Milanesi, Gastón S.

UN MODELO DE OPCIONES REALES FUZZY Y FUNCIONES DE UTILIDAD ISOELÁSTICAS PARA VALORAR I&D EN MERCADOS INCOMPLETOS

Estocástica: Finanzas y Riesgo

Año 2018, vol. 8, no. 2, pp. 205-232

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

URL: estocastica.azc.uam.mx
Volumen 8, número 2, julio-diciembre 2018, pp. 205-232

Estocástica:
FINANZAS Y RIESGO

Un modelo de opciones reales fuzzy y funciones de utilidad isoelásticas para valorar I&D en mercados incompletos

A fuzzy real options and isoelastic utility functions model for valuation R&D in incomplete markets

Gastón S. Milanesi*

(Fecha de recepción: 8 de abril de 2018. Fecha de aceptación: 12 de julio de 2018)

Resumen

Los modelos de valoración a través de opciones reales son apropiados para cuantificar la flexibilidad estratégica contenida en proyectos, como empresas de base tecnológica, activos intangibles y estrategias innovadoras. Su debilidad reside en el supuesto de mercados completos, condición difícil de cumplir en mercados emergentes. Por tal motivo, se desarrolla un modelo que combina el binomial borroso y funciones isoelásticas de utilidad (CRRA), incorporando grados de aversión al riesgo del agente. La metodología anterior se aplica a un proyecto biofarmaceútico con opciones secuenciales, utilizando análisis de sensibilidad sobre el coeficiente de aversión y el valor de la opción. Se concluye sobre las ventajas del modelo, en particular modelando ambigüedad con lógica borrosa e incorporando actitudes frente al riesgo.

Clasificación JEL: G30 G32

Palabras clave: opciones reales, binomial fuzzy, función isoelástica de utilidad, empresas de base tecnológica

Abstract

The real options model are appropiate to quantify strategic flexibility in projects, such as technological basis firms (TBF), intangibles assets and innovatives strategies. Its weakness resides in the complete markets assumption, which is rarely found in

* Departamento de Ciencias, Administración-Universidad Nacional del Sur
CEPAF Centro de Estudios para Análisis Financiero-Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires

emerging markets. Therefore a model that combines the binomial fuzzy and the isoelastic utility funtion (CRRA) was developed, which incorporates the agent´s degree risk aversion. Such model is applied to a biofarmaceutical project with secuencial options, using a sensibility analysis over the risk aversion coefficients and the option value. The conclusions deals with the advantages of the model, specifically with modeling ambiguity with fuzzy logic and incorporating risk attitudes.

JEL Classification: G30, G32

***Keywords:** real options, binomial Fuzzy, isoelastic utility uunction, technological basis firms*

Introducción

Una de las principales herramientas de valuación de activos intangibles, empresas de base tecnológicas, desarrollos en I&D o estrategias lo constituye el enfoque de opciones reales (Perlitz, Peske y Schrank, 1999; Copeland y Antikarov, 2001; Schwartz, 2002 Grasselli, 2011; Schwartz, 2013; Fernández, Perobelli Cordero y Brandao, 2014; Mun, 2015), entre otros. Los trabajos seminales sobre opciones financieras son las bases de estos modelos (Black y Scholes, 1972, 1973; Merton, 1973). El primer trabajo sobre opciones reales fue desarrollado por Myers (1977) para valorar la estrategia (opción) de crecimiento. Posteriormente se plantearon diferentes modelos aplicables a situaciones contingentes: (*a*) Opción de diferimiento (Mc Donal y Siegel, 1986); (Paddock, Siegel y Smith, 1988); (Ingersoll y Ross, 1992); (*b*) Opción de crecimiento (Myers, 1977); (Trigeorgis, 1988); (Smit, 1996); (*c*) Opción de abandono (Myers y Majd, 1990); (*d*) Opciones de expandir-contraer o extensión de la vida útil (Trigeorgis y Mason, 1987); (Keema, 1988); (*e*) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennam y Schwartz, 1985); (*f*) Opción de intercambio (Margrabe, 1978); (Kulatilaka, 1988); (Kulatilaka y Trigeorgis, 1994); Opciones financieras de insolvencia (Mason y Merton, 1985); (Trigeorgis, 1993). La teoría de opciones se complementa con el Análisis de decisiones y riesgos (Smith y Nau, 1995); empleo de simulación aplicando el enfoque MAD *Marketed Asset Disclaimer*; (Copeland y Antikarov, 2001); (Copeland y Tuffano, 2004) y el análisis de Opciones Reales y Teoría de Juegos OR y *Games Theory;* (Smit y Trigeorgis, 2004).

Para su implementación es necesario que el mercado sea completo, es decir, la existencia de carteras que repliquen los flujos de fondos del activo real objeto de valuación (Dixit y Pindyck, 1994; Trigeorgis, 1997; Amram y Kulatilaka, 1998; Boer, 2002; Borison, 2003; Smit y Trigeorgis, 2004; Mun, 2004; Shockley, 2006; Kodukula y Chandra, 2006; Graeme, 2009; Wang y Halal, 2010; Mun, 2015 y Salahaldin, 2016. Si el mercado financiero es incompleto, entonces el valor de la opción no puede valuarse indirectamente con carteras de activos financieros gemelos[1] (Wilmott, 2009).

Es común resolver problemas de valuación en mercados incompletos, en especial si el objeto de valoración son empresas de base tecnológica, *starts ups*, intangibles o simplemente empresas cerradas, situación que se acentúa en el caso de mercados emergentes. Para sortear tal inconveniente han sido desarrollados diversos modelos, entre otros la propuestas de Smith y Nau, (1995) clasificando los riesgos en "*mercado*" y "*privados*", donde los primeros tiene activo financiero réplica para su valuación y los segundos se sugiere el uso de funciones de utilidad y equivalentes ciertos a partir de los desarrollos de Keeney y Raiffa, (1976, 1993). El enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) constituye otra herramienta, suponiendo que el valor obtenido mediante el descuento de flujos de fondos refleja el precio de mercado al que se negociaría el proyecto y la volatilidad, como insumo del modelo de valuación es obtenida a partir de la tasa rendimiento generada por el proyecto, (Copeland y Antikarov, 2001).[2] Alternativamente se puede emplear la teoría de conjuntos borrosos (Dubois y Prade, 1980), y con pertinencia en finanzas (Buckley, 1987), para estimar la volatilidad aplicando el concepto de ambigüedad o falta total de información.

El trabajo tomó como punto de partida la noción de riesgos de mercado y privados propuesta por Smit y Nau (1995). En lo que respecta a la incertidumbre, esta es tratada incorporando la lógica fuzzy en el enfoque de

[1] El mundo ideal de los modelos seminales (Black y Scholes, 1972), el riesgo se anula mediante carteras de cobertura. La posibilidad de cobertura es una interesante propiedad matemática en el modelo binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979), los agentes pueden estar en desacuerdo con la probabilidades, pero una vez estimados el movimiento de ascenso y descenso, construyendo carteras de cobertura se arriva al valor del derivado, sólo se necesita tener la misma percepción de la volatilidad del derivado.

