

CAPÍTULO 3

Factor de concentración de tensiones en el entorno de un orificio rectangular presente en una placa ortótropa.

3.1 INTRODUCCIÓN.

En la literatura técnico-científica^[1] se hallan soluciones exactas para el problema de distribución de tensiones en una placa de dimensiones infinitas sometida a esfuerzos en su propio plano, de material anisótropo con un agujero circular o elíptico. En cambio, bordes interiores de formas relativamente comunes, como el rectángulo, triángulo, etc., dificultan la obtención de una solución matemática exacta. La complejidad aumenta más aún por tratarse con materiales anisótropos. Por ello es necesario aplicar métodos aproximados ya sean analíticos o numéricos.

3.1.1 Fórmula general para geometrías especiales.

En el caso en que el orificio difiere muy poco de un agujero circular o elíptico, Lekhnitskii^[1], presenta una solución aproximada. Introduciendo un parámetro pequeño en la ecuación paramétrica de una elipse o circunferencia se obtiene una geometría aproximada de por ejemplo un rectángulo o triángulo. Considerando la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned} x &= q \left[\cos(\alpha) + \varepsilon \sum_{n=1}^M (r_n \cos(n\alpha) + s_n \sen(n\alpha)) \right] \\ y &= q \left[z \sen(\alpha) + \varepsilon \sum_{n=1}^M (-r_n \sen(n\alpha) + s_n \cos(n\alpha)) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Siendo: α la variable en coordenadas cilíndricas que varía de 0 a 2π , medido a partir del eje x en sentido antihorario.

M un número entero.

r_n y s_n , números reales, coeficientes de la serie.

q , z , y ε parámetros constantes para una geometría.

Para el caso particular, $\varepsilon = 0$, se obtiene la ecuación de una elipse de semiejes q y qz . Con valores pequeños de ε la geometría que resulta difiere muy poco de una elipse. Este es el caso utilizado por Lekhnitskii y otros autores que, truncando apropiadamente términos de la serie de las ecuaciones (3.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= q(\cos(\alpha) + \varepsilon \cos(M\alpha)) \\ y &= q(z \sen(\alpha) - \varepsilon \sen(M\alpha)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Es así que, para valores $z = 1$, $M = 2$ y $\varepsilon = 0,25$ la figura que representa las ecuaciones (3.2) tiene tres ejes de simetría y se asemeja a un triángulo equilátero como muestra la Figura 3.1.

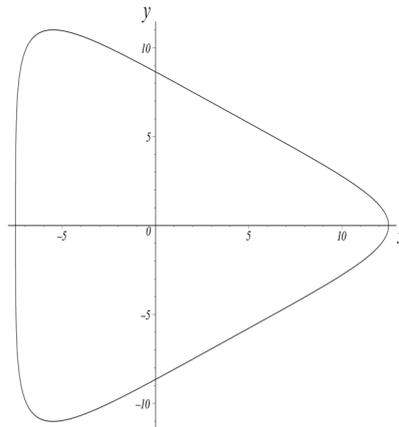


Figura 3.1. Figura que representan las ecuaciones (3.2) con $z=1$, $M=2$, $\varepsilon=0,25$ y $q=10$.

Un análisis de la distribución de tensiones producido por un pequeño orificio triangular en una placa sometida a una tensión uniaxial, biaxial y flexión pura en su plano, fue resuelta para un material anisótropo e isótropo^{[2], [3]}. El análisis mencionado anteriormente, pero considerando el material viscoelástico, con el orificio triangular, se encuentra en el trabajo de Allam, et al^[4].

También es posible obtener una figura que difiera poco de un rectángulo con bordes redondeados con las expresiones (3.2), dando valores $z = 0,36$, $M = 3$ y $\varepsilon = -0,04$. La relación ancho versus alto de la geometría resultante es de 3. Cabe mencionar que el propio Lekhnitskii^[1] ha realizado estudios de distribución de tensiones sobre esta geometría de agujero en una placa de material ortótropo.

Es importante notar que para valores de $z = 0,01$ y $\varepsilon = -0,0001$, la ecuación (3.2) reproduce una geometría muy particular utilizada para modelar matemáticamente una fisura. Esta geometría posee una relación ancho versus alto aproximadamente cercana a 100 y su forma difiere poco de una elipse. La concentración de tensiones en una placa de material viscoelástico anisótropo con un agujero de las características antes mencionadas, sometida a tensión en su plano también fue estudiada^[5].

3.1.2 Problema tratado.

En el presente capítulo se trata el problema relacionado con la determinación de tensiones de una placa debilitada por una pequeña abertura rectangular con vértices redondeados, y sometida a un régimen de estado plano de tensiones producido por fuerzas uniformemente distribuidas en el espesor, aplicadas en el contorno externo de la placa, Figura 3.2. Cabe aclarar que el modelo de bordes redondeados, se adoptó ya que es práctica tecnológica habitual evitar los cambios de dirección bruscos, en este tipo de configuración. De esta manera se logra distribuir en forma más uniforme las tensiones.

Las tensiones aplicadas a los bordes externos, son N_x , en dirección coincidente con el eje x y N_y cuya dirección es paralela al eje y . Al igual que el capítulo anterior se designó con θ a la orientación de los ejes principales de elasticidad con respecto a los ejes coordenados.

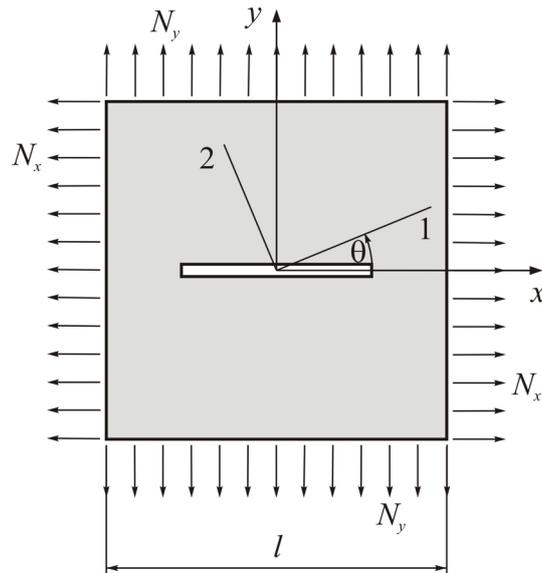


Figura 3.2. Esquema del problema.

Los lados de la placa cuadrada, de dimensión $l \times l$, se adoptaron paralelos a los lados del orificio. Los ejes coordenados, x e y , se ubicaron centrados tal como se muestra en la Figura 3.2.

Se supuso que el orificio es pequeño en relación a las dimensiones de la placa y que se encuentra distante de los bordes exteriores de la misma. La geometría del orificio considerado se detalla en la Figura 3.3.

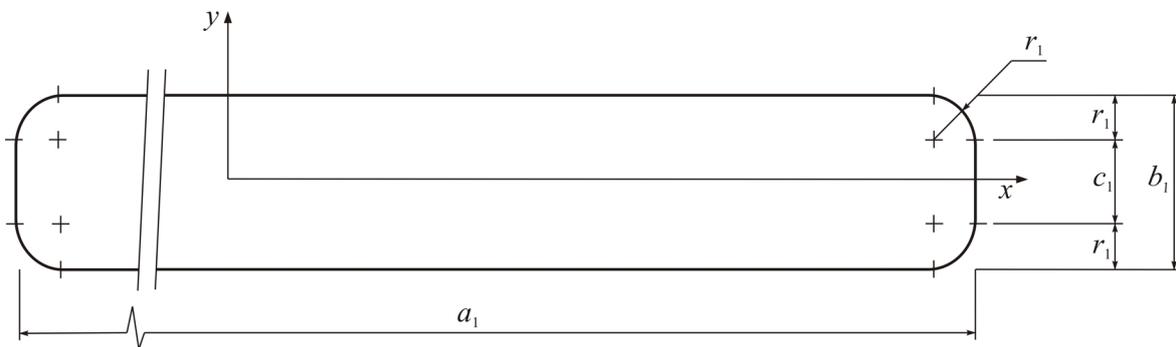


Figura 3.3. Características de la geometría del orificio modelado.

A continuación se detallan las relaciones que caracterizan la forma del borde interno modelado. Se hace notar la magnitud de la relación a_1/b_1 :

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} &= 112,257 \\ \frac{r_1}{b_1} &= 0,357 \\ \frac{r_1}{c_1} &= 1,25 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Al tratarse de un problema plano de tensiones en el que no se consideran las fuerzas de volumen, cuando los ejes principales de elasticidad coinciden con los ejes coordenados, la ecuación diferencial que gobierna este sistema es la ecuación diferencial (2.8) del capítulo precedente. Para plantear las condiciones de borde consideraremos el borde exterior de la

placa como $\partial\Omega_{\text{ext}}$ y el interior como $\partial\Omega_{\text{int}}$. Es necesario separar al borde en 4 tramos (los cuatro lados), para facilitar la formulación matemática. Como ejemplo plantearemos la condición de borde para el borde vertical sobre la derecha de la placa, en las ecuaciones (3.4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{\partial\Omega_{\text{ext}}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{\partial\Omega_{\text{ext}}} &= \sigma_x \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_{\partial\Omega_{\text{ext}}} &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

En el borde interior tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{\partial\Omega_{\text{int}}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{\partial\Omega_{\text{int}}} &= 0 \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_{\partial\Omega_{\text{int}}} &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

De esta forma el problema queda planteado matemáticamente.

