Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Aplicación de operadores a los espacios de Calderón-Hardy pesados y teoría de interpolación

Alejandra Dominga Perini

Bahía Blanca Argentina

2016

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de los departamentos de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue y de la Universidad Nacional del Sur durante el período comprendido entre el 24 de Octubre del 2009 y el 6 de Julio del 2016, bajo la dirección del Dr. Sheldy Ombrosi, Profesor Titular del Dpto. de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Alejandra Dominga Perini

A mis hijos Julia y Leandro
y ... a mis padres

Agradecimientos

Quisiera expresar mi especial agradecimiento al Dr. Sheldy Ombrosi, director de esta tesis, por su generosidad, apoyo incondicional, su colaboración y paciente atención brindada que hicieron posible la culminación de este trabajo. Además deseo mencionar que durante estos años aprendí, con sus charlas, que a parte de su gran capacidad como matemático hay una persona con una gran humildad y un gran corazón.

Al Dr. Ricardo Testoni, quien siempre me apoyó pacientemente, brindandome ánimo, ayuda y conocimientos en los temas de Interpolacón aquí expuestos.

A la Dra. Raquel Crescimbeni, por su incondicional asistencia en mi formación académica, por su demostración de afecto y paciencia, virtudes que siempre estuvieron pendientes durante mi tarea y me dieron fuerzas.

Al Dr. Luis Nowak y a la Dra Cecilia Ferrari Freire, amigos y compañeros de oficina quienes permanecieron a mi lado y me ayudaron en los momentos que uno necesita un empujón para continuar caminando.

Asimismo quiero agradecer el apoyo institucional que me brindaron los departamentos de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue y de la Universidad Nacional del Sur.

6 de Julio de 2016
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Comahue

RESUMEN

En este trabajo, obtenemos condiciones bajo las cuales existe una extensión continua del operador integral fraccionaria de Weyl I_{γ}^{+} desde el espacio de Calderón-Hardy $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ al espacio $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$. La clave para este hecho es una estimación puntual que relaciona las funciones maximales $N_{q,\alpha}^{+}(I_{\gamma}^{+}F;x)$ y $N_{q,\alpha}^{+}(F;x)$ para $F \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, estimación que tiene otras aplicaciones como se verá en el trabajo.
Por otra parte y de manera independiente probamos un Teorema de Interpolación compleja en los espacios de Calderón-Hardy. Una de las técnicas relevantes que encontramos para obtener ese teorema es la existencia de una descomposición atómica con propiedades adicionales de los espacios de Calderón-Hardy.

ABSTRACT

In this work, we obtain conditions under which there is a continuous extension of the fractional integral operator of Weyl I_γ^+ from Calderon-Hardy space $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ into the space $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$. The key to this fact is a pointwise estimate that establishes a relationship between the maximal functions $N_{q,\alpha}^+(I_\gamma^+F;x)$ and $N_{q,\alpha}^+(F;x)$ where $F \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$. That estimate has more applications as will be seen in this work.
Moreover we prove a Complex Interpolation Theorem in the Calderon-Hardy spaces. One of the techniques that are relevant for this theorem is the existence of an atomic decomposition with additional properties of Calderon-Hardy spaces.

Índice general

Introducción

En el trabajo [16], S. Ombrosi define y estudia los espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, $0 < p \leq 1$, $\quad 1 < q < \infty$, $\quad \alpha = N + \beta$ donde N es un entero no negativo y $0 < \beta \leq 1$ y ω en la clase de pesos de Sawyer. Para ello necesitó introducir una versión lateral de la función maximal definida en [1] por A. P. Calderón, esto es

$$n^{+}_{q,\alpha}(f;x) = \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \left(\frac{1}{\rho} \int_{x}^{x+\rho} |f(y) - P(x,y)|^{q} dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

para una función $f \in L^{q}_{loc}$ y donde P es un polinomio conveniente de grado a lo sumo N. La versión original de la función maximal permitió a A. P. Calderón en [1] definir los espacios de funciones $M^{p,q}_{m}$, la idea central de A. P. Calderón al introducir esta función maximal es que la misma mide regularidad de las funciones que intervienen sin tener en principio más que condiciones de tamaño. Entre otros resultados se prueba que los espacios $M^{p,q}_{m}$ son invariantes bajo la aplicación de operadores integrales singulares regulares, es decir operadores de Calderón-Zygmund. De manera indirecta la función maximal de A.P. Calderón aparece por primera vez en el célebre trabajo [5] cuando A. P. Calderón y A. Zygmund obtienen estimaciones puntuales de soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas. Una generalización a espacios métricos de la maximal de A. P. Calderón se puede encontrar en [10].

Una sútil extensión de los espacios $M^{p,q}_{m}$ para el parámetro $0 < p \leq 1$ es obtenida por A. Gatto, J.G. Jiménez y C. Segovia en [7]. Ellos definen los espacios $\mathcal{H}^{p}_{q,2m}$, $m \in \mathbb{N}$ mostrando que son equivalentes a los espacios de Hardy H^{p} a través del operador Δ^{m}. Además, introducen la noción de p-átomo en los espacios $\mathcal{H}^{p}_{q,2m}$, y prueban una descomposición atómica de los elementos de dichos espacios. Para dicha descomposición se usan las técnicas desarrolladas en [14] por R. Macias y C. Segovia, en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Posteriormente en [16], S. Ombrosi generaliza estos espacios para versiones pesadas y tal que el parámetro α sea un número real positivo, obteniendo así los espacios de Calderón-Hardy laterales $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, mencionados al comienzo de la introducción y que serán definidos en el Capítulo 2. Concretamente, en [16] se generaliza los resultados que se encuentran en [7], donde en particular se prueba que los elementos del espacio $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ pueden expresarse en términos de series de múltiplos de p-átomos obteniendo así una descomposición atómica de los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Esta descomposción de los elementos permite probar que la integral fraccional de Weyl I^{+}_{α} puede ser extendida a un operador acotado desde el espacio de Hardy $H^{p}_{+,\gamma}(\omega)$ al espacio de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Los espacios de Hardy $H^{p}_{+,\gamma}(\omega)$ en el contexto de la clase de pesos de Sawyer, las cuales serán definidas en el Capítulo 1, fueron estudiados por L. De Rosa y C. Segovia en [23]. Cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, la extensión de la integral fraccionaria de Weyl I^{+}_{α} desde los espacios de Hardy a los espacios de Calderón-Hardy es un isomorfismo. Esta identificación falla si $\alpha \notin \mathbb{N}$ (ver [16]). A partir de esos resultados, surge uno de los problemas que resolvemos en nuestro trabajo: ¿Es posible que el operador integral fraccionaria de Weyl I^{+}_{γ}, $0 < \gamma < 1$, transforme $I^{+}_{\gamma} : \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega) \rightarrow \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha+\gamma}(\omega)$

en forma continua ? La respuesta es afirmativa siempre y cuando $\alpha \in \mathbb{N}$ (por los resultados obtenidos en [16]) y si $\alpha \notin \mathbb{N}$ es válido el resultado si $\alpha = N + \beta$ con $0 < \beta + \gamma < 1$, (su prueba está desarrollada en el Capítulo 3 del presente trabajo.)
Por otra parte, en [21], S. Ombrosi, R. Testoni y C. Segovia obtienen un Teorema de Interpolación Compleja entre espacios de Hardy laterales $H^p_{+,\gamma}(\omega)$. Este resultado generaliza los obtenidos por J. O. Strömberg y A. Torchinsky en el Capítulo XII de [26] en el contexto de espacios de Hardy pesados con una medida que duplica. A partir de este hecho y considerando que en [16] se prueba la identificación, mediante la integral fraccionaria de Weyl I^+_α con $\alpha \in \mathbb{N}$, a los espacios de Hardy $H^p_{+,\gamma}(\omega)$ con los espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, surge la pregunta: ¿Bajo qué condiciones es posible obtener un Teorema de Interpolación Compleja entre los espacios de Calderón-Hardy laterales $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, con $0 < p \leq 1$, $0 < q < \infty$, $\alpha = N + \beta$ y $0 < \beta \leq 1$?
Claramente la respuesta es afirmativa para el caso $\alpha \in \mathbb{N}$ (por la identificación de los espacios de Calderón-Hardy laterales con los espacios de Hardy laterales obtenidos en [16] y por los resultados de Interpolación para espacios de Hardy laterales obtenidos en [21]). Para el caso, $\alpha \notin \mathbb{N}$, no podemos aplicar el mismo argumento pues falla la identificación. Sin embargo aunque falle la identificación, sí podemos otener un Teorema de Interpolación Compleja, de hecho uno de los principales resultados de este trabajo es el Teorema 5.1.1 el cual se prueba en el Capítulo 5 y responde afirmativamente a esa pregunta.
En este trabajo obtenemos resultados para versiones pesadas de los espacios definidos por A. B. Gatto, J. G. Jiménez y C. Segovia pretendiendo que la clase de pesos sean lo más general posible, por esto es que aquí nos restringimos a trabajar en la recta real con la clase de pesos A^+_s de E. Sawyer definida en [24]. La principal dificultad que aparece al considerar pesos en la clase A^+_s, es que estos pesos no duplican lo que acentúa las dificultades geométricas y por lo tanto complica la obtención de descomposiciones atómicas.
Para encontrar la descomposición atómica introducimos la noción de átomo en los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, y a partir de la descomposición en p-átomos para estos espacios dada en [16] es que logramos encontrar una descomposición atómica con la propiedad adicional de que cada átomo de la descomposición esta seguido por otro, con soporte contiguo. Para tal fin se utilizó una técnica encontrada en [21] de como partir un átomo en otros átomos con propiedades adicionales. Cabe señalar, que estos resultados de interpolación se pueden obtener en el contexto de los pesos Muckenhoupt, clases definidas en [15], con una prueba más simple ya que no se requiere que cada átomo este seguido por otro, pues esas clase de pesos duplican.
En los primeros capítulos hacemos referencia a las clases A^+_s de pesos de E. Sawyer y a los espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Más precisamente, en el primer capítulo presentamos a las clases A^+_s enunciando importantes resultados que nos serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo. En el segundo capítulo recordamos la definición y los principales resultados de las función maximal $N^+_{q,\alpha}$ y de los espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Uno de los resultados que se prueba en este capítulo es la caracterización de los elementos del espacio cociente $E^N_q = L^q_{loc}/\mathcal{P}$ tal que tienen maximal acotada con las clases del espacio Λ_α donde Λ_α denota el conjunto de las clases F que tienen algún representante con derivadas continuas hasta el orden N y

su derivada N-ésima es Lipschitz $(\alpha - N)$, donde $0 < \alpha - N = \beta \leq 1$.. Este resultado es de gran utilidad pues, en el tercer capítulo nos permitirá establecer una prueba diferente del clásico resultado de acotación del operador integral fraccionaria entre los espacios Lipschitz.

En el Capítulo 3, se introduce la definición de la integral fraccionaria de Weyl I_γ^+ se presenta la notación y se mencionan algunas propiedades del operador. En la Sección 2 se extiende la integral fraccionaria de Weyl, I_γ^+, a las clases $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega) \bigcap \Lambda_\alpha$. En la Sección 3 se demuestra una desigualdad puntual que satisface la gran maximal de A. P. Calderón versión lateral dada por $N_{q,\alpha}^+(F;x)$, permitiendo, esta desigualdad junto con la densidad de las clases $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega) \bigcap \Lambda_\alpha$ en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, probar la existencia de una extensión continua del operador I_γ^+, para $0 < p \leq 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha = N + \beta$, $\gamma + \beta < 1$, $1 < q < \frac{1}{\gamma}$ y $\omega \in A_s^+$ donde $(\alpha + \frac{1}{q})p \geq s > 1$ o $(\alpha + \frac{1}{q})p > 1$ si $s = 1$. Cabe mencionar que, para el caso $\alpha \in \mathbb{N}$, esta extensión también es verdadera pues es una consecuencia de la identificación de los espacios de Hardy laterales con los espacios de Calderón-Hardy laterales a través de I_α^+, resultado obtenido por S. Ombrosi en [16].

En el cuarto capítulo nos dedicamos a conseguir, a partir de la descomposición en p-átomos de los elementos de $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ obtenida por S. Ombrosi, una descomposición atómica particular que será la herramienta fundamental para arribar a los resultados de Interpolación. Para tal objetivo, en la primer sección introducimos la noción de átomo con la cual trabajaremos en los capítulos restantes. Se prueban algunas propiedades básicas de los átomos en los espacios $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ las cuales nos permitirán, realizando ciertas modificaciones a la prueba de descomposición dada por S. Ombrosi, obtener una descomposción atómica de estos espacios. En la segunda sección, se presentan dos lemas que nos permiten partir un p-átomo de tal manera que logramos encontrar la descomposición atómica con la propiedad adicional: para cada átomo (con intervalo asociado I) que intervenga en la descomposición atómica original existe otro átomo de la descomposición con intervalo asociado J que sigue a I, es decir J está contiguo a la derecha de I. Además estos intervalos son comparables, concretamente $|I| = 4|J|$. Este resultado es el Teorema 4.2.3. Esta forma de descomponer el espacio sigue las ideas de la descomposición atómica de los espacios de Hardy laterales que obtienen S. Ombrosi, C. Segovia y R. Testoni en [21].