[2] Desarrollado inicialmente por Copeland y Antikarov (2001), Copeland y Tufano, (2004), Brandao y Dyer, (2005); Brandao, Dyer y Hahn, (2005); Smith, (2005), Brandao, Dyer y Hahn, (2008) siendo la variable a simular $z = \log(VP_1/VP_0) - 1$, el rendimiento producto del cociente entre los valores actuales.

opciones reales (Muzzioli y Torricelli, 2004; Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006; Garcia Sastre y Roselló Miralles, 2007; Liao y Ho, 2010; Zdnek, 2010. En Shine Yu, Ming, H, Li, y Chen, 2011; Milanesi, 2013, 2014 y 2015. Paralelamente los nodos de la rejilla binomial borrosa son valorados mediante funciones isoelásticas de utilidad y equivalentes ciertos (Ochoa y Vasseur, 2014; Ochoa y Cadavid, 2016). Las funciones isoelásticas empleadas son del tipo *CARA* y *CRRA* para emplear coeficientes de aversión al riesgo, ya que cumplen con las condiciones de incrementos y decrementos de utilidad, y utilidad marginal respectivamente, frente a aumentos en la riqueza. Combinando el modelo borroso de valuación de opciones, funciones isoelásticas de utilidad y equivalentes ciertos, se pretende propone un modelo que genere valuaciones ajustadas, según el coeficiente de aversión al riesgo del agente. Además, se evita utilizar activos financieros, réplica de los flujos de fondos correspondientes a la opción. De especial interés en los casos donde la valuación deba practicarse en mercados incompletos y emergentes, en particular para activos intangibles, empresas de base tecnológicas, *start-up*, en su mayoría son dominadas por riesgos *privados* en un contexto de ambigüedad de datos.

La estructura del trabajo es la siguiente: las dos primeras secciones desarrollan los fundamentos teóricos del modelo. La aplicación del modelo se concreta a la valuación de un proyecto tecnológico con opciones secuenciales, desde la etapa de diseño experimental hasta su lanzamiento. Los coeficientes de aversión al riesgo contenidos en las funciones isoelásticas son sensibilizados, suponiendo tres conductas: valores de $\gamma > 0$ adversos; $\gamma = 0$ neutral e $\gamma < 0$ afecto al riesgo. Son obtenidos los valores acordes a la conducta del agente frente al riesgo, asimismo las magnitudes monetarias son derivadas de una proyección de datos en condiciones de ambiguedad. Finalmente se arriba a las principales conclusiones.

1. El coeficiente de aversión al riesgo y la función de utilidad isoléstica

A partir de las nociones seminales de Bernoulli en el siglo XVIII, (1954) y von Neumann y Morgenstern, (1944), desarrollan la Teoría de la Utilidad Esperada. Los primeros conceptos se remontan a los estudios de Huygens; introduciendo el concepto de valor esperado de la decisión. Bernoulli fue quien presentó las primeras críticas a la teoría del valor esperado como medida en el proceso decisorio (Dehling; 1997). Introduce la noción de utilidad para medir valor esperado por considerar incorrecta la medida valor esperado en términos de precios. Esto es producto de que el precio es un fenómeno observable, similar para todos los agentes. La utilidad es un concepto subjetivo e individual condicionado al estado de riqueza en que se encuentra el individuo.

El cuerpo teórico propuesto por von Neumann y Morgenstern, evolucionó a partir de los trabajos desarrollados por Friedman y Savage, (1948); Markowitz, (1952); Allais, (1953, 1988); Savage, (1954); Simon, (1955 y 1979). Como consecuencia de incorporar sesgos y heurísticas en la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, nace una rama de estudio conocida como finanzas conductuales (*Behavioural Finance*), Tversky y Kahneman, (1974 y 1981); Kahneman y Tversky, (1979); Thaler (1985); Shefrin y Statman, (1985), (2000); Thaler y Johnson, (1990); Shiller, (2005); Shefrin, (2010) entre otros, donde un desarrollo de la evolución de la Teoría de la Utilidad Esperada se puede encontrar en (Milanesi, y El Alabi, 2016). Según la clásica teoría de la elección en condiciones de incertidumbre, existen dos axiomas que definen la conducta de los agentes frente al riesgo (Elton y Gruber, 1995; Copeland, Weston y Shastri, 2004; Pareja Vassesur y Cadavid Pérez, 2016):

a) Las personas prefieren más riquezas a menos. Si la función de utilidad se define como $U(.)$ y la riqueza como W, frente a dos alternativas, $A = W + x$ y $B = W + x$, donde x representa una suma adicional de riqueza; si la riqueza de A es mayor a la de B, entonces la $U(A) > U(B)$. Matemáticamente implica que la curva de la función es creciente y por lo tanto su derivada primera positiva $U'(.) >0$.

b) Las personas pueden ser adversas, neutrales o afectas frente a inversiones riesgosas. De esto dependerá la forma de la curva de utilidad; (cóncava, lineal o convexa). La función nace, producto de las preferencias (utilidades) intercambiables entre riqueza cierta $U(E(W))$ y riqueza esperada (probable $E[U(W)]$). En el caso de que la utilidad de la magnitud cierta sea mayor a la probable $U(E(W)) > E[U(W)]$ se es adverso al riesgo, siendo la derivada segunda negativa $U''(.) >0$ (utilidad marginal decreciente, concavidad). Si las utilidades de las magnitudes intercambiables son iguales, $U(E(W)) = E[U(W)]$ se es neutral, donde la segunda derivada es cero$U''(.) =0$. Finalmente si la utilidad de la magnitud cierta es menor a la esperada $U(E(W)) < E[U(W)]$, se tiene una conducta afecta al riesgo, con derivada segunda positiva $U''(.) <0$ (utilidad marginal creciente, convexidad). Por tanto, la compensación por asumir riesgo surge como diferencia entre la utilidad de la riqueza esperada menos el equivalente cierto $E[U(W)] - U(E(W))$. Para una persona adversa al riesgo, una magnitud monetaria esperada es equivalente a una cifra cierta cuando las utilidades son iguales, $U(W_c) = E[U(W)]$. La magnitud cierta (incógnita en la igualdad) se denota como W_c, y se conoce como *equivalente cierto* de la riqueza, y su valor es función inversa del coeficiente de aversión al riesgo. Por ejemplo, dada una función $U(W_c) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma W}$; siendo $U(W) == -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma W}$ e γ el coeficiente de aversión al riesgo, se tiene que a mayor gamma menor equivalente cierto (Wilmott, 2009). La aversión al riesgo hace que la figura sea cóncava, derivada segunda negativa $U''(W) < 0$.

Con el objeto de trabajar aplicando equivalentes ciertos sobre magnitudes esperadas, es menester brindar una definición de que se entiende por aversión al riesgo, Milanesi (2017). Desarrollado por Pratt (1964) y Arrow (1971), estos proponen los coeficiente de aversión al riesgo absoluta (*CARA*) y relativa (*CRRA*). La *CARA* es igual a la siguiente expresión;

$$CARA = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{1}$$

Es absoluta debido a que mide aversión para un nivel dado de riqueza y explica el comportamiento de esta medida ante cambios en la riqueza. El producto entre la ecuación 1 *y* el nivel de riqueza arroja la *CRRA*

$$CRRA = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{2}$$

Uno de los fuertes supuestos de la *CRRA,* es que esta adopta un comportamiento constante para personas adversas al riesgo, en terminos de pérdidas (ganancias) absolutas. Asumiendo *CARA* decreciente frente a incrementos de W y *CRRA* constantes, se pueden examinar diferentes funciones de utilidad empleadas en la literatura. Por ejemplo, a favor de las funciones exponenciales y logarítmicas del tipo $U(W) = -w^x$, o $U(W) = \log(w)$, se presentan las evidencias contenidas en los trabajos de Friend y Blume, (1975); Rabin, (2000); Vendrik y Woltjes, (2007); Wakker, (2008); Suen, (2009); Boyce, Wood, Bank, Clark y Brown, (2014). Cumplen con las propiedades indicadas: la utilidad marginal de la riqueza es positiva, $U'(W) > 0$; decrece a medida que aumenta la riqueza $U''(W) < 0$; la medida $CARA$ decrece ante aumentos de riqueza $\frac{d(CARA)}{dW} < 0$ y la $CRRA$ se mantiene constante $\frac{d(CRRA)}{dW} = 0$. Dentro de la familia de funciones exponenciales que cumplen con las condiciones indicadas se tiene a las isoelásticas. Son un caso especial de forma hiperbólica de aversión absoluta al riesgo ($HARA$) (Merton, 1992); conocida con las siglas de función isoelástica $CRRA$, siendo:

$$U(W) = \begin{cases} \frac{W^{\gamma}-1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ log(W) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \tag{3}$$