El objetivo del presente capítulo es mostrar un estudio de concentración de tensiones en la geometría ya descrita, considerando las condiciones de bordes mencionadas. Por ello, se determinó el factor de concentración de tensiones para distintas características elásticas del material y, para un estudio más general, se rotaron los ejes principales de elasticidad, θ . Como se ha mencionado, al no coincidir los ejes principales de elasticidad con los ejes coordenados, la expresión diferencial (2.8) adquiere mayor complejidad y es necesario recurrir a métodos aproximados.

Debido a que la configuración de las tensiones aplicadas son simétricas con respecto a los ejes coordenados y la geometría del orificio también posee los mismos ejes de simetría en el plano, los valores del ángulo θ modelados son 0° , $22,5^\circ$, 45° , $67,5^\circ$ y 90° .

El estado de esfuerzos por unidad de longitud aplicados sobre los bordes exteriores de la placa se adoptó $N_x=N_y=N$.

Las relaciones de K_+ y K_- fueron definidas en el capítulo anterior, relaciones (2.19) y (2.20). Además de estos factores, se calcularon las relaciones K_{0° y K_{90° . Estos valores se definen como:

$$\begin{aligned}K_{0^\circ} &= \frac{\sigma_{0^\circ}}{\sigma_1} \\ K_{90^\circ} &= \frac{\sigma_{90^\circ}}{\sigma_1}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Donde, σ_{0° y σ_{90° son las tensiones tangenciales en dos puntos sobre el borde del orificio de coordenadas polares $\alpha=0^\circ$ y $\alpha=90^\circ$ respectivamente y σ_1 es la mayor tensión principal en la placa sin orificio, definida en el capítulo anterior. Para el caso de cargas seleccionado, $N_x=N_y=N$, la mayor tensión principal con la cual se calculó K_+ , K_- , K_{0° y K_{90° es $\sigma_1=N/h$.

Los resultados encontrados al problema descrito anteriormente, suman datos originales

al estudio de la distribución de tensiones en materiales ortótropos con orificios de formas especiales. Es decir, en el presente capítulo se encuentran resultados del factor de concentración de tensiones debido a un orificio, cuyas características geométricas no se encuentran en la literatura, en una placa cuadrada sometida al estado de tensiones descripto. De esta manera se aportan datos útiles para el diseño o para la comparación con resultados que se obtengan por otros métodos, ya sean numéricos o analíticos. También se evaluó cómo afecta a la concentración de tensiones, las distintas características elásticas de algunos materiales, relaciones E_1/E_2 , G/E_2 y módulo ν_1 , junto a distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad (ángulo θ) para el estado de carga seleccionado. Esto permite obtener conclusiones que posibilitan formar un criterio sobre la selección del material ortótropo y la ubicación de los ejes principales de elasticidad en el elemento estructural.

Debido a la complejidad matemática que involucra la solución analítica de la ecuación diferencial gobernante del problema, se abordó el presente estudio con un método numérico, el de elementos finitos (MEF).

3.2 ANÁLISIS CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

3.2.1 Introducción.

EL método de elementos finitos fue aplicado utilizando el programa profesional ALGOR^[6]. Las características del programa fueron mencionadas en el capítulo anterior.

La placa con agujero que se modeló responde a la siguiente geometría y sus medidas principales se muestran en la Figura 3.4.

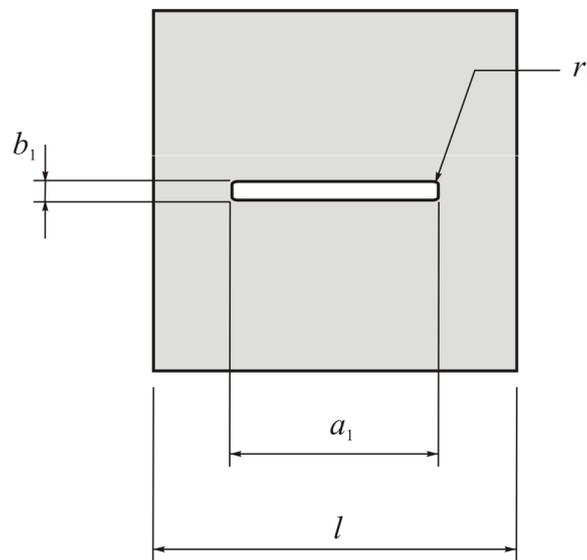


Figura 3.4. Esquema del modelo de elementos finitos.

Donde: a_1 es el ancho de la abertura.

b_1 es la altura de la abertura.

l es el lado de la placa cuadrada

r_1 es el radio de empalme en los vértices.

A continuación se comenta el proceso de diseño de los mallados utilizados, como

también los resultados que se obtuvieron para los distintos casos.

3.2.2 Diseño del mallado.

En el diseño del modelo se tienen en cuenta las condiciones de borde del problema, expresadas en las ecuaciones (3.4) y (3.5) y los puntos en los cuales interesan, en mayor medida, las tensiones.

Debido a la presencia del agujero rectangular los puntos de mayor intensidad de las tensiones estarán sobre el borde del rectángulo. De una forma más precisa, es en el cambio de la dirección del borde interno donde se encontrarán las mayores tensiones. Es claro que estas zonas son las referidas a los vértices redondeados del rectángulo. Aquí es donde se ha alcanzado una mayor densidad de elementos cuadrangulares de 4 nodos, con 4 grados de libertad por nodo, al colocar una corona circular de elementos, Figura 3.5. La construcción de esta zona circular se hizo de igual forma con la que se construyeron las coronas circulares en el mallado del capítulo anterior. En esta zona se destaca la poca distorsión del elemento cuadrangular.

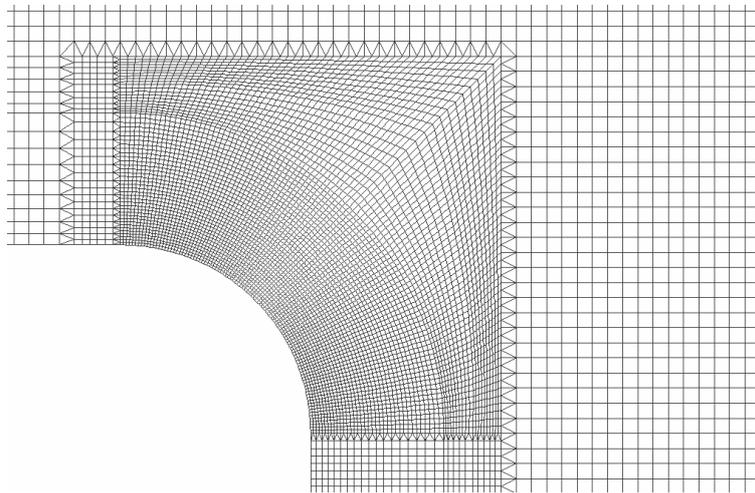


Figura 3.5. Detalle del mallado sobre una esquina del orificio.

La densidad de elementos se disminuyó hacia las zonas del centro del rectángulo donde la variación del campo de tensiones es menos brusca. Esta transición se realizó con elementos triangulares de 3 nodos y con 3 grados de libertad por nodo. La Figura 3.6 y la Figura 3.7 muestran en detalle esta transición.

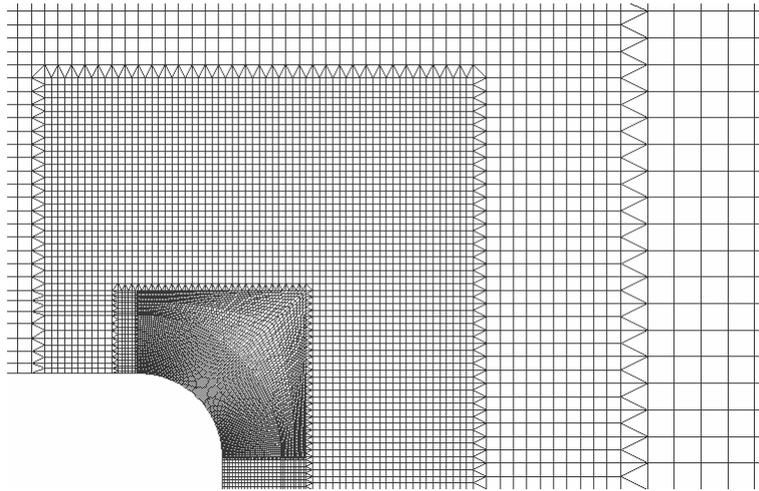


Figura 3.6. Detalle del cambio en el tamaño de los elementos cercanos al borde interno.

