

# **INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS**

**Raúl Edgardo Rossi**

**Ingeniero Civil**

**Profesor Titular Consulto**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

**Instituto de Mecánica Aplicada (IMA)**

**Departamento de Ingeniería**



# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## Prólogo del autor

En esta publicación el autor recopila las notas preparadas para el dictado de un curso teórico-práctico de posgrado en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, sobre análisis dinámico de sistemas mecánicos continuos elásticos lineales, mediante el método numérico de elementos finitos. Dicho curso forma parte, con carácter opcional, del plan de estudios para títulos académicos de Magíster y Doctor en Ingeniería.

El libro se desarrolla en ocho capítulos. En el primero se dan los conceptos básicos del análisis dinámico estructural, y se estudia la solución analítica del sistema discreto de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso, y por rozamiento. Luego se estudian los distintos planteos de las ecuaciones del movimiento, especialmente en sistemas discretos (principio de D'Alembert, de los Desplazamientos Virtuales, de Hamilton, ecuaciones de Lagrange).

El segundo capítulo trata los conceptos básicos del análisis de vibraciones libres de sistemas discretos: ecuación característica, ortogonalidad y normalización de autovectores, transformaciones de la ecuación matricial, y algunos métodos numéricos de cálculo de autovalores y autovectores, con una completa descripción de los algoritmos utilizados en los códigos de computación. Es conveniente aclarar que no se ha pretendido dar demostraciones rigurosas de todos los aspectos fundamentales, sino más bien mostrar aquellas propiedades que signifiquen un aporte para las técnicas de aplicación. Estos dos primeros capítulos han sido incluidos para alumnos que carecen de suficientes conocimientos de las técnicas del análisis dinámico, y su lectura podrá ser obviada por los que ya han tomado algún curso sobre este tema.

En el tercer capítulo se deducen las funciones de energía de diversos elementos estructurales continuos, haciendo uso del principio de Hamilton. Primero para los casos unidimensionales: uniaxial, torsional, flexional en vigas de gran esbeltez (teoría de Bernoulli-Euler) y de pequeña esbeltez (teoría de Rayleigh-Timoshenko). Luego para los bidimensionales: estado plano de tensiones o deformaciones, placas delgadas (teoría de Germain-Kirchhoff) y moderadamente gruesas (teoría de Reissner-Mindlin).

En el cuarto capítulo se presenta el método de los elementos finitos, que es introducido como una modificación de la técnica de Rayleigh-Ritz, y mediante el

planteo de las ecuaciones matriciales del movimiento con las ecuaciones de Lagrange.

En el capítulo quinto se describen los elementos finitos de uso más difundido en problemas de vibraciones longitudinales, torsionales, y flexionales (vigas).

Los algoritmos para reticulados planos y espaciales, entramados planos, emparrillados y entramados espaciales de barras rectas, se estudian en el capítulo sexto.

En el capítulo séptimo se describen diversos elementos finitos para el análisis de vibraciones libres de modelos continuos bidimensionales (estados planos de tensiones y deformaciones).

Finalmente, en el capítulo octavo se presentan elementos finitos para vibraciones flexionales en placas delgadas y moderadamente gruesas.

La mayoría de los algoritmos se describen en forma detallada, y se aplican en diversos ejemplos de interés práctico. En muchos casos, los resultados numéricos son mostrados en tablas, y se comparan con soluciones exactas, cuando éstas son conocidas, o con otras soluciones aproximadas.

Para el desarrollo del curso se ha tomado como principal referencia el libro "*Introduction to Finite Element Vibration Analysis*" de Maurice Petyt [15], investigador del Institute of Sound and Vibration Research (Inglaterra). Además se han consultado varias obras de otros autores, incluidas en la lista de referencias bibliográficas al final del libro, o bien como notas de pie de página. En este primer curso básico sólo se estudia el método de elementos finitos aplicado a la determinación de modos y frecuencias naturales de diversos sistemas mecánicos sin amortiguamiento, haciendo uso de los elementos que se describen, y con programas de computación desarrollados por el autor para ser utilizados en las clases prácticas del curso. En el Apéndice se amplía la información sobre las principales características de dichos programas. Con el libro se entrega un disco compacto (CD-ROM) con los módulos ejecutables, las instrucciones para su uso en archivos de texto (TXT y RTF), y otros programas auxiliares.

**El autor advierte sobre el carácter docente de esta publicación, y deja constancia de que no asume ninguna responsabilidad sobre las consecuencias de la aplicación de los programas de computación en trabajos profesionales o científicos, responsabilidad que recae exclusivamente en el usuario.**

## **Agradecimientos**

El autor agradece el auspicio de la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, a través de un subsidio otorgado al Proyecto Consolidado " Investigaciones Básicas y Aplicadas en Mecánica del Sólido ", en la actualidad dirigido por la Dra. Ing. Diana V. Bambill.

También deja constancia de la valiosa colaboración de los Ings. Santiago Maiz y Antonio Susca, ambos becarios del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET) y tesistas en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, quienes participaron en la edición final del CD-ROM.

Finalmente, desea expresar su gratitud a los profesores del Área Estabilidad del Departamento de Ingeniería, por su permanente estímulo y apoyo, especialmente al recientemente fallecido Profesor Emérito Dr. Ing. Patricio A. A. Laura. Como homenaje, el autor dedica esta obra a su memoria.

Marzo 2007



# INTRODUCCION AL ANALISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## INDICE TEMÁTICO

### 1 CONCEPTOS BASICOS Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

1.1	Introducción	1
1.2	Sistema discreto de un grado de libertad	3
1.3	Amortiguamiento por rozamiento	10
1.4	Ecuaciones del movimiento	14
1.4.1	Equilibrio dinámico	14
1.4.2	Principio de los desplazamientos virtuales	18
1.5	Principio de Hamilton	21
1.6	Ecuaciones de Lagrange	24
1.7	Expresión matricial de las ecuaciones de Lagrange	29
1.8	Ecuaciones del movimiento en sistemas con restricciones lineales	30

### 2 ANALISIS DE VIBRACIONES DE SISTEMA DISCRETOS

2.1	Introducción	35
2.2	Determinación directa de frecuencias y modos naturales	37
2.3	Ortogonalidad y normalización	45
2.3.1	Propiedad de ortogonalidad	45
2.3.2	Normalización	46
2.4	Potencia en los modos naturales normalizados	49
2.5	Transformaciones de la ecuación matricial de vibraciones libres	50
2.6	Cálculo de autovalores y autovectores	53
2.6.1	Determinación mediante transformaciones ortogonales	53
2.6.2	Método iterativo de Vianello-Stodola-Bodewig	57
2.6.3	Método de iteración inversa	65

### 3 FUNCIONES DE ENERGIA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

3.1	Introducción	69
3.2	Elemento uniaxial	73
3.3	Elemento torsional	76
3.4	Elementos de vigas	78
3.4.1	Viga Bernoulli-Euler	79
3.4.2	Viga Timoshenko	81
3.5	Elementos bidimensionales	84

3.5.1	Estado plano de tensiones	85
3.5.2	Estado plano de deformaciones	88
3.6	Elementos de placas	89
3.6.1	Flexión de placas delgadas	89
3.6.2	Flexión de placas moderadamente gruesas	91

#### **4 EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS**

4.1	Introducción	93
4.2	Método de Rayleigh-Ritz	93
4.3	Método de elementos finitos	101

#### **5 VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS**

5.1	Vibraciones longitudinales	103
5.1.1	Elemento de dos nodos	103
5.1.2	Elemento de tres nodos	111
5.1.3	Elemento de cuatro nodos	113
5.1.4	Integración numérica	116
5.2	Vibraciones torsionales	117
5.3	Vibraciones transversales (vigas)	119
5.3.1	Elemento Bernoulli-Euler de dos nodos	119
5.3.2	Elemento Bernoulli-Euler de tres nodos	122
5.3.3	Elemento Timoshenko lineal-lineal de dos nodos	124
5.3.4	Elemento Timoshenko lineal-cuadrático de dos y tres nodos	128
5.3.5	Elemento Timoshenko cuadrático-cuadrático de tres nodos	129
5.3.6	Elemento Timoshenko cúbico-cuadrático de dos nodos	131

#### **6 VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS**

6.1	Introducción	135
6.2	Reticulados planos	136
6.3	Reticulados espaciales	139
6.4	Entramados planos	141
6.5	Emparrillados	149
6.6	Entramados espaciales	151
6.6.1	Introducción	151
6.6.2	Desarrollo del algoritmo	152

## **7 VIBRACIONES DE MODELOS PLANOS CONTINUOS**

7.1	Introducción	161
7.2	Triángulo de tres nodos	163
7.3	Rectángulo de cuatro nodos	171
7.4	Cuadrilátero de cuatro nodos	176
7.5	Rectángulo de ocho nodos	182
7.6	Cuadrilátero subparamétrico de ocho nodos	184
7.7	Cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos	184
7.8	Triángulo subparamétrico de seis nodos	185
7.9	Triángulo isoparamétrico de seis nodos	188

## **8 VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS**

8.1	Introducción	191
8.2	Placas delgadas	191
8.2.1	Algoritmo general	191
8.2.2	Rectángulo conforme de doce grados de libertad	195
8.2.3	Rectángulo no conforme de doce grados de libertad	200
8.2.4	Rectángulo conforme de dieciséis grados de libertad	202
8.2.5	Cuadrilátero conforme de dieciséis grados de libertad	204
8.2.6	Triángulos de nueve grados de libertad	207
8.2.7	Cuadriláteros de doce grados de libertad	210
8.3	Placas moderadamente gruesas	211
8.3.1	Triángulo conforme de nueve grados de libertad	211
8.3.2	Rectángulo conforme de doce grados de libertad	216

## **APÉNDICE: PROGRAMAS DE COMPUTACIÓN**

A.1:	CARACTERÍSTICAS GENERALES	221
A.2:	ORGANIZACIÓN DE LOS ARCHIVOS EN EL CD-ROM	225
A.3:	UN EJEMPLO DE APLICACIÓN	229
A.4:	CÓDIGOS DE ERRORES	232
A.5:	PROGRAMAS COMPILADOS CON QUICKBASIC (MS-DOS)	233
A.6:	PROGRAMAS COMPILADOS CON VISUAL BASIC (WINDOWS)	234

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>235</b>
--------------------------	------------

<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>238</b>
-----------------------------------	------------

# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 1. CONCEPTOS BÁSICOS

### 1.1. Introducción

Cuando las fuerzas externas que actúan sobre una estructura no se aplican lenta y gradualmente, se producen efectos de carácter dinámico. En este tipo de problemas además de las propiedades elásticas del material, intervienen la inercia y amortiguamientos de diversos tipos.

En el análisis estructural se presentan situaciones en las que el carácter dinámico de las cargas debería ser tomado en cuenta: fuerzas variables generadas por máquinas con piezas en movimiento rotativo o alternativo, fuerzas móviles en estructuras de puentes, fuerzas impulsivas producidas por ráfagas (viento o explosiones), fuerzas inerciales debidas al movimiento oscilatorio de los vínculos de la estructura (movimientos sísmicos), etc.

Antes de formular el problema del análisis dinámico, es conveniente destacar algunos aspectos importantes desde un punto de vista conceptual. Imagínese un cuerpo libre inicialmente en reposo. En estas condiciones recibe un impacto mediante la aplicación, en forma instantánea, de una fuerza concentrada en un punto del contorno cuya recta de acción contiene al centro de masa del sólido, y cuya intensidad se mantiene constante. Si el cuerpo fuera totalmente rígido todos sus puntos adquirirían simultáneamente una aceleración (de acuerdo con la segunda ley de Newton, igual al cociente entre la intensidad de la fuerza aplicada y la masa del cuerpo). Cuando el sólido es deformable se producen desplazamientos relativos entre sus partículas. No todos los puntos inician el movimiento al mismo tiempo; es evidente que los situados más cerca del punto de aplicación de la carga de impacto se ponen en movimiento antes que los ubicados más lejos. Vale decir que, en un instante dado, se han generado deformaciones (y tensiones) en una región contigua al punto de aplicación de la fuerza, permaneciendo aún indeformado el resto del cuerpo. En un instante posterior el movimiento se habrá propagado a otros puntos, ampliándose la región deformada. Al cabo de un muy breve lapso, desde el instante inicial del impacto, todos los puntos del cuerpo habrán iniciado su movimiento. Sin necesidad de avanzar más en la descripción del fenómeno dinámico, sumamente complejo, la primera conclusión es que en un cuerpo sujeto a cargas dinámicas las deformaciones se propagan con velocidad finita. Con un análisis cuantitativo de este fenómeno de propagación en el caso más simple de una barra elástica sujeta a una carga dinámica en la dirección del eje (estado uniaxial de tensiones) se comprueba que la velocidad de propagación es  $\sqrt{E/\rho}$ , donde  $E$  es el módulo de Young y  $\rho$  la densidad del material. Por ejemplo, en una barra de acero ( $E \cong 206 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho \cong 7850 \text{ kg/m}^3$ ) la velocidad de propagación es 5,12 Km/s. En una barra de hormigón ( $E \cong 20 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho \cong 2200 \text{ kg/m}^3$ ) aproximadamente 3 Km/s.

Si el cuerpo se encuentra vinculado en forma estable y es totalmente rígido, al aplicar la carga de impacto se producen instantáneamente las reacciones de vínculo, que en todo momento forman un sistema en

## CONCEPTOS BÁSICOS

equilibrio con la fuerza externa activa. En realidad, las reacciones varían con el tiempo si el cuerpo es deformable, ya que los enlaces comienzan a reaccionar recién cuando la onda de deformación los alcanza, después de una breve fracción de tiempo desde el instante de aplicación de la fuerza externa. Mientras las deformaciones del cuerpo varíen con el tiempo, también lo harán las reacciones.

Es evidente que un análisis riguroso y completo de las deformaciones dinámicas de un sólido elástico es de una gran complejidad. En la mayoría de los problemas de la ingeniería, y en especial con estructuras elásticas con cargas dinámicas, no es necesario considerar la propagación de las ondas de deformación. La solución de tales problemas se simplifica asumiendo que se producen oscilaciones de la estructura completa. En otras palabras, los problemas de vibraciones de las estructuras pueden ser resueltos con métodos en los que no interviene la teoría de propagación de ondas ya que se asume que con las cargas no se producen deformaciones localizadas que se propagan a través de la estructura, sino que se produce una deformación simultánea de la misma, variable en el tiempo [1,7,19]. Por otra parte, el fenómeno de amortiguamiento, presente en todos los casos reales produciendo una disipación de energía que se traduce en una paulatina disminución de las deformaciones, complica más aún el estudio riguroso del problema. Debido al amortiguamiento, al cabo de un cierto lapso desde el instante del impacto, todos los puntos del sólido vinculado habrán detenido su movimiento, alcanzado la correspondiente configuración deformada y en equilibrio. Dicho intervalo de tiempo puede llegar a ser muy prolongado, dependiendo de la intensidad y naturaleza del amortiguamiento, ya que en una estructura el amortiguamiento se produce por diversos motivos. En parte es debido a la fricción interna molecular del material. Otra causa es el rozamiento entre superficies de contacto en las uniones de los elementos que componen la estructura. También se produce como consecuencia del aire (u otro fluido) que rodea a la estructura. En todos los casos se generan fuerzas opuestas al movimiento, y por ello las amplitudes de los desplazamientos disminuyen con el tiempo. Cada tipo de amortiguamiento requeriría una formulación distinta, de acuerdo con las diferentes características del efecto que produce. Sin embargo, en los modelos dinámicos de estructuras es usual representar el efecto de todas las fuerzas disipativas mediante un amortiguamiento exclusivamente viscoso, donde la fuerza opuesta al desplazamiento es proporcional a la velocidad, asumiendo además que el coeficiente de proporcionalidad permanece constante. Esta hipótesis simplificativa conduce a resultados razonablemente aceptables con modelos matemáticos, apenas con un poco más de complejidad que aquellos donde no se hace intervenir el amortiguamiento.

Otra importante hipótesis de la dinámica elemental de un sólido elástico es que las ecuaciones constitutivas son independientes del tiempo. Vale decir que las relaciones entre tensiones y deformaciones son las mismas que en el caso estático. Con esta hipótesis, el análisis dinámico se limita a determinar los desplazamientos variables en el tiempo. Con ellos se calculan los esfuerzos del mismo modo que en un problema estático.

Con respecto a la variación de la carga con el transcurso del tiempo, cabe distinguir un caso particular de gran interés práctico que se presenta cuando la carga, a partir de un instante, permanece invariable.

Una estructura idealmente elástica sin amortiguamiento continúa vibrando indefinidamente, oscilando con amplitud constante alrededor de la configuración de equilibrio estático. El tiempo ( $T$ ) que demanda un ciclo completo de oscilación se denomina período natural de la estructura. Su inversa ( $f$ ) es el número de ciclos por unidad de tiempo y se denomina frecuencia natural ( $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia circular o angular). En este caso se dice que la vibración es libre, mientras que la provocada por cargas variables se denomina vibración forzada, en la cual se produce un intercambio de energía ente la carga y la estructura.

Si en la estructura elástica existe amortiguamiento viscoso, al cesar la variación de la carga (excitación) también continúa vibrando indefinidamente pero con amplitud de oscilación decreciente, tendiendo asintóticamente a la configuración de equilibrio estático, con una frecuencia angular ( $\omega_a$ ) distinta a la del mismo modelo sin amortiguamiento.

Una característica importante de las vibraciones libres es que solamente la amplitud del movimiento oscilatorio depende del valor de la carga; las frecuencias naturales son independientes de las condiciones iniciales (en el instante a partir del cual la carga permanece invariable). Por consiguiente, las frecuencias naturales, que dependen de las propiedades elásticas, inerciales y del amortiguamiento, son parámetros característicos del comportamiento dinámico de la estructura. La unidad de medida de las frecuencias se denomina Herz (Hz = ciclo/seg).

Un sólido continuo en realidad tiene infinitas frecuencias naturales, cada una asociada con un modo particular de vibración. La frecuencia de menor valor, que corresponde al modo más simple (con menor energía de deformación) se llama frecuencia fundamental. Es usual el empleo de este parámetro de la estructura para decidir cuándo deja de ser importante el efecto dinámico de una carga. Por ejemplo, en el caso de una fuerza cuya intensidad aumenta con velocidad constante desde cero hasta un valor que luego permanece invariable, el efecto dinámico es prácticamente despreciable si el tiempo insumido durante el incremento de la carga es mayor que tres veces el período fundamental [2].

Por último, la solución de un problema de dinámica estructural puede obtenerse en forma aproximada, discretizando el modelo continuo y aplicando las técnicas de los métodos matriciales.

## 1.2 Sistema discreto de un grado de libertad

Las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico pueden ser escritas usando la segunda ley de Newton, la cual establece que la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de una masa es igual a la fuerza que actúa sobre la misma. Consideremos una masa  $m$  cuya posición cambia al experimentar un desplazamiento  $u(t)$  cuando recibe la acción de una fuerza  $f(t)$ , ambos en función del tiempo  $t$ . La segunda ley de Newton se expresa:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{du}{dt} \right) = f$$

CONCEPTOS BÁSICOS

Asumiendo masa constante, la ecuación se escribe:  $m \frac{d^2u}{dt^2} = f$

La misma puede ponerse en la forma:  $m\ddot{u} = f$

donde cada punto denota derivada con respecto al tiempo. Finalmente, la ecuación puede ser escrita en la forma

$$f - m\ddot{u} = 0 \tag{1.1}$$

El término  $-m\ddot{u}$  puede ser considerado como una fuerza externa, de modo que la ecuación (1.1) representa una condición de equilibrio al expresar la nulidad de la suma de las fuerzas actuantes sobre la masa. La introducción de esta fuerza de inercia de magnitud  $m\ddot{u}$  actuando en la dirección opuesta a la aceleración  $\ddot{u}$ , permite formular la ecuación del movimiento planteando la condición de equilibrio. Este concepto constituye el principio de D'Alembert.

En la Figura 1.2.1(a) se muestra un modelo de una estructura simple constituida por una barra elástica vinculada en un extremo y un cuerpo rígido en el otro extremo, soportando la acción de una fuerza externa variable. La elasticidad de la barra se representa con un resorte lineal de rigidez  $k$ , y el amortiguamiento con un disipador viscoso cuyo coeficiente constante es  $c$ . Este sistema así concebido es discreto, porque las propiedades inerciales, elásticas y de amortiguamiento se representan separadamente.

En este ejemplo no se tiene en cuenta el efecto gravitatorio. Además, la masa podría ser concentrada en un punto (masa puntual). En la Figura 1.2.1(b) se tiene el diagrama de cuerpo libre de la masa rígida, que incluye la fuerza de inercia de acuerdo con el principio de D'Alembert.

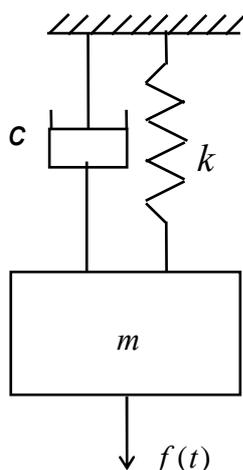


Figura 1.2.1 (a)  
Sistema masa-resorte-amortiguador

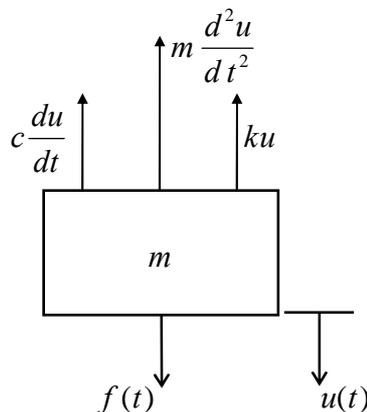


Figura 1.2.1 (b)  
Fuerzas sobre la masa aislada

La ecuación del movimiento de la masa puntual se expresa:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = f(t) \quad (1.2)$$

donde  $t$  denota el tiempo (variable independiente), y  $u(t)$  es el desplazamiento medido desde la posición inicial en la cual el resorte no está deformado y la masa (sin peso) se encuentra en reposo, con  $f(t)=0$ .

A partir de este estado se aplica, en forma instantánea, una fuerza externa  $f(t)=P$  que se mantiene constante. La ecuación del movimiento se escribe:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = P$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es [2,10]:

$$u(t) = \frac{P}{k} [1 - e^{-\beta t} (C_1 \operatorname{sen} \omega_a t + C_2 \operatorname{cos} \omega_a t)] \quad (1.3)$$

$$\text{donde: } \omega_a = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \geq 0 ; \text{ con } \omega^2 = \frac{k}{m} ; \beta = \frac{c}{2m} \quad (1.4 \text{ a,b,c})$$

$\omega_a$  es la frecuencia angular del movimiento oscilatorio amortiguado;  $\omega$  lo es para el caso en que  $c=0$  (sin amortiguamiento). Al aplicar las condiciones iniciales  $u(0) = u_0$  y  $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ , la solución (1.3) resulta:

$$u(t) = \frac{P}{k} \left[ 1 - e^{-\beta t} \left( \left( \frac{\beta}{\omega_a} \left( 1 - \frac{k u_0}{P} \right) - \frac{k \dot{u}_0}{P \omega_a} \right) \operatorname{sen} \omega_a t + \left( 1 - \frac{k u_0}{P} \right) \operatorname{cos} \omega_a t \right) \right] \quad (1.5)$$

En particular, con las condiciones iniciales  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ , la solución toma la forma más simple:

$$u(t) = \frac{P}{k} \left[ 1 - e^{-\beta t} \left( \frac{\beta}{\omega_a} \operatorname{sen} \omega_a t + \operatorname{cos} \omega_a t \right) \right] \quad (1.6)$$

Introduciendo las variables adimensionales  $u(t) / u_e$  y  $t / T_a$ , la misma se expresa:

$$\frac{u(t)}{u_e} = 1 - e^{-\beta T_a \frac{t}{T_a}} \left( \frac{\beta T_a}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T_a} + \operatorname{cos} 2\pi \frac{t}{T_a} \right) \quad (1.7)$$

donde  $u_e = P / k$  es el valor del desplazamiento cuando  $P$  se aplica estáticamente, y  $T_a = 2\pi / \omega_a$  es el período del movimiento oscilatorio amortiguado.

CONCEPTOS BÁSICOS

En la Figura 1.2.2 se muestra el gráfico de la función (1.7)

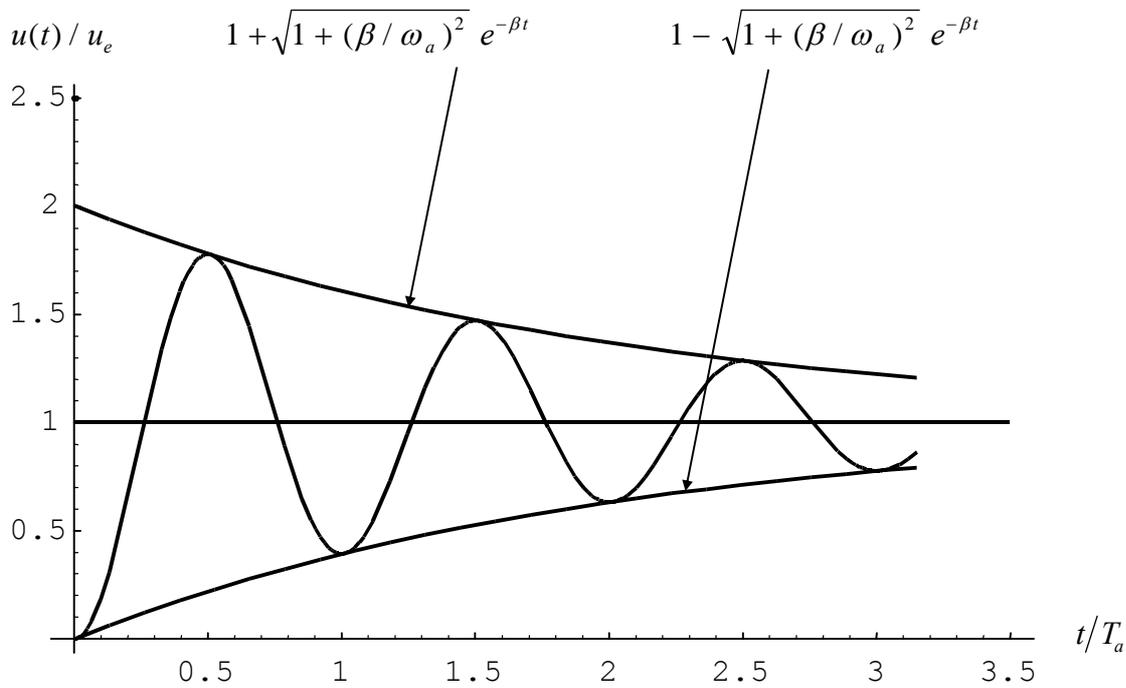


Figura 1.2.2: Oscilaciones amortiguadas. Condiciones iniciales:  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ .

Se observa que la amplitud del movimiento oscilatorio decrece con el tiempo, de acuerdo con una función exponencial ( $e^{-\beta t}$ ) que se anula para  $t \rightarrow \infty$ . Los sucesivos valores extremos del desplazamiento se producen en múltiplos de  $\frac{1}{2}$  de la variable adimensional  $t / T_a$ , muy próximos a los puntos de contacto entre la función del desplazamiento y las curvas exponenciales envolventes.

Cuando se desprecia el amortiguamiento ( $\beta=0$ ) la frecuencia angular es  $\omega = \sqrt{k/m}$ , y la expresión del desplazamiento se reduce:

$$\frac{u(t)}{u_e} = 1 - \cos \omega t \tag{1.8}$$

En este caso ideal la amplitud de las oscilaciones se mantiene constante en el tiempo, y se produce en múltiplos de  $\frac{1}{2}$  del cociente adimensional  $t/T$ .

Otro caso particular, de interés teórico, se presenta cuando  $\beta = \omega$ , vale decir cuando  $c = 2\sqrt{km}$ , valor que se denomina coeficiente de amortiguamiento crítico. La correspondiente expresión del desplazamiento se puede obtener aplicando límite de (1.6) para  $\beta \rightarrow \omega$ , o sea para  $\omega_a \rightarrow 0$ :

$$\frac{u(t)}{u_e} = 1 - (1 + \omega t) e^{-\omega t} = 1 - (1 + 2\pi \frac{t}{T}) e^{-2\pi \frac{t}{T}} \tag{1.9}$$

El gráfico de esta función se muestra en la Figura 1.2.3. Se comprueba que el movimiento ahora no es vibratorio ya que la masa se desplaza sin oscilar, alcanzando la posición de equilibrio estático con  $t \rightarrow \infty$ .

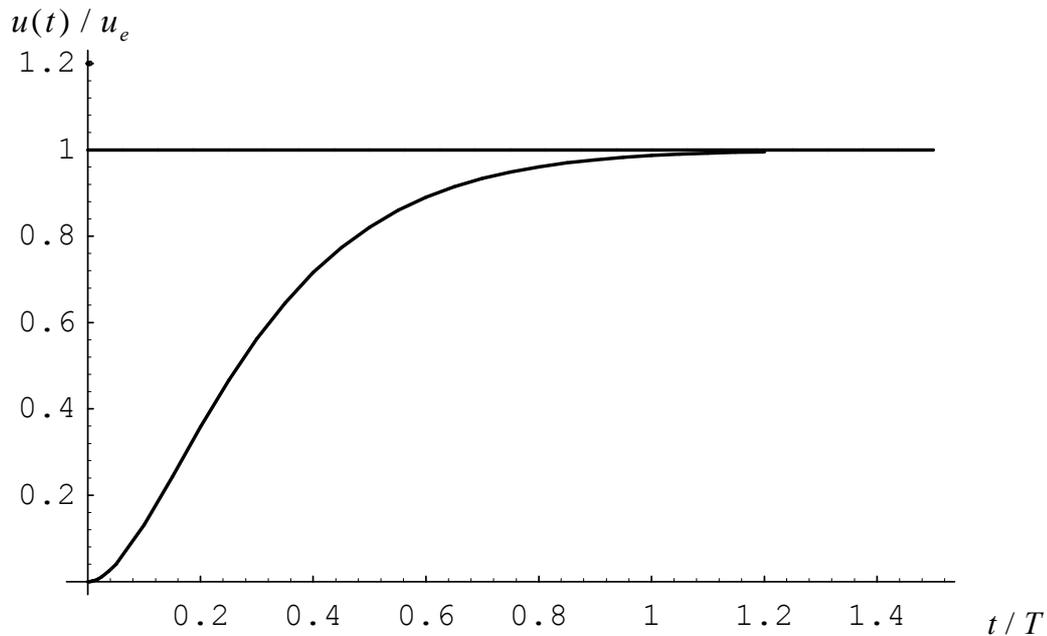


Figura 1.2.3: Amortiguamiento crítico, con  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ .

El coeficiente de amortiguamiento crítico  $c = 2\sqrt{km}$  es especialmente útil como referencia, ya que el amortiguamiento de una estructura suele darse como una fracción del valor crítico. La experiencia indica que en las estructuras el amortiguamiento no supera el 3% del crítico\*. En tal caso, la frecuencia fundamental  $\omega_a$  que se obtendría considerando el efecto del amortiguamiento, prácticamente coincide con el valor  $\omega$  de la estructura sin amortiguamiento. Esto es fácil de comprobar en el sistema discreto de un grado de libertad previamente analizado: si se adopta  $\beta = 0.03\omega$ , con la fórmula (1.4a) se obtiene  $\omega_a \cong 0.99955\omega$ . Este resultado muestra que las frecuencias naturales de una estructura pueden ser calculadas, en la práctica, sin tener en cuenta el amortiguamiento. Por el contrario, es bien apreciable la influencia del amortiguamiento en la disminución de las amplitudes. En efecto: reemplazando  $t/T_a = 0.5$  en la expresión (1.7) del desplazamiento, se obtiene su valor máximo, el cual con  $\beta = 0.03\omega$  resulta  $u/u_e \cong 1.91$ , aproximadamente 4,5% menor que el correspondiente al sistema sin amortiguamiento.

Es importante aclarar que el análisis de las vibraciones libres se simplifica si se hace  $f(t) = 0$  en la ecuación diferencial (1.1) y la excitación se introduce mediante valores iniciales del desplazamiento y/o de la velocidad. En efecto: la solución ahora se expresa [2,10]

$$u(t) = e^{-\beta t} (C_1 \text{sen } \omega_a t + C_2 \text{cos } \omega_a t) \quad (1.10)$$

---

\* En las normas CIRSOC 102 se encuentran valores indicativos de la relación de amortiguamiento: en estructuras de madera el porcentaje es del 3%; para estructuras de edificios de hormigón amado y construcciones de mampostería: 2%; para torres y antenas de acero con uniones roblonadas: 1%, y con uniones soldadas: 0.5%.

CONCEPTOS BÁSICOS

la cual, con las condiciones iniciales  $u=u_0$  y  $\dot{u}_0=0$ , resulta:

$$\frac{u(t)}{u_0} = e^{-\beta t} \left( \frac{\beta}{\omega_a} \text{sen } \omega_a t + \cos \omega_a t \right) = e^{-\beta T_a \frac{t}{T_a}} \left( \frac{\beta T_a}{2\pi} \text{sen } 2\pi \frac{t}{T_a} + \cos 2\pi \frac{t}{T_a} \right) \quad (1.11)$$

En la Figura 1.2.4 se muestra el gráfico de esta función.

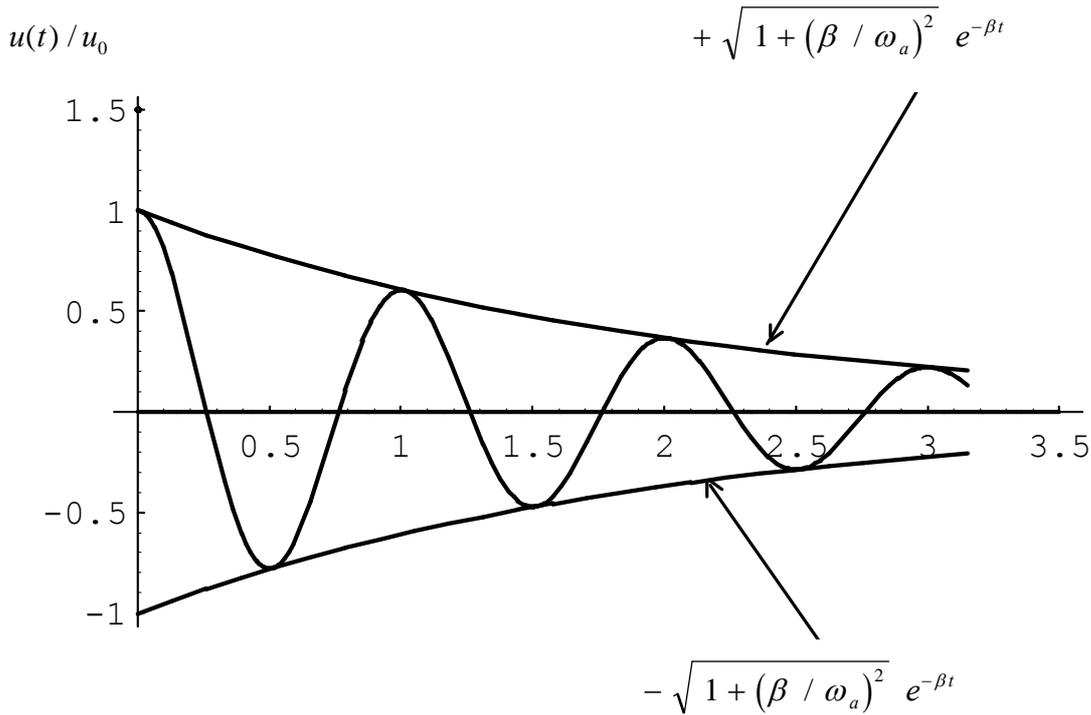


Figura 1.2.4: Oscilaciones con  $u=u_0$  y  $\dot{u}_0=0$  (en abscisas: valores de  $t / T_a$ )

El amortiguamiento crítico se presenta cuando  $\omega_a = 0$  ( $\beta = \omega$ ). Aplicando límites en la solución

(1.11) se obtiene:

$$\frac{u(t)}{u_0} = e^{-\omega t} (1 + \omega t) \quad (1.12)$$

cuyo gráfico se muestra al final de la página siguiente (Figura 1.2.5)

Un concepto sumamente importante, relacionado con el amortiguamiento, es la energía que se disipa en cada ciclo de oscilación, la cual se calcula con el trabajo realizado por la fuerza aplicada por el amortiguador viscoso:

$$W_d = \int_{u_1}^{u_2} \left( c \frac{du}{dt} \right) du = \int_{t_1}^{t_2} c \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dt \quad (1.13)$$

Es fácil comprobar que es aproximadamente proporcional a la frecuencia y al cuadrado de la amplitud del desplazamiento. En efecto, derivando (1.11) con respecto al tiempo:

$$\frac{du}{dt} = -u_0 e^{-\beta t} \frac{\omega^2}{\omega_a} \operatorname{sen} \omega_a t \quad (1.14)$$

y reemplazando en (1.13) e integrando en el primer ciclo completo ( $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ ) se obtiene:

$$W_d = c \omega^2 u_0^2 \frac{1 - e^{-4\beta\pi/\omega_a}}{4\beta} \quad (1.15)$$

Calculando con un tres por ciento del amortiguamiento crítico ( $\beta = 0.03\omega$ , con el cual la frecuencia es  $\omega_a = 0.9995499\omega$ ) resulta  $W_d = 2.618286c\omega u_0^2$ .

Aplicando límite de  $W_d$  para  $\beta \rightarrow 0$  ( $\omega_a \rightarrow \omega$ ) resulta una expresión aproximada:

$$W_d \cong \pi c \omega u_0^2 \quad (1.16)$$

Se comprueba que el valor aproximado dado por (1.16) es un 20% mayor que el exacto hallado con (1.15). Sin embargo, la fórmula (1.16) es de suma importancia en problemas dinámicos con amortiguamiento viscoso, ya que es la expresión exacta de la energía disipada cuando la vibración es forzada con una fuerza excitadora armónica de frecuencia angular  $\omega$ .

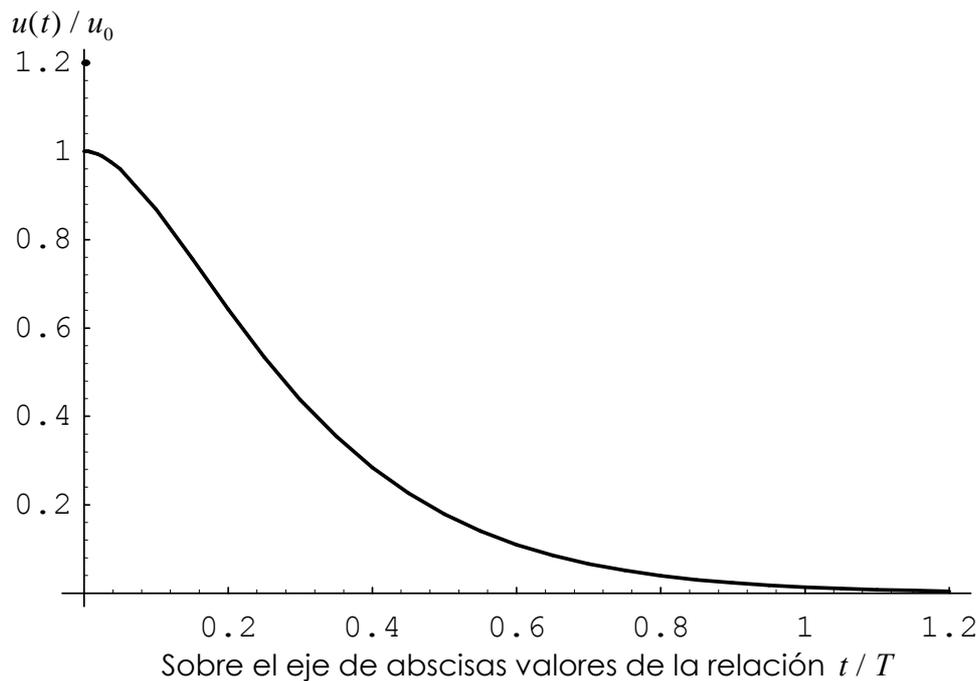


Figura 1.2.5: Corresponde al caso de amortiguamiento crítico.

### 1.3 Amortiguamiento por rozamiento

En la Sección anterior se mencionó que usualmente el amortiguamiento en una estructura es representado con disipadores viscosos, dando lugar a modelos matemáticos lineales. Sólo a título ilustrativo, a continuación se analiza un modelo no lineal donde el amortiguamiento se produce por rozamiento de tipo Coulomb [2]. En la Figura 1.3.1 se muestra el modelo de una masa que desliza sobre una superficie seca que resiste el movimiento por fricción. Se admite que la fuerza  $f_r$  es constante durante el movimiento y proporcional a la fuerza normal de contacto  $N$ .

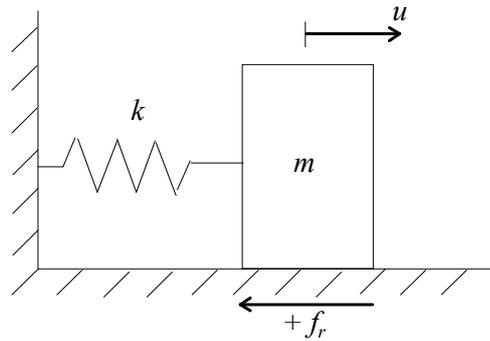


Figura 1.3.1: Modelo simple con amortiguamiento por rozamiento.

El cociente  $\mu = f_r / N$  se denomina coeficiente de rozamiento, el cual es algo mayor en el estado de reposo (rozamiento estático). Es obvio que además de la posición neutra ( $u = 0$ , con el resorte inactivo) existen infinitas posiciones de reposo, en el rango  $-f_{re} / k \leq u \leq +f_{re} / k$ , donde  $f_{re}$  es la fuerza de rozamiento estático.

La dirección de la fuerza  $f_r$  de rozamiento cinético es siempre opuesta a la velocidad. Por consiguiente, la ecuación del movimiento ahora se expresa:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku \pm f_r = 0 \quad (1.17)$$

donde el signo positivo de la fuerza de rozamiento se aplica cuando la velocidad es positiva. Debido al cambio de signo, cada solución de (1.17) sólo es válida durante el intervalo de tiempo entre dos cambios sucesivos del sentido del movimiento.

Estableciendo las condiciones iniciales  $u = u_0 > 0$  y  $du/dt = 0$ , corresponde aplicar (1.17) con la fuerza de rozamiento negativa:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = +f_r \quad (1.18)$$

Es evidente que cuando  $u_0 \leq f_{re} / k$  no se inicia el movimiento, ya que la fuerza del resorte traccionado es equilibrada por el rozamiento estático, y la masa permanece en reposo en la posición inicial  $u = u_0$ .

Si  $u_0 > f_r/k$ , la solución de la ecuación diferencial (1.18) se expresa [2]:

$$u(t) = \frac{f_r}{k} + \left(u_0 - \frac{f_r}{k}\right) \cos \omega t \quad (1.19)$$

donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia angular natural, la misma que para el sistema sin amortiguamiento.

La masa inicia el movimiento con velocidad negativa que se hace máxima, en valor absoluto, cuando  $\omega t = \pi/2$ , ( $t/T = 0.25$ ), instante que corresponde a la posición  $u = f_r/k$  donde la fuerza del resorte es opuesta a  $f_r$ .

La masa continúa su movimiento con velocidad negativa (decreciente en valor absoluto) y se detiene cuando  $\omega t = \pi$ , ( $t/T = 0.5$ ). Esta posición de reposo instantáneo se obtiene reemplazando  $\omega t = \pi$  en (1.19):

$$u\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 2 \frac{f_r}{k} - u_0 \quad (1.20)$$

Se comprueba que si  $u_0 < 2 \frac{f_r}{k}$  la masa se detendrá antes de llegar a la posición neutra ( $u = 0$ ) y permanecerá en reposo en esa posición, retenida por la fricción. Obviamente, con  $u_0 = 2f_r/k$  la posición de reposo es  $u = 0$ . Es obvio que en esta posición de reposo no actúan fuerzas horizontales sobre la masa.

Cuando  $u_0 > 2f_r/k$  el movimiento continúa hasta alcanzar la primera amplitud (negativa) dada por (1.20).

En esta posición se produce el reposo instantáneo, y si la fuerza del resorte comprimido supera a la de rozamiento estático, se inicia el segundo semiciclo del movimiento con velocidad positiva. Por consiguiente, ahora la ecuación diferencial se escribe:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = -f_r \quad (1.21)$$

La solución tiene la misma forma (1.19) cambiando el signo de la fuerza de rozamiento y midiendo el tiempo a partir de la amplitud negativa, la cual pasa a ser el correspondiente desplazamiento inicial. Luego, la solución se expresa:

$$u(t) = -\frac{f_r}{k} + \left(\frac{3f_r}{k} - u_0\right) \cos(\omega t - \pi) \quad (1.22)$$

La siguiente amplitud (positiva) ocurre cuando  $\omega t = 2\pi$ , ( $t/T = 1$ ):

$$u\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = u_0 - \frac{4f_r}{k} \quad (1.23)$$

CONCEPTOS BÁSICOS

Volviendo a la ecuación diferencial (1.18), con las condiciones “iniciales” en  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ :  $u = u_0 - \frac{4f_r}{k}$  y  $\frac{du}{dt} = 0$ , se tiene:

$$u(t) = \frac{f_r}{k} + \left( u_0 - \frac{5f_r}{k} \right) \cos(\omega t - 2\pi) \quad (1.24)$$

La siguiente amplitud (negativa) ocurre cuando  $\omega t = 3\pi$ , ( $t/T = 1.5$ ):

$$u\left(\frac{3\pi}{\omega}\right) = \frac{6f_r}{k} - u_0 \quad (1.25)$$

Reiterando este procedimiento, puede deducirse que las sucesivas amplitudes positivas se expresan:

$$u\left(\frac{\pi n}{\omega}\right) = u_0 - \frac{2f_r}{k} n; \quad n = 0, 2, 4, 6... \quad (1.26)$$

y las sucesivas negativas: 
$$u\left(\frac{\pi n}{\omega}\right) = \frac{2f_r}{k} n - u_0; \quad n = 1, 3, 5, 7... \quad (1.27)$$

las cuales se pueden unificar en una sola fórmula:

$$u\left(\frac{\pi n}{\omega}\right) = (-1)^n \left( u_0 - \frac{2f_r}{k} n \right); \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (1.28)$$

siendo  $n$  un número entero que indica la cantidad de semiciclos (en los instantes donde el tiempo es múltiplo de la mitad del período natural). Es fácil comprobar que las sucesivas amplitudes definen dos rectas, dadas por la ecuación:

$$Ampl(t) = \pm \left( u_0 - \frac{4f_r}{k} \frac{t}{T} \right) \quad (1.29)$$

Estas dos rectas y el gráfico de la solución  $u(t)$  se muestran en la página siguiente (Figura 1.3.2).

De (1.29) se deduce que la última amplitud del movimiento oscilatorio ocurre en un instante no mayor que

$$t = \frac{k T u_0}{4 f_r} = \frac{\pi k u_0}{2 \omega f_r} \quad (1.30)$$

El reposo se alcanza con un desplazamiento final no necesariamente nulo. En la posición final de reposo la fuerza del resorte es equilibrada por el rozamiento estático.

**Ejemplo 1.3.1.** Obtener la posición de reposo de la masa, al cabo del movimiento oscilatorio, en el sistema mecánico con amortiguamiento por fricción de la Figura 1.3.1, con los siguientes datos numéricos:  $k = 100$  N/cm;  $m = 25$  kg;  $u_0 = 5$  cm;  $\mu_c$  (coeficiente de rozamiento cinético) = 0.15;  $\mu_e$  (coeficiente de rozamiento estático) = 0.2.

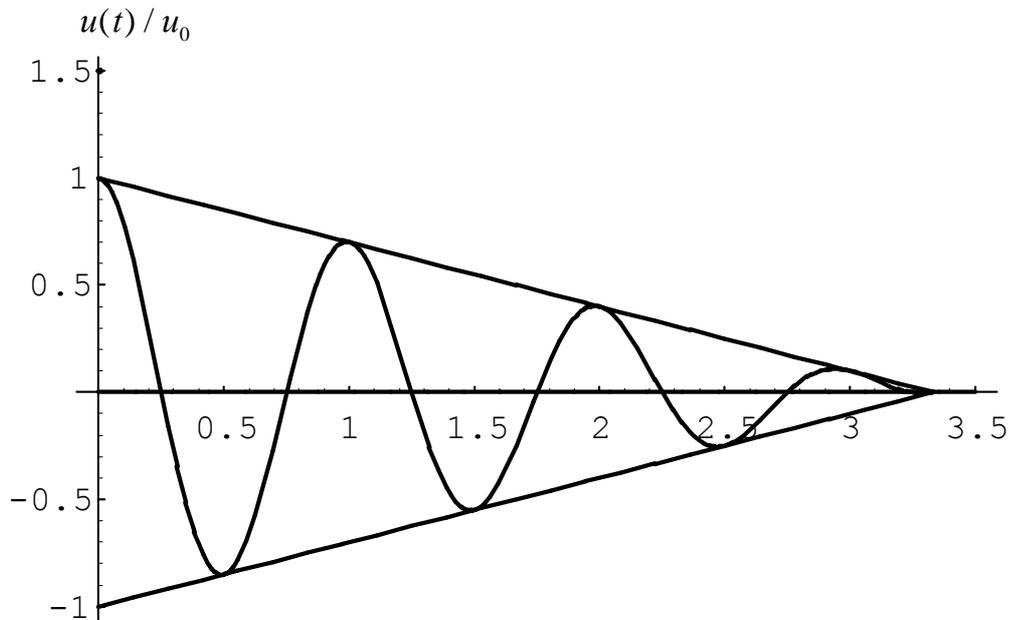


Figura 1.3.2: Oscilaciones decrecientes por rozamiento.

Con los valores de  $k$  y  $m$  se calcula la frecuencia natural del sistema:  $\omega = \sqrt{k/m} = 20 \text{ rad/s}$ .

Adoptando  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , la fuerza de rozamiento cinético (cuando la masa desliza) se calcula con:

$$f_r = 25 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.15 = 36.75 \text{ N} \therefore \frac{f_r}{k} = 0.3675 \text{ cm}$$

La fuerza de rozamiento estático resulta:  $f_{re} = 25 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.2 = 49 \text{ N} \therefore \frac{f_{re}}{k} = 0.49 \text{ cm}$

Con la fórmula (1.28) se obtienen las sucesivas amplitudes del movimiento oscilatorio, hasta un tiempo no mayor que  $t = 1.06857$  segundos calculado con (1.30):

$$n = 0; t = 0: \quad u_0 = 5 \text{ cm}$$

$$n = 1; t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{20} \text{ s}: \quad u_1 = 0.735 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = -4.265 \text{ cm}$$

$$n = 2; t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10} \text{ s}: \quad u_2 = 5 \text{ cm} - 1.47 \text{ cm} = +3.53 \text{ cm}$$

$$n = 3; t = \frac{3\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{20} \text{ s}: \quad u_3 = 2.205 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = -2.795 \text{ cm}$$

$$n = 4; t = \frac{4\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ s}: \quad u_4 = 5 \text{ cm} - 2.94 \text{ cm} = +2.06 \text{ cm}$$

$$n = 5; t = \frac{5\pi}{\omega} = \frac{\pi}{4} \text{ s}: \quad u_5 = 3.675 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = -1.325 \text{ cm}$$

$$n = 6; t = \frac{6\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{10} \text{ s}: \quad u_6 = 5 \text{ cm} - 4.41 \text{ cm} = +0.59 \text{ cm}$$

## CONCEPTOS BÁSICOS

La siguiente amplitud negativa no se produce, pues correspondería a un tiempo superior al límite:

$$t = \frac{7\pi}{\omega} = 1.09956 \text{ s} > 1.06857 \text{ s}$$

Por otra parte, la posición  $u = u_6$  no es de reposo, ya que la fuerza del resorte supera a la de rozamiento estático:

$$k u_6 > m g \mu_e ; \text{ en números: } 59 \text{ N} > 49 \text{ N}$$

La posición final de reposo  $u_f$  se obtiene aplicando una vez más la fórmula (1.28) con  $n = 7$ :  $u_7 = +0.145$  cm. También puede ser calculada teniendo en cuenta que en los extremos del último tramo del movimiento la energía cinética es nula. Por consiguiente, el trabajo de la fuerza disipativa  $f_r$  es igual a la pérdida de energía potencial elástica del resorte:

$$f_r (u_6 - u_f) = \frac{1}{2} k (u_6^2 - u_f^2)$$

Una raíz trivial de esta ecuación es  $u_f = u_6$ . La otra raíz es la solución del problema:

$$u_f = \frac{2f_r}{k} - u_6 = 0.735 \text{ cm} - 0.59 \text{ cm} = 0.145 \text{ cm}$$

Se deja como ejercicio la utilización del mismo criterio energético para hallar, a partir de la posición inicial, las sucesivas amplitudes del movimiento, y la energía total disipada.

### 1.4 Ecuaciones del movimiento

El primer paso en el análisis dinámico de una estructura, o de un mecanismo, es la formulación de las ecuaciones del movimiento del modelo matemático correspondiente. Es una importante parte del proceso de análisis ya que el éxito del mismo depende, aparte de un apropiado diseño del modelo matemático, de la correcta formulación de las ecuaciones para su posterior resolución. Empleando un procedimiento sistemático en esta primera etapa, puede reducirse la posibilidad de cometer errores. A continuación se presentan diversos métodos para el planteo de las ecuaciones del movimiento.

#### 1.4.1 Equilibrio dinámico

Consiste en aplicar las condiciones de equilibrio de fuerzas y cuplas que actúan sobre cada masa del sistema discreto, teniendo cuidado de incluir las fuerzas y cuplas inerciales, de acuerdo con el principio de D'Alembert.

**Ejemplo 1.4.1.1:** Deducir la ecuación del movimiento del sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad representado por el modelo de la Figura 1.4.1(a) análogo al sistema de la Figura 1.2.1(a).

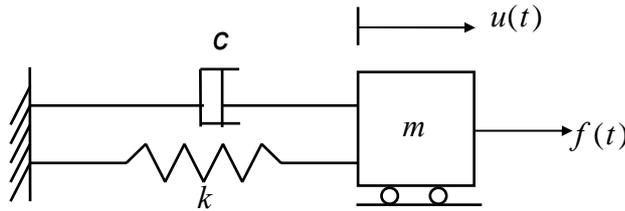


Figura 1.4.1 (a)

Sistema masa-resorte-amortiguador

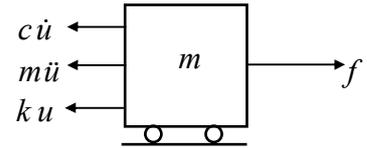


Figura 1.4.1 (b)

Fuerzas sobre la masa aislada

Las fuerzas actuantes sobre la masa son: la externa ( $f$ ), la reacción del resorte elástico lineal ( $ku$ ), la del amortiguador viscoso ( $c\dot{u}$ ) y la fuerza de inercia ( $m\ddot{u}$ ), como se indican en el diagrama de cuerpo libre de la masa en la Figura 1.4.1(b).

La condición de equilibrio se expresa:  $-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + f = 0$ , o sea:  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f$

Los conceptos anteriores pueden ser extendidos a sistemas mecánicos con múltiples grados de libertad. En un sistema de  $N$  masas puntuales las ecuaciones de equilibrio dinámico se obtienen estableciendo la nulidad de la suma de las fuerzas (vectores) actuantes sobre cada masa aislada:

$$\bar{f}_j - \frac{d}{dt} (m_j \dot{\bar{u}}_j) = 0, \quad j = 1 \dots N \quad (1.31)$$

Si las masas no son puntuales se agregan las condiciones de equilibrio de los momentos en cada cuerpo rígido:

$$\bar{L}_j - \frac{d}{dt} (I_j \dot{\bar{\theta}}_j) = 0, \quad j = 1 \dots N \quad (1.32)$$

donde  $I_j \dot{\bar{\theta}}_j$  es la cantidad de movimiento angular de la masa  $m_j$  y  $\bar{L}_j$  es la suma de los momentos aplicados sobre la misma.

Por otra parte, si los vectores  $\bar{u}_j$  y  $\bar{\theta}_j$  no son independientes entre sí, a las ecuaciones (1.31) y (1.32) se agregan condiciones de restricción, dadas por expresiones de la forma

$$g_i (\bar{u}_1, \bar{\theta}_1, \bar{u}_2, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{u}_N, \bar{\theta}_N) = 0, \quad j = 1 \dots N_r \quad (1.33)$$

donde  $N_r$  es el número de restricciones impuestas.

Este último aspecto del problema será analizado con más profundidad en la última Sección de este capítulo.

CONCEPTOS BÁSICOS

**Ejemplo 1.4.1.2:** Hallar las ecuaciones del movimiento de un sistema formado por tres masas puntuales unidas con resortes (Figura 1.4.2).

La masa  $m_1$  recibe la acción de dos fuerzas debidas a la deformación de los resortes lineales que la vinculan con las masas  $m_2$  y  $m_3$ . Si los vectores posición de  $m_1$  y  $m_2$  son  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respectivamente, el vector unitario (versor)  $\vec{e}_1$  a lo largo de la línea 2-1 es:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

donde  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  es la distancia entre  $m_1$  y  $m_2$ .

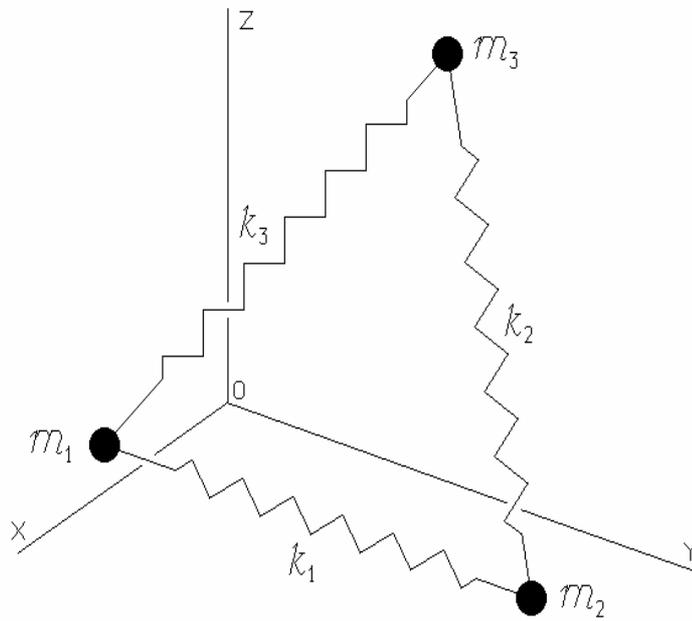


Figura 1.4.2: Sistema de tres masas y tres resortes.

Si los desplazamientos de  $m_1$  y  $m_2$  se denotan con  $\bar{U}_1$  y  $\bar{U}_2$ , la pequeña deformación  $\delta_1$  del resorte que las une queda expresada con el producto escalar  $(\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \cdot \vec{e}_1$ . Por consiguiente, si la rigidez del resorte lineal es  $k_1$ , la magnitud de la fuerza que actúa sobre la masa  $m_1$  en la dirección de  $\vec{e}_1$  es:

$$-k_1 \delta_1 = k_1 (\bar{U}_2 - \bar{U}_1) \cdot \vec{e}_1.$$

Similarmente, el valor de la fuerza actuante sobre la masa  $m_1$  en la dirección  $\vec{e}_3$  es:

$$k_3 (\bar{U}_3 - \bar{U}_1) \cdot \vec{e}_3, \quad \text{donde} \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}$$

La ecuación del equilibrio dinámico de  $m_1$  se expresa entonces

$$\left[ k_1 (\bar{U}_2 - \bar{U}_1) \cdot \vec{e}_1 \right] \vec{e}_1 + \left[ k_3 (\bar{U}_3 - \bar{U}_1) \cdot \vec{e}_3 \right] \vec{e}_3 - m_1 \ddot{\bar{U}}_1 = 0$$

Es interesante destacar que esta expresión no depende de los sentidos de los versores  $\check{e}_1$  y  $\check{e}_3$ . Cuando los vectores se expresan con sus componentes cartesianas se obtienen tres ecuaciones escalares (o dos, si el movimiento se analiza en el plano de las tres masas).

Las ecuaciones del movimiento del sistema se completan con ecuaciones similares para las otras dos masas  $m_2$  y  $m_3$ :

$$\left[ k_1 (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \bullet \check{e}_1 \right] \check{e}_1 + \left[ k_2 (\bar{U}_3 - \bar{U}_2) \bullet \check{e}_2 \right] \check{e}_2 - m_2 \ddot{\bar{U}}_2 = 0$$

$$\left[ k_2 (\bar{U}_2 - \bar{U}_3) \bullet \check{e}_2 \right] \check{e}_2 + \left[ k_3 (\bar{U}_1 - \bar{U}_3) \bullet \check{e}_3 \right] \check{e}_3 - m_3 \ddot{\bar{U}}_3 = 0$$

donde los versores  $\check{e}_1$  y  $\check{e}_3$  fueron previamente definidos, y  $\check{e}_2$  se expresa:  $\check{e}_2 = \frac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_3 - \bar{r}_2|}$

**Ejemplo 1.4.1.3:** Plantear las ecuaciones del movimiento del sistema torsional formado por dos engranajes y un volante, rígidos, con momentos de inercia  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , respectivamente, y dos árboles con rigideces torsionales  $k_1$  y  $k_2$ . Sobre el volante se aplica una cupla externa de momento  $M_3$ , ver Figura 1.4.3(a).

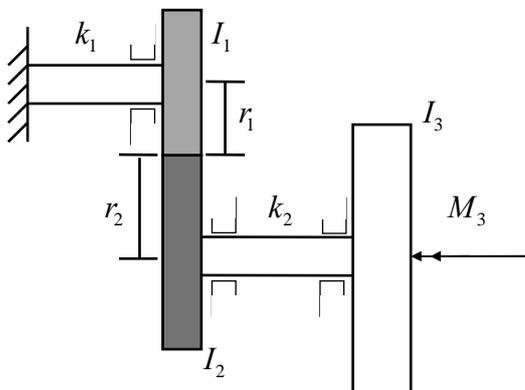


Figura 1.4.3(a)

Momento aplicado sobre el sistema torsional

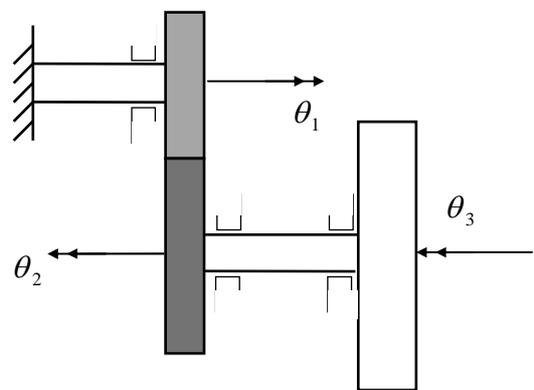


Figura 1.4.3(b)

Grados de libertad del sistema torsional

El sistema mecánico tiene tres grados de libertad, representados por las rotaciones  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  que se muestran en la Figura 1.4.3(b). Se reducen a dos independientes con la condición de compatibilidad entre las rotaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :  $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$ .

Aplicando la ecuación (1.32), el equilibrio dinámico del engranaje con inercia  $I_1$  se expresa:

$$L_1 - \frac{d}{dt} (I_1 \dot{\theta}_1) = 0$$

Introduciendo la fuerza  $F$  de interacción entre los engranajes, se tiene:  $L_1 = -k_1 \theta_1 - F r_1$ .

Reemplazando resulta:  $-k_1 \theta_1 - F r_1 - I_1 \ddot{\theta}_1 = 0$

## CONCEPTOS BÁSICOS

El equilibrio dinámico del engranaje con inercia  $I_2$  se expresa:

$$-k_2(\theta_2 - \theta_3) + F r_2 - I_2 \ddot{\theta}_2 = 0$$

Finalmente, la condición de equilibrio del volante se escribe:

$$M_3 + k_2(\theta_2 - \theta_3) - I_3 \ddot{\theta}_3 = 0$$

Al introducir en la primera ecuación de equilibrio la restricción impuesta por la compatibilidad, que puede ponerse en la forma  $\theta_1 = \varphi \theta_2$ , con  $\varphi = r_2 / r_1$ , y al eliminar  $F$  de ambas ecuaciones, resulta:

$$-(k_1 \varphi^2 + k_2) \theta_2 + k_2 \theta_3 - (I_1 \varphi^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 = 0$$

Las dos ecuaciones que describen el movimiento del sistema mecánico, pueden ponerse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varphi^2 k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^2 I_1 + I_2 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

La matriz simétrica que multiplica a las rotaciones es la de rigidez del sistema mecánico, y la matriz diagonal que es factor de las aceleraciones angulares es la matriz de inercia (también llamada matriz masa). Ambas son positivas definidas.

### 1.4.2. Principio de los desplazamientos virtuales

El principio de D'Alembert permite obtener las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico con el planteo del equilibrio, el cual a su vez puede ser expresado mediante el principio de los desplazamientos virtuales. Este principio establece que la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos sujetos a la acción de fuerzas, es que se anule el trabajo total de las mismas cuando se produce un desplazamiento virtual, el cual debe ser compatible con las restricciones impuestas [7]. Esta formulación aporta tantas ecuaciones escalares de equilibrio como componentes independientes son requeridas para describir el desplazamiento virtual.

La expresión vectorial general que se obtiene al aplicar este principio en un sistema de  $N$  cuerpos rígidos con traslaciones  $\bar{u}_j$  y rotaciones  $\bar{\theta}_j$ , es:

$$\sum_{j=1}^N \left[ \left( \bar{f}_j - \frac{d}{dt} (m_j \dot{\bar{u}}_j) \right) \bullet \delta \bar{u}_j + \left( \bar{L}_j - \frac{d}{dt} (I_j \dot{\bar{\theta}}_j) \right) \bullet \delta \bar{\theta}_j \right] = 0 \quad (1.34)$$

En el caso particular de un sistema sin restricciones los vectores virtuales  $\delta \bar{u}_j$  y  $\delta \bar{\theta}_j$  son arbitrarios. En consecuencia, deben anularse todos los términos de la expresión general (1.34), reproduciéndose así las ecuaciones vectoriales (1.31) y (1.32):

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j - \frac{d}{dt}(m_j \dot{\bar{u}}_j) &= 0 \\ \bar{L}_j - \frac{d}{dt}(I_j \dot{\bar{\theta}}_j) &= 0 \end{aligned} \right\} j = 1 \dots N$$

**Ejemplo 1.4.2.1:** Aplicando el principio de los desplazamientos virtuales obtener las ecuaciones del movimiento del sistema libre de restricciones, formado por dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  unidas con un resorte lineal de rigidez  $k$  y bajo la acción de fuerzas  $\bar{f}_1$  y  $\bar{f}_2$ , como se muestra en la Figura 1.4.4(a).

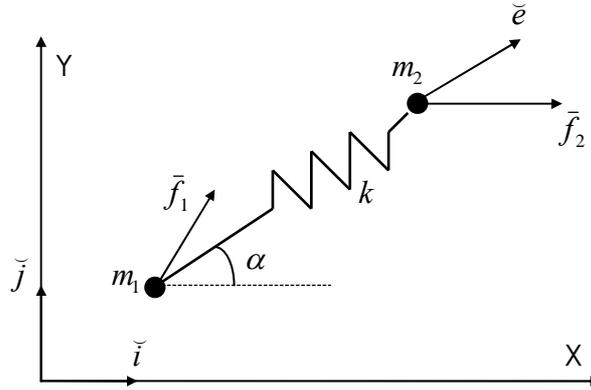


Figura 1.4.4(a): Sistema masas-resorte

Asumir la hipótesis de desplazamientos infinitesimos y considerar el movimiento en dos dimensiones, en el plano X – Y. Las fuerzas externas y los desplazamientos se expresan mediante sus componentes cartesianas:

$$\bar{f}_1 = f_{1_x} \tilde{i} + f_{1_y} \tilde{j}; \quad \bar{f}_2 = f_{2_x} \tilde{i} + f_{2_y} \tilde{j}; \quad \bar{u}_1 = u_{1_x} \tilde{i} + u_{1_y} \tilde{j}; \quad \bar{u}_2 = u_{2_x} \tilde{i} + u_{2_y} \tilde{j}$$

La magnitud de la fuerza que aplica el resorte sobre las masas se expresa:

$$f_r = k[(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \cdot \tilde{e}] = k[(u_{2_x} - u_{1_x}) \cos \alpha + (u_{2_y} - u_{1_y}) \sin \alpha]$$

Las fuerzas aplicadas por el resorte sobre  $m_1$  y  $m_2$  son  $f_r \tilde{e}$  y  $-f_r \tilde{e}$ , respectivamente.

Aplicando el principio de D'Alembert se completa el conjunto de fuerzas actuantes sobre cada masa, como se muestran en la página siguiente, en las Figuras 1.4.4 (b) y (c).

El desplazamiento virtual  $\delta \bar{u}_1 = \delta u_{1_x} \tilde{i} + \delta u_{1_y} \tilde{j}$ ,  $\delta \bar{u}_2 = \delta u_{2_x} \tilde{i} + \delta u_{2_y} \tilde{j}$  tiene 4 componentes independientes. Con ellas las condiciones escalares de equilibrio se expresan:

$$\left. \begin{aligned} (f_{1_x} + f_r \cos \alpha - m_1 \ddot{u}_{1_x}) \delta u_{1_x} &= 0 \\ (f_{1_y} + f_r \sin \alpha - m_1 \ddot{u}_{1_y}) \delta u_{1_y} &= 0 \\ (f_{2_x} - f_r \cos \alpha - m_2 \ddot{u}_{2_x}) \delta u_{2_x} &= 0 \\ (f_{2_y} - f_r \sin \alpha - m_2 \ddot{u}_{2_y}) \delta u_{2_y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

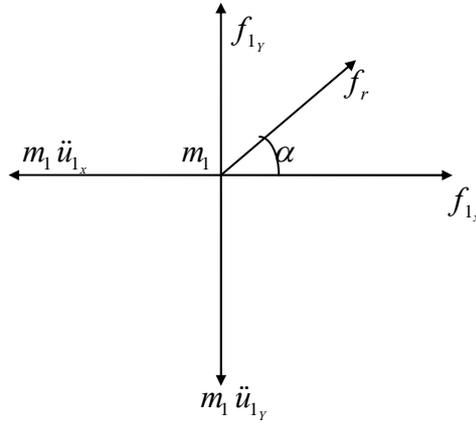


Figura 1.4.4 (b): Fuerzas sobre  $m_1$

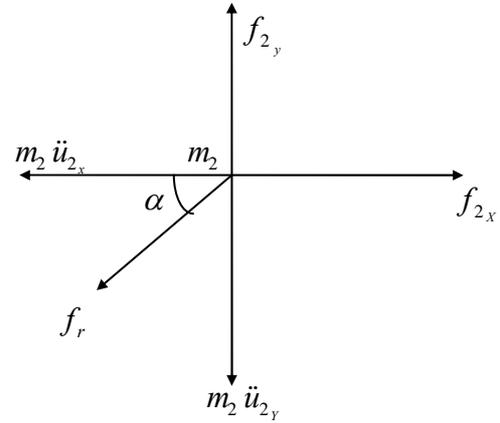


Figura 1.4.4 (c): Fuerzas sobre  $m_2$

Reemplazando la expresión de  $f_r$  y utilizando la forma matricial, resulta:

$$k \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \text{sen} \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \cos \alpha & -\text{sen}^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \text{sen} \alpha \cos \alpha \\ -\text{sen} \alpha \cos \alpha & -\text{sen}^2 \alpha & \text{sen} \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1x} \\ \dot{u}_{1y} \\ \dot{u}_{2x} \\ \dot{u}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez es positiva semidefinida. Es fácil comprobar que son nulos todos sus menores de orden mayor que la unidad. Por consiguiente, su rango es 1. Dado que las masas  $m_1$  y  $m_2$  son positivas, la matriz de masa es positiva definida.

En el caso más general de sistemas deformables, como el de la Figura 1.4.4 (a) por la presencia del resorte, el principio establece que es condición necesaria y suficiente para el equilibrio, en la configuración deformada, la nulidad del trabajo total para toda componente independiente del desplazamiento virtual cinemáticamente compatible [7]. El trabajo virtual total es la diferencia entre los trabajos de las fuerzas externas e internas. El mismo ejemplo 1.4.2.1 permite aclarar este concepto. En efecto, el trabajo virtual de las fuerzas que actúan sobre las masas puntuales es:

$$(\vec{f}_1 + \vec{f}_r) \cdot \delta \vec{u}_1 + (\vec{f}_2 - \vec{f}_r) \cdot \delta \vec{u}_2 = 0$$

o sea:  $\vec{f}_1 \cdot \delta \vec{u}_1 + \vec{f}_2 \cdot \delta \vec{u}_2 - \vec{f}_r \cdot (\delta \vec{u}_2 - \delta \vec{u}_1) = 0$

El tercer término puede ponerse en la forma:

$$\vec{f}_r \cdot (\delta \vec{u}_2 - \delta \vec{u}_1) = f_r (\delta u_{2,1} - \delta u_{1,1}) = f_r \delta u_{2,1}$$

donde  $\delta u_{2,1}$  tiene el significado de la deformación muy pequeña (infinitésima) del resorte, positiva cuando se alarga, cinemáticamente compatible con los desplazamientos virtuales;  $f_r$  es el esfuerzo en el resorte (positivo de tracción). El producto  $f_r \delta u_{2,1}$  es la expresión del trabajo virtual interno. Obviamente, otra forma de formular el principio es: en la configuración de equilibrio, el trabajo externo es igual al interno.

## 1.5 Principio de Hamilton

Los métodos precedentes son esencialmente vectoriales, ya que las ecuaciones escalares del movimiento se obtienen a partir de expresiones vectoriales. En muchos casos es más conveniente operar con magnitudes energéticas aplicando el principio de Hamilton [7], el cual establece que la función del desplazamiento  $u(t)$  que es solución exacta, y por ende que satisface las ecuaciones del movimiento, cumple con la condición:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) + \delta W] dt = 0 \quad (1.35)$$

donde  $\delta$  denota la variación producida por un desplazamiento virtual (infinitésimo) a partir de la solución exacta  $u(t)$ ;  $T$  es la energía cinética del sistema;  $U$  es la energía de deformación elástica, y  $\delta W$  es el trabajo virtual que realizan las fuerzas no conservativas en la variación de la función  $u(t)$ . Los límites de la integral son dos instantes distintos, en los cuales dicha variación es nula ( $\delta u = 0$  en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ ).

La validez de este principio puede demostrarse con el principio de los desplazamientos virtuales, con el cual se deduce la ecuación (1.35) como se muestra a continuación para el caso más simple de una masa puntual sujeta a la acción de una fuerza resultante de todas las aplicadas sobre la masa, tanto conservativas como disipativas.

Como es sabido, el trabajo de una fuerza no conservativa, cuya acción implica una transferencia de energía entre el sistema mecánico y su entorno (como las fuerzas de rozamiento), depende de la trayectoria descrita por la masa al pasar de la posición inicial a la posición final. Por el contrario, el trabajo de una fuerza conservativa no depende de la forma de la trayectoria. En este último caso, el trabajo puede ser expresado como el cambio de la energía potencial  $V(\bar{r})$ , asociada a la posición  $\bar{r}$  de la masa. La energía potencial se define como el trabajo que hace la fuerza cuando la masa se desplaza desde la posición  $\bar{r}$  a otra de referencia  $\bar{r}_0$  arbitrariamente elegida:

$$V(\bar{r}) = \int_{\bar{r}}^{\bar{r}_0} \bar{f} \cdot d\bar{r} \quad (1.36)$$

El trabajo de una fuerza que pasa de la posición  $\bar{r}_1$  a la posición  $\bar{r}_2$  es:

$$W = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{f} \cdot d\bar{r} \quad (1.37)$$

## CONCEPTOS BÁSICOS

Si la fuerza es conservativa, la anterior puede ponerse en la forma:

$$W = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_0} \bar{f} \cdot d\bar{r} - \int_{\bar{r}_2}^{\bar{r}_0} \bar{f} \cdot d\bar{r} = V(\bar{r}_1) - V(\bar{r}_2) = - [V(\bar{r}_2) - V(\bar{r}_1)] \quad (1.38)$$

válida para cualquier posición  $\bar{r}_0$  de referencia.

En forma variacional (similar a la diferencial) la expresión (1.38) se escribe:  $\delta W = -\delta V$  (1.39)

El tipo de energía potencial a ser considerada en este curso es la energía potencial elástica, o energía de deformación, que suele denotarse con  $U$ . Por ejemplo, un resorte elástico lineal con rigidez  $k$ , fijo en un extremo, ejerce una fuerza  $-ku$  cuando la masa en el extremo libre experimenta el desplazamiento  $u$  en la dirección del resorte. Adoptando como referencia la posición indeformada ( $u=0$ ), se tiene:

$$U = \int_u^0 (-k u) du = -\frac{1}{2} k u^2 \Big|_u^0 = \frac{1}{2} k u^2 \quad (1.40)$$

A continuación, aplicando el principio de los desplazamientos virtuales, se deduce la ecuación de Hamilton para el caso más simple de una masa  $m$  sujeta a la acción de la fuerza resultante  $f$ .

El equilibrio dinámico se expresa:

$$(f - m\ddot{u}) \delta u = 0 \quad (1.41)$$

El término  $f \delta u$  es el trabajo total de las fuerzas aplicadas sobre la masa con el desplazamiento virtual  $\delta u$ :

$$f \delta u = \delta W = \delta W_c + \delta W_d \quad (1.42)$$

donde  $\delta W_c$  es el trabajo virtual de las fuerzas conservativas y  $\delta W_d$  el desarrollado por las fuerzas disipativas.

De acuerdo con (1.39) se tiene:

$$f \delta u = -\delta U + \delta W_d \quad (1.43)$$

El segundo término de (1.41) puede ser reemplazado teniendo en cuenta una regla básica del cálculo variacional:  $\frac{d}{dt}(\delta u) = \delta \left( \frac{du}{dt} \right) = \delta \dot{u}$  (la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada).

Luego:

$$m\ddot{u} \delta u = m \frac{d}{dt} (\dot{u} \delta u) - m \dot{u} \delta \dot{u} \quad (1.44)$$

Por otra parte:

$$m \dot{u} \delta \dot{u} = \delta \left( \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \right) = \delta T \quad (1.45)$$

donde  $T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$  es la energía cinética del sistema.

Sustituyendo (1.43), (1.44) y (1.45) en la ecuación de equilibrio dinámico (1.41) se obtiene:

$$-\delta U + \delta W_d - m \frac{d}{dt}(\dot{u} \delta u) + \delta T = 0 ; \quad \text{o sea: } \delta T - \delta U + \delta W_d = m \frac{d}{dt}(\dot{u} \delta u) \quad (1.46)$$

La línea continua de la Figura 1.5.1 representa la solución exacta  $u(t)$  en la cual  $u_1$  y  $u_2$  son los desplazamientos en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente. La línea de trazos representa una función virtual  $u(t) + \delta u(t)$ , donde la variación  $\delta u(t)$  es infinitésima, con  $\delta u = 0$  en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ .

Integrando ambos miembros de (1.46) se obtiene la ecuación que se satisface con la función  $u(t)$ , única solución de (1.41) de todas las posibles funciones que cumplen con  $u(t_1) = u_1$  y  $u(t_2) = u_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_d) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt}(\dot{u} \delta u) dt = m \dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (1.47)$$

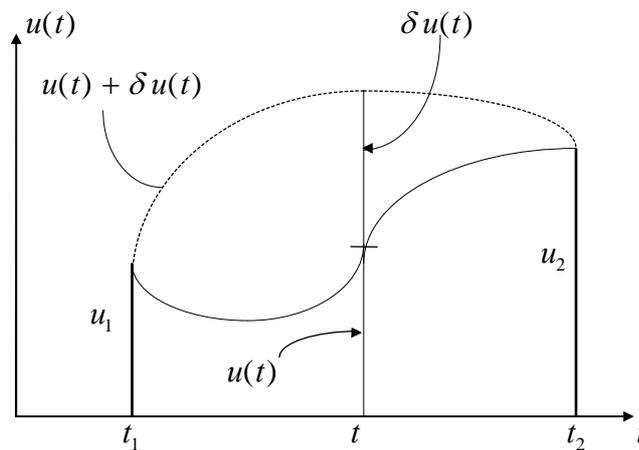


Figura 1.5.1: Variación virtual  $\delta u(t)$  de la trayectoria

Dado que tanto  $T$  como  $U$  son funciones del desplazamiento, se tiene  $\delta T - \delta U = \delta(T - U)$ ; luego:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) + \delta W_d] dt = 0 \quad (1.48)$$

Esta ecuación establece que la integral es nula cuando la trayectoria  $u(t)$  es la solución de la ecuación de equilibrio. En un sistema conservativo  $\delta W_d = 0$ , y la expresión del principio de Hamilton se reduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0 \quad (1.49)$$

la cual implica que la integral de  $T - U$  a lo largo de la trayectoria real es un valor estacionario. En las aplicaciones puede comprobarse que es un mínimo.

**Ejemplo 1.5.1:** Aplicando el principio de Hamilton deducir las ecuaciones del movimiento del sistema de un grado de libertad de la Figura 1.4.1(a).

## CONCEPTOS BÁSICOS

Para este sistema: 
$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2; U = \frac{1}{2} k u^2; \delta W_d = (f - c \dot{u}) \delta u$$

Nótese que la fuerza externa  $f$  aplicada sobre la masa se agrupa con las fuerzas disipativas.

Reemplazando en (1.48): 
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \left( \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} k u^2 \right) + f \delta u - c \dot{u} \delta u \right] dt = 0$$

o sea: 
$$\int_{t_1}^{t_2} (m \dot{u} \delta \dot{u} - k u \delta u + f \delta u - c \dot{u} \delta u) dt = 0$$

Aplicando  $d(\delta u) = \delta \dot{u} dt$ , la integración por partes del primer término se expresa:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{u} \delta \dot{u} dt = m \dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{u} \delta u dt$$

Dado que  $\delta u = 0$  en  $t_1$  y  $t_2$ , la anterior se reduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{u} \delta \dot{u} dt = - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{u} \delta u dt$$

y reemplazando: 
$$\int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{u} - c \dot{u} - k u + f) \delta u dt = 0$$

Dado que  $\delta u(t)$  es arbitrario (función infinitésima no nula, salvo en  $t_1$  y  $t_2$ ), la ecuación anterior se satisface sólo cuando:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f$$

ecuación coincidente con la hallada en el Ejemplo 1.4.1.1 con el método del equilibrio dinámico, el cual se muestra como el más indicado para obtener las ecuaciones del movimiento de sistemas sencillos.

El principio de Hamilton ofrece la ventaja de conducir directamente a las ecuaciones del movimiento de todo sistema mecánico a partir de las expresiones de  $T$ ,  $U$  y  $\delta W_d$ , cualquiera sea el sistema de coordenadas que se utilice. Puede ser aplicado tanto en sistemas discretos como continuos [7].

### 1.6 Ecuaciones de Lagrange

Es posible encontrar otra forma de expresar el principio de Hamilton más apropiada para su aplicación en sistemas discretos [15]. Para ilustrar esto consideremos una vez más el sistema de una masa con un resorte elástico y un amortiguamiento viscoso de la Figura 1.4.1(a).

La energía cinética es función de la velocidad:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 = T(\dot{u})$$

Por consiguiente, la variación producida por una variación infinitésima  $\delta \dot{u}$  de la velocidad, se expresa:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} \tag{1.50}$$

La energía de deformación es función del desplazamiento  $U(u) = \frac{1}{2} k u^2$ ; su variación es:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial u} \delta u \quad (1.51)$$

El trabajo de las fuerzas no conservativas en una variación del desplazamiento se expresa, como ya ha sido visto, con  $\delta W_d = (f - c\dot{u}) \delta u$ .

Aplicando Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta (T - U) + \delta W_d] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} - \frac{\partial U}{\partial u} \delta u + f \delta u - c\dot{u} \delta u \right) dt = 0 \quad (1.52)$$

Integrando por partes el primer término:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) \delta u dt \quad (1.53)$$

Teniendo en cuenta que  $\delta u = 0$  en  $t_1$  y  $t_2$ , y reemplazando en (1.52) se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial U}{\partial u} + f - c\dot{u} \right] \delta u dt = 0 \quad (1.54)$$

Dado que  $\delta u$  es una variación arbitraria no nula, la anterior se cumple sólo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial U}{\partial u} + c\dot{u} = f \quad (1.55)$$

Introduciendo ahora la función de disipación por amortiguamiento viscoso (denominada *función de disipación de Rayleigh*):  $D(\dot{u}) = \frac{1}{2} c \dot{u}^2$ , la correspondiente fuerza disipativa se expresa:

$$c\dot{u} = \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} \quad (1.56)$$

Reemplazando en (1.55) resulta finalmente:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} = f \quad (1.57)$$

Esta última expresión es la ecuación de Lagrange para el sistema más simple de una masa con un grado de libertad. Para este caso, derivando las expresiones de  $T$ ,  $D$  y  $U$  se determinan los tres términos de (1.57):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) = m\ddot{u}; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} = c\dot{u}; \quad \frac{\partial U}{\partial u} = k u$$

Al reemplazarlos en la ecuación de Lagrange se obtiene, de una manera directa, la ecuación del movimiento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k u = f \quad (1.58)$$

## CONCEPTOS BÁSICOS

La ecuación de Lagrange en sistemas con más de un grado de libertad, en algunos aspectos difiere de la (1.57) deducida para sistemas de un grado de libertad, como se muestra a continuación.

Sea el caso de un sistema de  $N$  masas unidas con resortes lineales y amortiguadores viscosos, sin ningún otro tipo de restricciones. Si se analiza en tres dimensiones, cada vector  $\bar{u}_j$  ( $j = 1 \dots N$ ) se describe con tres componentes independientes, con dos cuando el sistema es plano, y con una si es unidimensional. Por consiguiente, es posible expresar cada vector  $\bar{u}_j$  en función de todas las componentes escalares independientes  $q_k$  del sistema, con  $k = 1 \dots n$ , ( $n = 3N$ ,  $n = 2N$ ,  $n = N$ , respectivamente), denominadas coordenadas generalizadas del problema:

$$\bar{u}_j = \bar{u}_j(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad j=1 \dots N \quad (1.59)$$

La energía de deformación elástica del sistema es la expresión cuadrática:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ k_j (\bar{u}_j \cdot \check{e}_j)^2 + \sum_{i=j+1}^N k_{ij} ((\bar{u}_j - \bar{u}_i) \cdot \check{e}_{ij})^2 \right] \quad (1.60)$$

donde  $k_j$  es la rigidez de un resorte en la dirección  $\check{e}_j$  que liga la masa  $m_j$  con el sistema de referencia fijo, y  $k_{ij}$  la del resorte de dirección  $\check{e}_{ij}$  que une las masas  $m_i$  y  $m_j$ .

Reemplazando (1.59) en (1.60) se obtiene  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , y por consiguiente la variación se expresa:

$$\delta U = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.61)$$

La energía cinética del sistema es:  $T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\bar{u}}_j \cdot \dot{\bar{u}}_j$  (1.62)

$$\text{donde:} \quad \dot{\bar{u}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

En general,  $T$  es función de las coordenadas y velocidades:  $T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ . Por

consiguiente su variación se escribe:  $\delta T = \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$  (1.63)

Por otra parte, el trabajo virtual de las fuerzas externas y de amortiguamiento (no conservativas) se expresa:

$$\begin{aligned} \delta W_d &= \sum_{j=1}^N \left[ \bar{f}_j - c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j) \check{e}_j \right] \cdot \delta \bar{u}_j + \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N \left[ -c_{ij} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij} \check{e}_{ij} \cdot \delta \bar{u}_j - c_{ij} (\dot{\bar{u}}_i - \dot{\bar{u}}_j) \cdot \check{e}_{ij} \check{e}_{ij} \cdot \delta \bar{u}_i \right] = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[ \bar{f}_j - c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j) \check{e}_j \right] \cdot \delta \bar{u}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N -c_{ij} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij} \check{e}_{ij} \cdot \delta (\bar{u}_j - \bar{u}_i) \end{aligned} \quad (1.64)$$

donde  $c_j$  es el coeficiente del amortiguador entre la masa  $m_j$  y el sistema de referencia fijo, y  $c_{ij}$  del amortiguador entre las masas  $m_i$  y  $m_j$ .

