Universidad Nacional del Sur

Tesis de Magister en Matemática

Reductos hilbertianos de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden 3

Juan Sebastián Slagter

Director: Dr. Aldo Figallo Orellano

Bahía Blanca **Argentina**

2016

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Magister en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática durante el período comprendido entre mayo de 2014 y mayo de 2016, bajo la dirección del Dr. Aldo Figallo Orellano, profesor adjunto del Departamento de Matemática.

Agradecimientos

En primer lugar expreso mi agradecimiento al Dr. Aldo Figallo Orellano, por el gusto con que me enseñó, por su energía y paciencia, por su incondicional dedicación al trabajo. Por haberme iniciado en la investigación. Por ser quien hizo esto posible.

Agradezco enérgicamente al Dr. Aldo V. Figallo por la fe depositada, a la Dra. Alicia Ziliani y al Dr. Martín Figallo por el apoyo brindado y acompañar en el trayecto de formación. Por su generosidad tanto intelectual como personal.

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor Sergio Celani por su curso sobre representaciones topológicas, que motivó el desarrollo del capítulo 5 de esta tesis. Sus comentarios y charlas sobre el tema permitieron mi entendimiento sobre el trabajo topológico del álgebra, que será de gran utilidad en mis estudios posteriores.

Agradezco a la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires, por haberme otorgado la beca que posibilitó realizar el trabajo de investigación desarrollado en esta tesis y en particular, a quien fue su Vicepresidente y miembro del directorio, Dr. Alfredo Juan por su apoyo y estímulo para que lograse desarrollar mis estudios.

También quiero brindar mi reconocimiento a todos mis amigos del Departamento de Matemática de la UNS, principalmente a mis compañeros de oficina y a mis grandes compañeros de la vida, Juan Marcelo, Dante, Juan y Lucas.

A mis padres, Mariné y Hermann, y mis hermanos, Diego y Caro, por estar siempre y apoyar cada proyecto emprendido. Por su amor incondicional.

Introducción

En 1923, D. Hilbert sugirió, por considerarlo interesante, tomar como axiomas un cierto conjunto de fórmulas del cálculo proposicional Intuicionista en el que sólo participa el conectivo de implicación, lo que permitiría desarrollar un fragmento de dicho cálculo. El mismo es conocido con el nombre de cálculo proposicional implicativo positivo y su estudio lo inician, en 1934, D. Hilbert y P. Bernays. En 1950, L. Henkin introdujo la noción de *modelo implicativo* como contrapartida algebraica de este cálculo. Posteriormente, en 1960 A. Monteiro denominó álgebras de Hilbert a las álgebras duales de los modelos implicativos y fue A. Diego, en 1966, uno de los autores que realizó una contribución fundamental al desarrollo de la teoría de estas álgebras en su tesis doctoral, presentada en la UBA bajo la dirección de Antonio Monteiro. Por otra parte, varios autores aceptaron como evidente que la clase de las álgebras de Hilbert en las que todo par de elementos tiene ínfimo, coincide con la clase de las álgebras de Hertz, los semiretículos implicativos o los semiretículos de Brouwer llamadas así por H. Porta, H. Curry y P. Köhler respectivamente. Este hecho es falso como lo señaló por primera vez E. Marsden en 1973 (para más detalles ver [27]). Lo que motivó el estudio de álgebras de Hilbert con ínfimo por A.V. Figallo, G. Ramón y S. Saad en [29] y con supremo por S. Celani y D. Montangie en [20].

Por otro lado, G. Moisil introdujo a las álgebras de Łukasiewicz 3-valentes como los modelos algebraicos de la lógica trivalorada propuesta por Łukasiewicz ([33]). Recordemos que un álgebra de Łukasiewicz 3-valente es un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ que satisface las siguientes identidades:

(L0) $x \vee 1 = 1$,

(L1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(L2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(L3) $\sim\sim x = x$,

(L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(L5) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(L6) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$,

(L7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

A Finales de los años 60, Antonio Monteiro probó que la implicación $\rightarrow$ definida por $x \rightarrow y = \triangle \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$ es la expresión de la implicación intuicionista, y por lo tanto, convierte el álgebra de Lukasiewicz en un álgebra de Hilbert especial. A partir de estas consideraciones M. C. Canals Frau y A.V. Figallo en [10] se propusieron estudiar algebraicamente el fragmento $\{\rightarrow, \triangle\}$ de la lógica de Lukasiewiz 3-valente. Este fragmento puede ser axio-matizado por medio de la lógica implicativa positiva con el axioma de Ivo Thomas ([39]) para el caso $n = 3$. Estas estructuras algebraicas fueron denominadas álgebras de Hilbert trivalentes modales.

En esta tesis se expondrán los resultados de [10] y de [11], uno de los objetivos es dar difusión al material existente en la literatura sobre la temática de la tesis, dado que esos trabajos fueron publicados en la Universidad Nacional de San Juan y que son de difícil acceso. Lo que permitirá exhibir nuevos cálulos estilo Hilbert correctos y completos con respecto a semánticas algebraicas, en su versión débil. Además, las estructuras estudiadas en [11], serán presentadas por medio de la axiomática de las álgebras de Hilbert con ínfimo. También, se expondrán nuestros estudios sobre el fragmento $\{\rightarrow, \vee, \triangle\}$, para lo cual se introducirá una nueva estructura algebraica. Por otra parte, se introducirá y estudiará un nuevo reducto de las álgebra de Lukasiewicz de orden 3. Se exhibirán los cáculo proposicionales que tenga como semánticas al nuevo fragmento, y posteriormente se etudirá la lógica de primer orden de estos cálculos. Por último, se expondrá la dualidad topológica para los semiretículos implicativos dada por S. Celani en [17] donde en nuestro caso prescindiremos de un espacio topológico ordenado inicial, para lo cual deberemos trabajar con el orden que se define en un espacio sober.

Hemos organizado la tesis en 6 capítulos. El capítulo I podemos dividirlo en dos secciones, en la primera parte repasaremos definiciones y resultados bien conocidos en álgebras de Hilbert, que han sido incluidos tanto para facilitar la lectura posterior como para fijar las notaciones y definiciones que utilizaremos a lo largo de la tesis. En la segunda parte de nuestro primer capítulo nos enfocaremos en las álgebras de Hilbert trivalentes y las Álgebras de Łukasiewicz de orden 3.

En el capítulo II comenzamos el estudio de las álgebras de Hilbert trivalentes modales en donde desarrollaremos detalladamente el contenido del trabajo [10]. Además, presentaremos la demostración de la semisimplicidad de la variedad por medio de las técnicas desarrolladas por A. Monterio ([34]) para estructuras algebraicas que posean una implicación y que sus sistemas deductivos determinen las congruencias, estas técnicas generales han sido muy usadas por otros autores, por lo cual detallaremos su prueba, con el objetivo de exponer las condiciones mínimas que debe cumplir dicha implicación. Por otra parte, expondremos un nuevo cálculo estilo Hilbert que sea la contraparte algebraica de las álgebras de Hilbert trivalentes modales, con la respectiva prueba. En este trabajo se expondrán las demostraciones que se precisan para probar la completitud y correctitud del *cálculo implicativo positivo* con las álgebras de Hilbert, que según nuestro conocimiento, no se encuentran en la literatura.

En el capítulo III expondremos los resultados de [11] en donde se estudia el $\{\rightarrow, \wedge, \triangle, 1\}$-reducto de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden 3. Estos autores denominan a dichos reductos *semiretículos implicativos modales trivalentes*, nosotros vamos a presentar una axiomática acorde a nuestros objetivos. Es decir, nos interesaremos en estudiar reductos donde aparezcan operaciones reticulares en álgebras de Hilbert, para lo cual trabajaremos con álgebras que las posean. Un hecho interesante es que a las álgebras de Hilbert con ínfimo trivalentes se les puede definir el supremos ($\vee$), en términos de la implicación y la negación. Por lo tanto, en este caso estariamos trabajando en los denominados retículos del Hílbert ([28]), este resultado fue suministrado por el Dr. Sergio Celani, jurado de esta tesis. De esto último, queda claro que el fragmento que en definitiva estamos estudiando es $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \triangle, 1\}$, con lo que se observa la imposibilidad de tratar el ínfimo de manera individual. Por otro lado, se probó que dicho retículo es distributivo. Cabe destacar que la axiomática permite probar que los operadores son homomorfismos de retículos. Por otra parte, presentaremos un nuevo cálculo estilo Hilbert que tenga como semántica la estructura algebraica. La completitud y la correctitud presentadas son sólo para el caso débil. Por último,

En el capítulo IV, se introducen las álgebras de Hilbert con supremo trivalentes modales, se estudian sus propiedades algebraicas con el objeto de presentar una lógica proposicional que sea correcta y completa con respecto a las álgebras introducidas; es de destacar, que dada una álgebra de la clase el ínfimo entre dos elementos no siempre existe. Con lo cual, podemos concluir que en este trabajo se presentan todos los reductos con operaciones reticulares que se pueden estudiar sobre las álgebras de Łukasiewicz de orden 3. Las técnicas usadas para este trabajo son los conocidos procesos de Lindenbaum-Tarski. En la segunda parte de este capítulo presentaremos nociones adecuadas de la teoría de modelos para poder tratar e introducir la lógica de primer orden sin identidades. Con recursos algebraicos pudimos probar un Teorema de Correctitud, para este trabajo nos apoyamos en los libros [22, 14] y la tesis de doctorado [25]. Posteriormente, extendemos el lenguaje con un bottom y agregamos un axioma que caracteriza la nueva constante. Luego, consideramos una negación fuerte a partir del bottom, es de destacar que la nueva negación no es una negación de De Morgan. Esta nueva negación permite caracterizar adecuadamente la noción de consistencia y probar una completitud al estilo Henkin, por medio de la construcción de una teoría maximal consistente que sea extensión de una teoría consistente dada, en dicha construcción se extiende el lenguaje con un conjunto de constantes (numerable), es importante observar que la noción de testigo y la posterior construcción del modelo solo necesita de una condición sobre el cuantificador existencial, a pesar que el lenguaje no tiene disyunción y que la lógica no tiene teoremas que permitan relacionar los cuantificadores. Por lo tanto, para esta nueva lógica con negación conseguimos probar Teoremas de Completidud y Compacidad, y por supuesto, de Correctitud. El asunto de caracterizar la consistencia sin una negación en el lenguaje, será motivo de investigaciones futuras.

En el Capítulo V exhibiremos la dualidad topológica obtenida por S. Celani [17] para los semiretículos implicativos, en nuestra presentación utilizaremos el orden que se les puede definir a los espacios T_0. Para lo cual debemos axiomatizar los espacios sobers y así obtener los IS-espacios que permitan una representación topológica y una dualidad. Además, nos apoyaremos en las notas del curso del profesor Celani dictado en el segundo semestre de 2015 ([16]). Por último, en el capítulo VI se expondrá el trabajo a desarrollar en el futuro.

Resumen

Es bien sabido que en las álgebras de Lukasiewiwz-Moisil (ŁM) (ver [5]) de orden $n \leq 5$, se puede definir una implicación de Lukasiewicz y una implicación de Heyting, y en el caso general solo se puede definir la de Heyting. Por otra parte, las implicaciones de Heyting que se pueden definir en cadenas coindiden con la implicación de Gödel (ver [27])(o implicación trivial de Hilbert), este hecho permite axiomatizar a los respectivos fragmentos implicativos de las álgebras ŁM por medio de álgebras de Hilbert n-valentes (ver [38]). Estos comentarios fueron, de alguna manera, las motivaciones de los trabajos fundacionales de M. Canals Frau y A. V. Figallo (ver [12, 13]).

En esta tesis nos proponemos estudiar los fragmentos en los que intervienen la implicación de Hilbert para el caso $n = 3$, de las álgebras de Lukasiewicz-Moisil, que se encuentran disponibles en la literatura.

Contenidos

1. Capítulo I

1.1. Tópicos sobre álgebras de Hilbert

En esta sección repasaremos definiciones y resultados bien conocidos en álgebras de Hilbert, lo que permitirá el desarrollo posterior.

Definición 1.1.1. *Un álgebra de Hilbert es un álgebra* $(A, \to, 1)$ *(o* H*-álgebra) de tipo* $(2, 0)$ *tal que para todo* $x, y, z \in A$ *se verifican:*

(H1) $x \to (y \to x) = 1$,

(H2) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$,

(H3) *Si* $x \to y = 1$, $y \to x = 1$, *entonces* $x = y$.

Indicaremos con $\mathbb{H}$ a la clase de álgebras de Hilbert. A continuación presentaremos algunos ejemplos ilustrativos de álgebras de Hilbert.

Ejemplo 1.1.2. *Sea* $(A, \leq)$ *un conjunto ordenado con último elemento 1. Entonces si definimos:*

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leq y \\ y & \textit{caso contrario,} \end{cases}$$

Entonces $(A, \to, 1)$ *es un álgebra de Hilbert. En efecto, veamos que se cumplen* (H1), (H2) *y* (H3). *Sean* $x, y \in A$. *Entonces:*

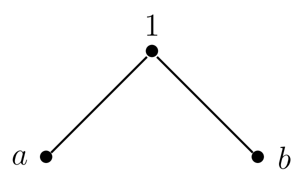
(H1) *Como A es un conjunto ordenado tenemos que $y \leq x$ ó $y \not\leq x$.*

Si ocurre $y \leq x$, entonces $y \to x = 1$. Por lo tanto, $x \to (y \to x) = x \to 1$, y como 1 es último elemento, $x \to 1 = 1$. Por lo tanto, $x \to (y \to x) = 1$. Ahora si ocurre $y \not\leq x$, tenemos que $y \to x = x$, entonces $x \to (y \to x) = x \to x$. Como $x \leq x$, entonces tenemos que $x \to x = 1$, de lo que se concluye que $x \to (y \to x) = x \to 1$. Además, como $x \to 1 = 1$ entonces $x \to (y \to x) = 1$.

(H2) *Supongamos $x \to y = 1$ e $y \to z = 1$. Entonces, $x \leq y$ e $y \leq z$ de lo que resulta inmediato que $x \leq z$ y por lo tanto $x \to z = 1$.*

(H3) *Si suponemos ahora que $x \to y = 1$ e $y \to x = 1$. Es claro que $x \leq y$ e $y \leq x$, y por lo tanto, tenemos que $x = y$.*

En particular, si tomamos el conjunto $A = \{a, b, 1\}$ con el orden dado por el diagrama de Hasse :

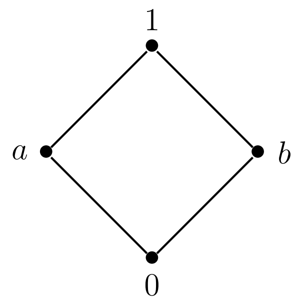


Entonces el orden esta dado por la siguiente tabla:

$\to$	a	b	1
a	1	b	1
b	a	1	1
1	a	b	1

La implicación que se puede determinar a partir del orden no es única. En lo que sigue ilustraremos esta situación con un ejemplo dado por A. Diego en [24].

Ejemplo 1.1.3. *Sea el conjunto $A = \{0, a, b, 1\}$, sobre A consideraremos el siguiente orden:*



$(A, \leq)$

Además, sobre A, podemos considerar las siguientes operaciones de implicación dadas por las tablas:

$\Rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

Se puede probar sin dificultad que $(A, \Rightarrow, 1)$ y $(A, \rightarrow, 1)$ son álgebras de Hilbert. La primer implicación corresponde a la implicación booleana y la segunda a la definida en el Ejemplo 1.1.2.

En lo que sigue presentaremos una lista de propiedades cuya demostración es computacional.

Lema 1.1.4. *En toda álgebra de Hilbert se verifican las siguientes condiciones:*

(H4) *Si $x = 1$ y $x \rightarrow y = 1$ entonces $y = 1$,*

(H5) *La relación $\leq$ definida: $x \leq y$ si y sólo si, $x \rightarrow y = 1$, es un orden sobre A y 1 es último elemento,*

(H6) $x \rightarrow x = 1$,

(H7) $x \leq y \to x$,

(H8) $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$,

(H9) $x \to 1 = 1$,

(H10) *Si* $x \leq y$, *entonces* $z \to x \leq z \to y$,

(H11) $x \leq y \to z$, *entonces* $y \leq x \to z$,

(H12) $x \to ((x \to y) \to y) = 1$,

(H13) $1 \to x = x$,

(H14) $x \leq y$, *entonces* $y \to z \leq x \to z$,

(H15) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$,

(H16) $x \to (x \to y) = x \to y$,

(H17) $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$,

(H18) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$,

(H19) $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$.

Demostración:

(H4) Por las hipótesis $x = 1$ y $x \to y = 1$ tenemos: (1) $1 \to y = 1$. Remplazando en (H1) a x por y, e y por 1 tenemos (2) $y \to (1 \to y) = 1$. De (1) y (2), resulta (3) $y \to 1 = 1$. Luego, por (1), (3) y (H3) inferimos que $y = 1$.

(H5) (O1) $x \leq x$. En efecto, por (H1) tenemos (1) $x \to (x \to x) = 1$ y también, $x \to ((x \to x) \to x) = 1$. Por otra parte, por (H2) tenemos (3) $x \to ((x \to x) \to x)) \to ((x \to (x \to x)) \to (x \to x)) = 1$. Luego, de (1), (2) y (3) inferimos que $1 \to (1 \to (x \to x)) = 1$. Por lo tanto, como $x \to x = 1$, entonces $x \leq x$.

(O2) Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$. Es consecuencia inmediata de (H3).

(O3) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Por hipótesis $x \to y = 1$, $y \to x = 1$. Entonces, de (H2) concluimos $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$,y por lo tanto, (1) $(x \to 1) \to (1 \to (x \to z)) = 1$. Luego, por (H4) y como $1 \to (x \to 1) = 1$, entonces (3) $x \to 1 = 1$. Luego, de (1) y (3) concluimos $1 \to (1 \to (x \to z)) = 1$. De esto último y (H4), podemos escribir $1 \to (x \to z) = 1$. Por lo tanto, $x \leq z$.

Luego, de (O1), (O2) y (O3) $\leq$ es relación de orden.

(H6), (H7), (H8) y (H9): Inmediato de las propiedades del orden definido a partir de la implicación.

(H10) Por hipótesis $x \leq y$, entonces $x \to y = 1$. Por lo tanto, $z \to (x \to y) = z \to 1$. De (H9), $z \to 1 = 1$, entonces $z \to (x \to y) = 1$. Por (H8), $1 = z \to (x \to y) \leq (z \to x) \to (z \to y)$. Pero como 1 es último elemento $(z \to x) \to (z \to y) \leq 1$. Entonces $(z \to z) \to (z \to y) = 1$. Por lo tanto, $z \to x \leq z \to y$.

(H11) Tenemos $x \leq y \to z$, entonces $x \to (y \to z) = 1$. Por (H8), $1 \leq (x \to y) \to (x \to z)$. Al ser 1 último elemento, $x \to y \leq x \to z$. Por (H10), $y \to (x \to y) \leq y \to (x \to z)$, y por (H7), $1 \leq y \to (x \to z)$. Al ser 1 último elemento tenemos que $y \to (x \to z) = 1$. Luego $y \leq x \to z$.

(H12) Por (H6), $x \to y \leq x \to y$ y por (H11), $x \leq (x \to y) \to y$. Luego $x \to ((x \to y) \to y) = 1$.

(H13) Por (H7), $x \leq 1 \to x$, luego, por (H12) $1 \to ((1 \to x) \to x) = 1$. Además, por $(P1)$ tenemos que $(1 \to x) \to x = 1$, entonces $1 \to x \leq x$, como también $x \leq 1 \to x$ tenemos que $1 \to x = x$.

(H14) De la hipótesis tenemos que $x \to y = 1$, y por (H7), $y \to z \leq x \to (y \to z)$. Por (H8), $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$. Como $x \to y = 1$, $y \to z \leq 1 \to (x \to z)$ y utilizando (H13), tenemos que $y \to z \leq x \to z$. Luego $y \to z \leq x \to z$.

(H15) Por (H8) $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$, pero por (H7), $y \leq x \to y$, entonces utilizando (H14), $(x \to y) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z)$. Como $\leq$ es transitiva, $x \to (y \to z) \leq y \to (x \to z)$. Luego, por (H7) sabemos que $x \leq y \to x$, entonces por (H14) $(y \to x) \to (y \to z) \leq x \to (y \to z)$. Nuevamente por la transitividad de $\leq$, tenemos que $y \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$. Luego, $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

(H16) Por (H8), inferimos que $x \to (x \to y) \leq (x \to x) \to (x \to y)$, utilizando (H6) tenemos que $x \to (x \to y) \leq 1 \to (x \to y)$. Luego, por (H13), $x \to (x \to y) \leq x \to y$. Como por (H7) $x \to y \leq x \to (x \to y)$, tenemos que $x \to (x \to y) = x \to y$.

(H17) Por (H15) tenemos que $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to x)$. Utilizando (H6) y (H8), concluimos que $1 = (x \to y) \to (x \to y) \leq ((x \to y) \to x) \to ((x \to y) \to y)$. Entonces, por (H9) obtenemos que $((x \to y) \to x) \to ((x \to y) \to y) \to 1 = 1$, entonces $((x \to y) \to x) \to ((x \to y) \to y) \leq 1$. Luego, $((x \to y) \to x) \to ((x \to y) \to y) = 1$, así $(x \to y) \to x \leq (x \to y) \to y$. Utilizando (H11), inferimos $(y \to x) \to ((x \to y) \to x) \leq (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$. Por lo tanto, $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) \leq (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$. Además, por (H15), $(y \to x) \to ((x \to y) \to y = (x \to y) \to ((y \to x) \to y)$ y entonces, a partir de (H6) y (H8), inferimos que $1 = (y \to x) \to (y \to x) \leq ((y \to x) \to y) \to ((y \to x) \to x)$. Luego, por (H9), $((y \to x) \to y) \to ((y \to x) \to x) \to 1 = 1$. Entonces, $(y \to x) \to y \leq (y \to x) \to x$. Luego, por (H10) obtenemos que $(x \to y) \to ((y \to x) \to y) \leq (x \to y) \to ((y \to x) \to x)$, entonces $(y \to x) \to ((x \to y) \to y) \leq (x \to y) \to ((y \to x) \to x)$. Por lo tanto, $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$.

(H18) Por (H8), $y \leq x \to y$, entonces de (H14), $(x \to y) \to z \leq (y \to z)$. Utilizando (H10), $x \to ((x \to y) \to z) \leq x \to (y \to z)$. Entonces, de (H15), $(x \to y) \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$. Luego, por (H8), $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$. Por lo tanto, $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

(H19) Por (H15) $(x \to y) \to (((x \to y) \to y) \to y) = ((x \to y) \to y) \to ((x \to y) \to y)$, y por (H6) $((x \to y) \to y) \to ((x \to y) \to y) = 1$, por lo tanto, por (H5) $x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y$. Veamos ahora la otra desigualdad. Por (H15) $(((x \to y) \to y) \to y) \to (x \to y) = x \to ((((x \to y) \to y) \to y) \to y)$, y por (H18) $x \to ((((x \to y) \to y) \to y) \to y) = (x \to (((x \to y) \to y) \to y)) \to (x \to y)$, y nuevamente por (H18) $(x \to (((x \to y) \to y) \to y)) \to (x \to y) = ((x \to ((x \to y) \to y)) \to (x \to y)) \to (x \to y)$, de esta forma, por (H15) $((x \to ((x \to y) \to y)) \to (x \to y)) \to (x \to y) = (1 \to (x \to y)) \to (x \to y)$, y por (H13), $(1 \to (x \to y)) \to (x \to y) = (x \to y) \to (x \to y)$, además, por (H6), $(x \to y) \to (x \to y) = 1$, luego por (H5), $((x \to y) \to y) \to y \leq x \to y$. Por lo tanto $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$.

□

En [24] se probó que la clase de las álgebras de Hilbert es una clase ecuacional y por lo tanto constituye una variedad. El siguiente teorema nos muestra las ecuaciones que definen a la clase.

Teorema 1.1.5. *Sea* $(A, \to, 1)$ *un álgebra de tipo* $(2, 0)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $A \in \mathbb{H}$.

(ii) *A verifica:*

(D1) $x \to x = 1$.

(D2) $1 \to x = 1$.

(D3) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

(D4) $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$

Demostración:

(i)⇒(ii) Inmediato de las propiedades (H6), (H13), (H18) y (H17) demostradas en el Lema 1.1.4.

(ii)⇒(i) (H1) Por (D3), $x \to (y \to x) = (x \to y) \to (x \to x)$. Y nuevamente por (D3) tenemos que $(x \to y) \to x = ((x \to y) \to x)) \to ((x \to y) \to x)$ Luego, por (D1) $((x \to y) \to x)) \to ((x \to y) \to x) = 1$. Por lo tanto, $x \to (y \to x) = 1$.

(H2) Por (D1), $(x \to (y \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$, y como por (D3), $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$ entonces, $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.

(H3) Por hipótesis, $x \to y = y \to x = 1$. Por (D4), $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$, entonces $1 \to (1 \to x) = 1 \to (1 \to y)$. Luego, por (D2), $1 \to x = 1 \to y$, y nuevamente por (D2), $x = y$.

$\square$

1.2. Sistemas deductivos y núcleos de un homomorfismo

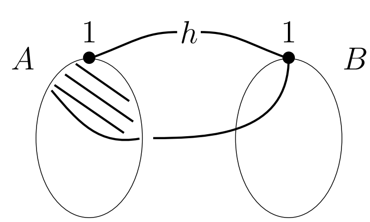
Definición 1.2.1. *Sea A un álgebra de Hilbert y $D \subseteq A$. Diremos que D es un* ***sistema deductivo*** *(S.D.) si verifica:*

D_1) $1 \in D$,

D_2) *Si x, $x \to y \in D$, entonces $y \in D$.*

Notaremos con $\mathcal{D}(A)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos de A. Por otra parte, si A, B son dos álgebras de Hilbert notaremos con $Hom(A, B)$ al conjunto de los homomorfismos de A en B.

Definición 1.2.2. *Sean A, $B \in \mathbb{H}$, $h \in Hom(A, B)$. Llamaremos* ***Núcleo de h****, y lo notaremos $Nuc(h)$, al conjunto $Nuc(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$.*



Lema 1.2.3. *Si A, $B \in \mathbb{H}$, $h \in Hom(A, B)$, entonces $Nuc(h) \in \mathcal{D}(A)$.*

Demostración:

D_1) Como $h \in Hom(A, B)$, entonces $h(1) = 1$. Por lo tanto $1 \in Nuc(h)$.

D_2) x, $x \to y \in Nuc(h)$, entonces $h(x) = 1$ y $h(x \to y) = 1$. Como $h \in Hom(A, B)$, $h(x \to y) = h(x) \to h(y)$, luego $h(x) \to h(y) = 1$. Por (H4) $h(y) = 1$. Por lo tanto $y \in Nuc(h)$.

□

Observación 1.2.4. *Es claro que* $Nuc(h) = \{x \in A : h(x) = 1\} = h^{-1}(\{1\})$.

Notaremos $Ref(X)$, $Sim(X)$, $Tran(X)$ y $EQ(X)$ al conjunto de todas las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencias definidas sobre un conjutnto X respectivamente.

Definición 1.2.5. *Sea A un álgebra de Hilbert y $R \in EQ(A)$. Diremos que R es una congruencia sobre A, si R es una relación de equivalencia sobre A y, además, es compatible con las operaciones de implicación. Es decir, si $(a, b), (c, d) \in R$ y $\to$ la operación binaria, entonces $(a \to c, b \to d) \in R$. Indicaremos con $Con(A)$ al conjunto de todas las congruencias de A.*

Lema 1.2.6. *Sean $A, B \in \mathbb{H}$, $h \in Hom(A, B)$, entonces $R_h \in Con(A)$. Con $R_h = \{(x, y) \in A^2 : h(x) = h(y)\}$.*

Demostración: Debemos probar que R_h es una relación de equivalencia.

($EQ1$) Sea $x \in A$, como $h \in Hom(A, B)$, entonces $h(x) = h(x)$, por lo tanto $(x, x) \in R_h$.

($EQ2$) Por hipótesis $(x, y) \in R_h$, entonces $h(x) = h(y)$, lo que es igual a decir que $h(y) = h(x)$, por lo tanto $(y, x) \in R_h$.

($EQ3$) Por hipótesis $(x, y), (y, z) \in R_h$, entonces $h(x) = h(y)$ y $h(y) = h(z)$, luego $h(x) = h(z)$. Por lo tanto $(x, z) \in R_h$.

Por hipótesis aR_hb y cR_hd, entonces $h(a) = h(b)$ y $h(c) = h(d)$. Luego $h(a) \to h(c) = h(b) \to h(d)$. Como $h \in Hom(A, B)$, entonces $h(a \to c) = h(b \to d)$. Por lo tanto $(a \to c)R_h(b \to d)$. □

Lema 1.2.7. *Sea A un álgebra de Hilbert y D un sistema deductivo de A. Entonces, si $x \to y, y \to z \in D$ implica $x \to z \in D$.*

Demostración: Por (H1) sabemos que $(y \to z) \to (x \to (y \to z)) = 1$, y como por $D_1), 1 \in D$, y por hipótesis $y \to z \in D$, por $D_2)$, $x \to (y \to z) \in D$. Además, por (H18), $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$, entonces $(x \to y) \to (x \to z) \in D$, luego como por hipótesis $x \to y \in D$, entonces, por $D_2)$, $x \to z \in D$. $\square$

Teorema 1.2.8. *Si A es un álgebra de Hilbert, entonces $\mathcal{D}(A)$ con la inclusión es isomorfo al retículo de todas las congruencias sobre A. El isomorfismo en cuenstión es $h : \mathcal{D}(A) \longrightarrow Con(A)$ que verifica $D \longrightarrow h(D) = \{(a,b) \in A \times A : a \to b, b \to a \in D\}$ y su inversa es $h^{-1} : Con(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ tal que $\Theta \longrightarrow h^{-1}(\Theta) = \{a \in A : (a,1) \in \Theta\}$, donde $h^{-1}(\Theta) \in \mathcal{D}(A)$.*

Demostración:

Sea $\Theta = \{(a,b) \in A \times A : a \to b, b \to a \in D\}$.

(i) Reflexiva: Por (H6) tenemos que $1 = a \to a \in D$. Luego $(a,a) \in \Theta$.

(ii) Simétrica: Inmediata de la definición.

(iii) Transitiva:

(1) Sea $(a,b), (b,c) \in \Theta$, [hip.]

(2) $a \to b, b \to a, b \to c, c \to b \in D$, [(1)]

(3) $a \to 1 = 1$, [(H9)]

(4) $(b \to c) \to (b \to c) = 1$, [(H6)]

(5) $a \to ((b \to c) \to (b \to c)) = 1$, [(3),(4)]

(6) $(b \to c) \to (a \to (b \to c)) = 1$, [(5),(H15)]

(7) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, [(6),(H18)]

(8) $(a \to b) \to (a \to c) \in D$, [(2),(7),$D_1$,$D_2$]

(9) $a \to c \in D$. [(8),(2),D_2]

Análogamente se puede probar que $c \to a \in D$.

(iv) Θ respeta a $\to$.

(1) Sea $(a, b), (d, c) \in \Theta$,

(2) $a \to 1 = 1$, [(H9)]

(3) $a \to ((b \to c) \to (b \to c)) = 1$, [(2),(H6)]

(4) $(b \to c) \to (a \to (b \to c)) = 1$, [(3),(H15)]

(5) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, [(4),(H18)]

(6) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1 \in D$, [(5),(H15)]

(7) $(b \to c) \to (a \to c) \in D$ [(1),(6),D_2]

Por un razonamiento análogo de (1) a (6) tenemos que:

(8) $(c \to d) \to ((a \to c) \to (a \to d)) = 1 \in D$,

(9) $(a \to c) \to (a \to d) \in D$, [(1),(8)]

(10) $(b \to c) \to (a \to d) \in D$. [(7),(9),Lema 1.2.7]

Análogamente se prueba que $(a \to d) \to (b \to c) \in D$. Por lo tanto, $(a \to d)\Theta(b \to c)$.

(v) Veamos que $[1]_\Theta = D$,

(1) Sea $x \in [1]_\Theta$, [hip.]

(2) $x\Theta 1$, [def Θ, (1)]

(3) $x \to 1, 1 \to x \in D$, [(2)]

(4) $x \in D$. [(3), Lema 1.2.7]

Recíprocamente,

(1) Sea $x \in D$, [hip.]

(2) $x \to 1 = 1$ y $1 \to x = x$, [(H9),(H13)]

(3) $x \to 1, 1 \to x \in D$, [(1),(2),D_1]

(4) $x\Theta 1$, [(3)]

(5) $x \in [1]_\Theta$, [(4),def Θ]

Luego, tenemos:

$$\mathcal{D}(A) \longrightarrow Con(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$
$$\mathcal{D} \longrightarrow \Theta \longrightarrow [1]_\Theta = D$$

Para completar la caracterización de las congruencias resta probar que si $\Theta \in Con(A)$ se tiene que $[1]_\Theta \in \mathcal{D}(A)$ y $\Theta([1]_\Theta) = \Theta$.

(i) Es claro que $1 \in [1]_\Theta$, veamos que respeta la regla de D_2

(1) Sea $x \in [1]_\Theta$, [hip.]

(2) Sea $x \to y \in [1]_\Theta$. [hip.]

(3) $x \to y \,\Theta\, 1$, [(2)]

(4) $(x \to y) \to y \,\Theta\, 1 \to y$, [(3), Θ Cong.]

(5) $x \to ((x \to y) \to y) \,\Theta\, (1 \to y)$, [(1), $x\Theta 1$, Cong.]

(6) $1 \,\Theta\, y$, [(5),(H12)]

(7) $y \in [1]_\Theta$,

Luego, $[1]_\Theta$ es un sistema deductivo.

Probemos que se verifica $\Theta([1]_\Theta) = \Theta$.

(ii) $\Theta([1]_\Theta) = \Theta$, es claro que

$$\Theta([1]_\Theta) = \{(x,y) : x \to y, y \to x \in [1]_\Theta\}$$
$$= \{(x,y) : x \to y \,\Theta\, 1, y \to x \,\Theta\, 1\}.$$

(a) Veamos que $\Theta \subseteq \Theta([1]_\Theta)$

(1) sea $(x,y) \in \Theta$, [hip.]

(2) $x \,\Theta\, y$, [hip.]

(3) $x \to x \,\Theta\, x \to y$, [(2), $\Theta \in Con(A)$]

(4) $1 \,\Theta\, x \to y$, [(3)]

(5) $y \to x \,\Theta\, y \to y$, [(2)]

(6) $y \to x \,\Theta\, 1$, [(5)]

(7) $x \to y, y \to x \in [1]_\Theta$, [(4),(6)]

(8) $(x,y) \in \Theta([1]_\Theta)$,

(b) $\Theta([1]_\Theta) \subseteq \Theta$.

(1) Sea $(x,y) \in \Theta([1]_\Theta)$, [hip.]

(2) $x \to y \,\Theta\, 1$, [(1)]

(3) $y \to x \,\Theta\, 1$, [(1)]

(4) $(y \to x) \to x \,\Theta\, (y \to x) \to x$, [$\Theta \in Con(A)$]

(5) $(x \to y) \to y \,\Theta\, (x \to y) \to y$, [$\Theta \in Con(A)$]

(6) $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) \,\Theta\, 1 \to ((y \to x) \to x)$, [(2),(4),$\Theta \in Con(A)$]

(7) $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) \,\Theta\, (y \to x) \to x$, [(6),(H13)]

(8) $(y \to x) \to ((x \to y) \to y) \,\Theta\, 1 \to ((x \to y) \to y)$, [(3),(5),$\Theta \in Con(A)$]

(9) $(y \to x) \to ((x \to y) \to y) \,\Theta\, (x \to y) \to y$, [(8),(H13)]

(10) $(x \to y) \to y \,\Theta\, (y \to x) \to x$, [(7),(9),$\Theta \in Con(A)$]

(11) $x \,\Theta\, x$, [$\Theta \in Con(A)$]

(12) $(y \to x) \,\Theta\, 1 \to x$, [(3),$\Theta \in Con(A)$]

(13) $(y \to x) \to x \,\Theta\, x$, [(12),(H13)]

(14) $y \, \Theta \, y$, $[\Theta \in Con(A)]$

(15) $(x \to y) \to y \, \Theta \, 1 \to y$, $[(2),(14),\Theta \in Con(A)]$

(16) $(x \to y) \to y \, \Theta \, y$, $[(15),(H13)]$

(17) $x \, \Theta \, y$, $[(10),(13),(16),\Theta \in Con(A)]$

(18) $(x, y) \in \Theta$. $[(17)]$

Luego, tenemos:

$$Con(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A) \longrightarrow Con(A)$$

$$\Theta \longrightarrow [1]_\Theta = D \longrightarrow \Theta([1]_\Theta) = \Theta$$

Por lo tanto, tenemos probado que la función h del enunciado es tal que $h \circ h^{-1} = I_{D(A)}$ y $h^{-1} \circ h = I_{Con(A)}$. Luego, h es biyectiva. Solo resta probar que si D_1 y $D_2 \in D(A)$ es tal que $D_1 \subseteq D_2$ entonces $h(D_1) \subseteq h(D_2)$.
Para ello consideramos $D_1, D_2 \in D(A)$, tales que $D_1 \subseteq D_2$. Sea $(a, b) \in h(D_1)$, entonces $a \to b, b \to a \in D_1$, como $D_1 \subseteq D_2$, entonces $a \to b, b \to a$ también pertenecen a D_2, de esta forma $(a, b) \in h(D_2)$. Por lo tanto $h(D_1) \subseteq h(D_2)$. $\square$

1.3. Álgebras de Hilbert trivalentes

Es bien sabido que las álgebras de Hilbert constituyen la contraparte algebraica del cálculo implicativo positivo y están caracterizados con los axiomas esquemas siguientes:

(E1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(E2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

La regla de inferencia *modus ponens*

(R) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$.

Ivo Thomas en [39] consideró el cálculo implicativo positivo n-valuado como un cálculo cuya matriz característica $(\mathbb{C}_n, \to, 1)$ donde:

$$\mathbb{C}_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$

y

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & y < x \end{cases}.$$

Tomando $D = \{1\}$ como el conjunto de valores distinguidos. Este autor probó que se debe agregar el siguiente axioma:

(E3) $T_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) = \beta_{n-2} \to (\beta_{n-3} \to (\cdots \to (\beta_0 \to \alpha_0) \cdots))$, donde

$\beta_i = (\alpha_i \to \alpha_{i+1}) \to \alpha_0$ para todo $i, 0 \leq i \leq n-2$.

En particular, el caso $n = 3$ tiene a $\mathbb{C}_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y la implicación $\to$ puede ser definida por:

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabla 1

Es claro que las álgebras de Hilbert trivalentes se definen como álgebras de Hilbert que verifican (IT3) $((x \to y) \to z) \to ((z \to x) \to z) \to z) = 1$.

1.4. Álgebras de Łukasiewicz de orden 3

Por otro lado, G. Moisil introdujo a las álgebras de Łukasiewicz 3-valentes como los modelos algebraicos de la lógica trivalorada propuesta por Łukasiewicz ([33]). Recordemos que un álgebra de Łukasiewicz 3-valente es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1)$ que satisface los siguientes identidades:

(L0) $x \vee 1 = 1$,

(L1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(L2) $x \wedge (y \vee x) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(L3) $\sim\sim x = x$,

(L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(L5) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(L6) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$,

(L7) $\nabla (x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$,

Para algunos aspectos técnicos y propiedades de las álgebras de Łukasiewicz 3-valentes se puede consultar [36]. Además, es bien sabido que las álgebras $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ que satisfacen de (L0) a (L4) son álgebras de De Morgan (ver, por ejemplo, [5, Definition 2.6]).

