzan a la curva $PD_1^{\pm a}$ determinan un desvanecimiento en el coeficiente de curvatura de la bifurcación de doble período (bifurcación flip generalizada) con el consiguiente cambio en la curvatura de la rama de ciclos de doble período (Peckham & Kevrekidis, 1991). Por esta razón los ciclos de doble período nacen hacia la derecha de $PD_1^{\pm a}$ en FF_1 y hacia la izquierda en FF_2 .

Las bifurcaciones de Neimark-Sacker TR_3 y $TR_1^{(2)}$ (esta última sobre el ciclo de período 2) vistas en los cortes c-c' y d-d', están asociadas al despliegue de la resonancia 1:2 ubicada donde comienza TR_3 .

Algunas continuaciones realizadas para valores de η_3 decrecientes indican que los puntos FF_1 y FF_2 se acercan el uno al otro, colapsando en lo que sería una bifurcación *fold-flip* degenerada. Es de esperar que el despliegue de esta singularidad contenga además de las curvas de *fold* y *flip*, curvas de silla nodo de órbitas de período 2 y curvas de Neimark-Sacker y, claramente por el despliegue realizado en la Fig. 4.21, constituye un centro organizador de la dinámica del circuito oscilador.

4.5. Evolución de la isla de doble período

En las secciones anteriores se vio que la isla de bifurcaciones de doble período PD_1 juega un papel importante en la dinámica. En la Sec. 4.3.2 ($\eta_3 = -0.220$), se encuentra asociada a la dinámica de las curvas de Neimark-Sacker que emanan de la bifurcación de Hopf doble, por medio de una resonancia fuerte 1:2 (TR_1 y $R_{1,2}^a$ en la Fig. 4.20, respectivamente). A su vez, sobre el otro extremo de la isla se encuentra otra resonancia 1:2 que genera otra curva de bifurcaciones de Neimark-Sacker ($R_{1,2}^b$ y TR_3 en la Fig. 4.20, respectivamente). Luego, en la Sec. 4.4 ($\eta_3 = -0.140$), se mostró que además existe una interacción con una curva de bifurcaciones sillas-nodos de soluciones periódicas, dando lugar a dos bifurcaciones *fold-flips*.

Por otro lado, en (LeBlanc, 2000) se ha mostrado que cuando la relación de frecuencias de los modos en una bifurcación de Hopf doble es 1: q con $q = 1, 2, 3, 4$, ante pequeñas perturbaciones de los parámetros las resonancias se trasladan a las curvas de Neimark-Sacker que se originan de dicha singularidad. Por lo tanto, surge como interrogante si las resonancia 1:2 asociadas a la isla de bifurcaciones de doble período tienen relación con la ocurrencia de una resonancia en la bifurcación de Hopf doble. En este sentido, utilizando el polinomio característico del sistema (4.1) es posible hallar una resonancia 2:3 en la bifurcación de Hopf doble para $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \cong (1.82714, 1.55957, 0.17286)$, con frecuencias $\omega_1 \cong 0.97098$ y $\omega_2 \cong 1.45647$ ($\omega_1/\omega_2 = 2/3$). Además, mediante sucesivas continuaciones variando η_1 y η_2 para valores de η_3 cada vez más cercanos al de la resonancia 2:3, se observó que la resonancia 1:2 ($R_{1,2}^a$) sobre la curva TR_1 , y por ende la isla PD_1 se aproximan a la singularidad de Hopf doble resonante.

A continuación se describirá la dinámica asociada a la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble, pero antes se introducirá una modificación al oscilador tendiente a simplificar su realización circuital.

4.6. Simplificación del circuito del oscilador

Efectos similares a los producidos por la fuente de corriente en el circuito de la Fig. 4.1 pueden lograrse si se varía la inductancia L_1 . Por lo tanto en lo que sigue se considerará una simplificación circuital del oscilador, donde se elimina la fuente de corriente controlada. El oscilador resultante se muestra en la Fig. 4.28 y el modelo

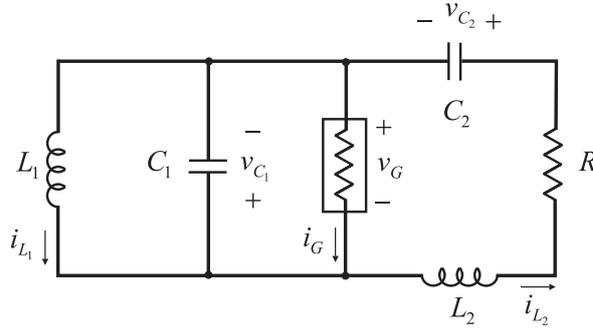


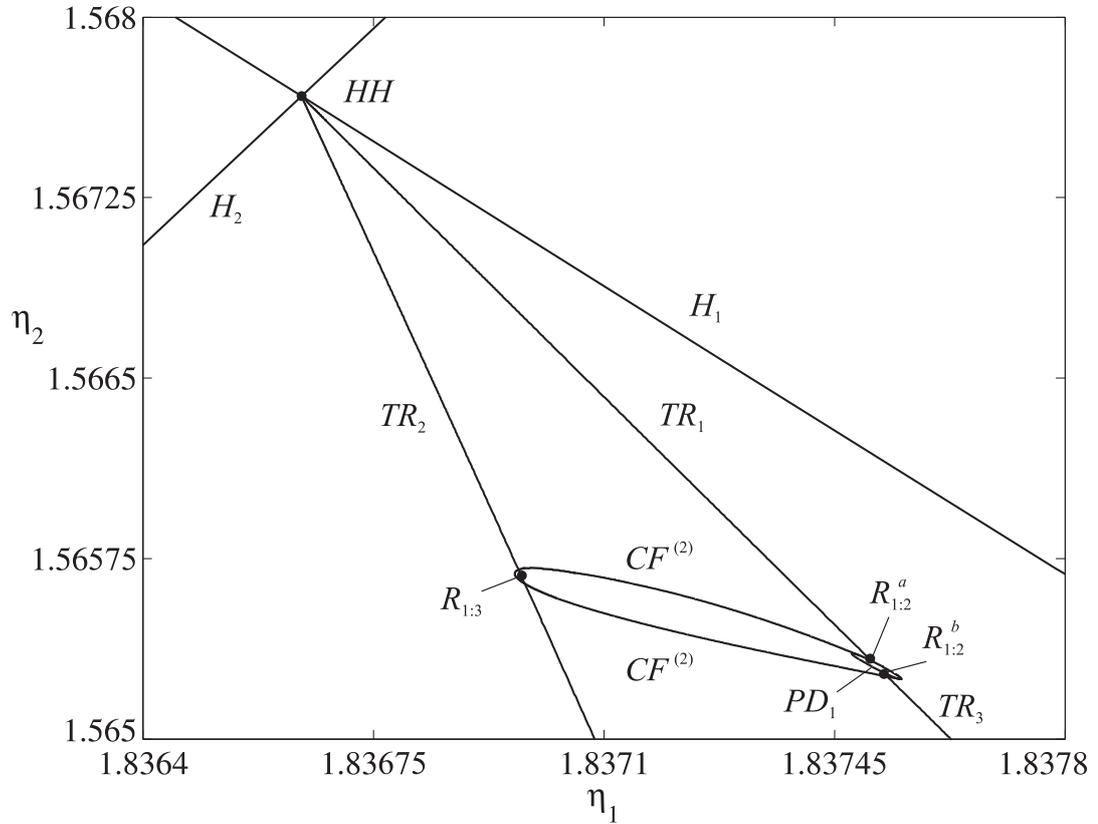
Figura 4.28: Circuito eléctrico del oscilador modificado.

dinámico es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1 \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_4 - \frac{3}{5}x_1^2 - x_1^3 \right), \\ \dot{x}_2 = -\eta_3 x_1, \\ \dot{x}_3 = (1 + \sqrt{2})x_4, \\ \dot{x}_4 = (2 - \sqrt{2})(x_1 - x_3 - \eta_2 x_4), \end{cases} \quad (4.8)$$

donde $x_1 = v_{C_1}$, $x_2 = i_{L_1}$, $x_3 = v_{C_2}$ y $x_4 = i_{L_2}$ son las variables de estado y η_1 , η_2 y η_3 los parámetros de bifurcación, que se relacionan con los componentes del circuito de la siguiente forma: $\eta_1 = 1/C_1$, $\eta_2 = R$, $\eta_3 = 1/L_1$. Los restantes componentes tienen los mismos valores que el circuito estudiado anteriormente (véase la Sec. 4.1).

Es importante destacar que el parámetro de bifurcación η_3 se utiliza para representar variaciones en el valor de la inductancia L_1 , ya que en esta realización se ha eliminado la fuente de corriente controlada. Como en el caso anterior, este circuito posee una bifurcación de Hopf doble en el plano de parámetros $(\eta_1; \eta_2)$, y es posible modificar el despliegue variando el valor de la inductancia L_1 (o sea η_3). En particular, se puede generar una resonancia 2:3 en la bifurcación de Hopf doble de manera tal que los modos (pares de autovalores) intervinientes cumplan con la relación $\omega_1/\omega_2 = 2/3$. Esta singularidad se tiene para $(\eta_1; \eta_2; \eta_3) = (1.82714; 1.55956; 0.77400)$, con frecuencias $\omega_1 = (1/3)2^{1/4}\sqrt{6} \cong 0.9709$ y $\omega_2 = (1/2)2^{1/4}\sqrt{6} \cong 1.4564$.

Figura 4.29: Diagrama de bifurcaciones para $\eta_3 = 0.77$.

4.7. Resonancia 2:3 en la bifurcación de Hopf doble

Para estudiar los fenómenos dinámicos generados por la resonancia 2:3 se fijó el parámetro $\eta_3 = 0.77$ (cercano a la singularidad) y se obtuvo el diagrama de bifurcaciones en el plano $(\eta_1; \eta_2)$, cuyos resultados se muestran en la Fig. 4.29. Este diagrama fue obtenido utilizando el paquete de continuación de soluciones MATCONT (Dhooge et al., 2006). Los coeficientes de la forma normal toman los siguientes valores

$$p_{11}p_{22} = 1, \quad \theta = 7.863306, \quad \delta = 0.329394, \quad (4.9)$$

$$\Theta = 4.629560 \cdot 10^2, \quad \Delta = 5.254193.$$

Por lo tanto, el escenario dinámico en un entorno de la bifurcación de Hopf doble corresponde al Caso I simple de la forma normal truncada (Fig. 4.5).

La característica destacada de este diagrama es la presencia de una estructura de

bifurcaciones que conecta las curvas de toros y corresponden a interacciones de oscilaciones. Esta estructura particular se desprende de la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble y, como se verá a continuación induce resonancias fuertes sobre las curvas de Neimark-Sacker, ubicadas en la parte inferior de la Fig. 4.29.

Por un lado se destaca la presencia de dos resonancias 1:2, indicadas como $R_{1:2}^a$ y $R_{1:2}^b$ sobre las curvas de toros TR_1 y TR_3 , respectivamente, conectadas por una curva cerrada o isla de bifurcaciones de doble período PD_1 . Por otro lado, la curva TR_2 experimenta una resonancia 1:3, indicada como $R_{1:3}$. Ambos fenómenos están relacionados por una curva de bifurcaciones de sillan-nodos de ciclos de período 2, $CF^{(2)3}$, que comienza y termina sobre la curva PD_1 . Esta pequeña isla de bifurcaciones de doble período es equivalente a la vista anteriormente cuando se estudió la bifurcación *fold-flip* en la realización del oscilador con fuente de corriente controlada (ver Sec. 4.4).

4.7.1. Dinámica asociada a las resonancias 1:2

La Fig. 4.30 muestra una vista ampliada de la isla de doble período generada por las resonancias 1:2. El despliegue del punto $R_{1:2}^a$ se detalla en el recuadro ubicado en la parte superior derecha de la Fig. 4.30, y corresponde al de la forma normal (3.26) para $s = -1$ mostrado en la Fig. 4.31a. Este despliegue es análogo al visto en la Sec. 3.2.2 (Fig. 3.11b), con la salvedad que existe una inversión en el sentido de avance del tiempo. En todos los casos, el equilibrio e_0 representa un ciclo límite (que en el caso del oscilador proviene de alguna de las ramas de Hopf), mientras que e_{12} y e_{22} indican un ciclo de período 2. A su vez, los ciclos límites corresponden a oscilaciones cuasiperiódicas (toros). Nótese que de este punto emergen las curvas TR_1 , PD_1 y $TR^{(2)}$. Las curvas de homóclinas P y de sillan-nodos de ciclos CF de la forma normal no se muestran en la Fig. 4.30. Luego, la curva de bifurcaciones de Neimark-Sacker del ciclo de período dos $TR^{(2)}$ culmina sobre la curva de sillan-nodos de ciclos de período dos $CF^{(2)}$ en una resonancia 1:1 (véase la Sec. 3.2.1), indicada como $R_{1:1}^{(2)}$.

La segunda resonancia 1:2, $R_{1:2}^b$ corresponde al despliegue de la forma normal (3.26) con $s = 1$ (y $t \rightarrow -t$), mostrado en la Fig. 4.31b. De este punto emerge una nueva curva de bifurcaciones de Neimark-Sacker TR_3 , además de la de doble período PD_1 . El punto

³Las curvas de bifurcaciones asociadas a los ciclos de período 2 serán indicadas con el superíndice (2).

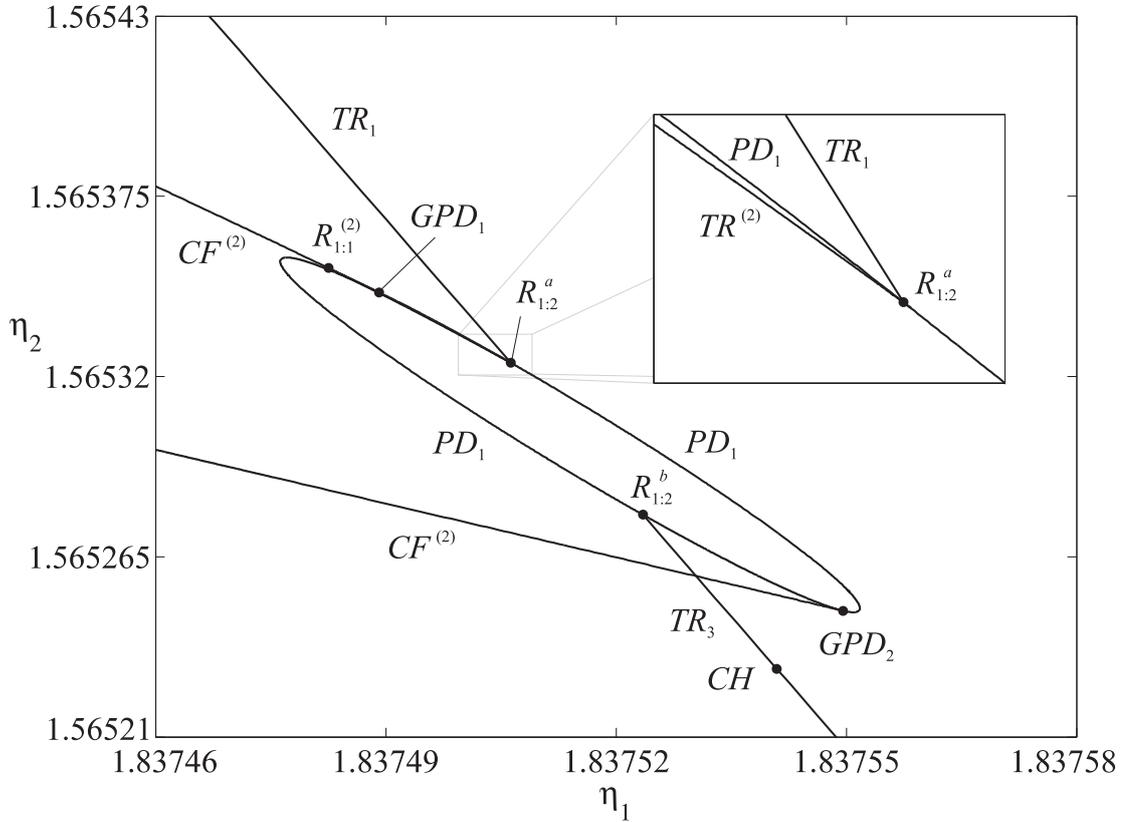


Figura 4.30: Dinámica generada por la resonancia 2:3. Resonancias 1:2

indicado como CH en la Fig. 4.30, indica la presencia de una bifurcación de Chenciner, en la cual se anula el primer coeficiente de curvatura de la bifurcación de Neimark-Sacker [véase (Kuznetsov, 2004)]. De forma similar a lo que sucede con la bifurcación de Bautin, de esta singularidad nace una curva de sillas-nodos de soluciones cuasiperiódicas (no mostrada en la Fig. 4.30). A su vez, sobre la curva PD_1 se hallan dos bifurcaciones generalizadas de doble período GPD_1 y GPD_2 , de los cuales nace la curva $CF^{(2)}$, que conecta las resonancias 1:2 y 1:3 (ver Fig. 4.29).

4.7.2. Dinámica asociada a la resonancia 1:3

El escenario asociado a la resonancia 1:3 ($R_{1:3}$) se muestra en la Fig. 4.32, donde el recuadro en la parte inferior derecha muestra una vista expandida del entorno de la resonancia. El despliegue de la forma normal de la singularidad corresponde al caso

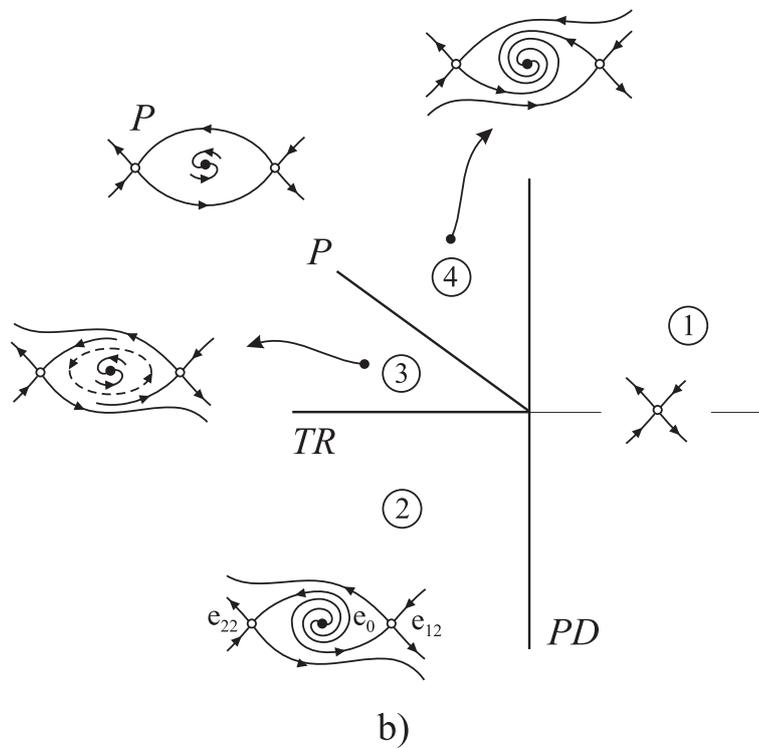
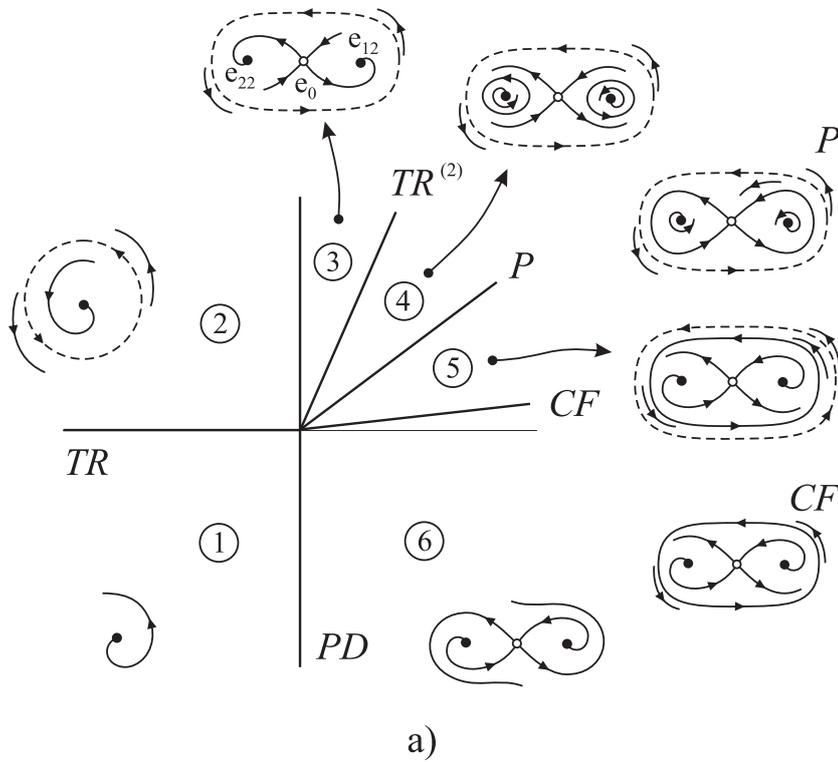


Figura 4.31: Despliegues de la forma normal de la resonancia 1:2. a) $s = -1$ ($R_{1:2}^a$). b) $s = 1$ ($R_{1:2}^b$).

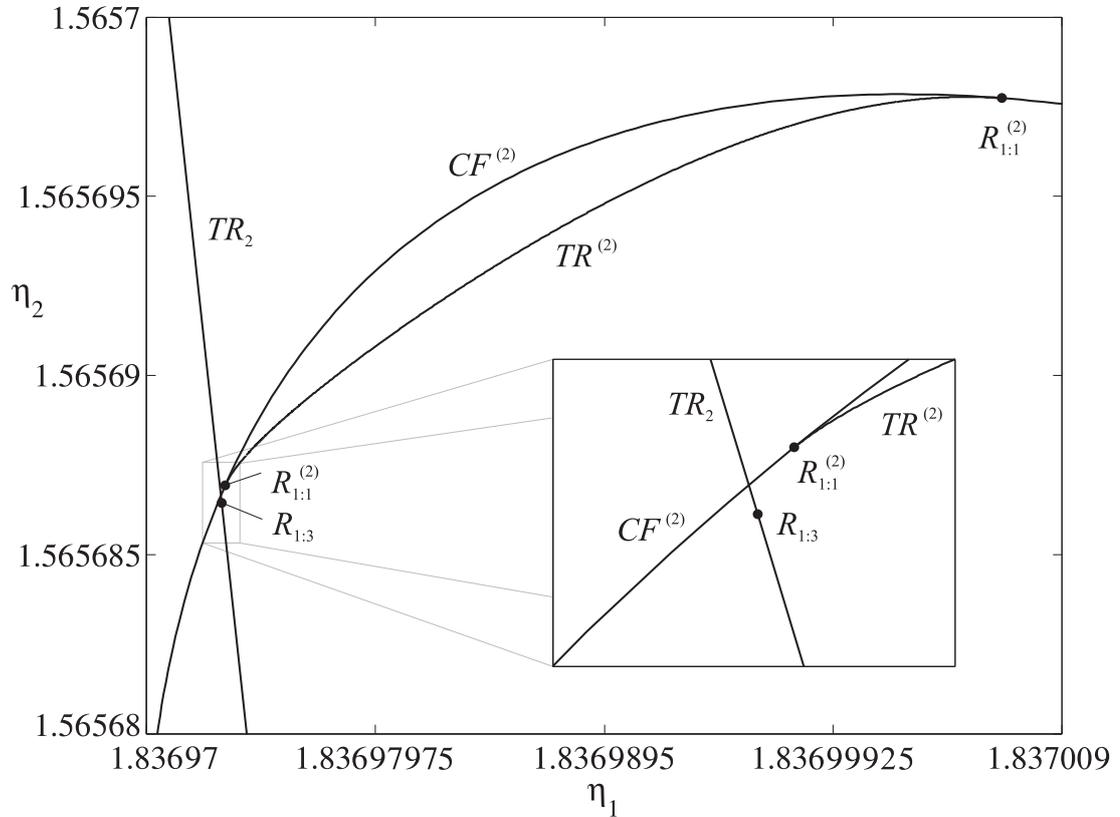


Figura 4.32: Dinámica generada por la resonancia 2:3. Resonancia 1:3

$a(0) > 0$ en (3.32) y se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.33. El mismo posee una interpretación similar a la vista en la Sec. 3.2.3 para el caso $a(0) < 0$. En este sentido, el equilibrio e_0 representa un ciclo límite, e_{13} , e_{23} y e_{33} uno de período 3 y los ciclos límites corresponden a oscilaciones cuasiperiódicas.

Además de la 1:3 existen dos resonancias 1:1 ($R_{1:1}^{(2)}$) sobre la curva $CF^{(2)}$ las cuales comparten una curva de Neimark-Sacker ($TR^{(2)}$). Todo indica que estos fenómenos son globales a los generados por la resonancia 2:3 y son incluidos por completitud.

4.7.3. Vinculación de las resonancias 1:2 y 1:3

El punto $R_{1:3}$ queda dentro de la región determinada por la curva $CF^{(2)}$. Esto es relevante ya que el ciclo de período 3 asociado a la resonancia 1:3 (ver Fig. 4.33) es generado por la curva $CF^{(2)}$. Esta observación ha sido corroborada mediante simulaciones de los

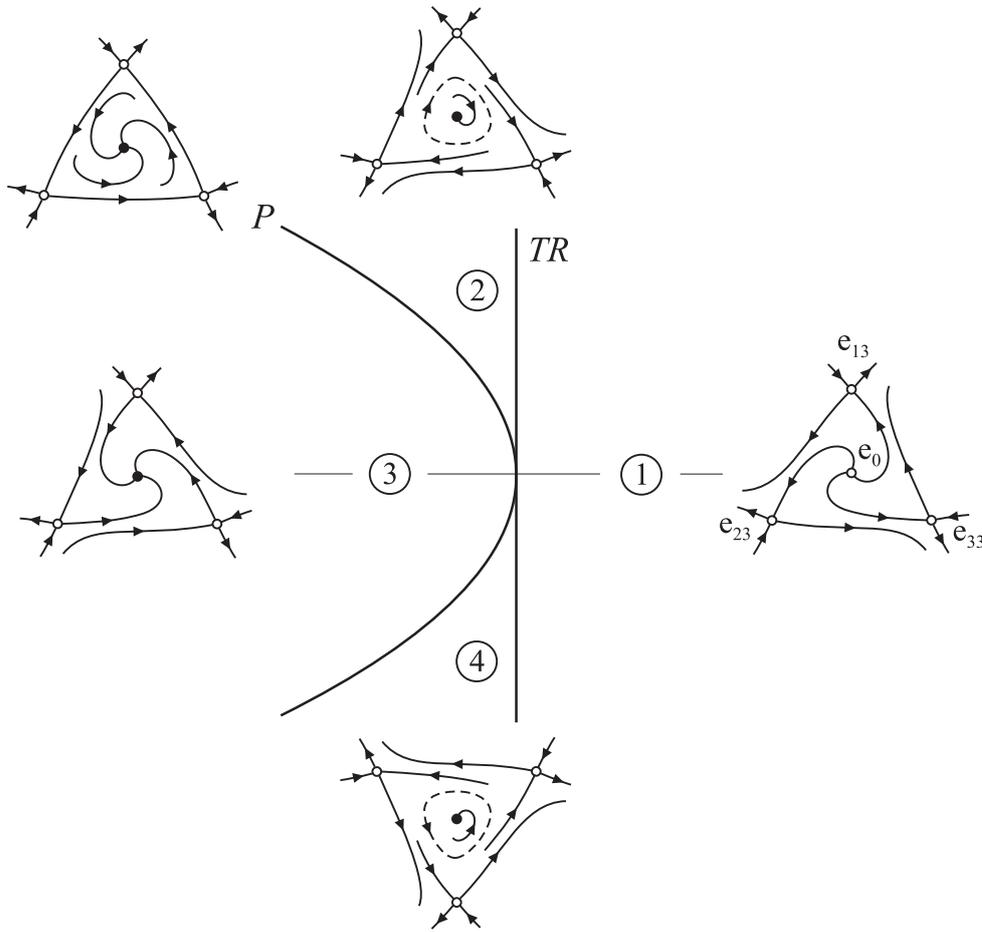


Figura 4.33: Despliegue de la forma normal de la resonancia 1:3 para $a(0) > 0$.

ciclos generados por $CF^{(2)}$ entre las resonancias 1:2 y 1:3. En los recuadros en el interior de la Fig. 4.34 se muestran los mencionados ciclos límites para los puntos (a), (b) y (c). En la simulación correspondiente al punto (a) se muestra la proyección en las variables (x_1, x_2) de un ciclo de período 2 cercano a la resonancia $R_{1:2}^a$. La transición entre este último y el ciclo de período 3 se pone en evidencia en la simulación correspondiente al punto (b), cercano a la mitad de la curva $CF^{(2)}$. Luego, este ciclo se transforma en uno de período 3 en cercanías de la resonancia 1:3, como se muestra en la simulación correspondiente al punto (c). Con lo cual, ambas resonancias se encuentran acopladas mediante la curva $CF^{(2)}$, que se origina en la isla PD_1 asociada a las resonancias 1:2, y a su vez genera el ciclo de período 3 necesario en la resonancia 1:3 sobre la rama de Neimark-Sacker TR_2 .

El despliegue de este caso resonante de la bifurcación de Hopf doble no ha sido determinado hasta el momento en la literatura especializada internacional. Los resultados presentados son consistentes con los observados en (Hilger & Luciani, 1998; Wagener, 2001; Broer et al., 2007a,b), para sistemas forzados. Sin embargo, en estas referencias se estudian los fenómenos de las resonancias 1:2 y 1:3 por separado, mientras que los resultados expuestos anteriormente muestran un mecanismo que permite la vinculación de ambos.

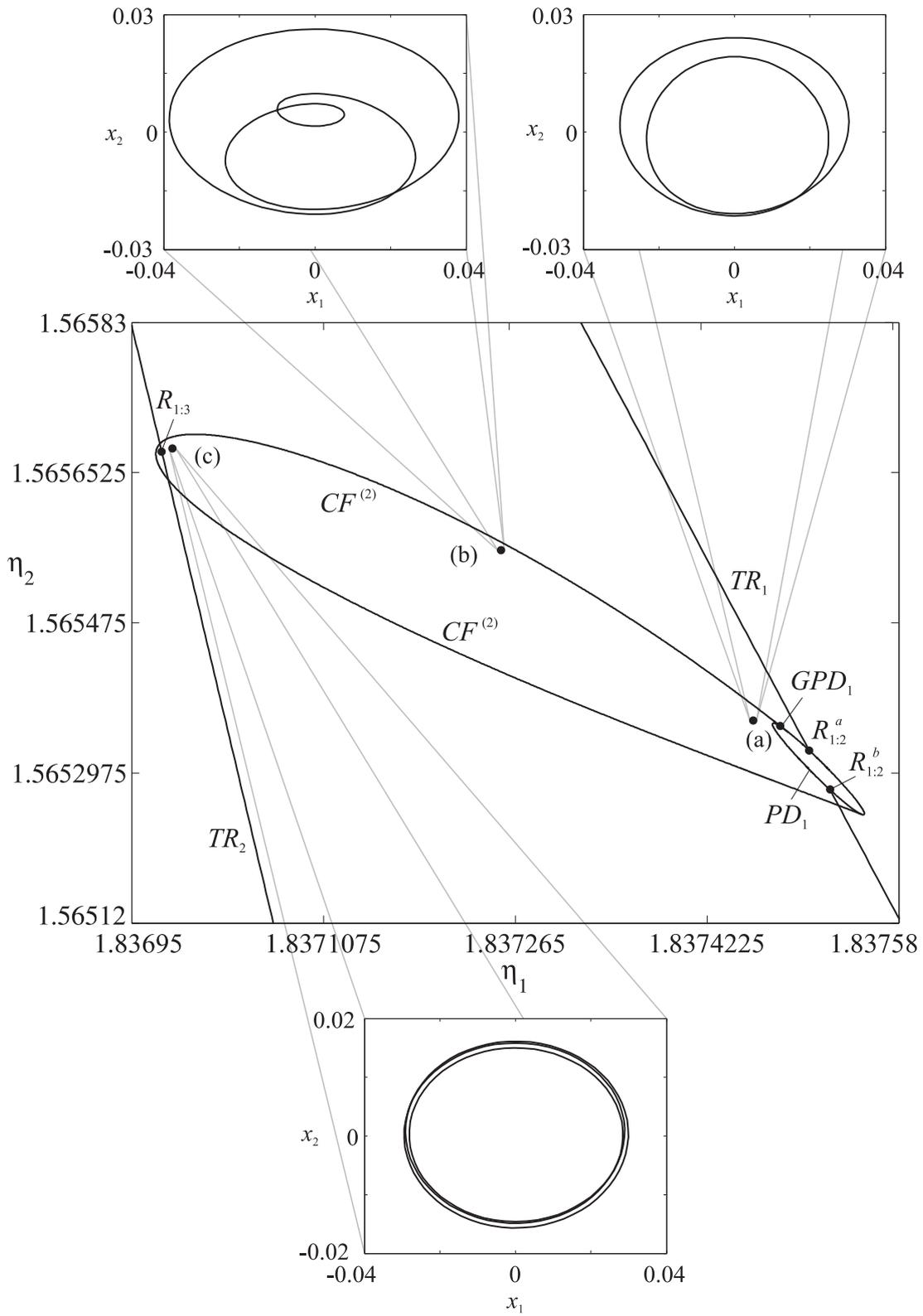


Figura 4.34: Transición entre un ciclo de período 2 y uno de período 3.

Capítulo 5

Dinámica de un sistema de potencia de tres barras

En este capítulo se abordará el estudio de diversos fenómenos hallados en la dinámica de un modelo de un sistema de potencia simplificado de tres barras o nodos. Dicho sistema ha sido ampliamente estudiado en la literatura, ya que a pesar de su aparente simpleza, el modelo matemático correspondiente retrata de manera eficiente los fenómenos más trascendentales y comúnmente observados en sistemas de potencia de mayor envergadura, como lo son el colapso de voltaje debido a la desaparición del punto de operación y las oscilaciones sostenidas. En este sentido, se estudiarán los mecanismos que derivan en bifurcaciones estáticas y dinámicas de puntos de equilibrios y un fenómeno conocido como cascada de doble período en el caso de soluciones periódicas. Por último, se analizará el diagrama de bifurcaciones variando dos parámetros simultáneamente, donde se mostrará la existencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens que actúa como centro organizador de la dinámica (Revel et al., 2006, 2008a).

5.1. Bifurcaciones en sistemas de potencia

Antes de comenzar con el análisis del modelo de tres barras se describirán a modo introductorio algunos de los aspectos fundamentales a tener en cuenta al momento de realizar un estudio de bifurcaciones en un sistema de potencia.