Por último en el Capítulo 5, damos un Teorema de Interpolación entre espacios de Calderón-Hardy laterales. Este capítulo lo dividimos en cuatro secciones. En la primer sección introducimos la notación a utilizar y presentamos el Teorema 5.1.1 y el Teorema 5.1.2 que son dos de los principales resultados a desarrollar en este trabajo. En la segunda sección damos los resultados previos que nos permitirán probar la primera parte del Teorema 5.1.2, siendo estos resultados análogos a los del Capítulo XII de [26]. En la tercera sección demostramos finalmente el Teorema 5.1.2, en primer lugar probamos la segunda parte de éste donde construímos una función interpoladora que verifica ciertas propiedades que nos permitirán arribar al Teorema de Interpolación. Esta construcción utiliza como herramienta principal la descomposición atómica particular del espacio $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ dada por el Teorema 4.2.3. Al final de la sección se demuestra la primera parte del Teorema 5.1.2, esta prueba es similar a la dada por J.O. Strömberg y A. Torchinsky en el capítulo XII de [26] para los espacios de Hardy biláteros como así también a la dada por R. Testoni en la sección 9 de [27] para la versión lateral de los espacios de Hardy. Finalmente en la cuarta sección se presenta la teoría abstracta de interpolación compleja introducida por A. P. Calderón en [2] que nos permite demostrar el tipo de resultados de interpolación compleja como es el de la forma del Teorema 5.1.1. Más precisamente se obtiene la prueba del Teorema de Interpolación compleja entre espacios de Calderón-Hardy laterales con pesos en A_∞^+ (Teorema 5.1.1) como una consecuencia del Teorema 5.1.2. Para ello seguimos las técnicas de la prueba del resultado de interpolación compleja en espacios de Hardy laterales presentado en [21] y hecha su prueba en detalle en [27]. Desde un punto de vista histórico estas ideas originalmente aparecen en el capítulo XII de [26] para el caso de los espacios de Hardy pesados con pesos que duplican.

Capítulo 1

Pesos de Sawyer

En este capítulo recordamos los resultados obtenidos por E. Sawyer en [24], quien caracterizó los pares de pesos (u, v) para los cuales la función maximal M^+ es del tipo débil (s, s), $s > 1$ así como los pares de pesos (u, v) para los que M^+ está acotada de $L^s(u)$ en $L^s(v)$ con $s > 1$. En particular, si los pesos son iguales, es decir (ω, ω) quedan caracterizados los pesos para los cuales la maximal M^+ es acotada de $L^s(\omega)$ en $L^s(\omega)$.

1.1. Notación, definiciones y resultados preliminares

Un peso en $\mathbb{R}$ es una función ω medible Lebesgue tal que $\omega(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible Lebesgue entonces su ω-medida es

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)\, dx.$$

Sea E un conjunto medible de $\mathbb{R}$ y $0 < s < \infty$, consideramos el espacio

$$L^s(\omega) = \{f : E \to \mathbb{R}, f \ \text{ medible tal que } \quad \int_E |f(x)|^s \omega(x) dx < \infty\}$$

donde su s-norma es

$$\|f\|_{L^s(\omega)} = \left(\int_E |f(x)|^s \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{s}},$$

en particular para $s = \infty$

$$L^\infty(\omega) = \{f : E \to \mathbb{R}, f \ \text{ medible tal que } \quad \sup_E \text{es} |f| < \infty\}$$

y su norma está dada por

$$\|f\|_{L^\infty(\omega)} = \sup_E \text{es} |f| = \text{ínf}\{M : |\{x \in E : |f(x)| > M\}| = 0\},$$

Denotamos $L^s_{loc}(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones f a valores reales definidas sobre $\mathbb{R}$, que pertenecen localmente a L^s, esto es para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.
Se define la función maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| \, dt,$$

donde $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Sea $1 < s < \infty$. La clase de pesos para los cuales el operador M resulta acotado en $L^s(\omega)$ se denomina A_s y fue caracterizada por B. Muckenhoupt en [15] como la de aquellos pesos ω que satisfacen la condición

$$\left(\int_a^b \omega(t) \, dt \right) \left(\int_a^b \omega(t)^{-\frac{1}{s-1}} \, dt \right)^{s-1} \leq C (b-a)^s,$$

donde la constante $C = C(\omega, s)$ no depende de $-\infty < a < b < \infty$.
Para el caso $s = 1$, se denomina A_1 a la clase de pesos para los cuales el operador M es débil $(1,1)$ en $L^1(\omega)$ y está caracterizada por la condición

$$M\omega(x) \leq C\omega(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. La constante $C = C(\omega)$ no depende de x.
Originalmente Hardy-Littlewood consideraron versiones laterales de ese operador maximal los cuales se definen a continuación,

$$M^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)| \, dt$$

y

$$M^- f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} |f(t)| \, dt$$

donde $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Sea $1 < s < \infty$. La clase de pesos para los cuales el operador M^+ resulta acotado en $L^s(\omega)$ se denomina A_s^+ y fue caracterizada en [24] por E. Sawyer como la de aquellos pesos ω que satisfacen la condición

$$\left(\int_a^b \omega(t) \, dt \right) \left(\int_b^c \omega(t)^{-\frac{1}{s-1}} \, dt \right)^{s-1} \leq C (c-a)^s,$$

donde la constante $C = C(\omega, s)$ no depende de $-\infty < a < b < c < \infty$.
Para el caso $s = 1$, se denomina A_1^+ a la clase de pesos para los cuales el operador M^+ es débil $(1,1)$ en $L^1(\omega)$ y está caracterizada por la condición

$$M^-\omega(x) \leq C\omega(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. La constante $C = C(\omega)$ no depende de x.
También se define $A_\infty^+ = \bigcup_{s \geq 1} A_s^+$.

Definiciones análogas corresponden a las clases A_s^-. Por ejemplo la condición A_s^- con $s > 1$ es

$$\left(\int_b^c \omega(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \omega(t)^{-\frac{1}{s-1}}\,dt\right)^{s-1} \leq C\,(c-a)^s\,,$$

donde la constante $C = C(\omega, s)$ no depende de $-\infty < a < b < c < \infty$.
En el siguiente lema enunciaremos algunas de las propiedades conocidas de las clases A_s^+ que necesitaremos a lo largo de este trabajo. (Resultados análogos se obtienen para las clases A_s^-.)

Lema 1.1.1. *(1) Toda función no negativa creciente pertenece a la clase A_s^+.*

(2) $A_s \subset A_s^+$.

(3) $A_1^+ \subset A_s^+$, $s > 1$

(4) $\omega \in A_1^+$ *si y sólo sí* $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a} w(t)dt \leq inf\, es_{x\in[a,a+h]}\, w(x)$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$ *y* $h > 0$.

(5) La clase A_s^+, $1 \leq s < \infty$ *es creciente en* s.

(6) Sea $1 < s < \infty . M^+$ *es acotado sobre* $L^s(\omega)$ *si y sólo sí* $\omega \in A_s^+$.

(7) Dado $w \in A_s^+$, $1 \leq s < \infty$ *para cada* $a \in \mathbb{R}$,*la* ω*-medida del intervalo* (a, ∞) *es igual a infinito.*

(8) Dado $\omega \in A_s^+$, *existen dos números* $x_{-\infty}$ *y* x_∞, $-\infty \leq x_{-\infty} \leq x_\infty \leq \infty$, *tal que*

(i) $\omega(x) \equiv 0$ *en* $(-\infty, x_{-\infty})$,

(ii) $\omega(x) \equiv \infty$ *en* (x_∞, ∞) *and*

(iii) $0 < \omega(x) < \infty$ *en casi todo punto* $x \in (x_{-\infty}, x_\infty)$.

(9) Si $\omega \in A_s^+$, $1 < s < \infty$ *entonces existe* $\delta > 0$ *y* $C > 0$ *tal que*

$$\int_a^b \omega(t)^{1+\delta} dt \leq C[M^-(\omega\chi_{(a,b)})(b)]^{1+\delta} \int_a^b \omega(t)dt$$

.

(10) Si $\omega \in A_s^+$, $1 < s < \infty$ *entonces existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $A_{s-\epsilon}^+$.

Las pruebas de (1) a (5) son consecuencias inmediatas de la definición de la clase de pesos A_s^+, (6) se debe a Sawyer [24], (7) y (8) están desarrolladas en [17]. (9) es una versión de la desigualdad de Hölder inversa en el contexto lateral y la prueba es dada por F.J. Martín Reyes en [11]. Finalmente (10) puede encontrarse en [24] y [11]. En (8) para evitar el caso $x_{-\infty} = x_\infty$, suponemos que existe un conjunto medible E tal que satisface $0 < w(E) < \infty$.

A continuación probamos algunas propiedades de los pesos de Sawyer en la clase A_s^+, las cuales serán requeridas para las pruebas de los principales resultados de este trabajo.

Si χ_I denota la función característica en $I = (a, b)$ y si denotamos por $I^- = (a - |I|, a)$ no es difícil ver que

$$M^+(\chi_I)(x) \geq \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

para todo $x \in I^- \bigcup I$.

Como una consecuencia el Lema 1.1.1 parte *(6)* y (1.1) se tiene el siguiente resultado

Lema 1.1.2. *Si $\omega \in A_s^+$ para algún $s \geq 1$ entonces ω es duplicante a izquierda. Esto es existe una constante $c = c(\omega, p) > 0$ tal que*

$$\omega(x - 2\delta, x) \leq c\omega(x - \delta, x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $\delta > 0$. En cambio, si $\omega \in A_s^-$ para algún $s \geq 1$ entonces ω es duplicante a derecha.

Demostración. Para probar la propiedad de duplicación notemos que por (1.1) se tiene que

$$M^+\chi_{(x-\delta,x)}(y) \geq \frac{1}{2}, \tag{1.2}$$

para todo $y \in (x - 2\delta, x)$. Luego, usando (1.2) y como M^+ es acotado en $L^s(\omega)$, se tiene que

$$\omega(x - 2\delta, x) = \int_{x-2\delta}^{x} \omega(y)\, dy \leq 2^s \int \left(M^+\chi_{(x-\delta,x)}(y)\right)^s \omega(y)\, dy \leq 2^s c\, \omega(x - \delta, x).$$

$\square$

Lema 1.1.3. *Sea $\omega \in A_s^+$, $1 \leq s < \infty$ y sean I e I_h intervalos acotados $I_h \subset I \subset (x_{-\infty}, \infty)$ entonces existe la constante $C = C_{\omega,I,s}$ que no dependen de I_h tal que*

$$\frac{|I_h|^s}{\omega(I_h)} < C.$$

Si, además, $\omega(x) \leq \tau$ para algún $\tau > 0$, entonces

$$\frac{|I_h|^{s-1}}{\tau} \leq \frac{|I_h|^s}{\omega(I_h)}.$$

Demostración. Si I^- es el intervalo contiguo a la izquierda de I de igual longitud, se tiene que

$$I^- \subset \left\{ x : M^+\chi_{I_h}(x) > \frac{|I_h|}{3|I|} \right\} = A. \tag{1.3}$$

En efecto, si $x \in I^-$ y r es la distancia de x al extremo derecho de I, entonces

$$M^+\chi_{I_h}(x) \geq \frac{1}{r}\int_x^{x+r} \chi_{I_h}(t)\,dt = \frac{|I_h|}{r} \geq \frac{|I_h|}{2|I|} > \frac{|I_h|}{3|I|}.$$

y así $x \in A$. Por (1.3)

$$\omega\left(I^-\right) \leq \omega\left(\left\{ x : M^+\chi_{I_h}(x) > \frac{|I_h|}{3|I|} \right\}\right),$$

Luego, como $\omega \in A_s^+$ entonces M^+ es fuerte (s,s) respecto del peso ω y asi M^+ es débil (s,s) respecto del peso ω,

$$\omega\left(I^-\right) \leq c\frac{3^s|I|^s}{|I_h|^s}\omega\left(I_h\right).$$

Luego, como $\omega(x) > 0$, existe $C = \frac{c3^s|I|^s}{\omega(I^-)} > 0$ tal que

$$\frac{|I_h|^s}{\omega\left(I_h\right)} \leq C$$

para todo h.
Si además $\omega \leq \tau$ para algún $\tau > 0$, se tiene que

$$\frac{|I_h|^s}{\omega\left(I_h\right)} = \frac{|I_h|^s}{\int_{I_h}\omega(t)dt} \geq \frac{|I_h|^s}{\tau|I_h|} = \frac{|I_h|^{s-1}}{\tau}$$

□

Para la prueba de la segunda parte del Teorema 5.1.2 necesitaremos los siguientes tres lemas que la versión bilátera de los dos primeros pueden encontrarse en el capítulo XII [21] y la prueba del tercer lema está contenida en el Teorema 1 en [12].