Utilizando (1.59) los desplazamientos virtuales se expresan en función de las variaciones de las coordenadas generalizadas:

$$\delta \bar{u}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} \delta q_k ; \quad \delta(\bar{u}_j - \bar{u}_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\bar{u}_j - \bar{u}_i)}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.65)$$

El primer término de (1.64) resulta entonces:

$$\sum_{j=1}^N \bar{f}_j \cdot \delta \bar{u}_j = \sum_{j=1}^N \bar{f}_j \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \bar{f}_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (1.66)$$

Definiendo ahora las denominadas fuerzas externas generalizadas

$$Q_k = \sum_{j=1}^N \bar{f}_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} ; \quad k = 1..n \quad (1.67)$$

y reemplazándolas en (1.66) se tiene:

$$\sum_{j=1}^N \bar{f}_j \cdot \delta \bar{u}_j = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (1.68)$$

Sustituyendo (1.65) en los restantes términos de (1.64):

$$\sum_{j=1}^N c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j) \check{e}_j \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N c_{ij} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij} \check{e}_{ij} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\bar{u}_j - \bar{u}_i)}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.69)$$

Derivando (1.59) con respecto al tiempo:  $\dot{\bar{u}}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$

luego:  $\frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q_k}$  (1.70)

$$\frac{\partial(\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial(\bar{u}_j - \bar{u}_i)}{\partial q_k} \quad (1.71)$$

Reemplazando en (1.69):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j) \check{e}_j \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N c_{ij} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij} \check{e}_{ij} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i)}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{j=1}^N c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j) \check{e}_j \cdot \frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N c_{ij} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij} \check{e}_{ij} \cdot \frac{\partial(\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i)}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k = \\ & = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N c_{ij} ((\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij})^2 \right] \delta q_k \end{aligned} \quad (1.72)$$

La expresión entre corchetes es la denominada función de disipación del sistema:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ c_j (\dot{\bar{u}}_j \cdot \check{e}_j)^2 + \sum_{i=j+1}^N c_{ij} ((\dot{\bar{u}}_j - \dot{\bar{u}}_i) \cdot \check{e}_{ij})^2 \right] \quad (1.73)$$

con la cual, la expresión (1.72) se reduce a:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \quad (1.74)$$

Luego, reemplazando (1.68) y (1.74) en (1.64), el trabajo virtual de las fuerzas disipativas se escribe:

$$\delta W_d = \sum_{k=1}^n \left( Q_k - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \quad (1.75)$$

Sustituyendo las expresiones de  $\delta T$ ,  $\delta U$  y  $\delta W_d$  en la ecuación de Hamilton (1.35):

CONCEPTOS BÁSICOS

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k - \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k + Q_k \delta q_k \right) dt = 0 \quad (1.76)$$

Integrando por partes el primer término y aplicando la regla del cálculo variacional que establece que la variación de la derivada es igual a la derivada de la variación, se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \quad (1.77)$$

Dado que  $\delta q_k = 0$  en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , finalmente el principio de Hamilton se expresa:

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} + Q_k \right] \delta q_k dt = 0 \quad (1.78)$$

Como las coordenadas  $q_k$  son independientes, las variaciones  $\delta q_k$  son arbitrarias. Por consiguiente, la condición anterior se cumple sólo si se satisfacen las siguientes  $n$  ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k ; \quad k=1 \dots n \quad (1.79)$$

Obviamente, el segundo término es nulo cuando la energía cinética es función solamente de las velocidades generalizadas (sistemas lineales).

Es importante destacar que las ecuaciones anteriores son válidas también para sistemas de masas no puntuales, en cuyo caso el desplazamiento se describe con traslaciones  $\bar{u}_j$  y rotaciones  $\bar{\theta}_j$ , y por ende deben adecuarse las expresiones que intervienen en el problema. Por ejemplo, en la expresión de la energía cinética del sistema, además de las masas  $m_j$ , también deben ser tenidos en cuenta los respectivos momentos de inercia.

**Ejemplo 1.6.1:** Hallar las ecuaciones del movimiento del sistema discreto de dos grados de libertad que se muestra en la Figura 1.6.1.

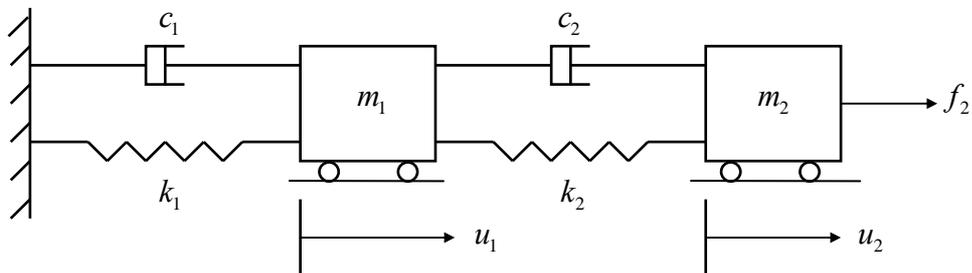


Figura 1.6.1: Sistema discreto de dos grados de libertad

Como  $u_1$  y  $u_2$  son magnitudes escalares independientes pueden adoptarse como coordenadas generalizadas del problema. Las expresiones de  $T$ ,  $D$  y  $U$  son:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2$$

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)^2 = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \dot{u}_1^2 - c_2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{u}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) u_1^2 - k_2 u_1 u_2 + \frac{1}{2} k_2 u_2^2$$

Las fuerzas generalizadas en este caso son:  $Q_1 = f_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_1} = 0$  ;  $Q_2 = f_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_2} = f_2$

Reemplazando en (1.79) con  $k = 1, 2$ :

$$m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = f_2$$

Con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

## 1.7 Expresión matricial de las ecuaciones de Lagrange

El procedimiento descrito en el ejemplo anterior puede sistematizarse usando notación matricial, para ser aplicada en la obtención directa de las ecuaciones del movimiento de sistemas discretos lineales. La energía cinética, la función de disipación y la energía de deformación pueden ser expresadas con las siguientes formas cuadráticas:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}' [M] \{\dot{q}\} \quad (1.80a)$$

$$D = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}' [C] \{\dot{q}\} \quad (1.80b)$$

$$U = \frac{1}{2} \{q\}' [K] \{q\} \quad (1.80c)$$

donde  $\{q\}$  es la matriz-columna de los desplazamientos generalizados;

$\{\dot{q}\}$  es la matriz-columna de las velocidades generalizadas;

$[M]$  es la matriz de masa, cuadrada simétrica;

$[C]$  es la matriz de amortiguamiento, cuadrada simétrica;

$[K]$  es la matriz de rigidez elástica, cuadrada simétrica.

Es importante destacar que la expresión matricial de la energía cinética (1.80a) es válida sólo cuando es función de las velocidades generalizadas, y no de las coordenadas generalizadas. Usando estas expresiones matriciales y agrupando en una matriz-columna los términos de las ecuaciones de Lagrange (1.79), se tiene:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \right\} = [M] \{\ddot{q}\} \quad (1.81a)$$

$$\left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \right\} = [C] \{ \dot{q} \} \quad (1.81b)$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\} = [K] \{ q \} \quad (1.81c)$$

Por consiguiente, las  $n$  ecuaciones de Lagrange quedan agrupadas en la expresión matricial:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (1.82)$$

De acuerdo con (1.81), las matrices de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez, se obtienen una vez determinadas las funciones  $T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ,  $D = D(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  y  $U = U(q_1, \dots, q_n)$ , respectivamente.

Con  $m_j > 0$ , la matriz de masa siempre es positiva definida ya que, para todo  $\{\dot{q}\} \neq 0$ , la energía cinética no puede ser nula ni negativa. Si el sistema se encuentra vinculado de forma tal que todo desplazamiento  $\{q\} \neq 0$  produce deformación elástica, entonces también la matriz de rigidez es positiva definida. Por el contrario, si la vinculación permite desplazamientos sin deformación (desplazamiento de cuerpo rígido, en cuyo caso la energía de deformación es nula) la matriz de rigidez es positiva semidefinida, dado que la energía nunca puede ser negativa. El mismo razonamiento vale para la matriz de amortiguamiento. Las componentes de la matriz-columna de las fuerzas generalizadas se obtienen aplicando la fórmula (1.67).

### 1.8 Ecuaciones del movimiento en sistemas con restricciones lineales

En algunos problemas es más fácil expresar las funciones de energía en términos de un conjunto de coordenadas generalizadas  $q_k$  ( $k=1\dots n$ ) las cuales no son todas independientes. En estos casos se tendrá un grupo de  $r$  restricciones de la forma

$$g_i(q_1, \dots, q_n) = 0; \quad i=1\dots r < n \quad (1.83)$$

En este curso sólo serán consideradas formas lineales independientes para las ecuaciones de restricción [4]. Por consiguiente, las mismas pueden agruparse en la siguiente ecuación matricial:

$$[G] \{q\} = \{0\} \quad (1.84)$$

La matriz  $[G]$  tiene  $r$  filas y  $n$  columnas. La expresión de las restricciones puede ser particionada:

$$[[G_1] \ [G_2]] \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = [G_1] \{q_1\} + [G_2] \{q_2\} = \{0\} \quad (1.85)$$

donde  $\{q_1\}$  es el conjunto de  $r$  desplazamientos dependientes y  $\{q_2\}$  agrupa  $n-r$  desplazamientos independientes. En consecuencia la matriz  $[G_2]$  tiene  $r$  filas y  $n-r$  columnas, mientras que  $[G_1]$  es cuadrada de orden  $r$ , y puede ser invertida ya que las restricciones son linealmente independientes.

Despejando  $\{q_1\}$  de (1.85) se obtiene:

$$\{q_1\} = -[G_1]^{-1}[G_2] \{q_2\} \quad (1.86)$$

Esta fórmula expresa la relación entre los desplazamientos dependientes  $\{q_1\}$  y los independientes  $\{q_2\}$  (la matriz  $[G_1]^{-1}[G_2]$  tiene  $r$  filas y  $n-r$  columnas).

Finalmente, agrupando los dos conjuntos de desplazamientos resulta:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G_1]^{-1}[G_2] \\ [I] \end{bmatrix} \{q_2\} = [T_G] \{q_2\} \quad (1.87)$$

donde  $[I]$  es la matriz unidad de orden  $n-r$  (la matriz de transformación  $[T_G]$  tiene  $n$  filas y  $n-r$  columnas).

Obviamente, la misma matriz  $[T_G]$  se aplica para transformar las velocidades generalizadas  $\{\dot{q}\}$ , ya que las componentes de la matriz  $[G]$  no dependen del tiempo.

La fórmula de transformación (1.87) se sustituye ahora en las formas cuadráticas (1.80):

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}_2\}' [T_G]' [M][T_G] \{\dot{q}_2\} = \frac{1}{2} \{\dot{q}_2\}' [\bar{M}] \{\dot{q}_2\} \quad (1.88a)$$

$$D = \frac{1}{2} \{\dot{q}_2\}' [T_G]' [C][T_G] \{\dot{q}_2\} = \frac{1}{2} \{\dot{q}_2\}' [\bar{C}] \{\dot{q}_2\} \quad (1.88b)$$

$$U = \frac{1}{2} \{q_2\}' [T_G]' [K][T_G] \{q_2\} = \frac{1}{2} \{q_2\}' [\bar{K}] \{q_2\} \quad (1.88c)$$

Las tres matrices reducidas son cuadradas simétricas de orden  $n-r$ :

$$[\bar{M}] = [T_G]' [M][T_G] \quad (1.89a)$$

$$[\bar{C}] = [T_G]' [C][T_G] \quad (1.89b)$$

$$[\bar{K}] = [T_G]' [K][T_G] \quad (1.89c)$$

Por otra parte, en la expresión del trabajo virtual de las fuerzas generalizadas (1.68) también deben aplicarse las restricciones con la fórmula (1.87):

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = \{\delta q\}' \{Q\} = \{\delta q_2\}' [T_G]' \{Q\} = \{\delta q_2\}' \{\bar{Q}\} \quad (1.90)$$

$$\text{donde } \{\bar{Q}\} = [T_G]' \{Q\} \quad (1.91)$$

es la matriz-columna reducida de las fuerzas generalizadas.

Dado que las funciones de las energías, de disipación, y del trabajo virtual quedan expresadas ahora en términos de las coordenadas independientes  $\{q_2\}$ , pueden sustituirse en las ecuaciones de Lagrange, con las que resulta la ecuación matricial de orden  $n-r$ :

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}_2\} + [\bar{C}] \{\dot{q}_2\} + [\bar{K}] \{q_2\} = \{\bar{Q}\} \quad (1.92)$$

CONCEPTOS BÁSICOS

**Ejemplo 1.8.1:** Obtener la expresión matricial de las ecuaciones del movimiento del sistema torsional de la Figura 1.4.3 (a), que fue resuelto en la Sección 1.4.1 con el método del equilibrio dinámico.

En la Figura 1.4.3 (b) se muestran las rotaciones  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . Las dos primeras no son independientes, ya que entre los engranajes no se produce deslizamiento relativo. Esta restricción se expresa  $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$ , o sea  $\theta_1 - \varphi \theta_2 = 0$  siendo  $\varphi = r_2 / r_1$ .

En forma matricial:

$$[G]\{q\} = [1 \quad -\varphi \quad 0] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Adoptando  $\theta_2$  y  $\theta_3$  como coordenadas generalizadas independientes se tiene  $[G_1] = [1]$  y  $[G_2] = [-\varphi \quad 0]$ . Luego:  $-[G_1]^{-1}[G_2] = [\varphi \quad 0]$ , y por consiguiente la fórmula de transformación (1.87) resulta:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \therefore [T_G] = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, las energías cinética y de deformación se escriben:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_3)^2 = \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \theta_2^2 - k_2 \theta_2 \theta_3 + \frac{1}{2} k_2 \theta_3^2$$

En este caso :  $D=0$ .

$$\text{Además: } Q_1 = M_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} = 0; \quad Q_2 = M_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} = 0; \quad Q_3 = M_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_3} = M_3$$

Aplicando (1.81a):

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \right\} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

Aplicando (1.81c):

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \theta} \right\} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Finalmente, aplicando las fórmulas de transformación (1.89a), (1.89c) y (1.91) se obtienen

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \varphi^2 I_1 + I_2 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}; \quad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} \varphi^2 k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \{\bar{Q}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

En consecuencia, las ecuaciones del movimiento se reducen a la siguiente expresión matricial, que coincide con la obtenida en el Ejemplo 1.4.1.3.

$$\begin{bmatrix} \varphi^2 I_1 + I_2 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^2 k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

**Ejemplo 1.8.2:** Obtener las ecuaciones del movimiento del sistema discreto de tres grados de libertad que se muestra en la Figura 1.8.1, imponiendo la restricción  $u_0 = 0$ .

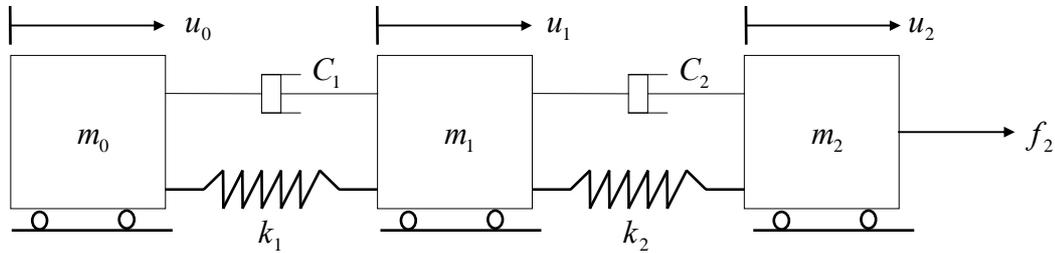


Figura 1.8.1: Sistema discreto de tres grados de libertad.

Considerando los desplazamientos como si fueran independientes, al aplicar las ecuaciones de Lagrange resulta:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

La restricción  $u_0 = 0$  es la forma más simple de una ecuación del tipo (1.84); la misma se expresa:

$$[G]\{u\} = [1 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0; \quad \text{luego: } -[G_1]^{-1}[G_2] = [0 \ 0]$$

La fórmula de transformación (1.87) resulta:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [T_G] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Aplicando las fórmulas (1.89) de reducción:

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Con la fórmula (1.91):

$$\{\bar{Q}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Esta solución coincide con la obtenida en el Ejemplo 1.6.1. Se comprueba que las matrices reducidas pueden hallarse directamente eliminando las filas y columnas, correspondientes a los desplazamientos anulados; en las matrices  $[K]$ ,  $[M]$  y  $[C]$  que se obtuvieron sin tener en cuenta la restricción; y suprimiendo, además, las respectivas componentes en el vector  $\{Q\}$  de las fuerzas generalizadas.





El desarrollo de este determinante conduce a la ecuación algebraica de frecuencia (o ecuación característica) del sistema, que es un polinomio de grado  $N$  en la incógnita  $\omega^2$ . Las  $N$  raíces de este polinomio son los cuadrados de las frecuencias angulares del sistema discreto.

Al reemplazar en (2.9) una de las raíces, los correspondientes valores de  $U_i$  no resultan determinados, vale decir que existen infinitas soluciones, pero todas ellas definen configuraciones geoméricamente similares. En otras palabras, para cada valor de  $\omega$  el correspondiente conjunto de valores de  $U_i$  define una forma característica de esa frecuencia, que se denomina modo natural. A través de un factor de escala arbitrario, representa las infinitas posibles soluciones.

Cabe destacar que en la teoría de las vibraciones libres no intervienen fuerzas externas ni se establecen condiciones iniciales. Sólo se analizan los posibles movimientos del sistema, después que cesa la causa que lo puso en movimiento. Esta causa genéricamente se denomina *perturbación*, o *excitación*.

En términos matemáticos, la determinación de las frecuencias y modos naturales constituye un problema de autovalores y autovectores, respectivamente. Se sabe que los autovalores de una matriz real y simétrica son números reales. Si además la matriz es positiva definida, todos son positivos. En algunos casos se obtiene un mismo valor para dos o más autovalores (raíces múltiples de la ecuación característica). Finalmente, una matriz positiva semidefinida de orden  $n$  y rango  $r$  posee  $n-r$  autovalores nulos y  $r$  autovalores positivos.

La matriz diagonal formada con los autovalores se denomina *matriz espectral*. Agrupando los autovectores se forma una matriz cuadrada, llamada *matriz modal*  $[U]$ , cuyas columnas son los modos naturales de vibración.

## 2.2 Determinación directa de frecuencias y modos naturales

El análisis realizado en la Sección anterior describe un procedimiento útil sólo en sistemas con pocos grados de libertad. Consiste en plantear la ecuación característica (2.12), y una vez halladas las raíces reemplazarlas en (2.10) para obtener las amplitudes, expresadas en función de una de ellas adoptada como referencia.

**Ejemplo 2.2.1:** Hallar las frecuencias y modos naturales del sistema discreto de tres masas puntuales y cuatro resortes de la Figura 2.2.1 (a), con los siguientes valores numéricos:  $m_1 = m_3 = 2$  kg,  $m_2 = 1$  kg,  $k_1 = k_4 = 3$  N/m y  $k_2 = k_3 = 1$  N/m.

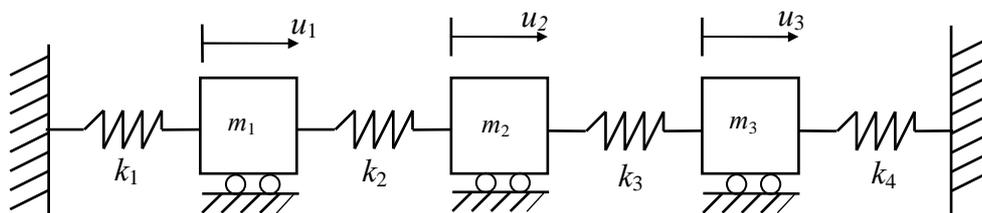


Figura 2.2.1 (a): Sistema de tres grados de libertad con restricciones

## ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DISCRETOS

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 - k_3 u_2 + (k_3 + k_4) u_3 &= 0 \end{aligned}$$

De acuerdo con (2.10), para vibraciones libres las mismas se expresan:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - \omega^2 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reemplazando valores numéricos (omitiendo la escritura de las unidades de medida) se tiene:

$$[A(\lambda)]\{U\} = \begin{bmatrix} 4-2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{donde } \lambda = \omega^2.$$

Con el determinante se obtiene la ecuación característica:  $(4-2\lambda)^2 (2-\lambda) - 2(4-2\lambda) = 0$

Operando algebraicamente resulta:  $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

Las raíces son:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ . Los valores de  $\lambda_i$  están expresados en (radián/segundo)<sup>2</sup>.

La frecuencia fundamental del sistema es la de menor valor:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1 \text{ rad/s} \quad \therefore f_1 = \frac{\omega}{2\pi} \cong 0.159 \text{ ciclos/s} = 0.159 \text{ Hz}$$

El correspondiente modo fundamental se obtiene reemplazando  $\lambda = 1$  en el sistema de ecuaciones. Con la primera ecuación resulta:  $U_2 = 2U_1$ ; con la tercera se obtiene  $U_2 = 2U_3$ ; luego,  $U_3 = U_1$ . Obviamente, estos resultados también satisfacen la segunda ecuación.

Repitiendo el procedimiento con  $\lambda = 2$ , resulta:  $U_2 = 0$ ,  $U_3 = -U_1$ .

Finalmente, con  $\lambda = 3$  se obtiene:  $U_2 = -2U_1$ ,  $U_3 = U_1$ .

Asignando la unidad a la amplitud  $U_1$ , los tres modos naturales quedan descritos por los vectores (matrices-columna):

$$\{U\}_1^t = [1 \quad 2 \quad 1] ; \quad \{U\}_2^t = [1 \quad 0 \quad -1] ; \quad \{U\}_3^t = [1 \quad -2 \quad 1]$$

En la página siguiente, en la Figura 2.2.1 (b) se muestran esquemas de los tres modos naturales de vibración. Por similitud con el sistema discreto de un grado de libertad, cuya frecuencia angular es  $\omega = \sqrt{k/m}$ , puede asegurarse que aumentando las rigideces de los resortes, o disminuyendo las masas, se produce un incremento en las frecuencias naturales.

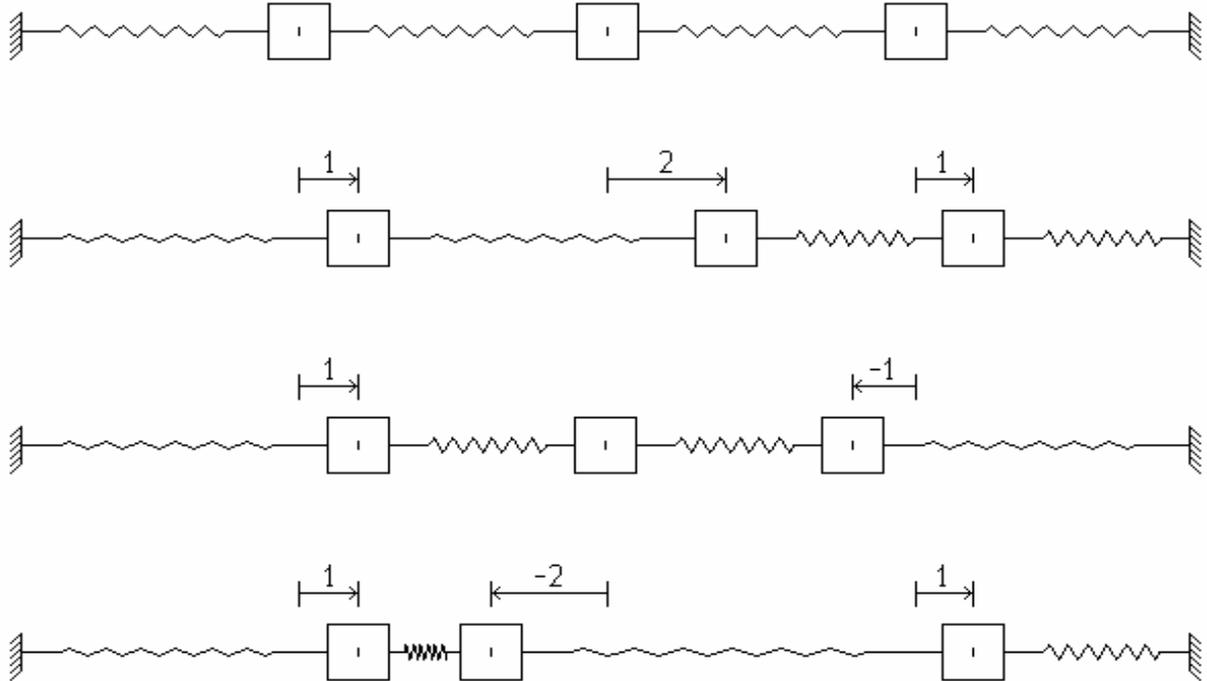


Figura 2.2.1 (b): Sistema en reposo y esquemas de los tres modos naturales.

Por ejemplo, cuadruplicando el valor de la rigidez de los cuatro resortes, o reduciendo a la cuarta parte las tres masas, se obtienen  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 8$  y  $\lambda_3 = 12$  (se duplican las frecuencias), con los mismos modos naturales.

Con los resultados de este ejemplo es fácil comprobar numéricamente que los autovectores son linealmente independientes, debido a que el determinante de la matriz modal es distinto de cero. Esto significa que la expresión:

$$\alpha_1 \{U\}_1 + \alpha_2 \{U\}_2 + \alpha_3 \{U\}_3 = \{0\}$$

sólo se cumple cuando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

**Ejemplo 2.2.2:** Obtener los autovalores y modos naturales de vibración del sistema de cuatro grados de libertad de la Figura 2.2.2 (a), que deriva del esquema del problema anterior, permitiendo ahora el movimiento vertical de la masa  $m_2$  y agregando los resortes  $k_5$  y  $k_6$ . Resolver con los mismos datos numéricos del problema 2.2.1 y  $k_5 = k_6 = 1$  N/m.

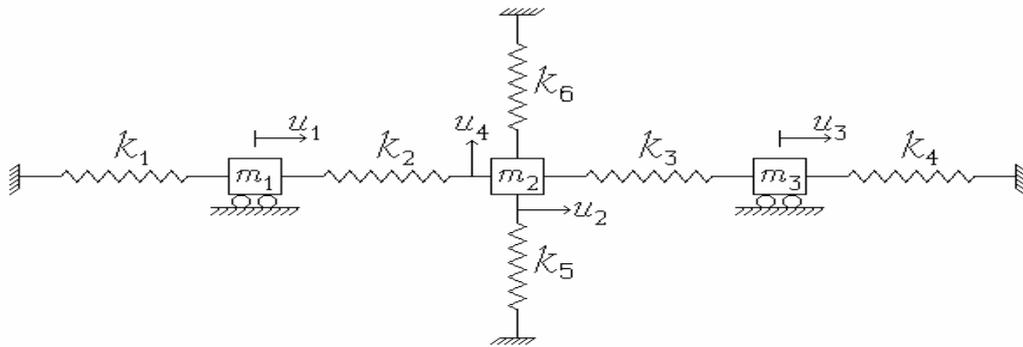


Figura 2.2.2(a): Sistema bidimensional de tres masas, con cuatro grados de libertad.

A las tres ecuaciones del movimiento horizontal del problema anterior se agrega ahora la correspondiente al movimiento vertical de la masa  $m_2$ :

$$m_2 \ddot{u}_4 + (k_5 + k_6) u_4 = 0$$

Esta ecuación resulta totalmente desacoplada en virtud de la hipótesis de pequeños desplazamientos (infinitésimos). Después de reemplazar los valores numéricos, la ecuación matricial se expresa:

$$[A(\lambda)]\{U\} = \begin{bmatrix} 4-2\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4-2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La ecuación característica es la misma del ejemplo anterior multiplicada por  $2-\lambda$ ; en consecuencia, ahora las raíces son:  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=2$ ,  $\lambda_3=2$  y  $\lambda_4=3$ .

Se observa que para  $\lambda \neq 2$  debe ser  $U_4 = 0$ ; mientras que con  $\lambda = 2$  la amplitud  $U_4$  resulta indeterminada, de modo que su valor puede adoptarse arbitrariamente. Asignando la unidad a la amplitud  $U_1$  y adoptando  $U_4 = 1$  y  $U_4 = 2$ , los cuatro modos naturales son:

$$\{U\}'_1 = [1 \ 2 \ 1 \ 0]; \quad \{U\}'_2 = [1 \ 0 \ -1 \ 1]; \quad \{U\}'_3 = [1 \ 0 \ -1 \ 2]; \quad \{U\}'_4 = [1 \ -2 \ 1 \ 0]$$

Es fácil demostrar que toda combinación lineal de los modos  $\{U\}'_2$  y  $\{U\}'_3$ , correspondientes al autovalor múltiple (doble)  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ , también es solución de la ecuación matricial. En efecto, reemplazando  $\lambda = 2$  en la matriz  $[A(\lambda)]$ , se verifican  $[A(2)]\{U\}'_2 = \{0\}$  y  $[A(2)]\{U\}'_3 = \{0\}$ ; por consiguiente, para todo par de constantes reales  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  se cumple:

$$\alpha_2 [A(2)]\{U\}_2 + \alpha_3 [A(2)]\{U\}_3 = [A(2)] (\alpha_2 \{U\}_2 + \alpha_3 \{U\}_3) = \{0\}$$

Por ejemplo, con  $\alpha_2 = -1$  y  $\alpha_3 = 1$  se obtiene el autovector  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^t$  que describe la vibración de  $m_2$  en la dirección vertical con inmovilidad de las tres masas en la dirección horizontal. Poniendo  $\alpha_2 = 2$  y  $\alpha_3 = -1$  resulta  $[1 \ 0 \ -1 \ 0]^t$ ; este modo se produce con inmovilidad de  $m_2$  en ambas direcciones.

Es importante destacar que el sistema discreto bidimensional de la Figura 2.2.2(a) es equivalente al conjunto de los dos sistemas unidimensionales independientes de las Figuras 2.2.2(b) y 2.2.2(c) que se muestran en la página siguiente.

La existencia de una familia de formas modales para un mismo autovalor es consecuencia sólo de la multiplicidad del autovalor, y no del desacoplamiento de las ecuaciones de vibración. Por ejemplo, si se resuelve el mismo ejemplo de la Figura 2.2.2(a) con  $k_5 = k_6 = 2$  N/m, la última componente en la diagonal de la matriz  $[A(\lambda)]$  pasa a ser  $4 - \lambda$ . Por consiguiente, los cuatro autovalores ordenados en forma creciente, ahora son:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  y  $\lambda_4 = 4$ .

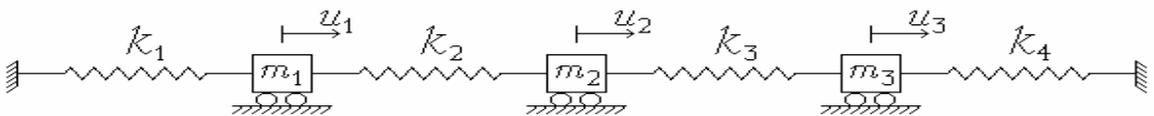


Figura 2.2.2(b): Sistema unidimensional de tres grados de libertad.

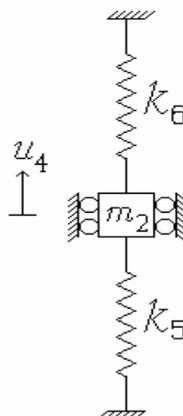


Figura 2.2.2(c): Sistema unidimensional de un grado de libertad.

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DISCRETOS

Reemplazando  $\lambda = 4$  en la ecuación matricial modificada, se obtiene una única forma modal:

$\{U\}'_4 = [0 \ 0 \ 0 \ U_4]$ . La indeterminación está dada por la única amplitud no nula,  $U_4$ , que puede asignársele cualquier valor (por ejemplo, la unidad).

Por otra parte, con  $\lambda = 1, 2$  ó  $3$ , la amplitud  $U_4$  resulta nula. Luego, los cuatro modos naturales del sistema modificado son:

$$\{U\}'_1 = [1 \ 2 \ 1 \ 0]; \quad \{U\}'_2 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]$$

$$\{U\}'_3 = [1 \ -2 \ 1 \ 0]; \quad \{U\}'_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Nótese que los modos  $\{U\}'_2$  y  $\{U\}'_4$  son formas posibles de vibración libre del sistema original con el autovalor doble  $\lambda = 2$ . Pero en el sistema modificado, ninguna combinación lineal de los mismos es solución de las ecuaciones de vibración, ya que corresponden a dos autovalores distintos.

**Ejemplo 2.2.3:** Hallar los autovalores y autovectores del sistema de seis grados de libertad de la Figura 2.2.3. Los valores de las masas y de las rigideces son los mismos del ejemplo 2.2.1.

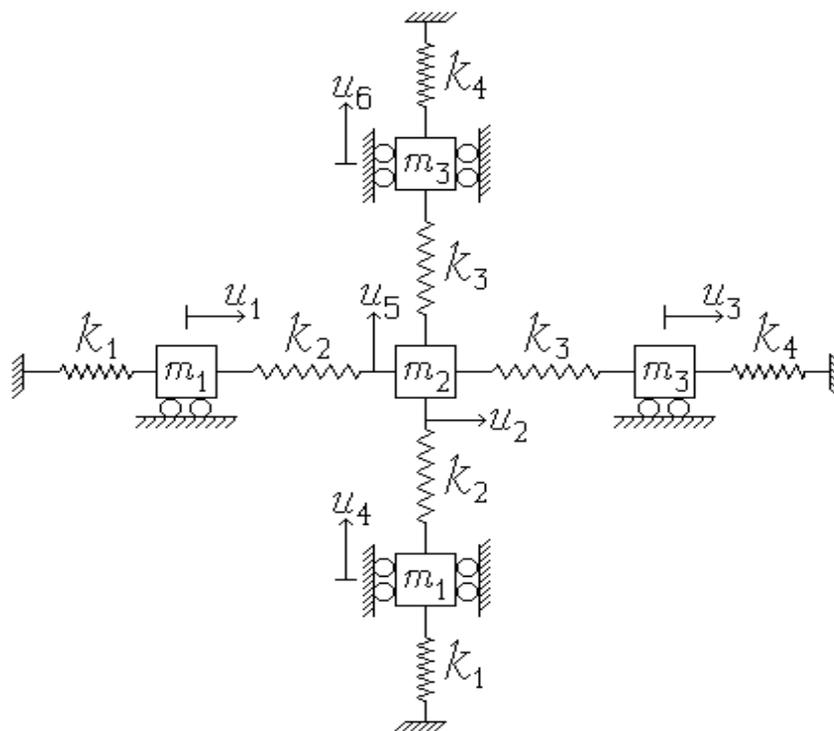


Figura 2.2.3: Sistema bidimensional de seis grados de libertad.

El sistema de seis ecuaciones del movimiento vibratorio se desdobra en dos subconjuntos desacoplados:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4-2\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4-2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4-2\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-2\lambda \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos en el ejemplo 2.2.1, los seis autovalores en orden creciente son:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ ,  $\lambda_5 = \lambda_6 = 3$ . La respectiva matriz modal es:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las siguientes combinaciones lineales de los modos naturales correspondientes a un autovalor repetido, también satisfacen a las ecuaciones de vibración:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \{U\}_1 + \alpha_2 \{U\}_2 & \quad \text{con } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \alpha_3 \{U\}_3 + \alpha_4 \{U\}_4 & \quad \text{con } \lambda_3 = \lambda_4 = 2 \\ \alpha_5 \{U\}_5 + \alpha_6 \{U\}_6 & \quad \text{con } \lambda_5 = \lambda_6 = 3 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.2.4:** Calcular los autovalores del sistema de la Figura 2.2.4, con  $k_1 = k_2 = 2$  N/m,  $m_1 = m_3 = 2$  kg y  $m_2 = 1$  kg.

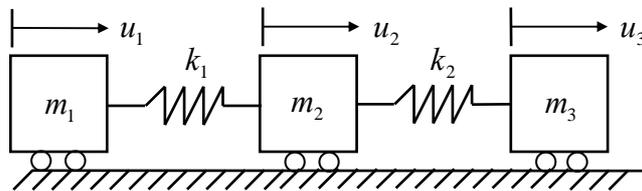


Figura 2.2.4: sistema de tres grados de libertad sin restricciones.

Las ecuaciones del movimiento de este sistema discreto de tres grados de libertad son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_1 u_2 & = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 & = 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 - k_2 u_2 + k_2 u_3 & = 0 \end{aligned}$$

## ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DISCRETOS

Para vibraciones libres (con  $\lambda = \omega^2$ ):

$$\begin{bmatrix} k_1 - \lambda m_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \lambda m_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En símbolos:  $[K]\{U\} - \lambda [M]\{U\} = ([K] - \lambda [M])\{U\} = \{0\}$ , donde  $[K]$  es la matriz de rigidez y  $[M]$  la matriz masa. Sustituyendo valores numéricos:

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Luego, la ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} 2-2\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-2\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o sea } \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:  $(1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 5) = 0$

Las tres raíces son:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 5$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones con  $\lambda = 0$ , resulta  $U_1 = U_2 = U_3$ ; con  $\lambda = 1$  se obtiene:

$U_2 = 0$ ,  $U_3 = -U_1$ ; y con  $\lambda = 5$ :  $U_2 = -4U_1$ ,  $U_3 = U_1$ .

Asignando la unidad para la amplitud  $U_1$ , los tres modos naturales se expresan:

$$\{U\}'_1 = [1 \ 1 \ 1]; \quad \{U\}'_2 = [1 \ 0 \ -1]; \quad \{U\}'_3 = [1 \ -4 \ 1]$$

En este ejemplo una de las frecuencias es nula y el correspondiente autovector en realidad no representa un movimiento oscilatorio, sino un desplazamiento de cuerpo rígido (sin deformación de los resortes, o sea sin energía de deformación). La presencia de un autovalor nulo es debido a la singularidad de la matriz de rigidez, cuyo rango en este ejemplo es 2. Generalizando este concepto, en sistemas con  $n$  grados de libertad que admiten  $n_r$  movimientos independientes de cuerpo rígido, el autovalor  $\lambda = 0$  posee multiplicidad  $n_r$  y los restantes  $n - n_r$  autovalores son positivos.

**Ejemplo 2.2.5:** Hallar los autovalores y autovectores del sistema de la Figura 2.2.3 si se suprimen los cuatro resortes que lo vinculan al sistema de referencia.

Las seis ecuaciones del movimiento armónico también en este caso se desdoblaron en dos grupos independientes de tres ecuaciones en cada uno. El determinante característico es:

$$\begin{vmatrix} 1-2\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-2\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Del mismo modo que en el ejemplo 2.2.3, la ecuación característica de sexto grado se expresa con el producto de dos polinomios iguales de tercer grado:

$$[(1-2\lambda)((2-\lambda)(1-2\lambda)-2)]^2 = [\lambda(1-2\lambda)(2\lambda-5)]^2 = 0$$

Por consiguiente, las 6 raíces en orden creciente son:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/2$ ;  $\lambda_5 = \lambda_6 = 5/2$ . Sustituyendo  $\lambda = 0$ , con las tres primeras ecuaciones resulta:  $U_1 = U_2 = U_3$ . En forma independiente, con las restantes tres ecuaciones se obtiene:  $U_4 = U_5 = U_6$ . Por consiguiente, los vectores

$$\{U\}'_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad \{U\}'_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

y toda combinación lineal de los mismos, son autovectores correspondientes a  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Análogamente, reemplazando  $\lambda = \frac{1}{2}$  resulta:  $U_2 = 0$ ,  $U_3 = -U_1$ ;  $U_5 = 0$ ,  $U_6 = -U_4$ . Los vectores:

$$\{U\}'_3 = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad \{U\}'_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1]$$

y toda combinación lineal de los mismos, son autovectores de los autovalores  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1/2$ .

Finalmente, con  $\lambda = 5/2$  resulta:  $U_2 = -4U_1$ ,  $U_3 = U_1$ ,  $U_5 = -4U_4$ ,  $U_6 = U_4$ . Los vectores:

$$\{U\}'_5 = [1 \ -4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad \{U\}'_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -4 \ 1]$$

y toda combinación lineal de los mismos, son autovectores de los autovalores  $\lambda_5 = \lambda_6 = 5/2$ .

Puede comprobarse que el determinante de la matriz de rigidez es nulo, como asimismo todo menor de 5° orden, mientras que el determinante de los menores principales de 4° orden que se obtienen eliminando una de las tres primeras filas y columnas, y otra de las tres últimas filas y columnas, es distinto de cero. Vale decir que el rango de la matriz de rigidez es 4, y por consiguiente hay cuatro autovalores no nulos.

## 2.3 Ortogonalidad y normalización

### 2.3.1 Propiedad de ortogonalidad

Si se efectúan los productos  $\{U\}'_i [M] \{U\}_j$  y  $\{U\}'_i [K] \{U\}_j$  en todos los ejemplos anteriores, se comprueba que son nulos cuando  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Esta propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración correspondientes a distintas frecuencias naturales de un sistema discreto es sumamente

importante, tanto desde el punto de vista teórico como práctico [1,4,7]. La demostración es sencilla utilizando notación matricial. Si  $\{U\}_i$  y  $\{U\}_j$  son los autovectores que corresponden a los autovalores  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$ , respectivamente, se cumplen:

$$[K]\{U\}_i - \lambda_i [M]\{U\}_i = \{0\} \quad (2.13)$$

$$[K]\{U\}_j - \lambda_j [M]\{U\}_j = \{0\} \quad (2.14)$$

Premultiplicando (2.13) por  $\{U\}_j^t$  y (2.14) por  $\{U\}_i^t$  se tiene:

$$\{U\}_j^t [K]\{U\}_i - \lambda_i \{U\}_j^t [M]\{U\}_i = 0 \quad (2.15)$$

$$\{U\}_i^t [K]\{U\}_j - \lambda_j \{U\}_i^t [M]\{U\}_j = 0 \quad (2.16)$$

Dado que  $[K]$  y  $[M]$  son simétricas, trasponiendo (2.16) resulta

$$\{U\}_j^t [K]\{U\}_i - \lambda_j \{U\}_j^t [M]\{U\}_i = 0 \quad (2.17)$$

Restando (2.15) se tiene

$$(\lambda_i - \lambda_j) \{U\}_j^t [M]\{U\}_i = 0 \quad (2.18)$$

Por consiguiente, si  $\lambda_i \neq \lambda_j$  necesariamente se cumple la condición de ortogonalidad:

$$\{U\}_j^t [M]\{U\}_i = 0 \quad (2.19)$$

Reemplazando ésta en (2.15) se obtiene:

$$\{U\}_j^t [K]\{U\}_i = 0 \quad (2.20)$$

Cuando  $\lambda_i = \lambda_j$  la condiciones de ortogonalidad no se cumplen necesariamente. Sin embargo, como se verá más adelante, siempre es posible encontrar autovectores  $\{U\}_i$  y  $\{U\}_j$  que las satisfagan.

Para ilustrar lo anterior, a continuación se comprueba que los primeros autovectores  $\{U\}_2$  y  $\{U\}_3$  obtenidos en el ejemplo 2.2.2, no cumplen la condición de ortogonalidad (2.19):

$$\{U\}_2^t [M]\{U\}_3 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$$

Sin embargo, sí la cumplen los autovectores  $\{U\}_2^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$  y  $\{U\}_3^t = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$  hallados en ese mismo ejemplo mediante combinaciones lineales de los anteriores. También la satisfacen los autovectores agrupados en la matriz modal del ejemplo 2.2.3, como asimismo todos los autovectores del ejemplo 2.2.5.

### 2.3.2 Normalización

Dado que las componentes de un autovector son valores relativos, pueden adoptarse diversos criterios de normalización. Los más usuales, y de mayor interés teórico-práctico, son:

a) Imponer la condición que el módulo del vector sea igual a la unidad. En símbolos:

$$\{U\}_i^t \{U\}_i = 1 \quad (2.21)$$

b) Normalizar con respecto a la matriz de rigidez, haciendo cumplir la condición:

$$\{U\}_i^t [K] \{U\}_i = 1 \quad (2.22)$$

c) Similarmente, normalizar con respecto a la matriz masa:

$$\{U\}_i^t [M] \{U\}_i = 1 \quad (2.23)$$

d) Cuando el análisis sólo se limita a visualizar (dibujar) la forma de los modos naturales de vibración, es usual el empleo de una normalización más simple que consiste en dividir todas las componentes por la de mayor absoluto, de manera que ésta pasa a valer la unidad.

Volviendo al primer ejemplo 2.2.1, aplicando a los autovectores los criterios de normalización a), b) y c) se obtienen las siguientes matrices modales:

$$[U]_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}; \quad [U]_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \end{bmatrix}; \quad [U]_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} \end{bmatrix}$$

Cuando el sistema tiene uno o más autovalores repetidos (ejemplos 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.5), existen infinitas soluciones, las cuales se pueden expresar como combinaciones lineales de tantos autovectores, distintos y linealmente independientes, como el grado de multiplicidad del autovalor. Normalizando los autovectores con (2.23) e imponiendo la condición de ortogonalidad (2.19), no se elimina la infinitud de las soluciones.

Para ilustrar lo anterior, recurrimos nuevamente al ejemplo 2.2.2, donde el sistema de ecuaciones con  $\lambda = 2$  se satisface con todo autovector de la forma  $\{U\}^t = [U_1 \quad 0 \quad -U_1 \quad U_4]$ , con  $U_1$  y  $U_4$  independientes entre sí (la relación  $U_4 / U_1$  no queda determinada).

Si  $\{U\}_2^t = [U_{12} \quad 0 \quad -U_{12} \quad U_{42}]$  y  $\{U\}_3^t = [U_{13} \quad 0 \quad -U_{13} \quad U_{43}]$  son los autovectores correspondientes a los autovalores  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 2$ , respectivamente, aplicando la condición (2.19) se tiene:

$$[U_{12} \quad 0 \quad -U_{12} \quad U_{42}] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{13} \\ 0 \\ -U_{13} \\ U_{43} \end{Bmatrix} = 4U_{12}U_{13} + U_{42}U_{43} = 0$$

Además, la normalización con respecto a las masas, en este caso introduce las siguientes ecuaciones:

$$4U_{12}^2 + U_{42}^2 = 1; \quad 4U_{13}^2 + U_{43}^2 = 1$$

Estas tres condiciones eliminan tres grados de infinitud de las componentes de los dos autovectores.

Despejando  $U_{12}$  y  $U_{13}$  de las dos últimas, y sustituyendo en la primera, resulta:

$$\pm \sqrt{(1-U_{42}^2)(1-U_{43}^2)} + U_{42} U_{43} = 0$$

o sea

$$\pm \sqrt{1-U_{42}^2-U_{43}^2+U_{42}^2 U_{43}^2} + U_{42} U_{43} = 0$$

la cual sólo puede cumplirse si  $U_{42}^2 + U_{43}^2 = 1$ . Además, teniendo en cuenta que ambas amplitudes deben ser números reales, se deducen las siguientes implicancias:

$$U_{42}^2 = 1 \Leftrightarrow U_{43}^2 = 0$$

$$U_{42}^2 = 0 \Leftrightarrow U_{43}^2 = 1$$

$$0 < U_{42}^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < U_{43}^2 < 1$$

Es obvio que las expresiones anteriores se cumplen cuando  $U_{42} = \text{sen } \beta$  y  $U_{43} = \text{cos } \beta$ , para todo  $\beta$ .

Las otras dos componentes resultan  $U_{12} = \pm \frac{1}{2} \text{cos } \beta$  y  $U_{13} = \mp \frac{1}{2} \text{sen } \beta$ . Por consiguiente, los dos autovectores se expresan:

$$\{U\}'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{cos } \beta & 0 & -\frac{1}{2} \text{cos } \beta & \text{sen } \beta \end{bmatrix}; \quad \{U\}'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \text{sen } \beta & 0 & \frac{1}{2} \text{sen } \beta & \text{cos } \beta \end{bmatrix}$$

El análisis precedente muestra que la condición de ortogonalidad y la normalización de los autovectores sólo consiguen disminuir los grados de infinitud, que en este ejemplo queda dado por los infinitos valores de  $\beta$ .

Por otra parte, los autovectores obtenidos son linealmente independientes, ya que la ecuación

$$\alpha_2 \{U\}'_2 + \alpha_3 \{U\}'_3 = \{0\}$$

sólo se cumple si  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . En efecto, desarrollando se tiene:

$$\alpha_2 \frac{1}{2} \text{cos } \beta - \alpha_3 \frac{1}{2} \text{sen } \beta = 0$$

$$-\alpha_2 \frac{1}{2} \text{cos } \beta + \alpha_3 \frac{1}{2} \text{sen } \beta = 0$$

$$\alpha_2 \frac{1}{2} \text{sen } \beta + \alpha_3 \text{cos } \beta = 0$$

Las dos primeras sólo difieren en el signo. Con ellas se obtiene:  $\alpha_3 = \alpha_2 \frac{\text{cos } \beta}{\text{sen } \beta}$ , con  $\text{sen } \beta \neq 0$ .

Sustituyendo en la tercera:  $\alpha_2 (\text{sen } \beta + \text{cos}^2 \beta / \text{sen } \beta) = 0$ , o sea:  $\alpha_2 / \text{sen } \beta = 0 \therefore \alpha_2 = 0$  y  $\alpha_3 = 0$  con  $\text{sen } \beta \neq 0$ . Cuando  $\text{sen } \beta = 0$  se cumple  $\text{cos } \beta = \pm 1$ , y las ecuaciones nuevamente se satisfacen sólo si  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

De las infinitas soluciones, las formas más simples se obtienen con  $\beta = 0$  y  $\beta = \pi/2$ :

$$\{U\}'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}; \quad \{U\}'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{U\}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \{U\}'_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Un último aspecto a tener en cuenta es la independencia lineal de los cuatro autovectores del sistema, que se cumple cuando el determinante de la matriz modal es distinto de cero. En forma genérica, dicha matriz se expresa:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -U_{12} & -U_{13} & 1 \\ 0 & U_{42} & U_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

Su determinante es:

$$|[U]| = 8(U_{12} U_{43} - U_{13} U_{42})$$

La nulidad del determinante sólo se produce cuando  $\{U\}_2$  y  $\{U\}_3$  son linealmente dependientes, o sea cuando  $\{U\}_2 = \alpha \{U\}_3$ , donde  $\alpha$  es arbitrario. Dado que las expresiones halladas de  $\{U\}_2$  y  $\{U\}_3$  son linealmente independientes, se deduce que el determinante de la matriz modal es distinto de cero para todo valor de  $\beta$ . En efecto, sustituyendo  $U_{12} = \pm \frac{1}{2} \cos \beta$ ,  $U_{13} = \mp \frac{1}{2} \sin \beta$ ,  $U_{42} = \sin \beta$  y  $U_{43} = \cos \beta$ , resulta:

$$|[U]| = \pm 8 \left( \frac{1}{2} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \right) = \pm 4$$

## 2.4 Potencia en los modos naturales normalizados

Durante el movimiento de vibración de un sistema discreto se produce una continua transferencia de energía entre las masas y los resortes, disminuyendo con el transcurso del tiempo debido al amortiguamiento. Si no existen fuerzas disipativas la energía total se mantiene constante. En consecuencia, en un sistema conservativo vibrando libremente, todo incremento de la energía cinética se produce con una disminución de igual valor de la energía de deformación; y viceversa. La máxima energía de deformación, que se produce cuando todas las masas alcanzan simultáneamente sus respectivas amplitudes en reposo instantáneo, es igual a la máxima energía cinética que se presenta cuando todas las masas adquieren sus máximas velocidades, en el instante que todos los desplazamientos son nulos. En símbolos:

$$\max U_{(i)} = \max T_{(i)}, \quad i = 1 \dots n \quad (2.24)$$

donde  $n$  es el número de modos naturales de vibración.

Reemplazando en la fórmula (1.80c) los desplazamientos generalizados  $\{q\}$  por las respectivas amplitudes  $\{U\}$ , se obtiene la expresión matricial de la máxima energía de deformación:

$$\max U_{(i)} = \frac{1}{2} \{U\}'_i [K] \{U\}_i ; \quad i = 1 \dots n \quad (2.25)$$

Si  $[K]$  es positiva definida, para todo  $i$  se cumple  $\max U_{(i)} > 0$ .

A partir del instante en que se produce la máxima deformación, en un cuarto de ciclo toda la energía de deformación elástica se transforma en cinética; viceversa en el siguiente cuarto de ciclo; y así sucesiva e indefinidamente. Por lo tanto, la cantidad de energía que se intercambia por unidad de tiempo (potencia)

## ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DISCRETOS

se calcula multiplicando por cuatro el producto de la máxima energía de deformación por la respectiva frecuencia expresada en Hz:

$$P_{(i)} = 4 \times \max U_{(i)} \times \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \omega_i \max U_{(i)} \quad (2.26)$$

Si la energía se mide en Nm (joule), la potencia queda expresada en vatios (W).

Es obvio que el valor de esta magnitud depende del criterio que se aplique para normalizar los autovectores. Cuando la máxima energía de deformación elástica, dada por (2.25), se calcula con los autovectores normalizados con respecto a la matriz masa, resulta:

$$\max U_{(i)} = \frac{1}{2} \lambda_i \quad (2.27)$$

En efecto: premultiplicando (2.13) por  $\{U\}_i^t$  se obtiene:

$$\{U\}_i^t [K] \{U\}_i - \lambda_i \{U\}_i^t [M] \{U\}_i = 0 \quad (2.28)$$

Reemplazando la normalización definida en (2.23) se deduce la expresión (2.27).

En consecuencia, la potencia normalizada con respecto a las masas es:

$$PM_{(i)} = \frac{2}{\pi} \omega_i \frac{\lambda_i}{2} = \frac{\omega_i^3}{\pi} \quad (2.29)$$

Si los autovectores se normalizaran con respecto a la matriz de rigidez, se obtendría, para todo  $\lambda_i \neq 0$ :  $\max U_{(i)} = 1/2$ . En consecuencia, la potencia normalizada con respecto a la matriz de rigidez resulta directamente proporcional a la frecuencia:

$$PK_{(i)} = \frac{\omega_i}{\pi} \quad (2.30)$$

De cualquier manera, en uno u otro caso la potencia aumenta con el orden del modo natural, de acuerdo con la secuencia creciente de las frecuencias.

Cuando un sistema discreto admite desplazamientos de cuerpo rígido, la matriz de rigidez es positiva semidefinida (ejemplos 2.2.4 y 2.2.5). Para todo  $\{U\}_i$  que represente un movimiento de tal tipo, obviamente no hay transferencia de energía entre las masas y los resortes. Por ende, la potencia es nula.

### 2.5 Transformaciones de la ecuación matricial de vibraciones libres

En los textos de matemática que tratan el tema de autovalores y autovectores [4, 8], el problema suele plantearse de la siguiente manera: dada una matriz  $[A]$  cuadrada de orden  $n$ , obtener los valores  $\lambda_i$  y los correspondientes vectores  $\{\phi\}_i$  que satisfacen la ecuación matricial:

$$[A]\{\phi\}_i = \lambda_i \{\phi\}_i, \quad i = 1 \dots n \quad (2.31)$$

la cual también puede ponerse en la forma:  $([A] - \lambda_i [I])\{\phi\}_i = \{0\}$  (2.32)

donde  $[I]$  es la matriz unidad de orden  $n$ .

La respectiva ecuación característica es: 
$$|[A] - \lambda_i [I]| = 0 \quad (2.33)$$

El subíndice  $i$  no es imprescindible; por razones de simplicidad de la notación se omite a partir de las expresiones que siguen. Como hemos visto en la Sección 2.2, la ecuación matricial de vibraciones libres de un sistema discreto de  $n$  grados de libertad es:

$$([K] - \omega^2 [M])\{U\} = \{0\} \quad (2.34)$$

y la ecuación característica es: 
$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (2.35)$$

Para llevar la expresión (2.34) a la forma clásica (2.32) pueden seguirse diversos caminos:

- a) Cuando la matriz de rigidez es positiva definida, premultiplicando por su inversa negativa y dividiendo por  $\omega^2$  se tiene:

$$\left(-\frac{1}{\omega^2}[I] + [K]^{-1}[M]\right)\{U\} = \{0\} \quad (2.36)$$

Reemplazando  $\frac{1}{\omega^2} = \lambda$ ,  $[K]^{-1}[M] = [A]$  y  $\{U\} = \{\phi\}$ , la anterior adquiere la forma de la ecuación

(2.32) con la misma solución de (2.34), ya que el determinante de  $[K]$  es distinto de cero (esta transformación no es aplicable cuando  $[K]$  es positiva semidefinida, pues en tal caso no existe la inversa  $[K]^{-1}$  debido a que  $|K| = 0$ ).

- b) Dado que  $[M]$  siempre es positiva definida, premultiplicando (2.34) por  $[M]^{-1}$  se tiene:

$$([M]^{-1}[K] - \omega^2 [I])\{U\} = \{0\} \quad (2.37)$$

Indicando ahora  $\omega^2 = \lambda$ ,  $[M]^{-1}[K] = [A]$  y  $\{U\} = \{\phi\}$ , nuevamente se llega a una expresión de la forma (2.32) con los mismos autovalores y autovectores que (2.34).

En sistemas discretos con masas puntuales la matriz de masa  $[M]$  es diagonal. En tal caso, la obtención de  $[M]^{-1}$  es muy simple: la componente  $m_{ii}^{-1}$  de  $[M]^{-1}$  es  $1/m_{ii}$ . Como se verá más adelante, en los sistemas discretos de modelos estructurales continuos generados con el método de elementos finitos, la matriz de masa no es diagonal. Esto no constituye un serio inconveniente en el desarrollo de algoritmos de computación eficientes para el análisis de sistemas con muchos grados de libertad, pero sí lo es el hecho de que los productos  $[K]^{-1}[M]$  y  $[M]^{-1}[K]$  en general no son simétricos, a pesar de que las matrices  $[K]^{-1}$  y  $[M]^{-1}$  son siempre simétricas.

- c) Teniendo en cuenta que  $[M]$  es simétrica positiva definida, es posible expresarla con el producto

$$[M] = [L][L]^t \quad (2.38)$$

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DISCRETOS

donde  $[L]$  es una matriz triangular inferior no singular, que se obtiene fácilmente con la descomposición simétrica de Choleski [8]:

$$\begin{aligned}
 l_{11} &= \sqrt{m_{11}}, \quad l_{j1} = m_{j1} / l_{11}, \quad j = 2 \dots n \\
 \left. \begin{aligned}
 l_{ii} &= \sqrt{m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\
 l_{ji} &= \frac{m_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}}, \quad j = (i+1) \dots n
 \end{aligned} \right\} \quad i = 2 \dots (n-1) \quad (2.39) \\
 l_{nn} &= \sqrt{m_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}
 \end{aligned}$$

La inversa de  $[L]$  también es triangular inferior. Las componentes de  $[S] = [L]^{-1}$  se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 S_{ii} &= \frac{1}{l_{ii}}, \quad i = 1 \dots n \\
 S_{ji} &= -\frac{1}{l_{jj}} \sum_{k=i}^{j-1} l_{jk} S_{ki}, \quad i = 1 \dots (n-1), \quad j = (i+1) \dots n \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Premultiplicando (2.34) por  $[L]^{-1}$  se tiene:  $([L]^{-1}[K] - \omega^2 [L]^t) \{U\} = \{0\}$ .

Ahora se define un vector  $\{\phi\}$  tal que:  $\{U\} = [L]^{-t} \{\phi\}$  (2.41)

donde  $[L]^{-t}$  es la traspuesta de la inversa de  $[L]$ . Sustituyendo resulta:

$$([L]^{-1}[K][L]^{-t} - \omega^2 [I]) \{\phi\} = \{0\} \quad (2.42)$$

Sustituyendo  $\omega^2 = \lambda$  y  $[L]^{-1}[K][L]^{-t} = [A]$  se reproduce la forma clásica (2.32). Con esta transformación, la matriz  $[A]$  es simétrica y tiene los mismos autovalores con los que se anula el determinante (2.35). En efecto: la ecuación característica de (2.42) se expresa:

$$\left| [L]^{-1}[K][L]^{-t} - \omega^2 [L]^{-1}[L][L]^t[L]^{-t} \right| = 0$$

donde el producto  $[L]^{-1}[L][L]^t[L]^{-t}$  reemplaza a la matriz unidad  $[I]$  de orden  $n$ .

Teniendo en cuenta la descomposición (2.38) resulta:

$$\left| [L]^{-1} \right| \cdot \left| [K] - \omega^2 [M] \right| \cdot \left| [L]^{-t} \right| = 0$$

Dado que  $\left| [L]^{-1} \right| \neq 0$  y  $\left| [L]^{-t} \right| \neq 0$ , de la anterior se deduce la misma ecuación determinante (2.35):

$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0$ . Una vez hallados los autovectores  $\{\phi\}$  de (2.42), pueden calcularse los vectores  $\{U\}$  aplicando (2.41).

Otra ventaja de utilizar la descomposición (2.38) radica en la posibilidad de obtener la matriz  $[A]$  en dos etapas. Para ello, una vez hallada la matriz  $[L]$  con (2.39), se resuelve la ecuación matricial

$$[L][B] = [K] \quad (2.43)$$

La matriz  $[B]$  así obtenida es la misma que se hallaría haciendo el producto  $[L]^{-1}[K]$ . Las componentes de  $[B]$  se calculan directamente con el siguiente algoritmo:

$$\text{con } j=1\dots n : \text{ con } i=1\dots n : \quad b_{ij} = (k_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b_{kj}) / l_{ii} \quad (2.44)$$

donde el subíndice  $i$  varía de 1 a  $n$  con cada valor de  $j$  (cálculo por columnas) y la sumatoria no interviene (es nula) cuando  $i = 1$ .

El siguiente paso consiste en resolver la ecuación matricial:

$$[L][A] = [B]^t \quad (2.45)$$

ya que la matriz  $[A]$  que la satisface es  $[L]^{-1}[B]^t = [L]^{-1}[K][L]^{-t}$ . De acuerdo con (2.44), las componentes  $a_{ij}$  se obtienen con el siguiente algoritmo:

$$\text{con } j=1\dots n : \text{ con } i=1\dots n : \quad a_{ij} = (b_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} a_{kj}) / l_{ii} \quad (2.46)$$

Con esta alternativa, que consiste en aplicar sucesivamente los algoritmos (2.39), (2.44) y (2.46), no se requiere la inversión de  $[L]$  para obtener la matriz  $[A]$ . Si además del cálculo de los autovalores se requiriese el de los autovectores  $\{U\}$  con la fórmula (2.41), deberá agregarse el algoritmo (2.40) para el cálculo de  $[L]^{-1}$ .

Por otra parte, cuando la matriz de rigidez es positiva definida puede utilizarse una transformación semejante a la descrita por la expresiones (2.38) a (2.42), con la alternativa dada por (2.43) a (2.46). Para ello previamente se multiplica (2.34) por -1 y se reemplaza  $\omega^2 = 1/\lambda$ , llevándola a la forma:

$$([M] - \lambda [K])\{U\} = \{0\} \quad (2.47)$$

Reemplazando  $[K]$  por el producto  $[L][L]^t$  y operando, se llega a la ecuación:

$$([L]^{-1}[M][L]^{-t} - \lambda [I])\{\psi\} = \{0\} \quad (2.48)$$

Con cada autovector  $\{\psi\}$  se obtiene el correspondiente  $\{U\}$  con la fórmula:

$$\{U\} = [L]^{-t} \{\psi\} \quad (2.49)$$

## 2.6 Cálculo de autovalores y autovectores

### 2.6.1 Determinación mediante transformaciones ortogonales

La resolución de una ecuación del tipo (2.32) puede llevarse a cabo mediante adecuadas transformaciones. Para ello se introduce:

$$\{\phi\} = [P] \{\xi\} \quad (2.50)$$

donde  $[P]$  es una matriz no singular arbitraria de orden  $n$ . Premultiplicando por  $[P]^{-1}$ , se tiene:

$$[P]^{-1} ([A] - \lambda [I]) [P] \{\xi\} = \{0\}$$

$$\text{o sea: } ([C] - \lambda [I]) \{\xi\} = \{0\} \quad (2.51)$$

$$\text{donde } [C] = [P]^{-1} [A][P] \quad (2.52)$$

Dado que  $|P| \neq 0$ , las matrices  $[A]$  y  $[C]$  tienen los mismos autovalores. Se dice que son matrices similares.

Por otra parte, cuando  $[A]$  es simétrica resulta ventajoso adoptar matrices  $[P]$  ortogonales, que son las que cumplen la condición:

$$[P][P]^t = [I] \quad (2.53)$$

$$\text{o sea: } [P]^t = [P]^{-1} \quad (2.54)$$

En tal caso, la transformación definida en (2.52) pasa a ser ortogonal, y la matriz  $[C]$  resulta simétrica:

$$[C] = [P]^t [A][P] \quad (2.55)$$

Existen diversos métodos que utilizan una secuencia de transformaciones ortogonales para reducir la matriz  $[A]$  a otras formas más simples que faciliten el cálculo de los autovalores y autovectores, [7, 8]. Uno de tales métodos es el de Jacobi, que consiste en aplicar una sucesión de transformaciones ortogonales para reducir la matriz  $[A]$  a la forma diagonal. Es obvio que los autovalores de una matriz diagonal son las componentes de su diagonal principal; y sus autovectores, normalizados con el criterio del módulo dado por (2.21), son las columnas de la matriz unidad de orden  $n$ . En este método, la matriz  $[P]$  se elige de manera que se anule una componente  $C_{lm}$  (y su simétrica  $C_{ml} = C_{lm}$ ). Si con una sucesión finita de transformaciones ortogonales:

$$[\lambda] = [P]_r^t \dots [P]_k^t \dots [P]_1^t [A] [P]_1 \dots [P]_k \dots [P]_r \quad (2.56)$$

se logra obtener una matriz diagonal, ésta es la matriz espectral de  $[A]$  ya que las componentes de la diagonal principal de  $[\lambda]$  son los autovalores de  $[A]$ .

Por otra parte, dado que la matriz modal de  $[\lambda]$  es la matriz unidad, si a ésta se le aplica las sucesivas transformaciones se obtendrá, de acuerdo con la expresión (2.50), la matriz modal de  $[A]$ :

$$[\phi] = [P]_1 \dots [P]_k \dots [P]_r \quad (2.57)$$

En el método de Jacobi la matriz ortogonal  $[P]$ , que produce la eliminación de  $C_{lm}$ , es la que tiene componentes de la diagonal principal iguales a la unidad excepto  $p_{ll} = p_{mm} = \cos \theta$ , y las restantes componentes nulas excepto  $p_{ml} = -p_{lm} = \sin \theta$ . En el caso de  $[A]$  simétrica, imponiendo la condición  $C_{lm} = C_{ml} = 0$ , pueden deducirse las fórmulas para calcular  $\theta$ :

$$\text{tg } \theta = \frac{-(a_{ll} - a_{mm}) + \sqrt{(a_{ll} - a_{mm})^2 + 4a_{lm}^2}}{2a_{lm}}, \quad \text{con } a_{lm} \neq 0 \quad (2.58 \text{ a})$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}; \quad \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \operatorname{tg} \theta \quad (2.58 \text{ b})$$

El rango de valores de  $\theta$  puede limitarse al intervalo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Obviamente, la transformación es innecesaria cuando  $a_{lm} = 0$ .

Un algoritmo que realiza la transformación (2.55) utilizando el ángulo  $\theta$  de las fórmulas (2.58), es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{con } i=1 \dots n: \text{ con } j=1 \dots n: C_{ij} = a_{ij} \\ &\text{con } k=1 \dots n \left\{ \begin{array}{l} C_{lk} = a_{lk} \cos \theta + a_{mk} \operatorname{sen} \theta \\ C_{mk} = -a_{lk} \operatorname{sen} \theta + a_{mk} \cos \theta \\ C_{kl} = a_{kl} \cos \theta + a_{km} \operatorname{sen} \theta \\ C_{km} = -a_{kl} \operatorname{sen} \theta + a_{km} \cos \theta \end{array} \right. \quad (2.59) \\ &C_{ll} = a_{ll} \cos^2 \theta + a_{mm} \operatorname{sen}^2 \theta + a_{lm} 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &C_{mm} = a_{ll} \operatorname{sen}^2 \theta + a_{mm} \cos^2 \theta - a_{lm} 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &C_{lm} = 0 \\ &C_{ml} = 0 \end{aligned}$$

Se comprueba que la transformación ortogonal preserva la simetría, lo cual permite reducir el número de operaciones. Además, con ciertos recaudos, también es posible operar en la computadora con una sola matriz en la que en cada transformación se modifican las filas y columnas  $l$  y  $m$ , de modo que la ecuación (2.55) se expresa:

$$[A]_{k+1} = [P]_k^t [A]_k [P]_k \quad (2.60)$$

En el método de Jacobi la transformación se aplica con todas las componentes no nulas situadas fuera de la diagonal principal. El inconveniente que se presenta es que, en general, las componentes que han sido eliminadas no permanecen nulas debido a que son afectadas por las sucesivas transformaciones que modifican las filas (y columnas) que las contienen. No obstante, gracias a que el procedimiento es siempre convergente, en un número finito de transformaciones se logrará que todas las componentes fuera de la diagonal principal sean, en valor absoluto, tan pequeñas como se quiera. En este aspecto, el método es iterativo: el proceso se repite hasta que todas las componentes fuera de la diagonal principal resultan, en valor absoluto, menor que una tolerancia prefijada.

Con respecto a la selección de las componentes que se van eliminando, pueden aplicarse diversos criterios:

- a) Para cada transformación, buscar la componente de mayor valor absoluto.
- b) Seguir una secuencia cíclica recorriendo sucesivamente, siempre en el mismo orden, todas las componentes fuera de la diagonal principal. El procedimiento suele ser más eficiente si, en el recorrido cíclico, la transformación solamente se aplica sobre las componentes que superan, en valor absoluto, una

cota que a su vez va disminuyendo a medida que la condición es satisfecha por todas las componentes, hasta alcanzar la tolerancia adoptada.

Como se verá con más detalle cuando se estudie el método de los elementos finitos, además de ser simétricas, en general las matrices  $[K]$  y  $[M]$  presentan una banda, fuera de la cual las componentes son nulas [5,12,15,19]. La banda incluye la diagonal principal y un mismo número de diagonales contiguas a uno y otro lado de la misma.

La Figura 2.6.1 es un esquema de este tipo de matrices. Las cruces señalan las componentes que pertenecen a la banda; los puntos representan componentes nulas. El *ancho de banda* (también llamado ancho de semibanda) es el número de diagonales contenidas en la mitad de la banda, incluyendo la diagonal principal (en el esquema, el ancho de banda es 4). Es usual que los algoritmos utilizados con elementos finitos aprovechen esta característica de las matrices  $[K]$  y  $[M]$ , con la consiguiente reducción de los requerimientos de memoria de la computadora y del número de operaciones.

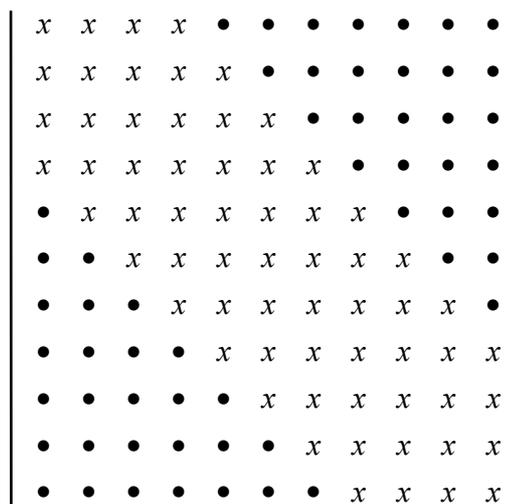


Figura 2.6.1:  
Esquema de una matriz banda

En el disco compacto se da un programa denominado JACOB1, que realiza el cálculo a partir de la lectura de archivos externos en los que se dan las matrices simétricas  $[K]$  y  $[M]$ , tipo banda. Cabe aclarar que el programa en realidad opera con las matrices cuadradas completas, agregando ceros fuera de la banda. En este código se aplicó el procedimiento descrito en la Sección anterior para pasar de la ecuación (2.34) a la forma (2.32), mediante la transformación dada por las fórmulas (2.38), (2.41) y (2.42). Por lo tanto, sólo la matriz  $[M]$  debe ser positiva definida. Ambos archivos de entrada contienen la información referente al tamaño de las matrices, descrito con el número de filas y columnas de banda. Cada matriz va precedida por una línea de texto que incluye el nombre del archivo de datos del modelo y del programa que calculó las matrices. También se ha incluido otro programa, JACOB2, que es una adaptación del código publicado por Chandrupatla y Belegundu [5]. La técnica implementada es el método generalizado de Jacobi, una variante algo más eficiente (aunque el programa también opera con las matrices cuadradas completas), debido a que la matriz de transformación ortogonal  $[P]$  es elegida de modo que se eliminan, por separado y simultáneamente, una componente en la matriz de rigidez y la correspondiente en la matriz de masa [7]. Es aplicable aun cuando existan autovalores nulos o negativos. Sin embargo, si dos autovalores tienen valores muy cercanos, puede resultar afectada la precisión del cálculo de los autovectores. El archivo de datos es igual al requerido por el programa JACOB1. Ambos programas proporcionan las frecuencias en orden ascendente de los valores.

Cabe destacar que la aplicación de algoritmos que calculan todos los autovalores y autovectores puede significar un serio inconveniente con el método de elementos finitos, que usualmente produce sistemas con muchos grados de libertad, máxime teniendo en cuenta que en la práctica suelen ser requeridas solamente las primeras frecuencias naturales.

### 2.6.2 Método iterativo de Vianello-Stodola-Bodewig

Lo expresado en el párrafo anterior justifica el estudio de algunos de los procedimientos numéricos que permiten calcular la frecuencia fundamental y una pocas subsiguientes (en los diversos métodos de análisis dinámico estructural pocas veces se requiere conocer más de tres frecuencias naturales). Para tal fin son apropiados los métodos iterativos, siempre que se asegure la convergencia hacia un autovalor del sistema, y en particular al de menor valor. El más simple de tales procedimientos, conocido como método de Vianello, o también de Stodola, converge al mayor autovalor [2]. La ecuación (2.34) deberá entonces ser previamente transformada llevándola a la forma (2.32) con  $\lambda = 1/\omega^2$ , lo cual es posible cuando la matriz de rigidez  $[K]$  es regular. Por otra parte, no se requiere que la matriz  $[A]$  de la ecuación (2.31) deba ser simétrica, ni positiva definida o semidefinida. A continuación se deducen las fórmulas que se utilizan en este método iterativo, que algunos autores atribuyen a von Mises [8].

Dado que la matriz modal no es singular, vale decir que los  $n$  autovectores  $\{U\}_i$  son linealmente independientes, todo vector  $\{U\}^{(0)}$  de orden  $n$  se expresa con una combinación lineal de los mismos:

$$\{U\}^{(0)} = C_1 \{U\}_1 + \dots + C_n \{U\}_n = \sum_{i=1}^n C_i \{U\}_i \quad (2.61)$$

Si este vector  $\{U\}^{(0)}$ , arbitrariamente elegido, es premultiplicado por la matriz  $[A]$ , se obtiene otro vector  $\{U\}^{(1)}$  tal que:

$$\{U\}^{(1)} = [A] \{U\}^{(0)} = \sum_{i=1}^n C_i [A] \{U\}_i = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \{U\}_i \quad (2.62)$$

Premultiplicando otra vez por  $[A]$ :

$$\{U\}^{(2)} = [A] \{U\}^{(1)} = [A]^2 \{U\}^{(0)} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i [A] \{U\}_i = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^2 \{U\}_i$$

Premultiplicando  $m$  veces se obtiene:

$$\{U\}^{(m)} = [A]^m \{U\}^{(0)} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^m \{U\}_i \quad (2.63)$$

El procedimiento basado en esta expresión también se conoce con el nombre de método de la potencia, aunque en realidad no se realiza explícitamente el cálculo de  $[A]^m$ .

Si  $\lambda_n$  es el autovalor de mayor valor absoluto y  $C_n \neq 0$ , se deduce que a medida que el exponente entero positivo  $m$  (número de iteraciones) aumenta, el término  $C_n \lambda_n^m \{U\}_n$  en (2.63) predomina cada vez más frente a los restantes. Luego, con  $m$  suficientemente grande se tiene

$$\{U\}^{(m)} \cong \lambda_n^m C_n \{U\}_n \quad (2.64)$$

En consecuencia, el vector  $\{U\}^m$  tiende a ser proporcional al autovector dominante  $\{U\}_n$ . Nótese que la presencia de autovalores repetidos no resta validez a la fórmula (2.64).

Por otra parte, como un autovector puede ser multiplicado por una constante arbitraria, es conveniente normalizar el vector  $\{U\}^{(m)}$  después de cada premultiplicación. Por lo tanto, el algoritmo iterativo con el que se determina  $\{U\}_n$  puede ser expresado con dos fórmulas:

$$\{V\}^{(m)} = [A] \{U\}^{(m-1)}, \quad \{U\}^{(m)} = \frac{1}{\delta_m} \{V\}^{(m)} \quad (2.65)$$

donde  $\delta_m$  depende del criterio que se adopte en la normalización que se realiza en cada iteración. El procedimiento se detiene cuando, en dos iteraciones sucesivas,  $\delta_m$  se repite con un número  $s$  prefijado de dígitos significativos; o sea cuando se cumple:

$$|\delta_m - \delta_{m-1}| \leq 10^{-s} |\delta_m| \quad (2.66)$$

Una alternativa es establecer que la misma condición sea cumplida por todas las componentes de los vectores  $\{U\}^{(m)}$  y  $\{U\}^{(m-1)}$ .

El valor de  $\delta_m$  así obtenido es el autovalor de la matriz  $[A]$  correspondiente al autovector  $\{U\}^{(m)}$ , ya que se cumple  $[A] \{U\}^{(m-1)} = \delta_m \{U\}^{(m)}$ . En su versión más simple, la normalización consiste en hacer igual a la unidad la primera componente de  $\{U\}^{(m)}$ , vale decir, adoptando en cada iteración  $\delta_m = V_1^{(m)}$ ; y el vector de inicio  $\{U\}^{(0)}$  se elige con todas sus componentes iguales a la unidad.

El siguiente ejemplo muestra el algoritmo en el caso de una matriz no simétrica cuyos autovalores, con 6 dígitos significativos de precisión, son:  $\lambda_3 = 849.215$ ;  $\lambda_2 = 26.8287$ ;  $\lambda_1 = 4.05610$

y los respectivos autovectores:

$$\begin{aligned} \{U\}_3^t &= [1 \quad 0.539995 \quad 0.161853] \\ \{U\}_2^t &= [1 \quad -0.706135 \quad -0.733325] \\ \{U\}_1^t &= [1 \quad -1.58887 \quad 2.21179] \end{aligned}$$

Limitando los cálculos a cuatro dígitos significativos:

1ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1232 \\ 684.6 \\ 215.3 \end{Bmatrix} = 1232 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5557 \\ 0.1748 \end{Bmatrix}$$

2ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5557 \\ 0.1748 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 859.8 \\ 464.7 \\ 139.5 \end{Bmatrix} = 859.8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5405 \\ 0.1622 \end{Bmatrix}$$

3ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5405 \\ 0.1622 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 849.5 \\ 458.8 \\ 137.5 \end{Bmatrix} = 849.5 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5401 \\ 0.1619 \end{Bmatrix}$$

4ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5401 \\ 0.1619 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 849.2 \\ 458.6 \\ 137.5 \end{Bmatrix} = 849.2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5400 \\ 0.1619 \end{Bmatrix}$$

5ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5400 \\ 0.1619 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 849.2 \\ 458.6 \\ 137.5 \end{Bmatrix} = 849.2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5400 \\ 0.1619 \end{Bmatrix}$$

La convergencia del método no es afectada por el método elegido para normalizar el vector  $\{V\}^{(m)}$ . Con el mismo ejemplo, si se adoptara el criterio del módulo unidad dado por (2.21) se tendría:

1ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1232 \\ 684.6 \\ 215.3 \end{Bmatrix} = 1426 \begin{Bmatrix} 0.8641 \\ 0.4802 \\ 0.1510 \end{Bmatrix}$$

2ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8641 \\ 0.4802 \\ 0.1510 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 743.0 \\ 401.6 \\ 120.5 \end{Bmatrix} = 853.1 \begin{Bmatrix} 0.8709 \\ 0.4708 \\ 0.1412 \end{Bmatrix}$$

3ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8709 \\ 0.4708 \\ 0.1412 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 739.9 \\ 399.6 \\ 119.8 \end{Bmatrix} = 849.4 \begin{Bmatrix} 0.8711 \\ 0.4704 \\ 0.1410 \end{Bmatrix}$$

4ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8711 \\ 0.4704 \\ 0.1410 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 739.8 \\ 399.5 \\ 119.7 \end{Bmatrix} = 849.3 \begin{Bmatrix} 0.8711 \\ 0.4704 \\ 0.1410 \end{Bmatrix}$$

5ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 528.2 & 547.6 & 156.4 \\ 273.8 & 312.8 & 98.0 \\ 78.2 & 98.0 & 39.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8711 \\ 0.4704 \\ 0.1410 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 739.7 \\ 399.5 \\ 119.7 \end{Bmatrix} = 849.2 \begin{Bmatrix} 0.8711 \\ 0.4704 \\ 0.1410 \end{Bmatrix}$$

En este ejemplo, la matriz  $[A]$  es positiva definida, pero ello no es un requisito para la convergencia. Esto se muestra con el siguiente ejemplo, donde los autovalores de la matriz son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = +4$ :

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS DISCRETOS

1ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6667 \end{Bmatrix}$$

2ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6667 \end{Bmatrix} = 4.333 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7693 \end{Bmatrix}$$

3ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7693 \end{Bmatrix} = 3.923 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7450 \end{Bmatrix}$$

4ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7450 \end{Bmatrix} = 4.020 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7512 \end{Bmatrix}$$

5ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7512 \end{Bmatrix} = 3.995 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7497 \end{Bmatrix}$$

6ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7497 \end{Bmatrix} = 4.001 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7501 \end{Bmatrix}$$

7ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7501 \end{Bmatrix} = 4.000 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.7500 \end{Bmatrix}$$

Nótese que la convergencia en este caso no es monótona, sino oscilante.

El método es aplicable incluso con matrices singulares, como se comprueba con otro ejemplo sencillo donde los autovalores de la matriz son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 3$ :

1ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

2ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Cuando a priori se conoce una aproximación del autovector dominante, conviene adoptarla como vector inicial. De esta manera se consigue la convergencia con un número menor de iteraciones. Pero si se carece de esa aproximación, puede ser conveniente adoptar un vector inicial  $\{U\}^{(0)}$  totalmente arbitrario, ya que con ello disminuye la probabilidad de convergencia a otro autovalor menor que el dominante.

Si el algoritmo se aplica con la matriz  $[A]$  del ejemplo 2.2.4 (que corresponde a un modelo con tres grados de libertad que admite un movimiento de cuerpo rígido), en la primera iteración se produce el vector  $\{V\}^{(1)} = [0 \ 0 \ 0]^t$ , lo cual indica que el autovalor es nulo y el correspondiente autovector es  $\{U\}^{(1)} = [1 \ 1 \ 1]^t$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si se adopta  $\{U\}^{(0)} = [1 \ 2 \ 3]^t$ :  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = -1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$ ;  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

En la segunda iteración ya se cumple la convergencia del método al obtenerse  $\{U\}^{(2)} = \{U\}^{(1)}$ . En la tercera iteración se produciría la salida al cumplirse la condición impuesta por la fórmula (2.66).

Sin embargo, el autovalor dominante de la matriz es  $\lambda_3 = 5$ . La razón de la convergencia al segundo autovalor es que el vector inicial  $\{U\}^{(0)} = [1 \ 2 \ 3]^t$  implica  $C_3 = 0$  en la combinación lineal (2.61), debido a que los autovectores de la matriz son  $\{U\}_1 = [1 \ 1 \ 1]^t$ ,  $\{U\}_2 = [1 \ 0 \ -1]^t$  y  $\{U\}_3 = [1 \ -4 \ 1]^t$ , con los autovalores  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = 5$ , respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow C_1 = 2; C_2 = -1; C_3 = 0$$

Dado que  $\lambda_1 = 0$ , el único término no nulo en (2.61) es  $C_2 \{U\}_2$ . Por este motivo, directamente con la primera iteración se obtiene  $\{U\}^{(1)} = \{U\}_2$ .

Adoptando  $\{U\}^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^t$  sí se produce la convergencia hacia el mayor autovalor  $\lambda_3 = 5$ :

1ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.333 \\ 0.6667 \end{Bmatrix}$$

3ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.333 \\ 0.6667 \end{Bmatrix} = 4.333 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.846 \\ 0.9231 \end{Bmatrix}$$

4ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.846 \\ 0.9231 \end{Bmatrix} = 4.846 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.968 \\ 0.9841 \end{Bmatrix}$$

.....

12ª iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} = 5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En este último caso el vector inicial implica  $C_1 = 0.4$ ;  $C_2 = 0.5$  y  $C_3 = 0.1$ . Al efectuar la primera premultiplicación, los productos  $\lambda_i C_i$  que intervienen en la fórmula (2.62) valen  $\lambda_1 C_1 = 0$ ,  $\lambda_2 C_2 = 0.5$  y  $\lambda_3 C_3 = 0.5$ ; después de la segunda multiplicación se tiene:  $\lambda_1^2 C_1 = 0$ ,  $\lambda_2^2 C_2 = 0.5$  y  $\lambda_3^2 C_3 = 2.5$ . Es obvio que en este caso, por ser  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 1$ , el tercer término de (2.63) es el único que crece.

En general, si el vector inicial hace que el coeficiente  $C_n$  sea extremadamente pequeño en comparación con otros coeficientes de (2.63), tal que resulte despreciable, el método tampoco será convergente al autovalor dominante. Otro caso en el que falla el algoritmo al adoptar todas las componentes de  $\{U\}^{(0)}$  iguales a 1, es cuando la suma de las componentes de la primera fila de  $[A]$  es nula y se normaliza el vector  $\{V\}$  con respecto a la primera componente.

Es evidente que en la práctica es imposible tener la certeza que el vector inicial produzca la convergencia hacia el autovalor dominante. Sin embargo, si sus componentes se generan al azar, por ejemplo con

números en el rango  $-1 < U_i^{(0)} < 1$  como sugiere Jennings [8], es sumamente improbable que  $C_n$  resulte nulo o demasiado pequeño. Además, para mayor seguridad puede repetirse el cálculo con el fin de verificar que reproduzca el mismo resultado.

Por su simplicidad, el método de Vianello-Stodola suele ser utilizado para el cálculo de la frecuencia fundamental. Para ampliar su aplicación al cálculo de otras frecuencias naturales es necesario introducir alguna modificación de manera que  $\lambda_{n-1}$  pase a ser el autovalor dominante. En esta línea se tienen los denominados métodos de *deflación*, en los cuales se determina una nueva matriz del mismo orden y con los mismos autovalores que la matriz original, excepto  $\lambda_n$  que es reemplazado por cero. De esta manera se puede calcular el segundo autovalor dominante.

Otra vía consiste en transformar la matriz  $[A]$  de tal modo que se obtiene otra matriz  $[A^{(n-1)}]$  de orden  $n-1$ , cuyo mayor autovalor es el segundo dominante de la matriz original. El método de Bodewig realiza esta transformación, que se puede reiterar para hallar otros autovalores [13]. El procedimiento se basa en que la matriz  $[C]$  de la fórmula (2.52), en la cual  $[P]$  es cualquier matriz no singular, tiene los mismos autovalores que  $[A]$ . Además, de acuerdo con la expresión (2.50), todo autovector  $\{U\}_i$  de  $[A]$  es igual al producto de  $[P]$  por el correspondiente autovector  $\{\xi\}_i$  de  $[C]$ .