En la ecuación 3, γ representa el nivel de aversión al riesgo, donde la función cumple con la condiciones de Inada.[3] La utilidad marginal del consumo se apróxima a infinito para valores de consumo cercanos a cero, asegurando la condición de no optimalidad relativa a consumos cero en ningún momento del tiempo (Suen, 2009). Permite la elasticidad de sustitución intertemporal constante, como condición para asegurar la existencia de equilibrios balanceados (Ljungqvist y Sargent, 2000). La medida de aversión al riesgo (γ) es crucial en la ecuación 3 y es objeto de inumerables calibraciones producto de investigaciones empíricas. En teoría γ debe fluctuar entre -1 y 1 (Pratt, 1964). El valor que arroja el coeficiente, depende de las características del individuo, los valores negativos representan a personas afectas al riesgo, los positivos adversos y cero corresponde a personas neutrales al riesgo. Dentro de las pruebas empíricas respecto del valor del coeficiente se cita a los estudios de Harrison, Johnson McInnes y Rustrom, (2005), quienes obtuvieron valo-

[3] En honor al economista japonés Ken-Ichi Inada. Dispone condiciones sobre la función de producción, que garantiza crecimiento económico en los modelos neoclásicos de crecimiento. El valor de la función es cero, en cero; es diferenciable en todos sus puntos, creciente en x, con derivada decreciente (cóncava), el límite de la derivada cercana al origen es infinito y el límite de la derivada hacia el infinito positivo es cero. Siguiendo a Ochoa y Vasseur (2014), la función de utilidad converge a la logarítmica con gamma, tendiendo a 1. Para ello se emplea la regla de L'Hopital, donde con $\gamma \rightarrow 1$ el numerador y el denominador de la función tienden a cero. Al ser diferenciados numerador y denominador con respecto a γ, para tomar el límite de la relación de las derivadas cuando $\gamma \rightarrow 1$, se encuentra que la función de utilidad converge a logarítimica.

res de γ=0.45 y Harrison, Lau y Rutstrom, (2007) valores de γ=0.67 para la población dinamarquesa; Harrison, Humphrey y Verschoor, (2009) para países subdesarrollados obtuvieron un γ=0.536; Andersen, Harrison, Lau y Rutstrom, (2010) para pruebas de laboratorio obtienen valores de γ=0.79 y como valor medio en la muestra de la población γ=0.63; Harrison, Lau, Rutstrom y Tarazona Gómez, (2013) encuentran en un experimento en la universidad de Oxford valores en promedio positivos para el índice. (Pareja Vasseur y Baena 2018) encuentran para dos grupos de estudiantes universitarios de EAFIT, Colombia un γ=0.56 y γ=0.68 para los dos grupo. Estos experimentos nos indican que, en términos generales, que las personas son adversas al riesgo.

2. El modelo binomial tradicional y fuzzy

2.1. El modelo binomial tradicional

El modelo binomial reconoce diversas formulaciones, dependiendo de la manera en la cual son definidos parámetros como coeficientes neutrales al riesgo p y el crecimiento del desvío en relación a los intervalos de tiempo $\sigma\sqrt{\Delta t}$ (Cox, Ross y Rubinstein, 1979; Rendleman y Bartter, 1979; Jarrow, y Rudd, 1982; Jabbour, Kramin, y Young, 2001; Boyle, 1988; Kamrad y Ritchken, 1991; Wilmott, Howison y Dewynne, 1995; Derman, Kani y Chriss, 1996; Hull, 2005), entre otros. Una reseña de estos modelos se puede encontrar en Whaley, 2006; Van der Hoek y Elliot, 2006; y Chance, 2007. En el presente trabajo se utiliza el modelo de Cox, Ross y Rubinstein, 1979 (CRR). Se supone que el activo subyacente (V) sigue un proceso geométrico browniano, en tiempo discreto explicado por una distribución de probabilidad binomial. Los movimientos del activo, se representan por coeficientes de ascenso u y descenso d;

$$u = e^{r\sqrt{\Delta t}} \tag{4}$$

$$d = e^{-r\sqrt{\Delta t}} \tag{5}$$

Siendo r la tasa libre de riesgo y $\Delta t = m/n$, la frecuencia o pasos en los cuales se divide el intervalo de tiempo n. Los coeficientes equivalentes ciertos son calculados a partir de la siguiente expresión,

$$p = \frac{e^r - d}{u - d} \tag{6}$$

Con su respectivo complemento $(1 - p)$. El proceso recursivo para la valoración tiene como punto de partida el valor al vencimiento (ejercicio) $ro_T = \max(V_T - X, 0)$ o $ro_T = \max(X - V_T, 0)$; para flujos de pagos asimilables a opciones de compra y venta. La ecuación recursiva para la valuación es,

$$ro_0 = \left[\sum_{j(T)=0}^{J(T)=n} ro_T \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}\right] e^{-rT} \tag{7}$$

Donde T es el horizonte final y $j = (0, , t, t+1, T-1)$, los j-ésimos nodos de la rejilla binomial.[4] Si el proceso recursivo es por paso, la ecuación precedente es;

$$ro_t = \left[(ro_{i,t+1} \times p) + (ro_{j,t+1} \times 1 - p)\right] \times e^{-rt} \tag{8}$$

2.2. El modelo binomial borroso (fuzzy)

Se incorpora el concepto de ambigüedad o vaguedad en los datos (Dubois y Prade, 1980); (Buckley, 1987), reflejándose en la medida de volatilidad siendo representada por un número triangular borroso (NTB); (Muzzioli, y Torricelli, 2004); (Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006); (Garcia Sastre y Roselló Miralles, 2007); (Liao y Ho, 2010); (Zdnek, 2010); (En Shine Yu, Ming, H, Li, y Chen, 2011); (Milanesi, 2013; 2014 y 2015).[5] Como su par tradicional, requiere estimar los coeficientes de ascenso y descenso, en este caso borrosos dando un área de posibles valores,

$$u' = \left[u_{1\,,} u_{2\,,} u_3\right] = \left[e^{\left(\left((1-CV)\times\sigma\right)\times\sqrt{t}\right)}, e^{(\sigma\times\sqrt{t})}, e^{\left(\left((1+CV)\times\sigma\right)\times\sqrt{t}\right)}\right] \tag{9}$$

4 En rigor, el valor de la opción es la sumatoria de los valores terminales ponderados por su probabilidad de ocurrencia y actualizados al tipo sin riesgo.

