UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctora en Matemática

Estudio de una dualidad topológica para semirretículos distributivos con operadores modales monótonos y sus aplicaciones

María Paula Menchón

Bahía Blanca — Argentina

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La siguiente tesis ha sido aprobada el ..../..../......, mereciendo la calificación de ......(..........................)

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.

Firma del director

A mis padres, a mi hermano y a mi abuela Nita

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires durante el período comprendido entre los meses de julio de 2014 y Octubre de 2018, bajo la dirección del Dr. Sergio Celani, Profesor Titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

María Paula Menchón

29 de marzo de 2019
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Agradecimientos

A *mis padres*, por el gran esfuerzo que hicieron para darme la mejor educación. Por apoyar siempre mis sueños y acompañarme en cada paso. De ellos heredé la pasión por las ciencias exactas y, especialmente de mi mamá, el amor por las matemáticas. Todo lo que haga en mi vida estará dedicado a ellos primero.

Al *Dr. Sergio Celani*, por dirigir esta tesis, por su constante predisposición, dedicación y contagioso entusiasmo. Por aceptarme en su grupo y ser mi guía. Por compartir desinteresadamente sus conocimientos e ideas conmigo, lo que fue un aporte invaluable no solo para el desarrollo de esta tesis, sino también para mi desarrollo como investigadora. Él es un ejemplo y una inspiración para mí.

A *mi hermano Martín*, por acompañarme y apoyarme siempre durante todos estos años. Por su pasión y entusiasmo por el trabajo, que siempre resulta una inspiración.

A *mi novio Leo*, por apoyarme en todos mis proyectos, por estar incondicionalmente a mi lado, en los buenos y malos momentos, animándome siempre a continuar.

Al *Dr. Ismael Calomino*, Por ayudarme siempre, por su predisposición, por ser excelente compañero y un ejemplo a seguir.

Al *Dr. Patricio Diaz Varela*, por aceptar ser mi supervisor de estudios y confiar en mí. Por darme la gran oportunidad de ser parte de un proyecto que sin dudas ha aportado muchísimo a mi formación.

A *mi familia*, por apoyarme siempre, especialmente mi abuela Nita y mi madrina Silvia que siempre creyeron en mí y me dieron fuerzas para continuar.

A *mis amigos*, porque siempre están, incluso a la distancia, para ayudarme en lo que necesite.

Al *grupo de lógica de Tandil*, por su entusiasmo y predisposición para trabajar, porque el compañerismo que existe entre nosotros hace que la jornada laboral sea hermosa.

A la *Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires*, porque es el lugar donde comenzó y transcurre mi estudio sobre Matemática, mi formación como investigadora y mi experiencia como docente.

A la *Universidad del Sur*, por permitirme realizar mis estudios de posgrado y brindarme el hospedaje en Bahía Blanca.

Al *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas*, por el soporte financiero provisto por una beca que permitió la realización de esta tesis.

Resumen

En el estudio de las álgebras relacionadas a las lógicas no-clásicas, los semirretículos (distributivos) están siempre presentes. Por ejemplo, la semántica algebraica del fragmento $\{\to, \wedge, \top\}$ de la lógica intuicionista modal es la variedad de los semirretículos implicativos, que son una clase especial de semirretículos distributivos. En esta tesis, introducimos y estudiamos la clase de semirretículos distributivos acotados dotados de operadores modales que cumplen con la condición de monotonía. Estudiamos una teoría de representación para estas álgebras usando las extensiones canónicas y desarrollamos una dualidad completa a través de espacios sober. Dichos resultados son aplicables, bajo modificaciones menores, al estudio de los retículos distributivos acotados, los semirretículos implicativos, las álgebras de Heyting y a las álgebras de Boole con operadores monótonos. Mostraremos cómo nuestra dualidad se extiende a algunos casos particulares. En el caso de las álgebras de Boole, nuestra dualidad incluye, como casos particulares, las dadas en [12] y [31].

Las lógicas modales monótonas han surgido en distintas áreas de aplicación, como por ejemplo, asociadas a ciertas semánticas utilizadas en computación teórica e inteligencia artificial. Usando la dualidad desarrollada, estudiaremos algunas extensiones obtenidas a partir de un sistema deductivo basado en semirretículos con operadores modales monótonos. A estos sistemas deductivos los dotaremos de una semántica de entornos, y nuestro objetivo principal es probar la completitud de estas extensiones con respecto a una clase característica de marcos monótonos.

La variedad de las álgebras de Boole con operadores modales monótonos es dualmente equivalente a dos clases de marcos monótonos generales descriptivos. Clarificaremos este fenómeno mostrando que existe una correspondencia biyectiva entre estas dos clases. Hablaremos sobre algunas clases de marcos de entornos monótonos generales, tales como las clases de punto compacto, imagen compacto y marcos monótonos generales repletos, y estudiaremos las relaciones entre ellos. También probaremos que las nociones de marco monótono punto compacto, e imagen compacto se preservan bajo morfismos acotados fuertes.

Abstract

In the study of algebras related to non-classical logics, (distributive) semilattices are always present in the background. For example, the algebraic semantic of the $\{\to, \wedge, \top\}$-fragment of intuitionistic logic is the variety of implicative meet-semilattices, which are distributive semilattices. In this thesis we introduce and study the class of distributive meet-semilattices endowed with monotonic modal operators. We study the representation theory of these algebras using the theory of canonical extensions and we give a topological duality (Stone style) for them. Also, we show how our new duality extends to some particular subclasses. So, most of the results given in this paper are applicable, with minor modifications, to the study of bounded distributive lattices, implicative semilattices, Heyting algebras, and Boolean algebras with monotonic operators. We note that in the particular case of Boolean algebras our duality yields the duality given in [12] and [31].

Monotone modal logics have emerged in several application areas such as computer science and social choice theory. Using the developed duality, we study some extensions obtained from a semilattice based deductive system with monotonic modal operators. We give neighborhood semantics, and our main objective is to prove completeness with respect to a characteristic classes of monotonic frames.

The variety of Boolean algebras with monotonic modal operators is dually equivalent to two classes of descriptive general monotonic frames. We shall clarify this phenomenon showing that there exists a bijective correspondence between these two classes. We shall discuss some classes of general monotonic neighborhood frames, such as the classes of point-compact, image compact and replete general m-frames, and we shall study the relationships between them. We shall also prove that the notions of point-compact, and image-compact monotonic frames are preserved by strong bounded morphisms.

Índice general

Introducción

Es conocido que las álgebras de Boole con operadores modales son la semántica algebraica de las lógicas modales clásicas. Usando la representación topológica de Stone para las álgebras de Boole, toda álgebra de Boole con un operador modal puede ser representada como una estructura relacional [16]. Esta representación tiene un rol importante en el estudio de muchas extensiones de lógicas modales normales [16] y lógicas modales monótonas [18] [31]. Por otro lado, en el estudio de las álgebras relacionadas a las lógicas no clásicas, los semiretículos están siempre presentes en el trasfondo. Por ejemplo, la semántica algebraica del fragmento $\{\rightarrow, \wedge, \top\}$ de la lógica intuicionista es la variedad de los semirretículos implicativos [8] [17], y es conocido que todo semirretículo implicativo es distributivo en el sentido de [30] o [9]. Una representación topológica para semirretículos distributivos usando espacios sober fue estudiada en [30] por G. Grätzer. Allí se desarrolla una representación para semirretículos distributivos con supremo y primer elemento. Esta representación se extiende a una dualidad topológica en [9] y [13]. En [9], Celani desarrolla una dualidad completa entre semirretículos distributivos con ínfimo y último elemento (que son duales a los semirretículos con supremo y primer elemento) y ciertos espacios topológicos ordenados. La principal novedad de [9] es la caracterización de los homomorfismos de semirretículos que preservan el último elemento por medio de ciertas relaciones binarias. Para semirretículos implicativos existe una representación similar en [8]. Más adelante, en [13], Calomino y Celani completan y simplifican esta dualidad, dando una definición equivalente de los espacios topológicos sin utilizar el orden. También existe otra representación topológica para la clase de los semirretículos distributivos que es importante mencionar. En [4], Bezhanishvili y Jansana han desarrollado una dualidad utilizando ciertos espacios de Priestley dotados de un subconjunto distinguido y algunas propiedades adicionales, llamados espacios de Priestley generalizados, pero no la trataremos en esta tesis.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar una dualidad (utilizando espacios sober) completa para semirretículos distributivos dotados con operadores monótonos. Así, muchos de los resultados dados en este trabajo son aplicables, bajo modificaciones menores, al estudio de retículos distributivos acotados, semirretículos implicativos, álgebras de Heyting, y álgebras de Boole con operadores monótonos. Notemos que en el caso particular de las álgebras de Boole, nuestra dualidad incluye las dadas en [12] y [31]. Para ello, utilizaremos las extensiones canónicas. Las extensiones canónicas fueron introducidas por Jónsson y Tarski para estudiar las álgebras de Boole con operadores. El mayor propósito fue facilitar la identificación del dual de las operaciones adicionales sobre un retículo. Desde su trabajo seminal, la teoría de las extensiones canónicas ha sido simplificada y generalizada por [23, 20], llevando a una amplia teoría aplicable más allá del conjunto Booleano original. Usaremos estas extensiones como una herramienta para el desarrollo de una teoría de métodos relacionales, en una manera algebraica.

En un sentido amplio, un sistema deductivo modal monótono $\mathcal{S}_m$ es un sistema deductivo en un lenguaje proposicional con un operador modal m que satisface la regla de monotonía: si $p \vdash_{\mathcal{S}_m} q$, entonces $mp \vdash_{\mathcal{S}_m} mq$. Las lógicas modales monótonas han surgido en muchas áreas de aplicación como ciencia de la computación y la teoría de la elección social. Pueden ser definidas y estudiadas sobre diferentes sistemas deductivos o lógicas proposicionales como la lógica intuicionista, o algún fragmento de las lógicas clásicas. En este trabajo, enfocaremos nuestra atención en los sistemas deductivos con un lenguaje que tiene un conectivo de conjunción $\wedge$ y dos modalidades $\Box$ y $\Diamond$. Ya que el lenguaje que elegimos no tiene negación, las modalidades no son interdefinibles. Las lógicas modales monótonas clásicas son interpretadas semánticamente por medio de marcos de entornos [18] [31] [33]. Esta clase de esctructuras provee una generalización de la semántica basada en las semánticas de Kripke. Todo marco de entornos produce un álgebra de Boole dotada de un operador monótono, llamada álgebra monótona. Y recíprocamente, toda álgebra monótona define un marco de entornos (ver [31] o [12]). También es posible considerar lógicas modales monótonas definidas sobre la lógica intuicionista. Por ejemplo, en [42], Kojima considera semánticas de entornos para la lógica modal intuicionista, y define un marco de entornos como una tripla $\langle W, \leq, N\rangle$ donde N es una función de entornos, que es una aplicación de W en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ que satisface la condición de decrecimiento, es decir, $N(x) \supseteq N(y)$, cuando $x \leq y$ (ver Definición 3.1 de [42]). Lógicas modales monótonas basadas sobre la lógica intuicionista también son estudiadas en [56]. Es muy conocido que los marcos de Kripke no constituyen una adecuada semántica para lógicas modales donde vale la regla de monotonía pero el secuente $mp \wedge mq \vdash_{\mathcal{S}_m} m(p \wedge q)$ no es válido. En cambio, las lógicas modales monótonas (no normales) son interpretadas sobre marcos de entornos monótonos, donde la relación de Kripke que interpreta al operador modal es reemplazada por una multirelación monótona. Las semánticas de entornos fueron inventadas en 1970 por Scott y Montague, independientemente, y luego Segerberg presentó algunos resultados básicos sobre modelos de entornos y sobre las lógicas modales clásicas que los corresponden. Estos y otros resultados destacados pueden ser encontrados en el libro de Chellas [18] y en el libro de Pacuit [50]. Desde entonces se han considerado semánticas de entornos para lógicas más allá del caso clásico. En este trabajo estudiaremos sistemas deductivos definidos a partir de una clase de semirretículos distributivos acotados con operadores monótonos y utilizaremos la dualidad desarrollada para construir marcos de entornos ordenados, pero como tenemos dos modalidades, definiremos dos tipos de marcos de entornos ordenados. A diferencia del caso clásico, necesitaremos dos multirelaciones para ocuparnos de las modalidades no interdefinibles. Si uno está interesado en estudiar el fragmento con sólo una de estas modalidades, entonces el mismo estudio puede ser realizado teniendo en cuenta sólo un tipo de marcos y descartando las nociones para la modalidad excluida y todos los resultados seguirían valiendo.

La variedad de álgebras de Boole con un operador modal monótono es dualmente equivalente a dos clases de marcos de entornos monótonos generales. En [31], la dualidad topológica está basada en los llamados marcos monótonos descriptivos. Por otro lado, en [12], la dualidad está basada sobre una clase más restringida de marcos monótonos descriptivos. En este trabajo clarificaremos este fenómeno mostrando que existe una correspondencia biyectiva entre estas dos clases y estudiaremos algunas clases especiales de marcos generales que son generalizaciones de las noción de modelo monótono modalmente saturado estudiado en [11]. Estudiaremos las clases de marcos monótonos generales punto compactos, imagen compactos y repletos, y las relaciones entre ellas. También probaremos que algunas de estas nociones se preservan bajo morfismos acotados fuertes.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

El Capítulo 1 está dedicado a recordar nociones generales que nos serán de utilidad durante el resto de la tesis. Para ser más específicos, recordamos las definiciones y propiedades básicas de álgebra universal, retículos, semirretículos, álgebras de Boole, topología general, categorías, algunas dualidades topológicas estilo Stone y las nociones básicas de las extensiones canónicas.

En el Capítulo 2 introducimos la clase de semirretículos distributivos con operadores monótonos y estudiamos una dualidad para ellos. En la Sección 2.1 definimos la categoría de semirretículos distributivos monótonos con homomorfismos y damos algunos ejemplos. En la Sección 2.2 mostramos los conjuntos duales a los ideales de orden, que son los conjuntos saturados y compactos del espacio dual de los semirretículos distributivos. Utilizando este hecho, en la Sección 2.3 identificamos las estructuras topológicas que son los elementos cerrados y abiertos de la extensión canónica y estudiamos las extensiones del operador monótono. De la construcción de las extensiones canónicas, en la Sección 2.4 daremos una representación topológica de los semirretículos distributivos con operadores monótonos basada en $\mathcal{DS}$-espacios que han sido dotados con relaciones para interpretar el operador. En la Sección 2.5 completamos la dualidad topológica y estudiaremos la representación para los homomorfismos de semirretículos distributivos con operadores monótonos. Finalizamos este capítulo mostrando una equivalencia categorial, entre la categoría de los semirretículos distributivos con homomorfismos y los $\mathcal{DS}$-espacios con $\wedge$-relaciones.

En el Capítulo 3 consideramos algunas aplicaciones de la dualidad desarrollada en el capítulo anterior. En la Sección 3.1, utilizando la dualidad desarrollada, probamos que la validez de algunas fórmulas específicas se conserva en las extensiones canónicas o en las extensiones canónicas duales. Para ello, estudiamos condiciones adicionales que deben cumplir las relaciones que representan a cada operador. En la Sección 3.2 estudiamos los semirretículos distributivos modales, es decir, con un operador que cumple las mismas condiciones que un homomorfismo de semirretículos. Mostraremos cómo conectar la relación asociada al operador con la $\wedge$-relación dual. Luego, consideramos algunas variedades importantes que tienen reductos de semirretículo distributivo y mostramos cómo nuestra nueva dualidad se relaciona con algunas de las ya existentes en la literatura. En la Sección 3.3 consideramos los semirretículos implicativos con un operador monótono. Repasamos la dualidad estilo Stone dada en [8] y estudiamos la implicación como una operación monótona más. En la Sección 3.4 consideramos los retículos distributivos acotados con operadores monótonos. En especial, estudiamos la condición adicional que deben cumplir las funciones espectrales para ser duales a los homomorfismos de retículos acotados que conmutan con operadores monótonos. Por último, mostraremos algunos ejemplos de espacios duales.

En el Capítulo 4 repasamos las álgebras de Boole monótonas. Como tienen un reducto de semirretículo distributivo con operadores monótonos podemos construir su espacio dual siguiendo las ideas del Capítulo 2. En la Sección 4.1 mostramos que los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos concuerdan con los espacios estudiados por S. Celani en [12]. Como en las álgebras de Boole tenemos la operación de negación, veremos como esto afecta a las relaciones asociadas a los operadores. Por otro lado, los marcos de entornos monótonos conforman la semántica relacional para las lógicas modales monótonas. Esta semántica ha sido ampliamente estudiada por diversos autores. En la Sección 4.2 recordamos las definiciones de marcos monótonos generales y morfismos acotados. En la Sección 4.3, recordamos la dualidad topológica dada en [31], basada sobre los llamados marcos monótonos descriptivos, que probamos que son equivalentes a los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos estudiados en [12]. También estudiamos algunas clases especiales de marcos generales que surgen de generalizar las propiedades que definen los marcos monótonos descriptivos. En la Sección 4.4 estudiamos algunas propiedades que son preservadas por medio de morfismos acotados suryectivos.

En el Capítulo 5 mostramos una aplicación de la dualidad para la lógica. En este capítulo, seguiremos el enfoque de Jansana, trabajando con lógicas modales monótonas autoextensionales. En la Sección 5.1 recordamos algunas definiciones básicas y algunos resultados dados en [36]. En la Sección 5.2 definimos los sistemas deductivos con los que trabajaremos, a partir de variedades generadas por clases de semirretículos distributivos monótonos. En la Sección 5.3 definimos los marcos adecuados para trabajar en este lenguaje más restringido y construimos las álgebras complejas a partir de ellos. Por otro lado, mostramos cómo construir marcos a partir de semirretículos distributivos con operadores monótonos. En la Sección 5.4 probamos que algunas fórmulas modales en el lenguaje modal están caracterizadas por ciertas condiciones definidas en marcos monótonos ordenados. En la Sección 5.5 utilizamos los marcos de entornos y las correspondencias de la sección anterior para probar completitud de ciertos sistemas deductivos monótonos.

El último capítulo está destinado a comentar algunos resultados y a realizar algunas consideraciones finales.

El contenido del Capítulo 2, y algunas secciones de los Capítulos 3 y 4 forman parte del trabajo *Monotonic distributive semilattices*, publicado en la revista Order ([15]). El contenido del Capítulo 4 forma parte del trabajo *Remarks on general monotonic neighborhood frames*, publicado en la revista Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing ([14]). Finalmente, el contenido del Capítulos 5 forma parte de trabajos en preparación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos las definiciones y los resultado básicos sobre álgebra universal, teoría de categorías, topología, semirretículos distributivos, retículos distributivos acotados, álgebras de Heyting, semirretículos implicativos, álgebras de Boole, lógica modal, extensiones canónicas y algunas dualidades topológicas. También fijaremos la notación que vamos a utilizar para facilitar la lectura posterior. En este capítulo sólo consideraremos las nociones necesarias para el desarrollo de esta tesis.

1.1 Nociones de teoría de categorías, álgebra universal y topología

Existe una amplia bibliografía sobre los temas centrales básicos del Algebra Universal, topología general y teoría de categorías. Un estudio detallado de estas nociones puede verse en [7], [49] y [25]. En esta sección hablaremos brevemente de estas y otras nociones básicas para hacer el trabajo lo más autocontenido posible.

Álgebra universal

Definición 1.1.1. Un *tipo* de álgebras es un conjunto $\mathfrak{F}$ de símbolos de funciones tales que un entero no negativo n es asignado para cada miembro f de $\mathfrak{F}$. Este entero es llamado la *aridad* de f, y f es llamado un símbolo de función n*-ario*.

Definición 1.1.2. Si $\mathfrak{F}$ es un tipo de álgebras entonces un *álgebra* $\mathbf{A}$ de *tipo* $\mathfrak{F}$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexadas por el tipo $\mathfrak{F}$ tal que para cada símbolo de función f en $\mathfrak{F}$ existe una operación n-aria $f^{\mathbf{A}}$ sobre A. El conjunto A es llamado el *universo* de $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ y cada $f^{\mathbf{A}}$ es llamada una *operación fundamental* de $\mathbf{A}$. Por simplicidad, escribiremos f en vez de $f^{\mathbf{A}}$ cuando no exista confusión. Si F es finito, por ejemplo $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$, escribiremos $\langle A, f_1, \ldots, f_k\rangle$ en vez de $\langle A, F\rangle$.

Definición 1.1.3. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo. Entonces $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y cada operación fundamental de $\mathbf{B}$ es la restricción de la operación correspondiente de $\mathbf{A}$. Un *subuniverso* de $\mathbf{A}$ es un subconjunto B de A que es cerrado bajo las operaciones de $\mathbf{A}$.

Definición 1.1.4. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras del mismo tipo. Una aplicación $h\colon A \to B$ es llamada un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathfrak{F}$ y para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos

$$h\left(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\right) = f^{\mathbf{B}}\left(h(a_1), \ldots, h(a_n)\right). \tag{1.1}$$

Definición 1.1.5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathfrak{F}$. Entonces una función $h\colon A \to B$ es un *isomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si h es un homomorfismo inyectivo y suryectivo. En este caso diremos que $\mathbf{A}$ es *isomorfa* a $\mathbf{B}$ y escribiremos $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. Un *monomorfismo* es un homomorfismo $h : A \to B$ inyectivo. Un *epimorfismo* es un homomorfismo suryectivo. Si existe un epimorfismo entre las álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ diremos que $\mathbf{B}$ es una *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$.

Es trivial ver que si consideramos un homomorfismo $h\colon A \to B$, entonces tenemos que $h[A] = \{h(a) : a \in A\}$, con las operaciones de $\mathbf{B}$ restringidas a este conjunto, es una subálgebra de $\mathbf{B}$. Esta subálgebra de $\mathbf{B}$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{A}$.

Definición 1.1.6. Sea $\{\mathbf{A}_j : j \in J\}$ una familia de álgebras del mismo tipo $\mathfrak{F}$. El *producto directo* de $\{A_j : j \in J\}$ es un álgebra con universo $A = \prod_{j\in J} A_j$ tal que para todo símbolo de función $f \in \mathfrak{F}$, para todo $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{j\in J} A_j$ y para todo $i \in I$,

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$$

es decir, $f^{\mathbf{A}}$ se define coordenada a coordenada.

Definición 1.1.7. Denotaremos por clase de conjuntos a toda familia de conjuntos. Una clase no vacía K de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ es llamada *variedad* si es cerrada bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos.

Conjuntos ordenados

Sea X un conjunto no vacío. Denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ al álgebra del conjunto potencia. El complemento de un subconjunto $Y \subseteq X$ será denotado por $Y - X$ o Y^c.

Definición 1.1.8. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto ordenado.

1. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es *creciente* si para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ tal que $y \leq x$, entonces $x \in Y$.

2. Similarmente, un subconjunto $Y \subseteq X$ es *decreciente* si para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ tal que $x \leq y$, entonces $x \in Y$.

Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. El menor subconjunto creciente que contiene a un subconjunto $Y \subseteq X$ es el conjunto

$$[Y) = \{x \in X : \exists y \in Y (y \leq x)\}$$

y el menor subconjunto decreciente que contiene a un subconjunto $Y \subseteq X$ es el conjunto

$$(Y] = \{x \in X : \exists y \in Y (x \leq y)\}.$$

Si $Y = \{y\}$, entonces escribiremos $[y)$ y $(y]$ en vez de $[\{y\})$ y $(\{y\}]$, respectivamente. Observemos que Y es un subconjunto creciente (resp. subconjunto decreciente) si $Y = [Y)$ (resp. $Y = (Y]$). El conjunto de todos los subconjuntos crecientes (resp. subconjuntos decrecientes) de X será denotado por $\mathrm{Up}(X)$ (resp. $\mathrm{Dw}(X)$).

Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto ordenado. Sea Y un subconjunto no vacío de X. Recordemos que x es el *supremo* de Y, y lo simbolizaremos $x = \sup Y$ ó $x = \bigvee Y$, si es la menor de las cotas superiores. Por otro lado, recordemos que x es el *ínfimo* de Y, y lo simbolizaremos $x = \inf Y$ ó $x = \bigwedge Y$, si es la mayor de las cotas inferiores. Se puede probar que si un subconjunto tiene supremo y/o ínfimo, éstos son únicos.

Dados dos conjuntos parcialmente ordenados $\langle X, \leq_X \rangle$ y $\langle Y, \leq_Y \rangle$, un *isomorfismo de orden* de $\langle X, \leq_X \rangle$ a $\langle Y, \leq_Y \rangle$ es una función $f \colon X \to Y$ con la propiedad que para cada x e y en X, $x \leq_X y$ si y sólo si $f(x) \leq_Y f(y)$. Todo isomorfismo de orden es inyectivo pero no necesariamente suryectivo. Decimos que los conjuntos parcialmente ordenados $\langle X, \leq_X \rangle$ y $\langle Y, \leq_Y \rangle$ son *isomorfos* si existe un isomorfismo de orden suryectivo $f \colon X \to Y$.

Topología

Definición 1.1.9. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{T}$ es una topología definida en X y que el par $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un *espacio topológico*, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,

2. para cada subfamilia $\{U_i \in \mathcal{T} : i \in I\}$ de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,

3. para cada subfamilia finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de $\mathcal{T}$, $\bigcap\{U_1, \ldots, U_n\} \in \mathcal{T}$.

Los elementos de $\mathcal{T}$ son llamados subconjuntos *abiertos* del espacio topológico.

Definición 1.1.10. Sea X un conjunto. Una *base* para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, llamados *elementos básicos*, tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B tal que $x \in B$.

2. Si $x \in B_1 \cap B_2$, donde B_1 y B_2 son elementos básicos, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definición 1.1.11. Sea $\mathcal{B}$ una base. La *topología generada* por $\mathcal{B}$ es la topología $\mathcal{T}$ que cumple:

$$U \in \mathcal{T} \text{ si para cada } x \in U, \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \text{ y } B \subseteq U.$$

Teorema 1.1.12. *Sea $\mathcal{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre X. Entonces la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ es igual a $\mathcal{T}$.*

Definición 1.1.13. Sea X un conjunto. Una *subbase* para una topología sobre X es una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Definición 1.1.14. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que *cubre* X, o que es un *cubrimiento* de X, si la unión de todos los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Un espacio X se dice *compacto* si de cada cubrimiento por conjuntos abiertos $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.

Definición 1.1.15. Dados dos espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_X\rangle, \langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$, diremos que una función $f : X \to Y$ es *continua* si para todo conjunto abierto V en Y la preimagen $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ es un abierto en X. f es llamada un *homeomorfismo* si f es biyectiva, y además, f y f^{-1} son continuas. En este caso decimos que los espacios son homeomorfos.

Un subconjunto Y de un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un *cerrrado* si el complemento $X - Y$ es abierto. La colección de todos los subconjuntos cerrados de un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ será denotada por $\mathcal{C}(X)$. Por otro lado, la colección de los subconjuntos abiertos-cerrados de $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ será denotada por $\mathrm{Clop}(X)$.

Recordemos que si $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio topológico e Y es un subconjunto de X entonces la familia $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ de subconjuntos de Y es una topología sobre Y llamada la *topología relativa* y el espacio topológico $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es un *subespacio* de $\langle X, \mathcal{T}\rangle$.

Teoría de categorías

Definición 1.1.16. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de:

1. Una colección de $\mathcal{C}$-objetos,
2. una colección de $\mathcal{C}$-morfismos,
3. operaciones que asignan a cada $\mathcal{C}$-morfismo f un $\mathcal{C}$-objecto $\mathrm{dom} f$ (el "dominio" de f) y un $\mathcal{C}$-objecto $\mathrm{cod} f$ (el "codominio" de f),
4. Una operación que asigna a cada par $\langle g, f\rangle$ de $\mathcal{C}$-morfismos con $\mathrm{dom} g = \mathrm{cod} f$, un $\mathcal{C}$-morfismo $g \circ f$, llamada la composición de f y g, con $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom} f$ y $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod} g$, es decir $g \circ f \colon \mathrm{dom} f \to \mathrm{cod} g$, y tal que si $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ y $h \colon C \to D$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
5. Para cada $\mathcal{C}$-objeto A existe un $\mathcal{C}$-morfismo $Id_A \colon A \to A$, llamado el morfismo identidad sobre A, tal que para cualquier morfismo $f \colon B \to A$ y $g \colon A \to C$ se cumple que $Id_A \circ f = f$ y $g \circ Id_A = g$.

Un morfismo $f \colon A \to B$ de una categoría $\mathcal{C}$ es un *monomorfismo* en $\mathcal{C}$ si para cualquier par $g, h \colon C \to A$ de $\mathcal{C}$-morfismos, la igualdad $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$. Un morfismo $f \colon A \to B$ de una categoría $\mathcal{C}$ es un *epimorfismo* en $\mathcal{C}$ si para cualquier par $g, h \colon B \to C$ de $\mathcal{C}$-morfismos, la igualdad $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$. Un morfismo $f \colon A \to B$ de una categoría $\mathcal{C}$ es un *isomorfismo* o *invertible* en $\mathcal{C}$ si existe un $\mathcal{C}$-morfismo $g \colon B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$. Todo isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo pero el recíproco no es cierto en general. Dada una categoría $\mathcal{C}$ denominamos su *categoría dual* $\mathcal{C}^{op}$ a la categoría que tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son de la forma $f^{op} \colon B \to A$ para cada $\mathcal{C}$-morfismo $f \colon A \to B$. La composición $f^{op} \circ g^{op}$ está definida cuando $g \circ f$ está definida en $\mathcal{C}$ y se cumple que $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$. Notar que $\mathrm{dom} f^{op} = \mathrm{cod} f$ y $\mathrm{cod}(f^{op}) = \mathrm{dom} f$.

Definición 1.1.17. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Diremos que $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un *funtor covariante* si asigna

1. a cada $\mathcal{C}$-objeto A, un $\mathcal{D}$-objeto $F(A)$,

2. a cada $\mathcal{C}$-morfismo $f\colon A \to B$, un $\mathcal{D}$-morfismo $F(f)\colon F(A) \to F(B)$, tal que

   (a) $F(Id_A) = Id_{F(A)}$ para todo $\mathcal{C}$-objeto A, y

   (b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, siempre que $g \circ f$ esté definido.

A un funtor covariante $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ lo llamaremos *contravariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. El *funtor identidad* $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es el que $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ para todo $\mathcal{C}$-objeto y $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo $\mathcal{C}$-morfismo. Una *transformación natural* entre los funtores covariantes $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación τ que asigna a cada $\mathcal{C}$-objeto A, un $\mathcal{D}$-morfismo $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$ tal que para todo $\mathcal{C}$-morfismo $f\colon A \to B$, $\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$. Un funtor covariante $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un *isomorfismo de categorías* si existe un funtor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$. En este caso, decimos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfas y denotamos $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$. Dada una transformación natural τ, si para cada $\mathcal{C}$-objeto A, τ_A es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ decimos que τ es un *isomorfismo natural*. Denotamos los isomorfimos naturales por $\tau\colon F \cong G$. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es llamado una *equivalencia de categorías* si existe un funtor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y existen isomorfismos naturales $\tau\colon 1_{\mathcal{C}} \cong G \circ F$ y $\sigma\colon 1_{\mathcal{D}} \cong F \circ G$ del funtor identidad sobre $\mathcal{C}$ en $G \circ F$ y del funtor identidad sobre $\mathcal{D}$ en $F \circ G$. Las Categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes* si existe una equivalencia $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Por último, diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *dualmente equivalentes* si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}^{op}$ son equivalentes.

1.2 Nociones de retículos y semirretículos

Incluimos algunas propiedades elementales de los semirretículos distributivos que son necesarias para este trabajo. Para más detalles consultar [9], [17] y [13].

Definición 1.2.1. Un *semirretículo superior* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \vee \rangle$ tal que la operación $\vee$ es binaria y cumple para todo $x, y, z \in A$

1. $x \vee x = x$,

2. $x \vee y = y \vee x$,

3. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

Un *semirretículo inferior* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge \rangle$ tal que la operación $\wedge$ es binaria y cumple para todo $x, y, z \in A$

1. $x \wedge x = x$,

2. $x \wedge y = y \wedge x$,

3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

Teorema 1.2.2. *Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee \rangle$ un semirretículo superior. Si en $\mathbf{A}$ definimos una relación binaria $\leq$ por:*

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b,$$

entonces $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde

$$\sup \{a, b\} = a \vee b.$$

Análogamente, sea $\mathbf{A} = \langle A, \wedge \rangle$ un semirretículo inferior. Si en $\mathbf{A}$ definimos una relación binaria $\leq$ por:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a,$$

entonces $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde

$$\inf \{a, b\} = a \wedge b.$$

En ambos casos este orden es conocido como el orden natural *del semirretículo.*

Definición 1.2.3. Sea L un conjunto no vacío. Un *retículo* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ dotada de dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ tal que $\langle L, \vee \rangle$ es un semirretículo superior y $\langle L, \wedge \rangle$ es un semirretículo inferior.

Definición 1.2.4. Sea $\boldsymbol{L}$ un retículo. $\boldsymbol{L}$ se dice *distributivo* si para todo $a, b, c \in L$ se verifica la siguiente propiedad:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)\,.$$

Es sencillo comprobar que la propiedad anterior es equivalente a:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Definición 1.2.5. Un *semirretículo superior acotado* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 0 \rangle$ tal que $\langle A, \vee \rangle$ es un semirretículo superior y 0 es una operación 0-aria que cumple $a \vee 0 = a$ para todo $a \in A$. Análogamente, un *semirretículo inferior acotado* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$ tal que $\langle A, \wedge\rangle$ es un semirretículo inferior y 1 es una operación 0-aria que cumple $a \wedge 1 = a$ para todo $a \in A$. Un *retículo acotado* es una estructura algebraica $\boldsymbol{A} = \langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ donde $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 0\rangle$ y $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$ son semirretículos acotados.

A partir de ahora, el término semirretículo referirá a semirretículo inferior acotado, a menos que se indique lo contrario. Como ejemplo tenemos que para cada conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq\rangle$, la estructura $\mathbf{Up}(X) = \langle \mathrm{Up}(X), \cap, X\rangle$ es un semirretículo.

Teorema 1.2.6. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$ *un semirretículo finito. Entonces* $\mathbf{A}$ *es un retículo donde la operación* $\vee$ *definida por*

$$a \vee b = \bigwedge([a) \cap [b)).$$

Un ejemplo importante de retículos distributivos con operadores son las álgebras de Boole, introducidas por George Boole a principios del siglo XIX con el objetivo de dar una interpretación algebraica de la Lógica Proposicional Clásica.

Definición 1.2.7. Un *álgebra de Boole* es una estructura $\mathbf{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ con dos operaciones binarias, una operación unaria y dos operaciones 0-arias que satisfacen:

1. $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado.

2. Para todo $b \in B$, $b \vee \neg b = 1$ y $b \wedge \neg b = 0$.

Definición 1.2.8. Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo. Un subconjunto $F \subseteq A$ es un *filtro* de $\mathbf{A}$ si es un subconjunto creciente no vacío ($1 \in F$) tal que para todo $a, b \in F$, $a \wedge b \in F$. Denotaremos al conjunto de todos los filtros de $\mathbf{A}$ por $\mathrm{Fi}(\mathbf{A})$.

Es fácil ver que $\mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. El filtro generado por el subconjunto $X \subseteq A$ será denotado por $F(X)$. Si $X = \{a\}$, $F(\{a\}) = F(a) = [a)$. Diremos que un filtro propio es *irreducible* o *primo* si para todo par de filtros F_1, F_2 tales que $F = F_1 \cap F_2$, se sigue que $F = F_1$ o $F = F_2$. Denotaremos al conjunto de todos los filtros irreducibles de un semirretículo $\mathbf{A}$ por $X(\mathbf{A})$. En el caso de las álgebras de Boole tenemos que los filtros irreducibles coinciden con los llamados filtros primos y ultrafiltros.

Teorema 1.2.9. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de Boole. Sea* P *un filtro propio de* $\mathbf{A}$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es un filtro irreducible.*

2. *P es filtro primo, es decir, para todo $a, b \in A$ si $a \vee b \in P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$.*

3. *P es un ultrafiltro, es decir, si para todo $K \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $P \subseteq K$ entonces $P = K$ o $K = A$.*

Definición 1.2.10. Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo. Un conjunto no vacío $I \subseteq A$ es llamado un *ideal de orden* si es un subconjunto decreciente y para todo $a, b \in I$ tenemos que existe $c \in I$ tal que $a, b \leq c$. Denotaremos al conjunto de todos los ideales de orden de un semirretículo $\mathbf{A}$ por $\mathrm{Id}(\mathbf{A})$.

La noción de ideal de orden es una generalización de la noción de ideal en retículos. En esta última estructura algebraica ambas nociones coinciden como enunciaremos a continuación.

Definición 1.2.11. Sea $\mathbf{A}$ un retículo. Un ideal es un subconjunto no vacío I de A decreciente y tal que para todo $a, b \in I$ tenemos que $a \vee b \in I$.

Teorema 1.2.12. *Sea $\mathbf{A}$ un retículo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es un ideal,*

2. *I es un ideal de orden.*

Uno de los resultados más importantes de la teoría de retículos distributivos es el teorema de separación, Teorema del filtro Primo, o también conocido como el Teorema de Birkhoff-Stone. Este resultado es luego generalizado por Grätzer para semirretículos superiores acotados distributivos en [30]. Una prueba del siguiente teorema puede ser encontrado en [9].

Teorema 1.2.13. *Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo. Sea $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ y sea $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $F \cap I = \emptyset$. Entonces existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Los semirretículos aparecen como una generalización natural de los retículos. Similarmente, los semirretículos distributivos actúan como una generalización natural de los retículos distributivos.

Definición 1.2.14. Un semirretículo $\mathbf{A}$ es *distributivo* si para todo $a, b, c \in A$ tales que $a \wedge b \leq c$ existen $a_1, b_1 \in A$ tales que $a \leq a_1$, $b \leq b_1$ y $c = a_1 \wedge b_1$.

Se puede probar que un semirretículo $\mathbf{A}$ es distributivo [30, 9] si y sólo si el retículo de sus filtros es distributivo. Recordemos que en un semirretículo distributivo $\mathbf{A}$, un filtro F es irreducible si y sólo si $A - F = F^c$ es un ideal de orden. De forma equivalente, en un semirretículo distributivo $\mathbf{A}$, un filtro F es irreducible si y sólo si para cada $a, b \in A$ tales que $a, b \notin F$, existen $c \notin F$ y $f \in F$ tales que $a \wedge f \leq c$ y $b \wedge f \leq c$ ([13, 9]).

Como se sigue de [30, Section II.5, Lemma 1], un retículo $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ es distributivo sii el reducto $\langle A, \wedge \rangle$ es un semirretículo inferior distributivo. La clase de los semirretículos distributivos no es una variedad, y tenemos que la variedad generada por esta es la clase de todos los semirretículos. Los semirretículos distributivos aparecen en muchas estructuras algebraicas ordenadas como veremos a continuación.

Ejemplo 1.2.1. Una tupla $\langle A, \wedge, \rightarrow \rangle$ es un *semirretículo implicativo* (ver [17]) si $\langle A, \wedge \rangle$ es un semirretículo, y la operación $\rightarrow$ es adjunto a derecha de $\wedge$, es decir, para cualquier $a, b, c \in A$, $a \wedge b \leq c$ sii $a \leq b \rightarrow c$. Los semirretículos que son reductos de semirretículos implicativos son siempre distributivos y acotados, ver [4]. La clase de los semirretículos implicativos es una variedad.

Ejemplo 1.2.2. Un *álgebra de Heyting* es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ es un retículo acotado, y $\langle A, \wedge, \rightarrow \rangle$ es un semirretículo implicativo. Luego, los retículos subyacentes en las álgebras de Heyting son siempre retículos distributivos acotados.

Las álgebras de Heyting fueron introducidas por Arend Heyting (1930) para formalizar la lógica intuicionista. Al igual que las álgebras de Boole, las álgebras de Heyting forman una variedad. Además, tenemos que toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting donde $a \rightarrow b$ está definida como $\neg a \vee b$. Las álgebras de Heyting actúan como los modelos algebraicos de la lógica intuicionista.

Ejemplo 1.2.3. Ejemplos fundamentales de las estructuras mencionadas están asociados a conjuntos parcialmente ordenados. Para cada conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ la estructura $\langle \mathrm{Up}(X), \cap, \Rightarrow \rangle$ es un semirretículo implicativo acotado donde la implicación $\Rightarrow$ está definida por

$$U \Rightarrow V = \{x \in X : [x) \cap U \subseteq V\},$$

para cada $U, V \in \mathrm{Up}(X)$. Entonces, $\langle \mathrm{Up}(X), \cup, \cap, \Rightarrow, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Heyting.

Definición 1.2.15. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos semirretículos. Una aplicación $h \colon A \to B$ es llamada un *homomorfismo de semirretículos* si $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$ para cada $a, b \in A$ y $h(1) = 1$.

Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq \rangle$ y la aplicación $\beta_{\mathbf{A}} \colon A \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ definida por

$$\beta_{\mathbf{A}}(a) = \{P \in X(\mathbf{A}) : a \in P\}.$$

Por conveniencia, omitimos el subíndice de $\beta_{\mathbf{A}}$, cuando no exista posibilidad de confusión.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema de representación para semirretículos distributivos que puede hallarse en [9].

Teorema 1.2.16. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo distributivo. Entonces, la aplicación* $\beta_{\mathbf{A}} \colon A \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ *es un monomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{Up}(X(\mathbf{A}))$.

1.2.1 $\mathcal{DS}$-espacios

En esta subsección recordamos los espacios topológicos duales de los semirretículos distributivos, cuya construcción fue dada en [13] y [9] y damos algunas definiciones que luego extenderemos. Estos espacios duales están basados en los espacios dados por Grätzer en [30].

Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico. Denotaremos por $\mathcal{KO}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos abiertos y compactos de X y sea $D(X)$ el conjunto de sus complementados, es decir, $D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{KO}(X)\}$. Recordemos que la *clausura* de un subconjunto es la intersección de todos los conjuntos cerrados que lo contienen. La clausura de un subconjunto $Y \subseteq X$ será denotada por $\mathrm{cl}(Y)$. Recordemos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es *saturado* si es intersección de conjuntos abiertos. El menor conjunto saturado que contiene a Y es la *saturación* de Y y será denotada por $\mathrm{sat}(Y)$.

Recordemos que un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es T_0 si para todo $x, y \in X$ existe un abierto que contiene uno de los puntos y no contiene el otro. En todo espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ podemos definir el *preorden de especialización* de la siguiente manera: $x \preceq y$ si y sólo si $x \in \mathrm{cl}(\{y\}) = \mathrm{cl}(y)$ para $x, y \in X$. Es fácil ver que $\preceq$ es una relación reflexiva y transitiva. Si X es T_0 entonces la relación $\preceq$ es un orden parcial. El orden dual de $\preceq$ será denotado por $\leq$, es decir, $x \leq y$ si y sólo si $y \in \mathrm{cl}(x)$. Además, si X es T_0 entonces $\mathrm{cl}(x) = [x)$, $\mathrm{sat}(Y) = (Y]$, y cada subconjunto abierto (resp. cerrado) es un subconjunto decreciente (resp. creciente) respecto a $\leq$.

Recordemos que un subconjunto cerrado no vacío $Y \subseteq X$ de un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es *irreducible* si $Y \subseteq Z \cup W$ para subconjuntos cerrados Z y W implica $Y \subseteq Z$ o $Y \subseteq W$.

Definición 1.2.17. Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es *sober* si para cada conjunto cerrado irreducible $Y \subseteq X$, existe un único $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(x) = Y$.

Para más información sobre espacios sober ver [29] o [51]. Como propiedad importante tenemos que todo espacio sober es T_0. Veamos una equivalencia de esta definición que será muy utilizada lo largo del trabajo. Un subconjunto $K \subseteq X$ es llamado *dirigido* si para cualquier $x, y \in K$ existe $z \in K$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $K \subseteq X$ es llamado *dualmente dirigido* si para cualquier $x, y \in K$ existe $z \in K$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

Teorema 1.2.18. *[13] Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ de subconjuntos abiertos y compactos para $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es sober*
2. *$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es T_0 y $\bigcap\{U : U \in \mathcal{L}\} \cap Y \neq \emptyset$ para cada subconjunto cerrado Y y para cualquier subconjunto dualmente dirigido $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $Y \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{L}$.*

La siguiente definición es equivalente a la definición dada por G. Grätzer en [30].

Definición 1.2.19. [13] Un $\mathcal{DS}$*-espacio* es un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ tal que:

1. El conjunto de todos los subconjuntos compactos y abiertos $\mathcal{KO}(X)$ forma una base para la topología $\mathcal{T}$ sobre X.
2. $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es sober.

Los $\mathcal{DS}$-espacios son los espacios topológicos dualesa los semirretículos distributivos. Es fácil comprobar que si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio, entonces $\langle D(X), \cap, X \rangle$ es un semirretículo distributivo (ver [30]).

Por otra parte, sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo. Consideremos la familia de subconjuntos de $X(\mathbf{A})$ dada por $\mathcal{K}_{\mathbf{A}} = \{\beta(a)^c : a \in A\}$. Es fácil ver que $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}$ cumple las condiciones para ser una base topológica y sea $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ la topología generada por ella. Entonces, $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio, llamado el *espacio dual de* $\mathbf{A}$ (ver [9] y [13]). El orden dual al orden de especialización del espacio $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$ es la relación de inclusión $\subseteq$, es decir, $Q \in \mathrm{cl}(P)$ sii $P \subseteq Q$. Una característica importante de mencionar es que dado un semirretículo distributivo $\mathbf{A}$, los retículos $\mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ son dualmente isomorfos bajo las aplicaciones $\psi\colon \mathrm{Fi}(\mathbf{A}) \to \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ donde

$$\psi(F) = \{P \in X(\mathbf{A}) : F \subseteq P\} = \bigcap\{\beta(a) : a \in F\}$$

para cada $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ y $\phi\colon \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \to \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$, donde

$$\phi(Y) = \{a \in A : Y \subseteq \beta(a)\}$$

para cada $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$.

Como es de esperarse, tenemos que todo $\mathcal{DS}$-espacio $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es homeomorfo al espacio topológico $\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{D(X)}\rangle$ y que todo semirretículo distributivo $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$ es un álgebra isomorfa por medio de la aplicación $\beta_{\mathbf{A}}$ al semirretículo distributivo $D(X(\mathbf{A})) = \langle D(X(\mathbf{A})), \cap, X(\mathbf{A})\rangle$.

Tenemos dos categorías dualmente equivalentes. La primera es la conformada por los semirretículos distributivos como objetos y los homomorfismos de semirretículos como morfismos

$$\mathcal{DSH} = \text{semirretículos distributivos } + \text{homorfismos.}$$

La segunda categoría es la conformada por los $\mathcal{DS}$-espacios como objetos y cuyos morfismos son relaciones binarias llamadas $\wedge$-relaciones, en las que profundizaremos más adelante

$$\mathcal{TSR} = \mathcal{DS}\text{-espacios } + \wedge\text{-relaciones.}$$

1.2.2 Espacios de Stone

En 1936, Stone publica su recordado artículo [57] sobre la representación topológica para las álgebras de Boole. Posteriormente, el mismo Stone, generaliza dicha representación a las variedades de los retículos distributivos acotados y de las álgebras de Heyting en [58]. Como las álgebras de Boole tienen reductos de semirretículos distributivos, los $\mathcal{DS}$-espacios pueden verse como una generalización de los espacios de Stone. Primero recordemos algunas definiciones.

Definición 1.2.20. Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ se dirá *cero-dimensional* si tiene una base de conjuntos abiertos-cerrados. Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ se dirá *Hausdorff* o T_2 si dado cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos y disjuntos U, V tales que $x \in U$ e $y \in V$.

Definición 1.2.21. Un *espacio de Stone*, también llamado espacio Booleano, es un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ que es cero dimensional, T_0 y compacto. Equivalentemente, un espacio de Stone es un espacio totalmente disconexo y compacto. Notemos que cada espacio de Stone es Hausdorff (ver [2] para más detalles).

Todo espacio topológico Hausdorff es sober. Es fácil comprobar que todo espacio de Stone es un $\mathcal{DS}$-espacio y que $\mathcal{KO}(X) = D(X) = \mathrm{Clop}(X)$. Por lo tanto tenemos que si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio de Stone, entonces $\mathrm{Clop}\,(X)$ es una base para $\mathcal{T}$ y la estructura $\mathbf{Clop}\,(X) = \langle \mathrm{Clop}\,(X), \cup, \cap, \neg, \emptyset, X \rangle$ es una álgebra de Boole donde la negación $\neg$ está dada por $\neg U = X - U$ para todo $U \in \mathrm{Clop}(X)$. Dicha álgebra es llamada *álgebra dual* del espacio $\langle X, \mathcal{T} \rangle$.

Por otro lado, para cada álgebra de Boole $\mathbf{A}$ podemos asociar un espacio de Stone $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$ con la topología $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ determinada por la base $\mathcal{KO} = \beta[A] = \{\beta(a) \mid a \in A\}$, donde recordemos que $\beta(a) = \{x \in X(\mathbf{A}) \mid a \in x\}$. De nuevo, todo espacio de Stone $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es homeomorfo al espacio topológico $\langle X(\mathbf{Clop}(X)), \mathcal{T}_{\mathbf{Clop}(X)} \rangle$ y que toda álgebra de Boole $\mathbf{A}$ es isomorfa por medio de la aplicación β al álgebra $\mathbf{Clop}(X(\mathbf{A}))$.

Tenemos dos categorías dualmente equivalentes. La primera es la conformada por las álgebras de Boole como objetos y los homomorfismos de álgebras de Boole como morfismos. La segunda categoría es la conformada por los espacios de Stone como objetos y cuyos morfismos son funciones continuas, que pueden ser vistas como un caso particular de las $\wedge$-relaciones.

1.3 Lógica modal

El nacimiento de la lógica modal como disciplina matemática se sitúa a principios del siglo XX con los trabajos de C.I. Lewis. En sus trabajos, Lewis desarrolló cálculos deductivos para la implicación estricta, una modalidad binaria, que en algunos casos se define a partir de un operador de posibilidad y en otros a partir de un operador de imposibilidad. Pero la principal diferencia entre la lógica modal moderna y el trabajo de Lewis y sus contemporáneos es que este último es esencialmente sintáctico. La tradición sintáctica inaugurada por Lewis que alimenta la lógica moderna pero a esta se le suman la tradición algebraica y la semántica. En esta sección haremos un breve resúmen de los conceptos básicos. Para más detalles ver [5] o [18].

El *lenguaje modal básico* está definido usando un conjunto de letras proposicionales (símbolos proposicionales o variables proposicionales) Var cuyos elementos son usualmente denotadas p, q, r, etc., y un operador modal unario $\Box$. Las fórmulas ϕ bien construidas del lenguaje modal básico están dadas por las reglas

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \varphi \vee \phi \mid \Box\phi,$$

donde p puede ser cualquier elemento de Var. Podemos definir un operador modal dual $\Diamond$ de la siguiente manera: $\Diamond\phi := \neg\Box\neg\phi$. También, usaremos las abreviaturas clásicas para la conjunción, implicación, bi-implicación y la constante de verdad: $\varphi \wedge \phi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\phi)$, $\phi \to \varphi := \neg\phi \vee \varphi$, $\phi \leftrightarrow \varphi := (\phi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \phi)$ y $\top := \neg\bot$. Denotaremos por $Form$ al conjunto de fórmulas bien construidas del lenguaje modal básico.

Una *sustitución* es una aplicación $\sigma\colon Var \to Form$. Una sustitución induce una aplicación $\overline{\sigma}\colon Form \to Form$ que se define recursivamente como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\sigma}(\bot) & = & \bot \\
\overline{\sigma}(p) & = & \sigma(p) \\
\overline{\sigma}(\neg\phi) & = & \neg\overline{\sigma}(\phi) \\
\overline{\sigma}(\phi \vee \theta) & = & \overline{\sigma}(\phi) \vee \overline{\sigma}(\theta) \\
\overline{\sigma}(\Box\psi) & = & \Box(\overline{\sigma}(\psi)).
\end{array}$$

Cuando no haya riesgo de confusión, denotaremos a la extensión solo con el símbolo de la sustitución. Diremos que una fórmula χ es una instancia de sustitución de ψ si existe una sustitución τ tal que $\tau(\psi) = \chi$.

Definición 1.3.1. Una *lógica modal normal* L es un conjunto de fórmulas que contiene todas las tautologías, $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$, es cerrado bajo modus ponens, bajo sustitución y bajo la regla de necesidad: si $\phi \in L$ entonces $\Box\phi \in L$.

A la menor lógica modal normal se la conoce como la *lógica* **K**. Dada una lógica L, a las fórmulas que pertenecen a L las llamaremos *teoremas* de L. Los siguientes son teoremas de toda lógica normal para fórmulas ϕ y φ cualesquiera:

1. $\Box(\phi \wedge \varphi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\varphi)$,

2. $(\Box\phi \vee \Box\varphi) \to \Box(\phi \vee \varphi)$,

3. $\Diamond(\phi \vee \varphi) \leftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\varphi)$,

4. $\Diamond(\phi \wedge \varphi) \to (\Diamond\phi \wedge \Diamond\varphi)$,

5. $\Diamond\neg\phi \leftrightarrow \neg\Box\phi$.

La clase de las álgebras modales, es decir, álgebras de Boole dotadas con un operador modal normal, es la semántica algebraica de las lógicas modales normales.

1.3.1 Semántica de Kripke

Es con la obra de Kripke ([44, 45, 46]) que se introduce la semántica conocida como semántica de mundos posibles. Es la semántica estándar para la lógica modal.

Un *marco de Kripke* para el lenguaje modal básico es un par $\mathfrak{F} = (W, R)$ tal que W es un conjunto no vacío, llamado conjunto de estados, y R es una relación binaria sobre W.

Un *modelo de Kripke* para el lenguaje modal básico es un par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, donde $\mathfrak{F}$ es un marco para el lenguaje modal básico, y V es una función que asigna a cada letra proposicional p un subconjunto $V(p)$ de W. Informalmente pensamos a $V(p)$ como el conjunto de puntos en nuestro modelo donde p es verdadero. La función V es llamada una *valuación.* Dado un modelo $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, decimos que $\mathfrak{M}$ está basado sobre el marco $\mathfrak{F}$, o que $\mathfrak{F}$ es el marco subyacente en $\mathfrak{M}$.

Sea un modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ y $w \in W$. Entonces definimos inductivamente la noción de una *fórmula verdadera en* $\mathfrak{M}$ *en* w como sigue:

1. $\mathfrak{M}, w \vDash p$ sii $w \in V(p)$, donde $p \in Var$,

2. $\mathfrak{M}, w \vDash \bot$ nunca,

3. $\mathfrak{M}, w \vDash \neg\phi$ sii no vale $\mathfrak{M}, w \vDash \phi$,

4. $\mathfrak{M}, w \vDash \phi \vee \psi$ sii $\mathfrak{M}, w \vDash \phi$ o $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$,

5. $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\phi$ sii para todo $v \in W$ tal que Rwv tenemos $\mathfrak{M}, v \vDash \phi$.

Se sigue de esta definición que $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\phi$ si y sólo si para algún $v \in W$ con Rwv, tenemos $\mathfrak{M}, v \vDash \phi$. Finalmente, diremos que un conjunto de fórmulas Σ es verdadero en un elemento w de un modelo $\mathfrak{M}$, notación: $\mathfrak{M}, w \vDash \Sigma$, si todos las fórmulas de Σ son verdaderas en w.

La valuación V de las letras proposicionales se extiende a fórmulas arbitrarias de forma tal que $V(\phi)$ siempre denote al conjunto de estados en los que ϕ es verdadero:

$$V(\phi) := \{w : \mathfrak{M}, w \vDash \phi\}$$

Una fórmula ϕ *es válida en un modelo* $\mathfrak{M}$ (notación: $\mathfrak{M} \vDash \phi$) si es verdadera en todos los puntos de $\mathfrak{M}$ (es decir si $\mathfrak{M}, w \vDash \phi$ para todo $w \in W$). Una fórmula ϕ es satisfacible en un modelo $\mathfrak{M}$ si existe algún elemento w en $\mathfrak{M}$ en el cual ϕ es verdadero; una fórmula es refutable en un modelo si su negación es satisfacible.

Un conjunto de fórmulas Σ es válido (satisfacible, respectivamente) en un modelo $\mathfrak{M}$ si $\mathfrak{M}, w \vDash \Sigma$ para todos los elementos w en $\mathfrak{M}$ (algún elemento w en $\mathfrak{M}$, respectivamente).

Una fórmula ϕ es válida en el marco $\mathfrak{F}$, denotado por $\mathfrak{F} \vDash \phi$, si es válida en todo modelo $\mathfrak{M}$ basado sobre $\mathfrak{F}$ (es decir, $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$). Un conjunto de fórmulas Σ es válido en un marco $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{M} \vDash \Sigma$ para todos los modelos $\mathfrak{M}$ basados sobre $\mathfrak{F}$.

Supongamos que C es una clase de marcos. Una fórmula $\phi \in Form$ es válida en C, denotado por $\vDash_{\mathsf{C}} \phi$, si $\mathfrak{F} \vDash \phi$ para todo $\mathfrak{F} \in \mathsf{C}$. En toda clase de marcos C, el conjunto de todas las fórmulas válidas en todo marco perteneciente a C es una lógica normal, llamada la lógica de C. Por otro lado, todo teorema de la menor lógica modal normal **K** es válido en todo marco y en todo modelo.

1.3.2 Semántica de entornos

Como fue mencionado, todos los teoremas de la menor lógica modal normal **K** son válidos en todos los modelos de Kripke y también lo son las siguientes reglas de inferencia:

(RE) De $\phi \leftrightarrow \psi$, inferimos $\Box\phi \leftrightarrow \Box\psi$,

(RM) De $\phi \to \psi$, inferimos $\Box\phi \to \Box\psi$,

(Nec) De ϕ, inferimos $\Box\phi$.

Para muchas interpretaciones, estas fórmulas y reglas son relativamente no controversiales. Sin embargo, en algunas interpretaciones del lenguaje modal básico, la validez de una o más fórmulas y reglas de inferencia puede ser cuestionada. Las lógicas modales que no incluyen una o más de estas fórmulas y/o reglas son llamadas lógicas modales no normales. Es en este contexto que las estructuras de entornos surgen como semántica de algunas de estas lógicas, siendo una generalización de las estructuras tipo Kripke. Mientras que los marcos de Kripke asocian a cada elemento w con un único conjunto de elementos (la imagen del elemento por la relación de Kripke), los marcos de entornos asocian a cada w con múltiples conjuntos. Lo que sigue está basado en el libro [50].

Sea W un conjunto no vacío. Una función $N\colon W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ es llamada una *función de entornos*. Un par $\langle W, N\rangle$ es llamado un *marco de entornos* si W es un conjunto no vacío, llamado conjunto de estados, y N es una función de entornos. A veces es conveniente tratar a la función de entornos $N\colon W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ como una relación. Más precisamente, cada función de entornos N corresponde a una relación $R_N \subseteq W \times \mathcal{P}(W)$ tal que para cualquier $w \in W$, $X \in \mathcal{P}(W)$, wR_NX sii $X \in N(w)$.

Supongamos que $\mathcal{F} = \langle W, N\rangle$ es un marco de entornos. Un *modelo* basado en $\mathcal{F}$ es una tupla $\langle W, N, V\rangle$, donde $V : Var \to \mathcal{P}(W)$ es una función valuación.

Supongamos que $\mathcal{M} = \langle W, N, V\rangle$ es un modelo de entornos y que $w \in W$. La verdad de las fórmulas $\phi \in Form$ en w se define por recursión sobre la estructura de ϕ:

1. $\mathcal{M}, w \vDash p$ sii $w \in V(p)$ donde $p \in Var$,

2. $\mathcal{M}, w \vDash \bot$ nunca,

3. $\mathcal{M}, w \vDash \neg\phi$ sii no vale $\mathcal{M}, w \vDash \phi$

4. $\mathcal{M}, w \vDash \phi \vee \psi$ sii $\mathcal{M}, w \vDash \phi$ ó $\mathcal{M}, w \vDash \psi$,

5. $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\phi$ sii $V(\phi) \in N(w)$ donde $V(\phi) = \{w : \mathcal{M}, w \vDash \phi\}$.

Notar que esta definición implica que $\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi$ sii $W - V(\phi) \notin N(w)$, es decir, $V(\neg\phi) \notin N(w)$. Cada función de entornos $N\colon W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ puede ser asociada con un operador $m_N\colon \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ como sigue: para $X \subseteq W$, $m_N(X) = \{w : X \in N(w)\}$. Intuitivamente, $m_N(X)$ es el conjunto de estados en los cuales X es necesario. Notemos que $m_N(V(\phi)) = \{w : V(\phi) \in N(w)\} = V(\Diamond\phi)$.

La definiciones de verdad y validez de una fórmula en un modelo, en un marco y en una clase de marco son análogas a las dadas para marcos de Kripke. La definición de verdad de los operadores modales (items 4 y 5 en la Definición anterior) fue elegida para asegurar que $\Box$ y $\Diamond$ son duales.

Definiciones alternativas de verdad para los operadores modales básicos pueden ser encontradas en la literatura. En particular, David Lewis (1973) introdujo una variedad de operadores modales interpretados sobre modelos de entornos (incluyendo los definidos debajo) en su libro Counterfactuals. Para comparar estas definiciones diferentes, extenderemos el lenguaje modal básico con las siguientes modalidades: $[\ \rangle$,$\langle\ ]$,$\langle\ \rangle$ y $[\ ]$. Sea $\mathcal{M} = \langle W, N, V\rangle$ una estructura de entornos. La verdad en un estado $w \in W$ para estas modalidades está dado por:

1. $\mathcal{M}, w \models \langle\,]\phi$ sii existe $X \in N(w)$ tal que para todo $v \in X$, $\mathcal{M}, v \models \phi$.

2. $\mathcal{M}, w \models [\,\rangle\phi$ sii para todo $X \in N(w)$, existe $v \in X$ tal que $\mathcal{M}, v \models \phi$.

3. $\mathcal{M}, w \models \langle\,\rangle\phi$ sii existe $X \in N(w)$ tal que existe $v \in X$, tal que $\mathcal{M}, v \models \phi$.

4. $\mathcal{M}, w \models [\,]\phi$ sii para todo $X \in N(w)$, para todo $v \in X$, $\mathcal{M}, v \models \phi$.

La primera observación es que sólo hay dos modalidades primitivas. De hecho, las siguientes fórmulas valen sobre todos los modelos de entornos:

1. $\langle\,]\phi \leftrightarrow \neg[\,\rangle\neg\phi$.

2. $[\,]\phi \leftrightarrow \neg\langle\,\rangle\neg\phi$.

Las modalidades $\langle\,]$ y $[\,\rangle$ definidas sobre otras lógicas jugarán un rol importante en esta tesis. Por eso enunciamos el siguiente lema.

Lema 1.3.2. *[50] Sea $\mathcal{M} = \langle W, N, V\rangle$ un modelo de entornos. Entonces, para cada $w \in W$,*

1. *si $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$ entonces $\mathcal{M}, w \models \langle\,]\phi$; y*

2. *si $\mathcal{M}, w \models [\,\rangle\phi$ entonces $\mathcal{M}, w \models \Box\phi$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M} = \langle W, N, V\rangle$ un modelo de entornos y $w \in W$. Supongamos que $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$. Luego, $V(\phi) \in N(w)$. Entonces, claramente, existe $X \in N(w)$ tal que para cada $v \in X$, $\mathcal{M}, v \models \phi$ (sea $X = V(\phi)$). La prueba del segundo item es análoga. ■

Las recíprocas de ambas afirmaciones del lema anterior no valen en general.

Definición 1.3.3. Un marco $\langle W, N\rangle$ de entornos es *monótono* si $N(w)$ es un subconjunto creciente del conjunto ordenado $\langle \mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq\rangle$ para todo $w \in W$.

Observación 1.3.4. [50] Si $\mathcal{F} = \langle W, N\rangle$ es un marco de entornos. Si $\phi \to \psi$ es válida, entonces también lo es $\langle\,]\phi \to \langle\,]\psi$. Por otro lado, $\Diamond\phi \leftrightarrow \langle\,]\phi$ es válida sobre $\mathcal{F}$ sii $\mathcal{F}$ es monótono.

Definición 1.3.5. Una *lógica modal monótona* L es un conjunto de fórmulas que

1. contiene todas las tautologías,

2. contiene la fórmula $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$,
3. contiene la fórmula $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$,
4. es cerrado bajo modus ponens, bajo sustitución y bajo la regla: si $\phi \leftrightarrow \psi \in L$ entonces $\Box\phi \leftrightarrow \Box\psi \in L$.

A la menor lógica modal monótona se la conoce como la *lógica* **EM**. Todo teorema de la menor lógica modal monótona **EM** es válido en todo marco y en todo modelo de entornos monótono.

La clase de las álgebras monótonas, es decir, álgebras de Boole dotadas con un operador monótono, es la semántica algebraica de las lógicas modales monótonas.

Observación 1.3.6. La notación que nosotros adoptamos para este trabajo sigue la propuesta en [12]. En la mayoría de la literatura, el operador $\Box$ monótono se interpreta al revés de como lo definimos en esta sección, es decir, $\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi$ sii existe $X \in N(w)$ tal que para todo $v \in X$, $\mathcal{M}, v \vDash \phi$. Tradicionalmente, el símbolo $\Box$ tiene un carácter universal, sin embargo, la interpretación de la modalidad monótona tiene un componente universal y otro existencial, por la presencia de ambos cuantificadores, que es lo que genera esta ambigüedad en la notación. Lo mismo ocurre para el operador $\Diamond$. Además, siguiendo la línea de trabajo de [12], utilizaremos la relación de entornos en vez de la función de entornos.

1.4 Extensión Canónica

El estudio de las extensiones canónicas se originó con los trabajos [40],[41] de Jónsson y Tarski para las álgebra de Boole con operadores. La contribución más importante de este trabajo es que proveyó una forma de transportar los beneficios y la metodología de trabajo de la dualidad para las álgebras de Boole a distintas clases de álgebras con operaciones adicionales. Luego, Gehrke, Jónsson, Priestley y Palmigiano, entre otros, generalizaron estos resultados a varios tipos de expansiones de retículos y más adelante para conjuntos ordenados. En este apartado vamos a estudiar las extensiones canónicas de un conjunto parcialmente ordenado. Las definiciones y demostraciones están basadas en [20], [23] y [22].

Definición 1.4.1. Dado un conjunto parcialmente ordenado X una *extensión* es un isomorfismo de orden $e\colon X \to Y$. Para simplificar la notación, suprimimos al isomorfismo e y directamente decimos que Y es una extensión de X, asumiendo a X como subconjunto de Y.

Definición 1.4.2. Una extensión Y de un conjunto parcialmente ordenado X es llamada una *compleción* si es un retículo completo.

Ejemplo 1.4.1. La *compleción de Dedekind-MacNeille* de un conjunto parcialmente ordenado X es el menor retículo completo que extiende X. La compleción de Dedekind-MacNeille es única.

Definición 1.4.3. Sea X un conjunto parcialmente ordenado.

- Un *filtro* de X es un subconjunto no vacío F de X que satisface:

    1. F es creciente, es decir, si $x \in F$, $y \in X$, y $x \leq y$, entonces $y \in F$;
    2. F es dualmente dirigido, es decir, si $x, y \in F$, entonces existe $z \in F$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

- Un *ideal* de X es un subconjunto no vacío I de X que satisface:

    1. I es decreciente, es decir, si $x \in I$, $y \in X$, e $y \leq x$, entonces $y \in I$;
    2. I es dirigido, es decir, si $x, y \in I$, entonces existe $z \in I$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Es claro que en un semirretículo los conceptos coinciden con los de filtro de semirretículo e ideal de orden.

Definición 1.4.4. Sea X un conjunto parcialmente ordenado e Y una extensión. Un elemento c de Y es llamado *cerrado* si es el ínfimo en Y de algún filtro F de X, es decir, $c = \bigwedge_Y F$. Dualmente, un elemento a de Y es llamado *abierto* si es el supremo en Y de algún ideal I de X, es decir $a = \bigvee_Y I$. Denotaremos por $K(Y)$ y $O(Y)$ a los conjuntos de todos los elementos cerrados y abiertos de Y respectivamente.

Definición 1.4.5. Una extensión Y de un conjunto parcialmente ordenado X es *densa* si para todo $y \in Y$ se cumple que

$$y = \bigvee\nolimits_Y \{c : c \leq y \text{ y } c \text{ es cerrado}\} = \bigwedge\nolimits_Y \{a : y \leq a \text{ y } a \text{ es abierto}\}.$$

Definición 1.4.6. Una extensión Y de un conjunto parcialmente ordenado X es llamada *compacta* si dados $D, U \subseteq X$ dos conjuntos no vacíos, D dualmente dirigido y U dirigido tales que $\bigwedge_Y D \leq \bigvee_Y U$, existen $x \in D$ e $y \in U$ tales que $x \leq y$.

Definición 1.4.7. Una compleción Y de un conjunto parcialmente ordenado X que es densa y compacta es llamada *extensión canónica*.

La anterior definición coincide exactamente con las dadas anteriormente para retículos acotados, retículos distributivos acotados y álgebras de Boole. Se puede hacer una construcción simple y directa de las extensiones canónicas utilizando conexiones de Galois entre filtros e ideales de un conjunto ordenado. Como las necesitaremos más adelante damos su definición a continuación.

Definición 1.4.8. Sean X e Y dos conjuntos parcialmente ordenados. Una *conexión de Galois* entre X e Y consiste en un par de aplicaciones que invierten el orden $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ tales que para todo $x \in X$ e $y \in Y$ cumplen:

$$y \leq f(x) \text{ si y sólo si } x \leq g(y).$$

Proposición 1.4.9. *Todo conjunto parcialmente ordenado X tiene una extensión canónica que es única salvo isomorfismos. Por lo tanto, denotaremos a la extensión canónica de X como X^σ.*

Enunciamos algunas propiedades de las extensiones canónicas.

Proposición 1.4.10. *Sean P y Q dos conjuntos parcialmente ordenados. Denotaremos con P^∂ al conjunto P con el orden parcial dual. Entonces:*

1. $\left(P^\partial\right)^\sigma = (P^\sigma)^\partial$.
2. $K\left(\left(P^\partial\right)^\sigma\right) = O(P^\sigma)$ *y* $O\left(\left(P^\partial\right)^\sigma\right) = K(P^\sigma)$.
3. $(P \times Q)^\sigma = P^\sigma \times Q^\sigma$.
4. $K((P \times Q)^\sigma) = K(P^\sigma) \times K(Q^\sigma)$ *y* $O((P \times Q)^\sigma) = O(P^\sigma) \times O(Q^\sigma)$.

Una característica clave de las extensiones canónicas es que las podemos utilizar para estudiar operaciones adicionales sobre el álgebra a extender. Este hecho ha sido utilizado para estudiar su representación en los espacios topológicos duales y para estudiar semánticas relacionales de varias lógicas correspondientes a álgebras de Boole con operadores y a expansiones de retículos distributivos acotados, ya que en estos casos la extensión canónica es (salvo isomorfismos) un álgebra que puede ser vista como el álgebra compleja de alguna estructura relacional.

Dada una función $f\colon X \to Y$ monótona creciente, podemos considerar dos extensiones, la extensión canónica $f^\sigma\colon X^\sigma \to Y^\sigma$ y la extensión canónica dual $f^\pi\colon X^\sigma \to Y^\sigma$.

Definición 1.4.11. Sean X e Y conjuntos parcialmente ordenados y sea $f\colon X \to Y$ una aplicación monótona. Definimos las aplicaciones $f^{\sigma}, f^{\pi}\colon X^{\sigma} \to Y^{\sigma}$ mediante:

$$f^{\sigma}(u) = \bigvee \left\{ \bigwedge \{f(x) : c \leq x \in X\} : u \geq c \in K(X^{\sigma}) \right\},$$
$$f^{\pi}(u) = \bigwedge \left\{ \bigvee \{f(x) : y \geq x \in X\} : u \leq y \in O(X^{\sigma}) \right\}.$$

Estas definiciones de extensión de operadores coinciden con las dadas anteriormente para retículos acotados, retículos distributivos acotados y álgebras de Boole. En el caso de los retículos distributivos acotados, se mostró en [24] que estas extensiones satisfacen propiedades universales con respecto a ciertas topologías sobre las extensiones canónicas.

Lema 1.4.12. *Sea $f\colon X \to Y$ una función monótona creciente entre conjuntos parcialmente ordenados. Entonces*

1. $f^{\sigma}(c) = \bigwedge \{f(x) : c \leq x \in X\}$ *para todo* $c \in K(X^{\sigma})$.
2. $f^{\sigma}(x) = \bigvee \{f^{\sigma}(c) : x \geq c \in K(X^{\sigma})\}$ *para todo* $x \in X^{\sigma}$.
3. $f^{\pi}(a) = \bigvee \{f(x) : a \geq x \in X\}$ *para todo* $a \in O(X^{\sigma})$.
4. $f^{\pi}(x) = \bigwedge \{f^{\pi}(a) : x \leq a \in O(X^{\sigma})\}$ *para todo* $x \in X^{\sigma}$.

Además f^{σ} y f^{π}son monótonas crecientes, $f^{\sigma} \leq f^{\pi}$, donde la igualdad vale en $K(X^{\sigma}) \cup O(X^{\sigma})$. Ambas funciones mandan elementos cerrados a elementos cerrados y elementos abiertos a elementos abiertos.

En el caso que queramos extender funciones en varias variables y/o que invierta el orden en alguna de ellas, puede realizarse teniendo en cuenta las propiedades de la extensión canónica enunciadas anteriormente.

Sean $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ conjuntos parcialmente ordenados. En caso de que la función $f\colon X \to Y$ sea una aplicación que invierte el orden, la extensión canónica y la canónica dual de f se definen de la siguiente manera:

- Consideramos la función $g\colon X^{\partial} \to Y$ definida como $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.
- Construimos las extensiones $g^{\sigma}, g^{\pi}\colon \left(X^{\partial}\right)^{\sigma} \to Y^{\sigma}$.
- Como $\left(X^{\partial}\right)^{\sigma} = (X^{\sigma})^{\partial}$, definimos $f^{\sigma}, f^{\pi}\colon X^{\sigma} \to Y^{\sigma}$ como $f^{\sigma}(x) = g^{\sigma}(x)$ y $f^{\pi}(x) = g^{\pi}(x)$ para todo $x \in X^{\sigma}$.

Sea $f\colon \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y$ una aplicación que preserva el orden en algunas coordenadas y lo invierte en otras. Las extensiones $f^\sigma, f^\pi\colon (\prod_{i=1}^{n} X_i)^\sigma \to Y^\sigma$ se definen calculando las respectivas extensiones en cada coordenada y recordando que $(\prod_{i=1}^{n} X_i)^\sigma = \prod_{i=1}^{n} X_i^\sigma$.

Definición 1.4.13. Dada un álgebra $\mathbf{A} = \left\langle A, \{f_i\}_{i\in I} \right\rangle$ y $\leq$ un orden sobre A tal que cada operación f_i preserva o invierte el orden en cada coordenada. Definimos dos extensiones del álgebra $\mathbf{A}$: la *extensión canónica* $\mathbf{A}^\sigma = \left\langle A^\sigma, \{f_i^\sigma\}_{i\in I} \right\rangle$ y la *extensión canónica dual* $\mathbf{A}^\pi = \left\langle A^\sigma, \{f_i^\pi\}_{i\in I} \right\rangle$. Una clase se álgebras es $\sigma-$*canónica* o $\pi-$*canónica* si es cerrada bajo extensiones canónicas o dual canónicas respectivamente.

Capítulo 2

Semirretículos distributivos con operadores monótonos

Las álgebras de Boole monótonas, es decir, álgebras de Boole dotadas con un operador que preserva el orden, son una generalización de las álgebras de Boole modales normales. Esta clase de álgebras conforma una variedad que tiene la característica de ser la semántica algebraica de las lógicas monótonas. Trabajos sobre esta variedad pueden encontrarse en [12], [31] y [32], en los que se probó que existe una dualidad entre las álgebras de Boole monótonas y los espacios de Stone dotados con una relación entre puntos del espacio y subconjuntos. También, es posible encontrar en la literatura lógicas modales monótonas definidas sobre lógicas no clásicas. Por ejemplo, en [42] y [56] los autores consideran lógicas monótonas basadas sobre la lógica intuicionista. Tanto en el estudio de las álgebras relacionadas con lógicas no clásicas como en las clásicas, los semirretículos distributivos están presentes en muchas de las estructuras. Por ejemplo, la semántica algebraica del fragmento $\{\rightarrow, \wedge, \top\}$ de la lógica intuicionista en la variedad de los semirretículos implicativos. Por lo tanto, al estudiar lógicas modales sobre distintas lógicas, naturalmente surge la necesidad de estudiar la clase de semirretículos distributivos con operadores monótonos.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, el estudio de las extensiones canónicas para las álgebras de Boole con operadores fue iniciado por Tarski y Jónsson, donde consideraron operadores que preservan los supremos finitos. Más adelante, se generalizó esta teoría, permitiendo construir extensiones canónicas de conjuntos parcialmente ordenados con operaciones a las que sólo se les pide que preserven o inviertan el orden. Las extensiones canónicas permiten conectar las estructuras algebraicas con sus espacios topológicos duales y, por ende, permiten encontrar una buena representación de las operaciones adicionales.

En este capítulo introduciremos la clase de semirretículos distributivos con operadores monótonos y estudiaremos una dualidad para ellos basada en $\mathcal{DS}$-espacios que han sido dotados con relaciones para interpretar el operador, que surgen de la construcción de las extensiones canónicas. Finalizamos este capítulo mostrando una equivalencia categorial, entre la categoría de los semirretículos distributivos con homomorfismos y los $\mathcal{DS}$-espacios con $\wedge$-relaciones. El contenido de este capítulo ha sido publicado y puede leerse en [15].

Los resultados aquí presentados pueden ser generalizados fácilmente, utilizando las extensiones canónicas, a semirretículos distributivos con operadores n-arios que preserven o invierten el orden en cada coordenada. También, muchos de los resultados pueden ser aplicados, haciendo modificaciones menores, al estudio de retículos distributivos acotados, semirretículos superiores distributivos, semirretículos implicativos, álgebras de Heyting y álgebras de Boole con operadores. Notemos que en el caso particular de las álgebras de Boole, la dualidad aquí mostrada extiende la estudiada en [12] y [31].

2.1 Preliminares

Ahora vamos a definir la clase de semirretículos distributivos monótonos. Esta clase no conforma una variedad, pero contiene muchas de las variedades más estudiadas de álgebras con operadores.

Definición 2.1.1. Sea $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$ un semirretículo. Un *operador monótono* es un operador $m : A \to A$ que preserva el orden, es decir, que satisface la siguiente condición:

$$\text{Si } a \leq b, \text{ entonces } ma \leq mb \text{ para todo } a, b \in A.$$

El siguiente resultado es inmediato.

Proposición 2.1.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo y sea sea* $m : A \to A$ *una función unaria. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para todo* $a, b \in A$, *si* $a \leq b$ *entonces* $ma \leq mb$,

2. $m(a \wedge b) \leq ma \wedge mb$ *para todo* $a, b \in A$.

Definición 2.1.3. Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo. La tupla $\langle \mathbf{A}, m_1, \ldots, m_n\rangle$ tal que cada m_i es un operador monótono definido sobre $\mathbf{A}$ para $1 \leq i \leq n$ es llamado *semirretículo distributivo con operadores monótonos.*

Ejemplo 2.1.1. En las figuras 2.1 y 2.2 se muestran dos operadores monótonos definidos sobre el mismo semirretículo distributivo.

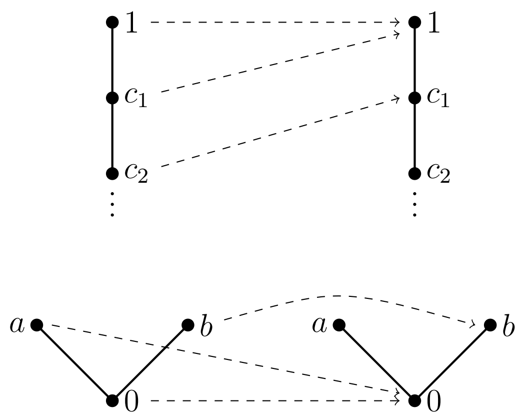

Figura 2.1: En este ejemplo tenemos que $0 = ma = m0$, $mb = b$, $mc_{n+1} = c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $1 = mc_1 = m1$.

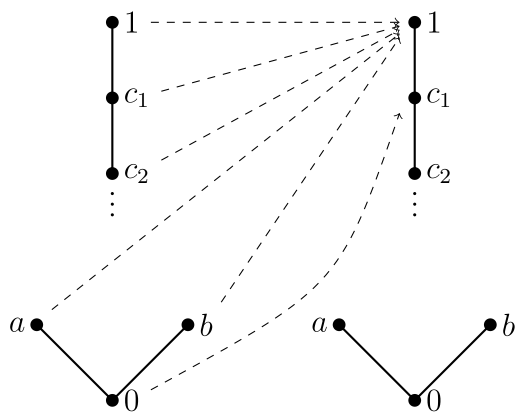

Figura 2.2: En este ejemplo tenemos $m0 = c_1$, $1 = m1 = ma = mb = mc_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1.2. Veamos dos ejemplos de semirretículos distributivos con operadores monótonos construidos a partir de sistemas relacionales. Usaremos estos ejemplos más adelante, cuando desarrollemos la teoría de representación y durante el capítulo 5. Ahora daremos una generalización de los marcos de entornos usados en lógica monótona modal clásica que repasamos en el capítulo anterior.

- Consideremos primero una tripla $\langle X, \leq, R\rangle$ donde $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado y R es un subconjunto de $X \times \mathcal{P}(X)$ tal que si $x \leq y$, entonces $R(y) \subseteq R(x)$ para todo $x, y \in X$. Para cada $U \in \mathrm{Up}(X)$ definimos el conjunto

$$m_R(U) = \{x \in X : \forall Z \in R(x)\ (Z \cap U \neq \emptyset)\}. \tag{2.1}$$

  Se cumple que $\langle \mathrm{Up}(X), \cap, m_R, X\rangle$ es un semirretículo distributivo monótono.

- Consideremos por otro lado una tripla $\langle X, \leq, G\rangle$ donde $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado y G es un subconjunto de $X \times \mathcal{P}(X)$ tal que si $x \leq y$, entonces $G(x) \subseteq G(y)$ para todo $x, y \in X$. Para cada $U \in \mathrm{Up}(X)$ definimos el conjunto

$$m_G(U) = \{x \in X : \exists Y \in G(x)\ (Y \subseteq U)\}. \tag{2.2}$$

  También se cumple que $\langle \mathrm{Up}(X), \cap, m_G, X\rangle$ es un semirretículo monótono.