En la construcción del mallado en las zonas cercanas al orificio se limitó la relación entre la mayor longitud del elemento y la menor dimensión a 1,6 aproximadamente. Esta característica contribuye a la precisión del método aplicado^[7].

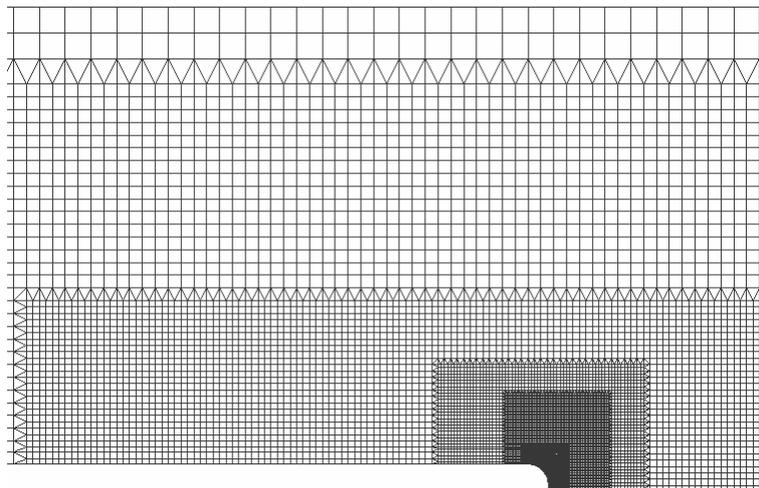


Figura 3.7. Detalle del mallado en la zona cercana al orificio.

En las regiones de la placa alejadas del orificio, el campo de tensiones es afectado en menor medida que en las cercanías, por ello, se disminuyó la densidad de elementos (Figura 3.6 y Figura 3.7). El aumento en el tamaño de los elementos se realizó de dos formas distintas, generando dos modelos distintos. La disminución de la densidad de elementos hacia áreas alejadas del orificio en el modelo 1 se muestra en la Figura 3.8.

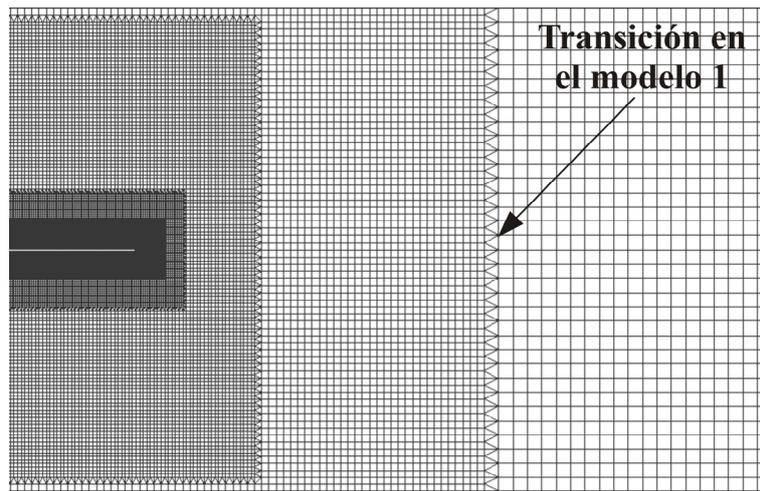


Figura 3.8. Detalle de los elementos alejados del orificio en el modelo 1.

El modelo 2, tiene una zona de transición más acentuada en la zona alejada del borde interno. Esto produjo un modelo con menos elementos y por ende requirió menos costo computacional. Es así que el tiempo de ejecución requerido por el modelo 2 resultó un 35% del insumido por el modelo 1. Como se mostrará más adelante, esta reducción de elementos no afectó significativamente a los resultados numéricos. La Figura 3.9 muestra un detalle del modelo 2.

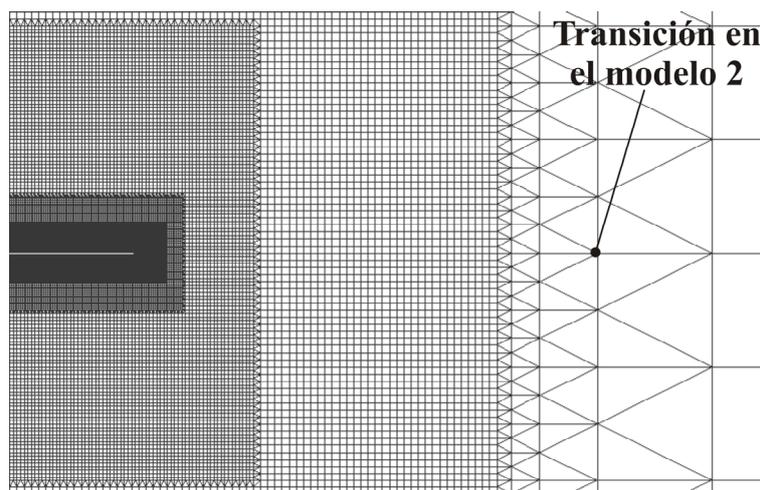


Figura 3.9. Detalle de los elementos alejados del orificio en el modelo 2.

Cabe enfatizar que los dos modelos conservan el mismo mallado en una zona relativamente grande que incluye al borde interno.

En la Tabla 3.1 se puntualizan parámetros referidos a la geometría del problema modelado y datos del mallado utilizado según sea el caso del modelo 1 o 2.

Modelo	Número de elementos	Número de nodos	a_1/l	r_1/b_1	b_1/a_1
1	187412	183878	0,06	0,36	0,0089
2	128928	124566	0,06	0,36	0,0089

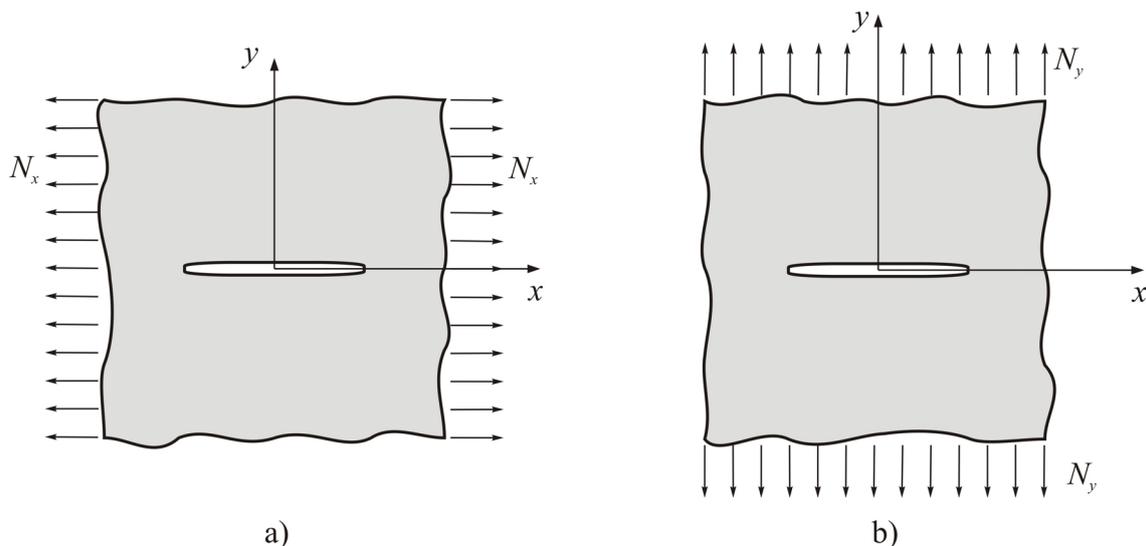
Tabla 3.1. Características de los diferentes mallados de los modelos.

En cada modelo, los desplazamientos de cuerpo rígido fueron restringidos. En un nodo ubicado en el borde izquierdo de coordenada $y=0$ se restringieron los corrimientos en las direcciones ortogonales x e y . En otro nodo ubicado en el borde derecho, de coordenada $y=0$, se anuló el desplazamiento en dirección y .

3.2.3 Comparación de resultados con la literatura.

Diversas formas de orificios pueden ser modeladas utilizando las ecuaciones (3.2), dependiendo de los valores dados a los parámetros z y ε . Anteriormente se mencionó que cuando $z=0,01$ y $\varepsilon=-0,001$ la figura modelada por la relación paramétrica (3.2) sobre el plano coordenado xy , posee una relación ancho versus alto aproximadamente de 100.

En el tratado de Lekhnitskii ^[1] se encuentran soluciones analíticas aproximadas de la distribución de tensiones sobre un orificio con geometría dada por las ecuaciones (3.2), con $M=3$ y $z<1$, presente en una placa ortótropa, de espesor h , con ejes principales de elasticidad coincidentes con los ejes coordenados, de dimensiones infinitas y sujeta a tensión de tracción uniaxial en su plano, en las direcciones coordenadas. Esta expresión analítica, aproximada, es utilizada a continuación, para obtener el estado de tracción biaxial como la suma de dos casos de cargas superpuestas: el estado uniaxial de tracción en la dirección del eje x , Figura 3.10 a), y el estado uniaxial de tracción en la dirección del eje y , Figura 3.10 b).