La forma más difundida y usual de modelar un sistema de potencia es mediante un sistema diferencial algebraico (DAE, *Differential Algebraic Equations*) [véanse por ejemplo, (Anderson & Fouad, 1994; Kundur, 1994; Sauer & Pai, 1998; Ilić & Zaborszky,

2000)], de manera tal que el modelo resultante tendrá la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y; \lambda), \\ 0 = g(x, y; \lambda), \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ son las ecuaciones de estado diferenciales, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ las restricciones algebraicas, $x \in \mathbb{R}^n$ representan los estados diferenciales o dinámicos, $y \in \mathbb{R}^m$ los estados algebraicos, y $\lambda \in \mathbb{R}^p$ es un vector de parámetros reales. Entre las variables diferenciales se tienen los estados mecánicos de los generadores (cuya dinámica determina las ecuaciones de *swing*), los estados eléctricos del rotor, de la excitación y de los correspondientes a los reguladores de tensión (AVR, *Automatic Voltage Regulator*) y frecuencia (*Governor*) y los estados dinámicos de las cargas. Los estados algebraicos están dados principalmente por las líneas de transmisión, los estatores de la máquinas y los de las cargas, ya que su respuesta dinámica es mucho más rápida que la de las variables diferenciales mencionadas anteriormente.

A pesar de no ser la práctica usual (sobre todo en sistemas de grandes dimensiones) es posible contemplar el comportamiento dinámico de las expresiones algebraicas del modelo DAE mediante ecuaciones diferenciales, y obtener así un modelo enteramente diferencial (ODE, *Ordinary Differential Equations*), tal como se indica en (Rosehart & Cañizares, 1998, 1999). A su vez, en estudios particulares, las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica de las líneas de transmisión pueden ser reemplazadas por un conjunto de ecuaciones a derivadas parciales (PDE, *Partial Differential Equations*), ya que la impedancia se encuentra distribuida a lo largo de la línea (Ilić & Zaborszky, 2000). Un modelo más completo resulta de la consideración de un sistema híbrido, descrito por un sistema de ecuaciones diferencial-algebraico y a diferencias (DAD, *Differential-Algebraic-Difference*), de manera tal que sea posible la inclusión de fallas y eventos de naturaleza discreta en algunos componentes del sistema (Hill et al., 2003). Cabe destacar que la complejidad del modelo depende fuertemente del problema bajo estudio.

Es sabido que los sistemas de potencia son altamente no lineales y que su comportamiento dinámico puede cambiar en forma cualitativa ante variaciones en los parámetros. Por ejemplo, luego de un incremento de carga un punto de operación estable puede volverse inestable y a su vez el sistema puede experimentar una oscilación sostenida. Este comportamiento puede ser asociado de manera local con la bifurcación de Hopf

y en general, es posible aplicar la teoría de bifurcaciones para comprender los mecanismos que derivan en fenómenos no lineales en esta clase de sistemas. La idea detrás del estudio del comportamiento del sistema a través de sus bifurcaciones es investigar los cambios cualitativos en la dinámica (*e.g.* pérdida de estabilidad, nacimiento o cese de oscilaciones, pasaje de soluciones periódicas a comportamientos caóticos, etc.) ante variaciones cuasiestacionarias de los parámetros del sistema.

En este sentido, en (Abed & Varaiya, 1984; Kwatny et al., 1986) se presentan resultados relacionados con el estudio de la estabilidad en estado estacionario de sistemas de potencia ante bifurcaciones dinámicas (Hopf) y estáticas (silla-nodo). Luego, I. Dobson y H.D. Chiang en (Dobson & Chiang, 1989) proponen un modelo simple de 3 barras, que posee una bifurcación silla-nodo debida a la interacción entre el generador y la carga del sistema. Como consecuencia de esto, el punto de operación estable desaparece si la potencia reactiva demandada se incrementa por sobre el límite impuesto por la bifurcación silla-nodo, de modo que la tensión sobre la barra de carga cae súbitamente a cero (colapso de voltaje). Este sistema de tres barras ha sido ampliamente estudiado utilizando distintos valores para las constantes [*e.g.* (Wang et al., 1994; Tan et al., 1995; Nayfeh et al., 1996; Budd & Wilson, 2002)]. Por ejemplo, en (Wang et al., 1994) se ha mostrado que este sistema experimenta el fenómeno de colapso de voltaje luego de una cascada de bifurcaciones de doble período. Posteriormente en (Budd & Wilson, 2002) se muestra que existe una bifurcación de Bogdanov-Takens que actúa como centro organizador de la dinámica, aunque dicho punto se encuentra para valores negativos de la potencia activa de la carga.

En este capítulo se estudiará el sistema de 3 barras propuesto en (Dobson & Chiang, 1989) utilizando los valores de las constantes de (Wang et al., 1994). A su vez se hará un recuento de las bifurcaciones presentes al variar uno y dos parámetros. En el primero de los casos, se mostrará que las bifurcaciones silla-nodo y Hopf son los mecanismos por los cuales el punto de operación puede desaparecer o volverse inestable, respectivamente. Luego se mostrará que el ciclo límite producto de la bifurcación de Hopf desarrolla una cascada de bifurcaciones de doble periodo, enmarcándose en la teoría universal propuesta por M. J. Feigenbaum (Feigenbaum, 1978, 1979), y finalmente deriva en un atractor caótico.

Por último, al variar dos parámetros simultáneamente se detectará la presencia de

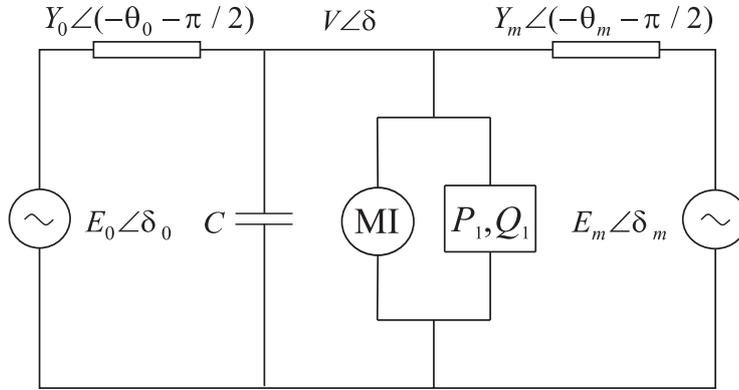


Figura 5.1: Representación del modelo de 3 barras estudiado.

una bifurcación de Bogdanov-Takens para valores positivos de potencia activa y reactiva consumida por la carga. Cabe notar que aunque las curvas de bifurcaciones correspondientes al despliegue de dicha singularidad no afectan *a priori* regiones en el espacio de parámetros en las cuales típicamente opera el sistema, la aparición de fenómenos globales pueden tener influencia en regiones de importancia práctica.

5.2. Modelo del sistema de 3 barras

La representación circuital del sistema de tres barras introducido en (Dobson & Chiang, 1989) se muestra en la Fig. 5.1. Está formado por una barra infinita¹, una barra de carga en el centro y un generador en la barra de la derecha. Las líneas de transmisión se representan mediante las admitancias $Y_0 \angle (-\theta_0 - \pi/2)$ y $Y_m \angle (-\theta_m - \pi/2)$. Además, $E_0 \angle \delta_0$, $V \angle \delta$ y $E_m \angle \delta_m$ representan las magnitudes y las fases de las tensiones en la barra infinita, en la carga y en el nodo de generación, respectivamente.

La dinámica mecánica del generador está determinada por la siguiente ecuación diferencial, conocida como ecuación de *swing*,

$$M\ddot{\delta}_m + d_m\dot{\delta}_m = P_m - P_e, \quad (5.2)$$

¹El concepto de “barra infinita” se refiere a un nodo totalmente rígido, con la capacidad suficiente para absorber cualquier desbalance en las potencias del sistema. Usualmente se considera $E_0 = 1$ y $\delta_0 = 0$ constantes.

donde M es la constante de inercia del rotor, d_m es el coeficiente de rozamiento, P_m la potencia mecánica suministrada al generador (por medio de una máquina primaria) y P_e es la potencia eléctrica suministrada por el generador (incluyendo las pérdidas en Y_m), que puede calcularse mediante la siguiente ecuación

$$P_e = -E_m Y_m [E_m \sin(\theta_m) + V \sin(\delta - \delta_m + \theta_m)]. \quad (5.3)$$

Reemplazando (5.3) en (5.2), se llega al modelo “clásico” del generador, también conocido como de “voltaje constante detrás de la reactancia” (IEEE Power Engineering Society, 2003),

$$\dot{\delta}_m = \omega, \quad (5.4)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{M} [-d_m \omega + P_m + E_m^2 Y_m \sin(\theta_m) + E_m V Y_m \sin(\delta - \delta_m + \theta_m)]. \quad (5.5)$$

La barra de carga ($V \angle \delta$) se representa por medio de un motor de inducción (MI en la Fig. 5.1) en paralelo con una carga de potencia constante (P_1, Q_1) y un capacitor C . Por lo tanto se tendrá una combinación entre elementos dinámicos (MI) y estáticos (P_1, Q_1).

Considerando un modelo empírico para el motor propuesto en (Walve, 1986), el balance de potencia en la barra de carga es

$$P_{carga} = \underbrace{P_0 + k_{pw} \dot{\delta} + k_{pv} (V + T \dot{V})}_{P_{motor}} + P_1, \quad (5.6)$$

$$Q_{carga} = \underbrace{Q_0 + k_{qw} \dot{\delta} + k_{qv} V + k_{qv2} V^2}_{Q_{motor}} + Q_1, \quad (5.7)$$

donde T , k_{pw} , k_{pv} , k_{qw} , k_{qv} y k_{qv2} son constantes del motor, P_0 , Q_0 y P_1 , Q_1 son las potencias activas y reactiva drenadas de manera constante por el motor y por la carga (P_1, Q_1), respectivamente. Luego, las potencias activa y reactiva suministradas a la carga son

$$P(\delta_m, \delta, V) = -E'_0 Y'_0 V \sin(\delta + \theta'_0) - E_m Y_m V \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) + V^2 [Y'_0 \sin(\theta'_0) + Y_m \sin(\theta_m)], \quad (5.8)$$

$$Q(\delta_m, \delta, V) = E'_0 Y'_0 V \cos(\delta + \theta'_0) + E_m Y_m V \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2 [Y'_0 \cos(\theta'_0) + Y_m \cos(\theta_m)], \quad (5.9)$$

donde E'_0 , Y'_0 and θ'_0 se obtienen del equivalente de Thevenin hacia la barra infinita, incluyendo el capacitor C . Las expresiones correspondientes son

$$E'_0 = \frac{E_0}{\Gamma}, \quad Y'_0 = Y_0 \Gamma, \quad \theta'_0 = \theta_0 + \tan^{-1} \left(\frac{C Y_0^{-1} \sin(\theta_0)}{1 - C Y_0^{-1} \cos(\theta_0)} \right), \quad (5.10)$$

con $\Gamma = \sqrt{1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos(\theta_0)}$.

El balance entre la potencia suministrada (P, Q) y la consumida (P_{carga}, Q_{carga}) en la barra de carga es

$$P(\delta_m, \delta, V) = P_0 + k_{pw}\dot{\delta} + k_{pv}(V + T\dot{V}) + P_1, \quad (5.11)$$

$$Q(\delta_m, \delta, V) = Q_0 + k_{qw}\dot{\delta} + k_{qv}V + k_{qv_2}V^2 + Q_1. \quad (5.12)$$

De (5.12) se obtiene

$$\dot{\delta} = \frac{1}{k_{qw}} [-k_{qv_2}V^2 - k_{qv}V - Q_0 - Q_1 + Q(\delta_m, \delta, V)]. \quad (5.13)$$

Substituyendo (5.13) en (5.11) y despejando \dot{V} , resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{T k_{qw} k_{pv}} \{ k_{pw} k_{qv_2} V^2 + (k_{pw} k_{qv} - k_{qw} k_{pv}) V \\ & + k_{qw} [P(\delta_m, \delta, V) - P_0 - P_1] - k_{pw} [Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1] \}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Las ecuaciones (5.4–5.5) y (5.13–5.14) con $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ dadas por (5.8) y (5.9), respectivamente, determinan la dinámica del sistema de 3 barras en función de los estados δ_m, ω, δ , y V . Los parámetros utilizados en el estudio de bifurcaciones son Q_1 y P_1 , *i.e.* la potencia activa y reactiva drenada por la carga $P_1 - Q_1$ (ver Fig. 5.1). Por lo tanto, el modelo resultante es de la forma

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (5.15)$$

donde $x = (\delta_m, \omega, \delta, V)^T$ es el vector de estados y $\lambda = (Q_1, P_1)^T$ los parámetros. Los valores utilizados para las constantes del sistema fueron obtenidos de (Wang et al., 1994): $M = 0.01464$, $C = 3.5$, $E_m = 1.05$, $Y_0 = 3.33$, $\delta_0 = 0$, $\theta_0 = \theta_m = 0$, $k_{pw} = 0.4$, $k_{pv} = 0.3$, $k_{qw} = -0.03$, $k_{qv} = -2.8$, $k_{qv_2} = 2.1$, $T = 8.5$, $P_0 = 0.6$, $Q_0 = 1.3$, $E_0 = 1$, $Y_m = 5.0$, $P_m = 1.0$ y $d_m = 0.05$. Todas las constantes están dadas en “por unidad” utilizando una base de 500 MVA, excepto los ángulos que están expresados en grados.

5.3. Análisis de bifurcaciones variando Q_1

En primera instancia considere al sistema de tres barras actuando en un punto de operación determinado (posiblemente en condiciones nominales). Este punto de operación corresponde a un punto de equilibrio estable del sistema (5.15), representado por el

vector de estados $x^* = (\delta_m^*, \omega^*, \delta^*, V^*)^T$, para cierto valor del parámetro λ . Por lo tanto se satisface que $f(x^*, \lambda) = 0$. Si ahora se varia el parámetro λ , el punto de operación también se modificará para satisfacer la igualdad anterior. En otras palabras, la ubicación en el espacio de estados del equilibrio x^* cambiará al variar el valor del parámetro λ . A su vez, es posible que la dinámica en un entorno del equilibrio también se vea afectada. Si el comportamiento del sistema resulta cualitativamente diferente antes y después de la variación de λ , se dice que el sistema ha experimentado una bifurcación. En los Capítulos 2 y 3 se vio que las bifurcaciones locales se dan en los puntos donde el Jacobiano de (5.15)

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \lambda^*), \quad (5.16)$$

es singular. En la ecuación anterior λ^* representa el valor del parámetro (o de los parámetros) donde ocurre la singularidad. Recuerde que, si (5.16) posee un autovalor en cero, el sistema (5.15) sufre una bifurcación silla-nodo. por otro lado si (5.16) tiene un par de autovalores sobre el eje imaginario, (5.15) experimenta una bifurcación de Hopf.

La Fig. 5.2 muestra el diagrama de bifurcaciones que resulta de la variación de la potencia reactiva Q_1 de la carga, fijando $P_1 = 0$. En este caso, las continuaciones numéricas fueron realizadas utilizando el paquete AUTO (Doedel et al., 2002). La curva mostrada con línea continua indica puntos de equilibrio estables, mientras que la línea a trazos son equilibrios inestables. El eje vertical indica la magnitud de la tensión V en la barra de carga. Los círculos llenos indican el valor mínimo de la amplitud de un ciclo límite estable, mientras que los círculos vacíos corresponden a la misma medida pero para ciclos límites inestables.

Comenzado por el extremo izquierdo de la Fig. 5.2, se tienen dos puntos de equilibrio, uno estable (punto de operación del sistema) y otro inestable. El equilibrio estable se vuelve inestable debido a una bifurcación de Hopf supercrítica H^- , para $Q_1 = 2.9802182780$ y se tiene un ciclo límite estable para valores superiores de Q_1 . Si la demanda de potencia reactiva de la carga continua aumentando, los puntos de equilibrio del sistema colapsan y desaparecen en una bifurcación silla-nodo, indicada como LP_1 en la Fig. 5.2, para $Q_1 = 3.0257810109$. Por lo tanto, si Q_1 posee un valor mayor a este último, el sistema no tendrá ningún punto de operación posible y ocurrirá un colapso de voltaje. Cabe destacar que tanto la bifurcación de Hopf como la silla-nodo son genéricas en los sistemas de potencia, en especial si se varían parámetros como el consumo de

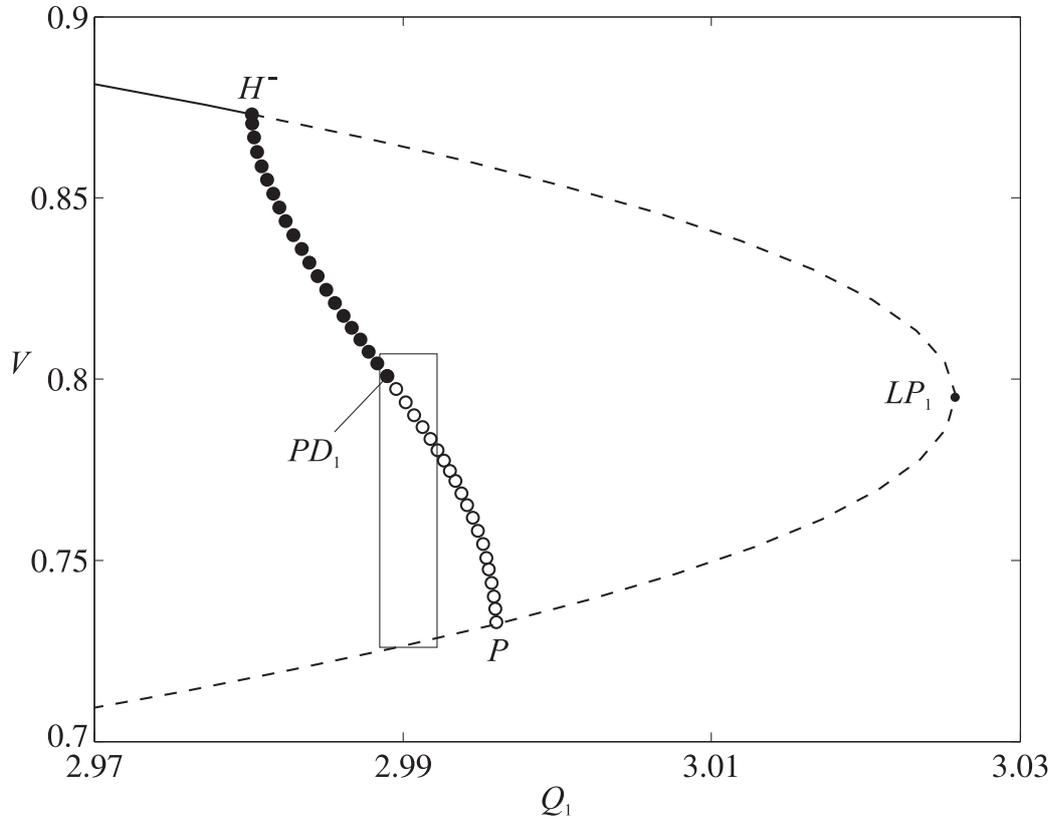


Figura 5.2: Diagrama de bifurcaciones del sistema de 3 barras, variando Q_1 .

potencia de las cargas. Esto implica que las bifurcaciones transcriticals y *pitchfork* no ocurren en los sistemas de potencia debido a que estas requieren una simetría especial. Este resultado fue puntualizado en (Cañizares & Hranilovic, 1994).

Por otro lado, el colapso del sistema puede suceder mucho antes de la silla-nodo debido a un fenómeno más complejo descrito a continuación (Wang et al., 1994).

El ciclo límite producto de la bifurcación de Hopf H^- sufre una bifurcación de doble período para $Q_1 = 2.9889650564$. Dado que es una bifurcación de ciclos límites, ésta no puede detectarse mediante el análisis local del punto de equilibrio y requiere estudiar el comportamiento de los autovalores del mapa de Poincaré asociado. Como se describió en la Sec. 2.2.3, en la bifurcación de doble período se tiene un multiplicador en -1 . Como consecuencia se produce el nacimiento de un ciclo límite cuyo período es de aproximadamente el doble que el del ciclo que le dio origen. En este caso, el ciclo

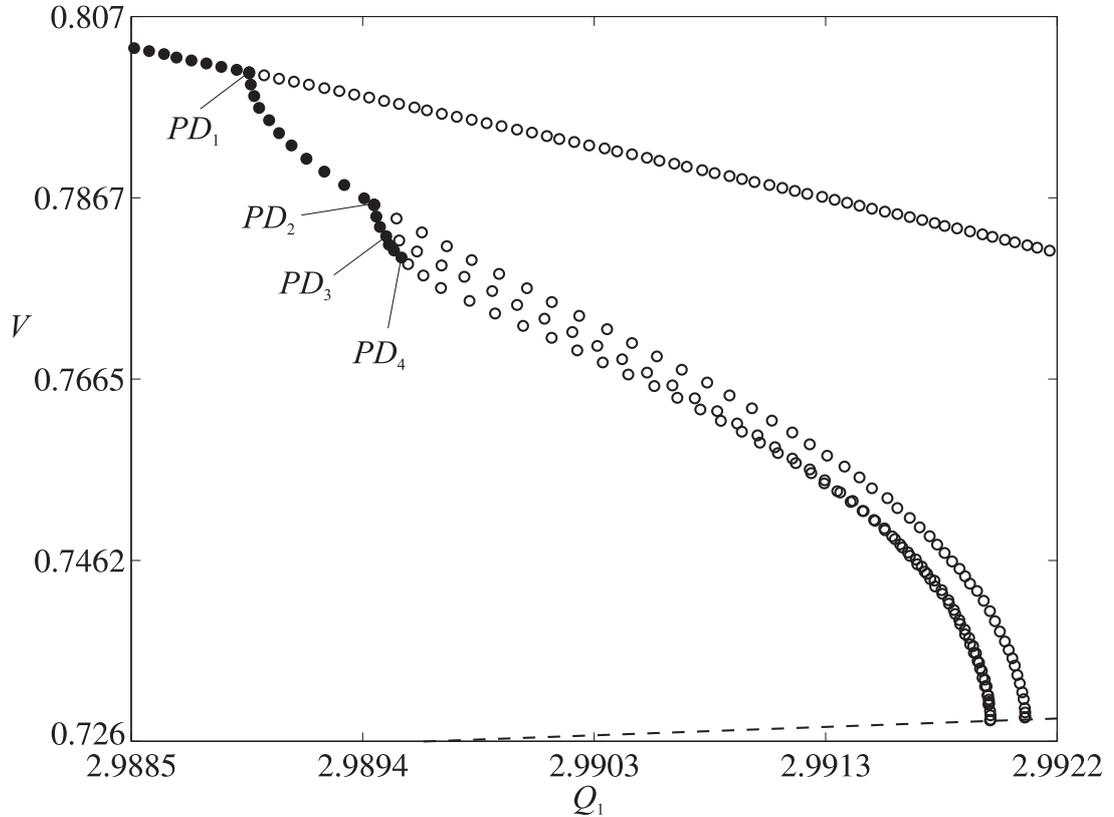


Figura 5.3: Vista detallada de la cascada de bifurcaciones de doble período.

de período 2 resultante es estable, mientras que el ciclo original (de período uno) se vuelve inestable. Para valores crecientes del parámetro, el ciclo de período dos sufre una bifurcación de doble período PD_2 , tornándose inestable y creándose un ciclo de período cuatro. Este mecanismo se repite sucesivamente, generándose ciclos de período ocho, dieciséis, etc. Este fenómeno se conoce como “cascada de doble periodo”. La Fig. 5.3 muestra el comienzo de la cascada y a su vez corresponde al rectángulo indicado en la Fig. 5.2. Los valores de Q_1 para los cuales se tienen las primeras bifurcaciones de doble período se listan en la Tabla 5.1, donde el subíndice indica la i -ésima duplicación del período. Este proceso de generación de soluciones periódicas, cada una con el doble del período de la anterior, continua al incrementarse el valor de Q_1 , y culmina en un atractor caótico ($Q_1 \cong 2.9898860226$). La Fig. 5.4 muestra una proyección en las variables V , δ y ω del atractor caótico presente para $Q_1 = 2.989970$.

Bifurcación	Q_1
PD_1	2.9889650564
PD_2	2.9894727221
PD_3	2.9895623607
PD_4	2.9895809828
PD_5	2.9895849451
PD_6	2.9895857918
PD_7	2.9895859732

Tabla 5.1: Valores de Q_1 para los cuales se tienen las primeras siete bifurcaciones de doble periodo.

El atractor caótico y los correspondientes ciclos límites inestables colisionan con el punto de equilibrio silla (línea a trazos en la Fig. 5.3) para $Q_1 \cong 2.992$, donde son destruidos en una bifurcación global conocida como crisis de frontera (*boundary crisis*). Por lo tanto, el atractor caótico deja de existir y el sistema, más allá de este punto no tiene ningún atractor estable, ocurriendo el colapso de voltaje. Este fenómeno se traduce en un comportamiento donde la tensión cae súbitamente a cero luego de un transitorio de determinada duración.

5.3.1. Cascada de doble periodo

En ciertos casos particulares las sucesivas bifurcaciones de doble período responde a la teoría universal propuesta por M. J. Feigenbaum (Feigenbaum, 1978, 1979). Esta teoría fue desarrollada para sistemas discretos, y en particular para mapas de tipo unimodal, es decir aquellos que poseen un único máximo (o mínimo). En estos casos las bifurcaciones de doble período se encuentran relacionadas a través de una constante universal que se calcula de la siguiente manera

$$\delta_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692016091\dots, \quad (5.17)$$

donde r_{n+j} ($j = 0, 1, 2$), son los valores del parámetro donde se tienen las bifurcaciones de doble periodo.

Este resultado puede ser aplicado al caso de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales (ODE) si el mapa de Lorenz del atractor es unimodal (Strogatz, 1999). Para

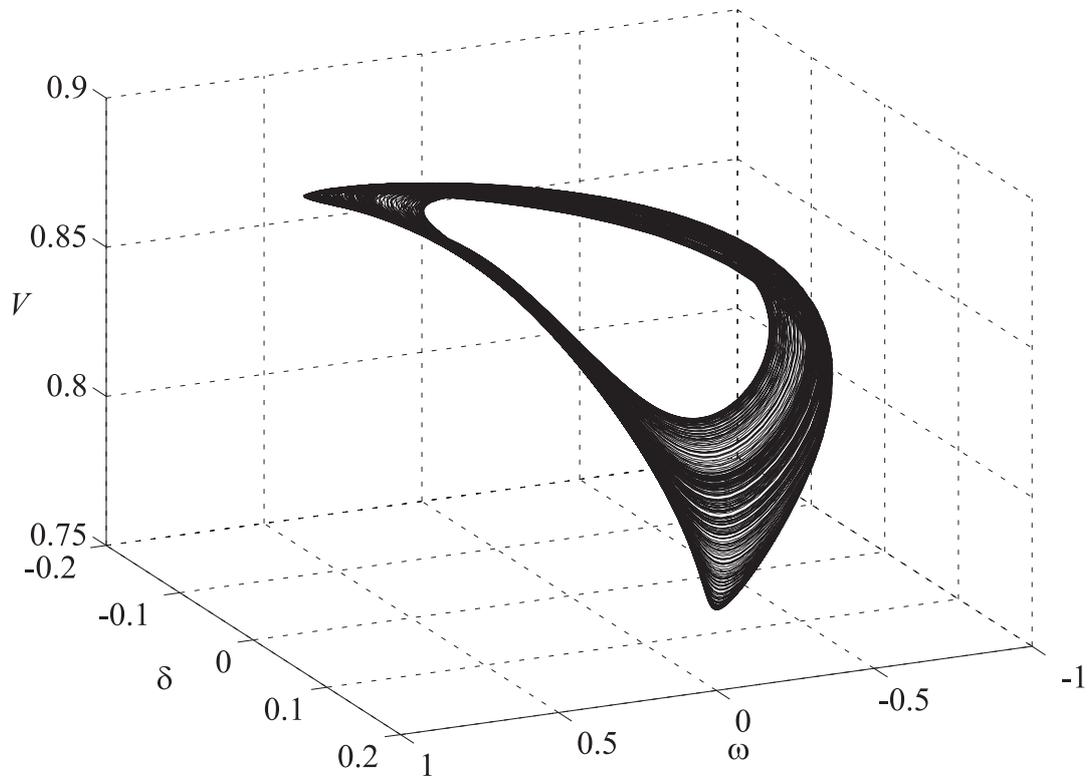


Figura 5.4: Atractor caótico producto de la cascada de doble periodo ($Q_1 = 2.989790$).

construir dicho mapa primero se obtiene la serie temporal de la solución caótica $z(t)$, por ejemplo mediante integración numérica. Luego, si $z[n]$ representa el n -ésimo máximo local de la solución y $z[n+1]$ el siguiente, el mapa de Lorenz de la solución caótica se obtiene graficando $z[n]$ vs. $z[n+1]$. Nótese que si la gráfica resultante se asemeja a una curva unidimensional, es posible aproximarla por un mapa $z[n+1] = f(z[n])$. Cabe destacar que si el atractor caótico es “plano”, o sea que se asemeja a una superficie bidimensional (como el mostrado en la Fig. 5.4), el mapa de Lorenz resultante se aproximará a una curva unidimensional. La característica sobresaliente del mapa de Lorenz es que en cierta manera permite extraer orden del caos, ya que conociendo el valor de $z[n]$ es posible calcular el valor del próximo máximo local $z[n+1]$.

Extendiendo esta idea al caso del sistema de potencia de 3 barras estudiado en este capítulo, el mapa de Lorenz puede obtenerse de forma numérica graficando los sucesivos

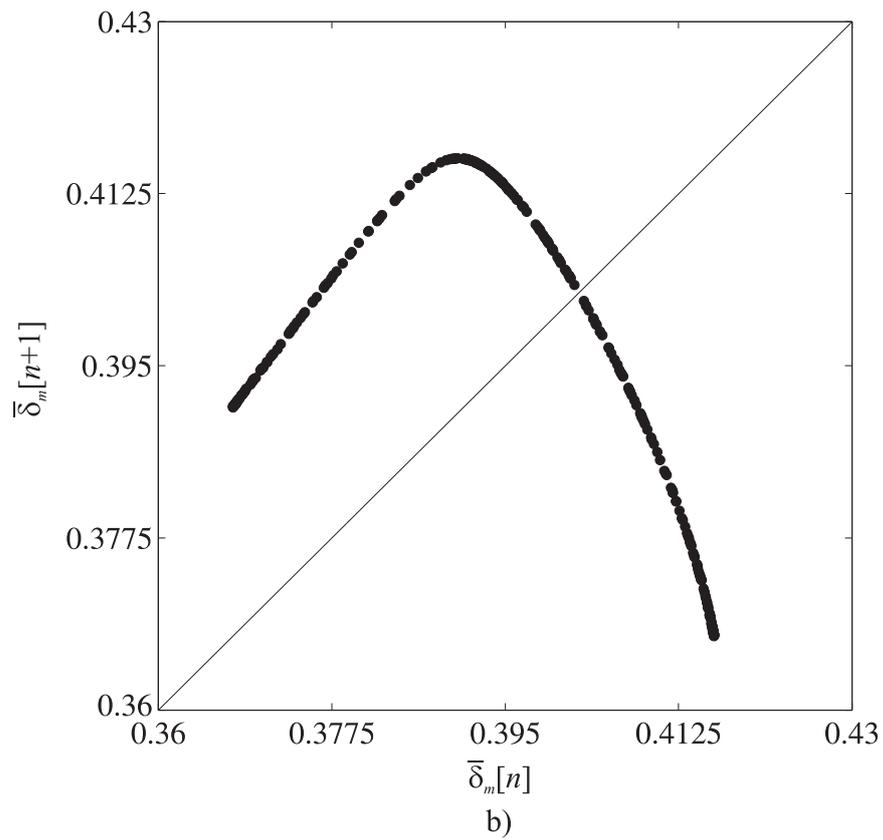
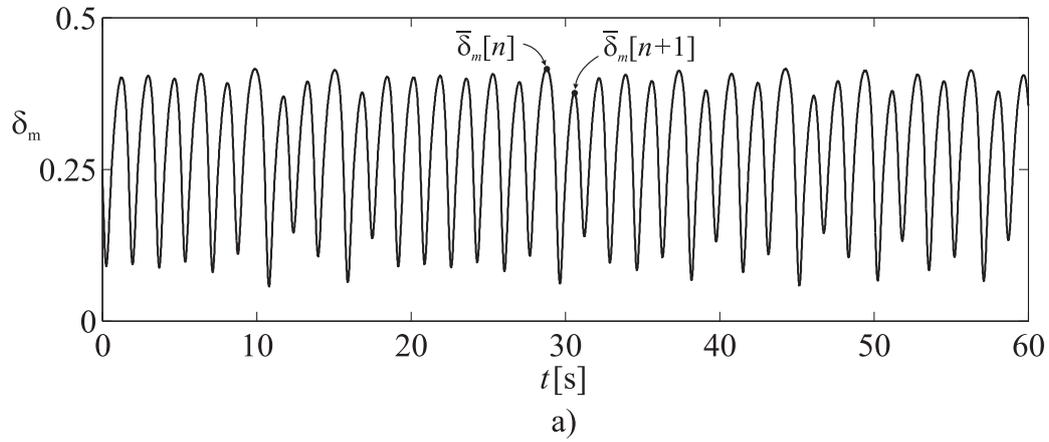


Figura 5.5: Mapa de Lorenz del atractor caótico de la Fig. 5.4. a) Señal temporal $\delta_m(t)$. b) Mapa de Lorenz.

n	δ_{Fn}
1	5.663471986396961
2	4.813560232131420
3	4.699820811612138
4	4.679697647450078
5	4.667585450683690

Tabla 5.2: Aproximaciones a la constante de Feigenbaum ($\delta_F = 4.6692016091\dots$).

máximos locales ($\bar{\delta}_m$) de la variable δ_m cuando el sistema se encuentra en régimen caótico, como se muestra en la Fig. 5.5a, mientras que el mapa de Lorenz resultante se muestra en la Fig. 5.5b. Como puede observarse, el mismo describe una curva unidimensional y puede aproximarse por un mapa unimodal. Para determinar si el sistema se comporta de acuerdo a la teoría de Feigenbaum, se calculan sucesivas aproximaciones de la constante (para n finito) por medio de

$$\delta_{Fn} = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (5.18)$$

donde los valores de Q_1 (r_{n+j}) se encuentran en la Tabla 5.1, mientras que las aproximaciones resultantes se listan en la Tabla 5.2. Cabe destacar que la estimación se aproxima a $\delta_F = 4.6692016091\dots$ para valores de n cada vez mayores.