Veamos por ejemplo el conjunto ordenado de la figura 2.3. Consideremos la relación:

$$\begin{array}{lcl} R(a_n) & = & \{\{a_1, a_2, a_3\}\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ R(b) & = & \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3\}\} \\ R(c) & = & \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}\} \\ R(d) & = & \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3\}\} \\ R(f) & = & \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3\}, \{c\}\}. \end{array}$$

La tripla $\langle X, \leq, R\rangle$ cumple con las condiciones del primer item y su operador monótono asociado es: $m_R(\emptyset) = \emptyset$, $m_R([a_1)) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $m_R([a_2)) = [c)$, $m_R([d)) = m_R(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}) = m_R([b)) = m_R([a_n)) = [c) \cup [d)$ para $n \geq 3$, $m_R([c)) = m_R([c) \cup [d)) = m_R(X) = X$.

Ejemplo 2.1.3. Las álgebras de Boole con operadores modales, también llamadas álgebras modales normales estudiadas en [12], [31] y [33] tienen reductos de semirretículos monótonos. Desarrollaremos más acerca de este tema en el capítulo 4.

Ejemplo 2.1.4. La lógica modal positiva fue introducida por Dunn en [19], y corresponde al fragmento positivo de la relación de consecuencia modal local definida por la clase de todos los marcos de Kripke. La semántica algebraica de este fragmento es la variedad de las álgebras modales positivas. Precisamente, un álgebra modal positiva $A = \langle A, \vee, \wedge, \Box, \Diamond, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado $A = \langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ con dos operadores modales unarios $\Box$ y $\Diamond$ sobre A tal que para todo $a, b \in A$,

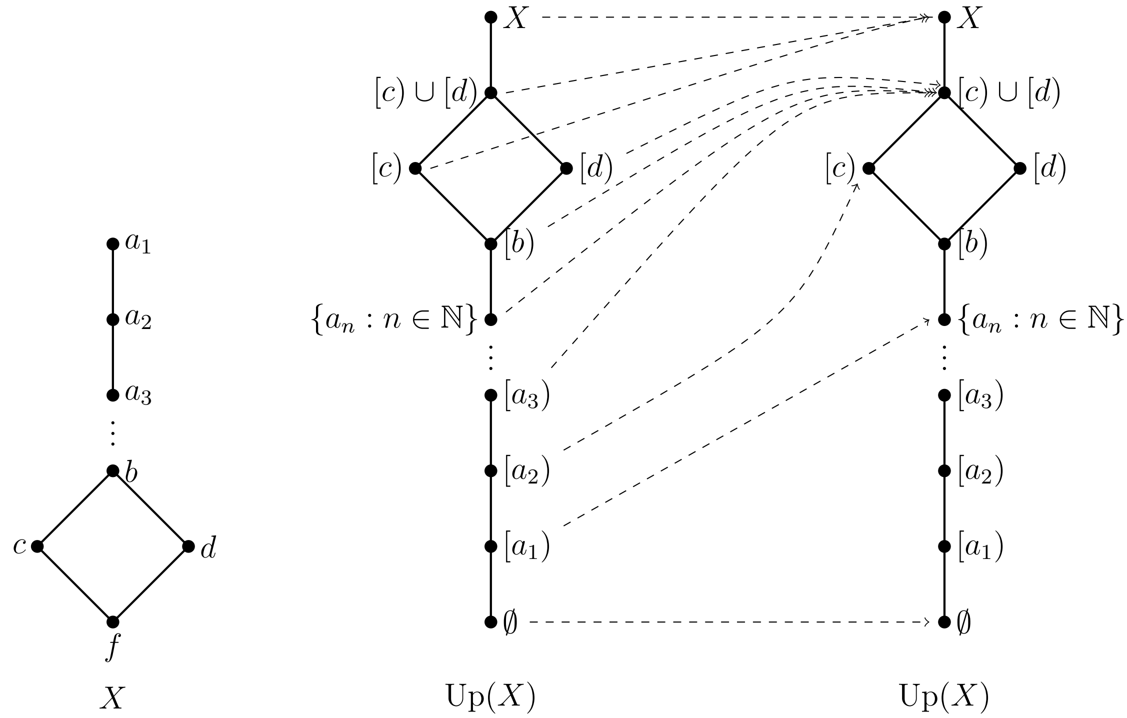

Figura 2.3: Conjunto ordenado y el semirretículo de partes crecientes dotado con el operador m_R.

1. $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$,	2. $\Box 1 = 1$,
3. $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$,	4. $\Diamond 0 = 0$,
5. $\Box a \wedge \Diamond b \leq \Diamond(a \wedge b)$,	6. $\Box(a \vee b) \leq \Box a \vee \Diamond b$.

Ejemplo 2.1.5. Las álgebras de Heyting monádicas estudiadas por Monteiro, Esakia y Bezhanishvili, entre otros, tienen reducto de semirretículo distributivo con dos operadores monótonos. Más precisamente, siguiendo la notación de [3], un álgebra $\langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1, \forall, \exists \rangle$ es un álgebra de Heyting monádica si $\langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Heyting y $\forall, \exists$ son operadores unarios sobre H que satisfacen las siguientes condiciones para todo $x, y \in H$:

1. $\forall x \leq x$,	$x \leq \exists x$,
2. $\forall(x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$,	$\exists x \vee \exists y = \exists(x \vee y)$,
3. $\forall 1 = 1$,	$\exists 0 = 0$,
4. $\forall \exists x = \exists x$,	$\exists \forall x = \forall x$.
5. $\exists(\exists x \wedge y) = \exists x \wedge \exists y$,	

Para evitar repetición, en este capítulo estudiaremos semirretículos distributivos con sólo una operación monótona pero es muy sencillo trasladar los resultados cuando se tienen varias modalidades. La clase de todos los semirretículos distributivos con un operador monótono será denotada por $\mathcal{MDS}$.

Para terminar, vamos a definir las flechas de la categoría que tiene como objetos semirretículos distributivos con un operador monótono.

Definición 2.1.4. Sean $\langle \mathbf{A}, m\rangle, \langle \mathbf{B}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Decimos que una aplicación $h\colon A \to B$ es un *homomorfismo de semirretículos con un operador monótono* si h es un homomorfismo de semirretículos que conmuta con m, es decir, si $h(ma) = mh(a)$ para todo $a \in A$.

Denotaremos por $\mathcal{MDSH}$ a la categoría que tiene como objetos a los semirretículos distributivos con un operador monótono y como flechas a los homomorfismos recién definidos.

2.2 Ideales y subconjuntos saturados

Así como los filtros de un semirretículo distributivo se encuentran en correspondencia dual con los cerrados de su $\mathcal{DS}$-espacio asociado, en esta sección presentaremos una familia particular de conjuntos saturados que es dual a la familia de ideales de orden del semirretículo asociado al espacio.

Definición 2.2.1. Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio. Un *saturado básico especial* es un subconjunto $Z \subseteq X$ tal que

$$Z = \bigcap\{W : W \in \mathcal{L}\}$$

para alguna familia dualmente dirigida $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{KO}(X)$.

Denotaremos por $\mathcal{S}(X)$ al conjunto de todos los saturados básicos especiales de un $\mathcal{DS}$-espacio $\langle X, \mathcal{T}\rangle$. Notemos que todo saturado básico especial es en particular un subconjunto saturado.

Lema 2.2.2. *Los subconjuntos saturados básicos especiales de un $\mathcal{DS}$-espacio $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ son precisamente los subconjuntos compactos saturados de la topología.*

Demostración. Sea Z un saturado básico especial. Probemos que es compacto. Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de Z. Por hipótesis existe una familia dualmente dirigida $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{KO}(X)$ tal que $Z = \bigcap\{W : W \in \mathcal{L}\}$. Luego, como $Z \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, tenemos que $Z \cap \bigcap_{i\in I} O_i^c = \emptyset$, es decir,

$$\bigcap\{W : W \in \mathcal{L}\} \cap \bigcap_{i\in I} O_i^c = \emptyset.$$

Por ser $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio tenemos que existe $W \in \mathcal{L}$ tal que $W \cap \bigcap_{i\in I} O_i^c = \emptyset$. Luego, $W \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ y como W es un subconjunto compacto existe una cantidad finita $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ tal que $W \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$. Luego, $Z \subseteq W \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$. Por lo tanto Z es un subconjunto compacto. Por otro lado, supongamos que Z es un subconjunto compacto y saturado. Consideremos el conjunto $\mathcal{L} = \{W \in \mathcal{KO}(X) : Z \subseteq W\}$. Probemos que $\mathcal{L}$ es un conjunto dualmente dirigido. Sean $W_1, W_2 \in \mathcal{L}$. Entonces $Z \subseteq W_1$ y $Z \subseteq W_2$, lo que implica $Z \subseteq W_1 \cap W_2$. Como $W_1 \cap W_2$ es intersección de básicos, es un abierto y por lo tanto existen elementos $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{KO}(X)$ tales que $Z \subseteq W_1 \cap W_2 = \bigcup_{i\in I} V_i$. Como Z es compacto, existe una cantidad finita $V_1, \ldots, V_m$ tal que $Z \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_m \subseteq W_1 \cap W_2$. Es fácil ver que $V_1 \cup \cdots \cup V_m \in \mathcal{L}$, $V_1 \cup \cdots \cup V_m \subseteq W_1$ y $V_1 \cup \cdots \cup V_m \subseteq W_2$. Es obvio que $Z \subseteq \bigcap\{W : W \in \mathcal{L}\}$. Como por hipótesis Z es saturado, $Z = \bigcap\{O \in \mathcal{T} : Z \subseteq O\}$. Entonces para probar la otra inclusión, sea $O \in \mathcal{T}$ tal que $Z \subseteq O$. Como es un abierto, existen elementos $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{KO}(X)$ tales que $Z \subseteq O = \bigcup_{i\in I} W_i$. Como Z es compacto, existe una cantidad finita $W_1, \ldots, W_m$ tal que $Z \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_m \subseteq O$. Es fácil ver que $W_1 \cup \cdots \cup W_m \in \mathcal{L}$ y por lo tanto $\bigcap\{W : W \in \mathcal{L}\} \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_m \subseteq O$. En conclusión, $\bigcap\{W : W \in \mathcal{L}\} \subseteq \bigcap\{O \in \mathcal{T} : Z \subseteq O\} = Z$. ■

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{DS}$. Sea $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$. Consideremos el siguiente subconjunto de $X(\mathbf{A})$:

$$\alpha(I) = \bigcap\{\beta(a)^c : a \in I\} = \{P \in X(\mathbf{A}) : I \cap P = \emptyset\}.$$

Está claro que $\alpha(I)$ es un saturado básico especial de $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}\rangle$.

Por otro lado, sea $Z \subseteq X(\mathbf{A})$ un saturado básico especial de $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}\rangle$ y consideremos el subconjunto

$$I_{\mathbf{A}}(Z) = \{a \in A : \beta(a) \cap Z = \emptyset\}.$$

Es fácil ver que $I_{\mathbf{A}}(Z)$ es un subconjunto decreciente de $\mathbf{A}$. En el próximo teorema probaremos que es un ideal de orden. Además probaremos que los ideales de orden están en correspondencia biyectiva con la familia de subconjuntos saturados básicos especiales del $\mathcal{DS}$-espacio dual.

Teorema 2.2.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo distributivo. Entonces los conjuntos parcialmente ordenados* $\langle \mathrm{Id}(\mathbf{A}), \subseteq \rangle$ *y* $\langle \mathcal{S}(X(\mathbf{A})), \subseteq \rangle$ *son dualmente isomorfos.*

Demostración. Sea $Z \subseteq X(\mathbf{A})$ un saturado básico especial de $X(\mathbf{A})$. Probaremos que $I_{\mathbf{A}}(Z) \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ y $Z = \alpha(I_{\mathbf{A}}(Z))$. Además, si I es cualquier ideal de orden de $\mathbf{A}$, entonces probaremos que $I = I_{\mathbf{A}}(\alpha(I))$.

Es claro que $I_{\mathbf{A}}(Z)$ es un subconjunto decreciente de $\mathbf{A}$. Probemos primero que es un conjunto dualmente dirigido. Sean $a, b \in I_{\mathbf{A}}(Z)$. Tenemos que $Z \cap (\beta_{\mathbf{A}}(a) \cup \beta_{\mathbf{A}}(b)) = \emptyset$. Como $Z = \bigcap\{\beta(a)^c : \beta(a)^c \in \mathcal{L}\}$ para alguna familia dualmente dirigida $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_{\mathbf{A}}$ y $\beta(a) \cup \beta(b)$ es un subconjunto cerrado, existe $\beta_{\mathbf{A}}(c)^c \in \mathcal{L}$ tal que $\beta(c)^c \cap (\beta(a) \cup \beta(b)) = \emptyset$. Luego, $\beta(a) \cup \beta(b) \subseteq \beta(c)$ y $Z \cap \beta_{\mathbf{A}}(c) = \emptyset$, es decir, $a, b \leq c$ y $c \in I_{\mathbf{A}}(Z)$. Por lo tanto, $I_{\mathbf{A}}(Z)$ es un ideal de orden de $\mathbf{A}$ y tenemos que $\alpha(I_{\mathbf{A}}(Z)) = \bigcap\{\beta(a)^c : Z \subseteq \beta(a)^c\} \subseteq \bigcap\{\beta(a)^c : \beta(a)^c \in \mathcal{L}\} = Z$. La otra inclusión es inmediata.

Ahora, sea $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$. Probaremos que $I_{\mathbf{A}}(\alpha(I)) \subseteq I$. Sea $b \in I_{\mathbf{A}}(\alpha(I))$. Entonces $\beta(b) \cap \alpha(I) = \beta(b) \cap \bigcap\{\beta(a)^c : a \in I\} = \emptyset$. Como $\beta_{\mathbf{A}}(b)$ es un subconjunto cerrado, y la familia $\{\beta(a)^c : a \in I\}$ es dualmente dirigida, obtenemos que existe $a \in I$ tal que $\beta(b) \subseteq \beta(a)$. Así, $b \leq a$, y como I es un subconjunto decreciente, tenemos que $b \in I$. La otra inclusión es inmediata.

Luego, tenemos una función suryectiva $\alpha\colon \mathrm{Id}(\mathbf{A}) \to \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ cuya inversa es $I_{\mathbf{A}}\colon \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \to \mathrm{Id}(\mathbf{A})$. Probemos que α es un isomorfismo de orden dual. Sean I_1 e I_2 dos ideales de $\mathbf{A}$. Asumimos que $I_1 \subseteq I_2$. Sea $P \in \alpha(I_2)$. Entonces, $P \cap I_2 = \emptyset$. Se sigue que $P \cap I_1 = \emptyset$, es decir, $P \in \alpha(I_1)$.

Asumimos ahora que $\alpha(I_1) \subseteq \alpha(I_2)$. Sea $a \in I_2$ y supongamos que $a \notin I_1$. Entonces $I_1 \cap [a) = \emptyset$, así existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $[a) \subseteq P$ y $P \cap I_1 = \emptyset$. Se sigue que $P \in \alpha(I_1)$ pero $P \notin \alpha(I_2)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a \in I_1$. ■

Observación 2.2.4. Notemos que para cualquier $a \in A$, $\alpha((a]) = \beta(a)^c$.

Por simplicidad escribiremos $\alpha(a)$ en vez de $\alpha((a])$. El último resultado de la sección será muy útil para las demostraciones futuras. Recordemos que $\phi(Y) = \{a \in A : Y \subseteq \beta(a)\}$ es un filtro de $\mathbf{A}$ para todo Y cerrado del espacio dual.

Proposición 2.2.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo distributivo,* $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ *y* $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$*. Entonces,*

$$\phi(Y) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset \textit{ si y sólo si } Y \cap Z \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo, $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ y $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$. Supongamos que $\phi(Y) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset$. Entonces, existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $\phi(Y) \subseteq P$ y $P \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset$, es decir, $P \in Y$ y $P \in Z$. Luego, $Y \cap Z \neq \emptyset$. La otra implicación es trivial. ■

2.3 Extensión canónica de semirretículos con operadores monótonos

Ahora, estamos en condiciones de identificar las estructuras topológicas que son los elementos cerrados y abiertos de la extensión canónica de un semirretículo distributivo. Para las álgebras de Boole, una forma de obtener una extensión canónica es a través del Teorema de Representación de Stone. En este trabajo la idea es extrapolar el enfoque para semirretículos distributivos. Recordemos que en todo semirretículo puede definirse un orden parcial, por lo tanto todas definiciones y teoremas de la sección 1.4 pueden aplicarse.

Lema 2.3.1. *Consideremos un semirretículo distributivo* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$*. El álgebra* $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, X(\mathbf{A}), \emptyset\rangle$ *es una extensión canónica de* $\mathbf{A}$*, donde el isomorfismo de orden es la función* β *y* $A \cong \beta[A] \subseteq \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$*. La llamaremos 'la' extensión canónica de* $\mathbf{A}$*.*

Lema 2.3.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo distributivo. Consideremos la extensión canónica* $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, X(\mathbf{A}), \emptyset\rangle$ *y el* $\mathcal{DS}$*-espacio* $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}\rangle$*. Entonces, se cumple que*

$$K(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) = \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \textit{ y } O(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) = \{Z^c : Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))\},$$

es decir, los elementos cerrados de la extensión canónica son exactamente los conjuntos cerrados de la topología y los elementos abiertos de la extensión canónica son los complementos de los saturados básicos especiales de la topología.

La compacidad de la compleción $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, X(\mathbf{A}), \emptyset\rangle$ es una extensión canónica de $\mathbf{A}$ se sigue de la proposición 2.2.5. La densidad se sigue de observar que para todo $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ vale que $U = \bigcup_{P\in U} [P) = \bigcup_{P\in U} \psi(P)$ y también $U = \bigcap_{P\notin U} (P]^c = \bigcup_{P\notin U} \alpha(P^c)^c$. Notemos que los abiertos de la extensión no son los abiertos de la topología del espacio dual de $\mathbf{A}$.

Dado $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo, denotaremos a la extensión canónica por $\mathbf{A}^\sigma = \langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, X(\mathbf{A}), \emptyset\rangle$.

Observación 2.3.3. Dado un retículo completo C, un elemento a es llamado *completamente $\vee$-primo* si $a \leq \bigvee S$ implica que $a \in S$ para cada subconjunto $S \subseteq C$. Dualmente se define a los elementos *completamente $\wedge$-primos*. Denotemos por $J^\infty(C)$ al conjunto de los elementos completamente $\vee$-primos y por $M^\infty(C)$ al conjunto de los completamente $\wedge$-primos de C.

Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo. Todo elemento de $\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ es supremo de elementos completamente $\vee$-primos y es ínfimo de elementos completamente $\wedge$-primos, donde $J^\infty(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) = \{\psi(P) = [P) : P \in X(\mathbf{A})\}$ y $M^\infty(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) = \{\alpha(P^c)^c = (P]^c : P \in X(\mathbf{A})\}$.

Ya mostramos cómo extender el reducto de semirretículo distributivo. Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Veamos ahora cómo extender la estructura entera. Siguiendo la construcción 1.4.11, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.4 (Extensión de operadores)**.** Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo. Dado un operador monótono $m\colon A \to A$, definimos las aplicaciones

$$m^\sigma, m^\pi : \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})) \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$$

por

$$m^\sigma(X) = \bigcup\{\bigcap\{\beta(ma) : Y \subseteq \beta(a)\} : X \supseteq Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))\}$$

y

$$m^\pi(X) = \bigcap\{\bigcup\{\beta(ma) : Z \subseteq \beta(a)^c\} : X^c \supseteq Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))\}.$$

Definición 2.3.5 (Extensión canónica)**.** Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Entonces definimos la σ-extensión de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{A}^\sigma = \langle \mathbf{A}^\sigma, m^\sigma\rangle$$

y la π-extensión de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{A}^\pi = \langle \mathbf{A}^\sigma, m^\pi\rangle.$$

Las dos extensiones de la aplicación m definidas enteriormente no siempre son iguales. El siguiente lema es una consecuencia de Lema 3.4 de [20].

Lema 2.3.6. *Sea* $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. *Entonces, las aplicaciones* m^σ, m^π *son extensiones monótonas de* m, *es decir,* $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), m^\sigma\rangle, \langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), m^\pi\rangle \in \mathcal{MDS}$ *y para todo* $a \in A$, $m^\sigma(\beta(a)) = m^\pi(\beta(a)) = \beta(ma)$. *Además,* $m^\sigma \leq m^\pi$ *donde la igualdad vale en* $K(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) \cup O(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A})))$. *Para todo* $X \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$, $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ *y* $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ *se cumple que*

$$\begin{aligned} m^\sigma(X) &= \bigcup\{m^\sigma(Y) : X \supseteq Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))\}, \\ m^\sigma(Y) &= \bigcap\{\beta(ma) : Y \subseteq \beta(a)\}, \\ m^\pi(X) &= \bigcap\{m^\pi(Z^c) : X^c \supseteq Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))\}, \\ m^\pi(Z^c) &= \bigcup\{\beta(ma) : Z \subseteq \beta(a)^c\}. \end{aligned}$$

Luego, las aplicaciones m^σ, m^π *llevan conjuntos cerrados a conjuntos cerrados y llevan complementos de conjuntos saturados básicos especiales a complementos de conjuntos saturados básicos especiales.*

Claramente ambas extensiones canónicas satisfacen las condiciones de compacidad y densidad porque son propiedades que se heredan de los reductos distributivos. Además, por como fueron definidas m^σ y m^π tenemos que su restricción en $\beta[A]$ es la imagen de m bajo la aplicación de representación β.

Proposición 2.3.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MDS}$ *y sea* $\mathbf{B}$ *la* σ*-extensión canónica o la* π*-extensión canónica. Entonces* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{B}$.

2.4 Representacíon topológica

En [12] se muestra que los espacios duales de las álgebras de Boole con operadores monótonos son estructuras de la forma $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ tal que $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio de Stone, y R es una relación entre X y subconjuntos cerrados no vacíos de X. En este trabajo también representaremos el operador monótono m de un semirretículo distributivo $\mathbf{A}$ con una multirelación, es decir una relación entre elementos de $X(\mathbf{A})$ y subconjuntos del espacio topológico dual. Para ello utilizaremos las dos posibles extensiones del operador m.

Lema 2.4.1. *Sea* $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$ *y sea* $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$. *Entonces* $P \in m^\pi(Z^c)$ *si y sólo si* $m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Notemos que por definición de m^π tenemos que:

$$\begin{aligned} P \in m^{\pi}(Z^c) &\Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tal que } P \in \beta(ma) \text{ y } Z \subseteq \beta(a)^c \\ &\Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tal que } ma \in P \text{ y } a \in I_{\mathbf{A}}(Z) \\ &\Leftrightarrow m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ y $P \in X(\mathbf{A})$. ■

Así, para $X \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} P \in m^{\pi}(X) &\Leftrightarrow \forall Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \text{ tal que } Z \subseteq X^c \text{ tenemos } P \in m^{\pi}(Z^c) \\ &\Leftrightarrow \forall Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \text{ tal que } Z \subseteq X^c \text{ tenemos } m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Esta observación nos induce la siguiente definición.

Definición 2.4.2 (S-Relación)**.** Definamos la relación

$$R_m \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$$

por

$$(P, Z) \in R_m \text{ sii } m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset. \tag{2.3}$$

Consecuentemente, la operación m^{π} sobre $\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ puede ser definida en términos de la relación R_m como:

$$P \in m^{\pi}(X) \text{ sii } \forall Z \in R_m(P)[Z \cap X \neq \emptyset].$$

Por otro lado, podemos definir otra multirelación usando la operación m^{σ}.

Lema 2.4.3. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$ y sea $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$. Entonces $P \in m^{\sigma}(Y)$ si y sólo si $\phi(Y) \subseteq m^{-1}(P)$.*

Demostración. Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Notemos que por definición de m^{σ} tenemos que:

$$\begin{aligned} P \in m^{\sigma}(Y) &\Leftrightarrow \forall a \in A \text{ tal que } Y \subseteq \beta(a) \text{ obtenemos que } P \in \beta(ma) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A \text{ tal que } a \in \phi(Y) \text{ obtenemos que } ma \in P \\ &\Leftrightarrow \phi(Y) \subseteq m^{-1}(P). \end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ y $P \in X(\mathbf{A})$. ■

Así, para cada $X \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ obtenemos:

$$\begin{aligned} P \in m^\sigma(X) &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \text{ tal que } Y \subseteq X \text{ y } P \in m^\sigma(Y) \\ &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \text{ tal que } Y \subseteq X \text{ y } P \in m^\sigma(Y) \\ &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \text{ tal que } Y \subseteq X \text{ y } \phi(Y) \subseteq m^{-1}(P). \end{aligned}$$

Definición 2.4.4 (C-Relación)**.** Luego, podemos definir otra relación $G_m \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ como

$$(P, Y) \in G_m \text{ sii } \phi(Y) \subseteq m^{-1}(P).$$

Consecuentemente, la operación m^σ sobre $\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ puede ser definida en términos de la relación G_m como:

$$P \in m^\sigma(X) \text{ sii } \exists Y \in G_m(P)[Y \subseteq X]. \tag{2.4}$$

Observación 2.4.5. Volvamos al ejemplo 2.1.2. Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Notemos que $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq, R_m\rangle$ y $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq, G_m\rangle$ son marcos que cumplen las condiciones de primer y segundo item, respectivamente, donde $m_{R_m} = m^\pi$ y $m_{G_m} = m^\sigma$.

2.4.1 $\mathcal{DS}$-espacios monótonos

Ahora, estamos en condiciones para definir los espacios duales a los semirretículos distributivos monótonos. Por lo que hemos visto en la sección anterior, existen dos posibles construcciones de sistemas relacionales, dependiendo de la forma en que extendamos el operador. Sin embargo, mostraremos que ambos sistemas son interdefinibles. Luego, para cada operador monótono, podemos elegir trabajar con cualquiera de ellos, dependiendo de su comportamiento. En los próximos capítulos veremos cómo las condiciones adicionales afectan las relaciones asociadas.

Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio. Para cada $U \in D(X)$ definimos los subconjuntos L_U y D_U de $\mathcal{P}(\mathcal{S}(X))$ y $\mathcal{P}(\mathcal{C}(X))$ como sigue:

$$L_U = \{Z \in \mathcal{S}(X) : Z \cap U \neq \emptyset\}$$

y

$$D_U = \{Y \in \mathcal{C}(X) : Y \subseteq U\}.$$

Vamos a definir dos tipos de espacios duales, uno con cada relación definida a partir de las extensiones de los operadores.

Definición 2.4.6. Un *$\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono* es una estructura $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$, donde $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio, y $R \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ es una relación tal que

1. $m_R(U) = \{x \in X : \forall Z \in R(x)[Z \cap U \neq \emptyset]\} \in D(X)$, para todo $U \in D(X)$ y

2. $R(x) = \bigcap\{L_U : U \in D(X) \text{ y } x \in m_R(U)\}$, para todo $x \in X$.

También podemos dar una definición análoga de un $\mathcal{DS}$*-espacio* $\mathcal{C}$*-monótono* como una estructura $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$, donde $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio y $G \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ es una relación tal que

3. $m_G(U) = \{x \in X : \exists Y \in G(x)[Y \subseteq U]\} \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$, y

4. $G(x) = \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X) \text{ y } x \in m_G(U)^c\}$ para todo $x \in X$.

Lema 2.4.7. *Sean* $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ *y* $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ *un* $\mathcal{DS}$*-espacio* $\mathcal{S}$*-monótono y un* $\mathcal{DS}$*-espacio* $\mathcal{C}$*-monótono, respectivamente. Entonces,*

1. $R(y) \subseteq R(x)$ *para todo* $x, y \in X$ *tal que* $x \leq y$*, y*

2. $G(x) \subseteq G(y)$ *para todo* $x, y \in X$ *tal que* $x \leq y$*.*

Demostración. 1. Supongamos que $x \leq y$. Sea $Z \in R(y)$. Sea $U \in D(X)$ tal que $x \in m_R(U)$. Por (1) de la Definición 2.4.6, $m_R(U) \in D(X)$ es un subconjunto creciente, entonces $y \in m_R(U)$. Por (2) tenemos que $Z \cap U \neq \emptyset$. Entonces, $Z \in \bigcap\{L_U : U \in D(X) \text{ y } x \in m_R(U)\} = R(x)$.

2. Supongamos que $x \leq y$. Sea $Y \in G(x)$. Sea $U \in D(X)$ tal que $y \in m_G(U)^c$. Por (3) de la Definición 2.4.6, $m_G(U)^c \in \mathcal{KO}(X)$ es un subconjunto decreciente, entonces $x \in m_G(U)^c$. Por (4) tenemos que $Y \cap U^c \neq \emptyset$. Entonces, $Y \in \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X) \text{ y } y \in m_G(U)^c\} = G(x)$. ■

Como corolario tenemos que $\langle X, \leq, R\rangle$ y $\langle X, \leq, G\rangle$ cumplen las condiciones del ejemplo 2.1.2. De la Definición 2.1.2, obtenemos que las álgebras $\langle \mathrm{Up}(X), m_R\rangle$ y $\langle \mathrm{Up}(X), m_G\rangle$ considerando los operadores definidos en 2.1 y 2.2 son semirretículos distributivos con operadores monótonos. En consecuencia, por (1) y (3) de la Definición 2.4.6, $\langle D(X), m_R\rangle$ y $\langle D(X), m_G\rangle$ son semirretículos distributivos con operadores monótonos, considerando la restricción de los operadores a $D(X)$.

Ahora, veremos que podemos obtener un tipo de espacio a partir del otro.

Definición 2.4.8. Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio. Sea $\Phi_X : \mathcal{P}(\mathcal{S}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}(X))$ una función definida por

$$\Phi_X(S) = \{Y \in \mathcal{C}(X) : \forall Z \in S\ [Y \cap Z \neq \emptyset]\}$$

y sea $\Psi_X\colon \mathcal{P}(\mathcal{C}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{S}(X))$ la función definida por

$$\Psi_X(C) = \{Z \in \mathcal{S}(X) : \forall Y \in C\ [Y \cap Z \neq \emptyset]\}.$$

Es fácil ver que

$$C \subseteq \Phi_X(S) \text{ sii } S \subseteq \Psi_X(C),$$

para todo $S \subseteq \mathcal{S}(X)$ y $C \subseteq \mathcal{C}(X)$. Se sigue que el par (Φ_X, Ψ_X) es una conexión de Galois.

Proposición 2.4.9. *1. Dado un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$, la relación $G_R \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ definida como*

$$(x, Y) \in G_R \textit{ sii } Y \in \Phi_X(R(x))$$

es tal que $\langle X, \mathcal{T}, G_R\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono y $m_R(U) = m_{G_R}(U)$ para todo $U \in D(X)$.

2. Dado un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$, la relación $R_G \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ definida como

$$(x, Z) \in R_G \textit{ sii } Z \in \Psi_X(G(x))$$

es tal que $\langle X, \mathcal{T}, R_G\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono y $m_G(U) = m_{R_G}(U)$ para todo $U \in D(X)$.

Demostración. 1. Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono. Veremos que $m_R(U) = m_{G_R}(U)$ para todo $U \in D(X)$. Sean $U \in D(X)$ y $x \in m_R(U)$. Entonces, para todo $Z \in R(x)$ tenemos que $Z \cap U \neq \emptyset$ y como $U \in \mathcal{C}(X)$, $U \in G_R(x)$. De $U \subseteq U$, obtenemos $x \in m_{G_R}(U)$. Ahora, supongamos que $x \in m_{G_R}(U)$. Así, existe $Y \in G_R(x)$ tal que $Y \subseteq U$ y como para todo $Z \in R(x)$ tenemos que $Y \cap Z \neq \emptyset$, entonces $Z \cap U \neq \emptyset$ para todo $Z \in R(x)$ y luego $x \in m_R(U)$.

Hemos probado que $m_R(U) = m_{G_R}(U)$ para todo $U \in D(X)$ y como $\langle X, T, R\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono, $m_{G_R}(U) \in D(X)$.

Ahora, veremos que $G_R(x) = \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X) \text{ y } x \in m_{G_R}(U)^c\}$ para todo $x \in X$. Sea $x \in X$. Es fácil probar la inclusión $G_R(x) \subseteq \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X) \text{ y } x \in m_{G_R}(U)^c\}$. Para probar la otra inclusión, sea $Y \in \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X) \text{ y } x \in m_{G_R}(U)^c\}$ y supongamos que $Y \notin G_R(x)$. Así, existe $Z \in R(x)$ tal que $Z \cap Y = \emptyset$. Como $Z \in \mathcal{S}(X)$ e $Y \in \mathcal{C}(X)$, existe $U \in D(X)$ tal que $Z \subseteq U^c$ e $Y \cap U^c = \emptyset$. Entonces, $Z \cap U = \emptyset$, $x \notin m_R(U) = m_{G_R}(U)$ e $Y \subseteq U$, es decir, $Y \in D_U$, lo cual es una contradicción.

2. Sea $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono. Veremos que $m_G(U) = m_{R_G}(U)$ para todo $U \in D(X)$. Sean $U \in D(X)$ y $x \in m_{R_G}(U)$. Supongamos que $x \notin m_G(U)$. Entonces, para todo $Y \in G(x)$, $Y \cap U^c \neq \emptyset$. Así, $U^c \in R_G(x)$ lo que contradice que $x \in m_{R_G}(U)$. Ahora, supongamos que $x \in m_G(U)$. Entonces existe $Y \in G(x)$ tal que $Y \subseteq U$. Sea $Z \in R_G(x)$. Así, tenemos que $Y \cap Z \neq \emptyset$, entonces $Z \cap U \neq \emptyset$. Luego $x \in m_{R_G}(U)$.

Hemos probado que $m_G(U) = m_{R_G}(U)$ para todo $U \in D(X)$ y como $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono, $m_{R_G}(U) \in D(X)$.

Ahora, veremos que $R_G(x) = \bigcap\{L_U : U \in D(X) \text{ y } x \in m_{R_G}(U)\}$ para todo $x \in X$. Sea $x \in X$. La prueba de la inclusión $R_G(x) \subseteq \bigcap\{L_U : U \in D(X) \text{ y } x \in m_{R_G}(U)\}$ es fácil. Sea $Z \in \bigcap\{L_U : U \in D(X) \text{ y } x \in m_{R_G}(U)\}$ y supongamos que $Z \notin R_G(x)$. Así, existe $Y \in G(x)$ tal que $Z \cap Y = \emptyset$. Como $Z \in \mathcal{S}(X)$ e $Y \in \mathcal{C}(X)$, existe $U \in D(X)$ tal que $Z \subseteq U^c$ e $Y \cap U^c = \emptyset$. Entonces, $Y \subseteq U$, $x \in m_G(U) = m_{R_G}(U)$ y $Z \cap U = \emptyset$, es decir, $Z \notin L_U$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 2.4.10. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Entonces $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono y $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, G_m\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono.*

Demostración. Sea $U \in D(X(\mathbf{A}))$. Por definición, $U = \beta(a)$ para algún $a \in A$. Por el Lema 2.3.6 y la Observación 2.4.5 tenemos que $m_{R_m}(\beta(a)) = m_{G_m}(\beta(a)) = \beta(ma) \in D(X(\mathbf{A}))$, es decir, $m_{R_m}(U), m_{G_m}(U) \in D(X(\mathbf{A}))$ para todo $U \in D(X(\mathbf{A}))$.

Ahora mostraremos que para todo $P \in X(\mathbf{A})$

$$R_m(P) = \bigcap\{L_{\beta(a)} : ma \in P\}.$$

Sea $P \in X(\mathbf{A})$. Es claro que $R_m(P) \subseteq \bigcap\{L_{\beta(a)} : ma \in P\}$. Por otro lado, sea $Z \in \bigcap\{L_{\beta(a)} : ma \in P\}$, probaremos que $Z \in R_m(P)$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $Z \notin R_m(P)$. Entonces, existe $a \in m^{-1}(P)$ tal que $Z \cap \beta(a) = \emptyset$. Por hipótesis, $Z \in L_{\beta(a)}$, es decir, $Z \cap \beta(a) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Z \in R_m(P)$.

La identidad $G_m(P) = \bigcap\{(D_{\beta(a)})^c : ma \notin P\}$ se prueba en forma similar. ■

Lema 2.4.11. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Entonces $R_m(P) = \Psi_{X(\mathbf{A})}(G_m(P))$ y $G_m(P) = \Phi_{X(\mathbf{A})}(R_m(P))$. Por lo tanto los conjuntos $R_m(P)$ y $G_m(P)$ son conjuntos cerrados de la conexión de Galois.*

Demostración. Primero probaremos que $R_m(P) = \Psi_{X(\mathbf{A})}(G_m(P))$. Sea $Z \in R_m(P)$. Entonces, $m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset$. Sea $Y \in G_m(P)$. Por definición, $\phi(Y) \subseteq m^{-1}(P)$ y obtenemos que $\phi(Y) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset$. De la Proposición 2.2.5, $Y \cap Z \neq \emptyset$. Ahora, sea $Z \in S(X(\mathbf{A}))$ y supongamos que para todo $Y \in G_m(P)$, $Z \cap Y \neq \emptyset$. Sea $a \in m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z)$. Así, $[a) \subseteq m^{-1}(P)$ y por hipótesis $\psi([a)) \cap Z = \beta(a) \cap Z \neq \emptyset$. Entonces $a \notin I_{\mathbf{A}}(Z)$ lo cual es una contradicción.

La otra igualdad se prueba en forma análoga. ■

A partir de ahora, escribiremos $\mathcal{DS}$-espacio monótono en vez de $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{S}$-monótono. Es claro cómo podemos construir un espacio a partir del otro, y no existe una razón en particular por la cual hemos elegido $\mathcal{DS}$-espacios $\mathcal{S}$-monótonos como nuestro espacio por defecto más que para mantener la simplicidad y evitar la repetición.

Definición 2.4.12. Dado $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$, la estructura $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m\rangle$ es el $\mathcal{DS}$-*espacio monótono asociado a* $\langle \mathbf{A}, m\rangle$.

Definición 2.4.13. El álgebra $\langle D(X), m_R\rangle$ es el *semirretículo distributivo con un operador monótono asociado al* $\mathcal{DS}$-espacio monótono $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el Teorema de representación.

Teorema 2.4.14 (de Representación)**.** *Sea* $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$*. Entonces, la estructura* $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, m_{R_m}, X(\mathbf{A})\rangle$ *es un semirretículo distributivo con un operador monótono y la aplicación* $\beta\colon A \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ *definida por*

$$\beta(a) = \{P \in X(\mathbf{A}) : a \in P\}$$

es un homomorfismo inyectivo de semirretículos con operadores monótonos.

Demostración. Se sigue del Teorema 1.2.16 y del hecho de que para todo $a \in A$, $m_{R_m}(\beta(a)) = \beta(ma)$. ■

Corolario 2.4.15. *Sea* $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$*. Entonces, la aplicación* $\beta\colon A \to D(X(\mathbf{A}))$ *definida por*

$$\beta(a) = \{P \in X(\mathbf{A}) : a \in P\}$$

es un isomorfismo de semirretículos con operadores monótonos.

El siguiente diagrama resume lo visto en esta sección:

$$
\begin{tikzcd}
& \langle X(\mathbf{A}),\mathcal{T}_{\mathbf{A}},R_m\rangle \arrow[dr] \arrow[dd, leftrightarrow, "\Phi_{X(\mathbf{A})}"', "\Psi_{X(\mathbf{A})}"] & \\
\langle \mathbf{A},m\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, bend right=60, "\beta"'] & & \langle D(X(\mathbf{A})),m_{R_m}\rangle \\
& \langle X(\mathbf{A}),\mathcal{T}_{\mathbf{A}},G_m\rangle \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

2.5 Dualidad topológica

Notemos que si $\langle X,\mathcal{T},R\rangle$ es es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono, entonces tenemos que $\langle X(D(X)),\mathcal{T}_{D(X)},R_{m_R}\rangle$ es el $\mathcal{DS}$-espacio monótono asociado a $\langle D(X),m_R\rangle$. En [9] Celani probó que la aplicación

$$H_X : X \to X(D(X))$$

definida por

$$H_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\},$$

es un homeomorfismo entre $\mathcal{DS}$-espacios y un isomorfismo de orden respecto a $\leq$. Ahora introducimos la siguiente definición.

Definición 2.5.1. Sean $\langle X_1,\mathcal{T}_1,R_1\rangle$ y $\langle X_2,\mathcal{T}_2,R_2\rangle$ dos $\mathcal{DS}$-espacios monótonos. Una aplicación $f\colon X_1 \to X_2$ es un *isomorfismo de $\mathcal{DS}$-espacios monótonos* si satisface,

1. f es un homeomorfismo.
2. $(x,Z) \in R_1$ si y sólo si $(f(x),f[Z]) \in R_2$, para todo $x \in X_1$ y para cada $Z \in \mathcal{S}(X_1)$,

donde $f[Z] = \{f(z) : z \in Z\}$.

Sean $\langle X_1,\mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2,\mathcal{T}_2\rangle$ dos $\mathcal{DS}$-espacios y sea $f\colon X_1 \to X_2$ un homeomorfismo. Entonces, $f[Z] \in \mathcal{S}(X_2)$ para todo $Z \in \mathcal{S}(X_1)$ y para todo $S \in \mathcal{S}(X_2)$ existe $Z \in \mathcal{S}(X_1)$ tal que $S = f[Z]$. Por lo tanto tenemos la siguiente observación:

Observación 2.5.2. Sea $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio. Entonces, $H_X[Z] \in \mathcal{S}(X(D(X))$ para todo $Z \in S(X)$ y para todo $S \in \mathcal{S}(X(D(X))$ existe $Z \in \mathcal{S}(X)$ tal que $S =$

$H_X[Z]$. También, tenemos que $H_X[U] = \{H_X(u) : u \in U\} = \beta_{D(X)}(U)$ para todo $U \in D(X)$. Entonces,

$$Z \cap U = \emptyset \Leftrightarrow H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) = \emptyset$$

para todo $Z \in \mathcal{S}(X)$ y $U \in D(X)$.