La matriz característica de dicha lógica tiene operaciones $\wedge$, $\vee$, $\sim$, ∇ (operador de posibilidad) y $\triangle$ (operador de necesidad) sobre $\mathbb{C}_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ que estan definidos por las siguientes tablas:

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1

Tabla 2

x	$\sim x$	∇x	$\triangle x$
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
1	0	1	1

Tabla 3

Antonio Monteiro en 196? probó que la implicación $\to$ definida en la Tabla 1 puede obtenerse a partir de las operaciones $\wedge$, $\vee$, $\sim$, ∇ y $\triangle$ por medio de la fórmula:

$x \to y = \triangle \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$

x	y	$x \to y$	$\sim x$	$\triangle \sim x$	$\triangle \sim x \vee y$	$\nabla \sim x$	∇y	$\nabla \sim x \wedge \nabla y$	$\triangle \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

Tabla 4

y además se verifica que $\nabla x = (x \to \triangle x) \to \triangle x$.

x	∇x	$\triangle x$	$x \to \triangle x$	$(x \to \triangle x) \to \triangle x$
0	0	0	1	0
$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Tabla 5

A partir de estas consideraciones M. C. Canals Fou y A.V. Figallo en [10] se propusieron estudiar algebraicamente el fragmento $(\mathbb{C}_3, \to, \triangle, D = \{1\})$. A las estructuras algebraicas correspondientes las llamaron álgebras de Hilbert trivalentes modales.

2. Capítulo II

2.1. Álgebras de Hilbert trivalentes modales

En esta sección desarrollaremos detalladamente el contenido de [10], expondremos las demostraciones faltantes y modernizaremos la presentación. Además, nos proponemos encontrar una lógica que sea la contraparte algebraica de las Álgebra de Hilbert trivalentes modales.

Definición 2.1.1. *Un álgebra* $(A, \to, \triangle, 1)$ *de tipo* $(0, 1, 2)$ *es una álgebra de Hilbert trivalente modal (o* $\triangle H_3$*-álgebra) si el reducto* $(A, \to 1)$ *es un álgebra de Hilbert trivalente y* $\triangle$ *verifica las siguientes igualdades:*

(M1) $\triangle x \to x = 1$,

(M2) $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle\triangle x)) \to \triangle(x \to y) = \triangle x \to \triangle\triangle y$,

(M3) $(\triangle x \to \triangle y) \to \triangle x = \triangle x$.

El ejemplo más simple de $\triangle H_3$-álgebra donde $\triangle$ no es el operador identidad es $(\mathbb{C}_3, 1, \triangle, \to)$ donde $\mathbb{C}_3$ está definido por las tablas 4 y 2 respectivamente.

Notaremos con $\triangle\mathbb{H}_3$ a la variedad de todas las $\triangle H_3$-álgebras.

Lema 2.1.2. *Las siguientes propiedades se satisfacen en toda álgebra que pertenece a la variedad* $\triangle\mathbb{H}_3$.

(M4) $\triangle 1 = 1$,

(M5) $\triangle\triangle x = \triangle x$,

(M6) $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to y) = \triangle x \to \triangle y$,

(M7) $\triangle(x \to \triangle x) = x \to \triangle x$,

(M8) $\triangle(x \to y) \to (\triangle x \to \triangle y) = 1$,

(M9) $\triangle(\triangle x \to y) = \triangle x \to \triangle y$,

(M10) *Si* $x \leq y$ *entonces* $\triangle x \leq \triangle y$,

(M11) $\triangle(x \to \triangle(x \to y)) = \triangle(x \to y)$,

(M12) *(Definición)* $\nabla x = (x \to \triangle x) \to \triangle x$,

(M13) $\nabla x = (x \to \triangle x) \to x$,

(M14) $x \leq \nabla x$,

(M15) $\triangle\nabla x = \nabla x$,

(M16) *Si* $x = \nabla x$, *entonces* $x = \triangle x$,

(M17) $\nabla(x \to \triangle(x \to y)) = x \to \triangle(x \to y)$,

(M18) $x \to \triangle(x \to y) = \triangle(x \to \triangle(x \to y))$,

(M19) $x \to \triangle(x \to y) = \triangle(x \to y)$,

(M20) $x \to \triangle y \leq \triangle(x \to y)$,

(M21) *Si* $\triangle x = \triangle y$, $\nabla x = \nabla y$, *entonces* $x = y$,

(M22) $(\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y = y$,

(M23) $(x \to \triangle x) \to ((x \to \triangle y) \to y) = (x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y))$,

(M24) $(x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y) = (x \to \triangle y) \to y$, (M25) $(x \to \triangle x) \to y \leq (x \to \triangle y) \to y$,

(M26) *Si* $x \leq y$, *entonces* $\nabla x \leq \nabla y$,

(M27) $x \to \nabla(x \to y) = \nabla(x \to y)$,

(M28) $\nabla x \to \nabla((x \to y) \to y) = 1$,

(M29) $x \to \nabla y = \nabla(x \to y)$,

(M30) $\nabla(x \to y) = \nabla x \to \nabla y$,

(M31) $x \to (((y \to \triangle y) \to \triangle x) \to (((x \to \triangle x) \to \triangle y) \to \triangle(x \to y))) = 1$,

(M32) $((y \to \triangle y) \to \triangle x) \to (((x \to \triangle x) \to \triangle y) \to \triangle(x \to y)) = 1$,

(M33) $\nabla\nabla x = \nabla x$,

(M34) $\nabla\triangle x = \triangle x$.

Demostración:

(M4) Utilizando la propiedad (M2) remplazando x por $\triangle 1$ e y por 1 obtenemos $((1 \to \triangle 1) \to (\triangle 1 \to \triangle\triangle\triangle 1)) \to \triangle(\triangle 1 \to 1) = \triangle\triangle 1 \to \triangle\triangle 1$. Además (H6) sabemos que $\triangle\triangle 1 \to \triangle\triangle 1 = 1$, por (H13) $1 \to \triangle 1 = \triangle 1$ y por (H9) $\triangle 1 \to 1 = 1$. Por lo tanto $(\triangle 1 \to (\triangle 1 \to \triangle\triangle\triangle 1)) \to \triangle 1 = 1$. Por (H16) sabemos que $\triangle 1 \to (\triangle 1 \to \triangle\triangle\triangle 1) = \triangle 1 \to \triangle\triangle\triangle 1$ y remplazando en (M3)a y por $\triangle\triangle 1$ y a x por 1 tenemos $\triangle 1 = 1$.

(M5) Por (M1) sabemos que $\triangle\triangle x \to \triangle x = 1$, pues remplazamos a x por $\triangle x$. Además, remplazando en (M2) a y por x tenemos $((x \to \triangle x) \to (x \to \triangle\triangle x)) \to \triangle(x \to x) = \triangle x \to \triangle\triangle x$, por (H6) tenemos $((x \to \triangle x) \to (x \to \triangle\triangle x)) \to \triangle 1 = \triangle x \to \triangle\triangle x$, luego por (M4) $((x \to \triangle x) \to (x \to \triangle\triangle x)) \to 1 = \triangle x \to \triangle\triangle x$. Por (H9) tendremos que $1 = \triangle x \to \triangle\triangle x$, y para finalizar, como tenemos que $\triangle x \to \triangle\triangle x = 1$ y $\triangle\triangle x \to \triangle x = 1$, por (H3) concluimos que $\triangle\triangle x = \triangle x$.

(M6) Por (M2) sabemos que $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle\triangle x)) \to \triangle(x \to y) = \triangle x \to \triangle\triangle y$, y como por (M5) $\triangle\triangle x = \triangle x$, o lo que es equivalente $\triangle\triangle y = \triangle y$, entonces $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to y) = \triangle x \to \triangle y$.

(M7) Por (M1), remplazando x por $x \to \triangle x$ tenemos que $\triangle(x \to \triangle x) \to (x \to \triangle x) = 1$. Luego por (H6) y (M5) $\triangle x \to \triangle\triangle x = 1$, así por (H13) $(x \to \triangle x) \to \triangle(x \to \triangle x) = ((\triangle x \to \triangle\triangle x) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to \triangle x)$. Pero esto, por (M5), es igual a $((\triangle x \to \triangle\triangle x) \to (x \to \triangle\triangle x)) \to \triangle(x \to \triangle x)$, que resulta de remplazar y por $\triangle x$ en (M2). Por lo tanto $(x \to \triangle x) \to \triangle(x \to \triangle x) = \triangle x \to \triangle\triangle x$ y por (M5) y (H6) resulta que $(x \to \triangle x) \to \triangle(x \to \triangle x) = 1$. Para finalizar, tenemos $(x \to \triangle x) \to \triangle(x \to \triangle x) = 1$ y $\triangle(x \to \triangle x) \to (x \to \triangle x) = 1$, por lo tanto, por (H3) $\triangle(x \to \triangle x) = x \to \triangle x$.

(M8) Por (M5) $\triangle(x \to y) \to (\triangle x \to \triangle y) = \triangle(x \to y) \to (((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to y))$ y por (H1), remplazando a x por $\triangle(x \to y)$ y a y por $(y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)$, tenemos que $\triangle(x \to y) \to (\triangle x \to \triangle y) = 1$.

(M9) Por (M5) $\triangle x \to \triangle y) = \triangle\triangle x \to \triangle y$, y remplazando a x por $\triangle x$ en (M6) tenemos que $\triangle\triangle x \to \triangle y = ((y \to \triangle y) \to (\triangle x \to \triangle\triangle x)) \to \triangle(\triangle x \to \triangle y)$ Por (M5) y (H6) $(y \to \triangle y) \to (\triangle x \to \triangle\triangle x) = 1$, por lo tanto $\triangle x \to \triangle y = 1 \to \triangle(\triangle x \to y)$ y por (H9) $\triangle x \to \triangle y = \triangle(\triangle x \to y)$.

(M10) Por (H5) podemos afirmar que $x \to y = 1$, así $\triangle(x \to y) = \triangle 1$, y por (M4) $\triangle(x \to y) = 1$. Luego, de (M8) sabemos que $\triangle(x \to y) \to (\triangle x \to \triangle y) = 1$, entonces $1 \to (\triangle x \to \triangle y) = 1$, y por (H13) $\triangle x \to \triangle y = 1$, luego nuevamente por (H5), $\triangle x \leq \triangle y$.

(M11) Por (H1), remplazando a x por $\triangle(x \to y)$ y a y por x tenemos $\triangle(x \to y) \to (x \to \triangle(x \to y)) = 1$, y por (H5) podemos afirmar que $\triangle(x \to y) \leq x \to \triangle(x \to y)$. Luego por (M10) $\triangle\triangle(x \to y) \leq \triangle(x \to \triangle(x \to y))$ y por (M5) obtenemos $\triangle(x \to y) \leq \triangle(x \to \triangle(x \to y))$. Probaremos a continuación la otra desigualdad. Por (M1), remplazando x por $x \to y$ tenemos $\triangle(x \to y) \to (x \to y) = 1$, que por (H5) podemos expresar como $\triangle(x \to y) \leq x \to y$. De (H10) deduciremos que $x \to \triangle(x \to y) \leq x \to (x \to y)$, y luego, por (H16), $x \to (x \to y)$, y por (M10) $\triangle(x \to \triangle(x \to y)) \leq \triangle(x \to y)$. Para finalizar, como tenemos que $\triangle(x \to y) \leq \triangle(x \to \triangle(x \to y))$ y $\triangle(x \to \triangle(x \to y)) \leq \triangle(x \to y)$, por (H3) $\triangle(x \to \triangle(x \to y)) = \triangle(x \to y)$.

(M12) Lo definimos de ese modo, por lo tanto no debemos demostrarlo.

(M13) Por (M1) sabemos que $\triangle x \to x = 1$, que por (H5) es equivalente a $\triangle x \leq x$, luego por (H10) $(x \to \triangle x) \to \triangle x \leq (x \to \triangle x) \to x$, y por (M12) tenemos que $\nabla x \leq (x \to \triangle x) \to x$. Veamos ahora la otra desigualdad. Por (H6) sabemos que $(x \to \triangle x) \to (x \to \triangle x) = 1$, y por (H18), tomando a x como $x \to \triangle x$, y como x y z como $\triangle x$, tenemos que $((x \to \triangle x) \to x) \to ((x \to \triangle x) \to \triangle x) = 1$, luego por (H5) $(x \to \triangle x) \to x \leq (x \to \triangle x) \to \triangle x$, y por (M12) es equivalente a $(x \to \triangle x) \to x \leq \nabla x$. Así por (H3) $\nabla x = (x \to \triangle x) \to x$.

(M14) Por (H7), tomando y como $x \to \triangle x$ tenemos que $x \leq (x \to \triangle x) \to x$, y por (M13) tenemos que $x \leq \nabla x$.

(M15) Por (M13) $\triangle \nabla x = \triangle((x \to \triangle x) \to x)$, luego por (M7), $\triangle \nabla x = \triangle(\triangle(x \to \triangle x) \to x)$, y por (M9) podemos afirmar que $\triangle \nabla x = \triangle(x \to \triangle x) \to \triangle x$. Para finalizar, nuevamente por (M7), $\triangle \nabla x = (x \to \triangle x) \to \triangle x$, por lo tanto, por (M12), $\triangle \nabla x = \nabla x$.

(M16) Sea $x = \nabla x$, entonces por (M12) $x = (x \to \triangle x) \to \triangle x$, utilizando nuevamente la igualdad tenemos que $x = (\nabla x \to \triangle \nabla x) \to \triangle x$ y, por (M15), $x = (\nabla x \to \nabla x) \to \triangle x$, luego por (H6), $x = 1 \to \triangle x$. Así, por (H13), tenemos que $x = \triangle x$.

(M17) Sabemos que $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$, por ello $x \to \triangle(x \to y) = ((x \to \triangle(x \to y)) \to \triangle(x \to y)) \to \triangle(x \to y)$, luego por (M12) $\nabla(x \to \triangle(x \to y)) = ((x \to \triangle(x \to y)) \to \triangle(x \to \triangle(x \to y))) \to \triangle(x \to \triangle(x \to y))$, así por (M11) tendremos $((x \to \triangle(x \to y)) \to \triangle(x \to y)) \to \triangle(x \to y)$, y por la propiedad mencionada al principio, remplazando y por $\triangle(x \to y)$, $\nabla(x \to \triangle(x \to y)) = x \to \triangle(x \to y)$.

(M18) Por (M15) $\triangle \nabla(x \to \triangle(x \to y)) = \nabla(x \to \triangle(x \to y))$, entonces, por (M17) $\nabla(x \to \triangle(x \to y)) = \triangle(x \to \triangle(x \to y))$.

(M19) Por (M18) $x \to \triangle(x \to y) = \triangle(x \to \triangle(x \to y))$, luego, por (M11), $x \to \triangle(x \to y) = \triangle(x \to y)$.

(M20) Por (M19) $(x \to \triangle y) \to \triangle(x \to y) = (x \to \triangle y) \to (x \to \triangle(x \to y))$, y por (H18) $(x \to \triangle y) \to \triangle(x \to y) = x \to (\triangle y \to \triangle(x \to y))$, además por (H15) $\triangle y \to (x \to \triangle(x \to y))$, así por (M19) $\triangle y \to \triangle(x \to y)$. Además por (H7), $y \leq x \to y$ entonces, por (M10), $\triangle y \leq \triangle(x \to y)$, de esta forma, por (H5) $\triangle y \to \triangle(x \to y) = 1$, por lo tanto $(x \to \triangle y) \to \triangle(x \to y) = 1$, y nuevamente por (H5) $(x \to \triangle y) \leq \triangle(x \to y)$.

(M21) Por (M6) y (H6) $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to y) = 1$, y por (M1), (H10) y (H5) $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to y) \leq ((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to (x \to y)$. Entonces $1 = ((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to (x \to y)$, luego por (H15) y (H18) $1 = x \to (((y \to \triangle y) \to \triangle x) \to y)$, y como $\triangle x = \triangle y$, $1 = x \to (((y \to \triangle y) \to \triangle y) \to y)$, luego por (M12) y la igualdad $\nabla x = \nabla y$ tenemos que $1 = x \to (\nabla x \to y)$, así, por (M14), (H18) y (H13), $1 = x \to y$, por lo tanto, por (H5), $x \leq y$. Análogamente podemos probar que $y \leq x$. Por lo tanto, $x = y$.

(M22) Por (M7) $\triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \triangle((\triangle y \to \triangle(x \to \triangle x)) \to y)$, luego por (M9) $\triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \triangle(\triangle(\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y)$, y nuevamente por (M9) $\triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \triangle(\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to \triangle y$, y $\triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = (\triangle y \to \triangle(x \to \triangle x)) \to \triangle y$, así, por (M3) $\triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \triangle y$. Por otro lado, por (M12), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = (((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to \triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y)) \to \triangle((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y)$, luego por (M7) y (M9), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = (((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to \triangle(\triangle(\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y)) \to ((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to \triangle y)$, y por (M7), (M9) y (H18), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = (\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to ((y \to \triangle y) \to \triangle y)$. Luego, por (M12), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to \nabla y = ((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to ((y \to \triangle y) \to \triangle y)) \to ((y \to \triangle y)\triangle y)$, y por (H15) y (H18) $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to \nabla y = (y \to \triangle y) \to (((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to \triangle y) \to \triangle y)$, y por (M7) y (M13), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to \nabla y = (y \to \triangle y) \to (\triangle y \to \triangle y)$, por lo tanto, por (H6) y (H9), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to \nabla y = 1$, luego por (H5), $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \leq \nabla y$. Más aún, $\nabla y \to \nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \nabla y \to ((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to ((y \to \triangle y) \to y)$, luego por (M13) y (H1), $\nabla y \to \nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \nabla y \to ((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to \nabla y) = 1$. Luego por (H5), $\nabla y \leq \nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y)$, entonces $\nabla((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) = \nabla y$, así, por (M21) $(\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y = y$.

(M23) Por (H15) sabemos que $(x \to \triangle x) \to ((x \to \triangle y) \to y) = (x \to \triangle y) \to ((x \to \triangle x) \to y)$, y por (H18) $(x \to \triangle y) \to ((x \to \triangle x) \to y) = ((x \to \triangle y) \to (x \to$

$\triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)$. Nuevamente por (H18) $((x \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y) = (x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)$.

(M24) Utilizando (H15) de forma reiterada podemos afirmar que $((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)) \to ((x \to \triangle y) \to y) = ((x \to \triangle y) \to ((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to y)) \to ((x \to \triangle y) \to y) = (x \to \triangle y) \to (((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to y) \to y) = ((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to y) \to ((x \to \triangle y) \to y) = ((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to ((x \to \triangle y) \to y)$, luego por (M22) $((\triangle y \to (x \to \triangle x)) \to y) \to ((x \to \triangle y) \to y) = y \to ((x \to \triangle y) \to y)$ y por (H1) $y \to ((x \to \triangle y) \to y) = 1$, luego por (H5) $(x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y) \leq (x \to \triangle y) \to y$. Para probar la otra desigualdad utilizamos (H1) tomando a x como $(x \to \triangle y) \to y$ y a y como $x \to (\triangle y \to \triangle x)$, de esta forma $((x \to \triangle y =\to y) \to ((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)) = 1$, por lo tanto, por (H5), $(x \to \triangle y) \to y \leq (x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)$. De esta forma obtenemos que $(x \to \triangle y) \to y = (x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)$.

(M25) Por (M24), $((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to \triangle y) \to y) = ((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y))$, luego por (M23) $((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to (\triangle y \to \triangle x)) \to ((x \to \triangle y) \to y)) = ((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to \triangle x) \to ((x \to \triangle y) \to y))$, y por (H15), $((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to \triangle x) \to ((x \to \triangle y) \to y)) = ((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to \triangle y) \to ((x \to \triangle x) \to y))$, pero por (H1), $((x \to \triangle x) \to y) \to ((x \to \triangle y) \to ((x \to \triangle x) \to y)) = 1$, por lo tanto $(x \to \triangle x) \to y \leq (x \to \triangle y) \to y$.

(M26) Como $x \leq y$, por (H14), $y \to \triangle y \leq x \to \triangle y$, entonces $(x \to \triangle y) \to y \leq (y \to \triangle y) \to y$, luego por (M13), $(x \to \triangle y) \to y \leq \nabla y$. Como $x \to y$, por (H10) $(x \to \triangle x) \to x \leq (x \to \triangle x) \to y$, entonces por (M13) $\nabla x \leq (x \to \triangle x) \to y$, pero por (M25) tenemos que, $\nabla x \leq (x \to \triangle y) \to y$, por lo tanto $\nabla x \leq \nabla y$.

(M27) Por (M13), $x \to \nabla(x \to y) = x \to (((x \to y) \to \triangle(x \to y)) \to (x \to y))$, luego por (H15), $x \to (((x \to y) \to \triangle(x \to y)) \to (x \to y)) = ((x \to y) \to \triangle(x \to y)) \to (x \to (x \to y))$, y por (H16) $((x \to y) \to \triangle(x \to y)) \to (x \to (x \to y)) = ((x \to y) \to \triangle(x \to y)) \to (x \to y)$, que por (M13) es igual a $\nabla(x \to y)$.

(M28) Por (H12) sabemos que $x \to ((x \to y) \to y) = 1$, entonces por (H5) $x \leq (x \to y) \to$

y, luego por (M26), $\nabla x \leq \nabla((x \to y) \to y)$, entonces, por (H5), $\nabla x \to \nabla((x \to y) \to y) = 1$.

(M29) Por (H7), $y \leq x \to y$, entonces por (M26), $\nabla y \leq \nabla(x \to y)$, luego por (H10), $x \to \nabla y \leq x \to \nabla(x \to y)$, luego por (M27), $x \to \nabla y \leq \nabla(x \to y)$. Probemos ahora la otra desigualdad. Por (M1) y (H5), $\triangle y \leq y$, luego por (H10), $x \to \triangle y \leq x \to y$, así por (M10), $\triangle(x \to \triangle y) \leq \triangle(x \to y)$. Por (M7), $x \to \triangle y \leq \triangle(x \to y)$ entonces, por (H10), $(x \to y) \to (x \to \triangle y) \leq (x \to y) \to \triangle(x \to y)$, y por (H14), $((x \to y) \to \triangle(x \to y)) \to (x \to y) \leq ((x \to y) \to (x \to \triangle y)) \to (x \to y)$, de esta forma, por (M13), $\nabla(x \to y) \leq ((x \to y) \to (x \to \triangle y)) \to (x \to y)$. Por (H18) tenemos que, $\nabla(x \to y) \leq ((x \to y) \to (x \to \triangle y)) \to (x \to y) = x \to ((y \to \triangle y) \to y)$, luego por (M13), $\nabla(x \to y) \leq x \to \nabla y$. Por lo tanto, $x \to \nabla y = \nabla(x \to y)$.

(M30) Por (M14) y (H14) sabemos que $\nabla x \to y \leq x \to y$, luego por (M26), $\nabla(\nabla x \to y) \leq \nabla(x \to y)$, además, como por (H7) $y \leq \nabla x \to y$, entonces por (M26) $\nabla y \leq \nabla(\nabla x \to y)$, luego por (H10) y (M27), $\nabla x \to \nabla y \leq \nabla(\nabla x \to y)$, así, $\nabla x \to \nabla y \leq \nabla(x \to y)$. Por otro lado, por (M29), $\nabla(x \to y) \to (\nabla x \to \nabla y) = (x \to \nabla y) \to (\nabla x \to \nabla y)$, y por (M13) es igual a $(x \to ((y \to \triangle y) \to y)) \to (\nabla x \to ((y \to \triangle y) \to y))$, que por (H10) es igual a $((y \to \triangle y) \to (x \to y)) \to ((y \to \triangle y) \to (\nabla x \to y))$, luego por (H18) tenemos que es igual a $(y \to \triangle y) \to ((x \to y) \to (\nabla x \to y))$. Luego por (H15), $(y \to \triangle y) \to ((x \to y) \to (\nabla x \to y)) = (y \to \triangle y) \to (\nabla x \to ((x \to y) \to y)) = \nabla x \to ((y \to \triangle y) \to ((x \to y) \to y)) = \nabla x \to ((x \to y) \to ((y \to \triangle y) \to y))$, luego por (M13), $\nabla x \to ((x \to y) \to ((y \to \triangle y) \to y)) = \nabla x \to ((x \to y) \to \nabla y)$, luego por (M29), $\nabla x \to ((x \to y) \to \nabla y) = \nabla x \to \nabla((x \to y) \to y)$, que es igual a 1 por (M28), por tanto por (H5) tenemos la otra desigualdad, concluyendo que $\nabla(x \to y) = \nabla x \to \nabla y$.

(M31) Por (H18), $x \to (((y \to \triangle y) \to \triangle x) \to (((x \to \triangle x) \to \triangle y) \to \triangle(x \to y)) = (x \to ((y \to \triangle y) \to \triangle x)) \to (x \to (((x \to \triangle x) \to \triangle y) \to \triangle(x \to y)))$, luego por (H15) es igual a $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to (x \to (((x \to \triangle x) \to \triangle y) \to \triangle(x \to y)))$, utilizando (H18), (M9), (H18) y (H16) respectivamente llegamos a que es igual a $((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to (((x \to \triangle x) \to (x \to \triangle y)) \to \triangle(x \to y))$, luego por (H18) y (H15) $= (x \to (\triangle x \to \triangle y)) \to (((y \to \triangle y) \to (x \to \triangle x)) \to \triangle(x \to y))$, y por (M6), $= (x \to (\triangle x \to \triangle y)) \to (\triangle x \to \triangle y)$. Así por (H15), $(x \to (\triangle x \to$

$\triangle y)) \to (\triangle x \to \triangle y) = (\triangle x \to (x \to \triangle y)) \to (\triangle x \to \triangle y)$, y por (H18), $(\triangle x \to (x \to \triangle y)) \to (\triangle x \to \triangle y) = (\triangle x \to x) \to (\triangle x \to \triangle y) \to (\triangle x \to \triangle y)$, y por (M1) y (H13), es igual a $(\triangle x \to \triangle y) \to (\triangle x \to \triangle y)$ que por (H6), es igual a 1.

(M32) Utilizando (M31), (H15) y (M19) se puede ver con facilidad.

(M33) Por (M14) y (M26), $\nabla x \leq \nabla\nabla x$, luego para la otra desigualdad, por (M13) tenemos que, $\nabla\nabla x \to \nabla x = ((\nabla x \to \triangle\nabla x) \to \nabla x) \to \nabla x$, luego por (M15) esto es igual a $((\nabla x \to \nabla x) \to \nabla x) \to \nabla x$, que por (H6), (H13) y (H6) es igual a 1, por lo tanto $\nabla\nabla x = \nabla x$.

(M34) Por (M14) $\triangle x \leq \nabla\triangle x$, luego para la otra desigualdad, por (M13), $\nabla\triangle x \leq \triangle x = ((\triangle x \to \triangle\triangle x) \to \triangle x) \to \triangle x$, luego por (M5) esto es igual a $((\triangle x \to \triangle x) \to \triangle x) \to \triangle x$, y por (H6), (H13) y (H6) esto es igual a 1, por lo tanto, por (H5) se cumple la otra desigualdad, así, $\nabla\triangle x = \triangle x$.

□

2.2. Sistemas deductivos modales y congruencias

Definición 2.2.1. *Sea A una $\triangle H_3$-álgebra y $D \subseteq A$. Diremos que D es un Sistema Deductivo Modal (S.D.M.) si es un S.D. que satisface:*

D_3) *Si $x \in D$, entonces $\triangle x \in D$.*

2.3. Propiedades

A continuación presentaremos propiedades de los sistemas deductivos modales. Dado un $\triangle H_3$-álgebra A y $H \subseteq A$, notaremos con $[H)$ al sistema deductivo generado por H y con $[H)_m$ al sistema deductivo modal generado por H. Es bien sabido que $[H) = \{x \in A :$ existen $h_1, \cdots, h_k \in H$ tal que $h_1 \to (h_2 \to \cdots \to (h_k \to x) \cdots) = 1\}$ (ver [37, Teorema 4.2.1]).

Por otra parte, Busneag en su tesis doctoral ([7]), estudió detalladamente a las álgebras de Hilbert acotadas. Con el propósito de describir propiedades de los sistemas deductivos en las álgebras de Hilbert y de Hilbert acotadas, introdujo la siguiente notación utilizada con frecuencia por diferentes autores:

$$(x_1,\ldots,x_{n-1};x_n)=\begin{cases} x_n & \text{si} \quad n=1 \\ x_1\to(x_2,\ldots,x_{n-1};x_n) & \text{si} \quad n>1 \end{cases}.$$

Luego podemos escribir

$$[H)=\{x\in A: \text{existen } h_1,\ldots,h_k\in D_1 \text{ tal que } (h_1,\ldots,h_k;x)=1\}.$$

Proposición 2.3.1. *Sea A una $\triangle H_3$-álgebra, $H\subseteq A$ y $a\in A$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $[H)_m=\{x\in A: \text{existen } h_1,\cdots,h_k\in H \text{ tal que } (\triangle h_1,\ldots,\triangle h_k;x)=1\}$,

(ii) $[a)_m=[\triangle a)$, *donde* $[b)$ *es la notación de* $[\{b\})$,

(iii) $[H\cup\{a\})_m=[H,a)_m=\{x\in A:\triangle a\to x\in[H)_m\}$.

Demostración:

(i) $\subseteq$) Sea $w\in[H)_m$. Veamos que $w\in\{x\in A: existen\ h_1,h_2,...,h_k\in H: (\triangle h_1,\triangle h_2,...,\triangle h_k;x)=1\}$. Como $[H)_m$ es un S.D.M. entonces es fácil verificar que $[H)_m\subseteq[H)$. Luego, existen $h_1,...,h_k\in H$ tales que $(h_1,...,h_k;w)=1$, es decir, $h_1\to(h_2\to(...\to(h_k\to w)...)=1$. Teniendo en cuenta (M4), tenemos que $\triangle(h_1\to(h_2\to(...\to(h_k\to w)...)=\triangle 1=1$, y por (M8) y (H5), obtenemos que $\triangle(h_1\to(h_2\to(...\to(h_k\to w)...)\leq\triangle h_1\to\triangle(h_2\to(h_3\to(...\to(h_k\to w)...)\leq\triangle h_1\to(\triangle h_2\to\triangle(h_3\to(...\to(h_k\to w)...)\leq...\leq(\triangle h_1,...,\triangle h_2;\triangle w)$. Luego, $(\triangle h_1,...,\triangle h_2;\triangle w)=1$, y por lo tanto $\triangle w\in H$. Por otro lado, de (M1) y (H5) inferimos que $\triangle w\leq w$. Del razonamiento anterior y (H10) podemos escribir $\triangle h_k\to\triangle w\leq\triangle h_k\to w$. Repitiendo el razonamiento tenemos que $\triangle h_{k-1}\to(\triangle h_k\to\triangle w)\leq\triangle h_{k-1}\to(\triangle h_k\to w$. Luego, es claro que $1=(\triangle h_1,\triangle h_2,...,\triangle h_k;\triangle w)\leq(\triangle h_1,\triangle h_2,...,\triangle h_k;w)$. Por lo tanto, $w\in[H)_m$.

$\supseteq$) Sea $w\in\{x\in A: existen\ h_1,h_2,...,h_k\in Htalesque(\triangle h_1,\triangle h_2,...,\triangle h_k;x)=1\}$, entonces existen $h_1,...,h_k\in Htalque(\triangle h_1,...,\triangle h_k;w)=1$. Entonces, es claro que $h_1,...,h_k\in[H)_m$ y por D_3) inferimos que $\triangle h_1,...,\triangle h_k\in[H)_m$. Además, por D_1) $(\triangle h_1,...,\triangle h_k;w)=1\in[H)_m$. De esta forma, por D_2)

obtenemos que: $(\triangle h_2, ..., \triangle h_k; w) \in [H)_m$. Como $\triangle h_2 \in [H)_m$ y aplicando D_2) concluimos $(\triangle h_3, ..., \triangle h_k; w) \in [H)_m$ Repitiendo este razonamiento obtenemos $w \in [H)_m$, lo que completa la prueba.

(ii) Inmediato de (i) y las definiciones de S.D. generado.

(iii) Por (i) sabemos que $[H \cup \{a\})_m = \{x \in A$, tal que existen $h_1, ..., h_k \in H \cup \{a\} : (h_1, ..., h_k; x) = 1\}$.

$\subseteq$) Sea $w \in [H \cup \{a\})_m$, entonces existen $h_1, ..., h_k \in H \cup \{a\}$ tal que $(h_1, ...h_k; w) = 1$

- Supongamos $h_i = a$ para algún i, entonces $(\triangle h_1, ..., \triangle h_{i-1}, \triangle a, \triangle h_{i+1} ..., \triangle h_k; w) = 1$, y por (H15) tenemos que:
  $(\triangle h_1, ..., \triangle h_{i-1}, \triangle h_{i+1}, \triangle a, ..., \triangle h_k; w) = 1$, repitiendo el razonamiento obtenemos $(\triangle h_1, ..., \triangle h_{i-1}, \triangle h_{i+1}, ..., \triangle h_k, \triangle a; w) = 1$. Luego, por notación podemos escribir $(\triangle h_1, ..., \triangle h_{i-1}, \triangle h_{i+1}, ..., \triangle h_k; \triangle a \to w) = 1$, de lo que concluimos $\triangle a \to w \in [H)_m$, y por lo tanto $w \in \{x \in A : \triangle a \to x \in [H)_m\}$.
- Supongamos $h_1 \neq a$ para todo i entonces $(\triangle h_1, ..., \triangle h_k; w) = 1$.
  Como $\triangle a \leq 1$, por (H14) $1 \to w \leq \triangle a \to w$, y por (H13) $w \leq \triangle a \to w$, luego por (H10) tenemos que:

$$
\begin{gathered}
\triangle h_k \to w \leq \triangle h_k \to (\triangle a \to w), \\
\triangle h_{k-1} \to (\triangle h_k \to w) \leq \triangle h_{k-1} \to (\triangle h_k \to (\triangle a \to w)), \\
\vdots \\
(\triangle h_1, .., \triangle h_k; w) \leq (\triangle h_1, ..., \triangle h_k; \triangle a \to w), \\
\text{por lo tanto } (\triangle h_1, ..., \triangle h_k; \triangle a \to w) = 1, \\
\text{entonces } \triangle a \to w \in [H)_m, \\
\text{luego, } w \in \{x \in A : \triangle a \to x \in [H)_m\}.
\end{gathered}
$$

$\supseteq$) Sea $w \in \{x \in A : \triangle a \to x \in [H)_m\}$. Entonces existen $h_1, ..., h_k \in H$ tales que $(\triangle h_1, ..., \triangle h_k; \triangle a \to w) = 1$, es decir $(\triangle h_1, ..., \triangle h_k, \triangle a; w) = 1$, por lo tanto $w \in [H \cup \{a\})_m$.

□

Lema 2.3.2. *Sea A un $\triangle H_3$-álgebra.*

(i) *Sea $D \subseteq A$ un S.D.M. entonces, la relación $R_D = \{(x,y) : x \to y \in D, y \to x \in D\}$ es una congruencia sobre A y $R_D(1) = D$.*

(ii) *Si R es una congruencia sobre A, entonces $R(1)$ es un S.D.M. de A y $R_{R(1)} = R$.*

Demostración:

i) Por el Teorema 1.2.8, sabemos que $R_D \in EQ(A)$, respeta la operación $\to$ y $R_D(1) = D$. Resta probar que respeta la operación $\triangle$.
Sea $(x,y) \in R_D$, $x \to y$, $y \to x \in D$. Por D_3), tenemos $\triangle(x \to y) \in D$, y por (M8) $\triangle(x \to y) \to (\triangle x \to \triangle y) = 1$, entonces por D_2), $\triangle x \to \triangle y \in D$. De marera análoga $\triangle y \to \triangle x \in D$, por lo tanto $(\triangle x, \triangle y) \in R_D$.

ii) Veamos que se verifcan D_1), D_2) y D_3). Por el Teorema 1.2.8 sabemos que R es S.D. Solo resta probar D_3). En efecto, sea $x \in R(1)$, entonces $xR1$. Luego, como R respeta la operación $\triangle$, $\triangle x R \triangle 1 = 1$, y por lo tanto $\triangle x \in R(1)$. Por lo tanto, $R(1)$ es un S.D.M. de A. Del Teorema 1.2.8 es inmediato que $R_{R(1)} = R$, lo que completa lademostración.

□

Corolario 2.3.3. *El retículo de las congruencias sobre un $\triangle H_3$-álgebra A es isomorfa al retículo de los sistemas deductivos modales de A.*

Demostración: Inmediato del Teorema 1.2.8 y el Lema 2.3.2. □

2.4. Sistemas deductivos débiles, ligados y maximales

Definición 2.4.1. *Sea A un $\triangle H_3$-álgebra. Llamaremos implicación débil a la operación binaria $\rightarrowtail$ definida sobre A por la prescripción $x \rightarrowtail y = \triangle x \to y$. Además, si $D \subseteq A$ diremos que D es un sistema deductivo débil (o S.D.D.) si verifica (D_1) $1 \in D$ y (D_2') Si $x, x \rightarrowtail y \in D$, entonces $y \in D$.*

Lema 2.4.2. *Las siguientes propiedades se verifican en toda $\triangle H_3$-álgebra:*

C1) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$,

C2) $(x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z)) \rightarrowtail ((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)) = 1$,

C3) $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = 1$,

C4) $1 \rightarrowtail x = x$,

C5) $x \rightarrowtail (x \to y) = x \rightarrowtail y$,

C6) $x \rightarrowtail \triangle x = 1$,

C7) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = y \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$.

Demostración:

C1) Por la definición sabemos que $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = x \rightarrowtail (\triangle y \to x) = \triangle x \to (\triangle y \to x)$, luego por (H15) $= \triangle y \to (\triangle x \to x)$, y por (M1), $= \triangle y \to 1$ que por (H9) es igual a 1.

C2) Utilizando la definición, tenemos que $(x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z)) \rightarrowtail ((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)) = (x \rightarrowtail (\triangle y \to z)) \rightarrowtail ((\triangle x \to y) \rightarrowtail (\triangle x \to z)) = (\triangle x \to (\triangle y \to z)) \rightarrowtail (\triangle(\triangle x \to y) \to (\triangle x \to z)) = \triangle(\triangle x \to (\triangle y \to z)) \to (\triangle(\triangle x \to y) \to (\triangle x \to z))$, luego por (M9) esto es igual a $(\triangle x \to \triangle(\triangle y \to z)) \to ((\triangle x \to \triangle y) \to (\triangle x \to z)) = (\triangle x \to (\triangle y \to \triangle z)) \to ((\triangle x \to \triangle y) \to (\triangle x \to z))$, luego por (H18) esto es igual a $(\triangle x \to (\triangle y \to \triangle z)) \to (\triangle x \to (\triangle y \to x)) = (\triangle x \to ((\triangle y \to \triangle z) \to (\triangle y \to z)) = \triangle x \to (\triangle y \to (\triangle z \to z))$, y por (M1) y (H9) tenemos que es igual a $\triangle x \to (\triangle y \to 1) = \triangle x \to 1 = 1$.

C3) Por la definición, $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = \triangle((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \to x = \triangle(\triangle(x \rightarrowtail y) \to x) \to x = \triangle(\triangle(\triangle x \to y) \to x) \to x$, luego por (M9) esto es igual a $(\triangle(\triangle x \to y) \to \triangle x) \to x = ((\triangle x \to \triangle y) \to \triangle x) \to x$, luego por (M3) esto es igual a $\triangle x \to x$ que es igual a 1 por (M1).

C4) Por la definición $1 \rightarrowtail x = \triangle 1 \to x$, y por (M4) y (H13) es igual a x.