Lema 1.1.4. *Sea $\omega \in A_p^+, \nu \in A_q^+, 0 < \delta < 1$ y $\eta > 0$. Si $s = p(1-\delta) + q\delta$ entonces*

$$\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^\delta \in A_s^+,$$

y existe una constante $C = C(\eta, \delta, \omega, \nu)$ tal que

$$\left(\frac{1}{I^-}\int_{I^-}\omega(x)dx\right)^{1-\delta}\left(\frac{1}{I^-}\int_{I^-}\nu(x)dx\right)^{\delta} \leq C\left(\frac{1}{I^+}\int_{I^+}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^\delta dx\right), \tag{1.4}$$

se satisface para cada intervalo $I^- = (a,b)$ y $I^+ = (b,c)$ con $b - a = \eta(c-b)$.

Demostración. Supondremos $p>1$, $q>1$. Por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{I^-}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx\right)\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{s-1}\\
&\leq\left(\int_{I^-}\omega(x)dx\right)^{1-\delta}\left(\int_{I^-}\nu(x)dx\right)^{\delta}\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{s-1}\\
&\leq\left[\int_{I^-}\omega(x)dx\left(\int_{I^+}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\right]^{1-\delta}\left[\int_{I^-}\nu(x)dx\left(\int_{I^+}\nu(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{q-1}\right]^{\delta}.
\end{aligned}$$

En la última desigualdad se utilizó la desigualdad de Hölder con los exponentes $\alpha=\frac{s-1}{(p-1)(1-\delta)}$ y $\beta=\frac{s-1}{(q-1)\delta}$. Como $\omega\in A_p^+$ y $\nu\in A_q^+$ entonces

$$\int_{I^-}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{s-1}\leq C_{\omega,p}^{1-\delta}C_{\nu,q}^{\delta}(c-a)^{s},$$

y, por lo tanto, $\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\in A_s^+$. Utilizando nuevamente que $\omega\in A_p^+$ y $\nu\in A_q^+$ y la desigualdad de Hölder con exponentes α and β, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{I^-}\omega(x)dx\right)^{1-\delta}\left(\int_{I^-}\nu(x)dx\right)^{\delta}\\
&\leq C_{\omega,p}^{1-\delta}C_{\nu,q}^{\delta}\,(c-a)^{s}\left[\left(\int_{I^+}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{(p-1)(1-\delta)}\left(\int_{I^+}\nu(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{(q-1)\delta}\right]^{-1}\\
&\leq C_{\omega,p}^{1-\delta}C_{\nu,q}^{\delta}\,(c-a)^{s}\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{(s-1)(-1)}\\
&\leq C_{\omega,p}^{1-\delta}C_{\nu,q}^{\delta}\left(\frac{c-a}{|I^+|}\right)^{s}\int_{I^+}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx.
\end{aligned}$$

Si $b-a=\eta\,(c-b)$ entonces

$$\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}\omega(x)dx\right)^{1-\delta}\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}\nu(x)dx\right)^{\delta}\leq C\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx,$$

donde $C=C_{\omega,p}^{1-\delta}C_{\nu,q}^{\delta}\frac{(1+\eta)^s}{\eta}$. □

Lema 1.1.5. *Dado $0<p<\infty$, $\eta>0$ existe una constante $C=C(p,\eta)$ tal que si δ es un peso sobre la recta real entonces*

$$||\sum\lambda_k\chi_{I_k}||_{L^p(\delta)}\leq C||\sum\lambda_k\chi_{E_k}||_{L^p(\delta)}\tag{1.5}$$

se satisface para cada $\lambda_k>0$ y para todo intervalo I_k y todo conjunto $\delta-$medible E_k, $E_k\subset I_k$ con $\delta(E_k)\geq\eta\delta(I_k)$.

Demostración. Las principales ideas de esta demostración se encuentran en [26]. Para el caso $p \geq 1$, sea $g \in L^{p'}(\delta)$, donde $pp' = p + p'$, $g \geq 0$ y $\|g\|_{L^{p'}(\delta)} = 1$. Considerando la Maximal de Hardy-Littlewood con peso δ,

$$M_\delta(g)\,(y) = \sup_{y \in I} \frac{1}{\delta\,(I)} \int_I |g\,(t)|\,\delta\,(t)\,dt,$$

(donde el supremo se toma sobre los intervalos acotados de $\mathbb{R}$ que contienen a y) tenemos, para cada k, que

$$\begin{aligned} \int \chi_{I_k}(y) g(y)\delta(y)dy &\leq \delta(I_k) \inf_{y\in E_k} M_\delta(g)(y) \\ &\leq \eta^{-1}\delta(E_k) \inf_{y\in E_k} M_\delta(g)(y) \\ &\leq \eta^{-1} \int \chi_{E_k}(y) M_\delta(g)(y)\delta(y)dy. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \left(\sum \lambda_k \chi_{I_k}(y)\right) g(y)\delta(y)dy &\leq \eta^{-1} \int \left(\sum \lambda_k \chi_{E_k}(y)\right) M_\delta(g)(y)\delta(y)dy \\ &\leq \eta^{-1} \left\|\sum \lambda_k \chi_{E_k}\right\|_{L^p(\delta)} \|M_\delta(g)\|_{L^{p'}(\delta)}. \end{aligned}$$

Como estamos trabajando en la recta real tenemos que

$$\|M_\delta(g)\|_{L^{p'}(\delta)} \leq C_p \|g\|_{L^{p'}(\delta)},$$

donde la constante C_p no depende del peso δ ni de g. De hecho $(C_p)^{p'} = 2^{p'+1}p$. Por lo tanto

$$\int \left(\sum \lambda_k \chi_{I_k}(y)\right) g(y)\delta(y)dy \leq C_p \eta^{-1} \left\|\sum \lambda_k \chi_{E_k}\right\|_{L^p(\delta)},$$

de donde se deduce inmediatamente el lema para el caso $p \geq 1$. Veamos el caso $0 < p < 1$. Llamando $\Psi = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ y $\Phi = \sum \lambda_k \chi_{I_k}$ definimos, para $t > 0$ fijo, los conjuntos

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} : \Psi\,(x) > t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{O} = \left\{x \in \mathbb{R} : M_\delta \chi_{\mathcal{E}}\,(x) > \frac{\eta}{2}\right\}.$$

Si $\mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing$ entonces $\delta(\mathcal{E} \cap I_k) \leq \frac{\eta}{2}\delta\,(I_k)$, de donde

$$\delta(\mathcal{E} \cap E_k) \leq \delta(\mathcal{E} \cap I_k) \leq \frac{\eta}{2}\delta\,(I_k) \leq \frac{1}{2}\delta\,(E_k)\,,$$

y

$$\delta\,(E_k) \leq \frac{1}{2}\delta\,(E_k) + \delta(\mathcal{E}^c \cap E_k).$$

Por lo tanto

$$\delta\,(E_k) \leq 2\delta(\mathcal{E}^c \cap E_k)$$

y

$$\eta\delta(\mathcal{E}^c \cap I_k) \leq \eta\delta(I_k) \leq \delta\left(E_k\right) \leq 2\delta(\mathcal{E}^c \cap E_k) \quad \text{if } \mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing. \tag{1.6}$$

Tomemos $s \geq 1$ cualquiera. Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue tenemos que para casi todo $x \in \mathcal{O}^c$ entonces $x \in \mathcal{E}^c$ y, por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{O}^c} \Phi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx \leq \int_{\mathcal{E}^c} \left(\sum_{\mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing} \lambda_k \chi_{I_k}(x) \right)^s \delta\left(x\right) dx.$$

Como se cumple (1.6), podemos aplicar, con peso $\delta(x)\chi_{\mathcal{E}^c}(x)$, el caso $s > 1$ que acabamos de probar, para estimar el último término por

$$c \int_{\mathcal{E}^c} \left(\sum_{\mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing} \lambda_k \chi_{E_k}(x) \right)^s \delta\left(x\right) dx,$$

donde $c = \left(C_s 2\eta^{-1}\right)^s$ Así, tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}^c} \Phi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx \leq c \int_{\mathcal{E}^c} \Psi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx. \tag{1.7}$$

Como estamos trabajando en la recta real, M_δ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto al peso δ con constante 2 y, por lo tanto, tenemos que

$$\delta\left(\mathcal{O}\right) \leq \frac{4}{\eta} \delta\left(\mathcal{E}\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \delta\left(\{x : \Phi\left(x\right) > t\}\right) &\leq \delta\left(\mathcal{O}\right) + \delta(\mathcal{O}^c \cap \{x : \Phi\left(x\right) > t\}) \\ &\leq \frac{4}{\eta}\delta\left(\mathcal{E}\right) + \frac{1}{t^s} \int_{\mathcal{O}^c} \Phi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx. \end{aligned}$$

y, por (1.7),

$$\delta\left(\{x : \Phi\left(x\right) > t\}\right) \leq \frac{4}{\eta}\delta\left(\mathcal{E}\right) + \frac{c}{t^s} \int_{\mathcal{E}^c} \Psi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx.$$

De esta estimación se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L^p(\delta)}^p &= \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \delta\left(\{x : \Phi\left(x\right) > t\}\right) dt \\ &\leq \frac{4}{\eta} \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \delta\left(\mathcal{E}\right) dt + c \int_0^{+\infty} p t^{p-1-s} \int_{\mathcal{E}^c} \Psi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx\, dt, \end{aligned}$$

obteniéndose el lema pues para $0 < p < 1$ el último término es igual a

$$\left(\frac{4}{\eta} + c\frac{p}{s-p} \right) \left\| \sum \lambda_k \chi_{E_k} \right\|_{L^p(\delta)}^p.$$

Además, si p está entre p_0 y p_1 eligiendo $s > \max\left(p_0, p_1\right)$, se puede elegir la constante $C = C(p_0, p_1, \eta)$ de manera que no dependa de p. $\square$

Lema 1.1.6. *Sea $\delta \in A_\infty^+$.*

1. *Existe $\beta > 0$ tal que la siguiente implicación se satisface: dado $\lambda > 0$ y un intervalo (a,b) tal que $\lambda \leq \frac{\delta(a,x)}{x-a}$ para todo $x \in (a,b)$, entonces*
$$|\{x \in (a,b) : \delta(x) > \beta\lambda\}| > \frac{1}{2}(b-a).$$

2. *Existe $\gamma > 0$ tal que la siguiente implicación se satisface: dado $\lambda > 0$ y un intervalo (a,b) tal que $\lambda \leq \frac{\delta(x,b)}{(b-x)}$ para todo $x \in (a,b)$, entonces*
$$|\{x \in (a,b) : \delta(x) < \gamma\lambda\}| > \frac{1}{2}\delta(b-a).$$

Observemos que si $\delta \in A_s^+$ con constante C que depende de s entonces β depende sólamente de la constante C y de s. Del mismo modo podemos asegurar que para la segunda parte del lema γ no depende del peso en A_s^+ sino de la constante de la clase A_s^+. Este resultado está probado en [12].

Capítulo 2

Espacios de Calderón–Hardy

En este capítulo damos las definiciones y propiedades de los espacios de Calderón-Hardy laterales que fueron definidos y estudiados por Ombrosi en [16], [17] y por Ombrosi y Segovia en [20]. Para comenzar introducimos la gran maximal de Calderón $N^+_{q,\alpha}(F;x)$ y a partir de ella los espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. En la primera sección presentamos varias de las definiciones y notaciones que usaremos a lo largo del trabajo. En la segunda sección mostramos propiedades y resultados tanto de la maximal $N^+_{q,\alpha}(F;x)$ como así también de los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$.