Figura 3.10. Estados de cargas uniaxiales en dirección x , a), dirección y , b).

La distribución de tensiones tangenciales sobre el borde del orificio cuando el estado uniaxial de cargas tiene dirección paralela al eje x , esta dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^x = & \frac{N_x}{h} \frac{B^2}{C^2} + \frac{N_x}{LC^2} \left\{ z \left(AD^4 \cos(\alpha) + BC^4 n \sin(\alpha) \right) + \right. \\ & + \varepsilon \left(2AC^4 b_{11} z k n \cos(\alpha) - 3AD^4 \cos(3\alpha) - BC^4 n \left(2a_{11} z \sin(\alpha) + 3 \sin(3\alpha) \right) \right) + \\ & \left. + 2\varepsilon^2 C^4 z n \left(-Ak \left(b_{21} \cos(\alpha) + 3b_{23} \cos(3\alpha) \right) + B \left(a_{21} \sin(\alpha) + 3a_{23} \sin(3\alpha) \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

De la misma forma, para el caso en que la tensión uniaxial, de magnitud N_y , tenga la dirección del eje y , la expresión para la distribución de tensiones tangenciales sobre el orificio es:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^y = & \frac{N_y}{h} \frac{A^2}{C^2} + \frac{N_y}{LC^2} \left\{ AC^4 k n \cos(\alpha) + BE^4 \sin(\alpha) + \right. \\ & + \varepsilon \left(AC^4 k n \left(-2c_{11} \cos(\alpha) + 3 \cos(3\alpha) \right) + 2BC^4 b_{11} k n \sin(\alpha) + 3BE^4 \sin(3\alpha) \right) + \\ & \left. + 2\varepsilon^2 C^4 k n \left(A \left(c_{21} \cos(\alpha) + 3c_{23} \cos(3\alpha) \right) - B \left(b_{21} \sin(\alpha) + 3b_{23} \sin(3\alpha) \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A &= z \cos(\alpha) - 3\varepsilon \cos(3\alpha) \\ B &= \sin(\alpha) + 3\varepsilon \sin(3\alpha) \\ C^2 &= A^2 + B^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$k = -\mu_1 \mu_2 \text{ y } n = -i(\mu_1 + \mu_2) \quad (3.10)$$

Los coeficientes μ_1 y μ_2 son las raíces de la ecuación:

$$\mu^4 + \left(\frac{E_1}{G} - 2\nu_1 \right) \mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0 \quad (3.11)$$

Para las siguientes características elásticas modeladas:

$$E_1 = 1,2 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad E_2 = 0,6 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad G = 0,07 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ y } \nu_1 = 0,071$$

Las raíces de la ecuación (3.11) utilizadas en el cálculo son los siguientes números complejos:

$$\mu_1 = 4,11 i \text{ y } \mu_2 = 0,344 i \quad (3.12)$$

Cabe aclarar que también son raíces de la ecuación (3.11) los números complejos conjugados de los valores (3.12). Además:

$$\begin{aligned}
L &= (B^2 - \mu_1^2 A^2)(B^2 - \mu_2^2 A^2) \\
D^4 &= -A^4 k + A^2 B^2 (1 - 2k - k^2) + B^4 (2 + k - n^2) \\
E^4 &= A^4 (2k^2 - n^2 + k) + A^2 B^2 (k^2 - 2k - 1) - B^4 k
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
g &= \frac{8(1-k)}{(1+k+n)^2} & h &= \frac{2\left((1-n)^2 + k(k+2n-6)\right)}{(1+k+n)^2} \\
d &= \frac{4}{1+k+n} & l &= \frac{2(1-k-n)}{1+k+n} \\
r &= \frac{8\left(10k-3(1+k^2)+n(1+k)\right)}{(1+k+n)^3} \\
s &= \frac{2\left(k^3+3k^2(n-11)+k(3n^2-22n+27)+(n-1)^2(n-3)\right)}{(1+k+n)^3}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Para $i=1,2$ se definen los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \frac{2}{1+z+\lambda_i(1-z)} \\
\eta_i &= \frac{1-z+\lambda_i(1+z)}{1+z+\lambda_i(1-z)} \\
\beta_i &= \omega_i \lambda_i
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Los coeficientes definidos por las relaciones (3.15) intervienen en los siguientes parámetros como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\beta_1 \mu_1 - \beta_2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad b_{11} = i \frac{\beta_1 - \beta_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad c_{11} = \frac{\beta_1 \mu_2 - \beta_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \\
a_{21} &= a_{11}^2 + k b_{11}^2 + 2 \frac{\eta_1 \beta_1^2 \mu_1 - \eta_2 \beta_2^2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad b_{21} = n b_{11}^2 + 2i \frac{\eta_1 \beta_1^2 - \eta_2 \beta_2^2}{\mu_1 - \mu_2} \\
c_{21} &= c_{11}^2 + k b_{11}^2 + 2 \frac{\eta_1 \beta_1^2 \mu_2 - \eta_2 \beta_2^2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \\
a_{23} &= \frac{\beta_1^2 \mu_1 - \beta_2^2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad b_{23} = i \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad c_{23} = \frac{\beta_1^2 \mu_2 - \beta_2^2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La distribución de tensiones tangenciales sobre el orificio definido, presente en una placa ortótropa de dimensiones infinitas con ejes principales de elasticidad coincidentes con los ejes coordenado, sometidos a esfuerzos por unidad de longitud, N_x y N_y , aplicados como muestra la Figura 3.11, se obtiene aplicando el principio de superposición con los casos mencionados anteriormente. Esto significa sumar las expresiones dadas en (3.7) y (3.8) y considerar $N_x=N_y=N$.

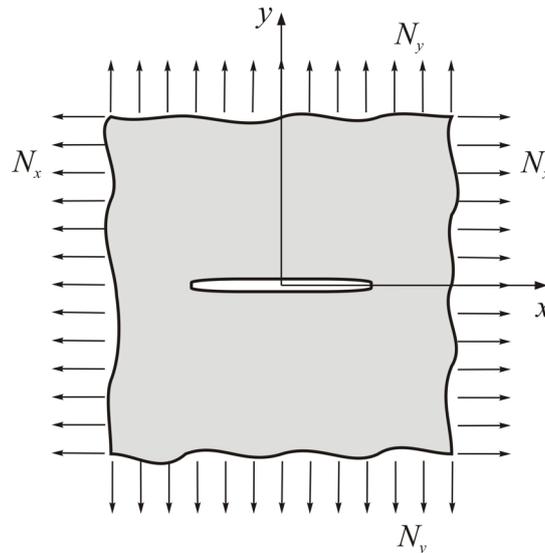


Figura 3.11. Problema resuelto al aplicar el principio de superposición.

La Tabla 3.2 y la Tabla 3.3 muestran comparaciones de resultados obtenidos con la expresión resultante de la suma de (3.7) y (3.8) y el modelo de elementos finitos descrito anteriormente. Los resultados, se refieren al factor K_{90° .

$G/E_2=0,6$	K_{90°			
	$\theta=0^\circ$		$\theta=90^\circ$	
E_1/E_2	MEF	Lekhnitskii	MEF	Lekhnitskii
2	-0,40	-0,39	0,30	0,31
3	-0,71	-0,70	0,43	0,44
4	-0,97	-0,96	0,51	0,51
5	-1,20	-1,19	0,56	0,57
6	-1,41	-1,40	0,60	0,61
7	-1,61	-1,59	0,63	0,64

Tabla 3.2. Comparación de resultados según $\theta=0^\circ$ y $\theta=90^\circ$ para $G/E_2=0,6$.

$G/E_2=0,5$	K_{90°			
	$\theta=0^\circ$		$\theta=90^\circ$	
E_1/E_2	MEF	Lekhnitskii	MEF	Lekhnitskii
2	-0,40	-0,39	0,30	0,31
3	-0,71	-0,70	0,43	0,44
4	-0,97	-0,96	0,51	0,52
5	-1,20	-1,19	0,56	0,57
6	-1,41	-1,40	0,60	0,61
7	-1,60	-1,59	0,63	0,64

Tabla 3.3. Comparación de resultados según $\theta=0^\circ$ y $\theta=90^\circ$ para $G/E_2=0,5$.

Se observa, en las tablas anteriores, una correlación satisfactoria entre los dos modelos analizados. Se hace notar que la comparación es posible en virtud que la perturbación del campo de tensiones debido a la forma del vértice del orificio, puede despreciarse en las

zonas donde se compararon los resultados de K_{90° .

A continuación se muestran en tablas los resultados numéricos obtenidos con elementos finitos por medio de los dos modelos antes descriptos.