C5) Por la definición, $x \rightarrowtail (x \to y) = \triangle x \to (x \to y)$, y por (H18) esto es igual a $(\triangle x \to x) \to (\triangle x \to y)$, luego por (M1), $= 1 \to (\triangle x \to y)$, y por (H13) $= \triangle x \to y$ que es igual a $x \rightarrowtail y$.

C6) $x \rightarrowtail \triangle x = \triangle x \to \triangle x$ por la definición, y por (H6) esto es igual a 1.

C7) Por la definición de $\rightarrowtail$ y (H15) inducimos que $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = \triangle x \to (\triangle y \to z) = \triangle y \to (\triangle x \to z) = y \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$

□

Lema 2.4.3. *Sea A una $\triangle H_3$-álgebra y $D \subseteq A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *D es un Sistema Deductivo Modal,*

(ii) *D es un Sistema Deductivo Débil.*

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $D \subseteq A$ un S.D.M., entonces solo debemos probar D_2'). Supongamos que x, $x \rightarrowtail y \in D$. Como $x \rightarrowtail y \in D$ entonces $\triangle x \to y \in D$, y como $x \in D$ entonces por D_3), $\triangle x \in D$, luego por D_2) $y \in D$. Por lo tanto D es un S.D.D.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $D \subseteq A$ un S.D.D. Es claro que D_1) se verifica. Sea $x \in D$, veamos que $\triangle x \in D$. En efcto, como $x \rightarrowtail \triangle x = \triangle x \to \triangle x = 1$ entonces $x \rightarrowtail \triangle x \in D$, por lo tanto $\triangle x \in D$, es decir, se cumple D_3).

Sean x, $x \to y \in D$. Veamos que $y \in D$. Por (M8) $\triangle(x \to y) \to (\triangle x \to \triangle y) = 1$, entonces $(x \to y) \rightarrowtail (\triangle x \to \triangle y) = 1$. Además, como D es un S.D.D. tenemos que $\triangle x \to \triangle y \in D$ entonces $x \rightarrowtail \triangle y \in D$, y como $x \in D$, entonces $\triangle y \in D$. De esto último y (M9) tenemos que $\triangle x \to \triangle y = \triangle(\triangle x \to y) \in D$, y por (M1) inferimos $\triangle(\triangle x \to y) \to (\triangle x \to y) = 1 \in D$, entonces $\triangle x \to y \in D$, luego $x \rightarrowtail y \in D$, por lo tanto $y \in D$, es decir, se verifica D_2).

□

Notaremos con $\mathcal{D}_d(A)$ al conjunto de los sistemas deductivos débiles de la $\triangle H_3$-álgebra A.

Observemos que si el álgebra $(A, \mapsto, 1)$ de tipo $(2, 0)$ verifica C1), C2) y C4), el retículo de las congruencias es isomorfo al retículo de los sistemas deductivos débiles.

En efecto, se tiene que a partir de (C1) y (C4) se puede probar $x \mapsto x = 1$. De lo anterior y (C1) inferimos que $x \mapsto 1 = 1$. Por otra parte, de $x \mapsto 1 = 1$ y (C2), tenemos que $(x \mapsto y) \mapsto ((z \mapsto x) \mapsto (z \mapsto y)) = 1$ y por último, de (C1), (C2) y (C4), concluimos que $(x \mapsto y) \mapsto ((y \mapsto z) \mapsto (x \mapsto z)) = 1$. Luego, tenemos probado el siguiente

Teorema 2.4.4. *Sea álgebra $(A, \mapsto, 1)$ de tipo $(2, 0)$ que verifica (C1), (C2) y (C4). Entonces, el retículo de las congruencias es isomorfo al retículo de los sistemas deductivos débiles.*

Es claro que las $\triangle H_3$-álgebras con la implicación $\rightarrowtail$, verifican el Teorema 2.4.4.

Definición 2.4.5. *Sea $M \in \mathcal{D}_d(A)$. Diremos que M es maximal si:*

(1) M es propio,

(2) Si $D \in \mathcal{D}_d(A)$ es tal que $M \subseteq D$, entonces $D = A$ o $M = D$.

Definición 2.4.6. *Sea A una $\triangle H_3$-álgebra, $D \in \mathcal{D}_d(A)$ y $p \in A \backslash D$. Diremos que D es ligado a p si es maximal entre los sistemas deductivos débiles que no contienen a p. Es decir, D es ligado a p si, y solo si $p \notin D$ y si $D' \in \mathcal{D}_d(A)$, tal que $D \subsetneq D'$ entonces $p \in D'$.*

Lema 2.4.7. *Sea $D_1 \in \mathcal{D}_d(A)$ y $p \in A \backslash D_1$. Entonces la familia $\mathcal{D}_d(D_1, p) = \{D \in \mathcal{D}_d(A) : D_1 \subseteq D, p \notin D\}$ con la inclusión es inductiva superiormente.*

Demostración:

Sabemos que $\mathcal{D}_d(D_1, p) \neq \emptyset$ pues $D_1 \in \mathcal{D}_d(D_1, p)$. Luego, solo resta probar que $\mathcal{D}_d(D_1, p)$ es una familia de conjuntos inductiva superiormente. Por lo tanto, basta probar que toda cadena de sistemas deductivos débiles $\{D_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{D}(D_1, p)$, verifica $D = \bigcup\limits_{i \in I} D_i$ es una cota superior de $\{D_i\}_{i \in I}$ en $(\mathcal{D}(D_1, p), \subseteq)$.

(1) $D_i \subseteq D$ para todo $i \in I$. Inmediato de la definición de D.

(2) $D_1 \subseteq D$ y $p \notin D$:

$D_i \in \mathcal{D}(D_1, p)$ para todo $i \in I$, entonces $D_1 \subseteq D_i$ para todo $i \in I$, luego $D_1 \subseteq \bigcup_{i\in I} D_i$, por lo tanto $D_1 \subseteq D$. Además $p \notin D_i$ para todo $i \in I$ entonces $p \notin D = \bigcup_{i\in I} D_i$

(3) $D \in \mathcal{D}_d(A)$:

Sabemos que $1 \in D_i$ para todo $i \in I$, entonces $1 \in D = \bigcup_{i\in I} D_i$, por lo tanto D verifica D_1). Veamos que verifica D_2'). En efecto, sean x, $x \rightarrowtail y \in D = \bigcup_{i\in I} D_i$, entonces existen $j, k \in I$ tales que $x \in D_j$ y $x \rightarrowtail y \in D_k$. Como $\{D_i\}_{i\in I}$ es una familia totalmente ordenada tenemos que $D_j \subseteq D_k$ o $D_k \subseteq D_j$. Luego, si ocurre $D_j \subseteq D_k$ (el otro caso es análogo), entonces x, $x \rightarrowtail y \in D_k$, y como $D_i \in \mathcal{D}_d(A)$ para todo $i \in I$, tendremos que $y \in D_k$, por lo tanto $y \in D = \bigcup_{i\in I} D_i$.

□

Lema 2.4.8. *Sea A una $\triangle H_3$-álgebra con más de un elemento, entonces existen S.D. ligados.*

Demostración: Si consideramos $D_1 = \{1\}$ y $p \in A$, $p \neq 1$, por el Lema anterior tenemos que $\mathcal{D}_d(\{1\}, p)$ es inductiva superiormente. Luego por el Lema de Zorn, existe al menos un elemento maximal P. Luego P es ligado a p. En efecto, es claro que $p \notin P$ y si $D \in \mathcal{D}(A)$ tal que $P \subsetneq D$, entonces $D \notin \mathcal{D}_d(\{1\}, p)$ pues P es maximal. Además $D_1 \subseteq D$ y $p \in D$, lo que completa la prueba. □

Lema 2.4.9. *Sea $D \in \mathcal{D}_d(A)$ y $p \in A \backslash D$. Entonces existe un S.D.D. L_p tal que:*

(i) *$D \subseteq L_p$.*

(ii) *L_p es ligado a p.*

Demostración: Sea $\mathcal{D}_d(D, p) = \{S \in \mathcal{D}_d(A) : D \subseteq S, p \notin S\}$, por el Lema 2.4.7, $\mathcal{D}_d(D, p)$ es inductivo superiormente. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal L_p, en $\mathcal{D}_d(D, p)$. Luego, de la definición de $\mathcal{D}_d(D, p)$ resulta que $D \subseteq L_p$, y $p \notin L_p$. Por lo tanto, veamos que L_p es ligado a p. En efecto, sea $D' \in \mathcal{D}_d(A)$ tal que $L_p \subsetneq D'$. Ahora veamos que $p \in D'$. Sea $D' \in \mathcal{D}_d(D,p)$, entonces $D \subseteq D'$ y $p \notin D'$. Por lo tanto, L_p es ligado a p. $\square$

Lema 2.4.10. *Todo S.D.D. propio es intersección de S.D. ligados. Más precisamente, si $D \in \mathcal{D}_d(A)$ es propio, entonces $D = \bigcap_{p \in A \setminus D} L_p$*

Demostración:

$\subseteq$) $D \subseteq \bigcap_{p \in A \setminus D} L_p$ es inmediato por el lema anterior.

$\supseteq$) $\bigcap_{p \in A \setminus D} L_p \subseteq D$: Sea $q \in \bigcap_{p \in A \setminus D} L_p$, y supongamos por el absurdo que $q \notin D$, entonces existe $L_q \in \mathcal{D}_d(A)$ tal que, por el lema anterior, L_q es ligado a q y $D \subseteq L_q$. Además como $L_q \in \mathcal{D}_d(A)$ entonces $\bigcap_{p \in A \setminus D} L_p \subseteq L_q$, luego $q \in L_q$ lo que es absurdo pues L_q es ligado a q. Por lo tanto, $q \in D$.

$\square$

Lema 2.4.11. *Sea A un $\triangle H_3$-álgebra, $H \subseteq A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $p \rightarrowtail q \in [H)_m$,

(ii) $q \in [H,p)_m$.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Por la Proposición 2.3.1 existen $h_1, ..., h_k \in H$ tales que $(\triangle h_1, ..., \triangle h_k; p \rightarrowtail q) = 1$ entonces $(\triangle h_1, ..., \triangle h_k; \triangle p \rightarrow q) = 1$, por lo tanto $q \in [H \cup \{p\})_m = [H,p)_m$,

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $q \in [H,p)_m$, de la Proposición 2.3.1 inducimos que $\triangle p \rightarrow q \in [H)_m$ entonces $p \rightarrowtail q \in [H)_m$.

$\square$

Lema 2.4.12. *(Caracterización de los sistema deductivos ligados). Sea $L \in \mathcal{D}_d(A)$ y $p \in A \backslash L$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) *L es ligado a p,*

ii) *Para todo $q \notin L$, $q \rightarrowtail p \in L$*

Demostración:

$i) \Rightarrow ii)$ Sea $q \notin L$, como $L \subsetneq [L,q)_m$ entonces $p \in [L,q)_m$. De esto último y el Lema 2.4.11, tenemos que $q \rightarrowtail p \in [L)_m$ y por el Lema 2.4.3, inferimos que $q \rightarrowtail p \in L$.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que $q \notin L$ y sea $D \in \mathcal{D}_d(A)$ tal que $L \subsetneq D$, entonces existe $p \in D \backslash L$, y por ii), podemos escribir $q \rightarrowtail p \in L$. Por lo tanto, $q \rightarrowtail p \in D$ y por D_2') inducimos que $p \in D$. De lo que resulta que L es ligado a p.

□

Lema 2.4.13. *Sea A un $\triangle H_3$-álgebra, $L \in \mathcal{D}_d(A)$ propio. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *L es maximal,*

(ii) *L es ligado a algún elemento de A.*

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como L es propio, entonces existe $p \in A \backslash L$. Luego, L es maximal y no contiene a p, entonces L es el maximal de los que no contienen a p. Por lo tanto, L es ligado a p.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $p \in A$ tal que $L = L_p$. Supongamos que L no es maximal. Sea $D \in \mathcal{D}_d(A)$ tal que $L \subsetneq D$. Por la definición de ligado, $p \in D$, además existe $a \in A - D$. De lo que resulta que $p \rightarrowtail a \notin D$, de modo que $p \rightarrowtail a \notin L$. Luego, por el Lema 2.4.12 inferimos que $(p \rightarrowtail a) \rightarrowtail p \in L$. Por lo tanto, por C3) del Lema 2.4.2 tenemos que $p \in L = L_p$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, L es maximal.

□

Observemos que el lema anterior es crucial para probar que la variedad de las $\triangle H_3$-álgebras es semisimple y la demostración requiere de C3).

Lema 2.4.14. *Sea M un S.D.D. maximal de un $\triangle H_3$-álgebra A. Entonces para todo $x \in A \backslash M$ tenemos que $x \rightarrowtail y \in M$, para todo $y \in A$.*

Lema 2.4.15. *Si A es un $\triangle H_3$-álgebra, entonces todo sistema deductivo débil propio de A es intersección de S.D.D. maximales.*

Demostración: Sea L un S.D.D. propio de A. Por el Lema 2.4.10, L es intersección de S.D. ligados. Luego, por el Lema 2.4.13, los S.D. ligados son maximales. Por lo tanto, L es intersección de S.D.D. maximales. □

A continuación, notaremos con $\mathcal{E}_d(A)$ al conjunto de los S.D.D. maximales de una $\triangle H_3$-álgebra A.

Lema 2.4.16. *Sea $A \in \mathbb{H}$, entonces $\{1\} = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{E}_d(A)} M$.*

Demostración: Inmediato por Lema 2.4.15. □

2.5. La semisimplicidad de la variedad de las $\triangle H_3$-álgebras

Teorema 2.5.1. *(Teorema de Representación). Sea el $\triangle H_3$-álgebra A con más de un elemento, entonces A es isomorfa a una subálgebra de $\prod\limits_{M \in \mathcal{E}_d(A)} A/M$.*

Demostración: Sea $\mathcal{E}_d(A) = \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ y recordemos que $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A/M_\alpha = \{f : \mathcal{A} \to \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A/M_\alpha : f(\alpha) \in A/M_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}\}$.
Sea $\varphi : A \to \prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A/M_\alpha$ tal que a cada elemento α le asigna $\varphi(\alpha) = f_a$, donde $f_a(\alpha) = q_\alpha(a) \in A/M_\alpha$. Es claro que φ está bien definida.

(I) φ es un homomorfismo. En efecto, sea $\varphi(1) = f_1$. Luego $f_1(\alpha) = q_\alpha(1) = \overline{1}_\alpha = \mathbb{1}(\alpha)$. Por lo tanto $f_1 = \mathbb{1}$. Dados $a, b \in A, veamosque \varphi(a \to b) = \varphi(a) \to \varphi(b)$. En efecto, $\varphi(a \to b) = f_{a \to b}$. Además $\varphi(a) = f_a$ y $\varphi(b) = f_b$. Luego $(f_a \to f_b)(\alpha) = f_a(\alpha) \to f_b(\alpha) = q_\alpha(a) \to q_\alpha(b) = q_\alpha(a \to b) = f_{a \to b}(\alpha)$.

(II) φ es inyectiva.
Sean $a, b \in A$ tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$, entonces $f_a(\alpha) = f_b(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, luego $q_\alpha(a) = q_\alpha(b)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $a \equiv b(\mathrm{mod}\ R_{(q_\alpha)})$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, de esta forma $a \to b, b \to a \in Nuc(q_\alpha) = M_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Luego $a \to b, b \to a \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$, y por el Lema 2.4.16 tenemos que $a \to b = 1 = b \to a$, entonces $a = b$.

Luego de (I) y (II) $A \simeq \varphi(A) \lhd \prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A/M_\alpha$. □

2.6. Álgebras Simples

Es bien sabido por resultados de *álgebra universal* que si M es un S.D.M. maximal de una $\triangle H_3$-álgebra A, si y sólo si el $\triangle H_3$-álgebra cociente A/M es simple. Para determinar las $\triangle H_3$-álgebras simples de $\triangle \mathbb{H}_3$ probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1. *Sea M un S.D.M. maximal no-trivial del $\triangle H_3$-álgebra A y consideremos el conjunto $M_0 = \{x \in A : \nabla x \notin M\}$ y $M_{1/2} = \{x \in A : x \notin M, \nabla x \in M\}$. La aplicación $h : A \longrightarrow \mathbb{C}_3$ definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in M_0 \\ 1/2 & si\ x \in M_{1/2} \\ 1 & si\ x \in M \end{cases}$$

es un $\triangle H_3$-epimorfismo tal que $h^{-1}(1) = M$.

Demostración: Para demostralo necesitaremos probar lo siguiente:

1) $x \in A, y \in M$, entonces $x \to y \in M$.
Por (H1) sabemos que $y \to (x \to y) \in M$, luego por $D_2)$, $x \to y \in M$.

2) $x \in M_0, y \in A$, entonces $x \to y \in M$.
Tenemos que $\nabla x \notin M$, luego por el Lema 2.4.14, $\triangle \nabla x \to (x \to y) \in M$ y, por $(M15)$ $\nabla x \to (x \to y) \in M$. Entonces, por (H15) $x \to (\nabla x \to y) \in M$, así por (H3) y $D_2)$ $(x \to \nabla x) \to (x \to y) \in M$ y por lo tanto, por (M14) y $D_2)$ $x \to y \in M$.

3) $x \in M_{1/2}, y \in M_0$, entonces $x \to y \in M_0$.
Tenemos que $\nabla x \in M, \nabla y \notin M$. Supongamos que $\nabla(x \to y) \in M$, entonces por (M30) $\nabla x \to \nabla y \in M$, luego por D_2) $\nabla y \in M$, lo que es absurdo. Por lo tanto $\nabla(x \to y) \notin M$, entonces $x \to y \in M_0$.

4) $x \in M_{1/2}, y \in M_{1/2}$, entonces $x \to y \in M$.
Tenemos que $x, y \notin M$ y $\nabla x, \nabla y \in M$. Se deduce que $x \to \triangle x \notin M$, ya que en caso contrario, por (M13) $(x \to \triangle x) \to x = \nabla x \in M$ y por D_2) tendríamos que $x \in M$ lo que es absurdo. De forma análoga, $y \to \triangle y \notin M$. Con un razonamiento similar, por D_2) y (M1) $\triangle x, \triangle y \notin M$. Luego, por el Lema 2.4.14 $(x \to \triangle x) \to \triangle y, (y \to \triangle y) \to \triangle x \in M$, entonces por (M32) $\triangle(x \to y) \in M$ y nuevamente por D_2) y (M1), $x \to y \in M$.

5) $x \in M, y \in M_0$, entonces $x \to y \in M_0$.
Tenemos que $\triangle y \notin M, x \in M$ entonces por D_3) $\triangle x \in M$. Es fácil ver que por (M14), D_1), D_2) y (M5) $\nabla x \in M$. Luego por D_2) $\nabla x \to \nabla y \notin M$, pues de lo contrario, por D_1) y D_2), tendríamos que $\nabla y \in M$ lo que es absurdo. De esta forma, por (M30) $\nabla(x \to y) \notin M$, entonces $x \to y \in M_{1/2}$.

6) $x \in M, y \in M_{1/2}$, entonces $x \to y \in M_{1/2}$.
Tenemos que $y \notin M, \nabla y \in M$. Por D_1) y D_2), $x \to y \notin M$, además por (H1) $y \to (x \to y) = 1$, entonces por (M24) y (H5) $\nabla y \to \nabla(x \to y) = 1$. Luego por D_1) y D_2) $\nabla(x \to y) \in M$, por lo tanto $x \to y \in M_{1/2}$.

7) $x \in M_0$, entonces $\triangle x \in M_0$.
Tenemos que $\nabla x \notin M$, por (M34) $\nabla \triangle x = \triangle x \notin M$, pues de lo contrario, si $\triangle x \in M$ entonces por (M1), D_1), D_2) $x \in M$, de esta forma por (H5), (M14), D_1) y D_2) tendríamos que $\nabla x \in M$, lo que es absurdo. Luego $\nabla \triangle x \notin M$ entonces $\triangle x \in M_0$.

8) $x \in M_{1/2}$, entonces $\triangle x \in M_0$.
Tenemos que $x \notin M, \nabla x \in M$. Luego por D_1), D_2) y (M1) $\triangle x \notin M$, entonces por (M34) $\nabla \triangle x \notin M$. Luego $\triangle x \in M_0$.

9) $x \in M$ entonces $\triangle x \in M$.
Inmediato por D_3).

De esta forma, podemos asegurar que h es un homomorfismo pues:

- $h(1) = 1$, ya que $1 \in M$,

  Sean $x, y \in A$

- Si $x, y \in M$, por 1) $x \to y \in M$, entonces $h(x) \to h(y) = 1 \to 1 = 1 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M, y \in M_0$, por 5) $x \to y \in M_0$, entonces $h(x) \to h(y) = 1 \to 0 = 0 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M, y \in M_{1/2}$, por 6) $x \to y \in M_{1/2}$, entonces $h(x) \to h(y) = 1 \to 1/2 = 1/2 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M_0, y \in M$, por 1) $x \to y \in M$, entonces $h(x) \to h(y) = 0 \to 1 = 1 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M_0, y \in M_0$ por 2) $x \to y \in M$, entonces $h(x) \to h(y) = 0 \to 0 = 1 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M_0, y \in M_{1/2}$ por 2) $x \to y \in M$, entonces $h(x) \to h(y) = 0 \to 1/2 = 1 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M_{1/2}, y \in M$ por 1) $x \to y \in M$, entonces $h(x) \to h(y) = 1/2 \to 1 = 1 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M_{1/2}, y \in M_0$ por 3) $x \to y \in M_0$, entonces $h(x) \to h(y) = 1/2 \to 0 = 0 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M_{1/2}, y \in M_{1/2}$ por 4) $x \to y \in M$, entonces $h(x) \to h(y) = 1/2 \to 1/2 = 1 = h(x \to y)$,
- Si $x \in M$ por D_3) $\triangle x \in M$, entonces $h(x) = 1 = h(\triangle x)$,
- Si $x \in M_0$ por 7) $\triangle x \in M_0$, entonces $h(x) = 0 = h(\triangle x)$,
- Si $x \in M_{1/2}$ por 8) $\triangle x \in M_{1/2}$, entonces $h(x) = 1/2 = h(\triangle x)$.

Por lo tanto, para todo $x, y \in A$ tenemos que $h(x) \to h(y) = h(x \to y)$ y $\triangle h(x) = h(\triangle x)$.
$\square$

Teorema 2.6.2. *Sea A un $\triangle H_3$-álgebra y supongamos que $\{1\}$ es un sistema deductivo débil maximal, entonces $A/\{1\}$ es isomorfo a $\mathbb{C}_2^{\to} = (\{0,1\}, \to, 1)$.*

Demostración: Sabemos que $A/\{1\} = \{C(a)\}_{a \in A}$, con $C(a) = \{x \in A$ tales que $x \rightarrowtail a = 1, a \rightarrowtail x = 1\}$ Es fácil ver que $A/\{1\}$ tiene dos elementos. En efecto, para cualquier $x \in A$, si $x \neq 1$, por los lemas 2.4.3 y 2.4.14, tenemos que para todo $y \in A - \{1\}$ tenemos que $y \rightarrowtail x = 1$, y análogamente $x \rightarrowtail y = 1$. Además por (H9) $\triangle x \to 1 = x \rightarrowtail 1 = 1$, por lo tanto $C(x) = A - \{1\}$. Luego, se ve facilmente que $C(1) = \{1\}$.

Sea h la función biyectiva tal que $h(C(x)) = 0$ y $h(C(1)) = 1$.

$h(C(1)) = 1$, por lo tanto respeta la operación 0-aria.

$h(C(x) \to C(1)) = h(C(x \rightarrowtail 1)) = h(C(1)) = 1 = 0 \to 1 = h(C(x)) \to h(C(1))$ y $h(C(1) \to C(x)) = h(C(1 \rightarrowtail x)) = h(C(x)) = 0 = 1 \to 0 = h(C(1)) \to h(C(x))$, por lo tanto respeta la operación binaria. Luego. h es un isomorfismo. $\square$

Corolario 2.6.3. *Toda $\triangle H_3$-álgebra simple A no trivial es isomorfa a $\mathbb{C}_3^{\to}$.*

Demostración: Sea A un $\triangle H_3$-álgebra simple, entonces existe B $\triangle H_3$-álgebra y M S.D. maximal tal que A es isomorfa a B/M. Por el Teorema 2.6.1 existe h epimorfismo de B a $\mathbb{C}_3$. Tenemos $q : B \to B/M$ epimorfismo canónico. Entonces por el teorema de homomorfismo del álgebra universal (ver [6]) existe un único $h^* : B/M \to \mathbb{C}_3$ isomorfismo. Luego como A es isomorfo a B/M, tenemmos que A es isomorfo a $\mathbb{C}_3$. $\square$

Entonces tenemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2.6.4. *Toda $\triangle H_3$-álgebra simple A es isomorfa a $\mathbb{C}_3^{\to}$ o a $\mathbb{C}_2^{\to} = (\{0,1\}, \to, \triangle, 1)$.*

2.7. Cálculo estilo Hilbert para las $\triangle H_3$-álgebras

Sea $Var = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ un conjunto numerable de elementos que denominaremos variables, y sean $\to$ y $\triangle$ símbolos que llamaremos implicación y delta. Indicaremos con Fm al conjunto de las fórmulas obtenidas de la siguiente manera:

F1) Si $\alpha \in Var$, entonces $\alpha \in Fm$,

F2) Si α y β son fórmulas, entonces $\triangle\alpha, \alpha \to \beta \in Fm$,

F3) los únicos elementos de Fm son los obtenidos a partir de F1 y F2.

En adelante denotaremos por $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \to, \triangle \rangle$ al álgebra absolutamente libre generada el conjunto de variables Var.

Definición 2.7.1. *Denotaremos con $\mathcal{H}^3_\triangle = \langle \mathfrak{Fm}, \vdash \rangle$ al cálculo Hilbert determinado por los axiomas y regla de inferencia siguiente, donde $\alpha, \beta, \gamma, ... \in Fm$:*

Axiomas

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(A3) $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (((\gamma \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$,

(A4) $\triangle\alpha \to \alpha$,

(A5) $\triangle(\triangle\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$,

(A6) $((\triangle\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\triangle\alpha \to \gamma) \to \gamma)$,

(A7) $((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))) \to \triangle(\alpha \to \beta)$.

Reglas de Inferencia.

(MP) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$

(NEC)$\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \triangle\alpha}$,

Definición 2.7.2.

(1) Una derivación de una fórmula α en $\mathcal{H}^3_\triangle$ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 ... \alpha_n$ tales que α_n es α y todo α_i es, o bien, una instancia de un axioma o es la consecuencia de alguna regla de inferencia local $((MP)$ o $(NEC))$ de $\mathcal{H}^3_\triangle$ cuyas premisas aparecen en la secuencia $\alpha_a ... \alpha_{i-1}$. Diremos que α es derivable en $\mathcal{H}^3_\triangle$, y escribiremos $\vdash \alpha$, si existe una derivación de ella en $\mathcal{H}^3_\triangle$.

(2) Una derivación de una fórmula α *en* $\mathcal{H}^3_\triangle$ *a partir de un conjunto de premisas* Γ *es una secuencia finita de fórmulas* $\alpha_1 ... \alpha_n$ *tal que* α_n *es* α *y, para todo* $1 \leq i \leq n$*, la fórmula* α_i *es obtenida como sigue:*

(i) α_i *es una instancia de un axioma; o*

(ii) α_i *pertenece a* Γ*; o*

(iii) existe un conjunto $\{j, k_1, ..., k_m\} \subseteq \{1, ..., i-1\}$ *tal que* $\alpha_{k_1} ... \alpha_{k_m}$ *es una derivación de* $\alpha_j \to \alpha_i$ *(de esta manera* α_i *es obtenida a partir de* α_j *y* $\alpha_j \to \alpha_i$ *por (MP)); o*

(iv) existe un conjunto $\{k_1, ..., k_m\} \subseteq \{1, ..., i-1\}$ *donde* $\alpha_{k_1} ... \alpha_{k_m}$ *es una derivación de una premisa de una regla* (NEC) *tal que* α_i *es la conclusión de esa regla (así* α_i *es obtenida a partir* α_{k_m} *por* (NEC)*); o*

Diremos que α *es derivable en* $\mathcal{H}^3_\triangle$ *a partir de* Γ*, y escribiremos* $\Gamma \vdash \alpha$*, si existe una derivación de* α *en* $\mathcal{H}^3_\triangle$ *a partir de* Γ*.*

Notemos que si, $\alpha_1 ... \alpha_n$ es una derivación de $\mathcal{H}^3_\triangle$, entonces todas α_i satisface las condiciones $(i) - (iv)$ de la Definición 2.7.2, y por ello la noción de derivación a partir de premisas en $\mathcal{H}^3_\triangle$ esta bien definida. Diremos que α es teorema de la lógica si $\emptyset \vdash \alpha$, en este caso notaremos $\vdash \alpha$.

Proposición 2.7.3. *Las siguientes fórmulas son teoremas de* $\mathcal{H}^3_\triangle$*.*

(P1) $\vdash \alpha \to \alpha$,

(P2) $\{\beta\} \vdash \alpha \to \beta$,

(P3) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$,

(P4) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$,

(P5) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$,

(P6) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$,

(P7) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$,

(P8) $\vdash \triangle\alpha \to ((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha)$,

(P9) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta))$.

(P10) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$,

(P11) $\vdash \triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha$,

(P12) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$

(P13) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta)$,

(P14) $\{\alpha \to \beta\} \vdash \triangle\alpha \to \triangle\beta$,

(P15) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta))$,

(P16) $\vdash ((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha$.

Demostración:

(P1) (1) $\vdash (\alpha \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\beta \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ [(A2)]

(2) $\vdash ((\alpha \to (\beta \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ [(1),(A1),(MP)]

(3) $\vdash \alpha \to \alpha$ [(2),(A1),(MP)]

(P2) (1) $\vdash \beta$ [Hip]

(2) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ [(A1)]

(3) $\vdash \alpha \to \beta$ [(1),(2),(MP)]

(P3) (1) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ [Hip.]

(2) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [(A2)]

(3) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ [(1),(2)]

(P4) (1) $\vdash \alpha \to \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash \beta \to \gamma$ [Hip.]

(3) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [(A2)]

(4) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ [(P2),(2)]

(5) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ [(3),(4),(MP)]

(6) $\vdash \alpha \to \gamma$ [(1),(4),(MP)]

(P5) (1) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ [Hip.]

(2) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ [(1),(P3)]

(3) $\vdash \beta \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [(2),(P2)]

(4) $\vdash (\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ [(3),(P3)]

(5) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ [(A1)]

(6) $\vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$ [(4),(5),(MP)]

(P6) (1) $\vdash \alpha \to \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash \gamma \to (\alpha \to \beta)$ [(1),(P2)]

(3) $\vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$ [(2),(P3)]

(P7) (1) $\vdash \alpha \to \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$ [(P1)]

(3) $\vdash \beta \to ((\beta \to \gamma) \to \gamma)$ [(2),(P5)]

(4) $\vdash \alpha \to ((\beta \to \gamma) \to \gamma)$ [(1),(3),(P4)]

(5) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ [(4),(P5)]

(P8) Inmediato de (A1).

(P9) Inmediato de (A1).

(P10) (1) $\vdash \triangle\alpha \to \alpha$ [(A4)]

(2) $(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta)$ [(1),(P7)]

(3) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta))$ [(2),(P2)]

(4) $\vdash (\triangle(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta))$ [(3),(A2)]

(5) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta)$ [(4),(A4),(MP)]

(6) $\vdash \triangle(\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta))$ [(5),(NEC)]

(7) $\vdash \triangle(\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta)) \to (\triangle(\alpha \to \beta) \to \triangle(\triangle\alpha \to \beta))$ [(A5)]

(8) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to \triangle(\triangle\alpha \to \beta)$ [(7),(6),(MP)]

(9) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle(\triangle\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(A5),(P2)]

(10) $\vdash (\triangle(\alpha \to \beta) \to \triangle(\triangle\alpha \to \beta)) \to (\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(9),(A2)]

(11) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$ [(10),(8),(MP)]

(P11) (1) $\vdash \triangle(\triangle\alpha \to \triangle\alpha) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha)$ [(A5)]

(2) $\vdash \triangle\alpha \to \triangle\alpha$ [(P1)]

(3) $\vdash \triangle(\triangle\alpha \to \triangle\alpha)$ [(2),(NEC)]

(4) $\vdash \triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha$ [(3),(1),(MP)]

(P12) (1) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to (\triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(P10),(MP)]

(2) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(1),(A2)]

(3) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)) \to (\triangle\alpha \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle\beta))$ [(P5),(2)]

(4) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)) \to (\triangle\alpha \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle\beta)))$ [(3),(P2)]

(5) $\vdash ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))) \to ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle\beta)))$ [(4),(A2)]

(6) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha) \to \triangle\beta))$ [(2),(5),(MP)]

(7) $\vdash (\triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle\beta)) \to ((\triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha))) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(A2)]

(8) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to ((\triangle\alpha \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle\beta)) \to ((\triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha))) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)))$ [(7),(P2)]

(9) $\vdash ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle\beta))) \to ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to ((\triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha))) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)))$ [(8).(A2)]

(10) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to ((\triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(6),(9),(MP)]

(11) $\vdash (\triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(10),(A2)]

(12) $\vdash (\beta \to \triangle\beta) \to (\triangle\alpha \to (\alpha \to \triangle\alpha))$ [(A1),(P2)]

(13) $\vdash \triangle\alpha \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha))$ [(12),(P5)]

(14) $\vdash\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$ [(13),(11),(MP)]

(P13) (1) $\vdash \triangle\alpha \to (\triangle\beta \to \triangle\triangle\beta)$ [(P11),(P2)]

(2) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta)$ [(1),(A2)]

(3) $\vdash \alpha \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha)$ [(P11),(P2)]

(4) $\vdash (\alpha \to \triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)$ [(3),(A2)]

(5) $\vdash ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha))$ [(4),(P6)]

(6) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta))$ [(5),(P7)]

(7) $\vdash ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)) \to ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$ [(6),(P7)]

(8) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$ [(7),(P12),(MP)]

(9) $\vdash ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)) \to ((((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta))$ [(2),(P6)]

(10) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta)$ [(8),(9),(MP)]

(P14) (1) $\vdash \alpha \to \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta)$ [(1),(NEC)]

(3) $\vdash \triangle\alpha \to \triangle\beta$ [(2),(P10),(MP)]

(P15) (1) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ [(A1)]

(2) $\vdash \triangle\beta \to \triangle(\alpha \to \beta)$ [(1),(P14)]

(3) $\vdash \triangle\triangle\beta \to (\triangle\beta \to \triangle(\alpha \to \beta))$ [(2),(P2)]

(4) $\vdash (\triangle\triangle\beta \to \triangle\beta) \to (\triangle\triangle\beta \to \triangle(\alpha \to \beta))$ [(3),(A2),(MP)]

(5) $\vdash \triangle\triangle\beta \to \triangle(\alpha \to \beta)$ [(4),(A4),(MP)]

(6) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\triangle\alpha \to (\triangle(\alpha \to \beta))$ [(5),(P6)]

(7) $\vdash \alpha \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))$ [(6),(P2)]

(8) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))$ [(A4),(P7)]

(9) $\vdash (\alpha \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))) \to (\alpha \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\triangle\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(8),(P6)]

(10) $\vdash \alpha \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\triangle\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))$ [(9),(7),(MP)]

(11) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\alpha \to (\triangle\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))$ [(10),(P5)]

(12) $\vdash (\alpha \to (\triangle\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))$ [(A2)]

(13) $\vdash ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (\alpha \to (\triangle\triangle\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))) \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(12),(P6)]

(14) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))$ [(13),(11),(MP)]

(15) $\vdash (\beta \to \triangle\beta) \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(14),(P2)]

(16) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(15),(P5)]

(17) $\vdash ((\beta \to \triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(A2)]

(18) $\vdash ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))) \to ((\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to ((\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(17),(P6)]

(19) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))))$ [(18),(16),(MP)]

(20) $\vdash (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to ((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta)))) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta))$ [(A7),(P6)]

(21) $\vdash (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta))$[(20),(P6),(19),(MP)]

(P16) (1) $\vdash ((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to ((\triangle\alpha \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha)$ [(A6)]

(2) $\vdash (((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to (\triangle\alpha \to \triangle\alpha)) \to (((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha)$ [(1),(P3)]

(3) $\vdash ((((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha) \to (((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha)) \to (((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha)$ [(2),(P3)]

(4) $((\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to \triangle\alpha) \to \triangle\alpha$ [(3),(P1),(MP)]

□

Lema 2.7.4. $\equiv$ *es una congruencia sobre* $\triangle\mathbb{H}_3$.

Demostración:

- $\equiv$ es una relación de equivalencia

  (i) Reflexiva: Por (A0) $\vdash \alpha \to \alpha$, por lo tanto $\alpha \equiv \alpha$.

  (ii) Simétrica: Inmediato.

  (iii) Transitiva:

    (1) $\alpha \equiv \beta$ [Hip.]

    (2) $\beta \equiv \gamma$ [Hip.]

    (3) $\vdash \alpha \to \beta, \vdash \beta \to \alpha$ [(1)]

    (4) $\vdash \beta \to \gamma, \vdash \gamma \to \beta$ [(2)]

    (5) $\vdash \alpha \to \gamma$ [(P4),(3),(4)]

    (6) $\vdash \gamma \to \alpha$ [(P4),(3),(4)]

    (7) $\alpha \equiv \gamma$ [(5),(6)].

- $\equiv$ es compatible con la operación $\to$

  (1) $\alpha \equiv \beta$ [Hip.]

  (2) $\gamma \equiv \delta$ [Hip.]

  (3) $\vdash \alpha \to \beta$ [(1)]

  (4) $\vdash \beta \to \alpha$ [(1)]

  (5) $\vdash \gamma \to \delta$ [(2)]

(6) $\vdash \delta \to \gamma$ [(2)]

(7) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ [(P7),(3)]

(8) $\vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$ [(P7),(4)]

(9) $\alpha \to \gamma \equiv \beta \to \gamma$ [(7),(8)]

(10) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)$ [(P6),(5)]

(11) $\vdash (\beta \to \delta) \to (\beta \to \gamma)$ [(P6),(6)]

(12) $\beta \to \gamma \equiv \beta \to \delta$ [(10),(11)]

(13) $\alpha \to \gamma \equiv \beta \to \delta$ [(9),(12)]

- $\equiv$ es compatible con $\triangle$

(1) $\alpha \equiv \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash \alpha \to \beta$ [(1)]

(3) $\vdash \beta \to \alpha$ [(1)]

(4) $\vdash \triangle(\alpha \to \beta)$ [(2),(NEC),(MP)]

(5) $\vdash \triangle(\beta \to \alpha)$ [(3),(NEC),(MP)]

(6) $\vdash \triangle\alpha \to \triangle\beta$ [(4),(P10),(MP)]

(7) $\vdash \triangle\beta \to \triangle\alpha$ [(5),(P10),(MP)]

(8) $\triangle\alpha \equiv \triangle\beta$ [(6),(7)]

$\square$

Teorema 2.7.5. *El álgebra de Lindenbaum* $\mathfrak{Fm}/\equiv$ *de* $\mathcal{H}^3_\triangle$ *es un álgebra trivalente modal definiendo* $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta|$ *y* $|1| = 1_\equiv$*, con* $1 \equiv \alpha \to \alpha$ *y donde* $|\delta|$ *denota la clase de equivalencia de la fórmula* δ*. Más aún,* $|\alpha| \to |\beta| = 1_\equiv$ *si, y solo si,* $\vdash \alpha \to \beta$

Demostración: Por el Lema 2.7.4, sabemos que las operaciones de $\mathfrak{Fm}/\equiv$ están bien definidas.