2.1. Definiciones y notación

Sea $\omega \in A^+_s$ y consideramos el punto $x_{-\infty}$ asociado al peso ω tal que satisface las condiciones expuestas en el Lema 1.1.1 parte *(9)*. Denotamos por $L^q_{loc}(x_{-\infty},\infty)$ para $1 < q < \infty$ el espacio de las funciones a valores reales definidas sobre $(x_{-\infty},\infty)$ tal que pertenecen localmente a L^q sobre subconjuntos compactos de $(x_{-\infty},\infty)$. Dada $f \in L^q_{loc}((x_{-\infty},\infty))$, consideramos las seminormas

$$|f|_{q,I} = \left(|I|^{-1}\int_I |f(y)|^q\,dy\right)^{1/q},$$

donde I recorre todos los intervalos cerrados y acotados de $(x_{-\infty},\infty)$.
Sea f en $L^q_{loc}((x_{-\infty},\infty))$ y sea α un número real positivo, definimos la función maximal $n^+_{q,\alpha}(f;x)$ de la siguiente manera

$$n^+_{q,\alpha}(f;x) = \sup_{\rho>0} \rho^{-\alpha}\,|f|_{q,[x,x+\rho]}\,.$$

Sea un número entero $N \geq 0$, y $\mathcal{P}_N$ el subespacio lineal de $L^q_{loc}((x_{-\infty},\infty))$ formado por todos los polinomios de grado a lo sumo N. Este subespacio es de dimensión finita y por lo tanto es un subespacio cerrado de $L^q_{loc}((x_{-\infty},\infty))$. Llamamos $E^q_N((x_{-\infty},\infty))$ al espacio cociente de $L^q_{loc}((x_{-\infty},\infty))$ por $\mathcal{P}_N$. Si $F \in E^q_N$, definimos las seminormas

$$\|F\|_{q,I} = \inf_{f\in F}\left\{|f|_{q,I}\right\}.$$

La familia de todas estas seminormas induce sobre $E_N^q(x_{-\infty},\infty)$ la topología cociente. El espacio E_N^q es localmente convexo y completo.

Dado un número real $\alpha > 0$, lo podemos escribir de una única manera $\alpha = N + \beta$, donde N es un número entero mayor o igual que 0, y β es un número real tal que $0 < \beta \leq 1$. A partir de ahora, y en todo lo que resta de este trabajo fijamos $\alpha > 0$ y por lo tanto también su única descomposición $\alpha = N + \beta$ en las condiciones anteriores.

Para $F \in E_N^q(x_{-\infty},\infty)$, definimos la función maximal $N_{q,\alpha}(F;x)$ como

$$N_{q,\alpha}^{+}(F;x) = \inf_{f\in F}\left\{n_{q,\alpha}^{+}(f;x)\right\}.$$

Definición 2.1.1. *Decimos que un elemento F en $E_N^q(x_{-\infty},\infty)$ pertenece a $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, $0 < p \leq 1$, si la función maximal $N_{q,\alpha}^{+}(F;x) \in L^p((x_{-\infty},\infty);\omega)$. Esto es*

$$\int_{x_{-\infty}}^{\infty} N_{q,\alpha}^{+}(F;x)^p \omega(x)dx < \infty,$$

y además definimos la "p-norma" en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ como

$$\|F\|_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)} = \left\|N_{q,\alpha}^{+}(F;x)\right\|_{L^p(\omega)}.$$

Cabe mencionar que si las funciones f en $L_{loc}^q(x_{-\infty},\infty)$ son a valores complejos definidas sobre $(x_{-\infty},\infty)$, esto es $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, consideraremos el espacio $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ como el producto cartesiano de él por sí mismo. Es decir $F = F_1 + iF_2 \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ si y sólo sí $F_i \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega), i = 1, 2$.

Definición 2.1.2. *Sea $0 < \beta \leq 1$. Decimos que una función f definida en $\mathbb{R}$ es Lipschitz-β en un conjunto $E \subset (x_{-\infty},\infty)$, si existe una constante positiva y finita B, tal que para todo x y x' pertenecientes a B, se cumple que*

$$|f(x) - f(x')| \leq C\ |x - x'|^{\beta}.$$

Definición 2.1.3. *Sea $\alpha = N + \beta$, donde N es un número entero no negativo y $0 < \beta \leq 1$. Denotamos $\Lambda_\alpha((x_{-\infty},\infty))$ el espacio de las funciones $f \in C^N((x_{-\infty},\infty))$, para las cuales su derivada $D^N f$ es Lipschitz-β en $\mathbb{R}$.*

Definición 2.1.4. *Sea $\alpha = N + \beta$, donde N es un número entero no negativo y $0 < \beta \leq 1$. Diremos que una clase F en $E_N^q(x_{-\infty},\infty)$ pertenece a $\Lambda_\alpha((x_{-\infty},\infty))$, si algún representante f de F pertenece a $\Lambda_\alpha((x_{-\infty},\infty))$.*

A partir del hecho de que dos representantes de una clase F en $E_N^q(x_{-\infty},\infty)$ difieren en un polinomio de grado a lo sumo N, decir que F pertenece a $\Lambda_\alpha((x_{-\infty},\infty))$ ($\alpha = N + \beta$, donde $0 < \beta \leq 1$), es equivalente a decir que todos sus representantes pertenecen a $\Lambda_\alpha((x_{-\infty},\infty))$.
Para simplificar la notación, y mientras no se preste a confusión notamos L_{loc}^q, E_N^q, C^N y Λ_α en lugar de $L_{loc}^q((x_{-\infty},\infty)), E_N^q((x_{-\infty},\infty)), C^N((x_{-\infty},\infty))$ y $\Lambda_\alpha((x_{-\infty},\infty))$ respectivamente.

2.2. Propiedades de la maximal $N^{+}_{q,\alpha}$ y de los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$

En esta sección recordamos propiedades y resultados sobre las funciones maximales $n^{+}_{q,\alpha}(f;x)$, $N^{+}_{q,\alpha}(F;x)$ y los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ que serán de gran utilidad en los resultados de los siguientes capítulos

Lema 2.2.1. *Existe $\phi \in C_0^{\infty}$ soportada en $[-1,0]$, tal que para todo polinomio $P(x)$ de grado a lo sumo N y cualquier número real λ positivo, vale que*

$$P(x) = \int \lambda P(y)\phi(\lambda(x-y))dy.$$

La demostración de este resultado se puede ver en [5].
A continuación enunciamos una serie de resultados que se encuentran demostrados en [16] y [17].

Lema 2.2.2. *Sea F en E^q_N, y sean f_1 y f_2 representantes de F, $P = f_1 - f_2$. Existe una constante finita c_k tal que*

$$\left|\left(\frac{d}{dy}\right)^k P(y)\right| \leq c_k \left(n^{+}_{q,\alpha}(f_1;x_1) + n^{+}_{q,\alpha}(f_2;x_2)\right)(|x_1-y|+|x_2-y|)^{\alpha-k}$$

vale para todo x_1, x_2 e y en $(x_{-\infty},\infty)$.

Lema 2.2.3. *Sea F en E^q_N con $N^{+}_{q,\alpha}(F,x_0) < \infty$. Entonces:*

(i) Existe una única $f \in F$ tal que $n^{+}_{q,\alpha}(f;x_0) < \infty$ y, por lo tanto, $N^{+}_{q,\alpha}(F;x_0) = n^{+}_{q,\alpha}(f;x_0)$.

(ii) Para todo intervalo $I = [a,b] \subset (x_{-\infty},\infty)$ con $a \geq x_0$. Existe una constante finita c que depende de x_0 y del intervalo I tal que si f es el único representante de F dado en (i), entonces

$$\|F\|_{q,I} \leq |f|_{q,I} \leq c_{x_0,I}\, n^{+}_{q,\alpha}(f;x_0) = c_{x_0,I}\, N^{+}_{q,\alpha}(F;x_0).$$

La constante $c_{x_0,I}$ se puede elegir independiente de x_0, si x_0 varía en un conjunto compacto.

Corolario 2.2.4. *Si $\{F_i\}$ es una sucesión de elementos en E^q_N que converge a F en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, $0 < p \leq 1$ entonces $\{F_i\}$ converge a F en E^q_N.*

Antes de enunciar los restantes resultados será de gran utilidad introducir la siguiente notación para lo que resta del trabajo. Dado un representante f de una clase F se tiene que si para un punto $x \in (x_{-\infty},\infty)$ la maximal $N^{+}_{q,\alpha}(F;x)$ es finita entonces por el Lema 2.2.3 parte (i) existe un representante de F que realiza la maximal $N^{+}_{q,\alpha}(F;x)$, denotamos a tal representante como $f(y) - P(x,y)$ donde $P(x,y)$ es un polinomio de grado a lo sumo N en la variable y.

Lema 2.2.5. *Sea f un representante de la clase F en E_N^q. Supongamos que $N_{q,\alpha}^+(F;x)$ es finita y denotemos por $P(x,y)$ el único polinomio de grado a lo sumo N tal que $n_{q,\alpha}^+(f(y)-P(x,y);x) = N_{q,\alpha}^+(F;x)$. Luego $f(x) = P(x,x)$ en casi todo punto x para el cual $N_{q,\alpha}^+(F;x)$ es finita.*

Lema 2.2.6. *Sea F_i una sucesión de elementos en E_N^q, tal que la serie $\sum_i N_{q,\alpha}^+(F_i;x)$ es finita para casi todo punto x en $(x_{-\infty},\infty)$. Entonces*

(i) La serie $\sum_i F_i$ converge en E_N^q a un elemento F y además

$$N_{q,\alpha}^+(F;x) \leq \sum_i N_{q,\alpha}^+(F_i;x) \text{ para } x \in (x_{-\infty},\infty). \tag{2.1}$$

(ii) Sea x_0 tal que $\sum_i N_{q,\alpha}^+(F_i;x_0)$ es finita. Si f_i es el único representante de la clase F_i que satisface $N_{q,\alpha}^+(F_i;x_0) = n_{q,\alpha}^+(f_i;x_0)$, entonces la serie $\sum_i f_i$ converge en L_{loc}^q a una función f que es el único representante de F que satisface $N_{q,\alpha}^+(F;x_0) = n_{q,\alpha}^+(f;x_0)$.

Como consecuencia del Lema 2.2.6 se tiene

Corolario 2.2.7. *El espacio $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, $0 < p \leq 1$, es completo.*

Lema 2.2.8 (Partición lateral de la unidad)**.** *Sea $a < b$ y consideremos el intervalo $I = (a,b)$ entonces existe una sucesión $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ de funciones en C_0^∞ que satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $0 \leq \eta_j(x) \leq 1$ y $\sum_j \eta_j(x)\chi_{(a,b)}(x) = \chi_{(a,b)}(x)$.

2) para cada número natural j, si $I_j = [a+2^{-j}(b-a), a+2^{-j+2}(b-a)]$ entonces $sop(\eta_j) \subset I_j$. Si denotamos $r_j = \frac{(b-a)}{2^j}$, entonces para todo $x \in I_j$ $r_j \leq x-a \leq cr_j$. Donde c no depende de j.

3) Si $\hat{I}_j = (a+2^{-j-1}(b-a), \min\{a+2^{-j+2}(b-a), b\})$, $\bigcup_{j=1}^\infty \hat{I}_j = I$. Además, si $x \in I$ entonces x pertenece a lo sumo a tres de los intervalos $\hat{I}_j$.

4) Si k es un número entero, $k \geq 0$, tenemos que $\left|D^k\eta_j(x)\right| \leq C_k r_j^{-k}$ donde C_k no depende j.

Utilizando la notación previa se puede probar el siguiente resultado

Lema 2.2.9. *Sea* $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ *y* f *un representante de* F*. Si* $g(y)$ *es la función definida en* $(x_{-\infty}, \infty)$ *de la siguiente manera*

$$g(y) = \begin{cases} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{i,j}(y)\chi_{I_i}(y)P(x_{i,j}, y) + \chi_{I_1}(y)P(b_1, y)) \text{ si } y \in \Omega \\ f(y) \text{ si } y \notin \Omega, \end{cases}$$

y G *denota la clase en* E^q_N *de la función* g*, entonces*

$$N^+_{q,\alpha}(G; x) \leq ct \text{ para todo } x \in (x_{-\infty}, \infty).$$

Observación 2.2.10. *Como se observa en [17] la demostración de este último lema nos permite garantizar que si* $F \in \Lambda_\alpha$*, esto es que cualquier representante* f *de* F *tiene derivadas continuas hasta el orden* N *y además su derivada* N *es Lipschitz-*β*, entonces la maximal* $N^+_{q,\alpha}(F; x)$ *es acotada. Por otra parte, si* $N^+_{q,\alpha}(F; x)$ *es acotada, entonces existe* $t > 0$ *tal que* $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R} : N^+_{q,\alpha}(F; x) > t\} = \emptyset$ *y por lo tanto todo representante de* F *tiene derivadas continuas hasta el orden* N *y su derivada* N *es Lipschitz-*β *es decir* $F \in \Lambda_\alpha$*.*

Como consecuencia del Lema 2.2.9 se tiene el siguiente resultado y su prueba se puede ver en [20].