A partir de este resultado y conociendo los valores de Q_1 para las primeras bifurcaciones de doble periodo (*i.e.* PD_1 , PD_2 , PD_3 , etc.) es posible predecir de manera aproximada los restantes puntos de bifurcación utilizando δ_F . Por ejemplo, PD_8 puede aproximarse utilizando los valores de δ_F , PD_6 y PD_7 que figuran en la Tabla 5.1, resultando $PD_8 \simeq 2.9895860121$. A pesar de que desde el punto de vista práctico no sea muy relevante, es posible obtener también el valor aproximado del parámetro para el cual se tiene régimen caótico. Esto se realiza aplicando de manera recursiva la relación, dando como resultado $Q_1 \simeq 2.9898860226$.

Por último, cabe destacar que en (Lee & Ajjarapu, 1993) se advierte que la cascada de bifurcaciones de doble período exhibida por el sistema de 3 barras de Dobson y Chiang (para otros valores de los parámetros) deriva en un atractor caótico siguiendo la teoría propuesta por Feigenbaum. Sin embargo, en dicho trabajo no se verifica esta aseveración por medio de la construcción del mapa de Lorenz.

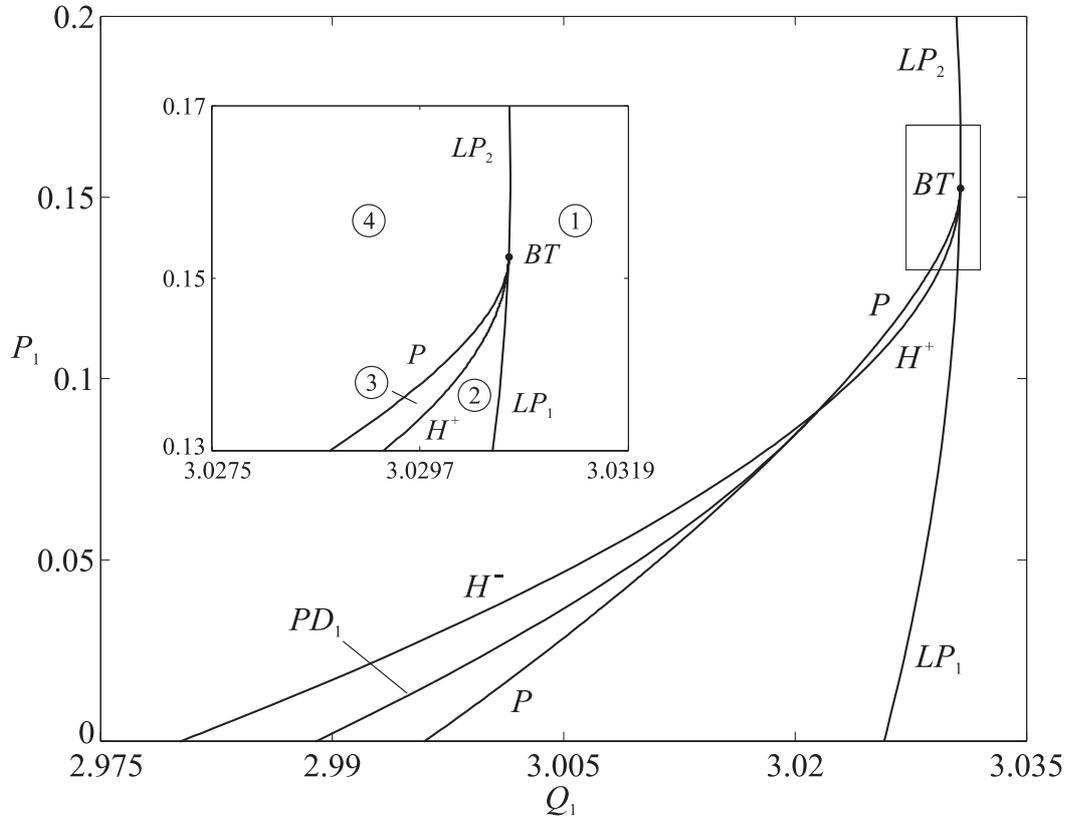


Figura 5.6: Diagrama de bifurcaciones variando Q_1 y P_1 .

5.4. Análisis de bifurcaciones variando Q_1 y P_1

Como se vio en el Capítulo 3 es posible continuar una determinada singularidad variando simultáneamente dos parámetros del sistema. Esto define una curva \mathcal{B} en el espacio de parámetros sobre la cual se satisfacen las condiciones de la bifurcación en cuestión². Puede suceder que en puntos aislados de \mathcal{B} el sistema experimente bifurcaciones de codimensión dos, en general dadas por la violación de alguna condición de no degeneración o debido al aumento de dimensión de la variedad centro W^c .

La Fig. 5.6 muestra el diagrama de bifurcaciones que se obtiene al variar en forma simultánea las potencias reactiva (Q_1) y activa (P_1) de la carga del sistema. Nótese que las curvas corresponden a las continuaciones de las bifurcaciones de codimensión 1

²De manera similar a lo sucedido con el oscilador electrónico estudiado en el Capítulo 4.

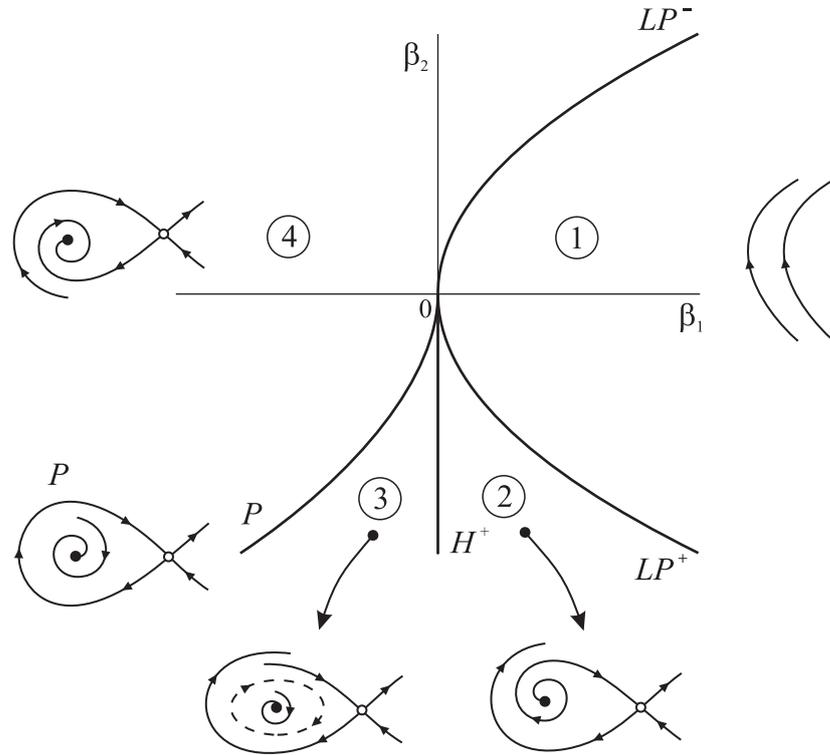


Figura 5.7: Despliegue de la forma normal truncada de la bifurcación de Bogdanov-Takens para $s > 0$.

mostradas en la Fig. 5.2.

En el diagrama de bifurcaciones en dos parámetros se observa que existe un centro organizador de la dinámica dado por una bifurcación de Bogdanov-Takens (BT) para $Q_1 = 3.030710$ y $P_1 = 0.1524893$. Como se vio en la Sec. 3.1.3, esta singularidad se caracteriza por la ocurrencia de dos autovalores del Jacobiano en cero. El despliegue de la forma normal truncada (3.3) para $s > 0$ se muestra en la Fig. 5.7. El mismo es muy similar al mostrado en la Fig. 3.3 para $s < 0$ de la Sec. 3.1.3, la diferencia más importante radica en la estabilidad del ciclo límite originado en la bifurcación de Hopf, que en el caso $s > 0$ es inestable. La singularidad se encuentra sobre una curva de sillanodos de puntos de equilibrio (LP^\pm), de donde nacen dos curvas: una de bifurcaciones de Hopf (H^+) y la otra de órbitas homóclinas (P , véase la Sec. 2.2.5).

En el recuadro de la Fig. 5.6 se muestra la vista ampliada del diagrama de bifurcaciones en cercanías del punto de Bogdanov-Takens BT . La dinámica en un entorno de la singularidad está en relación directa con la mostrada en la Fig. 5.7, como lo indica la

numeración de las regiones en ambas figuras. Por lo tanto, los equilibrios de la Fig. 5.7 se corresponden con puntos de equilibrio del sistema de tres barras, y el ciclo límite inestable de la región 3, es también una solución periódica del sistema de potencia. Las curvas asociadas con la bifurcación de Bogdanov-Takens de las Figs. 5.6 y 5.7 se relacionan de la siguiente manera: las dos ramas de bifurcaciones sillan-nodos LP_1 y LP_2 corresponden a LP^+ y LP^- , respectivamente, la curva de bifurcaciones subcríticas de Hopf H^+ y la curva de bifurcaciones homóclinas P son representadas en el despliegue de la forma normal por las curvas H^+ y P , respectivamente.

Cabe mencionar que esta singularidad ha sido reportada con anterioridad en (Budd & Wilson, 2002) para el mismo modelo de tres barras pero con distintos valores en las constantes. En (Budd & Wilson, 2002) la bifurcación de Bogdanov-Takens ocurre para valores negativos de P_1 . Por lo tanto a primera impresión dicha singularidad no tiene relevancia física, no obstante juega un rol importante en la dinámica del sistema ya que desde este punto se desprenden curvas de bifurcaciones que afectan regiones de operación factibles. En el sistema estudiado aquí se ha detectado la bifurcación de Bogdanov-Takens para valores positivos de P_1 ($P_1 = 0.1524893$), aunque en este caso las curvas que emanan de la singularidad evolucionan en dirección de valores de P_1 negativos, como se muestra en la Fig. 5.6.

5.4.1. Bifurcaciones globales

Las curvas PD_1 y H^- no están asociadas en forma directa con el despliegue de la bifurcación y merecen una descripción particular. La curva de bifurcaciones de Hopf subcríticas que emana del punto de Bogdanov-Takens BT se convierte en supercrítica (H^-) debido a una bifurcación de Hopf generalizada. El punto donde ocurre esta singularidad no está indicado en la Fig. 5.6, pero el mismo se encuentra en cercanías de la intersección entre las curvas P y H^+ . A su vez, desde el punto de falla del primer coeficiente de curvatura nace una curva de bifurcaciones silla-nodo de soluciones periódicas, la cual colisiona casi inmediatamente con la curva de homóclinas P (por simplicidad no se muestra en la Fig. 5.6). Cabe destacar que en cercanías del punto anterior existe sobre la curva de homóclinas P una singularidad de carácter global de donde se desprenden comportamientos dinámicos complejos. Este fenómeno requiere de los elementos hallados en derredor de dicho punto: una curva de bifurcaciones homóclinas, otra de bifurcaciones

de sillas-nodos de órbitas periódicas y una cascada de bifurcaciones de doble periodo. Por lo tanto, este punto podría explicar el colapso (o nacimiento) de la curva de bifurcaciones de doble período PD_1 sobre la curva de homóclinas P , o incluso también predecir el colapso (o nacimiento) de la cascada de doble periodo vista anteriormente. El mecanismo puede consultarse en (Oldeman et al., 2000) y referencias. El despliegue de esta singularidad no ha podido llevarse a cabo debido a que en la actualidad no existen algoritmos computacionales adecuados para ello. Esto se debe en parte a la dimensión del sistema de tres barras y a las características de la órbita homóclina, que en este caso se trata de una homóclina a un punto silla con autovalores complejos conjugados. Desde el punto de vista práctico, este punto es importante ya que hace las veces de centro organizador de dinámica global que puede afectar posibles regiones de operación.

Las curvas correspondientes a las sucesivas bifurcaciones de doble periodo que forman la cascada no se muestran en el diagrama en dos parámetros pero se sabe que las mismas se encuentran dentro de la región determinada por las curvas PD_1 y P . Esto se encuentra en concordancia con los fenómenos dinámicos de las Figs. 5.2 y 5.3, obtenidos mediante la variación de Q_1 con $P_1 = 0$, *i.e.* un corte horizontal con $P_1 = 0$ en la Fig. 5.6.

Capítulo 6

Dinámica de un sistema de potencia de nueve barras

En este capítulo se estudiará el comportamiento dinámico de un sistema de potencia ampliamente conocido en la literatura, el WSCC (*Western Systems Coordinating Council*) de nueve barras y tres generadores (Anderson & Fouad, 1994; Sauer & Pai, 1998), que comprende parte de la costa oeste de Estados Unidos y Canadá. A diferencia del sistema de 3 barras estudiado anteriormente, en esta oportunidad se utilizará un modelo detallado para los generadores y las cargas y además se tendrá en cuenta la dinámica de las líneas de transmisión y de los lazos de control de tensión y de frecuencia del sistema. El análisis se centrará primero en la descripción del comportamiento dinámico del sistema cuando varía el consumo de una de las cargas en forma cuasiestacionaria y luego ante la variación simultánea de dos de las cargas (Revel et al., 2008c, 2010). En (Srivastava & Srivastava, 1995) se presenta un estudio similar sobre este sistema donde se utiliza la teoría de bifurcaciones para obtener valores críticos de los parámetros del regulador de voltaje¹ y de las cargas. En el citado trabajo se obtiene un modelo ODE reduciendo los nodos del sistema bajo la suposición que los rotores de los generadores son lisos y que las cargas son de impedancia constante, excepto por la inclusión de un motor de inducción.

Tal como se vió en el capítulo anterior, los sistemas de potencia son de carácter altamente no lineal y por lo tanto es posible obtener más información de la dinámica si en el análisis se emplean técnicas no lineales. Por ejemplo, el cambio de estabilidad de un punto de operación producido por el cruce por el eje imaginario de un par de autovalores complejos conjugados (bifurcación de Hopf), puede dar lugar a oscilaciones con diferentes características, hecho que no puede ser distinguido a partir de la linealización. Los paquetes de continuación proveen una herramienta muy utilizada para este tipo de

¹Más conocido por sus siglas en inglés AVR: *Automatic Voltage Regulator*.

análisis. Sin embargo, en su implementación actual estos programas no soportan modelos DAE, por lo tanto es necesario reformular el modelo de manera que quede expresado como uno completamente diferencial (ODE). Una forma de lograrlo es considerando la respuesta dinámica de las líneas de transmisión y la de los estatores de los generadores/motores (Rosehart & Cañizares, 1998, 1999). Esta tarea es relativamente simple si se cuenta con el modelo apropiado de las líneas, las cuales introducen modos oscilatorios muy rápidos que prácticamente no interactúan con los restantes modos provenientes de los generadores, las cargas y los lazos de control (también presentes en la formulación DAE). Las desventajas de esta reformulación del modelo son, por un lado, que existen simultáneamente modos rápidos y modos lentos (hecho que debe tenerse en cuenta para la simulación del sistema) y por otro, que el número de ecuaciones diferenciales se ve sensiblemente incrementado. Cabe destacar que con el modelo DAE es posible obtener el diagrama de bifurcaciones. Esto se logra con la sucesiva resolución del punto de operación mediante reiterados flujos de carga (Lerm et al., 2003; Ajjarapu, 2007; Avalos et al., 2009), juntamente con el monitoreo de los autovalores de la linealización.

Las ventajas del uso de programas de continuación de soluciones sobre la metodología de sucesivos flujos de carga radica en que los primeros son insensibles a las condiciones iniciales del algoritmo (semilla), y a la estabilidad del punto de operación. Otra de las ventajas es la continuación de curvas de bifurcaciones en más de un parámetro, por ejemplo variando dos parámetros en forma simultánea para seguir una condición de bifurcación determinada. Además, los paquetes de continuación de soluciones cuentan con algoritmos robustos y optimizados para el seguimiento no sólo de equilibrios sino también de soluciones periódicas y sus bifurcaciones. Cabe mencionar que en (Ayasun et al., 2004; Guoyun et al., 2005) se presentan algoritmos similares a los utilizados por los programas de continuación pero para el seguimiento de bifurcaciones de equilibrios en sistemas DAE, ya que no cuentan con la posibilidad de continuar ciclos límites.

6.1. Modelo del sistema de potencia

El sistema de potencia estudiado se muestra en la Fig. 6.1, y corresponde al conocido sistema de nueve barras WSCC que abarca 14 estados del oeste de Estados Unidos y parte de Canadá. El mismo está compuesto por tres generadores (el generador #1 es

hidráulico, mientras que el #2 y el #3 son térmicos) con sus respectivos reguladores de tensión (AVR). En el caso de la máquina #1, se cuenta además con un regulador de frecuencia o *Governor* (GOV). Cabe mencionar que sobre el final del capítulo se incluirá un dispositivo estabilizador (más conocido por sus siglas en inglés PSS: *Power System Stabilizer*) a fin de ampliar la región en el espacio de parámetros donde se tienen equilibrios estables. Las cargas del sistema están representadas por medio de una composición de cargas estáticas y dinámicas. Los generadores se encuentran conectados a las barras 1, 2 y 3, mientras que las cargas están en las barras 5, 6 y 8. La definición de las variables de estado del sistema, así como los correspondientes parámetros constantes están especificadas en las Tablas 6.1, 6.2 y 6.3, respectivamente. La dimensión del sistema resultante es setenta. Todos los estados y los parámetros de los modelos presentados a continuación se encuentran en magnitudes *por unidad* respecto de una base de 100 MVA (las constantes de tiempo están en segundos).

6.1.1. Generadores sincrónicos

La dinámica de los generadores está representada mediante un modelo ODE de sexto orden, en el cual se consideran las ecuaciones mecánicas y las eléctricas, dadas por los circuitos eléctricos del rotor y la dinámica del estator. Esta última se incluye a fin de hacer compatibles los modelos de los generadores con los de las líneas de transmisión ya que se considerará su respuesta dinámica. Las ecuaciones diferenciales correspondientes al i -ésimo generador ($i = 1, 2, 3$) son:

$$\dot{\delta}_i = \Omega_B (\omega_i - \omega_s), \quad (6.1)$$

$$2H_i \dot{\omega}_i = P_{mi} - P_{ei} - K_{di} (\omega_i - \omega_s) - D_{bi} \omega_i, \quad (6.2)$$

$$T'_{d0i} \dot{e}'_{qi} = -e'_{qi} + (X_{di} - X'_{di}) i_{di} + e_{fdi}, \quad (6.3)$$

$$T'_{q0i} \dot{e}'_{di} = -e'_{di} - (X_{qi} - X'_{qi}) i_{qi}, \quad (6.4)$$

$$X'_{di} T'_{d0i} \dot{i}_{di} = e'_{qi} - e_{fdi} - i_{di} (X_{di} - X'_{di}) - T'_{d0i} \Omega_B (v_{di} + i_{qi} X'_{qi} - e'_{di} i_{di} R_{si}), \quad (6.5)$$

$$X'_{qi} T'_{q0i} \dot{i}_{qi} = -e'_{di} - i_{qi} (X_{qi} - X'_{qi}) - T'_{q0i} \Omega_B (v_{qi} - i_{di} X'_{di} - e'_{qi} i_{qi} R_{si}), \quad (6.6)$$

donde $P_{ei} = e'_{qi} i_{qi} + e'_{di} i_{di} + (X'_{di} - X'_{qi}) i_{qi} i_{di}$. El ángulo del generador #1 se toma como referencia, por lo tanto $\delta_1 = 0$.

Se despreciarán los efectos de los coeficientes de rozamiento K_{di} y D_{bi} [ec. (6.2)], así como la resistencia del estator R_{si} [ecuaciones (6.5) y (6.6)]. Esta misma consideración

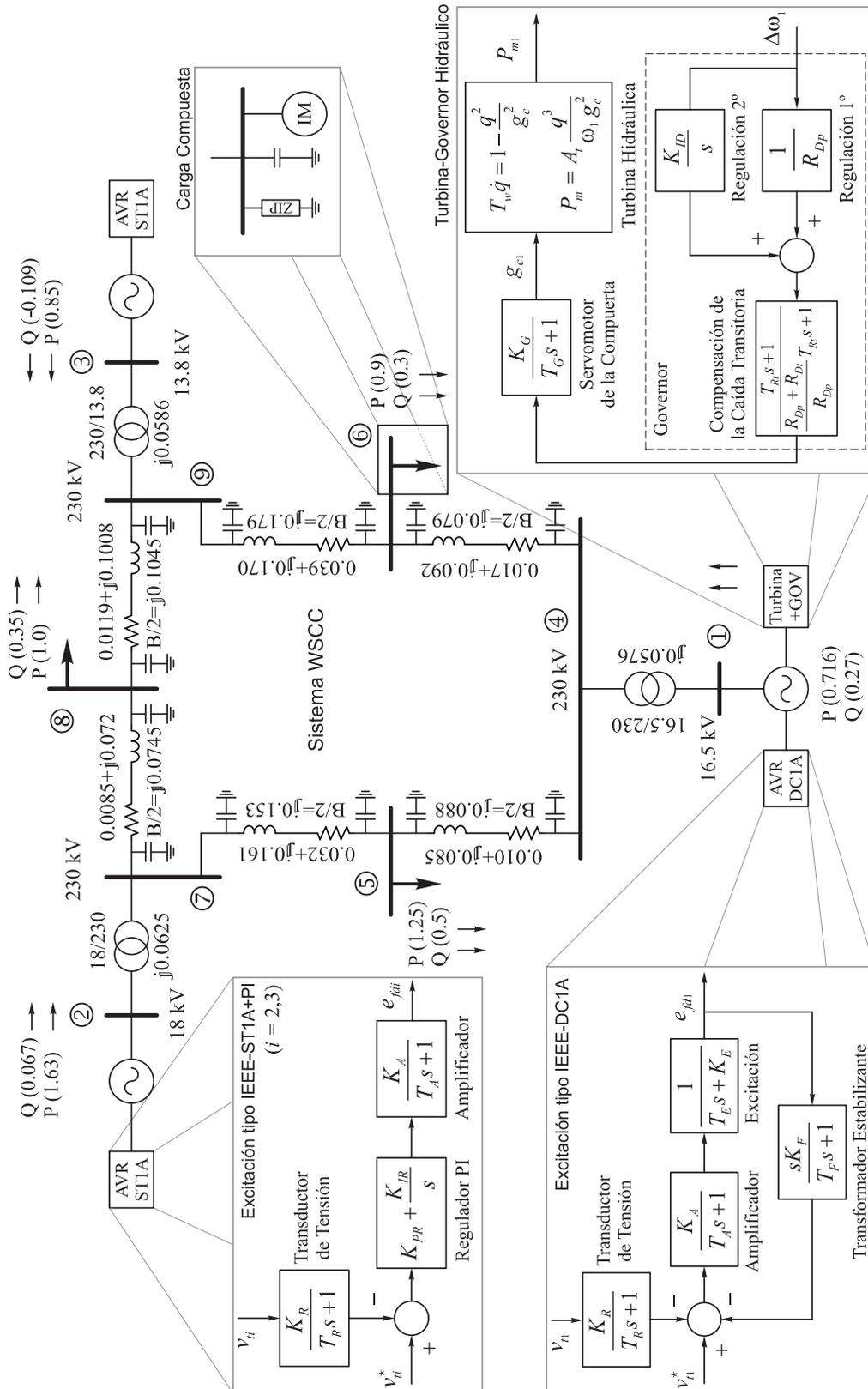


Figura 6.1: Diagrama esquemático del sistema de potencia analizado (incluyendo los correspondientes lazos de control de tensión y de frecuencia). Los valores por unidad están referidos a una base de 100 MVA.

Descripción	Símbolo
Generadores sincrónicos	$i = 1, 2, 3$
Ángulo de carga generador	δ_i ($\delta_1 = 0$)
Velocidad del rotor	ω_i
FEM transitoria en ejes d, q	e'_{di}, e'_{qi}
Corrientes estator en ejes d, q	i_{di}, i_{qi}
Motores de inducción	$j = 5, 6, 8$
Velocidad angular	ω_j
FEM transitoria en ejes d, q	e'_{dj}, e'_{qj}
Corrientes estator en ejes d, q	i_{dj}, i_{qj}
Líneas de transmisión	$(n, m) = 4, \dots, 9$
Voltaje barras en ejes D, Q	v_{Dn}, v_{Qn}
Corriente líneas en ejes D, Q	i_{Dnm}, i_{Qnm}
Excitación IEEE-DC1A	Gen. #1
Voltaje de salida de la excitación	e_{fd1}
Voltaje de entrada de la excitación	v_{R1}
Tasa de realimentación	r_{F1}
Voltaje de salida del transductor	v_{m1}
Turbina-Governor	Gen. #1
Tasa de flujo de la turbina	q_1
Apertura de la compuerta	g_{c1}
Estado interno de regulación	x_1
Estado int. de comp. caída trans.	x_2
Excitación IEEE-ST1A+PI	Gen. #2 y #3 ($i = 2, 3$)
Voltaje de salida de la excitación	e_{fdi}
Estado del regulador PI	x_{Ri}
Voltaje de salida del transductor	v_{mi}
Estabilizador PSS	Gen. #2
Salida filtro <i>washout</i>	x_{wash}
Estado interno lead-lag	x_{PSS}
Salida compensador lead-lag	v_{PSS2}

Tabla 6.1: Variables de estado del sistema de nueve barras.

Descripción	Parámetro	Valor		
Generadores		#1	#2	#3
Tipo de generación		Hidro.	Térm.	Térm.
Potencia Nominal	S_N (MVA)	247.5	192	128
Frecuencia angular base	Ω_B (r/s)	$2\pi 60$	$2\pi 60$	$2\pi 60$
Frec. angular sincrónica	ω_s	1.0000	1.0000	1.0000
Resist. devanado estator	R_s	0.0000	0.0000	0.0000
Constante de inercia	H (s)	23.640	6.4000	3.0100
Potencia mecánica	P_m	Ec. (6.18)	1.6300	0.8500
Reactancia eje d	X_d	0.1460	0.8958	1.3125
Reactancia trans. eje d	X'_d	0.0608	0.1198	0.1813
Reactancia eje q	X_q	0.0969	0.8645	1.2578
Reactancia trans. eje q	X'_q	0.0969	0.1969	0.2500
Const. tiempo trans. eje d	T'_{d0} (s)	8.9600	6.0000	5.8900
Const. tiempo trans. eje q	T'_{q0} (s)	0.3100	0.5350	0.6000
Coef. amortiguamiento	K_d	0.0000	0.0000	0.0000
Coef. amort. mecánico	D_b	0.0000	0.0000	0.0000
Sistema de excitación				
Const. prop. exc. campo	K_E	1.0000	-	-
Const. tiempo exc. campo	T_E (s)	0.3140	-	-
Ganancia etapa amp.	K_A	20.000	200.00	200.00
Const. tiempo etapa amp.	T_A (s)	0.2000	0.0200	0.0200
Ganancia tasa de realim.	K_F	0.0630	-	-
Const. de tiempo realim.	T_F (s)	0.3500	-	-
Gan. prop. regulador	K_{PR}	-	1.0000	1.0000
Gan. integral regulador	K_{IR}	-	0.2500	0.2500
Ganancia transductor	K_R	1.0000	1.0000	1.0000
Const. de tiempo transduc.	T_R (s)	0.0010	0.0200	0.0200
Volt. term. gen./volt. ref.	v_t, v_t^*	1.0400	1.0250	1.0250
Ganancia PSS	K_{PSS}	-	0.1000	-
Const. tiempo <i>washout</i>	T_{wash}	-	10.000	-
Const. Lead-Lag	T_1, T_2	-	{0.2, 0.1}	-
Const. Lead-Lag	T_3, T_4	-	{0.2, 0.1}	-
Turbina-Governor				
Factor de proporcionalidad	A_t	2.4750	-	-
Const. tiempo agua	T_w (s)	1.0000	-	-
Ganancia. servo	K_G	1.0000	-	-
Const. tiempo servo	T_G (s)	0.4000	-	-
Caída perm. (reg. primaria)	R_{Dp}	0.0500	-	-
Caída transitoria	R_{Dt}	0.0486	-	-
Const. tiempo <i>dashpot</i>	T_{Rt} (s)	5.0000	-	-
Gan. integral (reg. secund.)	K_{ID}	0.7500	-	-

Tabla 6.2: Parámetros de los generadores del sistema de nueve barras (potencia base 100 MVA).

Descripción	Parámetro	Valor		
Parámetros de las cargas		#5	#6	#8
Resistencia estator	R_s	0.0010	0.0010	0.0010
Const. inercia motor+carga	H (s)	0.5269	0.5269	0.5269
Potencia mecánica	P_m	0.8658	0.6251	0.6941
React. motor inducción	X_{dq}	3.8943	3.8943	3.8943
React. trans. motor induc.	X'_{dq}	0.1683	0.1683	0.1683
Const. tiempo circ. abierto	T'_{dq0} (s)	0.7826	0.7826	0.7826
Coef. pérdidas mecánicas	D_b	0.0000	0.0000	0.0000
p.u. carga impedancia const.	P_Z	0.3750	0.2700	0.3000
p.u. carga corriente const.	P_I	0.0000	0.0000	0.0000
p.u. carga potencia const.	P_P	0.0000	0.0000	0.0000
p.u. carga impedancia const.	Q_Z	0.1500	0.0900	0.1050
p.u. carga corriente const.	Q_I	0.0000	0.0000	0.0000
p.u. carga potencia const.	Q_P	0.0000	0.0000	0.0000
Modelo torque motor induc.	$\{A, B, C\}$	$\{0,1,0\}$	$\{0,1,0\}$	$\{0,1,0\}$
Magnitud voltaje inicial	V_0	0.9956	1.0126	1.0159
Parámetros de bifurcación		#5	#6	#8
Potencia activa (valor nominal)	α	1.0000	1.0000	1.0000
Potencia reactiva (valor nominal)	β	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 6.3: Parámetros de las cargas en las barras 5, 6 y 8. (potencia base 100 MVA)

fue asumida para este sistema en (Anderson & Fouad, 1994) y (Sauer & Pai, 1998), y es usualmente utilizada en máquinas de gran potencia.

Otra parte importante del sistema son las unidades estabilizadores del sistema de potencia o PSS. Estos dispositivos producen una componente de torque estabilizante en el generador, para proveer amortiguamiento adicional a las oscilaciones electromecánicas. Este dispositivo será adicionado al generador #2. El modelo correspondiente, así como su influencia en la dinámica del sistema se mostrarán más adelante.

6.1.2. Sistemas de excitación y AVR

Se considerarán dos sistemas de excitación y AVR de uso común en los sistemas de potencia. El primero de ellos es el sistema de excitación IEEE-DC1A y se encuentra conectado al generador #1. El mismo corresponde a un sistema de excitación y AVR de DC (corriente continua) de respuesta *lenta*. Las ecuaciones que describen el modelo dinámico son las siguientes

$$T_E \dot{e}_{fd1} = -K_E e_{fd1} + v_{R1}, \quad (6.7)$$

$$T_A \dot{v}_{R1} = -v_{R1} + K_A r_{F1} - \frac{K_A K_F e_{fd1}}{T_F} + K_A (v_{t1}^* - v_{m1}), \quad (6.8)$$

$$T_F \dot{r}_{F1} = -r_{F1} + \frac{K_F e_{fd1}}{T_F}, \quad (6.9)$$

$$T_R \dot{v}_{m1} = -v_{m1} + K_R v_{t1}, \quad (6.10)$$

donde v_{t1} es la tensión en terminales de la máquina, expresada en su propio marco.

Más adelante se verá que la variable de estado r_{F1} , característica de este tipo de sistemas de regulación de tensión, es de relevancia en la dinámica del sistema. La misma se denomina tasa de realimentación (*feedback rate*) y se define como $r_{F1} = (K_F/T_F)e_{fd1} - v_{F1}$, donde K_F y T_F son constantes del AVR (ver Tabla 6.2), e_{fd1} y v_{F1} son el voltaje de salida de la excitación y la tensión de salida del transformador estabilizante (ver Fig. 6.1)

El segundo sistema de excitación/AVR es el IEEE-ST1A+PI (*Static Excitation System*) el cual se usará para equipar a los generadores #2 y #3. El mismo se basa en elementos *estáticos* y posee una *rápida* respuesta dinámica (IEEE Standard 421.5, 2005). Las ecuaciones que describen la dinámica de este sistema son

$$T_A \dot{e}_{fdi} = -e_{fdi} + K_A [x_{Ri} + K_{PR}(v_{ti}^* - v_{mi} - v_{pssi})], \quad (6.11)$$

$$\dot{x}_{Ri} = K_{IR}(v_{ti}^* - v_{mi} - v_{pssi}), \quad (6.12)$$

$$T_R \dot{v}_{mi} = -v_{mi} + K_R v_{ti}, \quad (6.13)$$

con $i = 2, 3$. El diagrama en bloques correspondiente a este sistema de excitación y AVR se muestra en la Fig. 6.1.

6.1.3. Modelo Turbina-Governor

El comportamiento dinámico de la turbina hidráulica del generador #1 será representado mediante un modelo no lineal comúnmente utilizado en estudios de estabilidad transitoria (IEEE PES Working Group on Prime Mover and Energy Supply Models for System Dynamic Performance Studies, 1992). Además se tomará en consideración la dinámica (lineal) del motor encargado de comandar la compuerta de la turbina.

La unidad de regulación de frecuencia (*Governor*) se utiliza para la regulación primaria y secundaria y está compuesta por un regulador PI (proporcional - integral) y un término adicional para compensar el efecto de respuesta inversa introducido por la turbina. El diagrama de bloques del sistema turbina-governor se muestra en la

Fig. 6.1, y la definición de las variables de estado y los parámetros se encuentran en las Tablas 6.1 y 6.2, respectivamente. Las ecuaciones dinámicas son

$$T_w \dot{q}_1 = \frac{1 - q_1^2}{g_{c1}^2}, \quad (6.14)$$

$$T_G \dot{g}_{c1} = -g_{c1} + K_G \left(R_{Dp} K_{ID} x_1 + K_{G1} x_2 + \frac{\omega_s - \omega_1}{K_{G2}} \right), \quad (6.15)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (6.16)$$

$$K_{G2} T_{Rt} \dot{x}_2 = -R_{Dt} x_2 + (\omega_s - \omega_1), \quad (6.17)$$

donde $K_{G1} = R_{Dp} K_{ID} T_{Rt} + R_{Dt} / (R_{Dp} + R_{Dt})$ y $K_{G2} = R_{Dp} + R_{Dt}$. La potencia mecánica de la máquina #1 se calcula de la siguiente manera

$$P_{m1} = A_t \frac{q^3}{\omega_1 g_{c1}^2}, \quad (6.18)$$

donde, A_t es el factor de proporcionalidad (véase la Tabla 6.2), q la tasa de flujo de la turbina y g_{c1} la apertura de la compuerta.

