

CAPÍTULO 1

Introducción a la teoría básica de la mecánica del sólido.

1.1 INTRODUCCIÓN.

Las estructuras con orificios son muy utilizadas en la práctica de la ingeniería. Los orificios se hacen por variadas razones, para alivianar, para el pasaje de cañerías y cables, para permitir el acceso a otras partes de estructuras, para alterar la respuesta dinámica, etc.

Además, el mayor conocimiento en el campo de la ciencia de los materiales junto con la necesidad de utilizar materiales más eficientes en algunas áreas tecnológicas, hace que el ingeniero de diseño se enfrente al análisis de estructuras cuyos materiales tienen características elásticas ortótropas o anisótropas.

También se conoce que los requerimientos de la industria hacen que el ingeniero de diseño, en la actualidad, deba conocer, necesariamente, los parámetros fundamentales que definen el comportamiento dinámico y estático de una estructura. Sólo con ese conocimiento se logrará un diseño racional del elemento estructural en estudio.

Uno de los problemas estáticos que enfrenta el profesional es el diseño racional de estructuras y mecanismos. Esto produce ahorro de materiales, reducciones de costos y la posibilidad de obtener estructuras y mecanismos más eficientes. Para ello es vital conocer la distribución de tensiones sobre el elemento estructural. Las fórmulas elementales usadas generalmente para el diseño están basadas en miembros con sección constante o secciones con cambios graduales en su geometría. Tal condición es rara vez satisfecha a causa de la existencia de orificios así como también de cambios bruscos en bordes interiores o exteriores, apareciendo en el elemento regiones con altas tensiones lo que se denomina concentración de tensiones. Un parámetro ampliamente utilizado para medir la concentración de tensiones es el factor de concentración de tensiones. Este parámetro es definido como la relación entre la tensión máxima en el cuerpo y alguna otra tensión la cual se adopta como referencia. De esta manera, para realizar un cálculo teórico del factor de concentración de tensiones es necesario el conocimiento de la teoría de la elasticidad.

Por otro lado, en situaciones dinámicas son de interés los problemas vibratorios evidenciados por efectos tales como fatiga, transmisión de ruido, incidencia en el medio ambiente y otros. Además, un elemento estructural posee infinito número de frecuencias resonantes. Es importante conocer los valores de las primeras frecuencias ya que están en el orden de las posibles perturbaciones a la que estará sometida la estructura o mecanismo. Por esta razón, la determinación de estas frecuencias y el análisis del comportamiento de estructuras en esos niveles, son importantes desde el punto de vista de reducir las tensiones dinámicas y/o las amplitudes de vibración. En algunos casos particulares es posible encontrar resultados de un número de frecuencias resonantes en la bibliografía^{[1], [2]}. No obstante, la ortotropía del material, la presencia de orificios y existencia de tensiones en la estructura hacen que para algunos casos no se encuentren resultados en la literatura.

Para facilitar una mejor comprensión de los resultados obtenidos en los capítulos posteriores, en el presente capítulo se transcriben los desarrollos analíticos fundamentales de la mecánica del sólido, estado plano de tensiones y vibraciones transversales de placas delgadas de material ortótropo.

1.2 ECUACIONES BÁSICAS DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.

Antes de pasar al análisis de tensiones cabe mencionar que gran parte de la teoría matemática de la elasticidad se basa en la hipótesis del continuo. Mediante esta consideración es posible ignorar la estructura atómica de la materia y analizarla como si

fuera un medio continuo, sin agujeros ni huecos. Esto simplifica notablemente la resolución de muchos problemas.

1.2.1 Análisis de las tensiones.

En la mecánica de los cuerpos continuos es necesario hacer una distinción referente al tipo de fuerzas que pueden actuar sobre un cuerpo. Esta es: fuerzas de volumen y fuerzas de superficie.

Las fuerzas de volumen son aquellas cuya naturaleza hace que actúen sin necesidad de contacto. Son acciones que actúan sobre elementos con volumen (o masa) por ejemplo la gravedad. Consideremos un elemento de volumen infinitesimal, “ dV ”, de un cuerpo cualquiera. Se asume que la fuerza de volumen tendrá la forma “ $\bar{\Phi}dV$ ” donde $\bar{\Phi}$ es un vector finito y corresponde a la fuerza por unidad de volumen. Cualquier punto de coordenadas (x, y, z) , del volumen dV , puede tomarse como punto de aplicación del vector $\bar{\Phi}$. De forma general podemos decir que $\bar{\Phi}$ varía con la posición (x, y, z) . En situaciones dinámicas, $\bar{\Phi}$, cambia con la variable temporal t .

De esta forma el vector de fuerza resultante $\bar{\Psi}$ que actúa sobre cualquier volumen finito V de un cuerpo puede ser representado por la siguiente integral:

$$\bar{\Psi} = \int_V \bar{\Phi}dV \quad (1.1)$$

Y de la misma forma los momentos resultantes de esas fuerzas con respecto a los ejes x , y y z son

$$\begin{aligned} M_x &= \iiint_V (yZ - zY) dx dy dz \\ M_y &= \iiint_V (zX - xZ) dx dy dz \\ M_z &= \iiint_V (xY - yX) dx dy dz \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donde X , Y y Z son las componentes escalares del vector $\bar{\Phi}$ con respecto a un sistema de ejes ortogonal xyz .

Las fuerzas de superficies son acciones que actúan a través de superficies. Estas pueden ser superficies interiores o exteriores. La Figura 1.1 muestra un cuerpo cualquiera en el que se señala en líneas de trazo un volumen V finito de superficie S en que se destaca un diferencial de superficie dS y el vector unitario normal a ella, \bar{n} .

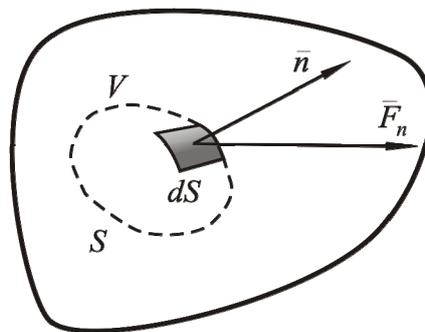


Figura 1.1. Diferencial de superficie dS de normal \bar{n} con tensión aplicada \bar{F}_n

Ahora podemos asumir que la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie dS cuya normal exterior es el vector “ n ” es $\overline{F}_n dS$. Entonces $\overline{F}_n dS$ es la fuerza que la parte externa a “ V ” ejerce sobre la parte interna de “ V ”. \overline{F}_n es una fuerza distribuida por unidad de área y se la denomina vector tensión.