5 Existen las versiones de modelos de valoración de opciones reales en tiempo continuo se encuentran los trabajos de (Carlsson y Fuller, 2003); (Carlsson, Fuller, Heikkila y Majlender, 2007); (Collan, Fullér y Mezei, 2009) entre otros.

$$d' = \left[d_{1}, d_{2}, d_{3}\right] = \left[\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}\right] \tag{10}$$

Los valores extremos son $u'=[u_1, u_2, u_3]$ (ascenso) y $d'=[d_1, d_2, d_3]$ (descenso). Los escenarios son: $u_1;d_1$ menor amplitud de movimiento, $u_3;d_3$ mayor amplitud de movimiento y $u_2;d_2$ caso base (Milanesi, 2014). Estos son calculados utilizando el coeficiente de variación (CV), como medida del posible intervalo de máximo a mínimo valor que se proyecta tomará la volatilidad (σ), a menudo en base a la opinión y juicio de expertos (Liao y Ho, 2010). Los tres resultados dan origen a la distribución de posibilidad, arrojando un número borroso triangular, para cada uno de los nodos de la rejilla binomial,

$$ro'_t = [ro'_{t-1} \times u'; ro'_{t-1} \times d'] \tag{11}$$

El valor de la opción real al vencimiento es el máximo valor entre el activo subyacente borroso menos el precio de ejercicio (X), $ro'_T = \max(V'_T - X; 0)$ para opciones reales asimilables a *call*. Para opciones asimilables a *put* $ro'_T = \max(X - V'_T; 0)$. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos borrosos $(p'_u; p'_d)$;

$$p'_u = \frac{(1+r)-d'}{u'-d'} \tag{12}$$

$$p'_d = 1 - p'_u \tag{13}$$

El modelo binomial borroso crea una distribución de posibilidad en cada nodo que maximiza y minimiza el área de posibles valores correspondiente al activo real subyacente. Los pares de coeficientes equivalentes ciertos son combinados de la siguiente manera, (Liao y Ho, 2010): (a) para el escenario de menor amplitud combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de mínimo valor; (b) para el escenario de mayor amplitud de movimiento, combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de máximo.[6] El caso base se resuelve

[6] El valor de las opciones reales, es función directa de la volatilidad y los movimientos de ascenso y descenso que están en función directa con esta. Por tanto a mayor amplitud de movimientos, mayor valor de la opción y viceversa. Esto conduce a su-

de similar manera al tradicional modelo binomial. Así se logra la asimetría en la estimación de los posibles valores. Para un NBT con coeficientes de ascenso u'=(1 menor, 2 base, 3 mayor); las parejas de coeficientes equivalentes ciertos borrosos a utilizar en el proceso recursivo quedan planteadas de la siguiente manera;

$$p'_u, p'_d = [(p'_{u3}, p'_{d1}); (p'_{u2}, p'_{d2}); (p'_{u1}, p'_{d3})] \qquad (14)$$

El sesgo positivo (valor de la opción) es capturado, reordenando los pares de coeficientes equivalentes ciertos (ecuación 14). La menor (mayor) ponderación es asignada a los valores del escenario de menor (mayor) amplitud. Finalmente, el coeficiente equivalente cierto surge del cociente entre la diferencia del factor de crecimiento al tipo sin riesgo menos el movimiento de descenso (numerador) y la diferencia entre el factor de ascenso y descenso (denominador). El coeficiente equivalente cierto obtenido del movimiento de mayor (menor) amplitud, presenta menor (mayor) numerador y mayor (menor) denominador. Este es utilizado en la ponderación del ascenso en el valor de menor (mayor) amplitud y su complemento en el descenso de menor (mayor) amplitud. Por lo tanto; $u'_3 > u'_2 > u'_1 \rightarrow d'_3 < d'_2 < d'_1 \rightarrow p'_3 < p'_2 < p'_1 \rightarrow (1 - p'_3) > (1 - p'_2) > (1 - p'_1)$

El procedimiento recursivo para calcular el valor de la opción real surge de la siguiente expresión,

$$ro'_t = \left[ro'_{i(t+1)} \times p'_u + ro'_{j(t+1)} \times p'_d\right] \times \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}} \qquad (15)$$

La siguiente expresión permite estimar el valor central del NBT. Este presenta un sesgo hacia la derecha, propio de la distribución de posibles valores del proyecto. Suponiendo que $ro' = [ro_1(\alpha); ro_3(\alpha)]$ número borroso y $\lambda \in [0,1]$ valor puntual medio (*crisp mean value*) de ro', se tiene

$$E(ro') = \int_0^1 [(1-\lambda) ro_1(\alpha) + \lambda ro_3(\alpha)] d\alpha \qquad (16)$$

poner, que escenarios optimistas (pesimistas) vinculados al proyecto se relacionan con volatilidad respecto del caso base mayor (menor) y con movimientos respecto del caso base de mayor (menor) amplitud.

En este caso λ se conoce como índice ponderado de "pesimismo-optimismo"; (Yoshida, Yasuda, Nakami y Kurano; 2006); (Liao y Ho, 2010). El índice se obtiene de:

$$\lambda = \frac{AD}{AI+AD} \tag{17}$$

Reemplazando 17 en la ecuación 16 se tiene el valor borroso esperado de la opción;

$$E(ro') = \frac{[(1-\lambda)ro_1 + ro_2 + \lambda ro_3]}{2} \tag{18}$$

3 Funciones isoelásticas de utilidad y el modelo binomial borroso para valorar opciones reales

La presente sección desarrolla el modelo, donde el modelo binomial borroso para valorar opciones se combina con la función isoelásticas de utilidad y sus respectivos equivalentes ciertos. Permite valuar incorporando el coeficiente de aversión al riesgo del agente. Las ecuaciones 9 a 18 constituyen los insumos del modelo binomial borroso. Estas sirven para estimar el NTB correspondiente al valor la opción, bajo el supuesto de neutralidad frente al riesgo. Incorporar las preferencias del individuo requiere definir la función de utilidad. Para esto la función a ser utilizada en este trabajo es la isoelástica *CRRA*, cuya formulación surge a partir de la ecuación 3, pero adaptada a cantidades borrosas obtenidas del modelo binomial,

$$U\left(ro'_{i,j(t)}\right) = \begin{cases} \frac{{ro'_{i,j(t)}}^{\gamma}-1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ log\left(ro'_{i,j(t)}\right) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \tag{19}$$

Sobre los resultados de la ecuación 15 se aplica la función de utilidad, de acuerdo a la ecuación 19, a partir de la siguiente expresión,

$$E\left[U\left(ro'_{i,j(t)}\right)\right] = \left\{\left[p' \times U\left(ro'_{i(t)}\right)\right] + \left[1 - p' \times U\left(ro'_{j(t)}\right)\right]\right\} \tag{20}$$

A continuación se calcula el equivalente cierto a la utilidad esperada de cada extremo del NBT,

$$CE(ro'_{i,j(t)}) = \left\{E\left[U\left(ro'_{i,j(t)}\right)\right] \times (1-\gamma)\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad (21)$$

El valor actual del equivalente cierto correspondiente al NBT se obtiene actualizando los resultados de la ecuación 20 al tipo sin riesgo;

$$CE(ro'_{i,j(t-1)}) = CE(ro'_{i,j(t)}) \times e^{-r} \qquad (22)$$

Finalmente, la medida de utilidad vinculada a la magnitud monetaria de la ecuación 22, adaptada al coeficiente de aversión al riesgo del agente surge de la siguiente ecuación,

$$U\left(ro'_{i,j(t-1)}\right) = \begin{cases} \frac{CE(ro'_{i,j(t-1)})^{\gamma}-1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ log\left(CE(ro'_{i,j(t-1)})\right) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \qquad (23)$$

4 Aplicación del modelo a un desarrollo en I&D con opciones secuenciales

Se utiliza la metodología del estudio de casos[7] ya que no se persigue buscar soluciones generalizables estadísticamente. En tal sentido, expuesto el modelo se pretende describir e indagar sobre la interacción del conjunto de variables que hacen al valor aplicándolo sobre un proyecto farmacológico producto de una asociación entre un centro de investigación público y una empresa privada, como unidad de análisis. A tales efectos se plantean dos etapas: I) fase experimental de diseño, elaboración del prototipo y pruebas preclínicas (primer periodo); II) fase de aprobación y lanzamiento (segundo periodo). El valor actual de los flujos de fondos operativos proyectados en la fase de lanzamiento (V_0) es de $1,023.5. El valor esperado correspondiente

[7] El estudio de casos como metodología de investigación no debe confundirse con el análisis o estudio de casos como herramienta pedagógica, la cual busca analizar un aspecto concreto relacionado con las organizaciones para fomentar el debate o discusión (Castro Monge, 2010). En este caso se busca analizar el funcionamiento de proposiciones teóricas, con el fin de ampliar o generalizar una teoría (Yin, 1994).

a los ingresos operativos en *t = 3* es de \$2,738. La tasa de actualización para proyectos de riesgos equivalentes es de 38.82%; considerando los niveles de inflación esperada de dos dígitos en Argentina a fecha del presente trabajo. Las inversiones proyectadas (I_t) para cada una de las fases son: (*t = 1* ; *t = 3*) \$400 y \$800. La tasa libre de riesgo es del 5% anual (*r*) y el desvío de los flujos de fondos operativos asciende a 35% (σ).