En los casos de los generadores #2 y #3 no se tendrán en cuenta los modelos de las turbinas ya que la máquina #1 (con mayor capacidad que las máquinas #2 y #3) será la encargada de compensar cualquier desbalance de potencia, de manera tal que la frecuencia del sistema sea 1 p.u. (nominal) en estado estacionario. Por lo tanto, los generadores #2 y #3 trabajarán a potencia constante.

6.1.4. Modelo de las cargas

El modelado de las cargas en un sistema de potencia es un tema complejo, y aún bajo investigación (Renmu et al., 2006). En este sentido, en (Pai et al., 1995) se han investigado los efectos de la inclusión de cargas dinámicas, utilizando para ello motores de inducción. Además, en (IEEE Task Force on Load Representation for Dynamic Performance, 1995) se recomienda la utilización de cargas compuestas (estáticas y dinámicas) para estudios de estabilidad. Finalmente, en (Pereira et al., 2002; Renmu et al., 2006) se muestra que este tipo de cargas son necesarias a fin de ajustar los resultados de simulación con las mediciones del sistema real. Por lo tanto, con el fin de efectuar un análisis con una carga lo más realista posible se utilizará un modelo de características similares a los recomendados en (Pai et al., 1995; IEEE Task Force on Load Representation for Dynamic Performance, 1995; Pereira et al., 2002). La parte estática de las cargas será

de tipo ZIP, que consiste en una combinación de cargas de impedancia (Z), corriente (I) y potencia (P) constantes, representada de la siguiente manera

$$P_j = \alpha_j \left(P_{Zj} \frac{v_j^2}{V_{0j}^2} + P_{Ij} \frac{v_j}{V_{0j}} + P_{Pj} \right), \quad (6.19)$$

$$Q_j = \beta_j \left(Q_{Zj} \frac{v_j^2}{V_{0j}^2} + Q_{Ij} \frac{v_j}{V_{0j}} + Q_{Qj} \right), \quad (6.20)$$

donde, $v_j = (v_{Qj}^2 + v_{Dj}^2)^{\frac{1}{2}}$ es el módulo de la tensión en la j -ésima barra de carga, y α_j y β_j son parámetros (sus funciones se explicarán más adelante).

Para la parte dinámica de las cargas se utilizarán motores de inducción, representados por un modelo transitorio de dos ejes junto con la dinámica del estator

$$2H_j \dot{\omega}_j = \alpha_j (A\omega_j^2 + B\omega_j + C) P_{mj} - P_{ej} - D_{bj} \omega_j, \quad (6.21)$$

$$T'_{dq0j} \dot{e}'_{qj} = -e'_{qj} + (X_{dqj} - X'_{dqj}) i_{dj} - T'_{dq0j} \Omega_B (\omega_j - \omega_s) e'_{dj}, \quad (6.22)$$

$$T'_{dq0j} \dot{e}'_{dj} = -e'_{dj} - (X_{dqj} - X'_{dqj}) i_{qj} + T'_{dq0j} \Omega_B (\omega_j - \omega_s) e'_{qj}, \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} X'_{dqj} T'_{dq0j} \dot{i}_{qj} &= e'_{qj} + T'_{dq0j} \Omega_B (X'_{dqj} i_{qj} + 2e'_{dj} + v_{Dj}) \\ &\quad + i_{dj} (X'_{dqj} - X_{dqj} - R_{sj} T'_{dq0j} \Omega_B), \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} X'_{dqj} T'_{dq0j} \dot{i}_{dj} &= -e'_{dj} + T'_{dq0j} \Omega_B (X'_{dqj} i_{dj} + e'_{qj} - v_{Qj}) \\ &\quad + i_{qj} (X'_{dqj} - X_{dqj} - R_{sj} T'_{dq0j} \Omega_B), \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde, $P_{ej} = e'_{qj} i_{qj} + e'_{dj} i_{dj}$. Nótese que en el caso de los motores de inducción $i_{qj} = i_{Qj}$ e $i_{dj} = i_{Dj}$, es decir que las corrientes de los estatores ya se encuentran referidas al marco sincrónico.

Uno de los parámetros a variar en el análisis de bifurcaciones será la potencia activa consumida por la carga. Para que el consumo aumente proporcionalmente tanto en la carga estática como en la carga dinámica se incluyó el parámetro α_j (ver ecuaciones (6.19) y (6.21)) que indica el nivel de consumo de la carga en magnitudes por unidad, siendo $\alpha_j = 1$ en el punto de operación nominal. El parámetro β_j en la ecuación (6.20) tiene una función similar y puede ser utilizado para variar la potencia reactiva de la carga, aunque en este caso se mantendrá constante.

La definición de las variables de estado y los valores de los parámetros figuran en las Tablas 6.1 y 6.3, respectivamente.

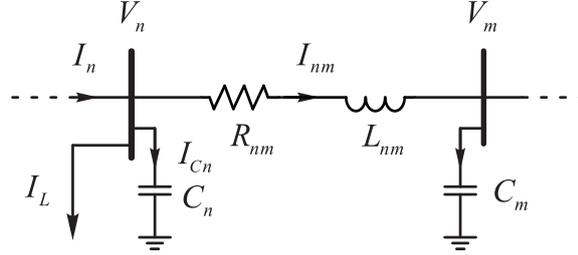


Figura 6.2: Modelo de las líneas de transmisión.

6.1.5. Líneas de transmisión

Con el fin de utilizar los programas de continuación de bifurcaciones como AUTO o MATCONT, los cuales requieren una formulación ODE del sistema, se considerará la dinámica (rápida) de las corrientes y de los voltajes en las ramas y barras de la red de transmisión (Rosehart & Cañizares, 1998, 1999). Por lo tanto, las líneas serán representadas mediante un modelo a parámetros concentrados tipo π como se muestra en la Fig. 6.2, donde la corriente por la línea que une los nodos n y m es² $I_{nm} = i_{Qnm} + j i_{Dnm}$, $V_n = v_{Qn} + j v_{Dn}$ es la tensión en el n -ésimo nodo, e $I_{Cn} = i_{QCn} + j i_{DCn}$ es la corriente que circula por el capacitor C_n . La corriente que consume una carga conectada al n -ésimo nodo es $I_{Ln} = i_{LQn} + j i_{LDn}$, y se calcula como la sumatoria de la corriente consumida por la carga ZIP (que puede obtenerse de las ecuaciones (6.19) y (6.20)) y la consumida por los motores de inducción, *i.e.* de los estados i_{qj} (6.24) e i_{dj} (6.25).

Los modelos dinámicos de la corriente y tensión en las ramas y barras de la red, respectivamente, referidos a un marco DQ rotante a la velocidad sincrónica ω_s están dados por,

$$\Omega_B^{-1} L_{nm} \dot{i}_{Qnm} = v_{Qn} - v_{Qm} - R_{nm} i_{Qnm} + \omega_s L_{nm} i_{Dnm}, \quad (6.26)$$

$$\Omega_B^{-1} L_{nm} \dot{i}_{Dnm} = v_{Dn} - v_{Dm} - R_{nm} i_{Dnm} - \omega_s L_{nm} i_{Qnm}, \quad (6.27)$$

$$\Omega_B^{-1} C_n \dot{v}_{Qn} = i_{QCn} + \omega_s C_n v_{Dn}, \quad (6.28)$$

$$\Omega_B^{-1} C_n \dot{v}_{Dn} = i_{DCn} - \omega_s C_n v_{Qn}. \quad (6.29)$$

²Para evitar confusiones en la notación se utilizará $j = \sqrt{-1}$ para la parte imaginaria.

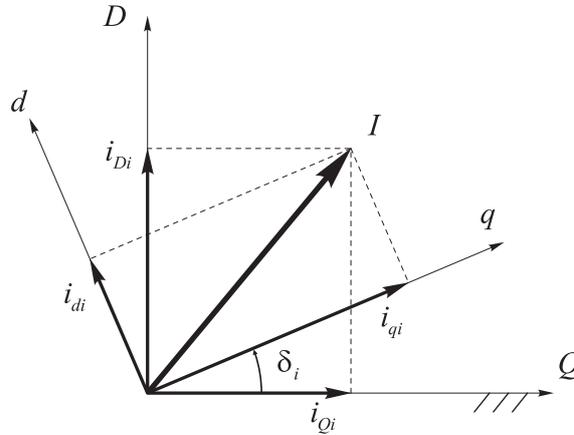


Figura 6.3: Representación esquemática del cambio de referencia al marco sincrónico.

En las barras de generación las variables i_{di} , i_{qi} , v_{di} y v_{qi} ($i = 1, 2, 3$) se encuentran expresadas en el marco de referencia local dq de cada generador (ecuaciones (6.1)-(6.6)). Entonces, para tomar en cuenta dichas corrientes es necesario expresarlas en un único marco de referencia DQ (también denominado *sincrónico*). Esto se logra aplicando la siguiente matriz de rotaciones,

$$\begin{pmatrix} x_{Di} \\ x_{Qi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_i & \text{sen } \delta_i \\ -\text{sen } \delta_i & \cos \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{di} \\ x_{qi} \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

donde x_{Di} y x_{Qi} indican en forma genérica las componentes DQ de una variable x (corriente o tensión), referidas al marco sincrónico, mientras que x_{di} y x_{qi} lo están en el marco propio de cada generador. En la Fig. 6.3 se muestra la transformación entre ambos marcos para el caso de las corrientes.

Para obtener los voltajes en *terminales* del generador ($v_{ti} = (v_{di}^2 + v_{qi}^2)^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, 3$) se rota al marco de referencia local de cada generador (dq) la tensión del nodo ubicado después del transformador correspondiente (en el marco sincrónico DQ), usando la transformación inversa de (6.30).

Gen.	Nominal		Redespacho	
	P	Q	P	Q
#1	0.716	0.270	0.482	0.314
#2	1.630	0.067	1.900	0.129
#3	0.850	-0.109	0.850	-0.088

Tabla 6.4: Potencias generadas: nominales y luego del redespacho.

6.2. Análisis de la dinámica variando α_5

La condición de operación nominal del modelo de nueve barras, *i.e.*, la potencia transmitida por los generadores, la drenada por las cargas y los voltajes en la barras se obtuvieron del libro de Anderson y Fouad (Anderson & Fouad, 1994). Estos valores se indican en las respectivas barras y generadores de la Fig. 6.1. El punto de operación, además de ser localmente estable es lo suficientemente robusto como para que el sistema pueda sobreponerse a perturbaciones típicas, tales como pequeñas variaciones en las potencias demandadas por las cargas. Por lo tanto, los generadores serán redespachados a fin de estudiar una condición de operación más exigente para el sistema que la nominal. El redespacho de las máquinas es práctica común en los sistemas de potencia reales, pudiendo realizarse en respuesta a cambios en las demandas de las cargas, por razones de seguridad, por consideraciones económicas, o ante una emergencia. Es importante destacar que el redespacho puede conducir a comportamientos oscilatorios (Dobson et al., 2001; Zecevic & Miljkovic, 2002) si no se tiene en cuenta la interacción entre los modos del sistema. En lo que sigue, la potencia mecánica del generador #2 tomará un valor cercano al máximo permitido ($P_{m2} = 1.90$ p.u.), con lo cual la máquina #1 disminuirá su potencia generada debido a la acción del regulador de frecuencia (*Governor*). Por otro lado, tanto el punto de operación de la máquina #3, como las potencias activas y reactivas consumidas por las cargas no se modificarán. Las potencias correspondientes a cada uno de los generadores en el punto nominal y luego del redespacho se muestran en la Tabla 6.4.

Teniendo en cuenta lo anterior, se analizará la dinámica del sistema al variar la potencia consumida en la barra de carga 5, por lo tanto se considerarán variaciones del parámetro α_5 . En particular se describirán los fenómenos dinámicos que producen

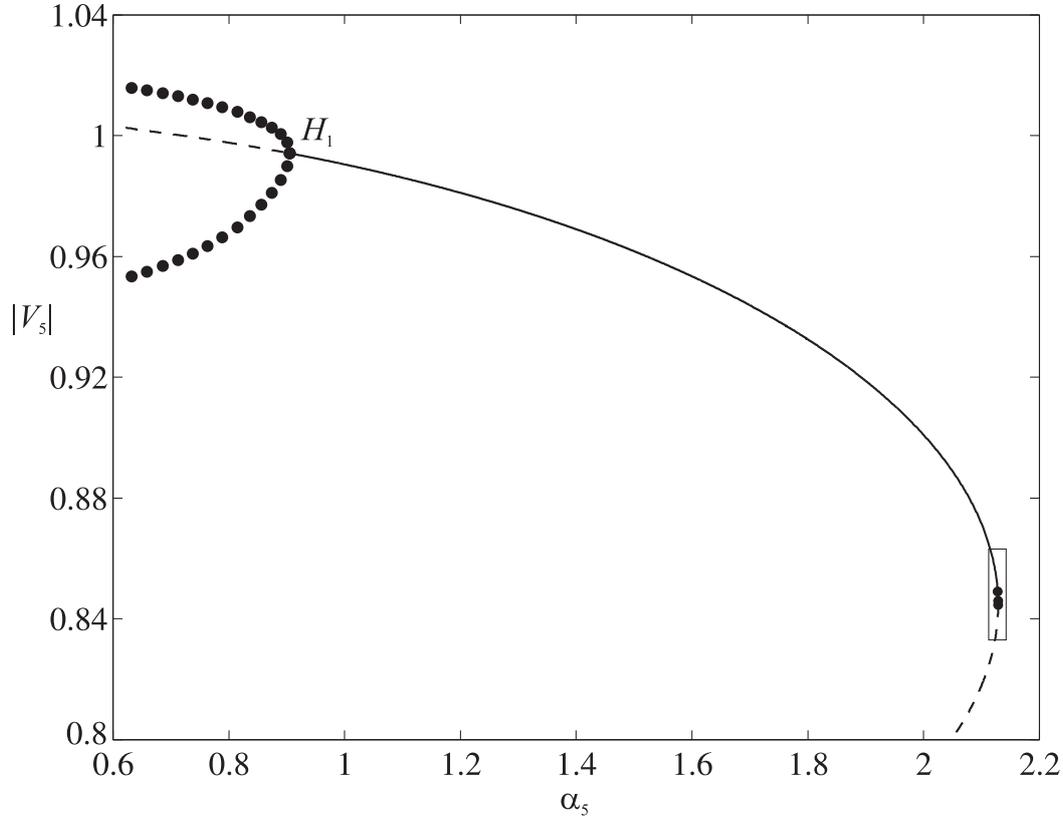


Figura 6.4: Diagrama de bifurcaciones variando α_5 .

cambios cualitativos en el comportamiento del sistema (bifurcaciones). El diagrama de bifurcaciones correspondiente se obtuvo utilizando el paquete de continuación de soluciones MATCONT (Dhooge et al., 2006). El mismo se muestra en la Fig. 6.4 y describe el comportamiento del módulo de la tensión en la barra de carga 5 al variar el parámetro α_5 . Como en ocasiones anteriores, las líneas a trazos indican puntos de equilibrio inestables, mientras que las líneas continuas son equilibrios estables. A su vez, los círculos llenos indican los valores máximos y mínimos que alcanzan las oscilaciones (ciclos límites) estables, mientras que los círculos vacíos corresponden a ciclos límites inestables.

En condiciones nominales de operación el consumo de la carga en la barra 5 corresponde a $\alpha_5 = 1$. Si se disminuye α_5 hasta alcanzar el valor indicado como H_1 en la Fig. 6.4 ($\alpha_5 = 0.9050$), el punto de operación pierde la estabilidad a causa de una bifurcación de Hopf supercrítica, *i.e.* un par de autovalores complejos conjugados se vuelven inestables

y se crea un ciclo límite estable. En este caso la amplitud del ciclo se ve incrementada para valores de α_5 decrecientes. Además, el primer coeficiente de Lyapunov de H_1 es $l_1 = -9.055773 \cdot 10^{-3}$ confirmando el hecho que es una bifurcación de Hopf supercrítica. Cabe destacar que para valores del parámetro menores que H_1 el equilibrio es inestable (la linealización posee dos autovalores con parte real positiva), como consecuencia de la bifurcación de Hopf aparecerá una oscilación acotada, y el sistema podrá operar siempre y cuando la amplitud de la oscilación sea tolerable. La cercanía de la bifurcación H_1 respecto del punto de operación nominal se debe al redespacho de potencias. Más adelante se verá que esta oscilación es debida al cruce de un modo electromecánico correspondiente al generador #2 (inestabilidad de ángulo) y que la inclusión de una unidad PSS alejará el punto de bifurcación de la condición de operación nominal.

Partiendo de $\alpha_5 = 1$ e incrementando el consumo de potencia en la barra 5, el equilibrio permanece estable mientras que el módulo de la tensión en el nodo disminuye paulatinamente, describiendo la conocida curva *nariz*, como se observa en la Fig. 6.4 (de manera similar a lo sucedido en el sistema de 3 barras al variar Q_1). En la Fig. 6.5 se muestra el detalle del rectángulo indicado en la Fig. 6.4. El punto de equilibrio se vuelve inestable para $\alpha_5 = 2.12821$ producto de una bifurcación subcrítica de Hopf H_2 ($l_1 = 4.182976$). En este caso, el ciclo límite correspondiente es inestable e incrementa su amplitud al disminuir α_5 . El equilibrio recupera la estabilidad a causa de una nueva bifurcación supercrítica de Hopf H_3 ($l_1 = -58.027851$) para $\alpha_5 = 2.12888$. En este caso la oscilación correspondiente es estable y se desarrolla hacia la izquierda. Más adelante se verá que las bifurcaciones H_2 y H_3 están asociadas a fenómenos de inestabilidad de voltaje. Al observar el comportamiento de los ciclos límites producto de H_2 y H_3 es fácil ver que ambos se encuentran conectados por una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas CF para $\alpha_5 = 2.12801^3$, donde los ciclos colisionan entre sí y desaparecen. Por lo tanto, para valores de α_5 entre CF y H_2 hay una estructura de dos ciclos anidados con distinta estabilidad y para valores inferiores a CF no hay ciclos.

Continuando con la descripción del comportamiento del equilibrio del sistema, el punto de operación permanece estable por muy poco luego de H_3 , ya que casi inmediatamente colisiona con un punto de equilibrio tipo silla en la bifurcación silla-nodo LP ($\alpha_5 = 2.12895$) indicada en la Fig. 6.5. Pasado este punto, el sistema no posee atractor

³Una estructura similar de ciclos límites fue estudiada en (Tan et al., 1995) para el sistema de potencia de tres barras.

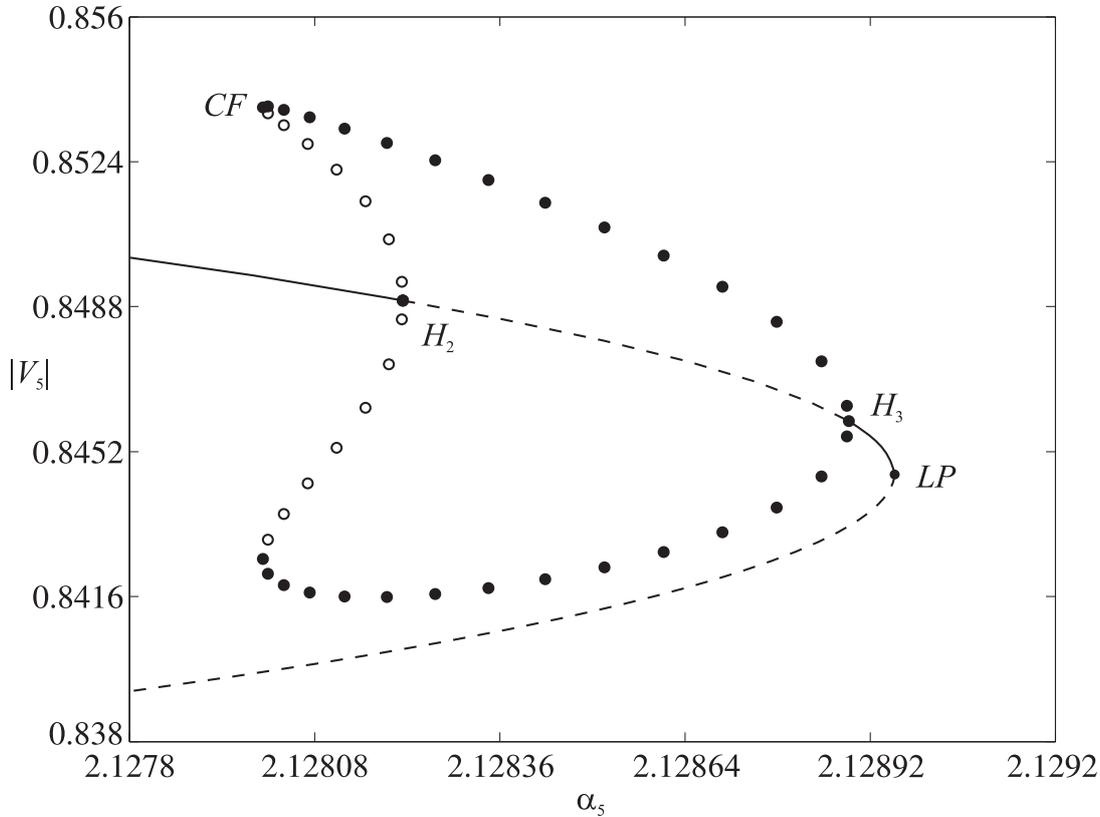


Figura 6.5: Vista expandida del recuadro de la Fig. 6.4.

alguno, por lo tanto es imposible la operación para valores de α_5 mayores que el de la bifurcación LP . Cabe mencionar que teóricamente el sistema tiene la capacidad de generar la potencia necesaria para satisfacer la demanda de la barra 5 para valores cercanos al doble de su consumo nominal ($\alpha_5 \cong 2$). Prueba de esto es el hecho que la apertura de la compuerta del generador #1 se encuentra al 69 % ($g_{c1} = 0.69$) de su capacidad en la singularidad silla-nodo LP .

Por otro lado, a medida que el sistema se acerca al límite de la estabilidad ($\alpha_5 \cong 2$), es mucho más sensible a perturbaciones ya que la base de atracción del equilibrio estable se reduce debido a la cercanía del punto silla. Por lo tanto, es muy probable que en el intervalo de α_5 indicado en la Fig. 6.5 sea más importante desde el punto de vista práctico la cercanía de las variedades del punto silla, que la estructura de ciclos provenientes de H_2 y H_3 . Aún así, es interesante reconocer las diferencias entre bifurcaciones del tipo

supercríticas como H_1 o H_3 y las del tipo subcríticas como H_2 . Esto es particularmente útil en aquellos casos en los cuales se tenga una estructura similar a la de la Fig. 6.5 y la amplitud de los ciclos sea significativa para la operación normal del sistema. Entonces, si por ejemplo se está en una condición de operación a la izquierda de H_2 y se incrementa la carga hasta cruzar H_2 , el sistema exhibirá súbitamente un salto a una oscilación de amplitud considerable. Luego, si la carga decrece más allá de H_2 la oscilación persistirá hasta el punto CF (como si fuera un efecto de histéresis). Esta situación no se presenta en las oscilaciones generadas en H_1 y H_3 , donde la amplitud crece paulatinamente. Nótese que esta información no puede extraerse de un análisis basado en la linealización.

6.2.1. Simulaciones temporales

A fin de comprender el comportamiento dinámico del sistema en cercanías de las bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 , resulta ilustrativo realizar simulaciones temporales para valores de α_5 antes y después de las singularidades. En las Figs. 6.6 y 6.7 se muestran los resultados para las bifurcaciones H_1 y H_2 , respectivamente. En ambos, se despreciaron los efectos de transitorios extremadamente rápidos provenientes de los modos de la red de transmisión.

La Fig. 6.6a muestra la evolución del sistema ante una condición inicial próxima al equilibrio inestable para un valor de α_5 menor que el correspondiente a H_1 (ver Fig. 6.4). Se observa que el sistema se aleja del equilibrio inestable en forma oscilatoria hasta establecerse en una oscilación sostenida (ciclo límite estable). El recuadro en la parte superior de la figura muestra en detalle la forma de onda de la señal temporal correspondiente al ciclo límite estable. En este caso, el sistema podría continuar operando si la amplitud de la oscilación fuera aceptable. Luego, si α_5 es mayor que el valor correspondiente a H_1 el equilibrio es estable y no existen ciclos límites. En la Fig. 6.6b se muestra la simulación temporal ante una condición inicial cercana al equilibrio. En este caso, la solución converge en forma oscilatoria al equilibrio.

El comportamiento del sistema para un valor de α_5 anterior a la bifurcación H_2 (ver Fig. 6.5) y ante una condición inicial cercana al equilibrio estable, se muestra en la Fig. 6.7a. En este caso, la solución es repelida por las variedades del ciclo inestable, de manera tal que se aproxima al equilibrio estable en forma oscilatoria. Luego, si α_5 se incrementa por sobre H_2 , la solución converge en forma oscilatoria al ciclo estable

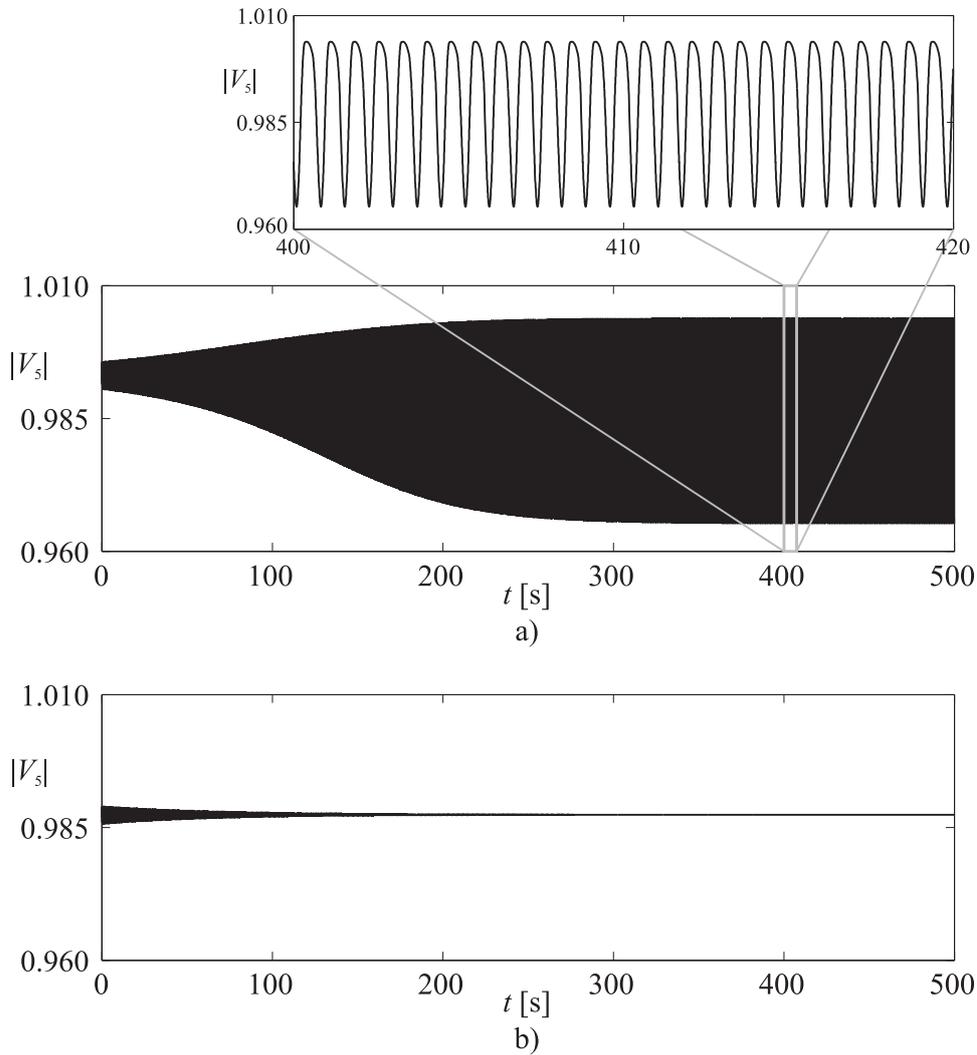
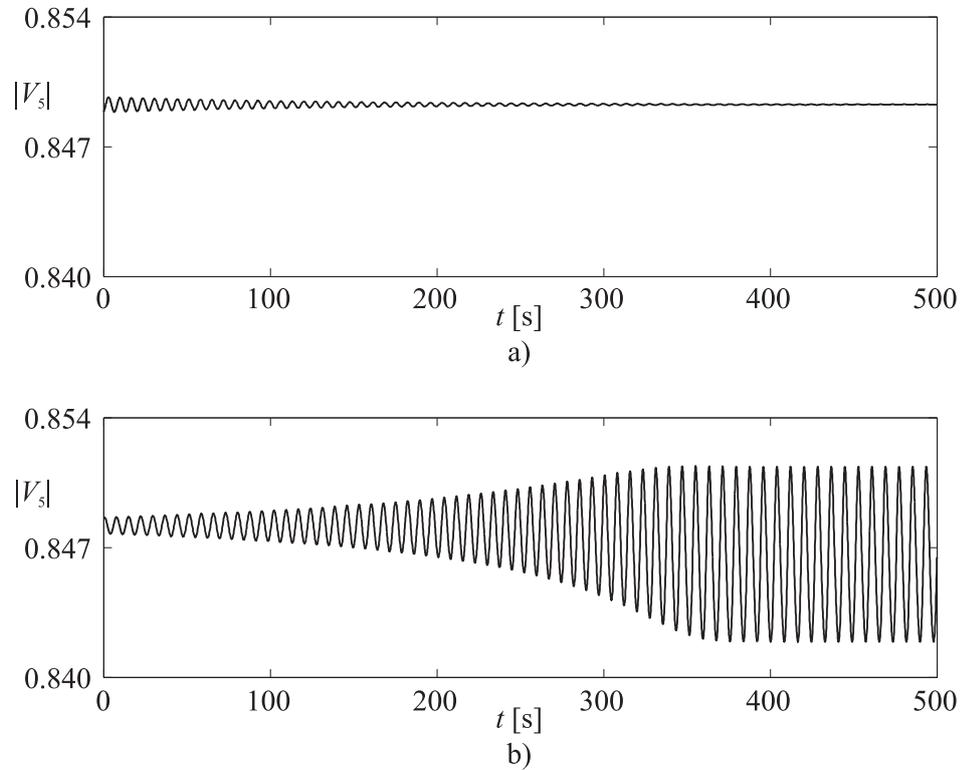
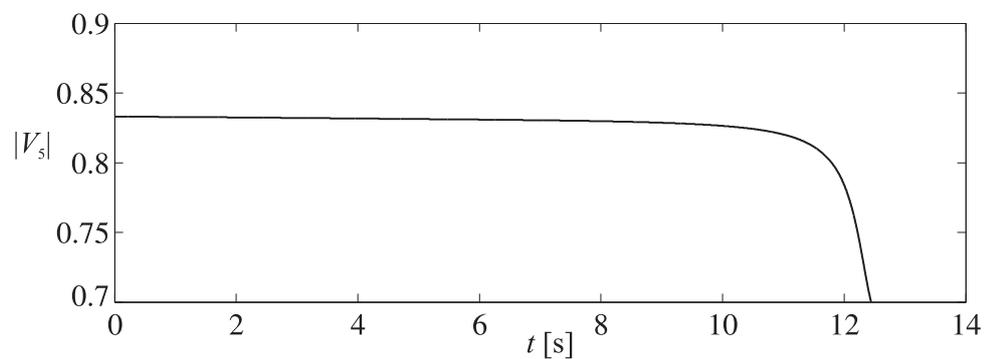


Figura 6.6: Simulaciones temporales con condiciones iniciales antes y después de H_1 .

proveniente de H_3 . Nótese que en el caso de la Fig. 6.6 la frecuencia de oscilación es mayor que en el caso de la Fig. 6.7. Esto está en relación directa con la frecuencia de los modos responsables de las bifurcaciones H_1 y H_2 .

Por último, la Fig. 6.8 ejemplifica el fenómeno de colapso de voltaje producto de la bifurcación silla-nodo (LP en la Fig. 6.5). Esta simulación se obtuvo aumentando sensiblemente el parámetro α_5 para un punto de equilibrio (estable) cercano a la silla-nodo. En la misma se aprecia que luego de aproximadamente 12 seg. la tensión en la barra cae abruptamente.

Figura 6.7: Simulaciones temporales con condiciones iniciales antes y después de H_2 .Figura 6.8: Colapso de voltaje producto de la bifurcación silla-nodo LP .

6.2.2. Factores de participación

Resulta interesante conocer cuáles de los estados del sistema son los responsables en mayor medida de las singularidades estudiadas anteriormente. Sobre todo, si se piensa en las probables soluciones, ya que por ejemplo las medidas necesarias para resolver problemas de oscilaciones electromecánicas no son las mismas que para los de regulación de tensión, entre otros. Entonces, ya que las bifurcaciones de puntos de equilibrio son fenómenos locales y pueden detectarse mediante la determinación de los autovalores del sistema, resulta provechoso aplicar la técnica de los factores de participación (Verghese et al., 1982a,b; Kundur, 1994; Sauer & Pai, 1998) para identificar qué estados son los principales responsables de dichas singularidades (en el Apéndice D se incluye una descripción de esta técnica).

La Fig. 6.9 muestra el movimiento de los autovalores más relevantes del sistema, cuando el parámetro α_5 varía en el rango de los valores utilizados en la Fig. 6.4. Las flechas indican el sentido de movimiento al aumentar α_5 . Comenzando con $\alpha_5 = 0.6$ e incrementando el valor del parámetro, un par de autovalores cruza el eje imaginario en $0 \pm j 8.547$, tornándose estables y dando lugar a la bifurcación H_1 (ver Fig. 6.9). El análisis de los factores de participación revela la influencia predominante de los estados δ_2 y ω_2 (el ángulo y la velocidad del rotor de la máquina #2, respectivamente) en dicha singularidad. Por lo tanto el modo de oscilación correspondiente está relacionado con las variables mecánicas del generador #2. Este fenómeno se conoce como “inestabilidad de ángulo” en la literatura de sistemas de potencia, ya que es causado por un modo oscilatorio relacionado con las ecuaciones electromecánicas (variables δ y ω) de la máquina (Kundur et al., 2004).