Si $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta| = |1|$ entonces $\alpha \to \beta \equiv \alpha \to \alpha$, por lo tanto $\vdash (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \beta)$, luego por (P1) y (MP) tenemos que $\vdash \alpha \to \beta$.

Si tenemos que $\vdash \alpha \to \beta$, entonces por (P6) $\vdash (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \beta)$, a su vez por (A1) $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)$ y por (P5) tenemos que $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)$. Por lo tanto $\alpha \to \beta \equiv \alpha \to \alpha$, es decir que $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta| = |\alpha \to \alpha| = |1|$.

El hecho de que $\mathfrak{Fm}/\equiv$ es un álgebra trivalente modal es consecuencia directa de los Axiomas, las Reglas de Inferencia y la Propiedad 2.7.3. En efecto:

(D1) Inmediato de (P1).

(D2) $1 \to \alpha \equiv \alpha$,

i) $\vdash \alpha \to (1 \to \alpha)$ inmediato de (A1),

ii) $\vdash (1 \to \alpha) \to \alpha$:

(1) $\vdash (1 \to \alpha) \to (1 \to \alpha)$ [(P1)]

(2) $\vdash 1 \to ((1 \to \alpha) \to \alpha)$ [(1),(P5)]

(3) $\vdash (1 \to \alpha) \to \alpha$ [(2),(MP),(P1),$\alpha \to \alpha \equiv 1_{\equiv}$]

(D3) $\alpha \to (\beta \to \gamma) \equiv (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

i) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ Inmediato de (A3),

ii) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$:

(1) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ [(A1)]

(2) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ [(1),(P7)]

(3) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ [(2),(P5)]

(D4) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha) \equiv (\beta \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$

i) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \beta)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha))$:

(1) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$ [(A2)]

(2) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$ [(1),(MP),(P1)]

(3) $\vdash ((\beta \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)) \to ((\beta \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$ [(2),(P6)]

(4) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \beta))$ [

ii) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \beta))$ Inmediato del paso (3) de la demostración i) anterior.

(E2) Inmediato de (A2),

(M1) Inmediato de (A4),

(M2) Inmediato de (P13) y (P15),

(M3) Inmediato de (P10) y (P8).

Motivo por el cual podemos afirmar que $\mathfrak{Fm}/\equiv$ es $\triangle H_3$-álgebra. $\square$

Definición 2.7.6. *Una valuación v es una función $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbb{C}_3$ que satisface lo siguiente:*

- $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$,
- $v(\triangle\alpha) = \triangle v(\alpha)$,
- $v(1_{\equiv}) = 1$.

Diremos que α es semánticamente válido, y lo notaremos $\vDash_{\triangle H_3} \alpha$, si para toda valuación v, $v(\alpha) = 1$.

Observaciones 2.7.7. *Todo axioma es semánticamente válido, basta con verificarlo por tablas.*

Teorema 2.7.8. (Teorema de la deducción)
Sea $H \subseteq Fm$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $H \vdash (\alpha \to \beta)$,

(ii) $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Demostración:

Llamaremos $\mathcal{T}$ al conjunto de fórmulas que tienen una demostración formal a partir del $\emptyset$. Es decir $\mathcal{T} = \{\alpha \in Fm,\ tal\ que : \vdash \alpha\}$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos que $H \vdash (\alpha \to \beta)$, entonces existe una demostración formal de $\alpha \to \beta$ a partir de H.

(1) α_1, $[H \cup \mathcal{T}]$

(2) α_2, $[H \cup \mathcal{T}]$

$\vdots$

(n) $\alpha \to \beta$.

Entonces

(1) α,

(2) α_1,

(3) α_2,

$\vdots$

(n+1) $\alpha \to \beta$,

(n+2) β, [(1),(n+1),(MP)]

es una demostración formal de β a partir de $H \cup \{\alpha\}$.
Luego $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Haremos la demostración por inducción sobre la longitud de la demostración formal de la fórmula β.
Si n=1, α_1 es β, luego $\beta \in \mathcal{T} \cup H \cup \{\alpha\}$.

Caso 1. $\beta \in \mathcal{T} \cup H$:

(1) β, [Hip.]

(2) $\beta \to (\alpha \to \beta)$, [(A1)]

(3) $\alpha \to \beta$. [(1),(2),(MP)] Por lo tanto, $H \vdash (\alpha \to \beta)$.

Caso 2. $\beta \in \{\alpha\}$:

(1) $\emptyset \vdash (\alpha \to \beta)$, [(P1)]

(2) $\emptyset \subseteq H$,

(3) $H \vdash (\alpha \to \alpha)$. [(1),(2)]

Hipótesis de inducción: Supongamos que el enunciado vale para toda fórmula r cuya demostración es de longitud menor o igual a n-1 y sea

(1) α_1,

(2) α_2,

$\vdots$

(n) β,

una demostración de β, a partir de $H \cup \{\alpha\}$, de longitud n.

Caso 1. $\beta \in H \cup \mathcal{T} \cup \{\alpha\}$: Es análogo al caso 1 de n=1.

Caso 2. $\beta \notin H \cup \mathcal{T} \cup \{\alpha\}$: De la hipótesis resulta que existe una demostración formal

(1) α_1,

$\vdots$

(j) α_j,

$\vdots$

(n-1) $\alpha_j \to \beta$,

(n) β.

Como α_j y $\alpha_j \to \beta$ tienen una demostración formal a partir de $H \cup \{\alpha\}$, de longitud menor o igual que n-1, entonces por la hipótesis de inducción tenemos que $H \vdash (\alpha \to \alpha_j)$ y $H \vdash (\alpha \to (\alpha_j \to \beta))$.
Por lo tanto podemos escribir

(1) β_1,

$\vdots$ [demostración formal a partir de $\alpha \to \alpha_j$ a partir de H,

(t) $\alpha \to \alpha_j$, $(\beta_i \neq \alpha,\ 1 \leq i \leq t-1)$]

(1) γ_1,

$\vdots$ [demostración formal a partir de $\alpha \to (\alpha_j \to \beta)$ a partir de H,

(s) $\alpha \to (\alpha_j \to \beta)$, $(\gamma_i \neq \alpha,\ 1 \leq i \leq s-1)$]

Entonces,

(1) β_1,

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
(\mathrm{t}) & \alpha \to \alpha_j, & \\
(\mathrm{t+1}) & \gamma_1, & \\
 & \vdots & \\
(\mathrm{m}) & \alpha \to (\alpha_j \to \beta), & \\
(\mathrm{m+1}) & (\alpha \to (\alpha_j \to \beta)) \to ((\alpha \to \alpha_j) \to (\alpha \to \beta)), & [(\mathrm{A2})] \\
(\mathrm{m+2}) & (\alpha \to \alpha_j) \to (\alpha \to \beta), & [(\mathrm{m}),(\mathrm{m+1}),(\mathrm{MP})] \\
(\mathrm{m+3}) & \alpha \to \beta. & [(\mathrm{t}),(\mathrm{m+2}),(\mathrm{MP})]
\end{array}
$$

Por lo tanto $H \vdash (\alpha \to \beta)$.

□

Observemos que la demostración del teorema anterior solo precisa de los axiomas (A1), (A2) y la regla (MP). Por lo tanto, la demostración del la deducción es la misma que para el cálculo implicativo positivo clásico.

Teorema 2.7.9. (Teorema de Correctitud)

Sea $\alpha \in Fm$ tal que $\vdash \alpha$, entonces $\vDash_{\triangle H_3} \alpha$.

Demostración:

Sea $\alpha \in \ Fm$ tal que existe una demostración formal $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de α. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Si n=1 entonces $\alpha_1 = \alpha$, y por la definición de demostración formal $\alpha_1 = \alpha$ es un axioma.

Supongamos que la demostración es verdadera para todo $n < k$ y veamos que se verifica para n=k.

Por la definición de demostración formal:

- Si α_k es un axioma es inmediato.
- Si α es consecuencia de aplicar (NEC) y α es equivalente a $\triangle\alpha_i$ (con $i < k$), entonces por hiptesis inductiva tenemos que $v(\alpha_i) = 1$. De lo que concluimos, por la definición de valuación, que $v(\alpha) = v(\triangle\alpha_i) = \triangle v(\alpha_i) = \triangle 1 = 1$,

- Si Supongamos que α es consecuencia de aplicar (MP) a α_i y $\alpha_i \to \alpha$ (con $i < k$), entonces por hipótesis inductiva y definición de valuación tenemos que $v(\alpha_i) = 1$ y $v(\alpha_i \to \alpha) = 1$. Luego, $v(\alpha_i \to \alpha) = v(\alpha_i) \to v(\alpha) = 1$ y por (H3), inferimos que $v(\alpha) = 1$.

$\square$

Teorema 2.7.10. (Teorema de Completitud)
Sea $\alpha \in Fm$, si $\models_{\triangle H_3} \alpha$, entonces $\vdash \alpha$

Demostración: Sea $\alpha \in Fm$ tal que α es válida, entonces para todo función $f : \mathfrak{Fm} \to \mathbb{C}_3$ existe un $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{C}_3)$ tal que $h(\alpha) = 1_{\equiv}$. En particular $h(\alpha) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm}/\equiv)$. Entonces, sea $q : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{Fm}/\equiv$ la aplicación canónica, tal que $h(\alpha) = |\alpha|$. Luego, $|\alpha| = 1_{\equiv} = \{\beta : \beta \text{ es un teorema}\}$. Por lo tanto, $\vdash \alpha$ con lo que la prueba es completa. $\square$

3. Capítulo III

3.1. Álgebras de Hilbert con ínfimo trivalentes modales

En este capítulo expondremos los resultados de [11] en donde se estudia el $\{\to, \wedge, \triangle, 1\}$-reducto de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden 3. Estos autores, denominan a dicho reducto *semiretículos implicativos modales trivalentes*, nosotros vamos a presentar una axiomática acorde a nuestros objetivos. Es decir, nos interesaremos en estudiar reductos donde aparezcan operaciones reticulares en álgebras de Hilbert.

Las álgebras de Hilbert con ínfimo fueron introducidas y estudiadas en [30], las mismas pueden ser presentadas como álgebras $\langle A, \to, \wedge, 1\rangle$ del tipo $(2, 2, 0)$, donde el reducto $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert y $\langle A, \wedge\rangle$ es un semirectículo inferior. Estos autores probaron que la clase forma una variedad. Cabe destacar que estas álgebras son una subclase de las BCK-álgebras con ínfimo estudiada en [40].

En lo que sigue nos interesaremos en las subvariedad de las álgebras Hilbert con ínfimo trivalentes, las que notaremos con iH_3-álgebra, las podemos definir como sigue:

Definición 3.1.1. *Una iH_3-álgebra es una álgebra $\langle A, \to, \wedge, 1\rangle$ del tipo $(2, 2, 0)$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) *El reducto $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert que satisface (IT3) $((x \to y) \to z) \to ((z \to x) \to z) \to z = 1$.*

(2) *Se verifican las siguientes identidades:*

(iH_1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

(iH_2) $x \wedge x = x$,

(iH_3) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$,

(iH_4) $(x \to (y \wedge z)) \to ((x \to z) \wedge (x \to y)) = 1$,

Toda álgebra de Hilbert trivalente con ínfimo permite definir el supremo de la siguente manera:

$$x \vee y \stackrel{def}{=} ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x).$$

En efecto. Sean $a, b \in A$. Llamemos $c = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)$. Como las siguientes inecuaciones $x \leq (x \to y) \to y$ y $x \leq (y \to x) \to x$ son válidas para cualquier $x \in A$, y existe el ínfimo $((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$, entonces c es una cota superior de $\{a.b\}$. Supongamos que d es otra cota superior de $\{a, b\}$ y $c \not\leq d$. Entonces existe un sistema deductivo irreducible P tal que $c \in P$ y $d \notin P$ (Corolario 1 pág. 33 [23]). Ya que $a, b \leq d$, entonces $a, b \notin P$. Como A es trivalente, por los resultados establecidos en el artículo de A. Monteiro (Théorème 4.1 de [35]), se tiene que

$$a \to b \in P$$

o

$$b \to a \in P$$

Si suponemos que $a \to b \in P$, como $c \leq (b \to a) \to a$, por Modus Ponens obtenemos que $a \in P$, lo que es imposible. Si consideramos el caso $b \to a \in P$ llegaremos también a una contradicción. Por lo tanto c debe ser el supremo de $\{a, b\}$.

Luego, toda iH_3-álgebra es un *retículo relativamente pseudo-complementado* (ver [41]), puesto que verifica $x \wedge z \leq y$ si, y solo si, $x \leq z \to y$. De esto último concluimos que cada iH_3-álgebra es un retículo distributivo ([41, Chap.I 12.1.]).

Por otro lado, en [20] se define a las álgebras de Hilbert con supremo de la siguiente manera:

Definición 3.1.2. *([20])Un álgebra Hilbert con supremo (o $H^{\vee}$-álgebra) es un álgebra $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ tal que verifica las siguientes propiedades:*

$(H^{\vee}1)$ $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ *es un álgebra de Hilbert,*

$(H^{\vee}2)$ $\langle A, \vee, 1\rangle$ *es semiretículo superior con último elemento* 1,

$(H^{\vee}3)$ A *satisface las siguientes identidades:*

(a) $x \rightarrow (x \vee y) = 1$,

(b) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow y) = 1$.

A continuación definiremos a las $iH_3^{\triangle}$-álgebras, que servirán como axiomática del $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \triangle, 1\}$-reducto de las álgebras Łukasiewicz-Moisil.

Definición 3.1.3. *Diremos que una* $iH_3^{\triangle}$*-álgebra es una álgebra* $\langle A, \rightarrow, \wedge, \triangle, 1\rangle$ *del tipo* $(2, 2, 1, 0)$ *si el reducto* $\langle A, \rightarrow, \wedge, 1\rangle$ *es una* iH_3*-álgebra y el operador* $\triangle$ *satisface las siguientes propiedades:*

(M1) $\triangle x \rightarrow x = 1$,

(M2) $((y \rightarrow \triangle y) \rightarrow (x \rightarrow \triangle\triangle x)) \rightarrow \triangle(x \rightarrow y) = \triangle x \rightarrow \triangle\triangle y$,

(M3) $(\triangle x \rightarrow \triangle y) \rightarrow \triangle x = \triangle x$.

Denotaremos la variedad de $iH_3^{\triangle}$-álgebra como $r\mathbb{H}_3^{\triangle}$.

Lema 3.1.4. *En toda* iH_3*-álgebra se satisfacen las siguientes propiedades:*

(IS1) $x \rightarrow x = y \rightarrow y$,

(IS2) $(x \rightarrow y) \wedge y = y$,

(IS3) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow z) \wedge (x \rightarrow y)$,

(IS4) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$.

Demostración: En [27] se probó que las álgebras de Hilbert con ínfimo que satisfacen (IS) $x \rightarrow (y \rightarrow (x \wedge y)) = 1$, coinciden con los semiretículos implicativos, es decir verifican (IS1) a (IS4). Por otra parte, sea A una H_3-álgebra entonces por Teorema 2.6.4 tenemos que $A \simeq S$ donde S es una subálgebra de $(\mathbb{C}_3^{\rightarrow})^X$ para algun $X \neq 0$. Ahora, si suponemos $x, y \in S$, entonces $x, y : X \rightarrow C_3^{\rightarrow}$. Es claro que, para todo $i \in X$ tenemos que $x(i) \wedge y(i) \in$

$C_3^{\rightarrow}$, luego $x(i) \rightarrow (y(i) \rightarrow (x(i) \wedge y(i))) = 1$ para todo $i \in X$. Por lo tanto, en A se verifica (IS) y entonces, A es un semiretículo implicativo. $\square$

En lo que sigue expondremos algunas propiedades útiles para el desarrollo del capítulo.

Lema 3.1.5. *En toda $iH_3^{\triangle}$-álgebra se satisfacen las siguientes propiedades:*

$iH_3^{\triangle}$ *1.* $x \leq y$ *sii* $x \rightarrow y = 1$ *sii* $x \wedge y = x$,

$iH_3^{\triangle}$ *2.* $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$,

$iH_3^{\triangle}$ *3.* $x \rightarrow (x \wedge y) = x \rightarrow y$,

$iH_3^{\triangle}$ *4.* $(x \wedge y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$,

$iH_3^{\triangle}$ *5.* $(x \rightarrow y) \rightarrow ((z \wedge x) \rightarrow (z \wedge y)) = 1$,

$iH_3^{\triangle}$ *6.* $(x \wedge y) \rightarrow x = 1$,

$iH_3^{\triangle}$ *7.* $(x \wedge y) \rightarrow y = 1$,

$iH_3^{\triangle}$ *8.* $1 \wedge x = x$,

$iH_3^{\triangle}$ *9.* $x \rightarrow (y \rightarrow (x \wedge y)) = 1$,

$iH_3^{\triangle}$ *10.* $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$, *recordemos que* $\nabla x = (x \rightarrow \triangle x) \rightarrow \triangle x$,

$iH_3^{\triangle}$ *11.* $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y$,

$iH_3^{\triangle}$ *12.* $(\nabla x \rightarrow x) \wedge \nabla x = x$,

$iH_3^{\triangle}$ *13.* $x \rightarrow (x \wedge y) = x \rightarrow y$,

Demostración:

$iH_3^{\triangle}$ 1. Inmediata del orden definido en un álgebra de Hilbert y del orden que se puede definir en un semiretículo inferior.

$iH_3^{\triangle}$ 2. Esta propiedad se puede probar usando la lógica y el teorema de la deducción. Una axiomática para las lógicas de los semiretículos implicativo puede ser dada en términos del cálculo presentado [31] agregando el axioma $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$. Basta ver que $\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma$ y $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma), \alpha\} \vdash \beta \to \gamma$.

$iH_3^{\triangle}$ 3.
(1) $x \wedge y = x \wedge (x \to y)$, [(IS4)]
(2) $x \to (x \wedge y) = x \to (x \wedge (x \to y))$, [(1)]
(3) $x \to (x \wedge y) = (x \to (x \to y)) \wedge (x \to x)$, [(2),(IS3)]
(4) $x \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge 1$, [(3),(H16),(H6)]
(5) $x \to (x \wedge y) = x \to y$. [(4),$iH_3^{\triangle}$ 1.]

$iH_3^{\triangle}$ 4.
(1) $(x \to y) \to (x \to y) = 1$, [(H6)]
(2) $(x \to y) \wedge 1 = x \to y$, [$iH_3^{\triangle}$ 1.]
(3) $(x \to y) \wedge (x \to x) = x \to y$ [(2),(H6)]
(4) $x \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge (x \to x)$, [(IS3)]
(5) $x \to (x \wedge y) = x \to y$, [(4),(3)]
(6) $(x \to (x \wedge y)) \to (x \to y) = 1$, [(5),(1)]
(7) $x \to ((x \wedge y) \to y) = 1$, [(6),(H18)]
(8) $(x \wedge y) \to (x \to y) = 1$. [(7),(H15)]

$iH_3^{\triangle}$ 5.
(1) $(z \wedge x) \to (z \wedge y) = z \to (x \to (z \wedge y))$, [$iH_3^{\triangle}$ 2.]
(2) $(z \wedge x) \to (z \wedge y) = (z \to x) \to (z \to (z \wedge y))$, [(1),(H18)]
(3) $(z \wedge x) \to (z \wedge y) = (z \to x) \to ((z \to y) \wedge (z \to z))$, [(2),(IS3)]
(4) $(z \wedge x) \to (z \wedge y) = (z \to x) \to (z \to y)$, [(3),$iH_3^{\triangle}$ 1.,(H6)]
(5) $(z \wedge x) \to (z \wedge y) = z \to (x \to y)$, [(4),(H18)]
(6) $(x \to y) \to ((z \wedge x) \to (z \wedge y)) = (x \to y) \to (z \to (x \to y))$, [(5)]
(7) $(x \to y) \to ((z \wedge x) \to (z \wedge y)) = 1$. [(6),(H1)]

$iH_3^{\triangle}$ 6.
(1) $(x \wedge y) \to x = x \to (y \to x)$, [$iH_3^{\triangle}$ 2.]
(2) $(x \wedge y) \to x = 1$. [(1),(H1)]

$iH_3^{\triangle}$ 7. (1) $(x \wedge y) \to y = x \to (y \to y),$ $[iH_3^{\triangle}$ 3.]

(2) $(x \wedge y) \to y = x \to 1,$ [(1),(H6)]

(3) $(x \wedge y) \to y = 1.$ [(2),(H9)]

$iH_3^{\triangle}$ 8. (1) $(x \to x) \wedge x = x,$ [(IS2)]

(2) $1 \wedge x = x.$ [(2),(H6)]

$iH_3^{\triangle}$ 9. (1) $x \to (y \to (x \wedge y)) = x \to ((y \to y) \wedge (y \to x)),$ [(IS3)]

(2) $x \to (y \to (x \wedge y)) = x \to (1 \wedge (y \to x)),$ [(1),(H6)]

(3) $x \to (y \to (x \wedge y)) = x \to (y \to x),$ [(2),$iH_3^{\triangle}$ 8.]

(4) $x \to (y \to (x \wedge y)) = 1.$ [(3),(H1)]

$iH_3^{\triangle}$ 10. (1) $\nabla(x \wedge y) \to (\nabla x \wedge \nabla y) = (\nabla(x \wedge y) \to \nabla y) \wedge (\nabla(x \wedge y) \to \nabla x),$ [(IS3)]

(2) $\nabla(x \wedge y) \to (\nabla x \wedge \nabla y) = \nabla((x \wedge y) \to y) \wedge \nabla((x \wedge y) \to x),$ [(1),(M30)]

(3) $\nabla(x \wedge y) \to (\nabla x \wedge \nabla y) = \nabla 1 \wedge \nabla 1,$ [(2),$iH_3^{\triangle}$ 6.,$iH_3^{\triangle}$ 7.]

(4) $\nabla(x \to x) = \nabla x \to \nabla x,$ [(M30)]

(5) $\nabla 1 = 1,$ [(4),(H6)]

(6) $\nabla(x \wedge y) \to (\nabla x \wedge \nabla y) = 1 \wedge 1,$ [(3),(5)]

(7) $\nabla(x \wedge y) \to (\nabla x \wedge \nabla y) = 1,$ [(6),(iH_2)]

(8) $(\nabla x \wedge \nabla y) \to \nabla(x \wedge y) = \nabla x \to (\nabla y \to \nabla(x \wedge y)),$ $[iH_3^{\triangle}$ 2.]

(9) $(\nabla x \wedge \nabla y) \to \nabla(x \wedge y) = \nabla(x \to (y \to (x \wedge y))),$ [(5),(M30]

(10) $(\nabla x \wedge \nabla y) \to \nabla(x \wedge y) = \nabla 1,$ [(9),$iH_3^{\triangle}$ 9.]

(11) $(\nabla x \wedge \nabla y) \to \nabla(x \wedge y) = 1,$ [(5),(10)]

(12) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y.$ [(7),(11),(H3)]

$iH_3^{\triangle}$ 11. (1) $x \wedge y \leq x,$ [(H5),$iH_3^{\triangle}$ 6.]

(2) $x \wedge y \leq y,$ [(H5),$iH_3^{\triangle}$ 7.]

(4) $\triangle(x \wedge y) \leq \triangle x,$ [(1),(M10)]

(5) $\triangle(x \wedge y) \to (\triangle x \wedge \triangle y) = (\triangle(x \wedge y) \to \triangle y) \wedge (\triangle(x \wedge y) \to \triangle x),$ [(IS3)]

(6) $\triangle(x \wedge y) \to (\triangle x \wedge \triangle y) = 1,$ [(3),(4),iH_2,(5),(H5)]

(7) $(\triangle x \wedge \triangle y) \to \triangle(x \wedge y) = \triangle x \to (\triangle y \to \triangle(x \wedge y)),$ [$iH_3^{\triangle}$ 2.]

(8) $(\triangle x \wedge \triangle y) \to \triangle(x \wedge y) = \triangle x \to \triangle(\triangle y \to (x \wedge y)),$ [(7),(M9)]

(9) $(\triangle x \wedge \triangle y) \to \triangle(x \wedge y) = \triangle x \to \triangle((\triangle y \to y) \wedge (\triangle y \to x)),$ [(8),(IS3)]

(10) $(\triangle x \wedge \triangle y) \to \triangle(x \wedge y) = \triangle x \to \triangle(\triangle y \to x),$ [(9),(M1),$iH_3^{\triangle}$ 8.]

(11) $(\triangle x \wedge \triangle y) \to \triangle(x \wedge y) = \triangle x \to (\triangle y \to \triangle x),$ [(10),(M9)]

(12) $(\triangle x \wedge \triangle y) \to \triangle(x \wedge y) = 1.$ [(11),(H1)]

(13) $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y,$ [(6),(12),(H3)]

$iH_3^{\triangle}$ 12. (1) $((\nabla x \to x) \wedge x) \to x = (\nabla x \to x) \to (\nabla x \to x),$ [$iH_3^{\triangle}$ 2.]

(2) $((\nabla x \to x) \wedge x) \to x = 1,$ [(1),(H6)]

(3) $x \to ((\nabla x \to x) \wedge x) = (x \to \nabla x) \wedge (x \to (\nabla x \to x)),$ [(IS3)]

(4) $x \to ((\nabla x \to x) \wedge x) = x \to 1,$ [(3),(M14),(H5),$iH_3^{\triangle}$ 3.]

(5) $x \to ((\nabla x \to x) \wedge x) = 1,$ [(4),(H9)]

(6) $(\nabla x \to x) \wedge x = x.$ [(5),(2),(H3)]

$iH_3^{\triangle}$ 13. (1) $x \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge (x \to x),$ [(IS3)]

(2) $x \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge 1,$ [(1),(H6)]

(3) $x \to (x \wedge y) = x \to y.$ [(2),$iH_3^{\triangle}$ 1.]

□

Lema 3.1.6. *Las siguientes propiedades son válidas en toda iH_3-álgebra:*

($H_3^{\vee}1$) *Si $x \to y = 1$, entonces $x \vee y = y$,*

($H_3^{\vee}2$) *Si $x \to z = 1$ y $y \to z = 1$, entonces $(x \vee y) \to z = 1$,*

($H_3^{\vee}3$) $\triangle(\triangle x \vee \triangle y) = \triangle x \vee \triangle y$,

($H_3^{\vee}4$) $\triangle(x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$,

($H_3^{\vee}5$) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$.

Demostración:

($H_3^{\vee}1$) Inmediato de la definición 3.1.2.

($H_3^{\vee}2$) Por hipótesis tenemos que $x \to z = 1$ y $y \to z = 1$, entonces por ($H_3^{\vee}1$) tenemos que $x \vee z = z$ y $y \vee z = z$. Luego ($H^{\vee}3$) (a), tenemos que $(x \vee y) \to ((x \vee y) \vee z) = 1$, y por ($H^{\vee}2$) y lo mencionado anteriormente tendremos que $(x \vee y) \to z = 1$

($H_3^{\vee}3$) $\triangle(\triangle x \vee \triangle y) \leq \triangle x \vee \triangle y$ resulta evidente por (M1). Por otro lado tenemos que $\triangle x \to (\triangle x \vee \triangle y) = 1$ y $\triangle y \to (\triangle x \vee \triangle y) = 1$ por ($H^{\vee}3$) (a) y ($H^{\vee}2$), luego por (M10) y (H5) $\triangle\triangle x \to \triangle(\triangle x \vee \triangle y) = 1$ y $\triangle\triangle y \to \triangle(\triangle x \vee \triangle y) = 1$, y por (M5), $\triangle x \to \triangle(\triangle x \vee \triangle y) = 1$ y $\triangle y \to \triangle(\triangle x \vee \triangle y) = 1$ de esta forma, por ($H_3^{\vee}2$) $\triangle x \vee \triangle y \leq \triangle(\triangle x \vee \triangle y)$.

($H_3^{\vee}4$) Por ($H^{\vee}3$) (a) tenemos que $x \to (x \vee y) = 1$, y por (H5) y (M10), $\triangle x \to \triangle(x \vee y) = 1$. De la misma forma llegamos a que $\triangle y \to \triangle(x \vee y) = 1$ y por ($H_3^{\vee}2$) tenemos que $(\triangle x \vee \triangle y) \to \triangle(x \vee y) = 1$. La recíproca es inmediata por tablas de verdad.

($H_3^{\vee}5$) Inmediato de $iH_3^{\triangle}10$, la definición del supremo mediante el ínfimo y (M30).

$\square$

Consideraremos a los sistemas deductivos modales definidos en el cápitulo I, y notaremos con $D_m(A)$ a los sistemas deductivos modales de la $iH_3^{\triangle}$-álgebra A y con $Con_{iH_3^{\triangle}}(A)$ al conjunto de las $iH_3^{\triangle}$-congruencias de A.

Lema 3.1.7. *Para toda $A \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$, se tiene que el conjunto ordenado $D_m(A)$ es isomorfo en el orden a $Con_{iH_3^{\triangle}}(A)$.*

Demostración: Por el Lema 2.3.2, tenemos que $D(A)$ es isomorfo a $Con(A)$. Resta ver que si D es un S.D.M de A la relación $R_D = \{(x, y) : x \to y, y \to x \in D\}$ respeta el ínfimo. Supongamos que $(x, y) \in R_D$ es decir, $x \to y, y \to x \in D$ y sea $z \in D$. Por $iH_3^{\triangle}$ 3., tenemos que $(x \to y) \to ((z \wedge x) \to (z \wedge y)) = 1$, entonces por D_1) y D_2), $(z \wedge x) \to (z \wedge y) \in D$. Análogamente podemos obtener que $(z \wedge y) \to (z \wedge x) \in D$. De esta forma $(z \wedge x, z \wedge y) \in R_D$, y por la conmutatividad de $\wedge$ podemos afirmar que $(x \wedge z, y \wedge z) \in R_D$. Por lo tanto la relación R_D respeta el ínfimo. $\square$

Teorema 3.1.8. *Sea $A \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ no trivial. Entonces, A es producto subdirecto de $iH_3^{\triangle}$-álgebras simples.*

Demostración: Por el Teorema 2.5.1 (Teorema de Representación) solo resta probar que φ respeta el ínfimo. Dados $a, b \in A : \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$. $\varphi(a \wedge b) = f_{a \wedge b}$. Además $\varphi(a) = f_a$ y $\varphi(b) = f_b$. Luego $(f_a \wedge f_b)(\alpha) = f_a(\alpha) \wedge f_b(\alpha) = q_\alpha(a) \wedge q_\alpha(b) = q_\alpha(a \wedge b) = f_{a \wedge b}(\alpha)$. □

Teorema 3.1.9. *Sea $A \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ y M un S.D.M. maximal de A. Entonces la aplicación $h : A \longrightarrow \mathbb{C}_3$ definida en el Teorema 2.6.1 es un epimorfismo de $i\mathbb{H}_3^{\triangle}$.*

Demostración: Por el Teorema 2.6.1 es suficiente con probar:

1) Si $x \in M_0$ e $y \in A$, entonces $x \wedge y \in M_0$.

2) Si $x \in M_{1/2}$ e $y \in A$, entonces $x \wedge y \in M_{1/2}$.

3) Si $x, y \in M$, entonces $x \wedge y \in M$.

En efecto,

1) Sea $x \in M_0, y \in A$, entonces $x \notin M$, $\nabla x \notin M$. Por $iH3^{\triangle}$ 3. y $x \notin M$ tenemos que $x \wedge y \notin M$, y que $(\nabla x \wedge \nabla y) \to \nabla x \in M$. Además, como $\nabla x \notin M$, $\nabla x \wedge \nabla y \notin M$, y por $iH_3^{\triangle}$ 10. $\nabla(x \wedge y) \notin M$, entoces $x \wedge y \in M_0$.

2) Sea $x \in M_{1/2}$ e $y \notin M_0$, entonces $x \notin M$ y $\nabla x, \nabla y \in M$. Por $iH_3^{\triangle}$ 6. y D_2) tenemos que $x \wedge y \notin M$. Luego por $iH_3^{\triangle}$ 9. y D_1), $\nabla x \to (\nabla y \to (\nabla x \wedge \nabla y)) \in M$. De esta forma, al tener que $\nabla x, \nabla y \in M$, por D_2), $\nabla(x \wedge y) \in M$, y como $x \wedge y \notin M$, $x \wedge y \in M_{1/2}$.

3) Inmediato por $iH_3^{\triangle}$ 9. y D_2).

□

Teorema 3.1.10. *Sea A un $iH_3^{\triangle}$-álgebra y $\{1\}$ un S.D.M. maximal, entonces $A/\{1\}$ es isomorfo a $\mathbb{C}_2^{\to,\wedge} = \langle \mathbb{C}_2, \to, \wedge, \triangle, 1 \rangle$*

Demostración: Del Teorema 2.6.2 y el Teorema 3.1.7 se puede observar que $A/\{1\}$ tiene dos elementos. Luego, tomando $C(x)$ del Teorema 2.6.2, es claro que $h(C(x) \wedge C(1)) = h(C(x \wedge 1)) = h(C(x)) = 0$. □

De los Teoremas 3.1.10 y 3.1.9, y de resultados de álgebra universal tenemos probado el siguiente

Corolario 3.1.11. *Si $A \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ es no trivial, entonces A es isomorfa a un producto subdirecto de $\mathbb{C}_3^{\to,\wedge}$.*

3.2. Cálculo estilo Hilbert para las $iH_3^{\triangle}$-álgebras

Sea $Var = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ un conjunto numerable de elementos al que denominaremos variables, y sean $\to$, $\triangle$ y $\wedge$ símbolos que llamaremos implicación, delta y conjunción respectivamente. Indicaremos con Fm_i al conjunto de las fórmulas.

En adelante denotaremos por $\mathfrak{Fm}_i = \langle Fm_i, \to, \wedge, \triangle, 1\rangle$ al álgebra absolutamente libre de tipo de similaridad $(2, 2, 1, 0)$ generada por un conjunto numerable Var. Los elementos de Var son llamados variables o fórmulas atómicas.

Definición 3.2.1. *Denotaremos con $i\mathcal{H}_3^{\triangle} = \langle \mathfrak{Fm}_i, \vdash_i\rangle$ a la lógica proposicional definida a través del siguiente cálculo de Hilbert, donde $\alpha, \beta, \gamma, ... \in Fm_i$, con las notaciones antes mencionadas.*

Axiomas

(A_i1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ [(A1)],

(A_i2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [(A2)],

(A3) $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (((\gamma \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$,

(A_i3) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

(A_i4) $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \wedge \beta)$,

(A_i5) $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$,

(A_i6) $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \beta)$,

(A_i7) $\triangle\alpha \to \alpha$,

(A_i8) $\triangle(\triangle\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$,

(A_i9) $((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))) \to \triangle(\alpha \to \beta)$,

(A_i10) $((\triangle\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\triangle\alpha \to \gamma) \to \gamma)$.

Reglas de inferencia

(R1) (MP),

(R2) $\dfrac{\vdash \alpha}{\triangle\alpha}$,

(R3) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha \to (\alpha \wedge \beta)}$.

Definición 3.2.2.

(1) Una derivación de una fórmula α en $i\mathcal{H}^3_\triangle$ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1...\alpha_n$ tales que α_n es α y todo α_i es, o bien, una instancia de un axioma o es la consecuencia de alguna regla de inferencia local ((R1), (R2) o (R3)) de $\mathcal{H}^3_\triangle$ cuyas premisas aparecen en la secuencia $\alpha_a...\alpha_{i-1}$. Diremos que α es derivable en $i\mathcal{H}^3_\triangle$, y escribiremos $\vdash_i \alpha$, si existe una derivación de ella en $i\mathcal{H}^3_\triangle$.

(2) Una derivación de una fórmula α en $i\mathcal{H}^3_\triangle$ a partir de un conjunto de premisas Γ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1...\alpha_n$ tal que α_n es α y, para todo $1 \leq i \leq n$, la fórmula α_i es obtenida como sigue:

(i) α_i es una instancia de un axioma; o

(ii) α_i pertenece a Γ; o

(iii) existe un conjunto $\{j, k_1, ..., k_m\} \subseteq \{1, ..., i-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}...\alpha_{k_m}$ es una derivación de $\alpha_j \to \alpha_i$ (de esta manera α_i es obtenida a partir de α_j y $\alpha_j \to \alpha_i$ por (R1)); o

(iv) existe un conjunto $\{k_1, ..., k_m\} \subseteq \{1, ..., i-1\}$ donde $\alpha_{k_1}...\alpha_{k_m}$ es una derivación de una premisa de una regla (R2) tal que α_i es la conclusión de esa regla (así α_i es obtenida a partir α_{k_m} por (R2)); o

(v) existe un conjunto $\{k_1, ..., k_m\} \subseteq \{1, ..., i-1\}$ donde $\alpha_{k_1}...\alpha_{k_m}$ es una derivación de una premisa de una regla (R3) tal que α_i es la conclusión de esa regla (así α_i es obtenida a partir α_{k_m} por (R3)).

Notaremos $\alpha \equiv_i \beta$ si, y sólo si, $\vdash_i \alpha \to \beta$ y $\vdash_i \beta \to \alpha$.

Lema 3.2.3. *Las siguientes fórmulas son teoremas de $i\mathcal{H}^3_\triangle$.*

(M_i1) $\vdash_i \alpha \to \alpha$,

(M_i2) $\{\gamma\} \vdash_i \alpha \to \gamma$,

(M_i3) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash_i (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$,

(M_i4) $\vdash_i (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$,

(M_i5) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash_i \beta \to (\alpha \to \gamma)$,

(M_i6) $\{\alpha \to \beta\} \vdash_i (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$,

(M_i7) $\{\alpha \to \beta\} \vdash_i (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$,

(P4) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash_i \alpha \to \gamma$,

(M_i8) $\{\alpha \equiv_i \beta, \theta \equiv_i \eta\} \vdash_i (\alpha \to \theta) \equiv_i (\beta \to \eta)$,

$(R6)_i$ $\{\alpha \to \beta\} \vdash_i \{(\gamma \wedge \alpha) \to (\gamma \wedge \beta)\}$,

$(R10)_i$ $\{\alpha \to \beta, \theta \to \eta\} \vdash_i \{(\alpha \wedge \theta) \to (\beta \wedge \eta)\}$,

(M_i9) $\{\alpha \equiv_i \beta, \theta \equiv_i \eta\} \vdash_i (\alpha \wedge \theta) \equiv_i (\beta \wedge \eta)$,

(M_i10) $\vdash_i (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$,

(M_i11) $\vdash_i ((\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$,

(M_i12) $\vdash_i ((\alpha \to \beta) \wedge \beta) \equiv_i \beta$,

(M_i13) $\vdash_i (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \equiv_i \alpha \wedge \beta$,

$(R11)_i$ $\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash_i \{\alpha \to (\beta \wedge \gamma)\}$,

(M_i14) $\vdash_i (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$,

(M_i15) $\vdash_i \triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$,

(M_i16) $\vdash_i \triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha$,

(M_i17) $\vdash_i (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$,

(M_i18) $\vdash_i (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta)) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta)$,

(M_i19) $\{\alpha \to \beta\} \vdash_i \triangle\alpha \to \triangle\beta$,

(M_i20) $\{\alpha \equiv_i \beta\} \vdash_i \triangle\alpha \equiv_i \triangle\beta$,

(M_i21) $\vdash_i (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta) \to (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta))$,

(M_i22) $\vdash_i (((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle\triangle\alpha)) \to \triangle(\alpha \to \beta) \equiv_i \triangle\alpha \to \triangle\triangle\beta$,

Demostración:

(M_i1) Inmediato de (P1).

(M_i2) Inmediato de (P2).

(M_i3) Inmediato de (P3).

(M_i4) Inmediato de (P5) y el Teorema 2.7.8.

(M_i5) Inmediato de (P5).

(M_i6) Inmediato de (P7).