Con el criterio tradicional del *VAN* el resultado es de —\$45.56 = 1023.5 $-\ 400e^{-0.05\times 1} - 800e^{-0.05\times 3}$. Este conduce al rechazo del proyecto, y tal decisión es acertada en tanto no existan opciones estratégica contenida en la inversión. En este caso existen opciones reales secuenciales de continuidad en el primer y tercer periodo, si el valor actual del subyacente supera a la inversión. Caso contrario se ejerce la opción de abandono; con costos *(CA)* de *t=1* \$75; *t=3* \$125 e ingresos por liquidación *(IL)* *t = 1* \$100; *t = 3* \$200 respectivamente.[8]

En el modelo binomial borroso el punto de partida para estimar los coeficientes de ascenso y descenso, es a partir del coeficiente de variación (CV) de flujos de fondos, con el fin de establecer el intervalo de máximo a mínimo valor correspondiente a la volatilidad (σ).[9] Se supone un CV del 15%, para el NBT,

Tabla 1. Volatilidad borrosa

Extremos	Volatilidad borrosa
a, ε(1)	45.00%
a-α, ε(0)	38.25%
a+β, ε(0)	51.75%

Fuente: elaboración propia.

8 Las opciones reales de continuidad-abandono del ejemplo, se asimila a una combinación de opciones de compra y venta financiera con diferentes precios de ejercicio. Esta estrategia se conoce como straddle, la opción de compra se activa cuando el valor del subyacente supera el precio de ejercicio y la venta en el caso que el subyacente se encuentre por debajo del precio de ejercicio. El perfil de este tipo de estrategia tiene por objeto cubrir subyacentes con alta volatilidad (dispersión respecto del precio de ejercicio), en términos de proyectos de inversión sería el caso de innovaciones o emprendimientos tecnológicos.

9 Esta es la base del esquema borroso triangular del modelo, diferenciándose del modelo binomial, que trabaja con una estimación puntual del parámetro. El mismo puede estimarse mediante escenarios, o simulando los flujos de caja, suponiendo una distribución triangular.

el valor del desvío (a) con escala de posibilidad 1 es de σ = 45%, los extremos son: $a - \alpha = \sigma \times (1 - CV) = 38.25\%$ y $a + \beta = \sigma \times (1 + CV) = 51.75\%$

Obtenido el NBT correspondiente a la volatilidad, se estima el NBT de movimientos ascendentes y descendentes borrosos (ecuaciones 9 y 10).

Tabla 2. Parámetros ascenso – descenso

NBT	u		d'	
a-α	u'1	1.4659	d'1	0.6821
a	u'2	1.5683	d'2	0.6376
a+β	u'3	1.6778	d'3	0.5960

Fuente: elaboración propia.

Los coeficientes son utilizados para proyectar el recorrido del subyacente, originando una rejilla binomial borrosa (ecuación 11). En cada nodo se presentan los valores borrosos, en este caso números triangulares. En la tabla 3 se puede apreciar para el primer periodo (*t = 1*, nodo ascendente; descendente) se obtienen los valores dispuestos en el siguiente orden: me-

Tabla 3. Rejilla binomial borrosa valor intrínseco del activo

0	1	2	3
$1.023.50	$1,500.39	$2,199.50	$3,224.34
	$1,605.17	$2,517.40	$3,948.08
	$1,717.26	$2,881.26	$4,834.26
	$698.18	$1,023.50	$1,500.39
	$652.61	$1,023.50	$1,605.17
	$610.01	$1,023.50	$1,717.26
		$476.27	$698.18
		$416.12	$652.61
		$363.57	$610.01
			$324.89
			$265.33
			$216.69

Fuente: elaboración propia.

nor amplitud (1: \$1,500.39; \$689.18), base (2: \$1,605.17; 652.61) y mayor amplitud (3: \$1,717.26; 610.01).

Los coeficientes equivalentes ciertos (ecuación 12 y 13) son agrupados en mayor (menor) valor según la mayor (menor) amplitud de movimientos, no variando el caso base (ecuación 14). Estos son expuestos en la Tabla 4.

Tabla 4. Coeficientes equivalentes ciertos borrosos

NBT	**p'**		**1-p'**	
a-α	p'1	0.4709	1-p'1	0.5290
a	p'2	0.4444	1-p'2	0.5555
a+β	p'3	0.4208	1-p'3	0.5791
Pares	p'		1-p'	
Menor	p'3	0.4208	1-p'1	0.5290
Base	p'2	0.4444	1-p'2	0.5555
Mayor	p'1	0.4208	1-p'3	0.5791

Fuente: elaboración propia.

Con estos datos se está en condiciones de valorar el proyecto. Para ello se supone que el coeficiente de aversión al riesgo $\gamma = 0$, partiendo de un sujeto neutral al riesgo, los pasos son:

a) A partir de la Tabla 3 se determina el valor terminal de la opción en *t = 3*. Este surge de comparar el máximo valor entre el valor borroso del proyecto versus la inversión o la diferencia entre los ingresos y costos de liquidación. Consecuentemente, el valor terminal de la opción en el periodo 3 es igual a $ro'_3 = max[(V'_3 - I_3);\ (IL_3 - CA_3)]$.

b) Para cada nodo del NBT (ro'_3) se aplica la función de utilidad (ecuación 19), para obtener $U'(ro'_3)$.

c) Comienza el proceso recursivo en *t = 2* (ecuación 20), para obtener la utilidad borrosa esperada $E\left[U\left(ro'_{i,j(t)}\right)\right]$.

d) La utilidad borrosa esperada se convierte en equivalente cierto borroso $CE(ro'_{i,j(t)})$; el cual se procede a descontar al tipo libre de riesgo (determinístico) (ecuaciones 21 y 22).

e) Finalmente se obtiene la utilidad borrosa (ecuación 23) para el periodo *t=2;* $U\left(ro\acute{}_{i,j(t-1)}\right)$.

En la Tabla 5 se presentan los valores correspondientes para los periodos *t = 2* y *t = 3*;

Tabla 5. Proceso recursivo Fase II

Fase II: aprobación *t=2*				**Fase II: lanzamiento *t=3***	
U´(.)	*PV(CE´)*	*CE´*	*E [U´(.)]*	*U´(.)*	*ro´(.)*
1323.0	$1,322.96	$1,390.79	1,390.8	2,424.3	$2,424.34
1756.4	$1,756.42	$1,846.47	1,846.5	3,148.1	$3,148.08
2312.6	$2,312.57	$2,431.13	2,431.1	4,034.3	$4,034.26
318.1	$318.12	$334.43	334.4	700.4	$700.39
380.0	$380.04	$ 399.52	399.5	805.2	$805.17
452.2	$452.22	$475.41	475.4	917.3	$917.26
67.8	$67.77	$71.24	71.2	75.0	$75.00
71.3	$71.34	$75.00	75,0	75.0	$75.00
74.9	$74.92	$78.76	78,8	75.0	$75.00
				75.0	$75.00
				75.0	$75.00
				75.0	$75.00

Fuente: elaboración propia.