Teorema 2.5.3. *Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. Entonces, la aplicación $H_X \colon X \to X(D(X))$ definida por*

$$H_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{DS}$-espacios monótonos.

Demostración. Por [9] y [13], sólo falta probar que $(x, Z) \in R$ sii $(H_X(x), H_X[Z]) \in R_{m_R}$.

$\Rightarrow$) Sea $Z \in \mathcal{S}(X)$ tal que $(x, Z) \in R$. Veremos que $H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) \neq \emptyset$ para todo $U \in m_R^{-1}(H_X(x))$. Sea $U \in D(X)$ tal que $U \in m_R^{-1}(H_X(x))$, es decir, $m_R(U) \in H_X(x)$. Entonces, $x \in m_R(U)$. Como $Z \in R(x)$, obtenemos que $Z \cap U \neq \emptyset$ y por la Observación 2.5.2, $H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $U \notin I_{D(X)}(H_X[Z])$ y $m_R^{-1}(H_X(x)) \cap I_{D(X)}(H_X[Z]) = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $(H_X(x), H_X[Z]) \in R_{m_R}$. Entonces, $H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) \neq \emptyset$ para todo $U \in m_R^{-1}(H_X(x))$, es decir, para todo $U \in D(X)$ tal que $x \in m_R(U)$. Probaremos que $(x, Z) \in R$. Para ello, supongamos que $Z \notin R(x)$. De la condición (2) de la Definición 2.4.6 tenemos que existe $U \in D(X)$ tal que $x \in m_R(U)$ y $Z \cap U = \emptyset$. Entonces, por la Observación 2.5.2, $H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) = \emptyset$, absurdo. Por lo tanto, $Z \in R(x)$. ∎

Del siguiente resultado obtendremos que los espacios duales a los semirretículos distributivos con operadores monótonos son exactamente las triplas $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$, donde $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio, $R \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ es una relación tal que $m_R(U) \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$, y $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ satisface alguna de las condiciones equivalentes del Teorema 2.5.5.

Lema 2.5.4. *Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. Entonces $R(x)$ es un subconjunto creciente de $\langle \mathcal{S}(X), \subseteq\rangle$, es decir, para todo $S, Z \in \mathcal{S}(X)$ y para todo $x \in X$, si $S \subseteq Z$ y $S \in R(x)$ entonces $Z \in R(x)$.*

Demostración. Sean $S, Z \in \mathcal{S}(X)$ y $x \in X$, tales que $S \subseteq Z$ y $S \in R(x)$. Si $Z \notin R(x)$, entonces por la condición (2) de la Definición 2.4.6, existe $U \in D(X)$

tal que $Z \cap U = \emptyset$ y $x \in m_R(U)$. Pero esto implica que $S \cap U = \emptyset$ y $x \in m_R(U)$, lo que es imposible porque $S \in R(x)$. Luego, $R(x)$ es un subconjunto creciente de $\langle \mathcal{S}(X), \subseteq \rangle$. ■

Teorema 2.5.5. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio. Consideremos una relación $R \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ tal que $m_R(U) = \{x \in X : \forall Z \in R(x)[Z \cap U \neq \emptyset]\} \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$R(x) = \bigcap\{L_U : x \in m_R(U)$ y $U \in D(X)\}$ para todo $x \in X$,*
2. *Para todo $x \in X$ y para todo $Z \in \mathcal{S}(X)$, si $(H_X(x), H_X[Z]) \in R_{m_R}$ entonces $(x, Z) \in R$,*
3. *$m_R(Z^c) = \bigcup\{m_R(U) : Z \subseteq U^c$ y $U \in D(X)\}$ para todo $Z \in \mathcal{S}(X)$, y $R(x)$ es un subconjunto creciente de $\langle \mathcal{S}(X), \subseteq \rangle$ para todo $x \in X$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Fue probado en el teorema anterior.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $x \in X$. La inclusión $R(x) \subseteq \bigcap\{L_U : x \in m_R(U)\}$ es clara. Sea $Z \in \mathcal{S}(X)$ tal que $Z \in \bigcap\{L_U : x \in m_R(U)\}$. Probaremos que $(H_X(x), H_X[Z]) \in R_{m_R}$. Sea $U \in D(X)$ tal que $x \in m_R(U)$. Entonces, $Z \in L_U$, es decir, $Z \cap U \neq \emptyset$. Por la Observación 2.5.2, tenemos que $H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) \neq \emptyset$. Luego, tenemos que para todo $U \in D(X)$ tal que $U \in m_R^{-1}(H_X(x))$, $H_X[Z] \cap \beta_{D(X)}(U) \neq \emptyset$, es decir, $U \notin I_{D(X)}(H_X[Z])$. Por lo tanto, $(H_X(x), H_X[Z]) \in R_{m_R}$ y por hipótesis, $Z \in R(x)$. Se sigue que $\bigcap\{L_U : x \in m_R(U)\} \subseteq R(x)$.

1. $\Rightarrow$ 3. Sea $x \in m_R(Z^c)$. Entonces, para todo $S \in R(x)$ tenemos que $S \cap Z^c \neq \emptyset$. Así, $Z \notin R(x)$. Por hipótesis, $Z \notin \bigcap\{L_U : x \in m_R(U)\}$, es decir, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in m_R(U)$ y $Z \cap U = \emptyset$. Luego, $x \in \bigcup\{m_R(U) : Z \subseteq U^c$ y $U \in D(X)\}$. La otra inclusión es trivial. La última parte es consecuencia del Lema 2.5.4.

3. $\Rightarrow$ 1. Sea $x \in X$ y $Z \in \bigcap\{L_U : x \in m_R(U)$ y $U \in D(X)\}$. Supongamos que $Z \notin R(x)$. Veremos que $x \in m_R(Z^c)$. Para llegar a una contradicción supongamos que $x \notin m_R(Z^c)$. Entonces, existe $S \in R(x)$ tal que $S \cap Z^c = \emptyset$. Así, $S \subseteq Z$ y por hipótesis $Z \in R(x)$, absurdo. Luego, $x \in m_R(Z^c) = \bigcup\{m_R(U) : Z \subseteq U^c$ y $U \in D(X)\}$, es decir, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in m_R(U)$ y $Z \cap U = \emptyset$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $Z \in R(x)$. La otra inclusión es trivial. ■

El siguiente diagrama resume lo visto en esta sección:

$$\begin{tikzcd} & \langle D(X), m_R\rangle \arrow[dr] & \\ \langle X,\mathcal{T},R\rangle \arrow[ur] \arrow[rr, bend right, "H_X"'] & & \langle X(D(X)), \mathcal{T}_{D(X)}, R_{m_R}\rangle \end{tikzcd}$$

2.5.1 Representación de los homomorfismos

En [9] y [13] se mostró que existe una dualidad entre homomorfismos de semirretículos distributivos y ciertas relaciones binarias llamadas $\wedge$-relaciones. Es sabido que los $\mathcal{DS}$-espacios con $\wedge$-relaciones forman una categoría. Ahora, estudiaremos la representación para los homomorfismos de semirretículos distributivos con operadores monótonos.

Sea $S \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria. Consideremos la aplicación $h_S \colon \mathcal{P}(X_2) \to \mathcal{P}(X_1)$ definida por

$$h_S(U) = \{x \in X_1 : S(x) \subseteq U\}.$$

[9] Una $\wedge$-*relación* entre dos $\mathcal{DS}$-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2\rangle$ es un subconjunto $S \subseteq X_1 \times X_2$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada $U \in D(X_2)$, $h_S(U) \in D(X_1)$, y
2. $S(x) = \bigcap\{U \in D(X_2) : S(x) \subseteq U\}$ para todo $x \in X_1$.

Si S es una $\wedge$-relación, entonces $h_S \colon D(X_2) \to D(X_1)$ es un homomorfismo de semirretículos.

Por otro lado, sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos semirretículos distributivos. Sea $h \colon A \to B$ un homomorfismo. La relación binaria $S_h \subseteq X(\mathbf{B}) \times X(\mathbf{A})$ definida por

$$(P, Q) \in S_h \text{ sii } h^{-1}[P] \subseteq Q$$

es una $\wedge$-relación, donde $h^{-1}[P] = \{a \in A : h(a) \in P\}$.

Definición 2.5.6. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ dos $\mathcal{DS}$-espacios monótonos. Consideremos una $\wedge$-relación $S \subseteq X_1 \times X_2$. Decimos que S es una $\wedge$-*relación monótona* si para todo $x \in X_1$ y para cada $U \in D(X_2)$ se satisface:

$$U^c \in R_2[S(x)] \text{ sii } S^{-1}[U^c] \in R_1(x). \tag{2.5}$$

donde $R_2[S(x)] = \{Z \in \mathcal{S}(X_2) : \exists y \in S(x)\ [(y, Z) \in R_2]\}$.

Observación 2.5.7. Notemos que si $S \subseteq X_1 \times X_2$ es una $\wedge$-relación entre dos $\mathcal{DS}$-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2 \rangle$, entonces $S^{-1}[U^c] = h_S(U)^c \in \mathcal{S}(X_1)$ para cada $U \in D(X_2)$.

La definición de $\wedge$-relación monótona es una generalización de la definición de morfismo acotado para marcos de entornos (ver [6] o [31]). Profundizaremos sobre esta noción en el capítulo 4.

Proposición 2.5.8. *La condición (2.5) es equivalente a la condición*

$$h_S(m_{R_2}(U)) = m_{R_1}(h_S(U)),$$

para todo $U \in D(X_2)$, es decir, la aplicación $h_S \colon D(X_2) \to D(X_1)$ es un homomorfismo de semirretículos con un operador monótono.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que para todo $x \in X_1$ y para cada $U \in D(X_2)$ tenemos que $U^c \in R_2[S(x)] \Leftrightarrow S^{-1}[U^c] \in R_1(x)$. Sea $x \in h_S(m_{R_2}(U))$, es decir, $S(x) \subseteq m_{R_2}(U)$. Entonces, para todo $y \in S(x)$ tenemos que $y \in m_{R_2}(U)$. Así, para todo $y \in S(x)$ y para todo $Z \in R_2(y)$ tenemos $Z \cap U \neq \emptyset$. Entonces, para todo $y \in S(x)$, $U^c \notin R_2(y)$. Luego, $U^c \notin R_2[S(x)]$. Por hipótesis, $S^{-1}[U^c] \notin R_1(x)$. Por lo tanto, $x \in m_{R_1}(S^{-1}[U^c]^c) = m_{R_1}(h_S(U))$. La otra inclusión se obtiene revirtiendo las implicaciones.

$\Leftarrow$) Supongamos que h_S es un homomorfismo. Sea $U^c \in R_2[S(x)]$. Entonces, existe $y \in S(x)$ tal que $U^c \in R_2(y)$. Así, $y \notin m_{R_2}(U)$. Luego, $S(x) \nsubseteq m_{R_2}(U)$, es decir, $x \notin h_S(m_{R_2}(U))$. Por hipótesis, $x \notin m_{R_1}(h_S(U))$, es decir, existe $Z \in R_1(x)$ tal que $Z \cap h_S(U) = \emptyset$. Tenemos que $Z \subseteq h_S(U)^c$ y como $h_S(U)^c \in \mathcal{S}(X)$ tenemos que $S^{-1}[U^c] = h_S(U)^c \in R_1(x)$. La otra implicación se obtiene de forma similar. ■

Ahora, estudiaremos la composición de $\wedge$-relaciones monótonas. Sean X_1, X_2 y X_3 tres conjuntos. Consideremos dos relaciones $S_1 \subseteq X_1 \times X_2$ y $S_2 \subseteq X_2 \times X_3$. Entonces, la composición de S_1 y S_2 es la relación $S_2 \circ S_1 \subseteq X_1 \times X_3$ definida por

$$S_2 \circ S_1 = \{(x, z) \in X_1 \times X_3 : \exists y \in X_2 \ [(x, y) \in S_1 \text{ y } (y, z) \in S_2]\}.$$

Proposición 2.5.9. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1 \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2 \rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{T}_3, R_3 \rangle$ tres $\mathcal{DS}$-espacios monótonos. Consideremos dos $\wedge$-relaciones monótonas $S_1 \subseteq X_1 \times X_2$ y $S_2 \subseteq X_2 \times X_3$. Entonces, $S_3 = S_2 \circ S_1 \subseteq X_1 \times X_3$ es una $\wedge$-relación monótona.*

Demostración. Se sigue de que $h_{S_3}(U) = h_{S_2 \circ S_1}(U) = h_{S_1} \circ h_{S_2}(U)$ para todo $U \in D(X_3)$, de la Definición 2.5.6 y de la Proposición 2.5.8. ■

Proposición 2.5.10. *Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. El orden de especialización dual $\leq \subseteq X \times X$ es una $\wedge$-relación monótona.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $U \in D(X)$ y supongamos que $U^c \in R([x))$. Entonces, existe $y \geq x$ tal que $U^c \in R(y)$ y como $R(y) \subseteq R(x)$, tenemos que $U^c \in R(x)$. Como U^c es un subconjunto decreciente, $\leq^{-1} [U^c] = U^c$.

La otra implicación es trivial. ■

Así, los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos con las $\wedge$-relaciones monótonas forman una categoría donde la flecha identidad es el orden dual de especialización. Denotaremos a esta categoría como $\mathcal{MTSR}$.

Proposición 2.5.11. *Sean $\langle \mathbf{A}, m_{\mathbf{A}}\rangle$, $\langle \mathbf{B}, m_{\mathbf{B}}\rangle \in \mathcal{MDS}$.*

1. *Sea $h\colon A \to B$ un homomorfismo de semirretículos con un operador monótono. Entonces, la $\wedge$-relación $S_h \subseteq X(\mathbf{B}) \times X(\mathbf{A})$ satisface la condición (2.5).*
2. *Sea $h\colon A \to B$ un homomorfismo y supongamos que la $\wedge$-relación $S_h \subseteq X(\mathbf{B}) \times X(\mathbf{A})$ satisface la condición (2.5). Entonces, h es un homomorfismo de semirretículos con un operador monótono.*

Demostración. 1. Supongamos que h es un homomorfismo de semirretículos con un operador monótono. Así, es fácil ver que $h_{S_h}(\beta_{\mathbf{A}}(a)) = \beta_{\mathbf{B}}(h(a))$ para todo $a \in A$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} h_{S_h}(m_{R_{m_{\mathbf{A}}}}\beta_{\mathbf{A}}(a)) &= h_{S_h}(\beta_{\mathbf{A}}(m_{\mathbf{A}}a)) && = \beta_{\mathbf{B}}(h(m_{\mathbf{A}}a)) \\ &= \beta_{\mathbf{B}}(m_{\mathbf{B}}h(a)) && = m_{R_{m_{\mathbf{B}}}}(\beta_{\mathbf{B}}(h(a))) \\ &= m_{R_{m_{\mathbf{B}}}}(h_{S_h}(\beta_{\mathbf{A}}(a))) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$.

2. Supongamos que h es un homomorfismo y que S_h satisface la condición (2.5). Entonces, $h_{S_h}(\beta_{\mathbf{A}}(a)) = \beta_{\mathbf{B}}(h(a))$ para todo $a \in A$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{B}}(h(m_{\mathbf{A}}a)) &= h_{S_h}(\beta_{\mathbf{A}}(m_{\mathbf{A}}a)) && = h_{S_h}(m_{R_{m_{\mathbf{A}}}}\beta_{\mathbf{A}}(a)) \\ &= m_{R_{m_{\mathbf{B}}}}(h_{S_h}(\beta_{\mathbf{A}}(a))) && = m_{R_{m_{\mathbf{B}}}}(\beta_{\mathbf{B}}(h(a))) \\ &= \beta_{\mathbf{B}}(m_{\mathbf{B}}h(a)) \end{aligned}$$

y como $\beta_{\mathbf{B}}$ es una función inyectiva, obtenemos que $h(m_{\mathbf{A}}a) = m_{\mathbf{B}}h(a)$ para todo $a \in A$. ■

En resumen, en este capítulo definimos dos categorías:

$\mathcal{MDSH}$	$=$	semirretículos distributivos con un operador monótono	$+$	homomorfismos
$\mathcal{MTSR}$	$=$	$\mathcal{DS}$-espacios monótonos	$+$	$\wedge$-relaciones monótonas

Del Teorema 2.5.3 y la Proposición 2.5.8, concluimos que el funtor $\mathbb{D} : \mathcal{MTSR} \to \mathcal{MDSH}$ definido por

1. $\mathbb{D}(X) = \langle D(X), m_R \rangle$ si $\langle X, \mathcal{T}, R \rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono,
2. $\mathbb{D}(S) = h_S$ si S es una $\wedge$-relación monótona

es un funtor contravariante.

Por el Teorema 2.4.14, el Corolario 2.4.15 y la Proposición 2.5.11, concluimos que el funtor $\mathbb{X} : \mathcal{MDSH} \to \mathcal{MTSR}$ definido por

1. $\mathbb{X}(\mathbf{A}) = \langle X(\mathbf{A}); \mathcal{T}_A, R_m \rangle$ si $\langle \mathbf{A}, m \rangle$ es un semirretículo distributivo con un operador monótono,
2. $\mathbb{X}(h) = S_h$ si h es un homomorfismo de semirretículos con un operador monótono

es un funtor contravariante. Por lo tanto, damos el siguiente resultado.

Corolario 2.5.12. *Las categorías $\mathcal{MDSH}$ y $\mathcal{MTSR}$ son dualmente equivalentes.*

Demostración. Los isomorfismos naturales que prueban la equivalencia de categorías son las asignaciones β y H tales que para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{MDS}$, la aplicación $\beta_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A} \to D(X(\mathbf{A}))$ es un isomorfismo entre semirretículos distributivos con un operador monótono y para todo $\mathcal{DS}$-espacio monótono, la aplicación $H_X \colon X \to X(D(X))$ es un isomorfismo de $\mathcal{DS}$-espacios monótonos. ∎

En los capítulos siguientes veremos algunas aplicaciones de la dualidad topológica y la equivalencia categorial.

Capítulo 3

Aplicaciones de la dualidad

En este capítulo consideraremos algunas aplicaciones de la dualidad desarrollada en el capítulo anterior.

Primero, utilizaremos la conexión de los espacios topológicos duales a los semirretículos distributivos con las extensiones canónicas y probaremos que la validez de algunas fórmulas específicas se conserva en las extensiones canónicas o en las extensiones canónicas duales. Para ello, por cada fórmula estudiaremos condiciones adicionales que deben cumplir las relaciones que representan a cada operador.

También estudiaremos los semirretículos distributivos modales, es decir, con un operador que cumple las mismas condiciones que un homomorfismo de semirretículos. Mostraremos cómo conectar la relación asociada al operador con la $\wedge$-relación dual.

Luego, consideraremos algunas variedades importantes que tienen reductos de semirretículo distributivo y mostraremos cómo nuestra nueva dualidad se relaciona con algunas de las ya existentes en la literatura, como por ejemplo [8], [22] y [58].

Por último, mostraremos algunos ejemplos de espacios duales.

Parte de lo expuesto en este capítulo se encuentra publicado recientemente en el artículo [15].

3.1 π-canonicidad y σ-canonicidad

Ahora veremos cómo algunas condiciones adicionales afectan la relación asociada al operador monótono. Como por cada operador m podemos definir dos relaciones R_m y G_m que corresponden a la extensión canónica y la extensión canónica dual, respectivamente, del operador, estudiaremos condiciones adicionales en ambas relaciones y esto nos ayudará a estudiar si la clase de álgebras es π-canónica y/o σ-canónica.

Proposición 3.1.1. *Sea $\langle A, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Entonces,*

1. *Son equivalentes:*
   - $m1 = 1$,
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $\emptyset \notin R_m(P)$,*
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $X(\mathbf{A}) \in G_m(P)$.*
2. *Son equivalentes:*
   - $m0 = 0$,
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $X(\mathbf{A}) \in R_m(P)$,*
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $\emptyset \notin G_m(P)$.*
3. *Son equivalentes:*
   - *Para todo $a \in A$ se cumple que $ma \leq a$,*
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $\alpha(P^c) = (P] \in R_m(P)$,*
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ y para todo $Y \in G_m(P)$ se cumple que $P \in Y$.*
4. *Son equivalentes:*
   - *Para todo $a \in A$ se cumple que $a \leq ma$,*
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ y para todo $Z \in R_m(P)$ se cumple que $P \in Z$,*
   - *para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $\psi(P) = [P) \in G_m(P)$.*

Demostración. 1. Supongamos que $m1 = 1$ y supongamos que existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $\emptyset \in R_m(P)$. Entonces, $m1 = 1 \in P$ y $m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(\emptyset) = m^{-1}(P) \cap A = \emptyset$ y se sigue que $m^{-1}(P) = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Ahora, supongamos que para todo $P \in X(\mathbf{A})$ tenemos $\emptyset \notin R_m(P)$ y supongamos que existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $X(\mathbf{A}) \notin G_m(P)$. Entonces, $\phi(X(\mathbf{A})) = \{1\} \nsubseteq m^{-1}(P)$, es decir, $1 \notin m^{-1}(P)$. Como P es un subconjunto creciente, $m^{-1}(P) = \emptyset$. Así, tenemos que $m^{-1}(P) \cap A = m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(\emptyset) = \emptyset$ y, por definición, $\emptyset \in R_m(P)$ lo cual es una contradicción.

Supongamos que para todo $P \in X(\mathbf{A})$ tenemos $X(\mathbf{A}) \in G_m(P)$ y supongamos que $m1 \neq 1$. Entonces, existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $m1 \notin P$. Así, tenemos que $\phi(X(\mathbf{A})) = \{1\} \nsubseteq m^{-1}(P)$, absurdo.

2. Es similar a 1.

3. Supongamos que $ma \leq a$ para todo $a \in A$ y que existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P] \notin R_m(P)$. Entonces, $m^{-1}(P) \cap P^c \neq \emptyset$. Así, existe $a \in A$ tal que $ma \in P$ y $a \notin P$, lo cual es una contradicción.

Ahora, supongamos que para todo $P \in X(\mathbf{A})$ tenemos $(P] \in R_m(P)$ y supongamos que existe $P \in X(\mathbf{A})$ y existe $Y \in G_m(P)$ tal que $P \notin Y$. Entonces, $\phi(Y) \subseteq m^{-1}(P)$ y existe $a \in \phi(Y)$ tal que $a \notin P$. Así, $a \in m^{-1}(P) \cap P^c$ y se sigue que $(P] \notin R_m(P)$ lo cual es una contradicción.

Supongamos que para todo $P \in X(\mathbf{A})$ y para todo $Y \in G_m(P)$ tenemos $P \in Y$ y supongamos que $ma \nleq a$. Entonces, existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $ma \in P$ y $a \notin P$. Así, tenemos que $[a) \subseteq m^{-1}(P)$ pero $P \notin \psi([a)) = \beta(a)$ lo cual es una contradicción.

4. Es similar a 3. ∎

Es fácil probar que los semirretículos distributivos con un operador monótono que satisfacen alguna de las condiciones de la proposición anterior conforman una clase de álgebras π-canónica y σ-canónica, es decir, las condiciones siguen valiendo en las extensiones π-canónica y σ-canónica de las álgebras.

Ahora, caracterizaremos los espacios duales de los semirretículos distributivos monótonos satisfaciendo alguna de las condiciones $(\mathbf{4}_\Box)$ $ma \leq m^2a$ ó $(\mathbf{4}_\Diamond)$ $m^2a \leq ma$ para todo elemento a. Veremos que la condición $\mathbf{4}_\Box$ es σ-canónica y que la condición $\mathbf{4}_\Diamond$ es π-canónica.

Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. Para cualquier $U \in \mathrm{Up}(X)$ definimos el operador $m_R^2 \colon \mathrm{Up}(X) \to \mathrm{Up}(X)$ por

$$m_R^2(U) = m_R(m_R(U)).$$

Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. Recordemos que $m_R(Z^c)^c = \bigcap\{m_R(U)^c : U \in D(X) \text{ y } Z \subseteq U^c\}$ para todo $Z \in \mathcal{S}(X)$.

Proposición 3.1.2. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$ satisfaciendo $m^2a \leq ma$ para todo $a \in A$. Entonces, $m_{R_m}^2(U) \subseteq m_{R_m}(U)$ para todo $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$, es decir, $\mathbf{4}_\Diamond$ es π-canónica.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{MDS}$ tal que $m^2a \leq ma$ para todo $a \in A$. Entonces, para todo $U \in D(X(\mathbf{A}))$ tenemos que $m_{R_m}^2(U) \subseteq m_{R_m}(U)$. Primero, veremos que $m_{R_m}^2(Z^c) \subseteq m_{R_m}(Z^c)$ para todo $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$. Sea $P \in m_{R_m}^2(Z^c)$. Así, obtenemos que $m_{R_m}(Z^c)^c \notin R_m(P)$. Supongamos que $P \notin m_{R_m}(Z^c)$. Entonces, tenemos que $Z \in R_m(P)$. Como $R_m(P) = \bigcap\{L_U : U \in D(X) \text{ y } P \in m_{R_m}(U)\}$, existe $U \in D(X)$ tal que $P \in m_{R_m}(U)$ y $m_{R_m}(Z^c)^c \cap U = \emptyset$. Por la observación previa, existe $V \in D(X)$ tal que $Z \subseteq V^c$ y $m_{R_m}(V)^c \cap U = \emptyset$. Luego, $U \subseteq m_{R_m}(V)$ y por hipótesis $P \in m_{R_m}(U) \subseteq m^2_{R_m}(V) \subseteq m_{R_m}(V)$. Como $P \in m_{R_m}(V)$ y $Z \in R_m(P)$ obtenemos que $Z \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Ahora, veremos que $m^2_{R_m}(U) \subseteq m_{R_m}(U)$ para todo $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$. Sea $P \in m^2_{R_m}(U)$ y supongamos que $P \notin m_{R_m}(U)$. Entonces, existe $Z \in R_m(P)$ tal que $Z \cap U = \emptyset$. Así, $U \subseteq Z^c$ y obtenemos que $m_{R_m}(U) \subseteq m_{R_m}(Z^c)$. Luego, $m_{R_m}(U) \cap m_{R_m}(Z^c)^c = \emptyset$ y como $P \in m^2_{R_m}(U)$ obtenemos que $m_{R_m}(Z^c)^c \notin R_m(P)$. Por lo tanto $P \in m^2_{R_m}(Z^c) \subseteq m_{R_m}(Z^c)$, lo cual es una contradicción porque $Z \in R_m(P)$.■

Sea $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono. Para cualquier $U \in \mathrm{Up}(X)$ definimos el operador $m^2_G\colon \mathrm{Up}(X) \to \mathrm{Up}(X)$ por

$$m^2_G(U) = m_G(m_G(U)).$$

Sea $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono. Recordemos que $m_G(Y) = \bigcap\{m_G(U) : U \in D(X) \text{ y } Y \subseteq U\}$ para todo $Y \in \mathcal{C}(X)$.

Proposición 3.1.3. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$ satisfaciendo $ma \leq m^2a$ para todo $a \in A$. Entonces, $m_{G_m}(U) \subseteq m^2_{G_m}(U)$ para todo $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$, es decir, $\mathbf{4}_\Box$ es σ-canónica.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{MDS}$ tal que $ma \leq m^2a$ para todo $a \in A$. Entonces, para todo $U \in D(X(\mathbf{A}))$ tenemos que $m_{G_m}(U) \subseteq m^2_{G_m}(U)$. Primero, veremos que $m_{G_m}(Y) \subseteq m^2_{G_m}(Y)$ para todo $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$. Sea $P \in m_{G_m}(Y)$. Así, obtenemos que $Y \in G_m(P)$. Supongamos que $P \notin m^2_{G_m}(Y)$. Entonces, tenemos que $m_{G_m}(Y) \notin G_m(P)$. Como $G_m(P) = \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X) \text{ y } P \notin m_{G_m}(U)\}$, existe $U \in D(X)$ tal que $P \notin m_{G_m}(U)$ y $m_{G_m}(Y) \subseteq U$. Por la observación previa, existe $V \in D(X)$ tal que $Y \subseteq V$ y $m_{G_m}(Y) \subseteq m_{G_m}(V) \subseteq U$. Luego, $P \in m_{G_m}(V)$ y por hipótesis $P \in m^2_{G_m}(V) \subseteq m_{G_m}(U)$ lo cual es una contradicción.

Ahora, veremos que $m_{G_m}(U) \subseteq m^2_{G_m}(U)$ para todo $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$. Sea $P \in m_{G_m}(U)$. Entonces, existe $Y \in G_m(P)$ tal que $Y \subseteq U$. Así, $m_{G_m}(Y) \subseteq m_{G_m}(U)$ y obtenemos que $P \in m_{G_m}(Y) \subseteq m^2_{G_m}(Y) \subseteq m^2_{G_m}(U)$. Luego, $P \in m^2_{G_m}(U)$. ■

Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. Definimos una relación

$$\bar{R} \subseteq \mathcal{S}(X) \times \mathcal{S}(X)$$

por

$$(S, Z) \in \bar{R} \Leftrightarrow \forall x \in S \ (x, Z) \in R.$$

Definimos $R^2 \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ de la siguiente manera

$$(x, Z) \in R^2 \Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{S}(X) \text{ tal que } (x, S) \in R \text{ y } (S, Z) \in \bar{R}.$$

Definición 3.1.4. Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. La relación R es *transitiva* si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $Z \in \mathcal{S}(X)$ si $(x, Z) \in R^2$ entonces $(x, Z) \in R$.

Definición 3.1.5. Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. La relación R es *débilmente densa* si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $Z \in \mathcal{S}(X)$ si $(x, Z) \in R$ entonces $(x, Z) \in R^2$.

Lema 3.1.6. *Sea $\langle A, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Entonces, $I_{\mathbf{A}}(m_{R_m}(\alpha(I)^c)^c) = (m(I)]$, donde $m(I) = \{ma : a \in I\}$.*

Lema 3.1.7. *Sea $A \in \mathcal{MDS}$. Entonces para todo $P \in X(\mathbf{A})$ e $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$, $(P, \alpha(I)) \in R^2_m \Leftrightarrow I \subseteq \{a \in A : m^2a \in P^c\}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $(P, \alpha(I)) \in R^2_m$ y sea $a \in I$. Supongamos que $m^2a \in P$. Entonces, existe $J \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $(P, \alpha(J)) \in R_m$ y $(\alpha(J), \alpha(I)) \in \bar{R}_m$. Así, $m^{-1}(P) \cap J = \emptyset$ y $ma \notin J$. Obtenemos que existe $Q \in \alpha(J)$ tal que $ma \in Q$. Por lo tanto, $(Q, \alpha(I)) \in R_m$ y $a \notin I$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que $I \subseteq \{a \in A : m^2a \in P^c\}$. Probaremos que $m_{R_m}(\alpha(I)^c)^c \in R_m(P)$. Como, $I_{\mathbf{A}}(m_{R_m}(\alpha(I)^c)^c) = (m(I)]$ supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \in m^{-1}(P) \cap (m(I)]$. Así, $ma \in P$ y existe $b \in I$ tal que $a \leq mb$. Entonces, $ma \leq m^2b$ y obtenemos que $m^2b \in P \cap P^c$, una contradicción. Por lo tanto, $m_{R_m}(\alpha(I)^c)^c \in R_m(P)$ y $(m_{R_m}(\alpha(I)^c)^c, \alpha(I)) \in \bar{R}_m$, es decir, $(P, \alpha(I)) \in R^2_m$. ■

Proposición 3.1.8. *Sea $A \in \mathcal{MDS}$. Entonces vale que:*

1. *$ma \leq m^2a$ para todo $a \in A$ si y sólo si R_m es transitiva.*

2. *$m^2a \leq ma$ para todo $a \in A$ si y sólo si R_m es débilmente densa.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Supongamos que $ma \leq m^2a$ para todo $a \in A$ y que $(P, Z) \in R^2_m$. Entonces, $I_{\mathbf{A}}(Z) \subseteq \{a \in A : m^2a \in P^c\}$. Supongamos que $m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) \neq \emptyset$. Obtenemos que existe $a \in A$ tal que $ma \in P$ y $a \in I_{\mathbf{A}}(Z)$. Por lo tanto $m^2a \notin P$ y $m^2a \in P$ lo cual es una contradicción. Como $m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset$ tenemos que $(P, Z) \in R_m$.

$\Leftarrow$) Supongamos que R_m es transitiva y supongamos que existe $a \in A$ tal que $ma \nleq m^2a$. Entonces, existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $ma \in P$ y $m^2a \notin P$. Así, $(a] \subseteq \{a \in A : m^2a \in P^c\}$ y por el Lema 3.1.7, $(P, \alpha(a)) \in R_m^2$. Obtenemos que $(P, \alpha(a)) \in R_m$, es decir, $ma \notin P$, lo cual es una contradicción.

2. $\Rightarrow$) Supongamos que $m^2a \leq ma$ para todo $a \in A$ y que $(P, Z) \in R_m$. Probaremos que $I_{\mathbf{A}}(Z) \subseteq \{a \in A : m^2a \in P^c\}$. Sea $a \in I_{\mathbf{A}}(Z)$. Como $m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset$ obtenemos que $ma \notin P$ y por lo tanto $m^2a \notin P$. Por el Lema 3.1.7, $(P, Z) \in R_m^2$.

$\Leftarrow$) Supongamos que R_m es débilmente densa. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $m^2a \nleq ma$. Entonces, existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $m^2a \in P$ y $ma \notin P$. Entonces, $(P, \alpha(a)) \in R_m$. Así, $(P, \alpha(a)) \in R_m^2$ y, por el Lema 3.1.7, $(a] \subseteq \{a \in A : m^2a \in P^c\}$, es decir, $m^2a \notin P$, lo cual es una contradicción. ■

Por completitud agregamos las definiciones y teoremas correspondientes para los $\mathcal{DS}$-espacios $\mathcal{C}$-monótonos.

Sea $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono. Definiremos una relación

$$\bar{G} \subseteq \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$$

por

$$(Y, C) \in \bar{G} \Leftrightarrow \forall x \in Y \ (x, C) \in G.$$

Definiremos $G^2 \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ de la siguiente manera

$$(x, Y) \in G^2 \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}(X) \text{ tal que } (x, C) \in G \text{ y } (C, Y) \in \bar{G}.$$

Definición 3.1.9. Sea $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono. La relación G es *transitiva* si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $Y \in \mathcal{C}(X)$ si $(x, Y) \in G^2$ entonces $(x, Y) \in G$.

Definición 3.1.10. Sea $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio $\mathcal{C}$-monótono. La relación G es *débilmente densa* si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $Y \in \mathcal{C}(X)$ si $(x, Y) \in G$ entonces $(x, Y) \in G^2$.

Lema 3.1.11. *Sea $A \in \mathcal{MDS}$ y $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$. Entonces, $\phi(m_{G_m}(\psi(F))) = [m(F))$ donde $m(F) = \{ma : a \in F\}$.*

Lema 3.1.12. *Sea $A \in \mathcal{MDS}$. Entonces para todo $P \in X(\mathbf{A})$ y $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$, $(P, \psi(F)) \in G_m^2$ si y sólo si $F \subseteq \{a \in A : m^2a \in P\}$.*

Proposición 3.1.13. *Sea $A \in \mathcal{MDS}$. Entonces vale que:*

1. *$ma \leq m^2a$ para todo $a \in A$ si y sólo si G_m es débilmente densa,*

2. *$m^2a \leq ma$ si y sólo si G_m es transitiva.*

3.2 Semirretículos distributivos modales

En esta sección consideraremos semirretículos distributivos dotados con un operador modal normal, es decir, una función que preserva el último elemento y preserva ínfimos finitos.

Definición 3.2.1. Un *semirretículo distributivo modal* es un álgebra $\langle \mathbf{A}, m\rangle$ donde $\mathbf{A}$ es un semirretículo distributivo y $m \colon A \to A$ es un operador que verifica la siguientes condiciones:

1. $m1 = 1$,

2. $m(a \wedge b) = ma \wedge mb$ para todo $a, b \in A$.

Es claro que m es un homomorfismo y que los semirretículos distributivos modales son semirretículos distributivos monótonos. Luego, un operador modal m en un semirretículo distributivo $\mathbf{A}$ podría ser representado por medio de una multirelación adecuada R definida en el espacio dual de $\mathbf{A}$ y por una $\wedge$-relación. Ahora identificaremos qué condiciones adicionales debe satisfacer esta multirelación.

Observación 3.2.2. Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono. Como $(x] = \bigcap\{U \in \mathcal{KO}(X) : x \in U\}$ y $\mathcal{KO}(X)$ es una base, tenemos que $(x] \in \mathcal{S}(X)$ para cada $x \in X$.

Observación 3.2.3. Dado un semirretículo distributivo modal $\langle \mathbf{A}, m\rangle$, notemos que $m^{-1}(F) \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ para todo $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$. También notemos que $I_{\mathbf{A}}((Q]) = Q^c$ para $Q \in X(\mathbf{A})$ en el espacio $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m\rangle$.

Definición 3.2.4. Un $\mathcal{DS}$-espacio monótono $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ es llamado *normal* si

- para cualquier $x \in X$ y para cada $Z \in \mathcal{S}(X)$ tal que $Z \in R(x)$ existe $z \in Z$ tal que $(z] \in R(x)$,

- $\emptyset \notin R(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición 3.2.5. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle \in \mathcal{MDS}$. Entonces $\langle \mathbf{A}, m\rangle$ es un semirretículo distributivo modal si y sólo si $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $(P, \alpha(I)) \in R_m$. Entonces, $m^{-1}(P) \cap I = \emptyset$. Como $\langle \mathbf{A}, m\rangle$ es un semirretículo distributivo modal, tenemos que $m^{-1}(P) \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$. Así, existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $m^{-1}(P) \subseteq Q$ y $Q \cap I = \emptyset$. Luego, $Q \in \alpha(I)$ y es fácil ver que $m^{-1}(P) \cap Q^c = \emptyset$ y por lo tanto, $(P, (Q]) \in R_m$. El segundo item se sigue de la Proposición 3.1.1.

$\Leftarrow$) Sea $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal. Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $ma \wedge mb \not\leq m(a \wedge b)$. Entonces, existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $ma \wedge mb \in P$ pero $m(a \wedge b) \notin P$. Notemos que $ma \wedge mb \leq ma \in P$ y $ma \wedge mb \leq mb \in P$. Así, tenemos que $(P, \alpha(a \wedge b)) \in R_m$ y como $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal, existe $Q \in \alpha(a \wedge b)$ tal que $(P, (Q]) \in R_m$. A partir de $I_{\mathbf{A}}((Q]) = Q^c$, obtenemos que $m^{-1}(P) \cap Q^c = \emptyset$. Luego, $a, b \in m^{-1}(P) \subseteq Q$ y, como Q es un filtro, tenemos que $a \wedge b \in Q$. En consecuencia, $Q \cap (a \wedge b] \neq \emptyset$, lo que contradice que $Q \in \alpha(a \wedge b)$. El resto de la prueba se sigue de la Proposición 3.1.1. Por lo tanto $\langle \mathbf{A}, m\rangle$ es un semirretículo distributivo modal. ■

El siguiente resultado muestra que la extensión canónica de un operador modal normal es igual a la extensión canónica dual. Además, mostraremos que la extensión preserva ínfimos arbitrarios. Como todo elemento de la extensión canónica de un semirretículo distributivo es ínfimo de elementos completamente $\wedge$-primos, la extensión del operador está completamente determinada por su acción sobre ellos. Recordemos que $M^{\infty}(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) = \{\alpha(P^c)^c = (P]^c : P \in X(\mathbf{A})\}$ para $\langle \mathbf{A}, m\rangle$.

Lema 3.2.6. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle$ un semirretículo distributivo modal. Entonces*

1. $m_{R_m}(U) = m_{G_m}(U)$ *para todo* $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.
2. $m_{R_m}(\bigcap\{U_i : i \in I\}) = \bigcap\{m_{R_m}(U_i) : i \in I\}$ *para cualquier familia de conjuntos* $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.

Demostración. 1. Sean $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ y $P \in m_{R_m}(U)$. Vamos a probar que $\psi(m^{-1}(P)) \subseteq U$. Sea Sea $Q \in \psi(m^{-1}(P))$. Entonces $m^{-1}(P) \subseteq Q$ y $\alpha(Q^c) = (Q] \in R_m(P)$. Luego, $(Q] \cap U \neq \emptyset$ y por ser U creciente obtenemos que $Q \in U$. Como $\psi(m^{-1}(P)) \in G_m(P)$, tenemos que $P \in m_{G_m}(U)$. La otra desigualdad vale siempre.

2. Sea $P \in \bigcap\{m_{R_m}(U_i) : i \in I\}$ para una familia de conjuntos $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$. Sea $Z \in R_m(P)$. Por hipótesis existe $Q \in Z$ tal que $(Q] \in R_m(P)$. Luego, $(Q] \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Como son conjuntos crecientes, vale que $Q \in U_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $Z \cap \bigcap\{U_i : i \in I\} \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$P \in m_{R_m}(\bigcap\{U_i : i \in I\})$. La otra desigualdad vale siempre. ∎

Como un operador modal normal es un homomorfismo de semirretículos, también podemos interpretarlo a través de una $\wedge$-relación en el espacio dual. Mostraremos la conexión entre la multirelación y la $\wedge$-relación asociadas al mismo operador.

Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio y sea $S \subseteq X \times X$ una $\wedge$-relación. Sea $h_S \colon \mathrm{Up}(X) \to \mathrm{Up}(X)$ el operador definido por

$$h_S(U) = \{x \in X : S(x) \subseteq U\}$$

donde $S(x) = \{y \in X : (x, y) \in S\}$. Definimos una multirelación $R_S \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ por

$$(x, Z) \in R_S \Leftrightarrow S(x) \cap Z \neq \emptyset.$$

Por otra parte, sea $\langle X, \mathcal{T}, R \rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal. Definimos la relación $S_R \subseteq X \times X$ por

$$(x, z) \in S_R \Leftrightarrow (x, (z]) \in R.$$

Proposición 3.2.7. *1. Sea $\langle X, \mathcal{T}, R \rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal. Entonces, la estructura $\langle X, \mathcal{T}, S_R \rangle$ es tal que $m_R(U) = h_{S_R}(U)$ para todo $U \in \mathrm{Up}(X)$, S_R es una $\wedge$-relación y $R = R_{S_R}$.*

2. Sea $\langle X, \mathcal{T}, S \rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio con una $\wedge$-relación $S \subseteq X \times X$. Entonces, la estructura $\langle X, \mathcal{T}, R_S \rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal tal que $m_{R_S}(U) = h_S(U)$ para todo $U \in \mathrm{Up}(X)$, y $S = S_{R_S}$.

Demostración. 1. Sea $U \in \mathrm{Up}(X)$. Probaremos que $m_R(U) = h_{S_R}(U)$. Sea $x \in m_R(U)$ y sea $z \in S_R(x)$. Entonces, $(x, (z]) \in R$ y obtenemos que $(z] \cap U \neq \emptyset$. Como U es un subconjunto creciente, tenemos que $z \in U$. Luego, $S_R(x) \subseteq U$ y $x \in h_{S_R}(U)$. Sea $x \in h_{S_R}(U)$ y sea $Z \in R(x)$. Entonces, existe $z \in Z$ tal que $(z] \in R(x)$. Por definición $(x, z) \in S_R(x)$. Así, $z \in U$ y obtenemos que $Z \cap U \neq \emptyset$. Luego, $x \in m_R(U)$.

Así, tenemos que $m_R(U) = h_{S_R}(U) \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$. Veremos que $S_R(x) = \bigcap\{U \in D(X) : S_R(x) \subseteq U\}$ para todo $x \in X$. Sean $x, z \in X$ tales que $z \in \bigcap\{U \in D(X) : S_R(x) \subseteq U\}$. Entonces, $z \in U$ para todo $U \in D(X)$ tal que $x \in h_{S_R}(U) = m_R(U)$. Por la condición (2) de la Definición 2.4.6, $(z] \in R(x)$. Por lo tanto, $z \in S_R(x)$.

Ahora, sea $(x, Z) \in R$. Veremos que $S_R(x) \cap Z \neq \emptyset$. Como $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ es DS-espacio monótono normal, existe $z \in Z$ tal que $(z] \in R(x)$. Por definición $z \in S_R(x) \cap Z$. Sea $(x, Z) \in R_{S_R}$. Entonces, $S_R(x) \cap Z \neq \emptyset$. Sea $z \in Z$ tal que $(x, z) \in S_R$. Por definición de S_R, $(x, (z]) \in R$. Así, $(z] \subseteq Z$ y por la Proposición 2.5.4, $(x, Z) \in R$. Por lo tanto $R = R_{S_R}$.

2. Sea $U \in \mathrm{Up}(X)$. Probaremos que $m_{R_S}(U) = h_S(U)$. Sea $x \in m_{R_S}(U)$ y sea $z \in S(x)$. Entonces, $S(x) \cap (z] \neq \emptyset$. Por definición de R_S, $(x, (z]) \in R_S$. Así, $(z] \cap U \neq \emptyset$ y como U es un subconjunto creciente, tenemos que $z \in U$. Luego, $S(x) \subseteq U$ y $x \in h_S(U)$. Sea $x \in h_S(U)$ y sea $Z \in R_S(x)$. Entonces, existe $z \in Z$ tal que $z \in S(x)$. Así, $z \in U$ y obtenemos $Z \cap U \neq \emptyset$. Luego, $x \in m_{R_S}(U)$.

Así, tenemos que $h_S(U) = m_{R_S}(U) \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$. Tenemos que $\langle X, \mathcal{T}, R_S\rangle$ es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono normal. Sea $x \in X$, $Z \in \bigcap\{L_U : x \in m_{R_S}(U)\}$ y supongamos que $Z \notin R_S(x)$. Por definición, $Z \cap S(x) = \emptyset$ y como $S(x)$ es un subconjunto cerrado, existe $U \in D(X)$ tal que $Z \subseteq U^c$ y $s(x) \cap U^c = \emptyset$, es decir, $x \in h_S(U) = m_{R_S}(U)$ y $Z \cap U = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $R_S(x) = \bigcap\{L_U : x \in m_{R_S}(U)\}$. Ahora, sea $x \in X$ y $Z \in R_S(x)$. Entonces, existe $z \in S(x) \cap Z$. Así, $S(x) \cap (z] \neq \emptyset$ y por definición de R_S, $(x, (z]) \in R_S$.

Finalmente, sea $(x, z) \in S$. Entonces $z \in S(x) \cap (z]$ y, por definición, $(x, (z]) \in R_S$. Por lo tanto, $(x, z) \in S_{R_S}$. Por otro lado, sea $(x, z) \in S_{R_S}$. Entonces, $(x, (z]) \in R_S$. Así, $S(x) \cap (z] \neq \emptyset$. Como S es una $\wedge$-relación, $S(x)$ es un subconjunto creciente. Luego, $z \in S(x)$. Por lo tanto $S = S_{R_S}$. ■

Observación 3.2.8. Notemos que como caso particular obtenemos la relación definida en [22] por Mai Gherke. En este trabajo se muestra una derivación algebraica del espacio asociado a un retículo distributivo acotado con una modalidad $\Box$ que preserva el 1 y la operación $\wedge$ basada en la extensión canónica. La relación $S \subseteq X(\mathbf{A}) \times X(\mathbf{A})$ definida en [22] es:

$$(P, Q) \in S \Leftrightarrow \Box^{\pi}((Q]^c) \subseteq (P]^c.$$

Es fácil ver que $\Box^{\pi}((Q]^c) \subseteq (P]^c \Leftrightarrow \Box^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$.

3.3 Semirretículos implicativos con un operador monótono

En esta sección consideraremos los semirretículos implicativos $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \rightarrow, 1\rangle$ dotados de un operador monótono. Primero notemos que los semirretículos implicativos conforman una variedad y que en todo semirretículo implicativo vale que $a \leq b$ si y sólo si $a \rightarrow b = 1$. La dualidad topológica estilo Stone para esta variedad ha sido estudiada en [8], en donde se introduce la siguiente definición.

Definición 3.3.1. Un $\mathcal{IS}$-espacio es una estructura $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ tal que

- es un $\mathcal{DS}$-espacio y
- se cumple que $U \Rightarrow V = \{x \in X : [x) \cap U \subseteq V\} \in D(X)$ para todo $U, V \in D(X)$.

Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un $\mathcal{IS}$-espacio. El conjunto $\langle D(X), \Rightarrow, X\rangle$ es un semirretículo implicativo. Es fácil comprobar que para todo $U, V \in D(X)$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$U \Rightarrow V = (\mathrm{sat}(U \cap V^c))^c = (U \cap V^c]^c$$

Dado un semirretículo implicativo, la estructura $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}\rangle$ es un $\mathcal{IS}$-espacio tal que la aplicación $\beta : A \rightarrow D(X(\mathbf{A}))$ es un isomorfismo de semirretículos implicativos.

Podemos considerar a los semirretículos implicativos como semirretículos distributivos con una operación adicional. La extension canónica del reducto de semirretículo ya la hemos repasado en el capítulo 2. Podemos considerar a la implicación como una operación monótona, ya que preserva el orden en la segunda coordenada e invierte el orden en la primera, es decir considerar a $\rightarrow$ como una aplicación de $A^\partial \times A$ en A. Es conocido que para todo semirretículo implicativo $\langle A, \wedge, \rightarrow, 1\rangle$, tenemos que $(\mathbf{A}^\sigma, (\rightarrow)^\pi)$ es un semirretículo implicativo pero existen ejemplos en los que las extensiones $(\rightarrow)^\pi$ y $(\rightarrow)^\delta$ no coinciden [22]. Como es un operador monótono, podemos aplicar el desarrollo realizado en el capítulo 2, con la dificultad de trabajar con dos coordenadas. Sabemos que $K((A^\partial \times A)^\sigma) = O(A^\sigma) \times K(A^\sigma)$ y $O((A^\partial \times A)^\sigma) = K(A^\sigma) \times O(A^\sigma)$, por lo tanto, las relaciones que definamos en el espacio dual tienen elementos de tres coordenadas.

Sea $\langle \mathbf{A}, \rightarrow\rangle$ un semirretículo implicativo. Vamos a definir una relación $R_\rightarrow \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \times \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ y otra $G_\rightarrow \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \times \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ de la siguiente manera:

$$(P, Y, Z) \in R_\rightarrow \Leftrightarrow (\rightarrow)^{-1}(P) \cap [\phi(Y) \times I_A(Z)] = \emptyset,$$

$$(P, Z, Y) \in G_{\to} \Leftrightarrow [I_A(Z) \times \phi(Y)] \subseteq (\to)^{-1}(P)$$

donde $(\to)^{-1}(P) = \{(a, b) \in A \times A : a \to b \in P\}$.

Por lo tanto, las extensiones quedan definidas de la siguiente manera:

$$U \to^{\pi} V \Leftrightarrow \forall (Y, Z) \in R_{\to}(P) \, [(Y \cap U^c) \cup (Z \cap V) \neq \emptyset],$$

$$U \to^{\delta} V \Leftrightarrow \exists (Z, Y) \in G_{\to}(P) \, [(Z \cap U) \cup (Y \cap V^c) = \emptyset]$$

para todo $U, V \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.

Recordemos que $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Heyting. Como la implicación de Heyting es única entonces $\Rightarrow$ y $\to^{\pi}$ coinciden. Damos una prueba directa de ello en el siguiente lema.

Lema 3.3.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo implicativo. Para todo* $U, V \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$, $P \in U \to^{\pi} V$ *si y sólo si* $P \in U \Rightarrow V$, *es decir,* $[P) \cap U \subseteq V$.

Demostración. Supongamos que $P \in U \to^{\pi} V$ y sea $Q \in [P) \cap U$. Para llegar a una contradicción, supongamos que $Q \notin V$. Como la extensión canónica es una compleción densa, existe un $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ tal que $Q \in Y \subseteq U$ y existe $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ tal que $V \subseteq Z^c$ y $Q \in Z$. Tenemos que $(Y \cap U^c) \cup (Z \cap V) = \emptyset$. Por lo tanto $(Y, Z) \notin R_{\to}(P)$, es decir, $(\to)^{-1}(P) \cap [\phi(Y) \times I_A(Z)] \neq \emptyset$. Entonces existen $a \in \phi(Y)$ y $b \in I_A(Z)$ tal que $a \to b \in P$. Obtenemos que $a \to b \in Q$ y $a \in Q$. Como Q es un filtro, se deduce que $b \in Q$ pero de $Q \in Z$ y $b \in I_A(Z)$ se deduce que $b \notin Q$, absurdo. Luego $Q \in V$.

Por otro lado, supongamos que $[P) \cap U \subseteq V$ y $(Y, Z) \in R_{\to}(P)$. Para llegar a una contradicción, supongamos que $(Y \cap U^c) \cup (Z \cap V) = \emptyset$. Entonces $Y \subseteq U$ y $V \subseteq Z^c$. Por hipótesis, $(\to)^{-1}(P) \cap [\phi(Y) \times I_A(Z)] = \emptyset$. Probemos que

$$F(P \cup \phi(Y)) \cap I_A(Z) = \emptyset,$$

donde $F(P \cup \phi(Y))$ es el filtro generado por la unión de P y $\phi(Y)$. Supongamos lo contrario. Sea $b \in F(P \cup \phi(Y)) \cap I_A(Z)$. Es fácil probar que existe $a \in \phi(Y)$ tal que $a \to b \in P$, pero esto implica que $(a, b) \in (\to)^{-1}(P) \cap [\phi(Y) \times I_A(Z)]$, absurdo. Luego, $F(P \cup \phi(Y)) \cap I_A(Z) = \emptyset$ y tenemos que existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $P \subseteq Q$, $Q \in Y$ y $Q \in Z$. Obtenemos que $Q \in [P) \cap U$ y por hipótesis $Q \in V \subseteq Z^c$, absurdo. Entonces, $(Y \cap U^c) \cup (Z \cap V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $P \in U \to^{\pi} V$. ∎

Como corolario tenemos que $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, X \rangle$ es la extensión canónica dual de $\mathbf{A}$.

Podemos ver a los $\mathcal{IS}$-espacios como $\mathcal{DS}$-espacios monótonos $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ donde $R \subseteq X \times \mathcal{C}(X) \times \mathcal{S}(X)$ y las condiciones sobre la relación son:

- $U \to_R V = \{x \in X : \forall (Y, Z) \in R(x)\ [(Y \cap U^c) \cup (Z \cap V) \neq \emptyset\} \in D(X)$ para todo $U, V \in D(X)$.
- $R(x) = \bigcap\{L_{(U,V)} : U, V \in D(X) \text{ y } x \in U \to_R V\}$ donde $L_{(U,V)} = \{(Y, Z) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{S}(X) : (Y \cap U^c) \cup (Z \cap V) \neq \emptyset\}$.

Estudiaremos ahora los morfismos de la categoría que tiene como objetos a los $\mathcal{IS}$-espacios. En [8] fue probado que existe una dualidad entre la categoría de los semirretículos implicativos con homomorfismos de semirretículos implicativos, es decir, con homomorfismos de semirretículos $h\colon A \to B$ que además cumplen la condición $h(a) \to h(b) = h(a \to b)$ para todo $a, b \in A$, y la categoría de los $\mathcal{IS}$-espacios con relaciones funcionales, es decir $\wedge$-relaciones $S \subseteq X_1 \times X_2$ que además cumplen que para todo $x \in \mathrm{dom}S$ y para todo $y \in S(x)$ existe $z \in X_1$ tal que $x \leq z$ y $S(z) = [y)$. También en el mismo trabajo, se probó que estas relaciones son equivalentes a una clase de funciones parciales llamadas $\mathcal{IS}$-morfismos.

Siguiendo el desarrollo realizado en el capítulo 2, tenemos que los morfismos duales a los homomorfismos de semirretículos implicativos son las $\wedge$-relaciones $S \subseteq X_1 \times X_2$ entre dos $\mathcal{DS}$-espacios monótonos $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ donde $R_1 \subseteq X_1 \times \mathcal{C}(X_1) \times \mathcal{S}(X_1)$ y $R_2 \subseteq X_2 \times \mathcal{C}(X_2) \times \mathcal{S}(X_2)$ tales que

$$(U, V^c) \in R_2[S(x)] \text{ sii } (S^{-1}[U^c]^c, S^{-1}[V^c]) \in R_1(x) \tag{3.1}$$

para todo $U, V \in D(X_2)$. Estas son las $\wedge$-relaciones monótonas.

Observación 3.3.3. Todo homomorfismo de semirretículos $h : A \to B$ cumple que $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$. Por lo tanto, a la definición de las $\wedge$-relaciones monótonas basta con exigirles sólo una implicación: si $(S^{-1}[U^c]^c, S^{-1}[V^c]) \in R_1(x)$ entonces $(U, V^c) \in R_2[S(x)]$. La otra implicación siempre vale.

Proposición 3.3.4. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ dos $\mathcal{DS}$-espacios monótonos donde $R_1 \subseteq X_1 \times \mathcal{C}(X_1) \times \mathcal{S}(X_1)$ y $R_2 \subseteq X_2 \times \mathcal{C}(X_2) \times \mathcal{S}(X_2)$. Una $\wedge$-relación $S \subseteq X_1 \times X_2$ satisface la Condición (3.1) si y sólo si $h_S\colon D(X_2) \to D(X_1)$ es un homomorfismo de semirretículos implicativos.*

Demostración. Es análogo al razonamiento del capítulo 2. ■

Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un $\mathcal{DS}$-espacio monótono donde $R \subseteq X \times \mathcal{C}(X) \times \mathcal{S}(X)$ y consideremos el espacio $\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{D(X)}, R_{\to_R}\rangle$. La aplicación $H_X\colon X \to X(D(X))$ es un homeormorfismo de espacios topológicos, un isomorfismo de orden y además cumple que

$$(x, Y, Z) \in R \text{ si y sólo si } (H_X(x), H_X[Y], H_X[Z]) \in R_{\to_R}$$

para todo $x \in X$, $Y \in \mathcal{C}(X)$ y $Z \in \mathcal{S}(X)$.

Sea $\mathcal{IS}$ la categoría que tiene como objetos a los semirretículos implicativos y como morfismos a los homomorfismos de semirretículos implicativos y sea $\mathcal{IDS}$ la categoría que tiene como objetos a los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos definidos en esta sección (donde la relación tiene elementos de tres coordenadas) y como morfismos a las $\wedge$-relaciones monótonas que cumplen la condición (3.1). En resumen,

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{IS} & = & \text{semirretículos implicativos} & + & \text{homomorfismos} \\[2ex] \mathcal{IDS} & = & \mathcal{DS}\text{-espacios monótonos} & + & \wedge\text{-relaciones monótonas} \\ & & \text{con } R \subseteq X \times \mathcal{C}(X) \times \mathcal{S}(X) & & \text{que cumplen (3.1)} \end{array}$$

Corolario 3.3.5. *Las categorías $\mathcal{IS}$ e $\mathcal{IDS}$ son dualmente equivalentes.*

Ahora estudiaremos los semirretículos implicativos dotados con un operador monótono. Veremos cómo se conectan la relación dual a la implicación y la dual al operador.

Sea $\langle A, \wedge, \to, m, 1\rangle$ un semirretículo implicativo con un operador monótono. Sea $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_\to, R_m\rangle$ el espacio dual donde $R_\to \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \times \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ y $R_m \subseteq X \times \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$. Entonces para todo $A, B \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ se cumple que

$$\Big[(A]_u \times (B^c]_d\Big] \cap \mathrm{Img}R_\to = \emptyset \text{ implica } \Big[(m_{R_m}(A)]_u \times (m_{R_m}(B)^c]_d\Big] \cap \mathrm{Img}R_\to = \emptyset$$

donde $(C]_u = \{Y \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})) : Y \subseteq C\}$ y $(C]_d = \{Y \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A})) : Y \subseteq C\}$ para $C \in \mathcal{P}(X(\mathbf{A}))$.

Observación 3.3.6. En los semirretículos implicativos $\mathbf{A}$ es posible definir al operador monótono sin utilizar el ínfimo, exigiendo que se cumpla

$$\Big[ma \to m((a \to b) \to b)\Big] = 1$$

para todo $a, b \in A$. Así, la clase de los semirretículos implicativos monótonos conforma una variedad, y también lo hace la clase de sus reductos $\langle A, \to, 1, m\rangle$ que son álgebras de Hilbert con un operador monótono.

3.4 Retículos distributivos acotados

En esta sección estudiaremos a los retículos distributivos acotados con operadores monótonos. Para ello, primero recordaremos una de las dualidades topológicas existentes para retículos distributivos acotados. Uno de los trabajos considerados como el principio de la teoría de la dualidad fue el realizado por Stone [57] a mediados de la década del 30, donde introdujo una equivalencia dual entre la categoría de las álgebras de Boole con homomorfismos de álgebras de Boole y la categoría de espacios, actualmente llamados, de Stone y funciones continuas. En 1937, Stone [58] extendió estos resultados y probó la equivalencia dual existente entre la categoría de los retículos distributivos acotados y homomorfismos de retículos acotados y la categoría de espacios espectrales y funciones espectrales.

Definición 3.4.1. Un *espacio espectral* es un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ que satisface las siguientes condiciones:

1. es un $\mathcal{DS}$-espacio,
2. X es un subconjunto compacto,
3. el conjunto $\mathcal{KO}(X)$ es cerrado bajo intersecciones finitas.

Definición 3.4.2. Sean $\langle X, \mathcal{T}_X \rangle$ e $\langle Y, \mathcal{T}_Y \rangle$ dos espacios espectrales. Una *función espectral* $f : X \to Y$ es una función continua tal que la preimagen de todo subconjunto abierto-compacto de Y bajo f es un subconjunto compacto, es decir, $f^{-1}[U] \in \mathcal{KO}(X)$ para todo $U \in \mathcal{KO}(Y)$.

Estudiemos qué ocurre cuando le agregamos a la estructura un operador monótono. Primero recordemos que la definición de ideal de orden coincide con la noción de ideal en los retículos. La familia de los ideales de un retículo tiene estructura de retículo completo. Sea $\mathbf{A}$ un retículo. El ideal generado por un subconjunto $X \subseteq A$ es el conjunto $I(X) = \{a \in A : \exists b_1, \ldots, b_n \in X \ (a \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n)\}$.

Sea $\langle A, \wedge, \vee, m, 0, 1 \rangle$ un retículo distributivo con un operador monótono y consideremos el $\mathcal{DS}$-espacio monótono dual del reducto de semirretículo con un operador monótono, $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}}, R_m \rangle$. El espacio $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$ es un espacio espectral. Estudiaremos los morfismos entre estos espacios.

Proposición 3.4.3. *Sean $\langle \mathbf{A}, m_{\mathbf{A}} \rangle$ y $\langle \mathbf{B}, m_{\mathbf{B}} \rangle$ dos retículos distributivos acotados con operadores monótonos y sea $h\colon A \to B$ un homomorfismo de retículos acotados que además cumple que $h(m_{\mathbf{A}}(a)) = m_{\mathbf{B}}(h(a))$ para todo $a \in A$. Entonces, la* *función $f\colon X(\mathbf{B}) \to X(\mathbf{A})$ definida por: $f(P) = h^{-1}(P)$ para $P \in X(\mathbf{B})$ es una función espectral que cumple que*

$$(f(P), Z) \in R_{m_{\mathbf{A}}} \textit{ si y sólo si } (P, f^{-1}[Z]) \in R_{m_{\mathbf{B}}}$$

para todo $P \in X(\mathbf{B})$ y $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $P \in X(\mathbf{B})$ y $Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ tales que $(f(P), Z) \in R_{m_{\mathbf{A}}}$. Como f es una función espectral, es fácil comprobar que $f^{-1}[Z] \in \mathcal{S}(X(\mathbf{B}))$. Sea $J = I(h[I_{\mathbf{A}}(Z)])$ donde $h[I_{\mathbf{A}}(Z)] = \{h(a) : a \in I_{\mathbf{A}}(Z)\}$. Vamos a probar que $m^{-1}(P) \cap J = \emptyset$. Supongamos que existe $b \in J$ tal que $mb \in P$. Entonces existe $a \in I_{\mathbf{A}}(Z)$ tal que $b \leq h(a)$. Por monotonía tenemos que $mh(a) = h(ma) \in P$. Luego $a \in m^{-1}(f(P))$. De $a \in I_{\mathbf{A}}(Z)$ y por hipótesis tenemos que $a \notin m^{-1}(f(P))$, contradicción. Luego $(P, \alpha(J)) \in R_{m_{\mathbf{B}}}$. Es fácil probar que $\alpha(J) \subseteq f^{-1}[Z]$ y esto implica que $(P, f^{-1}[Z]) \in R_{m_{\mathbf{B}}}$.

$\Leftarrow$) Es fácil. ■

Por lo tanto, es fácil ver que las funciones duales a los homomorfismos de retículos distributivos que conmutan con el operador monótono son las funciones espectrales $f\colon X_1 \to X_2$ entre dos espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ que cumplen con la condición:

$$(f(x), Z) \in R_2 \text{ si y sólo si } (x, f^{-1}[Z]) \in R_1 \tag{3.2}$$

para todo $P \in X_1$ y $Z \in \mathcal{S}(X_2)$. Llamaremos a estas funciones *m-espectrales*.

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2\rangle$ dos espacios espectrales. Claramente, si $f\colon X_1 \to X_2$ es una función espectral, la relación $S_f \subseteq X_1 \times X_2$ definida por $S_f(x) = [f(x))$ es una $\wedge$-relación. Por otro lado, dada una $\wedge$-relación $S \subseteq X_1 \times X_2$ tal que $h_S(U \cup V) = h_S(U) \cup h_S(V)$ para todo $U, V \in D(X_2)$, podemos definir una función espectral $f_S\colon X_1 \to X_2$ de la forma $f_S(x) = y$ donde $y \in X_2$ es el único que cumple $S(x) = [y)$.

Proposición 3.4.4. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ dos $\mathcal{DS}$-espacios monótonos tales que $\langle X_1, \mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2\rangle$ son espacios espectrales. Sea $S \subseteq X_1 \times X_2$ una $\wedge$-relación tal que $h_S(U \cup V) = h_S(U) \cup h_S(V)$ para todo $U, V \in D(X_2)$. Entonces S es una $\wedge$-relación monótona si y sólo si cumple que*

$$Z \in R_2[S(x)] \textit{ si y sólo si } S^{-1}[Z] \in R_1(x) \tag{3.3}$$

para todo $x \in X_1$ y $Z \in \mathcal{S}(X_2)$.

Demostración. Es obvio que si la $\wedge$-relación cumple (3.3), entonces es monótona.

Probemos primero que $S^{-1}[Z] \in \mathcal{S}(X_1)$ para todo $Z \in \mathcal{S}(X_2)$. Tenemos que $x \in S^{-1}[Z]$ si y sólo si existe $z \in Z$ tal que $(x, z) \in S$, es decir, si $Z \cap S(x) \neq \emptyset$. Luego, si $x \notin S^{-1}[Z]$ entonces, por ser un espacio sober, existe $U \in D(X_2)$ tal que $Z \subseteq U^c$ y $U^c \cap S(x) = \emptyset$, es decir, $x \in h_S(U)$. Es fácil ver que $S^{-1}[Z]^c = \bigcup\{h_S(U) : U \in D(X_2) \text{ y } Z \subseteq U^c\}$. Luego $S^{-1}[Z] = \bigcap\{h_S(U)^c : U \in D(X_2) \text{ y } Z \subseteq U^c\}$, cada $h_S(U)^c \in \mathcal{KO}(X_1)$ y $\{h_S(U)^c : U \in D(X_2) \text{ y } Z \subseteq U^c\}$ es una familia dualmente dirigida. Por lo tanto $S^{-1}[Z] \in \mathcal{S}(X_1)$.

Supongamos que S es una $\wedge$-relación monótona.

$\Leftarrow$) Sean $x \in X_1$ y $Z \in \mathcal{S}(X_2)$. Supongamos que $S^{-1}[Z] \in R_1(x)$. Tenemos que $\{U \in D(X_2) : S(x) \subseteq U\} \in X(D(X_2))$ y por lo tanto, existe $y \in X_1$ tal que $H_{X_1}(y) = \{U \in D(X_2) : S(x) \subseteq U\}$. Entonces, para todo $z \in S(x)$, $y \leq z$. Luego, $Z \in R_2[S(x)]$ es equivalente a que $(y, Z) \in R_2$. Supongamos que $Z \notin R_2(y)$. Entonces existe $U \in D(X_2)$ tal que $y \in m_{R_2}(U)$ y $Z \cap U = \emptyset$. Tenemos que $U^c \notin R_2(y)$ y por lo tanto $U^c \notin R_2[S(x)]$. Luego, $S^{-1}[U^c] \notin R_1(x)$. Obtenemos que $S^{-1}[Z] \cap S^{-1}[U^c]^c \neq \emptyset$, es decir, existe $w \in S^{-1}[U^c]^c$ y un $z \in Z$ tal que $(w, z) \in S$. Pero como $Z \subseteq U^c$, $z \in U^c$ y $w \in S^{-1}[U^c]$, absurdo.

$\Rightarrow$) Sean $x \in X_1$ y $Z \in \mathcal{S}(X_2)$. Supongamos que $Z \in R_2[S(x)]$. Entonces existe $y \in S(x)$ tal que (y, Z). Supongamos que $S^{-1}[Z] \notin R_1(x)$. Tenemos que existe $U \in D(X_1)$ tal que $x \in m_{R_1}(U)$ y $S^{-1}[Z] \cap U = \emptyset$. Como U es cerrado, $S^{-1}[Z]$ es saturado especial y el espacio es sober, existe un $V \in D(X_2)$ tal que $Z \subseteq V^c$, $S^{-1}[Z] \subseteq h_S(V)^c$ y $h_S(V)^c \cap U = \emptyset$. Luego, $U \subseteq h_S(V)$ y por monotonía $x \in m_{R_1}(U) \subseteq m_{R_1}(h_S(V))$. Se sigue que $S^{-1}[V^c] = h_S(V)^c \notin R(x)$. Por hipótesis tenemos que $V^c \notin R_2[S(x)]$, pero $Z \subseteq V^c$ implica que $V^c \in R_2(y)$, lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

Corolario 3.4.5. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ dos $\mathcal{DS}$-espacios monótonos tales que $\langle X_1, \mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2\rangle$ son espacios espectrales. Si $f \colon X_1 \to X_2$ es una función espectral que cumple la condición (3.2), entonces S_f es una $\wedge$-relación monótona tal que $h_{S_f}(U \cup V) = h_{S_f}(U) \cup h_{S_f}(V)$ para todo $U, V \in D(X_2)$ y viceversa, es decir, si $S \subseteq X_1 \times X_2$ es una $\wedge$-relación monótona tal que $h_S(U \cup V) = h_S(U) \cup h_S(V)$ para todo $U, V \in D(X_2)$, entonces f_S es una función espectral que cumple la condición (3.2).*

Las funciones espectrales que cumplen 3.2 son una generalización de la noción de morfismos acotados que veremos en el capítulo 4.

Como corolario tenemos que la categoría de retículos distributivos con operadores monótonos que tiene a los homomorfismos de retículos acotados que conmutan con el operador monótono como morfismos es dualmente equivalente a la categoría de los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos que también son espacios espectrales con funciones espectrales monótonas como morfismos. En resumen, las categorías dualmente equivalentes son

$\mathcal{BDL}$	=	Retículos distributivos acotados con operadores monótonos	+	homomorfismos
$\mathcal{MSS}$	=	$\mathcal{DS}$-espacios monótonos que son espacios espectrales	+	funciones espectrales que cumplen (3.2)

Notar que en los retículos las siguientes condiciones son equivalentes:

- Si $a \leq b$ entonces $ma \leq mb$ para todo $a, b \in A$,
- $m(a \wedge b) \leq ma \wedge mb$ para todo $a, b \in A$,
- $ma \vee mb \leq m(a \vee b)$ para todo $a, b \in A$.

Vamos a estudiar a los operadores monótonos que distribuyen con respecto al supremo.

Proposición 3.4.6. *Sea $\langle \mathbf{A}, m \rangle$ un retículo distributivo acotado con un operador monótono. Entonces, $m(a \vee b) = ma \vee mb$ para todo $a, b \in A \Leftrightarrow$ para todo $P \in X(\mathbf{A})$ se cumple que $m^{-1}(P)^c \in \mathrm{Id}(X(\mathbf{A}))$ y, $(P, \alpha(m^{-1}(P)^c)) \in R_m \Leftrightarrow$ para todo $P \in X(\mathbf{A})$ y para todo $Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ se cumple que si $(P, Y) \in G_m$ entonces existe $Q \in Y$ tal que $(P, [Q)) \in G_m$.*

Demostración. Se sigue del hecho que si $m(a \vee b) = ma \vee mb$ para todo $a, b \in A$ entonces $m^{-1}(P)^c$ es un ideal de $\mathbf{A}$ para todo $P \in X(\mathbf{A})$. ■

El siguiente resultado muestra que la extensión canónica de un operador monótono que distribuye con respecto al supremo es igual a la extensión canónica dual. Además, mostraremos que la extensión preserva supremos arbitrarios. Como todo elemento de la extensión canónica de un semirretículo distributivo es supremo de elementos completamente $\vee$-primos, la extensión del operador está completamente determinada por su acción sobre ellos. Recordemos que $J^{\infty}(\mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))) = \{\psi(P) = [P) : P \in X(\mathbf{A})\}$ para $\langle \mathbf{A}, m \rangle$.

Lema 3.4.7. *Sea $\langle \mathbf{A}, m\rangle$ un un retículo distributivo acotado con un operador monótono que cumple $m(a \vee b) = ma \vee mb$ para todo $a, b \in A$. Entonces*

1. $m_{R_m}(U) = m_{G_m}(U)$ *para todo* $U \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.
2. $m_{G_m}(\bigcup\{U_i : i \in I\}) = \bigcup\{m_{G_m}(U_i) : i \in I\}$ *para cualquier familia de conjuntos* $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.

Demostración. Es análoga a la demostración del Lema 3.2.6. ■

Ejemplo 3.4.1. Volvamos al ejemplo 2.1.4 donde hablamos de las álgebras modales positivas. Los espacios duales de esta clase son los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos de la forma $\langle X, \mathcal{T}, R, G\rangle$ donde

- $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio espectral,
- para cualquier $x \in X$ y para cada $Z \in \mathcal{S}(X)$ tal que $Z \in R(x)$ existe $z \in Z$ tal que $(z] \in R(x)$,
- $\emptyset \notin R(x)$ para todo $x \in X$.
- para cualquier $x \in X$ y para cada $Y \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Y \in G(x)$ existe $y \in Y$ tal que $[y) \in G(x)$,
- $\emptyset \notin G(x)$ para todo $x \in X$.
- Para todo $x \in X$ y para todo $Y \in G(x)$ existe un $y \in Y$ tal que $(x, (y]) \in R$ y $(x, [y)) \in G$.
- Para todo $x \in X$ y para todo $Z \in R(x)$ existe un $z \in Z$ tal que $(x, (z]) \in R$ y $(x, [z)) \in G$.

Es fácil probar que $\langle D(X), \cap, \cup, \Box_R, \Diamond_G, X, \emptyset\rangle$ y $\langle \mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Box_R, \Diamond_G, X, \emptyset\rangle$ son álgebras modales positivas y que todo espacio dual de un álgebras modal positiva cumple con las condiciones anteriores.

3.4.1 Álgebras de Heyting

Un álgebra de Heyting $\langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ tiene un reducto de retículo distributivo acotado $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ y uno de semirretículo implicativo $\langle A, \wedge, \rightarrow, 1\rangle$. Por lo tanto podemos armar un espacio dual combinando los resultados de las dos secciones anteriores.

Ejemplo 3.4.2. Volvamos al ejemplo 2.1.5 donde hablamos de las álgebras de Heyting monádicas. Los espacios duales de esta clase son los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos de la forma $\langle X, \mathcal{T}, R, G\rangle$ donde

- $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio espectral y un $\mathcal{IS}$-espacio,
- para cualquier $x \in X$ y para cada $Z \in \mathcal{S}(X)$ tal que $Z \in R(x)$ existe $z \in Z$ tal que $(z] \in R(x)$,
- para todo $x \in X$ se cumple que $(x] \in R(x)$,
- $\emptyset \notin R(x)$ para todo $x \in X$,
- para cualquier $x \in X$ y para cada $Y \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Y \in G(x)$ existe $y \in Y$ tal que $[y) \in G(x)$,
- para todo $x \in X$ se cumple que $[x) \in G(x)$,
- $\emptyset \notin G(x)$ para todo $x \in X$.
- Para todo $x \in X$ y para todo $Y, C \in \mathcal{C}(X)$, $\exists_G(Y) \cap C \in G(x)$ si y sólo si $Y \cap C \in G(x)$,
- Para todo $x \in X$ y para todo $Y \in G(x)$, si $Z \in R(x)$ entonces existe $z \in Z$ tal que $Y \in G(z)$.
- Para todo $x \in X$ y para todo $Z \in R(x)$, si $Y \in G(x)$ entonces existe $y \in Y$ tal que $Z \in R(y)$.

Es fácil probar que $\langle D(X), \cap, \cup, \forall_R, \exists_G, X, \emptyset\rangle$ es un álgebra de Heyting monádica y que todo espacio dual de un álgebra de Heyting monádica cumple con las condiciones anteriores.

Capítulo 4

Álgebras de Boole Monótonas

Como mencionamos en el primer capítulo, las álgebras de Boole monótonas proveen la semántica algebraica para las lógicas modales monótonas. Como tienen un reducto de semirretículo distributivo con operadores monótonos, la teoría hasta aquí expuesta puede aplicarse a este caso particular y mostramos que los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos concuerdan con los espacios estudiados por S. Celani en [12]. Como en las álgebras de Boole tenemos una operación negación, a partir de un operador modal primitivo del lenguaje es posible definir su operador dual. Esto genera que las relaciones R_m y G_m que inducen las extensiones canónicas para cada operación m se comporten de un forma especial, en vez de tener cuatro relaciones distintas, dos por el operador primitivo y dos por el operador dual, tenemos que las relaciones se repiten.

Por otro lado, los marcos de entornos monótonos conforman la semántica relacional para las lógicas modales monótonas. Esta semántica ha sido ampliamente estudiada por diversos autores. En [31], la dualidad topológica está basada sobre los llamados marcos monótonos descriptivos, que probaremos que son equivalentes a los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos estudiados en [12]. Uno se los principales objetivos de este capítulo es analizar la relación entre estas dos clases de marcos monótonos, y estudiar algunas clases especiales de marcos generales que son generalizaciones de los modelos monótonos modalmente saturados estudiados en [11]. Para ello utilizaremos las herramientas que hemos desarrollado en el capítulo 2, adaptadas para las álgebras de Boole.

El contenido de este capítulo se encuentra publicado en [14] y en [15].

4.1 $\mathcal{DS}$-espacios monótonos y m-marcos

En el paper [12] (ver también [31] y [33]) S. Celani desarrolló una dualidad topológica entre álgebras de Boole monótonas y marcos descriptivos monótonos. En esta sección probaremos que estos marcos son también $\mathcal{DS}$-espacios monótonos.

Recordemos que un álgebra monótona o álgebra de Boole con una operación monótona normal es un par $\langle \mathbf{A}, \Box \rangle$ tal que $\mathbf{A}$ es un álgebra de Boole, y $\Box$ es un operador definido sobre A tal que

1. $\Box(a \wedge b) \leq \Box a \wedge \Box b$ para todo $a, b \in A$,

2. $\Box 1 = 1$.

También, recordemos que un *espacio de Stone* es un espacio topológico $X = \langle X, \mathcal{T} \rangle$ que es *compacto y totalmente disconexo*, es decir, dados puntos distintos $x, y \in X$, existe un subconjunto abierto-cerrado U de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$.

Definición 4.1.1. Un m-marco *descriptivo* [12], o *espacio modal monótono*, es un triple $\langle X, \mathcal{T}, R \rangle$ tal que

1. $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio de Stone,

2. $R \subseteq X \times \mathcal{C}_0(X)$, donde $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}(X) - \{\emptyset\}$,

3. $\Box_R(U) = \{x \in X : \forall Y \in R(x)\ (Y \cap U \neq \emptyset)\} \in \mathrm{Clop}(X)$ para todo $U \in \mathrm{Clop}(X)$,

4. $R(x) = \bigcap\{L_U : x \in \Box_R(U)\}$, para todo $x \in X$.

Recordamos que si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio de Stone entonces $\mathrm{Clop}(X)$ es una base para la topología, $\mathcal{KO}(X) = \mathrm{Clop}(X)$, $D(X) = \mathrm{Clop}(X)$ y $\mathcal{S}(X) = \mathcal{C}(X)$. Como X es Hausdorff, los únicos conjuntos cerrados irreducibles son los unitarios, así X es sober. Por lo tanto, se sigue la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2. *Todo m-marco descriptivo es un $\mathcal{DS}$-espacio monótono.*

Observación 4.1.3. Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole. Notemos que

- si F es un filtro de $\mathbf{A}$, entonces el conjunto $I_F = \{\neg a : a \in F\}$ es un ideal de $\mathbf{A}$ y,

- si I es un ideal de $\mathbf{A}$, el conjunto $F_I = \{\neg a : a \in I\}$ es un filtro de $\mathbf{A}$.

Proposición 4.1.4. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole.*

1. *Si* F *es un filtro de* $\mathbf{A}$ *entonces* $\psi(F) = \alpha(I_F)$.

2. *Si* I *es un ideal de* $\mathbf{A}$, $\alpha(I) = \psi(F_I)$.

Demostración. 1. Sea P un filtro primo y F un filtro. Entonces, $P \in \psi(F)$ si y sólo si $F \subseteq P$ si y sólo si $\{\neg a : a \in F\} \cap P = \emptyset$ si y sólo si $P \in \alpha(I_F)$.

2. Es similar a 1. ■

Sea $\langle \mathbf{A}, \Box\rangle$ un álgebra de Boole dotada con un operador monótono normal. Sea $\Diamond\colon A \to A$ el operador dual definido por $\Diamond a = \neg\Box\neg a$, para cada $a \in A$. Siguiendo la construcción de los $\mathcal{S}$- y $\mathcal{C}$-espacios monótonos, tenemos cuatro relaciones $G_\Diamond$, $G_\Box$, $R_\Diamond$ y $R_\Box$. La siguiente proposición muestra las relaciones entre ellas.

Proposición 4.1.5. *Sea* $\langle \mathbf{A}, \Box\rangle$ *un álgebra monótona y sea* $\Diamond$ *el operador dual. Consideremos los espacios* $\mathcal{C}$*-monótonos* $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_\mathbf{A}, G_\Box\rangle$, $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_\mathbf{A}, G_\Diamond\rangle$ *y los espacios* $\mathcal{S}$*-monótonos* $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_\mathbf{A}, R_\Box\rangle$, $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_\mathbf{A}, R_\Diamond\rangle$. *Entonces,* $G_\Diamond = R_\Box$ *y* $G_\Box = R_\Diamond$.