3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS.

En las tablas siguientes se listan los resultados de las distintas situaciones calculadas ^[8]. Para todos los casos se utilizó $\nu_1=0,3$. La relación entre las constantes elásticas, E_1/E_2 , varió entre los valores límites 2 y 7. Para cada valor de E_1/E_2 se rotaron los ejes principales de elasticidad en un ángulo denominado θ , medido en sentido antihorario desde el eje x . Los valores de θ , expresados en grados sexagesimales, para cada relación E_1/E_2 se variaron entre 0° y 90° cada $22,5^\circ$.

En cada tabla se indica el valor del factor de concentraciones de tensiones máximo, K_+ , y ángulo β_+ que determina la ubicación del punto sobre el contorno del orificio donde se produce. También, el valor de K_- y el valor del factor sobre los ejes coordenados “ x ” e “ y ”: K_{0° y K_{90° .

En la Tabla 3.4 se exponen los resultados logrados con el modelo 1 tomando, para cada caso, la relación $G/E_2=0,6$.

		$G/E_2 = 0,6$		$\nu_1 = 0,3$		
E_1/E_2	θ°	K_+	β_+	K_-	K_{0°	K_{90°
2	0,0	23,24	0,45	-0,40	12,97	-0,40
	22,5	25,46	-0,38	-0,69	13,44	-0,23
	45,0	27,26	-0,34	-0,61	14,51	0,07
	67,5	26,72	-0,26	-0,06	15,43	0,25
	90,0	25,73	0,21	0,30	15,70	0,30
3	0,0	23,41	0,45	-0,72	12,94	-0,71
	22,5	26,31	-0,38	-1,46	13,13	-0,32
	45,0	29,95	-0,34	-1,17	13,82	0,14
	67,5	31,49	-0,26	-0,21	15,72	0,36
	90,0	28,83	0,21	0,43	17,55	0,43
4	0,0	25,43	0,49	-0,97	12,89	-0,97
	22,5	27,99	-0,43	-2,11	12,97	-0,35
	45,0	32,84	-0,34	-1,65	13,42	0,18
	67,5	35,43	-0,26	-0,34	15,74	0,43
	90,0	31,29	0,19	0,50	19,01	0,50
5	0,0	27,65	0,49	-1,21	12,87	-1,21
	22,5	29,66	-0,44	-2,73	12,87	-0,36
	45,0	35,07	-0,34	-2,02	13,33	0,23
	67,5	38,85	-0,26	-0,45	15,65	0,47
	90,0	33,59	0,19	0,56	20,23	0,56
6	0,0	29,86	0,50	-1,42	12,85	-1,42
	22,5	31,51	-0,45	-3,32	12,81	-0,35
	45,0	37,47	-0,36	-2,35	12,93	0,26
	67,5	41,90	-0,26	-0,56	15,51	0,51
	90,0	35,54	0,19	0,60	21,29	0,60
7	0,0	32,73	0,51	-1,61	12,83	-1,61
	22,5	33,19	-0,45	-3,88	12,76	-0,34
	45,0	39,78	-0,38	-2,65	12,76	0,28
	67,5	44,68	-0,26	-0,64	15,36	0,54
	90,0	37,37	0,17	0,63	22,24	0,63

Tabla 3.4. K_+ , β_+ , K_- , K_{90° y K_{0° para distintos valores de E_1/E_2 y θ , con $G/E_2=0,6$ y $\nu_1=0,3$. Modelo 1.

En la Tabla 3.5 se presentan los valores obtenidos con el modelo 2 para los mismos casos calculados en la Tabla 3.4. Las diferencias en los valores de K , encontrados con ambos modelos, resultan del orden del 4% o menores. En los valores angulares, que indican la ubicación de los puntos sobre el contorno, las diferencias son del mismo orden.

		$G/E_2 = 0,6$		$\nu_1 = 0,3$		
E_1/E_2	θ°	K_+	β_+	K_-	K_{0°	K_{90°
2	0,0	23,46	0,40	-0,40	12,97	-0,40
	22,5	26,41	-0,33	-0,69	13,43	-0,23
	45,0	27,86	-0,33	-0,60	14,51	0,07
	67,5	27,38	-0,27	-0,06	15,42	0,25
	90,0	25,99	0,23	0,30	15,69	0,30
3	0,0	24,18	0,47	-0,71	12,93	-0,71
	22,5	27,26	-0,39	-1,43	13,14	-0,32
	45,0	31,43	-0,33	-1,17	13,83	0,13
	67,5	32,38	-0,27	-0,21	15,71	0,36
	90,0	28,96	0,20	0,43	17,54	0,43
4	0,0	25,53	0,47	-0,97	12,90	-0,97
	22,5	29,02	-0,43	-2,11	12,97	-0,35
	45,0	33,96	-0,33	-1,65	13,42	0,19
	67,5	36,56	-0,27	-0,33	15,72	0,43
	90,0	31,70	0,20	0,51	18,98	0,51
5	0,0	27,55	0,50	-1,20	12,87	-1,20
	22,5	30,84	-0,44	-2,74	12,87	-0,35
	45,0	35,37	-0,36	-2,03	13,11	0,23
	67,5	40,22	-0,27	-0,45	15,63	0,48
	90,0	33,90	0,20	0,56	20,20	0,56
6	0,0	30,35	0,51	-1,41	12,85	-1,41
	22,5	32,92	-0,45	-3,30	12,81	-0,35
	45,0	37,75	-0,36	-2,35	12,92	-0,26
	67,5	43,86	-0,27	-0,54	15,54	0,51
	90,0	36,00	0,19	0,60	21,25	0,60
7	0,0	33,04	0,51	-1,61	12,83	-1,61
	22,5	34,52	-0,45	-3,90	12,75	-0,34
	45,0	40,01	-0,39	-2,63	12,75	0,29
	67,5	46,52	-0,27	-0,64	15,34	0,54
	90,0	37,88	0,19	0,63	22,19	0,63

Tabla 3.5. K_+ , β_+ , K_- , K_{90° y K_{0° para distintos valores de E_1/E_2 y θ , con $G/E_2=0,6$ y $\nu_1=0,3$. Modelo 2.

En la Tabla 3.6 se muestran los resultados conseguidos con el modelo 2 para una relación de $G/E_2=0,5$. La utilización del modelo 2 se debe al bajo costo computacional que implica y la relativa poca diferencia con los resultados dados por el modelo 1.

		$G/E_2 = 0,5$		$\nu_1 = 0,3$		
E_1/E_2	θ°	K_+	β_1	K_-	K_{0°	K_{90°
2	0,0	22,97	0,33	-0,40	13,54	-0,40
	22,5	24,93	-0,33	-0,68	13,54	-0,21
	45,0	28,47	-0,33	-0,57	13,90	0,06
	67,5	29,11	-0,27	-0,06	15,24	0,24
	90,0	26,69	0,23	0,30	16,41	0,30
3	0,0	22,96	0,47	-0,71	13,52	-0,71
	22,5	26,85	-0,43	-1,43	13,25	-0,29
	45,0	31,86	-0,33	-1,10	13,25	0,12
	67,5	34,56	-0,27	-0,23	15,37	0,34
	90,0	30,25	0,20	0,43	18,39	0,43
4	0,0	24,60	0,50	-0,97	13,51	-0,97
	22,5	29,12	-0,45	-2,05	13,10	-0,32
	45,0	34,19	-0,33	-1,55	12,85	0,17
	67,5	39,11	-0,27	-0,35	15,27	0,41
	90,0	33,06	0,20	0,51	19,95	0,51
5	0,0	27,61	0,51	-1,20	13,49	-1,20
	22,5	31,46	-0,45	-2,65	13,01	-0,32
	45,0	37,30	-0,39	-1,91	12,58	0,20
	67,5	43,10	-0,27	-0,47	15,09	0,46
	90,0	35,61	0,19	0,56	21,25	0,56
6	0,0	30,52	0,51	-1,41	13,48	-1,41
	22,5	33,42	-0,45	-3,22	12,95	-0,31
	45,0	40,31	-0,39	-2,20	12,37	0,23
	67,5	46,68	-0,27	-0,58	14,89	0,49
	90,0	37,84	0,19	0,60	22,39	0,60
7	0,0	33,10	0,51	-1,60	13,47	-1,60
	22,5	35,41	-0,47	-3,75	12,91	-0,30
	45,0	43,07	-0,39	-2,49	12,21	0,25
	67,5	49,96	-0,27	-0,66	14,69	0,52
	90,0	39,85	0,18	0,63	23,41	0,63

Tabla 3.6. K_+ , β_+ , K_- , K_{90° y K_{0° para distintos valores de E_1/E_2 y θ , con $G/E_2=0,5$ y $\nu_1=0,3$. Modelo 2.