Al igual que $\overline{\Phi}$, el vector \overline{F}_n depende de la posición en el cuerpo (x, y, z) y de la orientación del vector normal “ n ”. Por esto es necesario referir el vector tensión al vector normal “ n ” con el subíndice. Hay que agregar que en situaciones dinámicas también existe dependencia con la variable temporal.

1.2.1.1 Componentes del vector tensión.

Dado un vector tensión \overline{F}_n aplicado en un área elemental dS es posible descomponerlo en dos vectores, uno contenido en el área, nombrado como τ_n , y otro normal que se denomina σ_n , como muestra la Figura 1.2. El subíndice determina la orientación del área elemental.

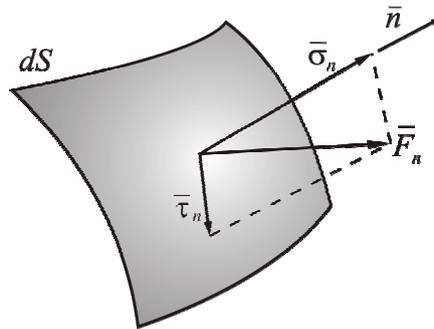


Figura 1.2. Descomposición de la tensión aplicada, \overline{F}_n , en un elemento diferencial de superficie, dS , en dos direcciones perpendiculares.

Si descomponemos \overline{F}_n en componentes escalares con respecto a un sistema de ejes ortogonales “ xyz ” se puede expresar:

$$\overline{F}_n = (F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}) \quad (1.3)$$

Donde el primer subíndice indica la dirección de la normal al área considerada y el segundo subíndice puntualiza la dirección del valor escalar referido. Asociando cada componente escalar con el vector unitario correspondiente para cada uno de los ejes coordenados, se puede ilustrar la descomposición como se muestra en la Figura 1.3.

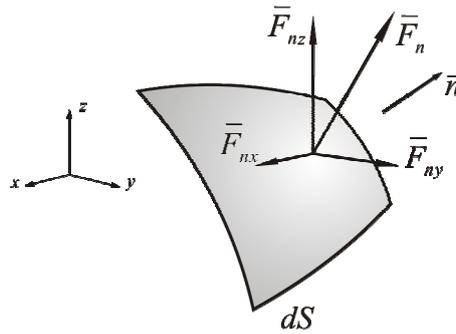


Figura 1.3. Componentes según “xyz” del vector tensión \overline{F}_n .

1.2.1.2 Estado de tensión en un punto.

Consideremos ahora un área infinitesimal cuyo vector normal coincide con uno de los ejes coordenados, por ejemplo x . Las componentes de tensión serán, según lo indicado anteriormente:

$$\overline{F}_x = (F_{xx}, F_{xy}, F_{xz}) \quad (1.4)$$

En ese caso, es común en la literatura encontrar la siguiente notación para las componentes del vector tensión:

$$\begin{aligned} F_{xx} &\rightarrow \sigma_x \\ F_{xy} &\rightarrow \tau_{xy} \\ F_{xz} &\rightarrow \tau_{xz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Tomemos un punto P perteneciente a un cuerpo. Consideremos tres planos paralelos a los planos coordenados que contienen a P . Si para cada uno de ellos se calculan las componentes de tensión, se tendrá el siguiente conjunto de componentes:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \quad (1.6)$$

Es demostrado en la literatura^[3] que el estado de tensión en un punto dado queda determinado completamente si se conocen las componentes del vector tensión en tres planos ortogonales. Es decir, las componentes de tensión para un área cualquiera cuya normal es \overline{n} se pueden escribir en función de los parámetros (1.6), según las relaciones:

$$\begin{aligned} F_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) \\ F_{ny} &= \tau_{yx} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) \\ F_{nz} &= \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Las relaciones anteriores fueron encontradas por A. L. Cauchy (1789-1857) y presentadas a la Academia de París en 1822; los resultados fueron publicados en partes entre los años 1823-1828.

1.2.2 Análisis de las deformaciones.

Un cuerpo elástico se deforma bajo la acción de fuerzas. El término deformación se refiere a cambios en la distancia entre puntos pertenecientes a un sólido. Por otro lado, el desplazamiento de un punto del sólido elástico se caracteriza con un vector cuyas componentes en la terna xyz se designan con (u,v,w) y es posible relacionarlas con las deformaciones que tienen lugar. A continuación se muestra en el plano la relación que existe entre los corrimientos de un punto y la deformación, según la hipótesis de pequeños desplazamientos.

La Figura 1.4 muestra el desplazamiento y una pequeña deformación de un elemento diferencial en el plano cuyas medidas son dx y dy . El elemento ABCD toma la forma A'B'C'D' luego de la deformación. Los corrimientos de los puntos A, B, C, y D en los vértices se indican en la Figura. Las componentes del corrimiento del punto de referencia A, de coordenadas (x,y) , son $u(x,y)$ y $v(x,y)$. De la misma forma los corrimientos del punto B son $u(x+dx,y)$ y $v(x+dx,y)$ y para los puntos restantes los corrimientos quedan definidos de manera análoga.

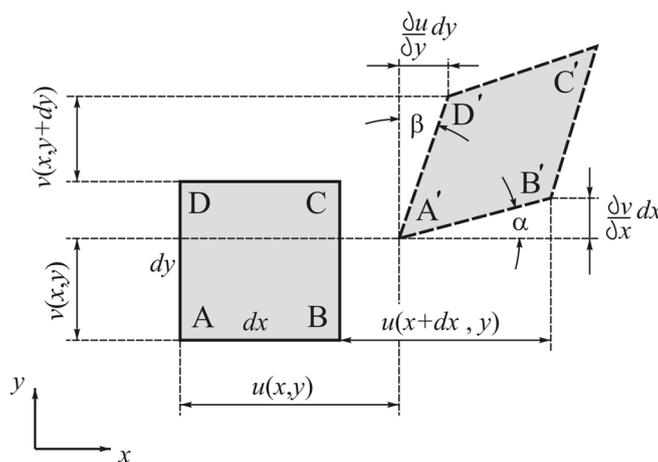


Figura 1.4. Deformación en el plano de un elemento diferencial.