Con una apropiada matriz  $[P]$  se logra que la matriz  $[C]$  quede expresada en la forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda_n & \{b\}^t \\ \{0\} & [A^{(n-1)}] \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Su ecuación característica es:  $|[C] - \lambda [I]| = (\lambda_n - \lambda) |[A^{(n-1)}] - \lambda [I^{(n-1)}]| = 0$  donde  $[I^{(n-1)}]$  es la matriz unidad de orden  $n-1$ . Se deduce entonces que los  $n-1$  restantes autovalores de  $[A]$  son todos los de  $[A^{(n-1)}]$ . Bodewig encontró que la transformación de  $[A]$  a la forma (2.67) se obtiene con la matriz:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & \{0\}^t \\ \{\bar{U}\}_n & [I^{(n-1)}] \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

donde la primera columna es el autovector  $\{U\}_n$  normalizado con respecto a la primera componente, o sea que las  $n-1$  componentes del vector  $\{\bar{U}\}_n$  son las de  $\{U\}_n$  a partir de la segunda. Es fácil comprobar que la inversa de  $[P]$  es:

$$[P]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \{0\}^t \\ -\{\bar{U}\}_n & [I^{(n-1)}] \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Una vez calculado con el método de Vianello-Stodola el autovalor dominante  $\lambda_{n-1}$  de  $[A^{(n-1)}]$  y el autovector  $\{V\}_{n-1}$  de la misma matriz, puede obtenerse el correspondiente autovector  $\{U\}_{n-1}$  de la matriz original, mediante un procedimiento “hacia atrás” que se describe a continuación.

Si  $\{\xi\}_{n-1}$  es el autovector de  $[C]$  para el autovalor  $\lambda_{n-1}$ , se cumple:

$$[C] \{\xi\}_{n-1} = \lambda_{n-1} \{\xi\}_{n-1} \quad (2.70)$$

la cual se puede particionar en la forma:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \lambda_n & \{b\}^t \\ \hline \{0\} & [A^{(n-1)}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_{n-1} \\ \{V\}_{n-1} \end{array} \right\} = \lambda_{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \xi_{n-1} \\ \{V\}_{n-1} \end{array} \right\} \quad (2.71)$$

donde  $\xi_{n-1}$  es la primera componente, aún no conocida, del vector  $\{\xi\}_{n-1}$ . Efectuando el producto de la primera fila de  $[C]$  por  $\{\xi\}_{n-1}$ , resulta:

$$\lambda_n \xi_{n-1} + \{b\}^t \{V\}_{n-1} = \lambda_{n-1} \xi_{n-1} \quad (2.72)$$

Luego, si  $\lambda_n \neq \lambda_{n-1}$ , se obtiene:

$$\xi_{n-1} = \frac{\{b\}^t \{V\}_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \quad (2.73)$$

Por último, el autovector  $\{U\}_{n-1}$  de la matriz original  $[A]$  se determina aplicando la transformación (2.50):

$$\{U\}_{n-1} = [P] \{\xi\}_{n-1} \quad (2.74)$$

Debe tenerse en cuenta que el cálculo hacia atrás del método de Bodewig teóricamente no es posible cuando existen autovalores múltiples. Sin embargo, en la práctica, los inevitables errores de truncado generalmente hacen que el algoritmo los calcule como valores ligeramente distintos [7, 13].

La reiteración de la transformación de Bodewig, después de cada autovalor hallado con Vianello-Stodola, permite calcular sucesivos autovalores de la matriz  $[A]$ , en orden decreciente. Finalmente puede aplicarse el procedimiento hacia atrás para obtener los respectivos autovectores.

Si  $k = 1, 2 \dots NA$  indica las sucesivas aplicaciones de Vianello-Stodola-Bodewig (de modo que  $\lambda^{(1)} = \lambda_n$ ,  $\lambda^{(2)} = \lambda_{n-1}$ , etc.), la transformación de Bodewig consiste en aplicar la fórmula:

$$\text{con } i = k+1 \dots N \quad \text{y} \quad \text{con } j = k+1 \dots N: \quad a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - v_i^{(k)} a_{k,j}^{(k)} \quad (2.75)$$

Como puede verse en (2.67), la primera columna de la matriz transformada es inoperante. Entonces se aprovecha para almacenar, a continuación del autovalor  $\lambda^{(k)}$ , el vector  $\{V\}^{(k)}$  normalizado con respecto a su primera componente. Por consiguiente, el algoritmo resultante es:

$$\text{Con } k = 1 \dots NA \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ con Vianello-Stodola se calculan } \lambda^{(k)} \text{ y } \{V\}^k \\ 2) a_{k,k} = \lambda^{(k)} \\ 3) \text{ con } i = k+1 \dots N: a_{i,k} = v_i^{(k)} \\ 4) \text{ Bodewig: con } i = k+1 \dots N: \text{ con } j = k+1 \dots N: a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j} \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Una vez calculados los  $NA$  autovalores, se inicia el proceso hacia atrás, el cual se describe con el siguiente algoritmo, que requiere otra matriz  $[B]$  rectangular de  $N$  filas y  $NA$  columnas:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{con } k = 1, 2 \dots NA: u_k = a_{k,k}; a_{k,k} = 1 \\ \\ \text{con } i = 1 \dots N: \text{ con } j = 1 \dots i: b_{i,j} = a_{i,j} \\ \\ \text{con } k = 2 \dots NA: \text{ con } l = k - 1, k - 2 \dots 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1) a_{l,k} = \frac{-\sum_{i=l+1}^N a_{l,i} b_{i,k}}{\lambda^{(l)} - \lambda^{(k)}} \\ 2) \text{ con } i = l + 1 \dots N: b_{i,k} = b_{i,k} / a_{l,k}; a_{l,k} = 1 \\ 3) \text{ con } i = l + 1 \dots N: b_{i,k} = b_{i,k} + a_{i,l} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Con este algoritmo, las primeras  $NA$  columnas de  $[B]$  son autovectores de la matriz original.

Es muy conveniente contar con códigos de computación que calculen las primeras frecuencias y formas modales a partir de las matrices-banda simétricas  $[K]$  y  $[M]$ , que se obtendrán cuando se utilice el método de los elementos finitos, y que serán grabadas en sendos archivos de texto. Aunque internamente opere con las matrices completas, el programa MIVSB1 (**M**étodo **I**terativo de **V**ianello **S**todola **B**odewig **V**ersión **1**) ha sido preparado para realizar esta tarea. Los archivos de datos son los mismos que se procesan con los programas JACOB1 y JACOB2. Por consiguiente, deben contener: número de grados de libertad, ancho de banda, una línea de texto, y la correspondiente matriz, de rigidez (no singular) y de masa, por filas de la banda.

El algoritmo que se implementó no realiza explícitamente el producto  $[P]^{-1}[A][P]$  sino que directamente transforma las componentes de  $[A]$  sin necesidad de utilizar otras posiciones de memoria principal de la computadora. Una vez leída la matriz de rigidez  $[K]$ , aplica la descomposición simétrica de Choleski:  $[K]=[L]^t[L]$ ; luego resuelve el sistema matricial  $[L][B]=[M]$ , y una vez hallada  $[B]$  resuelve  $[L][A]=[B]^t$ , donde  $[A]=[L]^{-t}[M][L]^{-t}$  es la matriz dinámica simétrica cuyos autovalores son  $\lambda_i = 1/\omega_i^2$ . El programa calcula  $NA$  autovalores del modelo discreto, normalmente en orden decreciente:  $\lambda_n = 1/\omega_1^2$ ,  $\lambda_{n-1} = 1/\omega_2^2$ , etc. Finalmente calcula los respectivos autovectores (modos naturales de vibración).

Otra versión del mismo algoritmo es el código MIVSB2. La diferencia con el programa anterior es que la matriz dinámica se obtiene mediante la inversión de la matriz de rigidez con el método directo de eliminación de Gauss, y el producto  $[K]^{-1}[M] = [A]$ . Esta matriz dinámica en general no es simétrica.

Es importante aclarar que en sistemas con autovalores múltiples, aun cuando los programas logren eludir la singularidad hallando valores ligeramente distintos, puede resultar afectada la convergencia en el cálculo de los siguientes autovalores. Por otra parte, en algunos casos donde la matriz  $[A]$  resulta mal condicionada para el algoritmo iterativo, el método de Vianello-Stodola-Bodewig converge muy lentamente, o no converge a los autovalores del sistema. No es frecuente que este inconveniente se presente con las matrices producidas con el método de elementos finitos. De darse este caso, se recomienda aplicar el método de iteración inversa que se describe en la siguiente Sección, ya que se trata de un procedimiento más estable y eficiente.

### 2.6.3 Método de iteración inversa

En este método iterativo, más moderno que el estudiado en la Sección anterior, se produce la convergencia hacia el autovector correspondiente al autovalor de menor valor absoluto [5, 8].

En este algoritmo se utiliza el cociente de Rayleigh, que para el caso de un sistema discreto de  $n$  grados de libertad, con matriz de rigidez  $[K]$  y de masa  $[M]$ , ambas de orden  $n$ , se define con:

$$Q = \frac{\{V\}^t [K] \{V\}}{\{V\}^t [M] \{V\}} \quad (2.78)$$

donde  $\{V\}$  es un vector arbitrario de orden  $n$ . Es evidente que  $Q$  es el correspondiente autovalor  $\lambda_i$  cuando  $\{V\}$  coincide con uno de los autovectores  $\{U\}_i$  de la ecuación matricial

$$([K] - \lambda_i [M]) \{U\}_i = \{0\} \quad (2.79)$$

En efecto, premultiplicando (2.79) por  $\{U\}_i^t$ , se tiene:

$$\{U\}_i^t [K] \{U\}_i - \lambda_i \{U\}_i^t [M] \{U\}_i = 0 \therefore Q = \lambda_i$$

El cociente de Rayleigh posee una interesante propiedad cuya demostración escapa al alcance de este curso: para todo  $\{V\}$  se cumple  $\lambda_1 \leq Q \leq \lambda_n$ , donde  $\lambda_1$  es el menor autovalor y  $\lambda_n$  el mayor.

El algoritmo del método de iteración inversa consta de los siguientes pasos [5, 7]:

- 1) Elegir  $\{U\}^{(0)}$ ; inicializar contador y autovalor:  $i = 0, \lambda^{(0)} = 0$
- 2) Incrementar contador de iteraciones:  $i = i + 1$
- 3) Calcular  $\{V\}^{(i-1)} = [M] \{U\}^{(i-1)}$
- 4) Resolver el sistema lineal:  $[K] \{\hat{U}\}^{(i)} = \{V\}^{(i-1)} \quad ([K] \neq 0)$
- 5) Calcular  $\{\hat{V}\}^{(i)} = [M] \{\hat{U}\}^{(i)} \quad (2.80)$
- 6) Calcular  $\lambda^{(i)} = \frac{\{\hat{U}\}^{(i)t} \{V\}^{(i-1)}}{\{\hat{U}\}^{(i)t} \{\hat{V}\}^{(i)}} = \frac{\{\hat{U}\}^{(i)t} [K] \{\hat{U}\}^{(i)}}{\{\hat{U}\}^{(i)t} [M] \{\hat{U}\}^{(i)}} \quad (\text{Rayleigh})$
- 7) Normalizar  $\{\hat{U}\}^{(i)}$ :  $\{U\}^{(i)} = \frac{\{\hat{U}\}^{(i)}}{(\{\hat{U}\}^{(i)t} \{\hat{V}\}^{(i)})^{1/2}} = \frac{\{\hat{U}\}^{(i)}}{(\{\hat{U}\}^{(i)t} [M] \{\hat{U}\}^{(i)})^{1/2}}$

$$8) \text{ Probar la convergencia: } \left| \frac{\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}}{\lambda^{(i)}} \right| < \text{tolerancia.} \quad \text{Si no se cumple: volver a 2)}$$

Una demostración de la convergencia, similar a la explicada para el método de iteración directa, puede verse

en la referencia [7]. Con este algoritmo se obtiene el autovector  $\{U\}_1$ , salvo cuando el vector inicial  $\{U\}^{(0)}$  difiere muy poco de otro autovector, o cuando  $\{U\}^{(0)}$  y  $\{U\}_1$  son ortogonales con respecto a la matriz masa  $[M]$ . Justamente, para hallar el segundo autovector  $\{U\}_2$ , y el respectivo autovalor  $\lambda_2$ , se inicia el algoritmo (2.80) con un vector  $\{U\}^{(0)}$  ortogonal a  $\{U\}_1$ . Esto se consigue tomando un vector arbitrario  $\{\hat{U}\}^{(0)}$  y aplicando la transformación de Gram-Schmidt:

$$\{U\}^{(0)} = \{\hat{U}\}^{(0)} - (\{U\}_1^t [M] \{\hat{U}\}^{(0)}) \{U\}_1 \quad (2.81)$$

En efecto: premultiplicando por  $\{U\}_1^t [M]$  se tiene

$$\{U\}_1^t [M] \{U\}^{(0)} = \{U\}_1^t [M] \{\hat{U}\}^{(0)} - (\{U\}_1^t [M] \{\hat{U}\}^{(0)}) \{U\}_1^t [M] \{U\}_1$$

Por consiguiente, si  $\{U\}_1^t [M] \{U\}_1 = 1$ , se verifica  $\{U\}_1^t [M] \{U\}^{(0)} = 0$ .

La fórmula (2.81) se generaliza fácilmente para el caso en que hayan sido calculados  $p$  autovectores:

$$\{U\}^{(0)} = \{\hat{U}\}^{(0)} - \sum_{i=1}^p (\{U\}_i^t [M] \{\hat{U}\}^{(0)}) \{U\}_i \quad (2.82)$$

Para demostrar su validez, se premultiplica por  $\{U\}_j^t [M]$ :

$$\{U\}_j^t [M] \{U\}^{(0)} = \{U\}_j^t [M] \{\hat{U}\}^{(0)} - \sum_{i=1}^p (\{U\}_i^t [M] \{\hat{U}\}^{(0)}) \{U\}_j^t [M] \{U\}_i$$

se deduce que  $\{U\}_j^t [M] \{U\}^{(0)} = 0$  para  $j = 1 \dots p$ , ya que  $\{U\}_j^t [M] \{U\}_i = 0$  cuando  $i \neq j$ . De modo que el único término no nulo de la sumatoria se presenta con  $i = j$ , en cuyo caso  $\{U\}_j^t [M] \{U\}_i$  es igual a la unidad. La transformación (2.82) debe aplicarse después del paso 1 del algoritmo (2.80).

El método de iteración inversa puede ser aplicado aun cuando el sistema posea autovalores múltiples, aunque en tal caso resulta sumamente sensible a las variaciones del autovalor en sucesivas iteraciones. En otras palabras, se obtienen distintos autovectores con muy pequeñas variaciones del autovalor múltiple (recordar que toda combinación lineal de los autovectores de un autovalor múltiple es también una solución). No debe sorprender, entonces, que el algoritmo conduzca a distintos resultados de los autovectores de un autovalor múltiple cuando se modifica la tolerancia, o se cambia el número de dígitos significativos que intervienen en las operaciones aritméticas.

El método de iteración inversa, al igual que el descrito en la Sección anterior, falla cuando la matriz de rigidez  $[K]$  es singular. Este inconveniente puede obviarse utilizando una técnica numérica denominada traslación (shift) de los autovalores [7]. Si en la ecuación (2.79) se hace el siguiente reemplazo:

$$\lambda_i = \lambda_i^* + \mu \quad (2.83)$$

donde  $\mu$  es un número real arbitrariamente elegido, se tiene:

$$([K] - (\lambda_i^* + \mu)[M]) \{U\}_i = \{0\}, \quad \text{o sea: } ([K] - \mu[M] - \lambda_i^*[M]) \{U\}_i = \{0\}$$

En esta expresión queda definida la matriz de rigidez trasladada:  $[K_\mu] = [K] - \mu[M]$  (2.84)

Por consiguiente,  $\lambda_i^*$  son los autovalores de la ecuación  $([K_\mu] - \lambda_i^*[M]) \{U\}_i = \{0\}$  (2.85)

con los mismos autovectores  $\{U\}_i$  de la ecuación original. Una vez calculados los autovalores  $\lambda_i^*$ , con (2.83) se obtienen los valores de  $\lambda_i$ . Dado que el método de iteración inversa es convergente al autovector del autovalor de menor valor absoluto, si se adopta  $\mu = 0$  y la matriz  $[K]$  no es singular, se obtendrá el autovector de  $\lambda_1$ ; y si se elige  $\mu \cong \lambda_i$  (o sea  $\lambda_i^* \cong 0$ ) en general se logrará la convergencia hacia el autovector de  $\lambda_i$ . Este procedimiento de traslación puede ser utilizado para determinar los autovalores de (2.79) cuando  $[K]$  es singular, ya que con una apropiada elección de  $\mu$  la matriz  $[K_\mu]$  resulta regular.

Cabe aclarar que la falla del algoritmo cuando la matriz  $[K]$  es singular, puede que no se produzca en la práctica con un programa de computación, debido al efecto del redondeo o truncado. En tal caso, se obtienen valores muy pequeños de los autovalores teóricamente nulos, y los correspondientes autovectores prácticamente describen desplazamientos de cuerpo rígido.

Otro aspecto importante a tener en cuenta al aplicar el algoritmo, es que puede que no se produzca la secuencia monótona ascendente de los autovalores, sino que eventualmente puede quedar alterado el orden de dos autovalores sucesivos. Por esta razón, si se necesita conocer los valores de los primeros  $N$  autovalores, se aconseja aplicar el algoritmo para el cálculo de  $N+2$  autovalores.

En el disco compacto se encuentran dos programas denominados MITIN1Q y MITIN2Q (**M**étodo de **I**teración **I**nversa versiones **1** y **2**), compilados con QuickBasic, que son adaptaciones del código publicado por Chandrupatla y Belegundu [5]. Este algoritmo tiene la ventaja de operar con las bandas de las matrices  $[K]$  y  $[M]$ . El programa incluye la modificación del autovector inicial, previo al cálculo de cada autovalor, utilizando la transformación de ortogonalidad de Gram-Schmidt [8]. Ambas versiones ofrecen al usuario la opción de introducir un valor de traslación ( $\mu$ ) con el cual puede lograrse una reducción del número de iteraciones. La primera sólo permite ingresar un valor de dicho parámetro, al iniciar el proceso de cálculo, permaneciendo constante hasta la finalización del mismo, que por otra parte se realiza en forma completa sin ninguna interrupción. La versión MITIN2Q permite que el usuario dé un valor distinto de  $\mu$  antes del cálculo de cada autovalor (a costa de volver a transferir la matriz  $[K]$  de rigidez a la memoria de la computadora), y muestra en pantalla el resultado obtenido, antes de proseguir con el siguiente autovalor. Con el mismo algoritmo se compilaron también versiones con Visual Basic, MITIN1V y MITIN2V.

Los archivos externos de datos tienen exactamente el mismo formato que el requerido por los programas anteriormente descritos (métodos de Jacobi y Vianello-Stodola-Bodewig).



# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 3. FUNCIONES DE ENERGÍA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

### 3.1 Introducción

En este capítulo se obtienen las expresiones de la energía de deformación, la energía cinética y el trabajo de las fuerzas externas distribuidas, en modelos continuos que en el capítulo siguiente serán utilizados con el método de los elementos finitos. A pesar de que éste puede ser implementado directamente con las funciones de energía, se considera conveniente ilustrar, además, sobre la aplicación del principio de Hamilton para deducir, en algunos casos, la ecuación diferencial de equilibrio y la formulación de las condiciones de borde.

Todas las fórmulas se obtendrán con la teoría lineal de la elasticidad, vale decir que tanto la relación entre deformaciones y desplazamientos, como entre tensiones y deformaciones, son lineales.

Como es sabido, el estado de tensiones en todo punto de un sólido se describe con nueve componentes cartesianas. En la Figura 3.1.1 se muestra el elemento infinitesimal ( $dV = dxdydz$ ) y las nueve componentes positivas en las tres caras cuyas normales salientes tienen el mismo sentido que los ejes coordenados.

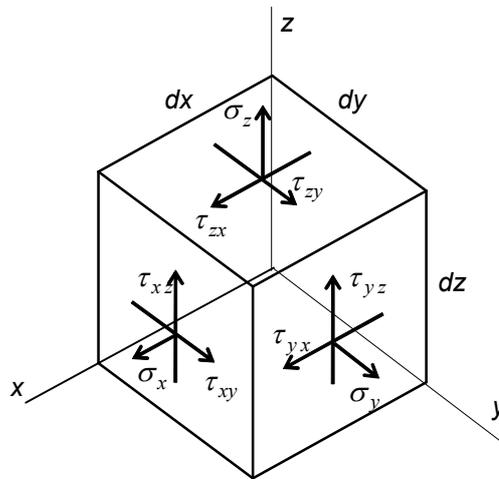


Figura 3.1.1: Tensiones positivas

Con las condiciones de equilibrio de momentos se deduce la propiedad de reciprocidad de las tensiones tangenciales:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.1)$$

En consecuencia, el estado de tensiones se reduce a seis componentes independientes, que se agrupan en una matriz-columna (vector):

$$\{\sigma\}^t = \left[ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right] \quad (3.2)$$

Análogamente, las correspondientes componentes de la deformación también se agrupan en un vector:

$$\{\varepsilon\}^t = \left[ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right] \quad (3.3)$$

Las relaciones entre las deformaciones y las componentes cartesianas  $u$ ,  $v$  y  $w$  del desplazamiento, las cuales son funciones continuas de las tres variables espaciales  $(x, y, z)$  y del tiempo  $(t)$ , se expresan con las conocidas fórmulas de la cinemática “infinitésima”:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4 a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.4 b)$$

Las relaciones constitutivas entre tensiones y deformaciones (ley de Hooke generalizada), con notación matricial se expresan:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.5)$$

En el caso más general involucran 36 constantes mecánicas que por simetría se reducen a 21 independientes. Con materiales isótropos se reducen a sólo dos: el módulo de Young ( $E$ ) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Para un material elástico isótropo, la matriz  $[D]$  que interviene en (3.5) es [15,16,17]:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Es fácil comprobar que esta matriz simétrica es positiva definida con  $0 \leq \nu < 0.5$ . Su inversa es:

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

con la cual se tiene:  $\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} \quad (3.8)$

Por otra parte, es usual emplear el módulo de elasticidad transversal ( $G$ ) cuya expresión en función del módulo de Young y del coeficiente de Poisson es:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

Con el módulo transversal, las relaciones entre las tensiones de corte y las distorsiones se expresan:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} ; \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} ; \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \quad (3.10)$$

En el caso de ortotropía tridimensional existen tres ejes **1-2-3**, ortogonales entre sí, denominados *ejes materiales* (también direcciones principales de ortotropía), y las constantes elásticas que intervienen son nueve: tres módulos de elasticidad longitudinal ( $E_1, E_2, E_3$ ), tres de elasticidad transversal ( $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ ) y seis relaciones de Poisson que a su vez se reducen a tres independientes ( $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ ; donde  $\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$  para el estado uniaxial en la dirección del eje material  $i$ ).

Las ecuaciones constitutivas para el estado triple de tensiones toman su forma más simple haciendo coincidir los ejes coordenados  $x-y-z$  con los ejes materiales **1-2-3**:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_{12} \sigma_y - \nu_{13} \sigma_z) ; \varepsilon_y = \frac{1}{E_2} (\sigma_y - \nu_{23} \sigma_z - \nu_{21} \sigma_x) ; \varepsilon_z = \frac{1}{E_3} (\sigma_z - \nu_{31} \sigma_x - \nu_{32} \sigma_y) \quad (3.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz} ; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{31}} \tau_{zx} \quad (3.12)$$

Con  $\sigma_y = 0$  y  $\sigma_z = 0$  en (3.11) resulta:  $\varepsilon_x = \sigma_x / E_1$ ;  $\varepsilon_y = -\nu_{21} \sigma_x / E_2$ ;  $\varepsilon_z = -\nu_{31} \sigma_x / E_3$

Luego:  $\nu_{12} = -\varepsilon_y / \varepsilon_x = \nu_{21} E_1 / E_2$ ;  $\nu_{13} = -\varepsilon_z / \varepsilon_x = \nu_{31} E_1 / E_3$   $\therefore \nu_{21} E_1 = \nu_{12} E_2$ ;  $\nu_{31} E_1 = \nu_{13} E_3$

Análogamente, se deduce la restante condición:  $\nu_{32} E_2 = \nu_{23} E_3$ . Por consiguiente, la matriz  $[D]^{-1}$  que interviene en (3.8) también es simétrica en el caso de ortotropía, y se expresa:

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para pasar a la forma  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ , se invierte la matriz  $[D]^{-1}$ :

$$[D] = \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})/d & E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})/d & E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/d & 0 & 0 & 0 \\ E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/d & E_2(1-\nu_{31}\nu_{13})/d & E_3(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})/d & 0 & 0 & 0 \\ E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})/d & E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/d & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})/d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde  $d = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$ ;  $d > 0$

Obviamente, reemplazando  $E_1=E_2=E_3=E$ ,  $G_{12}=G_{23}=G_{31}=G=1/2E/(1+\nu)$  y  $\nu_{12}=\nu_{21}=\nu_{23}=\nu_{32}=\nu_{31}=\nu_{13}=\nu$  en (3.13) y (3.14), las matrices  $[D]$  y  $[D]^{-1}$  se reducen a las constitutivas de elasticidad isotrópica (3.6) y (3.7), respectivamente.

Cabe destacar que en virtud de la simetría, las ecuaciones constitutivas (3.11) también pueden ser escritas en la forma dada por Lekhnitskii [11]:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_z}{E_3} ; \varepsilon_y = -\nu_{12} \frac{\sigma_x}{E_1} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_{32} \frac{\sigma_z}{E_3} ; \varepsilon_z = -\nu_{13} \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_{23} \frac{\sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_3}$$

Tanto con un material elástico lineal isótropo como anisótropo, la energía de deformación elástica en el elemento infinitesimal es:

$$dU = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dV \quad (3.15)$$

Por otra parte, la energía cinética se expresa:

$$dT = \frac{1}{2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (3.16)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material.

Por último, si  $\bar{f} = f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}$  es una fuerza distribuida en el volumen del sólido, el trabajo virtual debido a una variación del desplazamiento se expresa:

$$\delta W = \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV \quad (3.17)$$

donde  $V$  es el volumen del sólido.

Análogamente, si  $\bar{p} = p_x \bar{i} + p_y \bar{j} + p_z \bar{k}$  se distribuye sobre una superficie (usualmente por contacto, en el contorno del sólido), se tiene:

$$\delta W = \int_A (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dA \quad (3.18)$$

donde  $A$  es el área de la superficie donde se aplica  $\bar{p}$ .

Similarmente, si  $\bar{q} = q_x \bar{i} + q_y \bar{j} + q_z \bar{k}$  es una fuerza distribuida sobre una línea, el trabajo virtual se expresa:

$$\delta W = \int_L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w) dL \quad (3.19)$$

donde  $dL$  es el arco infinitesimal de la línea de aplicación.

Al reducir la acción de las fuerzas  $\bar{p}dA$  a una línea, llevándolas a la forma  $\bar{q}dL$ , en algunos casos también se presentan cuplas distribuidas  $\bar{m} = m_x \bar{i} + m_y \bar{j} + m_z \bar{k}$ , y el trabajo virtual se expresa:

$$\delta W = \int_L (m_x \delta \theta_x + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z) dL \quad (3.20)$$

donde  $\delta \theta_x$ ,  $\delta \theta_y$ ,  $\delta \theta_z$  son rotaciones virtuales.

### 3.2 Elemento uniaxial

La Figura 3.2.1 muestra una barra recta (longitud  $L=2a$ ), de sección constante (área  $A$ ), de un material homogéneo elástico con módulo de elasticidad  $E$ , y sujeta a la acción de una fuerza distribuida  $q_x$  sobre su eje. Puede suponerse que las secciones permanecen planas durante el movimiento, y además mantienen sus dimensiones transversales, especialmente si la relación adimensional  $A/L^2$  es pequeña. En tal caso el movimiento queda descrito totalmente con la componente  $u(x)$ , la misma para todos los puntos en cada sección.

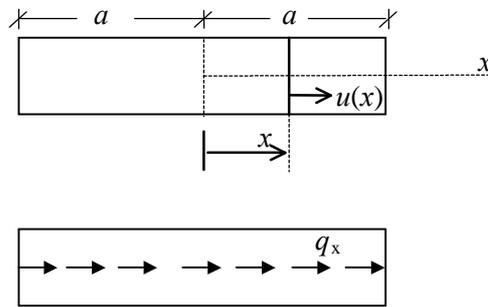


Figura 3.2.1: Estado uniaxial

Con esta hipótesis simplificativa en (3.4a) y (3.4b), se obtiene:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \text{ (por consiguiente: } v = 0); \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Por lo tanto, la única componente no nula del vector de tensiones es  $\sigma_x$  (uniforme en cada sección), que se relaciona con  $\varepsilon_x$  mediante la expresión constitutiva en su forma más sencilla:  $\sigma_x = E \varepsilon_x$ .

La energía de deformación en el elemento se expresa:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} E \varepsilon_x^2 A dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.21)$$

Por otro lado, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u}^2 dx \quad (3.22)$$

El trabajo virtual de la fuerza distribuida  $q_x$  se expresa:

$$\delta W = \int_{-a}^{+a} q_x \delta u dx \quad (3.23)$$

A continuación se muestra cómo se deduce la ecuación diferencial del movimiento para este tipo de elemento, aplicando el principio de Hamilton. Reemplazando (3.21), (3.22) y (3.23) en (1.35), se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[ \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u}^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \int_{-a}^{+a} q_x \delta u \delta x \right\} dt = 0$$

luego:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u} \delta \dot{u} dx - \int_{-a}^{+a} EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \int_{-a}^{+a} q_x \delta u \delta x \right\} dt = 0$$

Aplicando ahora una regla básica del cálculo de variaciones:  $\delta \dot{u} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta u)$ ,  $\delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)$ , la

anterior se expresa:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) dx - \int_{-a}^{+a} EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \int_{-a}^{+a} q_x \delta u \delta x \right\} dt = 0 \quad (3.24)$$

A continuación, en el primer término se aplica integración por partes con respecto a la variable  $t$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) dx \right\} dt = \int_{-a}^{+a} \rho A \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \dot{u} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) dt \right\} dx = \int_{-a}^{+a} \rho A \left\{ [\dot{u} \delta u]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u} \delta u dt \right\} dx$$

Debido a que el término  $\dot{u} \delta u$  se anula en los extremos del intervalo de tiempo ( $\delta u = 0$  en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ ), la anterior se reduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) dx \right\} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{-a}^{+a} \rho A \ddot{u} \delta u dx dt \quad (3.25)$$

Aplicando integración por partes en el segundo término de (3.24), ahora con respecto a la variable  $x$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dx \right\} dt \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.25) y (3.26) en (3.24):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \left( EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \ddot{u} + q_x \right) \delta u dx - \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_{-a}^{+a} \right\} dt = 0 \quad (3.27)$$

Dado que  $\delta u$  es arbitrario no nulo para todo valor de  $x$  y  $t$  (salvo en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ ), la condición (3.27) se cumple cuando:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_x = 0 \quad (3.28)$$

$$\text{con } EA \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta u = 0, \text{ en } x = -a \text{ y } x = +a \quad (3.29)$$

La expresión (3.28) es la ecuación diferencial a ser satisfecha en el intervalo  $-a \leq x \leq a$ , y (3.29) son las condiciones de borde.

En este caso, la ecuación diferencial también puede deducirse fácilmente, planteando directamente el equilibrio dinámico de una rebanada de longitud infinitesimal  $dx$ , cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 3.2.2.

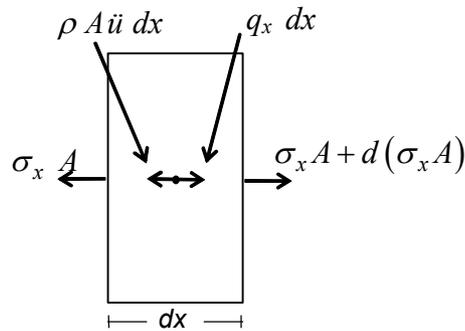


Figura 3.2.2: Elemento diferencial uniaxial

La ecuación de equilibrio en la dirección longitudinal se expresa:

$$d(\sigma_x A) - \rho A \ddot{u} dx + q_x dx = 0$$

En el caso de sección constante  $\left(\frac{\partial A}{\partial x} = 0\right)$  se tiene:  $d(\sigma_x A) = A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ .

Sustituyendo  $\sigma_x = E \varepsilon_x$  y  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ , finalmente resulta la misma ecuación diferencial (3.28):

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_x = 0$$

Las condiciones de borde (3.29) a ser cumplidas por la solución del desplazamiento  $u(x)$ , admiten una interpretación física muy simple:  $EA \partial u / \partial x$  es el esfuerzo axial resultante, cuyo valor es una condición *natural*. Obviamente, debe ser nulo si el extremo del elemento no está vinculado. De lo contrario, deberá cumplirse  $\delta u = 0$ , lo cual significa que el desplazamiento está restringido (extremo vinculado). Esta condición se denomina *geométrica, cinemática o esencial*.

Por ejemplo, las condiciones de borde para la barra empotrada-libre de la Figura 3.2.3 son:

$$\text{en } x = 0: \quad u = 0 \text{ (esencial);} \quad \text{en } x = L: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ (natural)}$$

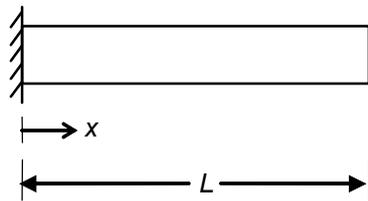


Figura 3.2.3: Barra empotrada-libre

Nótese que la condición esencial consiste en anular la función  $u(x)$ , mientras que la natural es imponer la nulidad de la derivada. En los tratados matemáticos sobre análisis variacional se establece, de una manera general, que si en el funcional (en este caso, la integral de Hamilton) intervienen derivadas de orden  $p$ , las condiciones impuestas a las funciones y sus derivadas hasta de orden  $p - 1$  son las esenciales; las expresadas con las derivadas de orden  $p$  hasta  $2p - 1$  constituyen las condiciones naturales.

### 3.3 Elemento torsional

Es muy similar al anterior. En la Figura 3.3.1 se muestra la misma barra, ahora considerando solamente deformaciones torsionales.

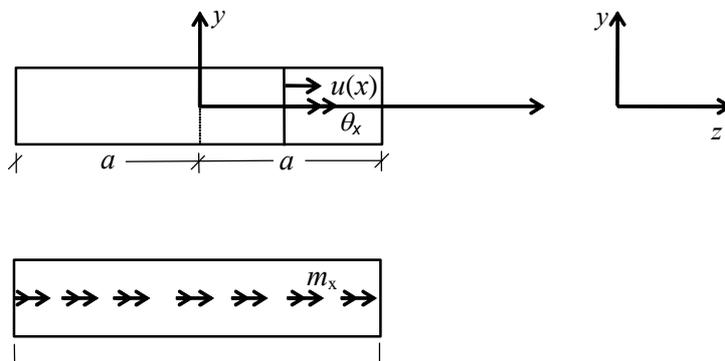


Figura 3.3.1: Barra torsionada

Se acepta la validez de la teoría de torsión de Saint-Venant para describir el movimiento. Como es sabido, esta teoría supone que la deformación se produce con rotación de las secciones alrededor del eje longitudinal, manteniendo sus dimensiones transversales, y con alabeo de las mismas producido por desplazamientos longitudinales no uniformes en cada sección, proporcionales a la variación longitudinal de la rotación. Con esta hipótesis, las componentes del desplazamiento se expresan:

$$u(x, y, z) = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \psi ; \quad v(x, z) = -z \theta_x ; \quad w(x, y) = y \theta_x \quad (3.30 \text{ a,b,c})$$

donde  $\psi(y, z)$  es una función que describe el alabeo (el mismo en todas las secciones). Aplicando las ecuaciones cinemáticas (3.4) resultan:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.31 \text{ a})$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \psi \quad (3.31 \text{ b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \quad (3.31 \text{ c})$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \quad (3.31 \text{ d})$$

Para barras de sección maciza, es usual suponer además que la componente axial  $\varepsilon_x$  es despreciable, quedando reducido el estado de deformaciones a las distorsiones  $\gamma_{xy}$  y  $\gamma_{xz}$ . Por consiguiente, las únicas tensiones son  $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$  y  $\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$ .

La energía de deformación en el elemento torsional se expresa:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} G \int_A (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2) dA dx$$

Reemplazando (3.31c) y (3.31d):

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} G J \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.32)$$

donde

$$J = \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dA \quad (3.33)$$

es la denominada constante de torsión de la sección, que también se escribe:

$$J = I_x + \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dA \quad (3.34)$$

Como es sabido, en el caso particular de sección circular el alabeo es nulo ( $\psi = 0$ ) y  $J$  es el momento de inercia polar:

$$I_x = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z .$$

En el cálculo de la energía cinética del elemento torsional, el desplazamiento longitudinal debido al alabeo también puede despreciarse. De modo que solamente se toma en cuenta la energía desarrollada en la rotación  $\theta_x$ :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho \int_A (z^2 + y^2) dA \dot{\theta}_x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_x \dot{\theta}_x^2 dx \quad (3.35)$$

El trabajo virtual de la cupla distribuida sobre el eje del elemento, tal como se muestra en la Figura 3.3.1, es:

$$\delta W = \int_{-a}^{+a} m_x \delta \theta_x dx \quad (3.36)$$

## FUNCIONES DE ENERGÍA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Por la similitud que este elemento guarda con el uniaxial se omite la deducción, con el principio de Hamilton, de la ecuación diferencial del movimiento y de las condiciones de borde naturales y esenciales. En este caso se tiene:

$$GJ \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + m_x = 0 \quad (3.37)$$

$$GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \theta_x = 0 \quad \text{en } x = -a \text{ y } x = a \quad (3.38)$$

La expresión  $GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0$  es la condición natural de nulidad del momento torsor, resultante de las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  que actúan en cada sección, y que en un extremo libre son nulas.

Por otra parte, utilizando la función de tensión  $\phi(y,z)$  introducida por Prandtl, con la teoría de Saint-Venant se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta_x = 0 \quad (3.39)$$

Esta ecuación puede resolverse numéricamente con algún método aproximado, por ejemplo, con elementos finitos [17]. De esta manera es posible obtener valores de  $J$  para diversas secciones macizas no circulares.

### 3.4 Elementos de vigas

La Figura 3.4.1 muestra una barra de longitud  $L=2a$ , área  $A$  y momento de inercia  $I_z$  de la sección transversal.

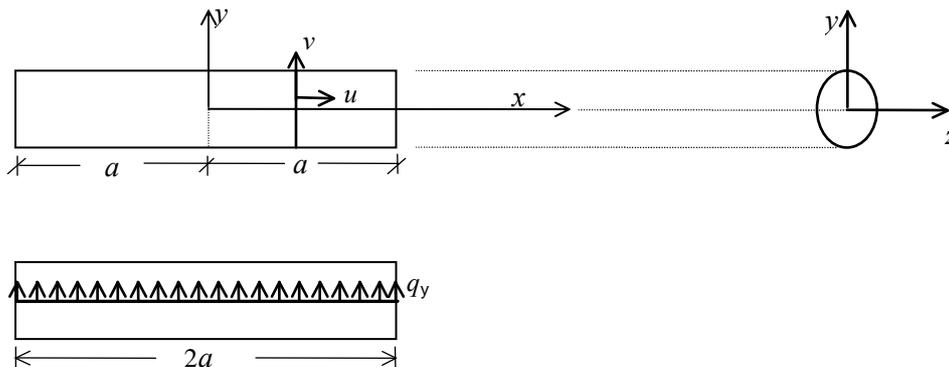


Figura 3.4.1: Barra con estado flexional (viga)

Para hallar las funciones de energía de un elemento de viga vibrante de sección constante, se asume que los ejes  $z$  e  $y$  son principales de inercia de la sección transversal, y que la vibración ocurre en el plano  $x - y$ . En la misma figura se indica el tipo de carga que se toma en consideración: una fuerza distribuida sobre el eje de la barra, en el plano del movimiento.

Cuando la relación adimensional  $I_z / Al^2$  es pequeña, puede aplicarse la teoría elemental de flexión de barras esbeltas ( $l$  es la longitud de la onda del modo de vibración).

Esta teoría conduce a la denominada viga vibrante de Bernoulli-Euler, con la cual se obtienen resultados prácticamente aceptables de las primeras frecuencias naturales cuando  $I_z / Al^2 < 0.001$ . En lugar de la magnitud adimensional  $I_z / Al^2$ , también puede utilizarse la relación  $h/l$ , donde  $h$  es la altura de la sección de la viga.

Con barras de mayor robustez se hace necesario tomar en cuenta la deformación por corte y la inercia rotatoria de las secciones, resultando un modelo matemáticamente un poco más complicado, denominado viga vibrante de Timoshenko, que produce resultados más concordantes con valores experimentales.

### 3.4.1 Viga Bernoulli-Euler

La hipótesis cinemática consiste en que las secciones, sin variar sus dimensiones transversales, permanecen planas y normales al eje longitudinal de la barra. Con esta suposición las componentes del desplazamiento de un punto de la barra se expresan:

$$w=0 ; \quad v(x): \text{ecuación de la elástica}$$

$$u(x, y) = -y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.40)$$

Las deformaciones resultan:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Por consiguiente:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.42)$$

Esta sería la única tensión no nula. Sin embargo, cuando el momento flector  $M_z$  (momento resultante de la tensión  $\sigma_x$  con respecto al eje  $z$ ) varía a lo largo de la barra, simultáneamente se produce esfuerzo de corte  $Q_y$  (resultante de tensiones  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ ) ya que debe cumplirse la condición de equilibrio:

$$Q_y + \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

Esta contradicción se salva agregando la hipótesis de rigidez transversal infinita ( $G = \infty$ ; obviamente, la fórmula (3.9) deja de tener validez).

La energía de deformación elástica almacenada en el elemento es  $U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA dx$ .

Reemplazando (3.41) y (3.42) se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} E \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \int_A y^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.44)$$

$$\text{donde } I_Z = \int_A y^2 dA$$

Para el cálculo de la energía cinética, en esta teoría sólo se considera la inercia transversal:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx \quad (3.45)$$

El trabajo virtual de la fuerza distribuida  $q_y$  se produce con una variación de  $v$ :

$$\delta W = \int_{-a}^{+a} q_y \delta v dx \quad (3.46)$$

En este caso también resulta de interés mostrar la aplicación del principio de Hamilton, con el cual se obtiene la ecuación diferencial de equilibrio y las condiciones de borde naturales y esenciales.

Sustituyendo en (1.35) las expresiones (3.44), (3.45) y (3.46) se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[ \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] + \int_{-a}^{+a} q_y \delta v dx \right\} dt = 0$$

o sea:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v} \delta \dot{v} dx - \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx + \int_{-a}^{+a} q_y \delta v dx \right\} dt = 0 \quad (3.47)$$

Integrando por partes el primer término con respecto al tiempo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho A \dot{v} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v) dt = \left[ \rho A \dot{v} \delta v \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{-a}^{+a} \rho A \ddot{v} \delta v dx \quad (3.48)$$

El primer término del segundo miembro de (3.48) es nulo, ya que el principio de Hamilton se aplica con  $\delta v = 0$  en  $t=t_1$  y  $t=t_2$ .

Integrando por partes el segundo término de (3.47) con respecto a la variable  $x$ :

$$\int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \left[ EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (3.49)$$

Integrando por partes el último término de la anterior:

$$\int_{-a}^{+a} EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) dx = \left[ EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta v \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \delta v dx \quad (3.50)$$

La sustitución de (3.48) y (3.49) con (3.50) en (3.47), da:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \left( -EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho A \ddot{v} + q_y \right) \delta v dx - \left[ EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{-a}^{+a} + \left[ EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta v \right]_{-a}^{+a} \right\} dt = 0 \quad (3.51)$$

Dado que  $\delta v$  es arbitrario no nulo en el intervalo  $t_1 < t < t_2$ , debe cumplirse la ecuación diferencial:

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_y = 0 \quad (3.52)$$

y las condiciones de borde en  $x = -a$  y  $x = +a$ :

$$EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; \quad EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad \text{ó} \quad v = 0 \quad (3.53 \text{ a,b})$$

La condición natural  $EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$  implica la nulidad del momento flector en un extremo libre o articulado (donde  $\sigma_x = 0$ ), mientras que  $EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$  significa esfuerzo de corte nulo en un extremo libre o con guía transversal (donde  $\tau_{xy} = 0$ ).

En efecto: el momento flector se calcula con

$$M_z = -\int_A y \sigma_x dA = -\int_A y E \varepsilon_x dA = \int_A y^2 E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dA = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Además, con (3.43) se deduce:  $Q_y = -EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$ , donde  $Q_y = \int_A \tau_{xy} dA$ .

Por consiguiente, las condiciones de borde en una viga son:

$$\text{a) extremo libre:} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (3.54 \text{ a})$$

$$\text{b) extremo articulado:} \quad v = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.54 \text{ b})$$

$$\text{c) extremo con guía transversal:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (3.54 \text{ c})$$

$$\text{d) extremo empotrado:} \quad v = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.54 \text{ d})$$

### 3.4.2 Viga Timoshenko

Como ya ha sido mencionado, en vigas poco esbeltas e incluso con vibraciones de alta frecuencia de vigas esbeltas, debe ser tomada en cuenta la deformación producidas por las tensiones tangenciales, como asimismo el efecto de la inercia rotacional de las secciones. La teoría de vigas vibrantes que tiene en cuenta sólo la inercia rotatoria es conocida como *viga Rayleigh*. La hipótesis que utilizó Timoshenko al incluir el efecto de las tensiones tangenciales, consiste en suponer que las secciones permanecen planas durante el movimiento, pero no perpendiculares al eje longitudinal debido a las distorsiones por corte.

En la Figura 3.4.2 se muestra una rebanada de espesor infinitesimal  $dx$  que, aparte de una traslación transversal  $v$  y una rotación  $\theta_z$ , experimenta una distorsión uniforme  $\gamma_{xy}$ . El desplazamiento  $u$  de un punto es producido por la rotación  $\theta_z$ , la cual es una función de  $x$ :  $u(x, y) = -y\theta_z$  (3.55)

Las deformaciones no nulas son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (3.56)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta_z + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.57)$$

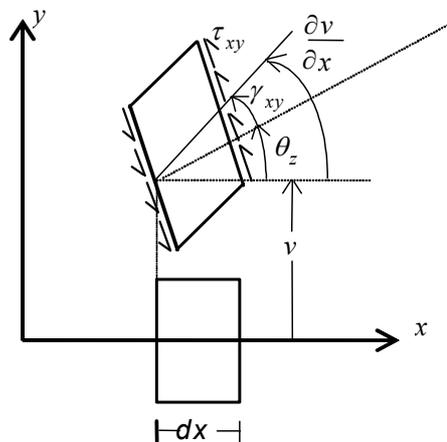


Figura 3.4.2: Elemento diferencial con deformación por corte

Vale decir que la pendiente de la elástica,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , es igual a la suma de la rotación  $\theta_z$  de la sección y de la distorsión  $\gamma_{xy}$  por corte, esta última supuesta constante en cada sección (ver Figura 3.4.2). Sin embargo, la tensión  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$  en realidad no es constante, ya que con la carga  $q_y$  indicada en la Figura 3.4.1, debe anularse en las caras superior e inferior de la barra. De modo que las secciones experimentan un alabeo en lugar de permanecer planas. Una forma de salvar esta contradicción consiste en poner un coeficiente en la ecuación constitutiva:

$$\tau_{xy} = \kappa G \gamma_{xy} \quad (3.58)$$

donde  $\tau_{xy} = Q_y / A$  es el valor de la tensión, que se supone uniformemente distribuida en cada sección. El coeficiente  $\kappa$  se denomina *factor de corte*, el cual depende de la forma de la sección. En su trabajo original Timoshenko adoptó  $\kappa=2/3$  para la sección rectangular, que es la relación entre la tensión media y la máxima (en el eje neutro) que resulta al aplicar la fórmula de Colignon-Jouravski. Posteriormente se comprobó que es más conveniente determinarlo mediante equivalencia energética, imponiendo la misma energía de deformación elástica por corte en la rebanada infinitesimal, condición que se expresa:

$$\frac{1}{2\kappa G} \int_V \tau_{xy}^2 dV = \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xy})_c^2 dV$$

donde  $(\tau_{xy})_c$  es la expresión que resulta de plantear el equilibrio estático de una porción variable de la sección (fórmula de Colignon). Despejando, el factor de corte resulta:

$$\kappa = \frac{\tau_{xy}^2 A}{\int_A (\tau_{xy})_c^2 dA} \quad (3.59)$$

En el caso de la sección rectangular, con esta fórmula resulta:  $\kappa = 5/6$ .

Se conocen otras fórmulas provenientes de estudios con la teoría de elasticidad, en las que el factor de corte depende también del coeficiente de Poisson [3]:

$$\text{Corona circular } (m = r_{\text{interno}}/r_{\text{externo}}) \quad \kappa = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2} \quad (3.60 \text{ a})$$

$$\text{Sección circular:} \quad \kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu} \quad (3.60 \text{ b})$$

$$\text{Tubo circular de pared delgada:} \quad \kappa = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu} \quad (3.60 \text{ c})$$

$$\text{Sección rectangular:} \quad \kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (3.60 \text{ d})$$

$$\text{Tubo cuadrado de pared delgada:} \quad \kappa = \frac{20(1+\nu)}{48+39\nu} \quad (3.60 \text{ e})$$

La energía de deformación, en el elemento, es la suma de la producida por flexión y por corte:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_V (E \varepsilon_x^2 + \kappa G \gamma_{xy}^2) dV$$

Sustituyendo (3.56) y (3.57) se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right)^2 dx \quad (3.61)$$

A la energía cinética por desplazamiento transversal, dada por (3.45), se agrega ahora la correspondiente

$$\text{al desplazamiento } u(x): \quad T_u = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho \dot{\theta}_z^2 \int_A y^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx$$

Luego, la energía cinética total del elemento es:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx \quad (3.62)$$

Para el trabajo virtual de la carga  $q_y$ , se repite (3.46).

A continuación se deducen las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde para este modelo de viga vibrante. Reemplazando (3.61), (3.62) y (3.46) en la integral de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \left( \rho A \dot{v} \delta \dot{v} + \rho I_z \dot{\theta}_z \delta \dot{\theta}_z - EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \delta \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) + q_y \delta v \right) dx \right\} dt = 0$$

Integrando por partes los dos primeros términos con respecto a  $t$  (con  $\delta v = 0$  y  $\delta \theta_z = 0$  en  $t=t_1$  y  $t=t_2$ ):

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho A \dot{v} \delta \dot{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho A \dot{v} \frac{\partial}{\partial t} \delta v dt = \left[ \rho A \dot{v} \delta v \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho A \ddot{v} \delta v dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho I_z \dot{\theta}_z \delta \dot{\theta}_z dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho I_z \dot{\theta}_z \frac{\partial}{\partial t} \delta \theta_z dt = \left[ \rho I_z \dot{\theta}_z \delta \theta_z \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho I_z \ddot{\theta}_z \delta \theta_z dt$$

Integrando por partes los siguientes dos términos con respecto a la variable  $x$ :

$$\int_{-a}^{+a} EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \theta_z dx = \left[ EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \delta \theta_z \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} EI_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} \delta \theta_z dx$$

$$\int_{-a}^{+a} \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta v - \delta \theta_z \right) dx = \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \delta v \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} \kappa GA \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) \delta v dx - \int_{-a}^{+a} \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \delta \theta_z dx$$

Reemplazando en la expresión del principio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-a}^{+a} \left( \kappa GA \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) - \rho A \ddot{v} + q_y \right) \delta v dx - \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \delta v \right]_{-a}^{+a} + \int_{-a}^{+a} \left( EI_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) - \rho I_z \ddot{\theta}_z \right) \delta \theta_z dx - \left[ EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \delta \theta_z \right]_{-a}^{+a} \right\} dt = 0$$

Dado que  $v$  y  $\theta_z$  son variables independientes, deben anularse por separado los factores de  $\delta v$  y  $\delta \theta_z$ .

Por lo tanto, resulta un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} kGA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \kappa GA \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_y &= 0 \\ EI_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + \kappa GA \frac{\partial v}{\partial x} - kGA \theta_z - \rho I_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

con las condiciones de borde:

$$\left. \begin{aligned} v = 0 \quad (\text{desplazamiento nulo}) \quad \text{ó} \quad \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) &= 0 \quad (\text{corte nulo}) \\ \theta_z = 0 \quad (\text{giro nulo}) \quad \text{ó} \quad EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} &= 0 \quad (\text{momento flector nulo}) \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

Las condiciones de vínculo de una viga son:

$$\text{a) extremo libre:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = 0 \quad (3.65 \text{ a})$$

$$\text{b) extremo articulado:} \quad \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = 0 \quad ; \quad v = 0 \quad (3.65 \text{ b})$$

$$\text{c) extremo con guía transversal:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z = 0 \quad ; \quad \theta_z = 0 \quad (3.65 \text{ c})$$

$$\text{d) extremo empotrado:} \quad v = 0 \quad ; \quad \theta_z = 0 \quad (3.65 \text{ d})$$

Cabe destacar que con el sistema (3.63) constituido por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, es posible deducir una ecuación diferencial de cuarto orden en la variable  $v$ , o alternativamente en la variable  $\theta_z$  [10].

### 3.5 Elementos bidimensionales

Esta denominación se refiere a los elementos que se utilizan para analizar los estados planos, tanto de tensiones como de deformaciones. También podría ser incluido el caso de sólidos de revolución cuando el análisis se limita a desplazamientos axisimétricos.

El objeto de aplicar el principio de Hamilton en los casos precedentes ha sido mostrar cómo se llega a la ecuación diferencial y qué condiciones de borde deben cumplirse. En los elementos bidimensionales que se estudiarán a continuación, el análisis se limita a determinar las expresiones de  $U$ ,  $T$  y  $\delta W$ . En este caso, la aplicación del principio de Hamilton resulta más dificultosa debido a que las integrales cubren una región bidimensional (la integración por partes en dos dimensiones se realiza aplicando la fórmula de Green). Por otra parte, para implementar el método de elementos finitos no son necesarias las ecuaciones diferenciales si se conocen las funciones de energía.

### 3.5.1 Estado plano de tensiones

En la práctica a menudo se presentan problemas en los que el régimen de tensiones se aproxima al estado plano. Por ejemplo, un sólido prismático de altura  $h$  (espesor) con su plano medio en el plano coordenado  $x$ - $y$ , como se muestra en la Figura 3.5.1. Las fuerzas externas, paralelas al plano  $x$ - $y$ , se distribuyen uniformemente sobre el espesor  $h$ .

Los planos  $z = \pm h/2$  se encuentran libres de carga. En estas condiciones es razonable suponer que las tensiones  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$ , nulas en dichos planos, también son nulas en todo punto del sólido (especialmente si el espesor es pequeño). Por consiguiente, el estado de tensiones queda definido por dos componentes normales ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ) y una tangencial ( $\tau_{xy}$ ). Además se supone que no dependen de  $z$ .

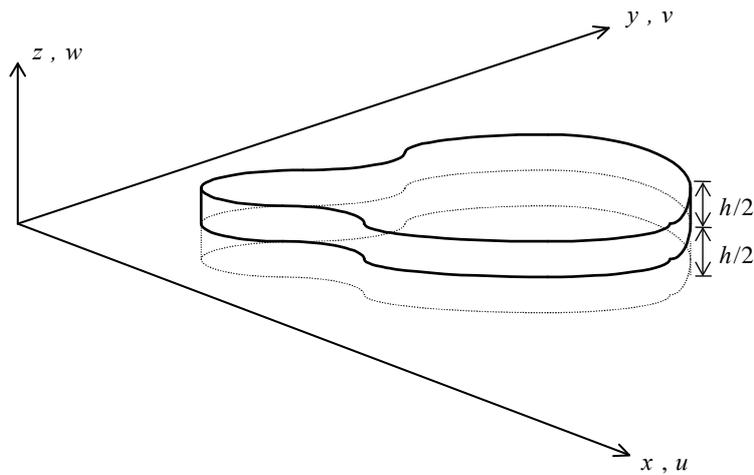


Figura 3.5.1: Sólido prismático de altura (espesor)  $h$

Queda claro que los puntos del plano medio ( $z=0$ ) solamente se mueven en el plano  $x$ - $y$ . A este modelo algunos autores lo denominan elemento membranar.

La energía de deformación elástica se expresa:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_A h (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA \quad (3.66)$$

donde  $A$  es el área de la superficie media. Con notación matricial:

$$U = \frac{h}{2} \int_A \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dA \quad (3.67)$$

FUNCIONES DE ENERGÍA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Las ecuaciones constitutivas en el caso de isotropía se obtienen poniendo  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  en (3.8), resultando:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (3.68)$$

Dado que la deformación  $\varepsilon_z$  no interviene en la expresión de la energía, no participa en forma directa en el análisis y puede ser calculada una vez conocidas las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.69)$$

La relación matricial (3.8) en este caso se reduce a:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \{\sigma\} \quad (3.70)$$

Las relaciones constitutivas pueden expresarse en la forma  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ , invirtiendo la matriz  $[D]^{-1}$ :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Reemplazando  $\{\sigma\}^t = \{\varepsilon\}^t [D]$  en (3.67) resulta:

$$U = \frac{h}{2} \int_A \{\varepsilon\}^t [D] \{\varepsilon\} dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \varepsilon_x^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dA \quad (3.72)$$

Sustituyendo las componentes de la deformación en función del desplazamiento, dadas por (3.4):

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dA \quad (3.73)$$

En el caso de material ortótropo, las ecuaciones constitutivas para el estado plano de tensiones toman su forma más simple haciendo coincidir los ejes x-y con las direcciones principales de ortotropía [11]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_2}(\sigma_y - \nu_2\sigma_x) \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy} \quad (3.74)$$

donde  $\nu_1 = \nu_{12} = -\varepsilon_y/\varepsilon_x$  para el estado uniaxial en la dirección del eje x ( $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0$ )

y  $\nu_2 = \nu_{21} = -\varepsilon_x/\varepsilon_y$  para el estado uniaxial en la dirección del eje y ( $\sigma_x = 0, \sigma_y \neq 0$ )

Haciendo  $\sigma_y = 0$  en (3.74) resulta:  $\varepsilon_x = \sigma_x/E_1$ ;  $\varepsilon_y = -\nu_2\sigma_x/E_2$ ; luego:  $\nu_1 = -\varepsilon_y/\varepsilon_x = \nu_2 E_1/E_2$

y con  $\sigma_x = 0$  en (3.74) resulta:  $\varepsilon_y = \sigma_y/E_2$ ;  $\varepsilon_x = -\nu_1\sigma_y/E_1$ ; luego:  $\nu_2 = -\varepsilon_x/\varepsilon_y = \nu_1 E_2/E_1$

Por consiguiente, se cumple la denominada condición de simetría:

$$\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1 \quad (3.75)$$

La forma matricial de las ecuaciones constitutivas (3.74) para el estado plano de tensiones es:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_1/E_1 & 0 \\ -\nu_2/E_2 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \{\sigma\} \quad (3.76)$$

Para pasar a la forma  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ , se invierte la matriz  $[D]^{-1}$ :

$$[D] = \frac{1}{1-\nu_1\nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1-\nu_1\nu_2) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

En virtud de la igualdad (3.75) las matrices  $[D]$  y  $[D]^{-1}$  son simétricas. Es conveniente aclarar que en elasticidad ortotrópica el módulo de elasticidad transversal  $G_{12}$  no resulta expresado en función de las restantes constantes elásticas ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ). Por otra parte, poniendo  $E_1=E_2=E$ ,  $\nu_1=\nu_2=\nu$  y  $G_{12}=G=\frac{1}{2}E/(1+\nu)$  en (3.77), la matriz  $[D]$  se reduce a la constitutiva de elasticidad isotrópica (3.71).

Reemplazando ahora  $\{\sigma\}' = \{\varepsilon\}' [D]$  en (3.67) resulta la siguiente expresión de la energía de deformación para el caso de ortotropía en el estado plano de tensiones:

$$U = \frac{h}{2} \int_A \frac{1}{1-\nu_1\nu_2} \left( E_1 \varepsilon_x^2 + (E_1\nu_2 + E_2\nu_1) \varepsilon_x \varepsilon_y + E_2 \varepsilon_y^2 + G_{12}(1-\nu_1\nu_2) \gamma_{xy}^2 \right) dA \quad (3.78)$$

Es importante destacar que las tensiones y deformaciones que intervienen en (3.74), (3.76), (3.77) y (3.78) corresponden a las direcciones principales de ortotropía. Cuando los ejes coordenados  $x$ - $y$  no coinciden con dichas direcciones es necesario realizar la transformación. Manteniendo la notación  $[D]$  para la matriz constitutiva referida al sistema coordenado  $x$ - $y$ , e indicando ahora con  $[D_{1-2}]$  la matriz constitutiva (3.77) referida a los ejes materiales **1-2** de ortotropía, se aplica la siguiente transformación [15]:

$$[D] = [R]^t [D_{1-2}] [R] \quad (3.79)$$

donde  $[R]$  es función del ángulo  $\alpha$  dirigido en sentido antihorario desde el eje  $x$  hacia el eje material **1**:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

La energía cinética del elemento no depende de las ecuaciones constitutivas. Viene dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right) dV = \frac{1}{2} \int_A \rho h \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right) dA \quad (3.81)$$

Finalmente, si  $q_x = p_x h$  y  $q_y = p_y h$  son las componentes de la fuerza distribuida sobre la línea de intersección del sólido con el plano coordenado  $x$ - $y$  (contorno del elemento bidimensional), el trabajo virtual se expresa:

$$\delta W = \int_L (q_x \delta u + q_y \delta v) dL \quad (3.82)$$

donde  $dL$  es el arco diferencial del contorno lineal.

### 3.5.2 Estado plano de deformaciones

En la práctica también se presentan problemas que pueden ser resueltos con un modelo de estado plano de deformaciones, donde son nulas las componentes  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{zy}$ . En este caso, la componente  $w$  del desplazamiento también es nula en todo punto del modelo.

A continuación se obtienen las expresiones para materiales elásticos isótropos. Las relaciones constitutivas se deducen poniendo  $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$  en (3.5), con la matriz  $[D]$  dada en (3.6):

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.83)$$

Con la tercera ecuación de (3.5) se halla la expresión de  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.84)$$

Esta tensión no interviene directamente en el análisis, ya que no forma parte de la expresión de la energía de deformación. Se puede calcular una vez conocidas las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .

Se comprueba que la matriz  $[D]$  no es la misma que para el estado plano de tensiones, siendo ésta la única diferencia entre los dos modelos bidimensionales.

Sustituyendo (3.83) en (3.67) se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_A h \{\varepsilon\}^t [D] \{\varepsilon\} dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-2\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dA \quad (3.85)$$

y en función de los desplazamientos:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dA \quad (3.86)$$

Para la energía cinética y el trabajo virtual de las fuerzas externas, se repiten las fórmulas (3.81) y (3.82), respectivamente.

Dado que la única diferencia con el estado plano de tensiones se presenta en la expresión de la energía de deformación elástica, se puede recurrir a un artificio que permite resolver el estado plano de

deformaciones con las fórmulas del estado plano de tensiones, modificando adecuadamente las constantes mecánicas  $E$  y  $\nu$ . Si  $E_c$  y  $\nu_c$  son los valores ficticios a ser adoptados para el cálculo, deben satisfacer la condición de igualdad de las respectivas energías de deformación (3.72) y (3.85):

$$\frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left( \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu_c \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\nu_c}{2} \gamma_{xy}^2 \right) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right)$$

Para que esta condición se satisfaga independientemente de los valores de  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  debe cumplirse la igualdad término a término:

$$\frac{E_c}{1-\nu_c^2} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \frac{\nu_c E_c}{1-\nu_c^2} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \frac{E_c}{1+\nu_c} = \frac{E}{(1+\nu)} \quad (3.87)$$

De las dos primeras se deduce: 
$$\nu_c = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (3.88)$$

Reemplazándola en la tercera, resulta: 
$$E_c = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (3.89)$$

Cuando  $\nu = 0$ , ambos estados son coincidentes.

### 3.6 Elementos de placas

La misma Figura 3.5.1 es un esquema de placa, pero sujeto a una fuerza transversal  $p_z(x,y)$  distribuida sobre el plano medio. Por ende, la placa se flexiona. La componente  $w$  del desplazamiento de los puntos de dicho plano medio ahora no es nula, aunque se supone pequeña frente al espesor  $h$  de la placa.

De un modo similar que para el caso de vigas, se describen dos modelos: uno con la teoría elemental (Germain-Kirchhoff) válida para placas delgadas, y otro con una teoría algo más avanzada (Mindlin) para placas moderadamente gruesas.

#### 3.6.1 Flexión de placas delgadas

Esta teoría se basa en las siguientes hipótesis simplificativas:

- a)  $w$  pequeño con respecto al espesor  $h$ .
- b) tensión  $\sigma_z$  despreciable.
- c)  $u=v=0$  en el plano medio ( $z=0$ ).
- d) las normales al plano medio permanecen rectas y normales a la deformada de dicho plano.

En consecuencia, las componentes  $u$  y  $v$  del desplazamiento de un punto de la placa, se expresan:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.90 \text{ a})$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.90 \text{ b})$$

donde  $w(x,y)$  es la función del desplazamiento de los puntos del plano medio (“elástica” de la placa).

FUNCIONES DE ENERGÍA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Las componentes de la deformación son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

La deformación  $\varepsilon_z$  es irrelevante, ya que el producto  $\sigma_z \varepsilon_z$  no interviene en la energía de deformación por ser despreciable la componente de tensión  $\sigma_z$ .

El vector deformación queda expresado en la forma:

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z \{\chi\} \quad (3.92)$$

donde  $\{\chi\}$  es el denominado vector de las “*curvaturas*” del plano medio de la placa.

La energía de deformación es: 
$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dV$$

Poniendo  $\{\sigma\}^t = \{\varepsilon\}^t [D]$  y sustituyendo  $\{\varepsilon\} = -z \{\chi\}$ , se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_V z^2 \{\chi\}^t [D] \{\chi\} dV = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \{\chi\}^t [D] \{\chi\} dz dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^t [D] \{\chi\} dA \quad (3.93)$$

Dado que la deformación en la dirección  $z$  no está restringida, debe utilizarse la relación constitutiva del estado plano de tensiones, con la matriz  $[D]$  dada en (3.71) para materiales isótropos. Desarrollando, resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_A D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (3.94)$$

donde  $D$  es la rigidez flexional de la placa: 
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.95)$$

En el caso de placas ortótropas con los ejes materiales coincidentes con los coordenados  $x$ - $y$ , la energía  $U$  se obtiene reemplazando la matriz  $[D]$  dada en (3.77). Desarrollando:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (3.96)$$

donde: 
$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} ; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} ; \quad D_{12} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (3.97 \text{ a,b,c})$$

En esta teoría elemental de placas delgadas, la energía cinética se calcula considerando solamente el desplazamiento transversal:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{w}^2 dV = \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA \quad (3.98)$$

El trabajo virtual de la carga  $p_z$  se expresa:

$$\delta W = \int_A p_z \delta w dA \quad (3.99)$$

### 3.6.2 Flexión de placas moderadamente gruesas

Del mismo modo que las deformaciones por corte y la inercia rotatoria de las secciones adquieren importancia al disminuir la esbeltez de una viga, los mismos efectos deben ser tenidos en cuenta en placas cuyo espesor supera la décima parte de la longitud de onda del modo de vibración.

Cuando las deformaciones por corte son tomadas en cuenta, ya no puede suponerse que las normales al plano medio permanecen normales a la deformada, aunque sí se acepta que se mantienen rectas (teoría de Mindlin). Si  $\theta_x(x, y)$  y  $\theta_y(x, y)$  son las componentes cartesianas de las rotaciones de dichas normales, los desplazamientos  $u$  y  $v$  de un punto de la placa se expresan:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\theta_y \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x \end{aligned} \quad (3.100)$$

En consecuencia, las deformaciones resultan:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (3.101)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y ; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x$$

En este caso tampoco interviene  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ , ya que se mantiene la hipótesis de que el producto  $\sigma_z \varepsilon_z$  es despreciable. Agrupando  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  en el vector  $\{\varepsilon\}$ , se tiene:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = -z \{\chi\} \quad (3.102)$$

Cabe destacar que si las distorsiones  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{zy}$  se consideraran despreciables, se cumpliría  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$  y

$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ . Al reemplazarlas en (3.102) se reproduce el vector de las curvaturas para placas delgadas.

Por otra parte, agrupando las distorsiones  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{zy}$  en el vector  $\{\gamma\}$ , las tensiones  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$  en el vector  $\{\tau\}$ , y sumando las energías de deformación por flexión y por corte calculadas por separado, se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\tau\}^t \{\gamma\} dV \quad (3.103)$$

Para tener en cuenta el efecto de la variación de las tensiones de corte en el espesor de la placa, se introduce un factor  $\kappa$  en la correspondiente relación constitutiva:

$$\{\tau\} = \kappa G \{\gamma\} \quad (3.104)$$

El factor de corte  $\kappa$  usualmente se toma igual al de una viga de sección rectangular,  $\kappa = 5/6$ . Algunos autores adoptan  $\kappa = \pi^2/12$ , que difiere muy poco del anterior.

Reemplazando  $\{\sigma\}^t = \{\varepsilon\}^t [D]$  y  $\{\varepsilon\} = -z\{\chi\}$  en (3.103), se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^t [D] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_A \kappa G h \{\gamma\}^t \{\gamma\} dA \quad (3.105)$$

Operando con la matriz  $[D]$  para materiales isótropos dada por (3.71), finalmente resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_A D \left[ \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right] dA + \frac{1}{2} \int_A \kappa G h \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 \right] dA \quad (3.106)$$

Para placas ortótropas, la expresión de la energía de deformación se obtiene sustituyendo en (3.105) la matriz constitutiva  $[D]$  dada por (3.77). Suponiendo  $G_{23}=G_{31}=G$  y operando, resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left[ D_1 \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 - 2\nu_2 D_1 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + D_{12} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right] dA + \frac{1}{2} \int_A \kappa G h \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 \right] dA \quad (3.107)$$

Por otra parte, en esta teoría de placas moderadamente gruesas corresponde calcular la energía cinética con las tres componentes del desplazamiento:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right) dV \quad (3.108)$$

Sustituyendo las expresiones de  $u$  y  $v$  dadas en (3.100), e integrando sobre  $z$  entre  $-h/2$  y  $+h/2$ :

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho \left( \frac{h^3}{12} \left( \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 \right) + h \dot{w}^2 \right) dA \quad (3.109)$$

Para el trabajo virtual de la fuerza distribuida transversal se repite la expresión (3.99).

# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 4. EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### 4.1 Introducción

La respuesta dinámica de componentes estructurales simples, como una barra homogénea de sección constante vibrando con un modo longitudinal o torsional, o con un modo transversal por flexión, puede ser hallada resolviendo las ecuaciones diferenciales del movimiento e imponiendo las condiciones de borde apropiadas. Sin embargo, en muchos casos prácticos las propiedades geométricas y mecánicas son variables, o la forma de los bordes en modelos bidimensionales no puede ser descrita con funciones conocidas, resultando prácticamente imposible obtener la solución analítica exacta. Existen diversos métodos para hallar soluciones aproximadas, analíticas o numéricas. Una solución aproximada es numérica si se obtienen valores aislados de la solución en diversos puntos del dominio; es analítica si la solución exacta es reemplazada por otra función, la cual queda determinada con valores de un número finito de parámetros que la definen.

A continuación se describe una de las técnicas más utilizadas, el método de Rayleigh-Ritz [10]. Fue introducido por Lord Rayleigh en 1870 y luego generalizado por Ritz, en 1909. Es aplicable cuando se conoce el funcional, que en los problemas de dinámica de sólidos elásticos es la expresión (1.35) del principio de Hamilton. Una modificación de este procedimiento conduce a una de las formas de aplicación del método de los elementos finitos. Ambas técnicas serán explicadas con el problema, más simple, de vibraciones longitudinales (elemento uniaxial).

En este curso, el análisis dinámico se limita a calcular las frecuencias y modos naturales de vibración de modelos estructurales elásticos lineales sin amortiguamiento, de modo que en el principio de Hamilton el término  $\delta W$  es nulo.

### 4.2 Método de Rayleigh-Ritz

Se plantea el problema de calcular las tres primeras frecuencias naturales de la barra homogénea de sección constante empotrada-libre, vibrando longitudinalmente (ver Figura 3.2.3). La solución exacta en este caso no ofrece ninguna dificultad: la ecuación diferencial (3.28) con  $q_x = 0$  es:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

Para todo  $t$ , las condiciones de bordes son:

$$u = 0, \quad \text{en } x=0 \quad (4.2)$$
$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = L$$

## EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En vibraciones libres el movimiento es armónico, vale decir que el desplazamiento puede ponerse en la forma:

$$u(x,t) = u(x) \text{sen } \omega t \quad (4.3)$$

donde  $u(x)$  es la amplitud del movimiento de la sección situada a una distancia  $x$  desde el extremo empotrado. Derivando dos veces con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(x) \text{sen } \omega t = -\omega^2 u(x,t) \quad (4.4)$$

Reemplazando (4.3) y (4.4) en la ecuación diferencial (4.1), y dividiendo por  $EA \text{sen } \omega t$ , se obtiene:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \Omega^2 u(x) = 0, \text{ donde } \Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho}{E} \quad (4.5)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$u(x) = C_1 \text{sen } \Omega x + C_2 \text{cos } \Omega x \quad (4.6)$$

Las dos condiciones de borde (4.2) ahora se expresan:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0, \quad \text{en } x=0 \\ \frac{du(x)}{dx} &= 0, \quad \text{en } x=L \end{aligned}$$

Introduciéndolas en (4.6) resultan:  $C_2 = 0$  y  $\Omega_j L = (2j-1) \frac{\pi}{2}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Despejando  $\omega_j$  de la última:  $\omega_j = \Omega_j \sqrt{\frac{E}{\rho}} = (2j-1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = (2j-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$  (4.7)

Los modos de vibración se obtienen reemplazando  $\Omega_j$  en (4.6):

$$u_j(x) = C_1 \text{sen } \frac{(2j-1)\pi x}{2L}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

La constante  $C_1$  queda indeterminada. Representa la amplitud del desplazamiento del extremo libre, que puede hacerse igual a la unidad.

Existen infinitas frecuencias naturales (un sistema continuo posee infinitos grados de libertad). La menor es la frecuencia fundamental, que se obtiene poniendo  $j = 1$  en (4.7):

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (4.9)$$

En la Figura 4.2.1 de la página siguiente se muestran los tres primeros modos de vibración y los respectivos valores del coeficiente de frecuencia adimensional  $\Omega = \omega L (\rho/E)^{1/2}$ , redondeados al quinto dígito significativo.

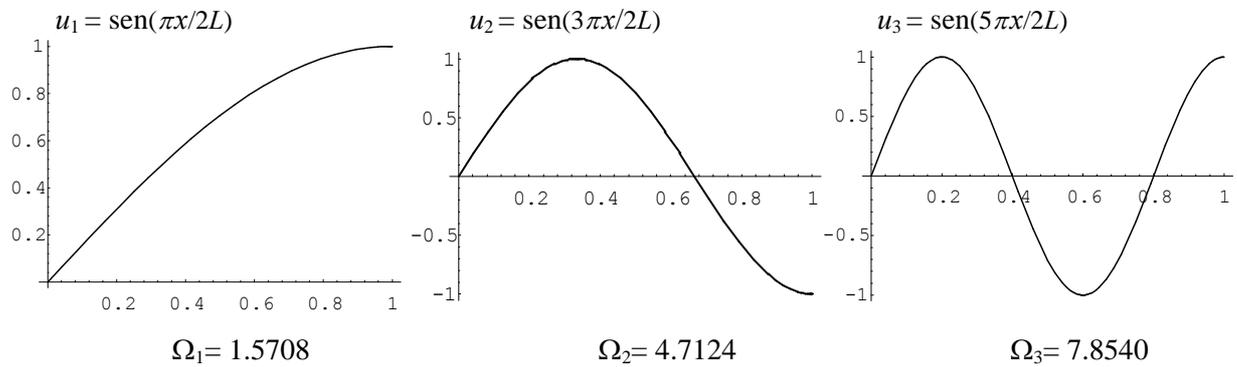


Figura 4.2.1: Desplazamiento axial  $u(x)$  de los tres primeros modos naturales

En el método de Rayleigh-Ritz la solución es aproximada con una serie finita de la forma:

$$u(x, t) \approx u_n(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \psi_j(t) \tag{4.10}$$

donde  $\psi_j$  son funciones del tiempo y  $\varphi_j$  son adecuadas funciones de  $x$ , linealmente independientes, cada una cumpliendo las condiciones esenciales del problema (en este caso  $\varphi_j = 0$  en  $x=0$ ). Este último requisito es debido a que el principio de Hamilton, como ha sido demostrado en la Sección 1.5, puede deducirse a partir del principio de los desplazamientos virtuales, y éste implica el cumplimiento de tales condiciones.

Las funciones  $\varphi_j(x)$  son linealmente independientes cuando la ecuación  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x) = 0$  sólo se cumple con  $\alpha_j = 0$  ( $j = 1 \dots n$ ). Por ejemplo, las funciones polinómicas de distinto grado y las trigonométricas, entre otras menos sencillas, son linealmente independientes. Precisamente, el uso de polinomios algebraicos garantiza la convergencia del método, ya que un conocido teorema del análisis matemático establece que toda función continua en un intervalo puede ser uniformemente aproximada con polinomios; o sea que puede ser expresada mediante una serie finita o infinita de polinomios. Lo mismo vale para funciones continuas de dos o más variables.

El paso siguiente es aplicar el principio de Hamilton con la solución aproximada (4.10). Para ello es necesario conocer las funciones de las energías  $T$  y  $U$ , ahora en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ , que fueron halladas en la Sección 3.2 para el elemento uniaxial en el intervalo  $-a \leq x \leq +a$ :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx \tag{4.11}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \tag{4.12}$$

Las funciones  $\varphi_j(x)$  deben ser continuas en el intervalo  $0 \leq x \leq L$  debido a que en la expresión de  $U$  interviene la derivada primera, la cual no debe hacerse infinita en ningún punto del intervalo para que la integral (4.12) no resulte indefinida.

Por otra parte, todo sistema deformable continuo consiste de infinitos puntos móviles, y por ende posee infinitos grados de libertad (esto ha sido comprobado con la solución exacta del ejemplo de la

## EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

barra empotrada-libre, elegido para la descripción de los métodos). Al suponer que el movimiento queda representado por la serie (4.10), el sistema continuo es reducido a un sistema discreto, con un número finito  $n$  de grados de libertad. Esto es equivalente a imponer condiciones adicionales a la serie infinita que representa a la solución exacta:

$$u_{\infty}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \psi_j \quad (4.13)$$

$$\text{cuando las mismas son las restricciones } \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = \varphi_{n+3} = \dots = 0 \quad (4.14)$$

Vale decir que se realiza un truncado de la serie infinita. Desde un punto de vista teórico es importante destacar que las restricciones (4.14) implican que la integral  $I_n = \int_{t_1}^{t_2} (T-U)dt$ , al calcularla con la solución aproximada  $u_n(x,t)$ , es mayor que el verdadero mínimo que resultaría con la solución exacta  $u(x,t)$ . De manera que al ir aumentando el número de términos  $n$  de (4.10) deberían obtenerse valores decrecientes de la integral:

$$I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_n \quad (4.15)$$

En tal caso se dice que las series  $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t)$  forman una secuencia minimizante.

Por otra parte, la solución (4.10) cumple exactamente las condiciones esenciales, impuestas a  $\varphi_j(x)$ , pero no es solución de la ecuación diferencial ni satisface exactamente las condiciones naturales.

Reemplazando (4.10) en (4.11) y (4.12) se obtienen  $T$  y  $U$  del sistema discreto:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j \dot{\psi}_j \right)^2 dx \quad (4.16)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j' \psi_j \right)^2 dx \quad (4.17)$$

$$\text{donde: } \varphi_j' = \frac{d\varphi_j}{dx}$$

La aplicación del principio de Hamilton puede llevarse a cabo con las ecuaciones de Lagrange deducidas en la Sección 1.6 para sistemas discretos, adoptando  $\psi_k$  como coordenada generalizada. Utilizando (1.79), sin amortiguamiento ni fuerzas externas, las  $n$  ecuaciones de Lagrange se expresan:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_k} \right) + \frac{\partial U}{\partial \psi_k} = 0, \quad k = 1 \dots n \quad (4.18)$$

Con (4.16) y (4.17) se obtienen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_k} \right) = \int_0^L \rho A \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j \ddot{\psi}_j \right) \varphi_k dx \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi_k} = \int_0^L EA \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j' \psi_j \right) \varphi_k' dx \quad (4.20)$$

Cuando el movimiento es armónico, las funciones  $\psi_j(t)$  pueden tomar la forma:

$$\psi_j(t) = a_j \text{sen } \omega t \quad (4.21)$$

donde los coeficientes  $a_j$  por el momento son desconocidos.

Por consiguiente:

$$\ddot{\psi}_j(t) = -\omega^2 a_j \text{sen } \omega t \quad (4.22)$$

Sustituyendo (4.21) en (4.10):

$$u_n(x,t) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \text{sen } \omega t \quad (4.23)$$

En consecuencia, la expresión aproximada de la amplitud del movimiento armónico, con  $n$  términos, es:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \quad (4.24)$$

Reemplazando (4.21) en (4.20), (4.22) en (4.19), y sustituyendo en (4.18), resulta:

$$-\omega^2 \int_0^L \rho A \left( \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \right) \varphi_k dx + \int_0^L EA \left( \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j' \right) \varphi_k' dx = 0, \quad k = 1 \dots n \quad (4.25)$$

Con notación matricial se escribe:

$$([K] - \omega^2 [M])\{a\} = \{0\} \quad (4.26)$$

donde la componente  $K_{kj}$  de la matriz  $[K]$  se obtiene con:

$$K_{kj} = \int_0^L EA \varphi_k' \varphi_j' dx \quad (4.27)$$

y la componente de la matriz  $[M]$  con:

$$M_{kj} = \int_0^L \rho A \varphi_k \varphi_j dx \quad (4.28)$$

Se comprueba que ambas matrices son simétricas. Si bien  $[K]$  se obtiene derivando la energía de deformación, no siempre es una matriz de rigidez con el significado que tiene en el análisis matricial de estructuras, ya que los coeficientes  $a_j$  en general no son desplazamientos. La matriz  $[M]$  tampoco tiene el significado de la matriz masa del análisis estructural.

Los valores de  $\omega$  que se obtienen resolviendo el problema de autovalores dado por (4.26) son aproximaciones por exceso (cotas superiores) de las frecuencias angulares del modelo continuo. En teoría, con el aumento de  $n$  resultan valores decrecientes, cada vez más cercanos a los exactos.

Para resolver el problema de vibraciones longitudinales de la barra empotrada-libre se pueden adoptar las funciones  $\varphi_j = x^j$  de manera que la serie (4.24) es un polinomio de grado  $n$ . Cada función  $\varphi_j$  satisface la condición geométrica  $\varphi_j(0) = 0$ . Con estas funciones aproximadas, las componentes de las matrices  $[K]$  y  $[M]$  resultan:

$$K_{kj} = K_{jk} = \int_0^L EA k j x^{k+j-2} dx = \frac{jk}{j+k-1} EAL^{j+k-1} \quad (4.29)$$

$$M_{kj} = M_{jk} = \int_0^L \rho A x^{k+j} dx = \frac{1}{j+k+1} \rho AL^{j+k+1} \quad (4.30)$$

Con un solo término ( $k=j=1$ ) la ecuación matricial (4.26) se reduce a una única ecuación escalar:

$$\left( EAL - \omega^2 \rho A \frac{L^3}{3} \right) a_1 = 0 \therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{3E}{\rho L^2}} \approx 1.7321 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (4.31)$$

Este resultado es aproximadamente 10% mayor que la solución exacta [10]:  $\omega_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \approx 1.5708 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ .

Con un solo término, el modo fundamental queda representado por la función lineal  $u_1(x) = a_1 x$ , donde  $a_1$  es arbitrario. Con  $a_1 = 1$  se tiene  $\frac{u_1(x)}{L} = \frac{x}{L}$ , de manera que  $\frac{u_1(L)}{L} = 1$ .

Con dos términos ( $k=1,2; j=1,2$ ) se obtienen dos ecuaciones:

$$\text{con } k=1, j=1,2: \left( EAL - \omega^2 \rho A \frac{L^3}{3} \right) a_1 + \left( EAL^2 - \omega^2 \rho A \frac{L^4}{4} \right) a_2 = 0 \quad (4.32)$$

$$\text{con } k=2, j=1,2: \left( EAL^2 - \omega^2 \rho A \frac{L^4}{4} \right) a_1 + \left( EA \frac{4L^3}{3} - \omega^2 \rho A \frac{L^5}{5} \right) a_2 = 0$$

Con notación matricial: 
$$\left( EA \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & 4L^3/3 \end{bmatrix} - \omega^2 \rho A \begin{bmatrix} L^3/3 & L^4/4 \\ L^4/4 & L^5/5 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Dividiendo por  $EA$  y poniendo  $\lambda = \Omega^2 = \omega^2 L^2 \rho / E$ , se llega a la siguiente ecuación de autovalores:

$$\left( \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & 4L^3/3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} L/3 & L^2/4 \\ L^2/4 & L^3/5 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

La ecuación característica es:  $\lambda^2 - \frac{104}{3} \lambda + 80 = 0$ , cuyas raíces son  $\lambda_1 = 2.48596$  y  $\lambda_2 = 32.1807$ .

Con ellas las frecuencias angulares resultan:  $\omega_1 = 1.5767 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$  y  $\omega_2 = 5.6728 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ .

Los errores por exceso en  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son aproximadamente 0,4% y 20%, respectivamente.

Reemplazando  $\lambda_1$  en (4.34) se obtiene:  $a_1 = -2.2190 a_2 L$ . Adoptando  $a_1 = 1.82711$ , el modo fundamental queda descrito con  $u(x) = a_1 x + a_2 x^2 = 1.82711 x - 0.82711 x^2/L$ , o sea:  $u(x)/L = 1.82711 x/L - 0.82711 (x/L)^2$ .

Análogamente, sustituyendo  $\lambda_2$  en (4.34) y operando se obtiene:  $u(x)/L = 2.62711 x/L - 3.62711 (x/L)^2$ .

En la Figura 4.2.2 se muestran ambas parábolas cuadráticas junto con las soluciones exactas. En el gráfico del modo fundamental se observa que la diferencia entre ambas soluciones es muy pequeña.

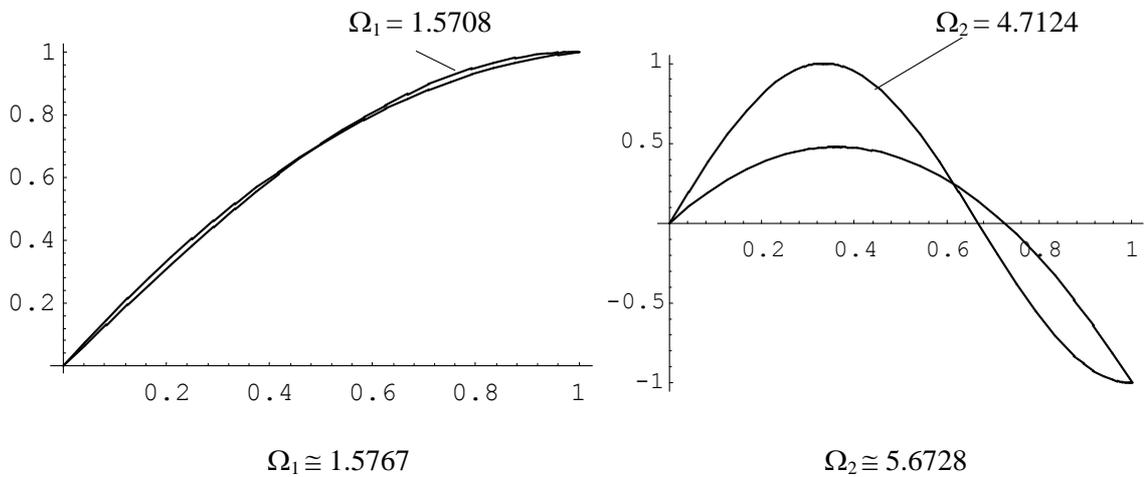


Figura 4.2.2: Modos exactos y aproximados de vibración axial de la barra empotrada-libre.