Lema 2.2.11. *Sea* F *en* Λ_α*. Si* $f(y)$ *es el representante que realiza la maximal en un punto* $x_1 \in (x_{-\infty}, \infty)$ *e* $y \in (x_{-\infty}, \infty)$*, entonces*

$$\left|D^i f(y)\right| \leq C \left\|N^+_{q,\alpha}(F; .)\right\|_\infty |y - x_1|^{\alpha - i}, \text{ para } i = 0, 1, ..., N. \tag{2.2}$$

El siguiente teorema es de gran utilidad para obtener nuestro principal resultado en el capítulo 3.

Teorema 2.2.12. *El conjunto de clases* $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega) \bigcap \Lambda_\alpha$ *es denso en* $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$*.*

Lema 2.2.13. *Sea* F *en* E^q_N*. Supongamos que* $N^+_{q,\alpha}(F, x) \leq t$ *para todo* x *perteneciente a un conjunto* E*. Sea* f *un representante de* F *y* $P(x, y)$ *el único polinomio en* $\mathcal{P}_N$*, tal que* $N^+_{q,\alpha}(F; x) = n^+_{q,\alpha}(f(y) - P(y, x); x)$*. Para cada* x *en* E *definimos* $A_k(x) = D^k_y P(x, y)\big|_{y=x}$*. Entonces,*

$$\left|A_k(x) - \sum \frac{1}{i!}(x - \overline{x})^i A_{k+i}(\overline{x})\right| \leq c\, t\ |x - \overline{x}|^{\alpha - k}, \tag{2.3}$$

para todo x *y* $\overline{x}$ *en* E*. Además, La función* A_N *satisface una condición Lipschitz-*β *con constante* ct *sobre el conjunto* E *(recordemos que* $\alpha = N + \beta$*, donde* $0 < \beta \leq 1$*) y si* $0 \leq k < N$*,* $A_k(x)$ *satisface una condición Lipschitz-*1 *uniforme sobre todo subconjunto compacto de* E*.*

Como hemos mencionado las pruebas de los dos resultados anteriores se encuentran en [17]. También en [17] se obtiene el siguiente teorema que su demostración es similar a la dada A. Calderón en el Lema 6 en [1].

Teorema 2.2.14. *La función maximal $N^+_{q,\alpha}(F,x)$ asociada a una clase $F \in E^q_N$ es semicontinua inferiormente.*

A partir del lema anterior podemos caracterizar a las clases F de E^q_N tal que tienen maximal acotada como se demuestra en el siguiente resultado,

Lema 2.2.15. *Sea el parámetro α dado arriba. $F \in \Lambda_\alpha$ si y sólo sí $N^+_{q,\alpha}(F;x) \leq C$.*

Demostración. La prueba de $N^+_{q,\alpha}(F;x) \leq C \Rightarrow F \in \Lambda_\alpha$ es inmediata a partir del Lema 2.2.13. Luego sólo resta ver que $N^+_{q,\alpha}(F;x) \leq C$ para $F \in \Lambda_\alpha$. En efecto, sea $F \in \Lambda_\alpha$, y $f \in F$ luego $f \in C^N$ y $D^N f = \dfrac{d^N f}{dx^N} \in \Lambda_\beta$, $\alpha = N + \beta$, $0 < \beta \leq 1$.
Probemos que

$$\left| f(y) - \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k f(x)}{k!}(y-x)^k \right| \leq C \ |y-x|^\alpha . \tag{2.4}$$

Usando el desarrollo de Taylor de orden N de f en el punto x, y teniendo en cuenta que $f \in \Lambda_\beta$, $\alpha = N + \beta$, para $0 < \theta < 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left| f(y) - \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k f(x)}{k!}(y-x)^k \right| &= \left| \frac{D^N f(y+\theta(x-y)-x)}{N!}(y-x)^N - \frac{D^N f(x)}{N!}(y-x)^N \right| \\
&\leq C_f |(y-x)(1-\theta)|^\beta \, |y-x|^N \\
&\leq C_f |y-x|^\beta \, |y-x|^N \\
&= C_f |y-x|^\alpha
\end{aligned}$$

lo que prueba (2.4). Luego teniendo en cuenta esta estimación resulta que

$$\frac{1}{\rho^{\alpha q+1}} \int_x^{x+\rho} \left| f(y) - \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k f(x)}{k!}(y-x)^k \right|^q dy \leq C_f \frac{1}{\rho^{\alpha q+1}} \int_x^{x+\rho} (y-x)^{\alpha q}\, dy \leq C_f,$$

lo que implica que $N^+_{q,\alpha}(F;x) \leq C$.

□

A partir del Lema 2.2.3 y el Lema 2.2.15 se tiene la siguiente observación.

Observación 2.2.16. *Sea $F \in \Lambda_\alpha$, y $f \in F$. Entonces $f \in C^N$ y $D^N f = \frac{d^N f}{dx^N} \in \Lambda_\beta$, $\alpha = N + \beta$, $0 < \beta \leq 1$. Para $x \in (x_{-\infty}, \infty)$, sea $P_N(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}(x)(y-x)^k$ el Polinomio de Taylor de f en x. Afirmamos que $f(y) - P_N(x,y)$ es el representante de F que realiza la función maximal $N^+_{q,\alpha}(F;x)$ En efecto, para algún $0 < \theta < 1$, se tiene*

$$\begin{aligned}
|f(y) - P_N(x,y)| &= |f(y) - P_{N-1}(x,y) - \frac{1}{N!}\frac{d^N f}{dx^N}(x)(y-x)^N| \\
&= \frac{1}{N!}|y-x|^N \left| \frac{d^N f}{dx^N}(x+\theta(y-x)) - \frac{d^N f}{dx^N}(x) \right| \\
&\leq C_N |y-x|^N |y-x|^\beta \\
&= C_N |y-x|^\alpha
\end{aligned}$$

lo cual implica que $n^+_{q,\alpha}(f - P_N(x,\cdot);x) < \infty$.

Como consecuencia del Lema 2.2.15 se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.2.17. *Sea f una función con derivadas continuas y acotadas hasta el orden $N+1$. Si F es la clase de f entonces*

$$N^+_{q,\alpha}(F;x) \leq C_f.$$

Este resultado nos será de gran utilidad en el Capítulo 4 ya que nos brinda las condiciones que deben satisfacer los elementos de la clase $F \in E^q_N$ para que los espacios de Calderón-Hardy admitan descomposición atómica, es decir, nos da las características de las clases F para asegurar la existencia de átomos en dichos espacios.

Capítulo 3

Aplicación de la integral fraccionaria de Weyl a los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$

En este capítulo estudiamos propiedades del operador integral fraccionaria de Weyl I^+_γ entre los espacios de Calderón-Hardy laterales. Más específicamente, obtenemos que para una elección de los parámetros p, q, γ, α y s el operador I^+_γ se puede extender en forma continua desde los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ a los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha+\gamma}(\omega)$. Esto se obtiene probando una desigualdad puntual que satisface la función máximal de Calderón $N^+_{q,\alpha}(F;x)$. También a partir de dicha desigualdad puntual y de una caracterización de los elementos del espacio Λ_α con los elementos del espacio cociente E^N_q tal que tienen maximal acotada se consigue una demostración diferente del clásico resultado de acotación del operador integral fraccionaria entre los espacios Lipschitz. Estos resultados nos dieron lugar al trabajo [22].

3.1. Integral fraccionaria de Weyl. Definiciones y Notaciones.

Dada una función f definida sobre $\mathbb{R}$ medible, se define la integral fraccionaria de orden γ donde $0 < \gamma < 1$ como

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\gamma}} dy,$$

cuando esta integral existe.
Es bien sabido que existen resultados de acotación de la integral fraccionaria. Algunos de ellos aseguran que si $0 < \gamma < 1$, $1 < q' < q < \infty$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q'} - \gamma$ y $f \in L^{q'}(\mathbb{R})$ entonces

$$||I_\gamma f||_{L^q(\mathbb{R})} \leq C_{q',q} ||f||_{L^{q'}(\mathbb{R})}. \tag{3.1}$$

Para su prueba, por ejemplo, podemos citar [8] y [25]. Otro clásico resultado afirma que si $f \in \Lambda_\alpha$, $\;0 < \alpha < 1$, entonces $I_\gamma f \in \Lambda_\beta$, $\;\beta = \alpha + \gamma < 1$. Una versión general de este resultado se puede encontrar en [9].

Aquí estudiamos el comportamiento, sobre los espacios de Calderón-Hardy, del operador integral fraccionaria de Weyl I^{+}_{γ}, $0 < \gamma < 1$, definido por

$$I^{+}_{\gamma} f(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} dy, \quad x \in (x_{-\infty}, \infty), \tag{3.2}$$

siempre y cuando la integral exista.

Observación 3.1.1. *Si consideramos al núcleo $K(x) = \chi_{(-\infty,0)}|x|^{\gamma-1}$, podemos escribir la integral fraccionaria como el siguiente producto de convolución*

$$I_{\gamma} f(x) = (K * f)(x).$$

No es difícil ver que el núcleo $K \in L^{1}_{loc}(\mathbb{R})$ y que además para $x \in (-\infty, 0)$ tiene la propiedad

$$|D^{i} K(x)| \leq C_{\gamma,i,n} |x|^{\gamma-1-i}, \quad \textit{para} \;\; 1 \leq i \leq n \tag{3.3}$$

Usando la definición (3.2) se puede probar que si f es no negativa entonces

$$I^{+}_{\gamma} f(x) \leq I_{\gamma} f(x) \quad x \in (x_{-\infty}, \infty) \tag{3.4}$$

y además vale que

$$I^{+}_{\gamma_1} \circ I^{+}_{\gamma_2} f(x) \leq I_{\gamma_1+\gamma_2} f(x) \quad x \in (x_{-\infty}, \infty) \tag{3.5}$$

3.2. Extensión de la integral fraccionaria de Weyl a las clases $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega) \bigcap \Lambda_{\alpha}$

Sea $\phi \in C^{\infty}_{0}$, $0 \leq \phi(y) \leq 1$, con soporte contenido en el intervalo $[-2, 2]$, y además $\phi(y) \equiv 1$ en $[-1, 1]$. Sea $r > 0$ y $x_1 \in \mathbb{R}$. Denotamos

$$\phi_{x_1,r}(y) = \phi\left(\frac{y - x_1}{r}\right). \tag{3.6}$$

Luego $\phi_{x_1,r}(y)$ tiene soporte contenido en el intervalo $[x_1 - 2r, x_1 + 2r]$, $\phi(y) \equiv 1$ en $[x_1 - r, x_1 + r]$, además se verifica que

$$\left| D^{i}(\phi_{x_1,r})(y) \right| \leq C_i r^{-i}, \tag{3.7}$$

para cualquier número natural i, donde C_i es $\|D^{i}\phi\|_{\infty}$. Si $x_1 = 0$, denotaremos a $\phi_{0,r}(y)$ por $\phi_r(y)$.

A partir de ahora consideramos $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ donde α está representado por $\alpha = N + \beta$ con $0 < \beta < 1$.

Lema 3.2.1. *Sean $F \in \Lambda_\alpha$ y f es el representante de F tal que $n^+_{q,\alpha}(f;0) = N^+_{q,\alpha}(F;0)$. Definimos*

$$g_j(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}\phi_j(y)dy - \sum_{i=0}^N \int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(0)f(y)(\phi_j(y)-\phi_1(y))dy\frac{x^i}{i!}, \tag{3.8}$$

donde $\phi_j(y)$ y $\phi_1(y)$ están dadas como en (3.6). Entonces, existe $\lim_{j\to\infty} g_j$ *en* $L^q_{loc}(x_{-\infty},\infty)$.

Demostración. Fijamos un intervalo $I = [a,b] \subset (x_{-\infty},\infty)$, y consideramos un número natural l tal que $I \subset [-l/2, l/2]$. Luego, para todo $x \in I$ y $j > l$ podemos expresar a $g_j(x)$ de la siguiente manera

$$g_j(x) = g_l(x) + \int \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^N \int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(0)\frac{x^i}{i!}\right] f(y)(\phi_j(y)-\phi_l(y))dy, \tag{3.9}$$

en efecto, si en (3.9) escribimos para $l \in \mathbb{N}$ a g_l con la definición dada en (3.8) se tiene

$$\begin{aligned} g_j(x) = &\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}\phi_l(y)dy - \sum_{i=0}^N \int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(0)f(y)(\phi_l(y)-\phi_1(y))dy\frac{x^i}{i!} \\ &+ \int \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^N D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(0)\frac{x^i}{i!}\right] f(y)(\phi_j(y)-\phi_l(y))dy, \end{aligned}$$

Si en el tercer término distribuímos y después agrupamos se obtiene (3.9).