Luego, al continuar aumentando la carga otro par de autovalores cruza el eje imaginario en $0 \pm j 0.894$, para luego volver a cruzar en $0 \pm j 0.729$, dando lugar a las bifurcaciones de Hopf H_2 y H_3 , respectivamente. En esta ocasión, el par complejo conjugado se encuentra asociado a los estados e'_{q1} y r_{F1} , *i.e.*, el voltaje interno sobre el eje q del generador #1 y la tasa de realimentación de su sistema de excitación/AVR (ver Sec. 6.1.2), respectivamente. Por lo tanto, ambas bifurcaciones están relacionadas con problemas de regulación de tensión del generador #1. Nótese que este modo describe una elipsoide en el plano complejo. Además, como las bifurcaciones H_2 y H_3 ocurren muy cerca una de la otra es posible que ante la variación de dos parámetros distintivos estos puntos

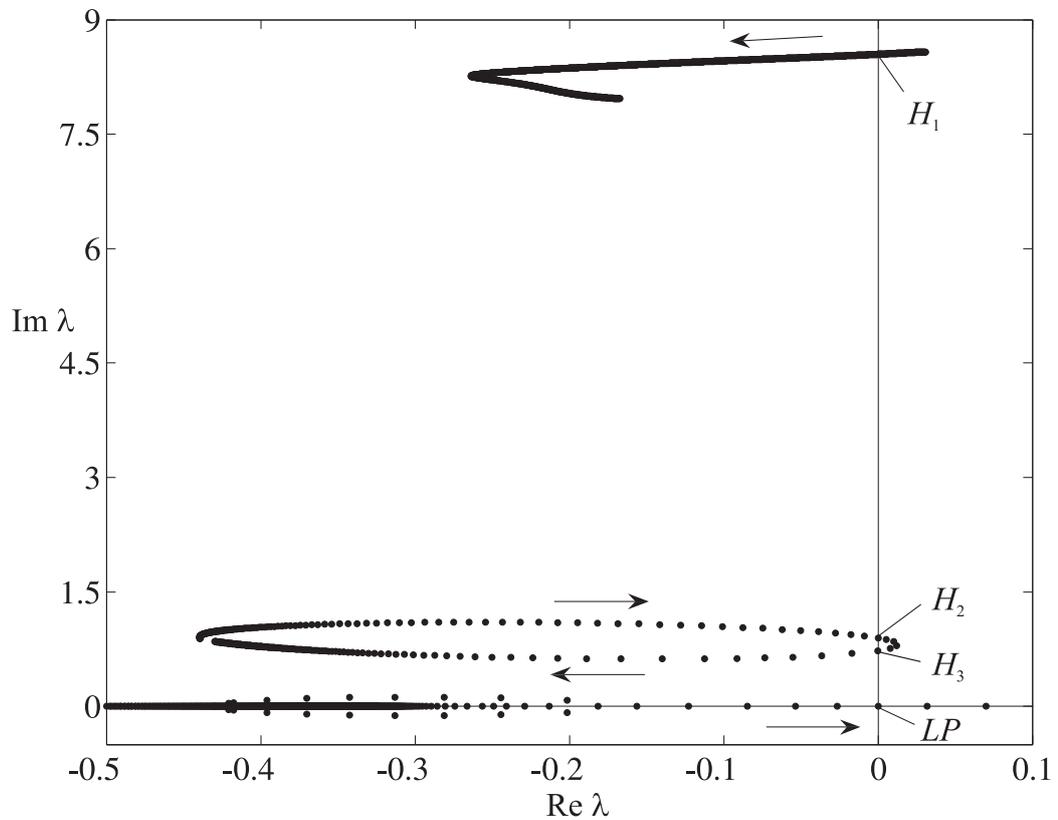


Figura 6.9: Movimiento de los autovalores más relevantes para los diagramas de bifurcación de las Figs. 6.4 y 6.5.

llegasen a colisionar entre sí, dando lugar a una bifurcación de Hopf degenerada (falta de la condición de transversalidad) la cual ha sido estudiada en profundidad en (Golubitsky & Langford, 1981; Golubitsky & Schaeffer, 1985).

Luego, casi inmediatamente después de la bifurcación H_3 , un autovalor real cruza el eje imaginario produciendo la singularidad silla-nodo LP , como se indica en la Fig. 6.9. En este caso los estados responsables son los pertenecientes a las ecuaciones que marcan la dinámica mecánica del motor de inducción de la carga en la barra 5.

Del análisis de los factores de participación se desprende que a pesar de afectar al sistema, los fenómenos estudiados con anterioridad son causados por circunstancias puntuales como por ejemplo la sintonización del AVR en el caso de H_2 y H_3 , y por ende se deberá actuar en concordancia para hallar la solución a cada problema en particular.

En este sentido, más adelante se incluirá un PSS para lidiar con la inestabilidad de ángulo en el generador #2, pero antes de ello se estudiará la dinámica variando dos parámetros simultáneamente.

Este sistema constituye un claro ejemplo de que es posible combinar técnicas de análisis de sistemas no lineales, como es la teoría de bifurcaciones, en conjunción con metodologías más clásicas como los factores de participación, a fin de realizar un estudio más profundo del sistema.

6.3. Análisis de la dinámica variando α_5 y α_8

Existen varias razones por la cuales resulta provechoso la realización de un análisis de bifurcaciones variando dos parámetros. Por ejemplo, al trazar curvas de bifurcaciones de codimensión 1 es posible determinar regiones en el espacio de los parámetros con comportamientos dinámicos cualitativamente diferentes. Además, brinda la posibilidad de estudiar bifurcaciones de codimensión 2, las cuales pueden ser interpretadas como centros organizadores de la dinámica del sistema. A su vez, mediante el previo conocimiento de la forma normal de dichas singularidades es posible revelar la existencia de fenómenos no-triviales (por ejemplo, conexiones homóclinas o heteróclinas), los cuales existen al menos en un entorno de la singularidad. A continuación se estudiará la dinámica del sistema de nueve barras al variar simultáneamente la potencia consumida por dos de las cargas.

Como se ha visto en la sección anterior, la bifurcación de Hopf H_1 es causada por un modo electromecánico asociado al generador #2, ante la disminución de la carga en la barra 5 desde la condición nominal. Por lo tanto, resulta de interés estudiar el comportamiento de dicho modo cuando se varían dos cargas simultáneamente. Argumentos similares pueden esgrimirse para las demás bifurcaciones mostradas en la Fig. 6.5. Para cumplir con esta tarea se varía (disminuye) el parámetro α_8 , o sea la potencia activa drenada por la carga conectada a la barra 8 (ver Fig 6.1). Al mismo tiempo, se varía α_5 de manera tal que se satisfaga la condición de bifurcación de Hopf. Así se obtiene la curva H_1 mostrada en la Fig 6.10. De manera análoga se obtienen las curvas para H_2 , H_3 y LP , continuando las respectivas condiciones de bifurcación. Todas las continuaciones fueron realizadas utilizando MATCONT (Dhooge et al., 2006).

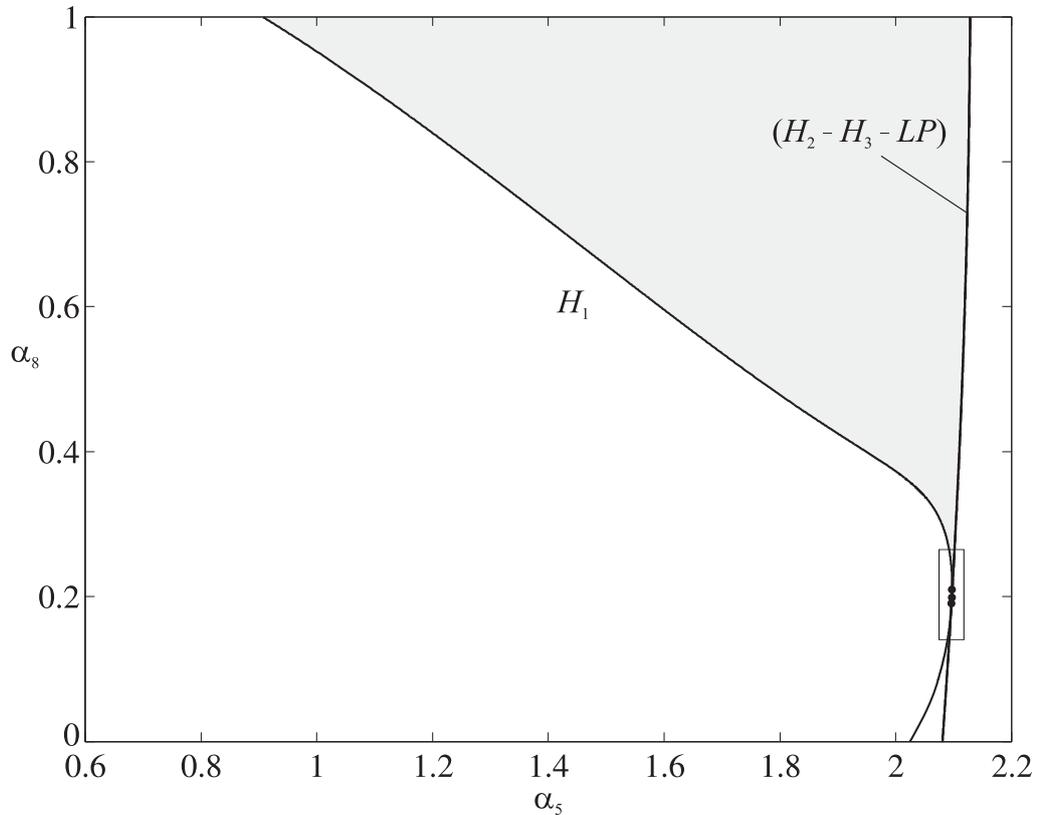


Figura 6.10: Diagrama de bifurcaciones variando α_5 y α_8 .

A fin de interpretar el diagrama de la Fig. 6.10 considérese a las cargas en sus valores nominales, *i.e.* $\alpha_5 = \alpha_8 = 1$. Si el parámetro α_8 se deja constante y se varía α_5 (corte horizontal con $\alpha_8 = 1$ en la Fig. 6.10), el comportamiento dinámico del sistema es el mostrado anteriormente en la Fig. 6.4. Por otro lado, si α_5 se mantiene constante ($\alpha_5 = 1$) y se disminuye α_8 (corte vertical en la Fig. 6.10) el sistema experimentará una inestabilidad de ángulo al cruzar la curva H_1 para $\alpha_8 \simeq 0.952$.

Luego, es posible obtener algunas conclusiones acerca de la dinámica del sistema observando las curvas de bifurcaciones mostradas en la Fig. 6.10. Uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta es que la inestabilidad de ángulo del generador #2 es uno de los principales problemas del sistema. Esto se debe a que la curva de bifurcaciones de Hopf H_1 existe para un amplio rango de valores de α_5 y α_8 , y además las restantes curvas se encuentran confinadas para $\alpha_5 \approx 2.1$, casi sin importar el valor de α_8 . Nótese

que las distancias relativas entre los fenómenos mostrados en la Fig. 6.5 (curvas H_2 , H_3 y LP en la Fig. 6.10) no se ven prácticamente alteradas por la variación de α_8 . Esto implica que el límite impuesto por la silla-nodo LP no se modifica significativamente con el consumo de la carga en la barra 8, ya que como se ha visto en la Sec. 6.2.2 dicha singularidad está asociada a la ecuación mecánica del motor de carga en la barra 5.

El área de color gris delimitada por las curvas H_1 y H_2 en la Fig. 6.10 indica una región en el espacio de parámetros α_5 y α_8 en la cual el punto de equilibrio es estable. Por lo tanto, para que el sistema opere dentro de la región gris de la Fig. 6.10, una disminución en la carga de la barra 8 debería compensarse con un aumento en la carga de la barra 5, de manera tal de que no se acelere la máquina #2 al verse disminuida en gran medida la potencia demandada por las cargas.

Es importante destacar que se debe tener especial cuidado con respecto a la robustez del punto de operación cuando el parámetro se encuentra en cercanías de cualquiera de las curvas de bifurcación. La región mencionada anteriormente no es la única donde se tienen puntos de equilibrios estables, ya que existe otra entre las curvas H_3 y LP (como se indica en la Fig. 6.5 por la línea llena entre ambas bifurcaciones). Sin embargo, la misma no tiene importancia práctica debido a que es demasiado angosta. Además, la cercanía de la curva de sillanodos sugiere que la base de atracción de los puntos de equilibrio estables dentro de esta región es insignificante desde el punto de vista práctico.

Cabe mencionar que en (Srivastava & Srivastava, 1998) se realiza una continuación variando dos parámetros en el sistema de nueve barras correspondiente al WSCC, donde los autores consideran variaciones en la ganancia del lazo de control de un dispositivo FACTS (del inglés *Flexible AC Transmission System*), de manera tal de obtener un valor de ganancia apropiado para evitar bifurcaciones de Hopf. Esto último no garantiza la ausencia de oscilaciones, ya que las mismas pueden ser originadas por fenómenos globales no necesariamente relacionados con dicha singularidad. Además, es posible que existan soluciones cuasiperiódicas debido a la interacción entre bifurcaciones de Hopf, como se verá a continuación.

6.3.1. Centros organizadores de la dinámica

El análisis efectuado variando dos parámetros revela la existencia de tres bifurcaciones de codimensión dos, entre las cuales figuran dos bifurcaciones de Hopf dobles

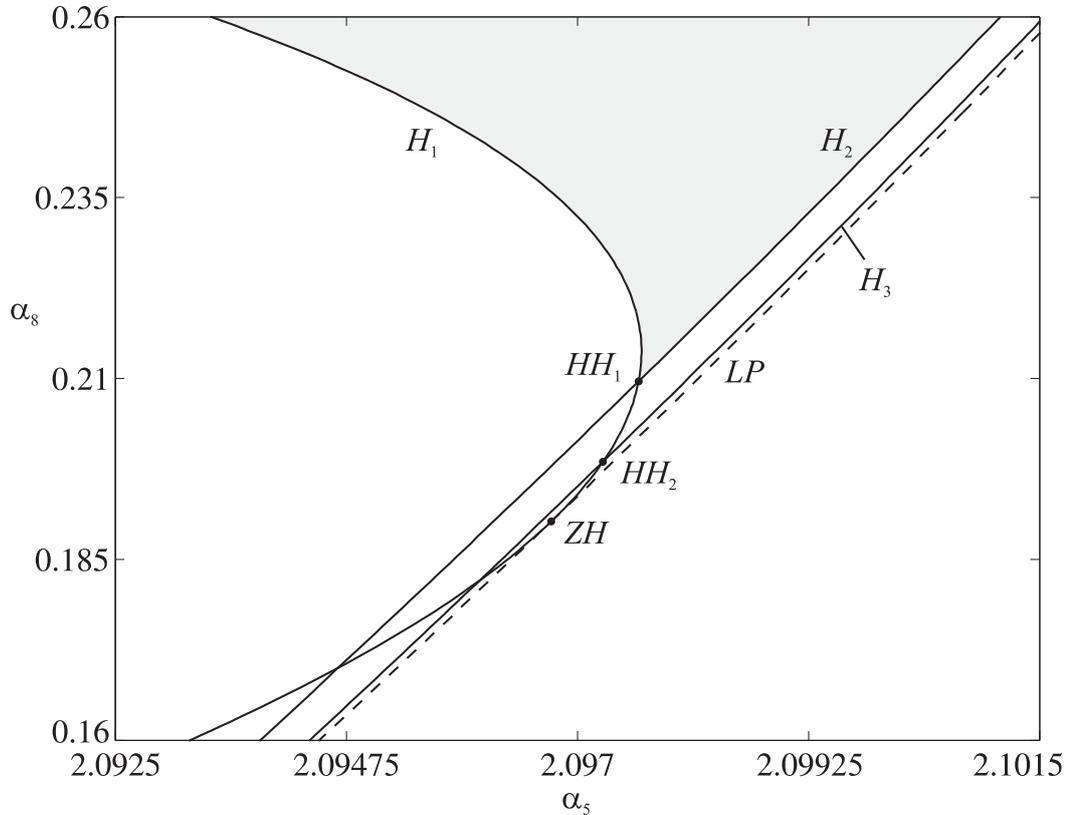


Figura 6.11: Centros organizadores de la dinámica en el plano $\alpha_5 - \alpha_8$.

(HH_1 y HH_2) y una singularidad de Gavrilov-Guckenheimer (ZH). Estas se encuentran confinadas en una pequeña región del espacio de parámetros, indicada por el rectángulo en la parte inferior derecha de la Fig. 6.10 y mostrada de manera detallada en la Fig. 6.11. A pesar de ello, de las singularidades se desprenden todas las curvas de bifurcaciones de codimensión 1 mostradas anteriormente (entre otras). Por lo tanto, pueden ser consideradas como centros organizadores de la dinámica del sistema, ya que algunas de las curvas que se generan en estos puntos, como por ejemplo las de bifurcaciones de Hopf y la de sillan-nodos establecen los límites de la estabilidad del punto de operación.

Cabe destacar que el comportamiento dinámico en un entorno de las bifurcaciones de Hopf doble y cero-Hopf no involucra únicamente curvas de bifurcaciones de puntos de equilibrio sino que también generan singularidades de soluciones periódicas, como lo indican las formas normales de ambas singularidades. A continuación se relacionará la

dinámica descrita por las formas normales de ambas bifurcaciones con la del sistema de potencia estudiado.

6.3.2. Bifurcaciones de Hopf dobles HH_1 y HH_2

Como se indicó en la Sec. 3.1.6, en el punto de bifurcación de Hopf doble se tienen dos pares de autovalores complejos conjugados de la linealización del sistema sobre el eje imaginario, indicando la ocurrencia simultánea de dos bifurcaciones de Hopf. Esta es una singularidad de codimensión 2 altamente compleja con once escenarios (despliegues) posibles. Un factor común a todos ellos y distintivo de la bifurcación es la presencia de oscilaciones cuasiperiódicas (toros), que involucran dos y hasta tres frecuencias o modos, según sea el caso. Esta singularidad ha sido reportada recientemente en varias aplicaciones prácticas con osciladores eléctricos tal como se describe en el Capítulo 4 (Yu, 2002; Revel et al., 2008b; Ma et al., 2008), sistemas mecánicos (Xie & Ding, 2005; Chamara & Coller, 2004) y sistemas neuronales (Campbell et al., 2006), mientras que los casos resonantes son estudiados en (LeBlanc, 2000; Yu, 2001).

La forma normal truncada así como todos los despliegues de la singularidad y su dinámica asociada se muestran en el Apéndice C. El procedimiento para obtener los coeficientes de la forma normal puede consultarse en (Kuznetsov, 2004), mientras que su implementación está realizada en el programa de continuación de soluciones MATCONT.

Caso complejo: HH_1

La intersección de las curvas H_1 y H_2 en la Fig. 6.11 determina la ocurrencia de una bifurcación de Hopf doble, denominada HH_1 . En este caso, los valores de los coeficientes de la forma normal (3.17) calculados con MATCONT son

$$\begin{aligned} p_{11}p_{22} &= -1, \quad \theta = -0.3001869, \quad \delta = -7.319971, \\ \Theta &= 97.27425, \quad \Delta = -5.238490 \cdot 10^3. \end{aligned} \tag{6.31}$$

En esta situación, el despliegue de la bifurcación corresponde al Caso IV complejo ($p_{11} \cdot p_{22} = -1$), cuyo despliegue se presentó en la Fig. 3.9. Por comodidad se repite este diagrama en la Fig. 6.12, en términos de los parámetros (normalizados) β_1 y β_2 (el diagrama de bifurcaciones es independiente de Θ and Δ). Nótese que se han invertido los subíndices en las denominaciones de las curvas de Hopf y Neimark-Sacker respecto

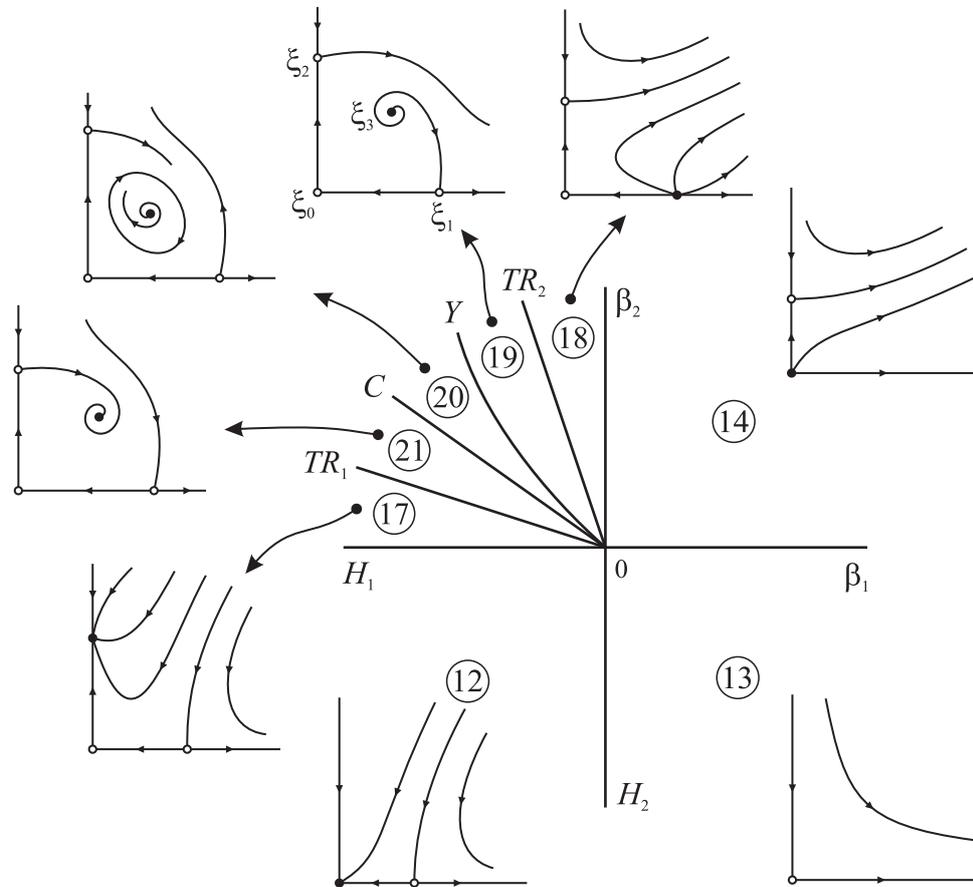


Figura 6.12: Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente a HH_1 en la Fig. 6.11. Caso VI complejo.

de la Fig. 3.9, para ajustar la descripción con los nombres utilizados en la Fig. 6.11. Por lo tanto ahora el punto ξ_1 se asocia con H_2 y el punto ξ_2 con H_1 . La descripción de las transiciones entre las sucesivas regiones puede consultarse en la Sec. 3.1.6

Los diagramas de fase de la Fig. 6.12 pueden ser relacionados con la dinámica del sistema de potencia de la siguiente manera: el punto de equilibrio ξ_0 corresponde al punto de operación del sistema. Los puntos ξ_1 y ξ_2 son ciclos límites, mientras que ξ_3 corresponde a un toro 2D. El ciclo límite indicado en la región 20 es un toro 3D, el cual tiene asociado tres frecuencias o modos. Las curvas H_1 y H_2 son las mismas que las de la Fig. 6.10 y corresponden a bifurcaciones de Hopf del punto de operación, las cuales generan los ciclos ξ_2 y ξ_1 , respectivamente. TR_1 y TR_2 (no indicadas en la Fig. 6.10) representan bifurcaciones de los ciclos límites ξ_2 y ξ_1 en toros 2D, por lo tanto son

curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker. La curva C indica una bifurcación de Hopf del equilibrio ξ_3 e Y representa una conexión heteróclina.

Luego, la región 12 corresponde a una porción del área gris en un entorno de HH_1 en la Fig. 6.11. El ciclo límite inestable (ξ_1) que existe localmente en la región 12, desaparece de manera global debido a la bifurcación CF mostrada en la Fig. 6.5, la cual describe una curva en el espacio de parámetros muy cercana a la curva H_2 que culmina (comienza) en una bifurcación de Bautin.

En la Fig. 6.11 se muestran únicamente las curvas H_1 y H_2 , a pesar de que el programa MATCONT brinda la posibilidad de continuar curvas de bifurcaciones de Neimark-Sacker variando dos parámetros, en este caso dicha continuación implica una carga computacional de enorme magnitud debido a la dimensión del sistema (70 ecuaciones de estados), por lo tanto las curvas TR_1 y TR_2 no han podido ser computadas. Sin embargo, se ha verificado la existencia de soluciones cuasiperiódicas⁴ mediante cortes variando α_8 para valores de α_5 a la izquierda de HH_1 . Es importante destacar que en un entorno de la bifurcación de Hopf doble las frecuencias del toro 2D corresponde a las de los ciclos límites de las bifurcaciones de Hopf, ya que el mismo se origina por medio de bifurcaciones locales (Neimark-Sacker) de estos ciclos límites.

Caso simple: HH_2

Existe otro punto de Hopf doble (HH_2 en la Fig. 6.11) definido por la intersección de las curvas H_1 y H_3 . En esta ocasión los coeficientes de la forma normal (3.14) toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} p_{11}p_{22} &= 1, \quad \theta = 0.07169055, \quad \delta = 11.01738, \\ \Theta &= -5.705593, \quad \Delta = 5.233819 \cdot 10^3. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Por lo tanto, el despliegue de la bifurcación corresponde al Caso II simple, que se replica en la Fig. 6.13, respetando las denominaciones del sistema de potencia. En esta ocasión ξ_1 se asocia con H_3 y ξ_2 con H_1 .

Como en el caso anterior, el diagrama de bifurcaciones de la forma normal (Fig. 6.13) junto con sus respectivos retratos de fase se asocian con la dinámica del sistema de

⁴Existen algoritmos de continuación de toros (Schilder et al., 2005), aunque los mismos no han sido probados en este sistema.

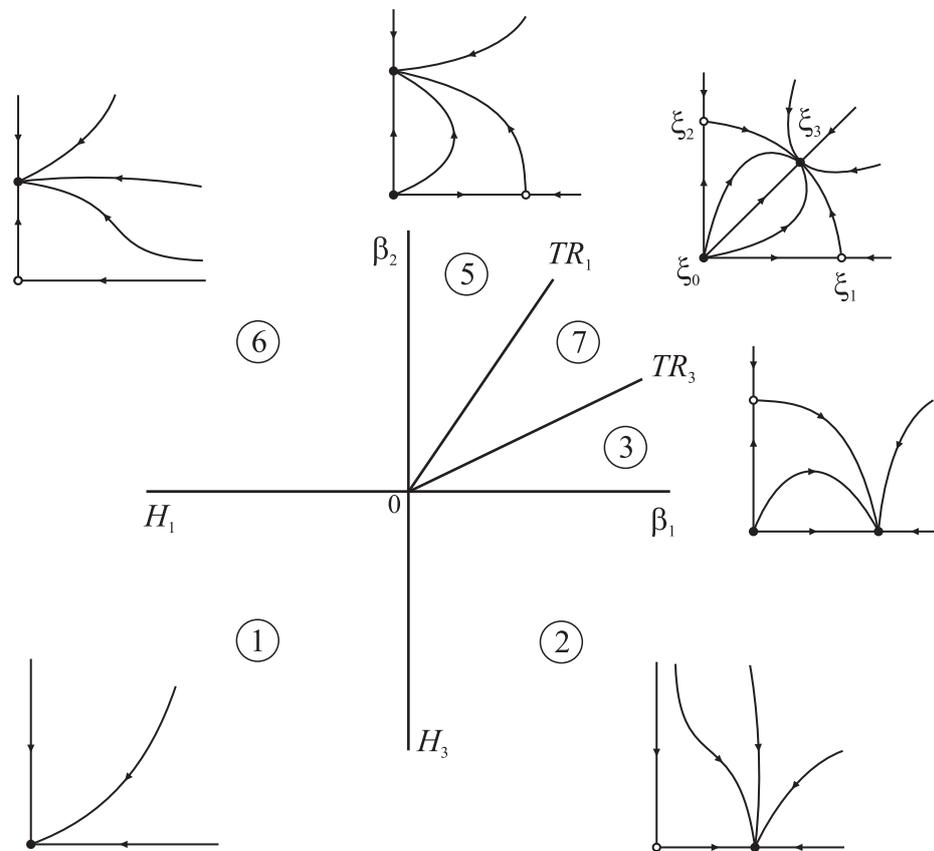


Figura 6.13: Despliegue de la forma normal de la bifurcación de Hopf doble correspondiente a HH_2 en la Fig. 6.11. Caso II simple.

potencia de la siguiente forma: ξ_0 es el punto de operación, ξ_1 y ξ_2 son ciclos límites y ξ_3 es un toro 2D. Las curvas H_1 y H_3 representan bifurcaciones de Hopf del punto de operación, creando los ciclos ξ_2 y ξ_1 , respectivamente. Las ramas TR_1 y TR_3 son bifurcaciones de Neimark-Sacker de los ciclos límites ξ_2 y ξ_1 , respectivamente. Nótese que en este despliegue no es posible la ocurrencia de un toro 3D.

Es importante notar que en la región 1 el punto de operación es estable. En apariencia ésta sería una región de operación factible, pero desde el punto de vista práctico es inviable, ya que la base de atracción del supuesto punto de operación es muy pequeña (debido a la proximidad de la silla-nodo) y el rango de variación de los parámetros es muy acotado. Por lo tanto, en esta región el sistema no tiene posibilidades de operar.

6.3.3. Bifurcación cero-Hopf

La singularidad indicada como ZH en la Fig. 6.11 es una bifurcación cero-Hopf (Gavrilov-Guckenheimer). En este punto, la curva de bifurcaciones de Hopf H_1 se vuelve tangente con la de sillanodos LP . Entonces, la linealización del sistema posee un par de autovalores complejos conjugados junto con un autovalor real sobre el eje imaginario, indicando la ocurrencia simultánea de las bifurcaciones silla-nodo y Hopf.

Esta singularidad puede ser interpretada como la generadora de la bifurcación silla-nodo mostrada en la Fig. 6.4, ya que corresponde a un punto de la curva de sillanodos que interviene en ZH . La forma normal de la bifurcación cero-Hopf es descrita en la Sec. 3.1.5. En este caso los coeficientes de la forma normal (3.6) toman los siguientes valores numéricos

$$s = 1, \theta = -4.108405 \cdot 10^{-3}, E_0 = -1, \quad (6.33)$$

donde s y θ son los coeficientes y $E_0 = -1$ indica una reversión en el tiempo de los diagramas de fase. La Fig. 6.14 muestra esquemáticamente el despliegue para el caso $s = 1, \theta < 0$ y $E_0 = -1$. Cabe destacar que en este caso, el mismo posee una órbita cuasiperiódica en un entorno de la singularidad. En (Ji & Venkatasubramanian, 1995, 1996) se muestra la dinámica asociada a una bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer que también genera órbitas cuasiperiódicas en un sistema de potencia elemental (un generador conectado a una barra infinita).

Como en el caso de las bifurcaciones de Hopf doble, el despliegue de esta singularidad se relaciona con la dinámica del sistema de potencia de la siguiente manera. El punto ξ_2 representa un equilibrio estable del sistema, mientras que ξ_1 es el punto silla que completa la curva “nariz” de la Fig. 6.4. Finalmente, ρ_1 es un ciclo límite estable creado por la bifurcación de Hopf H_1 . Este ciclo experimenta una bifurcación de Neimark-Sacker en TR , la cual genera un toro 2D estable. Existe la posibilidad que esta órbita cuasiperiódica esté en relación directa con el toro generado por las bifurcaciones de Hopf doble. Esto puede confirmarse si se continúa la curva de Neimark-Sacker asociada a ZH . En este análisis no se incluye debido a la alta carga computacional requerida.

Finalmente, es importante mencionar que las formas normales truncadas de las bifurcaciones de Hopf doble y la de la singularidad de Gavrilov-Guckenheimer se ven afectadas por la inclusión de términos de alto orden, con lo cual es posible que en el sistema real existan fenómenos adicionales no contemplados por la forma normal truncada.

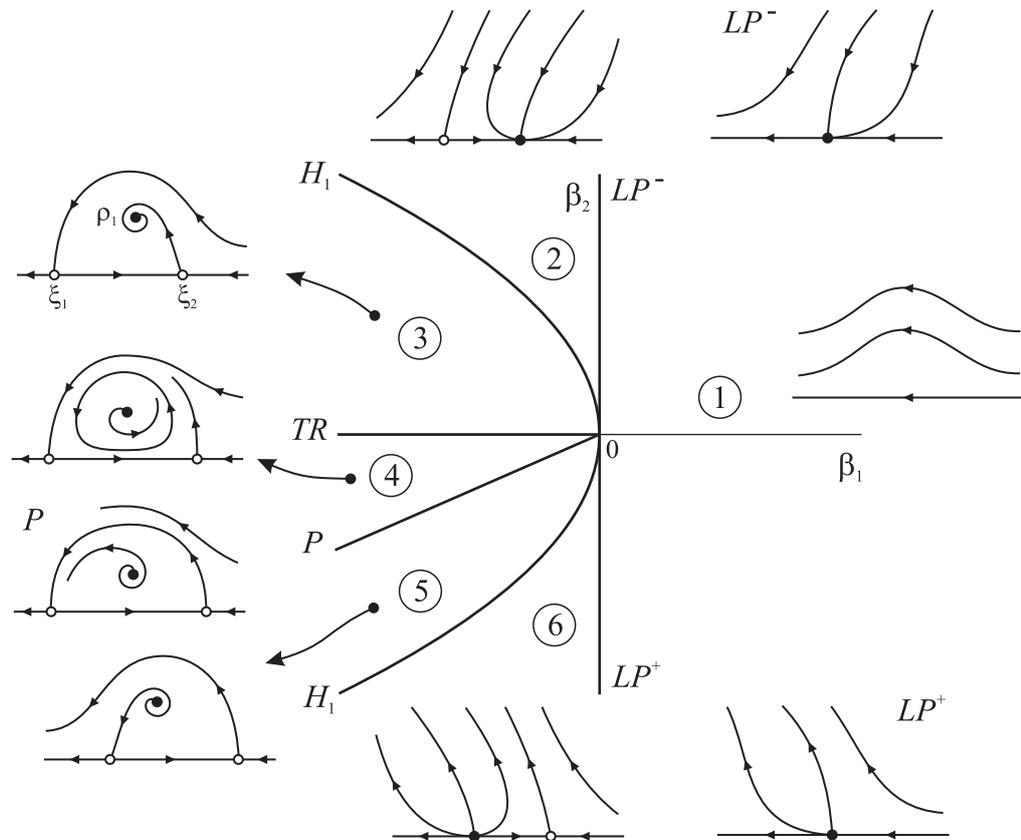


Figura 6.14: Despliegue de la forma normal de la bifurcación cero-Hopf correspondiente a ZH en la Fig. 6.11 ($s = 1$, $\theta < 0$ y $E_0 = -1$).