Es muy sencillo codificar el algoritmo definido por las fórmulas (4.29) y (4.30) para el cálculo, mediante computadora, de las matrices  $[K]$  y  $[M]$ . Las mismas se almacenan en un archivo de salida para luego hallar los autovalores con los programas disponibles, descritos en el Capítulo 2. En la tabla siguiente se dan los valores del coeficiente adimensional de frecuencia para los tres primeros modos naturales de vibración. La solución exacta es  $\Omega_1 = \pi/2$ ,  $\Omega_2 = 3\pi/2$ ,  $\Omega_3 = 5\pi/2$ .

Tabla 4.2.1: Valores de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  (Rayleigh-Ritz)

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	1.7321	-----	-----
2	1.5767	5.6728	-----
3	1.5709	4.8365	10.447
4	1.5708	4.7246	8.3309
5	1.5708	4.7131	7.9387
6	1.5708	4.7124	7.8653
7	1.5708	4.7124	7.8550
8	1.5708	4.7124	7.8541
9	1.5708	4.7124	7.8540

Se comprueba que el grado de convergencia decae con el orden de la frecuencia. Para reproducir la solución exacta con cinco dígitos se requirieron 4 términos para  $\Omega_1$ , 6 términos para  $\Omega_2$  y 9 términos para  $\Omega_3$ .

Cabe mencionar que debido a los errores de truncado que realiza la computadora en las operaciones aritméticas, las matrices  $[K]$  y  $[M]$  pueden resultar mal condicionadas, con situaciones que llegan a invalidar el cálculo de los autovalores, como ser: división por cero, raíz cuadrada de un número negativo, desbordamiento (overflow), o resultados totalmente carentes de precisión. Los valores consignados en la tabla anterior fueron obtenidos con el programa MITIN1Q# que opera con aritmética de doble precisión (16 dígitos significativos), ya que con  $n > 5$  se presentaron problemas al operar con simple precisión (7 dígitos).

## EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Es importante señalar que con el método de Rayleigh-Ritz se obtienen mejores resultados cuando las funciones  $\varphi_j(x)$  son más adecuadas para describir los modos naturales de vibración. En particular, se obtienen valores exactos de las frecuencias cuando la serie (4.24) describe los modos de la solución exacta:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n a_j \sin(2j-1) \frac{\pi x}{2L} \quad (4.35)$$

En efecto: reemplazando  $\varphi_j(x) = \sin(2j-1) \frac{\pi x}{2L}$  en (4.27) y (4.28) se obtiene:

$$K_{kj} = \int_0^L EA \varphi_k'(x) \varphi_j'(x) dx =$$

$$= \int_0^L EA (2k-1)(2j-1) \frac{\pi^2}{4L^2} \int_0^L \cos(2k-1) \frac{\pi x}{2L} \cos(2j-1) \frac{\pi x}{2L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \frac{EA}{2L} \left[ (2j-1) \frac{\pi}{2} \right]^2 & \text{si } j = k \end{cases}$$

$$M_{kj} = \int_0^L \rho A \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = \rho A \int_0^L \sin(2k-1) \frac{\pi x}{2L} \sin(2j-1) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \frac{1}{2} \rho AL & \text{si } j = k \end{cases}$$

Ahora las matrices  $[K]$  y  $[M]$  son diagonales, lo cual es consecuencia de la propiedad de ortogonalidad de las funciones  $\varphi(x)$  y de sus derivadas  $\varphi'(x)$ . Por consiguiente, resultan  $n$  ecuaciones escalares desacopladas:

$$\left( \frac{EA}{L} \left[ (2j-1) \frac{\pi}{2} \right]^2 - \omega_j^2 \rho AL \right) a_j = 0 ; \quad j = 1 \dots n \quad (4.36)$$

De cada una de ellas se despeja la correspondiente frecuencia natural:

$$\omega_j = (2j-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (4.37)$$

coincidente con la solución exacta dada en (4.7).

Por otra parte, al sustituir  $\omega_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$  en las  $n$  ecuaciones (4.36), se deduce que los coeficientes  $a_j$

son nulos, excepto  $a_1$  que resulta indeterminado. Análogamente, cuando se sustituye  $\omega_2 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$

resulta  $a_2$  indeterminado y nulos los restantes coeficientes. En general, sustituyendo  $\omega_j = (2j-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$

resulta  $a_j$  indeterminado, y los restantes coeficientes nulos. Vale decir que cada término de la serie

(4.35) es el respectivo modo natural de vibración.

De este ejemplo simple de vibración longitudinal se pueden destacar las principales características del método de Rayleigh-Ritz, y sacar algunas conclusiones:

1. La solución aproximada y las funciones de energía se establecen para todo el dominio de definición del problema.
2. La convergencia depende del tipo de funciones adoptadas para la aproximación del desplazamiento. Dichas funciones deben satisfacer las condiciones de borde esenciales, no siendo necesario que satisfagan las condiciones de borde naturales.
3. Las matrices simétricas  $[K]$  y  $[M]$  resultan llenas (en general, todas las componentes no nulas).
4. Aunque teóricamente se cumplan las condiciones de convergencia, pueden y suelen aparecer problemas numéricos al aumentar el número de términos.

### 4.3 Método de Elementos Finitos

El principal inconveniente del método de Rayleigh-Ritz radica en que no siempre es fácil encontrar funciones adecuadas para todo el dominio de definición, y que al mismo tiempo satisfagan las condiciones de borde geométricas del problema. Con el método de los elementos finitos esta dificultad desaparece. La función aproximante sobre el dominio total ahora se define de la siguiente manera [1,5,6,7,12,15,16,17,19]:

1. Se selecciona un número finito de puntos de referencia en el dominio, denominados *nodos* del modelo.
2. Se adoptan como incógnitas, en cada nodo, los valores del desplazamiento y las sucesivas derivadas hasta el orden de las que intervienen en las condiciones de borde esenciales del problema, que resultan al aplicar el principio de Hamilton. Cada incógnita constituye un grado de libertad del modelo discreto.
3. Se divide el dominio en subdominios (elementos finitos). En cada uno se adopta una función aproximada del desplazamiento, que resulte total y uniformemente definida con los grados de libertad de los nodos pertenecientes al elemento finito. Para ello, la función adoptada se expresa con una combinación lineal de los grados de libertad, de tal manera que el factor de cada uno de ellos es una función de valor unidad cuando se calcula en el nodo respectivo, y de valor nulo en los restantes nodos del elemento. Estos factores se denominan *funciones de forma*, o *funciones interpolantes*.

El principio de Hamilton debe cumplirse en todo el dominio de definición del problema. Por consiguiente, si en las expresiones de energía interviene la derivada de orden  $p$  de la función aproximante, ésta debe ser continua en todo el dominio hasta la derivada de orden  $p-1$  para que las integrales no resulten indefinidas (en problemas de vigas y placas, en la energía de deformación se presentan derivadas segundas del desplazamiento; en los restantes casos que se tratan en este curso intervienen derivadas primeras). Esta condición de continuidad se cumplirá en todo punto interior de los elementos, ya que en cada uno se adopta una función aproximante uniforme, continua y derivable, con derivadas continuas. En la mayoría de los elementos que se utilizan en este curso, la función aproximante

## EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

es un polinomio completo de grado  $p$ . También se describen elementos en los que las funciones aproximantes son polinomios incompletos de mayor grado, obtenidos agregando términos a un polinomio completo de grado  $p$ .

Además, debido a que los grados de libertad en cada nodo son el desplazamiento y sus derivadas hasta las de orden  $p-1$ , se cumple la continuidad en todo nodo común a dos o más elementos, situado en el contorno de los mismos. Por consiguiente, sólo queda por exigir que la función aproximante cumpla con la continuidad hasta la derivada de orden  $p-1$  en los restantes puntos sobre el contorno de elementos adyacentes. Obviamente, esto último cuando el contorno no se reduce a un punto. Se denominan *elementos conformes* [19] los que satisfacen esta última condición.

Reemplazando la solución aproximada en las funciones de energía  $U_e$  y  $T_e$  del elemento, con la formulación matricial se obtienen las matrices de rigidez  $[k_e]$  y de masa  $[m_e]$  de cada elemento finito, ver fórmulas (1.80). Cabe destacar que  $[k_e]$  y  $[m_e]$  tienen efectivamente el significado físico de matrices de rigidez y masa, respectivamente, ya que los grados de libertad son las magnitudes que describen el movimiento del elemento (desplazamiento con o sin deformación).

Una expresión aproximada de la energía se obtiene sumando las energías de los elementos finitos en que ha sido dividido el dominio completo. Esta operación se denomina ensamblaje, debido al procedimiento que implica en el manejo de las matrices de los elementos. De esta manera, al sumar la energía de deformación se obtiene la matriz de rigidez  $[K]$  del modelo completo; y sumando la energía cinética, la de masa  $[M]$ . En estas condiciones, la matriz  $[K]$  es positiva semidefinida, ya que dicho modelo aún posee libertad de realizar desplazamientos de cuerpo rígido, con los cuales la energía de deformación es nula. La matriz de masa  $[M]$  es positiva definida, debido a que la energía cinética siempre es positiva. Finalmente, se introducen las restricciones (condiciones de borde del tipo esencial), modificando o eliminando las filas y columnas correspondientes en ambas matrices (ver ejemplo 1.8.2 al final del Capítulo 1). La matriz de rigidez reducida pasa a ser positiva definida cuando se suprimen todos los grados de libertad de cuerpo rígido del modelo.

En los próximos capítulos se estudian diversos elementos finitos, para el análisis de vibraciones de distintos tipos estructurales.

# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 5 VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

### 5.1 Vibraciones longitudinales

En la Sección 3.2 se hallaron las funciones de energía del elemento estructural de la Figura 3.2.1:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u}^2 dx \quad (5.1)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.2)$$

En esa misma sección, al aplicar el principio de Hamilton se halló que la condición de borde esencial es  $\delta u = 0$ . Por lo tanto, el desplazamiento es el único grado de libertad requerido en cada nodo.

A continuación se muestra la aplicación del método al caso de la barra uniforme vibrando longitudinalmente, utilizando el elemento más simple para este tipo de problema.

#### 5.1.1 Elemento de dos nodos

La función aproximante para este caso es el polinomio de primer grado:

$$u(x, t) = b_0(t) + b_1(t)x \quad (5.3)$$

En la Figura 5.1.1 se muestra un elemento de longitud  $2a$ , con el origen del eje  $x$  en el punto medio. Es usual utilizar la variable adimensional  $\xi = x/a$ , de modo que el polinomio (5.40) puede ser escrito:

$$u(\xi, t) = a_0(t) + a_1(t)\xi \quad (5.4)$$

donde los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  son dimensionalmente homogéneos. El contorno de este elemento uniaxial se reduce a sus puntos extremos (numerados **1** y **2** en la Figura 5.1.1), de modo que allí se ubican los dos nodos requeridos para que la función (5.4) resulte totalmente definida. Si  $u_1$  y  $u_2$  son los desplazamientos de los nodos **1** y **2**, respectivamente, se tiene:

$$u_1 = u(-1) = a_0 - a_1 ; \quad u_2 = u(+1) = a_0 + a_1 ; \quad \text{luego:} \quad a_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) ; \quad a_1 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$$

Reemplazando en (5.4) resulta: 
$$u(\xi, t) = \frac{1}{2}(1 - \xi)u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)u_2 = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad (5.5)$$

donde  $N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$  y  $N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$  son las funciones de forma, o funciones interpolantes, del elemento. En la Figura 5.1.2 se muestran los gráficos de las mismas. Se comprueba que  $N_1(\xi)$  vale 1 en el nodo **1**, y cero en el nodo **2**, mientras que  $N_2(\xi)$  vale cero en el nodo **1**, y 1 en el nodo **2**. Teniendo en cuenta esta propiedad, es obvio que estas funciones lineales podrían haber sido escritas directamente.

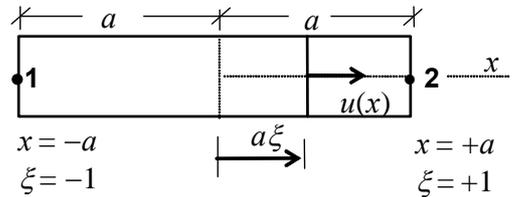


Figura 5.1.1 : Elemento de dos nodos para vibraciones axiales de barras rectas.

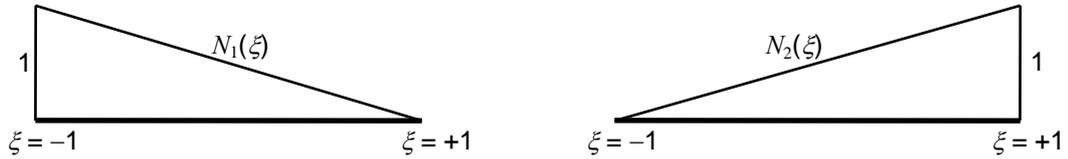


Figura 5.1.2 : Funciones de forma del elemento uniaxial de dos nodos.

Es interesante destacar que el polinomio (5.3), con  $b_0$  y  $b_1$  constantes, es solución exacta de la ecuación diferencial de equilibrio estático del elemento uniaxial libre de fuerzas distribuidas:  $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ .

La expresión del desplazamiento (5.5) puede ponerse en forma matricial:

$$u(\xi, t) = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N(\xi)] \{\delta_e\} \quad (5.6)$$

donde las componentes de  $\{\delta_e\}$  son los grados de libertad del elemento.

Derivando con respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{u}(\xi, t) = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = [N(\xi)] \{\dot{\delta}_e\} \quad (5.7)$$

Luego: 
$$\dot{u}^2(\xi, t) = \{\dot{\delta}_e\}^t [N(\xi)]^t [N(\xi)] \{\dot{\delta}_e\} \quad (5.8)$$

Sustituyendo en la expresión (5.1) de la energía cinética del elemento:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \rho A \dot{u}^2 a d\xi = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t \int_{-1}^{+1} \rho A a [N(\xi)]^t [N(\xi)] d\xi \{\dot{\delta}_e\}$$

De acuerdo con la fórmula (1.80a), se deduce que la matriz de masa del elemento es:

$$[m_e] = \int_{-1}^{+1} \rho A a [N(\xi)]^t [N(\xi)] d\xi \quad (5.9)$$

Desarrollando:

$$[m_e] = \rho A a \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi = \frac{1}{4} \rho A a \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & (1-\xi^2) \\ (1-\xi^2) & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

Integrando: 
$$[m_e] = \frac{1}{3} \rho A a \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

La matriz masa así hallada se dice que es *consistente* [12,19], para indicar que se obtiene con las funciones de forma del elemento finito.

Cabe destacar que con el producto de la matriz  $[m_e]$  por el vector de las aceleraciones nodales  $[\ddot{u}_1 \quad \ddot{u}_2]^t$  se calculan las fuerzas de inercia que actúan sobre los nodos del elemento. Se comprueba que si los dos nodos tienen la misma aceleración ( $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = \ddot{u}$ ), la fuerza inercial es la misma en ambos nodos, de valor  $\rho A a \ddot{u}$ . Nótese que la suma de todas las componentes de  $[m_e]$  resulta igual a la masa total del elemento  $2\rho A a$ . Cuando sólo el nodo 1 se acelera ( $\ddot{u}_2 = 0$ ), la fuerza de inercia sobre el nodo 2 resulta  $\rho A a \ddot{u}_1/3$  que es la mitad de la actuante sobre el nodo 1. Análogamente, si sólo el nodo 2 se acelera

( $\ddot{u}_1=0$ ), las fuerzas inerciales sobre los nodos **1** y **2** son  $\rho A a \ddot{u}_2/3$  y  $2\rho A a \ddot{u}_2/3$ , respectivamente. Por esta razón, en este curso, la matriz masa consistente también se denomina *matriz de masas acopladas*. Este acoplamiento de las masas, que no se presenta en los sistemas discretos formados con masas puntuales y resortes, estudiados en los capítulos 1 y 2, es una característica de la matriz masa consistente del método de elementos finitos.

Otro criterio para tener en cuenta la masa distribuida en el elemento, consiste en concentrar en cada nodo la mitad de la masa total. En tal caso, la matriz masa se expresa:

$$[\tilde{m}_e] = \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Se denomina *matriz masa no consistente* o *matriz masa concentrada* (traducción literal del inglés: *lumped-mass matrix*) [2,12,19]. Con esta matriz, cuando se acelera uno de los dos nodos, la fuerza inercial sobre el otro nodo es nula. Por este motivo, en este curso también se denomina *matriz de masas desacopladas*.

En algunos programas profesionales de cómputo para el análisis dinámico de sistemas mecánicos, se utilizan matrices de masas desacopladas, en lugar de las consistentes, en beneficio de la mayor sencillez de los algoritmos que calculan los autovalores. Un ejemplo es el software Algor Professional Mech, producido y comercializado por la empresa estadounidense Algor Inc. En rigor, estos programas se apartan del método de elementos finitos, ya que éste consiste en utilizar las matrices deducidas con las funciones de forma de los elementos. Por otra parte, una importante ventaja del empleo de matrices consistentes, es que garantizan valores de frecuencias naturales superiores a los exactos del modelo continuo, con convergencia monótona hacia la solución exacta al aumentar el número de nodos del modelo discreto. Esta propiedad de monotonía que exhibe el método de elementos finitos no se asegura al utilizar matrices de masas desacopladas.

Para la obtención de la matriz de rigidez elástica del elemento, hay que derivar el desplazamiento  $u(\xi)$  con respecto a  $\xi$ :

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} = [N'(\xi)] \{\delta_e\} \quad (5.12)$$

donde  $N'(\xi)$  denota la derivada de  $N(\xi)$  con respecto a  $\xi$ .

Sustituyendo en la expresión (5.2) de la energía de deformación elástica del elemento, se obtiene:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{a} [N'(\xi)]^t [N'(\xi)] d\xi \{\delta_e\}$$

Comparando con la fórmula (1.80c), se deduce que la matriz de rigidez elástica del elemento es:

$$[k_e] = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{a} [N'(\xi)]^t [N'(\xi)] d\xi \quad (5.13)$$

$$\text{Desarrollando: } [k_e] = \frac{EA}{a} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{4a} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

Nótese que la suma de las componentes de cada fila es nula. Ello indica que la energía de deformación es nula cuando el elemento se mueve sin deformarse ( $u_1 = u_2$ ). La matriz de rigidez del elemento es singular.

Para calcular las frecuencias naturales del modelo continuo, éste se divide en elementos (no necesariamente iguales) que se ensamblan para armar la ecuación matricial del movimiento vibratorio libre. El modelo discreto más simple consiste de un único elemento que cubre todo el dominio. En el ejemplo de la barra con vibración longitudinal, si toda la barra de longitud  $L$  es considerada un elemento de longitud  $2a$ , la ecuación matricial del movimiento resulta:

$$([k_e] - \omega^2 [m_e]) \{\delta_e\} = \left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son las amplitudes del desplazamiento de los nodos **1** y **2**.

Dividiendo (5.15) por  $EA/L$  y haciendo  $\lambda = \Omega^2 = \omega^2 L^2 \rho / E$ , la ecuación característica se obtiene con la condición de nulidad del determinante de la matriz del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda/3 & -(1 + \lambda/6) \\ -(1 + \lambda/6) & 1 - \lambda/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \text{operando: } \lambda(\lambda - 12) = 0$$

La raíz  $\lambda = 0$  corresponde a un desplazamiento no vibratorio, con  $u_1 = u_2$ . La otra raíz,  $\lambda = 12$  ( $\Omega = \sqrt{12} \approx 3.4641$ ), es una solución aproximada del modo fundamental de la barra libre de vinculación, definido por  $u_2 = -u_1$  (la solución exacta con cinco dígitos significativos es  $\Omega = \pi = 3.1416$ ).

Para hallar la frecuencia fundamental de la barra empotrada-libre, en la ecuación (5.15) se impone la restricción  $u_1 = 0$ . Eliminando la primera fila y columna de ambas matrices, resulta:

$$\left( \frac{EA}{L} - \omega^2 \frac{\rho AL}{3} \right) u_2 = 0 \quad \therefore \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3E}{\rho L^2}} \approx 1.7321 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

la cual coincide con (4.31) obtenida al aplicar el método de Rayleigh-Ritz con un solo término lineal.

Si en la ecuación (5.15) se reemplaza la matriz masa consistente por la de masas desacopladas (5.11), en el caso de la barra empotrada-libre resulta  $\left( \frac{EA}{L} - \omega^2 \frac{\rho AL}{2} \right) u_2 = 0 \quad \therefore \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2E}{\rho L^2}} \approx 1.4142 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ , menor que la solución exacta.

Al dividir la barra en elementos, no necesariamente de la misma longitud, se manifiesta la diferencia con el método de Rayleigh-Ritz.

En la Figura 5.1.3 se muestra el modelo discreto con dos elementos de igual longitud. Los tres nodos del modelo son numerados globalmente de izquierda a derecha, en la parte superior del dibujo. También se indica la numeración de los elementos (entre paréntesis), y la numeración, denominada local, de los dos nodos en cada elemento.

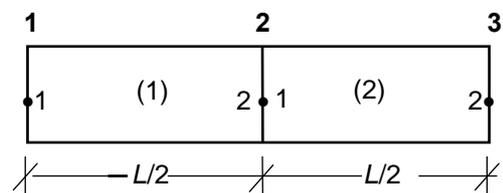


Figura 5.1.3: Modelo con dos elementos.

El vector de los desplazamientos del modelo discreto tiene tres componentes:  $\{\Delta\}^t = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$ , donde los subíndices se refieren a la numeración global.

En las expresiones que siguen a continuación,  $\{\delta_{(1)}\}$  y  $\{\delta_{(2)}\}$  son los vectores de los desplazamientos en los elementos (1) y (2), respectivamente. Sumando las energías de los dos elementos:

$$T_{(1)} + T_{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_{(1)}\}^t [m_{(1)}] \{\dot{\delta}_{(1)}\} + \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_{(2)}\}^t [m_{(2)}] \{\dot{\delta}_{(2)}\} \quad (5.16)$$

$$U_{(1)} + U_{(2)} = \frac{1}{2} \{\delta_{(1)}\}^t [k_{(1)}] \{\delta_{(1)}\} + \frac{1}{2} \{\delta_{(2)}\}^t [k_{(2)}] \{\delta_{(2)}\} \quad (5.17)$$

donde las matrices  $[m_{(i)}]$  y  $[k_{(i)}]$  vienen dadas por (5.10) y (5.14).

Las matrices  $[m_{(i)}]$  y  $[k_{(i)}]$  pueden ser expandidas con filas y columnas nulas para llevarlas al mismo orden que el vector global  $\{\Delta\}$ :

$$[M_{(1)}] = \begin{bmatrix} [m_{(1)}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [M_{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m_{(2)}] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18 \text{ a,b})$$

análogamente:

$$[K_{(1)}] = \begin{bmatrix} [k_{(1)}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [K_{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{(2)}] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19 \text{ a,b})$$

Reemplazando (5.18) en (5.16):

$$\begin{aligned} T_{(1)} + T_{(2)} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}^t [M_{(1)}] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}^t [M_{(2)}] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}^t \left( [M_{(1)}] + [M_{(2)}] \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{\dot{\Delta}\}^t [M] \{\dot{\Delta}\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Análogamente, reemplazando (5.19) en (5.17):

$$U_{(1)} + U_{(2)} = \frac{1}{2} \{\Delta\}^t \left( [K_{(1)}] + [K_{(2)}] \right) \{\Delta\} = \frac{1}{2} \{\Delta\}^t [K] \{\Delta\} \quad (5.21)$$

Sustituyendo (5.10) y (5.14) con  $a=L/4$ , resulta:

$$[K] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [M] = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.22 \text{ a,b})$$

Nótese, una vez más, que la suma de las componentes en cada fila de la matriz de rigidez es nula, mientras que la suma de todas las componentes de la matriz masa es igual a la masa total  $\rho AL$ .

Introduciendo  $\lambda = \Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho L^2}{E}$ , la ecuación matricial del movimiento vibratorio se escribe:

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1/12 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/6 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 1/12 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

El determinante característico es: 
$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{12} & -(1 + \frac{\lambda}{24}) & 0 \\ -(1 + \frac{\lambda}{24}) & 2 - \frac{\lambda}{6} & -(1 + \frac{\lambda}{24}) \\ 0 & -(1 + \frac{\lambda}{24}) & 1 - \frac{\lambda}{12} \end{vmatrix} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{12}\right)\left[\left(1 - \frac{\lambda}{12}\right)^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{24}\right)^2\right] = 0$$

Operando:  $\lambda(12 - \lambda)(48 - \lambda) = 0$ . La raíz  $\lambda = 0$  corresponde al desplazamiento no vibratorio sin deformación ( $u_1 = u_2 = u_3$ ). La menor raíz no nula  $\lambda = 12$  ( $\Omega_1 = \sqrt{12} \approx 3.4641$ ) repite la misma solución aproximada de la frecuencia fundamental hallada anteriormente con un elemento, debido a que se reproduce el mismo modo de vibración:  $u_3 = -u_1$ ,  $u_2 = 0$ . Con la tercera raíz se obtiene la segunda frecuencia natural  $\Omega_2 = \sqrt{48} \approx 6.9282$ , (solución exacta  $\Omega_2 = 2\pi \approx 6.2832$ ), con modo de vibración  $u_3 = u_1$ ,  $u_2 = -u_1$ .

Cuando se resolvió el mismo modelo con un solo elemento, utilizando la matriz masa no consistente (5.11) en lugar de la consistente (5.10), se obtuvo  $\Omega_1 = 2$  para la frecuencia fundamental. Si se divide la barra en dos elementos de igual longitud, resultan:  $\Omega_1 = 2.8284$  y  $\Omega_2 = 4$ . En este caso se observa que los valores de frecuencias son menores que los de la solución exacta del modelo continuo, y por ende, menores que los hallados con la matriz masa consistente. Esta conclusión, válida para vibraciones longitudinales de una barra recta, puede ser generalizada para otros modelos con elementos finitos, ya que al adoptar masas nodales desacopladas se produce una sobrestimación del efecto de la masa distribuida en los elementos. Imponiendo ahora la restricción  $u_1 = 0$  para el caso de barra empotrada-libre, el sistema (5.23) se reduce a dos ecuaciones escalares:

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

El determinante característico es: 
$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{\lambda}{6} & -(1 + \frac{\lambda}{24}) \\ -(1 + \frac{\lambda}{24}) & 1 - \frac{\lambda}{12} \end{vmatrix} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{12}\right)^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{24}\right)^2 = 7\lambda^2 - 240\lambda + 576 = 0$$

cuyas raíces son:  $\lambda_1 = 2.5967$  y  $\lambda_1 = 31.689$ . El valor aproximado del coeficiente de frecuencia fundamental es  $\Omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 1.6114$  correspondiente al modo descrito con  $u_2 = 0.70711 u_3$ . La segunda frecuencia resulta  $\Omega_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 5.6293$  con  $u_2 = -0.70711 u_3$ . En la Figura 5.1.4 se muestran los dos primeros modos naturales de vibración exactos y las respectivas aproximaciones obtenidas con dos elementos lineales (así denominados debido a que la función desplazamiento adoptada es un polinomio de primer grado).

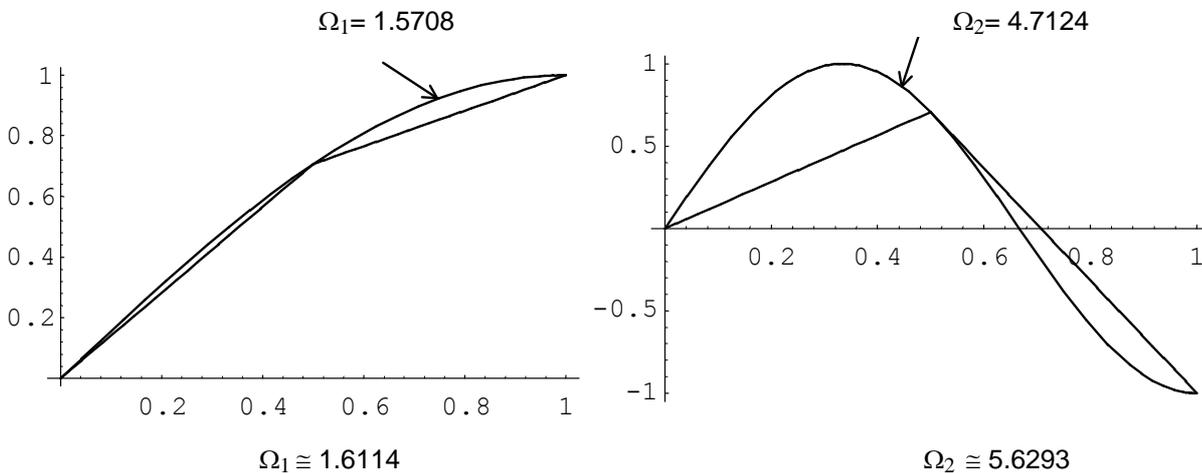


Figura 5.1.4: Modos exactos y aproximados de vibración de la barra empotrada-libre.

Se comprueba que el valor de  $\Omega_1$  hallado con dos elementos lineales, que resulta 2.6% mayor que el exacto, tiene menos aproximación que el obtenido con Rayleigh-Ritz utilizando un polinomio cuadrático, mientras que los valores de  $\Omega_2$  difieren poco entre ambos métodos aproximados.

Por otra parte, la resolución del mismo modelo empotrado-libre con un elemento, utilizando la matriz masa no consistente (5.11), en lugar de la consistente (5.10), dio el valor  $\Omega_1 = 1.4142$  del coeficiente de frecuencia fundamental, que es aproximadamente 10% menor que la solución exacta. Cuando se divide la barra en dos elementos de igual longitud, resultan:  $\Omega_1 = 1.5307$  y  $\Omega_2 = 3.6955$ , ambos menores que los respectivos valores de la solución exacta ( $\Omega_1 = 1.5805$  y  $\Omega_2 = 4.7124$ ).

En el CD-ROM con códigos de computación se dan los programas BRAXI-Q! y BRAXI-Q# (**Barra Recta con vibración AXIAL**), que utilizan el elemento lineal de dos nodos con matriz masa consistente o con la matriz de masas desacopladas, a opción del usuario al inicio de la ejecución del programa. En la primera línea del archivo de datos debe ir el texto BRA2N (clave de acceso) para indicar que los datos se refieren a este tipo de elemento. Además, se ha previsto la posibilidad de que el modelo tenga vínculos elásticos y masas concentradas. A tal efecto, en la segunda línea del archivo de datos, además del número de elementos, nodos, nodos restringidos y grupos de propiedades, se da también el número de nodos elásticos y el de nodos con masas concentradas. Más adelante, por cada nodo elástico se dan su índice y el valor de la constante de rigidez elástica; y para cada masa puntual, el índice del nodo donde se aplica y el valor de la misma. Es importante destacar que cuando la constante de rigidez, en un nodo elástico, es un valor muy grande (por ejemplo  $10^{15}$ ), la restricción prácticamente es rígida (desplazamiento nulo). Por el contrario, si la constante es nula no tiene efecto la restricción.

El programa produce archivos de salida, con las matrices de rigidez y de masa del modelo discreto, los cuales sirven de archivos de datos para cualquiera de los programas disponibles que calculan frecuencias y modos naturales de vibración.

En la Tabla 5.1.1 se dan los valores del coeficiente adimensional de frecuencia de los tres primeros modos naturales de vibración de la barra empotrada-libre, obtenidos con el programa BRAXI-Q! operando con la matriz masa consistente. En la primera columna se indica el número  $n$  de elementos de igual longitud (en este caso particular, el número de grados de libertad del modelo es igual al número de elementos). La solución exacta es:  $\Omega_1 = \pi/2 = 1.5708$ ;  $\Omega_2 = 3\pi/2 = 4.7124$ ;  $\Omega_3 = 5\pi/2 = 7.8540$

Tabla 5.1.1: Valores de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  con elementos de dos nodos.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	1.7321	-----	-----	50	1.5709	4.7141	7,8621
2	1.6114	5.6293	-----	60	1.5708	4.7136	7.8596
3	1.5888	5.1962	9.4266	70	1.5708	4.7133	7.8581
4	1.5809	4.9872	9.0594	80	1.5708	4.7131	7.8571
5	1.5773	4.8881	8.6603	90	1.5708	4.7129	7.8565
6	1.5753	4.8343	8.4188	100	1.5708	4.7128	7.8560
7	1.5741	4.8018	8.2695	200	1.5708	4.7125	7.8545

(continúa)

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

Tabla 5.1.1: Valores de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  con elementos de dos nodos (*continuación*).

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
8	1.5733	4.7808	8.1719	300	1.5708	4.7124	7.8542
9	1.5728	4.7664	8.1050	400	1.5708	4.7124	7.8541
10	1.5724	4.7561	8.0571	500	1.5511	4.7059	7.8502
20	1.5712	4.7233	7.9045	600	1.5709	4.7124	7.8540
30	1.5710	4.7172	7.8764	500*	1.5708	4.7124	7.8541
40	1.5709	4.7151	7.8666	600*	1.5708	4.7124	7.8540

\* con doble precisión (programa BRAXI-Q#)

Se comprueba que la convergencia es asintótica, aunque algo lenta: se necesitaron 60 grados de libertad para alcanzar cinco dígitos de la solución exacta de  $\Omega_1$ , y 300 para  $\Omega_2$ . Por otra parte, el algoritmo presenta problemas numéricos con 500 elementos. Al procesarlo con doble precisión se recupera la convergencia monótona, obteniéndose el valor exacto de  $\Omega_3$  (con 5 dígitos) cuando el modelo tiene 600 grados de libertad.

Se aconseja utilizar, siempre que sea posible, los programas de computación que operan con aritmética de doble precisión.

El método de elementos finitos, comparado con el procedimiento de Rayleigh-Ritz, exhibe algunas ventajas que se detallan a continuación:

- 1) Se obtienen matrices  $[K]$  y  $[M]$  tipo banda simétrica (con el elemento uniaxial de dos nodos, son matrices tridiagonales, vale decir con ancho de banda igual a 2).
- 2) El proceso de ensamblaje es de fácil implementación para la resolución con computadora.
- 3) Resulta muy fácil introducir masas puntuales y vínculos elásticos (resortes lineales). Para ello, en el modelo discreto deben preverse nodos en los puntos de aplicación. El valor de una masa puntual simplemente se suma a la respectiva componente de la diagonal principal en la matriz de masa. Análogamente, el valor de la constante de rigidez elástica de un resorte se suma a la respectiva componente en la diagonal principal de la matriz de rigidez.
- 4) Los vínculos (condiciones de borde esenciales del modelo continuo) se aplican una vez realizado el ensamblaje, restringiendo los grados de libertad correspondientes.
- 5) Aumentando el número de elementos finitos, excepcionalmente se producen matrices numéricamente mal condicionadas.
- 6) Si se admite que sigue siendo válida la hipótesis del comportamiento uniaxial del elemento, sin ninguna dificultad se puede modelar el caso de una barra con propiedades variables a lo largo de su eje, tomando un número suficiente de elementos. Más aún, es posible utilizar otros elementos en los que las propiedades se representen mediante funciones interpolantes, de manera similar a la forma de aproximar el desplazamiento.

Para ilustrar sobre este último aspecto, a continuación se determinan las matrices de rigidez y de masa de un elemento lineal (con dos nodos) con sección linealmente variable entre los valores del área  $A_1$  en el nodo **1** y  $A_2$  en el nodo **2**, como se indica esquemáticamente en la Figura 5.1.5.

Por lo tanto, la función del área se expresa:

$$A(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)A_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)A_2 \quad (5.25)$$

Sustituyendo en (5.9):

$$[m_e] = \rho a \int_{-1}^{+1} A(\xi) [N(\xi)]^t [N(\xi)] d\xi; \text{ Operando}$$

resulta: 
$$[m_e] = \frac{\rho a}{6} \begin{bmatrix} 3A_1 + A_2 & A_1 + A_2 \\ A_1 + A_2 & A_1 + 3A_2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Análogamente, sustituyendo en (5.13):

$$[k_e] = \frac{E}{a} \int_{-1}^{+1} A(\xi) [N'(\xi)]^t [N'(\xi)] d\xi;$$

operando: 
$$[k_e] = \frac{E}{4a} \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & -A_1 - A_2 \\ -A_1 - A_2 & A_1 + A_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Teniendo en cuenta que  $A_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ , también se expresan:

$$[m_e] = \frac{1}{3} \rho A_0 a \begin{bmatrix} 1 + \frac{A_1}{A_0} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{A_2}{A_0} \end{bmatrix}; \quad [k_e] = \frac{EA_0}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28 \text{ a,b})$$

Nótese que la matriz de rigidez es la del elemento de sección constante con área  $A_0$ . Por otra parte, cuando  $A_0 = A_1 = A_2 = A$ , la matriz de masa coincide con (5.10).

### 5.1.2 Elemento de 3 nodos

Se puede mejorar la convergencia aproximando el desplazamiento con un polinomio cuadrático completo, lo cual implica agregar otro nodo. En la Figura 5.1.6 se muestra la ubicación y numeración local de los tres nodos, y en la Figura 5.1.7 los gráficos de las tres funciones de forma, cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi \\ N_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi \end{aligned} \quad (5.29)$$

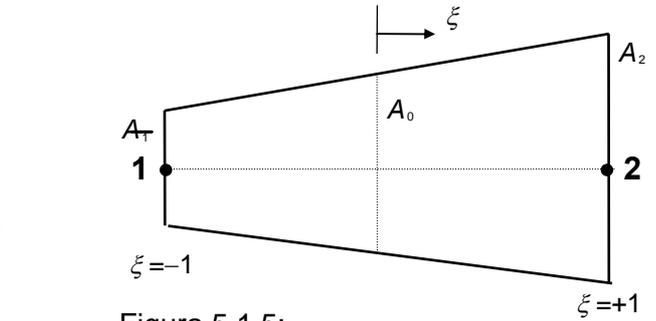


Figura 5.1.5: Elemento con área linealmente variable.

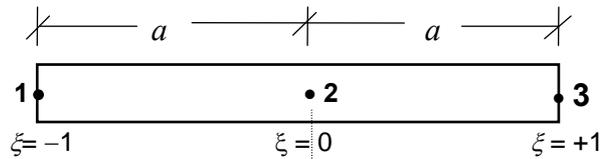


Figura 5.1.6: elemento de tres nodos.

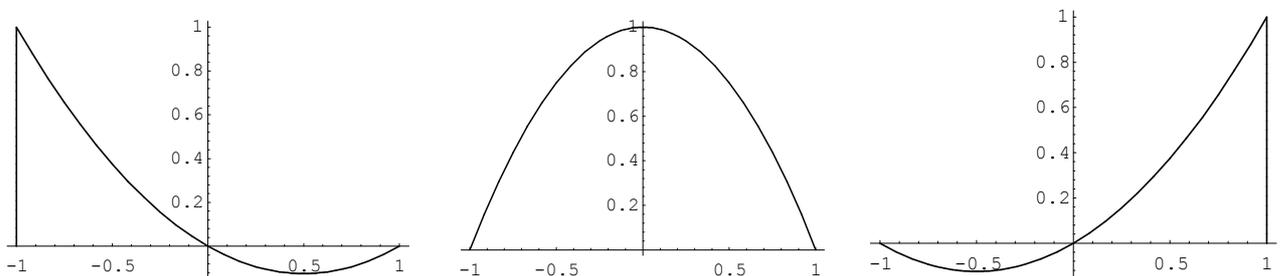


Figura 5.1.7: Funciones de forma  $N_1(\xi)$ ,  $N_2(\xi)$  y  $N_3(\xi)$  del elemento cuadrático de tres nodos.

Sustituyendo en (5.13) y (5.9), e integrando, resulta:

$$[k_e] = \frac{EA}{6a} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$[m_e] = \frac{\rho Aa}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Para este elemento de 3 nodos, es obvio que la matriz de masa no consistente se expresa

$$[\tilde{m}_e] = \frac{\rho Aa}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

El mismo programa BRAXI-Q permite utilizar el elemento de 3 nodos, poniendo la palabra clave BRA3N en la primera línea del archivo de datos del modelo. En la Tabla 5.1.2 se muestran los resultados obtenidos al dividir la barra empotrada-libre en  $n$  elementos de igual longitud, utilizando la matriz de masa consistente. Debe tenerse en cuenta que ahora, con  $n$  elementos, el modelo tiene  $2n$  grados de libertad.

Un criterio práctico que suele recomendarse en general, consiste en ir duplicando el número de elementos en modelos que se van procesando sucesivamente. Sin embargo, se corre el riesgo de aceptar como cotas superiores de la solución exacta resultados que no lo son, debido a una insuficiente precisión numérica, como se muestra en la Tabla 5.1.2, donde los valores fueron hallados con simple precisión.

Tabla 5.1.2:  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  con elementos de 3 nodos.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	1.5767	5.6728	-----
2	1.5712	4.7902	8.7786
4	1.5708	4.7183	7.9217
8	1.5708	4.7128	7.8588
16	1.5708	4.7124	7.8543
32	----- 1.5705	4.7123	7.8539
64	1.5677	4.7114	7.8534

Se observa que con sólo 4 elementos (8 grados de libertad) el algoritmo da el valor exacto de  $\Omega_1$  (con 5 dígitos). Claramente se pone de manifiesto la superioridad del elemento cuadrático sobre el lineal, especialmente en modelos con pocos grados de libertad (compárense los resultados obtenidos con cuatro elementos lineales y dos cuadráticos). En la página siguiente, en la tabla 5.1.3 se dan los valores que resultan al incrementar de a uno el número de elementos, a fin de detectar posibles problemas numéricos al operar con precisión simple.

Tabla 5.1.3:  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  con elementos de 3 nodos.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
10	1.5707	4.7125	7.8560
11	1.5709	4.7125	7.8554
12	1.5708	4.7125	7.8550
13	1.5708	4.7125	7.8547
14	1.5707	4.7124	7.8545
15	1.5708	4.7124	7.8544
16	1.5708	4.7124	7.8543
17	1.5708	4.7124	7.8542
18	1.5708	4.7124	7.8542
19	1.5705	4.7125	7.8541
20	1.5711	4.7125	7.8542
21	1.5708	4.7124	7.8541
22	1.5706	4.7125	7.8540
20*	1.5708	4.7124	7.8541
30*	1.5708	4.7124	7.8540

\* con doble precisión (programa BRAXI-Q#).

Nuevamente se comprueba que los valores de  $\Omega_i$  continúan decreciendo, llegando incluso a ser menores que la solución exacta (conocida en este caso). Nótese que con  $n = 10$  se interrumpe la convergencia asintótica de  $\Omega_1$ . A partir de allí el resultado oscila alrededor de la solución exacta. Los valores decrecientes de  $\Omega_2$  se obtienen hasta  $n = 14$ , manteniéndose estable hasta  $n = 18$ ; y los valores de  $\Omega_3$  decrecen hasta  $n = 19$ . Al operar con doble precisión, con 20 elementos se obtienen resultados con cinco dígitos significativos exactos en los valores de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Con 30 elementos, se obtienen los cinco dígitos de la solución exacta de  $\Omega_3$ .

### 5.1.3 Elemento de 4 nodos

Finalizando con el estudio del método aplicado al análisis de vibraciones longitudinales, se agrega el elemento de cuatro nodos mostrado en la Figura 5.1.8. En la Figura 5.1.9 de la página siguiente se muestran los gráficos de las cuatro funciones de forma, cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= -\frac{1}{16}(\xi - 1)(3\xi + 1)(3\xi - 1) \\
 N_2(\xi) &= +\frac{9}{16}(\xi + 1)(3\xi - 1)(\xi - 1) \\
 N_3(\xi) &= -\frac{9}{16}(\xi + 1)(3\xi + 1)(\xi - 1) \\
 N_4(\xi) &= +\frac{1}{16}(\xi + 1)(3\xi + 1)(3\xi - 1)
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

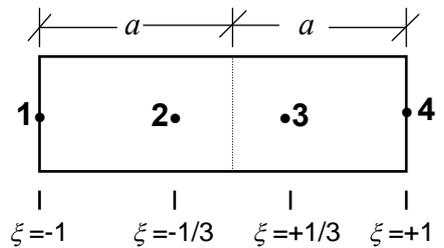


Figura 5.1.8: Elemento de 4 nodos.

La determinación analítica de la matriz de masa requiere resolver 10 integrales de polinomios de 6º grado. Reemplazando en (5.9) y operando, resulta:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{840} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix}
 \tag{5.34}$$

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

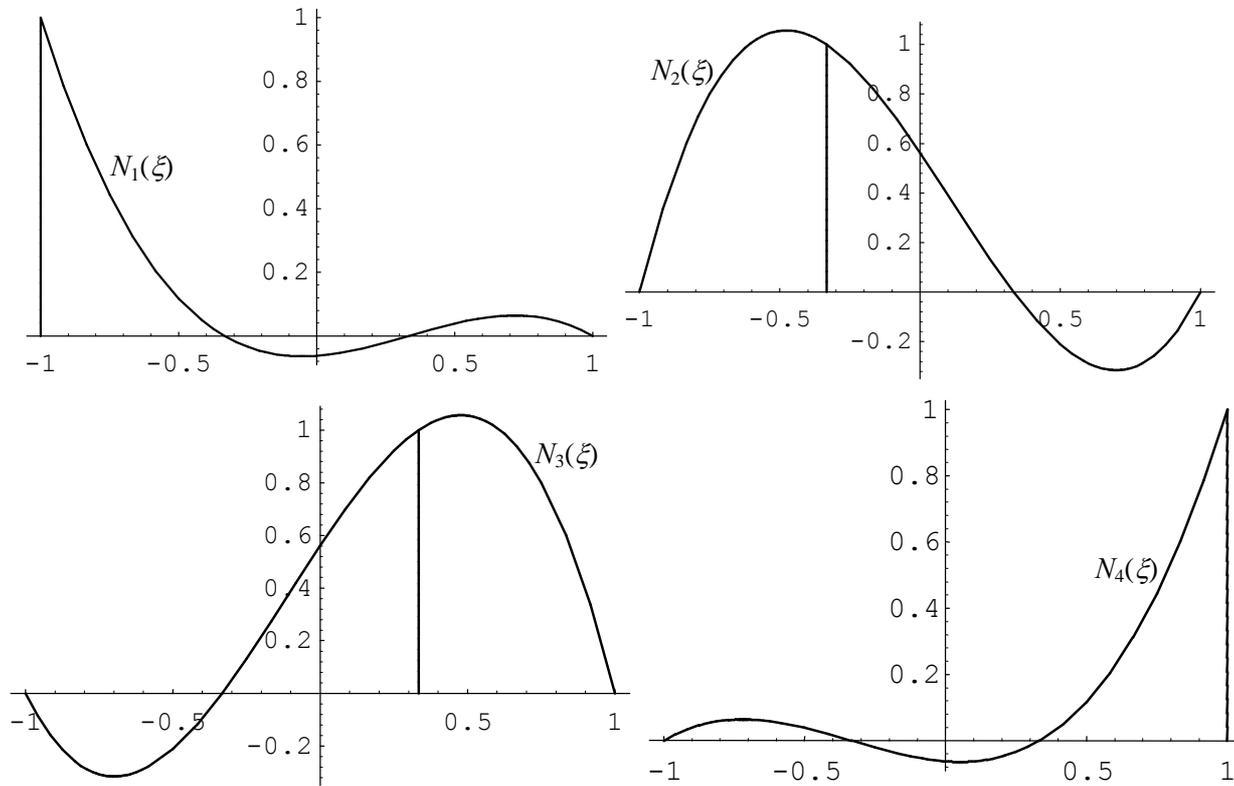


Figura 5.1.9: Gráficos de las cuatro funciones de forma del elemento cúbico.

Por otra parte, la matriz masa no consistente es:

$$[\tilde{m}_e] = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

En el cálculo de la matriz de rigidez intervienen las derivadas con respecto a  $\xi$ :

$$\begin{aligned} N_1'(\xi) &= -\frac{1}{16}(27\xi^2 - 18\xi - 1) \\ N_2'(\xi) &= \frac{9}{16}(9\xi^2 - 2\xi - 3) \\ N_3'(\xi) &= -\frac{9}{16}(9\xi^2 + 2\xi - 3) \\ N_4'(\xi) &= \frac{1}{16}(27\xi^2 + 18\xi - 1) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Reemplazando en (5.13) y resolviendo analíticamente las integrales de polinomios de 4º grado, resulta:

$$[k_e] = \frac{EA}{80a} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

El mismo programa BRAXI-Q! (BRAXI-Q# con doble precisión) calcula las matrices de modelos con elementos cúbicos. A tal efecto, en la primera línea del archivo de datos debe encontrarse la “cadena” de caracteres BRA4N. Resolviendo la barra empotrada-libre utilizando la matriz masa consistente, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 5.1.4.

Tabla 5.1.4:  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  con  $n$  elementos de 4 nodos.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	1.5709	4.8365	10.447
2	1.5708	4.7157	7.9396
3	1.5708	4.7127	7.8638
4	1.5708	4.7125	7.8559
5	1.5708	4.7124	7.8545
6	1.5708	4.7124	7.8542
7	1.5708	4.7124	7.8541
8	1.5708	4.7124	7.8540
9	1.5708	4.7124	7.8540

Con sólo dos elementos ( $n=2$ , modelo de 6 grados de libertad) se obtiene la solución exacta de  $\Omega_1$ , con cinco elementos la de  $\Omega_2$  y con ocho elementos la de  $\Omega_3$ . Curiosamente, en este caso la convergencia asintótica se cumple con las tres primeras frecuencias, sin inconvenientes numéricos al procesar con precisión simple, hasta alcanzar los valores de la solución exacta con 5 dígitos significativos.

En el archivo de datos no hay que dar las incidencias de los elementos ni las coordenadas de los nodos (ver el archivo instructivo BRAXI.TXT). A pesar de la simplicidad de la edición del archivo de datos, que se puede hacer fácilmente con un editor de texto, se dispone del programa ED-BRAXI codificado con QuickBasic, que interactúa con el usuario para el ingreso de los datos de modelos de barras vibrantes con deformaciones axiales. Una vez calculados y grabados los desplazamientos, con el programa PP-BRAXI, también codificado con QuickBasic, se obtienen gráficos de los modos naturales, en la pantalla del monitor. Las formas modales se muestran con diagramas cartesianos, es decir que los desplazamientos axiales  $u(x)$  se dibujan como ordenadas, perpendiculares el eje de la barra.

El programa BRAXI puede ser utilizado para resolver problemas como los que se muestran en la Figura 5.1.10, que se proponen como ejercicio práctico.

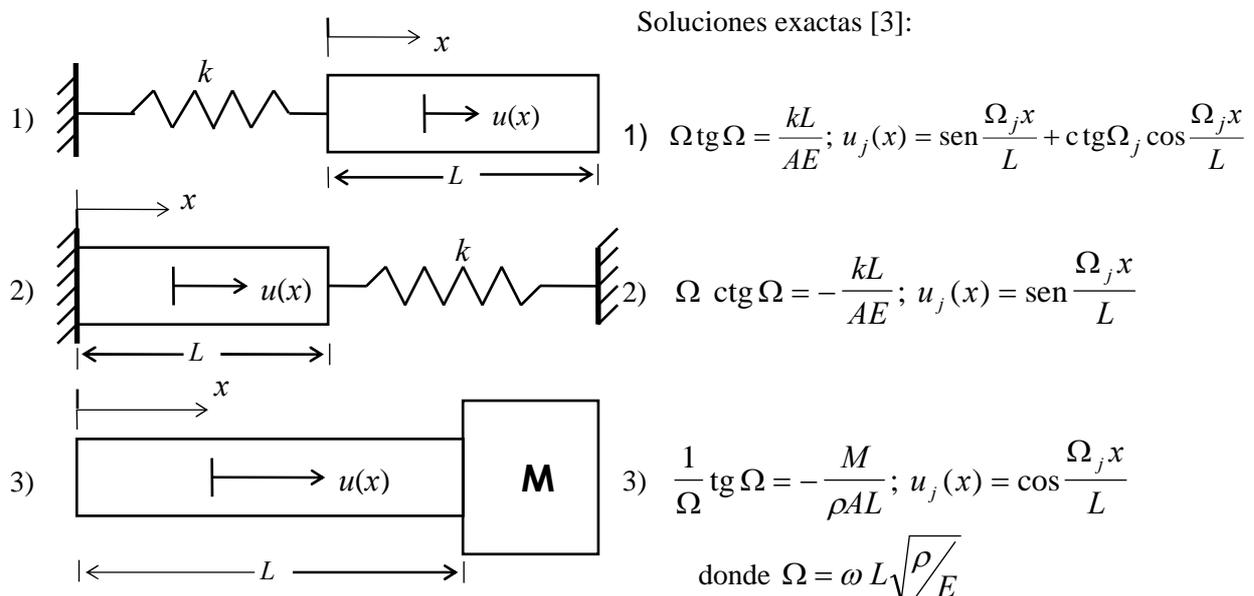


Figura 5.1.10: Ejemplos de barras con resortes y masas, con solución exacta conocida [3].

## VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

Es conveniente aclarar que en los distintos elementos finitos con los que se modelan sistemas mecánicos, es posible reemplazar la matriz de masa consistente con la de masas desacopladas. En este curso esta posibilidad se muestra y se implementa solamente con los elementos uniaxiales, que describen el comportamiento mecánico de barras con deformaciones longitudinales. Más adelante, en el capítulo 6, se describe un algoritmo para el análisis de vibraciones libres de estructuras de reticulado utilizando el elemento uniaxial de dos nodos, donde nuevamente se da la alternativa de efectuar el cálculo con la matriz de masas desacopladas.

### 5.1.4 Integración numérica

En algoritmos más complejos del método de elementos finitos, es usual transferir al programa de computación la tarea de calcular las integrales. Para ello se recurre a las fórmulas de integración numérica. La más utilizada en programas de elementos finitos es la de Gauss-Legendre [4, 15, 19], que en el caso unidimensional se expresa:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^q P_i f(\xi_i) \quad (5.38)$$

Ofrece la ventaja de dar la solución exacta si  $f(\xi)$  es un polinomio de grado no mayor que  $2q-1$ . Para calcular en forma exacta la matriz de masa del elemento cúbico se requeriría entonces aplicar (5.38) con cuatro puntos, mientras que para la matriz de rigidez son suficientes tres puntos de integración. En la tabla 5.1.5 se dan los valores de  $\xi_i^2$  y  $P_i$  para  $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  y  $7$ .

Tabla 5.1.5: Integración de Gauss-Legendre.

$q$	$\xi_i^2$	$P_i$
1	0	2
2	1/3	1
3	0 0.6	8/9 5/9
4	$(3 + \sqrt{24/5})/7$ $(3 - \sqrt{24/5})/7$	$(9 - \sqrt{15/2})/18$ $(9 + \sqrt{15/2})/18$
5	0 0.28994 91979 25690 0.82116 19131 85421	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189
6	0.05693 91159 67007 0.43719 78527 51095 0.86949 93949 18262	0.46791 39345 72691 0.36076 15730 48139 0.18132 44923 79170
7	0 0.16471 02868 95423 0.54986 84992 16443 0.90080 58292 71630	0.41795 91836 73469 0.38183 00505 05119 0.27970 53914 89227 0.12948 49661 68870

Zienkiewickz [19] da una tabla más amplia, con valores de  $\xi_i$  y  $P_i$  para  $q$  de 1 hasta 10.

Obviamente, no se justifica codificar una alternativa que utilice el método de integración numérica con los elementos que se implementan en el programa BRAXI, debido a que es muy sencilla la determinación analítica explícita de ambas matrices.

**5.2 Vibraciones torsionales**

Debido a la semejanza de las funciones de energía (3.21) y (3.22), para el caso de vibración longitudinal de una barra, con las correspondientes (3.32) y (3.36) de vibraciones torsionales, es posible utilizar los mismos elementos con el reemplazo de las magnitudes semejantes:

Vibraciones longitudinales	Vibraciones torsionales	
$u$	$\theta_x$	
$EA$	$GJ$	(5.39)
$\rho A$	$\rho I_x$	

Dado que las propiedades de un elemento uniaxial son tres ( $A, E, \rho$ ) y las del elemento torsional son cuatro ( $J, I_x, G, \rho$ ), es necesario introducir algunas modificaciones en el programa de computación. Por otra parte, hay problemas como el del ejemplo 1.4.1.3, donde se establece una restricción lineal entre dos grados de libertad, no contemplada en el algoritmo para vibraciones longitudinales. Estas diferencias señalan la conveniencia de codificar otro programa, que también procese alternativamente elementos lineales, cuadráticos o cúbicos. En la primera línea del archivo de datos debe indicarse el tipo de elemento mediante las cadenas de caracteres BRT2N, BRT3N o BRT4N, respectivamente. En este programa, que se ha denominado BRTOR (**Barra Recta con vibración TORSional**), se incluye la posibilidad de imponer restricciones lineales del tipo:

$$r_i \theta_i + r_j \theta_j = 0 \tag{5.40}$$

A tal efecto, en el archivo de datos se agrega el número de restricciones lineales, y más adelante los índices de los nodos  $i$  y  $j$  seguidos de los respectivos coeficientes  $r_i$  y  $r_j$ . Cabe mencionar que el algoritmo que aplica una restricción lineal produce un aumento del ancho de banda de las matrices cuando los nodos  $i$  y  $j$  no pertenecen a un mismo elemento, debido a que se introduce una conectividad adicional entre los mismos. Por otra parte, ahora se hace necesario dar las incidencias de los elementos y las coordenadas de sus extremos. Por consiguiente, es conveniente contar con un programa que facilite la edición del archivo de datos (ED-BRTOR, compilado con QuickBasic).

Como ejemplo de aplicación, se calcularon las dos primeras frecuencias del sistema mecánico de la Figura 5.2.1, que tiene dos engranajes en los extremos de sendas barras empotradas. En la Tabla 5.2.1 se transcriben los valores del Coeficiente  $\Omega = \omega L \sqrt{\rho I_x / GJ}$ , obtenidos al dividir cada eje en  $n$  elementos de dos nodos de igual longitud ( $2a = L/n$ ).

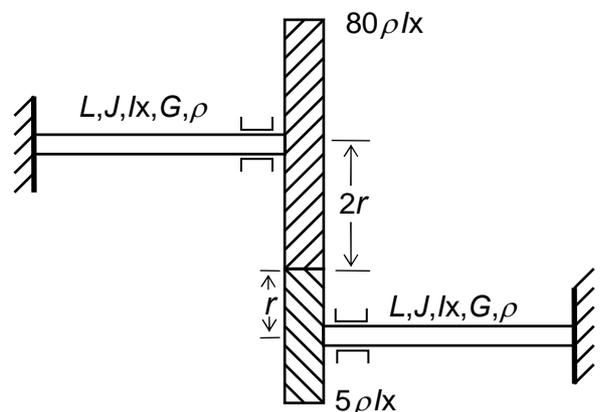


Figura 5.2.1: Sistema mecánico torsional.

Tabla 5.2.1:  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con  $n$  elementos lineales.

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	1	0.2217664	-----
2	3	0.2217622	3.464125
3	5	0.2217612	3.286360
4	7	0.2217609	3.222858
5	9	0.2217606	3.193511
10	19	0.2217615	3.154562
20*	39	0.2217604	3.144823
30*	59	0.2217604	3.143028
40*	79	0.2217604	3.142400
50*	99	0.2217604	3.142109
100*	199	0.2217604	3.141722
200*	399	0.2217604	3.141625
1000*	1999	0.2217604	3.141594

\* con doble precisión (programa BRTOR-Q#).

En la segunda columna de la tabla se indica el número de grados de libertad de los modelos, igual a  $2n-1$  después de aplicar las restricciones. Se observa que la convergencia asintótica de  $\Omega_1$  se interrumpe a partir del modelo con 10 elementos en cada barra. Al operar con doble precisión,  $\Omega_1$  se mantiene estable, mientras  $\Omega_2$  continúa con la convergencia monótona.

Cabe destacar que en el modo fundamental los engranajes giran, obviamente con sentidos opuestos y con amplitudes angulares que guardan relación inversa con los radios. En el segundo modo natural de vibración los engranajes prácticamente no se mueven, de modo que cada eje vibra como si estuviera empotrado en ambos extremos. Para el caso de la barra biempotrada, la solución exacta con siete dígitos es  $\Omega = \pi \cong 3.141593$ .

La convergencia mejora cuando se utilizan elementos cuadráticos. Esto se comprueba con los valores de la Tabla 5.2.2, comparando modelos con igual número de grados de libertad. Sin embargo, con menos grados de libertad ya se presentan problemas con los valores de  $\Omega_1$  debido a la escasa precisión numérica. Con elementos cúbicos y operando con precisión simple, los inconvenientes numéricos en los valores de  $\Omega_1$  se manifiestan con sólo tres elementos por eje, como puede verse en la Tabla 5.2.3.

Tabla 5.2.2: con  $n$  elementos cuadráticos.

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	3	0.2217608	3.162296
2	7	0.2217608	3.153418
3	11	0.2217603	3.144107
4	15	0.2217586	3.142421
5	19	0.2217612	3.141966
5*	19	0.2217604	3.141926
10*	39	0.2217604	3.141614
15*	79	0.2217604	3.141597
20*	119	0.2217604	3.141594
25*	159	0.2217604	3.141593

\* con doble precisión (BRTOR-Q#).

Tabla 5.2.3: con  $n$  elementos cúbicos.

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	5	0.2217604	3.162297
2	11	0.2217604	3.141840
3	17	0.2217608	3.141653
4	23	0.2217606	3.141642
5	29	0.2217600	3.141623
1*	5	0.2217604	3.162278
2*	11	0.2217604	3.141807
3*	17	0.2217604	3.141612
4*	23	0.2217604	3.141596
5*	29	0.2217604	3.141594

\* con doble precisión (BRTOR-Q#).

### 5.3 Vibraciones transversales (vigas)

#### 5.3.1 Elemento Bernoulli-Euler de 2 nodos

En la Sección 3.4.1 se estudió la teoría elemental de vibración transversal de barras, en la que se desprecian los efectos de la deformación por corte e inercia rotatoria de las secciones. Las correspondientes expresiones de  $U_e$  y  $T_e$  son (3.44) y (3.45). En la primera interviene la derivada segunda del desplazamiento transversal  $v(x)$ . Por lo tanto es necesario tomar  $v$  y  $\partial v/\partial x$  como grados de libertad independientes en cada nodo del elemento. En la Figura 5.3.1 se muestra el elemento más simple, con un nodo en cada extremo, vale decir, con cuatro grados de libertad. En consecuencia, para que la función aproximante quede uniformemente definida debe contener cuatro parámetros, lo cual a su vez implica adoptar un polinomio completo de tercer grado:

$$v(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad (5.41)$$

La derivada de  $v(x)$  representa la rotación de la sección:

$$\theta(\xi) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{a} \frac{dv(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{a} (a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2) \quad (5.42)$$

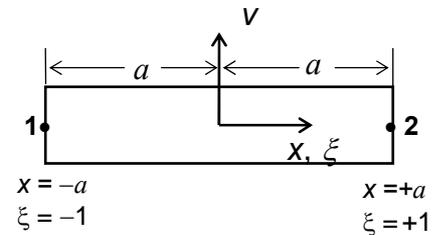


Figura 5.3.1: Elemento viga de dos nodos.

Los cuatro grados de libertad del elemento se agrupan en el vector de los desplazamientos nodales:

$$\{\delta_e\}^t = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (5.43)$$

Las expresiones de  $v_1$  y  $v_2$  en función de los coeficientes se obtienen de (5.41), poniendo  $\xi = -1$  y  $\xi = +1$ , respectivamente. De manera similar, con (5.42) se expresan  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} v_1 &= v(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ v_2 &= v(+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \theta_1 &= \theta(-1) = (a_1 - 2a_2 + 3a_3)/a \\ \theta_2 &= \theta(+1) = (a_1 + 2a_2 + 3a_3)/a \end{aligned} \quad (5.44)$$

Se omiten los pasos intermedios del proceso algebraico, que consiste en resolver el sistema lineal (5.44) para obtener los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3$  en función de  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ , y luego reemplazarlos en (5.41), para llegar finalmente a la forma:

$$v(\xi) = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)\theta_1 + N_3(\xi)v_2 + N_4(\xi)\theta_2 = [N(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.45)$$

Operando, resultan los siguientes polinomios cúbicos para las funciones de forma del elemento de 2 nodos:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ N_2(\xi) &= \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ N_4(\xi) &= \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (5.46)$$

## VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

En la Figuras 5.3.2 se muestran los gráficos de las cuatro funciones de forma. Se comprueba que son las elásticas de una viga sin carga en la que se imponen, en sus extremos, desplazamientos transversales y rotaciones de valor unidad.

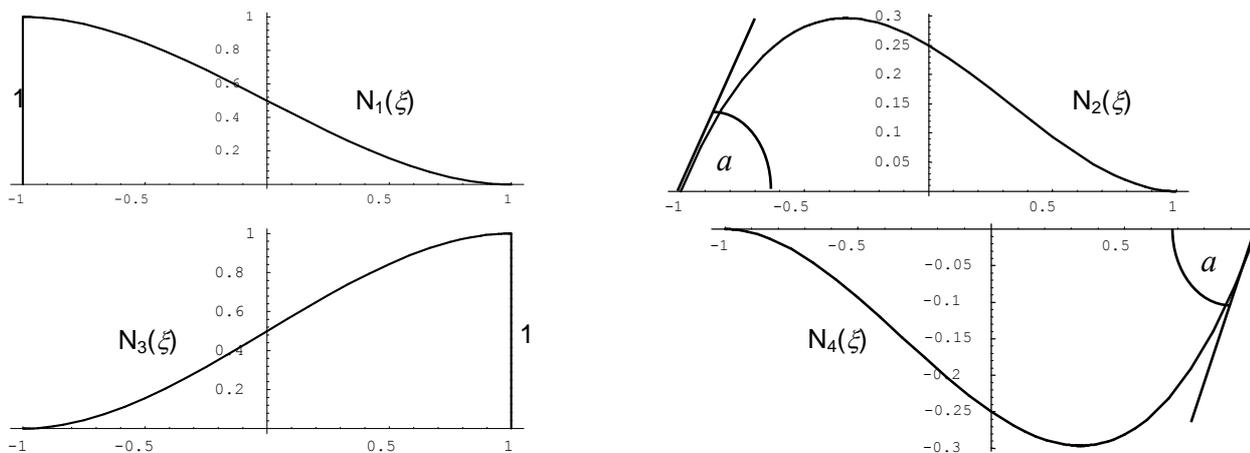


Figura 5.3.2: Funciones de forma del elemento viga tipo Bernoulli-Euler de dos nodos.

En la expresión de la energía cinética interviene:  $\dot{v}(\xi) = [N(\xi)] \{\dot{\delta}_e\}$  (5.47)

Reemplazando:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t \int_{-1}^{+1} \rho A a [N(\xi)]' [N(\xi)] d\xi \{\dot{\delta}_e\} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t [m_e] \{\dot{\delta}_e\} \quad (5.48)$$

La expresión de la matriz de masa se obtiene reemplazando las funciones de forma (5.46). Su determinación analítica implica integrar polinomios de 6º grado (numéricamente debería aplicarse integración de Gauss-Legendre de 4 puntos). Operando resulta:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 78 & 22a & 27 & -13a \\ 22a & 8a^2 & 13a & -6a^2 \\ 27 & 13a & 78 & -22a \\ -13a & -6a^2 & -22a & 8a^2 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Nótese que la suma de las componentes  $m_{11}$  y  $m_{13}$  es igual a la mitad de la masa total del elemento,  $\rho A a$ .

Otro tanto ocurre con la suma de  $m_{31}$  y  $m_{33}$ . La explicación es simple: si el elemento experimenta una aceleración transversal de valor unidad, sin deformarse,

descrita con  $\ddot{v}_1 = \ddot{v}_2 = 1$  y  $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$ , la suma de las fuerzas actuantes en los dos nodos debe ser igual a la masa total. Del mismo modo puede interpretarse físicamente el significado de otras componentes de la matriz de masa. Por ejemplo, si el elemento experimenta una aceleración angular de valor unidad alrededor de su punto medio, sin deformarse,

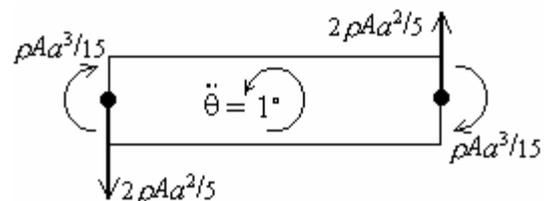


Figura 5.3.3: Fuerzas y cuplas de inercia.

se tiene:  $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 1$  y  $\ddot{v}_2 = -\ddot{v}_1 = a$ . En la Figura 5.3.3 se muestran las fuerzas y cuplas de

inercia que en tal caso actúan en los nodos del elemento, obtenidas con el producto de la matriz de masa (5.49) por el vector de las aceleraciones. Sumando los momentos con respecto al punto medio se obtiene:  $2\rho Aa^3/3$ , que es el momento de inercia con respecto a dicho punto de una masa distribuida sobre el eje de la barra, de valor  $\rho A$ :

$$\int_{-a}^{+a} x^2 dm = \int_{-a}^{+a} x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^{+a} = \frac{2}{3} \rho A a^3$$

Por otra parte, en la expresión de la energía de deformación elástica interviene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{1}{a^2} [N''(\xi)] \{\delta_e\} \quad (5.50)$$

donde  $N''(\xi)$  indica la derivada segunda de  $N(\xi)$  con respecto a  $\xi$ .

Derivando dos veces (5.46) se obtienen las “curvaturas”:

$$\begin{aligned} N_1''(\xi) &= +\frac{3}{2} \xi \\ N_2''(\xi) &= \frac{1}{2}(-1 + 3\xi) \\ N_3''(\xi) &= -\frac{3}{2} \xi \\ N_4''(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + 3\xi) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Reemplazando en la expresión de la energía de deformación del elemento:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t \int_{-1}^{+1} \frac{EI_z}{a^3} [N''(\xi)]^t [N''(\xi)] d\xi \{\delta_e\} = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [k_e] \{\delta_e\} \quad (5.52)$$

La determinación analítica de la matriz de rigidez  $[k_e]$  requiere integrar polinomios de segundo grado (con Gauss-Legendre: dos puntos de integración). Operando analíticamente, resulta:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Nótese que si el elemento se traslada transversalmente sin deformarse ( $v_1 = v_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), las fuerzas elásticas resultan nulas. Otro tanto sucede con cualquier movimiento de cuerpo rígido, por ejemplo con una rotación de valor unidad alrededor del punto medio ( $v_2 = -v_1 = a$ ;  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ ).

Con algunas modificaciones del programa para vibraciones longitudinales, se obtienen versiones para vigas de eje recto, que se han denominado BRFBE-Q! y BRFBE-Q# (**B**arra **R**ecta con vibración **F**lexional y elementos **B**ernoulli-**E**uler), con las cuales es posible procesar modelos con el elemento de 2 nodos. Las diferencias más importantes con el programa BRAXI se refieren a las propiedades (se agrega  $I_z$ ) y a las condiciones de vínculo, que ahora se especifican de otra manera: para cada nodo rígidamente restringido,

## VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

se da el índice del nodo seguido de las cadenas de caracteres DY y/o RZ, cuando se suprime el desplazamiento transversal ( $v$ ) y/o la rotación ( $\theta$ ), respectivamente. Esta nueva notación para los grados de libertad del modelo, es la utilizada en todos los programas de computación desarrollados para el curso. En los modelos de barras con vibraciones axiales o torsionales, el único grado de libertad por nodo se indica con DX y RX, respectivamente.

### 5.3.2 Elemento Bernoulli-Euler de 3 nodos

Un algoritmo más eficiente se obtiene con el agregado de un tercer nodo en el punto medio del elemento, introduciendo dos grados de libertad más:

$$\{\delta_e\}^t = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3] \quad (5.54)$$

En este caso, la función aproximante es el polinomio completo de quinto grado:

$$v(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5 \quad (5.55)$$

Luego: 
$$\theta(\xi) = \frac{1}{a} \frac{dv(\xi)}{d\xi} = (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + 4a_4\xi^3 + 5a_5\xi^4)/a \quad (5.56)$$

En consecuencia, los seis grados de libertad se expresan:

$$\begin{aligned} v_1 = v(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 & \theta_2 = \theta(0) &= a_1 / a \\ \theta_1 = \theta(-1) &= (a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 5a_5)/a & v_3 = v(+1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ v_2 = v(0) &= a_0 & \theta_3 = \theta(+1) &= (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5)/a_0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Resolviendo este sistema de seis ecuaciones lineales y sustituyendo la solución en (5.55), se obtienen las funciones de forma del elemento:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2(4 - 5\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3) \\ N_2(\xi) &= \frac{a}{4}\xi^2(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\ N_4(\xi) &= a\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^4) \\ N_5(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2(4 + 5\xi - 2\xi^2 - 3\xi^3) \\ N_6 &= \frac{a}{4}\xi^2(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (5.58)$$

La matriz masa se obtiene analíticamente mediante integrales de polinomios de décimo grado. Operando:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{3465} \begin{bmatrix} 1046 & 114a & 440 & -160a & 131 & -29a \\ 114a & 16a^2 & 88a & -24a^2 & 29a & -6a^2 \\ 440 & 88a & 2816 & 0 & 440 & -88a \\ -160a & -24a^2 & 0 & 256a^2 & 160a & -24a^2 \\ 131 & 29a & 440 & 160a & 1046 & -114a \\ -29a & -6a^2 & -88a & -24a^2 & -114a & 16a^2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Para hallar la matriz de rigidez se requieren las derivadas segundas de las funciones de forma:

$$\begin{aligned}
 N_1''(\xi) &= (30\xi^3 - 12\xi^2 - 15\xi + 4)/2 \\
 N_2''(\xi) &= a(10\xi^3 - 6\xi^2 - 3\xi + 1)/2 \\
 N_3''(\xi) &= 12\xi^2 - 4 \\
 N_4''(\xi) &= 4a\xi(5\xi^2 - 3) \\
 N_5''(\xi) &= -(30\xi^3 + 12\xi^2 - 15\xi - 4)/2 \\
 N_6''(\xi) &= a(10\xi^3 + 6\xi^2 - 3\xi - 1)/2
 \end{aligned}
 \tag{5.60}$$

Operando analíticamente, resulta:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{70a^3} \begin{bmatrix} 1273 & 569a & -896 & 960a & -377 & 121a \\ 569a & 332a^2 & -448a & 320a^2 & -121a & 38a^2 \\ -896 & -448a & 1792 & 0 & -896 & 448a \\ 960a & 320a^2 & 0 & 1280a^2 & -960a & 320a^2 \\ -377 & -121a & -896 & -960a & 1273 & -569a \\ 121a & 38a^2 & 448a & 320a^2 & -569a & 332a^2 \end{bmatrix}
 \tag{5.61}$$

Estas expresiones se implementaron en el mismo programa BRFB-E-Q. La elección de una u otra formulación se realiza en el archivo de datos, en cuya primera línea debe darse la palabra clave EBE2N cuando se utilice el elemento de 2 nodos (**E**lemento **B**ernoulli-**E**uler de **2** Nodos), o EBE3N en el caso de optar por el elemento de 3 nodos. El programa ED-BRFB-E puede ser utilizado para la edición de los archivos de datos.

En la Tabla 5.3.1 se dan los valores del coeficiente adimensional de frecuencia  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI_z}$  correspondientes a los tres primeros modos naturales de vibración de la viga simplemente apoyada (articulada en ambos extremos), obtenidos con valores crecientes del número total de nodos del modelo, con elementos de dos y tres nodos, operando con precisión simple.

Tabla 5.3.1 Valores de  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI_z}$ , viga articulada-articulada.

nº de nodos	$\Omega_1$		$\Omega_2$		$\Omega_3$	
	EBE2N	EBE3N	EBE2N	EBE3N	EBE2N	EBE3N
2	10.954	-----	50.200	-----	-----	-----
3	9.9086	9.8725	43.818	39.646	110.14	131.81
4	9.8776	-----	39.945	-----	98.590	-----
5	9.8722	9.8696	39.634	39.490	90.450	89.089
6	9.8706	-----	39.544	-----	89.532	-----
7	<u>9.8698</u>	9.8696	39.510	39.479	89.177	88.853
8	9.8698	-----	39.496	-----	89.019	-----
9	9.8698	<u>9.8689</u>	39.489	39.478	88.941	88.828
10	9.8696	-----	39.485	-----	88.898	-----
11	9.8696	9.8709	39.483	<u>39.479</u>	88.874	88.827
51*	9.8696	9.8696	39.478	39.478	88.827	88.826
Sol.exacta	$\pi^2 = 9.8696$		$4\pi^2 = 39.478$		$9\pi^2 = 88.826$	

(\*) con doble precisión (programa BRFB-E-Q#)

La convergencia del elemento de 3 nodos es notoriamente superior. Nuevamente se producen problemas numéricos en el cálculo de  $\Omega_1$  al operar con precisión simple, como lo indican los valores subrayados en la tabla 5.3.1. Este inconveniente se supera al utilizar aritmética de doble precisión.

### 5.3.3 Elemento Timoshenko lineal-lineal de 2 nodos

Es sabido que mediante el análisis experimental de vibraciones libres de vigas, se obtienen valores de la frecuencia fundamental menores que los resultados de la teoría elemental. Estas diferencias aumentan a medida que decrece la esbeltez de la viga. También se incrementan con el orden del modo de vibración, debido a la menor longitud de los tramos entre puntos nodales de la forma modal. Estas discrepancias surgen porque en la teoría elemental no se considera la deformación por corte ni la inercia rotatoria.

En la Sección 3.4.2 se obtuvo la expresión (3.61) de la energía de deformación elástica teniendo en cuenta la deformación por corte, y la expresión (3.62) de la energía cinética en la que interviene la inercia rotatoria, habiéndose adoptado dos funciones independientes: las rotaciones  $\theta_z(x)$  y los desplazamientos transversales  $v(x)$  de las secciones. Dado que en la expresión de  $U$  intervienen las primeras derivadas de estas funciones, deben tomarse los valores de ambas como grados de libertad en cada nodo, requisito necesario y suficiente para la convergencia a la solución exacta del modelo continuo. El elemento más simple es el de dos nodos, que posee cuatro grados de libertad:

$$\{\delta_e\}^t = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (5.62)$$

Este vector tiene las mismas componentes que el elemento viga tipo Bernoulli-Euler, con la diferencia que en este último se cumple  $\gamma = dv/dx - \theta_z = 0$ . Las funciones aproximantes deben quedar definidas mediante cuatro parámetros independientes, y dado que  $v(x)$  y  $\theta_z(x)$  ahora son funciones independientes, es posible adoptar polinomios lineales para ambas:

$$v(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 \quad (5.63)$$

$$\theta_z(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 \quad (5.64)$$

que también pueden ponerse en las formas expandidas:

$$v(\xi) = [N_1(\xi) \quad 0 \quad N_2(\xi) \quad 0]\{\delta_e\} = [N_v(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.65)$$

$$\theta_z(\xi) = [0 \quad N_1(\xi) \quad 0 \quad N_2(\xi)]\{\delta_e\} = [N_\theta(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.66)$$

Luego:

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{a} \frac{dv(\xi)}{d\xi} - \theta_z(\xi) = \frac{1}{2a} [-1 \quad -a(1 - \xi) \quad +1 \quad -a(1 + \xi)]\{\delta_e\} = \frac{1}{a} [N_\gamma(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.67)$$

$$\frac{d\theta_z(x)}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d\theta_z(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2a} [0 \quad -1 \quad 0 \quad +1]\{\delta_e\} = \frac{1}{a} [N'_\theta(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.68)$$

Estas expresiones muestran que la distorsión varía linealmente, mientras que la deformación por flexión es constante. Es razonable inferir que este elemento será poco eficiente para reproducir modos

flexionales.

Sustituyendo (5.65) y (5.66) en la expresión (3.62) de la energía cinética del elemento:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t \int_{-1}^{+1} \rho A a [N_v(\xi)]^t [N_v(\xi)] d\xi \{\dot{\delta}_e\} + \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t \int_{-1}^{+1} \rho I_z a [N_\theta(\xi)]^t [N_\theta(\xi)] d\xi \{\dot{\delta}_e\} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\} [m_e] \{\dot{\delta}_e\} \quad (5.69)$$

Operando se obtiene la matriz de masa del elemento:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho I_z a}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2r_z^2 & 0 & r_z^2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & r_z^2 & 0 & 2r_z^2 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

donde  $r_z$  es el radio de giro de la sección con respecto el eje de flexión z:  $r_z^2 = I_z/A$  (5.71)

Sustituyendo (5.67) y (5.68) en la expresión (3.61) de la energía de deformación elástica del elemento:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right)^2 dx = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t \int_{-1}^{+1} \frac{EI_z}{a} [N'_\theta(\xi)]^t [N'_\theta(\xi)] d\xi \{\delta_e\} + \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t \int_{-1}^{+1} \frac{\kappa GA}{a} [N_\gamma(\xi)]^t [N_\gamma(\xi)] d\xi \{\delta_e\} = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [k_e] \{\delta_e\} \quad (5.72)$$

Operando se obtiene la matriz de rigidez elástica del elemento:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{2a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\kappa GA}{6a} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Introduciendo el parámetro adimensional  $\phi = \frac{3EI_z}{\kappa GAa^2} = \frac{3E}{\kappa G} \left( \frac{r_z}{a} \right)^2 = \frac{6(1+\nu)}{\kappa} \left( \frac{r_z}{a} \right)^2$  (5.74)

resulta:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{2a^3 \phi} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & (4+\phi)a^2 & -3a & (2-\phi)a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & (2-\phi)a^2 & -3a & (4+\phi)a^2 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Nótese que a medida que el parámetro  $\phi$  decrece (lo cual sucede cuando el elemento es más esbelto) aumenta la rigidez del elemento. Por lo tanto, con la disminución del valor de  $\phi$  se producen problemas numéricos que impiden la convergencia a la solución de la teoría elemental. Este fenómeno se conoce como “bloqueo por corte”, consecuencia de las funciones adoptadas en (5.63) y (5.64) para interpolar los desplazamientos nodales.

El programa BRFVT-Q (**B**arra **R**ecta con vibración **F**lexional con elementos **V**iga **T**imoshenko) calcula las matrices de rigidez y de masa de vigas modeladas con este elemento. Para el usuario, la diferencia con

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

BRFBE-Q se refleja solamente en el archivo de datos, ya que es necesario agregar el módulo de elasticidad transversal ( $G$ ) y el factor de corte de la sección ( $\kappa$ ), elevando a seis el número de propiedades de los elementos. Además, en la primera línea del archivo de datos debe ir la palabra clave EVT2N (Elemento Viga Timoshenko de 2 Nodos) y el usuario debe optar por el elemento de 2 nodos con formulación lineal-lineal (para mayor información, ver instrucciones en el archivo BRFVT.TXT o BRFVT.RTF).

Para conocer el comportamiento numérico de este elemento simple, se obtuvieron las cuatro primeras frecuencias naturales de una viga articulada-articulada, con valor 0.1 del parámetro  $r_z/L$  (si la sección transversal es rectangular de altura  $h$ , se tiene  $h/L \approx 0.35$ ).

Debido a la gran robustez esta viga presenta un modo de vibración de corte puro, como se muestra en la Figura 5.3.4, donde todas las secciones experimentan simultáneamente la misma rotación, sin desplazamiento transversal. Por ende, la respectiva frecuencia se reproduce exactamente con un único elemento de longitud  $L$ .

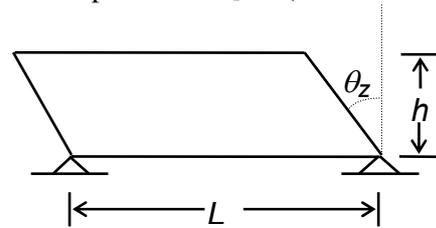


Figura 5.3.4:

Forma modal de corte puro.

A continuación, en la Tabla 5.3.2 se transcriben los valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI_z}$  en función del número ( $n$ ) de elementos de igual longitud ( $2a = L/n$ ). Las tres primeras columnas corresponden a modos con fuerte predominio de la deformación flexional, mientras que en la cuarta columna se da el valor para el modo de corte puro. La solución exacta se obtuvo con la solución del sistema de ecuaciones (3.63), con las condiciones de borde  $v=0$  y  $d\theta_z/dx=0$  en ambos extremos de la barra\*.

Tabla 5.3.2 Valores de  $\Omega$ . Viga articulada-articulada ( $r_z/L=0.1$  ;  $\kappa=0.85$  ;  $\nu=0.3$ ).

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega$ corte
2	4	12.986	-----	68.505	57.177
3	6	10.398	37.014	67.780	57.177
4	8	9.5172	31.987	61.367	57.177
5	10	9.1141	29.577	56.106	57.177
10	20	8.5812	26.460	47.295	57.177
20	40	8.44921	25.709	45.114	57.177
30	60	8.4243	25.572	44.717	57.177
40	80	8.4157	25.523	44.578	57.177
50	100	8.4117	25.501	44.514	57.177
100	200	8.4000	25.470	44.428	57.177
200	400	8.4345	25.474	44.413	57.187
100*	200	8.4064	25.472	44.429	57.177
200*	400	8.4051	25.464	44.408	57.177
300*	600	8.4049	25.463	44.404	57.177
400*	800	8.4048	25.462	44.402	57.177
500*	1000	8.4047	25.462	44.401	57.177
Solución exacta		8.4047	25.462	44.401	57.177

\* con doble precisión (programa BRFVT-Q#).

\* Laura P.A.A., Rossi R.E., Maurizi M.J., *IMA Publication N° 15*, Vibrating Timoshenko Beams (A tribute to the 70th anniversary of the publication of Professor S. Timoshenko's epoch making contribution). 147 pp. 1992.

También se hallaron las tres primeras frecuencias de la viga cantilever (empotrada–libre). Los resultados se muestran en la Tabla 5.3.3 en la página siguiente.

Tabla 5.3.3: Valores de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  para la viga empotrada–libre ( $r_z/L=0.1$ ;  $\kappa = 0.85$ ;  $\nu = 0.3$ ).

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
5	10	3.3954	15.819	36.577
10	20	3.2732	14.856	32.920
20	40	3.2415	14.612	31.983
30	60	3.2357	14.567	31.810
40	80	3.2335	14.551	31.749
50	100	3.2325	14.544	31.721
100	200	3.2359	14.531	31.682
100*	200	3.2313	14.534	31.683
200*	400	3.2310	14.532	31.674
300*	600	3.2310	14.531	31.672
400*	800	3.2310	14.531	31.671
500*	1000	3.2309	14.531	31.671
Solución exacta		3.2309	14.531	31.671

\* con doble precisión (programa BRFVT–Q#).

Si se pretende hallar la solución de la teoría elemental (viga Bernoulli-Euler) con este elemento, debe recurrirse al artificio de dar un valor grande del módulo transversal ( $G$ ), o del factor de corte ( $\kappa$ ), para disminuir el efecto de la deformación por corte; e imponer  $r_z = 0$  en la matriz de inercia, eliminando de esta manera la inercia rotatoria (este programa modificado no se ha incluido en el CD–ROM). Con  $G = 100 E$  se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 5.3.4, para la viga articulada–articulada.

Tabla 5.3.4: Valores de  $\Omega_i$ . Viga articulada–articulada ( $G=100E$ ).

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
10	20	28.275	115.704	270.218
20	40	16.454	66.103	149.820
30	60	13.198	52.845	119.097
40	80	11.853	47.406	106.628
50	100	11.181	44.678	100.401
100	200	11.957	41.246	91.718
100*	200	10.208	40.772	91.509
200*	400	9.9510	39.738	89.161
300*	600	9.9027	39.543	88.720
400*	800	9.8857	39.475	88.565
Solución exacta		9.8696	39.478	88.826

\* con doble precisión (programa modificado sin inercia rotatoria).

Por otra parte, aumentando el valor de  $G$  no mejora la solución sino que, por el contrario, como se muestra en la Tabla 5.3.5, se producen resultados que se alejan de la teoría elemental para vigas esbeltas.

Tabla 5.3.5: Solución con 400 elementos.

$G/E$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
100	9.8857	39.475	88.565
1000	10.085	40.334	90.728
10000	11.855	47.419	106.69
Sol.exacta	9.8696	39.478	88.826

Los resultados de la tabla precedente confirman lo previsto al observar la expresión (5.109) de la matriz de rigidez, donde  $\phi$  forma parte del denominador del factor común. Por lo tanto, este elemento no debe ser utilizado en el caso de vigas esbeltas.