De acuerdo a la teoría de pequeños desplazamientos, la aproximación mostrada en la expresión (1.8) es válida al igual que para las otras componentes de corrimiento:

$$u(x+dx, y) \approx u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1.8)$$

La deformación en dirección x , ver Figura 1.4, es definida como:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (1.9)$$

Utilizando la geometría descrita en la Figura 1.4, la longitud A'B' es:

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} dx \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \quad (1.10)$$

Donde en forma consistente con la teoría de pequeñas deformaciones se despreciaron los términos de mayor orden.

Utilizando la igualdad $AB=dx$ y la aproximación (1.10) para A'B', la relación (1.9) queda:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.11)$$

En forma similar se obtiene:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.12)$$

La distorsión del elemento ABCD se caracteriza con el cambio del ángulo inicialmente recto, ver Figura 1.4, y se cuantifica de la siguiente manera:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \widehat{D'A'B'} = \alpha + \beta \quad (1.13)$$

Para pequeñas deformaciones, es decir ángulos α y β pequeños, se cumple:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \tan(\alpha) \\ \beta &\approx \tan(\beta) \end{aligned} \quad (1.14)$$

En consecuencia, la relación (1.13) puede expresarse en función de los parámetros mostrados en la Figura 1.4 como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \quad (1.15)$$

Finalmente, despreciando los términos de orden superior en la expresión (1.15), se obtiene:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.16)$$

Si se realiza un razonamiento análogo al anterior pero en los planos yz y xz , los resultados se extienden para un caso general en las tres dimensiones como muestran las conocidas relaciones (1.17):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.2.3 Ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones.

Al sistema de ecuaciones anterior se suman las ecuaciones de compatibilidad que garantizan una propiedad fundamental desde el punto de vista matemático, con respecto a las funciones corrimiento de un cuerpo sometido a deformación. Esta es que las funciones

sean continuas y de valor único. En otras palabras no se pueden tomar funciones de manera arbitraria porque el sólido sometido a tal deformación no constituiría un medio continuo, se producirían agujeros o vacíos. Las ecuaciones siguientes son llamadas condición de compatibilidad de Barré de Saint-Venant (1797-1886).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Es decir, las componentes de la deformación deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales anterior para asegurar una deformación sin discontinuidades en un dominio simplemente conexo.

1.2.4 Ecuaciones de equilibrio.

Un cuerpo rígido está en equilibrio si es nula la resultante de las fuerzas actuantes y los momentos con respecto a tres ejes ortogonales. Es decir que, referido a una terna de ejes ortonormales, un sistema de seis ecuaciones determina el estado de equilibrio.

En el caso de sólidos deformables la condición anterior se debe cumplir para cada volumen imaginario que se pueda separar del cuerpo considerado. Es decir, un sólido deformable se encontrará en equilibrio si para cada volumen del cuerpo es nula la resultante de fuerzas y momentos.

De la condición de nulidad de la resultante de fuerzas en cualquier volumen del cuerpo se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= \rho a_x \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + Y &= \rho a_y \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho a_z
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Donde: X , Y y Z se refieren a las componentes de las fuerzas de volumen actuantes; a_x , a_y y a_z componentes del vector aceleración y ρ es la densidad del material del cuerpo.

Para el caso estático, cuando las fuerzas inerciales son nulas, el sistema de ecuaciones anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + Y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Aplicando la condición de nulidad de la resultante de momentos para cada volumen y considerando despreciables las cuplas de volumen* se tiene el siguiente importante resultado

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Por el contrario si las cuplas de volumen en el cuerpo son del orden de las componentes de tensión tangenciales lo anterior no es válido y se debe considerar

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &\neq \tau_{yx} \\
\tau_{yz} &\neq \tau_{zy} \\
\tau_{xz} &\neq \tau_{zx}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Es importante notar que en los casos más comunes de la ingeniería las cuplas de volumen son despreciables frente a las tensiones de corte.

1.2.5 Ecuaciones constitutivas.

Las relaciones anteriores no son suficientes para resolver problemas estáticos o dinámicos en un sólido deformable. Es necesario una relación entre las componentes de deformación del sólido y las componentes de tensión actuantes. Manteniendo las hipótesis de pequeñas deformaciones y medio continuo, la relación utilizada para sólidos elásticos es la conocida Ley de Hooke. Expresada en su forma generalizada es:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy} \\
\varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy} \\
\gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy} \\
\gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Donde las a_{ij} son las llamadas constantes elásticas o coeficientes de deformación. Admitiendo la existencia de una función energía se puede probar que la matriz formada por los coeficientes a_{ij} es simétrica con respecto a la diagonal, es decir $a_{ij} = a_{ji}$. Por ende el número de coeficientes a_{ij} se reduce de 36 a 21.

* Maxwell fue el primero en señalar que existen cuplas de volumen en un imán bajo la influencia de un campo magnético y en un material dieléctrico sometido a un campo eléctrico.

Es importante recordar que un sólido es llamado homogéneo cuando las propiedades elásticas, según cada dirección, son independientes de la posición del punto considerado.

Los valores de los coeficientes a_{ij} son características particulares de cada material. Con respecto a esto, es importante distinguir entre materiales anisótropos y materiales isotropos. Un material es isotropo cuando sus propiedades elásticas son las mismas para cualquier dirección y anisótropo cuando estas propiedades son diferentes para distintas direcciones. Este comportamiento depende de si el sólido posee alguna simetría en su estructura interna, es decir, si el cuerpo posee alguna simetría en su estructura interna sus propiedades elásticas tendrán simetría. Lo anterior está relacionado con el tamaño de la porción de material analizado. Para ejemplificar se puede mencionar el caso de los materiales cristalinos. Las muestras policristalinas pueden tener propiedades elásticas isotrópicas y se les puede describir aproximadamente con menos constantes que el monocristal pero las propiedades elásticas del monocristal, en forma general, dependen de la dirección, es decir, son anisotrópicas. Los materiales cuya estructura atómica responden a una estructura cristalina poseen simetría elástica. También poseen simetría elástica algunos materiales naturales como la madera.

Las ecuaciones referidas a la Ley de Hooke generalizada se simplifican con la presencia de simetría elástica. Debido a ella algunos coeficientes a_{ij} se anulan y aparecen relaciones vinculantes entre otros.