Ahora probamos que existe el límite del segundo sumando de (3.9).
Como $\phi_j(y) - \phi_l(y) \le 1 - \phi_l(y)$ y $sop\,(1-\phi_l) \subset \{|y| \ge l\}$ resulta que

$$sop\,(\phi_j - \phi_l) \subset sop\,(1-\phi_l) \subset \{|y| \ge l\}$$

y así el segundo sumando de (3.9) se puede estimar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\int_x^\infty \left|\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^N D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(0)\frac{x^i}{i!}\right| |f(y)|\,|\phi_j(y)-\phi_l(y)|\,dy \\ &\le \int_{|y|>l\cap(x,\infty)} \left|\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^N D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(0)\frac{x^i}{i!}\right| |f(y)|\,|1-\phi_l(y))|\,dy \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observamos que si $x \in I \subset [-l/2, l/2]$, y $A = \{|y| \ge l\} \cap (x,\infty)$, para $0 < \xi < 1$ resulta que $|\xi x - y| \ge |y|/2$. En efecto,

$$|\xi x - y| = |y - \xi x| \ge |y| - |\xi x| \ge |y| - |\xi|\frac{l}{2} \ge |y| - \frac{l}{2} \ge |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}.$$

Luego, por la Fórmula de Taylor y teniendo en cuenta el Lema 2.2.11, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{|y|>l\cap(x,\infty)} \left| \frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{x^i}{i!} \right| |f(y)| \, (1-\phi_l(y))dy \\
&\leq C_{\gamma,N} \int_{|y|>l\cap(x,\infty)} |\xi x - y|^{\gamma-(N+2)} |f(y)| \, dy \;\; |x|^{N+1} \\
&\leq C_{\gamma,N} 2^{(N+2)} \int_{|y|>l\cap(x,\infty)} |y|^{\gamma-(N+2)} |f(y)| \, dy \;\; |x|^{N+1} \\
&\leq C_{\gamma,N} 2^{(N+2)} \left\| N^{+}_{q,\alpha}(F;.) \right\|_{\infty} \int_{|y|>l\cap(x,\infty)} |y|^{\gamma-(N+2)} |y|^{N+\beta} \, dy \;\; |x|^{N+1} \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

y como la última integral es convergente siempre que $0 < \gamma + \beta < 1$, resulta que

$$
\begin{aligned}
&\int_{|y|>l\cap(x,\infty)} \left| \frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{x^i}{i!} \right| |f(y)| \, (1-\phi_l(y))dy \\
&\leq C_{\beta,\gamma,N,l} \left\| N_{q,\alpha}(F;.) \right\|_{\infty} < \infty.
\end{aligned}
$$

Luego se probó que

$$
\left(\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{x^i}{i!} \right) f(y)(1-\phi_l(y))dy \quad \in \quad L^1((x_{-\infty},\infty))
$$

y así se tiene que el segundo miembro de (3.9) está controlado por una función del $L^1(x_{-\infty},\infty)$, luego por el Teorema de la Convergencia Dominada el segundo sumando de (3.9) converge a

$$
\int_x^{\infty} \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^j \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{x^i}{i!} \right] f(y)(1-\phi_l(y))dy.
$$

Así resulta que $\lim\limits_{j\to\infty} g_j(x)$ existe en $L^{\infty}_{loc}(x_{-\infty},\infty)$, por lo tanto puntualmente y en $L^{q}_{loc}((x_{-\infty},\infty))$, lo que nos da la conclusión del lema. $\square$

Ahora bajo las condiciones del Lema 3.2.1 y teniendo en cuenta la notación anterior, podemos definir

$$
\begin{aligned}
I_{\gamma}^{+,0} f(x) &= \lim_{j\to\infty} g_j(x) \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_x^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_j(y)dy \\
&\quad - \sum_{i=0}^{N} \int_x^{\infty} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y)(\phi_j(y)-\phi_1(y))dy \frac{x^i}{i!}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

donde este límite se lo considera en $L^\infty_{loc}((x_{-\infty},\infty))$. En el Lema 3.2.1 hemos probado que para $x \in I = [a,b] \subset [-l/2, l/2]$,

$$\begin{aligned} I_\gamma^{+,0} f(x) &= \lim_{j\to\infty} g_j(x) \\ &= g_l(x) + \int_x^\infty \left[\frac{1}{|x-y|^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^N D^i \left(\frac{1}{|-y|^{1-\gamma}} \right) \frac{x^i}{i!} \right] f(y)(1-\phi_l(y))dy, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde

$$g_l(x) = \int \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_l(y) dy - \sum_{i=0}^N \int D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y)(\phi_l(y) - \phi_1(y))dy \ \frac{x^i}{i!}.$$

Resumiendo, si $F \in \Lambda_\alpha$ hemos elegido un representante f, en particular este es el que realiza la maximal $N_{q,\alpha}(F;0)$ y para esta f definimos una extensión del operador integral fraccionaria I_γ^+, $I_\gamma^{+,0}$, como una función en $L^\infty_{loc}((x_{-\infty},\infty))$. El siguiente paso es probar que si f es un polinomio de grado a lo sumo N entonces $I_\gamma^{+,0} f$ también es un polinomio de grado a lo sumo N, con lo cual probaríamos que esta extensión es independiente del representante f elegido de la clase F.

Lema 3.2.2. *Sea $P(y)$ un polinomio de grado a lo sumo N, entonces $I_\gamma^{+,0} P(x)$ (definido como en (3.12)) coincide con un polinomio de grado a lo sumo N en $(x_{-\infty}, \infty)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad y por la linealidad de la integral, podemos suponer que $P(y) = y^n$ donde $0 \le n \le N$. Sea $l \in \mathbb{N}$ y $x \in [-l/2, l/2]$, a partir de la identidad (3.13), podemos escribir

$$\begin{aligned} I_\gamma^{+,0} P(x) &= \int_x^\infty \frac{y^n}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_l(y) dy \\ &\quad + \int_x^\infty \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{j=0}^N D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{x^i}{i!} \right] y^n (1-\phi_l(y))dy \\ &\quad - \sum_{i=0}^N \int x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \ y^n (\phi_l(y) - \phi_1(y)) dy \frac{x^i}{i!} \\ &= P_1(x) + P_2(x) + Q(x), \end{aligned} \tag{3.14}$$

Veamos que $D^{N+1}\left(I_\gamma^0 P\right) \equiv 0$, para ello como

$$Q(x) = -\sum_{i=0}^N \int D^i \left(\frac{1}{|-y|^{1-\gamma}} \right) \ y^n (\phi_l(y) - \phi_1(y)) dy \frac{x^i}{i!}$$

es un polinomio de grado a lo sumo N en variable x, resulta que $D^{N+1}\left(Q\right)(x)=0$. Es decir sólo alcanza con probar que

$$D^{N+1}\left(P_2\right)(x)=-D^{N+1}\left(P_1\right)(x). \tag{3.15}$$

Consideramos $\eta(y)=y^n\phi_l(y)$, como $\phi_l(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, resulta que $\eta(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Luego haciendo el cambio de variables $z=y-x$ podemos expresar $P_1(x)$ como

$$P_1(x)=\int_0^\infty \frac{(x+z)^n\phi_l(x+z)}{z^{1-\gamma}}dz=\int_0^\infty \frac{\eta(x+z)}{z^{1-\gamma}}dz.$$

Como η y sus derivadas tienen soporte compacto, por el teorema de derivación bajo el signo integral se tiene que $P_1(x)$ admite derivadas hasta el orden $N+1$ y

$$D^{N+1}\left(I_\gamma^0 P_1\right)(x)=\int_0^\infty \frac{1}{|z|^{1-\gamma}}D^{N+1}\eta(x+z)dz. \tag{3.16}$$

Ahora derivamos hasta el orden $N+1$ a $P_2(x)$. Para $k=0,1,\ldots,N+1$, $|y|>l$ y $x\in[-l/2,l/2]$ usando la Fórmula de Taylor y (3.3) se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|D_x^k\left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}-\sum_{i=0}^N D^i\left(\frac{1}{|.-y|}^{1-\gamma}\right)(0)\frac{x^i}{i!}\right]\right| \\
&\leq CD^{N+1}\left(\frac{1}{|.-y|}^{1-\gamma}\right)(\xi x)|x|^{N+1-k} \\
&\leq C_l|y|^{\gamma-N-2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\int\left|D_x^k\left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}-\sum_{i=0}^N D^i\left(\frac{1}{|.-y|}^{1-\gamma}\right)(0)\frac{x^i}{i!}\right]\right||y^n(1-\phi_l(y))|dy \\
&\leq C_l\int_{|y|>l}|y|^{n+\gamma-N-2}<\infty
\end{aligned} \tag{3.18}$$

y asi tenemos que

$$\begin{aligned}
D^{N+1}\left(I_\gamma^0 P_2\right)(x)&=\int_x^\infty D_x^{N+1}\left(\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}\right)\,y^n(1-\phi_l(y))dy \\
&=(-1)^{N+1}\int_x^\infty D_y^{N+1}\left(\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}\right)\,y^n(1-\phi_l(y))dy,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Aplicamos integración por partes a (3.19) y hacemos el cambio de variables $y=x+z$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&(-1)^{N+1}\int_x^\infty D_y^{N+1}\left(\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}\right)\,y^n(1-\phi_l(y))dy \\
&=(-1)^{2N+1}\int_x^\infty \frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}D_y^{N+1}\left(y^n\phi_l\right)(y)dy \\
&=-\int_0^\infty \frac{1}{|z|^{1-\gamma}}D_x^{N+1}\eta(x-z)dz \\
&=-D^{N+1}\left(P_1\right)(x)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Luego a partir de (3.19) y (3.20) probamos (3.15) y así por (3.14), tenemos que

$$D^{N+1}\left(I_\gamma^0 P\right) \equiv 0,$$

y por lo tanto $I_\gamma^0 P(x)$ coincide con un polinomio de grado a lo sumo N en $(x_{-\infty}, \infty)$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar la siguiente definición:

Definición 3.2.3. *Sea $F \in \Lambda_\alpha$ y f un representante de F, definimos $\overline{I_\gamma^+} F$ la clase en E_N^q de la función en $L_{loc}^q((x_{-\infty}, \infty))$ dada por*

$$I_\gamma^{+,0} f(x) = \lim_{j\to\infty} \left[\int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_j(y)dy \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^{N} \int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0) f(y)(\phi_j - \phi_1)(y)dy \frac{x^i}{i!}\right]. \quad (3.21)$$

Esta definición tiene sentido ya que por el Lema 3.2.1 se tiene que para cada representante de F el límite dado por (3.21) existe en $L_{loc}^q((x_{-\infty}, \infty))$ y además por el Lema 3.2.2 la definición no depende del representante f de F.
Por otra parte,la clase $\overline{I_\gamma^+} F$ no cambia si modificamos el punto donde centramos el desarrollo de Taylor del núcleo $\dfrac{1}{|x|^{1-\gamma}}$. Es decir, si fijamos $x_0 \in (x_{-\infty}, \infty)$ y definimos

$$I_\gamma^{+,x_0} f(x) = \lim_{j\to\infty} \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_{x_0,j}(y)dy \\ - \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0) f(y)\left(\phi_{x_0,j}(y) - \phi_{x_0,1}(y)\right)dy \frac{(x-x_0)^i}{i!}$$

donde f es un representante de F, se tiene que $I_\gamma^{+,x_0} f(x)$ y $I_\gamma^{+,0} f(x)$ difieren en un polinomio de grado a lo sumo N, y en consecuencia sus clases de equivalencias en E_N^q coinciden.
En efecto, sea J un intervalo y consideramos $l \in \mathbb{N}$, de forma que los intervalos $[-l/2, l/2]$ y $[x_0 - l/2, x_0 + l/2]$ contengan al intervalo J, luego en forma similar a como se obtiene (3.13), resulta que para $x \in J \subset [x_0 - l/2, x_0 + l/2]$, se tiene que

$$I_\gamma^{+,x_0} f(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_{x_0,l}(y)dy \\ - \sum_{i=0}^{N} \int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right) f(y)(x_0)\left(\phi_{x_0,l}(y) - \phi_{x_0,1}(y)\right)dy \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\ + \int_x^\infty \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right] f(y)(1-\phi_{x_0,l}(y))dy.$$

Además para $x \in J \subset [-l/2, +l/2]$

$$
\begin{aligned}
I_\gamma^{+,0} f(x) &= \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_l(y) dy \\
&- \sum_{i=0}^{N} \int D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y) \left(\phi_l(y) - \phi_1(y) \right) dy \frac{(x)^i}{i!} \\
&+ \int_x^\infty \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{(x)^i}{i!} \right] f(y)(1-\phi_l(y)) dy.
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
& I_\gamma^{+,x_0} f(x) - I_\gamma^{+,0} f(x) \\
= & \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_{x_0,l}(y) dy \\
& - \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(x_0) f(y) \left(\phi_{x_0,l}(y) - \phi_{x_0,1}(y) \right) dy \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\
& + \int_x^\infty \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!} \right] f(y)(1-\phi_{x_0,l}(y)) dy \\
& - \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \phi_l(y) dy + \sum_{i=0}^{N} \int D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y) \left(\phi_l(y) - \phi_1(y) \right) dy \frac{(x)^i}{i!} \\
& - \int_x^\infty \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) \frac{(x)^i}{i!} \right] f(y)(1-\phi_l(y)) dy \\
= & \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \left(\phi_{x_0,l}(y) - \phi_l(y) \right) dy + \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}} \left(1 - \phi_{x_0,l}(y) - 1 + \phi_l(y) \right) dy \\
& - \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(x_0) f(y) \left(\phi_{x_0,l}(y) - \phi_{x_0,1}(y) \right) dy \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(x_0) f(y) \left(1 - \phi_{x_0,l}(y) \right) dy \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\
& + \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y) \left(\phi_l(y) - \phi_1(y) \right) dy \frac{(x)^i}{i!} \\
& + \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y) \left(1 - \phi_l(y) \right) dy \frac{(x)^i}{i!} \\
= & - \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(x_0) f(y) \left(1 - \phi_{x_0,1}(y) \right) dy \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\
& + \sum_{i=0}^{N} \int_x^\infty D^i \left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}} \right)(0) f(y) \left(1 - \phi_1(y) \right) dy \frac{(x)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

luego $I_\gamma^{+,x_0}f(x) - I_\gamma^{+,0}f(x)$ es un polinomio en x de grado a lo sumo N.