### 5.3.4 Elemento Timoshenko lineal-cuadrático de 2 y 3 nodos

Un intento de mejorar los resultados, y al mismo tiempo mostrar la versatilidad del método de elementos finitos, consiste en agregar un tercer nodo en el punto medio para las rotaciones de las secciones y mantener dos nodos para los desplazamientos transversales. Este nuevo elemento tiene cinco grados de libertad, ya que el nodo intermedio sólo posee uno (la rotación de la sección). Los cinco grados de libertad se agrupan en el vector de los desplazamientos nodales:

$$\{\delta_e\}^t = [v_1 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3] \quad (5.76)$$

El desplazamiento transversal de la sección genérica se expresa interpolando con polinomios lineales:

$$v(\xi) = \left[ \frac{1}{2}(1-\xi) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \quad 0 \right] \{\delta_e\} \quad (5.77)$$

La rotación se interpola con polinomios cuadráticos:

$$\theta_z(\xi) = \left[ 0 \quad \frac{1}{2}(\xi-1)\xi \quad 1-\xi^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}(\xi+1)\xi \right] \{\delta_e\} \quad (5.78)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior, se obtienen las matrices masa y de rigidez:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho I_z a}{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 16 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{\rho A a}{15} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4r_z^2 & 2r_z^2 & 0 & -r_z^2 \\ 0 & 2r_z^2 & 16r_z^2 & 0 & 2r_z^2 \\ 5 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -r_z^2 & 2r_z^2 & 0 & 4r_z^2 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

donde  $r_z$  es el radio de giro de la sección.

$$[k_e] = \frac{EI_z}{6a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \frac{\kappa GA}{30a} \begin{bmatrix} 15 & 5a & 20a & -15 & 5a \\ 5a & 8a^2 & 4a^2 & -5a & -2a^2 \\ 20a & 4a^2 & 32a & -20a & 4a^2 \\ -15 & -5a & -20a & 15 & -5a \\ 5a & -2a^2 & 4a^2 & -5a & 8a^2 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{30a^3 \Psi} \begin{bmatrix} 15 & 5a & 20a & -15 & 5a \\ 5a & (8+35\Psi)a^2 & (4-40\Psi)a^2 & -5a & (-2+5\Psi)a^2 \\ 20a & (4-40\Psi)a^2 & (32+80\Psi)a^2 & -20a & (4-40\Psi)a^2 \\ -15 & -5a & -20a & 15 & -5a \\ 5a & (-2+5\Psi)a^2 & (4-40\Psi)a^2 & -5a & (8+35\Psi)a^2 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

donde  $\Psi = \phi / 3$ , siendo  $\phi$  el mismo parámetro adimensional definido en (5.74).

Esta matriz de rigidez presenta el mismo inconveniente que en el caso anterior, ya que al disminuir  $\phi$  se incrementa la rigidez transversal, produciéndose el bloqueo por corte.

El algoritmo se implementó en un programa desarrollado para investigar la eficacia del elemento. Operando con doble precisión, se obtuvieron los resultados que se dan en la Tabla 5.3.6, donde  $n$  es el número de elementos de igual longitud.

Tabla 5.3.6: Valores de  $\Omega$ . Viga articulada-articulada ( $r_z/L=0.1$ ;  $\kappa=0.85$ ;  $\nu=0.3$ ).

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega$ corte
5*	15	8.9844	28.421	52.739	57.177
10*	30	8.5526	26.218	46.616	57.177
20*	60	8.4418	25.651	44.955	57.177
30*	90	8.4212	25.546	44.647	57.177
40*	120	8.4140	25.509	44.539	57.177
50*	150	8.4106	25.492	44.489	57.177
100*	300	8.4062	25.469	44.423	57.177
200*	600	8.4050	25.464	44.406	57.177
500*	1500	8.4047	25.462	44.401	57.177
Solución exacta		8.4047	25.462	44.401	57.177

\* con doble precisión.

Nótese que con dos modelos que tienen igual número de grados de libertad (30 elementos de 2 nodos en la Tabla 5.3.2, y 20 elementos de 3 nodos en la Tabla 5.3.6) se obtuvieron mejores resultados con el elemento lineal-lineal. La idea de aumentar el grado de los polinomios interpolantes solamente para las rotaciones, no produjo una mejora del algoritmo. Tampoco se observan diferencias en la rapidez de convergencia de los resultados numéricos que justifiquen su uso, al compararlos con los obtenidos usando el elemento más simple. Por otra parte, el elemento lineal-cuadrático presenta la desventaja de generar matrices de mayor tamaño en modelos con igual número de elementos. En efecto, con el elemento de dos nodos, las matrices banda tienen  $2(n+1)$  filas y 4 columnas, siendo  $n$  el número de elementos del modelo; mientras que con el de cinco grados de libertad se forman con  $3n+2$  filas y 5 columnas, lo cual implica casi la duplicación del número de componentes. Por los motivos expuestos, el algoritmo lineal-cuadrático no ha sido implementado en el programa BRFVT-Q disponible en el CD-ROM.

Una alternativa del elemento de 5 grados de libertad sería el algoritmo cuadrático-lineal, adoptando 3 nodos para interpolar el desplazamiento transversal y dos nodos para las rotaciones, con lo cual cabe esperar un mejor comportamiento numérico. No obstante, se ha preferido pasar al desarrollo de un elemento de 3 nodos donde tanto el desplazamiento transversal como las rotaciones de las secciones se interpolan con polinomios cuadráticos.

### 5.3.5 Elemento Timoshenko cuadrático -cuadrático de 3 nodos

Obviamente, este elemento posee seis grados de libertad que se agrupan en el siguiente vector de desplazamientos nodales:

$$\{\delta_e\}^t = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3] \quad (5.81)$$

Para la interpolación de las rotaciones se aplica (5.78). Similarmente, el desplazamiento transversal  $v(\xi)$

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

se aproxima con los mismos polinomios cuadráticos:

$$v(\xi) = \left[ \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi \quad 0 \quad 1 - \xi^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi \quad 0 \right] \{\delta_e\} \quad (5.82)$$

Desarrollando en forma similar a los casos anteriores, se obtienen las matrices para este elemento:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{15} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4r_z^2 & 0 & 2r_z^2 & 0 & -r_z^2 \\ 2 & 0 & 16 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2r_z^2 & 0 & 16r_z^2 & 0 & 2r_z^2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -r_z^2 & 0 & 2r_z^2 & 0 & 4r_z^2 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

$$[k_e] = \frac{EI_z}{30a^3\psi} \begin{bmatrix} 35 & 15a & -40 & 20a & 5 & -5a \\ 15a & (8 + 35\psi)a^2 & -20a & (4 - 40\psi)a^2 & 5a & (-2 + 5\psi)a^2 \\ -40 & -20a & 80 & 0 & -40 & 20a \\ 20a & 320a^2 & 0 & (32 + 80\psi)a^2 & -20a & (4 - 40\psi)a^2 \\ 5 & -121a & -40 & -20a & 35 & -15a \\ -5a & 38a^2 & 20a & (4 - 40\psi)a^2 & -15a & (8 + 35\psi)a^2 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

donde  $\psi$  es el mismo parámetro adimensional que intervino en la matriz de rigidez del elemento lineal-cuadrático (5.80).

Este algoritmo se implementó en el programa BRFVT, el cual lo aplica cuando el archivo de datos es encabezado con la palabra clave EVT3N (**E**lemento **V**iga **T**imoshenko de **3** **N**odos). En la Tabla 5.3.7 se muestran los resultados obtenidos, operando con doble precisión. Nuevamente,  $n$  es el número de elementos de igual longitud en que se divide la viga simplemente apoyada (articulada-articulada).

Tabla 5.3.7: Valores de  $\Omega$ . Viga articulada-articulada ( $r_z/L=0.1$ ;  $\kappa=0.85$ ;  $\nu=0.3$ ).

$n$	GDL	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega$ corte
5*	20	8.4091	25.557	44.972	57.177
6*	24	8.4068	25.509	44.689	57.177
7*	28	8.4058	25.488	44.561	57.177
8*	32	8.4054	25.477	44.496	57.177
9*	36	8.4051	25.471	44.461	57.177
10*	40	8.4050	25.468	44.442	57.177
20*	80	8.4047	25.462	44.403	57.177
30*	120	8.4047	25.462	44.401	57.177
Solución exacta		8.4047	25.462	44.401	57.177

\* con doble precisión (programa BRFVT-Q#).

Analizando los resultados de la Tabla 5.3.7, se comprueba una buena convergencia, muy superior a la lograda con el elemento lineal-lineal de dos nodos. Con solamente 20 elementos de 3 nodos (80 grados de libertad) se obtiene la misma precisión que con 500 elementos de 2 nodos (1000 grados de libertad).

Sorprendentemente, a pesar de la presencia del parámetro  $\psi$  en el denominador del factor de la matriz de rigidez (5.84), con este elemento el efecto del bloqueo por corte es prácticamente despreciable. Al

aumentar la esbeltez de la barra y el número de elementos del modelo, los resultados se aproximan a la solución de la viga Bernoulli-Euler. En la siguiente Sección se describe otro elemento de dos nodos utilizando polinomios de mayor grado, con los cuales se logra un elemento totalmente libre de bloqueo por corte.

### 5.3.6 Elemento Timoshenko cúbico-cuadrático de 2 nodos

Teniendo en cuenta que las funciones de forma (5.46) del elemento para viga Bernoulli-Euler representan las elásticas estáticas de una barra sin carga en el tramo, surge la idea de imponer esta misma propiedad para el elemento de viga Timoshenko. Recurriendo entonces a las ecuaciones del movimiento (3.63) de la viga Timoshenko y poniendo  $q_y = 0$ ,  $\ddot{v} = 0$  y  $\ddot{\theta}_z = 0$ , se obtienen las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático:

$$\kappa GA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \kappa GA \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = 0 \quad (5.85)$$

$$\kappa GA \frac{\partial v}{\partial x} + EI_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} - \kappa GA \theta_z = 0 \quad (5.86)$$

Derivando (5.86) y restando (5.85), se obtiene: 
$$\frac{\partial^3 \theta_z}{\partial x^3} = 0 \quad (5.87)$$

Derivando 2 veces (5.85) y reemplazando (5.87): 
$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (5.88)$$

Sustituyendo  $x = a \xi$ , las soluciones generales de (5.88) y (5.87) son los polinomios completos:

$$v(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad (5.89)$$

$$\theta_z(\xi) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 \quad (5.90)$$

Introduciéndolas en las ecuaciones diferenciales (5.85) y (5.86):

$$\frac{1}{a^2} (2a_2 + 6a_3 \xi) - \frac{1}{a} (b_1 + 2b_2 \xi) = 0 \quad (5.91)$$

$$\frac{\kappa GA}{a} (a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2) + \frac{EI_z}{a^2} (2b_2) - \kappa GA (b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2) = 0 \quad (5.92)$$

Dado que estas condiciones deben ser satisfechas en todo punto del elemento, se deducen

$$b_0 = \frac{1}{a} a_1 + \frac{2\phi}{a} a_3 \quad ; \quad b_1 = \frac{2}{a} a_2 \quad ; \quad b_2 = \frac{3}{a} a_3 \quad (5.93)$$

donde  $\phi$  es el parámetro adimensional definido en (5.74).

Derivando (5.89) y reemplazando (5.93) en (5.90), la expresión de la distorsión por corte, resulta:

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{a} \frac{dv}{d\xi} - \theta_z = -\frac{2\phi a_3}{a} \quad (5.94)$$

Se comprueba que la distorsión es constante a lo largo del elemento, mientras que la deformación por

## VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

flexión varía linealmente. Es razonable esperar entonces que este elemento exhiba un mejor comportamiento para representar los modos flexionales. Las expresiones de los cuatro grados de libertad del elemento son:

$$\begin{aligned} v_1 &= v(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ v_2 &= v(+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \theta_1 &= \theta_z(-1) = (a_1 + 6\phi a_3 - 2a_2 + 3a_3)/a \\ \theta_2 &= \theta_z(+1) = (a_1 + 6\phi a_3 + 2a_2 + 3a_3)/a \end{aligned} \quad (5.95)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales se determinan los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3$  en función de los grados de libertad  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ , y reemplazando en (5.89) y (5.90) se obtiene finalmente:

$$v(\xi) = N_{v1}(\xi)v_1 + N_{v2}(\xi)\theta_1 + N_{v3}(\xi)v_2 + N_{v4}(\xi)\theta_2 = [N_v(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.96)$$

$$\theta(\xi) = N_{\theta1}(\xi)v_1 + N_{\theta2}(\xi)\theta_1 + N_{\theta3}(\xi)v_2 + N_{\theta4}(\xi)\theta_2 = [N_\theta(\xi)]\{\delta_e\} \quad (5.97)$$

donde las ocho funciones de forma son las siguientes:

$$\begin{aligned} N_{v1}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [2(1+\phi) - (3+2\phi)\xi + \xi^3] \\ N_{v2}(\xi) &= \frac{a}{4(1+\phi)} [1+\phi - \xi - (1+\phi)\xi^2 + \xi^3] \\ N_{v3}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [2(1+\phi) + (3+2\phi)\xi - \xi^3] \\ N_{v4}(\xi) &= \frac{a}{4(1+\phi)} [-1-\phi - \xi + (1+\phi)\xi^2 + \xi^3] \\ N_{\theta1}(\xi) &= \frac{3}{4(1+\phi)a} [-1 + \xi^2] \\ N_{\theta2}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1 + 2\phi - 2(1+\phi)\xi + 3\xi^2] \\ N_{\theta3}(\xi) &= \frac{3}{4(1+\phi)a} [1 - \xi^2] = -N_{\theta1}(\xi) \\ N_{\theta4}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1 + 2\phi + 2(1+\phi)\xi + 3\xi^3] \end{aligned} \quad (5.98)$$

En la referencia [17] se deducen las funciones de forma de este mismo elemento, expresadas con la variable  $\xi = x/l$ , ( $0 \leq \xi \leq 1$ ), en lugar de  $\xi = x/a$ , ( $-1 \leq \xi \leq +1$ ).

Se observa que con  $\phi=0$  las funciones de forma (5.98) se reducen a las de la teoría elemental (5.46); y además, en tal caso, las funciones (5.99) son las derivadas:  $N_{\theta j} = \frac{1}{a} \frac{dN_{v j}}{d\xi}$ . Por consiguiente, cuando el parámetro  $\phi$  tiende a cero, este elemento se aproxima al de la viga Bernoulli- Euler.

La distorsión del elemento se expresa:

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{a} \frac{dv}{d\xi} - \theta_z = N_{\gamma1}v_1 + N_{\gamma2}\theta_1 + N_{\gamma3}v_2 + N_{\gamma4}\theta_2 = [N_\gamma] \{\delta_e\} \quad (5.100)$$

$$\text{donde} \quad N_{\gamma1} = -N_{\gamma3} = -\frac{\phi}{2(1+\phi)a}; \quad N_{\gamma2} = N_{\gamma4} = aN_{\gamma1} \quad (5.101 \text{ a,b})$$

Sustituyendo los vectores  $[N_v(\xi)]$  y  $[N_\theta(\xi)]$  en (5.69), y operando, se obtiene la matriz de masa del elemento:

$$[m_e] = C_v \begin{bmatrix} (156+294\phi+140\phi^2) & (44+77\phi+35\phi^2)a & (54+126\phi+70\phi^2) & -(26+63\phi+35\phi^2)a \\ (44+77\phi+35\phi^2)a & (16+28\phi+14\phi^2)a^2 & (26+63\phi+35\phi^2)a & -(12+28\phi+14\phi^2)a^2 \\ (54+126\phi+70\phi^2) & (26+63\phi+35\phi^2)a & (156+294\phi+140\phi^2) & -(44+77\phi+35\phi^2)a \\ -(26+63\phi+35\phi^2)a & -(12+28\phi+14\phi^2)a^2 & -(44+77\phi+35\phi^2)a & (16+28\phi+14\phi^2)a^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ C_\theta \begin{bmatrix} 18 & (3-15\phi)a & -18 & (3-15\phi)a \\ (3-15\phi)a & (8+10\phi+20\phi^2)a^2 & -(3-15\phi)a & -(2+10\phi-10\phi^2)a^2 \\ -18 & -(3-15\phi)a & 18 & -(3-15\phi)a \\ (3-15\phi)a & -(2+10\phi-190\phi^2)a^2 & -(3-15\phi)a & (8+10\phi+20\phi^2)a^2 \end{bmatrix}$$

donde:  $C_v = \frac{\rho A a}{210(1+\phi)^2}$  ;  $C_\theta = \frac{\rho I_z}{30 a (1+\phi)^2}$  (5.103 a,b)

Para obtener la matriz de rigidez se reemplazan los vectores  $[N'_\theta(\xi)]$  y  $[N_\gamma(\xi)]$  en (5.72). Operando, se llega a la siguiente expresión:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{2a^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & (4+\phi)a^2 & -3a & (2-\phi)a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & (2-\phi)a^2 & -3a & (4+\phi)a^2 \end{bmatrix}$$
 (5.104)

Con  $\phi = 0$  esta matriz de rigidez coincide con (5.53) de la viga Bernoulli-Euler. Análogamente, con  $\phi = 0$  e  $I_z = 0$  la matriz de masa (5.102) se reduce a la forma (5.49).

El elemento cúbico-cuadrático de 2 nodos se implementó en el mismo programa BRFVT-Q. Para la edición de los archivos de datos puede utilizarse el programa ED-BRFVT. En la siguiente tabla se transcriben los resultados hallados con modelos de  $n$  elementos de igual longitud ( $2a = L/n$ ).

Tabla 5.3.8: Valores de  $\Omega$ . Viga articulada-articulada ( $r_z/L=0.1$ ;  $\kappa=0.85$ ;  $\nu=0.3$ ).

$n$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_{c-f}$
5	10	8.4343	26.260	48.545	60.134
6	12	8.4251	26.015	47.317	59.265
7	14	8.4197	25.868	46.552	58.726
8	16	8.4161	25.772	46.050	58.371
9	18	8.4136	25.707	45.704	58.124
10	20	8.4120	25.660	45.456	57.946
20	40	8.4065	25.511	44.664	57.371
30	60	8.4059	25.484	44.518	57.263
40	80	8.4073	25.475	44.467	57.226
50	100	8.4054	25.470	44.443	57.209
50*	100	8.4050	25.470	44.443	57.208
100*	200	8.4047	25.464	44.411	57.185
200*	400	8.4047	25.462	44.403	57.179
300*	600	8.4047	25.462	44.402	57.178
400*	800	8.4047	25.462	44.401	57.178
500*	1000	8.4047	25.462	44.401	57.177
Solución exacta		8.4047	25.462	44.401	57.177

\* con doble precisión (programa BRFVT-Q#).

Los valores de  $\Omega_{c-f}$  corresponden a modos de vibración con predominio de la deformación por corte

VIBRACIONES DE BARRAS RECTAS

frente a la flexional ( $\Omega_1, \Omega_2$  y  $\Omega_3$  corresponden a modos esencialmente de flexión). A medida que aumenta el número de elementos ( $n$ ), se incrementa dicho predominio, observándose la convergencia hacia el modo de corte puro (con solución exacta  $\Omega_c = 57.1771875$ ). En los modos netamente flexionales se observa un grado de convergencia mayor que con el elemento lineal-lineal, pero inferior a la alcanzada con el elemento cuadrático de 3 nodos. No obstante, presenta la importante ventaja de asegurar que no se produce el temido bloqueo por corte. Para comparar el comportamiento de ambos elementos al aumentar la esbeltez de la barra, se hallaron las primeras cuatro frecuencias de la viga articulada-articulada, en cada caso con cuatro modelos que tienen los mismos grados de libertad. En la Tabla 5.3.9 se muestran los resultados obtenidos con el programa BRVFT-Q# (doble precisión).

Tabla 5.3.9: Valores de  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$ . Viga articulada-articulada ( $\kappa=0.85; \nu=0.3$ ).

$r_z/L$	GDL	$\Omega_1$		$\Omega_2$		$\Omega_3$		$\Omega_4$	
		EVT3N	EVT2N	EVT3N	EVT2N	EVT3N	EVT2N	EVT3N	EVT2N
$10^{-1}$	200	8.40466	8.40474	25.4617	25.4637	44.4006	44.4110	57.1772	57.1850
	400	8.40466	8.40467	25.4617	25.4618	44.4005	44.4012	57.1772	57.1777
	800	8.40466	8.40467	25.4617	25.4618	44.4005	44.4008	57.1772	57.1774
	1200	8.40466	8.40466	25.4617	25.4617	44.4005	44.4008	57.1772	57.1774
$10^{-2}$	200	9.84994	9.84991	39.1673	39.1669	87.2800	87.2779	153.145	153.140
	400	9.84991	9.84991	39.1668	39.1668	87.2772	87.2773	153.136	153.137
	800	9.84991	9.84991	39.1668	39.1668	87.2771	87.2771	153.136	153.136
	1200	9.84991	9.84991	39.1668	39.1668	87.2771	87.2771	153.136	153.136
$10^{-3}$	200	9.87052	9.86941	39.4931	39.4753	88.9006	88.8104	158.148	157.863
	400	9.86955	9.86941	39.4775	39.4753	88.8220	88.8104	157.900	157.863
	800	9.86942	9.86941	39.4754	39.4753	88.8114	88.8104	157.866	157.863
	1200	9.86941	9.86941	39.4753	39.4753	88.8106	88.8104	157.864	157.863
$10^{-4}$	200	9.87122	9.86960	39.5043	39.4784	88.9573	88.8263	158.328	157.913
	400	9.87000	9.86960	39.4848	39.4784	88.8586	88.8263	158.015	157.913
	800	9.86972	9.86960	39.4799	39.4784	88.8339	88.8263	157.937	157.913
	1200	9.86964	9.86960	39.4790	39.4784	88.8294	88.8263	157.923	157.913
S.exacta (BE)		$\pi^2 = 9.869604$		$(2\pi)^2 = 39.47843$		$(3\pi)^2 = 88.82644$		$(4\pi)^2 = 157.9137$	

De la observación de los resultados numéricos se deduce que en vigas muy robustas ( $r_z/L = 0.1$ ) el elemento de 3 nodos exhibe mejor convergencia. Al aumentar la esbeltez se manifiesta la superioridad del elemento cúbico-cuadrático de 2 nodos, tanto en la rapidez de convergencia como en la cualidad de aproximarse a la solución de la teoría de Bernoulli-Euler.

El algoritmo con elemento cúbico-cuadrático descrito en esta sección, ha sido utilizado en diversos trabajos de interés práctico con vigas de sección variable, vínculos elásticos y masas concentradas, habiéndose obtenido excelentes resultados [20, 21, 22].

# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 6. VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

### 6.1 Introducción

El análisis del comportamiento dinámico de una estructura constituida por barras rectas puede llevarse a cabo utilizando los elementos estudiados en el capítulo anterior. Con la hipótesis de los desplazamientos muy pequeños (“infinitésimos”) los desplazamientos transversales no producen deformaciones axiales (el aumento de la longitud de la barra es un infinitésimo de orden superior), y por ende ambos movimientos resultan desacoplados. El esquema estructural de barras más simple es el *reticulado plano*, el cual se compone de barras rectas contenidas en un plano, unidas en sus extremos con articulaciones. Para el caso de *entramados planos*, donde las barras se unen rígidamente en sus extremos, se hace posible utilizar elementos con propiedades inerciales y de rigidez elástica que surgen de combinar elementos axiales con los deformables por flexión (vigas), como se muestra esquemáticamente en la Figura 6.1.1(a), donde el plano del entramado es el coordenado  $x$ - $y$ , de ahora en más denominado *sistema global* de referencia.

Análogamente, con la combinación de elementos torsionales y flexionales, para vigas con flexión en el plano  $x$ - $z$ , se obtiene un elemento para emparrillados ubicados en el plano  $x$ - $y$ , como se muestra en la Figura 6.1.1(b). Finalmente, la combinación de dos elementos flexionales con desplazamientos transversales ortogonales (direcciones principales de la sección) con uno longitudinal y otro torsional, produce un elemento para estructuras de entramados espaciales (tridimensionales), como se muestra en la Figura 6.1.1(c).

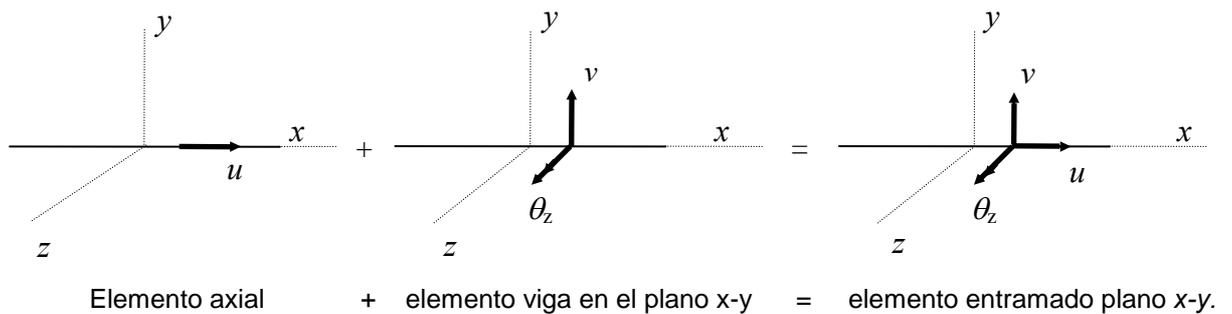


Figura 6.1.1(a): Generación de un elemento de barra para entramados planos.

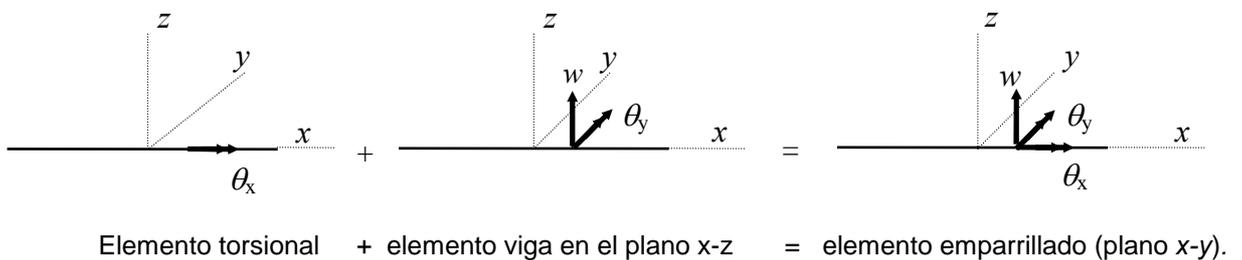


Figura 6.1.1(b): Generación de un elemento de barra para emparrillados.

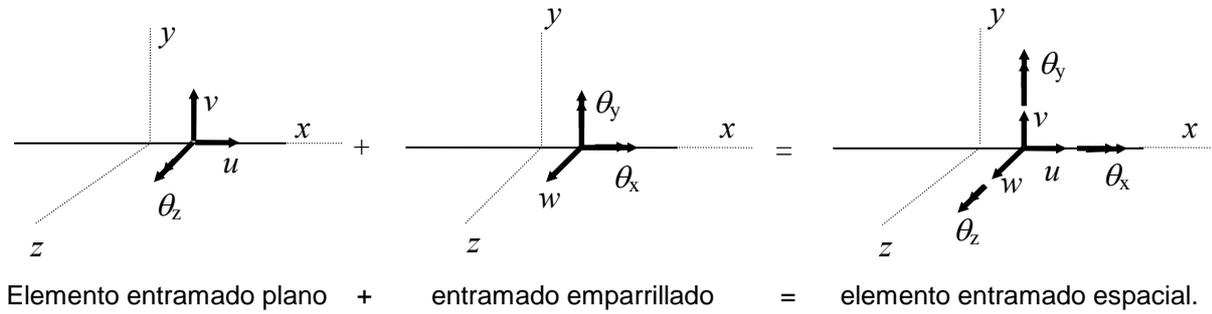


Figura 6.1.1(c): Generación de un elemento de barra para entramado espacial (3D).

A continuación se desarrolla la formulación de un algoritmo para el análisis de vibraciones libres de entramados planos.

### 6.2 Reticulados planos

Se denominan reticulados a las estructuras de barras rectas, unidas mediante articulaciones en modelos planos (2D) y con rótulas en modelos espaciales (3D). Cuando las vibraciones del reticulado se producen sin deformaciones flexionales de sus barras, éstas se modelan con el elemento uniaxial de dos nodos estudiado en la Sección 5.1.1. Para el desarrollo del algoritmo se puede recurrir a las matrices de masa (5.10) y de rigidez (5.14) deducidas en dicha sección, referidas al eje local  $\mathbf{x}$  del elemento (Figura 6.2.1), las cuales deben ser transformadas para ser referidas al sistema de coordenadas globales  $x$ - $y$ .

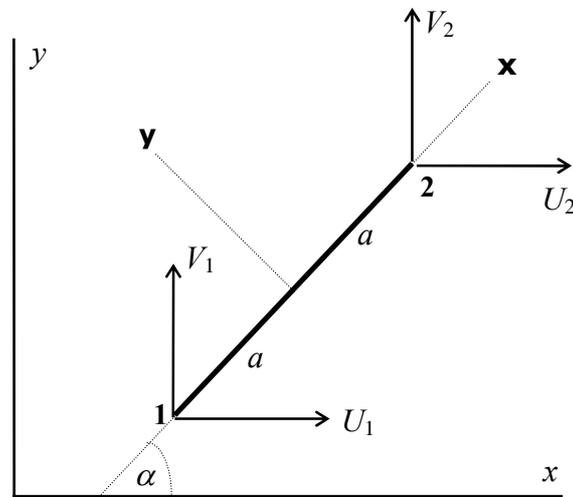


Figura 6.2.1: Elemento de reticulado plano en posición oblicua.

El vector de los desplazamientos globales de los nodos 1 y 2 del elemento es:

$$\{\Delta_e\}^t = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2] \quad (6.1)$$

Por definición, el elemento uniaxial sólo tiene rigidez axial, es decir que aplica fuerzas elásticas sobre los nodos cuando se deforma, o sea cuando varía su longitud ( $u_1 \neq u_2$ ), pero no cuando sus nodos tienen desplazamientos infinitesimos (muy pequeños) en la dirección del eje local  $\mathbf{y}$ . Para referir la matriz de rigidez al sistema global, se utilizan las expresiones de los desplazamientos locales en función de los globales:

$$u_1 = U_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha ; \quad u_2 = U_2 \cos \alpha + V_2 \sin \alpha \quad (6.2)$$

Con notación matricial se tiene:

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = [R] \{A_e\} \quad (6.3)$$

En el sistema local de referencia, la energía de deformación elástica se expresa:  $U_e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [k_e] \{\delta_e\}$  donde  $[k_e]$  viene dada por (5.14). Reemplazando (6.3) se tiene:

$$U_e = \frac{1}{2} \{A_e\}^t [R]^t [k_e] [R] \{A_e\} = \frac{1}{2} \{A_e\}^t [K_e] \{A_e\}$$

En consecuencia, la matriz de rigidez referida al sistema global se obtiene con  $[K_e] = [R]^t [k_e] [R]$  (6.4)

Operando:

$$[K_e] = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & \operatorname{sen}^2 \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & -\operatorname{sen}^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & -\operatorname{sen}^2 \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & \operatorname{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Cabe aclarar que esta matriz de cuarto orden es singular con rango igual a la unidad, el mismo rango de la matriz de segundo orden referida al sistema local.

Para hallar la matriz de masa  $[M_e]$  referida al sistema global hay que tener en cuenta que el efecto de la masa del elemento se manifiesta no sólo en la dirección axial, sino en ambas direcciones locales, axial y transversal. En un desplazamiento transversal del elemento, manteniendo la forma rectilínea, la función  $v(\xi)$  es lineal. De modo que las funciones de forma para  $v(\xi)$  son las mismas que se utilizan con  $u(\xi)$ . En consecuencia, la misma matriz dada en (5.10) se aplica con los desplazamientos nodales transversales. Luego, la matriz de masa del elemento, referida al sistema local, es:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

donde el ordenamiento de filas y columnas corresponde al vector  $\{\delta_e\}^t = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2]$ .

Por otra parte, en virtud de que el comportamiento inercial del elemento en la dirección transversal es el mismo que en la axial, la expresión (6.6) no cambia cuando la matriz de masa se refiere a otras direcciones ortogonales, en particular las globales, lo cual se comprueba al aplicar el algoritmo de rotación de ejes de referencia. Para ello son necesarias las expresiones de los desplazamientos nodales transversales ( $v_1$  y  $v_2$ ) en función de los desplazamientos globales ( $U_1, V_1, U_2, V_2$ ):

$$v_1 = -U_1 \operatorname{sen} \alpha + V_1 \cos \alpha \quad ; \quad v_2 = -U_2 \operatorname{sen} \alpha + V_2 \cos \alpha \quad (6.7)$$

Agrupando con (6.2) ahora se tiene:

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = [R] \{A_e\} \quad (6.8)$$

En el sistema local de referencia, la energía cinética del elemento se expresa:  $T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t [m_e] \{\dot{\delta}_e\}$ .

Derivando (6.8) con respecto al tiempo y reemplazando, se obtiene:

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{A}_e\}^t [R]^t [m_e] [R] \{\dot{A}_e\} = \frac{1}{2} \{\dot{A}_e\}^t [M_e] \{\dot{A}_e\}$$

Se deduce que la matriz masa en el sistema global se calcula con  $[M_e] = [R]^t [m_e] [R]$ , donde  $[R]$  es la matriz de rotación de cuarto orden en (6.8). Operando, se reproduce la misma matriz (6.6).

Como se explicó en la Sección 5.1.1, la matriz (6.6) es *consistente*, porque se obtiene a partir de las funciones interpolantes del elemento. Otra forma de tener en cuenta el efecto de la masa distribuida, es concentrar en los nodos la mitad de la masa total. En tal caso, la matriz masa en el sistema local es diagonal:

$$[\tilde{m}_e] = [\tilde{M}_e] = \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Se denomina matriz *de masas desacopladas* o matriz *no consistente*. Obviamente, su expresión no depende de la orientación del elemento. Por esta razón, también se aplica en el sistema global.

A diferencia con los modelos para vibraciones longitudinales, o transversales (vigas), donde la numeración global de los nodos era naturalmente secuencial, ahora se presentan modelos con elementos cuyos nodos se identifican, en el sistema global de referencia, con números en general no consecutivos (en forma genérica:  $i$  y  $j$ ), dando lugar a un ancho de banda mayor, ya que en el vector global  $\{\Delta\}$  que agrupa los desplazamientos globales de todos los nodos, entre los grados de libertad  $U_{2i}$  ( $V_1$  en el sistema local, ver Figura 6.2.1) y  $U_{2j-1}$  ( $U_2$  en el sistema local) se intercalan  $2(|j-i|-1)$  componentes. Por consiguiente, las cuatro submatrices de segundo orden en que pueden ser particionadas  $[M_e]$  y  $[K_e]$ , al efectuar el ensamblaje quedan separadas por  $(|j-i|-1)$  submatrices nulas de segundo orden. Se deduce así que el ancho de banda en  $[M]$  y  $[K]$  resulta  $ab = 2+2(|j-i|-1)+2 = 2(|j-i|+1)$ , donde el factor 2 corresponde a los dos grados de libertad que tiene cada nodo. En general, si  $ngn$  es el número de grados de libertad de cada nodo, el ancho de banda se calcula con  $ab = ngn(|j-i|+1)$ , donde  $|j-i|$  es la mayor diferencia, en valor absoluto, que se produce con los índices de los nodos de un mismo elemento, tomando en cuenta, para su cálculo, todos los elementos del modelo. La influencia de la numeración global de los nodos del modelo, en el ancho de banda de las matrices, será mostrado en la Sección 6.4 para el caso de un entramado plano.

La implementación del algoritmo, tanto con la matriz masa (6.6) como con (6.9), se realizó en el programa REPLA (**RE**ticulados **PL**anos), compilado con QuickBasic, con simple y doble precisión. En los archivos REPLA.RTF y REPLA.TXT se dan las instrucciones para editar los archivos de datos de modelos estructurales de este tipo. El archivo de datos también puede ser editado con el programa ED-REPLA, que interactúa con el usuario requiriéndole el ingreso, por teclado, de los datos del modelo. Por otra parte, el programa PP-REPLA produce un gráfico del modelo en la pantalla del monitor, y si el modelo ha sido resuelto, muestra las formas modales y los respectivos valores de la frecuencia.

Cada barra del reticulado debe ser modelada con un solo elemento, vale decir que el modelo no debe tener nodos que no sean nudos (vértices) del reticulado. En la primera línea del archivo de datos debe ir la cadena de caracteres REPLA para que el programa lo reconozca como reticulado plano. En las condiciones de vínculo se excluye la restricción RZ, ya que la rotación nodal no existe como grado de libertad. Las propiedades de los elementos son tres:  $A$ ,  $E$  y  $\rho$ . Con este programa se obtuvieron frecuencias naturales del reticulado de la Figura 6.2.2, compuesto de 41 barras (elementos) y 22 nudos. Las propiedades mecánicas de todas las barras son:  $E = 206e9$  GP/m<sup>2</sup>,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Las barras del cordón superior tienen la misma sección, con un área de 50cm<sup>2</sup>; las del cordón inferior, 35cm<sup>2</sup>; las barras verticales (montantes), 20cm<sup>2</sup>; y las inclinadas (diagonales), 15cm<sup>2</sup>.

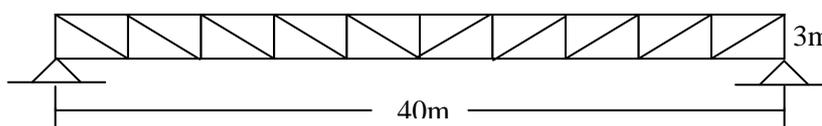


Figura 6.2.2: Reticulado plano de 41 barras y 22 nudos.

Operando el programa con doble precisión, se obtuvieron los siguientes valores de las primeras cinco frecuencias naturales, medidas en Hz:  $f_1 = 6.4281$ ;  $f_2 = 16.6294$ ;  $f_3 = 29.9882$ ;  $f_4 = 32.6329$ ;  $f_5 = 43.4169$ . Si se opta por procesar el modelo utilizando la matriz masa no consistente (masas desacopladas), los resultados son:  $f_1 = 6.3799$ ;  $f_2 = 16.1785$ ;  $f_3 = 28.2461$ ;  $f_4 = 32.2734$ ;  $f_5 = 39.2283$ , valores que fueron verificados con el software Algor Professional Mech, Versión 12 (2002). Se comprueba que la diferencia de resultados entre ambas formulaciones de la matriz masa aumenta con el orden de las frecuencias. En la frecuencia fundamental es de 0.75%, mientras que en el quinto modo de vibración llega al 9.65%.

Es importante aclarar que el programa calcula frecuencias naturales de la estructura reticulada como tal, de modo que durante las oscilaciones todas las barras permanecen rectas. Es obvio que las barras podrían vibrar con modos de flexión, posibilidad que no puede ser analizada con el programa REPLA.

### 6.3 Reticulados espaciales

El algoritmo para reticulados espaciales es similar al de reticulados planos, siendo muy sencilla su implementación en un programa de computación, introduciendo algunas modificaciones al utilizado para reticulados planos.

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

La orientación longitudinal del elemento uniaxial de dos nodos, se describe con los tres *cosenos directores* del versor dirigido desde el nodo local **1** (nodo izquierdo) hacia el **2** (nodo derecho). Se calculan a partir de las coordenadas globales de los extremos del elemento:

$$\cos\alpha_x = (x_2 - x_1)/l ; \quad \cos\alpha_y = (y_2 - y_1)/l ; \quad \cos\alpha_z = (z_2 - z_1)/l \quad (6.10)$$

$$\text{donde } l \text{ es la longitud del elemento: } l = 2a = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2} \quad (6.11)$$

Con los cosenos directores se expresan los dos desplazamientos nodales locales en función de los seis globales:  $u_1 = U_1 \cos\alpha_x + V_1 \cos\alpha_y + W_1 \cos\alpha_z$  ;  $u_2 = U_2 \cos\alpha_x + V_2 \cos\alpha_y + W_2 \cos\alpha_z$

Con notación matricial:

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} = [R] \{A_e\} \quad (6.12)$$

Aplicando la transformación (6.4) se obtiene la matriz de rigidez del elemento, referida al sistema global:

$$[K_e] = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z & -C_y C_x & -C_y^2 & -C_y C_z \\ C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 & -C_z C_x & -C_z C_y & -C_z^2 \\ -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ -C_y C_x & -C_y^2 & -C_y C_z & C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z \\ -C_z C_x & -C_z C_y & -C_z^2 & C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\text{donde: } C_x = \cos\alpha_x ; \quad C_y = \cos\alpha_y ; \quad C_z = \cos\alpha_z$$

Por otra parte, de acuerdo con lo explicado al desarrollar el algoritmo para reticulados planos, las propiedades inerciales del elemento en dos direcciones transversales ortogonales, son las mismas que en la dirección axial. Por ende, la matriz masa consistente, tanto en un sistema local como en el global, es:

$$[m_e] = [M_e] = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Cuando la masa distribuida en el elemento se concentra por partes iguales en sus extremos, se obtiene la matriz masa no consistente:

$$[\tilde{m}_e] = [\tilde{M}_e] = \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Con estas matrices se codificó el programa REESP (**RE**ticulado **ESP**acial), compilado con QuickBasic con simple y doble precisión. Las instrucciones para editar los archivos de datos se pueden ver en los documentos REESP.TXT y REESP.RTF. También se cuenta con el programa ED-REESP que en forma interactiva requiere el ingreso, por el teclado, de los datos del modelo, y graba el archivo de datos en la carpeta de trabajo. El programa PP-REESP muestra sucesivamente, en la pantalla del monitor, los gráficos de las proyecciones del reticulado sobre los planos coordenados globales y una vista en perspectiva. Además, si las frecuencias ya han sido calculadas, también produce gráficos de los modos de vibración.

Con el programa REESP-Q# se obtuvieron las primeras tres diferentes frecuencias del reticulado de dos capas mostrado en la Figura 6.3.1, compuesto de 38 barras y 13 nudos. Se encuentra vinculado con un apoyo fijo en cada vértice de la capa inferior. Todas las barras tienen sección con área  $A = 12\text{cm}^2$ , y propiedades del material  $E = 206\text{e}9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Cuando el programa opera con la matriz masa consistente, los resultados son:  $f_1 = 44.3984 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = f_3 = 53.0733 \text{ Hz}$  y  $f_4 = f_5 = 64.0186 \text{ Hz}$ . Si el cálculo se realiza optando por la matriz de masas desacopladas, se obtiene:  $f_1 = 42.9261 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = f_3 = 45.7237 \text{ Hz}$  y  $f_4 = f_5 = 59.6517 \text{ Hz}$ . Estos últimos valores también fueron verificados con el software Algor Professional Mech.

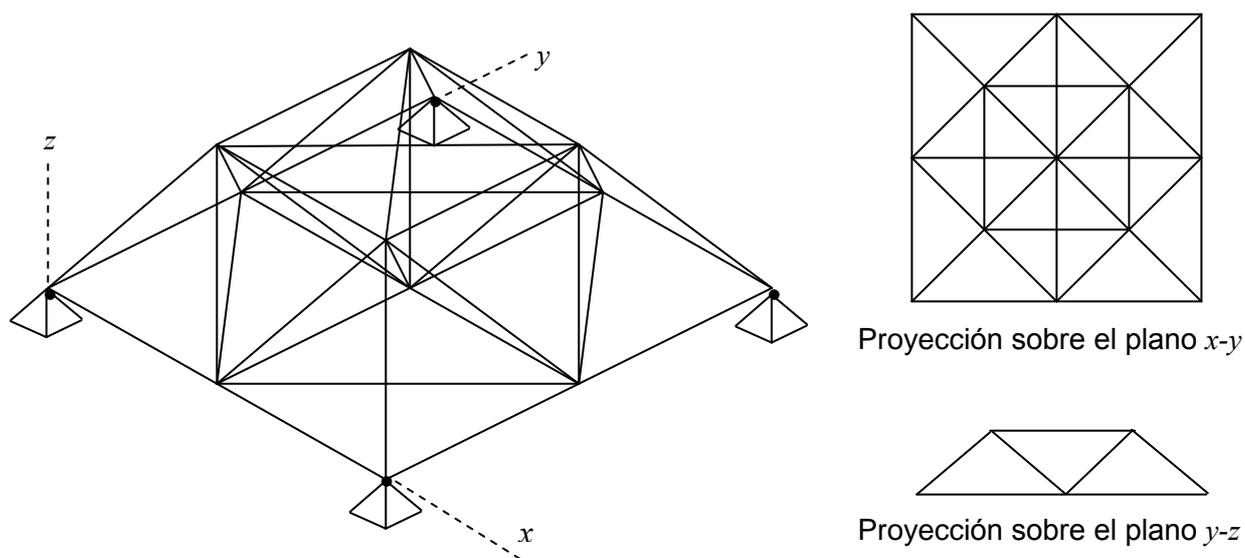


Figura 6.3.1: Reticulado espacial de dos capas, con 38 barras y 13 nudos.

#### 6.4 Entramados planos

El elemento más simple consiste en combinar el uniaxial de dos nodos (deformación axial constante) con el elemento de dos nodos para vigas (Figuras 5.1.1 y 5.3.1). En consecuencia, el vector de los desplazamientos nodales tiene seis componentes (Figura 6.4.1):

$$\{\delta_e\}^t = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (6.16)$$

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

El desplazamiento transversal  $v(x)$  se aproxima mediante un polinomio cúbico, pudiéndose emplear tanto el elemento tipo Bernoulli-Euler como el cúbico-cuadrático del tipo viga Timoshenko.

Utilizando la teoría elemental de Bernoulli-Euler, la matriz de masa del elemento se obtiene sumando

(5.10) y (5.49), previamente expandidas a matrices de seis filas y seis columnas:

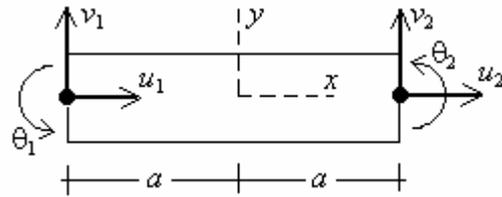


Figura 6.4.1: Elemento de entramado plano.

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 22a & 0 & 27 & -13a \\ 0 & 22a & 8a^2 & 0 & 13a & -6a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 13a & 0 & 78 & -22a \\ 0 & -13a & -6a^2 & 0 & -22a & 8a^2 \end{bmatrix} = \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 22a & 0 & 27 & -13a \\ 0 & 22a & 8a^2 & 0 & 13a & -6a^2 \\ 35 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 13a & 0 & 78 & -22a \\ 0 & -13a & -6a^2 & 0 & -22a & 8a^2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Análogamente, la matriz de rigidez resulta de sumar (5.14) y (5.53):

$$[k_e] = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI_z}{2a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3a & 0 & -3 & 3a \\ 0 & 3a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3a & 0 & 3 & -3a \\ 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} = \quad (6.18)$$

$$= \frac{EI_z}{2a^3} \begin{bmatrix} (a/r_z)^2 & 0 & 0 & -(a/r_z)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3a & 0 & -3 & 3a \\ 0 & 3a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 \\ -(a/r_z)^2 & 0 & 0 & (a/r_z)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3a & 0 & 3 & -3a \\ 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } r_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

Obviamente, si se suman las matrices (5.10) y (5.102) se obtiene la matriz de masa de otro elemento de dos nodos en el cual se incluye la inercia rotatoria de las secciones; y sumando (5.14) y (5.104) se encuentra la correspondiente matriz de rigidez que tiene en cuenta el efecto del esfuerzo de corte. Por consiguiente, un código de computación para procesar un entramado con el elemento viga-columna tipo Bernoulli-Euler de dos nodos, con muy pocas modificaciones se adapta para utilizar el elemento viga-columna tipo Timoshenko de dos nodos.

El paso siguiente consiste en hallar las expresiones de las matrices de masa y de rigidez del elemento de dos nodos, ambas referidas al sistema global de coordenadas. En la Figura 6.4.2 se muestra un elemento

genérico, donde el eje local  $\mathbf{x}$  forma un ángulo  $\alpha$  con el eje global  $x$ . Dado que el eje global  $z$  tiene la misma dirección que el eje local  $\mathbf{z}$ , las rotaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  no requieren ser modificadas. El vector de los desplazamientos globales de los nodos locales **1** y **2** del elemento, es:

$$\{\Delta_e\}^t = [U_1 \quad V_1 \quad \theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \theta_2] \quad (6.19)$$

Los desplazamientos locales se expresan en función de los globales con:

$$u_1 = U_1 \cos \alpha + V_1 \sen \alpha ; \quad v_1 = -U_1 \sen \alpha + V_1 \cos \alpha$$

$$u_2 = U_2 \cos \alpha + V_2 \sen \alpha ; \quad v_2 = -U_2 \sen \alpha + V_2 \cos \alpha$$

Con notación matricial se tiene:

$$\{\delta_e\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sen \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sen \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sen \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sen \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [R]\{\Delta_e\} \quad (6.20)$$

En el sistema local de referencia las energías se expresan:

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t [m_e] \{\dot{\delta}_e\} ; \quad U_e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [k_e] \{\delta_e\}$$

donde  $[m_e]$  y  $[k_e]$  vienen dadas por (6.17) y (6.18), respectivamente.

Reemplazando  $\{\delta_e\} = [R]\{\Delta_e\}$  y  $\{\dot{\delta}_e\} = [R]\{\dot{\Delta}_e\}$  en las expresiones de  $U_e$  y  $T_e$ , respectivamente, se tiene:

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\Delta}_e\}^t [R]^t [m_e] [R] \{\dot{\Delta}_e\} = \frac{1}{2} \{\dot{\Delta}_e\}^t [M_e] \{\dot{\Delta}_e\}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{\Delta_e\}^t [R]^t [k_e] [R] \{\Delta_e\} = \frac{1}{2} \{\Delta_e\}^t [K_e] \{\Delta_e\}$$

Se deduce que las matrices referidas al sistema global de coordenadas, se obtienen con:

$$[M_e] = [R]^t [m_e] [R] ; \quad [K_e] = [R]^t [k_e] [R] \quad (6.21a,b)$$

Obviamente, la matriz  $[M_e]$  continúa siendo positiva definida y  $[K_e]$  positiva semidefinida y del mismo rango que  $[k_e]$ .

Cada barra de la estructura se divide en un número apropiado de elementos (en el caso más simple, cada barra es un elemento), y se transforman las expresiones de las energías para ponerlas en función de los grados de libertad referidos a un sistema global de coordenadas. Las matrices  $[M_e]$  y  $[K_e]$  de todos los

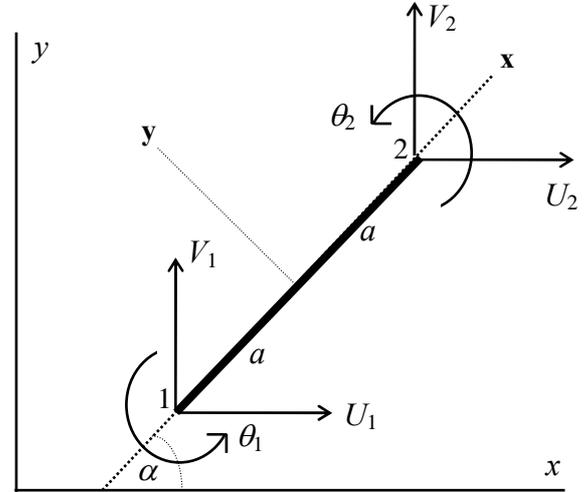


Figura 6.4.2: Elemento de entramado plano en posición oblicua.

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

elementos del modelo se ensamblan en la forma conocida, para hallar las matrices  $[M]$  y  $[K]$  con las cuales las energías del modelo estructural se expresan:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\Delta}\}^t [M] \{\dot{\Delta}\} \quad (6.22)$$

$$U = \frac{1}{2} \{\Delta\}^t [K] \{\Delta\}$$

En la Figura 6.4.3 se muestra la notación utilizada en la codificación de los algoritmos matriciales, en los programas desarrollados en este curso, para identificar los grados de libertad globales de los nodos  $i$  y  $j$  de un elemento genérico, agrupados en el vector  $\{\Delta\}$ .

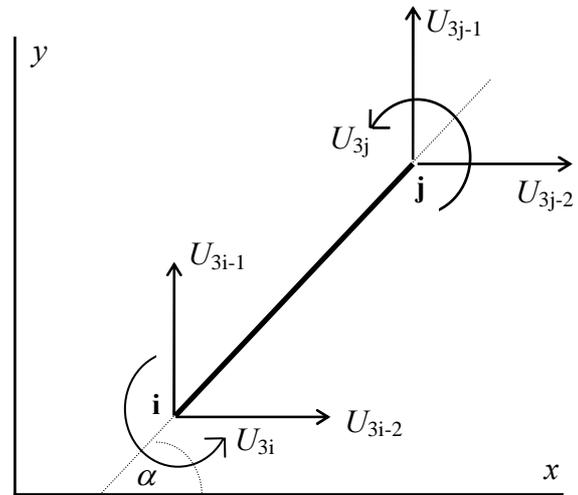


Figura 6.4.3: Desplazamientos globales.

A diferencia con los modelos para vibraciones

longitudinales, o transversales (vigas), donde la numeración global de los dos nodos de cada elemento era naturalmente secuencial, ahora se presentan modelos cuyos nodos, del mismo modo que en el caso de reticulados, se identifican con números en general no consecutivos (en forma genérica:  $i$  y  $j$ ), dando lugar a un ancho de banda mayor que se calcula con la expresión  $ab = 3 + 3(|j-i|-1) + 3 = 3(|j-i|+1)$ , donde el factor 3 corresponde a los tres grados de libertad de cada nodo. En la Figura 6.4.4 se muestra una viga Vierendel modelada con un elemento por barra. En el esquema (a) la numeración global de los 18 nodos produce un ancho de banda  $ab = 3(9+1) = 30$ , mientras que con el esquema (b) se logra el mínimo posible para este caso:  $ab = 3(2+1) = 9$ .

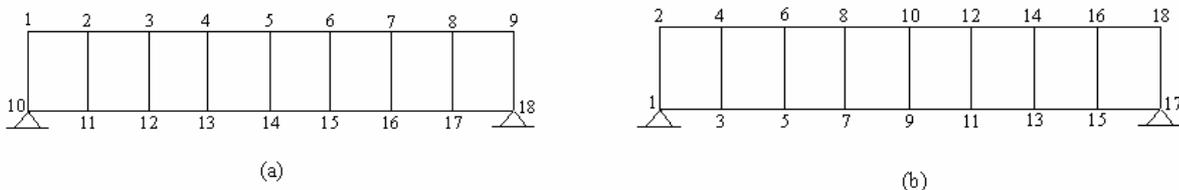


Figura 6.4.4: Dos numeraciones globales de los nodos de un modelo de viga Vierendel.

Una vez realizado el ensamblaje, las matrices  $[M]$  y  $[K]$  son reducidas (o modificadas) con las condiciones de vínculo, que consisten en imponer la nulidad de componentes globales de Es conveniente aclarar que al utilizar los programas de computación, los desplazamientos globales en cada nodo se indican DX, DY y RZ (dos desplazamientos de traslación y una rotación).

los desplazamientos nodales.

Sin embargo, en los modelos de reticulados y entramados planos es frecuente encontrar vínculos que suprimen los desplazamientos en direcciones oblicuas con respecto a las globales. En la Figura 6.4.5 se

muestra el esquema consistente de un apoyo móvil (biela) que forma un ángulo  $\varphi$  con el eje global  $x$ .

La condición de vínculo se expresa:

$$U'_{3i-2} = U_{3i-2} \cos \varphi + U_{3i-1} \sin \varphi = 0 \quad (6.23)$$

la cual es una relación lineal del mismo tipo que la considerada en (5.40) en el algoritmo de vibraciones torsionales. La diferencia estriba en la forma de ingresar los datos, ya que ahora se considera más conveniente dar el índice del nodo vinculado y el valor del ángulo  $\varphi$  (en grados sexagesimales, en el rango  $-360^0 \leq \varphi \leq +360^0$ ). En consecuencia, es más apropiado adoptar un algoritmo aplicando una rotación de ejes en el nodo vinculado. Si  $U'_{3i-1}$  y  $U'_{3i-2}$  son las componentes referidas al par  $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ , de acuerdo con la

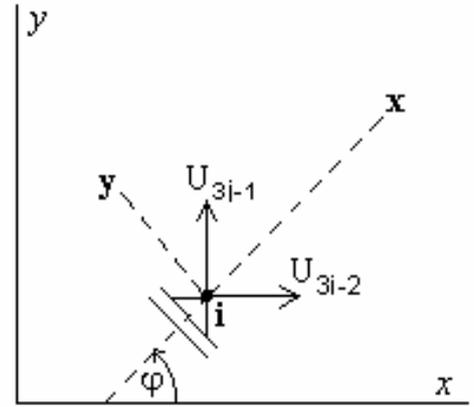


Figura 6.4.5: Esquema de biela oblicua.

Figura 6.4.5 se tiene:

$$U_{3i-2} = U'_{3i-2} \cos \varphi - U'_{3i-1} \sin \varphi; \quad U_{3i-1} = U'_{3i-2} \sin \varphi + U'_{3i-1} \cos \varphi \quad (6.24)$$

Con notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U'_{3i-2} \\ U'_{3i-1} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Expandiendo ambos vectores con las restantes componentes del vector  $\{\Delta\}$  del modelo, y la matriz de rotación con filas y columnas nulas excepto en la diagonal principal, que se hace igual a la unidad, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{3n-1} \\ U_{3n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cos \varphi & -\sin \varphi & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sin \varphi & \cos \varphi & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U'_{3i-2} \\ U'_{3i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{3n-1} \\ U_{3n} \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

donde  $n$  es el número total de nodos del modelo estructural. En símbolos:  $\{\Delta\} = [r] \{\Delta'\}$  (6.27)

Sustituyendo en (6.22) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \{\Delta'\}^t [r]^t [M] [r] \{\Delta'\} = \frac{1}{2} \{\Delta'\}^t [\bar{M}] \{\Delta'\} \quad (6.28)$$

$$U = \frac{1}{2} \{\Delta'\}^t [r]^t [K] [r] \{\Delta'\} = \frac{1}{2} \{\Delta'\}^t [\bar{K}] \{\Delta'\} \quad (6.29)$$

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

Ahora es posible eliminar la fila y columna  $3i-2$  en las matrices  $[\overline{M}]$  y  $[\overline{K}]$ , lo cual implica suprimir la componente  $U'_{3i-2}$  (dirección del eje  $\mathbf{x}$  en la Figura 6.4.5). Las componentes  $U_{3i-2}$  y  $U_{3i-1}$  pueden ser calculadas luego con (6.24).

En un código de computación no es necesario implementar las transformaciones representadas por las fórmulas (6.28) y (6.29) generando la matriz  $[r]$ , sino que simplemente se opera sobre las filas y columnas  $3i-2$  y  $3i-1$ , que son las únicas afectadas por dicha transformación. En resumen, el algoritmo se reduce a:

- 1) la fila (y columna)  $3i-1$  se modifica multiplicando sus componentes por  $\cos\varphi$  y restándoles el producto de las respectivas componentes de la fila (y columna)  $3i-2$  por  $\sin\varphi$ .
- 2) Se eliminan la fila y columna  $3i-2$  en ambas matrices; o bien se modifica la componente de la diagonal principal de la matriz  $[\overline{K}]$  reemplazándola con un número muy grande (por ejemplo  $10^{20}$ ), procedimiento computacional conocido como *penalty approach* [5]. En los programas preparados para este curso, las restricciones se aplican con reducción de las matrices.

Un algoritmo similar podría ser desarrollado combinando el elemento longitudinal de tres nodos con el de flexión de tres nodos, para obtener un elemento viga-columna de tres nodos. Los pasos algebraicos de este desarrollo son omitidos, ya que conceptualmente no aportan nada nuevo.

Los programas ENPLA-Q! y ENPLA-Q# (**EN**tramados **PLA**nos), incluidos en el CD-ROM, procesan modelos de entramados planos de barras rectas solamente con elementos de dos nodos, con opción del elemento Bernoulli-Euler o el cúbico-cuadrático de Timoshenko. Para un mismo modelo estructural los archivos de datos sólo difieren en los valores del módulo de elasticidad transversal del material y del factor de corte de la sección, ambos nulos cuando se opta por el elemento Bernoulli-Euler (ver instrucciones en los respectivos archivos con extensión TXT o RTF). En el CD-ROM se incluyen también los programas utilitarios, ED-ENPLA que facilita la edición de los archivos de datos de los modelos, y el de pos-proceso, PP-ENPLA, que produce gráficos de los modos naturales de vibración libre.

En la Figura 6.4.6(a) se muestra un pórtico en el que se cumple la simetría con respecto al eje s-s.

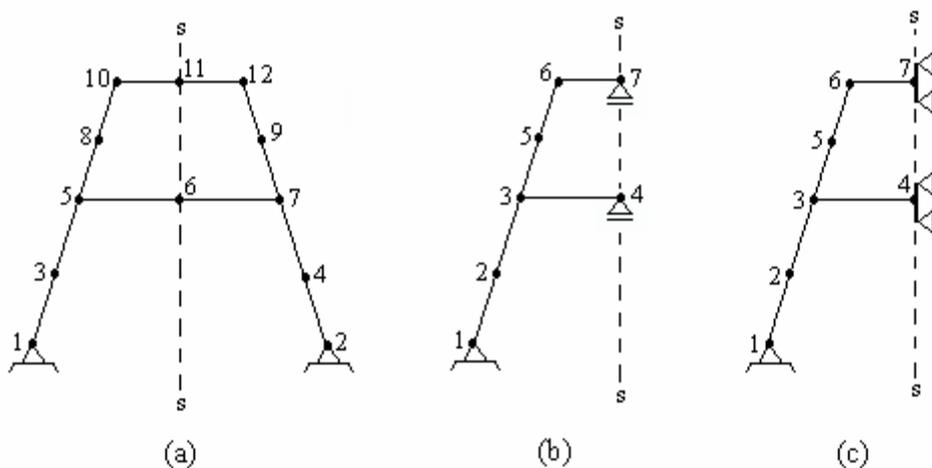
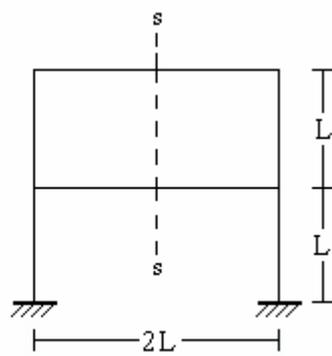


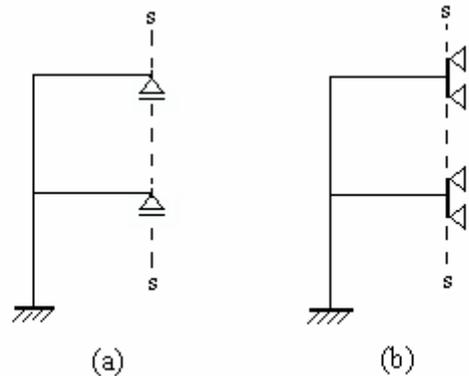
Figura 6.4.6: Descomposición de un entramado plano simétrico.

En entramados que presentan simetría geométrica y mecánica es posible desdoblar el análisis, con un modelo para los modos simétricos de vibración y otro para los antimétricos, lográndose una notoria disminución de los grados de libertad (aproximadamente la mitad). Si cada barra se divide en dos elementos de dos nodos, en el esquema (a) se tienen 36 grados de libertad que al aplicar las restricciones se reducen a 32, y un ancho de banda igual a 12. Con el esquema (b) se obtendrán los modos antimétricos con respecto al eje s-s. Este modelo tiene 21 grados de libertad que se reducen a 17 al aplicar las restricciones. En el modelo (c), para los modos simétricos, los grados de libertad efectivos son 15. En ambos casos el ancho de banda es 9. A título ilustrativo, en las Tablas 6.4.1 y 6.4.2 se transcriben los resultados hallados con el programa ENPLA-Q con elementos tipo Bernoulli-Euler de 2 nodos, procesados con precisión simple y doble, respectivamente. Se calcularon las primeras cinco frecuencias del pórtico que se muestra en la Figura 6.4.7, formado con barras que tienen las mismas propiedades ( $A, I_z, E, \rho$ ). Por tratarse de un ejemplo simple, puede ser resuelto con el modelo completo. Si se hiciera uso de la simetría, se tendrían dos modelos, el de la Figura 6.4.8(a) para hallar los modos antimétricos, y el modelo (b) para los modos simétricos.



Pórtico simétrico

Figura 6.4.7



(a)

(b)

Modos antimétricos

Modos simétricos

Figura 6.4.8

Se conoce la solución exacta de  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI_z}$  para el caso de infinita rigidez axial. Para reproducir esta hipótesis, lo cual sólo es de interés didáctico, en el modelo de elementos finitos se eliminan los desplazamientos verticales de los nodos ubicados en las columnas. Para el caso de los modos simétricos también se impone la nulidad del desplazamiento horizontal de los nodos situados sobre los dinteles, mientras que para los modos antimétricos se puede recurrir al artificio de adoptar un valor muy alto de la rigidez axial ( $EA = 10000EI_z / L^2$ ) en los elementos de los dinteles.

Cada tramo del pórtico se dividió en  $n$  elementos de 2 nodos. En la segunda columna de las Tablas 6.4.1 y 6.4.2 se indica el número de grados de libertad activos para el modelo completo utilizado, y los que resultarían con los modelos (a) y (b). En la Tabla 6.4.1 se observa que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  (modos antimétricos), obtenidos operando con simple precisión, resultan afectados por falta de precisión a partir del modelo con 2 y 4 elementos en cada tramo, respectivamente. Por otra parte, operando con doble precisión se hace posible aumentar el valor de la rigidez axial de los tramos horizontales, para una mejor comparación con la solución exacta conocida. Adoptando  $EA = 10^9 EI_z / L^2$  se obtienen los resultados de la Tabla 6.4.2.

VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

Tabla 6.4.1: Valores de  $\Omega$  para el pórtico de la Figura 6.4.7, con elementos Bernoulli-Euler.

$n$	$GDL$			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
	(a)	(b)	(c)	(a)	(a)	(b)	(b)	(a)
1	14	8	4	1.055504	3.723198	3.948281	4.744925	12.22357
2	34	18	12	1.055312	3.716677	3.913938	4.690448	10.87459
3	54	28	20	1.055076	3.716010	3.911896	4.686944	10.83569
4	74	38	28	1.050343	3.716936	3.911512	4.686314	10.82877
5	94	48	36	1.048059	3.714119	3.911222	4.685989	10.82676
Solución exacta				1.0554	3.7165	3.9124	4.6866	10.8262

(con programa ENPLA-Q!).

Tabla 6.4.2: Valores de  $\Omega$  para el pórtico de la Figura 6.4.7, con elementos Bernoulli-Euler.

$n$	$GDL$			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
	(a)	(a)	(b)	(a)	(a)	(b)	(b)	(a)
1	14	8	4	1.055724	3.723641	3.949297	4.745476	12.22445
2	34	18	12	1.055473	3.717204	3.914931	4.690986	10.87525
3	54	28	20	1.055459	3.716622	3.912892	4.687485	10.83638
4	74	38	28	1.055457	3.716519	3.912545	4.686888	10.82949
5	94	48	36	1.055456	3.716491	3.912450	4.686724	10.82758
Solución exacta				1.0554	3.7165	3.9124	4.6866	10.8262

(con programa ENPLA-Q#).

Otro ejemplo de interés práctico es el caso de la viga articulada en sus extremos, resuelto en la Sección 5.3.2 con elementos tipo Bernoulli-Euler de 2 y 3 nodos (ver Tabla 5.3.1), y en la Sección 5.3.6 con el elemento de 2 nodos cúbico-cuadrático de viga Timoshenko (ver Tabla 5.3.8). Obviamente, puede ser aplicado el algoritmo de entramados planos (ya que una viga es un caso particular). Haciendo coincidir el eje de la viga con el eje coordenado global  $x$  se suprime el desplazamiento axial  $u$  (DX) en todos los nodos, además de eliminar el desplazamiento transversal  $v$  (DY) en los nodos situados en los extremos. En la tabla 6.4.3 se dan los valores de  $\Omega_1, \Omega_2$  y  $\Omega_3$  para la viga Bernoulli-Euler, y en la Tabla 6.4.4 para la viga Timoshenko, dividiéndolas en  $n$  elementos de igual longitud. En ambos casos se operó con doble precisión (programa ENPLA-Q#). Para la viga Timoshenko, nuevamente se adoptaron  $r_z / L = 0.1$ ;  $\kappa = 0.85$ ;  $\nu = 0.3$ .

Tabla 6.4.3: Viga Bernoulli-Euler articulada-articulada.

$n$	$nodos$		$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
5	6	10		9.870661	39.54382	89.53186
10	11	20		9.869671	39.48264	88.87390
20	21	40		9.869609	39.47868	88.82946
40	41	80		9.869605	39.47843	88.82663
80	81	160		9.869604	39.47842	88.82645
Solución exacta				9.869604	39.47842	88.82644

Tabla 6.4.4: Viga Timoshenko articulada-articulada.

$n$	$nodos$		$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
40	41	80		8.405118	25.47406	44.46631
80	81	160		8.404778	25.46479	44.41696
160	161	320		8.404692	25.46247	44.40463
320	321	640		8.404670	25.46189	44.40154
640	641	1280		8.404665	25.46175	44.40077
Solución exacta				8.404663	25.46170	44.40051

Se manifiesta claramente la mayor rapidez de convergencia del elemento tipo Bernoulli-Euler, frente al similar para vigas Timoshenko.

Es importante tener en cuenta que para el análisis de una *armadura plana* (reticulado con nudos rígidos) no debería aplicarse el algoritmo de reticulados sino el de entramados planos, por aproximarse más al real comportamiento físico de la estructura.

### 6.5 Emparrillados

Debido a la analogía entre los elementos para vibraciones longitudinales y torsionales, con muy pocas modificaciones es posible adaptar los programas de entramados planos al caso de emparrillados de barras.

De acuerdo con las Figuras 6.1.1(a) y 6.1.1(b), la analogía entre los desplazamientos es:

$$\begin{array}{l} \text{barra entramado plano: } u \quad v \quad \theta_z \\ \text{barra emparrillado: } \theta_x \quad \theta_y \quad w \end{array}$$

En la Figura 6.5.1 se muestra la analogía entre el apoyo móvil en un nodo de entramado plano, y la articulación oblicua, poco usual en un emparrillado.

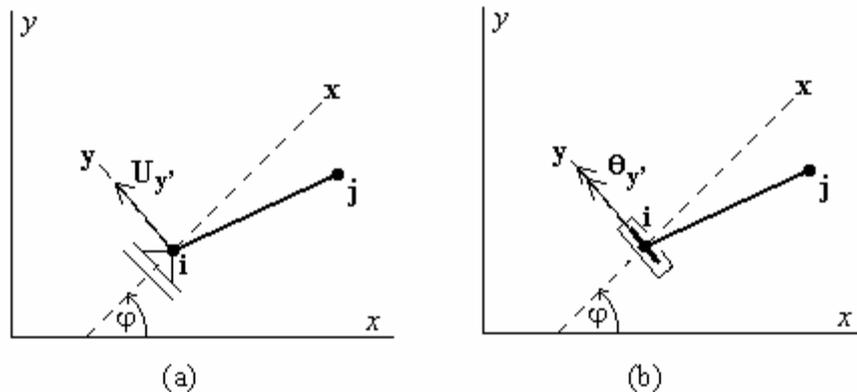


Figura 6.5.1: Restricción oblicua. (a): entramados planos; (b): emparrillados.

Por otra parte, las propiedades de los elementos son:

	Bernoulli - Euler	Timoshenko
entramado plano:	$A, I_z, E, \rho$	$A, I_z, E, \rho, G, \kappa$
emparrillado:	$A, I_y, E, \rho, I_x, G, J$	$A, I_y, E, \rho, I_x, G, J, \kappa$

El programa para el cálculo de las matrices de rigidez y de masa de emparrillados se denomina EMPAR (**EMPAR**ellido, con sufijo -Q! o -Q#), en el que sólo se implementaron elementos de 2 nodos. El formato de los archivos de datos se describe en el respectivo archivo de texto (extensión TXT o RTF). Del mismo modo que con los entramados planos, es aconsejable aprovechar las propiedades de simetría geométrica y mecánica que suelen exhibir las estructuras de emparrillado, a fin de reducir el tamaño del modelo a ser analizado con la computadora. En el CD-ROM se incluyen también los programas utilitarios, ED-EMPAR que facilita la edición de los archivos de datos, como asimismo el de pos-proceso PP-EMPAR que produce imágenes, en perspectiva, de los modos naturales.

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

La Figura 6.5.2 muestra un emparrillado rectangular con seis tramos en la dirección del eje global  $x$ , y cuatro en la del eje global  $y$ . Todos los tramos tienen la misma longitud  $l$ . El emparrillado se encuentra apoyado en los cuatro vértices. En la Tabla 6.5.1 se dan los valores del coeficiente adimensional de frecuencia  $\Omega = \omega l^2 \sqrt{\rho A / EI_y}$ , donde  $I_y$  es el momento de inercia de la sección con respecto al eje local  $y$  (dirección principal de inercia contenida en el plano global  $x$ - $y$  del emparrillado).

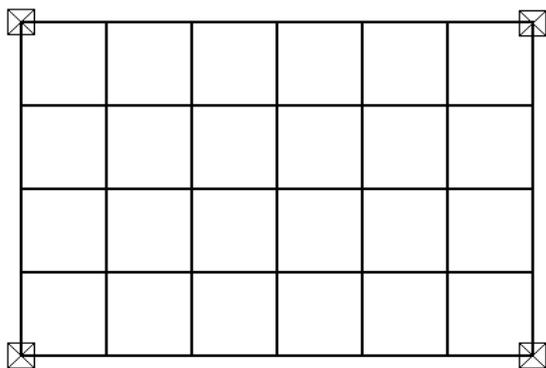


Fig. 6.5.2: Emparrillado de 58 tramos.

Para el cálculo se adoptaron las siguientes relaciones:  $Al^2 = 100 I_y$ ,  $I_x = 2I_y$ ,  $G = 2E/5$ ,  $J = I_y/2$ . En la Tabla 6.5.1,  $n$  es el número de elementos de dos nodos, tipo viga Bernoulli-Euler, en que se divide cada tramo del emparrillado.

Aprovechando la doble simetría (geométrica y mecánica) del emparrillado, se puede modelar la cuarta parte del mismo, aunque ello implica resolver cuatro modelos distintos, según se aplique simetría-simetría, simetría-antisimetría, antisimetría-simetría o antisimetría-antisimetría. Sólo es necesario adecuar, en cada caso, las condiciones de vínculo de los nodos situados sobre los ejes de simetría del emparrillado, y disminuir a la mitad las propiedades geométricas de las secciones, en las barras coincidentes con los ejes de simetría.

Tabla 6.5.1: Valores de  $\Omega$  para el emparrillado (Fig.6.5.2), elementos Bernoulli-Euler de dos nodos.

$n$	$\Omega_1$ (s-s)	$\Omega_2$ (s-a)	$\Omega_3$ (a-s)	$\Omega_4$ (s-s)	$\Omega_5$ (s-s)	$\Omega_6$ (a-a)	$\Omega_7$ (s-a)
1	0.187035	0.289073	0.480118	0.628182	0.912925	0.932108	1.030848
2	0.187030	0.289057	0.480045	0.628018	0.912417	0.931574	1.030111
3	0.187030	0.289056	0.480041	0.628007	0.912380	0.931541	1.030059

(con programa EMPAR-Q#).

Finalmente, en la Tabla 6.5.2 se transcriben los resultados al utilizar el elemento tipo Timoshenko, con  $r_y/l = 0.1$ ,  $\kappa = 0.85$ ,  $\nu = 0.25$ .

Tabla 6.5.2: Valores de  $\Omega$  para con elementos tipo Timoshenko de dos nodos (precisión doble).

$n$	$\Omega_1$ (s-s)	$\Omega_2$ (s-a)	$\Omega_3$ (a-s)	$\Omega_4$ (s-s)	$\Omega_5$ (s-s)	$\Omega_6$ (a-a)	$\Omega_7$ (s-a)
1	0.185965	0.286951	0.474029	0.620461	0.898617	0.912890	1.010892
2	0.185955	0.286915	0.473863	0.620097	0.897537	0.911731	1.009343
3	0.185953	0.286910	0.473841	0.620048	0.897386	0.911574	1.009128

(con programa EMPAR-Q#).

## 6.6 Entramados espaciales

### 6.6.1 Introducción

En teoría, la extensión de los algoritmos para el análisis de entramados planos y emparrillados al caso más general (3D) no ofrece ninguna dificultad conceptual. Sin embargo, el elevado número de grados de libertad (cada nodo posee 6 grados de libertad:  $DX, DY, DZ, RX, RY, RZ$ ) y la imposibilidad de un ancho de banda reducido, pueden hacer fracasar el intento de almacenar toda la información (programa y datos) en la memoria principal de la computadora. Una estructura tan simple como la que se muestra en la Figura 6.6.1(a), donde cada barra se modela con un solo elemento de dos nodos, tiene 72 grados de libertad, que se reducen a 60 al aplicar las condiciones de vínculo. El ancho de banda es 30. Si se cumple la simetría de las propiedades geométricas y mecánicas se puede analizar un cuarto de la estructura, como se muestra en el esquema (b), estableciendo restricciones en los nodos 3, 4, 6 y 7 para los diversos tipos de modos de vibración. Por ejemplo, para los modos simétricos con respecto al plano paralelo al coordenado  $y-z$ , en los nodos 3 y 6 se imponen las condiciones  $DX = RY = RZ = 0$ . Para los modos antimétricos con respecto al mismo plano, se aplican las restricciones  $RX = DY = DZ = 0$  en los mismos nodos. Análogamente, para producir simetría con respecto al plano paralelo al  $x-z$  se aplican  $DY = RX = RZ = 0$  en los nodos 4 y 7, y en el caso de antimetría, las condiciones  $DX = DZ = RY = 0$ . En todos los casos, el modelo queda con 27 grados de libertad y el ancho de banda se reduce a 24.

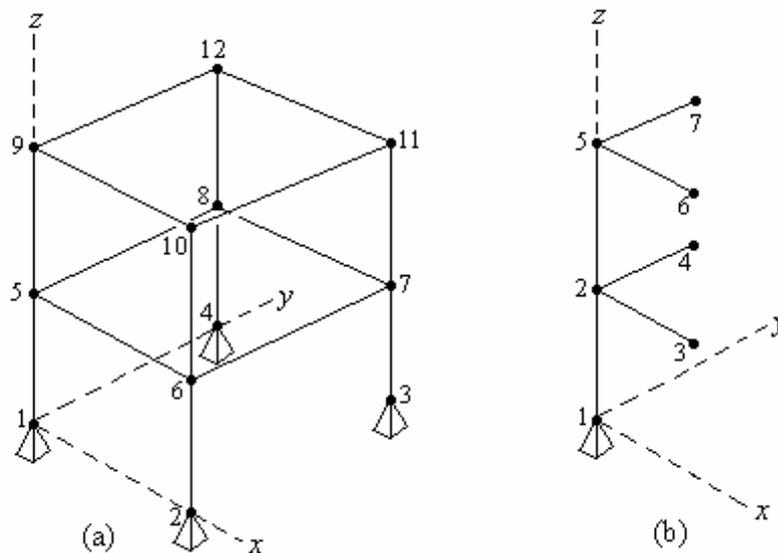


Figura 6.6.1: Modelo de un entramado espacial.

Por otra parte, los modelos tridimensionales presentan una dificultad adicional, por la necesidad de establecer en cada elemento, en forma unívoca, la orientación de los ejes principales de inercia de la sección. Ello puede resolverse agregando, a las propiedades de los elementos, una magnitud angular ( $\beta$ ) que será definida más adelante. En consecuencia, las propiedades geométricas y mecánicas de cada

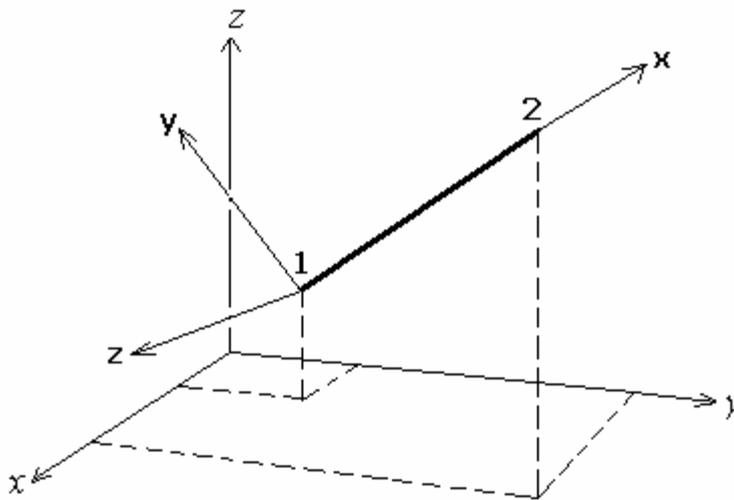
## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

elemento son nueve ( $A, I_x, I_y, I_z, \beta, J, E, G, \rho$ ) para la formulación de Bernoulli-Euler, y once para la viga Timoshenko (se agregan los factores de corte  $\kappa_y, \kappa_z$ ).

A continuación se describe el algoritmo para el análisis de modelos de entramados espaciales de barras rectas, con elementos de dos nodos.

### 6.6.2 Desarrollo del algoritmo

En la Figura 6.6.2 se muestra un elemento genérico de dos nodos, y la correspondiente terna de ejes locales principales con origen en el nodo local **1** (extremo izquierdo). El eje local **x** es el eje longitudinal, dirigido hacia el nodo local **2** (extremo derecho). El eje local **y** es una de las direcciones principales de inercia de la sección, con respecto al cual el momento de inercia es  $I_2=I_{\min}$  (ó  $I_1=I_{\max}$ ). El momento de inercia con respecto al eje local **z** es  $I_1=I_{\max}$  (ó  $I_2=I_{\min}$ ), ya que **z** es la otra dirección



principal de inercia.

Figura 6.6.2: Elemento de dos nodos en 3D y ejes locales principales.

En lo que sigue, los versores base de la terna global  $(x, y, z)$  son  $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ . Los versores de la terna local principal se indican con  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}$ . Sus componentes ortogonales, referidas al sistema global, son los *cosenos directores* de los ejes locales:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \cos\alpha_x \tilde{i} + \cos\alpha_y \tilde{j} + \cos\alpha_z \tilde{k}$$

(6.30a)

$$\tilde{\mathbf{y}} = \cos\beta_x \tilde{i} + \cos\beta_y \tilde{j} + \cos\beta_z \tilde{k}$$

(6.30b)

$$\tilde{\mathbf{z}} = \cos\gamma_x \tilde{i} + \cos\gamma_y \tilde{j} + \cos\gamma_z \tilde{k}$$

(6.30c)

De acuerdo con el teorema de Pitágoras en tres dimensiones, los cosenos directores deben cumplir las

conocidas identidades:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 \quad (6.31a)$$

$$\cos^2 \beta_x + \cos^2 \beta_y + \cos^2 \beta_z = 1 \quad (6.31b)$$

$$\cos^2 \gamma_x + \cos^2 \gamma_y + \cos^2 \gamma_z = 1 \quad (6.31c)$$

Por otra parte, la ortogonalidad implica además el cumplimiento de las siguientes identidades

$$\cos \alpha_x \cos \beta_x + \cos \alpha_y \cos \beta_y + \cos \alpha_z \cos \beta_z = 0 \quad (6.32a)$$

$$\cos \beta_x \cos \gamma_x + \cos \beta_y \cos \gamma_y + \cos \beta_z \cos \gamma_z = 0 \quad (6.32b)$$

$$\cos \gamma_x \cos \alpha_x + \cos \gamma_y \cos \alpha_y + \cos \gamma_z \cos \alpha_z = 0 \quad (6.32c)$$

Los cosenos directores del eje local  $\mathbf{x}$ , que definen la orientación longitudinal del elemento, se calculan a partir de las coordenadas globales de los extremos:

$$\cos \alpha_x = (x_2 - x_1)/l ; \quad \cos \alpha_y = (y_2 - y_1)/l ; \quad \cos \alpha_z = (z_2 - z_1)/l \quad (6.33 \text{ a,b,c})$$

$$\text{donde } l \text{ es la longitud del elemento: } l = 2a = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2} \quad (6.34)$$

Para describir la orientación de los ejes locales transversales principales de inercia ( $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ) se recurre a otro par ortogonal auxiliar de referencia ( $\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$ ), definido con los siguientes productos vectoriales:

$$\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{x}} \quad (6.35)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} \wedge (\tilde{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}) \quad (6.36)$$

La orientación de los ejes locales principales se da con el ángulo  $\beta$ , dirigido desde el eje auxiliar  $\hat{\mathbf{y}}$  hacia el principal  $\mathbf{y}$  (desde el auxiliar  $\hat{\mathbf{z}}$  hacia el principal  $\mathbf{z}$ ), con sentido dado por la regla de la mano derecha, vale decir que  $\beta$  es positivo cuando un tirabuzón de rosca derecha avanza con el sentido del eje local  $\mathbf{x}$ , al girar con el par auxiliar ( $\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$ ) hacia el principal ( $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ).

Aplicando las expresiones (6.30a), (6.35) y (6.36) se obtienen los cosenos directores de los ejes auxiliares:

$$\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{x}} = -\cos \alpha_y \tilde{\mathbf{i}} + \cos \alpha_x \tilde{\mathbf{j}} \quad (6.37)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = -\cos \alpha_x \cos \alpha_z \tilde{\mathbf{i}} - \cos \alpha_y \cos \alpha_z \tilde{\mathbf{j}} + (\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y) \tilde{\mathbf{k}} \quad (6.38)$$

Efectuando las transformaciones ortogonales de la rotación  $\beta$ , se hallan los cosenos directores de los ejes locales principales:

$$\text{Eje local } \mathbf{y} \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_x = -(\cos \beta \cos \alpha_y + \text{sen} \beta \cos \alpha_x \cos \alpha_z) / d \\ \cos \beta_y = (\cos \beta \cos \alpha_x - \text{sen} \beta \cos \alpha_y \cos \alpha_z) / d \\ \cos \beta_z = d \cdot \text{sen} \beta \end{array} \right. \quad (6.39)$$

$$\text{Eje local } \mathbf{z} \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_x = (\text{sen} \beta \cos \alpha_y - \cos \beta \cos \alpha_x \cos \alpha_z) / d \\ \cos \gamma_y = -(\text{sen} \beta \cos \alpha_x + \cos \beta \cos \alpha_y \cos \alpha_z) / d \\ \cos \gamma_z = d \cdot \cos \beta \end{array} \right. \quad (6.40)$$

$$\text{donde } d = (\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y)^{1/2} \quad (6.41)$$

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

Este método de localización de los ejes locales principales falla solamente cuando el eje local  $\mathbf{x}$  es paralelo al eje global  $z$ , debido a la nulidad del producto vectorial  $\tilde{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}$ . En tal caso, como alternativa, el eje auxiliar  $\hat{\mathbf{y}}$  se define utilizando el eje global  $x$ :

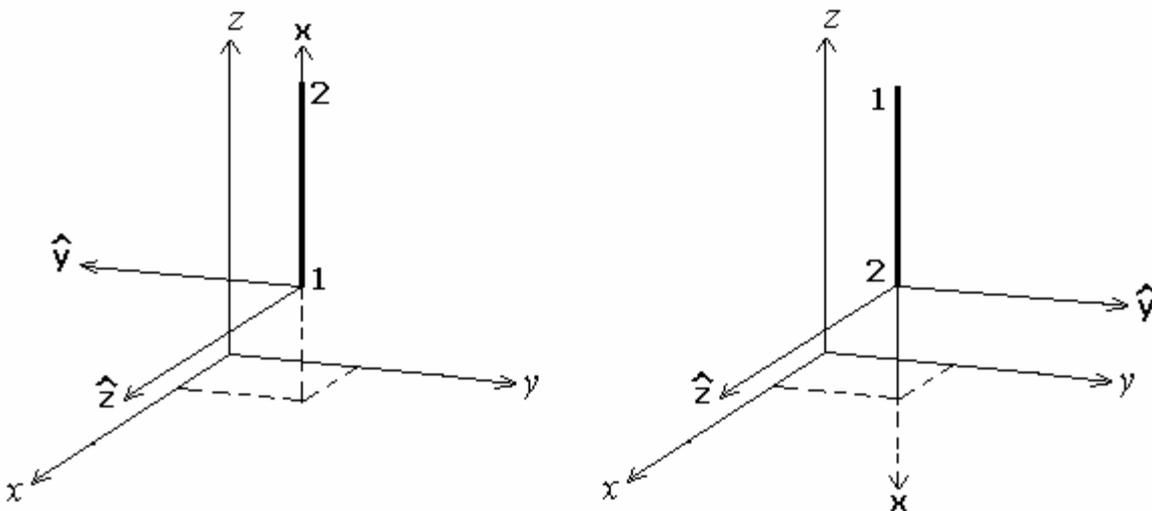
$$\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{i}} \wedge \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{i}} \wedge (\pm \tilde{\mathbf{k}}) = -(\pm \tilde{\mathbf{j}}) \quad (6.42)$$

Nótese que ahora el vector  $\hat{\mathbf{y}}$  es el versor del eje global  $y$  cuando el eje local  $\mathbf{x}$  es opuesto al eje global  $z$ .

