# Universidad Nacional del Sur

## Tesis de Magister en Matemática

## Una contribución al estudio de Algebras de De Morgan modales $4-$valuadas

**Estela A. Bianco**

**Bahía Blanca** **Argentina**

2009

# Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Magister en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 25 de junio de 2002 y el 9 de octubre del 2009, bajo la dirección de la Dra. Alicia N. Ziliani.

...............

**Universidad Nacional del Sur**

Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el $\cdots/\cdots/\cdots$, mereciendo la calificación de $\cdots\cdots(\cdots\cdots\cdots)$.

A mis queridos padres

Estela y José

## Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento, en primer lugar a la Dra. Alicia Ziliani, por haber dirigido la presente tesis, por todo lo que me enseñó en estos años, por todo lo que aprendí, por su esfuerzo y por su tesón ante las dificultades.

También deseo manifestar toda mi gratitud al Dr. Aldo V. Figallo, quien con su generosidad y dedicación me ayudó a iniciar mis estudios en lógica matemática, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Un agradecimiento especial a Claudia Sanza por su apoyo incondicional en todos los órdenes.

Finalmente, deseo expresar mi reconocimiento a mi familia y a mis amigos que son la razón fundamental de mi vida y mi sostén.

## Resumen

En 1920, J. Łukasiewicz introdujo sus sistemas de lógicas polivalentes como una tentativa de investigar las proposiciones modales y las nociones de posibilidad y necesidad íntimamente relacionadas con tales proposiciones. Los argumentos utilizados por Łukasiewicz están analizados y discutidos en [44, 12]. También hay un análisis histórico detallado del desarrollo de sus ideas en [51]. Łukasiewicz introdujo para cada número natural $n \geq 2$, un cálculo proposicional $n-$valente en el cual pueden atribuirse a las proposiciones $n$ valores distintos de verdad. Entre 1940 y 1941, Gr.C. Moisil inició el estudio de las estructuras algebraicas correspondientes a dichos cálculos a las que denominó álgebras de Łukasiewicz $n-$valuadas. Estás álgebras son retículos distributivos con una operación de negación y ciertas operaciones unarias que expresan modalidades.

En 1940, este autor introdujo las álgebras de Łukasiewicz $3-$valuadas y las $4-$valuadas. La definición original dada por Moisil para las álgebras de Łukasiewicz $3-$valuadas fue simplificada por él en 1960, y presentada de manera diferente por diversos autores entre los que podemos citar [39, 11, 2]. Posteriormente en 1966, L. Monteiro ([42]) demostró que de los ocho axiomas indicados por A. Monteiro, siete son independientes. Para exhibir la independencia de uno de ellos consideró un ejemplo que motivó a A. Monteiro para definir una nueva variedad de álgebras a la que denominó álgebras tetravalentes modales. Cabe

señalar que Monteiro conjeturó que las mismas darían origen a una lógica 4-valuada con importantes aplicaciones en Ciencias de la Computación. J. Font y M. Rius en [22], entre otros resultados, estudiaron dos lógicas que son extensiones modales de la bien conocida lógica de Belnap 4-valuada las cuales tienen como modelo algebraico a las álgebras tetravalentes modales. Lo que confirmó la conjetura de Monteiro.

En esta tesis hallamos, entre otros resultados, un cálculo proposicional estilo Hilbert del cual las álgebras tetravalentes modales constituyen su contrapartida algebraica. Más precisamente, a este trabajo lo hemos organizado en tres capítulos. El Capítulo I consta de cinco secciones. Todos los resultados indicados en ellas son conocidos, pero los hemos incluído tanto para facilitar la lectura posterior, como para fijar las notaciones y las definiciones que utilizaremos en lo que sigue. La primera de ellas está referida al álgebra universal y la teoría de categoías. La segunda, contiene tópicos sobre cálculos proposicionales y en las secciones restantes se describen las motivaciones que nos llevaron a considerar el cálculo estudiado.

En el Capítulo II, obtuvimos lo que denominamos, en homenaje al Dr. Antonio Monteiro, el cálculo proposicional de Monteiro $4-$valuado. Para el cual, utilizando las técnicas indicadas por H. Rasiowa en [45], demostramos que pertenece a la clase de los sistemas proposicionales implicacionales standard y que es consistente. Además, mostramos que en este cálculo se verifica el Teorema de Completitud. Algunos de los resultados obtenidos en este capítulo fueron presentados en el *XII y XIV Latin American Symposium on Mathematical Logic* que se llevó a cabo en Costa Rica y en Brasil en el 2004 y 2008 respectivamente.

En el Capítulo III, con el objeto de obtener un modelo algebraico más adecuado del cálculo proposicional de Monteiro $4-$valuado, introducimos una nueva variedad de álgebras que hemos denominado retículos distributivos modales con implicación. Posteriormente, mostramos que existe una equivalencia entre la categoría de estas álgebras y la de las álgebras tetravalentes modales con sus correspondientes homomorfismos. Este último resultado es fundamental para demostrar nuestra afirmación inicial ya que los retículos distributivos modales con implicación son efectivamente más adecuados que las álgebras tetravalentes modales ya que ellos tienen a la implicación $\rightarrow$ como una de sus operaciones binarias básicas. Finalmente, cabe mencionar que los temas investigados en este capítulo fueron presentados en la *Reunión anual de la UMA* en el 2006 y se encuentran publicados en [5].

## Abstract

In 1920, J. Łukasiewicz introduced many-valued logics in an attempt to research the modal propositions and the notions of possibility and necessity intimately related to such propositions. The arguments used by Łukasiewicz are analysed and discussed in [44, 12]. There is also a detailed historical study of his ideas in [51]. For every natural number $n \geq 2$, Łukasiewicz introduced an $n-$valued propositional calculus in which he assigned to each proposition $n$ different truth values. Between 1940 and 1941, Gr.C. Moisil started the study of the algebraic counterparts of those propositional calculi which he called $n-$valued Łukasiewicz algebras. These algebras are distributive lattices with a negation operation and certain unary operations that express modalities.

In 1940, this author introduced $3-$valued and $4-$valued Łukasiewicz algebras. The original definition given by Mosil for $3-$valued Łukasiewicz algebras was simplified by him in 1960, and presented in a different way by many authors as we can see in [39, 11, 2] to mention a few. Lately in 1966, L. Monteiro ([42]) proved that seven of the eight axioms indicated by A. Monteiro for these algebras are independent. To exhibit the independence of one of them, he considered an example that motivated A. Monteiro to define a new variety of algebras which he called tetravalent modal algebras. It is worth mentioning that Monteiro expressed his view that in the near future these algebras would give rise to a

four-valued modal logic with significant applications in Computer Science. J. Font and M. Rius in [22], among other results, studied two logics that are modal extensions of the so-called Belnap's $4-$valued logic. Both of them have tetravalent modal algebras as the algebraic counterpart. These results gave a positive answer to Monteiro's conjecture.

In this thesis we obtained among other results, a Hilbert style propositional calculus, which has tetravalent modal algebras as the algebraic counterpart. More precisely, we have organized this work in three chapters. Chapter I consists of five sections. All the results indicated are well known, but we have included them both to simplify the reading as well as to fix the notations and the definitions that we will use in this volume. The first one refers to universal algebra and the theory of categories. The second one, contains topics about propositional calculi and in the remainder sections we describe the motivations that gave rise to consider the study of this calculus.

In Chapter II, we describe what we called Monteiro's $4-$valued propositional calculus, to pay homage to Dr. Antonio Monteiro. Taking into account the techniques indicated by H. Rasiowa in [45], we prove that this calculus belongs to the class of standard systems of implicative extensional propositional calculi. Besides, we establish that it is consistent. Moreover, we show that the completeness theorem for this propositional calculus holds. Some of the results obtained in this chapter have been presented in the *XII and XIV Latin American Symposium on Mathematical Logic* that took place in Costa Rica and Brazil in 2004 and 2008 respectively.

In Chapter III, with the purpose of obtaining an algebraic model more appropriate for Monteiro's $4-$valued propositional calculus, we introduce a new variety of algebras which we called distributive modal lattices with implication. Lately, we show that there is an equivalence between the category of these algebras and that of tetravalent modal algebras with their corresponding homomorphisms. This last result is fundamental in order to prove our initial assertion because modal distributive lattices with implication are more adequated than tetravalent modal algebras, because they have an implication $\rightarrow$ as one of the basic binary operations. Finally, it can be mentioned that the topics researched in this chapter have been presented in the *Reunión Anual de la Unión Matemática Aregentina* in 2006 and they were published in [5].

# Índice

# 1. Capítulo I

En todo lo que sigue supondremos conocida la teoría de los retículos distributivos, pero el lector interesado en ampliar detalles sobre este tema puede consultar, por ejemplo [1, 7].

También daremos por conocidas las nociones básicas de álgebra universal, teoría de categorías y sistemas proposicionales, sin embargo en las Sección 1.1 y 1.2 repasaremos las definiciones y resultados necesarios para lo que sigue.

## 1.1. Tópicos sobre álgebra universal y categorías

A continuación, con el objeto de facilitar la lectura del texto y fijar las notaciones, repasaremos aquellas nociones de álgebra universal y categorías que vamos a utilizar con cierta frecuencia. Más información sobre estos temas pueden consultarse en [10, 24, 33].

Sea $A$ un conjunto no vacío y $n$ un número natural. Una *operación $n-$aria sobre $A$* es cualquier función $f : A^n \longrightarrow A$, donde $n$ es la aridad de $f$. Si $n = 0$, una operación

0–aria es una constante de $A$. Una *operación finitaria sobre* $A$ es una operación $n-$aria para algún número natural $n$.

Un *lenguaje o tipo de álgebras* es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman símbolos de función, tal que a cada miembro $f$ de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural $n$, llamado la aridad de $f$ y $f$ se denomina símbolo de función $n-$ario.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un *álgebra* $\mathcal{A}$ *de tipo* $\mathcal{F}$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde $A$ es un conjunto no vacío y $F$ es una familia de operaciones finitarias sobre $A$ indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$, le corresponde una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}$ sobre $A$ que pertenece a $F$. El conjunto $A$ se llama *universo o soporte del álgebra* $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos $f$ en lugar de $f^{\mathcal{A}}$ y si $\mathcal{F}$ es finito, por ejemplo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$. En este caso, si $n_i$ es la aridad de $f_i$ para $1 \leq i \leq k$, también diremos que $A$ es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representaremos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte $A$.

### 1.1.1. Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ se dice un *isomorfismo de* $A$ *en* $B$ si $h$ es inyectiva, sobre y si para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y para toda $n-$upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos

(Ho) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

Diremos que $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{B}$ y escribiremos $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ si existe un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si $h$ verifica sólo la condición (Ho) diremos que $h$ es un *homomorfismo de* $\mathcal{A}$ *en*

$\mathcal{B}$. Si $h$ es inyectiva diremos que $h$ es una inmersión. En el caso que $h$ es sobreyectiva, diremos que $h$ es un epimorfismo y que $\mathcal{B}$ es una imagen homomórfica de $\mathcal{A}$.

### 1.1.2. Congruencias y álgebras cocientes

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces diremos que $\theta$ es una *congruencia* sobre $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots,$ $b_n \in A,$ si $a_i \,\theta\, b_i,$ para todo $1 \leq i \leq n,$ entonces

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, \theta\, f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Por lo tanto, para cada símbolo de función $n-$ario en $\mathcal{F}$, tenemos definido en el conjunto cociente $A/\theta$ una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}/\theta$ que a cada $n-$upla de clases de equivalencia $(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) \in A/\theta$ le asigna el elemento $|f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta$.

El conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotaremos por $Con(\mathcal{A})$. Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces el *álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por $\theta$* que representaremos $\mathcal{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es $A/\theta$ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) = |f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y $f$ es un símbolo de función $n-$aria en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. De esta definición resulta que la *aplicación canónica* $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

*Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $Con(\mathcal{A})$ ordenado por la relación de inclusión es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es $id_A$ que es la relación identidad sobre $A$ y cuyo último elemento es $A \times A$.*

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo general no lo sea.

El retículo de las congruencias caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles. En efecto,

*Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, $Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$ tiene primer elemento.*

Es decir, $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, existe $\theta_1 \in Con(\mathcal{A})$, $\theta_1 \neq id_A$ tal que $\theta_1 \subseteq \theta$ para toda $\theta \in Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$.

Un teorema fundamental debido a G. Birkhoff ([7]) es el siguiente:

*Toda álgebra con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles.*

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y sólo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir $id_A$ y $A \times A$. Además, un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple si es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.

### 1.1.3. Algebras libres

Sea $\mathfrak{K}$ una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{L} \in \mathfrak{K}$. $\mathcal{L}$ es un álgebra que tiene a $G$ como conjunto de generadores libres si se verifican las dos condiciones siguientes:

(l1) $[G] = \mathcal{L}$,

(l2) para cada álgebra $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ y cada función $f : G \longrightarrow \mathcal{B}$ existe un homomorfismo $h : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}$ que extiende a $f$, esto es $h(g) = f(g)$ para todo $g \in G$.

El homomorfismo $h$ de (l2) es único, y si $\mathcal{L}'$ es un álgebra de $\mathfrak{K}$ con un conjunto $G'$ de generadores libres tal que existe una biyección de $G$ en $G'$, entonces $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$ (ver [7]).

### 1.1.4. Categorías

En esta sección repasaremos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de categorías que nos serán necesarias para la lectura de lo que sigue. Para una mayor información de este tema sugerimos consultar [33] y [23].

Una *categoría* $\boldsymbol{C}$ está formada por:

(i) una colección $Ob(\boldsymbol{C})$ cuyos miembros son llamados objetos,

(ii) una colección $Morf(\boldsymbol{C})$ cuyos miembros son llamados morfismos,

(iii) dos operaciones $dom, cod : Morf(\boldsymbol{C}) \longrightarrow Ob(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada morfismo $f$ dos objetos llamados dominio y codominio de $f$ respectivamente. Si $A = dom(f)$ y $B = cod(f)$ escribiremos $f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$,

(iv) una operación $\circ : Morf(\boldsymbol{C}) \times Morf(\boldsymbol{C}) \longrightarrow Morf(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada par $f, g$ con $dom(f) = cod(g)$ el morfismo $g \circ f$ llamado composición de $f$ con $g$ que tiene $dom(g \circ f) = dom(f)$ y $cod(g \circ f) = cod(g)$ y tal que se verifica la ley asociativa siguiente: para toda terna $f, g, h$ en $Morf(\boldsymbol{C})$ tal que $cod(f) = dom(g)$ y $cod(g) = dom(h)$ entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

(v) un operador $id : Ob(\boldsymbol{C}) \longrightarrow Morf(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada objeto $A$ un morfismo $id_A : A \longrightarrow A$, llamado morfismo identidad de $A$ tal que se verifique la siguiente ley de identidad: para todo par de morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ resulta

$$id_B \circ f = f \quad \text{y} \quad g \circ id_B = g.$$

Dada una categoría $\boldsymbol{C}$ en lo que sigue denotaremos:

(i) $\boldsymbol{C}(A, B)$ para representar la colección de todos los morfismos con dominio $A$ y codominio $B$.

(ii) $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ y $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ para indicar que $A$ es un objeto de $\boldsymbol{C}$ y que $f$ es un morfismo de $A$ en $B$ en $\boldsymbol{C}$.

A partir de una categoría dada una manera de obtener nuevas categorías es considerando, entre otras, la categoría dual y subcategorías.