3.3. Continuidad de la integral fraccionaria de Weyl en los espacios de Calderón-Hardy laterales con pesos

Aquí probamos el principal reslutado de este capítulo. En primer lugar obtenemos una estimación puntual entre las funciones maximales $N^+_{q,\alpha+\gamma}(\overline{I^+_\gamma}F;x)$ y $N^+_{q,\alpha}(F;x)$.

Teorema 3.3.1. *Sea $F \in \Lambda_\alpha$, $\alpha = N+\beta$, $0<\beta<1$ y $\gamma+\beta<1$. Sea $\overline{I^+_\gamma}$ la extensión de la integral fraccionaria dada por (3.21). Entonces*

$$N^+_{q,\alpha+\gamma}(\overline{I^+_\gamma}F;x) \le C_{\alpha,\gamma}N^+_{q,\alpha}(F;x) \text{ para todo } x \in (x_{-\infty},\infty),$$

donde $C_{\alpha,\gamma}$ es independiente de la clase F.

Demostración. Sean $x_0 \in (x_{-\infty},\infty)$ y f el representante de F tal que $n^+_{q,\alpha}(f;x_0) = N^+_{q,\alpha}(F;x_0) < \infty$. Probamos que un representante de $\overline{I^+_\gamma}F$ es

$$\begin{aligned} I_\gamma^{+,x_0}f(x) &= \lim_{j\to\infty}\left[\int \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}\phi_{x_0,j}(y)dy\right.\\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{N}\int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)f(y)(\phi_{x_0,j}(y)-\phi_{x_0,1}(y))dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right]. \end{aligned}$$

Fijamos $\rho>0$ y consideramos la función $\phi_{x_0,\rho}(y)$. Además supongamos que $x \in [x_0, x_0+\rho/4]$. La idea es obtener para $x \in [x_0,x_0+\rho/4]$ las siguientes estimaciones

$$\left|I_\gamma^{+,x_0}\left(f(1-\phi_{x_0,\rho})\right)(x) - Q(x_0,x)\right| \le C_{\gamma,\alpha}N^+_{q,\alpha}(F;x_0)\rho^{\alpha+\gamma} \tag{3.22}$$

y

$$\left(\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_{\gamma,+}^{x_0}\left(f\phi_{x_0,\rho}\right)(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_{\gamma,\alpha}N^+_{q,\alpha}(F;x_0)\rho^{(\alpha+\gamma)+\frac{1}{q}} \tag{3.23}$$

donde $Q(x_0,x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\int_x^\infty D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)f(y)\phi_{x_0,1}(y)dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}$.

Veamos que a partir de (3.22) y (3.23) se tiene la tesis, en efecto

$$\begin{aligned} &\left(\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+,x_0}f(x) - Q(x_0,x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ =& \left(\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+,x_0}f(x) - I_\gamma^{+,x_0}\left(f\phi_{x_0,\rho}\right)(x) + I_\gamma^{+,x_0}\left(f\phi_{x_0,\rho}\right)(x) - Q(x_0,x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ \le& \left(\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+,x_0}f\left(1-\phi_{x_0,\rho}\right)(x) - Q(x_0,x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+,x_0}\left(f\phi_{x_0,\rho}\right)(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq\ & C_{\gamma,\alpha}N_{q,\alpha}^{+}(F;x_0)\rho^{(\alpha+\gamma)}\left(\rho/4\right)^{\frac{1}{q}}+C_{\gamma,\alpha}N_{q,\alpha}^{+}(F;x_0)\rho^{(\alpha+\gamma)+\frac{1}{q}}\\
=\ & C_{\gamma,\alpha}N_{q,\alpha}^{+}(F;x_0)\rho^{\alpha+\gamma+\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

Luego para $\rho>0$

$$
\left(\frac{1}{\rho}\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+,x_0}f(x)-Q(x_0,x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C_{\alpha,\gamma}N_{q,\alpha}^{+}(F,x_0)\rho^{\alpha+\gamma},
$$

o bien

$$
\frac{1}{\rho^{\alpha+\gamma}}\left(\frac{1}{\rho}\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+,x_0}f(x)-Q(x_0,x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C_{\alpha,\gamma}N_{q,\alpha}^{+}(F,x_0)\ \text{ para todo }\ \rho>0,
$$

si tomamos supremo sobre $\rho>0$ a la desigualdad anterior se tiene que

$$
n_{q,\alpha+\gamma}^{+}\left(I_\gamma^{+,x_0}f(x)-Q(x_0,x);x_0\right)\leq C_{\alpha,\gamma}N_{q,\alpha}^{+}(F;x_0)\ \text{ para toda }\ f\in F,
$$

luego como $I_\gamma^{+,x_0}f(x)-Q(x_0,x)\in\overline{I_\gamma^{+}}F$ tenemos que

$$
N_{q,\alpha+\gamma}^{+}\left(\overline{I_\gamma^{+}}F;x_0\right)\leq C_{\alpha,\gamma}N_{q,\alpha}^{+}(F;x_0)\ \text{ para todo }\ x_0\in(x_{-\infty},\infty).
$$

Sólo resta probar las desigualdades (3.22) y (3.23).
Para (3.22) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&I_\gamma^{+,x_0}\left(f\left(1-\phi_{x_0,\rho}\right)\right)(x)=\lim_{j\to\infty}\left[\int\frac{f(y)(1-\phi_{x_0,\rho}(y))\phi_{x_0,j}(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}dy\right.\\
&\left.-\sum_{i=0}^{N}\int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)f(y)(1-\phi_{x_0,\rho}(y))(\phi_{x_0,j}(y)-\phi_{x_0,1}(y))dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right]\\
&. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Restando y sumando $\dfrac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}(1-\phi_{x_0,\rho}(y))\phi_{x_0,1}(y)$ dentro de la primer integral y asociando convenientemente resulta que

$$
\begin{aligned}
I_\gamma^{+,x_0}(f(1-\phi_{x_0,\rho}))(x)&=\int_x^\infty[\frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}(1-\phi_{x_0,\rho}(y))\phi_{x_0,1}(y)dy\\
&+\lim_{j\to\infty}\int_x^\infty\left[\frac{1}{(x-y)^{1-\gamma}}-\sum_{i=0}^{N}D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right]\\
&\times\ f(y)(1-\phi_{x_0,\rho}(y))(\phi_{x_0,j}(y)-\phi_{x_0,1}(y))dy \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Expresando

$$\begin{aligned}\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} &= \sum_{i=0}^{N} D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\\ &+\left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}-\sum_{i=0}^{N} D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right] \quad (3.26)\end{aligned}$$

sustituyendo (3.26) en la primer integral de (3.25), obtenemos que

$$\begin{aligned}I_\gamma^{+,x_0}(f(1-\phi_{x_0,\rho})(x) &= \sum_{i=0}^{N}\int_x^\infty f(y)D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\phi_{x_0,1}(y)dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\\ &-\sum_{i=0}^{N}\int_x^\infty f(y)D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\phi_{x_0,1}(y)\phi_{x_0,\rho}(y)dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\\ &+\lim_{j\to\infty}\int_x^\infty\left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}}-\sum_{i=0}^{N} D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right]\\ &\quad\times f(y)(1-\phi_{x_0,\rho}(y))\phi_{x_0,j}(y)dy\\ &= I_1(x)+I_2(x)+I_3(x). \quad (3.27)\end{aligned}$$

Veamos las acotaciones de $I_1(x), I_2(x)$ e $I_3(x)$. Como $F\in\Lambda_\alpha$ y f es un representante que realiza la maximal en x_0, por el Lema 2.2.11 para $i=0$, tenemos que

$$|f(y)|\leq C\left\|N_{q,\alpha}^+(F;.)\right\|_\infty |y-x_0|^\alpha.$$

Luego, a partir de esta última estimación y sabiendo que el núcleo verifica la propiedad (3.3) tenemos que cada integral de $I_1(x)$ está acotada por

$$\begin{aligned}&\int_x^\infty\left|f(y)D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\right|\phi_{x_0,1}(y)dy\\ &\leq C\left\|N_{q,\alpha}^+(F;.)\right\|_\infty\int_{x_0}^{x_0+2}\left|D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\right||y-x_0|^\alpha dy\\ &\leq C_{\gamma,i}\left\|N_{q,\alpha}^+(F;.)\right\|_\infty\int_{x_0}^{x_0+2}|y-x_0|^{\gamma-i-1}|y-x_0|^\alpha dy\\ &= C_{\gamma,i}\left\|N_{q,\alpha}^+(F;.)\right\|_\infty\int_{x_0}^{x_0+2}|y-x_0|^{\gamma-i-1+\alpha}dy<\infty,\end{aligned}$$

ya que $\gamma+\alpha-i-1=\gamma+\beta+N-i-1>N-1-i>-1$ siempre que $0\leq i\leq N$. Luego I_1 es un polinomio de grado a lo sumo N, denotado por $Q(x_0,x)$, es decir

$$Q(x_0,x)=\sum_{i=0}^{N}\int_x^\infty f(y)D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\phi_{x_0,1}(y)dy\frac{(x-x_0)^i}{i!} \quad (3.28)$$

Ahora estimemos cada sumando de $I_2(x)$, teniendo en cuenta la condición del núcleo dada por (3.3) y que el *sop* $\left(\frac{1}{|x_0-y|^{1-\gamma}}\phi_{x_0,\rho}(y)\right) \subset [x_0, x_0+2\rho]$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_x^\infty f(y)D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\phi_{x_0,1}(y)\phi_{x_0,\rho}(y)dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right| \\
&\leq C_{\gamma,i}\int_{x_0}^{x_0+2\rho}|x_0-y|^{\gamma-1-i}|f(y)|dy\frac{|x-x_0|^i}{i!} \\
&\leq C_{\gamma,i}\int_{x_0}^{x_0+2\rho}|x_0-y|^{\gamma-1-i}|f(y)|dy\frac{\rho^i}{i!} \\
&\leq C_{\gamma,i}\rho^i\sum_{j=0}^\infty\int_{x_0+2^{-j}\rho}^{x_0+2^{-j+1}\rho}|x_0-y|^{\gamma-1-i}|f(y)|dy \\
&\leq C_{\gamma,i}\rho^i\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{(2^{-j}\rho)^{1+i-\gamma}}\int_{x_0+2^{-j}\rho}^{x_0-2^{-j+1}\rho}|f(y)|dy \\
&\leq C_{\gamma,i}\rho^i\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{(2^{-j}\rho)^{1+i-\gamma}}\left(\int_{x_0}^{x_0+2^{-j+1}\rho}|f(y)|dy\right) \\
&\leq C_{\gamma,i}\rho^i\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{(2^{-j}\rho)^{1+i-\gamma}}\left(\int_{x_0}^{x_0+2^{-j+1}\rho}|f(y)|^qdy\right)^{\frac{1}{q}}(2^{-j+1}\rho)^{\frac{1}{q'}} \\
&= C_{\gamma,i}\rho^i\sum_{j=0}^\infty\frac{(2^{-j+1}\rho)^{\frac{1}{q}}}{(2^{-j}\rho)^{1+i-\gamma}}\left(\frac{1}{2^{-j+1}\rho}\int_{x_0}^{x_0+2^{-j+1}\rho}|f(y)|^qdy\right)^{\frac{1}{q}}(2^{-j+1}\rho)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq C_{\gamma,i}\rho^i\sum_{j=0}^\infty\frac{(2^{-j+1}\rho)}{(2^{-j}\rho)^{1+i-\gamma}}(2^{-j+1}\rho)^\alpha N^+_{q,\alpha}(F;x_0) \\
&\leq C_{\gamma,i,\alpha}\rho^{\alpha+\gamma}N^+_{q,\alpha}(F;x_0)\sum_{j=0}^\infty 2^{-j(-i+\alpha+\gamma)}
\end{aligned}$$

dado que $-i+\alpha+\gamma \geq \beta+\gamma > 0$ tenemos que la serie $\sum_{j=0}^\infty 2^{-j(-i+\alpha+\gamma)}$ converge y así cada sumando de I_2 está controlado de la siguiente manera

$$\left|\int_x^\infty f(y)D^i\left(\frac{1}{|x_0-y|^{1-\gamma}}\right)\phi_{x_0,1}(y)\phi_{x_0,\rho}(y)dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right| \ \leq \ C_{\gamma,i,\alpha}N^+_{q,\alpha}(F;x_0)\rho^{\alpha+\gamma}.$$