Demostración. Probaremos que $G_\Diamond = R_\Box$. Sea $P \in X(\mathbf{A})$ y $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tales que $(P, \psi(F)) \in G_\Diamond$. Entonces, $F \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, es decir, para todo $a \in F$, $\neg\Box(\neg a) \in P$. Así, $\Box(\neg a) \notin P$, es decir, $\neg a \notin \Box^{-1}(P)$. Luego, $\Box^{-1}(P) \cap I_F = \emptyset$ y por lo tanto $(P, \alpha(I_F)) \in R_\Box$. Por la Proposición 4.1.4, $\psi(F) = \alpha(I_F)$, y se sigue que $(P, \psi(F)) \in R_\Box$. La otra inclusión es similar.

La otra igualdad se prueba en forma análoga. ■

4.2 Marcos monótonos generales

La semántica algebraica para las lógicas monótonas está dada por la clase de las álgebras de Boole con un operador monótono [31]. Recordamos la siguiente definición que, veremos más adelante, es un caso particular de 5.3.1 donde el orden es la igualdad. Esto se debe a que todo filtro primo de un álgebra de Boole $\mathbf{A}$ es un ultrafiltro, en otros términos, $\mathcal{P}(X(\mathbf{A})) = \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})) = \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$. Además, ya que contamos con una negación, como vimos en la sección anterior, sólo una relación es necesaria para interpretar dos operadores modales $\Box$ y $\Diamond$.

Definición 4.2.1. *Un marco de entornos monótono*, o marco monótono, es una estructura $\mathcal{F} = \langle X, R\rangle$ donde $R \subseteq X \times \mathcal{P}(X)$, y para cualquier $x \in X$ y cualquier

$Y, Z \in \mathcal{P}(X)$, si $(x, Y) \in R$ y $Y \subseteq Z$, entonces $(x, Z) \in R$. En otras palabras, el conjunto $R(x) = \{Z \in \mathcal{P}(X) \mid (x, Z) \in R\}$ es un subconjunto creciente de $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ para cada $x \in X$.

Como repasamos en el capítulo 1, todo teorema de la menor lógica modal monótona **EM** es válido en todo marco y en todo modelo de entornos monótono. Por otro lado, el conjunto de todas las fórmulas válidas en todo marco perteneciente a una clase de marcos de entornos monótonos es una lógica modal monótona.

Recordemos que todo marco monótono $\mathcal{F}$ define un álgebra monótona de conjuntos, el par $A(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{P}(X), \Diamond_R \rangle$ donde la aplicación monótona $\Diamond_R : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ está definida por:

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X \mid \exists Y \in R(x)\ (Y \subseteq U)\} = \{x \in X \mid R(x) \cap D_U \neq \emptyset\}$$

para cada $U \in \mathcal{P}(X)$. Notemos que por monotonía tenemos que

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X \mid U \in R(x)\ \}\,.$$

La aplicación dual $\Box_R : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ está definida por:

$$\Box_R(U) = \{x \in X \mid \forall Y \in R(x)(Y \cap U \neq \emptyset)\} = \{x \in X \mid R(x) \subseteq L_U\}$$

para cada $U \in \mathcal{P}(X)$. Dualmente, por monotonía tenemos que

$$\Box_R(U) = \{x \in X \mid U^c \notin R(x)\ \}\,.$$

Por otro lado, para cada álgebra monótona podemos definir un marco monótono.

Recordemos que el *marco monótono*, o *marco de ultrafiltros*, de un álgebra monótona $\mathbf{A}$ es un par

$$\mathcal{F}(\mathbf{A}) = \langle X(\mathbf{A}), R_\Diamond \rangle$$

donde la relación $R_\Diamond \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{P}(X(\mathbf{A}))$ está definida por:

$$(x, Y) \in R_\Diamond \quad \text{sii} \quad \exists F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})\ (\psi(F) \subseteq Y \text{ y } F \subseteq \Diamond^{-1}(x)), \tag{4.1}$$

con $\psi(F) = \{y \in X(\mathbf{A}) \mid F \subseteq y\}$ (ver [11], [12] o [31]).

Al igual que en la semántica de Kripke para las lógicas modales normales, el principal defecto para la semántica de entornos es la existencia de lógicas incompletas. Se puede rectificar añadiendo a los marcos de entornos una estructura extra que restringe el conjunto de valuaciones posibles. Esto define los marcos monótonos generales [31].

Definición 4.2.2. Un *marco de entornos monótono general*, o marco monótono general, es una estructura $\langle \mathcal{F}, D \rangle$ donde $\mathcal{F} = \langle X, R \rangle$ es un marco monótono y D es una colección de subconjuntos *admisibles* de X que satisface las siguientes condiciones:

- $\emptyset \in D$,
- $U, V \in D$ implica $U \cup V \in D$,
- $U \in D$ implica $X - U = U^c \in D$ y
- $\Diamond_R(U) \in D$ para cada $U \in D$.

Notemos que si $\langle \mathcal{F}, D \rangle$ es un marco monótono general, entonces $\langle D, \Diamond_R \rangle$ es una subálgebra del álgebra $A(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{P}(X), \Diamond_R \rangle$. Además, como D es una subálgebra Booleana de $\mathcal{P}(X)$, es una base de una topología τ_D. Notaremos $\langle X, \tau_D \rangle$ al espacio topológico generado por una base D. Referiremos a $\mathcal{F}$ como el *marco subyacente* de $\langle \mathcal{F}, D \rangle$. Es claro que un marco monótono $\mathcal{F} = \langle X, R \rangle$ es equivalente al marco monótono general $\langle \mathcal{F}, \mathcal{P}(X) \rangle$. Dada un álgebra monótona $\mathbf{A}$, el par $\langle \mathcal{F}(\mathbf{A}), \beta[A] \rangle$ *es el marco monótono general de* $\mathbf{A}$.

Las flechas de la categoría que tiene como objetos a los marcos monótonos generales son los morfismos acotados. Estos morfismos son funciones que preservan y reflejan la estructura descrita en el lenguaje modal.

Definición 4.2.3. [31] Un *morfismo acotado* f entre los marcos monótonos generales $\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$ es una función $f : X_1 \to X_2$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X_1$ y para cada $Y \subseteq X_1$, si $(x, Y) \in R_1$, entonces $(f(x), f[Y]) \in R_2$.
2. Para todo $x \in X_1$ y para cada $Z \subseteq X_2$, si $(f(x), Z) \in R_2$, entonces existe $Y \subseteq X_1$ tal que $(x, Y) \in R_1$ y $f[Y] \subseteq Z$.
3. $f^{-1}[U] \in D_1$ para cada $U \in D_2$.

Notemos que por la condición 3, f es una función continua entre los espacios topológicos $\langle X_1, \mathcal{T}_{D_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{D_2} \rangle$. Si f es suryectivo, entonces es llamado un *epimorfismo* acotado y $\langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$ es una imagen homomorfa de $\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$. Decimos que f es un isomorfismos de marcos generales si es un morfismo acotado inyectivo y suryectivo y la función inversa f^{-1} también es un morfismo acotado. Notemos que las condiciones 1 y 2 juntas son equivalentes a la siguiente condición:

$$\text{Para todo } x \in X \text{ y para cada } Z \subseteq X_2,\ f^{-1}[Z] \in R_1(x) \text{ sii } Z \in R_2(f(x)).$$

Diremos que f es un morfismo acotado *fuerte* si satisface la siguiente condición:

(S) Si $U \in D_1$, entonces existe $V \in D_2$ tal que $f[U] = f[X_1] \cap V$, es decir, $U = f^{-1}[V]$.

En la próxima sección recordaremos una clase especial de marcos generales introducidas por Hansen y que también son duales a las álgebras monótonas.

4.3 Clases especiales de m-marcos generales

Dualidades entre álgebras monótonas y ciertas clases de marcos monótonos generales fueron desarrolladas en detalle en [12] y [31]. En la teoría de la dualidad para las lógicas modales monótonas, Hansen [31] introdujo la noción de marcos monótonos descriptivos con el objetivo de obtener una dualidad completa para la categoría de las álgebras de Boole con un operador monótono. Ahora recordaremos la noción de marco descriptivo para marcos monótonos generales dada por H. Hansen.

Definición 4.3.1. [31] Un *marco monótono descriptivo*, o m-marco descriptivo, es un marco monótono general $\langle \mathcal{F}, D\rangle$, donde $\langle X, \tau_D\rangle$ es un espacio de Stone, y para todo $x \in X$, para todo $C \in \mathcal{C}(X)$ y para todo $Y \subseteq X$,

PCom $Y \in R(x)$ sii $\exists C \in \mathcal{C}(X)\,[C \subseteq Y \text{ y } C \in R(x)]$,

PClos $C \in R(x)$ sii $\forall U \in D\,[C \subseteq U \to U \in R(x)]$.

Entre la clase de marcos monótonos generales y la clase de marcos monótonos descriptivos existen algunas clases interesantes de marcos generales que están definidos generalizando las propiedades **PCom** y **PClos** de la Definición 4.3.1. Luego de recordar algunos conceptos, en la Definición 4.3.3 extenderemos ciertas nociones introducidas en [11] para modelos monótonos.

Sea $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos tal que $\mathbf{D} = \langle D, \cup, \cap, \neg, \emptyset, X\rangle$ es una subálgebra del álgebra de Boole de $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \neg, X, \emptyset\rangle$. Resulta que D es base de una topología sobre X, y en este caso, los elementos de D son subconjuntos abiertos-cerrados de X, por ser $\mathbf{D}$ un álgebra de Boole, pero un conjunto abierto-cerrado arbitrario no necesariamente es un elemento de D. Denotaremos por $\langle X, \tau_D \rangle$ al espacio topológico generado por una base D que es universo de un álgebra de Boole de conjuntos. Algunas propiedades topológicas del espacio $\langle X, \tau_D \rangle$ pueden ser caracterizadas en términos de la aplicación

$$H_D : X \to \mathrm{X}(\mathbf{D})$$

definida por $H_D(x) = \{U \in D : x \in U\}$. Por ejemplo,

1. $\langle X, \tau_D \rangle$ es Hausdorff sii H_D es inyectiva, y
2. $\langle X, \tau_D \rangle$ es compacto sii H_D es suryectiva.

Si $\langle X, \tau_D \rangle$ es un espacio de Stone, entonces la aplicación H_D es un homeomorfismo entre $\langle X, \tau_D \rangle$ y el espacio de Stone asociado al álgebra $\mathbf{D}$.

Definición 4.3.2. Sea $\mathbf{D}$ una subálgebra del álgebra de Boole $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \neg, X, \emptyset \rangle$. Consideremos $\langle X, \tau_D \rangle$ y sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La *topología lower Vietoris* $\mathcal{L}_D$ sobre $\mathcal{K}$ es la topología definida sobre $\mathcal{K}$ tomando como sub-base a la colección de todos los conjuntos de la forma

$$L_U = \{Y \in \mathcal{K} : Y \cap U \neq \emptyset\}$$

donde $U \in D$. El par $\mathcal{K} = \langle \mathcal{K}, \mathcal{L}_D \rangle$ es llamado el *hiperespacio lower* de $\langle X, \tau_D \rangle$ relativo a $\mathcal{K}$.

Sea $D_U = \{Y \in \mathcal{K} : Y \subseteq U\}$ para $U \in D$. Notemos que $(L_{U^c})^c = D_U$. Recordemos que si $\langle X, \tau_D \rangle$ es un espacio de Stone, entonces $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$ es un espacio de Stone (ver [48] para los detalles).

Definición 4.3.3. Sea $\langle \mathcal{F}, D \rangle$ un marco monótono general. Diremos que:

1. $\langle \mathcal{F}, D \rangle$ es *compacto* si el espacio $\langle X, \tau_D \rangle$ es compacto.
2. $\langle \mathcal{F}, D \rangle$ es *imagen compacto* si para todo $x \in X$ y para cada $Y \in R(x)$, existe un subconjunto compacto Z de $\langle X, \tau_D \rangle$ tal que $Z \subseteq Y$ y $Z \in R(x)$.
3. $\langle \mathcal{F}, D \rangle$ es *punto compacto en* $\langle \mathcal{K}, \mathcal{L}_D \rangle$, donde $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$, si $R(x)$ es un subconjunto compacto en el espacio topológico $\langle \mathcal{K}, \mathcal{L}_D \rangle$ para cada $x \in X$.

4. $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es *repleto* si satisface la siguiente propiedad:

   (P) Para todo $x \in X$ y para cada $Y \in \mathcal{P}(X)$, si $\bigcap\{H_D(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_R^{-1}(H_D(x))$, entonces existe un subconjunto $Z \subseteq X$ tal que $Z \in R(x)$ y $Z \subseteq \mathrm{cl}(Y)$, donde $\mathrm{cl}(Y)$ es la clausura de Y en el espacio $\langle X, \tau_D\rangle$.

5. $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es *modalmente saturado en* $\langle \mathcal{K}, \mathcal{L}_D\rangle$, donde $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$, si es imagen compacto y punto compacto en $\langle \mathcal{K}, \mathcal{L}_D\rangle$.

Observación 4.3.4. Sea $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ un marco monótono general. La noción de imagen compacto es una adaptación de la Condición **PCom** de la Definición 4.3.1. Luego mostraremos que la noción de punto compacto está relacionada con la Condición **PClos** de la Definición 4.3.1.

La noción de marco monótono general repleto es una generalización de la noción de modelo de Kripke $\mathcal{H}$-*cerrado* introducido por R. Goldblatt en [28] página 112, y está relaciondada con una de las condiciones usadas para definir la noción de marco general repleto en las lógicas modales normales (ver condición **VI** de la Definición 1.19.1 de [27]).

En [28] R. Goldblatt también introduce la noción de modelo de Kripke $\mathcal{H}$-*compacto.* Esta noción es equivalente a nuestra definición de compacidad dada en el item (1) de la Definición 4.3.3. Además, Goldblatt define una estructura $\mathcal{H}$-*saturada* (modelos de Kripke, para nosotros) como una estructura $\mathcal{H}$-compacta y $\mathcal{H}$-cerrada. En nuestra terminología, un modelo monótono $\mathcal{H}$-compacto y $\mathcal{H}$-cerrado $\mathcal{M}$ es un modelo compacto, y punto compacto, o por la Proposición 10 de [11], $\mathcal{M}$ es compacto y repleto.

Sea $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ un marco monótono general. Consideremos el conjunto

$$\operatorname{ran} R = \mathcal{K}_R = \{Y \subseteq X \mid \exists x \in X \ ((x, Y) \in R)\}.$$

Entonces, podemos considerar el *hiperespacio* $\langle \mathcal{K}_R, \mathcal{L}_D\rangle$ de $\langle X, \tau_D\rangle$ relativo a $\mathcal{K}_R$.

Los siguientes resultados fueron probados en las Proposiciones 9 y 10 de [11] para modelos monótonos. Ahora extenderemos estos resultados para marcos monótonos generales. Aunque la prueba es similar a la dada en [11], la incluimos por completitud.

Proposición 4.3.5. *Sea $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ un marco monótono general.*

1. *Si $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es punto compacto en $\langle \mathcal{K}_R, \mathcal{L}_D\rangle$, entonces $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es repleto.*

2. Si $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es compacto, entonces $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es repleto sii es punto compacto en $\langle \mathcal{K}_R, \mathcal{L}_D\rangle$.

Demostración. (1) Sean $x \in X$, $Y \in \mathcal{P}(X)$. Asumimos $\bigcap \{H_D(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_R^{-1}(H_D(x))$. Supongamos que para todo $Z_i \in R(x)$, $Z_i \nsubseteq \mathrm{cl}(Y)$. Como D es una base para $\langle X, \tau_D\rangle$, tenemos que para cada $Z_i \in R(x)$ existe $U_i \in D$ tal que $Y \subseteq U_i$ y $Z_i \nsubseteq U_i$, es decir, $Z_i \cap U_i^c \neq \emptyset$. Luego, $R(x) \subseteq \bigcup \left\{L_{U_i^c} \mid Y \subseteq U_i\right\}$. Como $R(x)$ es un subconjunto compacto de $\langle \mathcal{K}_R, \mathcal{L}_D\rangle$, existe un conjunto finito $\{U_1, ..., U_n\}$ tal que $R(x) \subseteq L_{U_1^c} \cup \cdots \cup L_{U_n^c}$. Entonces, $x \notin \Diamond_R(U_1 \cap \ldots \cap U_n)$, y $Y \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Luego, $\Diamond_R(U_1 \cap \ldots \cap U_n) \notin H_D(x)$ y $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \bigcap \{H_D(y) \mid y \in Y\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $Z \in R(x)$ tal que $Z \subseteq \mathrm{cl}(Y)$.
(2) Supongamos que $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es repleto. Consideremos $W \subseteq D$ tal que

$$R(x) \subseteq \bigcup \{L_U \mid U \in W\}.$$

Supongamos que para cada subconjunto finito W_0 de W,

$$R(x) \nsubseteq \bigcup \{L_U \mid U \in W_0\}. \tag{4.2}$$

Primero, probaremos que $\bigcap \{U^c : U \in W\} \neq \emptyset$. Contrariamente, supongamos que $X = \bigcup \{U : U \in W\}$. Como $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es compacto, $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, para algún subconjunto finito $\{U_1, ..., U_n\}$ de W. De (4.2), existe $Y \in R(x)$ tal que $Y \cap U_1 = \emptyset$,...,$Y \cap U_n = \emptyset$, es decir, $Y \cap (U_1 \cup \ldots \cup U_n) = Y \cap X = \emptyset$, lo cual es imposible. Luego, $Z = \bigcap \{U^c \mid U \in W\} \neq \emptyset$. Es evidente que Z es un subconjunto cerrado de $\langle X, \tau_D\rangle$. Ahora probemos que

$$\bigcap \{H_D(z) \mid z \in Z\} \subseteq \Diamond_R^{-1}(H_D(x)). \tag{4.3}$$

Si $V \in \bigcap \{H_D(z) : z \in Z\}$, entonces $Z = \bigcap \{U^c \mid U \in W\} \subseteq V$. Es claro que V^c es un subconjunto cerrado de $\langle X, \tau_D\rangle$, y como $\langle X, \tau_D\rangle$ es compacto, V^c es compacto. Se sigue que existe un conjunto finito $\{U_1, ..., U_n\}$ tal que $U_1^c \cap \ldots \cap U_n^c \subseteq V$. Entonces, $\Diamond_R(U_1^c \cap \ldots \cap U_n^c) \subseteq \Diamond_R(V)$. De (4.2), existe $T \in R(x)$ tal que $T \cap (U_1 \cup \ldots \cup U_n) = \emptyset$, es decir, $T \subseteq U_1^c \cap \ldots \cap U_n^c \subseteq V$. Luego, $x \in \Diamond_R(V)$. Así, (4.3) es válido. Por hipótesis, existe $Y \in R(x)$ tal que $Y \subseteq \mathrm{cl}(Z) = Z$. Entonces $Y \cap U = \emptyset$, para cada $U \in W$. Luego, $R(x) \nsubseteq \bigcup \{L_U \mid U \in W\}$. La otra dirección sigue de (1). ■

Lema 4.3.6. *Sea $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ un marco monótono general tal que $\langle X, \tau_D\rangle$ es un espacio de Stone. Entonces $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ es imagen compacto si y sólo si satisface la Condición* **PCom** *de la Definición 4.3.1.*

Demostración. Recordemos que en un espacio de Stone $\langle X, \tau_D \rangle$ un subconjunto Y de X es compacto si y sólo si es cerrado. Luego, el resultado se sigue. ■

4.3.1 m-Marcos descriptivos y descriptivos restringidos

En esta subsección analizaremos la relación entre la definición de m-marco descriptivo dado por H. Hansen en [31] y la definición dada en [12]. Probaremos que estas nociones son equivalentes. Para diferenciarlas, a partir de ahora llamaremos [12] *m-marco descriptivo restringido* a una tripla $\langle X, R, \tau_D \rangle$ que cumple las condiciones de la Definición 4.1.1. En este caso $D = \text{Clop}(X)$.

Ahora aprobaremos que la Condición 4 de la Definición 4.1.1 es equivalente a decir que la relación $R \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ es punto compacta en $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$. Notemos que cada m-marco descriptivo restringido $\langle X, R, \tau_D \rangle$ es imagen compacto, porque $\operatorname{ran} R = \mathcal{K}_R \subseteq \mathcal{C}(X)$.

Lema 4.3.7. *Sea $\langle X, R, D \rangle$ una tripla tal que $\langle X, \tau_D \rangle$ es un espacio de Stone, $R \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ tal que $R(x)$ es un subconjunto creciente de $\langle \mathcal{C}(X), \subseteq \rangle$ para cada $x \in X$, y $\Box_R(U) \in D$ para todo $U \in D$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$R(x)$ es un subconjunto compacto en $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$ para todo $x \in X$.*
2. *$R(x) = \bigcap \{L_U \mid x \in \Box_R(U)\}$ para todo $x \in X$.*
3. *$\langle X, R, D \rangle$ satisface la propiedad $(\mathbf{P})$ de los marcos repletos.*
4. *Para todo $x \in X$ y para cada $Y \in \mathcal{C}(X)$, si $(H_D(x), H_D[Y]) \in R_{\Diamond_R}$, entonces $(x, Y) \in R$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x \in X$. La inclusión $R(x) \subseteq \bigcap \{L_U \mid x \in \Box_R(U)\}$ es clara. Sea $Z \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Z \in \bigcap \{L_U : x \in \Box_R(U)\}$ y supongamos que $Z \notin R(x)$. Entonces, tenemos que para cada $K \in R(x)$, $K \nsubseteq Z$. Como $Z \in \mathcal{C}(X)$ y los elementos de D son subconjuntos abiertos-cerrados, para cada $K \in R(x)$ existe $U_K \in D$ tal que $Z \subseteq U_K$ y $K \nsubseteq U_K$, es decir, $Z \subseteq U_K$ y $K \cap U_K^c \neq \emptyset$. En consecuencia, $R(x) \subseteq \{L_{U^c} \mid Z \subseteq U\}$. Como $R(x)$ es compacto en $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$, existen $U_1, \ldots, U_n \in D$ tales que

$$R(x) \subseteq L_{U_1^c} \cup \ldots \cup L_{U_n^c} = L_U$$

donde $U = U_1^c \cup \ldots \cup U_n^c \in D$. Así, $x \in \Box_R(U)$ y obtenemos que $Z \in L_U$. Por otro lado, $Z \subseteq U_i$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces, $Z \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n$ y $Z \cap U = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Luego, $Z \in R(x)$ y $R(x) = \bigcap \{L_U \mid x \in \Box_R(U)\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sean $x \in X$ y $Y \in \mathcal{P}(X)$ tales que $\bigcap \{H_D(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_R^{-1}(H_D(x))$. Probemos que $\mathrm{cl}(Y) \in R(x)$. Supongamos que $\mathrm{cl}(Y) \notin R(x) = \bigcap \{L_U \mid x \in \Box_R(U)\}$. Entonces, existe $U \in D$ tal que $R(x) \subseteq L_U$, $x \in \Box_R(U)$ y $\mathrm{cl}(Y) \subseteq U^c$. Así $Y \subseteq U^c$, entonces $U^c \in \bigcap \{H_D(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_R^{-1}(H_D(x))$, y luego $x \in \Diamond_R(U^c) = \Box_R(U)^c$, lo cual es una contradicción. Así $\mathrm{cl}(Y) \in R(x)$, y $\langle X, R, D\rangle$ cumple la propiedad (**P**).

(3) $\Rightarrow$ (4) es inmediato.

(4) $\Rightarrow$ (1) ver [12]. ■

Como corolario obtenemos que dada una tripla $\langle X, R, D\rangle$ en las condiciones del lema anterior, la condición **PClos** es equivalente a decir que $R(x)$ es un subconjunto compacto en $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D\rangle$ para todo $x \in X$. Notar que el lema anterior es un caso particular del teorema 2.5.5 del capítulo 2.

Ahora vamos a estudiar la relación entre los marcos monótonos descriptivos restringidos y los marcos monótonos descriptivos estudiados por Hansen.

Definición 4.3.8. Sea $\langle X, \tau_D\rangle$ un espacio de Stone con base D. Consideremos una relación $R \subseteq X \times \mathcal{P}(X)$. Definimos la *restricción* R_r de R en $\mathcal{C}(X)$ como

$$(x, Z) \in R_r \text{ sii } Z \in \mathcal{C}(X) \text{ y } Z \in R(x).$$

Dada una relación $S \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ definimos la relación S^e, llamada la *extensión* de S en $\mathcal{P}(X)$ como

$$(x, Y) \in S^e \text{ sii existe } Z \in \mathcal{C}(X) \text{ tal que } Z \subseteq Y \text{ y } Z \in S(x).$$

Proposición 4.3.9. *Sea $\langle \mathcal{F}, D\rangle$ un marco monótono descriptivo. Entonces:*

1. $\Box_R(U) = \Box_{R_r}(U)$ *para todo* $U \in D$.
2. $R_r(x)$ *es un subconjunto compacto en* $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D\rangle$ *para todo* $x \in X$.
3. $(R_r)^e = R$.

Luego, $\langle X, R_r, \tau_D\rangle$ es un m-marco descriptivo restringido.

Demostración. Notemos que $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$ es compacto porque $\langle X, \tau_D \rangle$ es un espacio de Stone (ver [48]).

(1) Sea $U \in D$. Como $R_r \subseteq R$, obtenemos que $\Box_R(U) \subseteq \Box_{R_r}(U)$. Sea $x \in \Box_{R_r}(U)$ y sea $Y \in R(x)$. Por la Propiedad **PCom** de la Definición 4.3.1, existe $C \in \mathcal{C}(X)$ tal que $C \subseteq Y$ y $C \in R(x)$. Es claro que $C \in R_r(x)$, y como $x \in \Box_{R_r}(U)$, tenemos $C \cap U \neq \emptyset$. Así, $Y \cap U \neq \emptyset$. Luego, $x \in \Box_R(U)$.

(2) Por el Lema 4.3.7 y (1), es suficiente ver que para todo $x \in X$

$$R_r(x) = \bigcap \{L_U : x \in \Box_R(U)\}. \tag{4.4}$$

Es claro que la inclusión $R_r(x) \subseteq \bigcap \{L_U \mid x \in \Box_R(U)\}$ vale. Sea $Z \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Z \in \bigcap \{L_U \mid x \in \Box_R(U)\}$ y supongamos que $Z \notin R(x)$. Por la Propiedad **PClos** de la Definición 4.3.1, existe $U \in D$ tal que $Z \subseteq U$ y $U \notin R(x)$. Luego, $x \notin \Diamond_R(U)$, es decir, $x \in \Box_R(U^c)$. Como $Z \in L_{U^c}$, tenemos que $Z \cap U^c \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Luego, la identidad (4.4) es válida.

(3) Sea $(x, Y) \in (R_r)^e$. Entonces existe $Z \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Z \subseteq Y$ y $Z \in R_r(x)$. Como $R_r \subseteq R$, tenemos $Z \in R(x)$, y como R es monótona, $Y \in R(x)$. Sea $(x, Y) \in R$. Por la Propiedad **PCom** de la Definición 4.3.1, existe $C \in \mathcal{C}(X)$ tal que $C \subseteq Y$ y $C \in R(x)$. Así, $C \in R_r(x)$. Como existe $C \in \mathcal{C}(X)$ tal que $C \subseteq Y$ y $C \in R_r(x)$, obtenemos que $(x, Y) \in (R_r)^e$. ∎

Proposición 4.3.10. *Sea $\langle X, R, D \rangle$ una tripla tal que $\langle X, \tau_D \rangle$ es un espacio de Stone, $R \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ y $\Box_R(U) \in D$ para todo $U \in D$. Si $\langle X, R, D \rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$, entonces*

1. *$\langle X, R^e, D \rangle$ es un m-marco descriptivo, y*

2. *$(R^e)_r = R$.*

Demostración. (1) Por la definición de la relación R^e, $R^e(x)$ es un conjunto creciente para cada $x \in X$. Probemos que $\Box_R(U) = \Box_{R^e}(U)$ para todo $U \in D$. Sea $U \in D$. Como $R \subseteq R^e$, tenemos que $\Box_{R^e}(U) \subseteq \Box_R(U)$. Supongamos que $x \in \Box_R(U)$. Sea $Y \in R^e(x)$. Entonces existe $Z \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Z \subseteq Y$ y $Z \in R(x)$. Así, $Z \cap U \neq \emptyset$ porque $x \in \Box_R(U)$. Luego, $Y \cap U \neq \emptyset$, es decir, $x \in \Box_{R^e}(U)$. La Condición **PCom** es inmediata de la definición de R^e. También notemos que por definición de R^e tenemos que si $C \in R(x)$ entonces $C \in R^e(x)$ siempre que $C \in \mathcal{C}(X)$. Probemos la Condición **PClos**. Sea $C \in \mathcal{C}(X)$ tal que $C \in R^e(x)$

y sea $U \in D$ tal que $C \subseteq U$. De $C \in R^e(x)$ tenemos que existe $Y \in \mathcal{C}(X)$ tal que $Y \in R(x)$ y $Y \subseteq C \subseteq U$. Entonces, por definición de R^e, obtenemos que $U \in R^e(x)$. Sea $C \in \mathcal{C}(X)$. Asumamos que para todo $U \in D$, $C \subseteq U$ implica $U \in R^e(x)$. Supongamos que $C \notin R^e(x)$, es decir, $C \notin R(x)$. Como $R(x)$ es compacto en el espacio de Stone $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$, tenemos que $R(x)$ es cerrado en $\langle \mathcal{C}(X), \mathcal{L}_D \rangle$. Así, existe $U \in D$ tal que $x \in \Box_R(U)$, $R(x) \subseteq L_U$ y $C \notin L_U$. Entonces, $x \in \Box_R(U)$ y $C \cap U = \emptyset$. Como $C \subseteq U^c \in D$, obtenemos $U^c \in R^e(x)$, es decir, $x \in \Diamond_{R^e}(U^c) = \Box_{R^e}(U)^c = \Box_R(U)^c$, lo cual es una contradicción. Luego, $\langle X, R^e, D \rangle$ es un m-marco descriptivo.

(2) Es fácil ver que la igualdad $(R^e)_r = R$ vale. ■

Ya vimos que los m-marcos descriptivos restringidos y los marcos descriptivos son nociones equivalentes. Ahora estudiaremos qué pasa con los morfismos. Sean $\langle X_1, R_1, \tau_{D_1} \rangle$ y $\langle X_2, R_2, \tau_{D_2} \rangle$ dos m-marcos descriptivos restringidos. Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ al conjunto de subconjuntos compactos de un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$. Recordemos que para todo $Y \in \mathcal{K}(X_1) = \mathcal{C}(X_1)$ y para cada f función continua, $f[Y] \in \mathcal{K}(X_2) = \mathcal{C}(X_2)$. Entonces, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3.11. Una función $f \colon X_1 \to X_2$ es llamada un morfismo acotado entre los m-marcos descriptivos restringidos $\langle X_1, R_1, \tau_{D_1} \rangle$ y $\langle X_2, R_2, \tau_{D_2} \rangle$ si y sólo si f cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X_1$ y para cada $Y \in \mathcal{C}(X_1)$, si $(x, Y) \in R_1$ entonces se cumple $(f(x), f[Y]) \in R_2$.

2. Para todo $x \in X_1$ y para cada $Z \in \mathcal{C}(X_2)$, si $(f(x), Z) \in R_2$, entonces existe $Y \in \mathcal{C}(X_1)$ tal que $(x, Y) \in R_1$ y $f[Y] \subseteq Z$.

3. $f^{-1}[U] \in D_1$ para cada $U \in D_2$.

Diremos que f es un morfismo acotado fuerte de marcos descriptivos restringidos si además cumple la condición (S) de la definición 4.2.3.

Proposición 4.3.12. *Sea $f \colon X_1 \to X_2$ un morfismo acotado entre los m-marcos descriptivos restringidos $\langle X_1, R_1, \tau_{D_1} \rangle$ y $\langle X_2, R_2, \tau_{D_2} \rangle$. Luego, $f \colon X_1 \to X_2$ es un morfismo acotado entre los m-marcos descriptivos $\langle X_1, R_1^e, D_1 \rangle$ y $\langle X_2, R_2^e, D_2 \rangle$. Además, si f es un morfismo acotado fuerte entre los m-marcos descriptivos restringidos $\langle X_1, R_1, \tau_{D_1} \rangle$ y $\langle X_2, R_2, \tau_{D_2} \rangle$, entonces f es un morfismo acotado fuerte entre los m-marcos descriptivos $\langle X_1, R_1^e, D_1 \rangle$ y $\langle X_2, R_2^e, D_2 \rangle$.*

Demostración. Se sigue de las inclusiones $R_1 \subseteq R_1^e$ y $R_2 \subseteq R_2^e$. ■

Proposición 4.3.13. *Sea $f\colon X_1 \to X_2$ un morfismo acotado entre los m-marcos descriptivos $\langle X_1, R_1, D_1\rangle$ y $\langle X_2, R_2, D_2\rangle$. Luego, se cumplen:*

1. *$f\colon X_1 \to X_2$ es un morfismo acotado entre los m-marcos descriptivos restringidos $\langle X_1, (R_1)_r, \tau_{D_1}\rangle$ y $\langle X_2, (R_2)_r, \tau_{D_2}\rangle$.*

2. *Si f es un morfismo acotado fuerte entre los m-marcos descriptivos $\langle X_1, R_1, \tau_{D_1}\rangle$ y $\langle X_2, R_2, \tau_{D_2}\rangle$, entonces f es un morfismo acotado fuerte entre los m-marcos descriptivos restringidos $\langle X_1, (R_1)_r, \tau_{D_1}\rangle$ y $\langle X_2, (R_2)_r, \tau_{D_2}\rangle$.*

Demostración. (1) Es fácil.

(2) Sean $x \in X_1$ y $Z \in \mathcal{C}(X_2)$ tales que $(f(x), Z) \in (R_2)_r$. Entonces, $(f(x), Z) \in R_2$. Como f es un morfismo acotado, se sigue que existe $Y \subseteq X_1$ tal que $(x, Y) \in R_1$ y $f[Y] \subseteq Z$. Por la Propiedad **PCom** de la Definición 4.3.1, existe $C \in \mathcal{C}(X_1)$ tal que $C \subseteq Y$ y $(x, C) \in R_1$. Es fácil comprobar que $(x, C) \in (R_1)_r$ y $f[C] \subseteq f[Y] \subseteq Z$. ■

Corolario 4.3.14. *Existe una correspondencia biyectiva entre los marcos monótonos descriptivos y los m-marcos descriptivos restringidos. Los morfismos acotados fuertes entre dos marcos monótonos descriptivos son morfismos acotados fuertes entre sus correspondientes m-marcos descriptivos restringidos y viceversa.*

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ dos m-marcos descriptivos restringidos. Como vimos en la primer sección, son $\mathcal{DS}$-espacios monótonos. Es fácil comprobar que todo morfismo acotado $f\colon X_1 \to X_2$ de m-marcos descriptivos restringidos es una $\wedge$-relación monótona entre los $\mathcal{DS}$-espacios monótonos.

4.4 Propiedades preservadas

En las secciones anteriores definimos clases de marcos generales que cumplen propiedades más débiles. En esta sección estudiaremos algunas propiedades que son preservadas por medio de morfismos acotados suryectivos.

Proposición 4.4.1. *Sea $f : \langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle \to \langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ un morfismo acotado suryectivo entre los marcos monótonos generales $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ y $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$. Entonces,*

1. *Si $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{K}_{R_1}, \mathcal{L}_{D_1}\rangle$, entonces $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{K}_{R_2}, \mathcal{L}_{D_2}\rangle$.*

2. *Si $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es imagen-compacto, entonces $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es imagen-compacto.*

Demostración. (1) Sea $b \in X_2$ y sea $F \subseteq D_2$. Probemos que $R_2(b)$ es un subconjunto compacto del hiperespacio $\langle \mathcal{K}_{R_2}, \mathcal{L}_{D_2}\rangle$. Supongamos que para cualquier conjunto finito F_j de F obtenemos

$$R_2(b) \cap \bigcap \{L_V^c \mid V \in F_j\} \neq \emptyset. \tag{4.5}$$

Probemos que $R_2(b) \cap \bigcap \{L_V^c \mid V \in F\} \neq \emptyset$. Como f es suryectivo, existe $a \in X_1$ tal que $f(a) = b$. Probemos que

$$R_1(a) \cap \bigcap \left\{L_{f^{-1}[V]}^c \mid V \in F_j\right\} \neq \emptyset \tag{4.6}$$

para cualquier subconjunto finito F_j de F. Supongamos que existe un subconjunto finito F_0 de F tal que

$$R_1(a) \cap \bigcap \left\{L_{f^{-1}[V]}^c \mid V \in F_0\right\} = \emptyset. \tag{4.7}$$

Por (4.5), $R_2(f(a)) \cap \bigcap \{L_V^c \mid V \in F_0\} \neq \emptyset$. Así, existe $Y \in R_2(b)$ tal que $Y \cap V = \emptyset$ para cualquier $V \in F_0$. Como f es un morfismo acotado, existe $Z \subseteq X_1$ tal que $(a, Z) \in R_1$ y $f[Z] \subseteq Y$. Entonces $f[Z] \cap V = \emptyset$ para cada $V \in F_0$. Así, $Z \cap f^{-1}[V] = \emptyset$ para todo $V \in F_0$. Luego, $Z \in R_1(a) \cap \bigcap \left\{L_{f^{-1}[V]}^c \mid V \in F_0\right\}$, lo cual contradice (4.7). Luego, (4.6) es válida. Como $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es punto-compacto, existe $Y \subseteq X_1$ tal que $Y \in R_1(a) \cap \bigcap \left\{L_{f^{-1}[V]}^c \mid V \in F\right\}$. Como f es un morfismo acotado, tenemos que $(f(a), f[Y]) \in R_2$ y $f[Y] \in \bigcap \{L_V^c \mid V \in F\}$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es punto-compacto.

(2) Asumamos que $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es imagen-compacto. Sean $b \in X_2$ y $Y \subseteq X_2$ tales que $(b, Y) \in R_2$. Como f es suryectivo, existe $a \in X_1$ tal que $f(a) = b$. Así, $(f(a), Y) \in R_2$, y como f es un morfismo acotado, existe $Z \subseteq X_1$ tal que $(a, Z) \in R_1$ y $f[Z] \subseteq Y$. Como $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es imagen-compacto, existe un subconjunto compacto $H \subseteq X_1$ tal que $(a, H) \in R_1$ y $H \subseteq Z$. Es fácil comprobar que $f[H]$ es un subconjunto compacto de X_2, y como $(f(a), f[H]) \in R_2$ y $f[H] \subseteq f[Z] \subseteq Y$, obtenemos que $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es imagen-compacto. ■

Proposición 4.4.2. *Sea $f : \langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle \to \langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ un morfismo acotado fuerte entre los marcos monótonos generales $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ y $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$. Entonces,*

1. *Si $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{K}_{R_2}, \mathcal{L}_{D_2}\rangle$, entonces $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{K}_{R_1}, \mathcal{L}_{D_1}\rangle$.*

2. *Si f es suryectivo y $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es repleto, entonces $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es repleto.*

3. *Si f es inyectivo y $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es imagen-compacto, entonces $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es imagen-compacto.*

4. *Si $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es repleto, entonces $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es repleto.*

Demostración. (1) Sea $a \in X_1$ y sea $W \subseteq D_1$. Probaremos que $R_1(a)$ es un subconjunto compacto del hiperespacio $\langle \mathcal{K}_{R_1}, \mathcal{L}_{D_1}\rangle$. Supongamos que para cualquier subconjunto finito W_j de W obtenemos

$$R_1(a) \cap \bigcap \{L_U^c \mid U \in W_j\} \neq \emptyset. \tag{4.8}$$

Como f es fuerte, para cada $U \in D_1$ existe $V_U \in D_2$ tal que $U = f^{-1}[V_U]$. Probemos que $R_2(f(a)) \cap \bigcap \left\{L_{V_U}^c \mid U \in W_j\right\} \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto finito W_j de W. Supongamos que existe un subconjunto finito W_0 de W tal que $R_2(f(a)) \cap \bigcap \left\{L_{V_U}^c \mid U \in W_0\right\} = \emptyset$. Por (4.8), $R_1(a) \cap \bigcap \{L_U^c \mid U \in W_0\} \neq \emptyset$, es decir, existe $Y \in R_1(a)$ tal que $Y \cap U = Y \cap f^{-1}[V_U] = \emptyset$ para todo $U \in W_0$. Como f es un morfismo acotado, $f[Y] \in R_2(f(a))$ y $f[Y] \cap V_U = \emptyset$ para todo $U \in W_0$, es decir, $f[Y] \in R_2(f(a)) \cap \bigcap \left\{L_{V_U}^c \mid U \in W_0\right\} = \emptyset$, lo cual es imposible. Entonces, como $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es punto-compacto, existe $Z \subseteq X_2$ tal que $Z \in R_2(f(a))$ y $Z \cap V_U = \emptyset$ para todo $U \in W$. Como f es un morfismo acotado, existe $Z' \subseteq X_1$ tal que $Z' \in R_1(a)$ y $f[Z'] \subseteq Z$. Es claro que $Z' \cap f^{-1}[V_U] = Z' \cap U = \emptyset$ para todo $U \in W$. Luego, $Z' \in R_1(a) \cap \bigcap \{L_U^c \mid U \in W\}$, es decir, $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es punto-compacto.