**Categoría dual**

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría. Llamaremos *categoría dual* (*u opuesta*) de $\boldsymbol{C}$ y la notaremos $\boldsymbol{C}^{op}$ a la categoría donde:

(i) $Ob(\boldsymbol{C}) = Ob(\boldsymbol{C}^{op})$,

(ii) para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\boldsymbol{C}$ tenemos el correspondiente morfismo $f^{op} : B \longrightarrow A$ en $\boldsymbol{C}^{op}$ tal que $cod(f^{op}) = dom(f)$ y $dom(f^{op}) = cod(f)$ y estos son los únicos morfismos en $\boldsymbol{C}^{op}$,

(iii) para todo par $f^{op}$, $g^{op}$ en $Morf(\boldsymbol{C}^{op})$ tal que $dom(g^{op}) = cod(f^{op})$ se tiene:

$$g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}.$$

**Subcategorías**

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría. Una categoría $\boldsymbol{D}$ es una *subcategoría* de $\boldsymbol{C}$ si se verifica:

(i) $Ob(\boldsymbol{D}) \subseteq Ob(\boldsymbol{C})$,

(ii) para todo $A, B \in Ob(\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{D}(A, B) \subseteq \boldsymbol{C}(A, B)$,

(iii) las composiciones e identidades coinciden con las de $\boldsymbol{C}$.

Una *subcategoría* $\boldsymbol{D}$ de $\boldsymbol{C}$ se dice *llena* si, y sólo si, para todo $A, B \in Ob(\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{D}(A, B) = \boldsymbol{C}(A, B)$.

**Morfismos especiales**

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría y sea $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ diremos que:

(i) $f$ es un *monomorfismo* si tiene la propiedad que dados $g, h : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$,

(ii) $f$ es un *epimorfismo* si tiene la propiedad que para todo $g, h : B \longrightarrow D$ tal que $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$,

(iii) $f$ es un *isomorfismo* si, y sólo si, existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_A$.

Se verifica que todo isomorfismo es un epimorfismo y un monomorfismo pero la recíproca no es válida.

**Funtores**

Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ categorías entonces:

(i) Un *funtor covariante* $T : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es una correspondencia que asigna a cada $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ un objeto $T(A)$ en $\boldsymbol{D}$ y a cada morfismo $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ un morfismo de $T(f)$ de $\boldsymbol{D}(T(A), T(B))$ tal que :

(CO1) para todo $A \in Ob(\boldsymbol{C})$, $T(id_A) = id_{T(A)}$,

(CO2) si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$, entonces $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

(ii) Un *funtor contravariante* $T : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es una correspondencia que asigna a cada $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ un objeto $T(A)$ en $\boldsymbol{D}$ y a cada morfismo $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ un morfismo de $T(f)$ de $\boldsymbol{D}(T(B), T(A))$ tal que :

(CT1) para todo $A \in Ob(\boldsymbol{C})$, $T(id_A) = id_{T(A)}$,

(CT2) si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en $\boldsymbol{C}$, entonces $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$.

Tenemos las siguientes clases especiales de funtores:

Un *funtor* $T : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ se dice:

(i) *lleno* si para todo par $A, B \in Ob(\boldsymbol{C})$ y para todo morfismo $g \in \boldsymbol{D}(T(A), T(B))$ existe un morfismo $f \in \boldsymbol{C}(A, B)$ tal que $g = T(f)$.

(ii) *fiel* si para todo par $A, B \in Ob(\boldsymbol{C})$ y para todo par de morfismos $f, g \in \boldsymbol{C}(A, B)$ tal que $T(f) = T(g)$ en $\boldsymbol{D}(T(A), T(B))$ implica que $f = g$.

**Equivalencia natural**

Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ categorías y sean $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$, $G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ funtores. Una familia de morfismos $\{\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)\}_{A \in Ob(\boldsymbol{C})}$ se dice una *transformación natural* si para cada $h \in \boldsymbol{C}(A, B)$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "h"] & \\
F(A) \arrow[rr, "\tau_A"'] \arrow[dd, "F(h)"'] & & G(A) \arrow[dd, "G(h)"] \\
 & B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(B) \arrow[rr, "\tau_B"'] & & G(B)
\end{tikzcd}$$

$F$ y $G$ se dicen naturalmente equivalentes si $\tau_A$ es un isomorfismo para todo $A \in Ob(\boldsymbol{C})$.

Diremos que las *categorías* $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son *naturalmente equivalentes* si existen $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$, $G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ tales que $F \circ G$ y $G \circ F$ son naturalmente equivalentes a los funtores $id_B$ y $id_A$ respectivamente.

## 1.2. Tópicos sobre cálculos proposicionales

### 1.2.1. Lenguajes formalizados de orden cero

Llamaremos *alfabeto* de un lenguaje formalizado de orden cero a cualquier sistema $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ donde

(1) $X, L_0, L_1, L_2, U$ son conjuntos disjuntos,

(2) $X$ es un conjunto numerable,

(3) los conjuntos $L_0, L_1$ son finitos (posiblemente vacíos),

(4) el conjunto $L_2$ es finito y siempre contiene un elemento llamado signo de implicación, que notaremos $\Rightarrow$.

Los elementos del conjunto $X$ se denominan *variables proposicionales* y los notaremos con $p, q, r, \ldots$ o con índices si fuera necesario. Los elementos de los conjuntos $L_0, L_1$ y $L_2$ los llamaremos *constantes proposicionales, conectivos proposicionales unarios y conectivos proposicionales binarios*, respectivamente. Los elementos de $U$ son símbolos auxiliares y asumiremos siempre que $U$ contiene dos elementos que notaremos (, ).

Los *símbolos del alfabeto* $A^0$ son los elementos del conjunto $X \cup L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup U$.

El conjunto $For[X]$ de todas las fórmulas sobre el alfabeto $A^0$, es el menor conjunto de sucesiones finitas de símbolos de $A^0$, tal que

(f1) $X \subseteq For[X]$,

(f2) $L_0 \subseteq For[X]$,

(f3) $\alpha \in For[X]$, $* \in L_1$ implica $*\alpha \in For[X]$,

(f4) $\alpha, \beta \in For[X]$, $\circ \in L_2$ implica $(\alpha \circ \beta) \in For[X]$,

(f5) los únicos elementos de $For[X]$ son los obtenidos por (f1), (f2), (f3) y (f4).

Llamaremos *lenguaje formalizado implicativo de orden cero*, o simplemente *lenguaje formalizado de orden cero* al par ordenado $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$, donde $A^0$ es un alfabeto de un lenguaje formalizado de orden cero y $For[X]$ es el conjunto de todas las fórmulas sobre $A^0$.

Diremos que dos *lenguajes formalizados de orden cero* $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ y $\mathfrak{L}' = (A^{0'}, For'[X'])$, donde $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ y $A^{0'} = (X', L_0', L_1', L_2', U)$ son *similares* si $L_i = L_i'$, para $0 \leq i \leq 2$.

Por otra parte, dados dos lenguajes $\mathfrak{L}'$ y $\mathfrak{L}$ diremos que $\mathfrak{L}'$ es una *extensión* de $\mathfrak{L}$ si $X \subseteq X'$ y $L_i \subseteq L_i'$, para $0 \leq i \leq 2$.

De las definiciones anteriores concluimos que

*Si $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}'$ son lenguajes formalizados similares de orden cero, entonces $\mathfrak{L}'$ es una extensión de $\mathfrak{L}$ si, y sólo si, $X \subseteq X'$.*

### 1.2.2. El álgebra de las fórmulas

En lo que sigue presentaremos a los lenguajes formalizados de orden cero desde un punto de vista algebraico.

Sea $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ un alfabeto de un lenguaje formalizado de orden cero, donde $L_0 = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $L_1 = \{*^1, \ldots, *^s\}$, $L_2 = \{\Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t\}$, con $m, s, t \in I\!N$ y sea $For[X]$ el conjunto de todas las fórmulas sobre $A^0$.

Ahora algebrizaremos a $For[X]$ tomando como operaciones sobre este conjunto a $L_0 \cup L_1 \cup L_2$ es decir:

(i) Elegimos como operaciones 0–arias de $For[X]$ a los símbolos de operaciones 0–arias $e_1, \ldots, e_m$. Esto es posible, pues por (f2) estos objetos están en $For[X]$.

(ii) Si $f \in L_1 \cup L_2$, entonces podemos considerar la correspondencia $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \longrightarrow f((\alpha_1, \ldots, \alpha_k))$, $1 \leq k \leq 2$. Por (f3) y (f4) tenemos que $f : For[X]^k \longrightarrow For[X]$ es una operación $k-$aria sobre $For[X]$.

Entonces el álgebra $\mathfrak{For}[X] = \langle For[X], \Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t, *^1, \ldots, *^s, e_1, \ldots, e_m \rangle$ se denomina el *álgebra de las fórmulas del lenguaje formalizado* $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$. Además, $\mathfrak{For}[X]$ es un álgebra libre dentro de la clase de todas las álgebras similares y el conjunto $X$ de todas las variables proposicionales en $\mathfrak{L}$ es el conjunto de generadores libres de $\mathfrak{For}[X]$.

### 1.2.3. Sustituciones y valuaciones

Llamaremos *sustitución* de un lenguaje formalizado de orden cero $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ en otro similar $\mathfrak{L}' = (A^{0'}, For'[X])$, a toda función $\rho : X \longrightarrow For'[X]$. Como $X$ es un conjunto de generadores libres de $\mathfrak{For}[X]$ para cada sustitución $\rho$ existe un único homomorfismo $\overline{\rho} : \mathfrak{For}[X] \longrightarrow \mathfrak{For}'[X]$ que extiende a $\rho$.

Sea $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ donde $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ y $L_0 = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $L_1 = \{*^1, \ldots, *^s\}, L_2 = \{\Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t\}$, $m, s, t \in I\!N$. Llamaremos *álgebra asociada al lenguaje* $\mathfrak{L}$ a un álgebra $\mathfrak{A} = \langle A, \bigvee_{\mathfrak{A}}, \rightarrow, o_1, \ldots, o_t, \star^1, \ldots, \star^s, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m\rangle$ si el álgebra $\mathfrak{A}^0 = \langle A, \rightarrow, o_1, \ldots, o_t, \star^1, \ldots, \star^s, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m\rangle$ es similar al álgebra de las fórmulas $\mathfrak{For}[X]$ del lenguaje $\mathfrak{L}$ y $\bigvee_{\mathfrak{A}}$ es una operación 0-aria en $\mathfrak{A}$. En lo que sigue, para simplificar la notación, escribiremos $\bigvee$ en lugar de $\bigvee_{\mathfrak{A}}$ y notaremos con los mismos símbolos a las operaciones en las álgebras asociadas a $\mathfrak{L}$ que en el álgebra $\mathfrak{For}[X]$.

Una *valuación* de $\mathfrak{L}$ en un álgebra $\mathfrak{A}$ asociada con $\mathfrak{L}$ es cualquier función $v : X \longrightarrow A$. Como $X$ es un conjunto de generadores libres de $\mathfrak{For}[X]$, la aplicación $v$ puede ser extendida de manera única a un homomorfismo $v_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{For}[X] \longrightarrow \mathfrak{A}^0$.

Sea $\approx$ una relación de congruencia en el álgebra $\mathfrak{For}[X]$. Entonces podemos considerar el álgebra cociente $\mathfrak{For}[X]/\approx$. Luego, el álgebra $\mathfrak{For}[X]/\approx(\bigvee) = (\mathfrak{For}[X]/\approx, \bigvee)$ donde $\bigvee$ es un elemento distinguido en $\mathfrak{For}[X]/\approx$. Como $\mathfrak{For}[X]/\approx(\bigvee)$ es un álgebra asociada a $\mathfrak{L}$, entonces podemos considerar la valuación $v^0 : X \longrightarrow \mathfrak{For}[X]/\approx(\bigvee)$ definida por $v^0(p) = |p|$ que se denomina *valuación canónica*.

### 1.2.4. Operadores de consecuencia

Sea $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ un lenguaje formalizado de orden cero y $\mathcal{P}(For[X])$ el conjunto de las partes de $For[X]$. Diremos que una función $C_{\mathfrak{L}} : \mathcal{P}(For[X]) \longrightarrow \mathcal{P}(For[X])$ es un operador de consecuencia sobre $\mathfrak{L}$ si para todo $A, B \in \mathcal{P}(For[X])$ se verifican las siguientes condiciones:

(C1) $A \subseteq C_{\mathfrak{L}}(A)$,

(C2) $A \subseteq B$ implica $C_{\mathfrak{L}}(A) \subseteq C_{\mathfrak{L}}(B)$,

(C3) $C_{\mathfrak{L}}(C_{\mathfrak{L}}(A)) = C_{\mathfrak{L}}(A)$.

En lo que sigue y cuando no haya dudas sobre el lenguaje $\mathfrak{L}$ considerado, escribiremos $C$ en lugar de $C_{\mathfrak{L}}$.

Un *operador de consecuencia* $C$ sobre $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ puede ser definido del siguiente modo: elegimos

(i) un subconjunto fijo $\mathcal{A}$ de $For[X]$ que llamaremos el conjunto de los *axiomas lógicos*,

(ii) un conjunto fijo $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de *reglas de inferencia*. Más precisamente, una regla de inferencia es cualquier función $r : P \longrightarrow For[X]$ donde $P \subseteq (For[X])^n$, para algún $n \in I\!N$. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in P$ y $\beta = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, diremos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las premisas y $\beta$ es la conclusión de esas premisas por medio de la regla $r$. Usualmente escribiremos

$$r : \frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

en lugar de $\beta = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Diremos que una *demostración formal* de una fórmula $\alpha$, a partir del conjunto de hipótesis $H$, $H \subseteq For[X]$ con respecto a un conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas y un conjunto $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de reglas de inferencia es la $n-$upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (For[X])^n$ tal que

(p$_1$) $\alpha_1 \in \mathcal{A} \cup H$,

(p$_2$) para todo $1 < i \leq n$, $\alpha_i \in \mathcal{A} \cup H$ o $\alpha_i$ es la conclusión de alguna de las fórmulas anteriores $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$, por medio de una de las reglas de inferencia $r_j$, $j = 1, \ldots, k$,

(p$_3$) $\alpha_n = \alpha$.

Luego, dada $\alpha \in For[X]$ si existe una demostración formal de $\alpha$ a partir de las hipótesis $H$, los axiomas $\mathcal{A}$ y las reglas $r_1, \ldots, r_k$ escribimos $H \vdash \alpha$. En particular, si $H = \emptyset$, escribiremos $\vdash \alpha$. Entonces, es fácil probar que la aplicación $C : \mathcal{P}(For[X]) \longrightarrow \mathcal{P}(For[X])$ definida por $C(H) = \{\alpha \in For[X] : H \vdash \alpha\}$ para todo $H \subseteq For[X]$ es un operador de consecuencia sobre $\mathfrak{L}$.

### 1.2.5. Cálculos proposicionales extensionales implicativos standard

Sea $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ un lenguaje formalizado de orden cero y $C_{\mathfrak{L}}$ el operador de consecuencia en $\mathfrak{L}$ determinado por un conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas y por un conjunto $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de reglas de inferencia. Entonces al sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ lo llamaremos *un cálculo proposicional* y a $C_{\mathfrak{L}}(\emptyset)$ el *conjunto de todas las fórmulas derivables en* $\mathfrak{L}$ es decir, $\alpha \in C_{\mathfrak{L}}(\emptyset)$ si, y sólo si, $\vdash \alpha$.