6.4. Inclusión de un estabilizador (PSS)

Una solución habitual al problema de inestabilidad de ángulo (bifurcación de Hopf H_1) producido por un modo oscilatorio del generador #2, es la inclusión de un equipo de estabilización de sistemas de potencia o PSS (*Power System Stabilizer*). Este dispositivo adiciona una componente de torque en fase con la velocidad del rotor, proveyendo de amortiguamiento adicional al modo oscilatorio local. El procedimiento de sintonización del PSS es descrito en (Pai et al., 1995; Kundur, 1994). Por lo general se utiliza un modelo de segundo orden que tiene en cuenta únicamente las ecuaciones mecánicas del generador en cuestión, dentro de un esquema de una única máquina conectada a una barra infinita por medio de la impedancia equivalente vista por el generador. Luego, se ajustan las ganancias del compensador para aportar fase a la frecuencia correspondiente

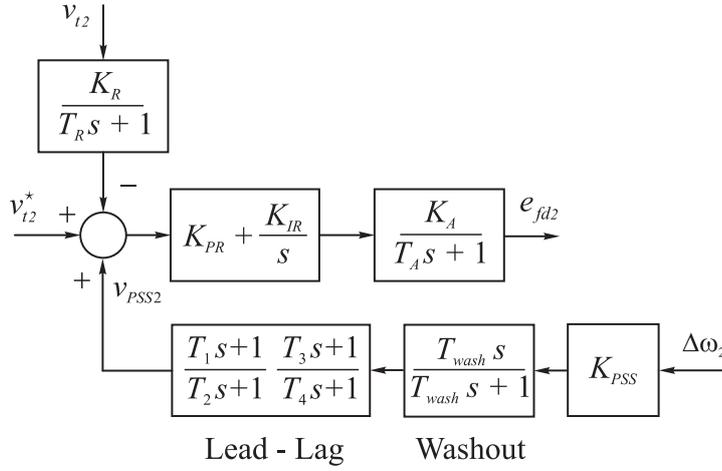


Figura 6.15: Representación en bloques del AVR y PSS del generador #2.

al modo electromecánico del generador.

La representación esquemática del PSS utilizado se muestra en la Fig. 6.15, mientras que las ecuaciones dinámicas del modelo son las siguientes

$$T_{wash} \dot{x}_{wash} = K_{PSS} T_{wash} \Delta\omega_2 - x_{wash}, \quad (6.34)$$

$$T_2 \dot{x}_{PSS} = x_{wash} + T_1 \dot{x}_{wash} - x_{PSS}, \quad (6.35)$$

$$T_4 \dot{v}_{PSS2} = x_{PSS} + T_3 \dot{x}_{PSS} - v_{PSS2}, \quad (6.36)$$

donde x_{wash} es la salida de un filtro pasa altos (*washout*) incluido para eliminar voltajes de estado estacionario debido a variaciones de frecuencia. Además, x_{PSS} y v_{PSS2} son los estados del compensador (lead-lag), siendo v_{PSS2} el voltaje de salida del PSS, el cual se adiciona en las ecuaciones (6.11 y 6.12). La señal de entrada al PSS es la variación de frecuencia del rotor de la máquina $\Delta\omega_2 = \omega_2 - \omega_s$. Los valores de las constantes son los utilizados en (Leung et al., 2005) y se indican en la Tabla 6.2.

A fin de analizar el efecto de la inclusión del PSS en la dinámica del sistema, se repetirán los estudios realizados anteriormente variando uno y dos parámetros. La Fig. 6.16 muestra el diagrama de bifurcaciones variando la carga en la barra 5, con el PSS añadido al generador #2 y ganancia $K_{PSS} = 0.1$. Las restantes cargas se encuentran en condiciones nominales, *i.e.*, $\alpha_6 = \alpha_8 = 1$. El comportamiento del punto de equilibrio es similar al mostrado en la Fig. 6.4 (sin PSS). La diferencia principal radica en que el valor de demanda de carga (α_5) donde ocurre la bifurcación de Hopf H_1 , se desplaza de

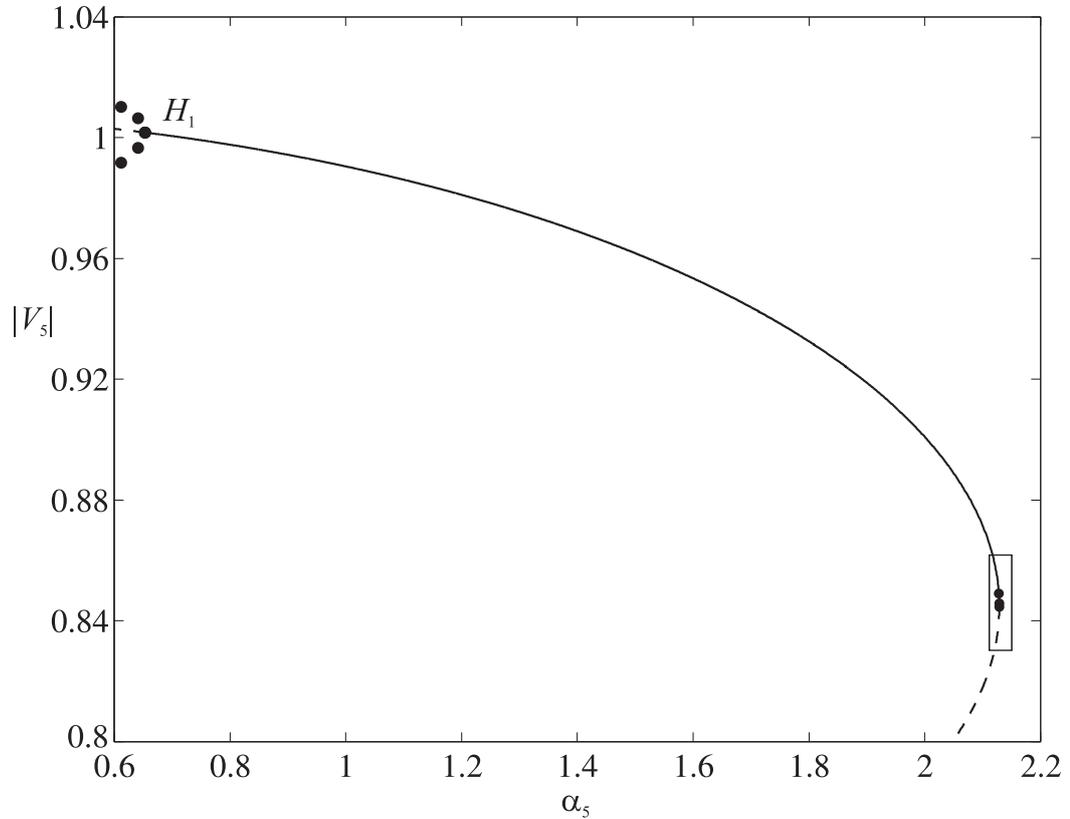


Figura 6.16: Diagrama de bifurcaciones variando α_5 con PSS en el generador #2.

$\alpha_5 = 0.9050$ a $\alpha_5 = 0.6528$ por la acción del PSS. Por lo tanto, el PSS amplía el rango de funcionamiento del sistema de potencia proveyendo amortiguamiento adicional al modo oscilatorio responsable de la bifurcación de Hopf H_1 . Al igual que el caso anterior, la bifurcación H_1 es también supercrítica y la amplitud del ciclo límite correspondiente crece para valores decrecientes de α_5 .

La Fig. 6.17 muestra el diagrama de bifurcaciones para valores del parámetro cercanos a la silla-nodo correspondientes al recuadro ubicado a la derecha de la Fig. 6.16. Nótese que todas las singularidades son las mismas que en el caso sin PSS y además los valores del parámetro para los cuales suceden son virtualmente idénticos, ya que el PSS no ejerce ninguna acción sobre estos fenómenos. Por lo tanto, como se verá luego, la frontera de estabilidad de voltaje impuesta por la curvas H_2 , H_3 y LP prácticamente no se verá afectada por la inclusión del PSS.

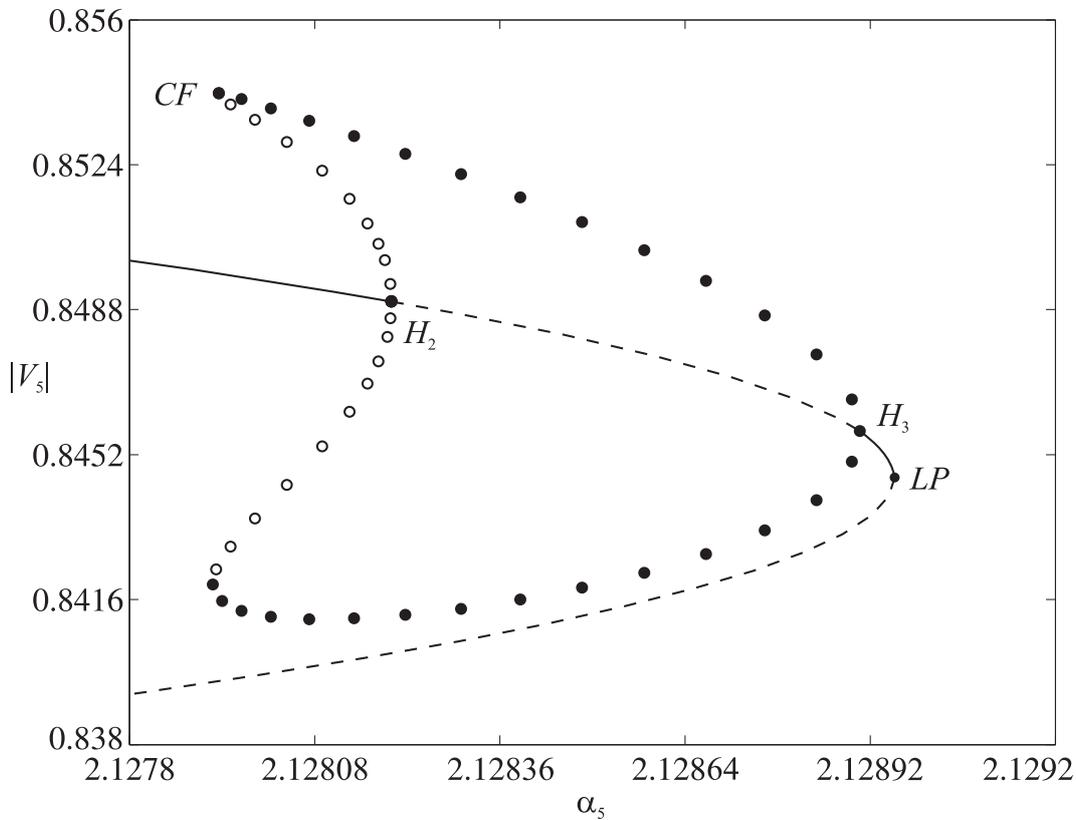


Figura 6.17: Vista expandida del recuadro de la Fig. 6.16.

El efecto estabilizante del PSS se ve también reflejado al observar el diagrama de bifurcaciones en el espacio de parámetros ($\alpha_5 - \alpha_8$). Las curvas de bifurcaciones correspondientes se muestran en la Fig. 6.18a, donde la línea punteada indica la ubicación de la bifurcación de Hopf H_1 previa a la inclusión del PSS. Claramente, la inclusión del estabilizador amplía la región de operación del sistema moviendo la curva de Hopf H_1 de manera tal que el área gris con equilibrios estables se ve incrementada. Los centros organizadores se muestran en la Fig. 6.18b, donde se advierte que no se registran cambios en la estructura de bifurcaciones comparada con la de la Fig. 6.11. Además, los despliegues de las singularidades son los mismos que los estudiados en el caso anterior sin PSS. La diferencia principal se encuentra en los valores menores de α_8 donde ocurren las bifurcaciones de codimensión dos, esto se debe a la reubicación de la curva de Hopf H_1 . A su vez, las curvas H_2 , H_3 y LP se encuentran prácticamente en la misma ubicación

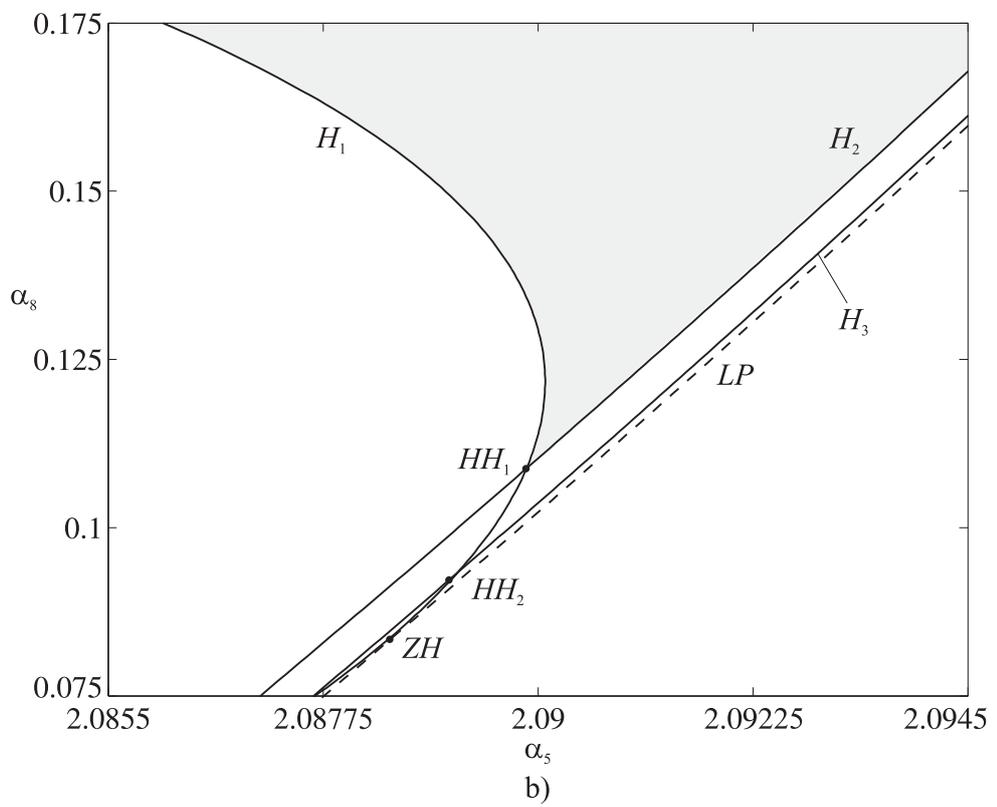
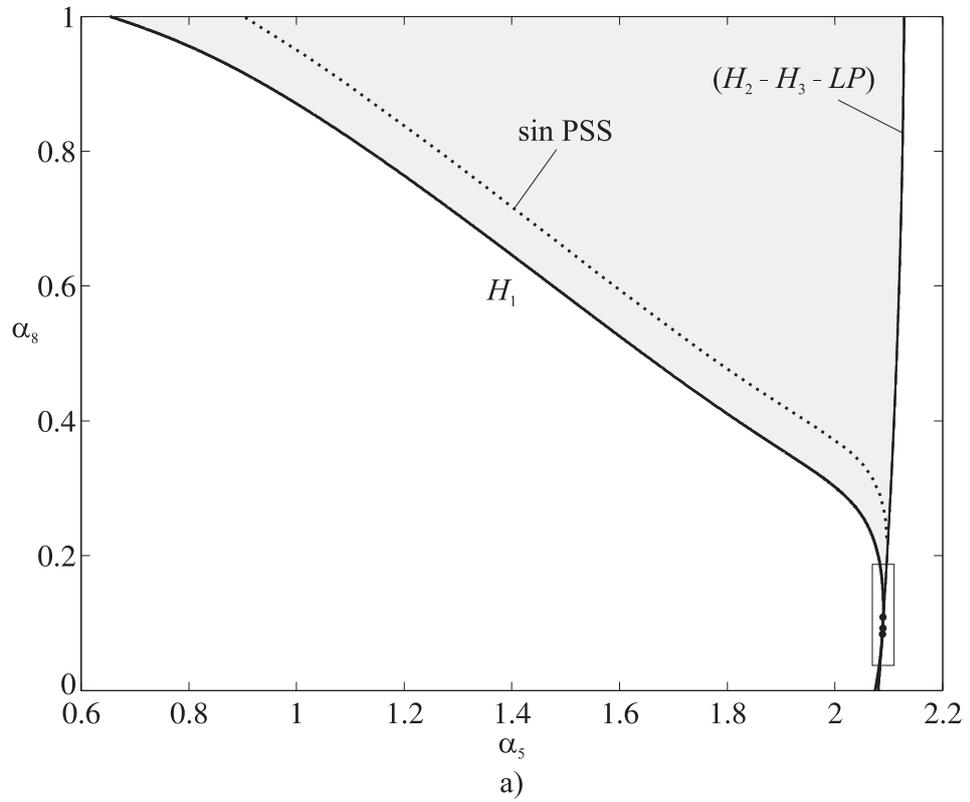


Figura 6.18: Diagrama de bifurcaciones variando α_5 y α_8 con PSS en el generador #2.
 a) Diagrama de bifurcaciones. b) Centros organizadores.

que en el caso anterior.

Por último, el incremento del valor de la ganancia K_{PSS} produce que la curva de Hopf H_1 se mueva más hacia abajo, incrementando aún más la región estable, pero valores altos de ganancia pueden ocasionar efectos de saturación en el sistema de excitación, debido a la excesiva acción del PSS.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron los comportamientos dinámicos derivados de la variación de los parámetros de dos aplicaciones relacionadas con la ingeniería eléctrica: primero en un circuito oscilador y posteriormente en dos sistemas de potencia prototípicos. Aplicando las herramientas provistas por la teoría de bifurcaciones se han caracterizado varias estructuras, que en estos sistemas actúan como centros organizadores de la dinámica. Entre ellos se destacan las singularidades de Bogdanov-Takens, de Gavrilov-Guckenheimer, la bifurcación de Hopf doble y las resonancias fuertes $1:q$, ($q = 1, 2, 3$). Estos centros organizadores dominan el escenario dinámico de ambos sistemas y resumen los mecanismos responsables de varios fenómenos dinámicos de fuerte impacto en la respuesta de los mismos, como por ejemplo la pérdida de la estabilidad del punto de operación, la aparición de oscilaciones periódicas y cuasiperiódicas, etc.

Si bien el modelo del oscilador estudiado es de valor académico, éste puede ser utilizado como plataforma experimental para ilustrar la riqueza dinámica originada por interacciones entre modos oscilatorios y resonancias (que también existen en los sistemas de potencia). En particular una de las singularidades más importantes estudiadas en esta tesis es la bifurcación de Hopf doble. La presencia de esta singularidad puede inducir contenidos espectrales no deseados en la salida del oscilador (ciclo límite), debido a la generación de oscilaciones cuasiperiódicas a partir de la bifurcación de una oscilación periódica. En consecuencia, el espectro de la señal es contaminado con frecuencias ajenas a la de la oscilación original.

En este sentido, en el Capítulo 4 se han presentado cuatro diagramas de bifurcaciones asociados a la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble no resonante, que dominan la dinámica del circuito oscilador. Tres de ellos corresponden a los denominados casos simples y el restante a uno de los casos complejos de la forma normal truncada. Se ha encontrado evidencia sobre la existencia de oscilaciones cuasiperiódicas que involucran la interacción de tres frecuencias, fenómeno conocido como toro 3D (Fig. 4.13). El mismo

es generado a partir de fenómenos globales que actúan sobre la oscilación cuasiperiódica (toro 2D), contemplados por la forma normal de la bifurcación de Hopf doble. Además, se mostró que la transición entre uno de los casos simples (Fig. 4.8) y el caso complejo (Fig. 4.10) se debe al cambio de signo del coeficiente de curvatura de una de las curvas de Hopf, provocado por dos bifurcaciones de Bautin (véase la Sec. 4.2.5).

Esta interacción entre fenómenos de codimensión 2 dio lugar a la realización del diagrama de bifurcaciones global del oscilador. Esto posibilitó la detección de dos bifurcaciones *fold-flips* sobre una diminuta isla de bifurcaciones de doble período. La coexistencia de ambas singularidades *fold-flips* genera bifurcaciones de ciclos límites adicionales que no están presentes en el despliegue de la forma normal y que afectan el escenario dinámico global. Cabe mencionar que hasta el momento el circuito oscilador es el segundo sistema¹ continuo en el cual se ha reportado la existencia de bifurcaciones *fold-flips*. Por otro lado, es la primera aplicación en la cual se encuentran interactuando con una bifurcación de Hopf doble. El colapso de ambas bifurcaciones *fold-flips* daría lugar a una singularidad de mayor complejidad que hasta el momento no ha sido reportada en la literatura de sistemas dinámicos.

El estudio del comportamiento de la “isla” de bifurcaciones de doble período derivó en el análisis de la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble. La dinámica en torno a dicha singularidad es dominada por tres resonancias fuertes de Neimark-Sacker, dos 1:2 y una 1:3. Como resultado principal se mostró que existe una conexión entre tales resonancias dada por una curva de bifurcaciones de sillanodos de ciclos límites. La estructura de curvas de bifurcaciones detectadas en un entorno de la resonancia 2:3, une los escenarios dinámicos observados en cercanías de las resonancias 1:2 y 1:3 en osciladores forzados. Cabe notar que la realización de sucesivas continuaciones en cercanías de la resonancia 2:3 indican que estas singularidades son producto de la resonancia.

El primero de los sistemas de potencia estudiados fue el de tres barras introducido por Dobson y Chiang (Dobson & Chiang, 1989). El análisis de bifurcaciones realizado en el Capítulo 5 variando la potencia reactiva consumida por la carga (Q_1), reveló la existencia de singularidades de Hopf y silla-nodo. A su vez, el diagrama de bifurcaciones resultante posee la característica forma parabólica (curva “nariz”), donde para cada valor del parámetro existen dos puntos de equilibrio (en condiciones nominales uno estable y

¹El primer sistema continuo donde ha sido reportada la existencia de una bifurcación *fold-flip* es una modificación del sistema de Lorenz (Kuznetsov et al., 2004).

otro inestable), hasta que los mismos colisionan y desaparecen en la bifurcación silla-nodo (véase la Fig. 5.2). Además, se observó que el punto de operación pierde su estabilidad antes de dicha singularidad a consecuencia de una bifurcación de Hopf supercrítica. El ciclo límite emergente de esta singularidad sufre a su vez una cascada de bifurcaciones de doble período, que desencadena en un atractor caótico. En esta tesis se mostró que dicha cascada cumple con la teoría propuesta por Feigenbaum, o sea, respeta una constante universal. Por lo tanto, el fenómeno de colapso de voltaje se produce antes de la bifurcación silla-nodo, que se encuentra ubicada en el extremo de la curva nariz.

Posteriormente, se realizó el análisis de bifurcaciones variando las potencias reactiva y activa de la carga, Q_1 y P_1 , respectivamente. De dicho análisis se determinó la presencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens que reúne las curvas de bifurcaciones de sillanodos y de Hopf (además de una curva de bifurcaciones homóclinas) observadas en el diagrama de bifurcaciones variando Q_1 . Por lo tanto, la bifurcación de Bogdanov-Takens puede ser considerada como un centro organizador de la dinámica del sistema. A su vez, a diferencia de la bifurcación de Bogdanov-Takens reportada en (Budd & Wilson, 2002), en esta tesis este centro organizador se encuentra en una región de operación factible, aunque las curvas de bifurcaciones emergentes de este punto no afectan *a priori* la región de operación nominal del sistema, ya que la curva de bifurcaciones de Hopf se extiende hacia valores de P_1 negativos.

En el Capítulo 6 se estudió la dinámica de un modelo detallado de un sistema de potencia multimáquina utilizando la teoría de bifurcaciones en combinación con una herramienta de análisis clásica como los factores de participación. La utilización de la información provista por ambas técnicas permite una más profunda interpretación de los comportamientos del sistema. Por ejemplo, mediante el análisis de bifurcaciones es posible determinar los valores de los parámetros específicos donde el punto de equilibrio del sistema se vuelve inestable debido a una bifurcación de Hopf, y además conocer la estabilidad del ciclo límite emergente. Por otro lado, el cálculo de los factores de participación permiten conocer más acerca de la naturaleza del fenómeno en sí, ya que brindan una medida de cuáles son los estados responsables de la singularidad en cuestión. En el sistema de potencia de nueve barras estudiado, se determinó que el sistema experimenta una bifurcación de Hopf ante una disminución en la demanda de potencia activa de una de las cargas y a su vez que el ciclo límite emergente es estable (el primer coeficiente de

Lyapunov resultó ser negativo). Esto último también fue corroborado mediante simulaciones de la dinámica en torno a la bifurcación de Hopf (ver Fig. 6.6). Luego, mediante el cálculo de los factores de participación se determinó que dicha oscilación es debida al cruce por el eje imaginario de un modo oscilatorio (par de autovalores complejos conjugados) asociado a la ecuación electromecánica del generador #2 (estados δ_2 y ω_2). Este fenómeno es conocido en la literatura de sistemas de potencia como inestabilidad de ángulo, y la solución más recurrente es la colocación de una unidad PSS en el generador en cuestión. Por lo tanto, se adicionó tal dispositivo en el generador #2 y se observó su efecto estabilizante en el nuevo diagrama de bifurcaciones, manifestado a través del corrimiento de la bifurcación de Hopf que originó el problema.

Mediante el análisis de bifurcaciones ante variaciones simultáneas de dos parámetros se mostró que es posible extraer información adicional del comportamiento del sistema, como por ejemplo la ubicación de centros organizadores de la dinámica, como la bifurcación de Hopf doble y la singularidad de Gavrilov-Guckenheimer. La detección y el análisis de la bifurcación de Hopf doble en sistemas de potencia es una de las contribuciones de esta tesis. Luego, por medio del estudio de las formas normales de tales singularidades resulta posible inferir la aparición de fenómenos no triviales, como por ejemplo las oscilaciones cuasiperiódicas. En el caso del sistema WSCC las bifurcaciones de Hopf doble (HH_1 y HH_2 en la Fig. 6.11) relacionan un modo electromecánico (H_1) con uno vinculado con el control de la tensión en la barra de generación (H_2 ó H_3). Este es un fenómeno interesante ya que ambos modos poseen distintos orígenes y ante la aparición de problemas en alguno de ellos, las soluciones son muy diferentes. Además, el análisis de bifurcaciones variando dos parámetros permite determinar regiones en las cuales es posible la operación del sistema. Sin embargo, es necesario tener precaución al trabajar en cercanías de las curvas de bifurcaciones que delimitan tales regiones, ya que es de esperarse que la base de atracción de los puntos de operación sea cada vez más pequeña cuanto más cerca se encuentren de tales curvas.

Si bien la utilización de los programas de continuación de soluciones en los sistemas de potencia requiere de un gran esfuerzo computacional, mayormente debido a la gran dimensión del sistema, los algoritmos de continuación son bastante robustos (no dependen de la estabilidad de las soluciones) si sus parámetros de control internos poseen los valores adecuados. Además, constituyen una valiosa herramienta para el estudio de

fenómenos dinámicos, que son imposibles de detectar mediante un análisis basado en la linealización.

7.1. Contribuciones de la tesis

A continuación se enumeraran en forma sintética cuales son las contribuciones de la tesis.

Los aportes realizados mediante el estudio de la dinámica del circuito oscilador presentado en el Capítulo 4 son:

- i) Análisis del mecanismo de transición entre varios despliegues de la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble (incluyendo uno de los casos complejos).
- ii) Interacción entre bifurcaciones *fold-flip*. El circuito oscilador es uno de los pocos sistemas de tiempo continuo en el cual se ha reportado la existencia de dicha singularidad, y es el primero en el cual se muestran dos bifurcaciones *fold-flip* interactuando entre sí.
- iii) Estudio de la resonancia 2:3 de la bifurcación de Hopf doble. Esta singularidad no se encuentra documentada en la literatura especializada.

Por otro lado, en relación con el modelo reducido de I. Dobson y H. D. Chiang estudiado en el Capítulo 5 las contribuciones son:

- i) Verificación por medio de la construcción del mapa de Lorenz que la cascada de bifurcaciones de doble período se organiza de acuerdo a la teoría universal propuesta por M. J. Feigenbaum.
- ii) Análisis de una bifurcación de Bogdanov-Takens para un valor de consumo de potencia activa positivo.

Por último, algunos de los aportes realizados mediante el estudio de la dinámica del sistema de 9 barras del WSCC (Capítulo 6) son:

- i) Caracterización de bifurcaciones de codimensión 2 en un sistema de potencia multimáquina con gran detalle de modelado.
- ii) Estudio de la bifurcación de Hopf doble como un nuevo centro organizado de dinámica en sistemas de potencia eléctrica.

7.2. Líneas de trabajo futuras

Si bien las técnicas de análisis de bifurcaciones aportan resultados interesantes, hoy por hoy la capacidad de cómputo ofrece una limitación al uso de las mismas especialmente si la dimensión del modelo es extremadamente grande (como sucede en un sistema de potencia real). En estos casos una opción sería abordar el estudio del sistema de potencia desde el punto de vista de grandes redes interconectadas, estudiando en primera instancia las características macroscópicas del sistema, y luego en caso de ser necesario, profundizar el detalle en una parte reducida del sistema que requiera de más atención.

Por otro lado, si el estudio es enfocado a una problemática particular (como por ejemplo, fenómenos de resonancia subsincrónica) resulta interesante acercar más aún a la realidad el análisis incrementando el detalle y la complejidad del modelo. Así como la utilización de modelos no suaves que contemplen restricciones físicas del sistema real, discontinuidades y eventos discretos.

Otra línea de trabajo posible consiste en comenzar a investigar la aplicabilidad de estas técnicas en la evaluación del impacto en la dinámica del sistema de la adición de nuevas fuentes de energía (e.g. generadores eólicos, parques solares, etc.). No obstante cabe destacar que en este punto existe aún una gran variedad de problemas tecnológicos que no poseen una solución definitiva.

Apéndice A

Formas normales y variedades centros

A.1. Formas normales topológicas de bifurcaciones

La *forma normal* de una bifurcación está dada por un conjunto mínimo de ecuaciones que representa el comportamiento dinámico local (normalizado) generado por la singularidad en cuestión. A su vez, la forma normal por si misma puede ser considerada como un sistema dinámico dependiente de parámetros. La importancia de las formas normales en el estudio de las bifurcaciones en sistemas dinámicos radica en que es posible extrapolar la información provista por las mismas (que se conoce de antemano), con la dinámica del sistema en estudio en un entorno de la singularidad. Para lograr esta equivalencia, primero es necesario establecer las condiciones para que dos sistemas sean *similares*. Por lo tanto, sean dos sistemas dinámicos

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.2})$$

donde, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ son variables (o estados), $\alpha \in \mathbb{R}^m$ y $\beta \in \mathbb{R}^m$ son parámetros y f y g son funciones suaves.

Definición A.1 (Equivalencia topológica) *El sistema dinámico (A.1) es topológicamente equivalente al sistema (A.2) si*

- i) *existe un homeomorfismo¹ en el espacio de los parámetros $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\beta = p(\alpha)$, y además,*
- ii) *existe otro homeomorfismo (que depende de los parámetros) en el espacio de estados $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $y = h_\alpha(x)$ que mapea órbitas de (A.1) para valores fijos de α , en órbitas del sistema (A.2) para valores fijos de β , preservando la dirección del tiempo.*

¹Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo, continuo cuya inversa existe y es también continua.

El homeomorfismo p transforma los parámetros del sistema (A.1) en parámetros del sistema (A.2), y viceversa. Los espacios de estados se mapean a través de h_α ². Teniendo en cuenta esta definición se puede concluir que *sistemas topológicamente equivalentes poseen diagramas de bifurcaciones equivalentes*. La Definición A.1 puede restringirse al caso local y para pequeñas variaciones en los parámetros.

Definición A.2 (Equivalencia topológica local) *Los sistemas (A.1) y (A.2) se dicen localmente topológicamente equivalentes, si existe un mapa $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha, p(\alpha))$, definido en un entorno de $(x, \alpha) = (0, 0)$ tal que,*

- i) $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo definido en un entorno de $\alpha = 0$ y $p(0) = 0$,*
- ii) $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo dependiente de los parámetros, definido en un entorno U_α de $x = 0$, $h_0(0) = 0$, el cual mapea órbitas de (A.1) dentro de U_α en órbitas de (A.2) contenidas en $h_\alpha(U_\alpha)$, preservando la dirección del tiempo.*

Esta definición establece que, dados dos entornos alrededor del origen, U_α y V_β , de diámetros no nulos y acotados uniformemente por α y β , y para pequeñas variaciones de los parámetros, el homeomorfismo h_α mapea órbitas del sistema (A.1) dentro de U_α en órbitas de (A.2) en $V_{p(\alpha)}$, preservando su orientación.

Estas definiciones sirven de base para comprender la potencialidad de los resultados provistos por las formas normales de las bifurcaciones. Más adelante se verá que dado un sistema de dimensión n que experimenta una singularidad, es posible obtener un sistema topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación en cuestión. Entonces, la descripción local de la dinámica de la forma normal (conocida de antemano) puede ser utilizada como punto de partida para comprender el panorama dinámico del sistema bajo estudio. Entonces, en caso de tratar con bifurcaciones locales en sistemas continuos (o discretos) las formas normales topológicas proveen los diagramas de bifurcaciones universales, que resultan localmente topológicamente equivalentes a los hallados en sistemas genéricos.

²Esta definición también se conoce como equivalencia topológica *débil*, ya que el homeomorfismo h_α puede no ser continuo en α .

A.1.1. Forma normal: definición

Con el fin de lograr una definición de *forma normal* de una singularidad, se construirá el siguiente sistema polinomial en ξ_i ($i = 1, \dots, n$),

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (\text{A.3})$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ son variables, $\beta \in \mathbb{R}^k$ parámetros y $\sigma \in \mathbb{R}^l$ los coeficientes de las ecuaciones polinómicas. Además, el sistema (A.3) posee un punto de equilibrio $\xi = 0$ para $\beta = 0$ que satisface k condiciones de bifurcación, o sea, se tiene una bifurcación de codimensión k en el origen.

Sea el siguiente sistema diferencial

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.4})$$

donde, nuevamente $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ son las variables y los parámetros, respectivamente, y también tiene un punto de equilibrio en $x = 0$ para $\alpha = 0$, que satisface las mismas k condiciones de bifurcación.

Definición A.3 (Forma normal topológica) *El sistema (A.3) es una forma normal topológica de la bifurcación en el origen, si cualquier sistema genérico (A.4) que satisface todas las condiciones de bifurcación en el equilibrio $x = 0$ para $\alpha = 0$ es localmente topológicamente equivalente al sistema (A.3) en un entorno del origen, para ciertos valores de los coeficientes σ_i .*

Existen un par de aspectos importantes que se desprenden de esta definición. En primer lugar, todas las formas normales que se tendrán en cuenta en esta tesis, poseen un número finito de regiones distintivas en el espacio de los coeficientes σ_i , $i = 1, 2, \dots, l$, para las cuales se tienen distintos diagramas de bifurcaciones (despliegues) que no son topológicamente equivalentes entre sí. A su vez, los distintos despliegues posibles de una misma bifurcación estarán dados por los valores que adoptan los coeficientes σ_i calculados en la singularidad. El otro punto importante se refiere a la no degeneración del sistema (A.4). Esto significa que dicho sistema deberá satisfacer cierto número de condiciones de *no degeneración* a fin de evitar casos patológicos, no contemplados por la forma normal. Generalmente, dichas condiciones son expresadas en forma de desigualdades algebraicas, por ejemplo,

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (\text{A.5})$$

donde N_i se obtiene como resultado de derivadas parciales de $f(x, \alpha)$ respecto de x y de α evaluadas en el punto crítico $(x, \alpha) = (0, 0)$. Aquellas condiciones obtenidas por medio de derivadas parciales de $f(x, \alpha)$ respecto de α , son usualmente denominadas *condiciones de transversalidad*.