(M_i7) Inmediato de (P6).

(P4)
(1) $\vdash_i \alpha \to \beta$ [Hip.]
(2) $\vdash_i \beta \to \gamma$ [Hip.]
(3) $\vdash_i (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [(A2)]
(4) $\vdash_i \alpha \to (\beta \to \gamma)$ [(P2),(2)]
(5) $\vdash_i (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ [(3),(4),(MP)]
(6) $\vdash_i \alpha \to \gamma$ [(1),(4),(MP)]

(M_i8)
(1) $\alpha \equiv_i \beta$, [Hip.]

(2) $\theta \equiv_i \eta$, [Hip.]

(3) $\vdash_i \alpha \to \beta$, [(1)]

(4) $\vdash_i \beta \to \alpha$, [(1)]

(5) $\vdash_i \theta \to \eta$, [(2)]

(6) $\vdash_i \eta \to \theta$, [(2)]

(7) $\vdash_i (\alpha \to \theta) \to (\beta \to \theta)$, [(4),($M_i$6)]

(8) $\vdash_i (\beta \to \theta) \to (\beta \to \eta)$, [(5),($M_i$7)]

(9) $\vdash_i (\alpha \to \theta) \to (\beta \to \eta)$, [(7),(8),(P4)]

(10) $\vdash_i (\beta \to \eta) \to (\alpha \to \eta)$, [(3),($M_i$6)]

(11) $\vdash_i (\alpha \to \eta) \to (\alpha \to \theta)$, [(6),($M_i$7)]

(12) $\vdash_i (\beta \to \eta) \to (\alpha \to \theta)$, [(10),(11),(P4)]

(13) $(\alpha \to \theta) \equiv_i (\beta \to \eta)$. [(9),(12)]

$(R6)_i$ $\{\alpha \to \beta\} \vdash_i \{(\gamma \wedge \alpha) \to (\gamma \wedge \beta)\}$,

(1) $\vdash_i \alpha \to \beta$, [Hip.]

(2) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha)((\gamma \wedge \alpha) \to \beta)) \to ((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta)$, [($A_i$4)]

(3) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta))$, [($A_i$1)]

(4) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \to \alpha) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta)$, [(1),($M_i$7)]

(5) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta))$, [(3),(4),(P4)]

(6) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \to \alpha$, [($A_i$3)]

(7) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \to \beta$, [(6),(5),(1),(MP)]

(8) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta)$, [(7),($M_i$2)]

(9) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \to (((\gamma \wedge \alpha) \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta)) \to ((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta))$, [(2),($M_i$2)]

(10) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta))) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to ((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta))$, [(9),($M_i$3)]

(11) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \to ((\gamma \wedge \alpha) \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \to \beta))$, [(8),(R3)]

(12) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \to ((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta)$, [(7),(R3)]

(13) $\vdash_i (\alpha \wedge (\gamma \wedge \beta)) \rightarrow (\gamma \wedge \beta)$, [$(A_i3)$]

(14) $\vdash_i ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge (\gamma \wedge \beta))$, [$(A_i5)$]

(15) $\vdash_i ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha) \rightarrow (\gamma \wedge \beta)$, [(13),(14),(P4)]

(16) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \rightarrow (((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$, [(15),$(M_i2)$]

(17) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \rightarrow ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha)) \rightarrow ((\gamma \wedge \alpha) \rightarrow (\gamma \wedge \beta))$, [(16),$(M_i3)$]

(18) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta) \rightarrow ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha)$, [$(A_i6)$]

(19) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \rightarrow (((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta) \rightarrow ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha))$, [(18),$(M_i2)$]

(20) $\vdash_i ((\gamma \wedge \alpha) \rightarrow ((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta)) \rightarrow ((\gamma \wedge \beta \wedge \alpha) \rightarrow ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha))$, [(19),$(M_i3)$]

(21) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \rightarrow ((\gamma \wedge \beta) \wedge \alpha)$, [(20),(12),(MP)]

(22) $\vdash_i (\gamma \wedge \alpha) \rightarrow (\gamma \wedge \beta)$. [(21),(15),(MP)]

$(R10)_i$ $\{\alpha \rightarrow \beta, \theta \rightarrow \eta\} \vdash_i \{(\alpha \wedge \theta) \rightarrow (\beta \wedge \eta)\}$,

(1) $\alpha \rightarrow \beta$, [Hip.]

(2) $\theta \rightarrow \eta$, [Hip.]

(3) $(\alpha \wedge \theta) \rightarrow (\alpha \wedge \eta)$, [(2),$(R6)_i$]

(4) $(\eta \wedge \alpha) \rightarrow (\eta \wedge \beta)$, [(1),$(R6)_i$]

(5) $(\alpha \wedge \eta) \rightarrow (\eta \wedge \alpha)$, [$(A_i5)$]

(6) $(\eta \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \eta)$, [$(A_i5)$]

(7) $(\alpha \wedge \eta) \rightarrow (\eta \wedge \beta)$, [(5),(4),(P4)]

(8) $(\alpha \wedge \eta) \rightarrow (\beta \wedge \eta)$, [(7),(6),(P4)]

(9) $(\alpha \wedge \theta) \rightarrow (\beta \wedge \eta)$, [(3),(8),(P4)]

(M_i9) Inmediato de $(R10)_i$.

(M_i10) (1) $\vdash_i \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, [$(A_i1)$]

(2) $\vdash_i ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$, [(1),$(M_i6)$]

(3) $\vdash_i (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$, [$(A_i1)$]

(4) $\vdash_i (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$. [(2),(3),(P4)]

(M_i11) Inmediato de (P4) y el Teorema 2.7.8 (Teorema de la Deducción).

(M_i12) (1) $\vdash_i ((\alpha \to \beta) \wedge \beta) \to \beta,$ $[(A_i3)]$

(2) $\vdash_i \beta \to (\alpha \to \beta),$ $[(A_i1)]$

(3) $\vdash_i (\beta \wedge \beta) \to ((\alpha \to \beta) \wedge \beta),$ $[(R6)_i,(2)]$

(4) $\vdash_i \beta \to (\beta \wedge \beta),$ $[(M_i1),(\mathrm{R3})]$

(5) $\vdash_i \beta \to ((\alpha \to \beta) \wedge \beta),$ [(4),(3),(P4)]

(6) $((\alpha \to \beta) \wedge \beta) \equiv_i \beta,$ [(1),(6)]

(M_i13) (1) $\vdash_i (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \wedge \beta),$ $[(A_i4)]$

(2) $\vdash_i \beta \to (\alpha \to \beta),$ $[(A_i1)]$

(3) $\vdash_i (\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)),$ $[(R6)_i,(2)]$

(4) $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \equiv_i (\alpha \wedge \beta).$ [(1),(3)]

$(R11)_i$ (1) $\vdash_i \alpha \to \beta,$ [Hip.]

(2) $\vdash_i \alpha \to \gamma,$ [Hip.]

(3) $\vdash_i (\alpha \wedge \alpha) \to (\beta \wedge \gamma),$ $[(1),(2),(R10)_i]$

(4) $\vdash_i \alpha \to (\alpha \wedge \alpha),$ $[(M_i1),(\mathrm{R3})]$

(5) $\vdash_i \alpha \to (\beta \wedge \gamma),$ [(4),(3),(P4)]

(M_i14) (1) $\vdash_i (\gamma \wedge \beta) \to \beta,$ $[(A_i3)]$

(2) $\vdash_i (\beta \wedge \gamma) \to (\gamma \wedge \beta),$ $[(A_i5)]$

(3) $\vdash_i (\beta \wedge \gamma) \to \beta,$ [(2),(1),(P4)]

(4) $\vdash_i (\beta \wedge \gamma) \to \gamma,$ $[(A_i3)]$

(5) $\vdash_i (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to (\alpha \to \beta),$ $[(3),(M_i7)]$

(6) $\vdash_i (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to (\alpha \to \gamma),$ $[(4),(M_i7)]$

(7) $\vdash_i (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)),$ $[(5),(6),(R11)_i]$

(M_i15) (1) $\vdash_i \triangle\alpha \to \alpha,$ $[(A_i7)]$

(2) $(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta),$ $[(1),(M_i6)]$

(3) $\triangle(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta))$, [(2), (M_i2)]

(4) $(\triangle(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta))$, [(3), (M_i3)]

(5) $\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta)$, [(4), (A_i7), (MP)]

(6) $\triangle(\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta))$, [(5), $(R2)$]

(7) $\triangle(\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \beta)) \to (\triangle(\alpha \to \beta) \to \triangle(\triangle\alpha \to \beta))$, [$(A_i8)$]

(8) $\triangle(\alpha \to \beta) \to \triangle(\triangle\alpha \to \beta)$, [(7), (6), (MP)]

(9) $\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle(\triangle\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$, [$(A_i8)$, (M_i2)]

(10) $(\triangle(\alpha \to \beta) \to \triangle(\triangle\alpha \to \beta)) \to (\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta))$, [(9), (M_i3)]

(11) $\triangle(\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta$. [(10), (8), (MP)]

(M_i16) (1) $\triangle(\triangle\alpha \to \triangle\beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha)$, [$(A_i8)$]

(2) $\triangle\alpha \to \triangle\alpha$, [$(M_i1)$]

(3) $\triangle(\triangle\alpha \to \triangle\alpha)$, [(2), $(R2)$]

(4) $\triangle\alpha \to \triangle\triangle\alpha$. [(3), (1), (MP)]

(M_i17) Inmediato de (P12).

(M_i18) Inmediato de (P13).

(M_i19) Inmediato de (P14).

(M_i20) Inmediato de (M_i19).

(M_i21) Inmediato de (P15).

(M_i22) Inmediato de (M_i18) y (M_i21).

□

Lema 3.2.4. $\equiv_i$ *es una congruencia sobre* $i\mathcal{H}^3_\triangle$.

Demostración: Del Lema 2.7.4 tenemos que $\equiv_i$ es una Relación de Equivalencia y es compatible con las operaciones $\to$ y $\triangle$. Luego, por (M_i9), tenemos que $\equiv_i$ es compatible con $\wedge$. □

Teorema 3.2.5. *El álgebra de Lindenbaum* $\mathfrak{Fm}_i/\equiv_i$ *de* $iH_3^{\triangle}$ *es un álgebra trivalente modal con ínfimo definiendo* $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta|$, $|\alpha| \wedge |\beta| = |\alpha \wedge \beta|$ *y* $|1| = 1_{\equiv_i}$, *con* $1 \equiv_i \alpha \to \alpha$ *y donde* $|\delta|$ *denota la clase de equivalencia de la fórmula* δ. *Más aún,* $|\alpha| \to |\beta| = 1_{\equiv_i}$ *si, y sólo si,* $\vdash_i \alpha \to \beta$

Demostración: Por el Teorema 2.7.5 y el Lema 3.2.3 tenemos que $\mathfrak{Fm}_i/\equiv_i$ está bien definida y es un álgebra trivalente modal. Luego $\mathfrak{Fm}_i/\equiv_i$ es in $iH_3^{\triangle}$-álgebra, ya que las identidades de la Definición 3.2.2 inciso (2) son consecuencia de los Axiomas, las Reglas de Inferencia y el Lema 3.2.3. En efecto:

(iH_1) Inmedito de (A_i6).

(iH_2) $\alpha \wedge \alpha \equiv_i \alpha$

i) $\vdash_i (\alpha \wedge \alpha) \to \alpha$ es inmediato de (A_i3).

ii) $\vdash_i \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$ es inmediato de (R3) y (A_i1).

(iH_3) Inmediato de (M_i13).

(iH_4) Inmediato de (M_i14).

□

Definición 3.2.6. *Una valuación* v *es una función* $v_i : \mathfrak{Fm}_{\mathfrak{i}} \to \mathbb{C}_3$ *que satisface lo siguiente:*

- $v_i(\alpha \to \beta) = v_i(\alpha) \to v_i(\beta)$,
- $v_i(\alpha \wedge \beta) = v_i(\alpha) \wedge v_i(\beta)$
- $v_i(\triangle\alpha) = \triangle v_i(\alpha)$,
- $v_i(1_{\equiv_i}) = 1$.

Diremos que α *es semánticamente válido, y lo notaremos* $\vDash_{i\mathcal{H}_{\triangle}^3}$, *si para toda valuación* v_i, $v_i(\alpha) = 1$.

Teorema 3.2.7. (Teorema de Correctitud) *Sea* $\alpha \in Fm_i$ *tal que* $\vdash_i \alpha$, *entonces* $\vDash_{i\mathcal{H}_{\triangle}^3} \alpha$.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathfrak{Fm}_i$ tal que $\vdash_i \alpha$, entonces existe una demostración formal $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de α. Realizaremos la demostración por inducción sobre n.
Por el Teorema 2.7.9 (Teorema de Correctitud), solo resta analizar el hecho de que α sea consecuencia de aplicar (R3) a $\alpha_i \to \alpha_j$. En este caso tendremos que α es equivalente a $\alpha_i \to (\alpha_i \wedge \alpha_j)$. Por la hipótesis inductiva y la definición de valuación tenemos que $v_i(\alpha_i \to \alpha_j) = 1$, es decir $v_i(\alpha_i) \to v_i(\alpha_j) = 1$, luego por (R3) tenemos que $v_i(\alpha_i) \to (v_i(\alpha_i) \wedge v_i(\alpha_j)) = 1$, o equivalentemente $v_i(\alpha_i \to (\alpha_i \wedge \alpha_j)) = 1$, por lo tanto $v_i(\alpha) = 1$.
□

Teorema 3.2.8. (Teorema de Completitud) *Sea $\alpha \in Fm_i$ tal que $\vDash_{i\mathcal{H}^3_\triangle} \alpha$, entonces $\vdash_i \alpha$.*

Demostración: La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 2.7.10.

□

Por los Teoremas de Completitud y Correctitud, y el hecho de que a toda iH_3-álgebra se le puede definir un supremo, podemos considerar una nueva conectiva para $i\mathcal{H}^3_\triangle$ de las siguiente manera:

$$\alpha \vee \beta \stackrel{def}{=} ((\alpha \to \beta) \to \beta) \wedge ((\beta \to \alpha) \to \alpha)),$$

en consecuencia tenemos los siguientes nuevos teoremas:

Lema 3.2.9. *Las siguientes fórmulas son teoremas de $i\mathcal{H}^3_\triangle$.*

(M_i23) $\vdash_i \alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(M_i24) $\vdash_i \beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(M_i25) $\vdash_i (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

Demostración: (M_i23) (M_i24): Inmediato de los Teoremas 3.2.7 3.2.8, ($H^\vee$3) (a) y ($H^\vee$2).

(M_i25) Es suficiente ver $\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma\} \vdash_i (\alpha \vee \beta) \to \gamma$, lo que se sigue ($H_3^\vee$2) y los Teoremas de Correctitud y Completitud.

□

Lema 3.2.10. *Las siguientes fórmulas son teoremas de $i\mathcal{H}^3_\triangle$*

(P_i1) $\vdash_i \{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)\}$

(P_i2) $\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash_i \{(\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma)\}$

(P_i3) $\{\alpha \rightarrow \beta, \theta \rightarrow \eta\} \vdash_i \{(\alpha \vee \theta) \rightarrow (\beta \vee \eta)\}$

Demostración:

(P_i1) (1) $\vdash_i (\alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)) \rightarrow ((\beta \rightarrow (\beta \vee \alpha)) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)))$ [(M_i25)]

(2) $\vdash_i \alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$ [(M_i24)]

(3) $\vdash_i \beta \rightarrow (\beta \vee \alpha)$ [(M_i23)]

(4) $\vdash_i (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$ [(2),(3),(1),(MP)]

(P_i2) (1) $\vdash_i \alpha \rightarrow \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash_i \beta \rightarrow (\beta \vee \gamma)$ [(M_i23)]

(3) $\vdash_i (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\gamma \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma)))$ [(M_i25)]

(4) $\vdash_i \alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$ [(1),(2),$(P4)$]

(5) $\vdash_i (\gamma \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ [(4),(3),(MP)]

(6) $\vdash_i \gamma \rightarrow (\beta \vee \gamma)$ [(M_i24)]

(7) $\vdash_i (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \gamma)$ [(6),(5),(MP)]

(P_i3) (1) $\vdash_i \alpha \rightarrow \beta$ [Hip.]

(2) $\vdash_i \theta \rightarrow \eta$ [Hip.]

(3) $\vdash_i (\alpha \vee \eta) \rightarrow (\beta \vee \eta)$ [(1),(P_i2)]

(4) $\vdash_i (\theta \vee \alpha) \rightarrow (\eta \vee \alpha)$ [(2),(P_i2)]

(5) $\vdash_i (\alpha \vee \theta) \rightarrow (\theta \vee \alpha)$ [(P_i1)]

(6) $\vdash_i (\eta \vee \alpha) \rightarrow (\alpha \vee \eta)$ [(P_i1)]

(7) $\vdash_i (\alpha \vee \theta) \rightarrow (\eta \vee \alpha)$ [(5),(4),$(P4)$]

(8) $\vdash_i (\alpha \vee \theta) \rightarrow (\alpha \vee \eta)$ [(7),(6),$(P4)$]

(9) $\vdash_i (\alpha \vee \theta) \rightarrow (\beta \vee \eta)$ [(8),(3),$(P4)$]

$\square$

Lema 3.2.11. *$\equiv_i$ es compatible con $\vee$.*

Demostración: Inmediato por (P_i3). $\square$

Teorema 3.2.12. *El álgebra de Lindenbaum $\mathfrak{Fm}/\equiv_i$ de $iH_3^{\triangle}$ es un álgebra de Hilbert con supremo, definiendo $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta|$, $|\alpha| \vee |\beta| = |\alpha \vee \beta|$ y $|1| = 1_{\equiv_\vee}$, con $1_{\equiv_\vee} = \alpha \to \alpha$ y donde $|\delta|$ denota la clase de equivalencia de la fórmula δ. Más aún, $|\alpha| \to |\beta| = 1_{\equiv_\vee}$ si, y sólo si, $\vdash_{\equiv} \alpha \to \beta$.*

Luego, $i\mathcal{H}_3^{\triangle}$ corresponde al fragmento intuicionista $\{\to, \vee, \wedge, \triangle, 1\}$ de la lógica de las álgebras de Łukasiewicz de orden 3.

3.3. $iH_3^{\triangle}$-álgebras con primer elemento

Definición 3.3.1. *Un álgebra $\langle A, \wedge, \to, \triangle, 0, 1\rangle$ es un $iH_3^{\triangle}$-álgebras con primer elemento si verifica:*

(PE_1) $0 \to x = 1$

Denotaremos con $i\mathbb{H}_3^{\triangle,0}$ a las $iH_3^{\triangle}$-álgebras con primer elemento.

Es fácil ver que (PE_1) es equivalente a:

(PE_2) $0 \wedge x = 0.$

Es bien sabido que cualquier álgebra de Łukasiewicz trivalente es producto subdirecto de álgebras de Łukasiewicz simples. Más aún, un álgebra de Łukasiewicz no trivial S es simple si, y sólo si, es isomorfa a una subálgebra no trivial de $\mathbb{C}_3^L = \langle \mathbb{C}_3, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1\rangle$, donde $\sim$ y ∇ están definidas por la siguiente tabla:

x	$\sim x$	∇x
0	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	1

A partir de los resultados anteriores se deducen las siguiente observaciones:

Observación 3.3.2.

1) *Sea* $\mathbb{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1\rangle$ *un álgebra de Łukasiewicz trivalente, si notamos* $0 =\sim 1$, *y para todo* $x, y \in A, \triangle x =\sim \nabla \sim x, x \to y = \triangle \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$*, entonces* $S(\mathbb{A}) = \langle A, \wedge, \to, \triangle, 1, 0\rangle \in i\mathbb{H}_3^{\triangle,0}$*, y se verifica que* $\nabla x = (x \to \triangle x) \to x, x \vee y =\sim (\sim x \wedge \sim y)$.

2) *Sea* $B = \langle A\wedge, \to, \triangle, 1, 0\rangle \in i\mathbb{H}_3^{\triangle,0}$*. Definimos sobre* A *las operaciones* ∇,$\sim$ *y* $\vee$ *mediante las fórmulas:* $\nabla x = (x \to \triangle x) \to x$, $\sim x = (\nabla x \to x) \to (\triangle x \to 0)$, $x \vee y =\sim (\sim x \wedge \sim y)$*. Entonces* $Ł(B) = \langle A, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1\rangle$ *es un álgebra de Łukasiewicz trivalente donde* $0 =\sim 1$, $\triangle x =\sim \nabla \sim x$, $x \to y = \triangle \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$.

Es claro que $S(\mathbb{C}_3^L) = C_3^S$ y $Ł(\mathbb{C}_3^S) = C_3^L$.

3.4. $iH_3^{\triangle}$-álgebras con un conjunto finito de generadores

Sea $A \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ y $X \subseteq A$. Denotaremos con $\langle X\rangle$ a la $iH_3^{\triangle}$-subálgebra generada por X.

Definición 3.4.1. *Diremos que* $L \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ *tiene un conjunto* G *de generadores libres si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $\langle G\rangle = L$,

(ii) Si $A \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ *y* $f : G \longrightarrow A$ *es una aplicación que que puede ser extendida a un* $i\mathbb{H}_3^{\triangle}$*-homomorfismo tal que* $f(G) = h(g)$ *para todo* $g \in G$.

Si G es un conjunto de generadores libres de $L \in i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ y $|G| = c$ escribiremos que $L = L(c)$. Como tenemos que $i\mathbb{H}_3^{\triangle}$ tiene una definición ecuacional, entonces $L(c)$ está en la variedad. El homomorfismo de la definicón 3.4.1, inciso (ii), es único.

Sea $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ es un conjunto de generadores libres de $L(c)$. Por lo tanto:

Lema 3.4.2. $\alpha = g_1 \wedge g_2 \wedge ... \wedge g_n$ *es el primer elemento de* $L(n)$.

Demostración: Sea $S = \{x \in L(n) : \alpha \leq x\}$, entonces

(1) $G \subseteq S$,

(2) S es una subálgebra de $L(n)$. En efecto:

(a) $1 \in S$.

(b) Si $x \in S$ entonces $\alpha \leq x$ y, por (M10), $iH_3^{\triangle}$ y (M5) $\alpha \leq \triangle\alpha$, entonces $\triangle x \in S$.

(c) Si $x, y \in S$, entonces $1 = (\alpha \to x) \wedge (\alpha \to y)$, y por (IS3), $1 = \alpha \to (x \wedge y)$, por lo tanto $x \wedge y \in S$.

(d) Si $x, y \in S$, $1 = 1 \to 1 = (\alpha \to x) \to (\alpha \to y)$, y por (H18) $1 = \alpha \to (x \to y)$, entonces $x \to y \in S$.

De (1) y (2) $S = L(n)$, y $L(n)$ tiene a α como primer elemento. $\square$

Teorema 3.4.3. *$L(n)$ es finito.*

Demostración: Por el Teorema 2.5.1 tenemos que existe un $i\mathbb{H}_3^{\triangle}$-monomorfismo $\phi : L(n) \longrightarrow \prod\limits_{M \in \mathcal{E}_d(L(n))} L(n)/M$. Como $L(n)/M$ es finito para todo $M \in \mathcal{E}_d(L(n))$, para probar que $L(n)$ es finito es suficiente con probar que $\mathcal{E}_d(L(n)$ es un conjunto finito. Sea $Hom(L(n), \mathbb{C}_3^S)$ el conjunto de todos los $i\mathbb{H}_3^{\triangle}$-homomorfismos de $L(n)$ en $\mathbb{C}_3^S$, entonces $h \longrightarrow Nuc(h)$ es una aplicaciónde $L(n)$ sobre $\mathcal{E}_d(L(n))$. Por otro lado, sea $\mathbb{C}_3^G$ el conjunto de las aplicaciones de G sobre $\mathbb{C}$. Entonces $h \longrightarrow h/G$ es una biyección entre $Hom(L(n), \mathbb{C}^S)$ y $\mathbb{C}^G$. Mas aún $\mathcal{E}_d(L(n))$ es finito y $|\mathcal{E}_d(L(n))| \leq 3^n$. $\square$

3.5. Cálculo de $|L(n)|$

Como $L(n)$ es finito, el primer elemento $\alpha = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \triangle g_i$, entonces $L(n) \in i\mathbb{H}_3^{\triangle,0}$ y el álgebra 3-valuada de Łukasiewicz Ł$(L(n))$ es finita. Más aún Ł$(L(n)) \simeq \prod\limits_{M \in \mathcal{E}_d(L(n))}$ Ł$(L(n))/M$. Es por ello que obtenemos:

(1) $\prod\limits_{M \in L(n)} L(n)/M$, siendo $L(n)/M \simeq S$, donde S es una subálgebra no trivial de $\mathbb{C}_3$. Sea $\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{E}_d(L(n)) : |L(n)/M| = 2\}$, y $\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{E}(L(n)) : |L(n)/M| = 3\}$. Es por ello que:

(2) $L(n) \simeq \mathbb{C}_2^{\mathcal{E}_2} \times \mathbb{C}_3^{\mathcal{E}_3}$. Sea $\mathbb{B}_2 = \{f \in \mathbb{C}_3^G : \langle f(G) \rangle = \mathbb{C}_2\}$ y $\mathbb{B}_3 = \{f \in \mathbb{C}_3^G : \langle f(G) \rangle = \mathbb{C}_3\}$. Es claro que:

(3) $|\mathcal{E}_2| = |\mathbb{B}_2|$,

(4) $|\mathcal{E}_3| = |\mathbb{B}_3|$.
Por otro lado, $f \in \mathbb{B}_2$ si, y sólo si, $f(G) \subseteq \{0,1\}$ y existe $g \in G$ tal que $f(G) = 0$, entonces

(5) $|\mathbb{B}_2| = 2^n - 1$. Más aún $f \in \mathbb{B}_3$ si, y sólo si, $f(G) \subseteq \{0,1\}$ y existe $g \in G$ tal que $f(G) = 1/2$, más aún

(6) $|\mathbb{B}_3| = 3^n - 2^n$.

De (2) - (6) tenemos que $|L(n)| = 2^{2^n-1} \cdot 3^{3^n-2^n}$.

Observemos que $|L(n)|$ no coincide con el el cardinal del álgebra de Lukasiewicz trivalentes libre sobre un conjunto de n generadores (ver [36, pag. 95]).

Por otra parte, si tomamos el conjunto Var con n variables, entonces $|\mathfrak{Fm}_i| = 2^{2^n-1} \cdot 3^{3^n-2^n}$ y esta es precisamente la relación del trabajo algebraico con un cálculo propocional.

4. Capítulo IV

4.1. Álgebras de Hilbert con supremo trivalentes modales

En este capítulo introduciremos y estudiaremos el $\{\to, \vee, \triangle, 1\}$-reducto de las álgebras de Łukasiewicz de orden 3. Primeramente, presentaremos un cálculo proposicional el cual se probará ser correcto y completo con respecto a la clase de álgebras introducidas, por medio de los métodos Lindenbaum-Tarski. Posteriormente, se introducirá la lógica de primer orden, para lo cual se presentaran nociones adecuadas de la teoría de modelos, con el objeto de probar teoremas de completitud y compacidad. Las técnicas usadas son debidas a Henkin, en nuestro caso para lenguajes de cardinalidad numerable.

Definición 4.1.1. *Diremos que $\langle A, \to, \vee, \triangle, 1\rangle$ es una álgebra de Hilbert con supremo trivalente ($H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra) si se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *el reducto $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert con supremo,*

(2) *el reducto $\langle A, \to, \triangle, 1\rangle$ es una $\triangle H_3$-álgebra.*

A continuación presentaremos una lista de propiedades que serán de utilidad en el resto de la sección.

Teorema 4.1.2. *Las siguientes propiedades se verifican en toda $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra:*

($H_3^{\vee,\triangle}$*1)* *si $a \to b = 1$ entonces $a \vee b = b$,*

($H_3^{\vee,\triangle}$2) si $a \to c = 1$ y $b \to c = 1$ entonces $(a \vee b) \to c = 1$,

($H_3^{\vee,\triangle}$3) $a \to (a \vee b) = 1$,

($H_3^{\vee,\triangle}$4) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c)) = 1$,

($H_3^{\vee,\triangle}$5) $\triangle(a \vee b) = \triangle a \vee \triangle b$,

($H_3^{\vee,\triangle}$6) $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$.

Demostración: (1),(2) y (4) a (6): La demostración es análoga a la probada en el Lema 3.1.6 y (M_i25).

(3): Inmediato por propiedades del implicación y el orden. □

En lo que sigue utilizaremos la noción de sistema deductivo modal (S.D.M.) introducida en el capítulo I. Luego, tenemos el siguiente

Lema 4.1.3. *Dada una $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra A. Entonces, existe un isomorfismo de orden entre el conjunto ordenado de los S.D.M. y el retículo de las congruencias.*

Demostración: Lema 2.3.2, solo debemos probar que la relación $R_D = \{(x,y) : x \to y, y \to x \in D\}$ respeta el supremo. En efecto, sean $(x,y),(a,b) \in R_D$, entonces $x \to y, y \to x, a \to b, b \to a \in D$ (1). Teniendo en cuenta ($H_3^{\vee,\triangle}$5) obtenemos que $(x \to (y \vee b)) \to (((a \to (y \vee b)) \to ((x \vee a) \to (y \vee b))) = 1$ (2). De esto último y ($H_3^{\vee,\triangle}$3), podemos inferir que $y \to (y \vee b) = 1 \in D$ y $b \to (y \vee b) = 1 \in D$. Luego por (H2), (H9), (1) y modus ponens, tenemos que $x \to (y \vee b), a \to (y \vee b) \in D$ y por lo tanto, a partir de (2) se verifica $(x \vee a) \to (y \vee b) \in D$. De forma análoga podemos ver que $(a \vee x) \to (b \vee y) \in D$, por lo tanto $(x \vee a, y \vee b) \in R_D$, lo que completa la prueba. □

Teorema 4.1.4. *La variedad de las $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebras es semisimple.*

Demostración: Por el Teorema 2.5.1 (Teorema de Representación) solo resta probar que φ respeta el supremo, lo que es inmediato del Lema 4.1.3. □

Teorema 4.1.5. *Sea M un S.D.M. maximal no-trivial del $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra A y consideremos el conjunto $M_0 = \{x \in A : \nabla x \notin M\}$ y $M_{1/2} = \{x \in A : x \notin M, \nabla x \in M\}$. La aplicación $h : A \longrightarrow \mathbb{C}_3$ definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in M_0 \\ 1/2 & si\ x \in M_{1/2} \\ 1 & si\ x \in M \end{cases}$$

es un $H_3^{\vee,\triangle}$-epimorfismo tal que $h^{-1}(1) = M$.

Demostración: Por el Teorema 2.6.1 solo debemos probar lo siguiente:

(1) Si $x \in M$, $y \in A$ entonces $x \vee y \in M$.
Por ($H_3^{\vee,\triangle}3$) $x \to (x \vee y) = 1$. Luego por D_1) y D_2), tenemos que $x \vee y \in M$.

(2) Si $x \in A$, $y \in M$ entonces $x \vee y \in M$.
Análogo a (1).

(3) Si $x, y \in M_0$ entonces $x \vee y \in M_0$.
Veamos que $\nabla(x \vee y) \notin M$. Supongamos que $\nabla(x \vee y) \in M$, entonces ($H_3^{\vee,\triangle}6$) $\nabla x \vee \nabla y \in M$. Luego por ($H_3^{\vee,\triangle}4$) $(\nabla x \to \nabla x) \to ((\nabla y \to \nabla x) \to ((\nabla x \vee \nabla y) \to \nabla x)) = 1$. Entonces, por D_1), D_2) y (H6) $(\nabla y \to \nabla x) \to ((\nabla x \to \nabla y) \to \nabla x) \in M$. Como $\nabla x \notin M$, por el Lema 2.4.14 $\triangle \nabla y \to \nabla x \in M$, de esta forma, por (M15), $\nabla y \to \nabla x \in M$ entonces por D_2) $(\nabla x \vee \nabla y) \to \nabla x \in M$. Luego, por modus ponens tenemos que $\nabla x \in M$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\nabla(x \vee y) \notin M$.

(4) Si $x \in M_0$, $y \in M_{1/2}$ entonces $x \vee y \in M_{1/2}$.
En efecto, por ($H_3^{\vee,\triangle}3$) tenemos que $\nabla y \to (\nabla x \vee \nabla y) = 1$. Luego, como $\nabla y \in M$ inferimos que $\nabla x \vee \nabla y \in M$. Resta ver que $x \vee y \notin M$. Supongamos lo contrario. Por otro lado, por ($H_3^{\vee,\triangle}4$) podemos escribir que $(x \to y) \to ((y \to y) \to ((x \vee y) \to y)) = 1$. Luego, por el Teorema 2.6.1 (2) obtenemos que $x \to y \in M$, entonces $y \in M$ lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $x \vee y \in M_{1/2}$.

(5) Si $x \in M_{1/2}$, $y \in M_0$ entonces $x \vee y \in M_{1/2}$.
Análogo a (4).

(6) Si $x \in M_{1/2}$ e $y \in M_{1/2}$.
Como $\nabla x \in M$ y $\nabla x \to (\nabla x \vee \nabla y) = 1$, entonces por ($H^{\vee}2$) (a), D_1), D_2) y ($H_3^{\vee,\triangle}6$) tenemos que $\nabla(x \vee y) \in M$. Supongamos ahora que $x \vee y \notin M$. Por otro lado, por ($H_3^{\vee,\triangle}4$) inferimos que $(x \to x) \to ((x \to y) \to ((x \vee y) \to x)) = 1$, entonces por el

Teorema 2.6.1, inferimos que $x \to y \in M$. Luego, por D_1), D_2) y (H1) concluimos que $x \in M$ lo que es una contradición. Por lo tanto, $x \vee y \in M_{1/2}$

De esta forma, con lo visto en el Teorema 2.6.1, solo resta ver que:

- Si $x, y \in M$ por (1) $x \vee y \in M$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1 \vee 1 = 1 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M$, $y \in M_0$ por (1) $x \vee y \in M$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1 \vee 0 = 1 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M$, $y \in M_{1/2}$ por (1) $x \vee y \in M$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1 \vee 1/2 = 1 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M_0$, $y \in M$ por (2) $x \vee y \in M$, entonces $h(x) \vee h(y) = 0 \vee 1 = 1 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M_0$, $y \in M_0$ por (3) $x \vee y \in M_0$, entonces $h(x) \vee h(y) = 0 \vee 0 = 0 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M_0$, $y \in M_{1/2}$ por (4) $x \vee y \in M_{1/2}$, entonces $h(x) \vee h(y) = 0 \vee 1/2 = 1/2 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M_{1/2}$, $y \in M$ por (2) $x \vee y \in M$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1/2 \vee 1 = 1 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M_{1/2}$, $y \in M_0$ por (5) $x \vee y \in M_{1/2}$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1/2 \vee 0 = 1/2 = h(x \vee y)$,
- Si $x \in M_{1/2}$, $y \in M_{1/2}$ por (6) $x \vee y \in M_{1/2}$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1/2 \vee 1/2 = 1/2 = h(x \vee y)$.

Por lo tanto para todo $x, y \in A$ tenemos que $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$. $\square$

Teorema 4.1.6. *Sea A un $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra y supongamos que $\{1\}$ es un SDM maximal, entonces $A/\{1\}$ es isomorfo a $\mathbb{C}_2^{\to,\vee} = \langle \mathbb{C}_2, \to, \vee, \triangle, 1\rangle$.*

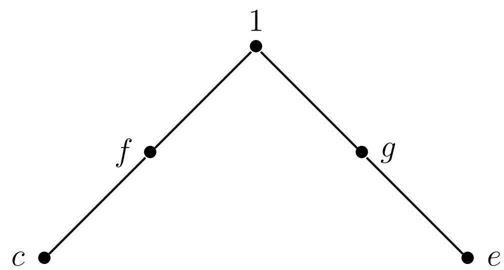
Demostración: Por el Teorema 2.6.2 y el Lema 4.1.3 se puede observar que $A/\{1\}$ tiene dos elementos. Luego tomando $C(x)$ del Teorema 2.6.2, es claro que $h(C(x) \vee C(1)) = h(C(x \vee 1)) = h(C(1)) = 1$.

$\square$

De los Teoremas 4.1.5 y 4.1.6, y de resultados de álgebra universal tenemos probado lo siguiente.

Corolario 4.1.7. *Si A es un $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra no trivial, entonces A es isomorfa a un producto subdirecto de $\mathbb{C}_3^{\to,\vee}$, donde esta última es el álgebra $\mathbb{C}_3^{\to}$ con la operación de supremo en la cadena.*

En el siguiente ejemplo veremos como en una $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebra no todo par de elementos tiene ínfimo. En efecto, sea el álgebra $S = \langle\{c, e, f, g, 1\}, \to, \vee, \triangle, 1\rangle$ donde las operaciones estan dadas por las siguientes tablas y diagrama de Hasse.



S

x	$\triangle x$
c	c
e	e
f	c
g	e
1	1

$\to$	c	e	f	g	1
c	1	e	1	1	1
e	c	1	f	1	1
f	c	e	1	g	1
g	c	e	f	1	1
1	c	e	f	g	1

4.2. Lógica proposicional para las $H_3^{\vee,\triangle}$-álgebras

Sea $Var = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ un conjunto numerable de elementos que denominaremos variables, y sean $\to$, $\vee$, y $\triangle$ símbolos. Indicaremos con Fm al conjunto de las fórmulas obtenidas de la siguiente manera:

F1) Si $\alpha \in Var$, entonces $\alpha \in Fm$,

F2) Si α y β son fórmulas, entonces $\triangle\alpha, \alpha \to \beta, \alpha \vee \beta \in Fm$,

F3) los únicos elementos de Fm son los obtenidos a partir de F1 y F2.

En adelante denotaremos por $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \to, \vee, \triangle\rangle$ al álgebra absolutamente libre de tipo de similaridad $(2, 2, 1)$ generada por un conjunto numerable Var. Los elementos de Var diremos que son las fórmulas atómicas.

Definición 4.2.1. *Denotaremos con $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle} = \langle\mathfrak{Fm}, \vdash_\vee\rangle$ al cálculo Hilbert determinado por los axiomas y regla de inferencia siguiente, donde $\alpha, \beta, \gamma, ... \in Fm$:*

Axiomas

(Ax1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(Ax2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(Ax3) $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (((\gamma \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$,

(Ax4) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(Ax5) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(Ax6) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

(Ax7) $\triangle\alpha \to \alpha$,

(Ax8) $\triangle(\triangle\alpha \to \beta) \to (\triangle\alpha \to \triangle\beta)$,

(Ax9) $((\beta \to \triangle\beta) \to (\alpha \to \triangle(\alpha \to \beta))) \to \triangle(\alpha \to \beta)$,

(Ax10) $((\triangle\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\triangle\alpha \to \gamma) \to \gamma)$,

Reglas de inferencia

(R1) *(MP)*

(R2) $\dfrac{\vdash_\vee \alpha}{\triangle\alpha}$

Notaremos con $\vdash_\vee \alpha$ a la derivación de una fórmula α y con $\Gamma \vdash_\vee \alpha$ a la derivación de α a partir de un conjunto de premisas Γ, dichas nociones se definen de manera análoga a las ya tratadas en este trabajo.

Notaremos $\alpha \equiv_\vee \beta$ si, y sólo si, $\vdash_\vee \alpha \to \beta$ y $\vdash_\vee \beta \to \alpha$.