Para el periodo 1 nuevamente se debe calcular el valor terminal. En este caso es el máximo valor entre: la diferencia del valor actual de la utilidad esperada del proyecto, menos el valor de la utilidad de la inversión y el valor de la utilidad de la diferencia entre ingresos y costos de liquidación:

$$ro'_1 = max\left\{\left[\left(p'_u \times U'_{2,u} + p'_d \times U'_{2,d}\right) \times e^{-r} - U(I_1)\right)\right]; \left[(IL_1 - CA_1)\right]\right\}$$

(véase Tabla 6).

Finalmente se determina el valor en *t = 0*; obteniendo como resultado un NBT donde el caso intermedio (a) representa el valor obtenido para un sujeto neutral al riesgo con el modelo binomial tradicional y los extremos corresponden a los valores de menor posibilidad en un NBT, para sujetos con $\gamma = 0$ (véase Tabla 7).

Tabla 6. Proceso recursivo Fase I en t =1

Fase I. diseño, prototipo y pruebas preclínicas			
U´(.)	*CE´(t = 1)*	*PV (CE´)*	*E[U(ro´)]*
289.7	$289.68	$289.68	$289.68
543.4	$543.40	$543.40	$543.40
885.1	$885.10	$885.10	$885.10
25.0	$25.00	$25.00	$25.00
25.0	$25.00	$25.00	$25.00
25.0	$25.00	$25.00	$25.00

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7. Proceso recursivo Fase I en $t=0$

	Fase I:	***t=0***		
NBT (ro´)	*U´(.)*	*PV(CE´)*	*CE´*	*E[U(ro´)]*
$a-\alpha$	128.5	$128.54	$135.13	135.1
(a)	242.9	$242.95	$255.40	255.4
$a+\beta$	410.3	$410.27	$431.31	431.3

Fuente: elaboración propia.

El área con los posibles valores del proyecto está dado por el número borroso [$128.5; $242.9; $410.3]. La determinación del valor medio borroso (VMB) implica calcular la integral definida entre 0 y 1 (ecuación 16). Luego se debe estimar la proporción que representa el área por encima (a + β) y debajo (a - α) (ecuación 17) para luego sustituir en la ecuación 18 los valores borrosos (ro´) y el índice de aversión (λ) (véase tabla 8).

El valor expandido binomial tradicional asciende a $242.9 y difiere del valor esperado borroso el cuál es de $269.4 producto del sesgo positivo por la mayor ponderación asignada por los coeficientes equivalentes ciertos borrosos a los movimientos de mayor amplitud en relación a los de menor amplitud.

El valor neto de la opción real es la diferencia entre el valor con opciones ($ro\ VMB$) menos valor actual estático (VAN); $RO' = ro(VMB) - VAN =$

Tabla 8. Valor Medio Borroso (VMB)

Valor medio borroso (VMB)		
Base	c3-c2	167.3
Altura	1	1
ARD	*(b*h)/2*	83.6
Base	c2-c1	114.4
Altura	1	1
ARI	*(b*h)/2*	57.2
λ (Ec.17)	*ARD/(ARI+ARD)*	0.594
VMB (Ec.18)	((1-λ)ro1+ro2+λro3)/2	269.4
	ro Binomial	$242.9
	ro VMB	$269.4
	ro Fuzzy inferior	$128.5
	ro Fuzzy superior	$410.3

Fuente: elaboración propia.

$314.96 = $269.4 — ($45.56). Al sensibilizar el coeficiente de aversión al riesgo, se obtienen los valores acordes a potenciales inversores según su preferencias relativas a la asunción de riesgo; donde el coeficiene de aversión correspondiente a la función isoelástica pude asumir valores de $\gamma > 0$ adversos; $\gamma = 0$ neutral e $\gamma < 0$ afecto al riesgo. En la Tabla 9 se exponen los resultados obtenidos en *t = 0* para el NBT (*ro´*);

Tabla 9. Sensibilidad valor del proyecto (RO) coeficiente de aversión al riesgo (γ)

γ	**-0.1**	**-0.05**	**0**	**0.15**	**0.25**	**0.5**
U(.)a-α	420.5	227.9	***128.5***	29.7	13.9	6.0
CE a-α	$699.5	$284.7	***$128.5***	$21.0	$9.6	$4.9
U(.) a	844.7	443.9	***242.9***	51.1	22.4	6.4
CE a	$1,506.5	$573.4	***$242.9***	$33.3	$13.7	$5.0
U(.)a+β	1,517.6	773.0	***410.3***	78.8	32.5	7.9
CE a+β	$2,870.0	$1,026.6	***$410.3***	$48.2	$18.1	$5.6

Fuente: elaboración propia.

El valor medio borroso para los diferentes coeficientes de aversión al riesgo se detalla a continuación.

Tabla 10. Sensibilidad VMB -coeficiente de aversión al riesgo (γ)

γ	**-0.1**	**-0.05**	***0***	**0.15**	**0.25**	**0.5**
U(ARD)	336.48	164.55	***83.66***	13.87	5.06	0.57
U(ARI)	212.08	108.03	***57.20***	10.70	4.22	0.07
λ	61.34%	60.37%	***59.39%***	56.45%	54.52%	88.84%
VMB	969.1	500.4	***269.4***	54.2	23.2	6.5
EC ($)	$1,752.3	$650.3	***$269.4***	$35.0	$14.1	$5.1

Fuente: elaboración propia.

El valor de la flexibilidad estratégica se diluye rápidamente en el caso de sujetos adversos al riesgo. En el caso analizado para $\gamma > 0.5$ el valor se disminuye considerablemente. A modo de ejemplo si se trabaja con valores de gamma equivalentes a los generados por pruebas empíricas, por ejemplo $\gamma = 0.53$ (Andersen, *et. alt*; 2010), este proyecto entraría en una zona gris respecto a su elegibilidad. Situación diferente al valor que arroja trabajar con concepto de neutralidad al riesgo $\gamma = 0$; cuya lógica indica aceptar el proyecto, claro que en este caso se debe cumplir el supuesto de mercados completos.

Conclusión

Las opciones reales son una poderosa herramienta para valorar caminos estratégicos, en particular, frente a proyectos caracterizados por su dinamismo e incertidumbre. Pero su gran debilidad, reside en la necesidad de mercados completos para aplicar los conceptos de valuación neutral al riesgo. Atento a ello, la literatura ha desarrollado varias alternativas para valuar los riesgos de los flujos del proyecto conocido como *"privados"*, para valorar riesgos, respecto de los cuales el mercado no provee un activo financiero gemelo. En tal sentido se conjugaron las cualidades del modelo de opciones reales en un entorno borroso y preferencias frente al riesgo del agente. La razón de incorporar la lógica fuzzy reside en la necesidad de lidiar con la ambigüedad o vaguedad de datos. En relación a las preferencias del agente, del variado repertorio de funciones de utilidad existentes en la literatura, fue seleccionada la isoelástica por cumplir con los atributos de $CARA < 0$ y $CRRA = 0$.

El proceso de valoración es sencillo, permite identificar la flexibilidad estratégica, su valor terminal y consecuentemente la utilidad correspondiente a cada nodo del árbol binomial borroso. Seguidamente son calculados de forma recursiva los valores correspondientes a la utilidad esperada y su equivalente cierto. El método es flexible, puesto que el valor se ajusta en función al coeficiente de aversión al riesgo del agente. Con grados crecientes de aversión al riesgo tanto el valor estratégico, representado por el VMB se diluye, conduciendo en situaciones de alta aversión al riesgo al rechazo del proyecto. Esta información no es suministrada por los modelos tradicionales binomiales y borrosos, pues asumen neutralidad frente al riesgo. En estos últimos casos se presume la existencia de mercados financieros completos, supuesto difícil de verificar, en particular en mercados emergentes.

Referencias bibliográficas

Allais, M. (1953). "Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine". *Econometrica, 21* vol. 4, pp. 503-546.