A.2. Bifurcaciones en sistemas n -dimensionales

La forma normal de una bifurcación posee la dimensión mínima necesaria para describir el comportamiento dinámico en un entorno de la singularidad. Por ejemplo, en el caso de la bifurcación de Hopf, la dimensión mínima del espacio de estados es dos. A su vez, dicha bifurcación puede presentarse en sistemas n -dimensionales, donde sus efectos son esencialmente los mismos. Lo mismo puede extenderse a cualquier otra bifurcación.

Por lo tanto, existen ciertas variedades³ invariantes donde sucede la bifurcación propiamente dicha, mientras que en las restantes variedades el comportamiento es trivial, por ejemplo, variedades exponencialmente atractivas (o repulsivas). Aquellas variedades que capturan la dinámica más representativa de una determinada bifurcación se las denomina *variedades centros*.

Para analizar el comportamiento dinámico de un sistema n -dimensional ante una determinada bifurcación es necesario primero efectuar una reducción del sistema a la variedad centro. Existen varias técnicas de reducción disponibles en la literatura [véase por ejemplo (Guckenheimer & Holmes, 1983; Wiggins, 1990; Kuznetsov, 2004)]. Una vez reducido el sistema n -dimensional a la variedad centro, es necesario aplicar sucesivos cambios de coordenadas (en general no lineales) para expresar el sistema en la forma normal de la bifurcación. En muchas ocasiones las fórmulas para el cálculo de los coeficientes de la forma normal se obtienen del proceso de reducción y las expresiones requieren únicamente del conocimiento del sistema original.

A continuación se enunciarán los teoremas que permiten la reducción de un sistema n -dimensional a la variedad centro. Las pruebas de los mismos pueden consultarse en la literatura de sistemas dinámicos (Kelley, 1967; Shoshitaishvili, 1972; Hirsh et al., 1977; Carr, 1981; Vanderbauwhede, 1989; Kirchgraber & Palmer, 1990). El objetivo final es

³Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad suave de dimensión $m \leq n$, si para cada $x \in M$ existe un entorno $W \subset M$, que es difeomorfo a un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, es decir, existe $\phi : W \cap M \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$, donde ϕ se denomina *sistema de coordenadas* y ϕ^{-1} es una *parametrización*.

enunciar un teorema que establece que en el caso de una bifurcación, la dinámica *interesante* está restringida a la variedad centro. Los resultados presentados a continuación son equivalentes a los utilizados en sistemas discretos (Kuznetsov, 2004).

A.2.1. Variedad centro en sistemas sin parámetros

Sea el siguiente sistema de tiempo continuo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.6})$$

donde f es suave y además $f(0) = 0$. Los autovalores del Jacobiano evaluado en el equilibrio $x_0 = 0$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$), corresponden a un punto de equilibrio no hiperbólico, o sea, existen n_0 autovalores con parte real nula, n_+ ubicados en el semiplano derecho y n_- en el semiplano izquierdo, tal que $n_0 + n_+ + n_- = n$. Además, sean T^c el espacio generado por los autovectores (generalizados) correspondientes a los n_0 autovalores críticos ($\text{Re } \lambda = 0$) y φ^t el flujo asociado al sistema (A.6).

Teorema A.4 (Teorema de la variedad centro) *Existe localmente una variedad invariante suave $W_{loc}^c(0)$ de (A.6) de dimensión n_0 , la cual es tangente a T^c en $x = 0$.*

Además, existe un entorno U alrededor de $x_0 = 0$ tal que, si $\varphi^t x \in U$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), entonces $\varphi^t x \rightarrow W_{loc}^c(0)$ para $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Definición A.5 (Variedad centro local) *La variedad W_{loc}^c se denomina variedad centro local.*

Para simplificar la notación, de ahora en más la variedad centro local será indicada como W^c .

Existen varias consideraciones importantes del Teorema A.4

- i) El segundo postulado del teorema establece que las órbitas cercanas al equilibrio para $t \geq 0$ o $t \leq 0$ tienden a W^c en la dirección del tiempo correspondiente. En el caso particular en que todas las órbitas que comienzan en U se mantienen en esta región para siempre (una condición necesaria es que $n_+ = 0$) la variedad centro se denomina *atractiva*, ya que dichas órbitas se aproximan a $W^c(0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

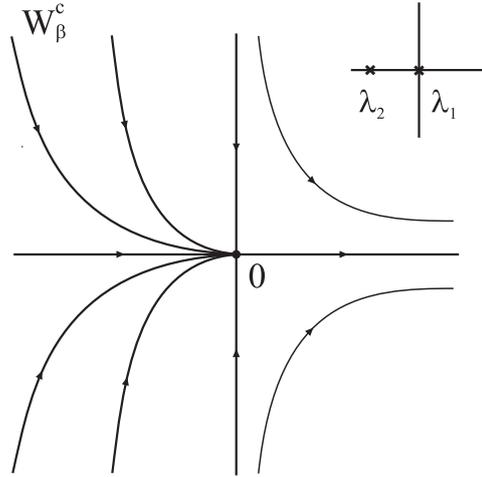


Figura A.1: Variedades centro del sistema (A.7).

ii) La variedad centro no es única. Por ejemplo, sea el siguiente sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

donde el origen $(x, y) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio con autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$ (bifurcación silla-nodo). Este sistema posee una familia de variedades centros de dimensión 1, como se muestra esquemáticamente en la Fig. A.1. Las mismas están dadas por

$$W_\beta^c = \{(x, y) : y = \psi_\beta(x)\}, \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \beta e^{\frac{1}{x}} & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

iii) La variedad centro posee la misma suavidad que f , o sea, si $f \in C^k$ entonces $W^c \in C^k$.

La Fig. A.2 muestra una representación esquemática de la variedad centro correspondiente a una bifurcación de Hopf en un sistema de tres dimensiones. La linealización del sistema en el punto de equilibrio x_0 posee dos autovalores complejos conjugados con parte real cero $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, mientras que el autovalor restante tiene parte real negativa,

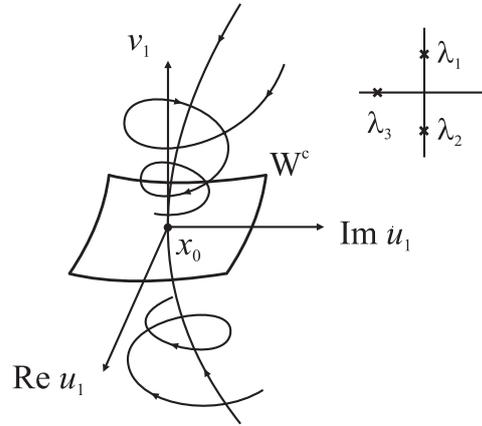


Figura A.2: Representación esquemática de la variedad centro ante una bifurcación de Hopf en un sistema de dimensión 3.

i.e. $\lambda_3 < 0$. La variedad centro es tangente al espacio generado por las partes real e imaginaria del autovector asociado a λ_1 (u_1 en la Fig. A.2), mientras que la dirección asociada al autovalor real λ_3 está representada por el vector v_1 .

A.2.2. Principio de reducción a la variedad centro

Para caracterizar la dinámica alrededor de un punto de equilibrio no hiperbólico es conveniente expresar el sistema (A.6) en la base de los autovectores generalizados, de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, v), \\ \dot{v} = Cv + h(u, v), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

donde $u \in \mathbb{R}^{n_0}$, $v \in \mathbb{R}^{n_- + n_+}$, B es una matriz de dimensión $(n_0 \times n_0)$ que contiene los autovalores sobre el eje imaginario y C es una matriz de $((n_- + n_+) \times (n_- + n_+))$ la cual no posee autovalores con parte real cero. Además, g y h son funciones cuyas expansiones de Taylor comienzan al menos en el coeficiente cuadrático. Una variedad centro de (A.9) puede expresarse como el gráfico de una función suave (véase la Fig. A.3),

$$W^c = \{(u, v) : v = V(u)\}, \quad (\text{A.10})$$

donde $V : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_- + n_+}$ y debido a la tangencia de W^c con T^c , $V(u) = (||u||^2)$.

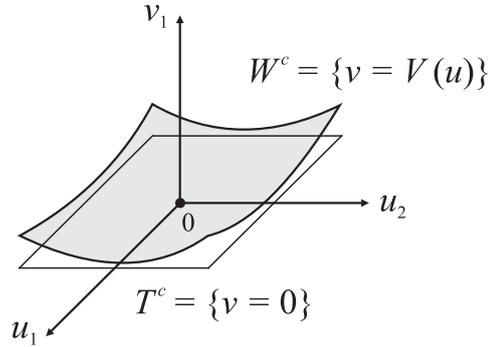


Figura A.3: Representación de la variedad centro como el gráfico de una función $v = V(u)$.

Teorema A.6 (Principio de reducción) *El sistema (A.9) es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, V(u)), \\ \dot{v} = Cv. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

De existir más de una variedad centro, entonces todos los sistemas resultantes de (A.11) con distintas expresiones de V , son localmente suavemente equivalentes.

La primera ecuación de (A.11) es la restricción del sistema (A.9) a la variedad centro. La dinámica *interesante* del sistema (A.9) está determinada por dicha ecuación, ya que la segunda ecuación de (A.11) contiene únicamente términos lineales que generan soluciones exponencialmente decrecientes o crecientes. Además, de (A.11) puede verse que la dinámica de la variedad centro no sólo está determinada por los términos lineales sino también por los no lineales.

La segunda ecuación del sistema (A.11) puede ser reemplazada por las ecuaciones de la *silla estándar*

$$\begin{cases} \dot{v} = -v, \\ \dot{w} = w, \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

donde $(v, w) \in \mathbb{R}^{n-} \times \mathbb{R}^{n+}$. Por lo tanto, el *Principio de reducción* puede expresarse como:

En cercanías de un equilibrio no hiperbólico, el sistema (A.6) es localmente

topológicamente equivalente a la suspensión de su restricción a la variedad centro por la silla estándar.

Es posible enunciar el principio de reducción sin modificaciones para un sistema discreto, la única diferencia radica en que la ecuación de la silla estándar para el caso discreto es un poco más complicada ya que se debe tener en cuenta las propiedades de orientación del mapa [véase (Kuznetsov, 2004)].

A.2.3. Cálculo de la variedad centro

Como se vio en la sección anterior, el estudio de bifurcaciones en sistemas de dimensión n se reduce al estudio de la restricción del sistema a la variedad centro W^c . A su vez, los despliegues de las bifurcaciones son determinados por los coeficientes de la forma normal del sistema restringido en el valor crítico del parámetro $\alpha = 0$. Resulta posible calcular de manera aproximada la variedad centro W^c y las ecuaciones diferenciales restringidas hasta un cierto orden, de modo que la variedad centro es aproximada por una serie de potencias, cuyos coeficientes son calculados en forma recursiva resolviendo en cada iteración un sistema de ecuaciones algebraicas. En caso que la variedad centro no sea única, los coeficientes serán los mismos para todas las variedades.

Método de proyección

El método de proyección permite el cálculo de la variedad centro evitando la transformación del sistema a la base de los autovectores, como en la ecuación A.9. En lugar de ello únicamente es necesario obtener los autovectores (normalizados) correspondientes a los autovalores críticos del Jacobiano del sistema A y los autovectores adjuntos, denominados q y p respectivamente. Esto es,

$$Aq = \lambda q, \quad (\text{A.13})$$

$$A^T p = \bar{\lambda} p, \quad (\text{A.14})$$

$$\langle p, q \rangle = 1. \quad (\text{A.15})$$

El procedimiento de reducción se describe a continuación.⁴ El sistema (A.6) puede

⁴Este método se basa en el Teorema de la Alternativa de Fredholm [ver Apéndice A de (Kuznetsov, 2004)].

reformularse de la siguiente manera

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.16})$$

donde A es el Jacobiano y $F(x) = O(\|x\|^2)$ es una función suave cuya expansión en serie de Taylor es

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (\text{A.17})$$

donde $B(x, y)$ y $C(x, y, u)$, con $x, y, u \in \mathbb{R}^n$, son funciones vectoriales *multilineales* que se definen como

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \left. \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.18})$$

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^n \left. \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.19})$$

La aplicación del método comienza con la proyección del sistema genérico (cambio de coordenadas) al espacio T^c y su complemento T^{su} (espacio asociado a los autovalores con parte real no nula), utilizando los autovectores críticos q y sus adjuntos p . Luego el sistema queda expresado en las coordenadas nuevas $(u, v)^T$ donde $\dim(u) = n_0$ y $\dim(v) = n - n_0$.

Una vez realizado el cambio de coordenadas se reemplaza F por su expansión en serie de Taylor⁵ en las nuevas coordenadas y se agrupan los términos de igual potencia. Luego, los coeficientes del sistema resultante quedan expresados en función de las formas multilineales $B(\cdot, \cdot)$ y $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ y de los autovectores q y p .

La aproximación de la variedad centro $v = V(u)$ se obtiene mediante una serie de potencias apropiada, donde el orden de la aproximación depende de la bifurcación. Por ejemplo, para la silla-nodo la aproximación es $v = V(u) = \frac{1}{2}w_2 u^2 + O(u^3)$, mientras que para la bifurcación de Hopf es $v = V(u, \bar{u}) = \frac{1}{2}w_{20} u^2 + w_{11} u \bar{u} + \frac{1}{2}w_{02} \bar{u}^2 + O(|u|^3)$. Luego, los coeficientes de la serie (w) se determinan utilizando la propiedad de invariancia de la variedad centro, esto es,

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{\partial V(u)}{\partial u} \frac{du}{dt} = \frac{\partial V(u)}{\partial u} \dot{u}. \quad (\text{A.20})$$

Luego, se agrupan los términos de igual potencia y se resuelven las ecuaciones resultantes (Wiggins, 1990). Las expresiones de \dot{u} y \dot{v} resultan del cambio de coordenadas

⁵En caso de las bifurcaciones de codimensión 1 se contemplan términos de hasta tercer orden inclusive en la expansión de F .

mencionado anteriormente. La restricción del sistema a la variedad centro se obtiene reemplazando $v = V(u)$, como se indica en la primer ecuación de (A.11).

A.2.4. Variedad centro en sistemas con parámetros

Sea ahora el siguiente sistema dinámico suave que depende en forma suave de un parámetro

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.21})$$

además, el sistema posee un punto de equilibrio no hiperbólico en $x = 0$ para $\alpha = 0$, con n_0 autovalores sobre el eje imaginario, n_- con parte real negativa y n_+ con parte real positiva ($n_0 + n_- + n_+ = n$). Entonces, es posible definir el siguiente sistema extendido

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0, \\ \dot{x} = f(x, \alpha). \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

El Jacobiano de (A.22) evaluado en $(x, \alpha) = (0, 0)$ resulta

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha(0, 0) & f_x(0, 0) \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

donde, se tienen $(n_0 + 1)$ autovalores sobre el eje imaginario y $(n - n_0)$ autovalores con parte real distinta de cero. Por lo tanto, es posible aplicar el *Teorema de la variedad centro* al sistema (A.22). Este teorema garantiza la existencia de una variedad centro $\mathcal{W}^c \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de dimensión $\dim \mathcal{W}^c = n_0 + 1$. Además, la variedad centro es tangente al espacio generado por los $(n_0 + 1)$ autovectores correspondientes a los autovalores críticos. Debido a que $\dot{\alpha} = 0$, los hiperplanos $\Pi_{\alpha_0} = \{(\alpha, x) : \alpha = \alpha_0\}$ son invariantes respecto de (A.22). Por lo tanto la variedad \mathcal{W}^c está formada por variedades de dimensión n_0 , de manera que la variedad centro para un valor de α dado es

$$W_\alpha^c = \mathcal{W}^c \cap \Pi_\alpha, \quad (\text{A.24})$$

como se muestra en la Fig. A.4.

Lema A.7 *El sistema (A.21) posee una variedad centro local que depende del parámetro α , que se denota como W_α^c . Además, si $n_+ = 0$ la variedad es atractiva.*

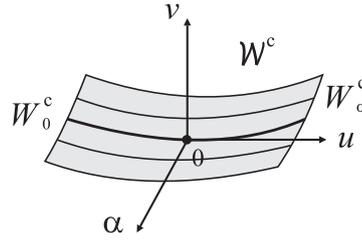


Figura A.4: Variedades centros del sistema extendido (A.22).

En el caso particular que $\alpha = 0$, W_0^c es la variedad centro definida anteriormente. W_α^c se denomina también *variedad centro* para todo α .

Si $|\alpha|$ es pequeño, es posible restringir el sistema (A.21) a W_α^c . Para ello es necesario definir un sistema de coordenadas⁶ (dependiente de α) en W_α^c , de manera tal que el sistema restringido puede expresarse como

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.25})$$

Si $\alpha = 0$, el sistema (A.25) es equivalente a la restricción de (A.21) a la variedad centro W_0^c . Teniendo en cuenta esto, es posible formular el siguiente teorema (Shoshitaishvili, 1972),

Teorema A.8 *El sistema (A.21) es localmente topológicamente equivalente a la suspensión de (A.25) por la silla estándar (A.12). Además, el sistema (A.25) puede ser reemplazado por cualquier sistema localmente topológicamente equivalente.*

Este teorema establece que todos los fenómenos trascendentales que suceden en un entorno de una bifurcación, ocurren sobre la variedad centro W_α^c y son capturados por el sistema (A.25). Cabe destacar que es posible enunciar teoremas similares para sistemas discretos, así como para sistemas con más parámetros (Wiggins, 1990; Kuznetsov, 2004).

Una vez reducido el sistema a la variedad centro, es necesario aplicar sucesivos cambios de coordenadas (en general no lineales) para expresar el sistema en la forma normal de la bifurcación en cuestión, de manera tal de poder identificar el despliegue correspondiente. En otras palabras, una vez hecha la reducción es necesario calcular los valores de

⁶Ya que W_0^c es tangente a T^c , es posible parametrizar W_α^c , para $|\alpha|$ suficientemente pequeños, mediante un sistema de coordenadas sobre T^c , utilizando la proyección local de W_α^c en T^c .

los coeficientes de la forma normal. En la mayoría de los casos dichos coeficientes pueden calcularse a partir del sistema genérico (A.21), mediante expresiones que son función del Jacobiano, de las sucesivas derivadas (formas multilineales), así como de los autovectores críticos y sus autovectores adjuntos. El desarrollo formal de las expresiones de cálculo de los coeficientes de las formas normales de bifurcaciones locales de codimensión 1 y 2, para sistemas continuos y discretos puede consultarse en (Kuznetsov, 2004).

Apéndice B

Forma normal de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer

A continuación se mostrarán en forma esquemática todos los despliegues de la forma normal de truncada de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer o cero-Hopf. Las ecuaciones de la forma normal truncada son

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2), \\ \dot{\varphi} = \omega_1 + \vartheta\xi. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

La última ecuación de (B.1) representa una rotación sobre eje ξ a velocidad constante ω_1 para $|\xi|$ suficientemente pequeño. Además, las dos primeras ecuaciones resultan desacopladas de la tercera y por lo tanto es válido considerar únicamente las bifurcaciones del siguiente sistema de amplitudes

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2). \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Es posible demostrar que existen 4 despliegues distintivos para el sistema de amplitudes con los siguientes valores de los coeficientes s y θ

- I. $s = 1, \theta > 0$ (Fig. B.1a).
- II. $s = -1, \theta < 0$ (Fig. B.1b).
- III. $s = 1, \theta < 0$ (Fig. B.2a).
- IV. $s = -1, \theta > 0$ (Fig. B.2b).

Nótese que la dinámica asociada a los Casos I y II (Fig. B.1) es más simple que la de los Casos III y IV (Fig. B.2). Esto se debe a que en los dos primeros casos el ciclo

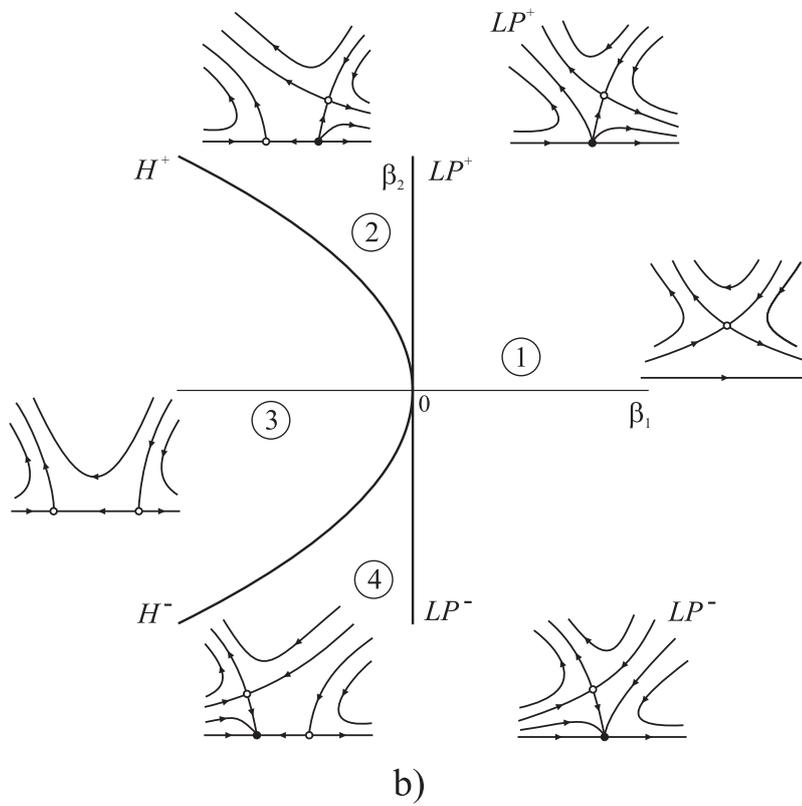
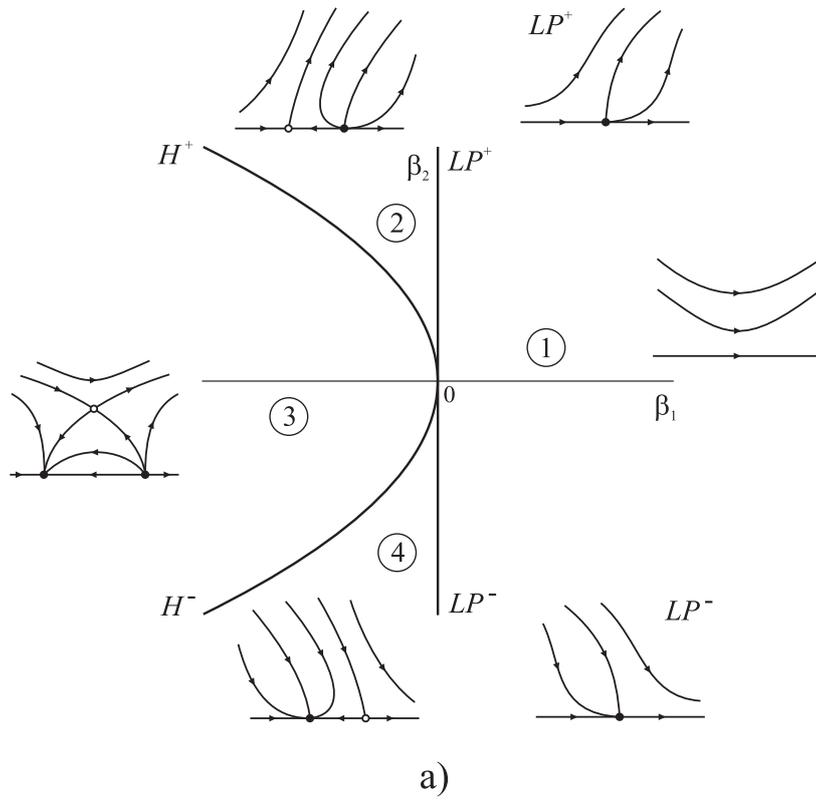


Figura B.1: Despliegue de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer. a) Caso I, $s = 1$ y $\theta > 0$. b) Caso II, $s = -1$ y $\theta < 0$.

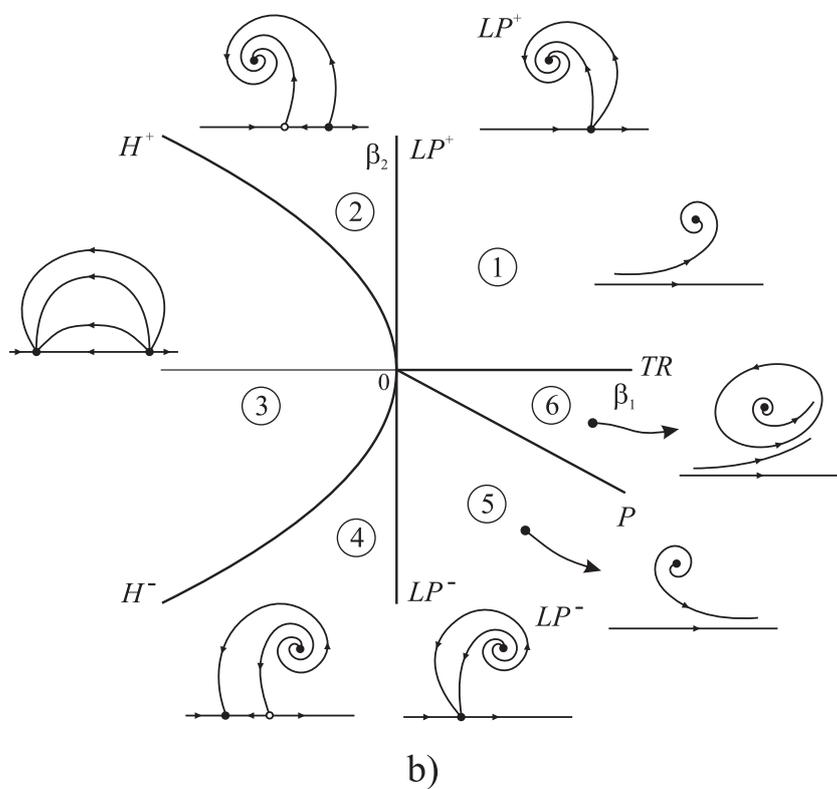
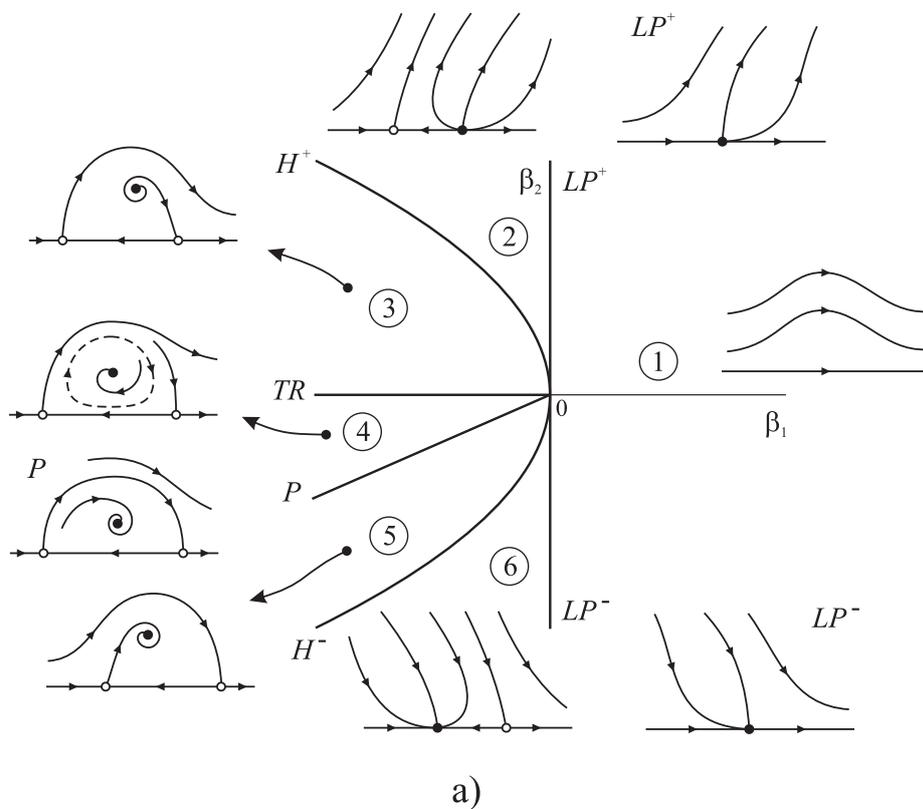


Figura B.2: Despliegue de la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer. a) Caso III, $s = 1$ y $\theta < 0$. b) Caso IV, $s = -1$ y $\theta > 0$.

límite es siempre tipo silla, mientras que en los últimos dos casos el ciclo es tipo foco y experimenta bifurcaciones de Neimark-Sacker (TR).

Apéndice C

Forma normal de la bifurcación de Hopf doble

La forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble está dada por

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1 (\beta_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 = r_2 (\beta_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4), \\ \dot{\phi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

donde, los coeficientes p_{jk} , s_k ($j, k = 1, 2$) y las frecuencias ω_1 y ω_2 son funciones de los parámetros β .

Las dos primeras ecuaciones del sistema (C.1) están desacopladas de las últimas dos. A su vez, estas últimas constituyen rotaciones sobre los ejes $r_2 = 0$ y $r_1 = 0$ a velocidades constantes ω_1 y ω_2 , respectivamente. Por lo tanto, resulta suficiente estudiar el siguiente *sistema de amplitudes*

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2\rho_1 (\beta_1 + p_{11}\rho_1 + p_{12}\rho_2 + s_1\rho_2^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2\rho_2 (\beta_2 + p_{21}\rho_1 + p_{22}\rho_2 + s_2\rho_1^2), \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

donde, por definición $\rho_k = r_k^2$ ($k = 1, 2$). Según el signo del producto $p_{11}p_{22}$, es posible distinguir dos clases de despliegues: los casos “simples” ($p_{11}p_{22} > 0$) y los casos “complejos” ($p_{11}p_{22} < 0$).

C.1. Casos simples: $p_{11}p_{22} > 0$

Aplicando la transformación de coordenadas

$$\xi_1 = -p_{11}\rho_1, \quad \xi_2 = -p_{22}\rho_2, \quad \tau = 2t, \quad (\text{C.3})$$

el sistema de amplitudes queda expresado de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 (\beta_1 - \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2 (\beta_2 - \delta\xi_1 - \xi_2 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

donde,

$$\theta = \frac{p_{12}}{p_{22}}, \quad \delta = \frac{p_{21}}{p_{11}}, \quad \Theta = \frac{s_1}{p_{22}}, \quad \Delta = \frac{s_2}{p_{11}}, \quad (\text{C.5})$$

entonces, los casos posibles son

- I. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta > 1.$
- II. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta < 1.$
- III. $\theta > 0, \delta < 0.$
- IV. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta < 1.$
- V. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta > 1.$

Los correspondientes despliegues de la forma normal se muestran en la Fig. C.1, mientras que los retratos de fases asociados se encuentran en la Fig. C.2.

C.2. Casos complejos: $p_{11}p_{22} < 0$

En esta ocasión se considerará el caso $p_{11} > 0$ y $p_{22} < 0$ (los despliegues para $p_{11} < 0$ y $p_{22} > 0$ son análogos). Luego, se define el siguiente cambio de coordenadas

$$\xi_1 = p_{11}\rho_1, \quad \xi_2 = -p_{22}\rho_2, \quad \tau = 2t. \quad (\text{C.6})$$

El sistema de amplitudes para los casos complejos resulta

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 (\beta_1 + \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2 (\beta_2 + \delta\xi_1 - \xi_2 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

donde, θ, δ, Θ y Δ tienen las mismas definiciones que en los casos simples. Entonces, según los valores de θ y δ , se distinguen seis casos complejos

- I. $\theta > 1, \delta > 1.$

II. $\theta > 1, \delta < 1, \theta\delta > 1$.

III. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta < 1$.

IV. $\theta > 0, \delta < 0$.

V. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta < 1$.

VI. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta > 1$.

Los despliegues de la forma normal se muestran en la Fig. C.3, mientras que los retratos de fases asociados se encuentran en la Fig. C.4.

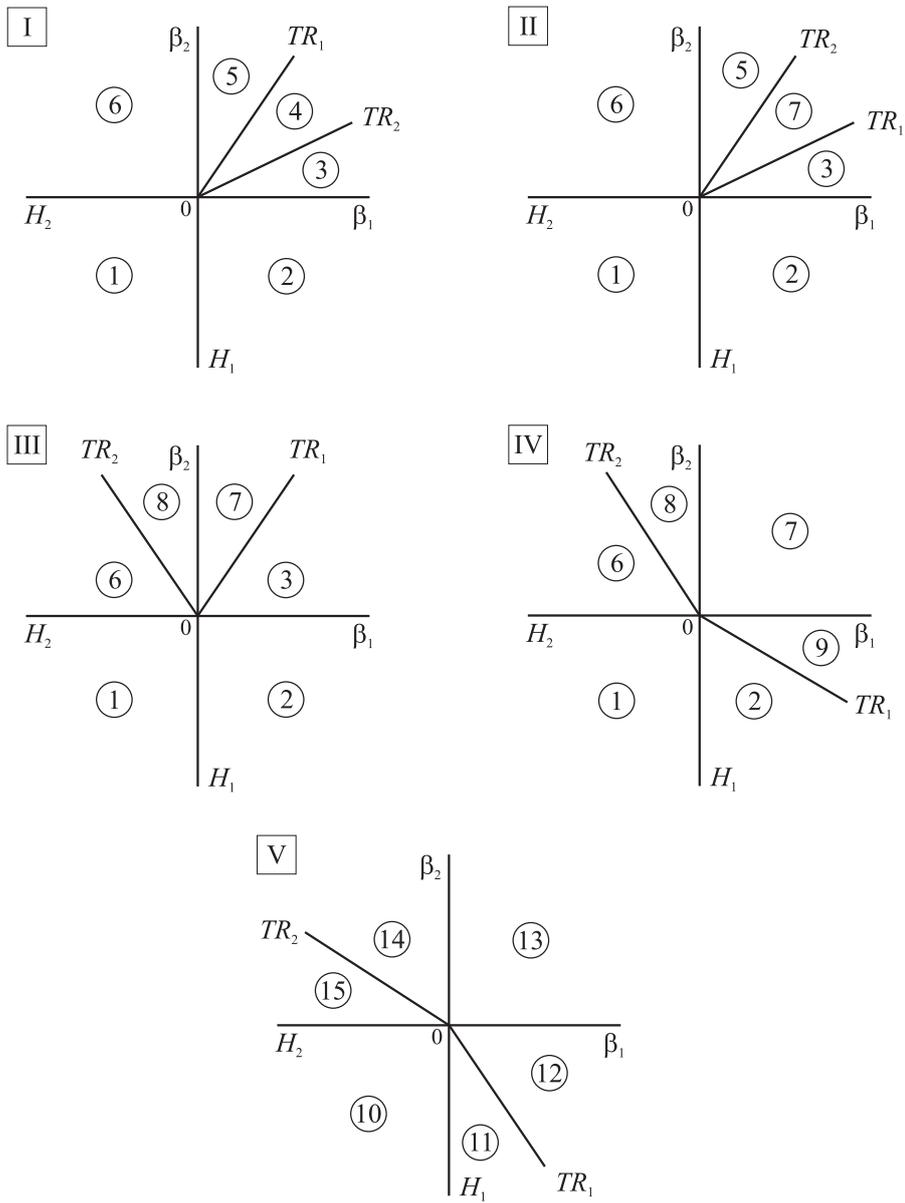


Figura C.1: Despliegues de la bifurcación de Hopf doble. Casos *simples*.