El eje auxiliar  $\hat{\mathbf{z}}$  se obtiene con la misma expresión (6.36):

$$\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = (\pm \tilde{\mathbf{k}}) \wedge (-\pm \tilde{\mathbf{j}}) = \tilde{\mathbf{i}} \quad (6.43)$$

Se comprueba que el vector  $\hat{\mathbf{z}}$  es el versor  $\tilde{\mathbf{i}}$  del eje global  $x$ , independientemente del sentido del eje local  $\mathbf{x}$ .



En la Figura 6.6.3 se muestran las dos posibilidades en el caso alternativo, donde  $\mathbf{x}$  es paralelo al eje  $z$ .

Figura 6.6.3: Ejes locales auxiliares de referencia en el caso alternativo ( $\mathbf{x} // z$ ).

Aplicando la rotación  $\beta$  en este caso alternativo, se obtiene:

$$\text{Eje local } \mathbf{y} \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_x = \sin \beta \\ \cos \beta_y = -\cos \beta \cos \alpha_z \\ \cos \beta_z = 0 \end{array} \right. \quad (6.44)$$

$$\text{Eje local } \mathbf{z} \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_x = \cos \beta \\ \cos \gamma_y = \sin \beta \cos \alpha_z \\ \cos \gamma_z = 0 \end{array} \right. \quad (6.45)$$

con  $\cos \alpha_z = \pm 1$ , donde el signo depende del sentido de la orientación longitudinal del elemento paralelo al eje global  $z$ .

Cabe mencionar que otro procedimiento para definir la orientación de la sección transversal consiste en asignar, a cada elemento, un *tercer nodo* no perteneciente al eje  $\mathbf{x}$  del elemento, y establecer que el eje

local principal  $\mathbf{y}$  es coplanar con los tres nodos del elemento, con sentido positivo en el semiplano que contiene al tercer nodo. El algoritmo para esta forma de orientar el par local principal ( $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ ) se encuentra desarrollado en la referencia [15]. Es el adoptado por la mayoría de los programas profesionales (por ejemplo, por el sistema Algor Professional Mech).

El paso siguiente en el desarrollo del algoritmo consiste en expresar los desplazamientos nodales, referidos a la terna local principal ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ) en función de los referidos a la terna global ( $x, y, z$ ). Simbólicamente:

$$\{\delta_e\} = [\mathbf{R}] \{\Delta_e\} \quad (6.46)$$

$$\text{donde } \{\delta_e\}^t = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \vartheta_{x_1} \ \vartheta_{y_1} \ \vartheta_{z_1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \vartheta_{x_2} \ \vartheta_{y_2} \ \vartheta_{z_2}] \quad (6.47)$$

$$\{\Delta_e\}^t = [U_1 \ V_1 \ W_1 \ \theta_{x_1} \ \theta_{y_1} \ \theta_{z_1} \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ \theta_{x_2} \ \theta_{y_2} \ \theta_{z_2}] \quad (6.48)$$

Operando se deduce que la matriz  $[\mathbf{R}]$ , particionada en submatrices de tercer orden, se expresa:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} [r] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [r] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [r] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [r] \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

donde las componentes de la submatriz  $[r]$  son los cosenos directores de la terna local principal:

$$[r] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Con la matriz  $[\mathbf{R}]$  se realiza la transformación de las matrices de masa  $[m_e]$  y rigidez  $[k_e]$  del elemento, referidas al sistema local principal, para pasarlas al sistema global, tal como se dedujo en la Sección 6.4, ver expresiones (6.21a) y (6.21b):

$$[M_e] = [\mathbf{R}]^t [m_e] [\mathbf{R}] ; \quad [K_e] = [\mathbf{R}]^t [k_e] [\mathbf{R}] \quad (6.51 \text{ a,b})$$

El último paso del desarrollo del algoritmo consiste en hallar las matrices  $[m_e]$  y  $[k_e]$  del elemento de dos nodos, para el caso de barras de eje recto de sección constante. De acuerdo con lo explicado en la Sección 6.1 y graficado en la Figura 6.1.1(c), para generar un elemento de entramado espacial (3D) se expanden las matrices de masa (5.10) y de rigidez (5.14) del elemento con deformaciones axiales, se les suman las análogas del elemento con deformaciones torsionales, y las matrices dadas en (5.49) y (5.53) del elemento para deformaciones flexionales con la teoría elemental de Bernoulli-Euler, o con las dadas en (5.102) y (5.104) del elemento desarrollado con la teoría de Timoshenko.

Las propiedades geométricas y mecánicas que intervienen en el elemento tipo Bernoulli-Euler, además de la longitud ( $l=2a$ ) que se calcula con las coordenadas de los extremos, son: el área ( $A$ ), los momentos de inercia ( $I_x, I_y, I_z$ ), el ángulo ( $\beta$ ) de orientación de la sección; la constante de torsión ( $J$ ), los módulos de

VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

elasticidad ( $E$ ,  $G$ ) y la densidad ( $\rho$ ) del material.

Haciendo intervenir la semilongitud del elemento ( $a = l/2$ ), su cuadrado  $b = a^2$ , y el cuadrado del radio de giro polar de la sección  $c = r_x^2 = I_x/A$ , la matriz de masa  $[m_e]$  del elemento Bernoulli-Euler resulta:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 0 & 0 & 0 & 22a & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & -13a \\ 0 & 0 & 78 & 0 & -22a & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 13a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22a & 0 & 8b & 0 & 0 & 0 & -13a & 0 & -6b & 0 \\ 0 & 22a & 0 & 0 & 0 & 8b & 0 & 13a & 0 & 0 & 0 & -6b \\ 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 13a & 0 & 78 & 0 & 0 & 0 & -22a \\ 0 & 0 & 27 & 0 & -13a & 0 & 0 & 0 & 78 & 0 & 22a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13a & 0 & -6b & 0 & 0 & 0 & 22a & 0 & 8b & 0 \\ 0 & -13a & 0 & 0 & 0 & -6b & 0 & -22a & 0 & 0 & 0 & 8b \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

La matriz de rigidez  $[k_e]$ , también referida al sistema local principal, es:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} \\ 0 & 0 & \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & \frac{2EI_y}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & \frac{EI_y}{a} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{a} \\ -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & \frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & \frac{3EI_y}{2a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & \frac{EI_y}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & \frac{2EI_y}{a} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{a} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Por otra parte, para el elemento tipo Timoshenko, a las propiedades geométricas de la sección se agregan los factores de corte  $\kappa_y$  y  $\kappa_z$ , que intervienen en los términos que tienen en cuenta las deformaciones por corte;  $\kappa_y$  corresponde al corte en la dirección principal  $\mathbf{y}$  (flexión en el plano principal  $\mathbf{y-x}$ , vale decir

con el eje principal  $\mathbf{z}$  como eje neutro de la sección);  $\kappa_z$ , al corte en la dirección principal  $\mathbf{z}$  (flexión con el eje neutro  $\mathbf{y}$ ). El algoritmo propuesto admite que los factores de corte  $\kappa_y$  y  $\kappa_z$  pueden ser distintos.

Utilizando la expresión (5.102) se obtiene la matriz masa  $[m_e]$  del elemento tridimensional tipo Timoshenko, referida al sistema local principal, en este caso como suma de dos matrices:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{210} [m_c] + \frac{\rho}{30a} [m_r] \quad (6.54)$$

A continuación se dan las componentes no nulas de la matriz simétrica  $[m_c]$ , la cual incluye el efecto de la deformación por corte en la inercia transversal de las secciones, a través de dos parámetros  $\Phi_y$  y  $\Phi_z$ :

$$\begin{aligned} m_{c(1,1)} &= 140; & m_{c(1,7)} &= 70; & m_{c(7,7)} &= 140 \\ m_{c(4,4)} &= 140 r_x^2; & m_{c(4,10)} &= 70 r_x^2; & m_{c(10,10)} &= m_{c(4,4)} \\ m_{c(2,2)} &= (156+294\Phi_z+140\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2 \\ m_{c(2,6)} &= a(44+77\Phi_z+35\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2 \\ m_{c(2,8)} &= (54+124\Phi_z+70\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2 \\ m_{c(2,12)} &= -a(26+63\Phi_z+35\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2 \\ m_{c(3,3)} &= (156+294\Phi_y+140\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2 \\ m_{c(3,5)} &= -a(44+77\Phi_y+35\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2 \\ m_{c(3,9)} &= (54+126\Phi_y+70\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2 \\ m_{c(3,11)} &= a(26+63\Phi_y+35\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2 \\ m_{c(5,5)} &= a^2(16+28\Phi_y+14\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2 \\ m_{c(5,11)} &= -a^2(12+28\Phi_y+14\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2; & m_{c(5,9)} &= -m_{c(3,11)} \\ m_{c(6,6)} &= a^2(16+28\Phi_z+14\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2 \\ m_{c(6,12)} &= -a^2(12+84\Phi_z+126\Phi_z^2)/(1+3\Phi_z)^2; & m_{c(6,8)} &= -m_{c(2,12)} \\ m_{c(8,8)} &= m_{c(2,2)}; & m_{c(8,12)} &= -m_{c(2,6)}; & m_{c(9,9)} &= m_{c(3,3)} \\ m_{c(9,11)} &= -m_{c(3,5)}; & m_{c(11,11)} &= m_{c(5,5)}; & m_{c(12,12)} &= m_{c(6,6)} \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\text{donde: } \Phi_y = \frac{6(1+\nu)}{\kappa_y} \left( \frac{r_y}{a} \right)^2; \quad \Phi_z = \frac{6(1+\nu)}{\kappa_z} \left( \frac{r_z}{a} \right)^2; \quad (6.57 \text{ a,b})$$

$\nu = 1/2 E/G - 1$  es el coeficiente de Poisson;  $r_x, r_y, r_z$  son los radios de giro de la sección.

Las componentes no nulas de la matriz simétrica de masa  $[m_r]$ , que tiene en cuenta la inercia rotatoria de las secciones, son:

$$\begin{aligned} m_{r(2,2)} &= 18I_z/(1+\Phi_z)^2; & m_{r(2,8)} &= -m_{r(2,2)} \\ m_{r(2,6)} &= aI_z(3-15\Phi_z)/(1+\Phi_z)^2; & m_{r(2,12)} &= m_{r(2,6)} \\ m_{r(3,3)} &= 18I_y/(1+\Phi_y)^2; & m_{r(3,9)} &= -m_{r(3,3)} \\ m_{r(3,5)} &= -aI_y(3-15\Phi_y)/(1+\Phi_y)^2; & m_{r(3,11)} &= m_{r(3,5)} \\ m_{r(5,5)} &= a^2I_y(8+10\Phi_y+20\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2; & m_{r(5,9)} &= -m_{r(3,5)} \\ m_{r(5,11)} &= -a^2I_y(2+10\Phi_y-10\Phi_y^2)/(1+\Phi_y)^2; & m_{r(6,8)} &= -m_{r(2,6)} \\ m_{r(6,6)} &= a^2I_z(8+10\Phi_z+20\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2; & m_{r(8,8)} &= m_{r(2,2)} \\ m_{r(6,12)} &= -a^2I_z(2+10\Phi_z-10\Phi_z^2)/(1+\Phi_z)^2; & m_{r(9,11)} &= -m_{r(3,5)} \\ m_{r(8,12)} &= -m_{r(2,6)}; & m_{r(9,9)} &= m_{r(3,3)}; & m_{r(11,11)} &= m_{r(5,5)}; & m_{r(12,12)} &= m_{r(6,6)} \end{aligned} \quad (6.58)$$

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

Es importante destacar que con  $\Phi_y = 0$ ,  $\Phi_z = 0$  y  $[m_r] = 0$ , la matriz masa  $[m_e]$  de este elemento coincide con la matriz masa del elemento tipo Bernoulli-Euler dada en (6.52), lo cual facilita la codificación de un programa de computación con ambos tipos de elementos.

Finalmente, recurriendo a la matriz rigidez (5.104) e introduciendo adecuados factores  $f_y, f_z, h_y, h_z, g_y$  y  $g_z$ , se halla la siguiente expresión de la matriz  $[k_e]$  del elemento en tres dimensiones:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_z f_y}{a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z f_y}{a^2} & 0 & -\frac{EI_z f_y}{a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z f_y}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{EI_y f_z}{a^3} & 0 & -\frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_y f_z}{a^3} & 0 & -\frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 & \frac{EI_y g_z}{3a} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 & \frac{EI_y h_z}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{EI_z f_y}{a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z g_y}{3a} & 0 & -\frac{EI_z f_y}{a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z h_y}{3a} \\ -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_z f_y}{a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_z f_y}{a^2} & 0 & \frac{EI_z f_y}{a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_z f_y}{a^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EI_y f_z}{a^3} & 0 & \frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_y f_z}{a^3} & 0 & \frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 & \frac{EI_y h_z}{3a} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_y f_z}{a^2} & 0 & \frac{EI_y g_z}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{EI_z f_y}{a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z h_y}{3a} & 0 & -\frac{EI_z f_y}{a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z g_y}{3a} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

$$\text{donde: } f_y = \frac{3}{2(1+\Phi_y)} ; \quad f_z = \frac{3}{2(1+\Phi_z)} \quad (6.59 \text{ a,b})$$

$$g_y = (4+\Phi_y)f_y ; \quad g_z = (4+\Phi_z)f_z ; \quad h_y = (2-\Phi_y)f_y ; \quad h_z = (2-\Phi_z)f_z \quad (6.60 \text{ a,b,c,d})$$

Este algoritmo se implementó en el programa ENESP (**EN**tramado **ESP**acial), con el cual es posible el análisis de vibraciones libres de entramados espaciales de barras rectas con nudos rígidos, utilizando el elemento de dos nodos, tipo Bernoulli-Euler o tipo Timoshenko. Cuando se opta por el primero, deben ser nulos ambos factores de corte,  $\kappa_y$  y  $\kappa_z$ , en el archivo de datos del modelo. En este programa se utilizan exclusivamente matrices consistentes, vale decir que no se contempla el uso de matrices de masas desacopladas. Se compilaron cuatro versiones del programa: ENESP-Q!, ENESP-Q#, ENESP-V! y ENESP-V#. Con el propósito de contar con herramientas más poderosas para el análisis de entramados espaciales, se han desarrollado las versiones ENESP-V compiladas con Visual Basic Esta duplicación de

los códigos de computación se realizó para entramado espaciales, y con todos los algoritmos que se aplican en los próximos capítulos, justamente con motivo del mayor tamaño de las matrices, y el criterio adoptado de utilizar exclusivamente la memoria principal (RAM) de la computadora en el proceso de cálculo, sin recurrir a la partición de las matrices y los consiguientes intercambios de datos con el disco rígido. Por otra parte, operar con grandes matrices exigiría disponer de rutinas de cálculo numérico más sofisticadas que el simple método de iteración inversa, implementado para resolver los ejemplos numéricos que se proponen en las clases prácticas. Este criterio del autor obedece al objetivo principal del curso, que es el estudio del método de elementos finitos con aplicaciones a la determinación de frecuencias naturales de sistemas mecánicos estructurales simples (lo cual de todos modos exige disponer de adecuadas herramientas de cálculo), sin pretensiones de desarrollar programas de computación de gran capacidad y efectividad operativa. En el Apéndice se describen las principales características de los programas de computación preparados para este curso y disponibles en el CD-ROM.

Con la versión ENESP-V# se determinaron frecuencias del entramado de la Fig.6.6.1(a), compuesto de 16 barras, todas de 1 metro de longitud, con columnas de sección cuadrada de 6 cm de lado, y vigas de sección rectangular con 6 cm de ancho y 15 cm de altura. Los valores de la constante de torsión  $J$  adoptados son  $0.0000018 \text{ m}^4$  y  $0.000008 \text{ m}^4$ , respectivamente. Las propiedades mecánicas del material son  $E = 210\text{GP}$ ,  $G = 84\text{GP}$  y densidad  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Modelando con uno, dos y cuatro elementos tipo Bernoulli-Euler por barra, se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 6.6.1. Para verificarlos, el mismo modelo se analizó con el programa Algor Professional Mech, dividiendo cada barra con  $n = 4$ , 10, 20 y 40 elementos.

Tabla 6.6.1: Valores de frecuencias angulares del pórtico espacial de la Figura 6.6.1(a).

	Programa ENESP-V#			Algor Professional Mech			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
$\omega_1 = \omega_2$	57.6785	57.6690	57.6684	57.6686	57.6684	57.6684	57.6684
$\omega_3$	67.5926	67.5850	67.5843	66.8731	67.4824	67.5707	67.5929
$\omega_4 = \omega_5$	253.4698	252.7847	252.7350	252.7712	252.7413	252.7354	252.7339
$\omega_6$	316.5689	316.2450	316.1815	312.6155	315.6433	316.0786	316.1876
$\omega_7$	432.7020	430.5538	430.3319	430.2858	430.3160	430.3146	430.3141
$\omega_8$	540.0343	538.6033	538.2451	537.9955	538.1946	538.2110	538.2147

Las primeras tres formas modales, correspondientes a los tres primeros renglones de la Tabla 6.6.1, se muestran esquemáticamente en la Figura 6.6.4 en la página siguiente. En la misma tabla se observa que los valores hallados con el programa ENESP-V# decrecen al aumentar el número de elementos del modelo, con convergencia monótona, mientras que con Algor el tipo de convergencia depende de la forma modal: monótona decreciente para  $\omega_1 = \omega_2$  y  $\omega_4 = \omega_5$ ; monótona creciente con  $\omega_3$ ,  $\omega_6$  y  $\omega_8$ ; y

## VIBRACIONES DE ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS

convergencia oscilante para  $\omega_7$  (aumenta al pasar de  $n = 4$  a 10, luego disminuye). Este comportamiento del elemento implementado en el programa Algor Professional Mech es consecuencia de utilizar una matriz masa no consistente.

Por otra parte, el elemento de Algor para este tipo de análisis permite hacer intervenir el efecto de la deformación por corte, de acuerdo con la teoría de Timoshenko, pero no incluye la inercia rotatoria de las secciones del elemento. Los resultados que se dan en la Tabla 6.6.1 fueron hallados, con Algor, sin el efecto de corte.

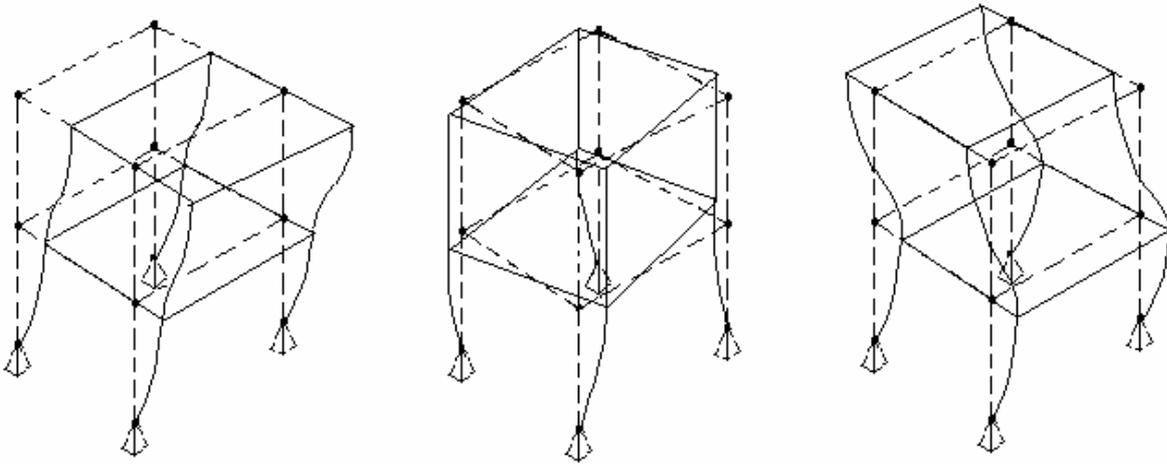


Figura 6.6.4: Primeras formas modales del pórtico de la Figura 6.6.1(a).

# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 7. VIBRACIONES DE MODELOS PLANOS CONTINUOS

### 7.1 Introducción

Diversos problemas de análisis dinámico que se presentan en la práctica pueden ser resueltos, en forma aproximada, utilizando elementos bidimensionales. Ejemplos: una placa plana vibrando en su plano, tal como un tabique de una estructura de edificio de hormigón, puede ser analizada dividiéndola en elementos bidimensionales para estado plano de tensiones (también llamados elementos *membranales*); el comportamiento dinámico de una presa de gravedad puede estudiarse, en una primera aproximación, dividiendo la sección en elementos para estado plano de deformaciones.

En lo que sigue, el plano del modelo continuo coincide con el plano coordenado global  $x$ - $y$ . El desplazamiento de un punto se describe con dos componentes en dicho plano (Figura 7.1.1):  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$ .

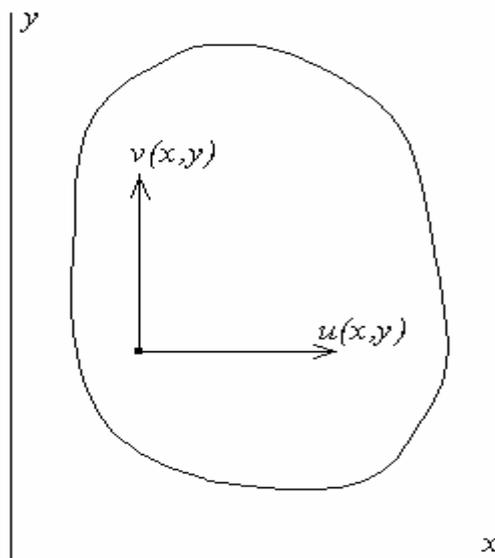


Figura 7.1.1: Modelo continuo en el plano  $x$ - $y$ .

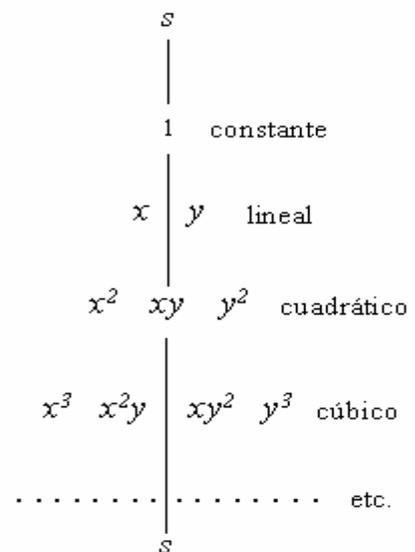


Figura 7.1.2: Triángulo de Pascal.

Con el objeto de garantizar la convergencia del modelo de elementos finitos, es conveniente que dichas funciones sean aproximadas, en cada elemento, con polinomios completos de dos variables cuyos términos forman el llamado Triángulo de Pascal (Figura 7.1.2).

Por razones de orden práctico los elementos se adoptan con formas de triángulos, rectángulos y cuadriláteros. En el caso más simple tienen lados rectos y nodos en los vértices. También pueden tener uno o más nodos sobre los lados, que en tal caso pueden ser curvos. Además, puede haber uno o más nodos en el interior del elemento (Figura 7.1.3 en la página siguiente). Cada nodo posee dos grados de libertad, que son las componentes del desplazamiento.

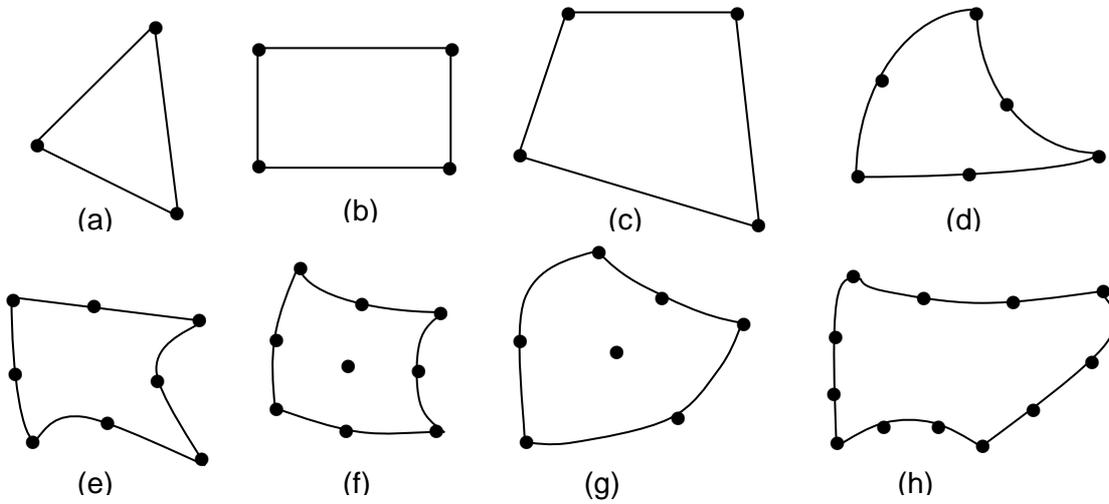


Figura 7.1.3: Distintos tipos de elementos finitos bidimensionales.

Dos elementos contiguos deben compartir los nodos situados sobre el lado común. Además, las funciones de los desplazamientos deben adoptarse de manera que se cumpla con la continuidad de las mismas en todos los puntos de los lados comunes, propiedad de los elementos *conformes* [19].

Los elementos deben tener invariancia geométrica, propiedad que significa que las deformaciones no dependen de las direcciones de los ejes coordenados. De hecho, esta propiedad se cumple si se adoptan polinomios completos. Cuando se hace necesario agregar términos de mayor grado debe cuidarse que se mantenga la simetría en el Triángulo de Pascal, para que se cumpla la invariancia geométrica. En la Figura 7.1.4 se muestran tres casos de polinomios incompletos válidos: cuadrático en (a), de tercer grado en (b) y de cuarto en (c).

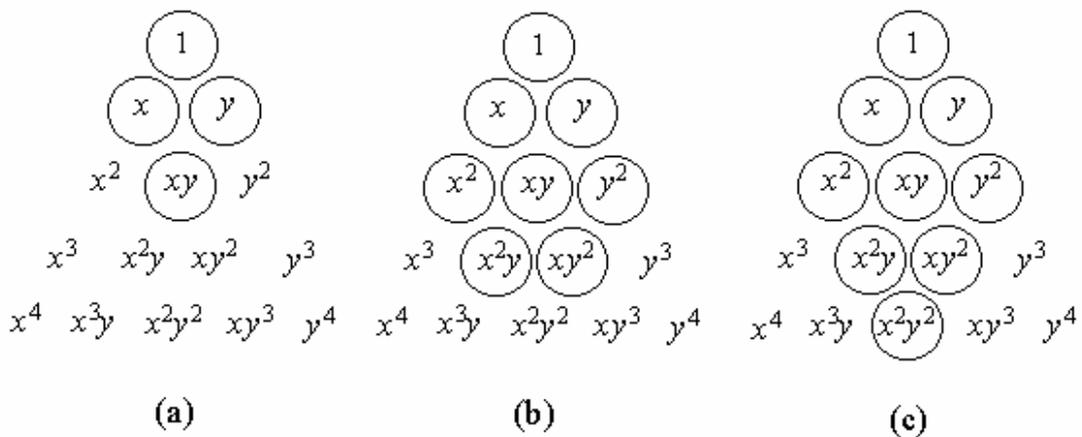


Figura 7.1.4: Términos de polinomios incompletos.

Las expresiones de energía que intervienen han sido deducidas en el Capítulo 3. La energía de deformación elástica de un elemento bidimensional se expresa:

$$U_e = \frac{h}{2} \int_A \{\epsilon\}^t [D] \{\epsilon\} dA \tag{7.1}$$

donde  $h$  es el espesor del elemento.

Reemplazando la matriz  $[D]$  para estado plano de tensiones dada en (3.71) y desarrollando, se obtiene:

$$U_e = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dA \tag{7.2}$$

Como en la expresión de la energía de deformación solamente intervienen derivadas primeras, es suficiente adoptar las componentes del desplazamiento como grados de libertad, y conformar la continuidad de las mismas en los lados comunes de los elementos adyacentes (denominada continuidad  $C_0$ ).

Para estado plano de deformaciones se emplea la expresión (3.86) de la energía de deformación elástica. Sin embargo, mediante el artificio de utilizar constantes elásticas ficticias, dadas en (3.88) y (3.89), se puede resolver como si se tratara del estado plano de tensiones.

La expresión de la energía cinética del elemento es la misma para ambos casos:

$$T_e = \frac{1}{2} \rho h \int_A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dA \tag{7.3}$$

donde  $\rho$  es la densidad del material (masa por unidad de volumen).

### 7.2 Triángulo de tres nodos

Es el elemento bidimensional más simple. En la Figura 7.2.1 se muestra la numeración local de sus tres nodos, la notación de sus coordenadas globales, y los desplazamientos nodales que se agrupan en el vector  $\{\delta_e\}$ .

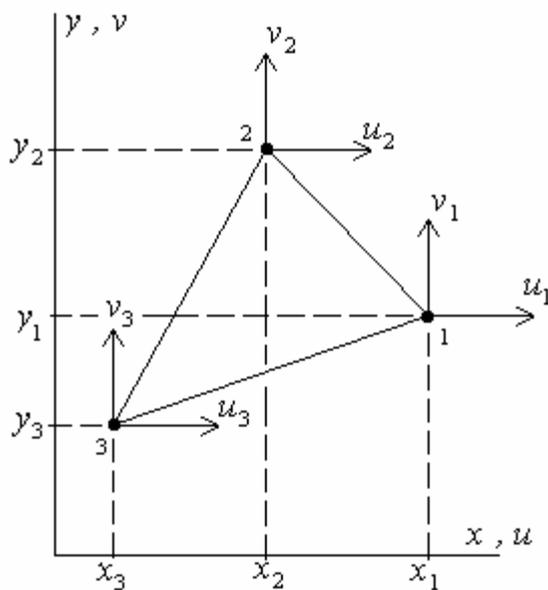


Figura 7.2.1

Numeración local de nodos.

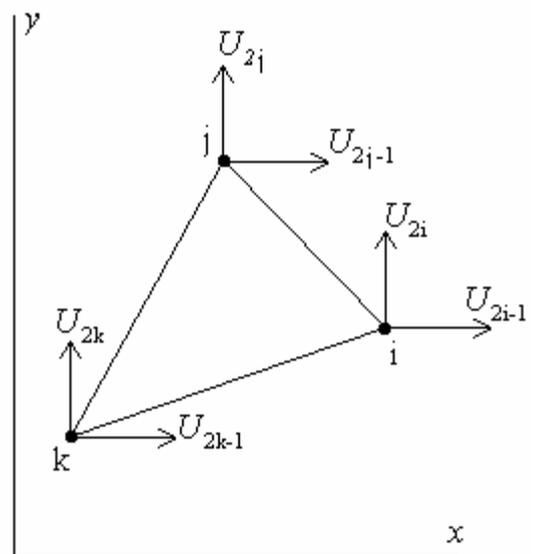


Figura 7.2.2

Notación de las componentes globales.

Cualquiera de los vértices puede adoptarse como nodo **1**. Nótese el sentido antihorario sobre el contorno. En la Figura 7.2.2 se muestra la notación global de los desplazamientos nodales, como componentes del vector  $\{\Delta\}$  que agrupa a los desplazamientos de todos los nodos del modelo compuesto por elementos finitos.

Teniendo en cuenta que el elemento tiene tres grados de libertad en cada dirección coordenada, las respectivas componentes de la función desplazamiento se aproximan con polinomios completos de tres términos cada uno:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y ; \quad v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (7.4 \text{ a,b})$$

Dado el carácter lineal de los mismos, este elemento también se denomina *triángulo lineal*. Sustituyendo en (7.4) las coordenadas de los nodos, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 ; \quad v_1 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \quad (7.5 \text{ a})$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 ; \quad v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \quad (7.5 \text{ b})$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 ; \quad v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3 \quad (7.5 \text{ c})$$

Resolviendo este sistema pueden obtenerse las expresiones de las constantes  $\alpha_1 \dots \alpha_6$  en función de las coordenadas de los nodos y de los desplazamientos nodales, que sustituidas en (7.4) permiten expresar las funciones de los desplazamientos en la forma siguiente:

$$u(x,y) = N_1(x,y) u_1 + N_2(x,y) u_2 + N_3(x,y) u_3 \quad (7.6 \text{ a})$$

$$v(x,y) = N_1(x,y) v_1 + N_2(x,y) v_2 + N_3(x,y) v_3 \quad (7.6 \text{ b})$$

donde  $N_1(x,y)$ ,  $N_2(x,y)$  y  $N_3(x,y)$  son las denominadas funciones de forma (o interpolantes) del elemento. Se omite el desarrollo algebraico que conduce a las siguientes expresiones:

$$N_1(x,y) = (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2A \quad (7.7 \text{ a})$$

$$N_2(x,y) = (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2A \quad (7.7 \text{ b})$$

$$N_3(x,y) = (a_3 + b_3 x + c_3 y) / 2A \quad (7.7 \text{ c})$$

$$\text{donde: } 2A = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = a_3 + b_3 x_3 + c_3 y_3 \quad (7.8 \text{ a})$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 ; \quad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 ; \quad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (7.8 \text{ b,c,d})$$

$$b_1 = y_2 - y_3 ; \quad b_2 = y_3 - y_1 ; \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad (7.8 \text{ e,f,g})$$

$$c_1 = x_3 - x_2 ; \quad c_2 = x_1 - x_3 ; \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad (7.8 \text{ h,i,j})$$

$A$  es el área del triángulo.

En la Figura 7.2.3 se muestra la función  $N_1(x,y)$ . Vale la unidad en el nodo local **1** y cero en los otros dos nodos. Las funciones  $N_2(x,y)$  y  $N_3(x,y)$  son similares, con valor unidad en el nodo local respectivo y cero en los otros dos.

Por otra parte, se puede demostrar que el numerador en el segundo miembro de la expresión de  $N_1(x,y)$  dada en (7.7), es el duplo del área  $A_1$  del triángulo con vértices en el punto de coordenadas  $(x,y)$  y en los nodos **2** y **3**, como se muestra en la Figura 7.2.4.

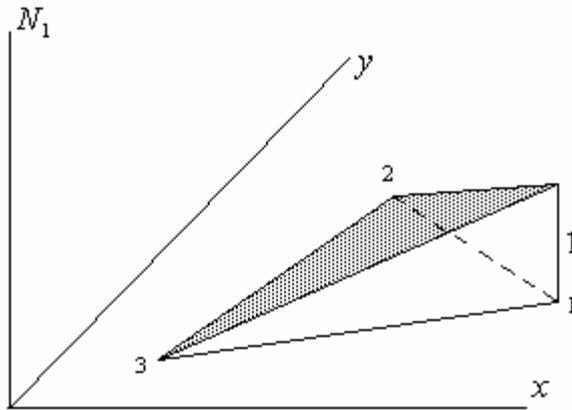


Figura 7.2.3: Función de forma  $N_1(x,y)$ .

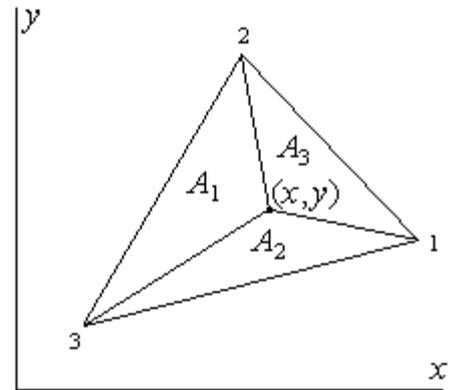


Figura 7.2.4: Subáreas  $A_1, A_2, A_3$ .

Por consiguiente, la función de forma  $N_1(x,y)$  es igual al cociente entre dicha área  $A_1$  y la del elemento triangular. Similarmente, las funciones  $N_2(x,y)$  y  $N_3(x,y)$  son los cocientes  $A_2/A$  y  $A_3/A$ , respectivamente. Dichos cocientes adimensionales definen a las denominadas *coordenadas triangulares*, o *coordenadas naturales*, del punto considerado:

$$\xi_1 = A_1/A ; \quad \xi_2 = A_2/A ; \quad \xi_3 = A_3/A \quad (7.9 \text{ a,b,c})$$

Es evidente que las mismas no son independientes, ya que se cumple la igualdad:  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$  para todo punto del triángulo. Con ellas se calculan, mediante interpolación lineal, las coordenadas cartesianas de un punto genérico del triángulo, en función de las coordenadas de los vértices del mismo:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 ; \quad y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \quad (7.10 \text{ a,b})$$

Dado que  $\xi_1 = N_1(x,y)$ ,  $\xi_2 = N_2(x,y)$  y  $\xi_3 = N_3(x,y)$ , las mismas funciones interpolantes del desplazamiento definen la geometría del elemento, ya que parametrizan las coordenadas de un punto genérico en función de las coordenadas de los tres nodos del elemento. La similitud entre (7.6) y (7.10) se denomina *isoparametrismo*. En otras palabras, el triángulo lineal de tres nodos es un elemento *isoparamétrico*.

Por otra parte, para todo punto sobre el lado **2-3** del elemento resulta  $N_1(x,y) = 0$ , lo cual implica que las componentes de su desplazamiento, con variación lineal sobre dicho lado, quedan determinadas con los valores de los desplazamientos de los nodos **2** y **3**, sin intervenir el desplazamiento del nodo **1**. Lo mismo sucede en los otros dos lados del elemento. Por consiguiente, siempre se cumplirá la condición de continuidad de  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  sobre el lado común a dos elementos adyacentes.

Otro requisito para la convergencia es la propiedad de reproducir desplazamientos de cuerpo rígido del elemento, sin deformaciones. En una traslación se tiene:  $u(x,y) = u_1 = u_2 = u_3$  y  $v(x,y) = v_1 = v_2 = v_3$  para todo punto del elemento. En consecuencia, de acuerdo con (7.6) debe cumplirse:

$$N_1(x,y) + N_2(x,y) + N_3(x,y) = 1 \quad (7.11)$$

## VIBRACIONES DE MODELOS PLANOS CONTINUOS

Las funciones de forma definidas en (7.7) satisfacen esta condición.

En una rotación infinitésima del elemento alrededor del eje coordenado  $z$ , se tiene:

$$u(x,y) = -\theta_z y = -\theta_z [y_1 N_1(x,y) + y_2 N_2(x,y) + y_3 N_3(x,y)]$$

$$v(x,y) = +\theta_z x = +\theta_z [x_1 N_1(x,y) + x_2 N_2(x,y) + x_3 N_3(x,y)]$$

Por consiguiente, también deben cumplirse:

$$x = x_1 N_1(x,y) + x_2 N_2(x,y) + x_3 N_3(x,y) \quad (7.12 \text{ a})$$

$$y = y_1 N_1(x,y) + y_2 N_2(x,y) + y_3 N_3(x,y) \quad (7.12 \text{ b})$$

De acuerdo con (7.10), las funciones de forma dadas en (7.7) satisfacen estas condiciones.

Aplicando (3.4) con (7.6) se expresan las deformaciones del elemento:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad (7.13 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = v_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} \quad (7.13 \text{ b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + v_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad (7.13 \text{ c})$$

Otra propiedad beneficiosa para la convergencia es la de reproducir desplazamientos con deformación constante. La constancia de  $\varepsilon_x$  se produce cuando el desplazamiento  $u$  es lineal en la variable  $x$ :  $u = \alpha + \beta x$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. En tal caso los desplazamientos nodales se expresan de la misma forma:

$u_1 = \alpha + \beta x_1$  ;  $u_2 = \alpha + \beta x_2$  ;  $u_3 = \alpha + \beta x_3$ . Aplicando (7.13 a) se tiene:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = \beta = (\alpha + \beta x_1) \partial N_1 / \partial x + (\alpha + \beta x_2) \partial N_2 / \partial x + (\alpha + \beta x_3) \partial N_3 / \partial x$$

Luego:  $\alpha (\partial N_1 / \partial x + \partial N_2 / \partial x + \partial N_3 / \partial x) = 0$  ;  $\beta (x_1 \partial N_1 / \partial x + x_2 \partial N_2 / \partial x + x_3 \partial N_3 / \partial x) = \beta$

Por consiguiente, se obtienen las siguientes condiciones adicionales:

$$\partial N_1 / \partial x + \partial N_2 / \partial x + \partial N_3 / \partial x = 0 \quad (7.14 \text{ a})$$

$$x_1 \partial N_1 / \partial x + x_2 \partial N_2 / \partial x + x_3 \partial N_3 / \partial x = 1 \quad (7.14 \text{ b})$$

$$\partial N_1 / \partial y + \partial N_2 / \partial y + \partial N_3 / \partial y = 0 \quad (7.14 \text{ c})$$

$$y_1 \partial N_1 / \partial y + y_2 \partial N_2 / \partial y + y_3 \partial N_3 / \partial y = 1 \quad (7.14 \text{ d})$$

Las dos últimas se deducen de manera similar, a partir de la constancia de la deformación  $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$  cuando el desplazamiento  $v(x,y)$  es lineal en la variable  $y$ . Es fácil comprobar que la constancia de la distorsión  $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$  no aporta nuevas condiciones, sino que conduce a las mismas deducidas con la constancia de  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ .

Por otra parte, las condiciones (7.14 a) y (7.14 c) se cumplen automáticamente cuando las funciones de forma satisfacen la (7.11). También se satisfacen (7.14 b) y (7.14 d) cuando son válidas las expresiones (7.12) de isoparametrismo.

La simplicidad del triángulo de tres nodos permite obtener la expresión explícita de la matriz de rigidez con un desarrollo analítico simple, debido a la constancia de las deformaciones (por este motivo, este elemento se denomina también *triángulo de deformación constante*).

En forma matricial, las fórmulas (7.13) se expresan:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B]\{\delta_e\} \quad (7.15)$$

$$\text{Reemplazando en (7.1): } U_e = \frac{h}{2} \int_A \{\delta_e\}' [B]' [D] [B] \{\delta_e\} dA = \frac{1}{2} \{\delta_e\}' \left[ h \int_A [B]' [D] [B] dA \right] \{\delta_e\} \quad (7.16)$$

La expresión entre corchetes del último miembro es la matriz de rigidez del elemento:

$$[k_e] = h \int_A [B]' [D] [B] dA = hA [B]' [D] [B] \quad (7.17)$$

$$\text{donde } [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Utilizando la matriz constitutiva  $[D]$  del estado plano de tensiones dada en (3.71), y operando, se obtiene:

$$[k_e] = C_k \begin{bmatrix} b_1^2 + \mu c_1^2 & (\nu + \mu)b_1 c_1 & b_1 b_2 + \mu c_1 c_2 & \mu b_2 c_1 + \nu b_1 c_2 & b_1 b_3 + \mu c_1 c_3 & \mu b_3 c_1 + \nu b_1 c_3 \\ (\nu + \mu)b_1 c_1 & \mu b_1^2 + c_1^2 & \mu b_1 c_2 + \nu b_2 c_1 & \mu b_1 b_2 + c_1 c_2 & \mu b_1 c_3 + \nu b_3 c_1 & \mu b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + \mu c_1 c_2 & \mu b_1 c_2 + \nu b_2 c_1 & b_2^2 + \mu c_2^2 & (\nu + \mu)b_2 c_2 & b_2 b_3 + \mu c_2 c_3 & \mu b_3 c_2 + \nu b_2 c_3 \\ \mu b_2 c_1 + \nu b_1 c_2 & \mu b_1 b_2 + c_1 c_2 & (\nu + \mu)b_2 c_2 & \mu b_2^2 + c_2^2 & \mu b_2 c_3 + \nu b_3 c_2 & \mu b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + \mu c_1 c_3 & \mu b_1 c_3 + \nu b_3 c_1 & b_2 b_3 + \mu c_2 c_3 & \mu b_2 c_3 + \nu b_3 c_2 & b_3^2 + \mu c_3^2 & (\nu + \mu)b_3 c_3 \\ \mu b_3 c_1 + \nu b_1 c_3 & \mu b_1 b_3 + c_1 c_3 & \mu b_3 c_2 + \nu b_2 c_3 & \mu b_2 b_3 + c_2 c_3 & (\nu + \mu)b_3 c_3 & \mu b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson;  $\mu = (1-\nu)/2$ ;  $C_k = Eh/4A(1-\nu^2)$ .

La matriz de masa se obtiene a partir de la expresión de la energía cinética (7.3). Agrupando  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  en un vector, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta_e\} \quad (7.20)$$

$$\text{Derivando con respecto al tiempo: } \begin{Bmatrix} \dot{u}(x,y) \\ \dot{v}(x,y) \end{Bmatrix} = [N]\{\dot{\delta}_e\}$$

$$\text{Luego: } \dot{u}^2 + \dot{v}^2 = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \{\dot{\delta}_e\}' [N]' [N] \{\dot{\delta}_e\}$$

$$\text{Reemplazando en (7.3): } T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}' \int_A \rho h [N]' [N] dA \{\dot{\delta}_e\} \quad (7.21)$$

Por consiguiente, la matriz de masa del elemento resulta:

$$[m_e] = \rho h \int [N]^t [N] dA \tag{7.22}$$

El producto  $[N]^t [N]$  es una matriz cuadrada simétrica de sexto orden, cuyas componentes son polinomios cuadráticos en las variables  $x$  e  $y$ , o en las variables adimensionales  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  definidas en (7.9). En este último caso, el producto  $[N]^t [N]$  queda expresado con la siguiente matriz:

$$[N]^t [N] = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1^2 & 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 & \xi_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 & \xi_3^2 \end{bmatrix}$$

Adoptando  $\xi_1$  y  $\xi_2$  como variables independientes, el dominio de integración es el triángulo rectángulo isósceles con catetos de valor unidad, como se muestra en la Figura 7.2.5, independientemente de la forma y posición del elemento triangular en el plano coordenado  $x$ - $y$ . Esta transformación, cuyo Jacobiano es el duplo del área del elemento triangular, facilita el cálculo de las integrales. Sustituyendo  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$  e integrando en el dominio triangular de la Figura 7.2.5, se obtiene la expresión final de la matriz de masa del elemento:

$$[m_e] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} [N]^t [N] d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\rho h A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

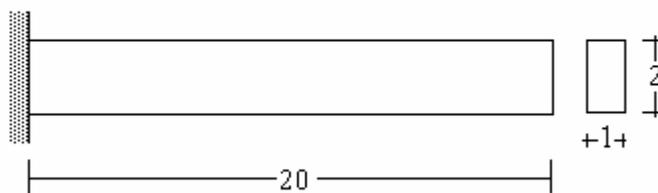
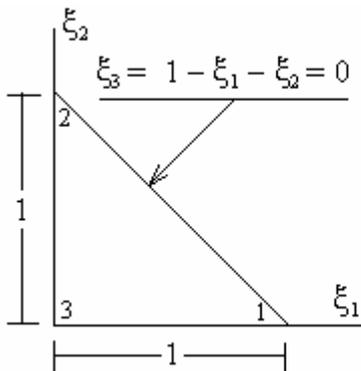


Figura 7.2.5: Dominio en el plano  $\xi_1$ - $\xi_2$ .

Figura 7.2.6: Barra recta empotrada-libre.

Otra forma, más directa y sencilla, consiste en aplicar la siguiente fórmula de Eisenberg\* para hallar el resultado de la integral:

\* Eisenberg M.A. and Malvern L.E. (1973) *International Journal of Numerical Methods in Engineering* (7), 574-575. On finite element integration in natural coordinates.

$$\int_A \xi_1^p \xi_2^q \xi_3^r dA = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!} 2A \tag{7.24}$$

Las matrices (7.19) y (7.23) se aplican en el programa EPT3N (**Estado Plano con Triángulos de 3 Nodos**) incluido en el CD-ROM. A continuación se muestran los resultados obtenidos con este programa para el caso de una barra recta de sección rectangular empotrada en uno de sus extremos, cuyas medidas se dan en la Figura 7.2.6. de la página anterior. En la Figura 7.2.7 se muestra el primer modelo utilizado para el análisis, compuesto por 80 elementos triangulares, con 63 nodos en total.

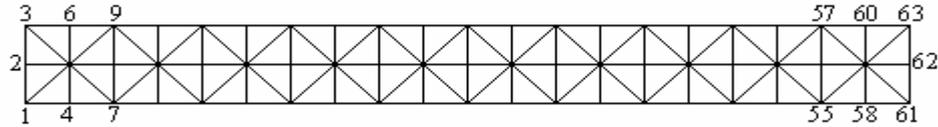


Figura 7.2.7: Modelo con 63 nodos en una red de 80 elementos triangulares.

Para comparar con la teoría elemental de barras, no se incluyó el efecto Poisson. ( $\nu = 0$ ). Para hallar los modos de vibración longitudinales exclusivamente, se impuso la nulidad de la componente vertical del desplazamiento en todos los nodos, además de la componente horizontal en los tres nodos del borde izquierdo. Con estas restricciones, el modelo queda con 60 grados de libertad y el ancho de banda efectivo se reduce a la mitad (5 en lugar de 10). En la Tabla 7.2.1 se dan los valores del coeficiente de frecuencia  $\omega L(\rho/E)^{1/2}$ , correspondientes a los cuatro primeros modos, obtenidos con este modelo de 80 elementos y 63 nodos, y con otro más denso formado con 160 elementos y 103 nodos, que deriva del anterior al agregar la segunda diagonal en todos los cuadrados de la Figura 7.2.7 (se duplica el número de elementos y se generan 40 nodos más). Se dan también los valores de la solución exacta de la teoría elemental (estado uniaxial de tensiones), en el último renglón de la tabla.

Tabla 7.2.1: Valores de  $\omega L(\rho/E)^{1/2}$  de los cuatro primeros modos (Fig.7.2.6,  $\nu=0$ ).

Modelo	$\omega_1 L(\rho/E)^{1/2}$	$\omega_2 L(\rho/E)^{1/2}$	$\omega_3 L(\rho/E)^{1/2}$	$\omega_4 L(\rho/E)^{1/2}$
80 elementos	1.5711	4.7209	7.8936	11.1039
160 elementos	1.5710	4.7182	7.8820	11.0724
Solución exacta	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956

Para hallar los modos de vibración transversales (y longitudinales) las restricciones se limitan a los nodos del borde izquierdo, de manera que el modelo de 80 elementos pasa a tener 120 grados de libertad y las matrices un ancho de banda de valor 10, mientras que el de 160 elementos tiene 200 grados de libertad y ancho de banda 12. En la Tabla 7.2.2 se dan los valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega L^2(\rho A/EI_z)^{1/2}$ , correspondientes a los primeros cuatro modos de vibración hallados con ambos modelos, operando con simple y doble precisión. Además se dan los resultados con otros tres modelos, con diseño de mallas similares más densas. En la Tabla 7.2.2, en cada caso, se indica el número de elementos ( $Nel$ ), grados de libertad ( $GDL$ ) y ancho de banda ( $ab$ ). También se transcriben los valores obtenidos con 100 elementos finitos del tipo viga Timoshenko, adoptando  $\kappa = 0.85$  y  $\nu = 0$  (programa BRFVT-Q#, operando con doble

precisión). Finalmente, en el último renglón se da la solución exacta de la teoría elemental (viga Bernoulli-Euler).

Tabla 7.2.2: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$ . Viga cantilever (Figura 7.2.6,  $\nu=0$ ).

Programa	Nel	GDL	ab	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
EPT3N-Q!	80	120	10	4.6270	27.7323	54.4248	73.1251
EPT3N-Q#	80	120	10	4.6254	27.7322	54.4248	73.1250
EPT3N-Q!	160	200	12	3.9124	23.6688	54.4221	63.2384
EPT3N-Q#	160	200	12	3.9061	23.6681	54.4217	63.2382
EPT3N-Q!	320	400	14	3.8011	22.9671	54.4143	60.9254
EPT3N-Q#	320	400	14	3.8074	22.9674	54.4140	60.9253
EPT3N-V!	720	840	18	3.6347	21.9463	54.4134	58.2819
EPT3N-V#	720	840	18	3.6360	21.9502	54.4152	58.2837
EPT3N-V!	1280	1440	22	3.5788	21.5779	54.4156	58.3075
EPT3N-V#	1280	1440	22	3.5742	21.5805	54.4147	58.3075
BRFVT-Q#	100	200	4	3.4934	21.1039	-----	56.0677
Solución exacta (Bernoulli-Euler)				3.5160	22.0345	-----	61.6972

Nótese que los modelos con 720 y 1280 elementos fueron analizados con las versiones compiladas con Visual Basic, debido a que al intentar el cálculo de las frecuencias con el programa MITIN1Q# se supera la capacidad de la memoria operativa de QuickBasic. Nótese también que se dan los resultados hallados al operar con simple y doble precisión, para mostrar cómo influye la cantidad de dígitos significativos que intervienen en el cálculo.

En la Tabla 7.2.2 se comprueba que el valor de  $\Omega_3$  varía muy poco al aumentar el número de elementos. Esto es consecuencia de que el modo de vibración es longitudinal, en lugar de transversal. Multiplicando  $\Omega_3$  por el parámetro adimensional  $(I_z / AL^2)^{1/2} = 0.0288675$  se obtiene el valor del coeficiente  $\omega L (\rho / E)^{1/2}$ , que resulta 1.5711 con el modelo de 80 elementos, 1.5710 con el de 160 elementos (ver Tabla 7.2.1), y 1.5708 con los modelos de 320, 720 y 1280 elementos (solución exacta con 5 dígitos).

Por otra parte, se observa que con el aumento de los grados de libertad se produce una muy apreciable disminución en las otras tres frecuencias naturales, lo cual significa una buena convergencia, pero al mismo tiempo señala la necesidad de utilizar redes bastante más refinadas para llegar a valores aceptables en los modos flexionales. Por ello, y para comprobar el funcionamiento de los programas EPT3N-V# y MITIN1V#, se continuó con el análisis de la viga empotrada-libre de la Figura 7.2.6, modelada con elevado número de elementos (y grados de libertad). Los resultados se muestran en la Tabla 7.2.3 en la página siguiente.

Finalmente, debe tenerse en cuenta que la teoría de Bernoulli-Euler predice frecuencias mayores que las reales en vigas no suficientemente esbeltas, como es el caso de la barra en estudio. Es razonable suponer que con el modelo de 100 elementos tipo viga Timoshenko, con un archivo de datos de muy fácil edición, se obtienen resultados más aproximados a las verdaderas frecuencias naturales de la barra. La Tabla 7.3.1 muestra que el algoritmo para el estado plano de tensiones, utilizando el triángulo lineal de tres nodos, lentamente converge hacia esos valores.

Tabla 7.2.3: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$ . Viga cantilever (Figura 7.2.6,  $\nu = 0$ ).

NEL	GDL	AB	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
720	840	18	3.6360	21.9502	54.4152	58.2837
1280	1440	22	3.5742	21.5805	54.4147	58.3075
2000	2200	26	3.5452	21.4069	54.4144	56.8477
4500	4800	36	3.5202	21.2563	54.4142	56.4472
5120	5440	38	3.5136	21.2171	54.4142	56.3436
8000	8400	46	3.5063	21.1731	54.4141	56.2265
12500	13000	56	3.5029	21.1529	54.4141	56.1721
18000	18600	66	3.4990	21.1294	54.4140	56.1101
24500	25200	76	3.4982	21.1243	54.4140	56.0964
28880	29640	82	3.4968	21.1162	54.4140	56.0750
30000	30750	86	3.4967	21.1153	54.4140	56.0726
BRFVT-Q# (Timoshenko)			3.4934	21.1039	-----	56.0677
Sol. exacta (Bernoulli-Euler)			3.5160	22.0345	-----	61.6972

### 7.3 Rectángulo de cuatro nodos

Para el caso de la barra cantilever de la Figura 7.2.6, que se analiza con un modelo plano rectangular, es conveniente desarrollar un algoritmo más eficiente, con elementos rectangulares con un nodo en cada vértice. En la Figura 7.3.1 se muestra la numeración local de los cuatro nodos, las coordenadas globales de los mismos y el sistema local  $x$ - $y$  con origen en el centro del elemento.

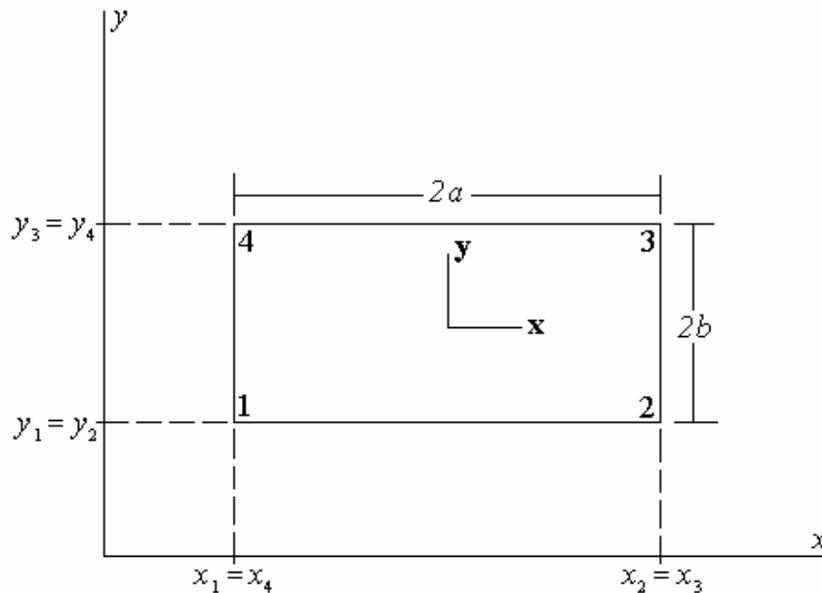


Figura 7.3.1: Elemento rectangular de cuatro nodos.

Al existir cuatro grados de libertad en cada dirección coordenada, ambas componentes del desplazamiento se aproximan agregando un término a los polinomios lineales (7.4), que debe ser el término cuadrático  $xy$  sobre el eje de simetría del Triángulo de Pascal (ver Figura 7.1.2):

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy ; \quad v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \quad (7.25a,b)$$

## VIBRACIONES DE MODELOS PLANOS CONTINUOS

Los cuatro términos de cada polinomio corresponden al esquema (a) de la Figura 7.1.4. Ambas componentes del desplazamiento varían linealmente sólo en las direcciones de los ejes coordenados. Cabe destacar que cada polinomio incompleto en (7.25) equivale al producto de dos polinomios lineales en cada variable:  $u(x,y)=(\beta_1+\beta_2x)(\beta_3+\beta_4y)$  ;  $v(x,y) = (\beta_5+\beta_6x)(\beta_7+\beta_8y)$ . Por esta razón, este elemento también se conoce como *rectángulo bilineal*.

Las deformaciones en el elemento quedan expresadas por:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = \alpha_2 + \alpha_4 y \quad (7.26 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y = \alpha_7 + \alpha_8 x \quad (7.26 \text{ b})$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = (\alpha_3 + \alpha_4 x) (\alpha_6 + \alpha_8 y) \quad (7.26 \text{ c})$$

Se comprueba que  $\varepsilon_x$  es constante en la dirección  $x$ ,  $\varepsilon_y$  lo es en la dirección  $y$ , mientras que la distorsión  $\gamma_{xy}$  queda expresada por una forma bilineal.

Los coeficientes  $\alpha_1$  a  $\alpha_8$  (o  $\beta_1$  a  $\beta_8$ ) pueden hallarse en función de los desplazamientos nodales, resolviendo el sistema lineal de ocho ecuaciones que se obtiene al reemplazar las coordenadas de los cuatro nodos en (7.25). De esta manera se obtendrían las cuatro funciones de forma del elemento, con las que se escribe:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (7.27)$$

Sin embargo, introduciendo las variables adimensionales  $\xi = \mathbf{x} / a$ ,  $\eta = \mathbf{y} / b$ ; y teniendo en cuenta que las funciones de forma, también adimensionales, deben resultar productos de dos funciones lineales en  $\xi$  y  $\eta$ , pueden ser escritas directamente:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) ; \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) \quad (7.28 \text{ a})$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) ; \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) \quad (7.28 \text{ b})$$

En forma más compacta:  $N_i(\xi, \eta) = (1-\xi_i \xi) (1-\eta_i \eta) / 4$ , donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  son las coordenadas del nodo  $i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ . El factor  $\frac{1}{4}$  surge de la condición  $N_i(\xi_i, \eta_i) = 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Automáticamente se cumple la nulidad de  $N_i$  en los otros tres nodos.

En la Figura 7.3.2 se muestra la función  $N_1(\xi, \eta)$  definida en el dominio cuadrado del plano  $\xi-\eta$ .

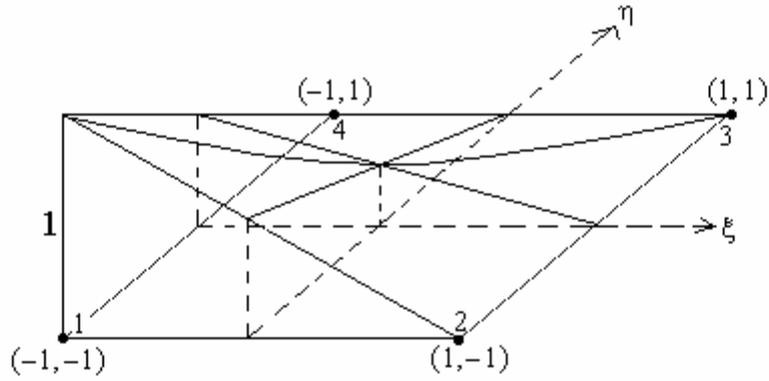


Figura 7.3.2: Función de forma  $N_1(\xi, \eta)$ .

Al igual que en el triángulo de tres nodos, las componentes del desplazamiento varían linealmente en cada lado del elemento y quedan determinadas solamente con los desplazamientos de los dos nodos ubicados en los extremos del mismo. Por consiguiente, este rectángulo de cuatro nodos es un elemento conforme ya que se cumple la continuidad entre elementos adyacentes. Sin mayor dificultad se puede comprobar además que las funciones de forma dadas en (7.28) satisfacen propiedades similares a las deducidas para las funciones de forma del triángulo de tres nodos, a saber:

$$N_1(x,y) + N_2(x,y) + N_3(x,y) + N_4(x,y) = 1 \tag{7.29}$$

$$x_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + x_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + x_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} + x_4 \frac{\partial N_4}{\partial x} = 1 \tag{7.30}$$

$$y_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + y_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + y_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} + y_4 \frac{\partial N_4}{\partial y} = 1 \tag{7.31}$$

La validez de las propiedades (7.30) y (7.31) implica que el rectángulo de cuatro nodos es también un elemento isoparamétrico. Vale decir, las mismas funciones  $N_i(\xi_i, \eta_i)$  intervienen en las expresiones paramétricas de las coordenadas de un punto genérico en función de las coordenadas de los cuatro nodos:

$$x = x_1 N_1(\xi, \eta) + x_2 N_2(\xi, \eta) + x_3 N_3(\xi, \eta) + x_4 N_4(\xi, \eta) \tag{7.32 a}$$

$$y = y_1 N_1(\xi, \eta) + y_2 N_2(\xi, \eta) + y_3 N_3(\xi, \eta) + y_4 N_4(\xi, \eta) \tag{7.32 b}$$

Siguiendo el mismo camino que con el triángulo de tres nodos puede obtenerse la matriz de deformación:

$$[B] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -b(1-\eta) & 0 & b(1-\eta) & 0 & b(1+\eta) & 0 & -b(1+\eta) & 0 \\ 0 & -a(1-\xi) & 0 & -a(1+\xi) & 0 & a(1+\xi) & 0 & a(1-\xi) \\ -a(1-\xi) & -b(1-\eta) & -a(1+\xi) & b(1-\eta) & a(1+\xi) & b(1+\eta) & a(1-\xi) & -b(1+\eta) \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

donde  $A = 4ab$  es el área del elemento.

Con esta matriz, las deformaciones se expresan:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = [B]\{\delta_e\} \tag{7.34}$$

VIBRACIONES DE MODELOS PLANOS CONTINUOS

La matriz de rigidez se determina con: 
$$[k_e] = h \int_A [B]^t [D] [B] dA \quad (7.35)$$

donde  $h$  es el espesor del elemento.

Pasando a variables adimensionales, se tiene:  $dA = dx dy = ab d\xi d\eta$ . Luego:

$$[k_e] = hab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^t [D] [B] d\xi d\eta \quad (7.36)$$

La matriz  $[B]^t [D] [B]$  es simétrica, de ocho filas y ocho columnas, cuyas componentes contienen productos de polinomios lineales en  $\xi$  y/o  $\eta$ . Reemplazando la matriz constitutiva del estado plano de tensiones y operando, se obtienen las 64 componentes de la matriz de rigidez, reducidas a 36 por la simetría:

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{33} = k_{55} = k_{77} = -2 k_{15} = -2 k_{37} &= Eh (\beta + \mu \alpha) / 3(1-\nu^2) \\ k_{22} = k_{44} = k_{66} = k_{88} = -2 k_{26} = -2 k_{48} &= Eh (\mu \beta + \alpha) / 3(1-\nu^2) \\ k_{12} = k_{38} = k_{47} = k_{56} = -k_{16} = -k_{25} = -k_{34} = -k_{78} &= Eh (\mu + \nu) / 4(1-\nu^2) \\ k_{18} = k_{23} = k_{45} = k_{67} = -k_{14} = -k_{27} = -k_{36} = -k_{58} &= Eh (\mu - \nu) / 4(1-\nu^2) \\ k_{13} = k_{57} = Eh (\mu \alpha - 2\beta) / 6(1-\nu^2); \quad k_{17} = k_{35} &= Eh (\beta - 2\mu\alpha) / 6(1-\nu^2) \\ k_{28} = k_{46} = Eh (\mu \beta - 2\alpha) / 6(1-\nu^2); \quad k_{24} = k_{68} &= Eh (\alpha - 2\mu\beta) / 6(1-\nu^2) \\ \text{donde } \alpha = a/b; \quad \beta = \alpha^{-1} = b/a; \quad \mu = (1-\nu)/2 \end{aligned} \quad (7.37)$$

La matriz de masa consistente del elemento se calcula con:

$$[m_e] = \rho h \int_A [N]^t [N] dA = \rho hab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^t [N] d\xi d\eta \quad (7.38)$$

La matriz  $[N]^t [N]$ , de ocho filas y ocho columnas, es simétrica. Sus componentes presentan términos que son productos de cuatro polinomios lineales, dos en la variable  $\xi$ , y dos en  $\eta$ . Operando analíticamente, se obtiene:

$$[m_e] = \frac{\rho hab}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

Con las matrices (7.37) y (7.39) se implementó el programa **EPR4N (Estado Plano con Rectángulos de 4 Nodos)**. La organización del archivo de datos se explica en **EPR4N.TXT** y **EPR4N.RTF**. Se analizó el mismo caso de la barra cantilever de la Figura 7.2.6, utilizando cuatro modelos de elementos finitos cuadrados. El primero deriva del mostrado en la Figura 7.2.7 suprimiendo las líneas diagonales.

Por consiguiente, quedan los 63 nodos y el número de elementos se reduce a 40, definidos por 20 divisiones en la dirección longitudinal y 2 en la dirección transversal. En el segundo modelo se duplica el número de divisiones en ambas direcciones. En consecuencia, tiene 160 elementos y 205 nodos. El tercer modelo se generó adoptando 80 divisiones en la dirección longitudinal y 8 en la transversal (640 elementos y 729 nodos). Finalmente el cuarto modelo, con 160 y 16 divisiones (2560 elementos y 2737 nodos). Por requerimiento de memoria, los dos últimos modelos se procesaron con las versiones compiladas con Visual Basic. En la Tabla 7.3.1 se transcriben los resultados del coeficiente adimensional de frecuencia, para los primeros cuatro modos de vibración.

Tabla 7.3.1: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$ . Viga cantilever (Figura 7.2.6,  $\nu=0$ ).

Programa	<i>Nel</i>	<i>GDL</i>	<i>ab</i>	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
EPR4N-Q#	40	120	10	3.7072	22.5429	54.4280	60.5580
EPR4N-Q#	160	400	14	3.5481	21.4701	54.4175	57.2060
EPR4N-V#	640	1440	22	3.5070	21.1894	54.4149	56.3188
EPR4N-V#	2560	5440	38	3.4966	21.1183	54.4142	56.0928
BRFVT-Q#	100	200	4	3.4934	21.1039	-----	56.0677

Los valores de  $\Omega_3$  corresponden al primer modo de vibración longitudinal. Multiplicándolos por el parámetro  $(I_z / AL^2)^{1/2} = 0.0288675$ , se obtienen: 1.57120, 1.57090, 1.57082 y 1.57080 (solución exacta de la teoría elemental: 1.57080). En cuanto a los modos transversales, se observa una buena convergencia con el aumento del número de elementos. Comparando con los valores de la Tabla 7.2.3, se comprueba que para alcanzar el valor 3.4966 de  $\Omega_1$  obtenido con el modelo de 2560 elementos rectangulares de 4 nodos, con 5440 grados de libertad, se requeriría uno con más de 30000 elementos triangulares de 3 nodos.

Comparando los valores de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_4$ , con los obtenidos con 100 elementos de viga tipo Timoshenko, las diferencias por exceso de los hallados con el cuarto modelo son: 0.09%, 0.07% y 0.04%, respectivamente.

Debido a que las componentes del desplazamiento a lo largo del lado del rectángulo varían de la misma forma que sobre un lado del triángulo de tres nodos, sería posible combinarlos en un mismo modelo [17], de manera que el dominio de definición del problema quedaría dividido en rectángulos y triángulos. Esto permite modelar regiones de contorno poligonal. Con este fin convendría introducir en el algoritmo la posibilidad de utilizar elementos rectangulares con lados no paralelos a los ejes coordenados  $x$ - $y$ , mediante la transformación por rotación, de las matrices de masa y rigidez. Por otra parte, debería intentarse utilizar el menor número posible de triángulos, solamente donde sea imprescindible, ya que el elemento triangular de tres nodos es menos eficiente que el rectángulo de cuatro nodos, lo cual pudo ser comprobado con el ejemplo anterior. Para este curso no ha sido implementado un programa que admita combinaciones de ambos elementos.

En la próxima Sección se desarrolla un algoritmo basado en elementos cuadriláteros. Con ellos se hace posible modelar dominios de contorno poligonal, con la ventaja de contar aproximadamente con el mismo grado de precisión en toda la extensión del modelo.

### 7.4 Cuadrilátero de cuatro nodos

La introducción de variables adimensionales  $\xi$  y  $\eta$  en el desarrollo realizado en la Sección anterior, permitió transformar al rectángulo de la Figura 7.3.1, definido en el plano coordenado  $x$ - $y$  (coordenadas físicas), en el cuadrado de la Figura 7.3.2 en el plano  $\xi$ - $\eta$ . Mediante una adecuada definición de variables adimensionales también se consigue transformar un cuadrilátero en el mismo cuadrado de la Figura 7.3.2. En la Figura 7.4.1 se muestra un cuadrilátero en el plano de coordenadas físicas globales  $x$ - $y$ , con la numeración local de sus cuatro nodos y la notación de las coordenadas de los mismos. Nótese el sentido antihorario en la numeración local de los nodos. El nodo **1** puede ser cualquiera de los cuatro vértices. Para la definición de las coordenadas locales adimensionales se recurre a las medianas del cuadrilátero. El eje  $\xi$  pasa por los puntos medios de los lados **1-4** y **2-3**, los cuales contienen a los puntos de abscisas  $\xi = -1$  y  $\xi = +1$ , respectivamente, como se muestra en la misma Figura 7.4.1.

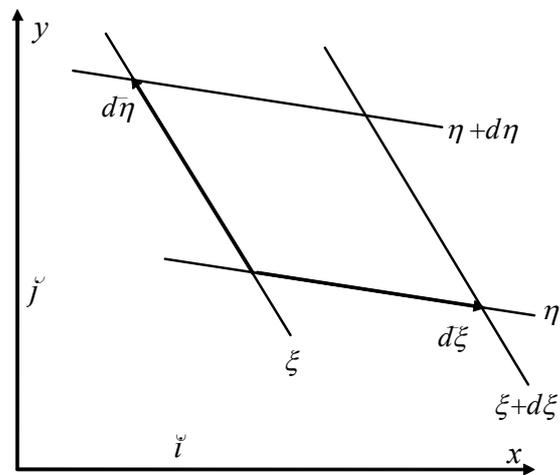
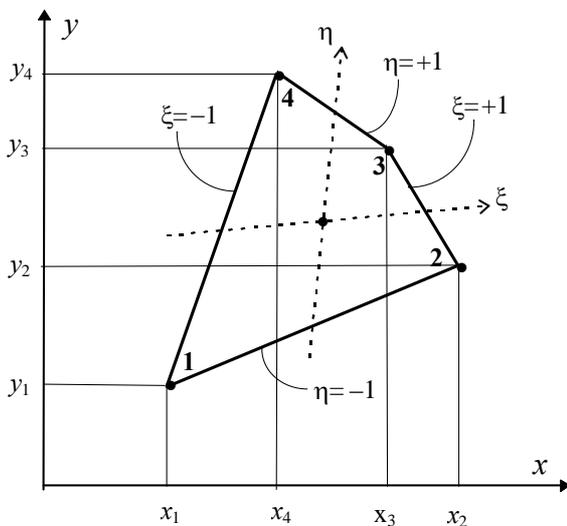


Figura 7.4.1: Coordenadas  $\xi$ - $\eta$  del cuadrilátero. Figura 7.4.2: Diferencial de área en el plano  $x$ - $y$ .

De manera similar, el eje  $\eta$  pasa por los puntos medios de los lados **1-2** y **3-4**, cuyas ordenadas son  $\eta = -1$  y  $\eta = +1$ , respectivamente. Es evidente que, en general, los ejes  $\xi$ - $\eta$  no son ortogonales. Para el cálculo de las integrales involucradas en la obtención de las matrices del elemento, es conveniente pasar al cuadrado de la Figura 7.3.2. Con este fin, es necesario establecer la expresión del diferencial de área en función de las coordenadas adimensionales  $\xi$  y  $\eta$ . En la Figura 7.4.2 se muestra el diferencial de área, limitado en el plano  $x$ - $y$  por las líneas  $\xi$ ,  $\xi + d\xi$ ,  $\eta$  y  $\eta + d\eta$ . Los vectores diferenciales se obtienen a partir de las expresiones paramétricas de las coordenadas físicas  $x = x(\xi, \eta)$  e  $y = y(\xi, \eta)$ :

$$d\bar{\xi} = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{j} \right) d\xi \quad ; \quad d\bar{\eta} = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{j} \right) d\eta$$

El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo infinitesimal de la Figura 7.4.2:

$$dA = |d\bar{\xi} \wedge d\bar{\eta}| = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (7.40)$$

La expresión entre paréntesis es el determinante  $|J|$  de la denominada matriz Jacobiana:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

El determinante se denomina Jacobiano de la transformación. Reemplazando en (7.40):  $dA = |J| d\xi d\eta$ .

A continuación se desarrollan las expresiones matriciales del algoritmo, en su forma más general, válidas para diversos elementos bidimensionales (ver Figura 7.1.3). Para establecer las ecuaciones paramétricas de las coordenadas físicas se ubican  $n_g$  nodos en el elemento, en lo sucesivo llamados *nodos geométricos*, y se introducen polinomios en las variables  $\xi$  y  $\eta$  para interpolar con las coordenadas físicas de dichos nodos:

$$x = \sum_{i=1}^{n_g} G_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^{n_g} G_i(\xi, \eta) y_i \quad (7.42 \text{ a,b})$$

Los polinomios  $G_i(\xi, \eta)$  pueden agruparse en un vector-fila  $[G]$  con el cual las fórmulas (7.42) se expresan con notación matricial:

$$x = [G] \{x_e\} \quad ; \quad y = [G] \{y_e\} \quad (7.43 \text{ a,b})$$

donde los vectores  $\{x_e\}$  y  $\{y_e\}$  agrupan a las coordenadas físicas de los nodos geométricos del elemento. Es obvio que las fórmulas (7.42), o sus equivalentes (7.43), definen geoméricamente al elemento. Por ejemplo, si se adoptan cuatro nodos geométricos en los vértices del elemento, y se utilizan los mismos polinomios dados en (7.28) como funciones de interpolación geométrica, se tiene:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (7.44 \text{ a,b})$$

Con notación matricial:  $x = [N] \{x_e\} \quad ; \quad y = [N] \{y_e\} \quad (7.45 \text{ a,b})$

donde, a diferencia con la definición dada en (7.27), momentáneamente  $[N]$  es un vector-fila que agrupa a los cuatro polinomios interpolantes. Poniendo  $\xi = -1$  y  $\eta = -1$  en (7.44 a,b) se obtiene  $x = x_1$  e  $y = y_1$ . Análogamente, con  $\xi = +1$  y  $\eta = -1$  resulta  $x = x_2$  e  $y = y_2$ . Sustituyendo  $\eta = -1$  en (7.44 a,b) se obtiene:

$$x = \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_2 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) + \frac{1}{2} \xi (x_2 - x_1) \quad (7.46 \text{ a})$$

$$y = \frac{1}{2} (1 - \xi) y_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) y_2 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) + \frac{1}{2} \xi (y_2 - y_1) \quad (7.46 \text{ b})$$

Por consiguiente, cuando  $\xi$  varía entre  $-1$  y  $+1$  (con  $\eta = -1$ ), el lugar geométrico de los puntos de coordenadas  $(x,y)$  es el segmento de recta con extremos en los nodos de coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .

Obviamente, esta transformación lineal también se cumple con los otros tres lados del cuadrilátero de la Figura 7.4.1.

Por otra parte, si los grados de libertad del elemento son las componentes del desplazamiento en  $n$  nodos, ahora denominados *nodos cinemáticos*, el campo de desplazamientos en el elemento se describe con:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad ; \quad v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (7.47 \text{ a,b})$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son las componentes del desplazamiento del nodo cinemático  $i$ . Las funciones  $N_i(\xi, \eta)$  definen el comportamiento cinemático (por ende, las deformaciones) del elemento. Agrupando separadamente las componentes nodales en sendos vectores, las expresiones matriciales de (7.47 a,b) se escriben:

$$u = [N] \{u_e\} \quad ; \quad v = [N] \{v_e\} \quad (7.48 \text{ a,b})$$

Cuando  $n_g = n$ , y los nodos geométricos coinciden con los cinemáticos, se cumple  $G_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta)$ . En tal caso, se tiene *isoparametrismo*. El cuadrilátero de cuatro nodos es un elemento isoparamétrico. Como se verá más adelante, es posible adoptar mayor número de nodos cinemáticos ( $n > n_g$ ) con el fin de mejorar el comportamiento del elemento, manteniendo la forma de cuadrilátero rectilíneo (4 nodos geométricos). En tal caso, se obtiene un elemento *subparamétrico*. El caso inverso ( $n < n_g$ ) carece de interés práctico. Es usual la utilización de elementos isoparamétricos en la implementación de programas profesionales de computación.

A continuación se deduce la expresión matricial del Jacobiano, necesario para calcular las integrales en el plano  $\xi$ - $\eta$ . Derivando (7.43) con respecto a la variable adimensional  $\xi$ :

$$\partial x / \partial \xi = [G_\xi] \{x_e\} \quad \partial y / \partial \xi = [G_\xi] \{y_e\} \quad (7.49 \text{ a,b})$$

donde el vector-fila  $[G_\xi]$  agrupa a las derivadas con respecto a  $\xi$  de los polinomios  $G_i(\xi, \eta)$ .

Análogamente, derivando con respecto a  $\eta$ :

$$\partial x / \partial \eta = [G_\eta] \{x_e\} \quad \partial y / \partial \eta = [G_\eta] \{y_e\} \quad (7.50 \text{ a,b})$$

Con ellas se obtiene la siguiente fórmula para el cálculo del Jacobiano:

$$\begin{aligned} |J| &= \{x_e\}^t [G_\xi]^t [G_\eta] \{y_e\} - \{x_e\}^t [G_\eta]^t [G_\xi] \{y_e\} = \\ &= \{x_e\}^t [ [G_\xi]^t [G_\eta] - [G_\eta]^t [G_\xi] ] \{y_e\} = \{x_e\}^t [G'] \{y_e\} \end{aligned} \quad (7.51)$$

También puede utilizarse la traspuesta:

$$|J| = \{y_e\}^t [ [G_\eta]^t [G_\xi] - [G_\xi]^t [G_\eta] ] \{x_e\} = \{y_e\}^t [G']^t \{x_e\} \quad (7.52)$$

La matriz cuadrada  $[G']$  es antisimétrica ( $G'_{ii} = 0$ ,  $G'_{ij} = -G'_{ji}$  para  $i \neq j$ ). En general, el Jacobiano es variable sobre el elemento, ya que es una función de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ . En el caso del cuadrilátero isoparamétrico, las componentes de la matriz  $[G']$  son polinomios de la forma  $\pm (1 \pm \xi) (1 \pm \eta) / 16$ . Sin embargo, se puede demostrar que la expresión del Jacobiano se reduce a la de un polinomio lineal completo, debido a que los términos en  $\xi\eta$  se cancelan. Además, en un paralelogramo, y en particular en un rectángulo resulta constante, con valor igual a un cuarto del área del elemento.

La determinación de las matrices de masa y de rigidez se realiza con integración numérica sobre el dominio cuadrado en el plano  $\xi-\eta$ . El método de Gauss-Legendre es el más usado en la práctica. Para su aplicación se utiliza la fórmula (5.38) dos veces, primero en la dirección  $\xi$  y luego en la dirección  $\eta$  (o viceversa):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^q P_j \left( \sum_{i=1}^q P_i f(\xi_i, \eta_j) \right) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q P_i P_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (7.53)$$

donde  $q$  es el número de puntos de integración, en este caso el mismo en ambas direcciones. Los valores de  $\xi_i$  ( $\eta_j$ ) y de  $P_i$  ( $P_j$ ) se encuentran en la Tabla 5.1.5 de la página 116.

Por ejemplo, si la función  $f(\xi, \eta)$  es el producto de un polinomio lineal en  $\xi$  por otro lineal en  $\eta$ , la fórmula (7.53) reproduce exactamente el valor de la integral tomando un solo punto de integración en cada dirección.

La matriz de masa consistente se obtiene calculando la integral (7.22):

$$[m_e] = \rho h \int_A [N]^t [N] dA = \rho h \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^t [N] |J| d\xi d\eta \quad (7.54)$$

donde  $[N]$  retoma el significado de la matriz de dos filas y ocho columnas, definida para el rectángulo de cuatro nodos en (7.27). En este caso la matriz simétrica  $[N]^t [N]$  es de octavo orden. Sus componentes contienen productos de cuatro polinomios lineales, dos en la variable  $\xi$  y dos en  $\eta$ ; vale decir que cada componente se expresa con el producto de dos polinomios cuadráticos en cada variable. En cuanto al Jacobiano, en el caso más general del cuadrilátero de cuatro nodos es un polinomio lineal en ambas variables. Por consiguiente, la obtención de la matriz de masa involucra integrales de polinomios de tercer grado en  $\xi$  y  $\eta$ . Utilizando Gauss-Legendre de dos puntos en cada dirección se calculan en forma exacta.

Para determinar la matriz de rigidez debe obtenerse previamente la matriz  $[B]$ . Dado que las deformaciones son derivadas de los desplazamientos con respecto a las variables físicas  $x$  y  $y$ , las cuales a su vez se parametrizan con los polinomios  $G_i(\xi, \eta)$ , debe efectuarse la correspondiente transformación.

Las derivadas de la componente  $u(x,y)$  con respecto a las variables adimensionales, se expresan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (7.55)$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (7.56)$$

Salvo casos excepcionales de elementos mal configurados, el Jacobiano de la transformación no es nulo y la matriz Jacobiana puede ser invertida; luego:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (7.57)$$

De manera similar se expresan las derivadas de la componente  $v(x,y)$ :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (7.58)$$

Desarrollando los productos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (7.59 \text{ a,b})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \quad (7.59 \text{ c,d})$$

Utilizando las interpolaciones geométricas (7.43) se tiene:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = [G_\xi] \{x_e\} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = [G_\eta] \{x_e\} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = [G_\xi] \{y_e\} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = [G_\eta] \{y_e\} \quad (7.60 \text{ a,b,c,d})$$

Con las interpolaciones cinemáticas (7.48):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = [N_\xi] \{u_e\} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = [N_\eta] \{u_e\} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = [N_\xi] \{v_e\} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = [N_\eta] \{v_e\} \quad (7.61 \text{ a,b,c,d})$$

Reemplazando en (7.59) se obtienen las expresiones de las deformaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( \{y_e\}^t [G_\eta]^t [N_\xi] \{u_e\} - \{y_e\}^t [G_\xi]^t [N_\eta] \{u_e\} \right) = \\ &= \frac{1}{|J|} \{y_e\}^t \left( [G_\eta]^t [N_\xi] - [G_\xi]^t [N_\eta] \right) \{u_e\} = \frac{-1}{|J|} \{y_e\}^t [P] \{u_e\} \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( \{x_e\}^t [G_\xi]^t [N_\eta] \{v_e\} - \{x_e\}^t [G_\eta]^t [N_\xi] \{v_e\} \right) = \\ &= \frac{1}{|J|} \{x_e\}^t \left( [G_\xi]^t [N_\eta] - [G_\eta]^t [N_\xi] \right) \{v_e\} = \frac{+1}{|J|} \{x_e\}^t [P] \{v_e\} \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \{x_e\}^t \left( [G_\xi]^t [N_\eta] - [G_\eta]^t [N_\xi] \right) \{u_e\} + \\ &+ \frac{1}{|J|} \{y_e\}^t \left( [G_\eta]^t [N_\xi] - [G_\xi]^t [N_\eta] \right) \{v_e\} = \\ &= \frac{1}{|J|} \{x_e\}^t [P] \{u_e\} - \frac{1}{|J|} \{y_e\}^t [P] \{v_e\} \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\text{donde } [P] = [G_\xi]^t [N_\eta] - [G_\eta]^t [N_\xi] \quad (7.65)$$

Agrupando:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} -\{y_e\}^t [P] & [0] \\ [0] & \{x_e\}^t [P] \\ \{x_e\}^t [P] & -\{y_e\}^t [P] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{v_e\} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta_e\} \quad (7.66)$$

donde  $[0]$  es un vector-fila con  $n$  componentes nulas.

En el caso particular de un elemento isoparamétrico, se cumple  $[G] = [N]$ . En consecuencia, en este caso la matriz  $[P]$  se expresa:

$$[P] = [N_\xi]^t [N_\eta] - [N_\eta]^t [N_\xi] \quad (7.67)$$

Nótese que en (7.66) el vector de los desplazamientos nodales agrupa consecutivamente la  $n$  componentes de la dirección  $x$ , y luego la restantes  $n$  componentes de la dirección  $y$ , en lugar de quedar alternadas. Esto no constituye un serio inconveniente para la posterior implementación del algoritmo en un programa de computación. Por otra parte, cabe destacar que el Jacobiano interviene como divisor en todas las componentes de la matriz  $[B]$ .