Allais, M. (1988). "An Outline of My Main Contributions to Economic Science". *Economic Sciences*, pp. 233-252.

Amram, M. y Kulatilaka, N. (1998). *Real Options* (1 ed.). Boston, Masachussets, Estados Unidos: Harvard Business School Prees.

Andersen, S., Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2010). "Preference heterogeneity in experiments: comparing field and laboratory". *Journal of Economics, Behaviour and Organization,* núm. 73, vol. 2, pp. 209-224.

Bernoulli, D. (1954). "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk". *Econometrica,* vol. 22, núm. 1, pp. 23-36.

Black, F. y Scholes, M. (1972). "The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency". *Journal of Finance*, pp. 399-418.

Black, F. y Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, pp. 637-659.

Boer, P. (2002). *The Real Options Solutions: Finding Total Value in a High-Risk World.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Borison, A. (2003). *Real Options Analysis: Where are the Emperor´s Clothes?* Standford: Standford University.

Boyce,C., Wood, A., Bank, J., Clark, A. y Brown, G. (2014). Money, Well being and Loss Aversion: Does an income loss has a greather effect on well being than an income gain. *Center for Economics Performance*, núm. 39, pp. 1-16. Recuperado el 15 de 6 de 2016, de http://cep.lse.ac.uk/pubs/download/occasional/op039.pdf.

Boyle, P. (1988). "A lattice framework for option pricing with two state variables". *Journal of Finance and Quantitative Analysis,* núm. 23, pp. 1-12.

Brandao L. y Dyer S. (2005). "Decision analysis and real options: A discrete time approach to real option valuation". *Annals of Operations Research,* núm. 135, núm. 1, pp. 21-39.

Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2005). "Using binomial decision trees to solve real-option valuation problems". *Decision Analysis,* núm. 2, pp. 69-88.

Brandao, L., Dyer, J. y Hahn,W. (2008). "Response to comments on Brandao" *et al*. (2005). *Decision Analysis*, núm. 2, pp. 103-109.

Brennan, M. y Schwartz, E. (1985), "Evaluating Natural Resources Investment". *Journal of Business,* núm. 58, pp. 135-157.

Buckley, J. (1987). "The fuzzy mathematics of finance". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 21, pp. 257-273.

Castro Monge, E. (2010). "El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas". *Revista Nacional de Administración*, vol. 2, núm. 1, pp. 31-54.

Carlsson, C. y Fuller, R. (2003). "A Fuzzy Approach to Real Option Valuation". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 139, pp. 315-326.

Carlsson, C., Fuller, R., Heikkila, M. y Majlender,P. (2007). "A Fuzzy Approach to R&D Project Portfolio Selection". *Interntational Journal of Approximating Reasoning*, núm. 44, pp. 93-105.

Chance, D. (2007). "A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets". *SSRN http://ssrn.com/abstract=1523548*, pp. 1-25.

Collan, M., Fullér, R. y Mezei, J. (2009). "Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation". *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems, ID 238196*, pp. 1-14.

Copeland, T. y Antikarov, V. (2001). *Real Options,* (1a ed.). New York: Texere LLC.

Copeland, T. y Tufano, P. (2004). "A Real World to Manage Real Options". *Harvard Business School Review*, núm. 82, pp. 90-99.

Copeland, T., Weston, F. y Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy.* (4 ed.) Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.

Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics,* núm. 7, pp. 229-263.

Dehling, H. (1997). "Daniel Bernoulli and the St. Petersburg Paradox". *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, vol. 15, núm. 3, pp. 223-227.

Derman, E., Kani, I. y Chriss, N. (1996). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile". (Goldman-Sachs, Ed.), *Quantitative strategies research notes*.

Dixit, A. y Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1a ed.). New Jersey: Pricenton University Press.

Dubois, D. y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems.* New York: Academic Press.

Elton, D. y Gruber, M. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* (5a ed.). New York: John Wiley & Sons.

En Shine Yu, S. y Ming, H,. Li, Y. y Chen Y. (2011). "A novel option pricing model via fuzzy binomial decision tree". *International Journal of Innovative Computing, Information and Control,* vol. 7, núm. 2, pp. 709-718.

Fernández, G., Perobelli Cordero F. y Brandao, L. (2014). "An Improved Model for Valuing R&D Project". En: R. O. Group (Ed.), *XIV Real Options Annual Conference*, pp. 1-23. Colombia: Disponible en: http://realoptions.org/openconf2014/data/papers/39.pdf.

Friedman, M. y Savage, L. (1948). "The Utility Analysis of Choices Involving Risk". *The Journal of Political Eocnomy,* vol. 56, núm. 4, pp. 279-304.

Friend, I. y Blume, M. (1975). "The Demand of Risky Assets". *American Economic Review,* vol. 65, núm. 5, pp. 900-922.

Garcia Sastre, M. y Roselló Miralles, M. (2007). "La lógica borrosa para valorar la incertidumbre en la técnica de valoración de opciones reales". (A. E. (AEDEM), Ed.). *DIALNET OAI Articles, http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2499409*, pp. 1-22.

Graeme, G. (2009). *Real Options in Theory and Practice (Financial Management Association Survey and Synthesis).* Oxford: Oxford University Press.

Grasselli, M. (2011). "Getting Real with Real Options". *Journal of Business, Finance and Accounting,* vol. 5, núm. 38, pp. 740-764.

Harrison, G., Humphrey, S. y Verschoor, A. (2009). "Choice under uncertainty: Evidence from Ethiopia, India and Uganda". *The Economic Journal,* vol. 120, núm. 543, pp. 80-104.

Harrison, G., Johnson E., McInnes, M. y Rustrom, E. (2005): Individual choice and risk aversion in the laboratory: coment. *American Economic Review,* vol. 95, núm. 3, 897-901.

Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2007). "Estimating risk attitudes in Denmark: a field experiment". *The Scandinavian Journal of Economics,* vol. 109, núm. 2, pp. 341-368.

Harrison, G., Lau, M., Rutstrom, E., y Tarazona Gómez, M. (2013). "Preference over social risk". *Oxford Economics Paper,* vol. 65, núm. 1, pp. 25-46.

Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives.* (5 ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Ingersoll, J. y Ross, S. (1992). "Waiting to Invest: Investement andr Uncertainty". *Journal of Business*, núm. 65, pp. 1-29.

Jabbour, G., Kramin, M. y Young, S. (2001). "Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited". *Journal of Futures Markets,* núm. 21, pp. 987-1001.

Jarrow, R. y Rudd, A. (1982). "Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes". *Journal of Financial Economics,* núm. 10, pp. 347-369.

Kahneman, D., y Tversky, A. (1979). "Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk". *Econometrica,* vol. 47, núm. 2, pp. 263-292.

Kamrad, B. y Ritchken, P. (1991). "Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables". *Management Science,* vol. 37, núm. 12, pp. 1640-1653.

Keema, A. (1988). *Options in Real and Financial Markets.* Working Paper Ph.D diss, Erasmus University, Finance, Erasmus.

Keeney, R. y Raiffa H. (1976, 1993). *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* (1 ed.). United Kingdom : Cambridge University Press.

Kodukula, P. y Chandra, P. (2006). *Project Valuation using Real Options: A practiioner´s guide.* USA: J Ross Publishing.

Kulatilaka, N. y Trigeorgis, L. (1994). "The General Flexibility To Swicht: Real Options Revisited". *International Journal of Finance*, núm. 2, pp. 123-145.

Kulatilaka, N. (1988). "Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems". *IEEE Transactions in Engineering Management*, núm. 22, pp. 250-257.

Liao, S. y Ho, S. (2010). "Investment Project Valuation based on a Fuzzy Bionomial Approach". *Information Sciences*, núm. 180, pp. 2124-2133.