Lema 4.2.2. *Las siguientes fórmulas son teoremas de $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$*

(P_s1) $\vdash_\vee \{(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)\}$

(P_s2) $\{\alpha \to \beta\} \vdash_\vee \{(\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma)\}$

(P_s3) $\{\alpha \to \beta, \gamma \to \psi\} \vdash_\vee \{(\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \psi)\}$

(R_s3) $\dfrac{\alpha \to \beta}{(\alpha \vee \beta) \to \beta}$

Demostración: (P_s1) a (P_s3): Análoga a Lema 3.2.10.

(R_s3):

(1) $\alpha \to \beta$ [Hip.]

(2) $\beta \to \beta$ [(P1)]

(3) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \to (\alpha \vee \beta) \to \beta)$ [(Ax6)]

(4) $(\alpha \vee \beta) \to \beta$ [(1),(2),(3),(MP)]

□

Lema 4.2.3. *$\equiv_\vee$ es una congruencia sobre $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$.*

Demostración: Del Lema 2.7.4 solo debemos probar que $\alpha \equiv_\vee \beta$, $\gamma \equiv_\vee \delta$ entonces $\alpha \vee \gamma \equiv_\vee \beta \vee \delta$, que es inmediato de (P_s3).

□

Teorema 4.2.4. *El álgebra de Lindenbaum $\mathfrak{Fm}/\equiv_\vee$ de $H_3^{\vee,\triangle}$ es un álgebra trivalente modal con supremo, definiendo $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta|$, $|\alpha| \vee |\beta| = |\alpha \vee \beta|$ y $|1| = 1_{\equiv_\vee}$, con $1_{\equiv_\vee} = \alpha \to \alpha$ y donde $|\delta|$ denota la clase de equivalencia de la fórmula δ. Más aún, $|\alpha| \to |\beta| = 1_{\equiv_\vee}$ si, y sólo si, $\vdash_\equiv \alpha \to \beta$.*

Demostración: Por el Teorema 2.7.5 solo resta ver que $\mathfrak{Fm}/\equiv_\vee$ es un semireticulo superior (1) y que verifica $(H^\vee3)$ (a) y (b) de la Definición 3.1.2.

(1) es inmediato de los (Ax4), (Ax5) y (Ax6).

(2) es inmediato de (Ax4) y (R_s3) y Teoremas 2.7.9, 2.7.10 y de la deducción. □

Definición 4.2.5. *Una valuación v es una función $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbb{C}_3$ que satisface lo siguiente:*

- $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$,
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$,
- $v(\triangle\alpha) = \triangle v(\alpha)$,
- $v(1_{\equiv_\vee}) = 1$.

Diremos que α es semánticamente válido, y lo notaremos $\vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}}$, si para toda valuación v, $v(\alpha) = 1$.

Teorema 4.2.6. *(Teorema de Correctitud) Sea $\alpha \in Fm$ tal que $\vdash_\vee \alpha$, entonces $\vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \alpha$.*

Teorema 4.2.7. *(Teorema de Completitud) Sea $\alpha \in Fm$ tal que $\vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \alpha$, entonces $\vdash_\vee \alpha$.*

Definición 4.2.8. *Una lógica $\mathcal{L}$ definida sobre un lenguaje $\mathbb{L}$, dotada de una relación de consecuencia $\vdash$, es Tarskiana si satisface las siguientes propiedades. Para todo $\Gamma \cup \Omega \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbb{L}$:*

(1) si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$,

(2) si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Omega$, entonces $\Omega \vdash \alpha$,

(3) si $\Omega \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$ para todo $\beta \in \Omega$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.

Una lógica $\mathcal{L}$ se dice finitaria si cumple:

(4) si $\Gamma \vdash \alpha$, entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que $\Gamma_0 \vdash \alpha$.

Finalmente, una lógica $\mathcal{L}$ definida sobre un lenguaje proposicional $\mathbb{L}$ generado por una asignatura de un conjunto de variables proposicionales es llamado estructural si satisface la siguiente propiedad:

(5) si $\Gamma \vdash \alpha$, entonces $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\alpha)$, para toda substitución σ de fórmulas por variables.

Una lógica proposicional es estandar si es Tarskiana, finitaria y estructural.

Definición 4.2.9. *Dada una lógica Tarskiana $\mathcal{L}$ sobre el lenguje $\mathbb{L}$, y $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbb{L}$. El conjunto Γ es maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{L}$ si $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pero $\Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ para cualquier $\psi \notin \Gamma$.*

Definición 4.2.10. *Sea $\mathcal{L}$ una lógica Tarskiana. Un conjunto de fórmulas Γ es cerrado en $\mathcal{L}$, o es una teoría cerrada en $\mathcal{L}$, si para toda fórmula φ se cumple que: $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ si, y sólo si, $\varphi \in \Gamma$.*

Lema 4.2.11. *Todo conjunto de fórmulas maximal no trivial respecto de φ en $\mathcal{L}$ es cerrado siempre que $\mathcal{L}$ sea Tarskiana.*

Demostración: Sea Γ un conjunto maximal no trivial respecto a φ en $\mathcal{L}$. Si $\psi \in \Gamma$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ ya que la lógica es Tarskiana. Recíprocamente, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ y supongamos que $\psi \notin \Gamma$. Por la definición 4.2.9 $\Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, luego por el Teorema de la Deducción, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi \to \varphi$ de lo que sigue que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, lo que contradice que Γ es un conjunto maximal no trivial respecto a φ, por lo tanto $\psi \in \Gamma$.

$\square$

Teorema 4.2.12. *Sea $\mathcal{L}$ una lógica Tarskiana finitaria sobre el lenguaje numerable $\mathbb{L}$. Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbb{L}$ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$. Entonces existe un conjunto Ω tal que $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{L}$ y Ω es maximal no trivial respecto de φ en $\mathcal{L}$.*

Demostración: Dado que el lenguaje es numerable podemos considerar $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje $\mathbb{L}$. De esta forma consideraremos la siguiente construcción:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$
$$\Gamma_n = \begin{cases} \Gamma_{n-1} & si \quad \Gamma_{n-1}, \varphi_n, \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \\ \Gamma_{n-1} \cup \{\varphi_n\} & si \quad \Gamma_{n-1}, \varphi_n \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi \end{cases}$$

Sea $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$. Podemos ver fácilmente que $\Gamma \subseteq \Omega$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\Gamma_n \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Veamos que Ω es es maximal no trivial respecto a φ. Supongamos que $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, entonces existe una derivación $\alpha_1, ..., \alpha_n$ a partir de Ω, entonces existe m tal que $\alpha_1, .., \alpha_n \in \Gamma_m$, por lo tanto $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Como ψ es una fórmula de $\mathbb{L}$ entonces $\psi = \varphi_k$ con $k \in \mathbb{N}$. Si $k \leq m$ entonces $\varphi_k \in \Gamma_m \subseteq \Omega$, ya que si $\varphi_k \notin \Gamma_m$ entonces $\varphi_k \notin \Gamma_k$, y por lo tanto $\Gamma_{k-1}, \varphi_k \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\Gamma_m, \varphi_k \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Luego por el Teorema de la Deducción $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_k \to \varphi$, y como $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_k$ tendremos que $\Gamma_m \vdash \varphi$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\varphi_k \in \Gamma_m \subseteq \Omega$. Si $k > m$ entonces tendremos que $\Gamma_m \subseteq \Gamma_{k-1}$ y $\Gamma_{k-1}, \varphi_k \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$, ya que si $\Gamma_{k-1}, \varphi_k \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\Gamma_{k-1} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_k \to \varphi$, entonces $\Gamma_{k-1} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, y nuevamente tendremos una contradicción.

Por lo tanto $\varphi_k = \psi \in \Omega$, es decir Ω es cerrado en $\mathcal{L}$.

Como Ω es cerrado en $\mathcal{L}$ tenemos que $\Omega \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$, ya que caso contrario tendríamos $\varphi \in \Omega$, es decir $\varphi \in \Gamma_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción.

Sea $\psi \notin \Omega$, tenemos que $\psi = \varphi_q$, para algún $q \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi_q \notin \Gamma_q$, por lo tanto no puede suceder que $\Gamma_{q-1}, \varphi_q \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\Gamma_{q-1}, \varphi_q \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, y luego $\Omega, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, lo que implica que Ω es maximal no trivial respecto a φ en $\mathcal{L}$.

$\square$

Lema 4.2.13. *Sea Γ un conjunto maximal no trivial respecto a φ en $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$. Para toda fórmula ψ se satisface $\psi \in \Gamma$ si, y sólo si, $\Gamma \vdash_\vee \psi$*

Demostración: De $\psi \in \Gamma$ se deduce trivialmente que $\Gamma \vdash_\vee \psi$. Para la recíproca asumimos que $\Gamma \vdash_\vee \psi$ y supongamos que $\psi \notin \Gamma$ entonces, como Γ es maximal no trivial respecto a φ tenemos que $\Gamma, \psi \vdash_\vee \gamma$, para cualquier fórmula γ. Luego, por el Teorema de la Deducción $\Gamma \vdash_\vee \psi \to \gamma$, y por (MP) tenemos que $\Gamma \vdash \gamma$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\psi \in \Gamma$.

□

Teorema 4.2.14. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbb{L}$, con Γ maximal no trivial respecto a φ en $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$. El mapeo $v : For[\Sigma] \to \mathbb{C}_3$, definido por:*

$$v(\psi) = 1 \text{ si, y sólo si, } \psi \in \Gamma$$
$$v(\psi) = 0 \text{ si, y sólo si, } \psi \notin \Gamma$$

para todo $\psi \in \mathbb{L}$ es una valuación para $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$.

Demostración: Veamos que v es una valuación.

Si tenemos que $v(\triangle\psi) = 1$ entonces, $\triangle\psi \in \Gamma$. Por el Lema 4.2.13 y (Ax7) tenemos que $\triangle\psi \to \psi \in \Gamma$, y por (MP) tendremos que $\psi \in \Gamma$ De esta forma $v(\psi) = 1$, y por lo tanto $\triangle v(\psi) = 1$

Si $\triangle v(\psi) = 1$, entonces $v(\psi) = 1$, y por lo tanto $\psi \in \Gamma$. Pr el Lema 4.2.13 $\Gamma \vdash_\vee \psi$, luego por (R2) $\Gamma \vdash_\vee \triangle\psi$, lo que implica que $v(\triangle\psi) = 1$.

De esta forma $v(\triangle\psi) = 1$ si, y sólo si, $\triangle v(\psi) = 1$.

Si tenemos que $v(\psi \vee \gamma) = 1$ entonces $\psi \vee \gamma \in \Gamma$. Supongamos que $v(\psi) \vee v(\gamma) \neq 1$, entonces $\psi \notin \Gamma$ y $\gamma \notin \Gamma$. Como Γ es maximal no trivial para cualquier fórmula α, $\Gamma, \psi \vdash_\vee \alpha$ y $\Gamma, \gamma \vdash_\vee \alpha$, luego por el Teorema de la Deducción $\Gamma \vdash_\vee \psi \to \alpha$ y $\Gamma \vdash_\vee \gamma \to \alpha$, de esta forma por el Lema 4.2.13, (MP) y (Ax6) tendremos que $\Gamma \vdash_\vee \alpha$, lo que es una contradiccioón, por lo tanto $v(\psi) \vee v(\gamma) = 1$.

Si tenemos que $v(\psi) \vee v(\gamma) = 1$ entonces $v(\psi) = 1$ o $v(\gamma) = 1$, lo que implica que $\psi \in \Gamma$ o $\gamma \in \Gamma$, y luego por el Lema 4.2.13 (Ax4) y (Ax5) tenemos que $\psi \vee \gamma \in \Gamma$, por lo tanto $v(\alpha \vee \gamma) = 1$

De esta forma $v(\psi \vee \gamma) = 1$ si, y sólo si, $v(\psi) \vee v(\gamma) = 1$.

Si tenemos que $v(\psi \to \gamma) = 1$ entonces $\psi \to \gamma \in \Gamma$. Si tenemos que $v(\psi) = 0$ entonces $v(\psi) \to v(\gamma) = 1$. A su vez, si $v(\psi) = 1$ entonces $\psi \in \Gamma$, y por (MP) y el Lema 4.2.13 tendremos que $\gamma \in \Gamma$, es decir $v(\gamma) = 1$ y por lo tanto $v(\psi) \to v(\gamma) = 1$.

Si tenemos que $v(\psi) =\to v(\gamma) = 1$. Si $v(\psi) = 1$ entonces por (MP) $v(\gamma) = 1$ y por lo tanto $\psi, \gamma \in \Gamma$, por lo tanto $\psi \to \gamma \in \Gamma$. Si $v(\psi) = 0$ entonces $\psi \notin \Gamma$, como Γ es maximal no trivial, $\Gamma, \psi \vdash_{\vee} \gamma$, luego por el Teorema de la Deducción $\Gamma \vdash_{\vee} \psi \to \gamma$ y por el Lema 4.2.13 $\psi \to \gamma \in \Gamma$, entonces $v(\psi \to \gamma) = 1$.

De esta forma $v(\psi \to \gamma) = 1$ si, y sólo si, $v(\psi) \to v(\gamma) = 1$.

Si $v(\psi) \vee v(\gamma) \neq 1$ entonces $v(\psi) \neq 1$ y $v(\gamma) \neq 1$, por lo tanto $v(\psi) = v(\gamma) = 0$, entonces $v(\psi) \vee v(\gamma) = 0$. Luego $v(\psi \vee \gamma) = 0$ si, y sólo si $v(\psi) \vee v(\gamma) = 0$.

Si $\triangle v(\psi) \neq 1$ entonces $v(\psi) \neq 1$, es decir $v(\psi) = 0$ y por lo tanto $\triangle v(\psi) = 0$. Luego $v(\triangle\psi) = 0$ si, y sólo si, $\triangle v(\psi) = 0$.

Si $v(\psi) \to v(\gamma) \neq 1$ entonces $v(\psi) = 1$ y $v(\gamma) = 0$, por lo tanto $v(\psi) \to v(\gamma) = 0$. Luego $v(\psi \to \gamma) = 0$ si, y sólo si, $v(\psi) \to v(\gamma) = 0$.

□

Teorema 4.2.15. *(Teorema de Correctitud Fuerte) Dada una fórmula φ, si $\Gamma \vdash_{\vee} \varphi$ entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \varphi$.*

Demostración: Sea φ una fórmula tal que $\Gamma \vdash_{\vee} \varphi$, y tenemos que para todo $\alpha \in \Gamma$, $v(\alpha) = 1$, para toda valuación v. De $\Gamma \vdash_{\vee} \varphi$ se deduce que existe una derivación $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma$ de φ, entonces $\{\beta_1, ..., \beta_n\} \vdash_{\vee} \varphi$, luego por el Teorema de la Deducción $\vdash_{\vee} \beta_1 \to (\beta_2 \to (... \to (\beta_n \to \varphi)...)$. De esta forma, por el Teorema **??**, $\vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \beta_1 \to (\beta_2 \to (... \to (\beta_m \to \varphi)...)$, es decir $v(\beta_1 \to (\beta_2 \to (... \to (\beta_m \to \varphi)...) = 1$. Como para todo $\alpha \in \Gamma$, $v(\alpha) = 1$, en particular lo será para los $\beta_1, ..., \beta_n$, luego por (MP) tenemos que $v(\varphi) = 1$, por lo tanto $\Gamma \vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \varphi$.

□

Teorema 4.2.16. *(Teorema de Completitud Fuerte) Dada una fórmula φ, si $\Gamma \vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\vee} \varphi$.*

Demostración: Tenemos que $\Gamma \vDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \varphi$, y supongamos que $\Gamma \nvdash_{\vee} \varphi$. Entonces, por el Teorema 4.2.12 existe un conjunto Ω tal que $\Gamma \subseteq \Omega$ y Ω es maximal no trivial respecto a φ en $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$. Por el Teorema 4.2.14 existe $v : For[\Sigma] \to \mathbb{C}_3$ una valuación tal que $v(\psi) = 1$ si, sólo si, $\psi \in \Omega$. Como $\varphi \notin \Omega$ entonces $v(\varphi) \neq 1$, entonces $\Omega \nvDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \varphi$, y como $\Gamma \subseteq \Omega$ tenemos que $\Gamma \nvDash_{\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}} \varphi$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\Gamma \vdash \varphi$. □

4.3. Teoría de modelos y lógica de primer orden de $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$ sin identidades

En esta sección definiremos lógica de primer orden de $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$ y consideraremos una noción de estructura al estilo de lo realizado por D'Ottaviano en su tesis de doctorado ([25]) para las lógicas $J3$ con identidades. Probaremos un teorema de Correctitud de la lógica con respecto a las estructuras introducidas.

Definición 4.3.1. *Supongamos la asignatura proposicional Σ de $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$, así como los símbolos $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial), junto con los signos de puntuación (comas y parentesis). Sea $Var = \{v_1, v_2, ...\}$ un conjunto numerable de variables individuales. Una asignatura de primer orden será una terna $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ definida como sigue:*

- *un conjunto $\mathcal{C}$ de constantes individuales;*
- *para cada $n \geq 1$, $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones de aridad n,*
- *para cada $n \geq 1$, $\mathcal{P}$ un conjunto de predicados de aridad n.*

Los conjunto de los términos y las fórmulas de Σ los denotaremos T_Σ y $\mathbb{L}_\Sigma$, respectivamente.

Definición 4.3.2. *Sea Σ una asignatura de primer orden. La lógica $\mathcal{QH}^3_{\vee,\triangle}$ sobre Σ se obtiene a partir del cálculo Hilbert $\mathcal{H}^3_{\vee,\triangle}$ extendida por medio de los siguentes axiomas y relgas:*

Axiomas esquemas

(Ax11) $\varphi^t_x \to \exists x\varphi$, *si t es un término libre para x en φ,*

(Ax12) $\forall x\varphi \to \varphi^t_x$, *si t es un término libre para x en φ,*

(Ax13) $\alpha \to \beta$, *si α es una instancia de β,*

(Ax14) $\triangle\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\triangle\varphi$,

(Ax15) $\triangle\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\triangle\varphi$,

(Ax16) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$ *si α no contiene ocurrencias libres de x.*

Reglas de inferencia

(R3) $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}$, *donde x no ocurre libre en ψ,*

(R4) $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x\psi}$, *donde x no ocurre libre en φ.*

Notaremos con $\vdash \alpha$ a la derivación de una fórmula α en $\mathcal{QH}^3_{\vee,\triangle}$ y con $\Gamma \vdash \alpha$, a la derivación de α a partir de un conjunto de premisas Γ, dichas nociones se definen de manera análoga a las ya tratadas en este trabajo.

Notemos que el axioma que usa $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ es una abreviatura de $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \varphi \to \psi$.

Definición 4.3.3. *Sea Σ una asignatura. Un lenguaje sobre Σ es un sistema:*

$$\mathbb{L} = \langle \Sigma, \mathcal{V}, \to, \vee, \triangle, \forall, \exists \rangle$$

con $\mathcal{V} = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de variables individuales.

Definición 4.3.4. *Sea $\mathbb{L}_\Sigma$ un lenguaje para una signatura Σ. Diremos que Σ-estructura $\mathfrak{U}$ es un par $\mathfrak{U} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{U}} \rangle$ donde A es un conjunto no vacío y $\cdot^{\mathfrak{U}}$ es una función definida sobre Σ del siguiente modo:*

1. *para cada símbolo f de función n-aria de Σ, entonces $f^{\mathfrak{U}} : A^n \to A$,*
2. *para cada símbolo P de predicado n-ario de Σ, entonces $P^{\mathfrak{U}} : A^n \to \mathbb{C}_3$.*

Consideremos la signatura $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_a\}_{a\in A}$ que es la signatura Σ unida a un conjunto de nuevas costantes. Denotemos al lenguaje extendido con $\mathbb{L}(\Sigma') = \mathbb{L}_{\Sigma'}$. Buscamos definir el valor de verdad de una fórmula cerrada φ, por medio de $m(\varphi) \in \mathbb{C}_3$. Para esto, consideremos una estructura $\mathfrak{U}$ y definamos $m : CT_{\Sigma'} \to \mathbb{C}_3$, donde $CT_{\Sigma'}$ es el conjunto de términos cerrados (sin variables libres) del lenguaje $\mathbb{L}_{\Sigma'}$, recursivamente como sigue:

- si τ es c_a, entonces $m(\tau) = m(c_a) = a$,
- si τ es $f(\tau_1, ..., \tau_n)$ entonces $m(\tau) = f^{\mathfrak{U}}(m(\tau_1), ..., m(\tau_n))$.

Sea ahora φ fórmula cerrada (sentencia) de Σ', y definamos $m : \mathbb{L}_{\Sigma'} \to \mathbb{C}_3$ inductivamente sobre la complejidad de φ de la siguente manera:

- si φ es $P(c_{a_1},...,c_{a_n})$ (predicado n-ario), entonces $m(\varphi) = P^{\mathfrak{U}}(m(c_{a_1}),...,m(c_{a_n}))$,
- si φ es $\gamma \vee \psi$ entonces $m(\varphi) = m(\gamma) \vee m(\psi)$,
- si φ es $\gamma \to \psi$ entonces $m(\varphi) = m(\gamma) \to m(\psi)$,
- si φ es $\triangle\psi$ entonces $m(\varphi) = \triangle m(\psi)$,
- si φ es $\exists x\psi$ entonces $m(\varphi) = \bigvee\limits_{c_a \in \Sigma'} m(\psi_x^{c_a})$ (si x es una variable libre de ψ entonces $\psi_x^{c_a}$ expresa el intercambio de x por c_a en ψ),
- si φ es $\forall x\psi$ entonces $m(\varphi) = \bigwedge\limits_{c_a \in \Sigma'} m(\psi_x^{c_a})$.

Diremos que $m : For(\Sigma') \to \mathbb{C}_3^{\to,\vee,\triangle}$ es $\mathcal{QH}^3_{\vee,\triangle}$-valuación o simplemente valuación.

Definición 4.3.5.

(i) *Sea φ una fórmula de $\mathbb{L}_\Sigma$, notaremos con $\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ donde $\{x_1,...,x_n\}$ es el conjunto de variables libres de φ, entonces diremos que $\varphi' = \varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$, con $c_{a_i} \in \Sigma'$ (constantes), es una m-instancia de φ.*

(ii) *Una fórmula φ de $\mathbb{L}_\Sigma$, diremos que es válida en $\mathfrak{U}$ si y solo si $m(\varphi') = 1$ para cada m-instancia φ' de φ. En este caso notaremos $\mathfrak{U} \vDash \varphi$.*

(iii) *Sea φ una fórmula de $\mathbb{L}_\Sigma$. Diremos que φ no es valida en $\mathfrak{U}$, que notaremos con $\mathfrak{U} \nvDash \varphi$, si y solo si, $m(\varphi') < 1$ para toda m-instancia φ' de φ.*

Como es usual definiremos $\Gamma \vDash \alpha$, si para toda estructura $\mathfrak{U}$ y toda $\psi \in \Gamma$, si $\mathfrak{U} \vDash \psi$ implica $\mathfrak{U} \vDash \alpha$.

4.4. Teorema de Correctitud

Teorema 4.4.1. *Sea $\Omega \cap \{\varphi\}$ un conjunto de sentencias de Σ, entonces: si $\Omega \vdash \alpha$ entonces $\Omega \vDash \alpha$.*

Demostración: En lo que sigue consideraremos una estructura $\mathfrak{U}$ fija.

Sea $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ una derivación de φ. Probaremos por inducción sobre n que $\mathfrak{U} \models \varphi$. En efecto, supongamos que $n = 1$, entonces α_1 es φ y por lo tanto es un axioma. Luego, tenemos los siguientes casos:

(Ax1) Supongamos que $\varphi = \alpha \to (\beta \to \alpha)$ y sea φ' una m-instancia de φ. Entonces, tenemos $m(\varphi') = m(\alpha' \to (\beta' \to \alpha')) = m(\alpha') \to (m(\beta') \to m(\alpha')) = 1$ ya que $m(\alpha'), m(\beta') \in \mathbb{C}_3^{\to,\vee,\triangle}$. Por lo tanto, $\mathfrak{U} \models \varphi$. Para el resto de los axiomas del cálculo proposicional, se puede probar que son válidos para $\mathfrak{U}$ de manera análoga.

(Ax11) Supongamos que $\varphi := \alpha_x^t \to \exists x\alpha$ donde t es un término libre para x en φ. Ahora, supongamos que $\alpha = \alpha(x_1, \cdots, x_n, x)$ y $t = t(z_1, \cdots, z_k)$. Consideremos φ' un m-instancia de φ, entonces existe $c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_{b_1}, \cdots, c_{b_k} \in \Sigma'$ tal que

$$\alpha_x^{t\,\prime} = \alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, t(c_{b_1}, \cdots, c_{b_k}))$$

y $\exists x\alpha' = \exists x\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, x)$. Luego, para una valuación m inferimos que $m(\varphi) = m(\alpha_x^{t\,\prime}) \to m(\exists x\alpha') = m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, t(c_{b_1}, \cdots, c_{b_k}))) \to m(\exists x\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, x)) = M$. De esto último, tenemos que $t(c_{b_1}, \cdots, c_{b_k}) = c_b \in \Sigma'$ y entonces,

$$M = m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_b)) \to \bigvee_{c_a \in \Sigma'} m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_a)) = 1.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{U} \models \alpha_x^t \to \exists x\alpha$.

(Ax12) Supongamos que $\varphi := \forall x\varphi \to \varphi_x^t$, con t un termino libre para x en φ. También, consideremos $\alpha = \alpha(x_1, \cdots, x_n, x)$ y $t = t(z_1, \cdots, z_k)$ como en el caso anterior. Para una φ' un m-instancia de φ, existe $c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_{b_1}, \cdots, c_{b_k} \in \Sigma'$ talque $\alpha_x^{t\,\prime} = \alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, t(c_{b_1}, \cdots, c_{b_k}))$ y $\forall x\alpha' = \forall x\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, x)$. Entonces, $m(\varphi') = m(\forall x\alpha') \to m(\alpha_x^{t\,\prime}) = \bigwedge_{c_a \in \Sigma'} m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_a)) \to m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, t(c_{b_1}, \cdots, c_{b_k})) = \bigwedge_{c_a \in \Sigma'} m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_a)) \to m(\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_b)) = 1$ con $c_b \in \Sigma'$.

(Ax14) Sea $\varphi := \triangle\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\triangle\alpha$, y sea $\alpha = \alpha(x_1, \cdots, x_n, x)$. Consideremos ahora $c_{a_1}, \cdots, c_{a_n} \in \Sigma'$ tal que $(\triangle\forall x\alpha)' = \triangle\forall x\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, x)$ y $(\forall x\triangle\alpha)' = \forall x\triangle\alpha(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, x)$. Luego,

$m(\varphi) = m[(\triangle\forall x\alpha)'] \leftrightarrow m[(\forall x\triangle\alpha)'] = m[\forall x\triangle\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},x)] \leftrightarrow m[\triangle\forall x\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},x)]$ $= \bigwedge_{c_a\in\Sigma'} \triangle m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] \leftrightarrow \triangle \bigwedge_{c_a\in\Sigma'} m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] = M$. Si existe un $c_a \in \Sigma'$ tal que $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] \neq 1$ entonces $M = 1$. Luego, si para todo $c_a \in \Sigma'$ tenemos que $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] = 1$ y por lo tanto, $M = 1$.

(Ax15) Sea $\varphi := \triangle\exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\triangle\alpha$, y sea $\alpha = \alpha(x_1,\cdots,x_n,x)$. Consideremos ahora $c_{a_1},\cdots,c_{a_n} \in \Sigma'$ tal que $(\triangle\exists x\alpha)' = \triangle\exists x\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},x)$ y $(\exists x\triangle\alpha)' = \exists x\triangle\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},x)$. Luego,
$m(\varphi) = m[(\triangle\exists x\alpha)'] \leftrightarrow m[(\exists x\triangle\alpha)'] = m[\exists x\triangle\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},x)] \leftrightarrow m[\triangle\exists x\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},x)]$ $= \bigvee_{c_a\in\Sigma'} \triangle m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] \leftrightarrow \triangle \bigvee_{c_a\in\Sigma'} m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] = M$. Al igual que en el caso anterior podemos considerar dos casos: (1) existe $c_a \in \Sigma'$ tal que $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] = 1$ o (2) para todo $c_a \in \Sigma'$ tenemos que $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_a)] \neq 1$. En cualquier caso, $M = 1$.

(Ax16) Tomemos $\varphi := \forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$ donde α no tiene una ocurrencia libre de x y supongamos que $\alpha = \alpha(x_1,\cdots,x_n)$ y $\beta = \beta(y_1,\cdots,y_k,x)$. Entonces, para una m-instancia φ' existe $c_{a_1},\cdots,c_{a_n},c_{b_1},\cdots,c_{b_k} \in \Sigma'$ tal que $[\forall x(\alpha \to \beta)]' = \forall x(\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n}) \to \beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},x))$ y $(\alpha \to \forall x\beta)' = \alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n}) \to \forall x\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},x)$. Por lo tanto, $m(\varphi') = m[\forall x(\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n}) \to \beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},x))] \to m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n}) \to \forall x\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},x)] = \bigwedge_{c_a\in\Sigma'} (m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] \to m[\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},c_a))]) \to (m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] \to \bigwedge_{c_z\in\Sigma'} m[\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},c_z)]) = M$. Es claro que si $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] = 0$, entonces $M = 1$. Entonces supongamos que $m[(\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] \neq 0$. Del hecho que $m[\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},c_a))] \in \mathbb{C}_3^{\to,\vee,\triangle}$, tenemos dos casos, (1) existe $c_a \in \Sigma'$ tal que $m[\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},c_a))] = 0$ y (2) para todo $c_a \in \Sigma'$ $m[\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},c_a))] \neq 0$. Si vale (1), podemos ver que $\bigwedge_{c_a\in\Sigma'} m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] \to m[\beta(c_{b_1},\cdots,c_{b_k},c_a))] = 0$ y por lo tanto, $M = 1$. Por otro lado, si vale (2) tenemos dos sub casos (2.1) $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] = \frac{1}{2}$ y (2.2) $m[\alpha(c_{a_1},\cdots,c_{a_n})] = 1$. En cualquier caso inferimos que $M = 1$.

Supongamos que para $i < n$ se verifica: $\mathfrak{U} \models \alpha_i$ (H.I.), veamos que $\mathfrak{U} \models \alpha_n$ donde α_n es α. Su pongamos que α_n es obtenido por medio de α_j $(j < n)$ por a aplicar (NEC), es decir $\alpha_n = \triangle\alpha_j$. Por hipotesis inductiva tenemos que $\mathfrak{U} \models \alpha_j$, luego para toda m-instancia α_j'

se tiene que $m(\alpha'_j) = 1$. Por lo tanto, $m(\triangle\alpha'_j) = 1$ y entonces $\mathfrak{U} \vDash \triangle\alpha_j$.

Supongamos que α_n se obtiene a partir de $\alpha_j = \alpha$ y $\alpha_k = \alpha \to \beta$ $(j, k < n)$ aplicando (MP). Luego, por (H.I.) tenemos $\mathfrak{U} \vDash \alpha$ y $\mathfrak{U} \vDash \alpha \to \beta$. Consideremos ahora α' y β' m-instancias de α y β, respectivamente. Por lo tato, podemos inferir que $m(\alpha') = 1$ y $m(\alpha' \to \beta') = m(\alpha') \to m(\beta') = 1$. De lo que resulta, $m(\beta') = 1$ y entonces $\mathfrak{U} \vDash \beta$.

Supongamos que α_n se obtiene a partir de $\alpha_j = \varphi \to \psi$ $(j < n)$ aplicanado (R3).

Consideremos $(\exists x\varphi)' = \exists x\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n}, x)$ y $\psi' = \psi(c_{b_1}, ..., c_{b_k})$, con $c_{a_1}, ..., c_{a_n}, c_{b_1}, ..., c_{b_k} \in \Sigma'$, m-instancias de $\exists x\varphi$ y ψ respectivamente. Por lo tanto, $m((\exists x\varphi \to \psi)') = m((\exists x\varphi)' \to \psi') = m((\exists x\varphi)') \to m(\psi') = m(\exists x\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n}, x)) \to m(\psi(c_{b_1}, ..., c_{b_k})) =$
$= \bigvee_{c_a \in \Sigma'} m(\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n}, c_a)) \to m(\psi((c_{b_1}, ..., c_{b_k})) = M$. Por hipótesis tenemos que $m(\varphi' \to \psi') = m(\varphi') \to m(\psi') = 1$ para toda m-instancia φ', ψ', entonces $m(\varphi') \leq m(\psi')$. Entonces, $\bigvee_{c_a \in \Sigma'} m(\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n}, c_a)) \leq m(\varphi(c_{b_1}, ..., c_{b_k}))$ y por lo tanto, $M = 1$. Entonces $\mathfrak{U} \vDash \exists x\varphi \to \psi$.

Supongamos que α_n se obtiene a partir de $\alpha_j = \varphi \to \psi$ $(j < n)$ aplicanado (R4).

Consideremos $(\forall x\psi)' = \forall x\psi(c_{b_1}, ..., c_{b_k}, x)$ y $\varphi' = \varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n})$, con $c_{b_1}, ..., c_{b_k}, c_{a_1}, ..., c_{a_n} \in \Sigma'$, m-instancias de $\forall x\psi$ y φ respectivamente. Por lo tanto, $m((\varphi \to \forall x\psi)') = m(\varphi' \to (\forall x\psi)') = m(\varphi') \to m((\forall x\psi)') = m(\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n})) \to m(\forall x\psi(c_{b_1}, ..., c_{b_k}, x)) = m(\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n})) \to \bigwedge_{b \in \Sigma'} m(\psi(c_{b_1}, ..., c_{b_k}, c_b)) = M$. Por hipótesis tenemos que $m(\varphi' \to \psi') = m(\varphi') \to m(\psi') = 1$ para toda m-instancia φ', ψ', entonces $m(\varphi') \leq m(\psi')$ entonces, $m(\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n})) \leq \bigwedge_{b \in \Sigma'} m(\psi(c_{b_1}, ..., c_{b_k}, c_b))$ y por lo tanto $M = 1$. Entonces $\mathfrak{U} \vDash \varphi \to \forall x\psi$.

$\square$

Proposición 4.4.2. *Las siguientes afirmaciones ser verifican en $\mathcal{QH}^3_{\vee,\triangle}$.*

(i) $\varphi \to (\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to (\varphi \to \beta)$,

(ii) $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x\alpha \to \beta$,

(iii) $(\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta) \vdash \varphi \to (\alpha \to \beta)$.

Demostración:

(i) (1) $\vdash \varphi \to (\alpha \to \beta)$, [Hip.]

(2) $\vdash (\varphi \to (\alpha \to \beta)) \to ((\varphi \to \alpha) \to \varphi \to \beta))$, [(Ax2)]

(3) $\vdash (\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)$, [(1),(2),(MP)]

(4) $\vdash \alpha \to (\varphi \to \alpha)$, [(Ax1)]

(5) $\vdash \alpha \to (\varphi \to \beta)$. [(3),(4),(T5)]

(ii) (1) $\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$, [Hip.]

(2) $\vdash \alpha \to \beta$, [(1),(Ax12),(MP)]

(3) $\vdash \exists x\alpha \to \beta$ [(2),(R3)]

(iii) (1) $\vdash (\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)$, [Hip.]

(2) $\vdash \alpha \to (\varphi \to \alpha)$, [(Ax1)]

(3) $\vdash \alpha \to (\varphi \to \beta)$, [(1),(2),(T5)]

(4) $\vdash \varphi \to (\alpha \to \beta)$. [(3),(i)]

□

Dada una derivación $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en $\mathcal{QH}^3_{\vee,\triangle}$ a partir de un conjunto de hipótesis Γ, y sea $\varphi \in \Gamma$. Diremos que α_i depende de φ en la derivación si:

- $\alpha_i = \varphi$; o
- α_i es obtenido a partir de α_j y α_k (con $j, k < i$) por $(R1)$, donde α_j o α_k depende de φ en la derivación; o
- α_i es obtenido a partir de α_j (con $j < i$) por $(R2)$, donde α_j depende de φ en la derivación; o
- α_i es obtenido a partir de α_j (con $j < i$) por $(R3)$, donde α_j depende de φ en la derivación; o
- α_i es obtenido a partir de α_j (con $j < i$) por $(R4)$, donde α_j depende de φ en la derivación.

Lema 4.4.3. *Si ψ no depende de φ en la derivación de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, entonces $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$.*

Demostración: Sea $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una derivación de ψ (i.e. α_n es ψ) a partir de Γ y φ, donde ψ no depende de φ. Consideremos el caso $n = 1$. De esta forma $\alpha_1 = \psi$. Luego ψ es un axioma o $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. Si ψ es un axioma entonces tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$. Si $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ entonces $\psi \in \Gamma$, ya que $\psi \neq \varphi$, pues si $\psi = \varphi$ tendremos que ψ depende de φ en la derivación, lo que es un absurdo. Por lo tanto $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$. Como hipótesis inductiva asumimos que la proposición se cumple para toda derivación de longitud inferior a n. Si $\psi \in \Gamma$ o es un axioma, entonces $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$. Si ψ es consecuencia directa de una o dos fórmulas bien formadas precedentes y la regla de inferencia:

(R1) tenemos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$ y $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i \to \alpha_n$, con $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_n$ y $j, i < n$. Por hipótesis inductiva, $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$ y $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i \to \alpha_n$. Por lo tanto $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$,

(R2) tenemos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$ y $\alpha_n = \triangle\alpha_i$, con $i < n$, luego por hipótesis inductiva, $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$ y por lo tanto $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \triangle\alpha_i$, es decir $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$,

(R3) tenemos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$, con $\alpha_i = \gamma \to \beta$, $i < n$ y $\alpha_n = \exists x\gamma \to \beta$. Por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$, por lo tanto $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_n$,

(R4) tenemos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$, con $\alpha_i = \gamma \to \beta$, $i < n$ y $\alpha_n = \gamma \to \forall x\beta$. Por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$, por lo tanto $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_n$.

□

Teorema 4.4.4. *(Teorema de la Meta Deducción). Supongamos que existe en $\mathcal{QH}^3_{\vee,\triangle}$ una derivación de ψ de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, tal que ninguna aplicación de las reglas $(R1)$, $(R2)$, $(R3)$ y $(R4)$ a las fórmulas que dependen de φ tienen como variables cuantificadas a las variables libres de φ. Entonces $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \psi$.*

Demostración: Supongamos que tenemos una derivación de ψ de n pasos, como en la demostración del Lema 4.4.3. Entonces, por inducción sobre n probaremos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$ con $1 \leq i \leq n$.

Si α_i es un axioma o pertenece a Γ. Entonces, por (Ax1) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i \to (\varphi \to \alpha_i)$ y por aplicar (MP), tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$. Si $\alpha_i = \varphi$, entonces, por (T4), $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$.

Supongamos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_j$ con $j < i$ (Hipótesis Inductiva). Supongamos que α_i se obtiene de fórmulas precedentes a partir de reglas de inferencias. Entonces, tenemos los siguientes casos:

Caso 1: existen $j, k < i$ tales que $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$; i.e., α_i se obtiene de α_j y α_k por (MP). Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_j$ y $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_k$, es decir $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to (\alpha_j \to \alpha_i)$. Por (MP) y (Ax2) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\varphi \to \alpha_j) \to (\varphi \to \alpha_i)$ luego por (MP) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$.

Caso 2: existe $j < i$ tal que $\alpha_i = \triangle\alpha_j$, las variables libres de α_j y α_i son las mismas. Como α_j no depende de φ, por el Lema 4.4.3 $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_j$. Aplicando (R2) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \triangle\alpha_j$ y por (Ax1) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \triangle\alpha_j \to (\varphi \to \triangle\alpha_j)$. Luego por (MP) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \triangle\alpha_j$, es decir $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$.

Caso 3: existe $j < i$ tal que $\alpha_j = \gamma \to \beta$ y $\alpha_i = \exists x\gamma \to \beta$ (con x no ocurre libre en β);i.e., α_i se obtiene de α_j aplicando (R3). Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_j$, y por hipótesis tenemos que α_j no depende de φ o x no es libre en φ.