1.2.4.1 Material ortótropo.

Uno de los casos más importante, debido a su aplicación tecnológica, ocurre cuando el material posee tres planos de simetría elástica. Es decir, en cada punto del sólido tres planos mutuamente perpendiculares que contienen al punto, definen las direcciones de simetría elástica. Esta clase de anisotropía es llamada ortotropía. Un material con esta característica elástica es llamado ortótropo. Para un sólido homogéneo ortótropo la Ley de Hooke generalizada referida a una terna ortogonal xyz , coincidente con las direcciones de las normales a los planos de simetría, es:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \\
 \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z \\
 \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \\
 \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} \\
 \gamma_{xz} &= a_{55}\tau_{xz} \\
 \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

El número de constantes elásticas independientes, considerando la simetría elástica, se redujo de 21 a 9. Las ecuaciones (1.24) pueden ser expresadas utilizando E , el módulo de Young; ν , módulo de Poisson y el módulo de corte G , como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y + \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_z \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_3} \sigma_z \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz} \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{13}} \tau_{xz} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Donde E_1 , E_2 y E_3 son los valores del módulo de Young para las direcciones x , y y z ; ν_{ij} es el módulo de Poisson que caracteriza el aumento o la disminución en la dirección j cuando una tensión aplicada en dirección i y G_{23} , G_{13} , G_{12} son los módulos de corte que caracterizan el aumento o disminución del ángulo, inicialmente recto, entre las direcciones y y z , x y z , x e y . Debido a la simetría en las ecuaciones (1.25) las siguientes relaciones existen entre el módulo de Young y los módulos de Poisson:

$$\begin{aligned}
E_1 \nu_{21} &= E_2 \nu_{12} \\
E_2 \nu_{32} &= E_3 \nu_{23} \\
E_3 \nu_{13} &= E_1 \nu_{31}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

A modo de ejemplo se puede mencionar algunos materiales que en una primera aproximación se pueden considerar homogéneos y ortótropos como el caso de la madera con anillos regulares o placas de distintas maderas pegadas con algún ligamento. En los cristales se pueden citar el topacio y barita cuyo nombre químico es sulfato de Bario (BaSO_4).

Algunos de los materiales compuestos exhiben en su comportamiento mecánico características elásticas ortótropas. Un material compuesto es un material que surge al combinar dos o más materiales en una escala macroscópica es decir, que los componentes pueden identificarse a simple vista. Existen diversos materiales utilizados y diferentes procesos para su elaboración como se muestra en la literatura^[4] referente al tema. La ventaja de estos materiales es que poseen las mejores cualidades de sus componentes si están bien diseñados y frecuentemente, poseen propiedades que ninguno de sus constituyentes posee. Algunas de las propiedades que pueden ser mejoradas son: resistencia a la tracción, dureza, resistencia a la corrosión, peso, resistencia a la fatiga, conductividad térmica o aislación térmica, aislación acústica, etc. Naturalmente no es posible mejorar todas las propiedades pero sí la propiedad requerida. Tal es así que las técnicas desarrolladas para su construcción permiten crear un material que solamente posea las propiedades necesarias según el mecanismo del que forma parte.

Estos materiales compuestos son muy utilizados en la industria aeronáutica y aeroespacial. Esto se debe a que algunos de ellos poseen altas resistencias a tracción y dureza pero son más livianos en comparación con los materiales metálicos tradicionales. Por ejemplo un material compuesto pueden ser tres veces más resistente que el aluminio, material de uso común en aeronáutica, pero un 60% más liviano como se menciona en la bibliografía^[5]. Existen una gran variedad de materiales compuestos los cuales poseen

características elásticas disímiles. La Tabla 1.1 muestra una serie de materiales compuestos junto a sus características elásticas (E_1 , E_2 , ν_{12} y G_{12}) y las relaciones entre ellas E_1/E_2 y G_{12}/E_2 . Se destaca que en los materiales usados como ejemplos la variación de la relación E_1/E_2 va desde un valor 1 hasta 42,03, es decir un material con una ortotropía muy acentuada.

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)	E_1/E_2	G_{12}/E_2
CF/T300	63,80	63,80	0,04	3,20	1,00	0,05
Plywood	11,29	5,89	0,07	0,69	1,92	0,12
Glass/Epoxy	53,80	17,90	0,25	8,96	3,01	0,50
Boron/Epoxy	207,00	20,07	0,30	6,90	10,31	0,34
Layer (ply)	113,97	8,13	0,32	3,89	14,02	0,48
Graphite/epoxy	181,00	10,30	0,28	7,17	17,57	0,70
Graphite/epoxy (GY-70-HYE1534)	290,00	6,90	0,25	4,80	42,03	0,70

Tabla 1.1. Propiedades elásticas de algunos materiales compuestos.

1.3 CASOS PARTICULARES EN LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.

La teoría expuesta en el apartado anterior corresponde, bajo las hipótesis realizadas, para un caso general. Es decir cualquier cuerpo tridimensional con características elásticas ortótropas sometido a un estado de esfuerzos cualquiera. Sin embargo, para algunas aplicaciones tecnológicas importantes se pueden considerar simplificaciones convenientes como se muestra en el análisis de tensiones realizado a un panel de una aeronave comercial^[6]. En él se realiza un estudio de tensiones a un panel con orificios y gran radio de curvatura, al cual se lo modela como si fuera un elemento estructural plano sometido a un estado plano de tensiones.

1.3.1 Estado plano de tensiones.

Consideremos una placa de espesor constante pequeño, h , cargada por un sistema de fuerzas paralelo al plano de la placa en su borde externo y uniformemente distribuidas en el espesor, ver Figura 1.5. En este sistema, las componentes de tensión σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} son nulas en ambas caras de la placa y puede asumirse que son nulas en el plano medio de la misma.

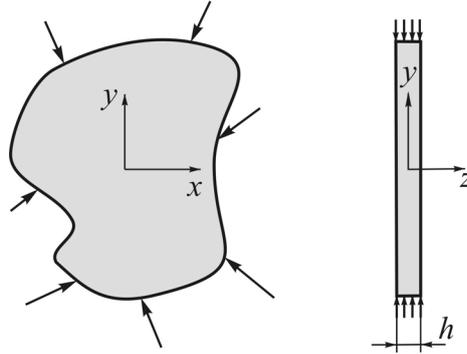


Figura 1.5. Esquema de un estado plano de tensiones.