En lo que sigue se presentan las soluciones numéricas obtenidas en forma de gráficos, para realizar un análisis de la variación del factor de concentración de tensiones ante los distintos casos examinados. Los datos utilizados corresponden a los hallados con el modelo 2 de elementos finitos es decir Tabla 3.5 y Tabla 3.6.

En la Figura 3.12 se observa la relación que existe entre K_+ y las distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad, medido con θ , para diversas relaciones de los módulos E_1/E_2 con una relación constante de $G/E_2=0,6$.

La menor incidencia en la orientación de los ejes se da, como era de esperar, para la menor relación E_1/E_2 considerada, esto es 2. No obstante, debe consignarse que para valores $E_1/E_2 \geq 4$, esa incidencia se mantiene prácticamente constante (líneas quasi paralelas)

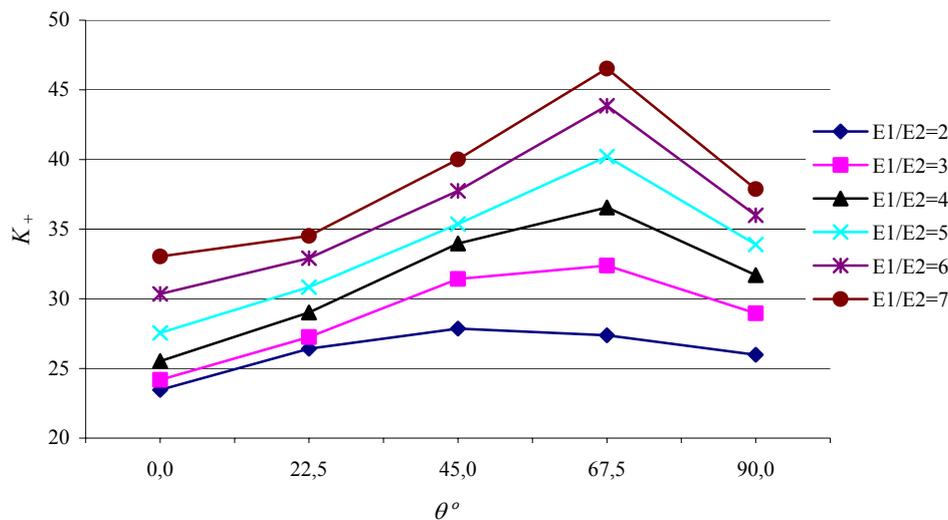


Figura 3.12. K_+ versus θ para varias relaciones de E_1/E_2 ($G/E_2=0,6$).

En la Figura 3.13 se muestra la variación en la ubicación del punto de máxima concentración de tensiones con respecto a las distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad para un valor constante de $G/E_2=0,6$. Se aclara que β_+ se expresa en grados sexagesimales, lo que señala que la variación de la ubicación de dicho punto es mínima.

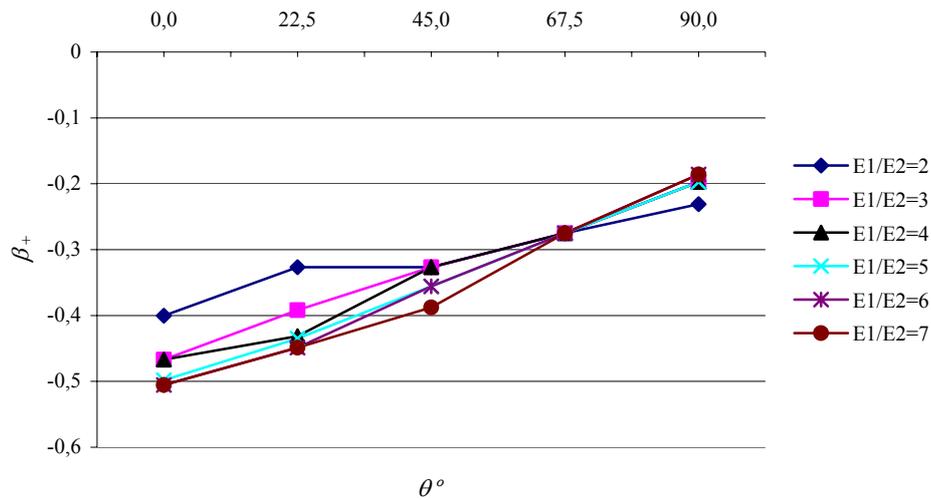


Figura 3.13. β_+ versus θ para varias relaciones de E_1/E_2 ($G/E_2=0,6$).

Para ilustrar la influencia de la orientación de los ejes principales de elasticidad, ángulo θ , en la ubicación de los puntos con K_+ y K_- sobre el borde del orificio se presentan las siguientes figuras que muestran la distribución de tensiones principales de tracción. La Figura 3.14 muestra la distribución de tensiones principales de tracción sobre la región cercana al orificio cuando el ángulo $\theta=0^\circ$ y $E_1/E_2=6$, $G/E_2=0,6$, $\nu_1=0,3$. En ella se aprecia una distribución de tensiones principales de tracción con simetría en los ejes coordenados y se detallan los dos puntos sobre el borde que poseen el valor de K_- , los puntos medios de los lados horizontales del orificio.

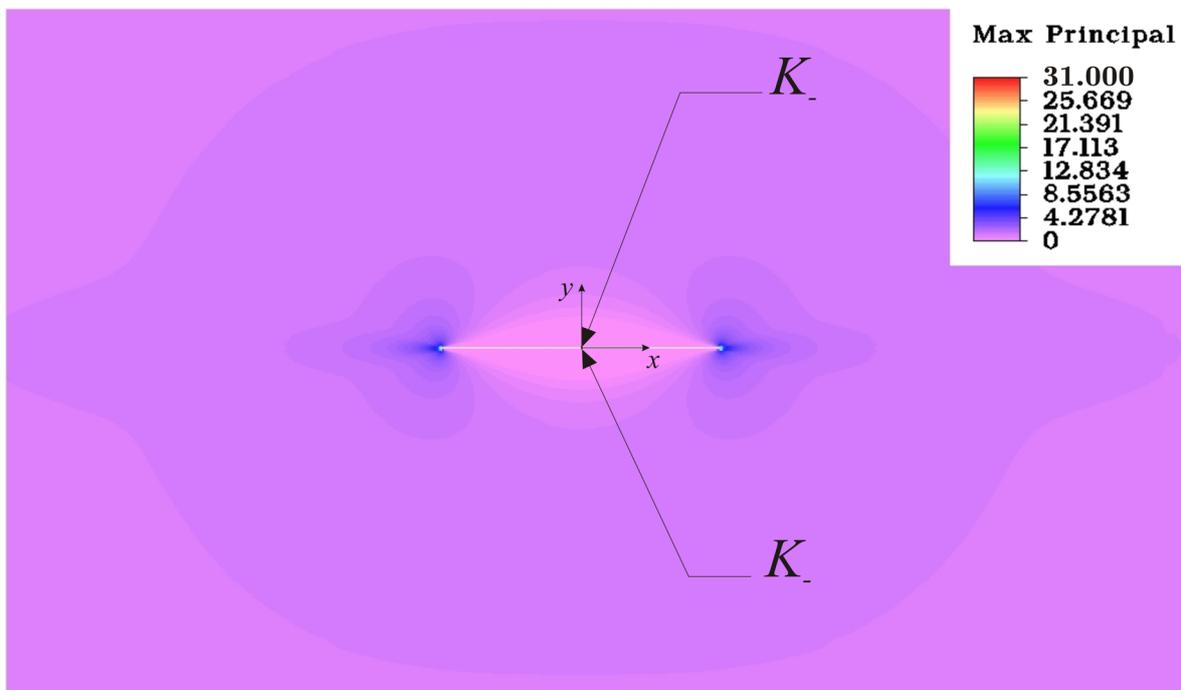


Figura 3.14. Distribución de tensiones principales de tracción para $\theta=0^\circ$, $E_1/E_2=6$, $G/E_2=0,6$, $\nu_1=0,3$.

La Figura 3.15 muestra un detalle de la figura anterior sobre una región alrededor del extremo derecho de la abertura. En ella, se destacan los puntos con valores de K_+ y se

observan grandes tensiones en una pequeña zona en el vértice de bordes redondeados.