Caso 3.1: α_j no depende de φ. Entonces, por el Lema 4.4.3 tenemos $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_j$, es decir $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \gamma \to \beta$, y por aplicar (R3), infermimos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \exists x\gamma \to \beta$. Por lo tanto, $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha_i$ y entonces $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$.

Caso 3.2: x no corre libre en α_i. Como tenemos $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_j$ entonces $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to (\gamma \to \beta)$. Luego por la Proposición 4.4.2 (i), $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \gamma \to (\varphi \to \beta)$, aplicando (R3) tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \exists x\gamma \to (\varphi \to \beta)$ y nuevamente por la Proposición 4.4.2 (i), $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to (\exists x\gamma \to \beta)$.

Caso 4: existe $j < i$ tal que $\alpha_j = \gamma \to \beta$ y $\alpha_i = \gamma \to \forall x\beta$ (con x no ocurre libre en γ).

Caso 4.1: Análogo al caso 3.1, aplicando (R4).

Caso 4.2: Tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to (\gamma \to \beta)$, entonces, por (Ax2) y (MP) $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\varphi \to \gamma) \to (\varphi \to \beta)$, aplicando (R4) tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\varphi \to \gamma) \to \forall x(\varphi \to \beta)$ y por (Ax16) y (T5), $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\varphi \to \gamma) \to (\varphi \to \forall x\beta)$, de esta forma, por la Proposición 4.4.2 (iii), $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to (\gamma \to \forall x\beta)$, es decir $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_i$.

Por lo tanto, para todo n tenemos que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \alpha_n$, de lo que resulta que $\Gamma \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \psi$. $\square$

Proposición 4.4.5. $(\alpha \to \beta) \to \varphi \vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\alpha \to \exists x\beta) \to \varphi$

Demostración:

(1) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \beta \to \beta$, [(T4)]

(2) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha \to (\beta \to \beta)$, [(1),(MP),(Ax1)]

(3) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha \to \forall x(\beta \to \beta)$, [(2),(R4)]

(4) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \forall x(\beta \to \beta) \to (\exists x\beta \to \beta)$, [Prop 4.4.2 (ii), Teo 4.4.4]

(5) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} \alpha \to (\exists x\beta \to \beta)$, [(3),(4),(T5)]

(6) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\alpha \to \exists x\beta) \to (\alpha \to \beta)$, [(Ax2),(5),(MP)]

(7) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\alpha \to \beta) \to \exists x(\alpha \to \beta)$, [(Ax11)]

(8) $\vdash_{QH_3^{\vee,\triangle}} (\alpha \to \exists x\beta) \to \exists x(\alpha \to \beta)$. [(6),(7),(T5)]

$\square$

Corolario 4.4.6. *Si φ es una sentencia y $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash^C_{QH_3^{\vee,\triangle}} \psi$, entonces $\Gamma \vdash^C_{QH_3^{\vee,\triangle}} \varphi \to \psi$.*

Demostración: Como φ es una sentencia, la hipótesis del Teorema 4.4.4 se satisface, y por lo tanto se verifica el resultado trivialmente. $\square$

4.5. Completitud y Compacidad: modelos construidos a partir de constantes

En lo que sigue consideraremos un lenguaje Σ^* que extiende a Σ con un bottom $\perp$. A partir de ese bottom, podemos definir una negación fuerte del siguiete modo $\neg\varphi := \varphi \to\perp$ y es claro que para toda valuación $m(\perp) = 0$. La lógica de primer orden sobre el lenguaje Σ^* estará determinada por los axiomas y reglas de $\mathcal{QH}_3^{\vee,\triangle}$ y el nuevo axioma (Ax17) $\perp\to \psi$, notaremos con $\mathcal{QH}_3$ a la nueva lógica. Esta negación nos permitirá probar una completitud usando la herramientas clásicas, observemos que esta negación no es una negación de De Morgan, por lo que la conectiva correspondiente a la conjunción no se puede obtener a partir del lenguaje. El problema de encontrar una completitud sin negación, en donde se adapten los conceptos clásicos para ese caso, será dejado como trabajo futuro.

Proposición 4.5.1. *Las siguientes fórmulas son teoremas de $\mathcal{QH}_3$:*

(i) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$

(ii) $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Definición 4.5.2. *Llamaremos a un conjunto de sentencias Ω, una teoría. Diremos que una teoría Ω es consistente si ninguna fórmula φ y su negación $\neg\varphi$ son ambas demostrables en Ω (i.e. no puede pasar simultaneamente que $\Omega \vdash \varphi$ y $\Omega \vdash \neg\varphi$). Una teoría Ω es inconsistente si no es consistente.*

Proposición 4.5.3. *Toda teoría Ω de Σ^* es consistente.*

Demostración: Sea φ una fórmula tal que $\Omega \vdash \varphi$, luego por el Teorema 4.4.1 tenemos que $\Omega \models \varphi$. Por lo tanto, para toda m-istancia φ' tenemos que $m(\varphi') = 1$. Supongamos que $\neg\varphi \in \Omega$, luego $m(\neg\varphi') = 1$, pero $m(\neg\varphi') = m(\varphi' \to \perp') = m(\varphi') \to m(\perp') = 1 \to 0 = 0$, lo que es una contradicción. □

Lema 4.5.4. *Si una teoría Ω es inconsistente entonces $\Omega \vdash \varphi$ para toda fórmula φ.*

Demostración: Supongamos que $\Omega \vdash \psi$ y $\Omega \vdash \neg\psi$. Luego, por Proposicion 4.5.1 tenemos que $\Omega \vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$. Por lo tanto, aplicando (MP) obtenemos que $\Omega \vdash \varphi$.

□

Este resultado es equivalente a que si Ω es un una teoría y existe una fórmula que no es demostrable en Ω, entonces Ω es consistente.

Proposición 4.5.5. *Sea Ω una teoría. Toda subteoría finita de Ω es consistente si, y sólo si, Ω es consistente.*

Demostración: Resulta inmediato que si Ω es consistente, toda subteoría finita de Ω es consistente. Recíprocamente, asumimos que toda subteoría finita de Ω es consistente, luego al suponer que Ω es inconsistente, tenemos que $\Omega \vdash \varphi$ y $\Omega \vdash \neg\varphi$ para alguna fórmula φ. Es decir que tenemos dos derivaciones que involucran un número finito de sentencias de Ω. Tomando el conjunto finito de sentencias Ω_0 involucradas en las derivaciones de φ y $\neg\varphi$ tenemos que $\Omega_0 \vdash \varphi$ y $\Omega_0 \vdash \neg\varphi$. Por lo tanto, tenemos que una subteoría de Ω no es consistente, lo que es una contradicción. □

Proposición 4.5.6. *La sentencia $\neg\varphi$ no es demostrable en la teoría Ω si, y sólo si, $\Omega \cup \{\varphi\}$ es consistente.*

Demostración: Sea $\neg\varphi$ una sentencia no demostrable en la teoría Ω y supongamos que $\Omega \cup \{\varphi\}$ no es consistente. Luego, por el Lema 4.5.4 que $\Omega \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$. De esto último y Corolario 4.4.6, tenemos que $\Omega \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Por otro lado, por Proposición 4.5.1 $\Omega \vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$. Luego, $\Omega \vdash \neg\varphi$ lo que es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $\Omega \cup \{\varphi\}$ es consistente y supongamos que $\Omega \vdash \neg\varphi$. Luego, por Proposición 4.5.1, tenemos que $\Omega \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$, por las hipótesis y (MP) tenemos $\Omega \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ para toda sentencia ψ, lo que contradice la consitencia de $\Omega \cup \{\varphi\}$.

□

Definición 4.5.7. *Diremos que una teoría Ω es maximal consistente, si es consistente y para toda teoría Ω_0 que contenga propiamente a Ω, implica que Ω_0 no es consistente*

Proposición 4.5.8. *Sea Ω una teoria maximal consistente, y φ una sentencia cualquiera, entonces:*

(i) *o se verifica que $\Omega \vdash \varphi$ o bien que $\Omega \vdash \neg\varphi$.*

(ii) *$\Omega \vdash \varphi$ si, y solo si, $\varphi \in \Omega$.*

(iii) *$\varphi \notin \Omega$ si, y solo si, $\neg\varphi \in \Omega$*

Demostración:

(i) Supongamos que no suceden simultaneamente $\Omega \vdash \psi$ y $\Omega \vdash \neg\psi$, entonces $\psi \notin \Omega$, por lo tanto $\Omega \cup \{\psi\}$ es inconsistente. Luego $\Omega \cup \{\psi\} \vdash \neg\psi$. Por el Teorema de la Meta Deducción $\Omega \vdash \psi \to \neg\psi$, luego por la proposición 4.5.1 y (MP) $\Omega \vdash \neg\psi$, lo que es una contradicción. Por lo tanto tenemos que $\Omega \vdash \psi$ o bien $\Omega \vdash \neg\psi$.

(ii) Si tenemos que $\Omega \vdash \varphi$, como Ω es consistente, $\neg\varphi$ no es demostrable a partir de Ω. De esta forma, por la Proposición 4.5.6 $\Omega \cup \{\varphi\}$ es consistente, y como Ω es maximal consistente tenemos que $\Omega \cup \{\varphi\} = \Omega$, por lo que se concluye que $\varphi \in \Omega$. La recíproca es inmediata.

(iii) Si $\varphi \notin \Omega$, por (ii) φ no es demostrable en Ω. Por (i) resula que $\Omega \vdash \neg\varphi$. Recíprocamente, si $\neg\varphi \in \Omega$ entonces $\Omega \vdash \neg\varphi$, como Ω es consistente no puede suceder $\Omega \vdash \varphi$, entonces $\varphi \notin \Omega$. □

Teorema 4.5.9 (Teorema de Lindenbaum)**.** *Toda teoría consistente de $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$ puede extenderse a una teoría maximal consistente $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$.*

Demostración: Sea Ω una teoría consistente y supongamos que $||\mathbb{L}_{\Sigma^*}|| = \aleph_0$. Como la cardinalidad de $For(\Sigma^*)$ es $||\mathbb{L}_{\Sigma^*}||$ podemos tomar $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de todas las sentencias de $For(\Sigma^*)$. Y definimos la sucesión de teorías $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ de forma tal que

$\Omega_1 = \Omega$

$$\Omega_{j+1} = \begin{cases} \Omega_j \cup \{\alpha_{j+1}\} & si \quad \neg\alpha_{j+1} \text{ no es derivable en } \Omega_j \\ \Omega_j & si \qquad \Omega_j \vdash \neg\alpha_{j+1} \end{cases} \tag{1}$$

Veamos que Ω_i es consistente para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis tenemos que $\Omega_1 = \Omega$ es consistente.

Supongamos Ω_j consistente. Si $\Omega_j \vdash \neg\alpha_{j+1}$ entonces por definición $\Omega_j = \Omega_{j+1}$ es consistente. Si $\neg\alpha_{j+1}$ no es derivable a partir de Ω_j por la Proposición 4.5.6 $\Omega_{j+1} = \Omega_j \cup \{\alpha_{j+1}\}$ es consistente. De lo que resulta que Ω_i es consistente para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definimos $\Omega_M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ y supongamos que $\Omega_M \vdash \varphi$ y $\Omega_M \vdash \neg\varphi$ para alguna fórmula bien formada φ. Las derivaciones de φ y $\neg\varphi$ requieren una cantidad finita de pasos de Ω_M, por lo tanto la demostración involucra un múmero finito de teorías $\Omega_1, \Omega_{k_1}, ..., \Omega_{k_j}$. Sea $k = max\{k_1, ..., k_j\}$, entonces $\Omega_k \vdash \varphi$ y $\Omega_k \vdash \neg\varphi$ lo que contradice que Ω_k es consistente.

Además podemos afirmar que Ω_M es maximal consistente. En efecto, sea J una extensión consistente de Ω_M. Sea $\varphi \in J$. Como φ es una sentencia, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi = \alpha_a$. Si $\alpha_a \in \Omega_1$ tenemos que $J \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_M$. Si $\alpha \notin \Omega_1$ puede suceder que $\alpha_a \in \Omega_a$ o bien $\Omega_{a-1} \vdash \neg\alpha_a$. Si $\alpha_a \in \Omega_a \subseteq \Omega_M$ entonces $J \subseteq \Omega_M$. Si $\Omega_{a-1} \vdash \neg\alpha_a$ entonces por hipótesis $J \vdash \neg\alpha_a$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $J \subseteq \Omega_M$; es decir, Ω_M es maximal consistente. $\square$

Corolario 4.5.10. *Toda teoría consistente puede ser extendida a una teoría maximal consistente y completa.*

Demostración: Sea Ω una teoría consistente, entonces por el Teorema 4.5.9 existe una teoría maximal consistente Ω'. Luego, por la Proposición 4.5.8 (i) tenemos que Ω' es completa.

$\square$

Definición 4.5.11. *Sea Ω una teoría sobre $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$ y sea $C \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto de constantes sobre Σ^*. Diremos que C es un conjunto de testigos de Ω para toda fórmula φ con a lo* *sumo una variable libre x, entonces existe $c \in C$ tal que $\Omega \vdash \exists x\varphi \rightarrow \varphi^x_c$. En este caso, diremos que Ω tiene testigos $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$ si existe un conjunto de testigos en $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$.*

Observemos que φ^x_c es la notación de $\varphi(c)$, donde la fórmula con una varieble libre $\varphi(x)$ es la considereda en la Definición 4.5.11.

Lema 4.5.12 (Teorema de las constantes)**.** *Sea C un conjunto un conjunto de símbolos de constantes y Σ^*_C el lenguaje que se obtiene al añadir las nuevas constantes a Σ^*. Si $\Omega \cup \{\alpha\}$ es un conjunto sentencias de Σ^*_C, entonces:*

$$\Omega \vdash_{\Sigma^*_C} \alpha \textit{ si, y sólo si, } \Omega \vdash_{\Sigma^*} \alpha.$$

Demostración: Sea $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una derivación de α a partir de Σ^*_C. Para cada α_i que tenga ocurrencias de constantes de C, las remplazaremos con variebles y las notaremos con α'_i. Como las instancias de axiomas de $\mathcal{QH}_3$ sobre Σ^*_C, son también instancias sobre Σ^* y lo mismo acurre con instancias de reglas de inferencias. Por lo tanto, tenemos que $\alpha'_1, ..., \alpha'_n$ es una derivación de α', donde α' es obtenida de α reeplazando las constante de C por variebles. La recíproca es inmediata de la defición de derivación.

□

Sea C un conjunto de nuevos símbolos de constantes tal que el cardinal de C sea igual al cardinal de $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$. Notaremos con $\mathbb{L}^*$ al lenguaje que se obtiene de añadir las nuevas constante a $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$. Entonces,

Lema 4.5.13. *Sea Ω una teoría consistente de $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$, entonces Ω se puede extender a una teoría Ω' consistente de $\mathbb{L}^*$ que tenga al conjunto C como testigos de $\mathbb{L}^*$.*

Demostración: Sea Ω una teoría consistente y C un conjunto de nuevos símbolos de constantes tal que $|C| = ||\mathbb{L}(\Sigma^*)|| = \aleph_0$. Sea Σ^*_C una extensión simple de Σ^* añadiendo el conjunto de nuevos símbolos de constantes C. Por lo tanto tendremos que $||\mathbb{L}(\Sigma^*_C)|| = \aleph_0$.

Consideremos $\{\alpha_i(x_{j_i}) : i \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de todas las fórmulas de $\mathbb{L}(\Sigma^*_C)$ que tienen a lo sumo una variable libre y $\{c_j : i \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de las nuevas constantes individuales tal que:

(a) c_k no esta contenida en las fórmulas $\alpha_i(x_{j_i})$ con $i < k$,

(b) c_k es diferente de c_i con $i < k$.

Como es claro que toda sentencia de Σ^* es una sentencia de Σ^*_C, se tiene que Ω es una teoría de $\mathbb{L}(\Sigma^*_C)$, que denotaremos Ω_1. A su vez, definimos la siguiente sucesión de teorías:

$$\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\},$$

Donde Ω_1 fue definido anteriormente y $\Omega_{k+1} = \Omega_k \cup \{\exists(x_{j_k})\alpha_k(x_{j_k}) \to \alpha_k(c_k)\}$.

Tenemos que Ω_1 es consistente, ya que, caso contrario, existe una derivación para α y para $\neg\alpha$ del lenguaje $\mathbb{L}(\Sigma^*_C)$. Remplazamos cada c_k ocurriendo en la derivación por una variable que no ocurre en la derivación. De esta forma obtenemos una derivación de α y de $\neg\alpha$, pero ahora sin ocurrencia de símbolos de C, y por lo tanto es una derivacón en $\mathbb{L}(\Sigma^*)$, lo que contradice que Ω es consistente.

Sea Ω_k consistente. Supongamos que Ω_{k+1} es inconsistente, entonces $\Omega_{k+1} \vdash\perp$, luego por el Teorema de la Meta Deducción $\Omega_k \vdash (\exists(x_{j_k})\alpha_k(x_{j_k}) \to \alpha_k(c_k)) \to\perp$. Por el Lema 4.5.12 $\Omega_k \vdash (\exists(x_{j_k})\alpha_k(x_{j_k}) \to \alpha_k(y)) \to\perp$ y por la Proposición 4.4.5 tendremos que $\Omega_k \vdash (\exists(x_{j_k})\alpha_k(x_{j_k}) \to \exists y\alpha_k(y)) \to\perp$. Por otro lado por (Ax11) $\vdash \alpha_k(x_{j_k}) \to \exists y\alpha_k(y)$, y aplicando (R3) $\vdash \exists(x_{j_k})\alpha(x_{j_k}) \to \exists y\alpha_k(y)$. Por lo tanto, si $\beta = \exists(x_{j_k})\alpha(x_{j_k}) \to \exists y\alpha_k(y)$ tendremos que $\Omega_j \vdash \beta$ y $\Omega_j \vdash \neg\beta$, lo que es una contradicción, ya que Ω_j es consistente. Por lo tanto Ω_{j+1} es consistente. Definimos $\Omega' = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Omega_j$. De manera análoga a lo realizado en la demostración del Teorema de Lindenbaum podemos ver que Ω' es consistente.

Sea φ una fórmula con una variable libre, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_k(x_{j_k}) = \varphi$. De esta forma $\exists(x_{j_k})\alpha_k(x_{j_k}) \to \alpha_k(c_k) \in \Omega_{k+1}$, es decir $\Omega_{k+1} \vdash \exists x_{j_k}\varphi \to \varphi_c^{x_{j_k}}$, entonces $\Omega' \vdash \exists x_{j_k}\varphi \to \varphi_c^{x_{j_k}}$. Por lo tanto C es un conjunto de testigos de $\mathbb{L}^*$.

□

Teorema 4.5.14. *Sea Ω una teoría maximal consistente con un conjunto C de testigos en $\mathbb{L}_{\Sigma^*}$, entonces Ω tiene un modelo.*

Demostración: Sea A el conjunto de los términos sin variables libres sobre la asignatura Σ^*. Definimos la estructura $\mathfrak{U} = \langle A, I\rangle$ sobre Σ^* de la siguiente manera.

$I(c) = c$, si c es una constante individual. $t^{\mathfrak{U}} = t$ para todo término cerrado t de Σ^*. Si f es un simbolo de función, entonces $I(f) : A^n \to A$ es tal que $I(f)(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n)$. Para finalizar, para cada símbolo de predicado P, $I(P) = 1$ si, y sólo si, $\Omega \vdash P(t_1, ..., t_n)$. Probaremos por inducción sobre el número de conectivos y cuantificadores que para toda fórmula cerrada α de Ω:

$$(*)\ \varphi \in \Omega \text{ si, y sólo si, } \vDash_{\mathfrak{U}} \varphi$$

Probaremos $(*)$ por inducción sobre la complejidad de la sentencia φ. Para el caso que la comlejidad sea 0 es inmediato que se verifica. Supongamos que la complejidad de φ es

n y supongamos, también, que se verifica para una complejidad estrictamente menor que n.

Si φ es $\alpha \vee \beta$. Supongamos $\models_{\mathfrak{U}} \alpha \vee \beta \Rightarrow m(\alpha \vee \beta) = 1 \Rightarrow m(\alpha) \vee m(\beta) = 1 \Rightarrow m(\alpha) = 1$ o $m(\beta) = 1 \Rightarrow \Omega \vdash \alpha$ o $\Omega \vdash \beta$ (H.I.) $\Rightarrow \Omega \vdash \alpha \vee \beta$, por el (Ax4), (Ax5) y (MP).

Recíprocamente si $\Omega \vdash \alpha \vee \beta$ y supongamos que $\not\models \alpha \vee \beta$. De lo que inferimos que $m(\alpha \vee \beta) < 1$ y por lo tanto $m(\alpha) < 1$ y $m(\beta) < 1$. Luego, $\not\models_{\mathfrak{U}} \alpha$ y $\not\models_{\mathfrak{U}} \beta$. De esto último y la hipótesis inductiva obtenemos que $\Omega \nvdash \alpha$ y $\Omega \nvdash \beta$ y entonces, $\Omega \vdash \neg\alpha$ y $\Omega \vdash \neg\beta$. Por otro lado, por (Ax6) tenemos que $\vdash (\alpha \rightarrow\perp) \rightarrow ((\beta \rightarrow\perp) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow\perp))$ y (MP), inferimos que $\Omega \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$, lo que es una contradicción.

Si φ es $\alpha \rightarrow \beta$. Supongamos $\models_{\mathfrak{U}} \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow m(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \Leftrightarrow m(\alpha) \rightarrow m(\beta) = 1 \Leftrightarrow m(\alpha) \leq m(\beta)$. Si $m(\alpha) < 1$ entonces $\not\models_{\mathfrak{U}} \alpha$ entonces por hipótesis inductiva $\Omega \nvdash \alpha$ como Ω es una teoría completa $\Omega \vdash \neg\alpha$. Por la Proposición 4.5.1 $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. Por lo tanto, por (MP) $\Omega \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Si $m(\alpha) = 1$, entonces $m(\beta) = 1$, luego $\models_{\mathfrak{U}} \alpha$ y $\models_{\mathfrak{U}} \beta$ y por hipótesis inductiva $\Omega \vdash \beta$. Por (Ax1) y (MP) tenemos que $\Omega \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Recíprocamente, si tenemos que $\Omega \vdash \alpha \rightarrow \beta$, como Ω es una teoría completa puede debe suceder $\Omega \vdash \alpha$ o $\Omega \vdash \neg\alpha$.

Si tenemos que $\Omega \vdash \alpha$ entonces por (MP) tendremos también $\Omega \vdash \beta$ y por hipótesis inductiva $\models_{\mathfrak{U}} \alpha$ y $\models_{\mathfrak{U}} \beta$, luego $m(\alpha) = m(\beta) = 1$ y por lo tanto $m(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, lo que significa que $\models_{\mathfrak{U}} \alpha \rightarrow \beta$.

Si tenemos que $\Omega \vdash \neg\alpha$ entonces por hipótesis inductiva $\models_{\mathfrak{U}} \neg\, \alpha$. Entonces, $m(\alpha) = 0$ entonces $m(\alpha) \rightarrow m(\beta) = 1$, y por lo tanto $\models_{\mathfrak{U}} \alpha \rightarrow \beta$.

Si φ es $\neg\beta$. Inmediato del caso anterior que $\Omega \vdash \beta \rightarrow\perp \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{U}} \beta \rightarrow\perp$.

Si φ es $\triangle\alpha$. Supongamos que $\models_{\mathfrak{U}} \triangle\alpha \Leftrightarrow m(\triangle\alpha) = 1 \Leftrightarrow \triangle m(\alpha) = 1 \Leftrightarrow m(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{U}} \alpha \Leftrightarrow \Omega \vdash \alpha$ (H.I.) $\Rightarrow \Omega \vdash \triangle\alpha$ por (R2). Además si tenemos $\Omega \vdash \triangle\alpha$, por (Ax7) y (MP) $\Omega \vdash \alpha$.

Si φ es $\exists x\alpha$, entonces supongamos que $\models_{\mathfrak{U}} \exists x\alpha \Rightarrow \bigvee\limits_{c_a \in \Sigma^*} m(\alpha_x^{c_a}) = 1 \Rightarrow$ existe un $c \in C$ tal que $m(\alpha_x^c) = 1 \Rightarrow \models_{\mathfrak{U}} \alpha_x^c \Rightarrow$ (H.I.) existe un $c \in C$ tal que $\Omega \vdash \alpha_x^c \Rightarrow$ por $(Ax11)$ y (MP) inferimos que $\Omega \vdash \exists x\alpha$ ya que c es un término libre para x en α. Recíprocamente, su pongamos que $\Omega \vdash \exists x\alpha$. Por hipótesis y de que C es un conjunto de testigos entonces existe $c \in C$ tal que $\Omega \vdash \alpha_x^c$, luego por H.I. $m(\alpha_x^c) = 1$. Por lo tanto, $\bigvee\limits_{c_a \in C} m(\alpha_x^{c_a}) = 1$ y entonces, $\models_{\mathfrak{U}} \exists x\alpha$.

Si φ es $\forall x\alpha$. Supongamos que $\models_{\mathfrak{U}} \forall x\alpha \Leftrightarrow m(\forall x\alpha) = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{c_a \in \Sigma^*} m(\alpha_x^{c_a}) = 1 \Leftrightarrow m(\alpha_x^c) = 1$ para todo $c \in C \Leftrightarrow \Omega \vdash \alpha_x^c$ para todo $c \in C$ (H.I.). Ahora, supongamos que $\Omega \vdash \alpha_x^c$ para todo $c \in C$. Como C es un conjunto de testigos, entonces existe $c \in C$ tal que $\Omega \vdash \exists x\alpha \to \alpha_x^c$, luego por el Lema 4.5.12 $\Omega \vdash \exists x\alpha \to \alpha(y)$ con y varieble libre sobre α. Además, como $\vdash \alpha_x^c \to \exists x\alpha$ por $(Ax11)$ y por lo tanto, $\Omega \vdash \alpha_x^c \to \alpha(y)$. De esto último y (R4), inferimos que $\Omega \vdash \alpha_x^c \to \forall y\alpha(y)$. Como para todo $c \in C$ tenemos que $\Omega \vdash \alpha_x^c$, entonces $\Omega \vdash \forall y\alpha(y)$. Recíprocamente, supongamos $\Omega \vdash \forall x\alpha$, por el axioma $(Ax12)$ tenemos que $\vdash \forall x\alpha \to \alpha_x^c$ para todo $c \in C$, puesto que c es un término libre para x en α. Luego, $\Omega \vdash \alpha_x^c$.

□

Teorema 4.5.15 (Teorema de Completitud)**.** *Sea α una sentencia, entonces: si $\models \alpha$ entonces $\vdash \alpha$.*

Demostración: Supongamos que $\not\vdash \alpha$. Luego, $\{\neg\alpha\}$ es consistente entonces por el Lema 4.5.9 existe una teoría maximal consistente Γ' que la extiende. De esto último, y el Teorema 4.5.14 existe un modelo $\mathcal{U}$ de Γ' y por lo tanto, $\mathcal{U} \models \neg\alpha$ pues $\neg\alpha \in \Gamma'$. Luego, $m(\neg\alpha) = 1$ entonces $m(\alpha) = 0$. De lo que inferimos que $\mathcal{U} \not\models \alpha$, como queriamos probar.

□

Teorema 4.5.16 (Teorema de Compacidad)**.** *Sea Ω una teoría. Entonces, Ω tiene un modelo si, y solo si, toda subteoría finita de Ω tiene un modelo.*

Demostración: Si Ω tiene un modelo $\mathfrak{U}$, entonces toda subteoría finita de Ω tendrá como modelo a $\mathfrak{U}$.

Recíprocamente, si toda subteoría finita Ω_0 de Ω tiene un modelo $\mathfrak{U}$ entonces Ω_0 es consistente. En efecto, si Ω_0 no es consistente, existe $\psi \in For(\Sigma^*)$ de modo que $\Omega_0 \vdash \psi$ y $\Omega_0 \vdash \neg\psi$. Tales derivaciones involucran axiomas de $\mathcal{QH}_3$ y sentencias de Ω_0 que se satisfacen en $\mathfrak{U}$. Además la satisfacción en $\mathfrak{U}$ se preserva bajo las reglas de inferencia de $\mathcal{QH}_3$ y por consiguiente, por el Teorema de Completitud tendremos que $\mathfrak{U} \models \psi$ y $\mathfrak{U} \models \neg\psi$ lo que es imposible. Por lo tanto, dado que toda teoría finita de Ω es consistente, entonces también lo es Ω. Luego, por el Lema 4.5.13 y el Corolario 4.5.10 se puede extender Ω a una teoría Ω' maximal consistente de $\mathbb{L}^*$ que tenga al conjunto C como testigos de $\mathbb{L}^*$. De esto último y el Teorema 4.5.14 inferimos que Ω' tiene un modelo, y como Ω' es una extensión de Ω, entonces Ω tiene un modelo.

$\square$

5. Capítulo V

5.1. Dualidad topológica

En este capítulo expondremos la dualidad topológica obtenida por S. Celani [17] para los semiretículos implicativos, donde se trabaja con espacios topológicos ordenados, en nuestra presentación utilizaremos el orden que se puede definir en los espacios T_0, al estilo de lo realizado por I. Calomino en [8] para semiretículos distributivos. Además nos apoyaremos en las notas del curso del profesor Celani, dictado en el segundo semestre de 2015 ([16]).

5.2. Conceptos preliminares

Definición 5.2.1. *Un espacio topológico es un par (X, τ), donde X es un conjunto no vacío y τ es una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset$ y X están en τ,*
2. *La unión arbitraria de elementos de τ está en τ,*
3. *La intersección finita de elementos de τ está en τ.*

Diremos que τ es una topología para X.

Definición 5.2.2. *Sea X un conjunto. Una base para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X, llamados elementos básicos, tal que:*

1. *Para cada $x \in X$, existe $O \in \beta$ tal que $x \in O$,*
2. *Si $x \in O_1 \cap O_2$, donde $O_1, O_2 \in \beta$, entonces existe $O_3 \in \beta$ tal que $x \in O_3 \subseteq O_1 \cap O_2$.*

Definición 5.2.3. *Sea X un conjunto. Una subbase Γ para la topología sobre X es una colección de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{O_i \in \Gamma} O_i$.*

Definición 5.2.4. *Sea S un semiretículo con ínfimo. Un subconjunto no vacío $F \subseteq S$ diremos que es un filtro de S si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si $x \in F$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.*
2. *Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$.*

Un filtro F es propio si $F \neq S$

Definición 5.2.5. *Sea S un semiretículo con ínfimo diremos que:*

1. *Un filtro propio F de S es primo si, siempre que exista $x \vee y$ y es un elemento de F entonces $x \in F$ o $y \in F$.*
2. *Un filtro propio F de S es maximal si, para cada K filtro de S tal que $F \subseteq K$, tenemos que $F = K$ o $K = S$*

Definición 5.2.6. *Sea S un semiretículo con ínfimo. Un filtro propio F de S es irreducible si para todo $F_1, F_2 \in F(S)$ tal que $F = F_1 \cap F_2$, entonces $F = F_1$ o $F = F_2$. Denotaremos por $F(S)$ al conjunto de los filtros de S y por $Fi(S)$ al conjunto de todos los filtros irreducibles de S.*

Definición 5.2.7. *Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. Una subfamilia $L \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dirá dualmente dirigida si para $U, V \in L$, existe $W \in L$ tal que $W \subseteq U \cap V$.*

Definición 5.2.8. *Sea S un semiretículo. Un subconjunto no vacío $I \subseteq S$ es un ideal de L si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si* $y \in I$ *y* $x \leq y$, *entonces* $x \in I$.

2. *Si* $x, y \in I$, *y existe el supremo* $x \vee y$, *entonces* $x \vee y \in I$.

Un ideal I *es propio si* $I \neq S$. *Denotaremos con* $I(S)$ *al conjunto de todos los ideales de* S.

Definición 5.2.9. *Sea* S *un semiretículo. Un ideal de orden* I *es un subconjunto no vacío de* S *tal que:*

1. *Si* $y \in I$ *y* $x \leq y$, *entonces* $x \in I$.

2. *Para todo par de elementos* $x, y \in I$, *existe* $z \in I$ *tal que* $x \leq z$ *e* $y \leq z$.

Denotaremos por $Id(S)$ *al conjunto de todos los ideales de orden de* S.

Definición 5.2.10. *Sea* S *un semiretículo y* H *un subconjunto de* S *no vacío. El filtro generado por* H *es*

$$[H) = \bigcap \{F : F \in F(S) \text{ y } H \subseteq F\}.$$

El ideal generado por H *es*

$$(H] = \bigcap \{I : I \in I(S) \text{ y } H \subseteq I\}.$$

Definición 5.2.11. *Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto ordenado. Un subconjunto* $Y \subseteq X$ *es creciente, si para todo* $x \in X, y \in Y$ *tal que* $y \leq x$, *entonces* $x \in Y$. *Un subconjunto* $Y \subseteq X$ *es decreciente, si para todo* $x \in X, y \in Y$ *tal que* $x \leq y$, *entonces* $x \in Y$.

El menor subconjunto creciente que contiene a un subconjunto $Y \subseteq X$ es el conjunto

$$\uparrow Y = \{x \in X : y \leq x, \text{ para algún } y \in Y\}$$

De forma análoga, el menor subconjunto decreciente que contiene a un conjunto $Y \subseteq X$ como

$$\downarrow Y = \{x \in X : x \leq y, \text{ para algún } y \in Y\}$$

Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$, el conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X será simbolizado por $\mathcal{P}_c(X)$. De manera similar, el conjunto de todos los subconjuntos decrecientes de X será simbolizado $\mathcal{P}_d(X)$. Observemos que $(\mathcal{P}_c(X), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}_d(X), \subseteq)$ son conjuntos ordenados.

En adelante, S denotará un $\wedge$-semireticulo con último elemento 1. Entonces si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, entonces la terna $(\mathcal{P}_c, \cap, X)$ es un semiretículo ([17]).

Definición 5.2.12. *Sea S un semiretículo. Diremos que S es distributivo si para todo $a, b_0, b_1 \in S$ tal que $b_0 \wedge b_1 \leq a$, entonces existen $a_0, a_1 \in S$ tal que $b_0 \leq a_0$, $b_1 \leq a_1$ y $a = a_0 \wedge a_1$.*

Es bien sabido que semireticulo $(A, \wedge, 1)$ es distributivo si, y sólo si, la familia de los filtros irreducibles es distributiva (ver [15]).

Teorema 5.2.13 (Celani [18])**.** *Dado un semiretículo distributivo A, si F es un filtro A, e I un ideal de orden de A tal que $F \cap I = \emptyset$, entonces existe un filtro irreducible P tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Demostración: Sea $\Sigma = \{G \in F(A) : F \subseteq G \text{ y } G \cap I = \emptyset\}$. Como $F \in \Sigma$, entonces $\Sigma \neq \emptyset$. Consideremos ahora $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ una cadena de elementos de Σ, es claro que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \Sigma$, entonces por el Lema de Zorn, existe un filtro maximal P en Σ. Resta ver que P es un filtro irreducible de A. Sean $a, b \notin P$ y sean $P_a = [P \cup \{a\})$ y $P_b = [P \cup \{b\})$, entonces $P_a \cap I \neq \emptyset$ y $P_b \cap I \neq \emptyset$. Luego, existen $p_1, p_2 \in P$ y $x, y \in I$ tales que $p_1 \wedge a \leq x$ y $p_2 \wedge b \leq y$. Como tenemos que $I \in Id(A)$, entonces existe $c \in I$ tal que $c \notin P$, $x \leq c$ e $y \leq c$. Luego, si tomamos $p = p_1 \wedge p_2$, tenemos que $p \wedge a \leq c$ y $p \wedge b \leq c$. De esta forma, por Lemma 6 de [18] tenemos que $P \in Fi(A)$.

□

Corolario 5.2.14. *Sea A un semiretículo implicativo.*

1. *Si $F \in F(A)$ y $a \notin F$, entonces existe $P \in Fi(A)$ tal que $F \subseteq P$ y $a \notin P$.*
2. *Si $P \in Fi(A)$ y $a, b \in A$. Entonces $a \to b \notin P$ si, y sólo si, existe un filtro irreducible Q de A tal que $P \subseteq Q$, $a \in Q$ y $b \notin Q$.*

Demostración:

1. Tomando el ideal principal $(a]$, tenemos que $F \cap (a] = \emptyset$. Aplicando el Teorema 5.2.13, tenemos que existe $P \in Fi(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $a \notin P$.

2. $a \to b \notin P$. Sea $P_a = \{x \in A : a \to x \in P\}$ el filtro generado por $P \cup \{a\}$. Es claro que $a \to b \notin P_a$ entonces, por lo demostrado en el inciso anterior, existe $Q \in Fi(A)$ tal que $P \subseteq Q$ y $a \to b \notin Q$. De esta forma $b \notin Q$. Recíprocamente, supongamos $a \to b \in P$, entonces $a \in b \in Q$, y como $a \in Q$ por (IS4) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b \in Q$. A su vez, como $a \wedge b \leq b$, entonces $b \in Q$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $a \to b \notin P$.

□

5.3. Dualidad topológica para semiretículos implicativos

Recordemos que un semiretículo implicativo (o IS-álgebra) es un álgebra $(A, \wedge, \to, 1)$ si verifica:

(IS1) $x \to x = y \to y$,

(IS2) $(x \to y) \wedge y = y$,

(IS3) $x \to (y \wedge z) = (x \to z) \wedge (x \to y)$,

(IS4) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$.

En los semireticulos implicativos, la noción de sistema deductivo y filtro coinciden, y la familia de sistemas deductivos de un álgebra dada es isomorfa por el orden al retículo de las congruencias, y este es completo ([23]).

Sea un S un semiretículo implicativo, notaremos por $D(S)$ al conjunto de los s.d. de S y por $X(S)$ al conjunto de todos los s.d. irreducibles de S. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X.

Teorema 5.3.1. *Sea A un semiretículo implicativo. Entonces:*

(1) Sea $D \in X(A)$, para todo $a, b \notin D$ existe $c \notin D$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

(2) Para todo $a, b \in A$, si $a \nleq b$ existe $D \in X(A)$ tal que $a \in D$ y $b \notin D$.

Demostración:

(1): Teorema 7 pag. 30 de [23].

(2): Theorem 2.3 [15].

□

Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$, el conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X será simbolizado por $\mathcal{P}_c(X)$. Observemos que $(\mathcal{P}_c(X), \subseteq)$ son conjuntos ordenados.

Teorema 5.3.2. *Sea A una IS-álgebra. Entonces,*

(1) A es isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{P}_c(X(A))$ donde el isomorfismo está dado por la función $\beta_A : A \to \mathcal{P}_c(X(A))$, con $\beta_A(a) = \{P \in X(A) : a \in P\}$

(2) la familia $\beta_A(A)^c = \{\beta_A(a)^c : a \in A\}$ donde $\beta_A(a)^c = X(A) \setminus \beta_A(a)$, es una base para una topologia sobre $X(A)$.