Se conoce como estado plano de tensiones al estado de tensiones que es caracterizado solamente por las componentes σ_x , σ_y y τ_{xy} . Es decir que:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y) \\ \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{1.27}$$

Teniendo en cuenta el estado de tensiones definido en (1.27), las ecuaciones de equilibrio para el caso estático dadas en (1.20) quedan reducidas a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\tag{1.28}$$

Mientras que las ecuaciones constitutivas para un material ortótropo cuyos ejes principales de elasticidad coinciden con los ejes cartesianos, descritas en (1.25), se reducen a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy}\end{aligned}\tag{1.29}$$

El sistema de ecuaciones dado por (1.28) y (1.29) se puede reducir a una ecuación diferencial a derivadas parciales de cuarto orden como se explica a continuación. En primera instancia se asume que las fuerzas de volumen son derivables de una función potencial $U(x,y)$ es decir:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.30)$$

Además, se satisfacen idénticamente las ecuaciones de equilibrio (1.28) introduciendo una función tensión $F(x,y)$ que cumple:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} + U \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Reemplazando las deformaciones ε_x , ε_y , ε_z y γ_{xy} , detalladas en (1.29) en la primer ecuación de compatibilidad de deformaciones formulada en (1.18) y expresando las componentes de tensión utilizando las relaciones (1.31) se obtiene:

$$\frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -\frac{(1-\nu_{21})}{E_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu_{12})}{E_1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (1.32)$$

Es claro que tomando $E_1=E_2=E$, $\nu_{12}=\nu_{21}=\nu$, $G_{12}=G$ y la condición que existe para materiales isótropos entre G y el módulo E dada por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.33)$$

La ecuación diferencial (1.32) resulta de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (1-\nu) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (1.34)$$

Esta ecuación diferencial gobierna el estado plano de tensiones cuando el material homogéneo es isótropo y es expresada comúnmente en la literatura^[7] con el operador biarmónico aplicado a la función tensión F :

$$\nabla^4 F = -(1-\nu) \nabla^2 U \quad (1.35)$$

Las expresiones diferenciales mostradas que gobiernan el estado plano de tensiones corresponden, como se mencionó, para materiales homogéneos. Sin embargo en algunas áreas tecnológicas se utilizan los materiales no homogéneos como por ejemplo en el recubrimiento térmico de turbinas a gas y en toberas de escapes de cohetes. Esto afecta a la concentración de tensiones si el elemento estructural posee orificios. Con respecto a este tema es interesante mencionar que la concentración de tensiones depende de las características no homogéneas del material y también de la magnitud de la carga como se muestra en un estudio^[8] realizado sobre una placa con un orificio elíptico sometida a un esfuerzo biaxial de tracción. En un trabajo^[9] más reciente, se muestra cómo afectan las características no homogéneas del material a la concentración de tensiones en una placa con orificio circular sometida a un estado uniaxial de tracción.

1.3.2 Vibración transversal de una placa delgada.

Consideremos una placa de material elástico ortótropo y homogéneo, cuyo espesor h es constante y muy pequeño frente a las otras dos dimensiones. La placa se encuentra referida a una terna cartesiana xyz y su plano medio coincide con el plano xy antes de la deformación transversal. De esta manera, la función desplazamiento w es la que caracteriza la configuración deformada de la placa siendo función de la posición sobre la placa y la variable temporal t , es decir que $w(x,y,t)$.

Para derivar la ecuación diferencial a derivadas parciales que gobierna el fenómeno es necesario introducir las siguientes hipótesis:

- Un segmento recto que es normal inicialmente a la superficie media de la placa permanece recto y perpendicular a la superficie media deformada y su longitud no varía[†].
- Las tensiones normales σ_x y σ_y son consideradas nulas en la superficie media de la placa.

Es importante mencionar que las hipótesis anteriores se cumplen si el corrimiento $w(x,y,t)$ es como máximo del orden del espesor h de la placa. Bajo estas hipótesis los corrimientos en el plano u y v se pueden calcular como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \qquad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.36)$$

Y en consecuencia las deformaciones en el plano quedarán:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \qquad (1.37)$$

Es común en la literatura referente al tema^{[10], [11]} reducir las componentes de tensión a componentes de esfuerzos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz & & \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \end{aligned} \qquad (1.38)$$

Donde M_x , M_y se denominan momentos flectores; M_{xy} , M_{yx} momentos torsores y Q_x , Q_y son los esfuerzos de corte. En la Figura 1.6 se muestra un elemento de placa de longitud dx y dy en donde se esquematizan los esfuerzos resultantes actuantes sobre él y también una carga transversal distribuida $p(x,y,t)$ que actuó sobre todo el elemento.

[†] Esta hipótesis corresponde a la de Bernoulli-Navier en la flexión de vigas esbeltas en donde los efectos de corte y las deformaciones transversales normales se desprecian.

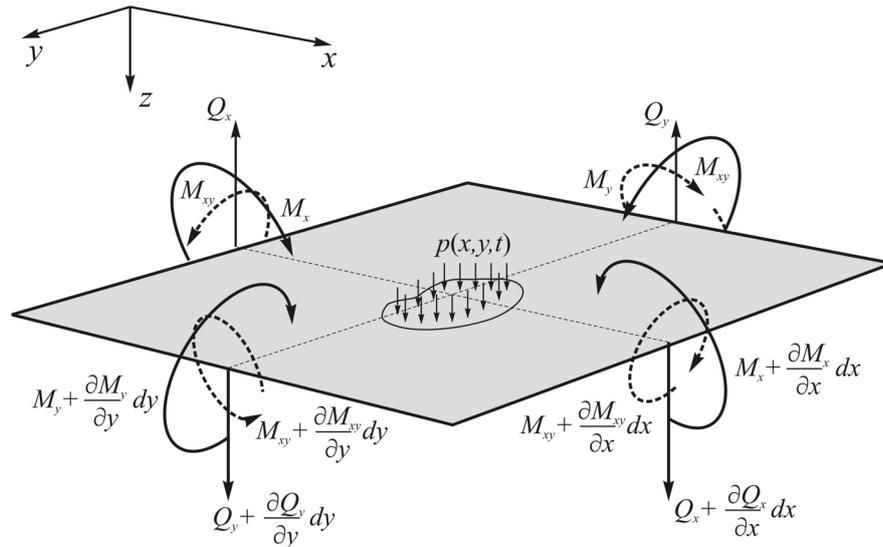


Figura 1.6. Esfuerzos resultantes en un elemento de placa.

Es posible determinar las componentes resultantes de los esfuerzos en función del corrimiento transversal $w(x,y,t)$. Para ello se resuelven las integrales (1.38) reemplazando apropiadamente las componentes de tensión obtenidas de las relaciones constitutivas mostradas en (1.25) (para un material ortótropo), junto con las ecuaciones de las deformaciones mostradas en (1.37). El resultado de ello es:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Y los esfuerzos de corte resultantes:

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Donde:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12} \quad (1.41)$$

$$\text{con } D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k$$

D_1 y D_2 son los coeficientes de rigidez a la flexión en las direcciones principales de elasticidad y D_k el coeficiente de rigidez torsional. Se hace notar que $\nu_{12} = \nu_1$, $\nu_{21} = \nu_2$ y $G_{12} = G$; esta notación se mantendrá de aquí en adelante.