Reemplazando en (7.17) la matriz  $[B]$  definida en (7.66) e integrando en el plano  $\xi - \eta$ , se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$[k_e] = h \int_A [B]^t [D] [B] dA = h \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^t [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (7.68)$$

Para la elección apropiada del número de puntos de integración numérica es necesario analizar el integrando con el fin de verificar si se trata de un polinomio, y en tal caso establecer el grado. Con el cuadrilátero de cuatro nodos la matriz  $[B]$  contiene términos bilineales de la forma  $\pm(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$  divididos por el Jacobiano, que a su vez es un polinomio lineal. Por consiguiente, el integrando no es un polinomio, y por ende la integral no puede ser calculada en forma exacta con integración numérica. Algunos autores sugieren hacer el cálculo, en la práctica, con 2x2 puntos (2 en cada dirección), que da el valor exacto cuando el Jacobiano es constante (elemento paralelogramo).

El algoritmo desarrollado para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos se implementó en el programa EPC4N ( **E**stado **P**lano con **C**uadriláteros de **4** **N**odos), utilizando integración numérica de Gauss-Legendre de 3x3 puntos, o de 4x4 puntos, a opción del usuario. Salvo el identificador del elemento en la primera línea, que debe ser la cadena de caracteres EPC4N, el formato del archivo de datos es el mismo que para el programa EPR4N que opera con el rectángulo de cuatro nodos con lados paralelos a los ejes coordenados globales. Es obvio que en modelos con elementos rectangulares, proporciona los mismos resultados que el programa EPR4N. En las aplicaciones prácticas no es conveniente utilizar cuadriláteros con formas muy diferentes a la rectangular, debido a la consiguiente pérdida de precisión. Por otra parte, los modelos no pueden incluir elementos mal configurados, como los que se muestran en la Figura 7.4.3 en la página siguiente.

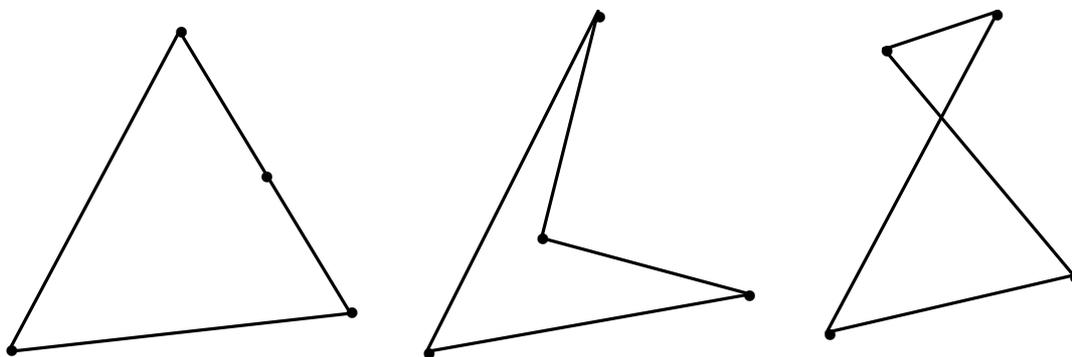


Figura 7.4.3: Elementos cuadriláteros mal configurados.

### 7.5 Rectángulo de ocho nodos

A partir del algoritmo general para modelos planos desarrollado en la Sección anterior, pueden proponerse otros elementos triangulares o cuadrangulares. Una manera de mejorar la calidad del rectángulo con lados paralelos a los ejes globales, estudiado en la Sección 7.3, es agregar cuatro nodos cinemáticos, uno en el punto medio de cada lado rectilíneo, como se muestra en la Figura 7.5.1.

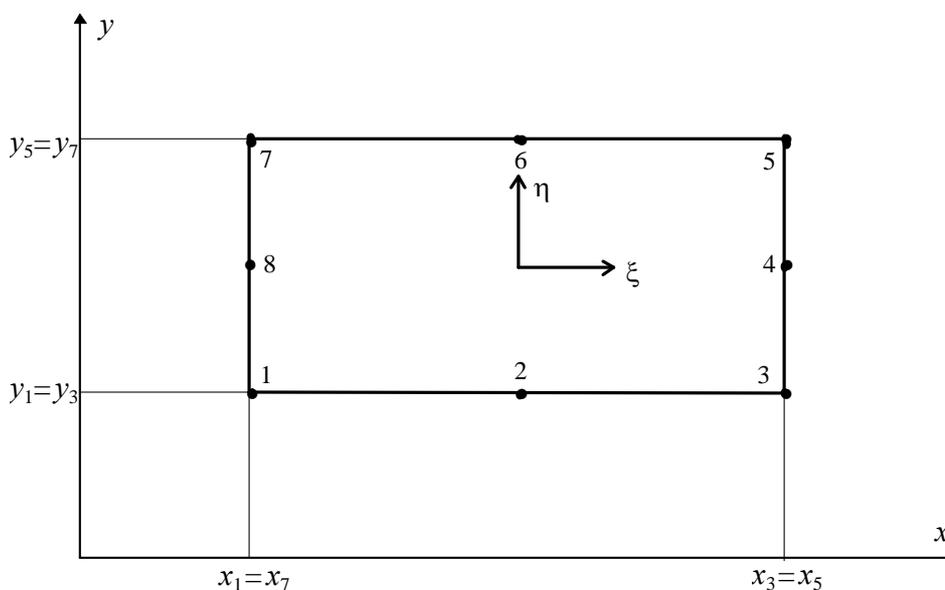


Figura 7.5.1: Rectángulo de ocho nodos.

Los vértices (nodos **1,3,5,7**) son los nodos geométricos, de modo que corresponde utilizar los siguientes polinomios interpolantes geométricos que intervienen en las expresiones (7.42):

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) ; \quad G_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) \quad (7.69 \text{ a,b})$$

$$G_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) ; \quad G_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) \quad (7.69 \text{ c,d})$$

Por otra parte, la presencia de ocho nodos cinemáticos implica que cada una de las funciones  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  se puede describir con un polinomio de ocho términos. Como el polinomio cuadrático completo contiene seis términos, hay que seleccionar dos de los cuatro términos de tercer grado. Adoptando los

términos que se indican en el esquema (b) de la Figura 7.1.4, se deducen las siguientes funciones de forma (se omite el desarrollo algebraico; se determinan con la condición  $N_i(\xi_i, \eta_i)=1$  en el nodo  $i$ , y  $N_i(\xi, \eta)=0$  en los restantes siete nodos):

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) (1+\xi+\eta) ; & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (1-\xi+\eta) ; & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1+\xi) (1-\eta^2) \\
 N_5(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (1-\xi-\eta) ; & N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1+\eta) \\
 N_7(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (1+\xi-\eta) ; & N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi) (1-\eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{7.70}$$

Puede comprobarse que la suma de estas funciones es igual a la unidad. También se cumplen las condiciones análogas a las dadas en (7.14). Este elemento es subparamétrico, debido a que tiene menos nodos geométricos que cinemáticos. También integra la familia de los denominados elementos *serendípitos* [19], por la fortuita elección de los términos adicionales en el polinomio aproximante de los desplazamientos:  $x^2y$  y  $xy^2$  en lugar de  $x^3$  e  $y^3$ . Por otra parte, por tratarse de un rectángulo el Jacobiano es constante, igual a un cuarto del área del elemento.

Las matrices de masa y rigidez se obtienen aplicando (7.54) y (7.68), respectivamente. La matriz  $[B]$  se determina reemplazando (7.65) en (7.66). Para el cálculo exacto de ambas matrices con el método de integración numérica de Gauss-Legendre, se necesitan 3x3 puntos de integración (en los integrandos, el mayor valor del exponente de cada variable es 4).

El algoritmo precedente fue implementado en el programa **EPR8N** (**EPR8N-Q!**, **EPR8N-Q#**, **EPR8N-V!** y **EPR8N-Q#**). La organización de los datos se describe en el archivo de texto **EPR8N.TXT** y en **EPR8N.RTF**. Como en los casos anteriores, la salida son archivos en los que se graban las bandas de las dos matrices del modelo. Un detalle de la codificación es que en la entrada de datos, además de dar el número total de nodos se ingresa el número de vértices, ya que luego sólo se dan las coordenadas de los nodos geométricos.

Con este programa se analizó la barra cantilever de la Figura 7.2.6. Valores de las cuatro primeras frecuencias ya fueron hallados con el triángulo de tres nodos (Tablas 7.2.2 y 7.2.3), y con mejores resultados empleando el rectángulo de cuatro nodos (Tabla 7.3.1). Se procesaron dos modelos: el primero con 10 elementos cuadrados del mismo tamaño, dando un total de 53 nodos de los cuales 22 son geométricos. Después de imponer las restricciones en los tres nodos del borde izquierdo, el modelo queda con 100 grados de libertad; el ancho de banda es 16. El segundo modelo deriva del anterior dividiendo en cuatro cada uno de los 10 elementos; en consecuencia, tiene 40 elementos con 165 nodos de los cuales 63 son vértices; el ancho de banda pasa a 22. Inmovilizando los cinco nodos del borde izquierdo, quedan 320 grados de libertad. En la página siguiente, en la Tabla 7.5.1 se dan los resultados del coeficiente de frecuencia  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$  correspondientes a los primeros cuatro modos de vibración, obtenidos operando con doble precisión.

## VIBRACIONES DE MODELOS PLANOS CONTINUOS

Tabla 7.5:1: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$ . Viga cantilever (Figura 7.2.6;  $\nu=0$ ).

Programa	<i>Nel</i>	<i>GDL</i>	<i>ab</i>	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
EPR8N-Q#	10	100	16	3.4964	21.2225	54.4140	56.7626
EPR8N-Q#	40	320	22	3.4934	21.1051	54.4140	56.0813
EPR8N-V#	160	1220	34	3.4934	21.0954	54.4140	56.0229
BRFVT-Q#	100	200	4	3.4934	21.1039	-----	56.0677

En la Sección A.3 del Apéndice se describe un ejemplo de aplicación, que es este caso de la viga cantilever resuelto con 40 elementos rectangulares de ocho nodos. Se observa que este modelo, con sólo 320 grados de libertad, da mejores resultados en las cuatro frecuencias, que el formado con 2560 elementos rectangulares de cuatro nodos, con 5440 grados de libertad (ver Tabla 7.3.1). Por otra parte, cabe destacar la excelente concordancia de los resultados hallados con dos teorías y algoritmos muy diferentes, estado plano de tensiones y vigas tipo Timoshenko ( $\nu=0$ ,  $\kappa=0.85$ ).

### 7.6 Cuadrilátero subparamétrico de ocho nodos

En la Figura 7.6.1 se muestra el elemento cuadrangular con un nodo geométrico y cinemático en cada vértice, y uno cinemático en el punto medio de cada lado. La única diferencia con el rectángulo estudiado en la Sección anterior es que el Jacobiano no es constante, sino un polinomio lineal en las variables  $\xi$  y  $\eta$ . Por consiguiente, aplicando integración numérica de Gauss-Legendre con 3x3 puntos se calculan los valores exactos de las componentes de la matriz de masa, ya que el mayor exponente en cada variable es 5. No sucede lo mismo con la matriz de rigidez, debido a que el Jacobiano es divisor en la matriz de deformación. En la práctica es usual aplicar Gauss-Legendre también con 3x3 puntos. Téngase en cuenta que deben evitarse los cuadriláteros con ángulos internos pequeños, o cercanos a 180°. El comportamiento del elemento mejora cuando se aproxima a la forma rectangular. Obviamente, los cuatro vértices no deben formar un elemento mal configurado, como son los mostrados en la Figura 7.4.3. Este elemento es utilizado en los programas EPC8N (EPC8N-Q!, EPC8N-Q#, EPC8N-V!, EPC8N-V#), los cuales reproducen los resultados de los programas EPR8N cuando todos los elementos son rectangulares.

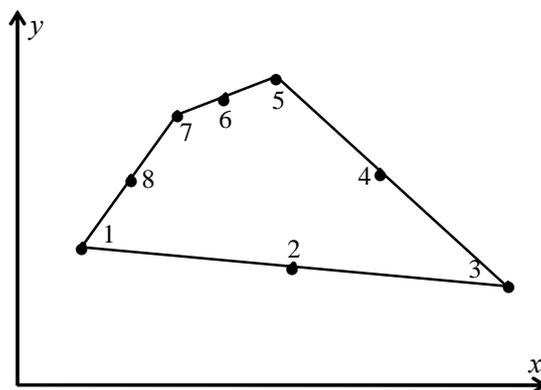


Figura 7.6.1: Cuadrilátero subparamétrico de 8 nodos.

### 7.7 Cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos

En la Figura 7.7.1 se muestra este elemento de ocho nodos, los cuales simultáneamente son geométricos y cinemáticos. Por consiguiente, los polinomios  $G_i(\xi, \eta)$  son las mismas funciones de forma  $N_i(\xi, \eta)$  dadas en (7.70).

Cabe mencionar que cada lado del elemento es una parábola cuadrática, y que el nodo intermedio no necesariamente lo divide en dos arcos de igual longitud. En particular, si dos vértices y el respectivo nodo intermedio están alineados, el lado resulta rectilíneo.

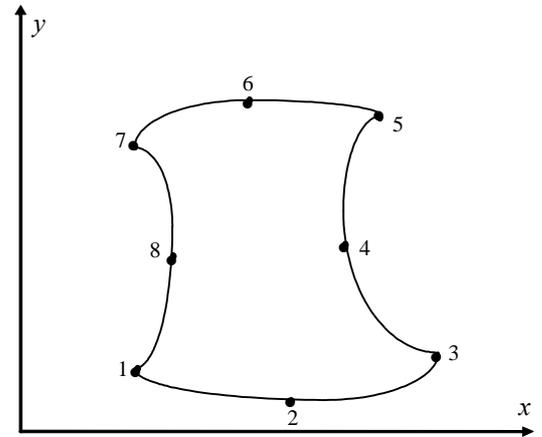


Figura 7.7.1: Cuadrilátero isoparamétrico de 8 nodos.

Sólo cuando los cuatro lados son rectos y los nodos intermedios equidistantes de los vértices, se reproduce el elemento subparamétrico de la Sección anterior.

Se puede demostrar que el Jacobiano, en el caso más general, es un polinomio cúbico. El cálculo exacto de la matriz de masa requiere utilizar 4 puntos de integración en cada dirección coordenada, ya que se integran polinomios de hasta séptimo grado. Por otra parte, la matriz de rigidez no admite el cálculo exacto con integración numérica. La única ventaja de este elemento, frente al subparamétrico, es que permite modelar contornos curvos con parábolas cuadráticas. En general, se obtienen mejores resultados, en los modelos con contornos curvos, utilizando elementos subparamétricos y aumentando adecuadamente la densidad de la malla. Por esta razón, en este curso no se ha implementado un programa de computación con la formulación del cuadrilátero isoparamétrico de 8 nodos.

### 7.8 Triángulo subparamétrico de seis nodos

En la Sección 7.5 se introdujo el rectángulo subparamétrico de ocho nodos mediante el agregado de cuatro nodos cinemáticos al rectángulo de cuatro nodos. En forma similar, añadiendo un nodo cinemático en el punto medio de cada lado del triángulo lineal se crea un elemento subparamétrico de seis nodos. En la Figura 7.8.1, en la página siguiente, se muestra el elemento en el plano coordenado global  $x$ - $y$ , con la numeración local de los seis nodos. Obviamente, cualquier vértice puede adoptarse como primer nodo local.

Además se indican las tres coordenadas naturales de un punto genérico, tal como fueron definidas con las expresiones (7.9), aunque ahora con otra notación. Teniendo en cuenta que cumplen la condición  $\xi + \eta + \lambda = 1$ , pueden adoptarse  $\xi$  y  $\eta$  como variables independientes, lo cual implica la transformación de todos

los elementos en el triángulo rectángulo isósceles en el plano  $\xi-\eta$ , que se muestra en la Figura 7.8.2. Sobre la hipotenusa de este triángulo la variable  $\lambda$  es nula.

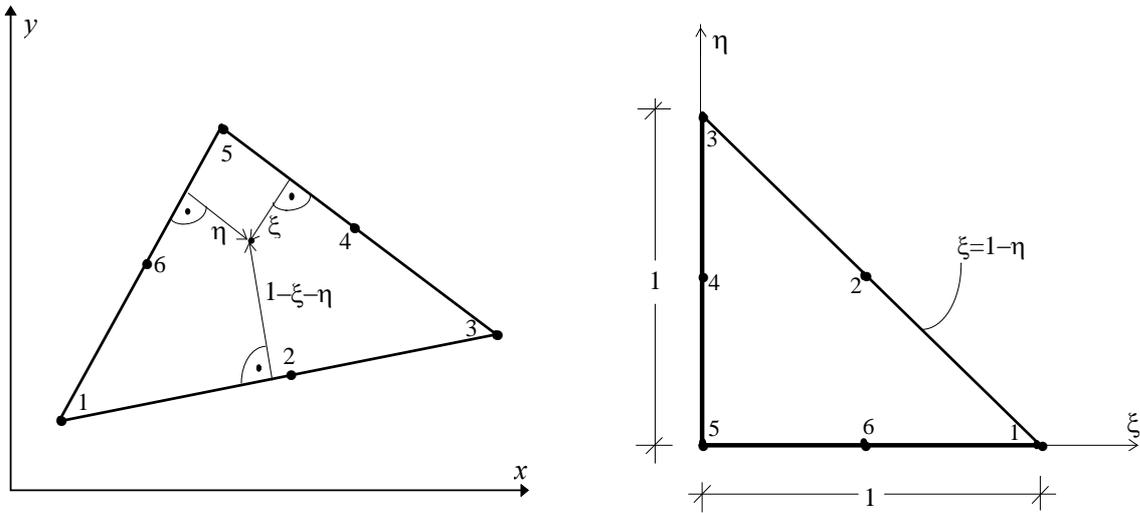


Figura 7.8.1: Triángulo subparamétrico en el plano x-y. Figura 7.8.2: Elemento en el plano  $\xi-\eta$ .

La forma del elemento queda definida por sus tres vértices (nodos geométricos) y los tres polinomios interpolantes dados en (7.7), iguales a las tres coordenadas naturales:

$$G_1(\xi, \eta) = \xi; \quad G_2(\xi, \eta) = \eta; \quad G_3(\xi, \eta) = \lambda = 1 - \xi - \eta \quad (7.71 \text{ a,b,c})$$

Dado que este elemento tiene seis grados de libertad en cada dirección coordenada, los desplazamientos se aproximan con un polinomio cuadrático completo. Luego, las funciones de forma  $N_i(\xi, \eta)$  son polinomios cuadráticos. Pueden hallarse directamente con la condición  $N_i(\xi_i, \eta_i) = 1$  en el nodo  $i$ , y  $N_i(\xi, \eta) = 0$  en los restantes cinco nodos:

$$N_1(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1); \quad N_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1); \quad N_5(\xi, \eta) = \lambda(2\lambda - 1) = 2(1 - \xi - \eta)(1/2 - \xi - \eta) \quad (7.72 \text{ a,b,c})$$

$$N_2(\xi, \eta) = 4\xi\eta; \quad N_4(\xi, \eta) = 4\eta\lambda = 4\eta(1 - \xi - \eta); \quad N_6(\xi, \eta) = 4\xi\lambda = 4\xi(1 - \xi - \eta) \quad (7.72 \text{ d,e,f})$$

Es fácil comprobar que cumplen la condición análoga a la impuesta por (7.11):

$$N_1(\xi, \eta) + N_2(\xi, \eta) + N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta) + N_5(\xi, \eta) + N_6(\xi, \eta) = 1 \quad (7.73)$$

Además satisfacen condiciones semejantes a las establecidas en (7.14):

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = 1 \quad (7.74 \text{ a,b,c,d})$$

Como el Jacobiano de la transformación es constante, igual al duplo del área del elemento triangular, la matriz de masa se determina integrando polinomios de hasta cuarto grado en las variables  $\xi, \eta$  y  $\lambda$ . La solución analítica puede obtenerse fácilmente aplicando la fórmula de Eisenberg \* [15]:

\* Eisenberg M.A. and Malvern L.E. (1973), *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 7, 574-575. On finite element integration in natural coordinates.

$$\int_A \xi^p \eta^q \lambda^r dA = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!} 2A \quad (7.75)$$

donde  $A$  es el área del elemento.

Operando:

$$[m_e] = \frac{\rho Ah}{180} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -4 & 0 & 16 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (7.76)$$

Esta matriz corresponde al vector de los desplazamientos nodales con las componentes alternadas:

$$\{\delta_e\}^t = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6] \quad (7.77)$$

La determinación de la matriz de rigidez requiere un algoritmo similar al desarrollado en la Sección 7.4, ahora con  $n = 6$  y  $n_g = 3$ . La matriz de deformación se obtiene reemplazando en (7.66) la matriz  $[P]$  definida en (7.65). Debe recordarse que el vector  $\{\delta_e\}$  en (7.66) agrupa primero las  $n$  componentes de los desplazamientos nodales de la dirección del eje  $x$ , y luego las restantes  $n$  componentes de la dirección del eje  $y$ . La matriz de rigidez se calcula sustituyendo  $[B]$  y la matriz constitutiva  $[D]$  en (7.17), e integrando sobre el dominio triangular de la Figura 7.8.2:

$$[k_e] = h \int_A [B]^t [D] [B] dA = h \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [B]^t [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (7.78)$$

En este caso  $|J| = 2A$ .

Nuevamente, es conveniente recurrir a la integración numérica, utilizando la siguiente fórmula [15,19]:

$$\int_A p^n(\xi, \eta) dA = A \sum_{i=1}^q P_i p^n(\xi_i, \eta_i) \quad (7.79)$$

donde  $q$  es el número de puntos de integración de coordenadas  $(\xi_i, \eta_i)$ , y  $p^n(\xi, \eta)$  es un polinomio de la forma  $p^n(\xi, \eta) = \alpha_{00} + \alpha_{10} \xi + \alpha_{01} \eta + \alpha_{20} \xi^2 + \alpha_{11} \xi\eta + \alpha_{02} \eta^2 + \alpha_{30} \xi^3 + \dots + \alpha_{0n} \eta^n$

Según el número y posición de los puntos de integración, queda limitado el grado del polinomio para el cual la igualdad (7.79) se cumple exactamente.

En la Tabla 7.8.1 se dan los valores de  $n$ ,  $q$ ,  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  y del factor ponderante  $P_i$ .

Tabla 7.8.1: Puntos y factores de integración numérica para un dominio triangular.

$n$	$q$	$i$	$\xi_i$	$\eta_i$	$P_i$
1	1	1	1/3	1/3	1
2	3	1	2/3	1/6	1/3
		2	1/6	2/3	1/3
		3	1/6	1/6	1/3
3	4	1	1/3	1/3	-27/48
		2	3/5	1/5	25/48
		3	1/5	3/5	25/48
		4	1/5	1/5	25/48
4	6	1	0.8168475730	0.0915762135	0.1099517437
		2	0.0915762135	0.8168475730	0.1099517437
		3	0.0915762135	0.0915762135	0.1099517437
		4	0.1081030182	0.4459484909	0.2233815897
		5	0.4459484909	0.1081030182	0.2233815897
		6	0.4459484909	0.4459484909	0.2233815897
5	7	1	1/3	1/3	0.225
		2	0.7974269853	0.1012865073	0.1259391806
		3	0.1012865073	0.7974269853	0.1259391806
		4	0.1012865073	0.1012865073	0.1259391806
		5	0.0597158717	0.4701420641	0.1323941526
		6	0.4701420641	0.0597158717	0.1323941526
		7	0.4701420641	0.4701420641	0.1323941526

En el integrando de (7.17) se presentan polinomios de segundo grado en las variables independientes  $\xi$  y  $\eta$ . Por lo tanto, son suficientes tres puntos de integración para el cálculo exacto de la matriz de rigidez.

El programa EPT6N (EPT6N-Q!, EPT6N-Q#, EPT6N-V! y EPT6N-V#), en el cual se implementa este algoritmo, calcula las matrices de rigidez y de masa de modelos compuestos por elementos triangulares subparamétricos. Con el objeto de comparar el comportamiento de este elemento con los previamente utilizados en el análisis dinámico de la viga cantilever de la Figura 7.2.6, se procesó el modelo de 20 elementos y 63 nodos que se muestra en la Figura 7.8.3.

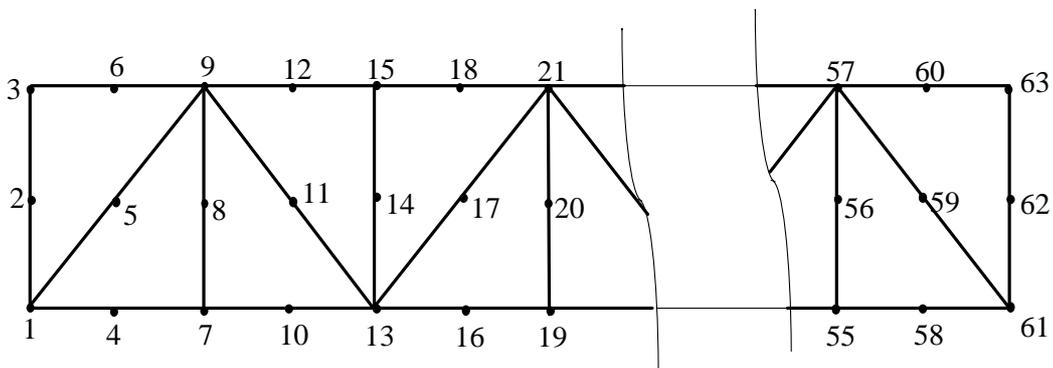


Figura 7.8.3: Modelo con 20 triángulos de seis nodos.

Una vez aplicadas las restricciones de vínculo, el modelo queda con 120 grados de libertad, con un ancho de banda 18. También se calcularon las frecuencias con un modelo de 80 elementos (205 nodos, ancho de banda 26) con 400 grados de libertad. En la Figura 7.2.7 se muestra la red de elementos triangulares para

este último modelo, ahora con triángulos de seis nodos. En la Tabla 7.8.2 se comparan los valores hallados con estos dos modelos, y con otros resultados obtenidos previamente. En la cuarta columna se agregó el valor del ancho de banda (*ab*) de las matrices.

Tabla 7.8.2: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$  Viga cantilever (Figura 7.2.6) con  $v=0$ .

Programa	<i>Nel</i>	<i>GDL</i>	<i>Ab</i>	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
EPT3N-Q#	320	400	14	3.8074	22.9674	54.4140	60.9253
EPT6N-Q#	20	120	18	3.6720	22.3156	54.4140	59.8203
EPT6N-Q#	80	400	26	3.6638	22.1187	54.4140	58.7324
EPR8N-Q#	10	100	16	3.4964	21.2225	54.4140	56.7626
EPR8N-Q#	40	320	22	3.4934	21.1051	54.4140	56.0813
BRFVT-Q#	100	200	4	3.4934	21.1039	-----	56.0677

Los resultados numéricos indican que el elemento rectangular de ocho nodos se destaca como el más eficiente de los cuatro, al menos para el caso particular analizado. Cabe esperar que esta mayor eficiencia se presente también en otros problemas similares.

### 7.9 Triángulo isoparamétrico de seis nodos

En esta última Sección sobre análisis de vibraciones de modelos planos continuos se generaliza el algoritmo precedente, de manera que los seis nodos cinemáticos también participan en la definición geométrica del elemento. Por consiguiente, los polinomios interpolantes de las coordenadas físicas son las funciones de forma dadas en (7.72). Del mismo modo que en el cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos, cada lado del elemento es una parábola de segundo grado con un nodo que no necesariamente ocupa el punto medio. Además, el lado es recto si los dos vértices y dicho nodo intermedio están alineados. En particular, si los tres lados son rectos y los nodos intermedios equidistan de los vértices, el elemento se comporta exactamente como el triángulo subparamétrico estudiado en la Sección anterior. Las componentes de la matriz  $[G^T]$  de sexto orden, que intervienen en el cálculo del Jacobiano, contienen términos polinómicos de segundo grado. Por lo tanto, en el integrando de la fórmula (7.54) se presentan polinomios de hasta sexto grado. Por otra parte, al aplicar la expresión (7.68) para calcular la matriz de rigidez del elemento también se encuentran términos de sexto grado, ya que para hallar la matriz  $[P]$  debe utilizarse la expresión (7.67). La integración numérica con siete puntos no es suficiente para el cálculo exacto de las dos matrices del elemento. Por esta razón, es usual la preferencia del elemento subparamétrico, aumentando convenientemente el número de nodos sobre los bordes curvos del modelo, para una mejor aproximación de la geometría. En consecuencia, en este curso tampoco se incluye un programa de computación con la formulación del triángulo isoparamétrico de seis nodos.



# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## 8. VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

### 8.1 Introducción

El método de elementos finitos es sumamente útil para el análisis dinámico de placas planas. El plano medio de la placa, contenido en el plano coordenado global  $x$ - $y$  (ver Figura 3.5.1 en la página 85), es el modelo continuo bidimensional que se divide en triángulos, rectángulos o cuadriláteros. Las expresiones de las energías de deformación elástica y cinética fueron deducidas en las últimas secciones del Capítulo 3. Las fórmulas (3.92) a (3.98) se aplican en el caso de placas delgadas. Debido a que en la expresión (3.94) de la energía de deformación flexional intervienen derivadas segundas de la función del desplazamiento transversal  $w(x,y)$ , el polinomio que se adopte debe ser, como mínimo, cuadrático y completo en ambas variables, a fin de que no resulten nulas las componentes del vector deformación definido en (3.92). Asimismo, dicha función y sus dos derivadas primeras deben ser incluidas como grados de libertad de cada nodo del modelo. Los elementos conformes son los que cumplen con la condición de continuidad de las tres magnitudes ( $w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ ) sobre los lados comunes de elementos contiguos.

Cuando el espesor adquiere relevancia (placas moderadamente gruesas) se utilizan las expresiones (3.102) a (3.109). A diferencia de las placas delgadas, en la energía de deformación flexional y por corte, dada en (3.106), intervienen las derivadas primeras del desplazamiento  $w(x,y)$  y de las dos componentes  $\theta_x(x,y)$  y  $\theta_y(x,y)$  de la rotación de la fibra transversal. Por consiguiente, los valores de estas tres funciones son grados de libertad necesarios en cada nodo del modelo, y en los elementos pueden ser aproximadas con sendos polinomios de igual grado.

### 8.2 Placas delgadas

#### 8.2.1 Algoritmo general

En la expresión de la energía de deformación elástica de la placa delgada intervienen las derivadas de segundo orden del desplazamiento transversal  $w=w(x,y)$  de los puntos del plano medio de la misma. Dicho desplazamiento se aproxima, en un elemento finito, con una función  $w=w(\xi,\eta)$ , expresada mediante una suma de productos de funciones de forma  $N(\xi,\eta)$  por los desplazamientos de los nodos del elemento, agrupados en el vector  $\{\delta_e\}$ .

En esta Sección se desarrolla un algoritmo general, similar al descrito para estados planos en la Sección 7.4, con una transformación de coordenadas definida con funciones  $x(\xi,\eta)$  e  $y(\xi,\eta)$ .

Derivación la función de función  $w=w(x,y)$  con respecto a las variables adimensionales, se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (8.2)$$

VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

y resolviendo el sistema lineal formado por (8.1) y (8.2), resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (8.4)$$

donde  $|J|$  es el Jacobiano de la transformación:  $|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$  (8.5)

Derivando (8.1) con respecto a la variable adimensional  $\xi$ , se obtiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \quad (8.6)$$

y derivando las funciones de función  $\frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\frac{\partial w}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8.8)$$

Reemplazando (8.7) y (8.8) en (8.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Análogamente:  $\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$  (8.10)

Por otra parte, derivando (8.2) con respecto a la variable adimensional  $\xi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \quad (8.11)$$

Reemplazando (8.7) y (8.8) en (8.11), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \quad (8.12)$$

Trasponiendo los dos últimos términos al primer miembro en (8.9), (8.10) y (8.12):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (8.15)$$

Con notación matricial, el sistema (8.13), (8.14) y (8.15) se expresa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (8.16)$$

La matriz-columna en el segundo miembro de (8.16) es el *vector de curvaturas*  $\{\chi\}$  definido en la Sección 3.6.1 al estudiar flexión de placas delgadas. En lo que sigue, la matriz que en (8.16) premultiplica al vector  $\{\chi\}$  se indica con  $[T]$ .

Por otra parte, derivando la expresión  $w(\xi, \eta) = [N]\{\delta_e\}$  del desplazamiento en el elemento finito, con respecto a las variables adimensionales, se tiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [N]\{\delta_e\} = [N_{\xi\xi}]\{\delta_e\} \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} [N]\{\delta_e\} = [N_{\eta\eta}]\{\delta_e\} \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} [N]\{\delta_e\} = [N_{\xi\eta}]\{\delta_e\} \quad (8.19)$$

Además, reemplazando  $w(\xi, \eta) = [N]\{\delta_e\}$  en (8.3) y (8.4) resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} [N_\xi] - \frac{\partial y}{\partial \xi} [N_\eta] \right) \{\delta_e\} ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} [N_\eta] - \frac{\partial x}{\partial \eta} [N_\xi] \right) \{\delta_e\} \quad (8.20 \text{ a,b})$$

Reemplazando (8.17), (8.18), (8.19), (8.20a) y (8.20b) en las componentes del vector del primer miembro de (8.16), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = [[N_{\xi\eta}] + L_1 [N_\xi] + M_1 [N_\eta]] \{\delta_e\} \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = [[N_{\xi\eta}] + L_2 [N_\xi] + M_2 [N_\eta]] \{\delta_e\} \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = [[N_{\xi\eta}] + L_3 [N_\xi] + M_3 [N_\eta]] \{\delta_e\} \quad (8.23)$$

donde:

$$L_1 = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) ; \quad M_1 = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \quad (8.24 \text{ a,b})$$

$$L_2 = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) ; \quad M_2 = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \quad (8.25 \text{ a,b})$$

$$L_3 = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right); \quad M_3 = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \quad (8.26 \text{ a,b})$$

Reemplazando (8.21), (8.22) y (8.23) en el primer miembro de (8.16), y premultiplicando por la inversa de la matriz  $[T]$ , finalmente se obtiene el vector de curvaturas en función de los desplazamientos de los nodos del elemento:

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} [N_{\xi\xi}] + L_1 [N_\xi] + M_1 [N_\eta] \\ [N_{\eta\eta}] + L_2 [N_\xi] + M_2 [N_\eta] \\ [N_{\xi\eta}] + L_3 [N_\xi] + M_3 [N_\eta] \end{Bmatrix} \{\delta_e\} = [B] \{\delta_e\} \quad (8.27)$$

Finalmente, de acuerdo con la expresión (3.93) de la energía elástica de deformación, integrando en el plano de las coordenadas adimensionales  $\xi$ - $\eta$ , se calcula la matriz de rigidez  $[k_e]$  del elemento.

Por otra parte, para el cálculo de la matriz de masa  $[m_e]$  se aplica la expresión de la energía cinética (3.98), en la que se reemplaza la velocidad transversal con la expresión  $\dot{w} = [N] \{\dot{\delta}_e\}$ .

Las expresiones deducidas del algoritmo general se simplifican cuando las funciones  $x(\xi, \eta)$  e  $y(\xi, \eta)$ , que definen la geometría del elemento, son lineales. En otras palabras, cuando los lados del elemento son rectilíneos (triángulos, rectángulos y cuadriláteros). En estos casos se cumple  $\partial^2 x / \partial \xi^2 = 0$ ,  $\partial^2 x / \partial \eta^2 = 0$ ,  $\partial^2 y / \partial \xi^2 = 0$ , y  $\partial^2 y / \partial \eta^2 = 0$ . Por consiguiente,  $L_1$ ,  $M_1$ ,  $L_2$  y  $M_2$  son nulos, y la expresión (8.27) se reduce a:

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} [N_{\xi\xi}] \\ [N_{\eta\eta}] \\ [N_{\xi\eta}] + L_3 [N_\xi] + M_3 [N_\eta] \end{Bmatrix} \{\delta_e\} = [T]^{-1} [N^*] \{\delta_e\} = [B] \{\delta_e\} \quad (8.28)$$

Si el elemento finito es cuadrangular (Figura 7.4.1), la integración se realiza en el cuadrado del plano de coordenadas adimensionales mostrado en la Figura 8.2.2 en la página 196. En tal caso, las matrices  $[k_e]$  y  $[m_e]$  se calculan con:

$$[k_e] = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^t [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (8.29)$$

$$[m_e] = \rho h \int_A [N]^t [N] dA = \rho h \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^t [N] |J| d\xi d\eta \quad (8.30)$$

donde  $h$  es el espesor del elemento y  $[D]$  es la matriz de elasticidad para materiales isótropos, dada en (3.71).

En particular, si el elemento finito es rectangular, la implementación del algoritmo general se simplifica aun más, debido a que las funciones  $x(\xi, \eta)$  e  $y(\xi, \eta)$  toman la forma lineal más simple. En efecto, de la figura 7.3.1 se deduce:

$$x(\xi, \eta) = x_1 + a(1 + \xi); \quad y(\xi, \eta) = y_1 + b(1 + \eta) \quad (8.31 \text{ a,b})$$

En consecuencia, el Jacobiano, que se calcula con (8.5), no es variable sino constante, igual a un cuarto del área del rectángulo ( $|J| = ab$ ), y se anulan las expresiones de  $L_3$  y  $M_3$  dadas en (8.26 a,b). Además la matriz  $[T]$  resulta diagonal. Por lo tanto, el cálculo de las integrales (8.29) y (8.30) se realiza analíticamente, sin mayores inconvenientes. Por otra parte, se puede calcular la matriz de rigidez con la relación constitutiva de materiales ortótropos, dada por la matriz (3.77). Obviamente, la matriz de rigidez así obtenida corresponde al elemento rectangular con sus lados paralelos a la direcciones principales de ortotropía (*ejes materiales*) [23,24].

Dado el importante rol que cumplen las placas en muy diversas aplicaciones de la Ingeniería, el análisis estático y dinámico de las mismas ha sido preocupación de los ingenieros e investigadores dedicados al desarrollo del método de elementos finitos. La mayor dificultad en el desarrollo de elementos para flexión de placas, radica en la adopción de adecuadas funciones de forma, que aseguren la convergencia a la solución exacta de la teoría de placas delgadas. Existen muchas publicaciones en las que se proponen elementos con diferentes características. En las siguientes secciones se describen los más simples, y en algunos ejemplos se muestran los resultados obtenidos con los mismos, comparándolos con otras soluciones.

### 8.2.2 Rectángulo conforme de doce grados de libertad

La similitud del comportamiento flexional de placas y vigas sugiere el empleo de las mismas funciones de forma de elementos de la viga tipo Bernoulli-Euler para desarrollar elementos de placa delgada [16]. En la página siguiente, en la Figura 8.2.1 se muestra un elemento rectangular en el plano coordenado  $x$ - $y$  de una terna global dextrógira. En la misma figura se indican las medidas de los lados, la numeración local de los cuatro nodos y los tres grados de libertad en cada uno de ellos. En el algoritmo que se desarrolla a continuación, el nodo más cercano al origen se adopta como primer nodo local.

En la teoría de flexión de placas delgadas, las rotaciones de la fibra transversal son derivadas de la función desplazamiento:

$$\theta_x = \partial w / \partial y; \quad \theta_y = -\partial w / \partial x \quad (8.32 \text{ a,b})$$

El vector de los desplazamientos nodales del elemento se escribe:

$$\{\delta_e\}^t = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}] \quad (8.33)$$

Algunos autores prefieren adoptar  $w$ ,  $\partial w / \partial x$  y  $\partial w / \partial y$ , en lugar de  $w$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$ . Nótese que el desplazamiento transversal, en la dirección del eje  $z$ , se eligió como primera componente en cada nodo.

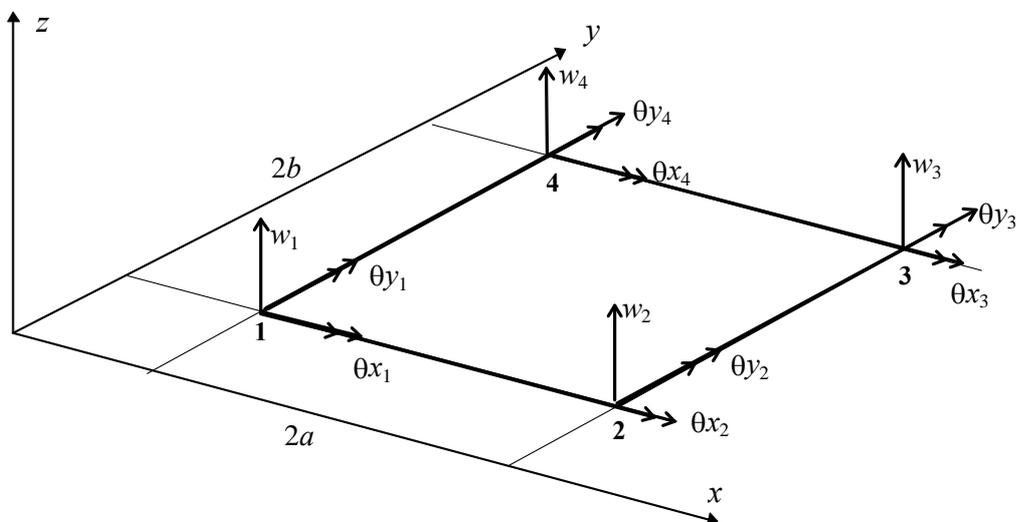


Figura 8.2.1: Elemento rectangular de cuatro nodos.

Para definir variables adimensionales se utiliza un sistema local de coordenadas  $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ , paralelo al global  $x-y$ , con origen en el centro del elemento. Con las coordenadas locales se definen:  $\xi = \mathbf{x}/a$  y  $\eta = \mathbf{y}/b$ . En la Figura 8.2.2 se muestra el cuadrado en el que se transforma todo elemento rectangular, al pasar del plano físico  $x-y$  al adimensional  $\xi-\eta$ .

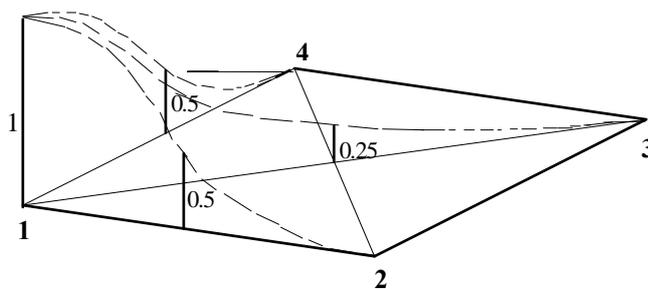
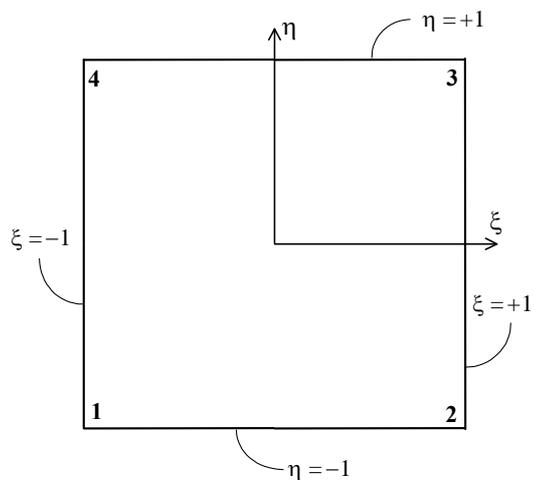


Figura 8.2.3: Función de forma  $N_1(\xi, \eta)$ .

Figura 8.2.2: Elemento en el plano  $\xi-\eta$ .

Como es sabido, las funciones de forma, con las cuales se aproxima la función del desplazamiento transversal en el elemento, se pueden definir en este dominio adimensional:

$$w(\xi, \eta) = [N(\xi, \eta)]\{\delta_e\} \tag{8.34}$$

Un método sencillo para obtener expresiones polinómicas de las componentes de la matriz-fila  $[N(\xi, \eta)]$  consiste en efectuar adecuados productos de las funciones de forma utilizadas para el elemento de dos nodos de la viga Bernoulli-Euler, dadas en (5.46) y cuyos gráficos se muestran en la Figura 5.3.2 en la página 120. Por ejemplo, multiplicando la primera por esa misma función en la variable  $\eta$ , se obtiene un

polinomio de tercer grado en ambas variables, apto para la función de forma  $N_1(\xi, \eta)$  del elemento rectangular para placas planas:

$$N_1(\xi, \eta) = (2 - 3\xi + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3)/16 \quad (8.35)$$

En la Figura 8.2.3, en la página anterior, se muestra el gráfico de la misma. Nótese que vale la unidad en el nodo local **1**, cero en los tres restantes, y las derivadas primeras se anulan en los cuatro nodos.

Análogamente, haciendo el producto de la primera de (5.46) por la segunda, ésta expresada en función de  $\eta$  y del lado  $b$ , se tiene:

$$N_2(\xi, \eta) = b(2 - 3\xi + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3)/16 \quad (8.36)$$

Esta función es nula en los cuatro vértices, y lo mismo sucede con la derivada con respecto a  $\xi$ . La derivada con respecto a  $\eta$ , en el nodo **1** es igual al lado  $b$ , y cero en los otros tres nodos. Para obtener las derivadas con respecto a las variables físicas se aplica:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (8.37 \text{ a,b})$$

Por consiguiente, se cumple:  $\partial N_2(\xi_1, \eta_1)/\partial y = 1$

Continuando con este procedimiento, se expresan las restantes funciones de forma, una por cada grado de libertad del elemento:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (2 - 3\xi + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3)/16 ; & N_1(\xi_1, \eta_1) &= 1 \\ N_2(\xi, \eta) &= b(2 - 3\xi + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3)/16 ; & \partial N_2(\xi_1, \eta_1)/\partial \eta &= b \\ N_3(\xi, \eta) &= -a(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3)/16 ; & \partial N_3(\xi_1, \eta_1)/\partial \xi &= -a \\ N_4(\xi, \eta) &= (2 + 3\xi - \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3)/16 ; & N_4(\xi_2, \eta_2) &= 1 \\ N_5(\xi, \eta) &= b(2 + 3\xi - \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3)/16 ; & \partial N_5(\xi_2, \eta_2)/\partial \eta &= b \\ N_6(\xi, \eta) &= a(1 + \xi - \xi^2 - \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3)/16 ; & \partial N_6(\xi_2, \eta_2)/\partial \xi &= -a \\ N_7(\xi, \eta) &= (2 + 3\xi - \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3)/16 ; & N_7(\xi_3, \eta_3) &= 1 \\ N_8(\xi, \eta) &= -b(2 + 3\xi - \xi^3)(1 + \eta - \eta^2 - \eta^3)/16 ; & \partial N_8(\xi_3, \eta_3)/\partial \eta &= b \\ N_9(\xi, \eta) &= a(1 + \xi - \xi^2 - \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3)/16 ; & \partial N_9(\xi_3, \eta_3)/\partial \xi &= -a \\ N_{10}(\xi, \eta) &= (2 - 3\xi + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3)/16 ; & N_{10}(\xi_4, \eta_4) &= 1 \\ N_{11}(\xi, \eta) &= -b(2 - 3\xi + \xi^3)(1 + \eta - \eta^2 - \eta^3)/16 ; & \partial N_{11}(\xi_4, \eta_4)/\partial \eta &= b \\ N_{12}(\xi, \eta) &= -a(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3)/16 ; & \partial N_{12}(\xi_4, \eta_4)/\partial \xi &= -a \end{aligned} \quad (8.38)$$

Estas funciones de forma poseen las siguientes propiedades:

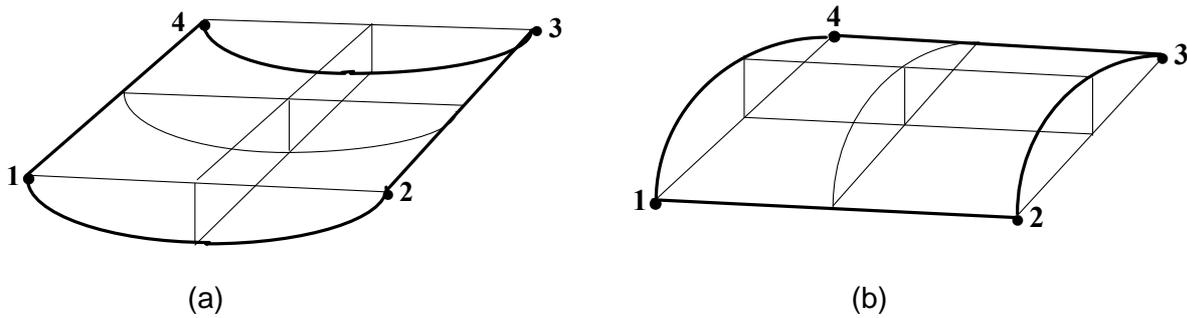
- 1) Se cumple la continuidad de  $w$ ,  $\theta_x = \partial w/\partial y$  y  $\theta_y = -\partial w/\partial x$  entre elementos adyacentes. Adicionalmente, también hay continuidad en la derivada segunda mixta  $\partial^2 w/\partial x \partial y$ , aunque esta propiedad no es requisito para la cualidad de *conforme* del elemento.

VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

2) Reproducen adecuadamente deformaciones constantes de flexión. Esto se comprueba imponiendo los siguientes desplazamientos nodales:  $w_1=w_2=w_3=w_4=0$ ;  $\theta_{x1}=\theta_{x2}=\theta_{x3}=\theta_{x4}=0$ ;  $\theta_{y1}=-\theta_{y2}=-\theta_{y3}=\theta_{y4}=1$ . Sustituyendo en (8.34) se obtiene:  $w(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) - N_6(\xi, \eta) - N_9(\xi, \eta) + N_{12}(\xi, \eta)$ .

Operando, se deducen:  $\partial w/\partial x=(1/a)\partial w/\partial \xi=\xi$ ;  $\partial w/\partial y=(1/b)\partial w/\partial \eta=0$ ;  $\partial^2 w/\partial x^2=(1/a^2)\partial^2 w/\partial \xi^2=1/a$

En la Figura 8.2.4 (a) se muestra un esquema del elemento deformado.



Figuras 8.2.4 (a) y (b): Deformaciones del elemento con curvaturas constantes de flexión.

Análogamente, imponiendo  $w_1=w_2=w_3=w_4=0$ ;  $\theta_{x1}=\theta_{x2}=-\theta_{x3}=-\theta_{x4}=1$ ;  $\theta_{y1}=\theta_{y2}=\theta_{y3}=\theta_{y4}=0$ , se llega a:  $\partial w/\partial x=(1/a)\partial w/\partial \xi=0$ ;  $\partial w/\partial y=(1/b)\partial w/\partial \eta=-\eta$ ;  $\partial^2 w/\partial y^2=(1/b^2)\partial^2 w/\partial \eta^2=-1/b$

En la Figura 8.2.4 (b) se muestra el elemento deformado.

3) Al contrario de lo que sucede con la flexión, un estado de torsión pura constante no puede ser reproducido por la función aproximada del desplazamiento transversal. En efecto, imponiendo  $w_1=-w_2=w_3=-w_4=1$ ,  $\theta_{x1}=-\theta_{x2}=-\theta_{x3}=\theta_{x4}=-1/b$ ,  $\theta_{y1}=\theta_{y2}=-\theta_{y3}=-\theta_{y4}=1/a$ , debería resultar la superficie reglada que se muestra en la Figura 8.2.5, en la que se cumple  $\partial^2 w/\partial x \partial y=1/ab$ .

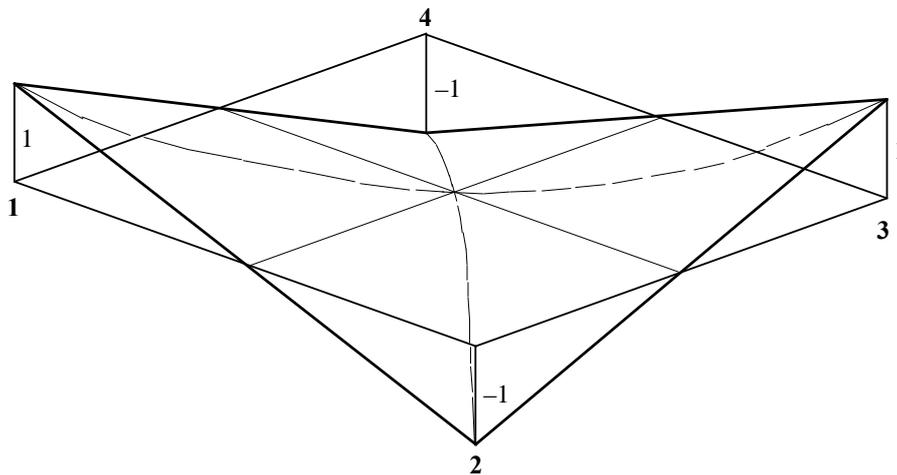


Figura 8.2.5: Deformación con curvatura constante de torsión.

Reemplazando los desplazamientos nodales en (8.34) y operando, se llega a un polinomio cuadrático en ambas variables como expresión de la derivada segunda mixta  $\partial^2 w / \partial x \partial y$ , en lugar del valor constante  $1/ab$ . Además, dicha derivada mixta se anula en los cuatro nodos del elemento. Esto último da lugar a un inesperado comportamiento muy deficiente del elemento, pues introduce una restricción cinemática no deseada, que se traduce en un incremento de su rigidez. Al aumentar el número de elementos del modelo, se incrementa el número de puntos (los nodos) donde la deformación torsional es nula. En el límite el modelo tiende a una superficie con curvatura torsional nula.

A pesar del defecto señalado en el párrafo anterior, las funciones de forma (8.38) fueron utilizadas por el Profesor J.S. Przemieniecki [16], quien dedujo las correspondientes matrices del elemento y las publicó en su libro. Con dichas matrices se implementó el programa PDR12 (PDR12-Q!, PDR12-Q#, PDR12-V! y PDR12-V#). Con este programa se determinaron valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega L^2 (\rho h / D)^{1/2}$  con  $\nu = 0.3$ , para una placa cuadrada de lado  $L$  y con apoyos puntuales en los cuatro vértices, cuya solución exacta no se conoce. Este caso suele presentar dificultades en algunos métodos aproximados por la ausencia de condiciones esenciales en los bordes libres. En la Tabla 8.2.1 se muestran los resultados hallados, operando con doble precisión, con mallas de elementos cuadrados generadas con  $n$  divisiones en cada lado de un cuarto de la placa. En la misma tabla se transcriben valores aproximados publicados por A.W. Leissa\*, como asimismo valores algo más precisos de las tres primeras frecuencias que fueron reportados en un trabajo publicado por Venkateswara Rao\*\*. En la Figura 8.2.6 se muestran los esquemas de los respectivos modos de vibración.

Tabla 8.2.1: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho h / D)^{1/2}$  con rectángulo conforme.

$N$	$\Omega_1$	$\Omega_2 = \Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
2	7.184	16.301	19.620	39.731	45.943
4	7.182	16.332	19.600	39.301	45.778
6	7.185	16.357	19.599	39.276	45.802
8	7.188	16.373	19.598	39.282	45.827
10	7.190	16.383	19.598	39.291	45.847
12	7.191	16.390	19.598	39.299	45.862
V. Rao	7.111	15.770	19.596	-----	-----
Leissa	7.12	15.77	19.60	38.44	44.40



Figura 8.2.6: Líneas nodales de modos naturales de vibración.

\* Leissa A.W., NASA SP-160, 1969. *Vibration of plates*.

\*\* Venkateswara Rao et al., Vibrations of point supported plates. *Journal of Sound and Vibration* 1973, 29(3), 387-391.

Cabe destacar que, pese a ser un elemento conforme, ya que cumple las condiciones de continuidad, por efecto de la nulidad de la derivada segunda mixta en los cuatro nodos se producen valores crecientes de las frecuencias, a medida que aumenta el número de nodos del modelo, con resultados que se alejan de la solución exacta.

### 8.2.3. Rectángulo no conforme de doce grados de libertad

El polinomio de dos variables cúbico completo tiene diez términos. Para aproximar la función  $w(x,y)$  del rectángulo de cuatro nodos de la Figura 8.2.1 se hace necesario agregar otros dos términos. El profesor Petyt [15] da las expresiones de las funciones de forma, que se obtienen cuando se eligen los términos  $\xi^3\eta$  y  $\xi\eta^3$ . A continuación se transcriben dichas funciones, con el agregado de los valores que asumen las funciones  $N_1, N_4, N_7, N_{10}$  y las derivadas de  $N_2, N_3, N_5, N_6, N_8, N_9, N_{11}$  y  $N_{12}$  en los cuatro nodos del elemento rectangular.

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1-\eta)(2-\xi-\eta-\xi^2-\eta^2)/8; & N_1(\xi_1, \eta_1) &= 1 \\
 N_2(\xi, \eta) &= b(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)/8; & \partial N_2(\xi_1, \eta_1)/\partial \eta &= b \\
 N_3(\xi, \eta) &= -a(1-\xi)(1-\xi^2)(1-\eta)/8; & \partial N_3(\xi_1, \eta_1)/\partial \xi &= -a \\
 N_4(\xi, \eta) &= (1+\xi)(1-\eta)(2+\xi-\eta-\xi^2-\eta^2)/8; & N_4(\xi_2, \eta_2) &= 1 \\
 N_5(\xi, \eta) &= b(1+3\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)/8; & \partial N_5(\xi_2, \eta_2)/\partial \eta &= b \\
 N_6(\xi, \eta) &= a(1+\xi)(1-\xi^2)(1-\eta)/8; & \partial N_6(\xi_2, \eta_2)/\partial \xi &= -a \\
 N_7(\xi, \eta) &= (1+\xi)(1+\eta)(2+\xi+\eta-\xi^2-\eta^2)/8; & N_7(\xi_3, \eta_3) &= 1 \\
 N_8(\xi, \eta) &= -b(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)/8; & \partial N_8(\xi_3, \eta_3)/\partial \eta &= b \\
 N_9(\xi, \eta) &= a(1+\xi)(1-\xi^2)(1+\eta)/8; & \partial N_9(\xi_3, \eta_3)/\partial \xi &= -a \\
 N_{10}(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1+\eta)(2-\xi+\eta-\xi^2-\eta^2)/8; & N_{10}(\xi_4, \eta_4) &= 1 \\
 N_{11}(\xi, \eta) &= -b(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)/8; & \partial N_{11}(\xi_4, \eta_4)/\partial \eta &= b \\
 N_{12}(\xi, \eta) &= -a(1-\xi)(1-\xi^2)(1+\eta)/8; & \partial N_{12}(\xi_4, \eta_4)/\partial \xi &= -a
 \end{aligned} \tag{8.39}$$

Cabe destacar que Przemieniecki [16] dedujo expresiones equivalentes de las funciones de forma, pero con variables adimensionales en el rango 0 a 1, en lugar de  $-1$  a  $+1$ .

La expresión aproximada del desplazamiento transversal se obtiene multiplicando la matriz-fila  $[N(\xi, \eta)]$  que agrupa a las doce funciones de forma, por el vector  $\{\delta_e\}$  definido en (8.33).

Un análisis de las funciones de forma (8.39) permite deducir las siguientes propiedades:

- 1) La continuidad en los cuatro bordes de los elementos se cumple sólo con  $w$ . Sobre los lados paralelos al eje  $x$  se satisface la continuidad de  $\theta_y = -\partial w/\partial x$ , pero no la de  $\theta_x$ . Similarmente, sobre los lados **1-4** y **2-3** la continuidad se cumple con  $\theta_x = \partial w/\partial y$ , pero no con  $\theta_y$ . Por lo tanto, el elemento no es totalmente conforme.

2) Se reproducen las curvaturas constantes, tanto de flexión como de torsión.

En efecto:

a) con  $\theta_{y1} = -\theta_{y2} = -\theta_{y3} = \theta_{y4} = 1$ , y nulas las restantes ocho componentes, ver Figura 8.2.4 (a), resulta:  $\partial w / \partial x = (1/a) \partial w / \partial \xi = \xi$ ;  $\partial w / \partial y = (1/b) \partial w / \partial \eta = 0$ ;  $\partial^2 w / \partial x^2 = (1/a^2) \partial^2 w / \partial \xi^2 = 1/a$ .

b) con  $\theta_{x1} = \theta_{x2} = -\theta_{x3} = -\theta_{x4} = 1$ , y nulas las restantes ocho componentes, ver Figura 8.2.4 (b), resulta:  $\partial w / \partial x = (1/a) \partial w / \partial \xi = 0$ ;  $\partial w / \partial y = (1/b) \partial w / \partial \eta = -\eta$ ;  $\partial^2 w / \partial y^2 = (1/b^2) \partial^2 w / \partial \eta^2 = -1/b$ .

c) con  $w_1 = -w_2 = w_3 = -w_4 = 1$ ;  $\theta_{x1} = -\theta_{x2} = -\theta_{x3} = \theta_{x4} = -1/b$ ;  $\theta_{y1} = \theta_{y2} = -\theta_{y3} = -\theta_{y4} = 1/a$ , ver Figura 8.2.5, resulta:  $\partial^2 w / \partial x \partial y = (1/ab) \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta = 1/ab$ .

El análisis precedente demuestra que este elemento, en algunos aspectos, es superior al estudiado en la Sección anterior, aunque con la desventaja de ser *no conforme*, con lo cual no queda garantizada la convergencia. Por lo tanto, los valores de frecuencia pueden resultar menores o mayores que la solución exacta. Las matrices obtenidas por Przemieniecki [16] para este elemento se utilizan en el programa PDR12, el cual requiere que el usuario opte por este elemento no conforme, en lugar del descrito en la Sección anterior. En la Tabla 8.2.2 se dan los valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega L^2 (\rho h / D)^{1/2}$  que se obtuvieron para la placa cuadrada apoyada en los cuatro vértices, con  $\nu = 0.3$ , operando con doble precisión.

Tabla 8.2.2: Valores de  $\Omega_i = \omega_i L^2 (\rho h / D)^{1/2}$  con rectángulo no conforme.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2 = \Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
2	7.296	15.898	19.662	39.458	43.391
4	7.160	15.810	19.617	38.796	44.086
6	7.133	15.789	19.606	38.607	44.241
8	7.123	15.781	19.602	38.534	44.297
10	7.119	15.777	19.600	38.498	44.323
12	7.116	15.775	19.599	38.478	44.337
V. Rao	7.111	15.770	19.596	-----	-----
Leissa	7.12	15.77	19.60	38.44	44.40

Nótese que los valores de  $\Omega_1$  a  $\Omega_5$  disminuyen, mientras que  $\Omega_6$  crece, al aumentar el número de nodos de los modelos. Para un cálculo de ingeniería desde un punto de vista práctico, pese a la lenta convergencia, para este caso el elemento rectangular no conforme da resultados mucho mejores, comparados con los del elemento conforme descrito en la Sección anterior.

Otro ejemplo para realizar una comparación de resultados producidos por ambos elementos, es el de una placa cuadrada simplemente apoyada en su contorno, con solución exacta conocida. En este caso también se utilizaron modelos de un cuarto de la placa, con  $n$  divisiones en cada borde. En la Tabla 8.2.3 se muestran los valores obtenidos del coeficiente de frecuencia. Se comprueba que el elemento no conforme produce valores de frecuencia crecientes con el número de nodos, y los resultados son más aproximados a la solución exacta, que los obtenidos con el rectángulo conforme.

Tabla 8.2.3: Valores de  $\Omega_i = \omega L^2 (\rho h/D)^{1/2}$ . Placa cuadrada articulada en el contorno.

$n$	Elemento	$\Omega_1$	$\Omega_2 = \Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5 = \Omega_6$	$\Omega_7 = \Omega_8$
2	Conforme	20.3900	50.9240	83.5168	102.4238	136.7779
4		20.2569	50.2944	81.5601	100.0596	132.5805
6		20.2324	50.1895	81.1653	99.7545	131.6530
8		20.2239	50.1539	81.0276	99.6621	131.3343
10		20.2199	50.1377	80.9641	99.6221	131.1886
12		20.2178	50.1289	80.9297	99.6010	131.1100
2	No conforme	19.1498	47.4047	72.0851	96.2182	116.5042
4		19.5790	48.7383	76.5993	97.4853	123.3733
6		19.6668	49.0650	77.8422	98.0931	125.8792
8		19.6983	49.1864	78.3158	98.3433	126.8898
10		19.7129	49.2438	78.5424	98.4661	127.3837
12		19.7209	49.2754	78.6674	98.5348	127.6592
Solución exacta		19.7392	49.3480	78.9568	98.6960	128.3049
Formas modales		(1-1)	(1-2) (2-1)	(2-2)	(1-3) (3-1)	(2-3) (3-2)

### 8.2.4 Rectángulo conforme de dieciséis grados de libertad

Una forma de subsanar el inconveniente que se presenta con el rectángulo conforme de doce grados de libertad, descrito en la Sección 8.2.2, en el cual las doce funciones de forma tienen derivada segunda mixta nula en los cuatro vértices del elemento, consiste justamente en agregar dicha derivada como cuarto grado de libertad en cada nodo. El algoritmo de este elemento rectangular fue desarrollado y publicado en 1966, para el caso de isotropía, por Bogner y colaboradores\*. Los grados de libertad adoptados en el algoritmo son:  $w$ ,  $w_x = \partial w / \partial x$ ,  $w_y = \partial w / \partial y$  y  $w_{xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$ . Por consiguiente, el vector de los desplazamientos nodales ahora se escribe:

$$\{\delta_e\}^t = [w_1 \ w_{x1} \ w_{y1} \ w_{xy1} \ w_2 \ w_{x2} \ w_{y2} \ w_{xy2} \ w_3 \ w_{x3} \ w_{y3} \ w_{xy3} \ w_4 \ w_{x4} \ w_{y4} \ w_{xy4}] \quad (8.40)$$

A continuación se desarrolla el algoritmo, a partir del polinomio de 16 términos propuesto por Bogner:

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \quad (8.41)$$

con el cual se aproxima el desplazamiento transversal en el elemento rectangular que se muestra en la Figura 8.2.1, ahora con cuatro grados de libertad en cada nodo. Utilizando las variables adimensionales  $\xi = x/a$  y  $\eta = y/b$ , se obtuvieron las siguientes 16 funciones de forma, que se agrupan en la matriz-fila  $[N]$ :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (\xi+2) (\xi-1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2 / 16; & N_9(\xi, \eta) &= (\xi-2) (\xi+1)^2 (\eta-2) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_2(\xi, \eta) &= a (\xi+1) (\xi-1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2 / 16; & N_{10}(\xi, \eta) &= a (\xi-1) (\xi+1)^2 (2-\eta) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_3(\xi, \eta) &= b (\xi+2) (\xi-1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2 / 16; & N_{11}(\xi, \eta) &= b (\xi-2) (\xi+1)^2 (1-\eta) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_4(\xi, \eta) &= a b (\xi+1) (\xi-1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2 / 16; & N_{12}(\xi, \eta) &= a b (\xi-1) (\xi+1)^2 (\eta-1) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_5(\xi, \eta) &= (2-\xi) (\xi+1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2 / 16; & N_{13}(\xi, \eta) &= (\xi+2) (\xi-1)^2 (2-\eta) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_6(\xi, \eta) &= a (\xi-1) (\xi+1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2 / 16; & N_{14}(\xi, \eta) &= a (\xi+1) (\xi-1)^2 (2-\eta) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_7(\xi, \eta) &= b (2-\xi) (\xi+1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2 / 16; & N_{15}(\xi, \eta) &= b (\xi+2) (\xi-1)^2 (\eta-1) (\eta+1)^2 / 16 \\ N_8(\xi, \eta) &= a b (\xi-1) (\xi+1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2 / 16; & N_{16}(\xi, \eta) &= a b (\xi+1) (\xi-1)^2 (\eta-1) (\eta+1)^2 / 16 \end{aligned} \quad (8.42)$$

\* Bogner, Fox y Schmit, *Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-66-80. The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas, 397-443. 1966.

Un análisis de las propiedades de las funciones de forma demuestran que  $w = [N]\{\delta_e\}$  cumple con la continuidad de los grados de libertad, en los cuatro lados del elemento. La continuidad de  $w$ ,  $w_x = \partial w / \partial x$  y  $w_y = \partial w / \partial y$  significa que el rectángulo de Bogner es un elemento conforme. Por consiguiente, con la matriz masa consistente se asegura la convergencia monótona hacia la solución exacta de las frecuencias.

Como se explicó en la Sección 8.2.1, el cálculo de las integrales (8.29) y (8.30), en el caso de un elemento rectangular, se realiza analíticamente sin mayores inconvenientes. En su trabajo Bogner obtuvo y publicó las expresiones de las componentes de ambas matrices,  $[k_e]$  y  $[m_e]$ , para el caso de material isótropo.

Esta formulación se implementó en el programa PDR16 para placas ortótropas [11, 23]. Para ello se obtuvo la matriz de rigidez con la matriz constitutiva (3.77). El algoritmo se codificó limitado al caso de ejes materiales **1-2** en las direcciones de los ejes coordenados  $x$ - $y$ . El archivo de datos difiere del requerido para placas isótropas, ya que en el caso de ortotropía deben darse cinco propiedades mecánicas del material:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  y  $G_{12}$ . El programa puede ser utilizado en particular para placas isótropas, con  $E_1=E_2=E$ ,  $\nu_1=\nu_2=\nu$  y  $G_{12}=G = \frac{1}{2}E/(1+\nu)$ .

Por otra parte, la inclusión de la derivada segunda mixta debe tenerse en cuenta en las condiciones de vínculo, en los nodos donde el momento torsor debe ser nulo. Por ejemplo, sobre un eje de simetría paralelo al eje coordenado  $x$ , las condiciones a imponer son dos:  $w_y = \partial w / \partial y = 0$  y  $w_{xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ . Por el contrario, en nodos ubicados en un eje de antimetría paralelo al eje global  $x$ , las condiciones son:  $w = 0$  y  $w_x = \partial w / \partial x = 0$ , las mismas que para los nodos que estén ubicados en un borde articulado en la dirección del eje  $x$ . Obviamente, en un borde empotrado los cuatro grados de libertad deben ser eliminados.

En la Tabla 8.2.4 se dan los valores hallados con este programa, operando con doble precisión, para la placa cuadrada isótropa con apoyos puntuales en los vértices, mientras que la Tabla 8.2.5 muestra los resultados obtenidos para la placa simplemente apoyada (articulada) en su contorno. En estos casos se utilizaron modelos de la placa completa, con  $n \times n$  elementos.

Tabla 8.2.4: Valores de  $\Omega_i$ . Placa cuadrada apoyada en los vértices.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2 = \Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
4	7.1138	15.7821	19.6134	38.6057	44.5359
8	7.1110	15.7710	19.5974	38.4427	44.3814
12	7.1109	15.7704	19.5964	38.4338	44.3720
16	7.1109	15.7703	19.5963	38.4323	44.3704
20	7.1109	15.7703	19.5963	38.4319	44.3700

Tabla 8.2.5: Valores de  $\Omega_i$ . Placa cuadrada articulada en el contorno.

$n$	$\Omega_1$	$\Omega_2 = \Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5 = \Omega_6$	$\Omega_7 = \Omega_8$
4	19.7419	49.4763	79.1271	100.1864	129.5700
8	19.7394	49.3563	78.9674	98.7996	128.3894
12	19.7392	49.3497	78.9589	98.7169	128.3217
16	19.7392	49.3485	78.9575	98.7027	128.3102
20	19.7392	49.3482	78.9571	98.6988	128.3070
S.Exacta	19.7392	49.3480	78.9568	98.6960	128.3049

Sin lugar a dudas, este elemento es muy superior al rectángulo de doce grados de libertad.

Con el mismo programa PDR16 se obtuvieron valores de la frecuencia fundamental de placas rectangulares ortótropas simplemente apoyadas, con lado  $a$  en la dirección del material **1**, que coincide con el eje coordenado  $x$ . En la tabla 8.2.6 se dan los resultados del coeficiente de frecuencia  $\Omega_1 = \omega_1 a^2 (\rho h/D_1)^{1/2}$ .

Los resultados fueron obtenidos con doble precisión, para cuatro conjuntos de valores hipotéticos de las propiedades mecánicas, incluyendo el caso particular de isotropía. En razón de la doble simetría del modo fundamental se modeló un cuarto de la placa, con mallas de  $n \times m$  elementos.

Tabla 8.2.6: Valores de  $\Omega_1$  de placas rectangulares ortótropas articuladas en el contorno.

$E_2/E_1$	$\nu_1$	$\nu_2$	$G_{12}(1-\nu_1\nu_2)/E_1$	$a/b$				
				2/5	2/3	1	3/2	5/2
1/2	0.6	0.3	1/3	11.3485	13.8105	18.2877	27.7076	56.3647
1/2	0.6	0.3	1	13.0518	17.4979	24.3762	36.7718	69.2854
2	0.15	0.3	1	13.1943	18.3041	27.2087	45.7370	102.509
1	0.3	0.3	0.35	11.4488	14.2561	19.7392	32.0763	71.5550
Número de elementos cuadrados ( $n \times m$ ):				8x20	8x12	8x8	12x8	20x8

### 8.2.5 Cuadrilátero conforme de dieciséis grados de libertad

En muchos problemas prácticos se presentan placas delgadas no rectangulares, lo que obliga a recurrir a elementos cuadrangulares o triangulares. Una seria limitación de los elementos estudiados en las secciones precedentes radica justamente en la forma rectangular de los mismos, que limita su aplicación a regiones con contorno poligonal con lados sucesivamente ortogonales, paralelos a los ejes coordenados globales. La idea de generalizar el elemento de Bogner para pasar a un elemento cuadrangular de uso general, lamentablemente fracasa debido a la pérdida de continuidad de las derivadas del desplazamiento transversal, en los lados adyacentes de elementos contiguos. Sin embargo, para ciertos diseños de la malla, con el algoritmo que se describe en esta sección se logra un elemento cuadrangular conforme, en el cual se satisfacen las condiciones de continuidad del desplazamiento ( $w$ ) y las primeras derivadas ( $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ ). El desarrollo del mismo consiste en reemplazar los semilados  $a$  y  $b$  del rectángulo, en las funciones de forma (8.42) de Bogner, por sendas funciones lineales:

$$a = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \eta; \quad b = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) - \frac{1}{2} (b_1 - b_2) \xi \quad (8.43 \text{ a,b})$$

donde  $a_1, a_2, b_1$  y  $b_2$  son las medidas de los semilados del cuadrilátero, como se muestra en la Figura 8.2.7, en la página siguiente. Esta sustitución aumenta el grado de las funciones de forma, de modo que

$N_2(\xi, \eta)$ ,  $N_6(\xi, \eta)$ ,  $N_{10}(\xi, \eta)$  y  $N_{14}(\xi, \eta)$  incluyen términos de cuarto grado en la variable  $\eta$ ; análogamente, las funciones  $N_3(\xi, \eta)$ ,  $N_7(\xi, \eta)$ ,  $N_{11}(\xi, \eta)$  y  $N_{15}(\xi, \eta)$  tienen términos de cuarto grado en  $\xi$ ; y las funciones  $N_4(\xi, \eta)$ ,  $N_8(\xi, \eta)$ ,  $N_{12}(\xi, \eta)$  y  $N_{16}(\xi, \eta)$  pasan a tener términos de cuarto grado en ambas variables.

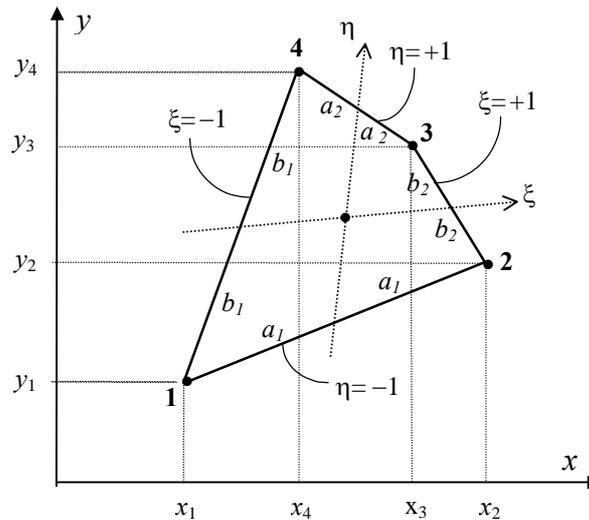


Figura 8.2.7: Cuadrilátero en el plano x-y.

Por otra parte, la geometría del elemento cuadrilátero de lados rectos queda definida por las siguientes funciones bilineales de transformación de coordenadas:

$$x = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)x_3 + \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)x_4 \quad (8.44 a)$$

$$y = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)y_3 + \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)y_4 \quad (8.44 b)$$

El Jacobiano de esta transformación es un polinomio de primer grado en las variables  $\xi$  y  $\eta$ . La matriz de rigidez se calcula aplicando (8.29), en la que se reemplaza la matriz de deformación  $[B]$  por la expresión dada en (8.28), obteniéndose:

$$[k_e] = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N^*]^t [T]^{-t} [D] [T]^{-1} [N^*] |J| d\xi d\eta \quad (8.45)$$

Dado que el integrando contiene polinomios en las variables  $\xi$  y  $\eta$ , tanto en el numerador como en el denominador, resulta prácticamente inabordable la resolución analítica, y tampoco es posible una solución numérica exacta con integración numérica. En la codificación del algoritmo del programa PDC16 se recurrió al método de Gauss-Legendre con 49 puntos de integración (7 puntos en cada dirección coordenada). Por otra parte, el cálculo de la matriz de masa con (8.30) requiere resolver integrales de polinomios de noveno grado. En consecuencia, el cálculo exacto de las componentes de  $[m_e]$  se logra aplicando cuadratura de Gauss-Legendre con 25 puntos (5 puntos en cada dirección). Debido a la complejidad del algoritmo, el programa sólo se compiló con Visual Basic (versiones PDC16-V! y PDC16-V#).

El elemento así formulado cumple con las condiciones de continuidad del desplazamiento y derivadas primeras sobre lados adyacentes de elementos contiguos, cuando la placa es modelada con una malla

## VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

generada con dos haces de rectas, con centros en los puntos de intersección de los lados opuestos de la placa cuadrangular. En tal caso, se produce convergencia a la solución exacta.

Para mostrar la calidad del elemento propuesto, se resolvieron dos casos con el programa PDC16-V#. En la primera aplicación se determinaron frecuencias naturales de una placa rómbica de lado  $a$ , con oblicuidad de  $45^\circ$ , empotrada en el contorno. Los resultados del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega a^2 (\rho h/D)^{1/2}$  se muestran en la Tabla 8.2.7. En la primera columna  $n$  es el número de divisiones sobre cada lado de la placa rómbica. En la tercera columna se indican los grados de libertad activos en cada modelo. En la última fila se dan los valores hallados con el software profesional Algor. Los cálculos se realizaron adoptando  $\nu=0.3$ .

Tabla 8.2.7: Valores de  $\Omega_i = \omega_i a^2 (\rho h/D)^{1/2}$ . Placa rómbica empotrada ( $\nu=0.3$ ).

$n$	$Nel$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
8	81	196	65.83	106.93	149.79	158.27	200.22	231.95
12	169	484	65.69	106.59	148.64	157.51	197.53	230.03
16	289	900	65.66	106.53	148.42	157.34	197.02	229.67
20	441	1444	65.65	106.51	148.36	157.28	196.88	229.57
24	625	2116	65.65	106.50	148.33	157.26	196.82	229.53
ALGOR 80	6561	18723	65.65	106.53	148.37	157.28	196.87	229.62

El segundo caso es una placa trapecial isósceles simplemente apoyada (articulada), con bases  $a$  y  $b$ , y altura  $d$ . Se resolvió un esquema con  $d/a = 0.5$  y  $b/a = 0.4$  mediante mallas que consistieron en dividir las bases del trapecio en  $n$  segmentos de igual longitud, y los lados no paralelos en  $m$  segmentos, también de igual longitud. En la Tabla 8.2.8 se dan los correspondientes resultados obtenidos con el elemento propuesto, y con Algor mediante un modelo con similar diseño de la malla ( $n = 140$ ,  $m = 105$ ), formada por 14700 elementos.

Tabla 8.2.8: Valores de  $\Omega_i = \omega_i a^2 (\rho h/D)^{1/2}$ . Placa trapecial isósceles articulada ( $\nu=0.3$ ).

$n \times m$	$Nel$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
4×3	20	52	63.817	128.01	179.28	228.67	251.68	367.81
8×6	63	202	63.456	127.97	179.54	228.28	253.86	351.23
12×9	130	448	63.340	127.89	179.32	228.07	253.57	350.49
16×12	221	790	63.285	127.86	179.23	228.01	253.42	350.33
20×15	336	1228	63.252	127.83	179.19	227.99	253.34	350.27
24×18	475	1762	63.230	127.82	179.16	227.97	253.29	350.24
28×21	638	2392	63.215	127.81	179.14	227.96	253.25	350.23
ALGOR 140×105	14946	44062	63.213	127.81	179.14	227.98	253.27	350.27

Es importante aclarar que la propiedad de *elemento conforme* deja de cumplirse cuando hay cambio de dirección de los lados de los elementos incidentes en un nodo; en otras palabras, cuando los ángulos

opuestos por el vértice no son iguales. Tampoco se cumple si las rectas, que definen a la red de elementos finitos, no forman dos haces convergentes en sendos centros. Esto último se comprueba con el siguiente ejemplo, de una placa cuadrada articulada en el contorno. En la Figura 8.2.8 (a) se muestra la primera malla de 16 elementos y en (b) la segunda malla de 64 elementos, obtenida dividiendo por la mitad cada lado de los elementos en el contorno de la primera. Con el mismo criterio se diseñaron la tercera malla, de 256 elementos, y la cuarta con 1024 elementos.

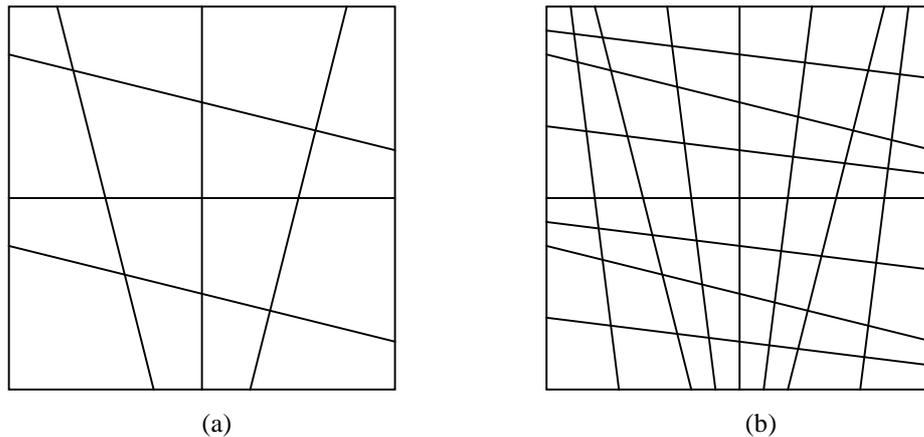


Figura 8.2.8: Mallas irregulares de 16 y 64 elementos cuadrangulares.

En la Tabla 8.2.9 se dan los valores hallados de las primeras tres frecuencias naturales, con solución exacta conocida ( $\Omega_1 = 2\pi^2$ ,  $\Omega_2 = \Omega_3 = 5\pi^2$ ). En la primera columna  $n$  es el número de divisiones, no uniformes, sobre cada lado del modelo.

Tabla 8.2.9: Valores de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  de la placa cuadrada articulada.

$n$	$Nel$	$GDL$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
4	25	64	19.768	49.536	49.593
8	81	256	19.708	49.120	49.261
16	289	1024	19.699	49.094	49.236
32	1089	4096	19.697	49.094	49.235
Solución exacta:			19.739	49.348	49.348

Los valores mostrados en la Tabla 8.2.9 ponen de manifiesto el carácter no conforme del elemento, ya que, con mallas que no satisfacen en forma completa las condiciones de continuidad, se produce convergencia hacia una solución que difiere de la exacta.

### 8.2.6 Triángulos de nueve grados de libertad

El desarrollo de elementos cuadrangulares o triangulares de aplicación general en placas, fue un gran desafío para los investigadores pioneros del método, debido a las dificultades que se presentan para lograr elementos totalmente conformes. A título informativo, a continuación se describen algunos elementos triangulares sin entrar en mayores detalles sobre el desarrollo de los algoritmos. Para

VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

profundizar sobre el tema, se recomienda la lectura del Capítulo 6 del libro “*Introduction to finite element vibration analysis*” de Maurice Petyt [15].

Obviamente, el elemento más simple tiene un nodo con tres grados de libertad en cada vértice. Al adoptar la función aproximante del desplazamiento transversal  $w(x,y)$  se presenta el primer inconveniente, ya que con un polinomio de nueve términos no se consigue una total invariancia geométrica. En efecto, un polinomio cúbico completo en dos variables tiene diez términos, de los cuales seis corresponden al cuadrático completo. Al eliminar uno de los cuatro restantes deja de cumplirse la simetría en el Triángulo de Pascal. En 1962, en su tesis doctoral realizada en Berkeley (USA), Tocher propuso agrupar dos términos simétricos con un coeficiente común:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2y+xy^2) + \alpha_9 y^3 \quad (8.46)$$

Al mismo tiempo, adoptó un sistema local de ejes coordenados ortogonales  $x$ - $y$  con origen en el nodo local **1**, haciendo coincidir el eje  $x$  con el lado **1-2**, como se muestra en la Figura 8.2.9 (a).

Los grados de libertad en cada nodo son  $w$ ,  $\theta_x = \partial w / \partial y$  y  $\theta_y = -\partial w / \partial x$ . Desafortunadamente, con las correspondientes funciones de forma se produce singularidad cuando  $x_2 = 2x_3 + y_3$ , lo cual implica una seria limitación en el diseño de la malla de elementos finitos. Por ejemplo, el triángulo rectángulo isósceles que se muestra en la Figura 8.2.9 (b) no es válido.

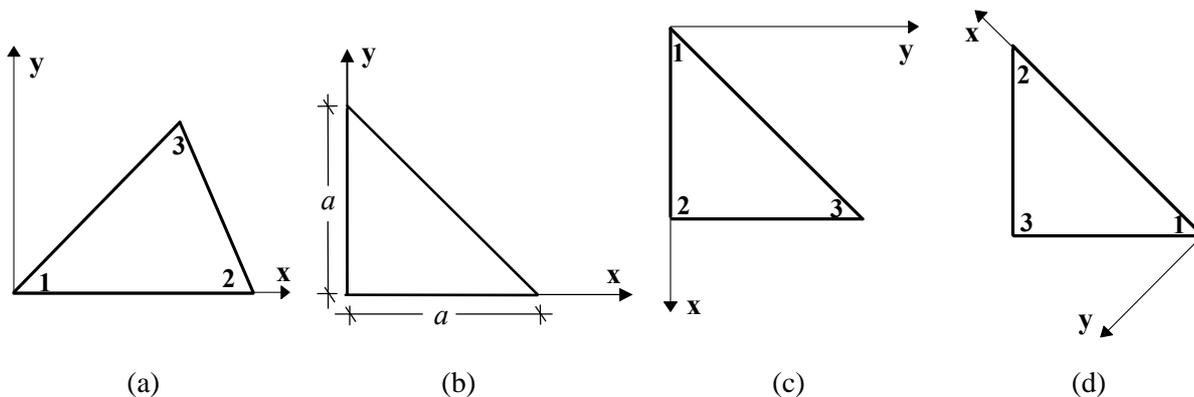


Figura 8.2.9: Elemento triangular de Tocher para placas delgadas.

En este caso el problema se puede resolver adoptando el nodo local **1** en otro vértice, como se muestra en (c) y (d) de la misma figura. Esta propiedad indeseable obliga a realizar un control de la incidencia (numeración de los nodos) de todos los elementos del modelo, y modificarla para evitar la singularidad cuando ésta se presente. Con este cambio se pone de manifiesto otro efecto, producido por la variancia geométrica, dado que el comportamiento del elemento se modifica levemente al cambiar la dirección de los ejes coordenados.

Por otra parte, un paso que debe incluirse en el algoritmo es transformar las matrices del elemento para referirlas al sistema global de coordenadas  $x$ - $y$ . Para ello se aplica un procedimiento similar al utilizado

con el elemento de entramado plano, descrito en la Sección 6.4. En la Figura 8.2.10 se muestra un elemento genérico, donde el eje local  $x$  forma un ángulo  $\alpha$  con el global  $x$ .