Designaremos con $\mathbf{S}$ a la clase de los cálculos proposicionales extensionales implicativos standard, que definimos como sigue: un sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ donde $C_{\mathfrak{L}}$ está determinado por un conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas y por un conjunto $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de reglas de inferencia, pertenece a $\mathbf{S}$ si verifica las siguientes condiciones:

(s$_1$) $\mathcal{A}$ es cerrado por sustituciones. Es decir, para toda sustitución $\rho : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ si $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $\rho(\alpha) \in \mathcal{A}$,

(s$_2$) las reglas de inferencia $r_i$, $1 \leq i \leq k$, son invariantes bajo sustituciones, es decir, si la regla $r_i$, $1 \leq i \leq k$ asigna a las premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ la conclusión $\beta$, entonces para toda sustitución $\rho$ la misma regla asigna a las fórmulas $\rho(\alpha_1), \ldots, \rho(\alpha_n)$ la conclusión $\rho(\beta)$,

(s$_3$) para cada $\alpha \in For[X]$, $\alpha \Rightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{L}}(\emptyset)$,

(s$_4$) dadas $\alpha$, $\beta \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, si $\alpha$, $\alpha \Rightarrow \beta \in C_{\mathfrak{L}}(H)$, entonces $\beta \in C_{\mathfrak{L}}(H)$,

(s$_5$) dadas $\alpha, \beta, \gamma \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, si $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \gamma \in C_{\mathfrak{L}}(H)$, entonces $\alpha \Rightarrow \gamma \in C_{\mathfrak{L}}(H)$,

(s$_6$) dada $\alpha \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, la condición $\alpha \in C_{\mathfrak{L}}(H)$ implica que para toda $\beta \in For[X]$, $\beta \Rightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{L}}(H)$,

(s$_7$) dadas $\alpha, \beta \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, las condiciones $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{L}}(H)$ implican que para cada conectivo unario $\circ$ de $\mathfrak{L}$, $\circ\,\alpha \Rightarrow \circ\,\beta \in C_{\mathfrak{L}}(H)$,

(s$_8$) dadas $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, si $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$, $\gamma \Rightarrow \delta$, $\delta \Rightarrow \gamma \in C_{\mathfrak{L}}(H)$, entonces para cada conectivo binario $\circ$ de $\mathfrak{L}$, $(\alpha \circ \gamma) \Rightarrow (\beta \circ \delta) \in C_{\mathfrak{L}}(H)$.

Un sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ del cálculo proposicional **S** es *consistente* si existe $\alpha \in For[X]$ tal que $\alpha \notin C_{\mathfrak{L}}(\emptyset)$.

### 1.2.6. $\mathcal{S}$-álgebras

Cualquier sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ del cálculo proposicional **S** determina una clase de álgebras llamadas $\mathcal{S}-$*álgebras* del siguiente modo: Un álgebra

$$\mathfrak{A} = \langle A, \bigvee, \Rightarrow, o_1, \ldots, o_t, o^1, \ldots, o^s, \mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_{m-1} \rangle$$

asociada con el lenguaje formalizado $\mathfrak{L}$ es una $\mathcal{S}-$*álgebra* si verifica:

(a$_1$) si $\mathcal{A}_l$ es el conjunto de axiomas lógicos de $\mathcal{S}$ y $\alpha \in \mathcal{A}_l$, entonces $v(\alpha) = \bigvee$ para toda valuación $v$ de $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{A}$,

(a$_2$) si una regla de inferencia $r$ en $\mathcal{S}$ asigna a las premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ la conclusión $\beta$, entonces para toda valuación $v$, la condición $v(\alpha_1) = \ldots = v(\alpha_n) = \bigvee$ implica $v(\beta) = \bigvee$,

(a$_3$) para todo $a, b, c \in A$, si $a \Rightarrow b = \bigvee$ y $b \Rightarrow c = \bigvee$, entonces $a \Rightarrow c = \bigvee$,

(a$_4$) para todo $a, b \in A$, si $a \Rightarrow b = \bigvee$ y $b \Rightarrow a = \bigvee$, entonces $a = b$.

Observemos que de (a$_1$) y (a$_2$) se deduce que:

*Si $\alpha$ es una fórmula derivable en $\mathcal{S}$, entonces $v(\alpha) = \bigvee$ para toda valuación $v$ de $\mathfrak{L}$ en toda $\mathcal{S}-$álgebra $\mathfrak{A}$.*

Sea $\mathfrak{For}[X] = \langle For[X], \Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t, *^1, \ldots, *^s, e_1, \ldots, e_m \rangle \quad t, s, m \in \mathbb{N}$ el álgebra de las fórmulas de un lenguaje formalizado de orden cero $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$, y sea $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ un cálculo proposicional de **S**. Entonces, es simple verificar que la relación binaria $\leq$ definida en $For[X]$ por:

$$\alpha \leq \beta \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta,$$

es un pre-orden. Por otra parte, la siguiente relación:

$$\alpha \approx \beta \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ y } \vdash \beta \Rightarrow \alpha \text{ en } \mathcal{S},$$

es una congruencia en el álgebra $\mathfrak{For}[X]$. Más aún, $(For[X]/\approx, \leq)$ es un conjunto ordenado donde

$$|\alpha| \leq |\beta| \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ en } \mathcal{S}.$$

Por otra parte, de lo expuesto anteriormente se concluye que cualquier par de fórmulas derivables en $\mathcal{S}$ determinan la misma clase de equivalencia la cual será denotada con $\bigvee$. Esto es,

$$\bigvee = |\alpha| \text{ si, y sólo si, } \alpha \text{ es derivable en } \mathcal{S}.$$

Para cualquier sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ del cálculo proposicional $\mathbf{S}$, llamaremos *álgebra del sistema* $\mathcal{S}$ al álgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{S}) = \langle For[X]/\approx, \bigvee, \Rightarrow, o_1, \ldots, o_t, o^1, \ldots, o^s, |\mathrm{e}_0|, \ldots, |\mathrm{e}_{m-1}|\rangle$ tal que $\langle For[X]/\approx, \Rightarrow, o_1, \ldots, o_t, o^1, \ldots, o^s, |\mathrm{e}|_0, \ldots, |\mathrm{e}|_{\mathrm{m}-1}\rangle$ es el álgebra cociente $\mathfrak{F}or[X]/\approx$ y $\bigvee$ es la clase de las fórmulas derivables de $\mathcal{S}$.

Además, para todo sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ en $\mathbf{S}$ se verifica que el álgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ es una $\mathcal{S}-$álgebra. Más aún, $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ es no trivial si, y sólo si, el sistema $\mathcal{S}$ es consistente.

### 1.2.7. Teorema de completitud

Antes de enunciar el mencionado teorema debemos introducir las siguientes nociones.

Sea $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ un sistema consistente en la clase $\mathbf{S}$. Diremos que una fórmula $\alpha$ de $\mathfrak{L}$ es:

(i) *válida en un álgebra* $\mathfrak{A}$ *asociada con* $\mathfrak{L}$ si $v_{\mathfrak{A}}(\alpha) = \bigvee$ para toda valuación $v$ de $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{A}$,

(ii) $\mathcal{S}$-*válida* si es válida en toda $\mathcal{S}$-álgebra.

Entonces tenemos que

*Para toda fórmula* $\alpha$ *de un sistema consistente* $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ *en* $\mathbf{S}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\alpha$ *es derivable en* $\mathcal{S}$,

(ii) $\alpha$ *es* $\mathcal{S}$*-válida,*

(iii) ${v^0}_{\mathfrak{A}(\mathcal{S})}(\alpha) = \bigvee$, *donde* $v^0$ *es la valuación canónica en el álgebra* $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ *del sistema* $\mathcal{S}$,

(iv) $|\alpha| = \bigvee$ *en el álgebra* $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ *del sistema* $\mathcal{S}$.

La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) indicadas arriba se conoce habitualmente con el nombre de *Teorema de completitud*.

## 1.3. El cálculo proposicional de Sobociński

En 1964, B. Sobociński ([48]) obtuvo una formalización estilo Hilbert del cálculo proposicional determinado por la matriz $\mathcal{T} = (T, \rightarrow, \wedge, \uplus, \neg, D)$, donde

(i) $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,

(ii) las conectivas $\rightarrow, \wedge, \uplus, \neg$ están definidas sobre $T$ por medio de las siguientes tablas:

| $\rightarrow$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

| $\wedge$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

| $\uplus$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |

| $x$ | $\neg x$ |
|---|---|
| $0$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $1$ | $0$ |

(iii) $D = \{1\}$ es el conjunto de los elementos designados.

El mismo autor, demostró que este cálculo puede ser caracterizado por los siguientes axiomas esquemas:

(F1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p))$, (F2) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$,

(F3) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg p$,

(F4) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow q))$,

(F5) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$,

(F6) $(p \wedge q) \rightarrow p$,

(F7) $(p \wedge q) \rightarrow q$,

(F8) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$,

(F9) $\neg p \rightarrow \neg (p \wedge q)$,

(F10) $\neg q \rightarrow \neg (p \wedge q)$,

(F11) $\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg q \rightarrow \neg\neg (p \wedge q))$,

(F12) $p \rightarrow (p \uplus q)$,

(F13) $q \rightarrow (p \uplus q)$,

(F14) $(p \uplus q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow r))$,

(F15) $\neg (p \uplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$,

(F16) $\neg (p \uplus q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,

(F17) $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg (p \uplus q))$,

(F18) $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((q \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg q \rightarrow \neg\neg (p \uplus q))))$,

y la regla de inferencia

(MP) $\dfrac{p, p \to q}{q}$. Modus Ponens

En [49, p. 235] Sobociński afirmó que las conectivas $\to$, $\wedge$, $\uplus$ y $\neg$ no son mutuamente definibles. Pero Monteiro ([41, p. 207]) demostró que esta afirmación es falsa, ya que poniendo

$$\nabla x = \neg\neg\, x,$$

$$\sim x = (\nabla x \to x) \wedge (x \to (\neg\, x \wedge x)),$$

$$\triangle x = \sim \nabla \sim x,$$

$$x \vee y = \sim (\sim x \wedge \sim y),$$

se verifica

$$x \uplus y = \triangle x \vee \triangle y \vee (x \wedge \sim x \wedge \nabla y) \vee (y \wedge \sim y \wedge \sim \nabla x).$$

Además, también observó que los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\triangle$ y $\nabla$ coinciden con los del cálculo trivalente de Łukasiewicz. Por otra parte, este autor también mostró que las conectivas $\to$, $\neg$, $\triangle$ pueden ser definidos a partir de los de Łukasiewicz como sigue:

$$x \to y = \nabla \sim x \vee y,$$

$$\triangle x = \sim \nabla \sim x,$$

$$\neg x = \triangle \sim x.$$

Entonces el cálculo $\mathcal{A}$ de Sobociński coincide con el cálculo trivalente de Łukasiewicz.

## 1.4. Las álgebras de Łukasiewicz trivalentes

Es bien conocido que las álgebras de Łukasiewicz trivalentes (o $L_3-$álgebras) introducidas por Gr. Moisil ([35]) desempeñan para el cálculo trivalente de Łukasiewicz un rol análogo al de las álgebras de Boole para el cálculo proposicional clásico.

En 1963, A. Monteiro ([39, 40]) indicó una axiomática para la variedad $\mathcal{L}_3$ de las $L_3-$álgebras equivalente a la dada por Moisil. Este autor las caracterizó del siguiente modo:

*Una* $L_3-$*álgebra es un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, 1, 0)$ *que satisface las identidades*:

(L0) $x \vee 1 = 1$,

(L1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(L2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(L3) $\sim\sim x = x$,

(L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(L5) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(L6) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$,

(L7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Por otra parte, es bien conocido que $\mathcal{L}_3$ está generada por $T_3 = \langle\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ donde las operaciones $\vee, \wedge, \sim$ y $\nabla$ están dadas por las siguientes tablas:

| $\vee$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |

| $\wedge$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

| $x$ | $\sim x$ | $\nabla x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $1$ | $0$ | $1$ |

.

Teniendo en cuenta la relación establecida por Monteiro entre el cálculo de Sobociński y el cálculo trivalente de Łukasiewicz, planteó en forma natural los dos problemas siguientes:

(1) Caracterizar a las álgebras de Łukasiewicz trivalentes por medio de las operaciones implicación débil $(\rightarrow)$, ínfimo $(\wedge)$ y negación fuerte $(\neg)$.

(2) Caracterizar el cálculo trivalente de Łukasiewicz por medio de las conectivas $\rightarrow, \wedge, \neg$ que, como ya hemos visto, son suficientes.

En 1982, A. V. Figallo y J. Tolosa ([16]) dieron respuesta positiva al primer problema. Para ello introdujeron la variedad, que nosotros llamaremos, $\mathcal{L}_3^*$ de las $L_3^*-$álgebras, es decir las álgebras $\langle A, \rightarrow, \wedge, \neg, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,0)$ que satisfacen las identidades siguientes:

(A1) $x \rightarrow x = 1$,

(A2) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$,

(A3) $(x \rightarrow y) \rightarrow x = x$,

(A4) $x \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg(x \rightarrow y)) = 1$,

(A5) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow ((\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow ((\neg y \rightarrow \neg x) \rightarrow x)))$

$= (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow ((\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow ((\neg y \rightarrow \neg x) \rightarrow y)))$,

(A6) $(x \rightarrow y) \wedge y = y$,

(A7) $(x \wedge y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$,

(A8) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow z) \wedge (x \rightarrow y)$,

(A9) $\neg\, x \rightarrow (y \wedge \neg\, y) = \neg\neg\, x$,

(A10) $\neg\neg\, (x \wedge y) = \neg\neg\, x \wedge \neg\neg\, y$.

Estos autores, probaron que esta variedad está generada por el álgebra $T^* = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \rightarrow, \wedge, \neg\,, 1\rangle$ donde las operaciones $\rightarrow$, $\wedge$ y $\neg$ están dadas por las siguientes tablas:

$$
\begin{array}{c|ccc}
\rightarrow & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 \\
\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\wedge & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
x & \neg x \\
\hline
0 & 1 \\
\frac{1}{2} & 0 \\
1 & 0
\end{array}\;.
$$

Además, mostraron que las nociones de $L_3-$álgebras y $L_3^*-$álgebras son equivalentes en el sentido siguiente:

(i) si en $T_3$ definimos las operaciones $\rightarrow$ y $\neg$ por medio de las fórmulas indicadas en la Sección 1.3, obtenemos $T^*$,

y recíprocamente,

(ii) si en $T^*$ definimos las operaciones $\sim$ y $\nabla$ y $\vee$ de la manera indicada en la Sección 1.3, entonces resulta $T_3$.

Estos resultados permiten afirmar que (A1) a (A10) constituyen un conjunto de identidades para las $L_3-$álgebras en términos de los conectivos $\rightarrow$, $\wedge$ y $\neg$ de Sobociński.

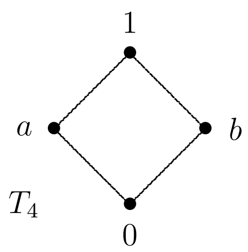
En 1992, A. V. Figallo y A. Ziliani ([17]) resolvieron el segundo problema, mostrando que si se considera el cálculo proposicional $\mathfrak{S}$, donde los axiomas esquemas son (F1) a (F11) indicados por Sobociński, y se define la relación $R_S$ por la prescripción:

$$(x,y)\in R_S \Leftrightarrow (x\to y)\in T_S,\ (y\to x)\in T_S,\ (\neg\, x\to\neg\, y)\in T_S,\ (\neg\, y\to\neg\, x)\in T_S,$$

donde $T_S$ es el conjunto de todas las fórmulas derivables en $\mathfrak{S}$, entonces $R_S$ es una congruencia sobre el álgebra de las fórmulas $\langle F,\to,\wedge,\neg\,\rangle$ y el álgebra $\langle F/R_S,\to,\wedge,\neg\,,T_S\rangle$ así obtenida es una $L_3^*-$álgebra.