(2) Asumamos que $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es repleto. Sea $H_i = H_{D_i}$ para $i = 1, 2$. Sean $b \in X_2$ y $Y \subseteq X_2$ tales que

$$\bigcap \{H_2(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_{R_2}^{-1}((H_2(b)). \tag{4.9}$$

Probaremos que existe $Y' \subseteq X_2$ tal que $(b, Y') \in R_2$ y $Y' \subseteq \mathrm{cl}(Y)$. Como f es suryectivo, existe $a \in X_1$ tal que $f(a) = b$. Probemos que

$$\bigcap \left\{H_1(x) \mid x \in f^{-1}[Y]\right\} \subseteq \Diamond_{R_1}^{-1}((H_1(a)). \tag{4.10}$$

Sea $U \in \bigcap \{H_1(x) \mid x \in f^{-1}[Y]\}$. Entonces $f^{-1}[Y] \subseteq U$. Como f es fuerte, existe $V_U \in D_2$ tal que $U = f^{-1}[V_U]$. Así, $f^{-1}[Y] \subseteq f^{-1}[V_U]$. Probemos que $Y \subseteq V_U$. Sea $y \in Y$. Como f es suryectivo, existe $x \in X_1$ tal que $f(x) = y$. Así, $x \in f^{-1}[Y] \subseteq$

$f^{-1}[V_U]$. Consecuentemente, $x \in f^{-1}[V_U]$, es decir, $f(x) = y \in V_U$. Entonces, $V_U \in \bigcap\{H_2(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_{R_2}^{-1}((H_2(b))$, y se sigue que $b = f(a) \in \Diamond_{R_2}(V_U)$. Luego, $a \in f^{-1}[\Diamond_{R_2}(V_U)] = \Diamond_{R_1}(f^{-1}[V_U]) = \Diamond_{R_1}(U)$, es decir, $U \in \Diamond_{R_1}^{-1}((H_1(a))$. Por lo tanto (4.10) es válida. Como $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es repleto, existe $Z \subseteq X_1$ tal que

$$(a, Z) \in R_1 \text{ y } Z \subseteq \mathrm{cl}(f^{-1}[Y]). \tag{4.11}$$

Como $f(a) = b$, y f es un morfismo acotado, $(b, f[Z]) \in R_2$. Como f es un morfismo acotado fuerte, es fácil ver que de $Z \subseteq \mathrm{cl}(f^{-1}[Y])$ se sigue que $f[Z] \subseteq \mathrm{cl}(Y)$. Luego, $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es repleto.

(3) Sea $a \in X_1$ y sea $Y \in R_1(a)$. Entonces $f[Y] \in R_2(f(a))$. Como $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es imagen-compacto, entonces existe un subconjunto compacto H de X_2 tal que $H \subseteq f[Y]$ y $H \in R_2(f(a))$. Como f es un morfismo acotado, existe $Z \subseteq X_1$ tal que $(a, Z) \in R_1$ y $f[Z] \subseteq H$. Así, $Z \subseteq f^{-1}[H]$, y como $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es monótono, $(a, f^{-1}[H]) \in R_1$. Probemos que $f^{-1}[H]$ es compacto. Sea $W \subseteq D_1$ tal que $f^{-1}[H] \subseteq \bigcup\{U : U \in W\}$. Como f es fuerte, para cada $U \in W$ existe $V_U \in D_2$ tal que $U = f^{-1}[V_U]$. Probemos que $H \subseteq \bigcup\{V_U : U \in W\}$. Sea $y \in H$. Como $H \subseteq f[Y]$, existe $x \in X_1$ tal que $f(x) = y$. Así, $x \in f^{-1}[H]$, y en consecuencia existe $U \in W$ tal que $x \in U = f^{-1}[V_U]$, es decir, $f(x) = y \in \bigcup\{V_U : U \in W\}$. Como H es compacto, existen $U_1, \ldots, U_n \in W$ tales que $H \subseteq V_{U_1} \cup \ldots \cup V_{U_n}$. Así, $f^{-1}[H] \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$, y luego $f^{-1}[H]$ es compacto. Como f es inyectivo, se sigue que $f^{-1}[H] \subseteq Y$, y obtenemos que $\langle \mathcal{F}_1, D_1\rangle$ es imagen-compacto.

(4) Supongamos que $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es repleto. Sean $a \in X_1$ y $Y \in \mathcal{P}(X_1)$ tales que

$$\bigcap\{H_{D_1}(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Diamond_{R_1}^{-1}(H_{D_1}(a)).$$

Probemos que

$$\bigcap\{H_{D_2}(x) \mid x \in f[Y]\} \subseteq \Diamond_{R_2}^{-1}(H_{D_2}(f(a))). \tag{4.12}$$

Sea $U \in D_2$ tal que $U \in \bigcap\{H_{D_2}(x) \mid x \in f[Y]\}$. Tenemos que $f[Y] \subseteq U$. Así, $Y \subseteq f^{-1}(f[Y]) \subseteq f^{-1}(U) \in D_1$ y eso implica que $f^{-1}(U) \in \bigcap\{H_{D_1}(y) \mid y \in Y\}$. Se sigue que $f^{-1}(U) \in \Diamond_{R_1}^{-1}(H_{D_2}(a))$, es decir, $a \in \Diamond_{R_1}(f^{-1}(U))$. Luego, existe $Z \in R_1(a)$ tal que $Z \subseteq f^{-1}(U)$. Como f es un morfismo acotado, $f[Z] \in R_2(f(a))$ y $f[Z] \subseteq U$. Entonces, $U \in \Diamond_{R_2}^{-1}(H_{D_2}(f(a)))$ y (4.12) es válida. Como $\langle \mathcal{F}_2, D_2\rangle$ es repleto, existe $Z \subseteq X_2$ tal que $(f(a), Z) \in R_2$ y $Z \subseteq \mathrm{cl}(f[Y])$. De nuevo, como f es un morfismo acotado, existe $V \subseteq X_1$ tal que $(a, V) \in R_1$ y $f[V] \subseteq Z \subseteq \mathrm{cl}(f[Y])$. Ahora, probemos que $V \subseteq \mathrm{cl}(Y)$. Sean $x \in V$ y $U \in D_1$ tales que $x \in U$. Como f es un morfismo acotado fuerte, existe $W \in D_2$ tal que $x \in U = f^{-1}(W)$. Así,

$f(x) \in W$ y de $f[V] \subseteq \mathrm{cl}(f[Y])$, obtenemos que $f(x) \in \mathrm{cl}(f[Y])$. Como W es un elemento de la base, $W \cap f[Y] \neq \emptyset$, es decir, existe $y \in Y$ tal que $f(y) \in W$. Entonces, $y \in f^{-1}(W) = U$ y se sigue que $U \cap Y \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{cl}(Y)$ y $\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$ es repleto. ■

Corolario 4.4.3. *Sea $f : \langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle \to \langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$ un morfismo acotado fuerte suryectivo entre los marcos monótonos generales $\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$. Entonces,*

1. *$\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{K}_{R_1}, \mathcal{L}_{D_1} \rangle$ sii $\langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$ es punto-compacto en $\langle \mathcal{K}_{R_2}, \mathcal{L}_{D_2} \rangle$.*

2. *$\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$ es repleto sii $\langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$ es repleto.*

3. *Si f es inyectivo, entonces $\langle \mathcal{F}_1, D_1 \rangle$ es imagen-compacto sii $\langle \mathcal{F}_2, D_2 \rangle$ es imagen-compacto.*

Capítulo 5

Sistemas deductivos monótonos

En este capítulo mostraremos una aplicación de la dualidad para la lógica. El lenguaje básico que elegimos contiene dos modalidades, un $\Box$ y un $\Diamond$, que no son interdefinibles, por la ausencia de la operación negación. En el trabajo [36], R. Jansana caracterizó las lógicas autoextensionales con una conjunción como las lógicas que pueden ser definidas utilizando el orden de semirretículo inducido por la interpretación de la conjunción en las álgebras que son sus contrapartes algebraicas. En este capítulo, seguiremos el enfoque de Jansana, trabajando con lógicas modales monótonas autoextensionales. Los sistemas deductivos con los que trabajaremos están definidos a partir de las variedades generadas por clases de semirretículos (acotados) distributivos con operadores monótonos.

Como mencionamos anteriormente, las lógicas modales monótonas son interpretadas sobre marcos de entornos monótonos. En este capítulo definiremos los marcos adecuados para trabajar en este lenguaje más restringido, de los cuales se desprenden los marcos estudiados en el capítulo 4. Utilizaremos los marcos de entornos para probar completitud de algunas extensiones particulares del sistema deductivo definido a partir de la variedad generada por la clase de los semirretículos distributivos con dos operadores monótonos, es decir, que los sistemas deductivos están caracterizados por los marcos de entornos.

5.1 Preliminares

La Lógica se ocupa de los métodos del razonamiento. Uno de los objetivos fundamentales es sistematizar y codificar principios de los razonamientos válidos con el objeto de formar o construir argumentaciones o deducciones que sean correctas. En el capítulo 1, mostramos los avances realizados en lógica modal donde el lenguaje de base se compone de los conectivos de la lógica clásica más los operadores modales que agreguemos. En este capítulo trabajaremos con un lenguaje que tiene menos conectivos. Para eso primero recordemos algunas definiciones que generalizan las dadas anteriormente.

Definición 5.1.1. Sea $\mathcal{L}$ un tipo de similaridad. Sea Var un conjunto fijo numerable de de símbolos llamados variables. El conjunto Fm de fórmulas en $\mathcal{L}$ es el menor conjunto que contiene Var y es cerrado bajo conectivos de $\mathcal{L}$, es decir, par cada conectivo n-ario $c \in \mathcal{L}$ y para cada $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fm$, $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ es una fórmula. Denotaremos por $\mathbf{Fm}$ al *álgebra de fórmulas* de tipo $\mathcal{L}$ y los elementos de su universo Fm son las fórmulas de tipo $\mathcal{L}$.

Definición 5.1.2. Una sustitución es una aplicación $\sigma\colon Fm \to Fm$, tal que para todo conectivo n-ario $c \in \mathcal{L}$ y para cada $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fm$ vale $\sigma(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = c(\sigma(\varphi_1), \ldots, \sigma(\varphi_n))$.

Un sistema deductivo es una organización (matemática) formal del razonamiento. Una vez definido el lenguaje, el razonamiento, desde un punto de vista formal, es la derivación de una fórmula, llamada conclusión, a partir de un conjunto dado de fórmulas, llamadas hipótesis.

Definición 5.1.3. Un *sistema deductivo* (lógica) de tipo $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{S} = \langle Fm, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas tal que

1. Si $\varphi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

2. Si $\mathit{\Gamma} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ y para todo $\psi \in \Gamma$, $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, entonces $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

3. Para todo homomorfismo $\sigma\colon Fm \to Fm$ (es decir, sustitución), si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ entonces $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathcal{S}} \sigma(\varphi)$.

La Condición (3) es llamada la *Condición de Estructuralidad*. De (1) y (2) se sigue que si $\mathit{\Gamma} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. La relación $\vdash_{\mathcal{S}}$ es llamada la *relación de consecuencia* de $\mathcal{S}$. Se dice que un sistema deductivo es *finitario* si para cada conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, si $\mathit{\Gamma} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ entonces existe un conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. En este trabajo nos restringiremos a sistemas deductivos finitarios. A partir de ahora, el término 'sistema deductivo' aludirá a sistemas deductivos finitarios.

Un sistema deductivo $\mathcal{S}'$ es una *extensión* de un sistema deductivo $\mathcal{S}$ si la relación $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una subrelación de $\vdash_{\mathcal{S}'}$.

Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es *autoextensional* si su relación de interderivabilidad, denotada por $\dashv_{\mathcal{S}}\vdash$, es una congruencia del álgebra de fórmulas $\mathbf{Fm}$.

Un *secuente* es una expresión de la forma $\Gamma \rhd \varphi$ donde Γ es un conjunto finito no vacío de fórmulas y φ es una fórmula.

Definición 5.1.4. [36] Sea $\mathcal{S}$ un sistema deductivo con tipo algebraico $\mathcal{L}$. Un conectivo binario $\wedge \in \mathcal{L}$ es llamado una *conjunción* de $\mathcal{S}$ si para toda fórmula φ, ψ las siguientes condiciones valen:

1. $p, q \vdash_{\mathcal{S}} p \wedge q$,
2. $p \wedge q \vdash_{\mathcal{S}} p$ and $p \wedge q \vdash_{\mathcal{S}} q$.

Un sistema deductivo es llamado *conjuntivo* si tiene una conjunción.

Si $\wedge$ y $\wedge'$ son conjunciones, entonces para todo par de fórmulas φ, ψ, vale que $\varphi \wedge \psi \dashv_{\mathcal{S}}\vdash \varphi \wedge' \psi$.

Un conjunto de fórmulas es una *teoría* de $\mathcal{S}$, o una $\mathcal{S}$-teoría, si es cerrado bajo la relación de consecuencia $\vdash_{\mathcal{S}}$, es decir, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ entonces $\varphi \in \Gamma$. Sea $Th(\mathcal{S})$ el conjunto de todas las *teorías* de $\mathcal{S}$. Una teoría es *consistente* si no es el conjunto de todas las fórmulas.

Para cada sistema deductivo podemos asociar canónicamente una variedad, llamada la variedad intrínseca de $\mathcal{S}$. En el caso de los sistemas deductivos autoextensionales, la variedad intrínseca se puede describir como la variedad cuyas ecuaciones válidas son $\varphi \approx \psi$ si y sólo si $\varphi \dashv_{\mathcal{S}}\vdash \psi$.

5.2 El sistema deductivo básico $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$

En esta sección definiremos los sistemas deductivos básicos con los que vamos a trabajar, que están asociados a una variedad $\mathsf{V}(\mathsf{K})$ generada por una clase K de semirretículos distributivos con operadores monónotonos. Las siguientes definiciones se encuentran en el trabajo [36].

Definición 5.2.1. Sea K una clase de álgebras del mismo tipo de similaridad $\mathcal{L}$. Diremos que K está *basada en un semirretículo* si existe un término binario $\wedge \in \mathcal{L}$ tal que para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$, el reducto $\langle A, \wedge^{\mathbf{A}} \rangle$ es un semirretículo.

Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ *está basado en un semirretículo* si y sólo si existe una clase de álgebras K basada en un semirretículo tal que para todo $n > 0$ y para todo conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi\}$ se cumple que

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{A} \in \mathsf{K}\, \forall v \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}), \\ v(\varphi_0) \wedge \ldots \wedge v(\varphi_{n-1}) \leq v(\varphi). \end{array} \tag{5.1}$$

En [36], Jansana probó que un sistema deductivo es autoextensional y conjuntivo si y sólo si está basado en un semirretículo. Sea $\mathcal{S}$ un sistema deductivo basado en un semirretículo y sea K una clase de álgebras basadas en un semirretículo que cumple la condición 5.1. Entonces vale que para toda $\varphi, \psi \in Fm$,

$$\varphi \dashv_{\mathcal{S}}\vdash \psi \text{ sii } \mathsf{K} \vDash \varphi \approx \psi,$$

es decir, la ecuación $\varphi \approx \psi$ vale en todas las álgebras de K y, por lo tanto, vale en la variedad generada por K. Es fácil ver que la variedad $\mathsf{V}(\mathsf{K})$ cumple también la condición 5.1, y que es la única variedad que tiene esa propiedad. Esta es la variedad intrínseca del sistema deductivo que la denotaremos por $\mathsf{V}(\mathcal{S})$. Por otro lado, dada una variedad de semirretículos, se puede definir un sistema deductivo.

Definición 5.2.2. Dada K una variedad basada en un semirretículo. Definimos el sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathsf{K}}$ de la siguiente manera: para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{K}}} \varphi$ si y sólo si existe un conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\} \subseteq \Gamma$ tal que $\forall \mathbf{A} \in \mathsf{K}$ y $\forall v \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A})$,

$$v(\varphi_0) \wedge \ldots \wedge v(\varphi_{n-1}) \leq v(\varphi).$$

En particular, $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{K}}} \varphi$ sii $\forall \mathbf{A} \in \mathsf{K}$ y $\forall v \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A})$ $\forall a \in A$, $a \leq v(\varphi)$.

En [36] también se probó que si $\mathcal{S}$ tiene teoremas, entonces no es pseudo axiomático, es decir, la intersección de todas sus teorías no vacías es el conjunto de los teoremas. Esto implica que si $\mathcal{S}$ está basado en un semirretículo entonces para toda $\mathbf{A} \in \mathsf{V}(\mathcal{S})$, el semirretículo $\langle A, \wedge^{\mathbf{A}} \rangle$ tiene máximo, es decir, tiene $1^{\mathbf{A}}$. Si $\mathcal{S}$ es un sistema deductivo basado en un semirretículo, no pseudo axiomático, entonces $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathcal{S})}$ es $\mathcal{S}$.

Definición 5.2.3. Sea $\mathcal{S}$ un sistema deductivo. Decimos que $\mathcal{S}$ es *monótono* si existe un operador unario m que cumple la siguiente regla:

1. Si $p \vdash_{\mathcal{S}} q$ entonces $mp \vdash_{\mathcal{S}} mq$.

Notemos que si $\mathcal{S}$ es un sistema deductivo conjuntivo, entonces la regla anterior es equivalente a pedir que se cumplan:

1. Si $p \dashv_{\mathcal{S}}\vdash q$ entonces $mp \dashv_{\mathcal{S}}\vdash mq$ y
2. $m(p \wedge q) \vdash_{\mathcal{S}} mp \wedge mq$.

Sea K una clase de semirretículos distributivos acotados con un operador monótono m. Consideremos $\mathsf{V}(\mathsf{K})$ la variedad generada por K. Entonces $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})}$ es un sistema deductivo conjuntivo, autoextensional, monótono y no pseudo axiomático. Obviamente que esta definición se puede extender para sistemas deductivos con más de un operador monótono. Vamos a definir como el sistema deductivo básico a $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$ donde $\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}$ es la clase de semirretículos distributivos acotados con dos operadores monótonos $\langle A, \wedge, \Diamond, \Box, 1\rangle$. Más adelante probaremos completitud de algunas extensiones y expansiones de este sistema.

5.3 Marcos y modelos para $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$

Como hemos visto en los capítulos 1 y 4, los modelos de entornos son utilizados en la interpretación de lógicas modales no normales, son una generalización de los modelos relacionales estándar para la lógica modal. Si la lógica modal tiene una base intuicionista, entonces la semántica adecuada son los marcos de entornos *ordenados*, es decir, estructuras de la forma $\langle X, \leq, R\rangle$ donde $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, y $\langle X, R\rangle$ es un marco de entornos que satisface algunas condiciones adicionales (ver [42] y [56]). En este capítulo estudiaremos marcos de entornos ordenados en un lenguaje algebraico que contiene $\{\wedge, \Box, \Diamond\}$. Como tenemos dos modalidades, primero definimos dos tipos de marcos que nos permitirán interpretar las modalidades $\Box$ y $\Diamond$.

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{H}$ una subfamilia de $\mathcal{P}(X)$. Consideremos una relación $R \subseteq X \times \mathcal{H}$. Diremos que R es *monótona* sobre $\mathcal{H}$, si para cualquier $x \in X$ y para todo $Y, Y' \in \mathcal{H}$, si $Y' \subseteq Y$ e $Y' \in R(x)$, entonces $Y \in R(x)$, donde $R(x) = \{Z \in \mathcal{H} : (x, Z) \in R\}$.

Definición 5.3.1. Sea $\langle X, \leq\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $R \subseteq X \times \mathcal{H}$ una relación monótona sobre $\mathcal{H}$. Diremos que

- El triple $\langle X, \leq, R\rangle$ es un *marco creciente*, si $\mathcal{H} = \mathrm{Up}(X)$ y $x \leq y$ implica que $R(x) \subseteq R(y)$ para todo $x, y \in X$.
- El triple $\langle X, \leq, R\rangle$ es un *marco decreciente*, si $\mathcal{H} = \mathrm{Dw}(X)$ y $x \leq y$ implica que $R(y) \subseteq R(x)$ para todo $x, y \in X$.

La estructura $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u\rangle$ es un *marco monótono*, o m-marco, si R_w es una relación monótona sobre $\mathrm{Dw}(X)$ tal que $\langle X, \leq, R_w\rangle$ es un marco decreciente, y R_u es una relación monótona sobre $\mathrm{Up}(X)$ tal que $\langle X, \leq, R_u\rangle$ es un marco creciente.

Notemos que en las lógicas modales clásicas no normales, el orden es la identidad, $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ y $R_w = R_u$. Escribimos $\langle X, R\rangle$ en vez de $\langle X, =, R, \mathcal{P}(X)\rangle$, y en este caso el par $\langle X, R\rangle$ es un marco monótono o un marco de entornos monótono [18, 32] del que hablamos en el capítulo 4.

Una valuación V sobre un m-marco $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_u, R_w\rangle$ es una función $V\colon Var \to \mathrm{Up}(X)$. Una valuación puede extenderse recursivamente al conjunto de todas las fórmulas por medio de las siguientes condiciones,

1. $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \wedge V(\psi)$,
2. $V(\Diamond\varphi) = \{x \in X : \exists Y \in R_u(x)\ [Y \subseteq V(\varphi)]\}$,
3. $V(\Box\varphi) = \{x \in X : \forall Z \in R_w(x)\ [Z \cap V(\varphi) \neq \emptyset]\}$.

Observación 5.3.2. Sea $\mathcal{F}$ un marco monótono y sea V una valuación sobre él. Entonces es fácil ver que $V(\varphi) \in \mathrm{Up}(X)$, para toda fórmula φ. Notemos que las definiciones anteriores continúan siendo apropiadas si en el lenguaje existe una implicación intuicionista $\to$. En este caso sólo necesitamos agregar la condición

5. $V(\varphi \to \phi) = \{x \in X : [x) \cap V(\varphi) \subseteq V(\phi)\}$.

Si en el lenguaje existe un $\bot$ o $\top$, sólo necesitamos agregar las condiciones

6. $V(\top) = X$,
7. $V(\bot) = \emptyset$.

Un *m-modelo* es un par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ donde $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u\rangle$ es un m-marco y V es una valuación sobre él. Una fórmula φ es válida en el m-modelo $\mathcal{M}$ y en el estado x, en símbolos $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$, si $x \in V(\varphi)$. Una fórmula φ es válida en el m-modelo $\mathcal{M}$, en símbolos $\mathcal{M} \vDash \varphi$, si es válido en todo punto de X, es decir,

$V(\varphi) = X$. Una fórmula φ es *válida* en el marco $\mathcal{F}$, en símbolos $\mathcal{F} \vDash \varphi$, si φ es válida en el m-modelo $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ para cada valuación V sobre $\mathcal{F}$, es decir, si $V(\varphi) = X$ para cada valuación V sobre $\mathcal{F}$.

Dado un conjunto finito de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, un par $\Gamma \vdash \varphi$ es *localmente válido* en un m-modelo $\mathcal{M}$, en símbolos $\mathcal{M} \vDash \Gamma \vdash \varphi$, si $\bigcap_{\psi \in \Gamma} V(\psi) \subseteq V(\varphi)$ (si $\Gamma = \emptyset$ entonces consideramos $X \subseteq V(\varphi)$) y es localmente válido en un marco $\mathcal{F}$, en símbolos $\mathcal{F} \vDash \Gamma \vdash \varphi$, si $\Gamma \vdash \varphi$ es localmente válido en el m-modelo $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ para cada valuación V sobre $\mathcal{F}$.

Como no lidiamos con validez global aquí, omitimos decir 'localmente'.

Sea $\mathcal{S}$ un sistema deductivo monótono. Denotaremos por $Fr(\mathcal{S})$ a la clase de todos los marcos donde cada par finito $\Gamma \vdash \varphi$ de $\mathcal{S}$ es válido. Por el otro lado, sea $\mathbf{F}$ una clase de marcos, denotaremos por $Sq(\mathbf{F})$ la clase de todos los pares finitos (secuentes) $\Gamma \vdash \varphi$ que son válidos en todos los marcos de $\mathbf{F}$.

Cada clase de marcos monótonos $\mathbf{F}$ define un sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathbf{F})$ de la siguiente manera

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathbf{F})} \varphi \text{ sii existe un conjunto finito } \Delta \subseteq \Gamma \text{ tal que } \Delta \vdash \varphi \in Sq(\mathbf{F}).$$

$\mathcal{S}(\mathbf{F})$ es un sistema deductivo monótono, llamado *el sistema deductivo de* $\mathbf{F}$.

Definición 5.3.3. Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ *está caracterizado por una clase* $\mathbf{F}$ *de marcos* o *es completo relativo a la clase* $\mathbf{F}$ *de marcos*, $\mathbf{F}$-*completo* en breve, si es el sistema deductivo de la clase de marcos $\mathbf{F}$, es decir, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{F})$. Decimos que un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es marco completo si $\mathcal{S} = \mathcal{S}(Fr(\mathcal{S}))$.

5.3.1 Álgebras complejas

En la teoría clásica, un álgebra compleja de un marco de entornos $\langle X, R_\Delta \rangle_{\Delta \in \mathcal{L}}$ es una subálgebra del álgebra potencia $\mathcal{P}(X)$ expandida con operaciones m_{R_Δ} para cada operador monótono del lenguaje modal $\mathcal{L}$ tal que para cualquier valuación V definida sobre el marco, se cumple $V(\Delta\varphi) = m_{R_\Delta}(V(\varphi))$. De acuerdo con esta interpretación, dado un m-marco $\mathcal{F}$ definimos en $\mathbf{Up}(X)$ dos operadores monótonos $\Diamond_{R_u}, \Box_{R_w} : \mathrm{Up}(X) \to \mathrm{Up}(X)$ como:

$$\begin{aligned} \Box_{R_w}(U) &= \{x \in X \mid \forall Z \in R_w(x)\,[Z \cap U \neq \emptyset]\}, \\ \Diamond_{R_u}(U) &= \{x \in X \mid \exists Y \in R_u(x)\,[Y \subseteq U]\} \end{aligned}$$

para cada $U \in \mathrm{Up}(X)$. Es fácil ver que $x \in \Box_{R_w}(U) \Leftrightarrow U^c \notin R_w(x)$, y que $x \in \Diamond_{R_u}(U) \Leftrightarrow U \in R_u(x)$. Claramente $A(\mathcal{F}) = \langle \mathbf{Up}(X), \Box_{R_w}, \Diamond_{R_u} \rangle$ es un álgebra modal monótona, llamada el *álgebra de entornos compleja* de $\mathcal{F}$. Notemos que si $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ es un m-modelo de entornos, entonces $V(\Box\varphi) = \Box_{R_w}(V(\varphi))$ y $V(\Diamond\varphi) = \Diamond_{R_u}(V(\varphi))$ para cada $\varphi \in Fm$.

Si $\mathbf{F}$ es una clase de marcos, denotamos la clase de las álgebras complejas de los marcos en $\mathbf{F}$ por $\mathsf{Cm}\mathbf{F}$.

Sea $\langle \mathbf{A}, \Box, \Diamond\rangle$ un semirretículo distributivo con operadores monótonos. Ahora introduciremos cuatro relaciones entre filtros primos y subconjuntos de filtros primos de un m-semirretículo que usaremos luego para definir los marcos que probarán completitud de las extensiones listadas en las próximas secciones. Las primeras relaciones que vamos a definir $R_\Box$ y $R_\Diamond$ son las extensiones (en el sentido de la Definición 4.3.8) de relaciones definidas en el capítulo 2. Para probar la completitud de algunas extensiones del sistema deductivo básico, resulta muy complicado utilizar estas relaciones, por ello introducimos dos relaciones nuevas $N_\Box$ y $N_\Diamond$ que contienen a las otras, pero, al tener más elementos, las pruebas se facilitan. Más precisamente: sean $R_\Box, N_\Box \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$ y $R_\Diamond, N_\Diamond \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ las relaciones definidas como sigue:

$$\begin{aligned} (P,Z) \in R_\Box &\;\Leftrightarrow\; \exists I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A}) \text{ tal que } \Box^{-1}(P) \cap I = \emptyset \text{ y } \alpha(I) \subseteq Z, \\ (P,Z) \in N_\Box &\;\Leftrightarrow\; \Box^{-1}(P) \subseteq \bigcup Z \end{aligned}$$

para $P \in X(\mathbf{A})$, $Z \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$, y

$$\begin{aligned} (P,Y) \in R_\Diamond &\;\Leftrightarrow\; \exists F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A}) \text{ tal que } F \subseteq \Diamond^{-1}(P) \text{ y } \psi(F) \subseteq Y, \\ (P,Y) \in N_\Diamond &\;\Leftrightarrow\; \bigcap Y \subseteq \Diamond^{-1}(P) \end{aligned}$$

para $P \in X(\mathbf{A})$ y $Y \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.

Observación 5.3.4. Siempre vale que $R_\Box \subseteq N_\Box$, $R_\Diamond \subseteq N_\Diamond$. También siempre vale $\alpha(I) \in R_\Box(P) \Leftrightarrow \alpha(I) \in N_\Box(P)$, y $\psi(F) \in R_\Diamond(P) \Leftrightarrow \psi(F) \in N_\Diamond(P)$. Notemos que si $\mathbf{A}$ es un semirretículo distributivo con operadores monótonos, entonces para todo $P, Q \in X(\mathbf{A})$,

$$(Q, [P)) \in R_\Diamond \Leftrightarrow P \subseteq \Diamond^{-1}(Q),$$

y

$$(Q, (P]) \in R_\Box \Leftrightarrow \Box^{-1}(Q) \subseteq P.$$

El siguiente teorema se sigue de los resultados dados en el capítulo 2.

Teorema 5.3.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *un semirretículo distributivo con operadores monótonos. Sea* $a \in A$, *y sea* $P \in X(\mathbf{A})$. *Entonces,*

1. *$\Diamond a \in P$ si y sólo si existe $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $(P, \psi(F)) \in R_\Diamond$ y $a \in F$,*

2. *$\Box a \in P$ si y sólo si para todo $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ $(P, \alpha(I)) \in R_\Box$ implica que $a \notin I$,*

3. *$\Diamond a \in P$ si y sólo si existe $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $(P, \psi(F)) \in N_\Diamond$ y $a \in F$,*

4. *$\Box a \in P$ si y sólo si para todo $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ $(P, \alpha(I)) \in N_\Box$ implica que $a \notin I$.*

Demostración. Probamos 1. Sea $\Diamond a \in P$. Consideremos el filtro $F = F(a)$ generado por a. Es fácil ver que $F(a) \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Así, $(P, \psi(F)) \in R_\Diamond$ y $a \in F$.

Asumamos ahora que existe $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $(P, \psi(F)) \in R_\Diamond$ y $a \in F$. De $a \in F \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, obtenemos $\Diamond a \in P$.

La prueba de 2. es análoga a la de 1.

3. y 4. siguen de la Observación 5.3.4. ■

Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo con operadores monótonos. Es fácil probar que $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq, R_\Box\rangle$ y $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq, N_\Box\rangle$ son marcos decrecientes, y que $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq, R_\Diamond\rangle$ y $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq, N_\Diamond\rangle$ son marcos crecientes. Consideremos los m-marcos de $\mathbf{A}$, $\mathcal{F}(\mathbf{A}) = \langle X(\mathbf{A}), \subseteq, R_\Box, R_\Diamond\rangle$ y $\mathfrak{F}(\mathbf{A}) = \langle X(\mathbf{A}), \subseteq, N_\Box, N_\Diamond\rangle$.

Teorema 5.3.6. *[31] Todo semirretículo distributivo con operadores monótonos $\mathbf{A}$ es isomorfo a una subálgebra de la m-álgebra $A(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$ e isomorfa a una subálgebra de la m-álgebra $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A}))$ por medio de la aplicación $\beta : A \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.*

Demostración. Del Teorema 5.3.5 tenemos que $\beta(\Box a) = \Box_{R_\Box}\beta(a)$, y que $\beta(\Diamond a) = \Diamond_{R_\Diamond}\beta(a)$, para cualquier $a \in A$. También se sigue que $\beta(\Box a) = \Box_{N_\Box}\beta(a)$, y $\beta(\Diamond a) = \Diamond_{N_\Diamond}\beta(a)$, para cualquier $a \in A$.

Luego, en cualquier caso β es un homomorfismo inyectivo de semirretículos con operadores monótonos. ■

Es claro que el teorema anterior puede extenderse a semirretículos implicativos con operadores monótonos, retículos distributivos acotados y álgebras de Heyting con operadores modales monótonos.

El siguiente resultado es fundamental para probar la completitud en las próximas secciones.

Lema 5.3.7. *Sea $\mathcal{F}$ un marco monótono. Entonces, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathcal{F})} \varphi$ si y sólo si existen $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Gamma$ tales que $A(\mathcal{F}) \vDash \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi \approx \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ un marco monótono. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathcal{F})} \varphi$. Entonces existen $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Gamma$ tales que para todo $v \colon Fm \to \mathrm{Up}(X)$ se cumple

$$v(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \leq v(\varphi).$$

Pero eso es equivalente a $A(\mathcal{F}) \vDash \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi \approx \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$. La otra implicación es inmediata. ■

Teorema 5.3.8. *Sea* K *una clase de semirretículos distributivos con operadores monótonos. Sea* $\mathcal{F}(\mathsf{K}) = \{\mathcal{F}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathsf{K}\}$*. Entonces,* $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})} = \mathcal{S}(\mathcal{F}(\mathsf{K}))$ *si y sólo si para toda* $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ *se cumple* $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{V}(\mathsf{K})$*. Análogamente, sea* $\mathfrak{F}(\mathsf{K}) = \{\mathfrak{F}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathsf{K}\}$*. Entonces,* $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})} = \mathcal{S}(\mathfrak{F}(\mathsf{K}))$ *si y sólo si para toda* $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ *se cumple* $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{V}(\mathsf{K})$*.*

Demostración. Probamos la primera parte, el resto de la prueba es similar. Supongamos que para toda $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ se cumple $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{V}(\mathsf{K})$. Sea $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})}} \varphi$. Entonces existen $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Gamma$ tales que $\mathsf{V}(\mathsf{K}) \vDash \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi \approx \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$. Por hipótesis, $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \vDash \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi \approx \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ para toda $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ y obtenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathcal{F}(\mathsf{K}))} \varphi$. Ahora, Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathcal{F}(\mathsf{K}))} \varphi$ y $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})}} \varphi$. Por el lema anterior, tenemos que existen $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Gamma$ tales que $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \vDash \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi \approx \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ para toda $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ pero existe $\mathbf{B} \in \mathsf{K}$ tal que $\mathbf{B} \nvDash \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi \approx \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$. Por lo tanto, existe $v \colon Fm \to \mathbf{B}$ tal que $v(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \nleq v(\varphi)$. Luego, existe $P \in X(\mathbf{B})$ tal que $v(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \in P$ y $v(\varphi) \notin P$. Consideremos el homomorfismo $\beta \colon \mathbf{B} \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{B}))$. Entonces, $\beta \circ v \colon Fm \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{B}))$ es un homomorfismo y por hipótesis $\beta \circ v(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \leq \beta \circ v(\varphi)$ pero $P \in \beta \circ v(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1})$ y $P \notin \beta \circ v(\varphi)$, absurdo. Luego, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})}} \varphi$. La otra implicación es trivial. ■

Teorema 5.3.9. *El sistema deductivo* $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$ *es completo con respecto a* $\mathcal{F}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}) = \{\mathcal{F}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}\}$*. También es completo con respecto a* $\mathfrak{F}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}) = \{\mathfrak{F}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}\}$*.*

Demostración. Se sigue del teorema 5.3.8 y de que $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})), A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}$ para todo $\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box}$. ■

Como corolario tenemos que $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$ es marco completo.

5.4 Algunas correspondencias de primer orden

Es bien sabido que en lógica modal monótona algunas fórmulas, como $\Box\varphi \to \varphi$, están caracterizadas por condiciones en los marcos de entornos (ver [18], [50] y [10]). En esta sección generalizaremos algunas de estas condiciones. Probaremos que algunas fórmulas modales en el lenguaje modal están caracterizadas por ciertas condiciones definidas en marcos monótonos ordenados, o en el álgebra asociada al marco monótono ordenado. Sea $\varphi \in Fm$. Para cada $n \geq 0$ definimos inductivamente la fórmula $\Box^n\varphi$ como $\Box^0\varphi = \varphi$ y $\Box^{n+1}\varphi = \Box\Box^n\varphi$.

Sea $\mathbf{A}$ un semirretículo distributivo con operadores monótonos. Sean $\varphi, \psi \in Fm$. Denotaremos por:

$$\mathbf{A} \vDash \psi \preceq \varphi$$

si se cumple que

$$\mathbf{A} \vDash \psi \approx \varphi \wedge \psi.$$

Observación 5.4.1. Sea $\mathcal{F}$ un marco monótono. Entonces por lema 5.3.7,

$$\psi \vdash_{\mathcal{S}(\mathcal{F})} \varphi \text{ si y sólo si } A(\mathcal{F}) \vDash \psi \approx \varphi \wedge \psi.$$

La siguiente definición es una generalización de la composición definida en la sección 3.1.

Definición 5.4.2. Sea X un conjunto y se $R \subseteq X \times \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es una subfamilia de $\mathcal{P}(X)$. Definimos una relación binaria $\bar{R} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ como sigue:

$$(Z, Y) \in \bar{R} \Leftrightarrow \forall x \in Z : \ (x, Y) \in R.$$

Definimos inductivamente la *composición* R^2 de R como sigue:

$$\begin{aligned}(x, Y) \in R^2 \quad \Leftrightarrow \quad & \exists Z \in \mathcal{H} \text{ tal que } (x, Z) \in R, \\ & \text{y } (Z, Y) \in \bar{R}.\end{aligned}$$

Definición 5.4.3. Sea X un conjunto y sea $R \subseteq X \times \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es una subfamilia de $\mathcal{P}(X)$.

1. R es *débilmente transitiva* si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $Y \in \mathcal{H}$ si $(x, Y) \in R^2$, entonces $(x, Y) \in R$.

2. Si $\mathcal{H} = \mathrm{Dw}(X)$, R es *reflexiva* si y sólo si para todo $x \in X$, $(x, (x]) \in R$.

3. Si $\mathcal{H} = \mathrm{Up}(X)$, R es *reflexiva* si y sólo si para todo $x \in X$, $(x, [x)) \in R$.

Teorema 5.4.4. *Sea* $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ *un m-marco.*

1. $A(\mathcal{F}) \models \Box\varphi \preceq \varphi$ *si y sólo si* R_w *es reflexiva.*

2. $A(\mathcal{F}) \models \varphi \preceq \Diamond\varphi$ *si y sólo si* R_u *es reflexiva.*

3. $A(\mathcal{F}) \models \Box\varphi \preceq \Box^2\varphi$ *si y sólo si* R_w *es débilmente transitiva.*

4. $A(\mathcal{F}) \models \Diamond^2\varphi \preceq \Diamond\varphi$ *si y sólo si* R_u *es débilmente transitiva.*

Demostración. Sólo probaremos 1. La prueba de 2. es similar.

1. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \models \Box\varphi \preceq \varphi$. Sea $x \in X$ y supongamos que $(x, (x]) \notin R_w$. Consideremos la valuación V definida por

$$V(p) = (x]^c.$$

Así, $x \in V(\Box p)$. Dado que $A(\mathcal{F}) \models \Box\varphi \preceq \varphi$, $x \in V(p)$, lo cual es una contradicción. Entonces, para todo $x \in X$, $(x, (x]) \in R_w$.

Supongamos ahora que $(x, (x]) \in R_w$ para todo $x \in X$. Sea $\varphi \in Fm$. Sea V una valuación sobre $\mathrm{Up}(X)$ y sea $x \in X$ tal que $x \in V(\Box\varphi)$. Entonces, tenemos que $(x] \cap V(\varphi) \neq \emptyset$, luego obtenemos que $x \in V(\varphi)$.

Sólo probaremos 3. La prueba de 4. es similar.

3. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \models \Box\varphi \preceq \Box^2\varphi$. Sea $x \in X$ y sea $Y \in \mathrm{Dw}(X)$ tales que $(x, Y) \in R_w^2$. Consideremos la valuación V definida por

$$V(p) = X - Y = Y^c.$$

Entonces, existe $Z \in \mathrm{Dw}(X)$ tal que $(x, Z) \in R_w$ y $(Z, Y) \in \bar{R}_w$. Se sigue que $Z \subseteq V(\Box p)^c$ y dado que R_w es monótona y $V(\Box p)^c$ es un subconjunto decreciente, obtenemos que $(x, V(\Box p)^c) \in R_w$. Entonces, $x \notin V(\Box^2 p)$. Dado que $A(\mathcal{F}) \models \Box\varphi \preceq \Box^2\varphi$, $x \notin V(\Box p)$, es decir, existe $Z \in R_w(x)$ tal que $Z \cap V(p) = \emptyset$. Entonces, $Z \subseteq Y$, y por lo tanto $(x, Y) \in R_w$.

Supongamos ahora que R_w es débilmente transitiva. Sea $\varphi \in Fm$. Sea V una valuación sobre $\mathrm{Up}(X)$ y sea $x \in X$ tales que $x \in V(\Box\varphi)$. Supongamos que $x \notin V(\Box^2\varphi)$. Entonces, existe $Z \in R_w(x)$ tal que $Z \cap V(\Box\varphi) = \emptyset$, entonces para todo $z \in Z$, $z \notin V(\Box\varphi)$. Por lo tanto para todo $z \in Z$, $(z, V(\varphi)^c) \in R_w$. Entonces, $(x, V(\varphi)^c) \in R_w^2$ y por hipótesis $(x, V(\varphi)^c) \in R_w$ lo cual es una contradicción porque $x \in V(\Box\varphi)$. Por lo tanto, $x \in V(\Box^2\varphi)$. ∎

Definición 5.4.5. Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ un m-marco.

1. Diremos que un par de relaciones R_w y R_u son *wu-simétricas* sii para todo $x \in X$ y para todo $Z \in \mathrm{Dw}(X)$, si $(x, Z) \in R_w$, entonces existe $z \in Z$ tal que $(z, [x)) \in R_u$.

2. Diremos que un par de relaciones R_w y R_u son *uw-simétricas* sii para todo $x \in X$ y para todo $Y \in \mathrm{Up}(X)$, si $(x, Y) \in R_u$, entonces existe $y \in Y$ tal que $(y, (x]) \in R_w$.