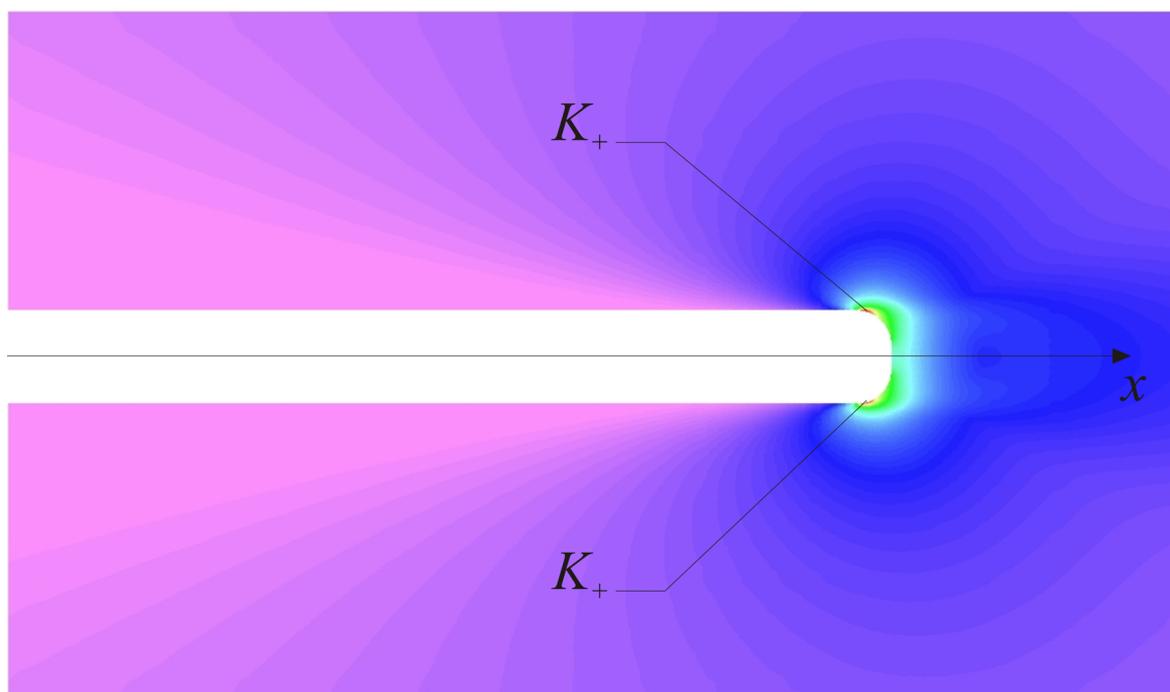


Figura 3.15. Detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta=0^\circ$, $E_1/E_2=6$, $G/E_2=0,6$, $\nu_1=0,3$.

La distribución de tensiones principales de tracción para $E_1/E_2=6$, $G/E_2=0,6$ y $\nu_1=0,3$ cuando $\theta=22,5^\circ$ se muestra en la Figura 3.16. Para esta orientación de los ejes principales de elasticidad la distribución de tensiones posee simetría polar con centro en la intersección de los ejes coordenados.

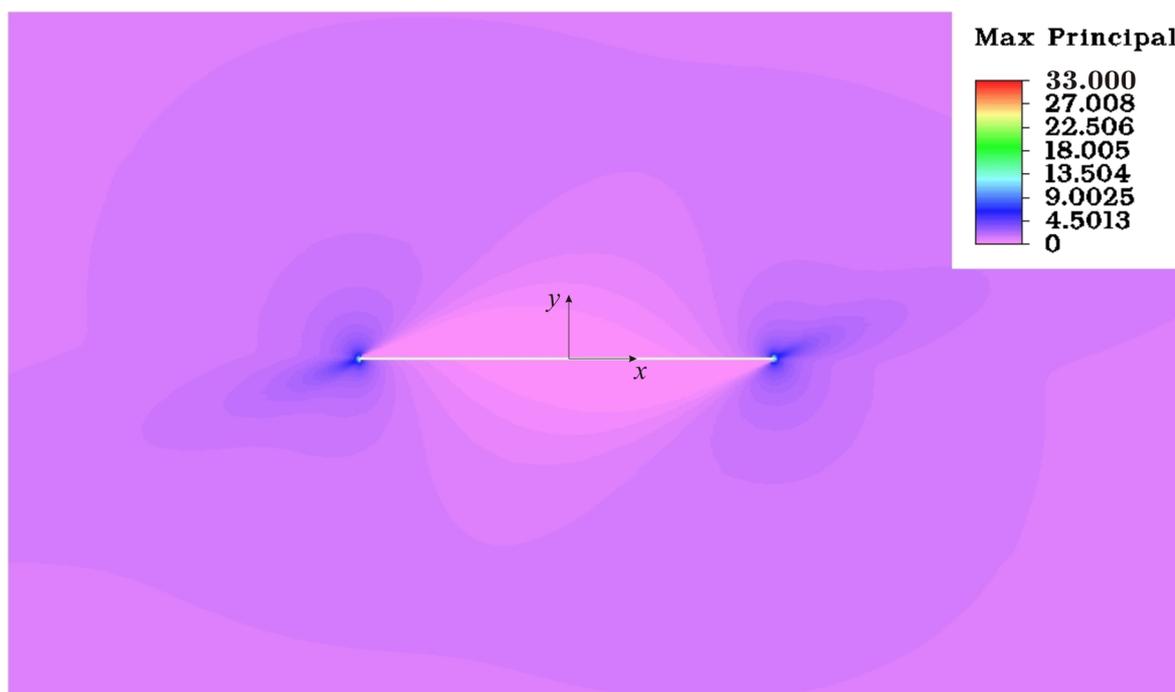


Figura 3.16. Distribución de tensiones principales de tracción para $\theta=22,5^\circ$, $E_1/E_2=6$, $G/E_2=0,6$, $\nu_1=0,3$.

En un detalle, Figura 3.17, sobre la región cercana al vértice del orificio, extremo

derecho, se señala la posición aproximada de los puntos sobre el borde con los valores extremos. En comparación con las figuras antes mostradas para $\theta=0^\circ$, es notable la cercanía entre los puntos con los valores extremos K_+ y K_- cuando $\theta=22,5^\circ$, Figura 3.17. Esto denota un gradiente de tensión alto en las regiones cercanas a los vértices redondeados ubicados en el cuadrante inferior derecho y cuadrante superior izquierdo.

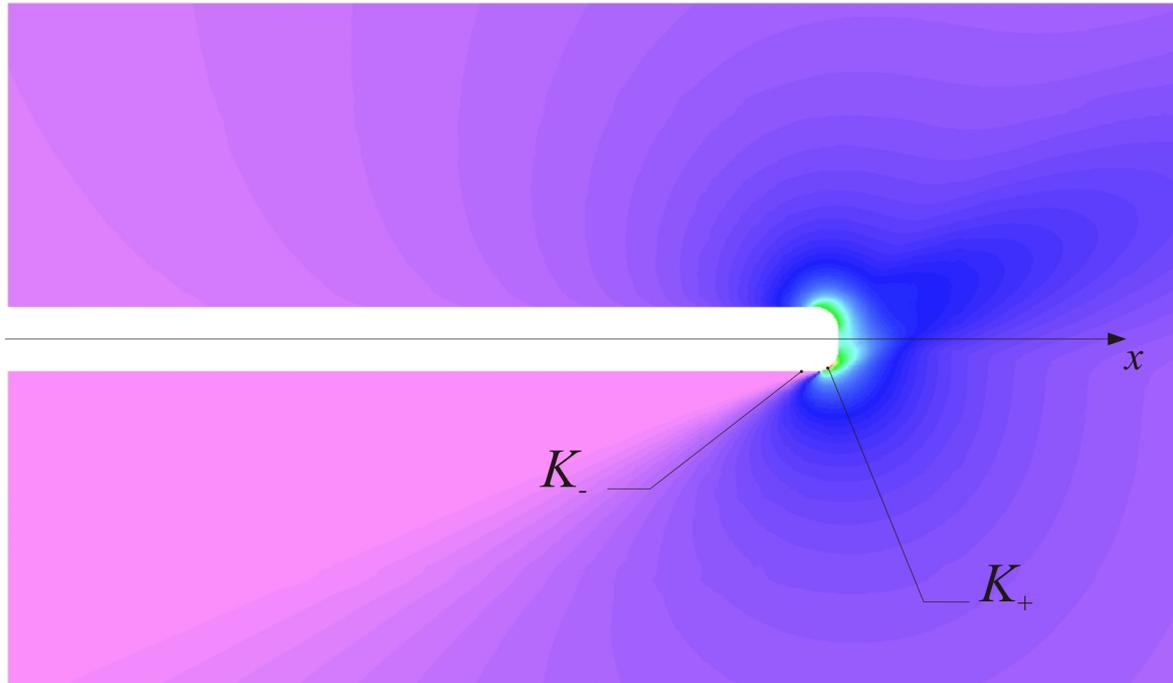


Figura 3.17. Detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta=22,5^\circ$, $E_1/E_2=6$, $G/E_2=0,6$, $\nu_1=0,3$.

Para los casos analizados, también se expone la variación del factor de concentraciones de tensiones de compresión, K_- , en función de θ en la Figura 3.18.

Nótese cómo se afecta la distribución de tensiones por efecto del orificio por la magnitud de las tensiones de compresión en una placa sometida a tracción biaxial.