Las ecuaciones de equilibrio, sobre el elemento diferencial, Figura 1.6, que deben satisfacer los esfuerzos resultantes son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0\end{aligned}\quad (1.42)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_{(x,y,t)} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.43)$$

Las ecuaciones anteriores son reducidas a una sola ecuación diferencial a derivadas parciales de cuarto orden de la siguiente manera. En las ecuaciones de equilibrio (1.42) se reemplazan M_x , M_y y M_{xy} con las relaciones (1.39) y se despejan los valores de Q_x y Q_y . Luego son reemplazados en la ecuación (1.43). De esta manera la ecuación resultante es:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_{(x,y,t)} \quad (1.44)$$

Es importante mencionar que algunos elementos estructurales como las placas corrugadas o placas con refuerzos pueden ser analizados como ortótropos según su comportamiento mecánico como se muestra en la bibliografía^[10].

Cuando se considera el material isótropo, es decir:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.45)$$

La ecuación (1.44) queda de la forma:

$$D\nabla^4 w - p(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.46)$$

Una función $w(x,y,t)$ es solución a un problema de vibración transversal de una placa delgada de material ortótropo, si satisface la ecuación diferencial (1.44) y las condiciones de borde de la misma. En el siguiente apartado se detallan las condiciones de borde con que habitualmente se modelan distintas configuraciones que se dan en situaciones reales.

1.3.2.1 Condiciones de borde.

Para mayor generalidad, se considera una placa de forma arbitraria cuyo borde satisface la relación funcional $L(x,y)=0$ que se expresa en forma sintética como L . En la Figura 1.7 se muestra una placa de forma arbitraria y en un punto del borde se destaca la dirección normal y tangencial al mismo con vectores unitarios \bar{n} y \bar{s} , los momentos M_n , M_{sn} y el corte Q_n .

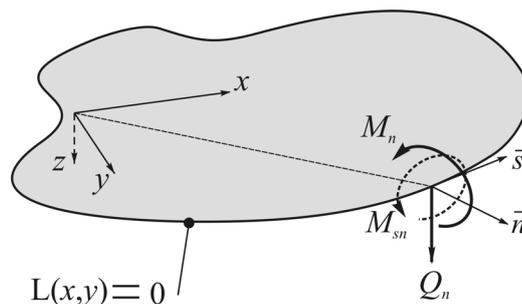


Figura 1.7. Direcciones normal, \bar{n} , y tangencial, \bar{s} , al borde de ecuación general $L(x,y)=0$.

A continuación se expresan las cinco condiciones de borde más comunes, Lekhnitskii^[12]:

(1) Borde empotrado:

$$w(L) = 0 \quad \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_L = 0 \quad (1.47)$$

En donde con $\frac{\partial}{\partial n}$ se expresa la deriva con dirección normal al borde.

(2) Simplemente apoyada:

$$w(L) = 0 \quad M_n(L) = 0 \quad (1.48)$$

(3) Borde libre:

$$M_n(L) = 0 \quad \left(Q_n + \frac{\partial M_{sn}}{\partial s} \right) \Big|_L = 0 \quad (1.49)$$

Con $\frac{\partial}{\partial s}$ se expresa la derivada en dirección a la tangente al borde.

(4) Cuando en el borde de la placa existe un momento por unidad de longitud aplicado M_{ap} y una carga por unidad de longitud transversal aplicada p_{ap} las condiciones de borde son:

$$M_n(L) = M_{ap} \quad \left(Q_n + \frac{\partial M_{sn}}{\partial s} \right) \Big|_L = p_{ap} \quad (1.50)$$

(5) Si el borde posee un corrimiento aplicado w_{ap} y un giro determinado por el ángulo λ :

$$w(L) = w_{ap} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \Big|_L = \lambda \quad (1.51)$$

Cabe mencionar que M_{ap} , p_{ap} , w_{ap} y λ pueden ser funciones de la posición sobre el borde.

1.3.2.1 Vibraciones transversales de una placa delgada sometida a esfuerzos en su plano medio.

Consideremos ahora el caso en que además de la carga transversal $p(x,y,t)$ hay también esfuerzos externos que actúan en el plano medio de la placa, es decir que esta sometida a un estado plano de tensiones. Siguiendo el procedimiento clásico^{[1], [11]}, si se mantiene la

hipótesis de pequeños desplazamientos transversales, se puede asumir que los esfuerzos en el plano medio de la placa son independientes del tiempo es decir no son afectados por la deformación transversal de la misma. En consecuencia, el estado de tensiones en el plano debe satisfacer las ecuaciones de equilibrio (1.28).

Comúnmente las tensiones en el plano σ_x , σ_y y τ_{xy} son referidas como esfuerzos por unidad de longitud N_x , N_y y N_{xy} , de modo que:

$$N_x = \sigma_x h; \quad N_y = \sigma_y h; \quad N_{xy} = \tau_{xy} h \quad (1.52)$$

Las ecuaciones de equilibrio (1.28) para el estado plano de tensiones, considerando nulas las fuerzas de volumen, referidas a N_x , N_y y N_{xy} son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

Además, la ecuación de equilibrio en dirección z para un elemento de placa, considerando los esfuerzos en el plano es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_{(x,y,t)} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Reemplazando las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos en el plano (1.53) y las relaciones (1.39) en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación diferencial:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_{(x,y,t)} \quad (1.55)$$

Para material isótropo se considera nuevamente la igualdad (1.45) y se obtiene la ecuación diferencial:

$$D \nabla^4 w - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_{(x,y,t)} \quad (1.56)$$

1.4 GENERALIDADES SOBRE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

En la literatura técnico-científica^{[7], [10], [13]} se encuentran soluciones analíticas para una gran variedad de problemas de la elasticidad gobernados por las ecuaciones diferenciales expuestas en el apartado anterior. La mayoría de estas soluciones corresponden a formas geométricas simples y distribuciones de cargas sin complejidad. Desafortunadamente, para geometrías cuya descripción matemática es compleja o distribuciones de cargas complicadas la solución analítica es de muy difícil obtención y en algunos casos imposible.