## 1.5. Las álgebras de De Morgan modales $4-$valuadas

En 1966, L. Monteiro ([42]) demostró que en la axiomática dada por A. Monteiro para la variedad $\mathcal{L}_3$, (L0) es consecuencia de (L1), ..., (L7) y que estos axiomas son independientes. Para exhibir la independencia de (L7) consideró el álgebra $\mathcal{T}_4=\langle T_4,\vee,\wedge,\sim,\nabla,1\rangle$, donde $T_4=\{0,a,b,1\}$ tiene el diagrama de Hasse indicado en la figura y $\sim,\nabla$ están definidas por medio de las siguientes tablas:




| $x$ | $\sim x$ | $\nabla x$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| $a$ | $a$ | 1 |
| $b$ | $b$ | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

A. Monteiro, motivado en el ejemplo anterior consideró la variedad $\boldsymbol{\mathcal{TM}}$ de álgebras generada por $\mathcal{T}_4$ a las que llamó álgebras tetravalentes modales y a las que nosotros hemos denominado álgebras de De Morgan modales 4-valuadas (o $\mathrm{M}_4-$álgebras). Más precisamente:

*Un álgebra* $\langle A,\vee,\wedge,\sim,\nabla,1\rangle$ *de tipo* $(2,2,1,1,0)$ *es un una* $M_4-$*álgebra si satisface las identidades* (L1) *a* (L6) *antes indicadas.*

En 1978 este autor, durante su última estadía en Lisboa, le sugirió a I. Loureiro que desarrollara la teoría de estas álgebras y varios de los resultados que obtuvo forman parte de su tesis doctoral.

La teoría de estas álgebras ha sido desarrollada principalmente por I. Loureiro ([26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]) y A. V. Figallo ([14, 13, 15, 17]). Además, Font y Rius indicaron una breve pero detallada reseña sobre ellas en la introducción del importante trabajo [22]. Coincidiendo con la opinión vertida por estos autores, podemos decir que estas álgebras ofrecen un interés genuino, no sólo desde el punto de vista del álgebra, sino también desde la lógica y especialmente desde la perspectiva integradora de la Lógica Algebraica ya que ellas combinan características de lógicas modales normales y álgebras, en especial las $4-$valuadas, con una negación de De Morgan. En verdad, podemos considerarlas como una generalización de las álgebras de Boole monádicas y de las álgebras de De Morgan.

Finalmente, cabe observar que las $\mathrm{M}_4-$álgebras pueden ser definidas equivalentemente del siguiente modo:

*Un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \triangle, 0\rangle$ *de tipo* $(2,2,1,1,0)$ *es una* $M_4-$*álgebra si* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0\rangle$ *es un álgebra de De Morgan* ([25]) *y se satisfacen las identidades:*

(TM1) $\sim x \wedge \triangle x = 0,$

(TM2) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \sim \triangle x.$

Está es la definición adoptada por Font y Rius en [21, 22].

# 2. Capítulo II

A. Monteiro, al introducir las álgebras tetravalentes modales conjeturó que las mismas daríán origen a una lógica modal 4-valuada con importantes aplicaciones en Ciencias de la Computación. Si bien su presunción parece esencialmente correcta, desconocemos si tales aplicaciones han sido desarrolladas hasta el presente.

En este capítulo, indicaremos en primer lugar algunos de los resultados obtenidos por J. Font y M. Rius sobre la clase de lógicas tetravalentes modales de las cuales han hecho un estudio exhaustivo en [21, 22] definidas como una generalización de las lógicas determinadas sobre las álgebras tetravalentes modales considerando como sistema de clausura a todos los filtros. En segundo lugar, exhibiremos un sistema proposicional estilo Hilbert cuya contrapartida algebraica son las álgebras tetravalentes modales al que llamaremos cálculo proposicional de Monteiro $4-$valuado y que denotaremos con $\mathcal{M}_4$. Además, mostraremos que dicho cálculo pertenece a la clase de los sistemas proposicionales implicativos extensionales standard ([45, 46]) de donde se concluye la validez del Teorema de Completitud.

## 2.1. Sobre las lógicas tetravalentes modales de Font y Rius

J. Font y M. Rius en [21] introdujeron lo que denominaron lógicas tetravalentes modales (o LTM) que son extensiones modales de la bien conocida lógica de Belnap 4-valuada. En este trabajo se utilizó a $\mathcal{T}_4$ (ver Sección 1.5) como una matriz generalizada ([50]) para generar lógicas. Esto les permitió caracterizarlas en forma abstracta. Más precisamente probaron el siguiente:

**Teorema 2.1.1.** *Sea* $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{A}, \mathcal{C} \rangle$ *una lógica abstracta. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbb{L}$ *es una LTM,*

(ii) $\theta \in Con(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}/\theta$ *es un álgebra tetravalente modal y* $\mathcal{C}/\theta$ *es el conjunto de todos los filtros de* $\mathfrak{A}/\theta$*,*

(iii) *existe un morfismo bilógico entre* $\mathbb{L}$ *y una lógica* $\mathbb{L}' = \langle \mathfrak{A}', \mathcal{F}' \rangle$ *donde* $\mathfrak{A}'$ *es un álgebra tetravalente modal y* $\mathcal{F}'$ *es el conjunto de todos sus filtros.*

Este teorema tiene numerosas aplicaciones algebraicas, entre ellas podemos mencionar las siguientes:

- Establece claramente la relación entre las categorías de las álgebras y las lógicas tetravalentes modales.
- Para toda álgebra fija $\mathfrak{A}$, la correspondencia $\Theta \longrightarrow \Theta(C)$ establece un isomorfismo entre el retículo de todos los operadores de clausura $C$ sobre $\mathfrak{A}$ tales que $\langle \mathfrak{A}, \mathcal{C} \rangle$ es una LTM y el retículo de todas las $\theta \in Con(\mathfrak{A})$ tales que $\mathfrak{A}/\theta$ es un álgebra tetravalente modal.

- Un álgebra $\mathfrak{A}$ es tetravalente modal si, y sólo si, existe un operador de clausura $C$ sobre $\mathfrak{A}$ tal que $\langle \mathfrak{A}, \mathcal{C}\rangle$ es una LTM y $\Theta(C) = id_{\mathfrak{A}}$.

Además, estos autores obtuvieron un Teorema de Completitud para las LTM considerando en el álgebra de las fórmulas $\mathcal{F} = \langle For[X], \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ el operador sintáctico $\vdash$ definido por un cálculo de secuentes de la manera que indicaremos a continuación, donde los secuentes son expresiones de la forma $\Gamma \vdash \varphi$ con $\varphi \in For[X]$ y $\Gamma \subseteq For[X]$.

$\mathbb{L}_S = \langle \mathcal{F}, \vdash\rangle$ *es la lógica definida sobre* $\mathcal{F}$ *por:* $\Gamma \vdash_S \varphi$ *si, y sólo si, existe un conjunto finito* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *tal que el secuente* $\Gamma_0 \vdash \varphi$ *es derivable en el cálculo de secuentes que tiene los siguientes axiomas y reglas:*

(*Axioma estructural*) $\alpha \vdash \alpha$ (*Axioma modal*) $\vdash \alpha \vee \sim \triangle\alpha$

(*Debilitamiento*) $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma, \beta \vdash \alpha}$ (*Corte*) $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta}$

$(\wedge, \vdash)$ $\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$ $(\vdash, \wedge)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$

$(\vee, \vdash)$ $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \qquad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$ $(\vdash, \vee)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$

$(\sim)$ $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\sim \beta \vdash \sim \alpha}$

$(\sim\sim, \vdash)$ $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma, \sim\sim \alpha \vdash \beta}$ $(\vdash, \sim\sim)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \sim\sim \alpha}$

$(0)$ $\dfrac{\Gamma \vdash 0}{\Gamma \vdash \alpha}$

$(\triangle, \vdash)$ $\dfrac{\Gamma, \alpha, \sim \alpha \vdash \beta}{\Gamma, \alpha, \sim \triangle\alpha \vdash \beta}$ $(\vdash, \triangle)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \sim \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \sim \triangle\alpha}$.

*donde* $\alpha, \beta, \gamma \in For[X]$ *y* $\Gamma \subseteq For[X]$ *es finito.*

Observemos que como en $\mathcal{T}_4$ no hay un operador de implicación, la lógica resultante no pertenece a los cálculos proposicionales implicativos extensionales standard y por lo tanto, el Teorema de Completitud no podía obtenerse con los métodos standard de [45] ni con los más generales de [8].

Por otra parte, Font y Rius en [22] estudian dos lógicas sentenciales que surgen de analizar las propiedades algebraicas y de retículo de las álgebras tetravalentes modales. Recordemos que una *lógica sentencial* es una lógica abstracta $\mathcal{S} = \langle \mathcal{F}, C_S \rangle$ donde el operador de clausura es finitario e invariante por sustituciones. En este caso particular $\mathcal{F} = \langle For[X], \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0 \rangle$ y los operadores de clausura surgen a partir del álgebra $\mathcal{T}_4$ de la manera que indicaremos a continuación. Uno de ellos se obtiene siguiendo el esquema de "preservar la verdad" tomando a $\{1\}$ como subconjunto designado. Esto es, $\varphi$ es consecuencia de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ en esta lógica cuando toda interpretación que manda todos los $\varphi_i$ a 1 también manda $\varphi$ a 1. La otra lógica, denotada con $\mathcal{TML}$, se define usando la relación de orden de $\mathcal{T}_4$ y siguiendo el esquema de "preservar los grados de verdad" ([43]). Es decir, $\varphi$ es consecuencia de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ cuando toda interpretación asigna a $\varphi$ valores mayores o iguales que los valores que asigna a la conjunción de los $\varphi_i$. En ambos casos se prueba que la contrapartida algebraica son las álgebras tetravalentes modales, pero en el último caso la relación entre la lógica y las álgebras no es tan bueno como con la primera.

## 2.2. Cálculo proposicional de Monteiro $4-$valuado

Nuestro propósito fue intentar obtener un sistema proposicional en término de los conectivos $\rightarrow$, $\wedge$ y $\neg$ de modo tal que generalice al obtenido en [18] para las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Sin embargo, los conectivos que hemos considerado no son éstos, ni tampoco los símbolos de las operaciones de las $\mathrm{M}_4-$álgebras.

Por otra parte, queremos que nuestro nuevo sistema sea implicacional, pero es bien sabido que en las $\mathrm{M}_4-$álgebras se pueden definir varias operaciones de implicación, tal como lo comprobó A. V. Figallo. En efecto, se pueden definir entre otras las siguientes:

(I1) $x \rightarrowtail y = \sim x \vee y$,

(I2) $x \rightarrow y = \nabla \sim x \vee y$,

(I3) $x \mapsto y = (x \rightarrow y) \wedge (\nabla y \vee x)$,

(I4) $x \succ y = (x \mapsto y) \wedge ((x \rightarrowtail y) \rightarrow (\triangle \sim x \vee y)$.

En $T_4$, las operaciones $\rightarrowtail$, $\rightarrow$, $\mapsto$ y $\succ$ definidas anteriormente tienen las siguientes tablas:

| $\rightarrowtail$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a$ | $a$ | $a$ | 1 | 1 |
| $b$ | $b$ | 1 | $b$ | 1 |
| 1 | 0 | $a$ | $b$ | 1 |

| $\rightarrow$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $a$ | $b$ | 1 |

| $\mapsto$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a$ | $a$ | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | $b$ | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $a$ | $b$ | 1 |

| $\succ$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a$ | $a$ | 1 | $b$ | 1 |
| $b$ | $b$ | $a$ | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $a$ | $b$ | 1 |

Observemos que si en una $\mathrm{M}_4-$álgebra se verifica la condición de Kleene, es decir, $x\wedge \sim x \leq y\vee \sim y$, o equivalentemente si es un álgebra de Łukasiewicz trivalente, entonces las operaciones $\mapsto$ y $\succ$ definidas por I3 e I4 respectivamente coinciden con la implicación de Łukasiewicz.

Nosotros hemos elegido la implicación $\rightarrow$ que extiende la implicación débil de la lógica trivalente de Łukasiewicz debido a que ésta conserva gran cantidad de propiedades de la implicación clásica lo que nos permitió simplificar el cálculo proposicional buscado.

### 2.2.1. El cálculo $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$

Sea $\mathcal{L} = (A^0, F)$ un lenguaje formalizado de orden cero tal que en el alfabeto $A^0 = (V, L_0, L_1, L_2, U)$ el conjunto

(i) $V$ de variables proposicionales que denotaremos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\cdots$, es numerable,

(ii) $L_0$ es vacío,

(iii) $L_1$ contiene dos elementos denotados por $\sim$ and $\nabla$ llamados signo de negación y signo del operador modal, respectivamente,

(iv) $L_2$ contiene tres elementos denotados por $\wedge$, $\rightarrow$ y $\Rightarrow$ llamados signo de conjunción, signo de implicación débil y signo de implicación, respectivamente,

(v) $U$ contiene dos elementos denotados por ( , ).

Sea $F$ el conjunto de todas las fórmulas sobre $A^0$. Para cada $\alpha, \beta$ en $F$, escribiremos para abreviar $\alpha \leftrightarrow \beta$ en lugar de $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$.

Asumimos que el conjunto $\mathcal{A}_l$ de axiomas lógicos consiste de todas las fórmulas de la siguiente forma, donde $\alpha, \beta, \gamma$ son fórmulas cualesquiera en $F$:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(A3) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,

(A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

(A5) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$,

(A6) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \alpha)$,

(A7) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \to \nabla\beta$,

(A8) $(\alpha \to \beta) \to (\nabla(\alpha \wedge \beta) \to (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))))$,

(A9) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$,

(A10) $\alpha \to \nabla\alpha$,

(A11) $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \nabla\beta)$,

(A12) $(\alpha \to \nabla\beta) \to \nabla(\alpha \to \beta)$,

(A13) $\nabla(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to \nabla((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma))$,

(A14) $(\beta \to \gamma) \to ((\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)) \to ((\nabla\beta \to \nabla(\beta \wedge \gamma)) \to (\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \gamma))))$,

(A15) $\nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)) \to \nabla((\gamma \wedge \alpha) \wedge (\gamma \wedge \beta))$,

(A16) $(\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)) \to (\sim (\alpha \wedge \beta) \to \sim \alpha)$,

(A17) $\sim \beta \to \sim (\alpha \wedge \beta)$, (A18) $(\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)) \to ((\beta \to \alpha) \to (\nabla \sim \alpha \to \nabla(\sim \alpha \wedge \sim \beta)))$,

(A19) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)))$,

(A20) $\alpha \to \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)$,

(A21) $(\alpha \Rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \to \beta) \wedge (\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)))$,

(A22) $(\alpha \Rightarrow \beta) \to (\alpha \to \beta)$,

(A23) $\sim (\sim (\gamma \wedge \alpha) \wedge \sim (\beta \wedge \alpha)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \sim (\sim \beta \wedge \sim \gamma))$,

(A24) $\sim (\alpha \wedge \sim \nabla\alpha)$,

(A25) $\sim \alpha \to (\nabla\alpha \to \alpha)$,

(A26) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \nabla\alpha)$,

(A27) $\nabla \sim \alpha \to (\nabla\nabla\alpha \to \nabla(\sim \alpha \wedge \alpha))$,

(A28) $(\alpha \Rightarrow \beta) \to ((\beta \Rightarrow \alpha) \to (\nabla(\gamma \Rightarrow \alpha) \to \nabla((\gamma \Rightarrow \alpha) \wedge (\gamma \Rightarrow \beta))))$,

(A29) $(\alpha \Rightarrow \beta) \to ((\beta \Rightarrow \alpha) \to (\nabla(\alpha \Rightarrow \gamma) \to \nabla((\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma))))$,

(A30) $\alpha \to (\nabla\beta \to \nabla(\beta \wedge \alpha))$,

(A31) $(\nabla(\alpha \to \gamma) \wedge \nabla(\beta \to \gamma)) \to \nabla((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma))$.