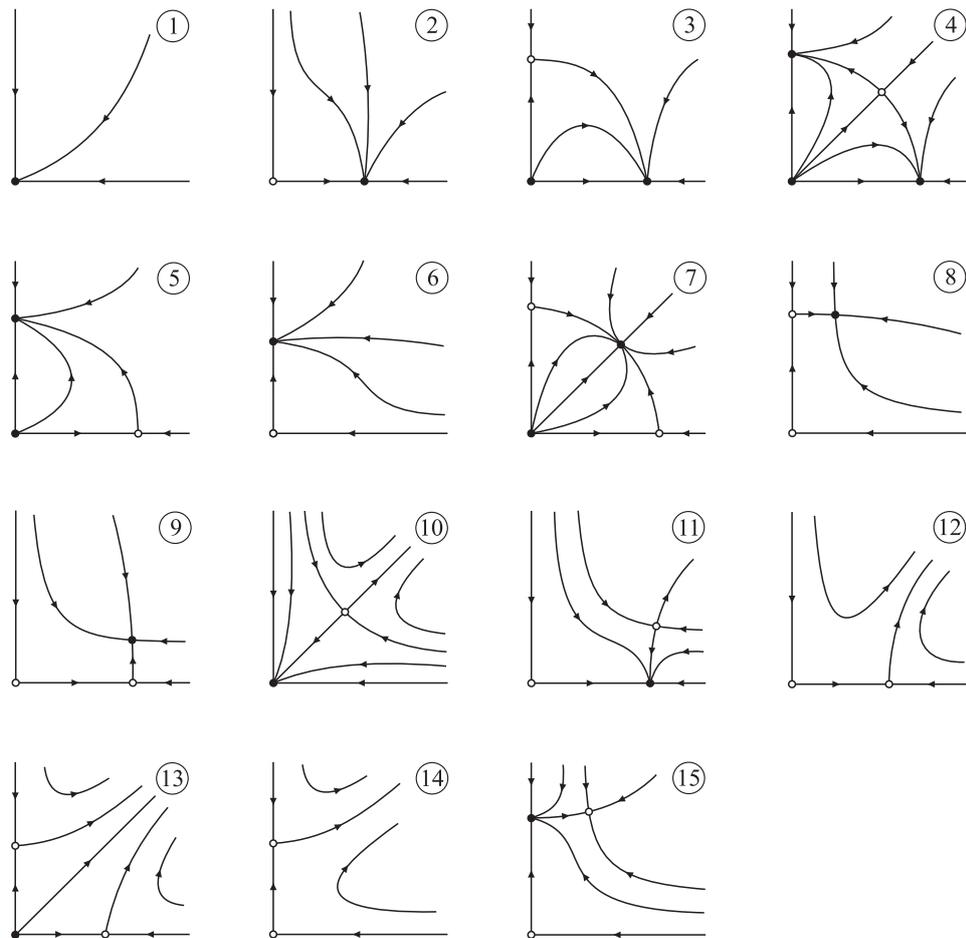


Figura C.2: Retratos de fase del sistema de amplitudes para los casos *simples*.

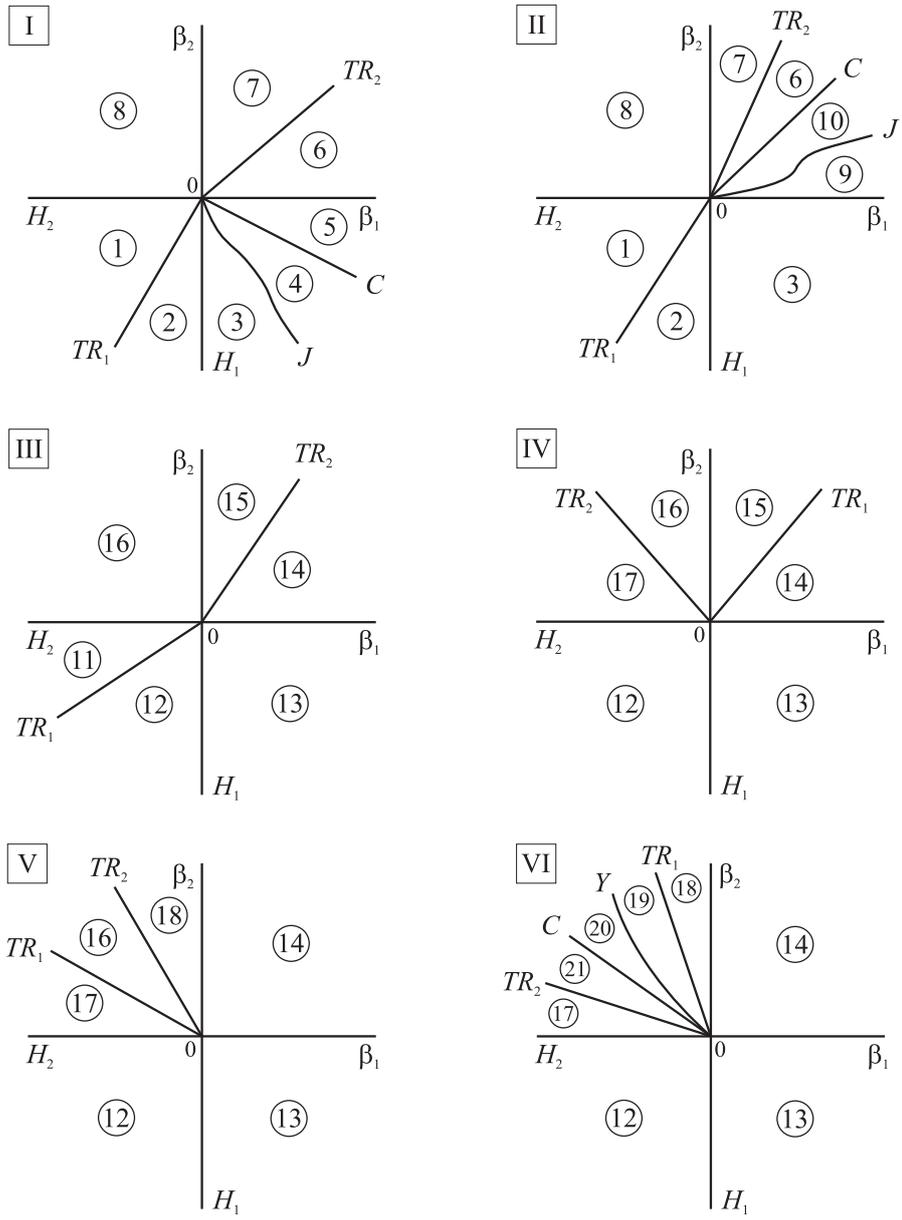


Figura C.3: Despliegues de la bifurcación de Hopf doble. Casos *complejos*.

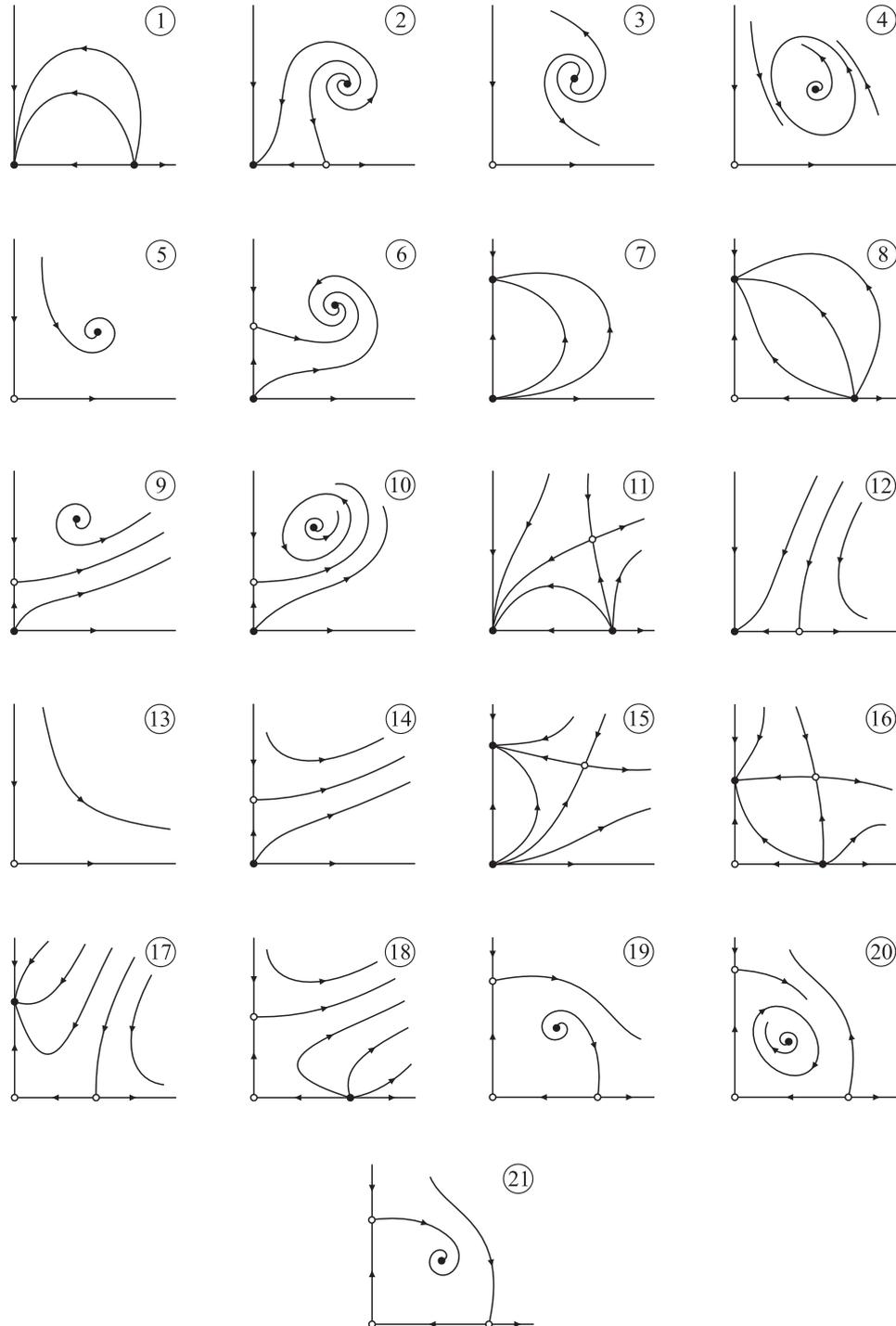


Figura C.4: Retratos de fase del sistema de amplitudes para los casos *complejos*.

Apéndice D

Factores de participación

Los sistemas de potencia actuales están compuestos por una amplia variedad de dispositivos, como generadores, líneas de transmisión, reguladores, etc. Por lo tanto resulta de gran utilidad identificar las variables de estado que predominan en un determinado modo oscilatorio del sistema. En otras palabras, puede plantarse el interrogante: ¿en qué manera afectan las variables de estado la localización de los autovalores del mismo?. Verghese y colegas en (Verghese et al., 1982a,b) proponen una medida basada en los autovectores a derecha e izquierda denominada *factores de participación*. Estos factores brindan una medida de la sensibilidad de un autovalor respecto de la diagonal del Jacobiano del sistema en cuestión.

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{D.1})$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave de los estados $x \in \mathbb{R}^n$. La linealización de (D.1) puede expresarse como

$$\dot{x} = Ax, \quad (\text{D.2})$$

donde A representa el Jacobiano del sistema. Los factores de participación se definen de la siguiente manera

$$p_{ki} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kk}}, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (\text{D.3})$$

donde λ_i es el i -ésimo autovalor del sistema, a_{kk} es un elemento de la diagonal de A y p_{ki} es el factor de participación que relaciona la k -ésima variable de estado con el i -ésimo autovalor.

Puede probarse [véase (Sauer & Pai, 1998)] que la definición (D.3) es equivalente a

$$p_{ki} = \frac{w_{ki}v_{ik}}{w_i^T v_i}, \quad (\text{D.4})$$

donde w_{ki} y v_{ik} son las k -ésimas componentes de los autovectores a izquierda (w_i) y derecha (v_i) asociados al i -ésimo autovalor, respectivamente. Los cuales se calculan de

la siguiente manera,

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$w_i^T(A - \lambda_i I) = 0, \quad (\text{D.6})$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Luego, es posible escalar los autovectores de manera que se satisfaga

$$w_i^T v_i = 1. \quad (\text{D.7})$$

Debido a que $\sum_{k=1}^n w_{ki} v_{ik} = w_i^T v_i$, de (D.4) se obtiene que la suma de todos los factores de participación es igual a 1, o sea

$$\sum_{k=1}^n p_{ki} = 1. \quad (\text{D.8})$$

En el caso de contar con autovalores complejos conjugados, la expresión (D.4) toma la forma

$$p_{ki} = \frac{|v_{ik}| |w_{ik}|}{\sum_{k=1}^n |v_{ik}| |w_{ik}|}, \quad (\text{D.9})$$

ya que los autovectores asociados serán también complejos.

Bibliografía

- Abed, E. H. & Varaiya, P. P. (1981). Oscillations in power systems via Hopf bifurcation. In *IEEE Conference on Decision and Control* (pp. 926–929). San Diego, USA.
- Abed, E. H. & Varaiya, P. P. (1984). Nonlinear oscillations in power systems. *Int. J. of Electrical Power & Energy Systems*, 6(1), 37–43.
- Ajjarapu, V. (2007). *Computational Techniques for Voltage Stability Assessment and Control*. Power Electronics and Power Systems. New York: Springer-Verlag.
- Anderson, P. M. & Fouad, A. A. (1994). *Power System Control and Stability*. New York: IEEE PRESS Power System Engineering Series.
- Andersson, G., Donalek, P., Farmer, R., Hatziaargyriou, N., Kamwa, I., Kundur, P., Martins, N., Paserba, J., Pourbeik, P., Sanchez-Gasca, J., Schulz, R., Stankovic, A., Taylor, C., & Vittal, V. (2005). Causes of the 2003 major grid blackouts in North America and Europa, and recommended means to improve system dynamic performance. *IEEE Trans. Power Syst.*, 20(4), 1922–1928.
- Arnold, V. (1983). *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.
- Avalos, R. J., Cañizares, C. A., Milano, F., & Conejo, A. J. (2009). Equivalency of continuation and optimization methods to determine saddle-node and limit-induced bifurcations in power systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 59(1), 210–223.
- Ayasun, S., Nwankpa, C. O., & Kwatny, H. G. (2004). Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 51(8), 1525–1538.
- Broer, H. W., Krauskopf, B., & Vegter, G. (2001). *Global Analysis of Dynamical Systems: Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing.

- Broer, H. W., Naudot, V., Roussarie, R., Saleh, K., & Wagener, F. O. O. (2007a). Organising centres in the semi-global analysis of dynamical systems. *International Journal of Applied Mathematics & Statistics*, 12(D07), 7–36.
- Broer, H. W., Simó, C., & Vitolo, R. (2008). Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance ‘bubble’. *Physica D*, 237, 1773–1799.
- Broer, H. W., van Dijk, R., & Vitolo, R. (2007b). Survey of strong normal-internal k:l resonances in quasi-periodically driven oscillators for $l=1,2,3$. In G. Gaeta, R. Vitolo, & S. Walcher (Eds.), *Proceedings of the International Conference on SPT 2007* (pp. 45–55). Otranto, Italy: World Scientific.
- Budd, C. J. & Wilson, J. P. (2002). Bogdanov-Takens bifurcation points and Šil’nikov homoclinicity in a simple power-system model of voltage collapse. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(5), 575–590.
- Cañizares, C. A. & Hranilovic, S. (1994). Transcritical and Hopf bifurcations in AC/DC systems. In *Proc. Bulk Power System Voltage Phenomena - III Seminar* (pp. 105–114). Davos, Suiza.
- Campbell, S. A., Ncube, I., & Wu, J. (2006). Multistability and stable asynchronous periodic oscillations in a multiple-delayed neural system. *Physica D*, 214, 101–119.
- Carr, J. (1981). *Applications of Center Manifold Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Chamara, P. A. & Collier, B. D. (2004). A study of double flutter. *Journal of Fluids and Structures*, 19, 863–879.
- Chiang, H. D. (2003). Application of bifurcation analysis to power systems. In G. Chen, D. J. Hill, & X. Yu (Eds.), *Bifurcation Control. LNCIS*, volume 293 (pp. 1–28). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Collier, B. D. (2003). Intriguing nonlinear dynamics of a controller with a sluggish actuator. *Automatica*, 39, 2049–2058.
- Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Redwood City, California: Addison-Wesley.

- Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Maestrom, W., & Sautois, B. (2006). *MATCONT and CL_MATCONT Continuation Toolboxes in MATLAB*. Technical report, Gent University and Utrech University.
- Dobson, I. & Chiang, H. D. (1989). Towards a theory of voltage collapse in electric power systems. *Syst. Contr. Letts.*, 13, 253–262.
- Dobson, I., Van Cutsem, T., Vournas, C., DeMarco, C. L., Venkatasubramanian, M., Overbye, T., & Cañizares, C. A. (2002). *Voltage Stability Assessment: Concepts, Practices and Tools*, chapter 2. IEEE Power Engineering Society, SP101PSS.
- Dobson, I., Zhang, J., Greene, S., Engdahl, H., & Sauer, P. W. (2001). Is strong modal resonance a precursor to power system oscillations? *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48(3), 340–349.
- Doedel, E. J., Paffenroth, R. C., Champneys, A. R., Fairgrieve, T. F., Kuznetsov, Y. A., Oldeman, B. E., Sandstede, B., & Wang, X.-J. (2002). *AUTO2000: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*. Technical report, Caltech, California.
- Ermentrout, B. (2002). *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. Philadelphia: SIAM.
- Feigenbaum, M. J. (1978). Qualitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 19, 669–706.
- Feigenbaum, M. J. (1979). The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 21, 25–52.
- Glendinning, P. (1994). *Stability, Instability and Chaos: an Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- Golubitsky, M. & Langford, W. F. (1981). Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations. *J. Diff. Eqns.*, 41, 375–415.

- Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G. (1985). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory - Volume 1*, volume 51 of *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag.
- Gordillo, F., Salas, F., Ortega, R., & Aracil, J. (2002). Hopf bifurcation in indirect field oriented control of induction motors. *Automatica*, 38(5), 829–835.
- Green, K., Krauskopf, B., & Engelborghs, K. (2002). Bistability and torus break-up in a semiconductor laser with phase-conjugate feedback. *Physica D*, 173, 114–129.
- Gu, G., Sparks, A., & Banda, S. S. (1999). An overview of rotating stall and surge control of axial flow compressors. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 7(6), 639–647.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag.
- Guoyun, C., Hill, D. J., & Hui, R. (2005). Continuation of local bifurcations for power system differential-algebraic equation stability model. *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, 152(4), 575–580.
- Hale, J. K. & Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Hassard, B., Kazarinoff, N., & Wan, Y.-H. (1981). *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. London: Cambridge University Press.
- Hilger, K. B. & Luciani, D. S. (1998). Forced oscillators: A detailed numerical analysis. Master's thesis, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark.
- Hill, D. J., Guo, Y., Larsson, M., & Wang, Y. (2003). Global control of complex power systems. In G. Chen, D. J. Hill, & X. Yu (Eds.), *Bifurcation Control. LNCIS*, volume 293 (pp. 155–187). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Hirsh, M., Pugh, C., & Shub, M. (1977). *Invariant Manifolds*, volume 583 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Hiskens, I. A. (1995). Analysis tools for power systems - contending with nonlinearities. *Proceedings of the IEEE*, 83(11), 1573–1587.

- IEEE PES Working Group on Prime Mover and Energy Supply Models for System Dynamic Performance Studies (1992). Hydraulic turbine and turbine control models for system dynamic studies. *IEEE Trans. Power Syst.*, 7(1), 167–179.
- IEEE Power Engineering Society (2003). IEEE guide for synchronous generator modeling practices and applications in power system stability analyses. *IEEE Std 1110.-2002*, (pp. 1–72).
- IEEE Standard 421.5 (2005). IEEE recommended practice for excitation system models for power system stability studies. *IEEE Power Engineering Society*, (pp. 1–85).
- IEEE Task Force on Load Representation for Dynamic Performance (1995). Standard load models for power flow and dynamic performance simulation. *IEEE Trans. Power Syst.*, 10(3), 1302–1313.
- Ilić, M. & Zaborszky, J. (2000). *Dynamics and Control of Large Electric Power Systems*. New York: John Wiley and Sons.
- Ilić, M. D., Allen, H., Chapman, J. W., King, C. A., Lang, J. H., & Litvinov, E. (2005). Preventing future blackouts by means of enhanced electric power systems control: from complexity to order. *Proceedings of the IEEE*, 93(11), 1920–1941.
- Itovich, G. R. & Moiola, J. L. (2005). Double Hopf bifurcation analysis using frequency domain methods. *Nonlinear Dynamics*, 39, 235–258.
- Ji, W. & Venkatasubramanian, V. (1995). Dynamics of a minimal power system: Invariant tori and quasi-periodic motions. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 42(12), 981–1000.
- Ji, W. & Venkatasubramanian, V. (1996). Correction to “Dynamics of a minimal power system: Invariant tori and quasi-periodic motions”. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 43(5), 432–432.
- Jing, Z., Yu, C., & Chen, G. (2004). Complex dynamics in a permanent-magnet synchronous motor model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 22, 831–848.
- Kelley, A. (1967). The stable, center stable, center, center unstable and unstable manifolds. *J. Diff. Eqns.*, 3, 546–570.

- Khibnik, A. I., Kuznetsov, Y. A., Levitin, V. V., & Nikolaev, E. V. (1993). Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODE's and iterated maps. *Physica D*, 62, 360–371.
- Kirchgraber, U. & Palmer, K. (1990). *Geometry in the Neighborhood of Invariant Manifolds of Maps and Flows and Linearization*, volume 233 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Harlow: Longman Scientific and Technical.
- Krauskopf, B. (1994). Bifurcation sequences at 1 : 4 resonance: an inventory. *Nonlinearity*, 7(3), 1073–1091.
- Krauskopf, B. (2001). Strong resonances and Takens's Utrecht preprint. In H. W. Broer, B. Krauskopf, & G. Vegter (Eds.), *Global Analysis of Dynamical Systems, Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday* (pp. 89–111). Bristol and Philadelphia: Institute of Physics.
- Kundur, P. (1994). *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill.
- Kundur, P., Paserba, J., V. Ajjarapu, G. A., Bose, A., Cañizares, C. A., Hatziargyriou, N., Hill, D., Stankovic, A., Taylor, C., Cutsem, T. V., & Vittal, V. (2004). Definition and classification of power system stability. *IEEE Trans. Power Syst.*, 19(2), 1387–1401.
- Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag, third edition.
- Kuznetsov, Y. A. & Meijer, H. G. E. (2006). Remarks on interacting Neimark-Sacker bifurcations. *J. Difference Equ. Appl.*, 12(10), 1009–1035.
- Kuznetsov, Y. A., Meijer, H. G. E., & van Veen, L. (2004). The fold-flip bifurcation. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 14(7), 2253–2282.
- Kwatny, H. G., Fischl, R. F., & Nwankpa, C. O. (1995). Local bifurcation in power systems: theory, computation, and application. *Proceedings of the IEEE*, 83(11), 1456–1483.

- Kwatny, H. G., Pasrija, A. K., & Bahar, L. Y. (1986). Static bifurcations in electric power networks: loss of steady-state stability and voltage collapse. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 33(10), 981–991.
- LeBlanc, V. G. (2000). On some secondary bifurcations near resonant Hopf-Hopf interactions. *Dyn. Contin. Discr. Impuls. Syst.*, 7, 405–427.
- Lee, B. & Ajarapu, V. (1993). Period-doubling route to chaos in an electrical power system. *IEE Proceedings-C*, 140(6), 490–496.
- Lerm, A. A. P., Cañizares, C. A., & Silveira e Silva, A. (2003). Multiparameter bifurcation analysis of the south Brazilian power system. *IEEE Trans. Power Syst.*, 18(2), 737–746.
- Leung, J. S. K., Hill, D. H., & Ni, Y. (2005). Global power system control using generator excitation, PSS, FACTS devices and capacitor switching. *Int. J. of Electrical Power & Energy Systems*, 27, 448–464.
- Liaw, D. C. & Abed, E. H. (1990). Stabilization of tethered satellites during station keeping. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(11), 1186–1196.
- Luo, G. W., Zhang, Y. L., & Yu, J. N. (2006). Dynamical behavior of vibro-impact machinery near a point of codimension two bifurcation. *Journal of Sound and Vibration*, 292, 242–278.
- Ma, S., Lu, Q., & Feng, Z. (2008). Double Hopf bifurcation for van der Pol-Duffing oscillator with parametric delay feedback control. *J. Math. Anal. Appl.*, 338, 993–1007.
- Machowski, J., Bialek, J. W., & Bumby, J. R. (2008). *Power System Dynamics. Stability and Control*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, second edition.
- Marsden, J. & McCracken, M. (1976). *Hopf Bifurcation and its Applications*. New York: Springer-Verlag.
- Mees, A. I. (1981). *Dynamics of Feedback Systems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.

- Mees, A. I. & Chua, L. O. (1979). The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 26(4), 235–254.
- Messias, M., Carvalho Braga, D., & Mello, L. F. (2009). Degenerate Hopf bifurcations in Chua's system. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 19(2), 497–515.
- Mohamed, A. M. & Emad, F. P. (1993). Nonlinear oscillations in magnetic bearing systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(8), 1242–1245.
- Moiola, J. L. & Chen, G. (1996). *Hopf Bifurcation Analysis - A Frequency Domain Approach*, volume 21. Singapore: World Scientific.
- Nayfeh, A. H., Harb, A. M., & Chin, C. M. (1996). Bifurcations in a power system model. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 6(3), 497–512.
- Oldeman, B. E., Krauskopf, B., & Champneys, A. R. (2000). Death of period-doublings: locating the homoclinic-doubling cascade. *Physica D*, 146, 100–120.
- Pai, M. A., Sauer, P. W., & Lesieutre, B. C. (1995). Static and dynamic nonlinear loads and structural stability in power systems. *Proceedings of the IEEE*, 83(11), 1562–1572.
- Peckham, B. B. & Kevrekidis, I. G. (1991). Period doubling with higher-order degeneracies. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22, 1552–1574.
- Pereira, L., Kosterev, D., Mackin, P., Davies, D., Undrill, J., & Zhu, W. (2002). An interim dynamic induction motor model for stability studies in the WSCC. *IEEE Trans. Power Syst.*, 17(4), 1108–1115.
- Rajagopalan, C., Lesieutre, B. C., Sauer, P. W., & Pai, M. A. (1992). Dynamic aspects of voltage/power characteristics. *IEEE Trans. Power Syst.*, 7(3), 990–1000.
- Renmu, H., Jin, M., & Hill, D. J. (2006). Composite load modeling via measurement approach. *IEEE Trans. Power Syst.*, 21(2), 663–672.
- Revel, G., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2006). Bifurcation analysis in a power system model. In *1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems* (pp. 315–320). Reims, Francia: University of Reims Champagne Ardenne.

- Revel, G., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2007a). Curvature index failures in the dynamics of an electric coupled oscillator. In *The 3rd International Scientific Conference On Physics and Control (PhysCon 2007)*: University of Potsdam, Alemania.
- Revel, G., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2007b). Soluciones cuasiperiódicas en un circuito eléctrico resonante. *Revista Iberoamericana de Automática e Información Industrial*, 4(3), 116–125.
- Revel, G., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2008a). Bifurcation theory applied to the analysis of power systems. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 49(1), 1–14.
- Revel, G., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2008b). A gallery of oscillations in a resonant electric circuit: Hopf-Hopf and fold-flip interactions. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 18(2), 481–494.
- Revel, G., León, A. E., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2008c). Bifurcation analysis on a detailed multimachine power system model. In *Proc. 40th. North American Power Symposium (NAPS 2008)*: University of Calgary, Canada.
- Revel, G., León, A. E., Alonso, D. M., & Moiola, J. L. (2010). Bifurcation analysis on a multimachine power system model. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 57(4), 937–949.
- Rosehart, W. D. & Cañizares, C. A. (1998). Elimination of algebraic constraints in power system studies. *IEEE Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering*, 2, 685–688.
- Rosehart, W. D. & Cañizares, C. A. (1999). Bifurcation analysis of various power system models. *Int. J. of Electrical Power & Energy Systems*, 21(3), 171–182.
- Sauer, P. W. & Pai, M. A. (1998). *Power System Dynamics and Stability*. New Jersey: Prentice Hall.
- Schilder, F., Osinga, H. M., & Vogt, W. (2005). Continuation of quasi-periodic invariant tori. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 4(3), 459–488.
- Schilder, F. & Peckham, B. B. (2007). Computing Arnol'd tongue scenarios. *J. Comput. Phys.*, 220, 932–951.

- Schilder, F., Vogt, W., Schreiber, S., & Osinga, H. (2006). Fourier methods for quasiperiodic oscillations. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 67(5), 629–671.
- Shoshitaishvili, A. (1972). Bifurcations of topological type of singular points of vector fields that depend on parameters. *Functional Anal. Appl.*, 6, 169–170.
- Srivastava, K. N. & Srivastava, S. C. (1995). Application of Hopf bifurcation theory for determining critical value of a generator control or load parameter. *Int. J. of Electrical Power & Energy Systems*, 17(5), 347–354.
- Srivastava, K. N. & Srivastava, S. C. (1998). Elimination of dynamic bifurcation and chaos in power systems using facts devices. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 45(1), 72–78.
- Strogatz, S. H. (1999). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Takens, F. (1974). Forced oscillations and bifurcations. *Applications of Global Analysis I*. Communications of the Mathematical Institute Rijksuniversiteit Utrecht, 3, 1–59.
- Tan, C.-W., Varghese, M., Varaiya, P., & Wu, F. F. (1995). Bifurcation, chaos, and voltage collapse in power systems. *Proceedings of the IEEE*, 83(11), 1484–1496.
- Tse, C. K. & Dranga, O. (2003). Bifurcation analysis with application to power electronics. In G. Chen, D. J. Hill, & X. Yu (Eds.), *Bifurcation Control. LNCIS*, volume 293 (pp. 29–48). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Van Cutsem, T. (2000). Voltage instability: phenomena, countermeasures, and analysis methods. *Proceedings of the IEEE*, 88(2), 208–227.
- Van Cutsem, T. & Vournas, C. (1998). *Voltage Stability of Electric Power Systems*. Power Electronics and Power Systems Series. New York: Springer.
- Vanderbauwhede, A. (1989). Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations. *Dynamics Reported*, 2, 89–169.
- Venkatasubramanian, V., Schättler, H., & Zaborsky, J. (1995). Dynamics of large constrained nonlinear systems - A taxonomy theory. *Proceedings of the IEEE*, 83(11), 1530–1561.

- Verghese, G. C., Perez-Arriaga, I. J., & Schweppe, F. C. (1982a). Selective modal analysis with applications to electric power systems, part I: Heuristic introduction. *IEEE Trans. Power App. Syst.*, 101(9), 3117–3125.
- Verghese, G. C., Perez-Arriaga, I. J., & Schweppe, F. C. (1982b). Selective modal analysis with applications to electric power systems, part II: The dynamic stability problem. *IEEE Trans. Power App. Syst.*, 101(9), 3126–3134.
- Vournas, C. D., Nikolaidis, V. C., & Tassoulis, A. A. (2006). Postmortem analysis and data validation in the wake of the 2004 Athens blackout. *IEEE Trans. Power Syst.*, 21(3), 1331–1339.
- Wagener, F. O. O. (2001). Semi-local analysis of the $k:1$ and $k:2$ resonances in quasi-periodically forced systems. In H. W. Broer, B. Krauskopf, & G. Vegter (Eds.), *Global Analysis of Dynamical Systems, Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday* (pp. 113–129). Bristol and Philadelphia: Institute of Physics.
- Walve, K. (1986). Modelling of power system components at severe disturbances. In *International Conference on Large High Voltage Electric Systems* (pp. 1–9). CIGRÉ.
- Wang, H. O., Abed, E. H., & Hamdan, A. M. (1994). Bifurcations, chaos, and crises in voltage collapse of a model power system. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 41(3), 294–302.
- Wieczorek, S., Krauskopf, B., & Lenstra, D. (2001). Unnested islands of period doublings in an injected semiconductor laser. *Physical Review E*, 64(5), 056204–1, 9.
- Wieczorek, S., Krauskopf, B., Simpson, T. B., & Lenstra, D. (2005). The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers. *Physics Reports*, 416, 1–128.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
- Xie, J. & Ding, W. (2005). Hopf-Hopf bifurcation and invariant torus T^2 of a vibro-impact system. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 40, 531–543.

- Xu, J., Chung, K., & Chan, C. (2007). An efficient method for studying weak resonant double Hopf bifurcation in nonlinear systems with delayed feedbacks. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 6(1), 29–60.
- Yu, P. (2001). Symbolic computation of normal forms for resonant double Hopf bifurcations using a perturbation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 247(4), 615–632.
- Yu, P. (2002). Analysis on double Hopf bifurcation using computer algebra with the aid of multiple scales. *Nonlinear Dynamics*, 27, 19–53.
- Zecevic, A. I. & Miljkovic, D. M. (2002). The effects of generation redispatch on Hopf bifurcations in electric power systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(8), 1180–1186.