En las etapas de diseño de una estructura o mecanismo surge la necesidad de determinar deformaciones o tensiones en problemas complejos. Por ello, a través de los años se han ido desarrollando un conjunto de métodos que arrojan soluciones aproximadas numéricas o

analíticas. Uno de los primeros métodos numéricos es conocido como el método de los elementos finitos (MEF) el cual ha sido muy desarrollado en las últimas décadas gracias a los avances en el campo de la computación y a la permanente investigación sobre el método. Es por esto que el MEF es utilizado ampliamente en diversos campos de la ciencia. En particular, en la mecánica del sólido, se aplica a los casos estáticos, dinámicos, lineales y no lineales.

En una forma general el MEF posee las siguientes características:

- El continuo se divide en un número discreto de partes denominadas elementos, cuyo comportamiento se caracteriza mediante un número finitos de parámetros asociados a ciertos puntos que se denominan nodos.
- Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas continuas y pasan a ser el valor de estas funciones en los nodos del elemento.
- El comportamiento de las funciones desconocidas dentro del elemento es aproximado mediante el comportamiento de los nodos a través de funciones de forma o funciones bases.
- La solución del sistema completo se realiza por el ensamble del total de elementos en que se divide el dominio.

En la actualidad existen diversos códigos comerciales que implementan el MEF, sin embargo para su correcta utilización es necesario conocer la formulación del método para cada caso. A continuación se describe la formulación general de un elemento bidimensional para resolver problemas de la elasticidad plana.

1.4.1 Formulación de elementos bidimensionales para elasticidad plana.

Antes de continuar con la formulación del elemento finito es conveniente adoptar una notación matricial para los parámetros que intervienen en la elasticidad plana. Por ello se adoptará para el campo de desplazamientos sobre el dominio, es decir u y v , el siguiente vector columna \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Las componentes de tensión y deformación pueden ser resumidas en los siguientes vectores:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{pmatrix}^T \quad (1.58)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{pmatrix}^T \quad (1.59)$$

La relación constitutiva entre tensiones y deformaciones se puede escribir en la forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.60)$$

Si existieran tensiones o deformaciones iniciales la expresión a utilizar sería:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (1.61)$$

El vector $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ contiene términos de deformaciones iniciales y $\boldsymbol{\sigma}^0$ es un vector cuyas componentes son tensiones iniciales.

Además, \mathbf{D} es la matriz de las constantes elásticas o matriz constitutiva y tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Cuando el material es ortótropo y las direcciones principales de elasticidad coinciden con los ejes cartesianos, la matriz \mathbf{D} para el caso de tensión plana es:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1-\nu_1\nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_1 E_1 & 0 \\ \nu_2 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_1\nu_2)G \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

En el caso más general, en que los ejes principales de elasticidad no sean coincidentes con los ejes cartesianos, sino que se encuentren orientados según un ángulo θ como muestra la Figura 1.8:

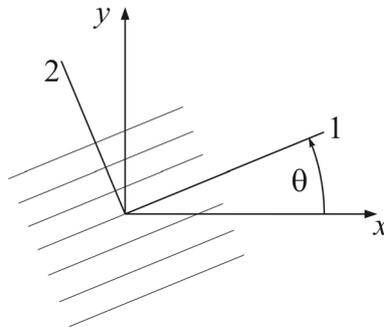


Figura 1.8. Orientación de los ejes principales de elasticidad con respecto a los ejes coordenados, ángulo θ .

la matriz constitutiva \mathbf{D} se puede expresar como:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}' \mathbf{T} \quad (1.64)$$

Donde \mathbf{D}' es la matriz constitutiva referida a los ejes 1 y 2 y \mathbf{T} es la matriz rotación que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Dentro de un elemento de n nodos las funciones incógnitas u y v se aproximan como se muestra en las siguiente expresiones:

$$\begin{aligned} u &= \sum_1^n N_i u_i \\ v &= \sum_1^n N_i v_i \end{aligned} \quad (1.65)$$

Esto se puede expresar mediante matrices como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad (1.66)$$

Con $\mathbf{a}^{(e)}$ se designa el vector de desplazamientos nodales del elemento (se indica con el supra índice e) y tiene la forma:

$$\mathbf{a}^{(e)} = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n)^T \quad (1.67)$$

Donde u_i y v_i son los valores de los corrimientos en el nodo i .

La matriz \mathbf{N} tiene la forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Las N_i son las llamadas funciones de forma o funciones bases referidas al i -ésimo nodo. Como funciones de formas es común tomar los polinomios de Lagrange. No obstante, la selección de las funciones de forma requiere de un análisis más minucioso del método ya que existen casos específicos que exigen un tratamiento particular. Para ello es necesario recurrir a textos más detallados sobre el método^[14] que presenten un análisis de las distintas técnicas que existen para el diseño de las funciones bases y números de nodos en el elemento.

El vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede expresar en función del vector desplazamiento \mathbf{u} de forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad (1.69)$$

Y \mathbf{B} es la matriz deformación del elemento cuya expresión es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Para la obtención de las ecuaciones de equilibrio de la discretización, partiremos de la expresión del Principio de Trabajos Virtuales aplicado al equilibrio de un elemento general y aislado de n nodos. Para ello supongamos que sobre el elemento actúan fuerzas repartidas por unidad de área \mathbf{b} (fuerzas máscas), y en sus lados fuerzas repartidas por unidad de longitud \mathbf{t} (fuerzas de superficie) de la forma:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

También se supone que el equilibrio del elemento se establece únicamente en los nodos. Para ello se definen fuerzas puntuales que actúen sobre los nodos \mathbf{q}_i , denominadas fuerzas nodales de equilibrio, que equilibran las fuerzas debidas a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas actuante sobre el mismo.

$$\text{Fuerzas nodales de equilibrio: } \mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de las fuerzas nodales de equilibrio se hace uso del Principio de los Trabajos Virtuales aplicado al elemento de espesor h de la siguiente manera:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} h dA - \iint_{A^{(e)}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} h dA - \oint_{l^{(e)}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} h ds = \left[\delta \mathbf{a}^{(e)} \right]^T \mathbf{q}^{(e)} \quad (1.71)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}^{(e)} &= (\delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \dots \quad \delta u_n \quad \delta v_n)^T \\ \mathbf{q}^{(e)} &= (U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n)^T \\ \delta \mathbf{u}^T &= \left[\delta \mathbf{a}^{(e)} \right]^T \mathbf{N}^T \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \left[\delta \mathbf{a}^{(e)} \right]^T \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (1.72)$$

Y δu_i , δv_i son los desplazamientos virtuales del nodo i del elemento.