Ljungqvist, L. y Sargent, T. (2000). *Recursive Macroeconomic Theory.* Massachussetts: MIT press.

Margrabe. W. (1978). "The Value of an Option to Exchange one Asset for Another". *Journal of Finance*, núm. 33, pp. 177-186.

Markowitz, H. (1952). "The Utility of Wealth". *Journal of Political Economy,* vol. 60, núm. 2, pp. 151-158.

Mason, S. y Merton, R. (1985). "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance". En varios, *Recent Advances in Corporate Finance.* New York: Homewood Irwin.

Mc Donal, R. y Siegel, J. (1986). "Investment and the Valuation of Firms when here is an Option to Shut Down". *International Economic Review*, núm. 26, pp. 321-349.

Merton, R. (1973). "The Theory of Rational Options Princing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, pp. 141-183.

Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance.* Wiley-Blakwell.

Milanesi, G. (2013). "El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de conseción para la explotación petrolera". *Estocástica: Finanzas y Riesgo,* vol. 3, núm. 2, pp. 95-118.

Milanesi, G. (2014). "Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: Aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad". *Estudios Gerenciales*, núm. 30, pp. 211-219.

Milanesi, G. (2015). "Modelo binomial borroso, el valor de la firma apalancada y los efectos de la deuda". *Estocástica, vol. 5*, núm. 1, pp. 9-43.

Milanesi, G. y El Alabi E. (2015). "Evolución de las Funciones de Utilidad para la toma de decisiones". *Escritos Contables y de Administración,* vol. 6, núm. 1, pp. 15-43.

Milanesi, G. (2017). "Opciones reales y función isoelástica de utilidad para valuar I&D e intangibles". *Escritos Contables y de Administración,* vol. 6, núm. 2, pp. 81-109.

Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions.* (1 ed.). New York: Wiley.

Mun, J. (2015). *Real Options Analysis (Third Edition): Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions with Integrated Risk Management and Advanced Quantitative Decision Analytics* (3 ed.). CreateSpace Independent Publishing Platform.

Muzzioli, S. y Torricelli, A. (2004). "A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World". *Journal of Economics and Dynamics Control*, núm. 28, pp. 861-867.

Myers, S. y Majd, S. (1990). "Abandonment Value and Project Life". *Advances in Futures and Options Research*, núm. 4, pp. 1-21.

Myers, S. (1977). "Determinants of Corporate Borrowing". *Journal of Financial Economics*, núm. 5, pp. 147-176.

Ochoa, C. y Pareja Vasseur, J. (2014). "Valoración de opciones a través de equivalentes a certeza". *Ecos de Economía,* vol. 18, núm. 39, pp. 49-72.

Paddock, J., Siegel, D. y Smith, J. (1988). "Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease". *Quaterly Journal of Economics*, núm. 103, pp. 479-508.

Pareja Vasseur J. y Cadavid C. (2016). "Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: equivalentes de certeza y función de utilidad". *Contaduría y Administración*, núm. 61, pp. 794-814.

Pareja Vasseur, J. y Baena J. (2018). "Estimación del índice de aversión al riesgo utilizando la función CRRA mediante un diseño experimental". *Revista Espacios,* vol. 39, núm. 13, pp. 29-47.

Pratt, J. (1964). "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econométrica,* vol. 32(1/2), pp. 122-136.

Perlitz, M., Peske, T. y Schrank, R. (1999). "Real option valuation: The new frontier in R&D project evaluation?" *R&D Management,* vol. 29, núm. 3, pp. 255-269.

Rendleman, R. y Bartter, B. (1979). "Two-state Option Pricing". *Journal of Finance*, núm. 34, pp. 1092-1110.

Salahaldin, L. (2016). *Real Options as a Tool for Value Creation: Evidence from Sustainable Development and Information Technology Sectors.* Wiley-ISTE.

Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics.* Nueva York: John Wiley & Sons.

Schwartz, E. (2002). "Patents and R&D as Real Options". *WP UCLA https://escholarship.org/uc/item/86b1n43k*, pp. 1-48.

Schwartz, E. (2013). "The Real Opptions Approach to valuation: Challenges and Opportunities". *Latin American Journal of Economics,* vol. 50, núm. 2, pp. 163-177.

Shefrin, H. (2010). *Behavioralizing Finance.* Leavey School of Business, SCU Leavey School of Business. Virginia: Santa Clara University.

Shefrin, H. y Statman, M. (1985). "The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence". *The Journal of Finance,* vol. 40, núm. 3, pp. 777-790.

Shefrin, H. y Statman, M. (2000). "Behavioral Portfolio Theory". *Journal of Finance and Quantitative Analysis,* vol. 35, núm. 2, pp. 127-151.

Shiller, R. (2005). *Irrational Exuberance.* Princeton: Princeton University Press.

Shockley, R. (2006). *An Applied Course in Real Options Valuation.* Thomson South-Western Finance.

Simon, H. A. (1955). "A Behavioral Model of Rational Choice". *The Quarterly Journal of Economics,* vol. 69, núm. 1, pp. 99-118.

Simon, H. A. (1979). "Rational Decision Making in Business Organizations". *The American Economic Review,* vol. 69, núm. 4, pp. 493-513.

Smit, H. (1996). "The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands". *Financial Management*, núm. 26, pp. 5-17.

Smit, H. y Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

Smith, J. (2005). "Alternative approaches for solving real-options problems". *Decision Analysis,* vol. 2, núm. 2, pp. 89-102.

Smith, J. y Nau, R. (1995). "Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis". *Management Science*, núm. 5, pp. 795-816.

Suen, R. (2009). "Bounding the CRRA Utility Functions". *Munich Personal RePec Archive, https://mpra.ub.uni-muenchen.de/13260/1/Bound_CRRA.pdf*, pp. 1-16.

Thaler, R. (1985). "Mental Accounting and Consumer Choice". *Marketing Science,* vol. 4, núm. 3, pp. 199-214.

Thaler, R. y Johnson, E. (1990). "Gambling with the House Money and Trying to Break Even: The Effects of Prior Outcomes on Risky Choice". *Management Science,* vol. 36, núm. 6.

Trigeorgis, L. y Mason, S. (1987). "Valuing Managerial Flexibiliy". *Midland Corporate Finance,* núm. 5, pp. 14-21.

Trigeorgis, L. (1988). "A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting". *Advances in Futures and Options Research*, núm. 4, pp. 145-167.

Trigeorgis, L. (1993). "Real Options and Interactions with Financial Flexibility". *Financial Management*, núm. 22, pp. 202-224.

Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2a ed.). Cambridge: MIT Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). "Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases". *Science,* vol. 185, núm. 4157, pp. 1124-1131.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1981). "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice". *Science, 211*(4481), 453-458.

Van der Hoek, J. y Elliot, R. (2006). *Binomial models in Finance.* New York, United State: Springer Science.

Vendrik, M. y Woltjes, G. (2007). "Hapiness and loss aversion: is utility concave or convex in relative income". *Journal of Public Economics,* núm. 91, pp. 1423-1448.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

Wakker, P. (2008). "Explaining the Characteristics of the Power (CRRA) Utility Family". *Health Economics,* núm. 17, pp. 1329-1344.

Wang, A. y Halal, W. (2010). "Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review". *International Journal of Business and Management*, núm. 5, pp. 14-24.

Whaley, R. (2006). *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance.* (2a. ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.

Wilmott, P., Howison, S. y Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives.* USA: Cambridge University Press.

Yin, R. (1994). C*ase Study Research: Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Yoshida, Y., Yasuda, M., Nakagami, J. y Kurano, M. (2006). "A New Evaluation of Mean Value for Fuzzy Numbers and its Application to American Options under Uncertainty". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 157, pp. 2614-2626.

Zdnek, Z. (2010). "Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model". *European Journal of Operational Research*, núm. 207, pp. 1096-1103.