3. Diremos que un par de relaciones R_w y R_u son *uw-euclideanas* sii para todo $x \in X$, para todo $Y \in \mathrm{Up}(X)$ y para todo $Z \in \mathrm{Dw}(X)$, si $(x, Y) \in R_u$ y $(x, Z) \in R_w$, entonces existe $z \in Z$ tal que $(z, Y) \in R_u$.

4. Diremos que un par de relaciones R_w y R_u son *wu-euclideanas* sii para todo $x \in X$, para todo $Y \in \mathrm{Up}(X)$ y para todo $Z \in \mathrm{Dw}(X)$, si $(x, Y) \in R_u$ y $(x, Z) \in R_w$, entonces existe $y \in Y$ tal que $(y, Z) \in R_w$.

Teorema 5.4.6. *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ un m-marco. Tenemos que:*

1. $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\Box\varphi \preceq \varphi$ *si y sólo si R_w y R_u son uw-simétricas.*

2. $A(\mathcal{F}) \vDash \varphi \preceq \Box\Diamond\varphi$ *si y sólo si R_w y R_u son wu-simétricas.*

3. $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\varphi \preceq \Box\Diamond\varphi$ *si y sólo si R_w y R_u son uw-euclideanas.*

4. $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\Box\varphi \preceq \Box\varphi$ *si y sólo si R_w y R_u son wu-euclideanas.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\Box\varphi \preceq \varphi$. Sea $x \in X$ y sea $Y \in \mathrm{Up}(X)$ tales que $(x, Y) \in R_u$. Consideremos la valuación V definida por

$$V(p) = (x]^c,$$

con $p \in Var$. Entonces, $x \notin V(p)$. Obtenemos que $x \notin V(\Diamond\Box p)$, es decir, existe $y \in Y$ tal que $y \notin V(\Box p)$. Así, existe $Z \in R_w(y)$ tal que $Z \cap V(p) = \emptyset$. Se sigue que $Z \subseteq V(p)^c = (x]$. Como R_w es monótona, $(y, (x]) \in R_w$.

$\Leftarrow$) Sea $\varphi \in Fm$. Sea V una valuación sobre $\mathbf{Up}(X)$ y sea $x \in X$ tal que $x \in V(\Diamond\Box\varphi)$. Sea $Y \in \mathrm{Up}(X)$ tal que $(x, Y) \in R_u$ y $Y \subseteq V(\Box\varphi)$. Por hipótesis existe $y \in Y$ tal que $(y, (x]) \in R_w$. Entonces, $(x] \cap V(\varphi) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in V(\varphi)$.

2. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \varphi \preceq \Box\Diamond\varphi$. Sea $x \in X$ y sea $Z \in \mathrm{Dw}(X)$ tal que $(x, Z) \in R_w$. Consideremos la valuación V definida por $V(p) = [x)$, con $p \in Var$.

Entonces $x \in V(p)$, y luego $x \in V(\Box\Diamond p)$. Así, $Z \cap V(\Diamond p) \neq \emptyset$, es decir, existe $z \in Z$ tal que $z \in V(\Diamond p)$. Se sigue que existe $Y \in \mathrm{Up}(X)$ tal que $(z, Y) \in R_u$ y $Y \subseteq V(p) = [x)$. Como R_u es monótona, $(z, [x)) \in R_u$. La otra dirección es fácil.

3. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\varphi \preceq \Box\Diamond\varphi$. Sea $x \in X$, $Y \in \mathrm{Up}(X)$, y $Z \in \mathrm{Dw}(X)$, tales que $(x, Y) \in R_u$ y $(x, Z) \in R_w$. Consideremos la valuación $V(p) = Y$. Como $(x, Y) \in R_u$ y $Y \subseteq V(p)$, tenemos $x \in V(\Diamond p)$. Así, $x \in V(\Box\Diamond p)$, y como $(x, Z) \in R_w$, $Z \cap V(\Diamond p) \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in Z$ y existe $H \in \mathrm{Up}(X)$ tales que $(z, H) \in R_u$ y $H \subseteq V(p) = Y$. Como R_u es monótona, $Y \in R_u(z)$. La otra dirección es fácil.

4. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\Box\varphi \preceq \Box\varphi$. Sea $x \in X$, $Y \in \mathrm{Up}(X)$, y $Z \in \mathrm{Dw}(X)$, tales que $(x, Y) \in R_u$ y $(x, Z) \in R_w$. Consideremos la valuación $V(p) = Z^c$. Como antes, podemos probar que existe $y \in Y$ tal que $(y, Z) \in R_w$. La otra dirección es fácil. ■

Definición 5.4.7. Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ un m-marco.

1. Diremos que un par de relaciones R_w y R_u satisfacen la condición *(d)* sii para todo $Z \in \mathrm{Dw}(X)$ y para todo $x \in X$ si $Z \notin R_w(x)$ entonces $Z^c \in R_u(x)$.

2. Diremos que un par de relaciones R_w y R_u satisfacen la condición *(d')* sii para todo $Y \in \mathrm{Up}(X)$ y para todo $x \in X$ si $Y \in R_u(x)$ entonces $Y^c \notin R_w(x)$.

Teorema 5.4.8. *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ un m-marco. Entonces*

1. *$A(\mathcal{F}) \vDash \Box\varphi \preceq \Diamond\varphi$ si y sólo si R_w y R_u satisfacen la condición (d).*

2. *$A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\varphi \preceq \Box\varphi$ si y sólo si R_w y R_u satisfacen la condición (d').*

Demostración. 1. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \Box\varphi \preceq \Diamond\varphi$. Sea $x \in X$ y $Z \in \mathrm{Dw}(X)$ tal que $(x, Z) \notin R_w$. Consideremos la valuación $V(p) = Z^c$. Tenemos $x \in V(\Box p)$. Así, $x \in V(\Diamond p)$, y entonces existe $Y \in \mathrm{Up}(X)$ tal que $(x, Y) \in R_u$ y $Y \subseteq V(p) = Z^c$. Como R_u es monótono, $Z^c \in R_u(x)$. La otra dirección es sencilla.

2. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\varphi \preceq \Box\varphi$. Sean $x \in X$ y $Y \in \mathrm{Up}(X)$ tales que $(x, Y) \in R_u$. Consideremos la valuación $V(p) = Y$. Tenemos $x \in V(\Diamond p)$. Así, $x \in V(\Box p)$, y entonces para todo $Z \in \mathrm{Dw}(X)$ tal que $(x, Z) \in R_w$, $Z \cap V(p) \neq \emptyset$, es decir, $Z \cap Y \neq \emptyset$. Por lo tanto $Y^c \notin R_w(x)$. La otra dirección es sencilla. ■

Definición 5.4.9. Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u \rangle$ un m-marco.

1. Diremos que la relación R_w satisface la condición *(c)* sii para todo $Y, Z \in \mathrm{Dw}(X)$ y para todo $x \in X$ si $(x, Y \cup Z) \in R_w$ entonces $(x, Y) \in R_w$ o $(x, Z) \in R_w$.

2. Diremos que la relación R_u satisface la condición *(c')* sii para todo $Y, Z \in \mathrm{Up}(X)$ y para todo $x \in X$ si $(x, Y) \in R_u$ y $(x, Z) \in R_u$ entonces $(x, Y \cap Z) \in R_u$.

Teorema 5.4.10. *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R_w, R_u\rangle$ un m-marco. Entonces*

1. *$A(\mathcal{F}) \vDash \Box\varphi \wedge \Box\psi \preceq \Box(\varphi \wedge \psi)$ si y sólo si R_w satisface la condición (c).*

2. *$A(\mathcal{F}) \vDash \varphi$ (es decir, si para toda valuación $V\colon Fm \to \mathrm{Up}(X)$ vale que $V(\varphi) = X$) implica que $A(\mathcal{F}) \vDash \Box\varphi$ si y sólo si para todo $x \in X$, $(x, \emptyset) \notin R_w$.*

3. *Si el lenguaje tiene $\vee$, $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond(\varphi \vee \psi) \preceq \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$ si y sólo si R_u satisface la condición (c').*

4. *Si el lenguaje tiene $\bot$, $A(\mathcal{F}) \vDash \Diamond\bot \preceq \bot$ si y sólo si para todo $x \in X$, $(x, \emptyset) \notin R_u$.*

Demostración. 1. Supongamos que $A(\mathcal{F}) \vDash \Box\varphi \wedge \Box\psi \preceq \Box(\varphi \wedge \psi)$. Sean $x \in X$ y $Y, Z \in \mathrm{Dw}(X)$ tales que $(x, Y \cup Z) \in R_w$. Consideremos la valuación $V(p) = Y^c$ y $V(q) = Z^c$. Tenemos $V(p \cap q) = (Y \cup Z)^c$. Así, $x \notin V(\Box(p \wedge q))$, y como $A(\mathcal{F}) \vDash \Box\varphi \wedge \Box\psi \preceq \Box(\varphi \wedge \psi)$ entonces $x \notin V(\Box p) \cap V(\Box q)$. Así, $x \notin V(\Box p)$ y por lo tanto $(x, Y) \in R_w$ or $x \notin V(\Box q)$ y se sigue que $(x, Z) \in R_w$.

Supongamos ahora que para todo $Y, Z \in \mathrm{Dw}(X)$ si $(x, Y \cup Z) \in R_w$ entonces $(x, Y) \in R_w$ o $(x, Z) \in R_w$. Sea $\varphi \in Fm$. Sea V una valuación sobre $\mathbf{Up}(X)$ y sea $x \in X$ tal que $x \in V(\Box\varphi) \cap V(\Box\psi)$. Sea $(x, Z) \in R_w$. Si $Z \cap V(\varphi) \cap V(\psi) = \emptyset$ entonces $Z \subseteq V(\varphi)^c \cup V(\psi)^c$ y obtenemos que $(x, V(\varphi)^c \cup V(\psi)^c) \in R_w$. Por hipótesis $(x, V(\varphi)^c) \in R_w$ or $(x, V(\psi)^c) \in R_w$. En cualquier caso obtenemos que $x \notin V(\Box\varphi) \cap V(\Box\psi)$ lo cual es una contradicción. Luego, $x \in V(\Box(\varphi \wedge \psi))$.

2. y 4. son fáciles.

3. es similar a 1. ■

5.5 Resultados de completitud

Ahora probaremos que algunas extensiones de $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$ son marco completas. Consideremos los siguientes secuentes:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{T} & \Box\varphi \vdash \varphi & \mathbf{T}\Diamond & \varphi \vdash \Diamond\varphi \\
\mathbf{5} & \Diamond\varphi \vdash \Box\Diamond\varphi & \mathbf{5}\Diamond & \Diamond\Box\varphi \vdash \Box\varphi \\
\mathbf{4} & \Box\varphi \vdash \Box^2\varphi & \mathbf{4}\Diamond & \Diamond^2\varphi \vdash \Diamond\varphi \\
\mathbf{B} & \varphi \vdash \Box\Diamond\varphi & \mathbf{B}\Diamond & \Diamond\Box\varphi \vdash \varphi \\
\mathbf{C} & \Box\varphi \wedge \Box\psi \vdash \Box(\varphi \wedge \psi) & \mathbf{C}\Diamond & \Diamond(\varphi \vee \psi) \vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi \\
\mathbf{D} & \Box\varphi \vdash \Diamond\varphi & \mathbf{D}\Diamond & \Diamond\varphi \vdash \Box\varphi
\end{array}$$

Para probar la completitud de un sistema $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K})}$, por el Teorema 5.3.8 sólo necesitaremos probar que para todo $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ tenemos que $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K}$, o que para todo $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ tenemos que $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K}$. Primero, consideremos los sistemas deductivos de la forma:

$$\begin{array}{llrcl}
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T})} & \text{donde} & \mathsf{K}\mathbf{T} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Box a \leq a]\}\,, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T}\Diamond)} & \text{donde} & \mathsf{K}\mathbf{T}\Diamond & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [a \leq \Diamond a]\}\,, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4})} & \text{donde} & \mathsf{K4} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Box a \leq \Box^2 a]\}\,, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4}\Diamond)} & \text{donde} & \mathsf{K4}\Diamond & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Diamond^2 a \leq \Diamond a]\}\,.
\end{array}$$

Proposición 5.5.1. *$\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T})}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T}\Diamond)}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4}\Diamond)}$ son extensiones de $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$. Además, para toda $\varphi \in Fm$ valen los secuentes $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T})}} \varphi$, $\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T}\Diamond)}} \Diamond\varphi$, $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4})}} \Box^2\varphi$ y $\Diamond^2\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4}\Diamond)}} \Diamond\varphi$.*

Demostración. La demostración es sencilla. ■

Teorema 5.5.2. *1. Los sistemas deductivos $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{T}\Diamond)}$ son completos con respecto a las clases de marcos $\mathcal{F}(\mathsf{K}\mathbf{T})$ y $\mathcal{F}(\mathsf{K}\mathbf{T}\Diamond)$, respectivamente.*

2. Los sistemas deductivos $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K4}\Diamond)}$ son completos con respecto a las clases de marcos $\mathfrak{F}(\mathsf{K4})$ y $\mathfrak{F}(\mathsf{K4}\Diamond)$, respectivamente.

Demostración. Utilizaremos el Teorema 5.4.4.

1. Sigue de la Observación 5.3.4.

2. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{K4}$. Probemos que $N_\Box$ es débilmente transitiva. Sea $(P, Z) \in N_\Box^2$. Entonces, existe $Y \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq \bigcup Y$ y para todo $Q \in Y$, $(Q, Z) \in N_\Box$. Probaremos que $(P, Z) \in N_\Box$, es decir, $\Box^{-1}(P) \subseteq \bigcup Z$. Sea $a \in$

$\Box^{-1}(P)$. Entonces, $\Box a \in P$ y como $\Box a \leq \Box^2 a$, obtenemos $\Box a \in \Box^{-1}(P)$. Así, existe $Q \in Y$ tal que $\Box a \in Q$. De $\Box^{-1}(Q) \subseteq \bigcup Z$ tenemos que $a \in \bigcup Z$. Por lo tanto $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K4}$.

Ahora, sea $\mathbf{A} \in \mathsf{K4}\Diamond$. Probemos que $N_\Diamond$ es débilmente transitiva. Sea $(P,Y) \in N_\Diamond^2$. Entonces, existe $Z \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ tal que $\bigcap Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ y para todo $Q \in Z$, $(Q,Y) \in N_\Diamond$. Probaremos que $(P,Y) \in N_\Diamond$, es decir, $\bigcap Y \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Sea $a \in \bigcap Y$. Por hipótesis, $\Diamond a \in Q$ para todo $Q \in Z$. Entonces, $\Diamond a \in \bigcap Z$ y luego $\Diamond^2 a \in P$. Como $\Diamond^2 a \leq \Diamond a$, obtenemos $\Diamond a \in P$, $a \in \Diamond^{-1}(P)$. Por lo tanto $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K4}\Diamond$. ∎

Consideremos los sistemas deductivos monótonos:

$$
\begin{array}{lllcl}
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB})} & \text{donde} & \mathsf{KB} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\, [a \leq \Box\Diamond a]\}, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB}\Diamond)} & \text{donde} & \mathsf{KB}\Diamond & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\, [\Diamond\Box a \leq a]\}, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5})} & \text{donde} & \mathsf{K5} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\, [\Diamond a \leq \Box\Diamond a]\}, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5}\Diamond)} & \text{donde} & \mathsf{K5}\Diamond & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\, [\Diamond\Box a \leq \Box a]\}.
\end{array}
$$

Proposición 5.5.3. *$\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB})}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB}\Diamond)}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5}\Diamond)}$ son extensiones de $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$. Además, para toda $\varphi \in Fm$ valen los secuentes $\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB})}} \Box\Diamond\varphi$, $\Diamond\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB}\Diamond)}} \varphi$, $\Diamond\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5})}} \Box\Diamond\varphi$ y $\Diamond\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5}\Diamond)}} \Box\varphi$.*

Demostración. La demostración es sencilla. ∎

Teorema 5.5.4. *1. Los sistemas deductivos $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KB}\Diamond)}$ son completos con respecto a las clases de marcos $\mathcal{F}(\mathsf{KB})$ y $\mathcal{F}(\mathsf{KB}\Diamond)$, respectivamente.*

2. Los sistemas deductivos $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K5}\Diamond)}$ son completos con respecto a las clases de marcos $\mathcal{F}(\mathsf{K5})$ y $\mathcal{F}(\mathsf{K5}\Diamond)$, respectivamente.

Demostración. Utilizaremos el Teorema 5.4.6.

1. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KB}$. Sea $P \in X(\mathbf{A})$ y $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $(P, \alpha(I)) \in R_\Box$. Probemos que existe $Q \in \alpha(I)$ tal que $(Q, [P)) \in R_\Diamond$, es decir, $P \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$. Tenemos que $\Box^{-1}(P) \cap I = \emptyset$. Probaremos que $[\Diamond(P)) \cap I = \emptyset$ donde $\Diamond(P) = \{\Diamond a : a \in P\}$. Sean $a \in P$ y $b \in I$ tales que $\Diamond a \leq b$. Entonces, $\Diamond a \in I$ y $\Box\Diamond a \in P$. Por lo tanto, $\Diamond a \in \Box^{-1}(P) \cap I$, lo cual es una contradicción. Es fácil probar que $[\Diamond(P))$ es un filtro, así existe $Q \in \alpha(I)$ tal que $[\Diamond(P)) \subseteq Q$. Se sigue que $P \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$. Por lo tanto, para todo $(P,Z) \in R_\Box$ existe $Q \in Z$ tal que $(Q,[P)) \in R_\Diamond$. Luego $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{KB}$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KB}\Diamond$ y sean $P \in X(\mathbf{A})$ y $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tales que $(P, \psi(F)) \in R_\Diamond$. Probemos que existe $Q \in \psi(F)$ tal que $(Q, (P]) \in R_\Box$. Probaremos que $F \cap (\Box(P^c)] = \emptyset$

donde $\Box(P^c) = \{\Box a : a \in P^c\}$. Supongamos que existen $a \in F$ y $b \notin P$ tales que $a \leq \Box b$. Entonces, $\Box b \in F$ y $\Diamond\Box b \notin P$, es decir, $F \nsubseteq \Diamond^{-1}(P)$ lo cual es una contradicción. Es fácil probar que $(\Box(P^c)]$ es un ideal de orden. Así, existe $Q \in \psi(F)$ tal que $Q \cap (\Box(P^c)] = \emptyset$. Se sigue que $\Box^{-1}(Q) \cap P^c = \emptyset$, es decir, $(Q, (P]) \in R_\Box$. Por lo tanto, para todo $(P, Y) \in R_\Diamond$ existe $Q \in Y$ tal que $(Q, (P]) \in R_\Box$. Luego $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{KB}\Diamond$.

2. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{K5}$. Sea $P \in X(\mathbf{A})$, $Y \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ y $Z \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$ tal que $(P, Z) \in R_\Box$ y $(P, Y) \in R_\Diamond$. Probemos que existe $Q \in Z$ tal que $(Q, Y) \in R_\Diamond$. Tenemos que existe $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \cap I = \emptyset$ y $\alpha(I) \subseteq Z$. Por otro lado, existe $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $F \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ y $\psi(F) \subseteq Y$. Probaremos que $[\Diamond(F)) \subseteq \Box^{-1}(P)$ donde $\Diamond(F) = \{\Diamond a : a \in F\}$. Sea $a \in [\Diamond(F))$ entonces existe $b \in F$ tal que $\Diamond b \leq a$. Entonces, $\Diamond b \in P$ y $\Box\Diamond b \in P$. Por lo tanto, $\Diamond b \in \Box^{-1}(P)$ y por monotonía $a \in \Box^{-1}(P)$. Es fácil probar que $[\Diamond(F))$ es un filtro y $[\Diamond(F)) \cap I = \emptyset$, así existe $Q \in \alpha(I)$ tal que $[\Diamond(F)) \subseteq Q$. Se sigue que $F \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$. Entonces, $(Q, \psi(F)) \in R_\Diamond$ y obtenemos que $(Q, Y) \in R_\Diamond$. De $Q \in \alpha(I) \subseteq Z$ obtenemos que $Q \in Z$. Por lo tanto $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K5}$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{K5}\Diamond$. Sean $P \in X(\mathbf{A})$, $Y \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ y $Z \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$ tales que $(P, Z) \in R_\Box$ y $(P, Y) \in R_\Diamond$. Probemos que existe $Q \in Y$ tal que $(Q, Z) \in R_\Box$. Tenemos que existe $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \cap I = \emptyset$ y $\alpha(I) \subseteq Z$. Por otro lado, existe $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $F \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ y $\psi(F) \subseteq Y$. Probaremos que $\Diamond^{-1}(P) \cap (\Box(I)] = \emptyset$ donde $\Box(I) = \{\Box a : a \in I\}$. Sea $a \in \Diamond^{-1}(P) \cap (\Box(I)]$ entonces existe $b \in I$ tal que $a \leq \Box b$ y $\Diamond a \in P$. Entonces, $\Diamond\Box b \in P$ y $\Box b \in P$ lo cual es una contradicción. Es fácil probar que $(\Box(I)]$ es un ideal de orden y $F \cap (\Box(I)] = \emptyset$, así existe $Q \in \psi(F)$ tal que $Q \cap (\Box(I)] = \emptyset$. Se sigue que $\Box^{-1}(Q) \cap I = \emptyset$. Entonces, $(Q, \alpha(I)) \in R_\Box$ y obtenemos $(Q, Z) \in R_\Box$. De $Q \in \psi(F) \subseteq Y$ obtenemos que $Q \in Y$. Por lo tanto $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K5}\Diamond$. ■

Sea $\mathsf{MDL}_{\Diamond,\Box}$ la clase de retículos distributivos con 1 y dos operadores modales monótonos. Consideremos los sistemas deductivos monótonos:

$$
\begin{array}{llrcl}
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD})} & \text{donde} & \mathsf{KD} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Box a \leq \Diamond a]\}, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD}\Diamond)} & \text{donde} & \mathsf{KD}\Diamond & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Diamond a \leq \Box a]\}, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC})} & \text{donde} & \mathsf{KC} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a, b \in A\ [\Box a \wedge \Box b \leq \Box(a \wedge b)]\}, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond)} & \text{donde} & \mathsf{KC}\Diamond & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDL}_{\Diamond,\Box} : \forall a, b \in A\ [\Diamond(a \vee b) \leq \Diamond a \vee \Diamond b]\}.
\end{array}
$$

Proposición 5.5.5. $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD})}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD}\Diamond)}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC})}$ *son extensiones de* $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$ *y* $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond)}$ *es una expansión. Además, para toda* $\varphi \in Fm$ *valen los secuentes* $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD})}} \Diamond\varphi$,

$\Diamond\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD}\Diamond)}} \Box\varphi$, $\Box\varphi \wedge \Box\psi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC})}} \Box(\varphi \wedge \psi)$ y, si el lenguaje tiene $\vee$, vale el secuente $\Diamond(\varphi \vee \psi) \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond)}} \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$.

Demostración. La demostración es sencilla. ■

Teorema 5.5.6. *1. Los sistemas deductivos $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KD}\Diamond)}$ son completos con respecto a las clases de marcos $\mathfrak{F}(\mathsf{KD})$ y $\mathcal{F}(\mathsf{KD}\Diamond)$, respectivamente.*

2. Los sistemas deductivos $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond)}$ son completos con respecto a las clases de marcos $\mathcal{F}(\mathsf{KC})$ y $\mathcal{F}(\mathsf{KC}\Diamond)$.

Demostración. Utilizaremos el Teorema 5.4.8 y el 5.4.10.

1. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KD}$. Sean $P \in X(\mathbf{A})$ y $Z \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$ tales que $(P, Z) \notin N_\Box$. Probemos que $(P, Z^c) \in N_\Diamond$. Sea $a \in \bigcap Z^c$. Entonces, $Z^c \subseteq \beta(a)$. Supongamos que $\Diamond a \notin P$, de $\Box a \leq \Diamond a$, obtenemos que $\Box a \notin P$. Es fácil ver que $\Box^{-1}(P) \subseteq \bigcup \beta(a)^c$, pero como $\beta(a)^c \subseteq Z$, $(P, Z) \in N_\Box$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Diamond a \in P$ y $\bigcap Z^c \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Luego $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{KD}$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KD}\Diamond$. Sean $P \in X(\mathbf{A})$ y $Y \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ tales que $(P, Y) \in R_\Diamond$. Probemos que $(P, Y^c) \notin R_\Box$. Sea $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $\psi(F) \subseteq Y$ y $F \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Supongamos que $(P, Y^c) \in R_\Box$. Entonces, existe $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $\alpha(I) \subseteq Y^c$ y $\Box^{-1}(P) \cap I = \emptyset$. De $\Diamond a \leq \Box a$ para todo $a \in A$ obtenemos que $\Diamond^{-1}(P) \subseteq \Box^{-1}(P)$. Así, $F \cap I = \emptyset$. Por lo tanto existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $Q \in \psi(F) \subseteq Y$ y $Q \in \alpha(I) \subseteq Y^c$, lo cual es una contradicción. Luego, $(P, Y^c) \notin R_\Box$ y $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{KD}\Diamond$.

2. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KC}$. Sean $P \in X(\mathbf{A})$ y $Y, Z \in \mathrm{Dw}(X(\mathbf{A}))$ tales que $(P, Y \cup Z) \in R_\Box$. Así, existe $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ tal que $\alpha(I) \subseteq Y \cup Z$ y $\Box^{-1}(P) \cap I = \emptyset$. Como $\mathbf{A} \in \mathsf{KC}$, $\Box^{-1}(P) \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ y entonces existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y $Q \in \alpha(I)$. Luego, $Q \in Y$ ó $Q \in Z$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $Q \in Y$. Entonces, $(Q] \subseteq Y$ y como $\Box^{-1}(P) \cap Q^c = \emptyset$, $(P, (Q]) \in R_\Box$. Por lo tanto $Y \in R_\Box(P)$. Luego $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{KC}$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KC}\Diamond$. Sean $P \in X(\mathbf{A})$ y $Y, Z \in \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ tales que $(P, Y \cap Z) \in R_\Diamond$. Así, existe $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ tal que $\psi(F) \subseteq Y \cap Z$ and $F \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Como $\mathbf{A} \in \mathsf{KC}\Diamond$, $\Diamond^{-1}(P)^c \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ y entonces existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $F \subseteq Q$ y $Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Luego, $Q \in Y$ y $Q \in Z$. Entonces, $[Q) \subseteq Y$, $[Q) \subseteq Z$ y como $Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, $(P, [Q)) \in R_\Diamond$. Por lo tanto $Y \in R_\Diamond(P)$ y $Z \in R_\Diamond(P)$. Luego $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{KC}\Diamond$. ■

También podemos combinar los secuentes. Consideremos, por ejemplo, los siguientes sistemas deductivos monótonos

$$\begin{array}{llrcl}
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{S4})} & \text{donde} & \mathsf{K}\mathbf{S4} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Box a \leq a] \text{ y } [\Box a \leq \Box^2 a]\}\,, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{D4})} & \text{donde} & \mathsf{K}\mathbf{D4} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Box a \leq \Box^2 a] \text{ y } [\Box a \leq \Diamond a]\}\,, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{TB})} & \text{donde} & \mathsf{K}\mathbf{TB} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box} : \forall a \in A\ [\Box a \leq a] \text{ y } [a \leq \Box\Diamond a]\}\,, \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{CN})} & \text{donde} & \mathsf{K}\mathbf{CN} & = & \{\mathbf{A} \in \mathsf{KC} : \Box 1^{\mathbf{A}} = 1^{\mathbf{A}}\} \\
\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P})} & \text{donde} & \mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P} & = & \left\{\mathbf{A} \in \mathsf{KC}\Diamond : \Diamond 0^{\mathbf{A}} = 0^{\mathbf{A}}\right\}.
\end{array}$$

Proposición 5.5.7. *$\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{S4})}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{D4})}$, $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{TB})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{CN})}$ son extensiones de $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{MDS}_{\Diamond,\Box})}$ y $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P})}$ es una expansión.*

Además, para toda $\varphi \in Fm$ valen los secuentes $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{S4})}} \varphi$, $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{S4})}} \Box^2\varphi$, $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{D4})}} \Box^2\varphi$, $\Box\varphi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{D4})}} \Diamond\varphi$, $\Box\varphi \wedge \Box\psi \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{CN})}} \Box(\varphi \wedge \psi)$ y si $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{CN})}} \varphi$ entonces $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{CN})}} \Box\varphi$. Si el lenguaje tiene $\vee$ y $\perp$, $\Diamond(\varphi \vee \psi) \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P})}} \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$ y $\Diamond(\perp) \vdash_{\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P})}} \perp$.

Demostración. La demostración es sencilla. ■

Corolario 5.5.8. *1. El sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{S4})}$ es completo con respecto a la clase $\mathfrak{F}(\mathsf{K}\mathbf{S4})$,*

2. El sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{D4})}$ es completo con respecto a la clase $\mathfrak{F}(\mathsf{K}\mathbf{D4})$,

3. El sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{TB})}$ es completo con respecto a la clase $\mathcal{F}(\mathsf{K}\mathbf{TB})$,

4. El sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{K}\mathbf{CN})}$ es completo con respecto a la clase $\mathcal{F}(\mathsf{K}\mathbf{CN})$,

5. El sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathsf{V}(\mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P})}$ es completo con respecto a la clase $\mathcal{F}(\mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P})$.

Demostración.

1. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{K}\mathbf{S4}$. Sea $P \in X(\mathbf{A})$, probemos que $(P, (P]) \in N_\Box$, es decir, $\Box^{-1}(P) \subseteq \bigcup(P] = P$. Sea $a \in \Box^{-1}(P)$ entonces, $\Box a \in P$ y como $\Box a \leq a$, $a \in P$. El resto de la prueba se sigue del Teorema 5.5.2. Por lo tanto $A(\mathfrak{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K}\mathbf{S4}$.

2. Se sigue del Teorema 5.5.6 y del Teorema 5.5.2.

3. Se sigue del Teorema 5.5.2 y del Teorema 5.5.4.

4. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{K}\mathbf{CN}$. La primera parte sigue de 5.5.6. Sea $P \in X(\mathbf{A})$ y supongamos que $(P, \emptyset) \in R_\Box$. Entonces, $\Box^{-1}(P) \cap A = \emptyset$, es decir, $\Box^{-1}(P) = \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que $\Box 1 = 1$, $1 \in \Box^{-1}(P)$. Luego $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K}\mathbf{CN}$.

5. Sea $\mathbf{A} \in \mathsf{KC}\Diamond\mathbf{P}$. La primera parte se sigue de 5.5.6. Sea $P \in X(\mathbf{A})$ y supongamos que $(P, \emptyset) \in R_\Diamond$. Entonces, $A \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, es decir, $\Diamond 0 = 0 \in P$ lo cual es una

contradicción. Luego $A(\mathcal{F}(\mathbf{A})) \in \mathsf{K}\mathbf{C}\Diamond\mathbf{P}$. ■

Capítulo 6

Consideraciones generales y trabajos futuros

En la primer parte de esta tesis hemos desarrollado una dualidad topológica para los semirretículos distributivos con operadores modales monótonos, utilizando la extensión canónica. Un camino natural a seguir es estudiar una dualidad topológica para los semirretículos sin necesidad de pedirle la condición de distributividad. Los semirretículos con operadores monótonos conforman una variedad, de la que sería interesante estudiar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles, las congruencias y las subálgebras. También, queda estudiar la relación entre la dualidad de Priestley dada para semirretículos con operadores adicionales y la presentada en este trabajo.

En la segunda parte de la tesis hemos estudiado una aplicación de dualidad para la lógica. En este trabajo sólo hemos considerado la consecuencia local dada por los marcos. En el futuro sería interesante analizar y trabajar con la consecuencia global.

También pretendemos aplicar los resultados estudiados a las logicas Concurrentes no-clásicas. Las Lógicas Concurrentes nacieron como una extensión de las Lógicas Dinámicas. Una característica importante de la lógica **CPDL** (Concurrent propositional dynamic logic) es que combina operadores modales monótonos con operadores modales normales. Esto ofrece una gran riqueza pues permite modelar muchas situaciones computacionales. Queda como problema abierto estudiar una representación coalgebraica de un fragmento de **CPDL** partiendo del artículo [47] sobre representación coalgebraica de las lógicas modales normales, y los trabajos [32] y [33] sobre representación coalgebraica para las lógicas modales monotónas.

La noción de bisimulación definida en [1] y en [32] para las lógicas monótonas no son suficientes para las lógicas concurrentes, ya que estas cuentan con un operador modal normal $\Box$ además del operador monótono ∇. Por lo tanto surge la necesidad de buscar una noción adecuada de bisimulación para las lógicas concurrentes. A partir de contar con una definición adecuada se puede estudiar problemas de saturación, extensiones por filtros primos y caracterizaciones de las clases de Hennessy-Milner maximales.

Bibliografía

[1] Areces, C., Figueira, D.: Which Semantics for Neighbourhood Semantics?. IJCAI'09 AAAI Press. (2009), pp. 671-676.

[2] Balbes R., Dwinger P.: Distributive Lattices, University of Missouri Press, Columbia, MO, (1974).

[3] Bezhanishvili, G.: Varieties of Monadic Heyting Algebras. Part I. Studia Logica. (1998) 61 (3), pp. 367–402.

[4] Bezhanishvili, G., Jansana, R.: Duality for distributive and implicative semilattices. Preprints of University of Barcelona Research Group in Non-Classical Logics. http://www.mat.ub.edu/ logica/docs/BeJa08-m.pdf, (2008).

[5] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y.: Modal Logic. Cambridge University Press, (2001).

[6] Blackburn, P., van Benthem J., Wolter, F.: Handbook of modal logic. Vol. 3. Elsevier, (2006).

[7] Burris S., Sankappanavar H.: A course in Universal Algebra. Springer Verlag, New York, (1981).

[8] Celani S.: Representation of Hilbert algebras and Implicative Semilattices. Central European Journal of Mathematics. (2003) 1 (4), pp. 561–572.

[9] Celani, S.: Topological representation of distributive semilattices. Sci. Math. Japonicae Online. (2003) 8, pp. 41–51.

[10] Celani, S.: Monotonic modal logics related to the Von Wright's logic of place. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. (2008) 66 (1), pp. 59–74.

[11] Celani, S.; Saturated neighbourhood models of monotonic modal logics, Revista de la Unión Matemática Argentina. (2008) 49 (1), pp. 111–121.

[12] Celani, S.: Topological duality for boolean algebras with a normal n-ary monotonic operator. Order. (2009) 26 (1), pp. 49–67.

[13] Celani, S., Calomino, I.: Some remarks on distributive semilattices. Comment. Math. Univ. Carolin. (2013) 54 (3), pp. 407–428.

[14] Celani, S., Menchón, P.: Remarks on general monotonic neighbourhood frames. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. (2015) 25 (4-5), pp. 379 – 398.

[15] Celani, S., Menchón, P.: Monotonic Distributive Semilattices. Order, (2018). https://doi.org/10.1007/s11083-018-9477-0.

[16] Chagrov, A., Zakharyaschev, M.: Modal Logic. Volumen 35 of Oxford Logic Guides, New York, (1997).

[17] Chajda, I., Hala, R., Kühr, J.: Semilattice Structures. Volume 30 of Research and Exposition in Mathematics. Heldermann Verlag, (2007).

[18] Chellas, B.: Modal Logic: an introduction. Cambridge Univ. Press, (1980).

[19] Dunn, J.M.: Positive modal logic, Studia Logica. (1995) 55 (2), pp. 301–317.

[20] Dunn, J.M., Gehrke, M., Palmigiano, A.: Canonical extensions and relational completeness of some substructural logics. J. Symbolic Logic. (2005) 70 (3), pp. 713–740.

[21] Düntsch, I., Orlowska, E., Rewitzky, I.: Structures with multirelations, their discrete dualities and applications. Fundamenta Informaticae. (2010) 100, pp. 77–98.

[22] Gehrke, M.: Canonical extensions, Esakia spaces, and universal models. In: Bezhanishvili, G. (eds) Outstanding Contributions to Logic, volume 4, pp. 9–41. Springer Netherlands, (2014).

[23] Gehrke, M., Jónsson, B.: Monotone bounded distributive lattice expansions. Math Japonica. (2000) 52, pp. 197–213.

[24] Gehrke, M., Jónsson, B.: Bounded distributive lattice expansions, Mathematica Scandinavica. (2004) 94 (1), pp. 13–45.

[25] Goldblatt R.: Topoi: the categorial analysis of logic. Elsevier, (1984).

[26] Goldblatt, R.: Logics of Time and Computation. Volume 7 of Lecture Notes. CSLI Publications, second edition, (1992).

[27] Goldblatt, R.: Mathematics of Modality, CSLI Lectures Notes 43, (1993).

[28] Goldblatt, R.: Saturation and the Hennessy-Milner Property. In Modal Logic and Process Algebra, edited by Alban Ponse, Maarten de Rijke, and YdeVenema. CSLI Lecture Notes No. 53, Stanford: CSLI Publications. (1995), pp. 107–129.

[29] Goubault-Larrecq, J.: Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology (New Mathematical Monographs). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139524438, (2013).

[30] Grätzer, G.: General lattice theory. Academic Press. Birkhäuser Verlag, (1978).

[31] Hansen, H.H.: Monotonic modal logic (Master's thesis). Preprint 2003-24, ILLC, University of Amsterdam, (2003).

[32] Hansen, H.H., Kupke, C.: A Coalgebraic Perspective on Monotone Modal Logic. Electronic Notes in Theoretical Computer Science. (2004) 106, pp. 121–143.

[33] Hansen, H.H., Kupke, C., Pacuit, E.: Neighbourhood structures: Bisimilarity and basic model theory. Logical Methods in Computer Science. (2009) 5 (2), pp. 1–38.

[34] Hollenberg, M.J.: Hennessey-Milner Classes and Process Algebra. In M. de Rijke A. Ponse and Y. Venema, editors, Modal Logic and Process Algebra: a Bisimulation Perspective, volume 53 of CSLI Lecture Notes, pp. 187–216. CSLI Publications, (1995).

[35] Jansana, R.: Some logics related to Von Wright's logic of place. Notre Dame J. of Formal logic. (1994) 35 (1), pp. 88–98.

[36] Jansana, R.: Selfextensional Logics with a Conjunction. Studia Logica. (2006) 84 (1), pp. 63–104.

[37] Jansana, R.: Algebraizable logics with a strong conjunction and their semilattice based companions. Archive for Mathematical Logic. (2012) 1 (7), pp. 831–861.

[38] Jaspars, J.: Fused modal logic and inconsistent belief. Proceedings of the First World Conference on the Fundamentals of AI, M. de Glas and D. M. Gabbay eds. Angkor Pub. Company, Paris. (1991), pp. 267–275.

[39] Jaspars, J.: Logical omniscience and inconsistent belief. In Diamonds and Defaults, M.de Rijke (ed.), Springer. (1993), pp.129–146.

[40] Jonsson, B., Tarski, A.: Boolean Algebras with Operators. Part I. American Journal of Mathematics. (1951) 73 (4), pp. 891–939.

[41] Jonsson, B., Tarski, A.: Boolean algebras with operators, II, Amer. J. Math. (1952) 74, pp. 127-162.

[42] Kojima, K.: Relational and neighborhood semantics for intuitionistic modal logic. Reports on Math. Logic. (2012) 47, pp. 87–113.

[43] Koppelberg, S.: Topological duality. Handbook of Boolean algebras, Vol. 1 (J. D. Monk and R. Bonnet, eds), North-Holland, Amsterdan-New York-Oxford-Tokyo, (1989), pp. 95–126.

[44] Kripke, S.: A completeness theorem in modal logic. Journal of Symbolic Logic. (1959) 24, pp. 1–14.

[45] Kripke, S.: Semantic analysis of modal logic I, normal propositional calculi. Zeitschrift für mathemathische Logik und Grundlagen der Mathematik. (1963) 9, pp. 67–96.

[46] Kripke, S.: Semantical considerations on modal logic. Acta Philosophica Fennica. (1963) 16, pp. 83–94.

[47] Kupke, C., Kurz, A., Venema, Y.: Stone coalgebras. Theoretical Computer Science. (2004) 327 (1-2), pp. 109–134.

[48] Michael, E.: Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. (1951) 71, pp. 152–182.

[49] Munkres, J.: Topología. Massachusetts Institute of Techology, (2000).

[50] Pacuit, E.: Neighborhood semantics for modal logic. Springer international Publishing, (2017).

[51] Picado, J., Pultr, A.: Frames and Locales: topology without points. Springer Science and Business Media, (2011).

[52] Rewitzky, I.: Binary multirelations. In: de Swart, H. , Orłowska, E., Schmidt, G., Roubens, M. (eds) Theory and Application of Relational Structures as Knowledge Instruments, (2003) Vol. 2929, pp. 259–274. Spinger-Verlag.

[53] Santocanale, L., Venema, Y.: Uniform interpolation for monotone modal logic, L. Beklemishev et alii (eds.), Advances in Modal Logic, Vol. 8, College Publications. (2010), pp. 350-370.

[54] Segerberg, K.: An Essay in Classical Modal Logic. Number 13 in Filosofiska Studier. Uppsala Universitet, (1971).

[55] Segerberg, K.: A note on the logic of elsehrere, Theoria. (1980) 46, pp. 183–187.

[56] Sotirov, V.H.: Modal theories with intuitionistic logic. In Mathematical Logic, Proceedings of the Conference on Mathematical Logic, Dedicated to the Memory of A. A. Markov (1903-1979), Sofia, September 22-23, 1980, pp. 139–171, Sofia (1984).

[57] Stone M.: The theory of representations for a Boolean algebra. Trans. Amer. Math. Soc. (1936) 40, pp. 37–111.

[58] Stone M.: Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics. Casopis pe$\hat{s}$t. mat. fys. (1937) 67, pp. 1–25.