Demostración:

(1) Es claro que β_A es inyectiva. Por otro lado, veamos que $\beta_A(a) \in \mathcal{P}_c(X(A))$ para $a \in S$. En efecto, sea $P \in \beta_A(a)$ y $P \subseteq Q$. Como $P \in \beta_A(a)$, entonces $a \in P$, pero entonces $a \in Q$, es decir $Q \in \beta_A(a)$. De esta forma $\beta_A(a) \in \mathcal{P}_c(X(A))$. Probemos ahora que $\beta_A(a \wedge b) = \beta_A(a) \cap \beta_A(b)$, $\beta_A(a \to b) = \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b)$ y $\beta_A(1) = X(A)$. En efecto, sea $P \in \beta_A(a \wedge b)$, entonces $a \wedge b \in P$. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$ se tiene que $a, b \in P$, es decir, $P \in \beta_A(a) \cap \beta_A(b)$. Recíprocamente, si $P \in \beta_A(a) \cap \beta_A(a)$, entonces $a, b \in P$, por lo tanto $a \wedge b \in P$, de esta forma $P \in \beta_A(a \wedge b)$. Veamos que $\beta_A(a \to b) = \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b)$. Sean $P, Q \in X(A)$ y $a, b \in A$ tales que $a \to b \in P$. Si $Q \in [P) \cap \beta_A(a)$, entonces $a \in Q$ y $a \to b \in Q$, luego $b \in Q$. Supongamos que $a \to b \notin P$, por el Corolario 5.2.14, existe $Q \in X(A)$ tal que $P \subseteq Q$ y $b \notin Q$, entonces $P \notin \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b)$. De las definiciones de sistema deductivo irreducible y β_A resulta evidente que $\beta_A(1) = X(A)$.

(2) Como los Sistemas Deductivos Irreducibles son propios, tenemos que $X(A) = \bigcup_{a \in A} \beta_A(a)^c$, en efecto:

$\subseteq$) Sea $S \in X(A)$, existe $t \in A : t \notin S$, entonces $S \notin \beta_A(t)$, por lo tanto $S \in \beta_A(t)^c \subseteq \bigcup_{a \in A} \beta_A(a)^c$. De esta forma $X(A) \subseteq \bigcup_{a \in A} \beta_A(a)^c$

$\supseteq$) Sea $S \in \bigcup_{a\in A} \beta_A(a)^c$, entonces existe $u \in A : S \in \beta_A(u)^c = X(A) \setminus \beta_A(u)$, luego $S \in X(A)$, por lo tanto $X(A) \supseteq \bigcup_{a\in A} \beta_A(a)^c$

Más aún, para todo $a, b \in A$ y para todo $P \in X(A)$, si $P \in \beta_A(a)^c \cap \beta_A(b)^c$ entonces $P \in X(D)$ y $a, b \notin P$ por el Teorema 5.3.1, existe $c \notin P$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$, de esta forma $\beta_A(a), \beta_A(b) \subseteq \beta_A(c)$, por lo tanto $P \in \beta_A(c)^c \subseteq \beta_A(a)^c \cap \beta_A(b)^c$. De esta forma $\beta_A(A)^c = \{\beta_A(a)^c : a \in A\}$ es una base para la topología sobre $X(A)$.

$\square$

Sea (X, τ) un espacio topológico. La clausura de un conjunto $Y \subseteq X$ será denotada por $cl(X)$. En el caso que $Y = \{y\}$, vamos a denotar $cl(\{y\}) = cl(y)$. Definimos la siguiente realción sobre X como sigue:

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \in cl(y)$$

Notemos que $\preceq$ es reflexiva y transitiva, aunque no necesariamente antisimétrica.

Definición 5.3.3. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto no vacío $Y \subseteq X$ es irreducible si para cualquier par de cerrados Z, W tales que $Y \subseteq Z \cup W$, entonces $Y \subseteq Z$ o $Y \subseteq W$.*

Definición 5.3.4. *Un espacio topológico X es sober si para cada conjunto cerrado irreducible Y, existe un único $x \in X$ tal que $cl(x) = Y$.*

Lema 5.3.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

1. *Si X es sober, entonces la relación $\preceq$ es un orden.*

2. *La relación $\preceq$ es un orden si, y sólo si, el espacio X es T_0.*

Demostración: Ver [8]

$\square$

Cuando el espacio sea T_0, llamaremos a la relación $\preceq$ orden inducido por la topología τ. El orden dual de $\preceq$, que será denotado por $\leq$, se define como $x \leq y$ si, y sólo si, $y \in cl(x)$, De ahora en más X denotará un espacio topológico dotado con el orden dual. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{K}$ una base de abiertos y compactos de X. Consideremos el conjunto $D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}$.

Teorema 5.3.6. *Sea A una IS-álgebra, entonces $(D(X(A)), \cap, \Rightarrow, X)$ es una IS-álgebra, donde $U \Rightarrow V = \{x \in X(A) : [x) \cap U \subseteq V\} \in D(X(A))$.*

Demostración: Sea $U \in D(X(A))$. Por el Teorema 5.3.2 (2), $\beta_A(A)^c$ es una base para la topología sobre $X(A)$ tenemos que $D(X(A)) = \{U : U^c \in \beta_A(A)^c\}$, entonces a cada U^c lo podemos expresar como la siguiente unión:

$$U^c = \bigcup\{\beta_A(a)^c : a \in B \subseteq A\},$$

y como U^c es compacto, existe $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq B$ tal que

$$U^c = \beta_A(a_1)^c \cup ... \cup \beta_A(a_n)^c = (\beta_A(a_1) \cap ... \cap \beta_A(a_n))^c.$$

Entonces, cada $U \in D(X(A))$ es intersección finita de elementos de la base $\beta_A(A)^c$. Por lo tanto, $U \cap V \in D(X(A))$, para todo $U, V \in D(X(A))$. Sean $U, V \in D(X(A))$. Probaremos que $U \Rightarrow V \in D(X(A))$. Como existen $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k \in A$ tal que $U = \beta_A(a_1) \cap ... \cap \beta_A(a_n)$ y $V = \beta_A(b_1) \cap ... \cap \beta_A(b_k)$, entonces

$$\begin{aligned} U \Rightarrow V = U \Rightarrow (\beta_A(b_1) \cap ... \cap \beta_A(b_k)) \\ = (U \Rightarrow \beta_A(b_1)) \cap ... \cap (U \Rightarrow \beta_A(b_k)) \cap ... \cap (\beta_A(a_n) \Rightarrow (...(\beta_A(a_n) \Rightarrow \beta_A(b_k))...)). \end{aligned}$$

Por suposición $(\beta_A(a_1) \Rightarrow (...(\beta_A(a_n) \Rightarrow \beta_A(b_j))...)) \in D(X(A))$ para todo $1 \leq j \leq k$. Entonces, $U \Rightarrow V \in D(X(A))$, y de esta forma $D(X(A))$ es una IS-álgebra. $\square$

Teorema 5.3.7. *Sea A una IS-álgebra. Entonces, la función $\beta_A : A \to D(X(A))$ es un isomorfirmo.*

Demostración: De Theorem 11 de [18] tenemos que si A es un semiretículo distributivo, entonces A es isomorfo a la subálgebra $\beta_A(A) = \{\beta_A(a) : a \in A\}$ de $\mathcal{P}_c(X(A))$. Resta probar que $\beta_A(a \to b) = \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b)$. Sea $S \in \beta_A(a \to b)$, entonces $a \to b \in S$, veamos que $S \in \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b) = \{X \in X(A) : [X) \cap \beta_A(a) \subseteq \beta_A(b)\}$, es decir $[S) \cap \beta_A(a) \subseteq \beta_A(b)$. Sea $T \in [S) \cap \beta_A(a)$, entonces $a \in T$ y $S \subseteq T$, por lo tanto $a, a \to b \in T$, luego $b \in T$ y entonces, $T \in \beta_A(b)$. Recíprocamente, sea $S \in \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b)$, y supongamos por absurdo que $a \to b \notin S$. Consideremos el sistema deductivo S_a generado por $(S \cup \{a\})$, como $b \notin S_a$, existe $Q \in X(A) : S \subseteq Q, a \in Q$ y $b \notin Q$, por lo tanto $P \notin \beta_A(a) \Rightarrow \beta_A(b)$, lo que es un absurdo, que proviene de suponer que $a \to b \notin S$, por lo tanto $S \in \beta_A(a \to b)$.

$\square$

Es claro que tenemos que una A IS-álgebra es isomorfa a $D(X(A))$.

En lo que sigue vamos a definir los espacios duales de las IS-álgebras, los cuales deberan SD-espacios ([17, 8]) especiales. En efecto,

Definición 5.3.8. *Sea X un espacio topológico diremos que es un IS-espacio si:*

(i) *X es sober,*

(ii) *el conjunto $\mathcal{KO}(X)$ de los abiertos-compactos forman una base para una topologica de X,*

(iii) *$(U \Rightarrow V)^c \in \mathcal{KO}(X)$ para todo $U, V \in \mathcal{KO}(X)$.*

Recordemos que un espacio X es un DS-espacio ([18, 8]) si verifica (i) y (ii) de la definición IS-espacio.

Consideraremos la funcion $H_X : X \to X(D(X))$ definida por $H_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ para un DS-espacio X, en Lemma 15 de [18] se prueba que H_X esta bien definida. En Theorem 18 se demuestra que H_X es isomorfismo de orden y un hoemomorfismo. Luego, tenemos probado el siguente:

Teorema 5.3.9. *Sea X un IS-espacio, entonces $H_X : X \to X(D(X))$ es isomorfismo de orden y un homeomorfismo de IS-espacios.*

Teorema 5.3.10. *Sea X un IS-espacio, entonces $H_X(x) \in X(D(X))$ para todo $x \in X$ si, y sólo si, el conjunto $D^c = \{U^c : U \in D(X)\}$ es una base para la topologia definida sobre X.*

Demostración: Supongamos que $H_X(x) \in X(D(X))$ para todo $x \in X$. Como $H_X(x)$ es propio, entonces existe $U \in D(X)$ tal que $x \notin U$. Así, $X = \bigcup\{U^c : U \in D(X)\}$. Sean $U, V \in D(X)$ y sea $x \in U^c \cap V^c$. Entonces, $U, V \notin H_X(x)$, y como $H_X(x)$ es irreducible, entonces existe $W \in D(X)$ tal que $W \notin H_X(x)$, $U \subseteq W$ y $V \subseteq W$. Así, $x \in W^x \subseteq U^c \cap V^c$. Concluímos que D^c es una base de la topología sobre X.

Sea D^c es una base para la topología sobre X, veamos que $H_X(x) \in X(D(X))$. $H_X(x)$ es un sistema deductivo, en efecto: supongamos $U, V \Rightarrow V \in H_X(x)$, entonces $x \in U, x \in U \Rightarrow V = \{z \in D(X) : [z) \cap U \subseteq V\}$, entonces $[x) \cap U \subseteq V$. Como $x \in [x) \cap U$ entonces $x \in V$, por lo tanto $V \in H_X(x)$.

Veamos ahora que $H_X(x)$ es irreducible. Es claro que $H_X(x) \subseteq D(X)$. Sean $F_1, F_2 \subseteq D(X)$ sistemas deductivos propios tales que $H_X(x) = F_1 \cap F_2$. Veamos que $H_X(x) \subseteq F_1$ o $H_X(x) \subseteq F_2$. Supongamos por el absurdo que $H_X(x) \nsubseteq F_1$ y $H_X(x) \nsubseteq F_2$. Entonces existe $P_1 \in F_1$ y $P_2 \in F_2$ tal que $P_1 \notin H_X(x)$ y $P_2 \notin H_X(x)$. Es claro que $x \notin P_1$ y $x \notin P_2$, entonces $x \in P_1^c$ y $x \in P_2^c$, entonces $x \in P_1^c \cap P_2^c$. Como D^c es una base, y $P_1^c, P_2^c \in D^c$ tenemos que existe $P_3^c \in D^c$ tal que $x \in P_3^c \subseteq P_1^c \cap P_2^c$, entonces $P_3^c \in H_X(x)$. Como $H_X(x)$ es un sistema deductivo y al ser $(D(X), \cap, \emptyset, X)$ es IS-álgebra por el Teorema 5.3.6, entonces $H_X(x)$ es filtro. Luego, $P_1^c \cap P_2^c \in H_X(x)$ es filtro. Luego $P_1^c \cap P_2^c \in H_X(x)$, además $P_1^c \cap P_2^c \subseteq P_1^c$, entonces $P_1^c \in H_X(x) = F_1 \cap F_2$, entonces $P_1^c \in F_1$, entonces por ser filtro, $P_1 \cap P_1^c \in F_1 \Leftrightarrow \emptyset \in F_1$, por lo tanto F_1 no es propio, lo que es un absurdo.

□

Observemos que la condición necesaria del Teorema 5.3.10, no precisa de la hipoótesis de que D^c sea base para una topología sobre X.

Definición 5.3.11. *Sea X un IS-espacio tal que $H_X(x) \in X(D(X))$, diremos que:*

(1) X es saturado si para cada $x \in X$ y para el par $(\Gamma, \Sigma) \subseteq D(X) \times D(X)$, con $\Sigma^c = \{U \in D(X) : U \notin \Sigma\}$ dualmente dirigida, tal que para cada $\{O_1, ..., O_n\} \subseteq \Gamma$ y para cada $\{V_1, ..., V_k\} \subseteq \Sigma$,

$$[x) \cap O_1 \cap ... \cap O_n \cap V_1^c \cap ... \cap V_k^c \neq \emptyset,$$

entonces se cumple

$$[x) \cap \bigcap \Gamma \cap \bigcap \Sigma^c \neq \emptyset.$$

(2) X es repleto si para cada $x, y \in X$ tal que $H_X(x) \subseteq H_X(y)$, existe $x \in X$ con $x \leq z$ y $H_X(z) = H_X(y)$.

Teorema 5.3.12. *Sea X una IS-álgebra tal que D^c es una base de abiertos compactos para la topología definida sobre X. Supongamos que la función $H_X : X \longrightarrow X(D(X))$ es inyectiva. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) X es un IS-espacio.

(2) H_X es sobreyectiva y X es saturado.

(3) H_X es sobreyectiva y X es repleto.

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$ Como X es un IS-espacio, la función H_X es sobreyectiva. Sea $x \in X$ y consideremos Γ y Σ de $D(X)$ tal que Σ es dualmente dirigida. Supongamos que

$$[x) \cap O_1 \cap ... \cap O_n \cap V_1^c \cap ... \cap V_k^c \neq \emptyset,$$

para todo $\{O_1, ..., O_n\} \subseteq \Gamma$ y para todo $\{V_1, ..., V_l\} \subseteq \Sigma$. Consideremos el filtro generado por $\Gamma \cup H_X(x)$ y el conjunto $I(\Sigma) = \{U \in D(X) : \text{existe } V \in \Sigma : U \subseteq V\}$. Como Σ es dualmente dirigido, $I(\Sigma)$ es un ideal. Se puede ver facilmente que el filtro generado por $\Gamma \cup H_X(x)$ intersectado con $I(\Sigma)$ son disjuntos. Como H_X es sobre, existe $y \in X$ tal que $\Gamma \cup H_X(x) \subseteq H_X(y)$ y $\Sigma \cap H_X(y) = \emptyset$, es decir, $y \in [x) \cap \bigcap \Gamma \cap \bigcap \Sigma^c$. Por lo tanto, X es saturado.

$2 \Rightarrow 3$ Vemos que si X es saturado entonces es repleto. Sean $x, y \in X$ tales que $H_X(x) \subseteq H_X(y)$. Es claro que $H_X(y)^c = \{U \in D(X) : x \notin U\}$ es un subconjunto de $D(X)$ dualmente dirigido. Más aún, para cada $\{O_1, ..., O_n\} \subseteq H_X(y)$ y para cada $\{V_1, ..., V_k\} \subseteq H_X(y)$, tenemos que

$$[x) \cap O_1 \cap ... \cap O_n \cap V_1^c \cap ... \cap V_k^c \neq \emptyset,$$

ya que, en caso contrario, como $H_X(y)^c$ es un ideal de orden, entonces existe $W \notin H_X(y)^c$ tal que $W^c \subseteq V_1^c \cap ... \cap V_k^c$. Entonces, $[x) \cap O_1 \cap ... \cap O_n \cap W^c \neq \emptyset$ implica que $x \in O_1 \Rightarrow (O_2 \Rightarrow ...(O_n \Rightarrow W)...) \in H_X(x) \subseteq H_X(y)$, y como $H_X(y)$ es un sistema deductivo de $D(X)$, $W \in H_X(y)$, lo que es una contradicción. Así, $[x) \cap \bigcap H_X(x) \cap \bigcap H_X(y)^c \neq \emptyset$, es decir, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $H_X(z) = H_X(y)$.

$3 \Rightarrow 1$ Es claro que $D(X)^c \subseteq \mathcal{KO}(X)$. Sea ahora $A \in \mathcal{KO}(X)$, como A es abierto entonces $A = \bigcup\{U_i^c : U_i \in \mathcal{K} \subseteq D(X)$. Además, $D(X)$ es una IS-álgebra de lo que inferimos que $A^c \in D$. Por lo tanto, $D^c = \mathcal{KO}(X)$. Veamos ahora que todos los subconjuntos cerrados son crecientes. En efecto, sea F un subconjunto cerrado entonces F^c es abierto. Luego, $F^c = \bigcup\{U_i^c : U_i \in \mathcal{Z} \subseteq D(X)\}$, es decir, $F = \bigcap\{U_i : U_i \in \mathcal{Z} \subseteq D(X)\}$. De lo que tenemos que F es intersección de subconjutos crecientes, por lo que es un subconjuto creciente. Probemos ahora que H_X es un isomorfismo de orden. Sean $x, y \in X$ tal que $H_X(x) \subseteq H_X(y)$, como X es repleto, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $H_X(y) = H_X(z)$, y de que H_X es inyectivo tenemos que $y = z$. Enconces, $x \leq y$, y por lo tanto, H_X es isomorfismo de orden. Por lo que concluímos que X es un IS-espacio.

□

Teorema 5.3.13. *Sea X un IS-espacio, X es saturado y repleto.*

Demostración: Por el Teorema 5.3.9 tenemos que la función H_X es inyectiva. Luego, por el Teorema 5.3.10 D^c es una base para la topología definida sobre X. Además, por tratarse de D^c una base de abiertos compactos, por el Teorema 5.3.12 podemos concluir que X es saturado y repleto.

□

5.4. Dualización de los morfismos

Obeservemos que si tenemos A y B dos IS-álgebras, entonces la función $h : A \to B$ es un *homomorfismo de semireticulos* si $h(1) = 1$ y $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$. Notemos que si h es un homomorfismo de semireticulos se verifica $h(x \to y) \leq h(x) \to h(y)$ ([17]). Luego, definiremos IS-homomorfismo como uno de semiretículos que verifica: $h(x) \to h(y) \leq h(x \to y)$

Definición 5.4.1. *Sean X_1, X_2 dos IS-espacios y $R \subseteq X_1 \times X_2$. Diremos que R es una* sub-relación *si:*

(1) Para todo $U \in D(X_2)$, $h_R(U) = \{x \in X_1 : R(x) \subseteq U\} \in D(X_1)$,

(2) $R(X) = \bigcap\{U \in D(X_2) : R(x) \subseteq U\}$, para todo $x \in X_1$.

Una sub relación $R \subseteq X_1 \times X_2$ *es una* relación funcional *si para todo* $x \in dom(R)$ *y para todo* $y \in R(x)$ *existe* $z \in X_1$ *tal que* $x \leq z$ *y* $R(z) = [y)$

Sean A_1 y A_2 dos IS-álgebras y sea $h : A_1 \longrightarrow A_2$ un homomorfismo de semiretículos. Entonces la relación $R_h : X(A_2) \times X(A_1)$ dada por

$$(P, Q) \in R_h \text{ si, y sólo si, } h^{-1}(P) \subseteq Q,$$

para cada $P \in X(A_2)$ es una sub relación [18]. Sean X e Y dos IS-espacios. Si $R : X_1 \times X_2$ es una sub relación, entonces el mapeo $h_R : D(X_2) \longrightarrow D(X_1)$ dado por

$$h_R(U) = \{x \in X_1 : R(x) \subseteq U\}$$

es un homomorfismo de semiretículos. Luego, por resultados dados en semiretículos distributivos (ver [18]) existe una dualidad entre homomorfismos de semiretículos y subrelaciones. Ahora, probaremos que la clase de relaciones funcionales es equivalente a ciertas clases de funciones (parciales) entre dos IS-espacios.

Definición 5.4.2. *Sean* X_1 *y* X_2 *dos IS-espacios. Una función parcial* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *es un* IS-morfismo *si:*

(1) Para todo $x, y \in dom(f)$*, si* $x \leq y$ *entonces* $f(x) \leq f(y)$*.*

(2) Si $x \in dom(f)$ *y* $f(x) \leq y$*, entonces existe* $x \in dom(f)$ *tal que* $x \leq z$ *y* $f(z) = y$*.*

(3) Para todo $U \in D_2$*,* $(f^{-1}(U)^c]^c \in D_1$*.*

Teorema 5.4.3. *Existe una correspondencia biyectiva entre relaciones funcionales e IS-morfismos definida entre dos IS-espacios.*

Demostración: Sean X_1 y X_2 dos IS-espacios. Sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ es un IS-morfismo. Definimos la relación binaria $R_f \subseteq X_1 \times X_2$ como

$$(x, y) \in R_f \Leftrightarrow (\exists z \in dom(f))\ x \leq z \text{ y } f(x) = y.$$

Probemos que R_f es una relación funcional. Sea $x \in dom(f)$ e $y \in R_f(x)$. Entonces existe $z \in dom(f)$ tal que $x \leq z$ y $f(z) = y$. Probaremos que $R_f(z) = [y)$. Sea $a \in R_f(z)$. Entonces existe $b \in dom(f)$ tal que $z \leq b$ y $f(b) = a$. Como f es creciente, $f(z) = y \leq f(b) = a$. Así, $y \leq a$. Supongamos que $y \leq a$. Como $f(z) = y \leq a$ y f es un IS-morfismo, entonces existe $k \in dom(f)$ tal que $z \leq k$ y $f(k) = a$. Entonces, $a \in R_f(z)$.

Probemos que $h_{R_f}(U) = (f^{-1}(U)^c]^c$, para todo $U \in D_1$. Supongamos que $x \in (f^{-1}(U)^c]$. Entonces existe $f(z) \notin U$ tal que $x \leq z$. Sea $y = f(z)$. Entonces, $(x, y) \in R_f$ e $y \notin U$. Así, $R_f(x) \subsetneq U$, es decir, $x \notin h_{R_f}(U)$.

Sea $x \in (f^{-1}(U)^c]^c$ y supongamos que $x \notin h_{R_f}(U)$. Entonces, existe $y \in X_2$ tal que $(x, y) \in R_f$ e $y \notin U$. Por la definición de R_f, tenemos un elemento $z \in X_1$ tal que $x \leq z$ y $f(z) = y$. Así, $x \leq z$ y $z \in f^{-1}(U)^c$, lo que implica que $x \in (f^{-1}(U)^c]$, que resulta ser una contradicción. Por lo tanto concluímos que R_f es una relación funcional.

Recíprocamente, consideremos una relación funcional $R \subseteq X_1 \times X_2$ y el conjunto

$$X_R = \{z \in X_1 : (\exists x \in X_1)(\exists y \in X_2)\ x \leq z \text{ y } R(z) = [y)\}$$

Definimos un mapeo parcial $f_R : X_1 \longrightarrow X_2$ con $dom(f) = X_R$ de la siguiente manera: Para $z \in X_R$, sea $f_R(z) = y$ tal que $R(z) = [y)$. Probaremos que f_R es un IS-morfismo. Sean $x, y \in X_R$ tal que $x \leq y$. Entonces, existe $x', y' \in X_2$ tal que $R(x) = [x')$ y $R(y) = [y')$. Como $x \leq y$, entonces $R(x) = [x') \subseteq R(y) = [y')$, lo que implica que $x' \leq y'$, lo que quiere decir que $f_R(x) \leq f_R(y)$. Así f_R es creciente.

Sea $y = f_R(z) \leq k$. Entonces, $R(z) = [y)$. Como $(z, x) \in R$, $y \leq k$ y R es una relación funcional, existe $d \in X_1$ tal que $z \leq d$ y $R(d) = [k)$. Entonces, $f_R(d) = k$.

Finalmente, es fácil probar que $h_R(U) = (f_R^{-1}(U)^c]^c$, para todo $U \in D_1$. Así, f_R es un IS-morfismo. $\square$

Ahora probaremos que la relación funcional (o IS-morfismo) es el dual del IS-homomorfismos.

Teorema 5.4.4. *Sean X_1 y X_2 dos IS-espacios. Una sub relación $R \subseteq X_1 \times X_2$ es una relación funcional si, y sólo si, $h_R(U) \Rightarrow h_R(V) \subseteq h_R(U \Rightarrow V)$ para cualquier $U, V \in D(X_2)$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Primero probaremos que si R es una sub relación, entonces $(R\circ \leq) \subseteq R$, donde $\circ$ denota la composición de relaciones. Supongamos lo contrario. Entonces, existe $x \in X_1$ e $y, k \in X_2$ tal que $(x, y) \in R$, $y \leq k$ y $(x, k) \notin R$. Como $R(x) = \bigcap\{U \in D(X_2) : R(x) \subseteq U\}$, entonces $k \notin U$, para algún $U \in D(X_2)$ tal que $R(x) \subseteq U$. Entonces, $y \in U$, pero como U es creciente e $y \leq k$, tenemos que $y \notin U$, lo que es una contradicción. Luego, $(R\circ \leq) \subseteq R$.

Supongamos que existe $U, V \in D(X_2)$ tal que $h_R(U) \Rightarrow h_R(V) \nsubseteq h_R(U \Rightarrow V)$. Entonces existe $x \in X_1$ e $y, k \in X_2$ tal que $[x) \cap h_R(U) \subseteq h_R(V)$, $(x, y) \in R$, $[y) \cap U \nsubseteq V$, $y \leq k$, $k \in U$, y $k \notin V$. Entonces $(x, k) \in R$ y como R es una relación funcional, existe $z \in X_1$ tal que $x \leq z$ y $R(z) = [k)$. Así, $z \in [x) \cap h_R(U) \subseteq h_R(V)$. Entonces $R(z) = [k) \subseteq V$, lo que es una contradicción. Así, $h_R(U) \Rightarrow h_R(V) \subseteq h_R(U \Rightarrow V)$ para cualquier $U, V \in D(X_2)$.

$\Leftarrow$) Sea $(x, y) \in X_1 \times X_2$ tal que $(x, y) \in R$. Consideremos un subconjunto finito $\{U_1, ..., U_n\} \subseteq H_{X_2}(y)$ y $\{V_1, ..., V_k\} \subseteq H_{X_2}(y)^c$. Probemos que

$$[x) \cap h_R(U_1) \cap ... \cap h_R(U_n) \cap h_R(V_1)^c \cap ... \cap h_R(V_k)^c \neq \emptyset$$

Supongamos lo contrario. Como $H_{X_2}(y)^c$ es un ideal de orden, entonces existe $W \in H_{X_2}(y)^c$ tal que $V_i \subseteq W$, para $1 \leq i \leq k$. Entonces,

$$[x) \cap h_R(U_1) \cap ... \cap h_R(U_n) \cap h_R(W)^c = [x) \cap h_R(U_1 \cap ... \cap U_n) \cap h_R(W)^c = \emptyset.$$

Así, $x \in h_R(U_1 \cap ... \cap U_n) \Rightarrow h_R(W) \subseteq h_R((U_1 \cap ... \cap U_n) \Rightarrow W)$, es decir, $R(x) \subseteq (U_1 \cap ... \cap U_n) \Rightarrow W$. Como $(x, y) \in R$ y $\{U_1, ..., U_n\} \subseteq H_{X_2}(y)$, tenemos que $W \in H_{X_2}(y)$, lo que es ua contradicción. Como X_1 es saturado, tenemos que

$$[x) \cap \bigcap\{h_R(U) : y \in U\} \cap \bigcap\{h_R(V)^c : y \notin V\} \neq \emptyset.$$

Entonces existe $z \in X_1$ tal que $x \leq z$, $z \in \bigcap\{h_R(U) : y \in U\}$, y sea $z \in \bigcap\{h_R(V)^c : y \notin V\}$. Ahora, es fácil ver que $z \in [x)$ y $R(z) = [y)$. $\square$

De los resultados anteriores tenemos que existe una dualidad entre la categoría de IS-álgebras con IS-homomorfismos y la categoría de IS-espacios con relaciones funcionales (o IS-morfismos). Los siguientes diagramas representan equivalencia categórica:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta_A"'] & B \arrow[d, "\beta_B"] \\
\beta_A(A) \arrow[r, "h_{R_h}"] & \beta_B(B)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "R"] \arrow[d, "H_X"'] & Y \arrow[d, "H_Y"] \\
Fi(D(X)) \arrow[r, "R_{h_R}"] & Fi(D(Y))
\end{tikzcd}
$$

6. Capítulo VI

6.1. Conclusiones y trabajo futuro

El desarrollo de esta tesis pretendió ser una introducción al estudio de los reductos hilbertianos de las álgebras de Lukasiewicz-Moisil. Podemos concluir que en este trabajo se presentan todos los reductos con operaciones reticulares que se pueden estudiar sobre las álgebras de Łukasiewicz de orden 3.

Por otro lado, en la tesis doctoral de M. C. Canals Frau ([9]) se estudió las álgebras de Hilbert n-valentes modales que pueden ser definidas como sigue:

Definición 6.1.1. *Un álgebra* $\langle A, \to, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1}, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 1, ..., 1, 0)$ *es un álgebra de Hilbert modal n-valuada si el reducto* $\langle A, \to, 1\rangle$ *es un álgebra de Hilbert n-valente y* $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ *verifican las siguientes identidades:*

(M1) $(\sigma_1 x \to y) \to x = x$,

(M2) $\sigma_i(x \to y) \to (\sigma_i x \to \sigma_j y) = 1$, *para todo* $1 \leq i \leq j \leq n$,

(M3) $(\sigma_i x \to \sigma_i y) \to ((\sigma_{i+1} x \to \sigma_{n+1} y) \to ...((\sigma_{n-1} x \to \sigma_{n-1} y) \to \sigma_i(x \to y))...) = 1$,

(M4) $\sigma_i(x \to \sigma_j y) = x \to \sigma_j y$,

(M5) $\sigma_{n-1} x = (x \to \sigma_i x) \to \sigma_j x$, *para todo* $1 \leq i \leq j \leq n$.

Esta autora también estudió los semirectículos implicativos modales n-valentes, que pueden ser definidos como:

Definición 6.1.2. *Los semiretículos implicativo $(n+1)$-valuados modales son álgebras $< A, \rightarrow, \wedge, \sigma_1, ..., \sigma_n, 1 >$ de tipo $(2, 2, 1, ..., 1, 0)$ tales que el reducto $< A, \rightarrow, \wedge, 1 >$ es un álgebra de semireticulo implicativo y el reducto $< A, \rightarrow, \sigma_1, ..., \sigma_n, 1 >$ es un $mH_{(n+1)}$-álgebra que verifica:*

(M6) $\sigma_i(x \wedge y) = \sigma_i x \wedge \sigma_i y$ *para todo* $1 \leq i \leq n$

Este trabajo puede ser enmarcado como el estudio de diversos reductos hilbertianos de las álgebras de Lukasiewicz-Moisil de orden n. Por otra parte, la prueba de que el supremo se puede definir en térmminos del ínfimo y la implicación trivalente se verifica de manera análoga para el caso n-valente.

Ahora, para pensar en otros fragmentos con operaciones reticulares debemos explorar las álgebras de Hilbert con esas operaciones, para lo cual fue fundamental el trabajo introductorio de esta tesis, que permitirá llevar adelante un trabajo acorde al grado de doctor.

Algunos de los objetivos son:

(i) Realizar una revisión de trabajos sobre las álgebras de Hilbert y en particular, los referidos a las álgebras de Hilbert modales $(n+1)$- valuadas y los semiretículos implicativos modales $(n+1)$-valuados.

(ii) Comenzar con el estudio de las álgebras de Hilbert con supremo $(n+1)-$valuadas (o $H^{\vee}_{n+1}$-álgebras) equipadas con el operador σ_1. Continuar con el estudio de las $H^{\vee}_{n+1}$-álgebras con el operador σ_n y en particular, determinar si existe alguna relación entre ellas.

(iii) Resolver los problemas clásicos que plantea la investigación de una nueva variedad, a las introducidas en el inciso (ii), tales como: la determinación de las congruencias, álgebras subdirectamente irreducibles, álgebras simples, objetos libres.

(iv) Investigar si en las $H^{\vee}_{n+1}$-álgebras es posible definir los operadores $\sigma_2, \ldots \sigma_n$ a partir de la implicación de Hilbert, el σ_1 y el supremo $(\vee)$. Además, se investigará la variedad de las $H_{n+1}^{\vee}$-álgebras enriquecidas con los operadores $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n\}$ a las que llamaremos $H_{n+1}^{\vee}$-extensiones.

(v) Un vez concluidos los anteriores items se comenzará con el estudio del reducto $\{\to, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \forall\}$ de las álgebras de Lukasiewicz monádicas estudiadas por M. Abad en sus tesis doctoral ([1]), las mismas serán las $H_{n+1}^{\vee}$-extensiones con un cuantificador universal que deberá conmutar con los operadores de Moisil.

(vi) Determinar las posibles conexiones de las $H_{n+1}^{\vee}$-extensiones con un cuantificador con los subreductos implicativos de las MV_{n+1}-álgebras monádicas y las álgebras implicativas de Lukasiewicz monádicas n-valentes estudiadas en la tesis doctoral de C. Cimadamore (ver [21]). Nos veremos especialmente interesados para los casos $n \leq 5$.

(vii) A las estructuras algebraicas introducidas y estudiadas en este plan, se les pretende dar representaciones topológicas, por medio de Dualidades Espectrales, en especial si las estructuras son retículos no necesariamente distributivos. Para lo cual se utilizarán las técnicas desarrolladas por S. Celani y su co-autores para las álgebras de Hilbert con operaciones reticulares ([20, 19]). La tesis dotoral de Maria Esteban ([26]) presentada en la Universidad de Barcelona, se encuentra relacionada a esta parte de la propuesta.

Esta propuesta cuenta con la financiación de una beca doctoral de CONICET, iniciada en abril de 2016.

Referencias

[1] M. Abad, *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Łukasiewicz n–valente*, Notas de Lógica Matemática 36, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1988. (Tesis de Doctorado)

[2] J. Abbott, *Semi–boolean algebras*, Mat. Vesnik, 4, 19(1967), 177–178.

[3] J. Abbott, *Implicational algebras*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. R.S. Roumaine, Nouv. Sér. 11(1967), 3–23 ; Errata. Ibid. 1(1968).

[4] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, (1974).

[5] V. Boicescu and A. Filipoiu and G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz - Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North - Holland, 1991.

[6] S. Burris and H. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 78, Springer-Verlag, Berlin, (1981).

[7] D. Busneag, *Contributii la studiul algebrelor Hilbert*, Ph. D. Thesis, Intitutul Central de Matematica, Universitătii din Bucaresti, (1985).

[8] I. Calomino,*Tesis de Licenciatura en Ciencias Matemáticas*, Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Bs. As., 2010.

[9] María Cristina Canals Frau, *Algebras de Hilbert* $(n+1)$*-valuadas con operaciones adicionales*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional del Sur, 2010.

[10] M. Canals Frau, A. V. Figallo and S. Saad, *Modal three valued Hilbert algebras*, Preprints Del ICB. Universidad Nacional de San Juan, Argentina, p.1 - 21, 1990.

[11] M. Canals Frau and A. V. Figallo, *Modal 3-valued implicative semilattices*, Preprints Del Instituto de Ciencias Bsicas. U. N. de San Juan, Argentina, p.1 - 24, 1992.

[12] M. Canals Frau and A.V. Figallo, $(n+1)$*-valued Hilbert modal algebras*, Notas de la Sociedad Matematica de Chile, vol.X, 1(1991), 143–149.

[13] M. Canals Frau and A. V. Figallo, *(n+1)-valued modal implicative semilattices*, Proceedings Of The 22nd International Symposium On Multipe Valued Logic. IEEE Computer Society, 1992, 198–205.

[14] W.A. Carnielli; M.E. Coniglio. *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*, Volume 40 in the Logic, Epistemology, and the Unity of Science Series, Springer, 2016.

[15] S. Celani, *A note on homomorphisms of Hilbert algebras*, Int. J. Math. Math. Sci. 1, 29(2002), 5561.

[16] S. Celani, *Distributividad en semiretículos. Teoría de representación y dualidades topológicas*, Notas de clase de la Universidad Nacional del Sur, 2015.

[17] S. Celani, *Representation of Hilbert algebras and implicative semilattices*, Cent. Eur. J. Math. 1 (2003), no. 4, 561–572

[18] S. Celani, *Topological representation of distributive semilattices*. Sci. Math. Jpn. 58 (2003), no. 1, 55–65.

[19] S. Celani and M. Esteban, *Spectral-like Duality for distributive Hilbert algebras with infimum*, manuscrip.

[20] S. Celani and D. Montangie, *Hilbert algebras with supremum*, Algebra Universalis 67(2012), no. 3, 237–255.

[21] C.R. Cimadamore, *Subvariedades de MV-álgebras monádicas y de sus subreductos implicativos monádicos*, PhD thesis, Universidad Nacional del Sur (2011).

[22] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model theory*. Third edition. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. xvi+650 pp.

[23] A. Diego, *Sobre las álgebras de Hilbert*, Notas de Lógica Matemática 12, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, (1965).

[24] A. Diego, *Sur les algèbres de Hilbert*, Colléction de Logique Math., Serie A, No. 21, Gauthiers-Villars, Paris, (1966).

[25] Itala M. L. D'Ottaviano. Sobre uma Teoria de Modelos Trivalente(On a three-valued model theory, in Portuguese), PhD thesis in Mathematics, IMECC, State University of Campinas, Brazil, 1982.

[26] M. Esteban, *Duality Theory and Abstract Algebraic Logic*, Universitat de Barcelona, November 2013, PhD Thesis.

[27] A. Figallo Jr. and A. Ziliani, *Remarks on Hertz algebras and implicative semilattices*, Bulletin of the Section of Logic, 34, 1(2005), 37–42.

[28] A. Figallo Orellano, *Notes on Hilbert lattices*, Int. Math.Forum, Vol. 6, 68(2011), 3371–3379.

[29] A. V. Figallo, G. Ramón and S. Saad, *A note on Hilbert algebras with infimum*, Mat. Contemp., 25(2003), 23-27.

[30] A. V. Figallo, G. Ramón and S. Saad, *A note on the distributive Hilbert algebras*, Proceedings of the Fifth "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress on Mathematics, Bahía Blanca, (1999), 139–152.

[31] A. V. Figallo, G. Ramón and S. Saad, *iH-Propositional calculus*, Bull. Sect. Logic Univ. Ldz 35 (2006), no. 4, 157–162.

[32] Pawel M. Idziak, *Lattice operation in BCK-algebras*. Math. Japon. 29 (1984), no. 6, 839–846.

[33] Gr. C. Moisil, *Recherches sur logiques non-chrysippiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 60-90.

[34] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting simetriques*, Portugaliae Math., 39, 1-4 (1980), 1–237.

[35] A. Monteiro, *Les alebras de Hilbert linaires, Unpublished papers I*, Notas de Lógica Matemtica, Vol. 40, (1996), 114–127.

[36] A. Monteiro, *Algebras de Łukasiwicz trivalentes*, Imforme técnico N^o 83. INMABB-Conicet, Universidad Nacional del Sur, 2003.

[37] A. Monteiro, *Cálculo proposicional implicativo positivo*, Imforme técnico N^o 90. INMABB-Conicet, Universidad Nacional del Sur, 2005.

[38] Luiz Monteiro, *Algèbres de Hilbert* $n-$*valentes*, Portugaliae Math. 36(1977), 159–174.

[39] Ivo Thomas, *Finite limitations on Dummett's LC*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 3 (1962), 170 – 174.

[40] Pawel M. Idziak, *Lattice operation in BCK-algebras*. Math. Japon. 29 (1984), no. 6, 839–846.

[41] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of Metamathematics*, Monografie Matematyczne, 41, Warsawa, 1963.