El operador de consecuencia $C_{\mathcal{L}}$ en $\mathcal{L} = (A^0, F)$ está determinado por el conjunto $\mathcal{A}_l$ y por la siguiente regla de inferencia:

(r1) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$, (Modus Ponens)

El sistema $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4 = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ así obtenido, será llamado el cálculo proposicional de Monteiro 4-valuado. Cabe destacar que los conectivos antes mencionados no son independientes, sin embargo, los hemos considerado por simplicidad. Denotaremos con $\mathcal{T}$ al conjunto de todas las fórmulas derivables en $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$. Como es usual, si $\alpha \in \mathcal{T}$ diremos que $\alpha$ es un teorema de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$ y escribiremos $\vdash \alpha$ o $\alpha$.

En $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4 = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ teniendo en cuenta (A1), (A2) y (r1) se demuestra, de la manera habitual, el siguiente teorema conocido con el nombre de Teorema de la Deducción.

**Teorema 2.2.1.** *Sean $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4 = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$, $H \subseteq F$ y $\alpha, \beta \in F$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $H \vdash (\alpha \to \beta)$,

(ii) $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

En el Lema 2.2.2 resumimos las reglas y teoremas más importantes necesarios para el desarrollo posterior.

**Lema 2.2.2.** *En $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$ se verifican las siguientes reglas y teoremas:*

(R2) $\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$,

(R3) $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}$,

(T1) $\alpha \to \alpha$,

(T2) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$,

(R4) $\dfrac{\alpha \to \beta}{(\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)}$, (R5) $\dfrac{(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma)}{\beta\to(\alpha\to\gamma)}$,

(R6) $\dfrac{\alpha\to(\beta\to\gamma)}{\beta\to(\alpha\to\gamma)}$,

(T3) $(\alpha\to(\alpha\to\beta))\to(\alpha\to\beta)$,

(T4) $(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$,

(R7) $\dfrac{\alpha\to\beta,\ \beta\to\gamma}{\alpha\to\gamma}$,

(R8) $\dfrac{\alpha\to\beta}{(\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma)}$,

(T5) $((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$,

(T6) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$,

(R9) $\dfrac{\alpha,\ \beta}{\alpha\wedge\beta}$,

(R10) $\dfrac{\alpha,\ \alpha\Rightarrow\beta}{\beta}$,

(R11) $\dfrac{\alpha\Rightarrow\beta}{(\alpha\to\beta)\wedge(\nabla\alpha\to\nabla(\alpha\wedge\beta))}$,

(R12) $\dfrac{(\alpha\to\beta)\wedge(\nabla\alpha\to\nabla(\alpha\wedge\beta))}{\alpha\Rightarrow\beta}$,

(T7) $\alpha\Rightarrow\alpha$,

(R13) $\dfrac{\alpha\Rightarrow\beta,\beta\Rightarrow\gamma}{\alpha\Rightarrow\gamma}$,

(R14) $\dfrac{\alpha}{\beta\Rightarrow\alpha}$,

(T8) $(\alpha\to\beta)\to(\nabla(\alpha\wedge\beta)\to(\nabla(\gamma\wedge\alpha)\to\nabla(\beta\wedge\gamma)))$,

(T9) $\nabla(\alpha\wedge\beta)\to\nabla(\beta\wedge\alpha)$, (T10) $\nabla(\alpha\wedge\beta)\to\nabla\alpha$,

(T11) $(\gamma\to\alpha)\to((\gamma\to\beta)\to(\gamma\to(\alpha\wedge\beta)))$,

(T12) $\nabla(\alpha\wedge\beta)\to(\nabla\alpha\wedge\nabla\beta)$,

(T13) $\nabla(\alpha\wedge\beta)\to\nabla(\nabla\alpha\wedge\nabla\beta)$,

(R15) $\dfrac{\alpha\Rightarrow\beta}{\nabla\alpha\Rightarrow\nabla\beta}$,

(T14) $(\alpha\wedge\beta)\to(\beta\wedge\alpha)$,

(T15) $(\sim(\alpha\wedge\beta)\to\sim\alpha)\to(\sim\beta\to\sim\alpha)$,

(R16) $\dfrac{\alpha\Rightarrow\beta,\beta\Rightarrow\alpha}{\sim\alpha\Rightarrow\sim\beta}$,

(T16) $(\beta\to\alpha)\to((\alpha\to\nabla\gamma)\to(\beta\to\nabla\gamma))$,

(R17) $\dfrac{\beta\Rightarrow\alpha,\gamma\Rightarrow\delta}{(\alpha\to\gamma)\Rightarrow(\beta\to\delta)}$,

(R18) $\dfrac{\alpha\Rightarrow\beta,\gamma\Rightarrow\delta}{(\alpha\wedge\gamma)\Rightarrow(\beta\wedge\delta)}$,

(T17) $(\beta\Rightarrow\alpha)\to((\alpha\Rightarrow\gamma)\to(\beta\Rightarrow\gamma)$,

(T18) $(\gamma\Rightarrow\delta)\to((\beta\Rightarrow\gamma)\to(\beta\Rightarrow\delta)$,

(R19) $\dfrac{\alpha\Rightarrow\beta,\beta\Rightarrow\alpha,\gamma\Rightarrow\delta,\delta\Rightarrow\gamma}{(\alpha\Rightarrow\gamma)\Rightarrow(\beta\Rightarrow\delta)}$.

**Dem.**

(R2): Es consecuencia directa de (A1) y (r1).

(R3): Resulta de (A2) y (r1).

(T1): Se obtiene a partir de (A1), (A2) y (r1).

(T2):

(1) $(\gamma \to (\alpha \to \beta)) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$, [(A2)]

(2) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to (\alpha \to \beta)) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)))$, [(1), R2]

(3) $((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \to \beta))) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)))$, [(2), (R3)]

(4) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$. [(3), (A1), (r1)]

(R4): Es inmediata de (T2) y (r1).

(R5):

(1) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$,

(2) $(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$, [(1), (R4)]

(3) $\beta \to (\alpha \to \beta)$, [(A1)]

(4) $\beta \to (\alpha \to \gamma)$. [(3), (2), (r1)]

(R6):

(1) $\alpha \to (\beta \to \gamma)$,

(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$, [(1), (R3)]

(3) $\beta \to (\alpha \to \gamma)$. [(2), (R5)]

(T3):

(1) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \beta))$, [(A2)]

(2) $((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta))$, [(1), (R3)]

(3) $\alpha \to \alpha$, [(T1)]

(4) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha)$, [(3), (R2)]

(5) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$. [(4), (2), (r1)]

(T4):

(1) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, [(A2)]

(2) $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$, [(1), (R4)]

(3) $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, [(2), (A1), (r1)]

(4) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$. [(3), (R6)]

(R7) y (R8): Se deducen de (T4) y (r1).

(T5):

(1) $\beta \to (\alpha \to \beta)$, [(A1)]

(2) $(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)))$, [(T4)]

(3) $((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$. [(1), (2), (r1)]

(T6):

(1) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, [(A2)]

(2) $(((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))) \to$
$((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)))$, [(1), (R8)]

(3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$. [(2), (T5), (r1)]

(R9): Resulta de (A5) y (r1).

(R10):

(1) $\alpha$,

(2) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(3) $\alpha \rightarrow \beta$, [(2), (A22), (r1)]

(4) $\beta$. [(1), (3), (r1)]

(R11):

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)))$, [(A21)]

(3) $(((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))))\wedge$
$(((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))) \rightarrow$
$((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))))$, [(A3)]

(4) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)))$, [(2), (3), (r1)]

(5) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))$. [(1), (4), (R10)]

(R12):

(1) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))$,

(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)))$, [(A21)]

(3) $(((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)))) \wedge (((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta)))$
$\Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$, [(A4)]

(4) $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge \beta))) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, [(2), (3), (r1)]

(5) $\alpha \Rightarrow \beta$. [(1), (4), (R10)]

(T7): Se deduce de (T1), (A6), (R9) y (R12).

(R13):

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(2) $\beta \Rightarrow \gamma$,

(3) $\alpha \to \beta$, [(1), (R11), (A3), (r1)]

(4) $\nabla\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$, [(1), (R11), (A4), (r1)]

(5) $\beta \to \gamma$, [(2), (R11), (A3), (r1)]

(6) $\nabla\beta \to \nabla(\beta \wedge \gamma)$, [(2), (R11), (A4), (r1)]

(7) $\alpha \to \gamma$, [(3), (5), (R7)]

(8) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \gamma)$, [(A14), (5), (4), (6), (r1)]

(9) $\alpha \Rightarrow \gamma$. [(7), (8), (R9), (R12)]

(R14):

(1) $\alpha$,

(2) $\beta \to \alpha$, [(1), (R2)]

(3) $\nabla\beta \to \nabla(\beta \wedge \alpha)$, [(A30), (1), (r1)]

(4) $\beta \Rightarrow \alpha$. [(2), (3), (R9), (R12)]

(T8):

(1) $\nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)) \to \nabla(\beta \wedge \gamma)$, [(A7)]

(2) $(\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \gamma))$, [(1), (R4)]

(3) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))))) \rightarrow$
$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \gamma))))$, [(2), (R4)]

(4) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \gamma)))$. [(3), (r1), (A8)]

(T9):

(1) $(\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\beta \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha)))$, [(T8)]

(2) $\nabla(\beta \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha))$, [(1), (T1), (r1)]

(3) $(\nabla\beta \rightarrow \nabla(\beta \wedge \beta)) \rightarrow (\nabla\beta \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha)))$, [(2), (R4)]

(4) $\nabla\beta \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha))$, [(3), (A6), (r1)]

(5) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla\beta \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha))$, [(4), (R6)]

(6) $(\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla\beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha))$, [(5), (R3)]

(7) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha)$. [(6), (A7), (r1)]

(T10):

(1) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla(\beta \wedge \alpha)$, [(T9)]

(2) $(\nabla(\beta \wedge \alpha) \rightarrow \nabla\alpha) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla\alpha)$, [(1), (R8)]

(3) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \nabla\alpha$. [(2), (A7), (r1)]

(T11):

(1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$, [(A5)]

(2) $(\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$, [(1), (R4)]

(3) $(\gamma \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta)))$, [(A2)]

(4) $((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))) \to$
$((\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta))))$, [(3), (R4)]

(5) $(\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta)))$. [(2), (4), (r1)]

(T12):

(1) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \to \nabla\alpha$, [(T10)]

(2) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \to \nabla\beta$, [(A7)]

(3) $(\nabla(\alpha \wedge \beta) \to \nabla\alpha) \to ((\nabla(\alpha \wedge \beta) \to \nabla\beta) \to (\nabla(\alpha \wedge \beta) \to (\nabla\alpha \wedge \nabla\beta)))$, [(T11)]

(4) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \to (\nabla\alpha \wedge \nabla\beta)$. [(3), (1), (2), (r1)]

(T13): Se deduce de (T12), (A10) y (R7).

(R15):

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(2) $\alpha \to \beta$, [(1), (R11), (A3), (r1)]

(3) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)$, [(1), (R11), (A4), (r1)]

(4) $(\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$, [(A7), (R4)]

(5) $\nabla\alpha \to \nabla\beta$, [(3), (4), (r1)]

(6) $(\nabla\alpha \to (\nabla\alpha \wedge \beta)) \to (\nabla\alpha \to \nabla(\nabla\alpha \wedge \nabla\beta))$, [(T13), (R4)]

(7) $\nabla\alpha \to \nabla(\nabla\alpha \wedge \nabla\beta)$, [(3), (6), (r1)]

(8) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla(\nabla\alpha \wedge \nabla\beta)$, [(A9), (7), (R7)]

(9) $\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\beta$. [(5), (8), (R9), (R12)]

(T14):

(1) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$, [(A4)]

(2) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$, [(A3)]

(3) $((\alpha \wedge \beta) \to \beta) \to (((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)))$, [(T11)]

(4) $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$. [(1), (2), (3), (r1)]

(T15):

(1) $\sim \beta \to \sim (\alpha \wedge \beta)$, [(A17)]

(2) $(\sim (\alpha \wedge \beta) \to \sim \alpha) \to (\sim \beta \to \sim \alpha)$. [(R8), (1)]

(R16):

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(2) $\beta \Rightarrow \alpha$,

(3) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)$, [(1), (R11), (A4), (r1)]

(4) $\beta \to \alpha$, [(2), (R11), (A3), (r1)]

(5) $\nabla\beta \to \nabla(\beta \wedge \alpha)$, [(2), (R11), (A4), (r1)]

(6) $\sim (\beta \wedge \alpha) \to \sim \beta$, [(5), (A16), (r1)]

(7) $\sim\alpha\rightarrow\sim\beta$, [(6), (T15), (r1)]

(8) $\nabla\sim\alpha\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\sim\beta)$, [(A18), (3), (4), (r1)]

(9) $\sim\alpha\Rightarrow\sim\beta$. [(7), (8), (R9), (R12)]

(T16):

(1) $(\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\nabla\gamma)$, [(T1)]

(2) $\alpha\rightarrow((\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow\nabla\gamma))$, [(1), (R6)]

(3) $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow((\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow\nabla\gamma))$, [(2), (R2)]

(4) $(\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow(\beta\rightarrow((\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow\nabla\gamma))$, [(3), (R3)]

(5) $(\beta\rightarrow((\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow\nabla\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow(\beta\rightarrow\nabla\gamma))$. [(T6)]

(5) $(\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow((\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow(\beta\rightarrow\nabla\gamma))$. [(4), (5), (R7)]

(R17):

(1) $\beta\Rightarrow\alpha$,

(2) $\gamma\Rightarrow\delta$,

(3) $\beta\rightarrow\alpha$, [(1), (R11), (A3), (r1)]

(4) $\gamma\rightarrow\delta$, [(2), (R11), (A3), (r1)]

(5) $\nabla\gamma\rightarrow\nabla(\gamma\wedge\delta)$, [(2), (R11), (A4), (r1)]

(6) $(\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$, [(T4), (3), (r1)]

(7) $(\alpha\rightarrow\nabla\gamma)\rightarrow(\beta\rightarrow\nabla\gamma)$, [(T16), (3), (r1)]

(8) $(\nabla(\alpha \to \gamma) \to \nabla(\alpha \to \gamma)) \to ((\nabla(\alpha \to \gamma) \to (\nabla(\beta \to \gamma))$

$\to (\nabla(\alpha \to \gamma) \to (\nabla(\alpha \to \gamma) \wedge \nabla(\beta \to \gamma)))$, [(T11)]

(9) $(\nabla(\alpha \to \gamma) \to (\nabla(\beta \to \gamma)) \to (\nabla(\alpha \to \gamma) \to$

$(\nabla(\alpha \to \gamma) \wedge \nabla(\beta \to \gamma)))$, [(8), (T1), (r1)]

(10) $(\alpha \to \nabla\gamma) \to \nabla(\beta \to \gamma)$, [(7), (A12), (R7)]

(11) $\nabla(\alpha \to \gamma) \to \nabla(\beta \to \gamma)$, [(10), (A11), (R7)]

(12) $\nabla(\alpha \to \gamma) \to (\nabla(\alpha \to \gamma) \wedge \nabla(\beta \to \gamma))$, [(11), (9), (r1)]

(13) $\nabla(\alpha \to \gamma) \to \nabla((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma))$, [(12), (A31), (R7)]

(14) $(\alpha \to \gamma) \Rightarrow (\beta \to \gamma)$, [(6), (13), (R9), (R12)]

(15) $(\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)$, [(T2), (4), (r1)]

(16) $(\beta \to \nabla\gamma) \to (\beta \to \nabla(\gamma \wedge \delta))$, [(5), (R4)]

(17) $\nabla(\beta \to \gamma) \to (\beta \to \nabla(\gamma \wedge \delta))$, [(A11), (16), (R7)]

(18) $(\beta \to \nabla(\gamma \wedge \delta)) \to \nabla(\beta \to (\gamma \wedge \delta))$, [(A12)]

(19) $\nabla(\beta \to \gamma) \to \nabla(\beta \to (\gamma \wedge \delta))$, [(17), (18), (R7)]