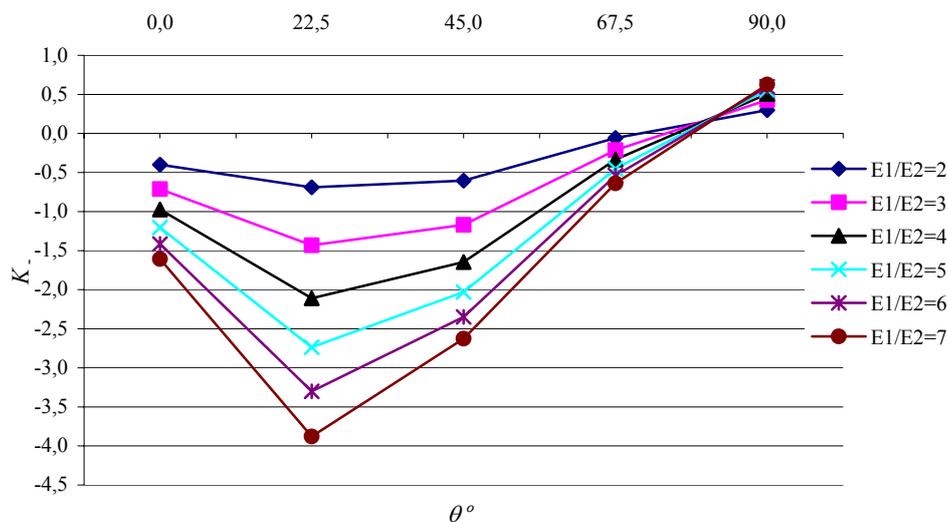


Figura 3.18. K_- versus θ para varias relaciones de E_1/E_2 ($G/E_2=0,6$).

De igual manera en que se expusieron los gráficos anteriores, a continuación, se grafican los resultados para los casos calculados con una relación $G/E_2=0,5$, Figura 3.19, Figura 3.20 y Figura 3.21, en donde se aprecia similar comportamiento cualitativo.

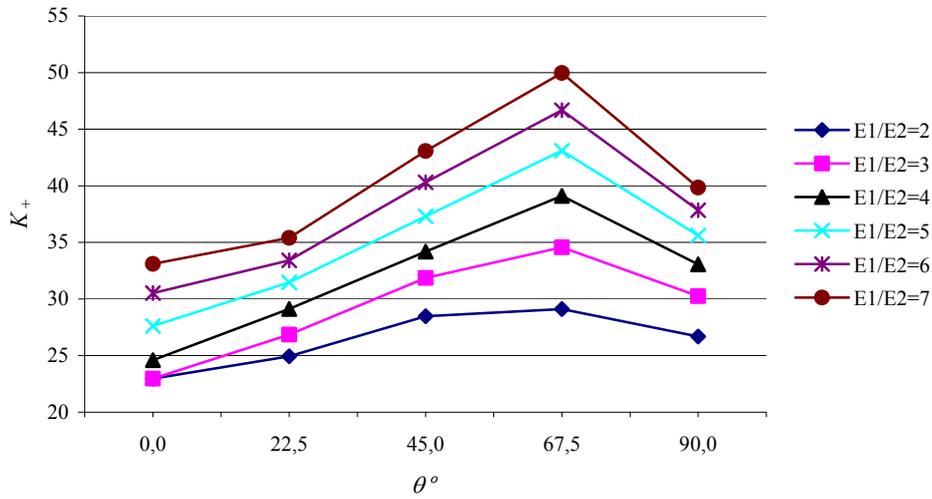


Figura 3.19. K_+ versus θ para varias relaciones de E_1/E_2 ($G/E_2=0,5$).

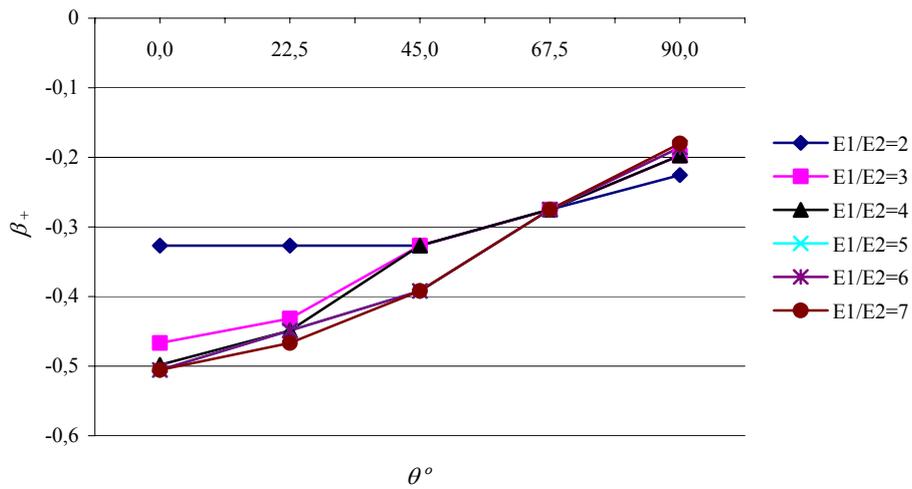


Figura 3.20. β_+ versus θ para varias relaciones de E_1/E_2 ($G/E_2=0,5$).

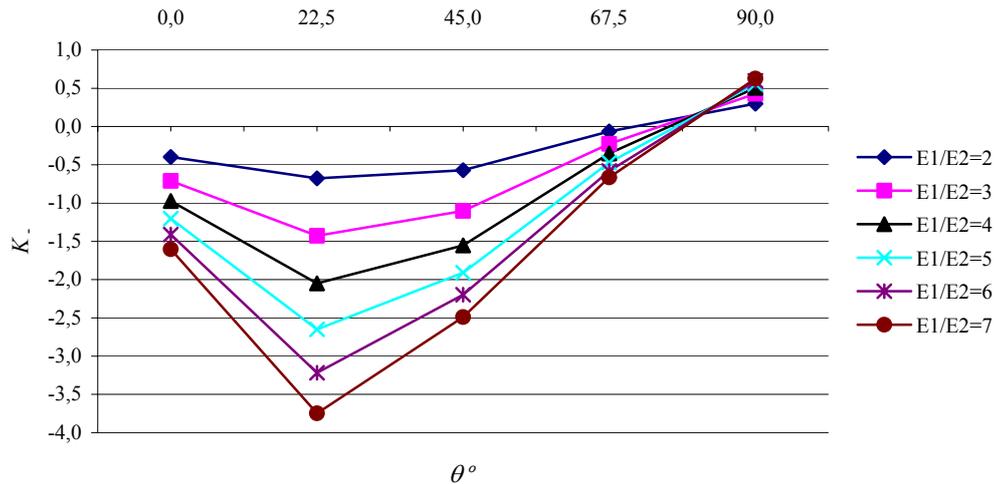


Figura 3.21. K . versus θ para varias relaciones de E_1/E_2 ($G/E_2=0,5$).

3.4 CONCLUSIONES.

Al examinar a la Figura 3.12 y la Figura 3.19 se hace visible que, la orientación de los ejes principales de elasticidad $\theta = 67,5^\circ$ produce, en casi todos los casos, los mayores valores de concentración de tensiones de tracción, es decir K_+ , independientemente del valor de la relación E_1/E_2 .

La excepción a este comportamiento se da cuando $G/E_2 = 0,6$ y $E_1/E_2=2$, caso en el que se advierte (Tabla 3.4, Tabla 3.5 y Figura 3.12) que el mayor valor de K_+ se produce para $\theta = 45^\circ$.

La Figura 3.18 y Figura 3.21 revelan que el valor extremo de K . ocurre cuando la orientación de los ejes principales de elasticidad es $\theta = 22,5^\circ$, para ambas relaciones de G/E_2 , indiferentemente de la relación E_1/E_2 . Es decir, la orientación de los ejes de elasticidad que producen el valor máximo de K_+ no es la misma que produce el valor extremo de K .

3.5 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] S. G. Lekhnitskii, "Anisotropic Plates", Gordon and Breach Science Publishers, New York. (1968).
- [2] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, "Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates", *Composite Structure*, Vol. 45, 171-183 (1999).
- [3] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, "A general solution for moments around holes in symmetric laminates", *Composite Structure*, Vol. 49, 41-54 (2000).

- [4] M. N. M. Allam, A. M. Zenkour, H. F. El-Mekawy, “Stress concentration in a viscoelastic composite plate weakened by a triangular hole”, *Composite Structure*, Vol. 79, 1-11 (2007).
- [5] M. N. M. Allam, A. M. Zenkour, “Stress concentration factor of a structurally anisotropic composite plate weakened by an oval opening”, *Composite Structure*, Vol. 61, 199-211. (2003).
- [6] ALGOR 20, “*Linear dynamic analysis*”, Algor Inc. (2007).
- [7] L. Logan Daryl, “*A first course in the finite element method using Algor*”, Thomson Learning, ISBN 0-534-38068-9.
- [8] A. Susca, D. V. Bambill, P. A. A. Laura, R. E. Rossi, “Factor de concentración de tensiones en el entorno de un orificio rectangular presente en una placa ortótropa”, ENIEF 2006 *Mecánica Computacional*, Vol. XXV, 411-427 (2006).