Sustituyendo las expresiones (1.72) en la ecuación (1.71) y tras sacar factor común $[\mathbf{a}^{(e)}]^T$ en el primer miembro:

$$\left[\delta \mathbf{a}^{(e)} \right]^T \left[\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} h dA - \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} h dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} h ds \right] = \left[\delta \mathbf{a}^{(e)} \right]^T \mathbf{q}^{(e)} \quad (1.73)$$

Reemplazando la expresión general de tensiones dada en (1.61) y teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales son arbitrarios, se deduce la siguiente expresión:

$$\left[\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h dA \right] \mathbf{a}^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 h dA + \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 h dA - \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} h dA - \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} h ds = \mathbf{q}^{(e)} \quad (1.74)$$

La cual se puede expresar de forma más compacta como:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (1.75)$$

La $\mathbf{K}^{(e)}$ es la denomina matriz rigidez del elemento, siendo:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h dA \quad (1.76)$$

Y $\mathbf{f}^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento tal que:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{f}_{\sigma}^{(e)} + \mathbf{f}_{\mathbf{b}}^{(e)} + \mathbf{f}_{\mathbf{t}}^{(e)} \quad (1.77)$$

Donde $\mathbf{f}_{\varepsilon}^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes debidos a deformaciones iniciales; $\mathbf{f}_{\sigma}^{(e)}$, debido a tensiones iniciales; $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}^{(e)}$, a causa de fuerzas repartidas por unidad de área y $\mathbf{f}_{\mathbf{t}}^{(e)}$ por fuerzas repartidas en el contorno:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 h dA \\
\mathbf{f}_\sigma^{(e)} &= - \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^0 h dA \\
\mathbf{f}_b^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} h dA \\
\mathbf{f}_t^{(e)} &= \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} h ds
\end{aligned} \tag{1.78}$$

La ecuación de equilibrio global de la malla se obtiene estableciendo simplemente que la suma de las fuerzas nodales de equilibrio en cada nodo debe ser igual a la fuerza nodal exterior. Es decir:

$$\sum_e \mathbf{q}_i^{(e)} = \mathbf{p}_j \tag{1.79}$$

Donde la sumatoria representa la suma de las contribuciones de los vectores de fuerzas nodales de equilibrio de los distintos elementos que comparten el nodo de número global j , y \mathbf{p}_j representa el vector de fuerzas puntuales exteriores actuando en dicho nodo. Por consiguiente, las ecuaciones de equilibrio de la malla se pueden obtener a partir de las contribuciones de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes de los diferentes elementos. La ecuación matricial global se puede escribir como:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{1.80}$$

Donde \mathbf{K} , \mathbf{a} y \mathbf{f} son respectivamente, la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la malla. Es claro que las incógnitas del problema se encuentran en el vector \mathbf{a} y el sistema definido en (1.80) es un sistema de ecuaciones lineales cuya solución se puede encontrar por los métodos numéricos usuales.

El método de elementos finitos es también sumamente útil para el análisis del comportamiento dinámico de placas delgadas planas. La implementación y desarrollo del método de elementos finitos para situaciones dinámicas se encuentra ampliamente tratado en la bibliografía^[15]. Es utilizado tanto para el cálculos de frecuencias resonantes en dominios complejos, como por ejemplo una placa de geometría hexagonal^[16], o como método alternativo para comparar resultados con los arrojados por otros procedimientos^[17]. No obstante es permanente la investigación sobre esta clase de elementos. Durante el desarrollo de la tesis presente se trabajó en el desarrollo de un elemento finito con dieciséis grados de libertad para el análisis transversal de placas^[18]. El objetivo del mismo, ha sido desarrollar un algoritmo de relativa facilidad en su implementación computacional, y que al mismo tiempo produzca buenos resultados numéricos desde el punto de vista ingenieril, con mallas de escasa densidad de elementos finitos.

1.5 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] A. W. Leissa, “*Vibration of plates*”, NASA SP-160 (1969).
- [2] Karnovsky, O. I. Lebed, “*Formulas for structural dynamics*”, Mc Graw Hill Book Company (2001).
- [3] N. I. Muskhelishvili, “*Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*”, Groningen, P. Noordhoff (1953).
- [4] E. J. Barbero, “*Introduction to composite materials design*”, Taylos & Francis, Inc. (1998).
- [5] R. M. Jones, “*Mechanics of composite materials*”, Taylos & Francis, Inc. (1999).
- [6] V. G. Ukadgaonker, “Stress analysis of door and windows of Boeing-777 aircraft with FEM”, 2nd International Congress on Computational Mechanics and Simulation, proceedings en CD (2006).
- [7] S. Timoshenko, J. N. Goodier, “*Theory of elasticity*”, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. (1951).
- [8] A. N. Guz’, G. N. Savin, I. A. Tsurpal, “Stress concentration about curvilinear holes in physically nonlinear elastic plates”, NASA TT F-408, 1009-1021 (1966).
- [9] V. Kubair, B. Bhanu-Chandar, “Strees concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, 732-742 (2008).
- [10] P. A. A. Laura, M. J. Maurizi, “*Introducción a la mecánica del sólido*”, Editorial Universitaria de Buenos Aires (1979).
- [11] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, “*Theory of plates and shells*”, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. (1959).
- [12] S.G. Lekhnitskii, “*Anisotropic Plates*”, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1968).
- [13] M. H. Sadd, “*Elasticity: Theory, Applications and Numerics*”, Elsevier Inc. (2005).
- [14] E. Oñate Ibáñez de Navarra, “*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*”, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España (1992).
- [15] R. E. Rossi, “*Introducción al análisis de vibraciones con elementos finitos*”, Editorial de la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Buenos Aires (2007).

- [16] P. A. A. Laura, R. E. Rossi. “Transverse vibrations of a thin, elastic plate of regular hexagonal shape”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256(2), 367-372 (2002).
- [17] C. A. Rossit, D. V. Bambill, S. La Malfa, S. Maiz y P. A. A. Laura, “Estudios analíticos y experimentales sobre vibraciones de placas circulares delgadas con una masa adosada”, MECOM 2005, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV, 3255-3265. (2005).
- [18] R. E. Rossi, S. Maiz, A. Susca, D. H. Felix, “Elemento finito cuadrangular de dieciséis GDL para análisis de comportamiento transversal de placas”, *Mecánica Computacional*, ENIEF 2006, Vol. XXV, 1087-1099 (2006).