(20) $\nabla(\beta \to \gamma) \to \nabla((\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta))$, [(19), (A13), (R7)]

(21) $(\beta \to \gamma) \Rightarrow (\beta \to \delta)$, [(15), (20), (R9), (R12)]

(22) $(\alpha \to \gamma) \Rightarrow (\beta \to \delta)$. [(14), (21), (R13)]

(R18):

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(2) $\gamma \Rightarrow \delta$,

(3) $\alpha \to \beta$, [(1), (R11), (A3), (r1)]

(4) $\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)$, [(1), (R11), (A4), (r1)]

(5) $\gamma \to \delta$, [(2), (R11), (A3), (r1)]

(6) $\nabla\gamma \to \nabla(\gamma \wedge \delta)$, [(2), (R11), (A4), (r1)]

(7) $((\alpha \wedge \gamma) \to \beta) \to (((\alpha \wedge \gamma) \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)))$, [(T11)]

(8) $(\alpha \wedge \gamma) \to \beta$, [(A3), (3), (R7)]

(9) $(\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)$, [(7), (8), (A4), (r1)]

(10) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \to (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)))$, [(A8), (3), (r1)]

(11) $(\nabla\alpha \to \nabla(\alpha \wedge \beta)) \to (\nabla\alpha \to (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))))$, [(10), (R4)]

(12) $\nabla\alpha \to (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)))$, [(11), (4), (r1)]

(13) $\nabla(\gamma \wedge \alpha) \to (\nabla\alpha \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)))$, [(12), (R6)]

(14) $\nabla(\alpha \wedge \gamma) \to (\nabla\alpha \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)))$, [(T9), (13), (R7)]

(15) $(\nabla(\alpha \wedge \gamma) \to \nabla\alpha) \to (\nabla(\alpha \wedge \gamma) \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)))$, [ (14), (R3)]

(16) $\nabla(\alpha \wedge \gamma) \to \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))$, [(T10), (15), (r1)]

(17) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$, [(9), (16), (R9), (R12)]

(18) $((\beta \wedge \gamma) \to \delta) \to (((\beta \wedge \gamma) \to \beta) \to ((\beta \wedge \gamma) \to (\delta \wedge \beta)))$, [(T11)]

(19) $(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \delta$, [(A4), (5), (R7)]

(20) $(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\delta \wedge \beta)$, [(18), (19), (A3), (r1)]

(21) $(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \delta)$, [(20), (T14), (R7)]

(22) $\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla\gamma$, [(T9), (T10), (R7)]

(23) $(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \delta) \rightarrow (\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \beta) \wedge (\delta \wedge \beta))))$, [(A8)]

(24) $\nabla(\gamma \wedge \delta) \rightarrow (\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \beta) \wedge (\delta \wedge \beta)))$, [(5), (23), (r1)]

(25) $(\nabla\gamma \rightarrow \nabla(\gamma \wedge \delta)) \rightarrow (\nabla\gamma \rightarrow (\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \beta) \wedge (\delta \wedge \beta))))$, [(24), (R4)]

(26) $\nabla\gamma \rightarrow (\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \beta) \wedge (\delta \wedge \beta)))$, [(25), (6), (r1)]

(27) $\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\nabla\gamma \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \beta) \wedge (\delta \wedge \beta)))$, [(26), (R6)]

(28) $\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \beta) \wedge (\delta \wedge \beta))$, [(27), (R3), (22), (r1)]

(29) $\nabla(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\beta \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \delta))$, [(28), (A15), (R7)]

(30) $(\beta \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \delta)$, [(21), (29), (R9), (R12)]

(31) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \delta)$. [(17), (30), (R13)]

(T17): Es consecuencia directa del Teorema 2.2.1 y (R13).

(T18): Se deduce del Teorema 2.2.1 y (R13).

(R19):

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$,

(2) $\beta \Rightarrow \alpha$,

(3) $\gamma \Rightarrow \delta$,

(4) $\delta \Rightarrow \gamma$,

(5) $(\beta \Rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \Rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma))$, [(T17)]

(6) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$, [(2), (5), (r1)]

(7) $\nabla(\alpha \Rightarrow \gamma) \rightarrow \nabla((\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma))$, [(A29), (1), (2), (r1)]

(8) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$, [(6), (7), (R9), (R12)]

(9) $(\gamma \Rightarrow \delta) \rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \Rightarrow \delta))$, [(T18)]

(10) $(\beta \Rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)$, [(3), (9), (r1)]

(11) $\nabla(\beta \Rightarrow \gamma) \rightarrow \nabla((\beta \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \delta))$, [(A28), (3), (4), (r1)]

(12) $(\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)$, [(10), (11), (R9), (R12)]

(13) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)$. [(8), (12), (R13) ]□

**Teorema 2.2.3.** *El cálculo proposicional $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$ pertenece a la clase de los sistemas proposicionales implicativos extensionales standard.*

**Dem.** Debemos probar que $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$ verifica las condiciones (s1) a (s8) indicadas en la Sección 1.2.5. Es inmediato que (s1) y (s2) son válidas. Además, (s3), (s4), (s5) y (s6) resultan de (T7), (R10), (R13) y (R14), respectivamente. Por otra parte, (s7) es consecuencia de (R15) y (R16). Finalmente, de (R17), (R18) y (R19) concluimos (s8). □

### 2.2.2. Relación entre las $\mathrm{M}_4-$álgebras y las $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4-$álgebras

Nuestro próximo objetivo es establecer la relación entre las álgebras tetravalentes modales y las $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4-$álgebras, para lo cual el Lema 2.2.4 es fundamental.

**Lema 2.2.4.** *En $\mathcal{M}_4$ se verifican los siguientes teoremas:*

(T19) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$,

(T20) $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))$,

(T21) $\alpha \to (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta))$,

(T22) $\nabla(\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \to \nabla((\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \wedge \alpha)$.

(T23) $(\alpha \to \beta) \to (\nabla(\alpha \wedge \beta) \to (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \to \nabla((\gamma \wedge \alpha) \wedge (\gamma \wedge \beta))))$,

(T24) $(\sim \alpha \wedge \alpha) \to (\sim \alpha \wedge \nabla\alpha)$,

(T25) $(\sim \alpha \wedge \nabla\alpha) \to (\sim \alpha \wedge \alpha)$,

(T26) $\nabla(\sim \alpha \wedge \alpha) \to \nabla(\alpha \wedge \nabla\alpha)$,

(T27) $\nabla(\sim \alpha \wedge \alpha) \to \nabla((\sim \alpha \wedge \alpha) \wedge (\sim \alpha \wedge \nabla\alpha))$,

(T28) $\nabla(\sim \alpha \wedge \nabla\alpha) \to \nabla(\sim \alpha \wedge \alpha)$,

(T29) $\nabla(\sim \alpha \wedge \nabla\alpha) \to \nabla((\sim \alpha \wedge \nabla\alpha) \wedge (\sim \alpha \wedge \alpha))$.

**Dem.**
(T19):

(1) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$, [(A4)]

(2) $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$, [(1), (R8)]

(3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma))$, [(2), (R4)]

(4) $(\alpha \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, [(T6)]

(5) $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma))) \to$

$((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma))),$ [(4), (R4)]

(6) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma)),$ [(3), (5), (r1)]

(7) $((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)),$ [(A2)]

(8) $((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) \to (((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)),$ [(7), (R6)]

(9) $((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma),$ [(A3), (8), (r1)]

(10) $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \to \gamma))) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to$

$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)),$ [(9), (R4)]

(11) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma).$ [(6), (10), (r1)]

(T20):

(1) $((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))) \to (((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)) \to$

$(\alpha \to (\beta \wedge \gamma))),$ [(T19)]

(2) $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)).$ [(T11), (1), (r1)]

(T21):

(1) $((\alpha \to \alpha) \wedge (\alpha \to \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta))) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta))),$ [(T20)]

(2) $(\alpha \to \alpha) \wedge (\alpha \to \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)),$ [(T1), (A20), (R9)]

(3) $\alpha \to (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)).$ [(1), (2), (r1)]

(T22):

(1) $\nabla\alpha \rightarrow \nabla(\alpha \wedge (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)))$, [(A19)]

(2) $(\nabla(\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \rightarrow \nabla\alpha) \rightarrow$

$(\nabla(\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \rightarrow \nabla(\alpha \wedge (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta))))$, [(1), (R4)]

(3) $\nabla(\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \rightarrow \nabla(\alpha \wedge (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)))$, [(2), (T10), (r1)]

(4) $\nabla(\alpha \wedge (\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \beta))) \rightarrow \nabla((\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \wedge \alpha)$, [(T9)]

(5) $\nabla(\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \rightarrow \nabla((\alpha \wedge \sim (\sim \alpha \wedge \sim \beta)) \wedge \alpha)$. [(3), (4), (R7)]

(T23)

(1) $\nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \alpha) \wedge (\gamma \wedge \beta))$, [(A15)]

(2) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))))) \rightarrow$

$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \alpha) \wedge (\gamma \wedge \beta)))))$, [(R4)]

(3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \nabla((\gamma \wedge \alpha) \wedge (\gamma \wedge \beta))))$. [(2), (A8), (r1)]

(T24):

(1) $(((\sim \alpha \wedge \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \wedge ((\sim \alpha \wedge \alpha) \rightarrow \nabla\alpha)) \rightarrow ((\sim \alpha \wedge \alpha) \rightarrow (\sim \alpha \wedge \nabla\alpha))$, [(T20)]

(2) $(\sim \alpha \wedge \alpha) \rightarrow \sim \alpha$, [(A3)]

(3) $(\sim \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \nabla\alpha)) \rightarrow ((\sim \alpha \wedge \alpha) \rightarrow \nabla\alpha)$, [(T19)]

(4) $\alpha \rightarrow \nabla\alpha$, [(A10)]

(5) $\sim \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \nabla\alpha)$, [(4), (R2)]

(6) $(\sim \alpha \wedge \alpha) \rightarrow \nabla\alpha$, [(3), (5), (r1)]

(7) $((\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\sim\alpha)\wedge((\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla\alpha)$, [(2), (6), (R9)]

(8) $(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)$. [(7), (1), (r1)]

(T25):

(1) $(((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\sim\alpha)\wedge((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\alpha))\rightarrow((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow(\sim\alpha\wedge\alpha))$, [(T20)]

(2) $(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\sim\alpha$, [(A3)]

(3) $(\sim\alpha\rightarrow(\nabla\alpha\rightarrow\alpha))\rightarrow((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\alpha)$, [(T19)]

(4) $(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\alpha$, [(A25), (3), (r1)]

(5) $((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\sim\alpha)\wedge((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\alpha)$, [(2), (4), (R9)]

(6) $(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow(\sim\alpha\wedge\alpha)$. [(5), (1), (r1)]

(T26):

(1) $\nabla\alpha\rightarrow\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha)$, [(A26)]

(2) $(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha))$, [(1), (R4)]

(3) $\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha)$. [(2), (A7), (r1)]

(T27):

(1) $(\alpha\rightarrow\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha))))$, [(T23)]

(2) $\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)))$, [(1), (A10), (r1)]

(3) $\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow(\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)))$, [(2), (R6)]

(4) $(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla(\alpha\wedge\nabla\alpha))\rightarrow(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow$

$\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)))$ [(3), (R3)]

(5) $\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha))$. [(4), (T26), (r1)]

(T28):

(1) $\nabla\sim\alpha\rightarrow(\nabla\nabla\alpha\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha))$, [A27]

(2) $(\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla\sim\alpha)\rightarrow(\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla\nabla\alpha\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)))$, [(1),(R4)]

(3) $\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla\nabla\alpha\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha))$, [(2), (T10), (r1)]

(4) $(\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla\nabla\alpha)\rightarrow(\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha))$, [(3), (R3)]

(5) $\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)$. [(4), (A7), (r1)]

(T29):

(1) $\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)$, [(T28)]

(2) $(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\alpha)))\rightarrow$
$(\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\alpha)))$, [(1), (R8)]

(3) $\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha))\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\alpha))$, [(T9)]

(4) $(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)))\rightarrow$
$(\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\alpha)))$, [(3), (R4)]

(5) $\nabla(\sim\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\alpha))$, [(4), (T27), (r1)]

(6) $\nabla(\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\rightarrow\nabla((\sim\alpha\wedge\nabla\alpha)\wedge(\sim\alpha\wedge\alpha))$. [(5), (2), (r1)] $\square$

**Observación 2.2.5.** *Cabe mencionar que si $\alpha$ es una fórmula derivable en $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$, entonces $\alpha_{\mathcal{U}}(v)=1$ para toda valuación $v$ de $\mathcal{L}$ en toda $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4-$álgebra $\mathcal{U}$.*

**Proposición 2.2.6.** *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{TM}}$. *Entonces* $\langle L, \Rightarrow, \rightarrow, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ *es una* $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$*-álgebra, donde* $\rightarrow$ *y* $\Rightarrow$ *están definidas como sigue:*

$$x \rightarrow y = \nabla \sim x \vee y,$$

$$x \Rightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (\nabla x \rightarrow \nabla(x \wedge y)).$$

**Dem.** Probaremos que las condiciones (a1) a (a4) indicadas en la Sección 1.2.6 son válidas. En efecto, (a1) y (a2) se verifican teniendo en cuenta las definiciones de las operaciones $\rightarrow$ y $\Rightarrow$. Por otra parte, sean $a, b \in L$ tales que $a \Rightarrow b = b \Rightarrow c = 1$. Entonces, tenemos que (1) $a \rightarrow b = b \rightarrow c = 1$ y (2) $\nabla a \rightarrow \nabla(a \wedge b) = \nabla b \rightarrow \nabla(b \wedge c) = 1$. De (1), (A2) y (2), (A14) deducimos que $a \rightarrow c = 1$ y $\nabla a \rightarrow \nabla(a \wedge c) = 1$ respectivamente. De estas afirmaciones y el hecho que $x \leq y$ si, y sólo si, $x \rightarrow y = 1$ y $\nabla x \rightarrow \nabla(x \wedge y) = 1$ concluimos que $a = c$ y por lo tanto, (a3) es válida. Además, si $a \Rightarrow b = b \Rightarrow a = 1$, entonces siguiendo un razonamiento análogo al empleado en la demostración de (a3), inferimos que $a = b$, de donde resulta (a4). $\square$

**Proposición 2.2.7.** *Sea* $\langle L, \Rightarrow, \rightarrow, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ *una* $\boldsymbol{\mathcal{M}}_4$*-álgebra. Entonces* $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{TM}}$ *donde* $a \vee b = \sim (\sim a \wedge \sim b)$.