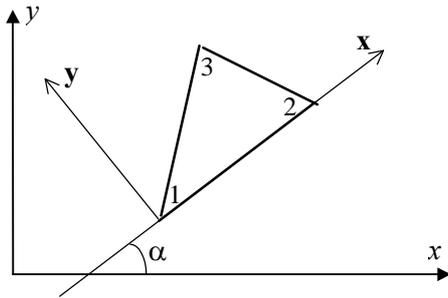


Figura 8.2.10: Orientación del elemento en el sistema global x-y.

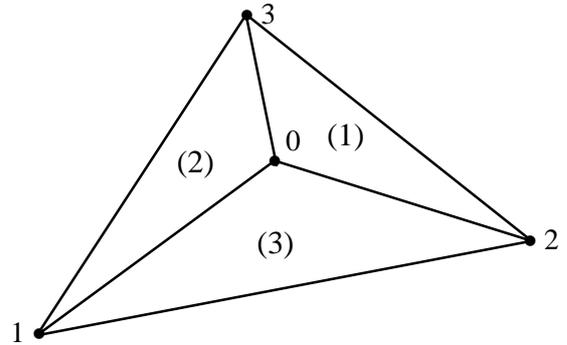


Figura 8.2.11: Elemento triangular dividido en tres triángulos.

La transformación de los grados de libertad se realiza con la matriz de rotación, mediante la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (8.47)$$

o con su inversa:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (8.48)$$

Las rotaciones en el primer miembro de (8.47) están referidas al sistema local; en (8.48) al sistema global.

En 1966, Clough y Tocher\* presentaron un algoritmo en coordenadas cartesianas de un elemento triangular compuesto. El elemento resulta de ensamblar tres triángulos con un vértice y tres lados comunes, como se muestra en la Figura 8.2.11. El nodo común a los tres subtriángulos se ubica en el centroide del triángulo **1-2-3**. Una manera de lograr un elemento conforme es establecer que la derivada de  $w$  en la dirección normal varíe linealmente a lo largo del borde. El mismo criterio fue aplicado dos años más tarde por Clough y Felippa, con coordenadas naturales (ver expresiones (7.9) y Figura 7.2.4). Aproximaron el desplazamiento, en cada subtriángulo, con un polinomio completo de diez términos, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \alpha_1 \xi_1^3 + \alpha_2 \xi_2^3 + \alpha_3 \xi_3^3 + \alpha_4 \xi_1^2 \xi_2 + \alpha_5 \xi_1^2 \xi_3 + \\ & + \alpha_6 \xi_2^2 \xi_3 + \alpha_7 \xi_2^2 \xi_1 + \alpha_8 \xi_3^2 \xi_1 + \alpha_9 \xi_3^2 \xi_2 + \alpha_{10} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \end{aligned} \quad (8.49)$$

\* Clough and Tocher, *Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-66-80, 597-443. Finite element matrices for plate bending. 1966.

Los 10 coeficientes pueden ser expresados en términos de  $w$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$  en los tres nodos del subtriángulo, y de la derivada normal en el punto medio del lado externo (en el subtriángulo (1), el lado 2-3). Esto conduce a las matrices de masa y rigidez del subelemento, ambas de décimo orden. Al realizar el ensamblaje de las mismas se obtienen las matrices del elemento compuesto, de décimoquinto orden ya que los grados de libertad involucrados son tres en cada uno de los cuatro vértices, más uno en el punto medio de cada lado externo. Con este ensamblaje automáticamente se cumple la continuidad del desplazamiento transversal y de la derivada tangencial, en los tres lados interiores comunes a los tres subtriángulos. Para disminuir el efecto de la discontinuidad de la derivada normal, se impone la condición de igualdad en el punto medio de cada lado interno. Estas tres condiciones permiten eliminar los tres grados de libertad del nodo interno, con reducción de las matrices al duodécimo orden. Finalmente, se imponen las tres condiciones de variación lineal de la derivada normal sobre los lados del elemento, lo cual permite eliminar los grados de libertad correspondientes al punto medio de los mismos. De esta manera, se obtiene las matrices de noveno orden.

Cabe mencionar que el último paso no es necesario si se mantienen los tres nodos en el punto medio de los lados del elemento, cada uno con un grado de libertad (la derivada normal de  $w$ ). De hecho, este elemento de seis nodos con 12 grados de libertad resulta más preciso que el de tres nodos con 9 grados de libertad [15].

### 8.2.7 Cuadriláteros de doce grados de libertad

El procedimiento explicado en la Sección anterior, de ensamblar subelementos para generar un elemento compuesto, obviamente también puede aplicarse en un cuadrilátero, dividiéndolo en triángulos. En la Figura 8.2.12 se muestra una posible descomposición en cuatro triángulos, ubicando el vértice interno en la intersección de las diagonales del cuadrilátero.

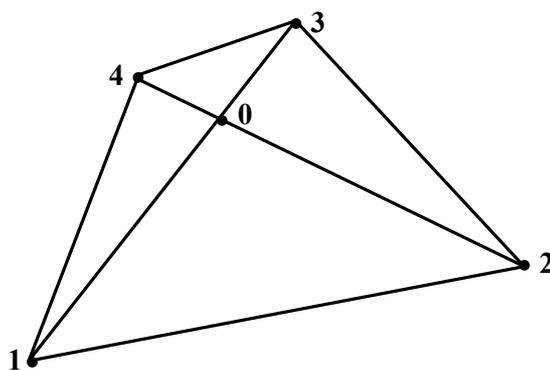


Figura 8.2.12: Cuadrilátero formado con cuatro triángulos.

Diversos elementos cuadriláteros se generan con esta técnica, que se diferencian en las propiedades de los triángulos componentes. Por ejemplo, Clough y Felippa\* adoptaron el triángulo de tres nodos con

\* Clough and Felippa, *Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-68-150, 399-440. A refined quadrilateral element for analysis of plate bending. 1968.

nueve grados de libertad descrito en la última parte de la Sección anterior, obteniendo de esta manera un cuadrilátero conforme de quince grados de libertad.

En 1968, Fraeijs de Veubeke\*\* publicó un algoritmo para cuadrilátero conforme. Adoptó variación cuadrática de la derivada normal de  $w(x,y)$  sobre los bordes, lo cual obliga a mantener un nodo en el punto medio de cada lado externo.

Los tres grados de libertad en el nodo interno se eliminan utilizando la misma técnica explicada en la Sección anterior. Por consiguiente, este elemento tiene dieciséis grados de libertad. Las pruebas numéricas, publicadas por Petyt [15], demuestran que es sumamente preciso. Por otra parte, los grados de libertad en los puntos medios de los cuatro lados del cuadrilátero pueden ser eliminados mediante un procedimiento conocido como *condensación estática*, quedando así reducido a un elemento cuadrangular de doce grados de libertad. En virtud de la excelente calidad demostrada por esta formulación, el elemento desarrollado por Fraeijs de Veubeke ha sido incluido en varios sistemas comerciales de elementos finitos, como por ejemplo en el programa Algor Professional Mech/VE de Algor Inc., empresa estadounidense de software para problemas de ingeniería. Con este elemento se hallaron los resultados dados en las últimas filas de las Tablas 8.2.7 y 8.2.8.

Debido a la complejidad de los algoritmos, en este curso no se han implementado programas de computación para placas delgadas con los elementos triangulares y cuadriláteros, muy brevemente descriptos en esta Sección y la precedente.

### 8.3 Placas moderadamente gruesas

#### 8.3.1 Triángulo conforme de nueve grados de libertad

En la teoría de placas moderadamente gruesas dejan de cumplirse las expresiones (8.32), válidas sólo en la teoría de placas delgadas, donde se supone que las distorsiones son nulas. Tanto la energía de deformación elástica (3.106) como la cinética (3.109), se expresan en función de  $w$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$ . Por consiguiente, se hace posible aproximar las tres funciones en forma independiente, lo cual facilita la formulación de elementos conformes.

El elemento más simple es el triángulo de tres nodos, en el cual las funciones  $w$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$  se interpolan linealmente con los respectivos grados de libertad:

$$w = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 ; \theta_x = \xi_1 \theta_{x1} + \xi_2 \theta_{x2} + \xi_3 \theta_{x3} ; \theta_y = \xi_1 \theta_{y1} + \xi_2 \theta_{y2} + \xi_3 \theta_{y3} \quad (8.50 \text{ a,b,c})$$

Nótese la similitud con las expresiones (7.6) del triángulo lineal para estados planos. Obviamente, se satisface la continuidad de las tres funciones entre elementos adyacentes.

Agrupándolas en un vector, se escribe:

---

\*\* Fraeijs de Veubeke, *International Journal of Solids and Structures*, 4, 95-108. A conforming finite element for plate bending. 1968.

VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \{\delta_e\} = [N] \{\delta_e\} \quad (8.51)$$

donde  $\{\delta_e\}^t = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}]$  (8.52)

Derivando con respecto al tiempo: 
$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} = [N] \{\dot{\delta}_e\} \quad (8.53)$$

Para reproducir la expresión entre paréntesis de (3.109) se introduce la siguiente matriz diagonal:

$$H = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

y se aplica la fórmula matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + h\dot{w}^2 \quad (8.55)$$

Reemplazando (8.53) en el primer miembro, se deduce:

$$\{\dot{\delta}_e\}^t [N]^t [H] [N] \{\dot{\delta}_e\} = \frac{h^3}{12} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + h\dot{w}^2 \quad (8.56)$$

Por consiguiente, la energía cinética del elemento se expresa:

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t \int_A \rho [N]^t [H] [N] dA \{\dot{\delta}_e\} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^t [m_e] \{\dot{\delta}_e\} \quad (8.57)$$

El integrando contiene términos con productos de dos coordenadas naturales, de modo que la integración se resuelve en forma directa, aplicando la fórmula (7.24) de Eisenberg. Operando se obtiene la siguiente expresión de la matriz de masa del elemento:

$$[m_e] = \frac{\rho h A}{144} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & h^2 \\ 12 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 \\ 12 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

Para hallar la matriz de rigidez se utiliza la expresión (3.105) de la energía de deformación, en la cual se separa la energía flexional de la energía de distorsión por corte, que a continuación se transcriben por separado:

$$U_e^{(f)} = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}' [D] \{\chi\} dA \quad (8.59)$$

$$U_e^{(c)} = \frac{1}{2} \int_A \kappa G h \{\gamma\}' \{\gamma\} dA \quad (8.60)$$

donde  $\{\chi\}$  se define en (3.102), y  $\{\gamma\}' = [\gamma_{zx} \quad \gamma_{zy}]$  agrupa las distorsiones dadas en (3.101 d,e).

La expresión de  $\{\chi\}$  en términos de los desplazamientos nodales implica hallar la matriz de deformación flexional  $[B^{(f)}]$ , tal que:

$$\{\chi\} = [B^{(f)}] \{\delta_e\} \quad (8.61)$$

Reemplazando en (8.59):

$$U_e^{(f)} = \frac{1}{2} \{\delta_e\}' \int_A \frac{h^3}{12} [B^{(f)}]' [D] [B^{(f)}] dA \{\delta_e\} = \frac{1}{2} \{\delta_e\}' [k_e^{(f)}] \{\delta_e\} \quad (8.62)$$

La obtención de  $[B^{(f)}]$  se realiza con un procedimiento similar al descrito en la Sección 7.4. Adoptando  $\xi_1$  y  $\xi_2$  como variables independientes, ahora se tiene:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \quad ; \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_2}$$

Teniendo en cuenta que  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ , con (7.10) y (8.50) las anteriores se expresan:

$$\theta_{x1} - \theta_{x3} = (x_1 - x_3) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + (y_1 - y_3) \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad ; \quad \theta_{x2} - \theta_{x3} = (x_2 - x_3) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + (y_2 - y_3) \frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y haciendo intervenir las fórmulas (7.8), se obtienen las siguientes expresiones de las derivadas de  $\theta_x$  con respecto a las variables físicas (se omite el desarrollo algebraico):

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_1 \theta_{x1} + b_2 \theta_{x2} + b_3 \theta_{x3})$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_1 \theta_{x1} + c_2 \theta_{x2} + c_3 \theta_{x3})$$

De manera similar se hallan las derivadas de  $\theta_y$ :

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_1 \theta_{y1} + b_2 \theta_{y2} + b_3 \theta_{y3})$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_1 \theta_{y1} + c_2 \theta_{y2} + c_3 \theta_{y3})$$

En consecuencia, la matriz de deformación flexional resulta:

$$[B^{(f)}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & b_1 & -c_1 & 0 & b_2 & -c_2 & 0 & b_3 & -c_3 \end{bmatrix} \quad (8.63)$$

## VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

Dado que todas las componentes son constantes, en este caso la matriz de rigidez flexional del elemento se obtiene con:

$$[k_e^{(f)}] = \frac{Ah^3}{12} [B^{(f)}]^t [D] [B^{(f)}] \quad (8.64)$$

la cual puede ser escrita en la forma:

$$[k_e^{(f)}] = \frac{Eh^3}{48A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} [k_{11}^{(f)}] & [k_{12}^{(f)}] & [k_{13}^{(f)}] \\ [k_{21}^{(f)}] & [k_{22}^{(f)}] & [k_{23}^{(f)}] \\ [k_{31}^{(f)}] & [k_{32}^{(f)}] & [k_{33}^{(f)}] \end{bmatrix} \quad (8.65)$$

$$\text{Operando: } [k_{ij}^{(f)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_i c_j + \mu b_i b_j & -\nu b_i c_j - \mu c_i b_j \\ 0 & -\nu b_i c_j - \mu c_i b_j & b_i b_j + \mu c_i c_j \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

donde  $i = j = 1, 2, 3$ ;  $\mu = (1-\nu)/2$ .

Para hallar la matriz de rigidez por corte, se parte de las derivadas del desplazamiento transversal:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi_1} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_2} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_2}$$

Aplicando (7.10) y (8.50) resulta:

$$w_1 - w_3 = (x_1 - x_3) \frac{\partial w}{\partial x} + (y_1 - y_3) \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w_2 - w_3 = (x_2 - x_3) \frac{\partial w}{\partial x} + (y_2 - y_3) \frac{\partial w}{\partial y}$$

Con estas ecuaciones se deducen:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3)$$

Estas expresiones, junto con (8.50), se reemplazan en (3.101 d,e) para hallar las distorsiones por corte:

$$\gamma_{zx} = (b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3)/2A + \xi_1 \theta_{y1} + \xi_2 \theta_{y2} + \xi_3 \theta_{y3}$$

$$\gamma_{zy} = (c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3)/2A - \xi_1 \theta_{x1} - \xi_2 \theta_{x2} - \xi_3 \theta_{x3}$$

$$\text{Con notación matricial: } \{\gamma\} = [B^{(c)}] \{\delta_e\} \quad (8.67)$$

Por consiguiente, la matriz de deformación por corte resulta:

$$[B^{(c)}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 2A\xi_1 & b_2 & 0 & 2A\xi_2 & b_3 & 0 & 2A\xi_3 \\ c_1 & -2A\xi_1 & 0 & c_2 & -2A\xi_2 & 0 & c_3 & -2A\xi_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.68)$$

donde ahora hay seis componentes variables. Reemplazando en (8.60) se tiene:

$$U_e^{(c)} = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t \int_A \kappa G h [B^{(c)}]^t [B^{(c)}] dA \{\delta_e\} = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [k_e^{(c)}] \{\delta_e\} \quad (8.69)$$

La matriz de rigidez por corte también puede ser particionada en nueve submatrices de tercer orden:

$$[k_e^{(c)}] = \frac{\kappa Gh}{4A} \begin{bmatrix} [k_{11}^{(c)}] & [k_{12}^{(c)}] & [k_{13}^{(c)}] \\ [k_{21}^{(c)}] & [k_{22}^{(c)}] & [k_{23}^{(c)}] \\ [k_{31}^{(c)}] & [k_{32}^{(c)}] & [k_{33}^{(c)}] \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

Operando: 
$$[k_{ij}^{(c)}] = \begin{bmatrix} b_i b_j + c_i c_j & -2Ac_i/3 & 2Ab_i/3 \\ -2Ac_i/3 & \alpha & 0 \\ 2Ab_i/3 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 2A^2/3$  cuando  $i = j$ ; y  $\alpha = A^2/3$  si  $i \neq j$ .

Finalmente, sumando (8.65) y (8.70) se obtiene la matriz de rigidez completa del elemento:

$$[k_{ij}] = \frac{Eh^3}{48A(1-\nu^2)} [k_{ij}^{(f)}] + \frac{\kappa Gh}{4A} [k_{ij}^{(c)}] = \frac{Eh^3}{48A(1-\nu^2)} ([k_{ij}^{(c)}] + \phi [k_{ij}^{(c)}]) \quad (8.72)$$

donde  $\phi = 6\kappa(1-\nu)/h^2$ .

Esta formulación se implementó en el programa PGTC9 (PGTC9-Q y PGTC9-V). Dado que con elementos triangulares se hace posible modelar regiones no rectangulares, en este programa se ha implementado la condición de vínculo de rotación nula sobre bordes oblicuos. Para el análisis del comportamiento del algoritmo, se eligió una placa moderadamente gruesa, donde la medida del lado es diez veces mayor que el espesor ( $h/L = 0.1$ ) y  $\nu = 0.3$ . Aplicando la teoría de Mindlin, K.M. Liew\* y colaboradores obtuvieron el valor  $\Omega_1 = \omega_1 L^2 (\rho h/D)^{1/2} = 19.059$  para la frecuencia fundamental de la placa cuadrada articulada en el contorno.

Con el código PGTC9-V# se calcularon las matrices de modelos de un octavo de la placa cuadrada de lado  $L$  (triángulo rectángulo isósceles, catetos de longitud  $L/2$ ), aprovechando de esta manera los cuatro ejes de simetría (medianas y diagonales) del modo fundamental de vibración. En todos los modelos, cada lado de la placa se dividió en  $2n$  segmentos iguales, dando una red de  $n^2$  elementos (triángulos rectángulos isósceles) y  $(n^2+3n+2)/2$  nodos en el modelo de un octavo de la placa.

El factor de corte que interviene en (8.70) se calcula en estos programas con la fórmula:

$$\kappa = 20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2) \quad (8.73)$$

con  $\nu = 0.3$  resulta  $\kappa = 0.8230452674897119$

En el segundo renglón de la Tabla 8.3.1 se transcriben los valores de  $\Omega_1$ , correspondientes al algoritmo con *integración analítica completa* de la matriz de rigidez por corte  $[k_e^{(c)}]$ .

Tabla 8.3.1: Valores de  $\Omega_1$  con elementos triangulares (placa cuadrada articulada,  $h/L = 0.1$ ).

$N$	4	6	8	12	16	20	24	32	40	50	60
Int.completa	23.44	21.17	20.29	19.62	19.38	19.26	19.20	19.14	19.11	19.09	19.08
Int.reducida	21.64	20.30	19.79	19.39	19.24	19.18	19.14	19.11	19.09	19.08	19.07

\* K.M. Liew et al., *Journal of Sound & Vibration* 1993, 168(1) 39-69. Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory.

## VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

La convergencia es lenta aunque aceptable, máxime teniendo en cuenta que se trata del elemento más simple para placas tipo Mindlin. Sin embargo, no es aconsejable su uso en placas delgadas debido al efecto del bloqueo por corte que se pone de manifiesto al disminuir el espesor de la placa, debido al rápido incremento del factor  $\phi$  en la expresión (8.72) de la matriz de rigidez.

Este efecto de sobre-rigidización por corte se puede atenuar mediante *integración numérica reducida* [15] en el cálculo de  $[k_e^{(c)}]$ , que en este caso se realiza con un solo punto (ver Tabla 7.8.1). Al aplicar esta técnica se obtienen las mismas submatrices dadas en (8.71) pero ahora con  $\alpha = 4A^2/9$ , tanto con  $i = j$  como con  $i \neq j$ .

Esta alternativa se implementó en el mismo programa PGTC9, que ofrece al usuario la opción de utilizar la matriz de rigidez por corte obtenida con integración completa o reducida. Dado que con  $h/L = 0.1$  es posible que se produzca este efecto de sobre-rigidización, también se hallaron los resultados mediante integración reducida, los cuales se muestran en el último renglón de la Tabla 8.3.1. Se observa que la integración reducida mejora los resultados, en forma notoria en los modelos con pocos elementos. Por otra parte, ambos algoritmos prácticamente convergen a un mismo valor.

Reduciendo el espesor a la mitad ( $h/L = 0.05$ ) y con el modelo de 3600 elementos en el octavo de la placa ( $n=60$ ), resultan  $\Omega_1 = 19.649$  y  $19.608$  con integración completa y reducida, respectivamente.

Si se reduce el espesor a la relación  $h/L = 0.01$ , el comportamiento mecánico de la placa se aproxima a la teoría de placas delgadas, con solución exacta  $\Omega_1 = 2\pi^2 \cong 19.739$ . Con el mismo modelo ( $n=60$ ) resultan  $\Omega_1 = 21.707$  y  $20.773$ .

Finalmente, resolviendo la placa con relación  $h/L = 0.001$ , con integración completa resultó  $\Omega_1 = 84.865$ ; y con integración reducida  $\Omega_1 = 56.008$ . Se comprueba en este último caso que el efecto de bloqueo por corte invalida por completo los resultados que produce el elemento triangular conforme de 9 grados de libertad, aun recurriendo a la técnica de integración reducida para el cálculo de la matriz  $[k_e^{(c)}]$ .

Como conclusión, y desde un punto de vista práctico, puede afirmarse que los valores de la frecuencia fundamental obtenidos con este elemento triangular aplicando integración reducida, son aceptables para placas con relación  $h/L$  no menor que  $1/20$ .

### 8.3.2 Rectángulo conforme de doce grados de libertad

La geometría del elemento es la que se muestra en la Figura 7.3.1, con los grados de libertad de la Figura 8.2.1. Las funciones de forma, que se definen en el dominio cuadrado en el plano  $\xi - \eta$  (Figura 8.2.2), son las mismas que se utilizaron en la Sección 7.3 con el rectángulo bilineal para estados planos. Con ellas se interpolan, por separado, los desplazamientos y las rotaciones, mediante la matriz  $[N]$  de 3 filas por 12 columnas:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{\delta_e\} \quad (8.74)$$

donde las funciones  $N_i(\xi, \eta)$  fueron definidas en (7.28).

Sustituyendo esta matriz en (8.57) e integrando, se obtiene la matriz de masa del elemento.

Operando:

$$[m_e] = \frac{\rho h a b}{108} \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 \\ 24 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 4h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 4h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 \\ 12 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 4h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 4h^2 & 0 & 0 & 2h^2 \\ 24 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & h^2 & 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (8.75)$$

En este caso también conviene determinar por separado la matriz de rigidez flexional y distorsional, obteniendo previamente las respectivas matrices de deformación elástica.

La flexional, de 3 filas y 12 columnas, puede particionarse en cuatro submatrices de tercer orden:

$$[B^{(f)}] = [ [B_1^{(f)}] \quad [B_2^{(f)}] \quad [B_3^{(f)}] \quad [B_4^{(f)}] ] \quad (8.76)$$

donde

$$[B_i^{(f)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

Haciendo uso de la notación compacta de las funciones de forma, se tiene:

$$[B_i^{(f)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\xi_i(1 + \eta_i \eta) / 4a \\ 0 & \eta_i(1 + \xi_i \xi) / 4b & 0 \\ 0 & \xi_i(1 + \eta_i \eta) / 4a & -\eta_i(1 + \xi_i \xi) / 4b \end{bmatrix} \quad (8.78)$$

La matriz de rigidez flexional se calcula con:

$$[k_e^{(f)}] = \int_A \frac{h^3}{12} [B^{(f)}]^t [D] [B^{(f)}] dA = \frac{abh^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B^{(f)}]^t [D] [B^{(f)}] d\xi d\eta \quad (8.79)$$

## VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

donde  $[D]$  es la matriz constitutiva del estado plano de tensiones, dada en (3.71) para material isótropo.

El integrando contiene términos de segundo grado en las dos variables, de modo que con integración numérica de 2x2 puntos se podría calcular en forma exacta. Sin embargo, se ha preferido obtener la expresión explícita de la matriz de rigidez flexional  $[k_e^{(f)}]$ . Sus componentes no nulas son:

$$\begin{aligned}
 k_{2,2} &= k_{5,5} = k_{8,8} = k_{11,11} = D(\alpha + \mu\beta)/3 \\
 k_{3,3} &= k_{6,6} = k_{9,9} = k_{12,12} = D(\beta + \mu\alpha)/3 \\
 k_{3,2} &= k_{9,8} = k_{12,5} = k_{11,6} = -k_{9,2} = -k_{8,3} = -k_{6,5} = -k_{12,11} = -D(\mu + \nu)/4 \\
 k_{6,2} &= k_{11,3} = k_{9,5} = k_{12,8} = -k_{12,2} = -k_{5,3} = -k_{8,6} = -k_{11,9} = -D(\mu - \nu)/4 \\
 k_{5,2} &= k_{11,8} = D(\alpha - 2\mu\beta)/6 ; & k_{12,3} &= k_{9,6} = D(\beta - 2\mu\alpha)/6 \\
 k_{8,2} &= k_{11,5} = -D(\alpha + \mu\beta)/6 ; & k_{9,3} &= k_{12,6} = -D(\beta + \mu\alpha)/6 \\
 k_{6,3} &= k_{12,9} = D(\mu\alpha - 2\beta)/6 ; & k_{11,2} &= k_{8,5} = D(\mu\beta - 2\alpha)/6
 \end{aligned} \tag{8.80}$$

donde:  $\alpha = a/b$ ,  $\beta = \alpha^{-1} = b/a$ ,  $\mu = \frac{1}{2}(1-\nu)$ ,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  es la rigidez flexional de la placa.

La matriz de deformación de distorsión, de 2 filas por 12 columnas, también se particiona en cuatro submatrices, ahora de 2 filas por 3 columnas:

$$[B^{(c)}] = [ [B_1^{(c)}] \quad [B_2^{(c)}] \quad [B_3^{(c)}] \quad [B_4^{(c)}] ] \tag{8.81}$$

$$\text{donde } [B_i^{(c)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \tag{8.82}$$

Operando:

$$[B_i^{(c)}] = \begin{bmatrix} \xi_i(1 + \eta_i\eta)/4a & 0 & (1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)/4 \\ \eta_i(1 + \xi_i\xi)/4b & -(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)/4 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.83}$$

La matriz de rigidez por corte queda expresada con la integral:

$$[k_e^{(c)}] = \int_A \kappa Gh [B^{(c)}]^t [B^{(c)}] dA = \kappa Ghab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B^{(c)}]^t [B^{(c)}] d\xi d\eta \tag{8.84}$$

Operando analíticamente, se obtienen las siguientes componentes no nulas:

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} &= k_{4,4} = k_{7,7} = k_{10,10} = \kappa Gh(\alpha + \beta)/3 \\
 k_{4,1} &= k_{10,7} = \kappa Gh(\alpha - 2\beta)/6 \\
 k_{7,4} &= k_{10,1} = \kappa Gh(\beta - 2\alpha)/6 \\
 k_{7,1} &= k_{10,4} = -\kappa Gh(\alpha + \beta)/6 \\
 k_{2,2} &= k_{3,3} = k_{5,5} = k_{6,6} = k_{8,8} = k_{9,9} = k_{11,11} = k_{12,12} = 4\kappa Ghab/9 \\
 k_{5,2} &= k_{6,3} = k_{8,5} = k_{9,6} = k_{11,2} = k_{12,3} = k_{11,8} = k_{12,9} = 2\kappa Ghab/9 \\
 k_{8,2} &= k_{9,3} = k_{11,5} = k_{12,6} = \kappa Ghab/9 \\
 k_{2,1} &= k_{11,1} = k_{5,4} = k_{8,4} = -k_{10,2} = -k_{7,5} = -k_{8,7} = -k_{11,10} = \kappa Gha/3 \\
 k_{4,3} &= k_{6,4} = k_{9,7} = k_{12,7} = -k_{3,1} = -k_{6,1} = -k_{10,9} = -k_{12,10} = \kappa Ghb/3 \\
 k_{4,2} &= k_{5,1} = k_{8,1} = k_{11,4} = -k_{7,2} = -k_{10,5} = -k_{10,8} = -k_{11,7} = \kappa Gha/6 \\
 k_{7,3} &= k_{7,6} = k_{9,4} = k_{12,4} = -k_{9,1} = -k_{10,3} = -k_{12,1} = -k_{10,6} = \kappa Ghb/6
 \end{aligned} \tag{8.85}$$

donde :  $\alpha = a/b$ ,  $\beta = \alpha^{-1} = b/a$ .

En los programas PGR12-Q y PGR12-V se codificaron las expresiones de la matriz de masa (8.75), la de rigidez flexional (8.80) y la de rigidez por corte (8.85). En la Tabla 8.3.2 se dan los valores del

coeficiente de frecuencia de los primeros cinco modos naturales de vibración, hallados con el programa PGR12-V# para el mismo caso resuelto en la Sección anterior, modelando ahora un cuarto de la placa ( $n^2$  elementos,  $n^2 + 2n + 1$  nodos).

Tabla 8.3.2: Valores de  $\Omega_i$ , placa cuadrada articulada,  $h/L = 0.1$ ,  $[k_e^{(c)}]$  con integración analítica.

$n$	4	6	8	12	16	20	30	40	60	Liew <sup>(*)</sup>
$\Omega_1$ (s-s)	21.32	20.08	19.64	19.32	19.21	19.15	19.10	19.08	19.07	19.06
$\Omega_2$ (s-a)	54.06	49.29	47.62	46.41	45.99	45.79	45.60	45.53	45.49	45.45
$\Omega_3$ (a-s)										
$\Omega_4$ (a-a)	80.40	74.45	72.38	70.90	70.39	70.10	69.91	69.82	69.77	69.72
$\Omega_5$ (s-s)	109.10	95.49	90.84	87.55	86.40	85.87	85.35	85.17	85.04	84.93

(\*) Solución exacta de la teoría de Midlin para placas moderadamente gruesas.

Se observa una buena convergencia a valores de la solución exacta. Lamentablemente, la formulación de este elemento también provoca el efecto de bloqueo por corte, descrito en la Sección anterior, el cual se produce por una sobrevaloración de la rigidez de distorsión al disminuir el espesor de la placa. Esto se comprueba numéricamente al resolver, con el mismo programa, el caso de la placa con relación  $h/L = 0.01$ . Los valores obtenidos pueden verse en la Tabla 8.3.3, donde en la última columna ahora se da la solución exacta de la teoría de placas delgadas.

Tabla 8.3.3: Valores de  $\Omega_i$ , placa cuadrada articulada,  $h/L=0.01$ ,  $[k_e^{(c)}]$  con integración analítica.

$n$	4	6	8	12	16	20	30	40	60	Exacta <sup>(*)</sup>
$\Omega_1$ (s-s)	96.89	65.82	50.95	36.97	30.82	27.21	23.35	21.84	20.70	19.74
$\Omega_2$ (s-a)	290.98	192.50	146.77	103.97	84.43	73.66	61.31	56.37	52.56	49.35
$\Omega_3$ (a-s)										
$\Omega_4$ (a-a)	402.10	267.44	205.50	148.31	122.73	108.88	93.36	87.30	82.71	78.96
$\Omega_5$ (s-s)	678.29	432.12	324.05	225.28	180.40	155.71	127.02	115.39	106.34	98.70

(\*) Solución exacta de la teoría de placas delgadas.

La rigidización distorsional invalida los resultados para la placa “delgada” ( $h/L = 0.01$ ). Como se explicó en la Sección anterior, un recurso para disminuir este efecto consiste en utilizar integración numérica reduciendo el orden en el cálculo de la matriz  $[k_e^{(c)}]$ . Aplicando este criterio, con integración numérica de un solo punto para este caso, se obtienen las siguientes expresiones de las componentes no nulas de  $[k_e^{(c)}]$ :

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} &= k_{4,4} = k_{7,7} = k_{10,10} = -k_{7,1} = -k_{10,4} = \frac{1}{4} \kappa Gh(\alpha + \beta) \\
 k_{4,1} &= k_{10,7} = -k_{7,4} = -k_{10,1} = \frac{1}{4} \kappa Gh(\alpha - \beta) \\
 k_{2,1} &= k_{5,1} = k_{8,1} = k_{11,1} = k_{5,4} = k_{8,4} = k_{11,4} = k_{4,2} = \\
 &= -k_{7,2} = -k_{10,2} = -k_{7,5} = -k_{10,5} = -k_{8,7} = -k_{11,7} = -k_{10,8} = -k_{11,10} = \frac{1}{4} \kappa Gha \\
 k_{3,1} &= k_{6,1} = k_{9,1} = k_{12,1} = k_{10,3} = k_{10,6} = k_{10,9} = k_{12,10} = \\
 &= -k_{4,3} = -k_{7,3} = -k_{6,4} = -k_{9,4} = -k_{12,4} = -k_{7,6} = -k_{9,7} = -k_{12,7} = -\frac{1}{4} \kappa Ghb \\
 k_{2,2} &= k_{3,3} = k_{5,5} = k_{6,6} = k_{8,8} = k_{9,9} = k_{11,11} = k_{12,12} = k_{5,2} = k_{8,2} = \\
 k_{11,2} &= k_{6,3} = k_{9,3} = k_{12,3} = k_{8,5} = k_{11,5} = k_{9,6} = k_{12,6} = k_{11,8} = k_{12,9} = \frac{1}{4} \kappa Ghab
 \end{aligned}
 \tag{8.86}$$

Esta matriz de rigidez por corte se implementó, como alternativa, en los mismos programas PGR12.

## VIBRACIONES FLEXIONALES DE PLACAS

Con la versión PGR12-V# se obtuvieron los valores de  $\Omega_i$  dados en la Tabla 8.3.4 para los cinco primeros modos de vibración, de la placa cuadrada simplemente apoyada, con relación  $h/L = 0.1$ .

Tabla 8.3.4: Valores de  $\Omega_i$ , placa cuadrada articulada,  $h/L=0.1$ ,  $[k_e^{(c)}]$  con integración reducida.

$n$	4	6	8	12	16	20	30	40	60	Liew <sup>(*)</sup>
$\Omega_1$ (s-s)	19.37	19.20	19.14	19.09	19.08	19.07	19.06	19.06	19.06	19.06
$\Omega_2$ (s-a)	48.06	46.58	46.08	45.73	45.61	45.54	45.49	45.47	45.46	45.45
$\Omega_3$ (a-s)	73.63	71.44	70.68	70.15	69.96	69.83	69.79	69.76	69.74	69.72
$\Omega_4$ (a-a)	96.78	89.92	87.68	86.14	85.61	85.36	85.12	85.04	84.98	84.93

(\*) Solución exacta de la teoría de Midlin para placas moderadamente gruesas.

Comparando las Tablas 8.3.2 y 8.3.4 se comprueba que la técnica de integración reducida de la matriz  $[k_e^{(c)}]$  mejora los resultados, especialmente en modelos con pocos elementos.

En la Tabla 8.3.5 se dan los resultados obtenidos con el mismo programa modificando solamente el espesor de la placa, pasando a la relación  $h/L = 0.01$ . Comparándolos con los de la Tabla 8.3.3, se comprueba que el comportamiento de elemento mejora notoriamente al utilizar integración numérica reducida en el cálculo de la matriz de rigidez por corte.

Tabla 8.3.5: Valores de  $\Omega_i$ , placa cuadrada articulada,  $h/L = 0.01$ ,  $[k_e^{(c)}]$  con integración reducida.

$n$	4	6	8	12	16	20	30	40	60	exacta <sup>(*)</sup>
$\Omega_1$ (s-s)	20.08	19.93	19.82	19.77	19.75	19.75	19.74	19.74	19.74	19.74
$\Omega_2$ (s-a)	52.55	50.72	50.08	49.65	49.50	49.42	49.36	49.33	49.32	49.35
$\Omega_3$ (a-s)	84.54	81.31	80.21	79.44	79.19	79.03	78.94	78.89	78.87	78.96
$\Omega_4$ (a-a)	116.00	105.69	102.44	100.23	99.47	99.13	98.79	98.67	98.58	98.70

(\*) Solución exacta de la teoría de placas delgadas.

Con  $h/L = 0.005$  los valores de frecuencia obtenidos con el modelo de 2500 elementos ( $n = 50$  para un cuarto de la placa), fueron:  $\Omega_1 = 19.7433$  ;  $\Omega_2 = \Omega_3 = 49.3685$  ;  $\Omega_4 = 78.9921$  y  $\Omega_5 = 98.7940$ . Por último, para la relación  $h/L = 0.001$  que corresponde a una placa extremadamente delgada, los resultados difieren muy poco (en el quinto o sexto dígito significativo):  $\Omega_1 = 19.7402$  ;  $\Omega_2 = \Omega_3 = 49.3676$  ;  $\Omega_4 = 78.9916$  y  $\Omega_5 = 98.7934$ , resultados que demuestran la excelente eficacia del elemento para el caso de placas delgadas, si se recurre a la técnica de integración reducida de la matriz de corte  $[k_e^{(c)}]$ .

El algoritmo del elemento rectangular podría ser generalizado para un cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos, preferentemente con el cálculo de todas las matrices mediante integración numérica a llevar a cabo por el programa de computación. Análogamente, utilizando las funciones de forma (7.70) para aproximar independientemente las tres funciones  $w$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$ , como asimismo para definir la geometría del elemento, se obtendría un cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos con 24 grados de libertad.\*

\* Rock and Hinton, *International Journal of Earthquake Engineering Structural Dynamics*. Free vibration and transient response of thick and thin plates using de finite element method. 3, 51-63. 1974.

# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

## APÉNDICE: PROGRAMAS DE COMPUTACIÓN

### A.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES

Los programas preparados para las clases prácticas del curso se compilaron con QuickBasic-4.5 [9]. Los más exigentes, por requerir mucho espacio de memoria, también se compilaron con Visual Basic-5.0 [14]. Dado que QuickBasic puede ser ejecutado bajo control del antiguo sistema operativo MS-DOS, se limita a doce el número caracteres en la denominación de los archivos, con un máximo de ocho caracteres válidos para el nombre y tres para la extensión, separados por un punto. Si bien esta limitación no existe con Windows, se ha preferido respetarla en la denominación de los programas compilados con Visual Basic, y de todos los archivos de datos de los modelos a ser procesados por ellos. De los ocho caracteres del nombre de un programa, los cinco primeros identifican el tipo de problema y de elemento finito utilizado; el siguiente es un guión, o en algunos casos un dígito (1 ó 2) con el cual se distinguen dos versiones distintas de códigos que realizan procesos similares. El séptimo es una letra destinada a diferenciar el compilador utilizado, con Q para QuickBasic y V para Visual Basic. Finalmente, el octavo carácter es un sufijo que indica la precisión utilizada por el programa en las operaciones con aritmética de punto flotante: el signo de admiración (!) para indicar precisión simple (4 bytes, mantisa de 7 dígitos, rango del exponente  $-45$  a  $+38$ ) y el numeral (#) para precisión doble (8 bytes, mantisa de 16 dígitos, rango del exponente  $-324$  a  $+308$ ). Por ejemplo, el programa BRFVT-Q# se aplica en el análisis de **Barras Rectas** con vibraciones **Flexionales**, utilizando elementos de **Viga Timoshenko**, compilado con **QuickBasic**, para cálculos con aritmética de doble precisión.

La extensión, en la denominación del archivo de datos de un modelo, es opcional, y a fin de evitar confusiones o conflictos con archivos del sistema o de las aplicaciones más conocidas, se ha establecido la prohibición de utilizar las siguientes: AVL, BAS, BAT, BMP, COM, DBF, DIZ, DLL, DOC, EML, EXE, FRC, FRX, GIF, HTM, IGL, JPG, LIB, LST, MAP, MAS, MDB, MID, MIX, MOD, OBJ, PDF, PPS, PPT, QLB, RGZ, RTF, SYS, SCC, TTF, TXT, VBP, VBW, WMA, WMV, WPL, XLS, XML, ZIP. Si se usa alguna de ellas el programa no la acepta, y da aviso con el mensaje “nombre ilegal: extensión no permitida”. Por otra parte, el nombre del archivo de datos no debe contener espacios en blanco ni los siguientes trece caracteres especiales: \ : / | = ? ; , [ ] + < >. El archivo de datos del modelo debe encontrarse en la *carpeta de trabajo*, cuya *ruta de acceso* (path) debe ser previamente registrada en un archivo disponible para tal fin. En esta carpeta de trabajo además son grabados los resultados generados en la resolución del modelo.

Es importante tener en cuenta que en cada línea del archivo de datos, estos se separan entre sí con uno o más espacios en blanco y/o con una coma. Por ende, para los números no enteros debe utilizarse un punto para separar las cifras decimales de la parte entera, que es la notación requerida tanto con QuickBasic como con Visual Basic. Esta notación también es utilizada por el autor en todos los números no enteros que figuran en el texto y en las tablas.

Los programas ejecutables (extensión EXE) están disponibles en un disco compacto (CD-ROM) en una carpeta denominada AVLMEF. También se dan archivos de texto (extensión TXT y RTF), que instruyen sobre el uso de los mismos, y en los que se hace una breve descripción de las principales características del respectivo programa y se explica el formato del correspondiente archivo de datos. Como es bien sabido por los programadores, resulta prácticamente imposible contemplar todos los errores que el usuario puede cometer al generar el archivo de datos. En consecuencia, no es posible predecir el comportamiento de un programa ante la presencia de datos erróneos no previstos por el programador. En la Sección A.4 de este Apéndice se dan códigos de errores, alguno de los cuales podría producirse durante la ejecución de los programas compilados con QuickBasic. Si la falla se produce por un incorrecto archivo de datos del modelo, esta información puede ser útil para localizar la causa.

Las matrices y vectores que intervienen en los programas no son de tamaño fijo, sino que se dimensionan en la etapa de la ejecución de los mismos, en función de los valores que se dan en el archivo de datos. La información es totalmente almacenada en la memoria RAM de la computadora durante el desarrollo de los cálculos, lo cual constituye una limitación del tamaño de los modelos, medido por el número de elementos, nodos y grados de libertad activos. En todos los casos, cuando la capacidad de memoria es desbordada, se interrumpe la ejecución y el programa produce el correspondiente aviso de error. Este inconveniente se presenta especialmente con los programas compilados con QuickBasic, ya que no pueden hacer uso de toda la memoria RAM de la computadora. En este aspecto, los programas compilados con Visual Basic son mucho más eficientes, sumado a que la velocidad de proceso es notoriamente superior. Por esta razón se recomienda utilizarlos en las aplicaciones, y de ser posible, con las versiones que operan con doble precisión.

Los resultados de todos los programas que analizan modelos de elementos finitos se guardan en cuatro archivos secuenciales (ASCII) en la carpeta de trabajo. El primero se denomina INFORMAT.AVL, el cual sólo contiene una línea de texto con la denominación del archivo de datos y del programa utilizado para el cálculo de las matrices, seguidos de la fecha (formato dd-mm-aaaa) y la hora que registra el sistema operativo en el momento que el archivo es cerrado. Los otros tres tienen el mismo nombre que el archivo de datos, seguido de las extensiones RGZ, MAS e IGL. La información contenida en los dos primeros consiste de una primera línea con el número de ecuaciones y el ancho de banda (número de filas y columnas de  $[K]$  y  $[M]$ ); luego sigue otra línea de texto igual a la grabada en INFORMAT.AVL, y a continuación las componentes, por filas, de la matriz de rigidez  $[K]$  y de masa  $[M]$ , respectivamente. El cuarto archivo, con extensión .IGL, contiene el número de grados de libertad del modelo libre de restricciones, el número de grados de libertad por nodo, y los índices de restricción de todos los nodos: cero (0) para los grados de libertad eliminados, uno (1) para los activos. La información de estos cuatro archivos es utilizada luego por los programas que finalizan con la resolución del modelo, calculando las frecuencias y modos naturales de vibración.

Los programas que procesan modelos de una barra recta, tanto con deformaciones axiales o torsionales como con deformaciones flexionales, se han compilado solamente con QuickBasic, debido a que son algoritmos que no requieren mucha memoria RAM. Para modelos que demandan más memoria, como en entramados espaciales de barras, estados planos de tensiones o deformaciones, y flexión de placas, se dispone también de las correspondientes versiones compiladas con Visual Basic. En particular, el programa que analiza placas delgadas con elementos cuadrangulares de dieciséis grados de libertad, por su especial complejidad ha sido compilado sólo con Visual Basic.

Para el cálculo de frecuencias en modelos con muy pocos grados de libertad se puede utilizar el método de Jacobi [4,5,7,8] que determina todos los autovalores y autovectores. Los programas JACOB1 y JACOB2 son dos versiones del método. Aunque los datos pueden ser matrices tipo banda, estos programas operan con las matrices simétricas completas, lo cual constituye otra seria limitación por el mayor requerimiento de memoria. No exigen que la matriz  $[K]$  sea regular, pudiéndose aplicar en la resolución de problemas con autovalores nulos y/o negativos. La versión JACOB2 es una transcripción, con algunas pocas modificaciones introducidas por el autor, del código publicado en la referencia [5], el cual aplica un algoritmo de transformación ortogonal simultáneamente en ambas matrices [7]. Por ello, en general resulta más eficiente que la versión JACOB1 desarrollada por el autor para este curso, en la cual previamente se realiza la descomposición simétrica de la matriz de masa,  $[M] = [L][L]^t$  con el método de Choleski (posible siempre que  $[M]$  sea una matriz positiva definida) y aplica las transformaciones ortogonales de Jacobi sobre la matriz  $[L]^t [K] [L]^{-1}$ . Obviamente, no es conveniente utilizar estos programas cuando interesa conocer sólo unos pocos autovalores y autovectores.

Para calcular las primeras frecuencias (las más bajas) y los correspondientes modos de vibración, se dispone de dos versiones del método iterativo de Vianello-Stodola-Bodewig [13,17], una con descomposición simétrica de la matriz  $[K]$  con el procedimiento de Choleski, y otra invirtiendo la matriz con el método directo de Gauss. El primero, denominado MIVSB1, exige que la matriz  $[K]$  sea positiva definida. El segundo, MIVSB2, que sea regular (no singular), ya que calcula la matriz dinámica, no simétrica, definida con el producto  $[K]^{-1} [M]$ . Ambos también operan con las matrices  $[K]$  y  $[M]$  simétricas completas.

En lugar del método de Vianello-Stodola-Bodewig, se recomienda utilizar el método de iteración inversa [5,8] implementado en los programas MITIN (MITIN1Q!, MITIN1Q#, MITIN1V!, MITIN1V#, MITIN2Q!, MITIN2Q#, MITIN2V!, MITIN2V#), los cuales aprovechan el carácter banda de las matrices [5]. Se pueden aplicar cuando la matriz  $[K]$  es regular. Sin embargo, al contar con una opción de ingreso de un valor de traslación (shift) antes del cálculo de los autovalores, también pueden ser utilizados para resolver problemas con autovalores nulos.

Los programas de resolución, que calculan las frecuencias, leen la información contenida en el archivo INFORMAT.AVL a fin de identificar los archivos en los que han sido previamente grabadas las

matrices de masa y rigidez del modelo. Producen una salida de resultados por la pantalla del monitor de la computadora: autovalores, frecuencias angulares, períodos y frecuencias en ciclos/seg (Hz). Obviamente, cuando un autovalor resulta nulo no se calcula el correspondiente período. Si es negativo, solamente se muestra su valor. Los programas MITIN1Q, MITIN1V y MITIN2V sólo dan, en la pantalla del monitor, las frecuencias calculadas. Esta información se muestra para el número de frecuencias requerido por el usuario al comienzo de la ejecución. Los programas MITIN2Q, MIVSB1Q, MIVSB2Q, JACOB1Q y JACOB2Q también muestran en la pantalla los valores de todas las componentes de las formas modales, incluyendo las que resultan nulas por condiciones de vínculo. Además, los programas piden que el usuario decida si quiere que los resultados se graben en dos archivos que tienen el mismo nombre del archivo de datos, el primero con extensión FRC para las frecuencias naturales; y el segundo con extensión MOD para las formas modales.

Además de los módulos de análisis y resolución, en el disco compacto se dan los programas destinados a ayudar al usuario en la edición de los archivos de datos, sumamente rudimentarios ya que se limitan a generar redes de elementos finitos (incidencias de elementos y coordenadas de nodos) en regiones muy simples, unidimensionales (rectilíneas) y bidimensionales (triangulares, rectangulares y cuadrangulares). En algunos casos la información debe ser completada por el usuario con un editor de texto. Estos programas se identifican con los dos primeros caracteres ED seguidos de un guión y los cinco primeros caracteres del nombre del correspondiente programa para el análisis. También se dan otros programas, de mayor utilidad, que se nombran con los caracteres PP (Pos-Proceso), un guión y la raíz del nombre del correspondiente programa de análisis (los cinco primeros caracteres). Pueden ejecutarse antes de analizar el modelo, para visualizar la red de elementos finitos y las condiciones de vínculo. Una vez realizado el cálculo de frecuencias y modos de vibración, realizan el pos proceso de los desplazamientos, siempre que los mismos hayan sido grabados, facilitando la interpretación mediante dibujos de los modos naturales de vibración. Para los gráficos de las formas modales, en modelos con grados de libertad de rotación (vigas, entramados y placas), no se tienen en cuenta las rotaciones, sino solamente los desplazamientos de traslación de los nodos. Todos los programas “utilitarios” han sido compilados con QuickBasic.

**El autor advierte sobre el carácter docente de esta publicación, y deja constancia de que no asume ninguna responsabilidad sobre las consecuencias de la aplicación de los programas de computación en trabajos profesionales o científicos, responsabilidad que recae exclusivamente en el usuario.**

## A.2 ORGANIZACIÓN DE LOS ARCHIVOS EN EL CD-ROM

En el CD-ROM se encuentra una carpeta primaria, o principal, denominada AVLMEF (**Análisis de Vibraciones Libres – Método de Elementos Finitos**). Esta carpeta contiene un módulo ejecutable compilado con QuickBasic, denominado AVLACCES, el cual permite crear o reemplazar una *carpeta de trabajo*, cuya *ruta de acceso* es registrada en el archivo de texto (ASCII) denominado REGACCES.AVL. Ambos están ubicados en la carpeta C:\AVLMEF en el directorio raíz del disco rígido. Si el archivo REGACCES.AVL no existe, o está vacío, o registra una ruta de acceso a una carpeta inexistente, no podrá ser ejecutado ninguno de los programas del sistema. La ruta de acceso indicada en dicho archivo puede ser posteriormente modificada con el mismo programa AVLACCES. La carpeta principal C:\AVLMEF no puede ser utilizada como *carpeta de trabajo*, ni puede contenerla. La carpeta de trabajo puede crearse en cualquiera de las unidades de almacenamiento de la computadora que se identifiquen con las letras C, D, E, F, G y H. En consecuencia, no se admiten las unidades de disquetes. Por otra parte, el usuario debe tener la precaución de optar por una de las unidades de almacenamiento realmente existentes y habilitadas en su computadora. La ruta de acceso a la carpeta de trabajo, creada con el programa AVLACCES, puede constar de diez (10) niveles de carpetas como máximo, y una longitud total de hasta sesenta y cuatro (64) caracteres. Además, con este programa se introduce otra limitación en la designación de las carpetas que componen la ruta de acceso, ya que no permite nombres con más de ocho caracteres, y los caracteres válidos son las letras del alfabeto (sin distinción entre mayúsculas y minúsculas), los diez (10) dígitos decimales, y sólo los siguientes quince (15) símbolos especiales: ( ) { } @ # \$ % ^ & ! - \_ ' ~ (no se incluye el espacio en blanco como carácter válido). Obviamente, el archivo REGACCES.AVL también puede crearse con un editor de texto (por ejemplo, con el Bloc de Notas), y la *carpeta de trabajo* con el sistema operativo, debiendo respetar el usuario, en tal caso, las limitaciones descritas, impuestas en el sistema AVLMEF.

En la carpeta principal AVLMEF del CD-ROM se encuentran veintitrés carpetas que contienen los módulos ejecutables de los distintos tipos de análisis y resolución descriptos en el libro, como asimismo los respectivos programas utilitarios de edición y pos-proceso. En cada una de estas carpetas también se incluyen dos archivos, uno editado con formato de texto RTF (**Rich Text File**), y otro editado con texto plano (sin formato, extensión TXT), los cuales describen las principales características de los programas, e instruyen al usuario sobre el formato de los respectivos archivos de datos.

El sistema AVLMEF no requiere instalación. Simplemente se copia la carpeta AVLMEF del CD-ROM en el directorio raíz del disco rígido, o se opera directamente con el CD instalado en la lectora, aunque en este último caso debe existir la carpeta C:\AVLMEF en el disco rígido y en ella el archivo de registro REGACCES.AVL y el ejecutable AVLACCES.EXE. Mediante Explorer de Windows (Mi PC) el usuario puede seleccionar y ejecutar cualquiera de los programas del sistema AVLMEF, tanto los compilados con Visual Basic como con QuickBasic.

Con respecto a la función que cumple cada módulo ejecutable, se conviene en denominar *módulos editores* a los que ayudan al usuario a preparar el archivo de datos del modelo. Estos programas crean el archivo de texto INFORMAT.AVL en la carpeta de trabajo, o lo abren si ya existe, en el cual registran el nombre del archivo de datos. Se denominan *módulos de análisis* aquellos que procesan los datos, generando las matrices de masa y rigidez del modelo, las cuales son grabadas en la misma carpeta de trabajo. Estos programas completan la información contenida en el archivo INFORMAT.AVL, agregando el nombre del módulo de análisis utilizado, y la fecha y hora al momento de ser ejecutado. Los *módulos de*

*resolución* son los programas que calculan las frecuencias y formas modales de vibración libre. Estos programas graban los resultados en la carpeta de trabajo, siempre que el usuario así lo haya requerido. Finalmente, los *módulos de pos-proceso* son los que muestran una imagen del modelo de elementos finitos, y si el mismo ha sido resuelto y se han grabado los resultados, también da los valores de las frecuencias y muestra gráficos de los modos de vibración. En las tablas siguientes se detalla el contenido de las 23 carpetas.

Carpeta		Tipo Estructural	Módulos QuickBasic	Tipo	Módulos Visual Basic	Tipo	Archivos de texto
1	BRAXI	Barras Rectas con deformación Axial	ED-BRAXI BRAXI-Q! BRAXI-Q# PP-BRAXI	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			BRAXI.RTF BRAXI.TXT
2	BRTOR	Barras Rectas con deformación Torsional	ED-BRTOR BRTOR-Q! BRTOR-Q# PP-BRTOR	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			BRTOR.RTF BRTOR.TXT
3	BRFBE	Barras Rectas con Flexión vga Bern.-Euler	ED-BRFBE BRFBE-Q! BRFBE-Q# PP-BRFBE	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			BRFBE.RTF BRFBE.TXT
4	BRFVT	Barras Rectas con Flexión viga Timoshenko	ED-BRFVT BRFVT-Q! BRFVT-Q# PP-BRFVT	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			BRFVT.RTF BRFVT.TXT
5	REPLA	Reticulados Planos	ED-REPLA REPLA-Q! REPLA-Q# PP-REPLA	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			REPLA.RTF REPLA.TXT
6	REESP	Reticulados Espaciales	ED-REESP REESP-Q! REESP-Q# PP-REESP	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			REESP.RTF REESP.TXT
7	ENPLA	Entramados Planos	ED-ENPLA ENPLA-Q! ENPLA-Q# PP-ENPLA	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			ENPLA.RTF ENPLA.TXT
8	EMPAR	Emparrillados planos	ED-EMPAR EMPAR-Q! EMPAR-Q# PP-EMPAR	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>			EMPAR.RTF EMPAR.TXT

Carpeta		Tipo Estructural	Módulos QuickBasic	Tipo	Módulos Visual Basic	Tipo	Archivos de texto
9	ENESP	Entramados Espaciales	ED-ENESP ENESP-Q! ENESP-Q# PP-ENESP	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	ENESP-V! ENESP-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	ENESP.RTF ENESP.TXT
10	EPT3N	Estados Planos con elemento T3N	ED-EPT3N EPT3N-Q! EPT3N-Q# PP-EPT3N	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	EPT3N-V! EPT3N-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	EPT3N.RTF EPT3N.TXT
11	EPT6N	Estados Planos con elemento T6N	ED-EPT6N EPT6N-Q! EPT6N-Q# PP-EPT6N	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	EPT6N-V! EPT6N-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	EPT6N.RTF EPT6N.TXT
12	EPR4N	Estados Planos con elemento R4N	ED-EPR4N EPR4N-Q! EPR4N-Q# PP-EPR4N	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	EPR4N-V! EPR4N-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	EPR4N.RTF EPR4N.TXT
13	EPC4N	Estados Planos con elemento C4N	ED-EPC4N EPC4N-Q! EPC4N-Q# PP-EPC4N	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	EPC4N-V! EPC4N-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	EPC4N.RTF EPC4N.TXT
14	EPR8N	Estados Planos con elemento R8N	ED-EPR8N EPR8N-Q! EPR8N-Q# PP-EPR8N	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	EPR8N-V! EPR8N-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	EPR8N.RTF EPR8N.TXT
15	EPC8N	Estados Planos con elemento C8N	ED-EPC8N EPC8N-Q! EPC8N-Q# PP-EPC8N	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	EPC8N-V! EPC8N-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	EPC8N.RTF EPC8N.TXT
16	PDR12	Placas Delgadas elemento R12	ED-PDR12 PDR12-Q! PDR12-Q# PP-PDR12	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	PDR12-V! PDR12-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	PDR12.RTF PDR12.TXT
17	PDR16	Placas Delgadas elemento R16	ED-PDR16 PDR16-Q! PDR16-Q# PP-PDR16	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	PDR16-V! PDR16-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	PDR16.RTF PDR16.TXT

Carpeta		Tipo Estructural	Módulos QuickBasic	Tipo	Módulos Visual Basic	Tipo	Archivos de texto
18	PDC16	Placas Delgadas elemento C16	ED-PDC16 PP-PDC16	<i>editor</i>  <i>pos-proceso</i>	PDC16-V! PDC16-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	PDC16.RTF PDC16.TXT
19	PGTC9	Placas Gruesas elemento TC9	ED-PGTC9 PGTC9-Q! PGTC9-Q# PP-PGTC9	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	PGTC9-V! PGTC9-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	PGTC9.RTF PGTC9.TXT
20	PGR12	Placas Gruesas elemento R12	ED-PGR12 PGR12-Q! PGR12-Q# PP-PGR12	<i>editor</i> <i>análisis</i> <i>análisis</i> <i>pos-proceso</i>	PGR12-V! PGR12-V#	<i>análisis</i> <i>análisis</i>	PGR12.RTF PGR12.TXT

Carpeta		Tipo de procesol	Módulos QuickBasic	Tipo	Módulos Visual Basic	Tipo	Archivos de texto
21	MITIN	Cálculo de frecuencias y formas modales	MITIN1Q! MITIN1Q# MITIN2Q! MITIN2Q#	<i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i>	MITIN1V! MITIN1V# MITIN2V! MITIN2V#	<i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i>	MITIN.RTF MITIN.TXT
22	MIVSB	Cálculo de frecuencias y formas modales	MIVSB1Q! MIVSB1Q# MIVSB2Q! MIVSB2Q#	<i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i>			MIVSB.RTF MIVSB.TXT
23	JACOB	Cálculo de frecuencias y formas modales	JACOB1Q! JACOB1Q# JACOB2Q! JACOB2Q#	<i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i> <i>resolución</i>			JACOB.RTF JACOB.TXT

### A.3 UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

A título ilustrativo, y con el fin de describir el uso del sistema AVLMEF, a continuación se detallan los pasos a cumplir para calcular los primeros seis valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$  para el caso de una barra en voladizo (viga cantilever) de longitud  $L$ , como la mostrada en la Figura 7.2.6 (página 168 del Capítulo 7), cuando la misma vibra con movimiento plano.

En primera instancia, el usuario debe decidir qué tipo de algoritmo aplicará para resolver el problema planteado. Dado que se trata de vibraciones flexionales, se podría recurrir a modelos con elementos finitos del tipo viga Bernouilli-Euler, o mejor con la formulación de viga Timoshenko. Otra alternativa, que es la adoptada en este ejemplo de aplicación, consiste en utilizar modelos de estados planos de tensiones. Como el dominio del modelo físico es rectangular, de los distintos tipos de elementos finitos estudiados para estados planos, se elige el rectángulo de ocho nodos (formulación cuadrática) descrito en la Sección 7.5 (página 182). Dividiendo la longitud de la barra en 20 partes iguales, y la altura en 2, se tendrá un modelo formado por 40 elementos cuadrados, con un total de 165 nodos.

Suponiendo que el usuario utiliza el sistema AVLMEF por primera vez, debe proceder a su “instalación”. Para ello, se copia en el directorio raíz del disco rígido (unidad C:) la carpeta AVLMEF que se encuentra en el CD-ROM. De esta manera queda instalada la carpeta principal C:\AVLMEF, la cual contiene todos los programas del sistema.

Para iniciar la aplicación, se busca y se ejecuta el módulo denominado AVLACCES que permite crear una carpeta de trabajo, debiendo ingresar el usuario un nombre válido para la misma. En este ejemplo se denomina C:\AVL\_1, ruta de acceso que es registrada en el archivo REGACCES.AVL ubicado en la carpeta principal C:\AVLMEF. A partir de este momento, el módulo AVLACCES podrá ser utilizado para crear otras carpetas de trabajo, o para activar alguna existente mediante su registro en el archivo REGACCES.AVL.

A continuación el usuario debe buscar y ejecutar el módulo ED-EPR8N (ubicado en la carpeta C:\AVLMEF\EPR8N) para proceder a la edición del archivo de datos. Este programa requiere el ingreso de un nombre válido para dicho archivo. En este caso se adopta R8N\_40.DAT, el cual es registrado en el archivo INFORMAT.AVL que se ubica en la carpeta de trabajo C:\AVL\_1. Siguiendo las instrucciones que aparecen en la pantalla del monitor, se ingresan los datos que consisten de sólo cuatro números: coordenadas del vértice superior derecho (20, 2); el número de vértices sobre el eje global X (21); y el número de vértices sobre el eje global Y (3). El programa asume que el vértice inferior izquierdo es el origen de coordenadas. Con esta información se generan los datos del modelo y se graban en el archivo R8N\_40.DAT en la carpeta de trabajo. Para ver una imagen del modelo de elementos finitos, se ejecuta el módulo de pos-proceso PP-EPR8N, el cual detecta automáticamente al archivo de datos generado por el programa ED-EPR8N (por ser éste el último editor ejecutado, en el paso anterior). Se observa que los 88 nodos del contorno del modelo se encuentran totalmente vinculados (restricciones DX,DY), siendo ésta una característica del programa editor ED-EPR8N. Dado que el modelo físico de la Figura 7.2.6 está empotrado solamente en el borde izquierdo, el usuario debe abrir el archivo de datos R8N\_40.DAT con un editor de texto plano (por ejemplo, con el Bloc de Notas de Windows, o con Edit de MS-DOS) y proceder a modificar la segunda línea sustituyendo el número 88 con 5, que es el número de nodos situados sobre el borde izquierdo (3 vértices y 2 nodos intermedios). Luego se suprimen las 83 líneas correspondientes a la vinculación de los nodos 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 21, etc., cuidando de no dejar líneas en blanco.

Otra característica del programa editor es suponer que todos los elementos tienen las mismas propiedades: espesor ( $h$ ), densidad ( $\rho$ ), módulo de Young ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), lo cual se cumple en este ejemplo de aplicación. Teniendo en cuenta que el área de la sección de la barra tiene valor 2, y que el momento de inercia ( $I_z=hc^3/12$ , donde  $h$  es el ancho y  $c$  es la altura de la sección transversal) vale  $2/3$ , se adoptan los siguientes valores:  $h=1$ ,  $\rho=1$ ,  $E=480000$ ,  $\nu=0$ . El usuario debe reemplazar, en la anteúltima línea del archivo de datos, los símbolos (h, rho, E, nu) con estos valores numéricos. Nótese que con  $L=20$ , el valor de  $L^2 (\rho A / EI_z)^{1/2}$  resulta igual a la unidad. De esta manera, los valores que se obtengan de las frecuencias angulares ( $\omega$  en rad/s) son los del coeficiente de frecuencia adimensional ( $\Omega$ ). En este ejemplo se supone que la intención del usuario es hallar resultados comparables con las teorías de flexión de vigas, en las que  $\nu$  no interviene. Por este motivo, se declara nulo el valor del coeficiente de Poisson. Por esta misma razón, se obtendrán los mismos resultados con cualquiera de los dos algoritmos de estados planos, de tensiones o deformaciones. Realizadas las apropiadas modificaciones del archivo de datos, siempre es conveniente volver a ejecutar el programa PP-EPR8N, para ver si se ha incurrido en algún error detectable.

Otra forma de generar el archivo de datos es recurriendo a un editor de texto plano y escribirlo directamente, de acuerdo con las instrucciones que se dan en el archivo EPR8N.TXT (o EPR8N.RTF), pero en tal caso no queda registrado el nombre del archivo de datos en C:\AVL\_1\INFORMAT.AVL, a no ser que lo haga el usuario con las herramientas del sistema operativo. Este ejemplo muestra que es mucho más sencillo recurrir al programa editor, ya que el mismo se encarga de generar y escribir las incidencias de los elementos y las coordenadas de los vértices del modelo. En general, es conveniente generar los archivos de datos con los correspondientes programas editores.

El paso siguiente es ejecutar el módulo de análisis, seleccionando en este caso el compilado con QuickBasic para operar con doble precisión, denominado EPR8N-Q#. El módulo de análisis detecta al archivo de datos registrado en C:\AVL\_1\INFORMAT.AVL y si el usuario lo acepta, realiza el cálculo de las dos matrices, de rigidez y de masa, las cuales son grabadas en los archivos (formato ASCII) R8N\_40.RGZ y R8N\_40.MAS, respectivamente. Si se observa la primera línea de estos archivos, se comprueba que el modelo tiene 320 grados de libertad activos (160 nodos libres con 2 grados de libertad cada uno) y ancho de banda 22. El módulo de análisis además actualiza el archivo C:\AVL\_1\INFORMAT.AVL (o lo crea si no existe) agregando, después de la denominación del archivo de datos, el nombre que lo identifica (en este caso, EPR8N-Q#), y la fecha y hora en que se graba la información.

A continuación se debe ejecutar uno de los módulos de resolución para calcular las frecuencias y modos de vibración naturales del modelo. Estos detectan automáticamente al archivo de datos del modelo en proceso de resolución. Los más eficientes son los que aplican el método de iteración inversa. Buscando y ejecutando el módulo MITIN1Q# (o MITIN2Q#), se le indica que calcule seis frecuencias y además se selecciona la opción de grabar los resultados. Por otra parte, en este ejemplo se opta por el autovector inicial con todas sus componentes de valor unidad, y se deja en cero al parámetro de desplazamiento (shift). Al efectuar el proceso numérico iterativo, se comprueba que el número máximo de iteraciones, 200 por omisión, no es suficiente para alcanzar la convergencia en el cálculo de la tercera frecuencia. Reiterando la ejecución, ingresando un límite mayor para las iteraciones, se obtienen las seis frecuencias requeridas, cuyos valores con 16 dígitos significativos son mostrados en la pantalla del monitor:

$$\omega_1 = 3.493423301801128 \text{ rad/s} ; \quad \omega_2 = 21.10505691279045 \text{ rad/s} ; \quad \omega_3 = 54.41398236439401 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 56.08128917283245 \text{ rad/s} ; \quad \omega_5 = 102.8998216340519 \text{ rad/s} ; \quad \omega_6 = 158.3650428160523 \text{ rad/s}$$

En la Tabla 7.5.1 (página 184) se dieron los primeros cuatro valores, con redondeo a la cuarta cifra decimal.

Finalmente, se ejecuta el módulo de pos-proceso PP-EPR8N. Éste lee la información grabada por el programa de resolución, en los archivos R8N\_40.FRC y R8N\_40.MOD, con formato ASCII, ubicados en la carpeta de trabajo C:\AVL\_1; y muestra en la pantalla, en forma sucesiva, los valores de las frecuencias calculadas y los gráficos de los respectivos modos de vibración. La imagen del tercer modo muestra que es de carácter axial, en lugar de flexional como los restantes. En el archivo R8N\_40.FRC se puede observar que el número de iteraciones requeridas, para las sucesivas frecuencias, fueron: 6, 11, 206, 15, 20 y 239.

Si este mismo ejemplo se analiza y se resuelve utilizando los módulos compilados con Visual Basic (EPR8N-V# y MITIN1V# o MITIN2V#) los resultados son los siguientes:

$$\omega_1 = 3.49342330149533 \text{ rad/s} ; \quad \omega_2 = 21.1050569127120 \text{ rad/s} ; \quad \omega_3 = 54.4139823644132 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 56.0812891728133 \text{ rad/s} ; \quad \omega_5 = 102.899821634044 \text{ rad/s} ; \quad \omega_6 = 158.365042816045 \text{ rad/s}$$

Nótese que Visual Basic da los resultados con 15 dígitos significativos en lugar de 16. Obviamente, las pequeñas diferencias que se observan, al comparar estos resultados con los hallados anteriormente con QuickBasic, son totalmente irrelevantes. Estas discrepancias son consecuencia de las diferencias en el procesamiento numérico, con uno u otro compilador. Al abrir el archivo R8N\_40.FRC ahora se observa que el número de iteraciones requeridas, para las sucesivas frecuencias, fueron: 6, 11, 207, 15, 20 y 239.

Cabe mencionar que con algunos modelos de elementos finitos, el módulo de resolución con el método de iteración inversa puede requerir un número grande de iteraciones para el cálculo de algunas frecuencias posteriores a la primera. En estos casos, al utilizar MITIN1Q# (o MITIN1V#), antes del cálculo de  $\omega_1$  conviene dar un valor del parámetro de desplazamiento (shift) menor, pero cercano, al cuadrado de  $\omega_1$ . Si aún así subsiste el problema, se aconseja utilizar el módulo MITIN2Q# (o MITIN2V#), ingresando un valor menor y cercano al cuadrado de  $\omega_1$ , antes del cálculo de cada frecuencia  $\omega_i$ .

Es importante destacar que la carpeta de trabajo a ser utilizada en una aplicación, necesariamente debe estar *activa*, es decir registrada en el archivo REGACCES.AVL ubicado en la carpeta principal del sistema. Por otra parte, es muy conveniente respetar la *secuencia normal* de ejecución de los programas, que se resume en el siguiente esquema:

Editor → pos-procesador (control) → módulo de análisis → módulo de resolución → pos-procesador

Al crearse un nuevo archivo de datos con un programa editor, es registrado como *modelo actual*, o *activo*, el cual es procesado, por omisión, en la ejecución de los restantes módulos, junto con la información generada por los módulos precedentes de la secuencia.

En realidad, todos los programas de análisis, resolución y pos-proceso, pueden ser ejecutados con modelos existentes en la carpeta de trabajo, sin necesidad de cumplir con la secuencia normal del proceso. Para ello, cuando el programa que se está ejecutando muestra el nombre del archivo de datos que se encuentra activo, el usuario debe ingresar en su lugar el nombre del archivo de reemplazo. Si el programa es un pos-procesador o un módulo de resolución, no se produce ningún cambio en los registros. Por el contrario, si es un módulo de análisis se actualiza el registro INFORMAT.AVL en la carpeta de trabajo en uso, de modo que, a partir de ese momento, el archivo de reemplazo pasa a ser el modelo activo.

#### A.4 CÓDIGOS DE ERRORES

En la tabla siguiente se dan los códigos numéricos de errores que pueden producirse en la compilación o en la ejecución de programas codificados con QuickBasic [9].

<b>CÓDIGO</b>	<b>BREVE DESCRIPCIÓN</b>	<b>CÓDIGO</b>	<b>BREVE DESCRIPCIÓN</b>
1	NEXT without FOR	38	Array not defined
2	Syntax error	50	FIELD overflow
3	RETURN without GOSUB	51	Internal error
4	Out of DATA	52	Bad file name or number
5	Illegal function call	53	File not found
6	Overflow	54	Bad file mode
7	Out of memory	55	File already open
8	Label not defined	56	FIELD statement active
9	Subscript out of range	57	Device I/O error
10	Duplicate definition	58	File already exists
11	Division by zero	59	Bad record length
13	Type mismatch	61	Disk full
14	Out of string space	62	Input past end of file
16	String formula too complex	63	Bad record number
18	Function not defined	64	Bad file name
20	RESUME without ERROR	67	Too many files
24	Device timeout	68	Device unavailable
25	Device fault	69	Communication-buffer overflow
26	FOR without NEXT	70	Permission denied
27	Out of paper	71	Disk not ready
29	WHILE without WEND	72	Disk-media error
30	WEND without WHILE	73	Advanced feature unavailable
33	Duplicate label	74	Rename across disks
35	Subprogram not defined	75	Path/File access error
37	Argument-count mismatch	76	Path not found

## A.5 PROGRAMAS DE ANÁLISIS COMPILADOS CON QUICKBASIC (MS-DOS)

NOMBRE	BREVE DESCRIPCIÓN
Programas de análisis (calculan las matrices $[K]$ y $[M]$ de rigidez y masa de los modelos):	
1 BRAXI-Q#	Barra recta con deformación axial. Elementos de 2, 3 y 4 nodos.
2 BRTOR-Q#	Barra recta con deformación torsional. Elementos de 2, 3 y 4 nodos.
3 BRFBF-Q#	Barra recta flexionada. Elementos Viga Bernoulli-Euler de 2 y 3 nodos.
4 BRFVT-Q#	Barra recta flexionada. Elementos Viga Timoshenko de 2 y 3 nodos.
5 REPLA-Q#	Reticulado plano. Elementos uniaxiales de 2 nodos.
6 REESP-Q#	Reticulado espacial. Elementos uniaxiales de 2 nodos.
7 ENPLA-Q#	Entramado plano. Elementos viga-columna 2 y 3 nodos.
8 EMPAR-Q#	Emparrillado. Elementos viga Bernoulli-Euler/Timoshenko de 2 nodos.
9 ENESP-Q#	Entramado espacial. Elementos viga Bernoulli-Euler/Timoshenko de 2 nodos.
10 EPT3N-Q#	Estado plano. Elemento triángulo lineal de 3 nodos.
11 EPT6N-Q#	Estado plano. Elemento triángulo cuadrático subparamétrico de 6 nodos.
12 EPR4N-Q#	Estado plano. Elemento rectángulo bilineal de 4 nodos.
13 EPC4N-Q#	Estado plano. Elemento cuadrilátero bilineal de 4 nodos.
14 EPR8N-Q#	Estado plano. Elemento rectángulo cuadrático de 8 nodos.
15 EPC8N-Q#	Estado plano. Elemento cuadrilátero cuadrático subparamétrico de 8 nodos.
16 PDR12-Q#	Placa delgada. Rectángulos de 12 grados de libertad.
17 PDR16-Q#	Placa delgada. Rectángulo conforme de 16 grados de libertad.
18 PGTC9-Q#	Placa gruesa. Triángulo conforme de 9 grados de libertad.
19 PGR12-Q#	Placa gruesa. Rectángulo conforme de 12 grados de libertad.
Programas de resolución (calculan autovalores y autovectores):	
20 MITIN1Q#	Método de iteración inversa. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[K]$ no singular.
21 MITIN2Q#	Método de iteración inversa. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[K]$ no singular.
22 MIVSB1Q#	Método de Vianello-Stodola-Bodewig. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[K]$ positiva definida.
23 MIVSB2Q#	Método de Vianello-Stodola-Bodewig. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[K]$ no singular.
24 JACOB1Q#	Método de Jacobi. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[M]$ positiva definida.
25 JACOB2Q#	Método de Jacobi. Datos: $[K]$ y $[M]$ .

### NOTAS:

- 1) Los programas de la lista son los compilados con QuickBasic para operar con doble precisión. Los que calculan con simple precisión tienen los mismos nombres con el sufijo ! en lugar de #.
- 2) En el disco compacto se encuentran los módulos ejecutables de análisis y resolución, los utilitarios para la edición de los archivos de datos y de pos-proceso de los modelos, como asimismo los archivos de texto (RTF y TXT) con las instrucciones para el uso de los módulos de cálculo.

## A.6 PROGRAMAS DE ANÁLISIS COMPILADOS CON VISUAL BASIC (WINDOWS)

NOMBRE	BREVE DESCRIPCIÓN
--------	-------------------

Programas de análisis (calculan las matrices  $[K]$  y  $[M]$  de rigidez y masa de los modelos):

1 ENESP-V#	Entramado espacial. Elementos viga Bernoulli-Euler/Timoshenko de 2 nodos.
2 EPT3N-V#	Estado plano. Elemento triángulo lineal de 3 nodos.
3 EPT6N-V#	Estado plano. Elemento triángulo cuadrático subparamétrico de 6 nodos.
4 EPR4N-V#	Estado plano. Elemento rectángulo bilineal de 4 nodos.
5 EPC4N-V#	Estado plano. Elemento cuadrilátero bilineal de 4 nodos.
6 EPR8N-V#	Estado plano. Elemento rectángulo cuadrático de 8 nodos.
7 EPC8N-V#	Estado plano. Elemento cuadrilátero cuadrático subparamétrico de 8 nodos.
8 PDR12-V#	Placa delgada. Rectángulos de 12 grados de libertad.
9 PDR16-V#	Placa delgada. Rectángulo de 16 grados de libertad.
10 PDC16-V#	Placa delgada. Cuadrilátero de 16 grados de libertad.
11 PGTC9-V#	Placa gruesa. Triángulo conforme de 9 grados de libertad.
12 PGR12-V#	Placa gruesa. Rectángulo conforme de 12 grados de libertad.

Programas de resolución (calculan autovalores y autovectores):

13 MITIN1V#	Método de iteración inversa. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[K]$ no singular.
14 MITIN2V#	Método de iteración inversa. Datos: $[K]$ y $[M]$ , $[K]$ no singular.

### NOTAS:

- 1) Los programas de la lista son los compilados con Visual Basic para operar con doble precisión. Los que calculan con simple precisión tienen los mismos nombres con el sufijo ! en lugar de #.
- 2) En el disco compacto se encuentran los módulos ejecutables de análisis y resolución, como asimismo los archivos de texto (RTF y TXT) con las instrucciones para el uso de los mismos.

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.2.1 (a): Sistema masa-resorte-amortiguador.	4
1.2.1 (b): Fuerzas sobre la masa aislada.	4
1.2.2: Oscilaciones amortiguadas. Condiciones iniciales: $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ .	6
1.2.3: Amortiguamiento crítico, con $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ .	7
1.2.4: Oscilaciones con $u = u_0$ y $\dot{u}_0 = 0$ .	8
1.2.5: Corresponde al caso de amortiguamiento crítico.	9
1.3.1: Modelo simple con amortiguamiento por rozamiento.	10
1.3.2: Oscilaciones decrecientes por rozamiento.	13
1.4.1 (a): Sistema masa-resorte-amortiguador.	15
1.4.1 (b): Fuerzas sobre la masa aislada.	15
1.4.2: Sistema de tres masas y tres resortes.	16
1.4.3 (a): Momento aplicado sobre el sistema torsional.	17
1.4.3 (b): Grados de libertad del sistema torsional.	17
1.4.4 (a): Sistema masas-resorte.	19
1.4.4 (b): Fuerzas sobre $m_1$ .	20
1.4.4 (c): Fuerzas sobre $m_2$ .	20
1.5.1: Variación virtual $\delta u(t)$ de la trayectoria.	23
1.6.1: Sistema discreto de dos grados de libertad.	28
1.8.1: Sistema discreto de tres grados de libertad.	33
2.2.1 (a): Sistema de tres grados de libertad con restricciones	37
2.2.1 (b): Sistema en reposo y esquemas de los tres modos naturales.	39
2.2.2 (a): Sistema bidimensional de tres masas, con cuatro grados de libertad.	40
2.2.2 (b): Sistema unidimensional de tres grados de libertad.	41
2.2.2 (c): Sistema unidimensional de un grado de libertad.	41
2.2.3: Sistema bidimensional de seis grados de libertad.	42
2.2.4: Sistema de tres grados de libertad sin restricciones.	43
2.6.1: Esquema de una matriz banda.	56
3.1.1: Tensiones positivas.	69
3.2.1: Estado uniaxial.	73
3.2.2: Elemento diferencial uniaxial.	75
3.2.3: Barra empotrada-libre.	76
3.3.1: Barra torsionada.	76
3.4.1: Barra con estado flexional (viga)	78
3.4.2: Elemento diferencial con deformación por corte.	82
3.5.1: Sólido prismático de altura (espesor) $h$ .	85

## ÍNDICE DE FIGURAS (continuación)

4.2.1: Gráficos del desplazamiento axial $u(x)$ de los tres primeros modos naturales.	95
4.2.2: Modos exactos y aproximados de vibración axial de la barra empotrada-libre.	99
5.1.1: Elemento de dos nodos para vibraciones axiales de barras rectas.	103
5.1.2: Funciones de forma del elemento uniaxial de dos nodos.	104
5.1.3: Modelo con dos elementos.	106
5.1.4: Modos exactos y aproximados de vibración axial de la barra empotrada-libre.	108
5.1.5: Elemento con área linealmente variable.	111
5.1.6: Elemento de tres nodos.	111
5.1.7: Funciones de forma $N_1(\xi)$ , $N_2(\xi)$ y $N_3(\xi)$ del elemento cuadrático de tres nodos.	111
5.1.8: Elemento de cuatro nodos.	113
5.1.9: Gráficos de las cuatro funciones de forma del elemento cúbico.	114
5.1.10: Ejemplos de barras con resortes y masas, con solución exacta conocida [3].	115
5.2.1: Sistema mecánico torsional	117
5.3.1: Elemento viga de dos nodos.	119
5.3.2: Funciones de forma del elemento viga tipo Bernoulli-Euler de dos nodos.	120
5.3.3: Fuerzas y cuplas de inercia.	120
5.3.4: Forma modal de corte puro.	126
6.1.1 (a): Generación de un elemento de barra para entramados planos.	135
6.1.1 (b): Generación de un elemento de barra para emparrillados.	135
6.1.1 (c): Generación de un elemento de barra para entramado espacial (3D).	136
6.2.1: Elemento de reticulado plano en posición oblicua.	136
6.2.2: Reticulado plano de 41 barras y 22 nudos.	139
6.3.1: Reticulado espacial de dos capas, con 38 barras y 13 nudos.	141
6.4.1: Elemento de entramado plano.	142
6.4.2: Elemento de entramado plano en posición oblicua.	143
6.4.3: Desplazamientos globales.	144
6.4.4: Dos numeraciones globales de los nodos de un modelo de viga Vierendel.	144
6.4.5: Esquema de biela oblicua.	145
6.4.6: Descomposición de un entramado plano simétrico.	146
6.4.7: Pórtico simétrico.	147
6.4.8: (a) Modos antimétricos; (b) Modos simétricos.	147
6.5.1: Restricción oblicua. (a): entramados planos; (b): emparrillados.	149
6.5.2: Emparrillado de 58 tramos .	150
6.6.1: Modelo de un entramado espacial.	151
6.6.2: Elemento de dos nodos en 3D y ejes locales principales.	152

## ÍNDICE DE FIGURAS (continuación)

6.6.3: Ejes locales auxiliares de referencia en el caso alternativo ( $\mathbf{x} // z$ ).	154
6.6.4: Primeras formas modales del pórtico de la Figura 6.6.1(a).	160
7.1.1.: Modelo continuo en el plano $x$ - $y$ .	161
7.1.2: Triángulo de Pascal.	161
7.1.3: Distintos tipos de elementos finitos bidimensionales.	162
7.1.4: Términos de polinomios completos.	162
7.2.1: Numeración local de los nodos.	163
7.2.2: Notación de las componentes globales.	163
7.2.3. Función de forma $N_1(x,y)$ .	165
7.2.4: Subáreas $A_1, A_2, A_3$ ,	165
7.2.5: Dominio en el plano $\xi_1$ - $\xi_2$ .	168
7.2.6: Barra recta empotrada-libre.	168
7.2.7: Modelo con 63 nodos en una red de 80 elementos triangulares.	169
7.3.1: Elemento rectangular de cuatro nodos.	171
7.3.2: Función de forma $N_1(\xi, \eta)$ .	173
7.4.1: Coordenadas $\xi$ - $\eta$ del cuadrilátero.	176
7.4.2: Diferencial de área en el plano $x$ - $y$ .	176
7.4.3: Elementos cuadriláteros mal configurados.	182
7.5.1: Rectángulo de ocho nodos.	182
7.6.1: Cuadrilátero subparamétrico de 8 nodos.	184
7.7.1: Cuadrilátero isoparamétrico de 8 nodos.	185
7.8.1: Triángulo subparamétrico en el plano $x$ - $y$ .	186
7.8.2: Elemento en el plano $\xi$ - $\eta$ .	186
7.8.3: Modelo con 20 triángulos de seis nodos.	188
8.2.1: Elemento rectangular de cuatro nodos.	196
8.2.2: Elemento en el plano $\xi$ - $\eta$ .	196
8.2.3: Función de forma $N_1(\xi, \eta)$ .	196
8.2.4 (a) y (b): Deformaciones del elemento con curvaturas constantes de flexión.	198
8.2.5: Deformación con curvatura constante de torsión.	198
8.2.6: Líneas nodales de modos naturales de vibración.	199
8.2.7: Cuadrilátero en el plano $x$ - $y$ .	205
8.2.8: Mallas irregulares de 16 y 64 elementos cuadrangulares.	207
8.2.9: Elemento triangular de Tocher para placas delgadas.	208
8.2.10: Orientación del elemento en el sistema global $x$ - $y$ .	209
8.2.11: Elemento triangular dividido en tres triángulos.	209
8.2.12: Cuadrilátero formado con cuatro triángulos.	210

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Bathe K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
2. Biggs J.M., *Introduction to Structural Dynamics*. McGraw-Hill, 1964.
3. Blevins R.D., *Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand, 1964.
4. Burden R.L., Faires J.D., *Análisis Numérico (7ª Edición)*. Thomson Editores, 2002.
5. Chandrupatla T.R., Belegundu A.D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*. Prentice-Hall, 1991.
6. Cook R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1981.
7. Doyle J.F., *Static and Dynamic Analysis of Structures*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
8. Jennings A., *Matrix Computation for Engineering and Scientists*. John Wiley, 1977.
9. Joyanes Aguilar L., *Programación en QuickBasic/Qbasic (2ª edición)*. McGraw-Hill, 1995.
10. Laura P.A.A., Rossit C.A., *Problemas de Vibraciones en Ingeniería Civil*. Publicación interna del Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería, UNS, 185 pp., 2000.
11. Lekhnitskii, S.G., *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
12. Logan Daryl L., *A First Course in the Finite Element Method Using Algor, (2<sup>nd</sup> edition)* Brooks/Cole. Thomson Learning, 2001.
13. McMinn S.J., *Matrices for Structural Analysis*. Spon's Civil Engineering Series, 1962.
14. MicroSoft Corporation, *Visual Basic Versión 5.0, Manual del programador*, 1997.
15. Petyt M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1990.
16. Przemieniecki J.S., *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, 1968.
17. Rossi, R.E., *Introducción al Método de Elementos Finitos. Curso Básico con aplicaciones en Elasticidad Lineal*. Publicación interna del Departamento de Ingeniería, UNS. 216 pp., 1993.
18. Weaver W. Jr., Timoshenko S.P., Young D.H., *Vibrations Problems in Engineering*. John Wiley & Son, Inc., 1990.
19. Zienkiewicz O.C., *El método de los elementos finitos*. Reverté S.A., 1980.

## Artículos en revistas científicas

20. Rossi R.E., Laura P.A.A., Vibrations of a Timoshenko beam clamped at one end and carrying a finite mass at the other. *Applied Acoustics* (1990) 30, 293-301.
21. Rossi, R.E., Gutiérrez R.H., Laura P.P.A., Transverse vibrations of a Timoshenko beam of non uniform cross section elastically restrained at one end and carrying a concentrated mass at the other. *Journal of the Acoustical Society of America* (1991) 89(5), 2456-2458.
22. Rossi, R.E., Laura P.A.A., Numerical experiments on vibrating linearly tapered Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* (1993) 168(1), 179-183.
23. Rossi R.E., A note of a finite element for vibrating thin orthotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* (1997) 208(5), 864-868.
24. Rossi R.E., Transverse vibrations of thin, orthotropic rectangular plates with rectangular cutouts with fixed boundaries. *Journal of Sound and Vibration* (1999) 221(4), 733-736.