**Dem.** Por [34, Theorem 1], para probar que $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan es suficiente mostrar (M1) $a = a \wedge \sim (\sim a \wedge \sim b)$ y (M2) $a \wedge \sim (\sim b \wedge \sim c) = \sim (\sim (c \wedge a) \wedge \sim (b \wedge a))$. De la Observación 2.2.5 y (a4) (ver Sección 1.2.6), tenemos que (M2) es consecuencia de (A23) y (M1) se deduce de (A3), (A19), (T21), (T22), (R9) y (R12). Además, siguiendo un razonamiento análogo y teniendo en cuenta (A24) inferimos (L5). Por otra parte de (T24), (T25), (T26), (T29), (R9) y (R12) concluimos (L6), lo que completa la demostración. $\square$

De las Proposiciones 2.2.6 y 2.2.7 inferimos

**Teorema 2.2.8.** *Las nociones de $\mathcal{M}_4$-álgebra y álgebra tetravalente modal son equivalentes.*

Sea $\equiv$ la relación binaria definida sobre $F$ del siguiente modo:

$$\alpha \equiv \beta \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ y } \vdash \beta \Rightarrow \alpha \text{ in } \mathcal{M}_4.$$

Entonces, $\equiv$ es una congruencia sobre $\langle F, \Rightarrow, \rightarrow, \wedge, \sim, \nabla \rangle$ y $\mathcal{T}$ determina una clase de equivalencia que denotaremos con 1. Además, $\langle F/\equiv, \Rightarrow, \rightarrow, \wedge, \sim, \nabla, 1 \rangle$ es una $\mathcal{M}_4$-álgebra (ver Sección 1.2.6) y por lo tanto, de la Proposición 2.2.7, concluimos que

**Teorema 2.2.9.** $\mathcal{F} = \langle F/\equiv, \wedge, \sim, \nabla, 1 \rangle \in \mathcal{TM}$.

### 2.2.3. El Teorema de Completitud

Por otra parte, como $\mathcal{M}_4$ es consistente, de lo indicado en la Sección 1.2.7 y el Teorema 2.2.8 tenemos que se verifica el Teorema de Completitud para $\mathcal{M}_4$, el cual está incluido en el siguiente

**Teorema 2.2.10.** *Sea $\alpha$ una fórmula de $\mathcal{M}_4$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\alpha$ es derivable en $\mathcal{M}_4$,*

(ii) *$\alpha$ es válida en toda $\mathcal{M}_4$-álgebra,*

(iii) *$\alpha_{\mathcal{F}}(v^0) = 1$, donde $v^0$ es la valuación canónica en el álgebra $\mathcal{F}$.*

# 3. Capítulo III

En este capítulo, en primer lugar, introducimos a los retículos distributivos modales con implicación (o $mdl_i-$álgebras) y estudiamos propiedades de los mismos. Esta noción es más adecuada que la de las álgebras tetravalentes modales para el estudio del cálculo proposicional de Monteiro $4-$valuado desde el punto de vista algebraico, afirmación que se basa en el hecho que la implicación $\rightarrow$ es una de sus operaciones binarias básicas. En segundo lugar, mostramos la equivalencia entre las categorías $\boldsymbol{\mathfrak{MDL}_i}$ y $\boldsymbol{\mathfrak{TM}}$ de las $mdl_i-$álgebras y las álgebras tetravalentes modales y sus correspondientes homomorfismos respectivamente.

## 3.1. Retículos distributivos modales con implicación

**Definición 3.1.1.** *Un retículo distributivo modal con implicación* (*o* $mdl_i-$*álgebra*) *es un álgebra* $\langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \nabla, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$ *donde* $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado que satisface las siguientes identidades:*

(Mi1) $x \rightarrow x = 1$,

(Mi2) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$,

(Mi3) $(x \to y) \to x = x$,

(Mi4) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z)$,

(Mi5) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$,

(Mi6) $(x \to y) \wedge y = y$,

(Mi7) $\nabla 0 = 0$,

(Mi8) $\nabla(\nabla x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$,

(Mi9) $\nabla(x \to y) = x \to \nabla y$,

(Mi10) $x \vee (x \to y) = 1$,

(Mi11) $(\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to \nabla((\nabla x \to x) \wedge (\nabla y \to y)) = 1$,

(Mi12) $(\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to x = (\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to (x \wedge ((x \to y) \to y))$.

En la Proposición 3.1.2 mostraremos algunas propiedades de las $mdl_i-$álgebras que serán de utilidad en lo que sigue.

**Proposición 3.1.2.** *Sea $\mathcal{A}$ una $mdl_i-$ álgebra. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(Mi13) $1 \to x = x$,

(Mi14) $x \to 1 = 1$,

(Mi15) $\nabla(\nabla x \to x) = 1$,

(Mi16) $\nabla 1 = 1$,

(Mi17) $x \to \nabla x = 1$,

(Mi18) $\nabla x \to \nabla(x \wedge \nabla x) = 1$,

(Mi19) $x \to (x \wedge y) = x \to y$,

(Mi20) $x \to (y \to x) = 1$,

(Mi21) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$,

(Mi22) $(\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to x = (x \to y) \to ((\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to (x \wedge y))$,

(Mi23) $x \wedge \nabla x = x$,

(Mi24) $x \leq y$ *implica* $\nabla x \leq \nabla y$,

(Mi25) $x \leq y$ *implica* $z \to x \leq z \to y$,

(Mi26) $x \leq y$ *si, y sólo si,* $x \to y = 1$, $\nabla x \to \nabla(x \wedge y) = 1$,

(Mi27) $x \leq y$ *implica* $(y \to z) \to (x \to z) = 1$,

(Mi28) $((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla x = 1$,

(Mi29) $\nabla \nabla x = \nabla x$.

**Dem.**

(Mi13): Es consecuencia directa de (Mi3) y (Mi1).

(Mi14): Resulta de (Mi1) y (Mi2).

(Mi15): $\nabla(\nabla x \to x) = \nabla x \to \nabla x = 1$. [(Mi9), (Mi1)]

(Mi16): $1 = \nabla(\nabla 1 \to 1) = \nabla 1$. [(Mi15), (Mi14)]

(Mi17): $x \to \nabla x = \nabla(x \to x) = \nabla 1 = 1$. [(Mi9), (Mi1), (Mi16)]

(Mi18): $\nabla x \to \nabla(x \wedge \nabla x) = \nabla x \to (\nabla x \wedge \nabla x) = 1.$ [(Mi8), (Mi1)]

(Mi19): $x \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge (x \to x) = x \to y.$ [(Mi5), (Mi1)]

(Mi20): Es consecuencia de (Mi2), (Mi1) y (Mi14).

(Mi21): Se deduce de (Mi4).

(Mi22):

$$
\begin{aligned}
&(x \to y) \to ((\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to (x \wedge y) && \\
&= (\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to ((x \to y) \to (x \wedge y)) && [(\text{Mi21})] \\
&= (\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to (x \wedge ((x \to y) \to y)) && [(\text{Mi5}), (\text{Mi3})] \\
&= (\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to x. && [(\text{Mi12})]
\end{aligned}
$$

(Mi23):

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \to x && [(\text{Mi13})] \\
&= (\nabla x \to \nabla(x \wedge \nabla x)) \to x && [(\text{Mi18})] \\
&= (x \to \nabla x) \to ((\nabla x \to \nabla(x \wedge \nabla x)) \to (x \wedge \nabla x)) && [(\text{Mi22})] \\
&= 1 \to (x \wedge \nabla x) && [(\text{Mi17}), (\text{Mi18}), (\text{Mi13})] \\
&= x \wedge \nabla x. && [(\text{Mi13})]
\end{aligned}
$$

(Mi24):

(1) $x \leq y \leq \nabla y,$ [(Mi23)]

(2) $x = x \wedge \nabla y,$ [(1)]

(3) $\nabla x = \nabla x \wedge \nabla y,$ [(2), (Mi8)]

(4) $\nabla x \leq \nabla y.$ [(3)]

(Mi25):

(1) $x \leq y$

(2) $z \to x = z \to (x \wedge y) = (z \to x) \wedge (z \to y).$ [(1), (Mi5)]

(Mi26): Sea

(1) $x \leq y,$

entonces

(2) $x \to y = (x \wedge y) \to y =$ [(1)]

$x \to (y \to y) = x \to 1 = 1,$ [(Mi4), (Mi1), (Mi14)]

(3) $\nabla x \to \nabla (x \wedge y) = \nabla x \to \nabla x = 1.$ [(1), (Mi1)]

Recíprocamente, sean

(1) $x \to y = 1,$

(2) $\nabla x \to \nabla (x \wedge y) = 1,$

entonces

(3) $x = 1 \to x$ [(Mi13)]

$= (\nabla x \to \nabla (x \wedge y)) \to x$ [(2)]

$= (\nabla x \to \nabla (x \wedge y)) \to (x \wedge ((x \to y) \to y))$ [(Mi12)]

$= 1 \to (x \wedge (1 \to y)) = x \wedge y,$ [(2), (1), (Mi13)]

(4) $x \leq y.$ [(1)]

(Mi27):

(1) $x \leq y,$

(2) $(y \to z) \to (x \to z) = x \to ((y \to z) \to z)$ [(Mi21)]

$= (x \to (y \to z)) \to (x \to z)$ [(Mi2)]

$= ((x \to y) \to (x \to z)) \to (x \to z)$ [(Mi2)]

$= (1 \to (x \to z)) \to (x \to z)$ [(1), (Mi26)]

$= (x \to z) \to (x \to z) = 1$ [(Mi13), (Mi1)]

(Mi28):

(1) $x \leq \nabla x,$ [(Mi23)]

(2) $(\nabla x \to x) \to x \leq (\nabla x \to x) \to \nabla x,$ [(1), (Mi25)]

(3) $(((\nabla x \to x) \to \nabla x) \to \nabla x) \to (((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla x) = 1,$ [(2), (Mi27)]

(4) $(\nabla x \to \nabla x) \to (((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla x) = 1,$ [(3), (Mi3)]

(5) $((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla x = 1.$ [(4), (Mi1), (Mi13)]

(Mi29):

$\nabla x = \nabla x \wedge \nabla \nabla x$ [(Mi23)]

$= \nabla(\nabla x \wedge \nabla x) = \nabla \nabla x$ [(Mi8)]$\square$

## 3.2. Equivalencia categórica entre $\mathfrak{TM}$ y $\mathfrak{MDL}_i$

Nuestro próximo objetivo será mostrar la relación entre las álgebras tetravalentes modales y los retículos distributivos modales con implicación con lo que quedará justificada la introducción de esta última clase de álgebras. Con este propósito dada la $mdl_i-$álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \nabla, 0, 1\rangle$ definimos $\Theta(\mathcal{A}) = \langle A, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$, donde $\sim x = (x \rightarrow 0) \wedge (\nabla x \rightarrow x)$ para todo $x \in A$. Además, dadas las $mdl_i-$álgebras $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ y un homomorfismo $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, entonces $\Theta(f) : \Theta(\mathcal{A}) \longrightarrow \Theta(\mathcal{A}')$ está definida por $\Theta(f) = f$.

El Lema 3.2.1 y las Proposiciones 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4 son fundamentales para probar el Teorema 3.2.5

**Lema 3.2.1.** *Sea $\mathcal{A}$ una $mdl_i-$álgebra. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(Mi30) $\nabla x \wedge (\nabla x \rightarrow x) = x$,

(Mi31) $(\nabla x \rightarrow x) \rightarrow x = \nabla x$,

(Mi32) $((x \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow x = 1$,

(Mi33) $\nabla(x \rightarrow 0) = x \rightarrow 0$,

(Mi34) $((x \rightarrow 0) \wedge (\nabla x \rightarrow x)) \rightarrow 0 = \nabla x$,

(Mi35) $\nabla \sim x = x \rightarrow 0$,

(Mi36) $x \leq y$ *implica* $(y \rightarrow 0) \rightarrow (x \rightarrow 0) = 1$,

(Mi37) $x \leq y$ *implica* $(\nabla y \rightarrow y) \rightarrow (\nabla x \rightarrow x) = \nabla x \rightarrow (y \rightarrow x)$, (Mi38) $x \leq y$ *implica* $\nabla(\sim y \wedge \sim x) = (y \to 0) \wedge (x \to 0)$,

(Mi39) $x \leq y$ *implica* $\sim y \leq \sim x$.

**Dem.**

(Mi30):

(1) $x \to (\nabla x \wedge (\nabla x \to x)) = (x \to \nabla x) \wedge (x \to (\nabla x \to x)) = 1,$ [(Mi5), (Mi17), (Mi20)]

(2) $(\nabla x \wedge (\nabla x \to x)) \to x = (\nabla x \to x) \to (\nabla x \to x) = 1,$ [(Mi4), (Mi1)]

(3) $\nabla x \to \nabla(\nabla x \wedge (\nabla x \to x) \wedge x) = \nabla x \to \nabla(x \wedge (\nabla x \to x))$ [(Mi23)]

$= \nabla x \to \nabla x = 1$ [(Mi6), (Mi1)]

(4) $\nabla(\nabla x \wedge (\nabla x \to x)) \to \nabla(\nabla x \wedge (\nabla x \to x) \wedge x)$

$= (\nabla x \wedge \nabla(\nabla x \to x)) \to \nabla x = 1,$ [(Mi8), (Mi23), (Mi6)]

(5) $\nabla x \wedge (\nabla x \to x) = x.$ [(1), (2), (3), (4), (Mi26)]

(Mi31):

(1) $\nabla x \to ((\nabla x \to x) \to x) = 1$ [(Mi21), (Mi1)]

(2) $((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla x = 1,$ [(Mi28)]

(3) $\nabla \nabla x \to \nabla(((\nabla x \to x) \to x) \wedge \nabla x)$

$= \nabla x \to (\nabla((\nabla x \to x) \to x) \wedge \nabla x)$ [(Mi29), (Mi8)]

$= \nabla x \to (((\nabla x \to x) \to \nabla x) \wedge \nabla x)$ [(Mi9)]

$= \nabla x \to \nabla x = 1,$ [(Mi3), (Mi1)]

(4) $\nabla((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla(((\nabla x \to x) \to x) \wedge \nabla x)$

$= \nabla((\nabla x \to x) \to x) \to \nabla x$ [(Mi8), (Mi9), (Mi1)]

$= ((\nabla x \to x) \to \nabla x) \to \nabla x$ [(Mi9)]

$= \nabla x \to \nabla x = 1,$ [(Mi3), (Mi1)]

(5) $(\nabla x \to x) \to x = \nabla x.$ [(1), (2), (3), (4), (Mi26)]

(Mi32):

$((x \to 0) \to 0) \to x = ((x \to 0) \to 0) \to ((x \to 0) \to x)$ [(Mi3)]

$= (x \to 0) \to (0 \to x) = 1.$ [(Mi2), (Mi26), (Mi14)]

(Mi33): Es consecuencia de (Mi9) y (Mi7).

(Mi34):

(1) $\nabla x \to (((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0)$

$= (\nabla x \to ((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x))) \to (\nabla x \to 0)$ [(Mi2)]

$= ((\nabla x \to (x \to 0)) \wedge (\nabla x \to (\nabla x \to x))) \to (\nabla x \to 0)$ [(Mi5)]

$= (((\nabla x \to x) \to (\nabla x \to 0)) \wedge (\nabla x \to x)) \to (\nabla x \to 0)$ [(Mi2), (Mi1), (Mi13)]

$= ((\nabla x \to x) \to (\nabla x \to 0)) \to ((\nabla x \to x) \to (\nabla x \to 0)) = 1,$ [(Mi4), (Mi1)]

(2) $(((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \to \nabla x$

$= ((x \to 0) \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to \nabla x$ [(Mi4)]

$= ((\nabla x \to x) \to ((x \to 0) \to 0)) \to \nabla x$ [(Mi21)]

$= ((\nabla x \to x) \to ((x \to 0) \to 0)) \to ((\nabla x \to x) \to x)$ [(Mi31)]

$= (\nabla x \to x) \to (((x \to 0) \to 0) \to x) = 1,$ [(Mi2), (Mi32), (Mi14)]

(3) $\nabla\nabla x \to \nabla((((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \wedge \nabla x)$

$= \nabla x \to (\nabla(((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \wedge \nabla x)$ [(Mi29), (Mi8)]

$= \nabla x \to ((((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \wedge \nabla x)$ [(Mi9), (Mi7)]

$= \nabla x \to (((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \wedge (\nabla x \to \nabla x)$ [(Mi5)]

$= \nabla x \to (((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0)$ [(Mi1)]

$= \nabla x \to ((x \to 0) \to ((\nabla x \to x) \to 0))$ [(Mi4)]

$= (x \to 0) \to (\nabla x \to ((\nabla x \to x) \to 0))$ [(Mi21)]

$= (x \to 0) \to ((\nabla x \to x) \to (\nabla x \to 0))$ [(Mi21)]

$= (x \to 0) \to ((\nabla x \to (x \to 0)) = 1,$ [(Mi2), (Mi20)]

(4) $\nabla(((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \to \nabla((((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \wedge \nabla x)$

$= \nabla(((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \to (\nabla(((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \wedge \nabla x)$ [(Mi8)]

$= \nabla(((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \to \nabla x$ [(Mi19)]

$= (((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0) \to \nabla x$ [(Mi33)]

$= ((x \to 0) \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to \nabla x$ [(Mi4)]

$= \nabla(((x \to 0) \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to x)$ [(Mi9)]

$= \nabla(((\nabla x \to x) \to ((x \to 0) \to 0)) \to x)$ [(Mi21)]

$= \nabla((((\nabla x \to x) \to (x \to 0)) \to ((\nabla x \to x) \to 0))) \to x)$ [(Mi2)]

$= \nabla(((((\nabla x \to x) \to x) \to ((\nabla x \to x) \to 0))) \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to x)$ [(Mi2)]

$= \nabla(((\nabla x \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to x)$ [(Mi31)]

$= \nabla((((\nabla x \to x) \to (\nabla x \to 0)) \to ((\nabla x \to x) \to 0)) \to x)$ [(Mi21)]

$= \nabla(((\nabla x \to x) \to ((\nabla x \to 0) \to 0)) \to x)$ [(Mi2)]

$= \nabla((((\nabla x \to x) \wedge (\nabla x \to 0)) \to 0) \to x)$ [(Mi4)]

$= \nabla(((\nabla x \to (x \wedge 0)) \to 0) \to x)$ [(Mi5)]

$= \nabla(((\nabla x \to 0) \to 0) \to x)$

$= ((\nabla x \to 0) \to 0) \to \nabla x = 1,$ [(Mi9), (Mi32)]

(5) $((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) \to 0 = \nabla x.$ [(1), (2), (3), (4), (Mi26)]

(Mi35):

$\nabla \sim x = \nabla((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)) = \nabla(\nabla(x \to 0) \wedge (\nabla x \to x))$ [(Mi33)]

$= \nabla(x \to 0) \wedge \nabla(\nabla x \to x)$ [(Mi8)]

$= \nabla(x \to 0) \wedge (\nabla x \to \nabla x)$ [(Mi9)]

$= x \to 0.$ [(Mi33), (Mi1)]

(Mi36):

(1) $x \leq y,$

(2) $(y \to 0) \to (x \to 0) = x \to ((y \to 0) \to 0)$ [(Mi21)]

$= ((x \to y) \to (x \to 0)) \to (x \to 0)$ [(Mi2)]

$= (x \to 0) \to (x \to 0) = 1.$ [(1), (Mi26), (Mi13), (Mi1)]

(Mi37):

(1) $x \leq y$,

(2) $(\nabla y \to y) \to (\nabla x \to x) = \nabla x \to ((\nabla y \to y) \to x)$ [(Mi21)]

$= ((\nabla x \to \nabla y) \to (\nabla x \to y)) \to (\nabla x \to x)$ [(Mi2)]

$= (1 \to (\nabla x \to y)) \to (\nabla x \to x)$ [(1), (Mi24), (Mi26)]

$= (\nabla x \to y) \to (\nabla x \to x)$ [(Mi13)]

$= \nabla x \to (y \to x),$ [(Mi2)]

(Mi38):

(1) $x \leq y$,

(2) $1 = (\nabla x \to \nabla(x \wedge y)) \to \nabla((\nabla x \to x) \wedge (\nabla y \to y))$ [(Mi11)]

$= 1 \to \nabla((\nabla x \to x) \wedge (\nabla y \to y))$ [(1), (Mi26)]

$= \nabla((\nabla x \to x) \wedge (\nabla y \to y)),$ [(Mi13)]

(3) $\nabla(\sim y \wedge \sim x) = \nabla(((y \to 0) \wedge (\nabla y \to y)) \wedge ((x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)))$

$= (y \to 0) \wedge (x \to 0) \wedge \nabla((\nabla y \to y) \wedge (\nabla x \to x))$ [(Mi33), (Mi8)]

$= (y \to 0) \wedge (x \to 0) \wedge 1$ [(2)]

$= (y \to 0) \wedge (x \to 0).$

(Mi39):

(1) $x \leq y$,

(2) $\sim y \rightarrow \sim x = ((y \rightarrow 0) \wedge (\nabla y \rightarrow y)) \rightarrow ((x \rightarrow 0) \wedge (\nabla x \rightarrow x))$

$= (y \rightarrow 0) \rightarrow ((\nabla y \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow 0) \wedge (\nabla x \rightarrow x)))$ [(Mi4)]

$= (y \rightarrow 0) \rightarrow (((\nabla y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow 0)) \wedge ((\nabla y \rightarrow y) \rightarrow (\nabla x \rightarrow x)))$ [(Mi5)]

$= (y \rightarrow 0) \rightarrow (((\nabla y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow 0)) \wedge (\nabla x \rightarrow (y \rightarrow x)))$ [(Mi37)]

$= ((y \rightarrow 0) \rightarrow ((\nabla y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow 0))) \wedge ((y \rightarrow 0) \rightarrow (\nabla x \rightarrow (y \rightarrow x)))$ [(Mi5)]

$= ((\nabla y \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow 0) \rightarrow (x \rightarrow 0))) \wedge (\nabla x \rightarrow ((y \rightarrow 0) \rightarrow (y \rightarrow x)))$ [(Mi21)]

$= 1 \wedge (\nabla x \rightarrow (y \rightarrow (0 \rightarrow x))) = 1$, [(1), (Mi36), (Mi14), (Mi2), (Mi26)]

(3) $\nabla \sim y \rightarrow \nabla(\sim y \wedge \sim x) = (y \rightarrow 0) \rightarrow ((y \rightarrow 0) \wedge (x \rightarrow 0))$ [(Mi35), (1), (Mi38)]

$= (y \rightarrow 0) \rightarrow (x \rightarrow 0) = 1$, [(Mi19), (1), (Mi36)]

(4) $\sim y \leq \sim x$. [(2), (3), (Mi26)]□

**Proposición 3.2.2.** $\Theta(\mathcal{A})$ *es una* $M_4-$*álgebra.*

**Dem.** Sólo debemos probar que $\Theta(\mathcal{A})$ satisface las condiciones (L3) a (L6).

(L3): Teniendo en cuenta (Mi34), (Mi33), (Mi8) y (Mi15) inferimos que $\sim\sim x = \nabla x \wedge ((x \rightarrow 0) \rightarrow ((x \rightarrow 0) \wedge (\nabla x \rightarrow x)))$. Entonces por (Mi19), (Mi21), (Mi3) y (Mi30) tenemos que $\sim\sim x = \nabla x \wedge ((x \rightarrow 0) \rightarrow (\nabla x \rightarrow x)) = \nabla x \wedge (\nabla x \rightarrow ((x \rightarrow 0) \rightarrow x)) = \nabla x \wedge (\nabla x \rightarrow x) = x$.

(L4): Es una consecuencia directa de (Mi39) y (L3).

(L5): De (Mi23) y (Mi10) concluimos que $(x \to 0) \vee \nabla x = 1$. De esta identidad y (Mi10) inferimos que $\sim x \vee \nabla x = 1$.

(L6): Resulta de (Mi6) y (Mi30). $\square$

**Proposición 3.2.3.** $\Theta$ *es un funtor lleno y fiel entre las* $mdl_i-$*álgebras y las* $M_4-$*álgebras.*

**Dem.** Es una consecuencia directa de la Proposicińon 3.2.2 y la definición de $\Theta$. $\square$

**Proposición 3.2.4.** *Toda* $M_4-$*álgebra* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ *es isomorfa* (*igual*) *a* $\Theta(\mathcal{B})$ *para alguna* $mdl_i-$*álgebra* $\mathcal{B}$.

**Dem.** Sea $\mathcal{B} = \langle A, \wedge, \vee, \to, \nabla, 0, 1\rangle$, donde $x \to y = \nabla \sim x \vee y$ para todo $x, y \in A$. Como las propiedades (Mi1)–(Mi12) son válidas en $\mathbb{M}_4$, entonces $\mathcal{B}$ es una $mdl_i-$álgebra. Para completar la demostración debemos probar que $\Theta(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Si definimos $-x = (x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)$, entonces por la Proposición 3.2.2 resulta que $\Theta(\mathcal{B}) = \langle A, \wedge, \vee, -, \nabla, 0, 1\rangle$ es un álgebra tetravalente modal. Además, para todo $x \in A$, $\sim x = (x \to 0) \wedge (\nabla x \to x)$, ya que esta identidad es válida en $\mathbb{M}_4$. $\square$

**Teorema 3.2.5.** $\Theta$ *es una equivalencia categórica entre* $\mathfrak{MDL}_i$ *y* $\mathfrak{TM}$.

**Dem.** Es una consecuencia directa de las Proposiciones 3.2.3, 3.2.4 y el Teorema 1, [33, p. 91]. $\square$

El Teorema 3.2.5 y los resultados de la Sección 2 confirman que las $mdl_i-$álgebras son la contrapartida algebraica del cálculo proposicional de Monteiro 4$-$valuado.

# Referencias


[1] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, (1974).

[2] D. Becchio, *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes données par A. Monteiro*, Logique et Analyse 63–64(1973), 339–344.

[3] E. Bianco, *Four–valued Monteiro propositional calculus*, XII Latin American Symposium on Mathematical Logic. Abstracts of Contributed Papers, San José, Costa Rica, (2004), 3.

[4] E. Bianco, *Sobre un nuevo cálculo proposicional*, Resúmenes de la LVI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Sur, Bahía Blanca, (2006).

[5] E. Bianco and A. Ziliani, *Categorical equivalence between the 4–valued modal algebras and the implicative modal algebras*, Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, U. N. de San Juan, 2(1997), 23–33.

[6] E. Bianco and A. Ziliani, *A new algebraic counterpart of four–valued Monteiro propositional calculus*, XIV Latin American Symposium on Mathematical Logic. Abstracts of Contributed Papers, Paraty, Brasil, (2008), 88.

[7] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, $3^{rd}$ edition, Providence, 1967.

[8] W. Blok and D. Pigozzi *Algebrizable logics*, Mem. Amer. Math. Soc. Amer. Math. Soc. 396, 1989.

[9] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz–Moisil Algebras*, North – Holland, Amsterdam, 1991.

[10] S. Burris and H. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 78, Springer, Berlin, 1981.

[11] R. Cignoli and A. Monteiro, *Boolean elements in Łukasiewicz algebras II*, Proc. Japan Acad. 41(1965), 676–680.

[12] I. D'Ottaviano, *A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*, EVORA, F.R.R. (Ed.) Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea, Coleão CLE, 11(1992), 65–94.

[13] A. V. Figallo, *On the congruence in four–valued modal algebras*, Portugaliae Math. 49(1992), 249–261.

[14] A. V. Figallo, *Topics in* 4*-valued modal algebras*, Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic, Notas de Lógica Matemática, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 38, 2(1994), 145–157.

[15] A. V. Figallo and P. Landini, *On generalized $I-$algebras and modal $4-$valued algebras*, Rep. on Math. Logic, 29(1995), 3–18.

[16] A. V. Figallo y J. Tolosa, *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, U. N. de San Juan, 1(1982), 1–14.

[17] A. V. Figallo and A. Ziliani, *A symmetric tetra–valued modal algebras*, Notas Soc. Mat. Chile, 1(1991), 133–141.

[18] A. V. Figallo and A. Ziliani, *On the propositional system $\mathcal{A}$ of Sobociński*, Port. Math., 49, 1(1992), 11–22.

[19] J. Font and R. Jansana, *An general algebraic semantics for sentenial logics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1966.

[20] J. Font, R. Jansana and D. Pigozzi, *A survey of abstract algebraic logic*, Mathematics Preprints Series 329, Univeritat de Barcelona, 2003.

[21] J. Font and M. Rius, *A four–valued modal logic arising from Monteiros's last algebras*, Procceding of the 20th International Symposium on Multiple–Valued Logic, (Charlotte 1990), The IEEE Computer Society Press, 85–92.

[22] J. Font and M. Rius, *An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics*, J. Symbolic Logic 65(2000), 481–518.

[23] R. Goldblatt, *Topoi: The categorial analysis of logic*, Studies in Logic and Foundations on Mathematics, North–Holland, New York, 1983.

[24] G. Grätzer, *Universal algebra*, Springer–Verlag, $2^{rd}$ Ed., 1979.

[25] J. A. Kalman, *Lattices with involution*, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 485–491.

[26] I. Loureiro, *Homomorphism kernels of a tetravalent modal algebra*, Port. Math., 39, 1–4(1980), 371–379.

[27] I. Loureiro, *Axiomatisation et propriétès des algèbres modales tetravalentes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 295(1982), Serie I, 555–557.

[28] I. Loureiro, *Algebras modais tetravalentes*, Doctoral thesis, Faculdade de Ciencias de Lisboa, 1983.

[29] I. Loureiro, *Prime spectrum of a tetravalent modal algebras*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 24(1983), 389–394.

[30] I. Loureiro, *Finitely generated free tetravalent modal algebras*, Discrete Math., 46(1983), 41–48.

[31] I. Loureiro, *Finite tetravalent modal algebras*, Rev. Un. Mat. Argentina, 31, 4(1984), 187–191.

[32] I. Loureiro, *Principal congruences of tetravalent modal algebras*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 26(1985), 76–80.

[33] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer–Verlag, Berlin, 1971.

[34] R. Marona, *A characterisation of De Morgan lattices*, Notas de Lógica Matemática 18, Inst. Mat. Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[35] Gr.C. Moisil, *Essais sur les logiques non–chrysippiennes*, Ed. Academiei, Bucarest, 1972.

[36] A. Monteiro, *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer*, Rev. Un. Mat., 17(1955), 149–160.

[37] A. Monteiro, *Algebras de De Morgan*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, 1$^{er}$ Semestre de 1962, Bahía Blanca, Argentina.

[38] A. Monteiro, *Matrices de Morgan caracteristiques pour le calcul propositionnel classique*, An. Acad. Brasil. Ciên. 52(1960), 1–7.

[39] A. Monteiro, *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., R.P. Roum 7, 55(1963), 3–12. (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 21, Inst. Mat. Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964).

[40] A. Monteiro, *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[41] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Math. 39(1980), 1–237.

[42] L. Monteiro, *Axiomes indépendents pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum., 7(55), (1963). (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 22, Inst. Mat. Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.)

[43] M. Nowak, *Logics preserving degrees of truth*, Studia Logica, 49(1990), 483–499.

[44] G. Priest and R. Routley, *First historical introduction: a preliminary history of paraconsistent and dialectic approaches.* In: G. Priest, R. Routley and J. Norman (Ed.) *Paraconsistent logic: essays on the inconsistent*, Philosophia–Verlag, Munich, 1989, 3–75.

[45] H. Rasiowa, *An algebraic approach to non-classical logics*, North-Holland, Warzawa-Amsterdam, 1974.

[46] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, North-Holland, Warzawa-Amsterdam, 1970.

[47] M. Sholander, *Postulates for distributive lattices*, Can. J. Math. 3(1951), 28–30.

[48] B. Sobociński, *On the propositional system* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *of Vuckovic and its extension*I, Notre Dame Journal of Formal Logic, V, 2(1964), 141–153.

[49] B. Sobociński, *On the propositional system A of Vuckovic and its extension* II, Notre Dame Journal of Formal Logic, 3(1964), 223–237.

[50] R. Wójcicki, *Theory of logical calculi. Basic theory of consequence operations*, 199 Synthese Library, Reidel, Dordrecht, 1988.

[51] J. Woleński, *Logic and Philosophy in the Lvov–Warsaw School*, 198 Synthese Library, Dordrecht: Kluwer, 1989.