Entonces para $x \in [x_0, x_0+\frac{\rho}{4}]$,

$$|I_2(x)| \leq C_{\gamma,\alpha}N^+_{q,\alpha}(F;x_0)\rho^{\alpha+\gamma} \tag{3.29}$$

Ahora estimemos $I_3(x)$, sabiendo que si $x_0 \in [x_0, x_0+\rho/4]$ para $y \notin [x_0, x_0+\rho]$ y $0<\theta<1$ se verifica que

$$|x_0 + \theta(x - x_0) - y| \geq |y - x_0| - |x - x_0| > |y - x_0| - \frac{\rho}{4} > \frac{3}{4}|y - x_0|$$

Por el Teorema del Valor Medio, la condición del núcleo (3.3) y la Fórmula del Polinomio de Taylor resulta que $I_3(x)$ está estimado por

$$\begin{aligned}
&\left|\int_x^\infty \left[\frac{1}{(y-x)^{1-\gamma}} - \sum_{i=0}^{N} D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\right] f(y)(1-\phi_{x_0,\rho}(y))\phi_{x_0,j}dy\right| \\
&\leq \left|\int_x^\infty D^{N+1}\left(\frac{1}{|x_0+\theta(x-x_0)-y|^{1-\gamma}}\right) f(y)(1-\phi_{x_0,\rho}(y))\phi_{x_0,j}(y)dy\frac{(x-x_0)^{N+1}}{(N+1)!}\right| \\
&\leq C_{\gamma,N}\rho^{N+1}\int_{x_0+\rho}^\infty |x_0+\theta(x-x_0)-y|^{\gamma-1-(N+1)}\,|f(y)|\,dy \\
&\leq C_{\gamma,N}\rho^{N+1}\int_{x_0+\rho}^\infty \frac{|f(y)|}{|y-x_0|^{-\gamma+N+2}}dy \\
&= C_{\gamma,N}\rho^{N+1}\sum_{j=0}^\infty \int_{x_0+2^j\rho}^{x_0+2^{j+1}\rho} \frac{|f(y)|}{|y-x_0|^{-\gamma+N+2}}dy \\
&\leq C_{\gamma,N}\rho^{\gamma-1}\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(2^j)^{-\gamma+N+2}}\left(\int_{x_0+2^j\rho}^{x_0+2^{j+1}\rho}|f(y)|\,dy\right) \\
&\leq C_{\gamma,N}\rho^{\gamma-1}\sum_{j=0}^\infty \frac{(2^j\rho)^{\frac{1}{q}}}{(2^j)^{-\gamma+N+2}}\left(\frac{1}{2^j\rho}\int_{x_0+2^j\rho}^{x_0+2^{j+1}\rho}|f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}(2^j\rho)^{\frac{1}{q'}} \\
&= C_{\gamma,N}\rho^{\gamma-1}\sum_{j=0}^\infty \frac{2^j\rho}{(2^j)^{-\gamma+N+2}}\left(\frac{1}{2^j\rho}\int_{x_0+2^j\rho}^{x_0+2^{j+1}\rho}|f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_{\gamma,N}\rho^{\gamma+\alpha}N^+_{q,\alpha}(F,x_0)\sum_{j=0}^\infty \frac{2^{(j)(\alpha+1)}}{(2^j)^{-\gamma+N+2}} \\
&= C_{\gamma,N}\rho^{\gamma+\alpha}N_{q,\alpha}(F,x_0)\sum_{j=0}^\infty \frac{2^{(j+2)(\alpha+1)}}{(2^j)^{-\gamma+N+2}} \\
&= C_{\alpha,\gamma}\rho^{\gamma+\alpha}N^+_{q,\alpha}(F,x_0)\sum_{j=0}^\infty 2^{j(\gamma-N-2+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

Luego como $\gamma - N - 2 + \alpha + 1 < 0$ resulta que la serie del último término es finita y así se tiene

$$|I_3(x)| \leq C_{\gamma,\alpha}N^+_{q,\alpha}(F,x_0)\rho^{\alpha+\gamma} \tag{3.30}$$

luego a partir de la igualdad (3.27) y las estimaciones (3.28), (3.29) y (5.17) se tiene que la desigualdad (3.22).

Ahora veamos la validez de (3.23)

$$
\begin{aligned}
I_\gamma^{x_0}(f\phi_{x_0,\rho})(x) &= \lim_{j\to\infty}\int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}\phi_{x_0,\rho}(y)\phi_{x_0,j}(y)dy\\
&-\sum_{i=0}^{N}\int D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)f(y)\phi_{x_0,\rho}(y)(\phi_{x_0,j}(y)-\phi_{x_0,1}(y))dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\\
&= \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}\phi_{x_0,\rho}(y)dy\\
&-\sum_{i=0}^{N}\int_x^\infty D^i\left(\frac{1}{|.-y|^{1-\gamma}}\right)(x_0)f(y)\phi_{x_0,\rho}(y)(1-\phi_{x_0,1}(y))dy\frac{(x-x_0)^i}{i!}\\
&= J_1(x)+J_2(x) \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Realizando el mismo razonamiento que el hecho para obtener la estimación (3.29) se obtiene que

$$
|J_2(x)| \le C_{\gamma,\alpha}N_{q,\alpha}^{+}(F;x_0)\rho^{\alpha+\gamma} \;\; textparatodo \;\; x\in(x_0,x_0+\rho/4) \qquad (3.32)
$$

Estimamos la norma L^q de $J_1(x)$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|\int_x^\infty \frac{f(y)\phi_{x_0,\rho}(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}dy\right|^q dx\\
&= \int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|I_\gamma^{+}\left(f\phi_{x_0,\rho}\right)(x)\right|^q dx\\
&\le \left[\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left(\left|I_\gamma^{+}\left(f\phi_{x_0,\rho}\right)(x)\right|^q\right)^{\frac{r}{q}}dx\right]^{\frac{q}{r}}\left[\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}1^{\frac{r}{r-q}}dx\right]^{\frac{r-q}{r}}\\
&= ||I_\gamma^{+}(f\phi_{x_0,\rho})||_{L^r}^q\rho^{1-\frac{q}{r}}
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (3.1) resulta que

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}\left|\int \frac{f(y)\phi_{x_0,\rho}(y)}{(y-x)^{1-\gamma}}dy\right|^q dx\\
&\le C^q||f\phi_{x_0,\rho}||_{L^q}^q\rho^{1-\frac{q}{r}}\\
&= C^q\rho^{2-\frac{q}{r}}\left(\frac{1}{\rho}\int_{x_0}^{x_0+\rho/4}|f\phi_{x_0,\rho}(x)|^q dx\right)\\
&\le C^q\left(N_{q,\alpha}^{+}(F,x_0)\right)^q\rho^{(\alpha+\gamma)q+1}
\end{aligned}
$$

Luego considerando las estimaciones para los sumandos $J_1(x)$ y $J_2(x)$ obtenemos (3.23).

□

Ahora estamos en condiciones de probar la existencia de una extensión continua del operador Integral Fraccionaria de Weyl.

Teorema 3.3.2. *Sea* $0 < p \leq 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha = N + \beta$, *con* N *un entero,* $0 < \gamma + \beta < 1$, $1 < q < \frac{1}{\gamma}$ *y* $\omega \in A_s^+$ *donde* $(\alpha + \frac{1}{q})p \geq 1 > 1$ *o* $(\alpha + \frac{1}{q})p > 1$ *si* $s = 1$. *Sea* $\overline{I_\gamma^+}$ *la extensión de la integral fraccionaria lateral dada por la Definición 3.2.3. Entonces* $\overline{I_\gamma^+}$ *puede ser extendida como un operador acotado desde el espacio* $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ *en el espacio* $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ queremos probar que existe una constante positiva tal que

$$||\overline{I_\gamma^+}F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}}(\omega) \leq C_{\gamma,\alpha}||F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}}(\omega). \tag{3.33}$$

Por el Teorema 2.2.12 se tiene que existe una sucesión $F_j \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega) \bigcap \Lambda_\alpha$ tal que $F_j \to F$ en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$.
Como $F_j \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega) \bigcap \Lambda_\alpha \subset \Lambda_\alpha$, por Teorema 3.3.1, tenemos que

$$||\overline{I_\gamma^+}F_j||_{\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)} \leq C_{\gamma,\alpha}||F_j||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)} \tag{3.34}$$

Luego usando la linealidad de $\overline{I_\gamma^+}$ y la desigualdad (3.34) se tiene que para cada $j, k \in \mathbb{N}$

$$||\overline{I_\gamma^+}F_j - \overline{I_\gamma^+}F_k||_{\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)} = ||\overline{I_\gamma^+}(F_j - F_k)||_{\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)} \leq C_{\gamma,\alpha}||F_j - F_k||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)} \tag{3.35}$$

Como F_j es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ por (3.35) se tiene que $\overline{I_\gamma^+}F_j$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$. Por Corolario 2.2.7 resulta que el espacio $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$ es completo y así se tiene que $\overline{I_\gamma^+}F_j$ debe tener límite en $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$ al cual definimos por $\overline{I_\gamma^+}F$ entonces $\overline{I_\gamma^+}F_j \to \overline{I_\gamma^+}F$ en $\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)$. Luego por esta última conclusión y la desigualdad (3.34) se tiene (3.33) como sigue

$$||\overline{I_\gamma^+}F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)} = \lim_{j\to\infty} ||\overline{I_\gamma^+}F_j||_{\mathcal{H}_{q,\alpha+\gamma}^{p,+}(\omega)} \leq C_{\gamma,\alpha} \lim_{j\to\infty} ||F_j||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)} = C_{\gamma,\alpha}||F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)}$$

□

3.4. Observaciones finales

Observación 3.4.1. *El Teorema 3.3.1 nos da otra demostración del clásico resultado que dice que el operador extensión de la integral fraccionaria* $\overline{I_\gamma^+}$ *transforma* Λ_α *en* $\Lambda_{\alpha+\gamma}$ *siempre que* $\alpha = N + \beta$ *y* $0 < \beta + \gamma < 1$, *es decir para* $F \in \Lambda_\alpha$ *deberíamos ver que* $\overline{I_\gamma^+}F \in \Lambda_{\alpha+\gamma}$. *Sabemos por Lema 2.2.15 que probar que* $\overline{I_\gamma^+}F \in \Lambda_{\alpha+\gamma}$ *es equivalente a demostrar que* $N_{q,\alpha+\gamma}^+(\overline{I_\gamma^+}F; x)$ *está acotada, es decir* $N_{q,\alpha+\gamma}^+(\overline{I_\gamma^+}F; x) \leq C$ *para todo* $x \in (x_{-\infty}, \infty)$.
En efecto, por el Teorema 3.3.1 tenemos que vale la siguiente estimación puntual

$$N_{q,\alpha+\gamma}^+(\overline{I_\gamma^+}F; x) \leq C_{\gamma,\alpha}N_{q,\alpha}^+(F; x) \quad \textit{para todo} \quad x \in (x_{-\infty}, \infty),$$

además como $F \in \Lambda_\alpha$ se tiene que la maximal de A. P. Calderón $N^+_{q,\alpha}(F;x) \leq C$ para todo $x \in (x_{-\infty}, \infty)$ y en consecuencia resulta que $N^+_{q,\alpha+\gamma}(\overline{I^+_\gamma} F; x)$ está acotada para toda $F \in \Lambda_\alpha$ donde $\alpha = N + \beta$ con $0 < \beta < 1$. Por lo tanto, para $F \in \Lambda_\alpha$ probamos que $\overline{I^+_\gamma} F \in \Lambda_{\alpha+\gamma}$.

Observación 3.4.2. *No es dificil ver que como una consecuencia de los resultados de Ombrosi, ver Teoremas 4.1.5 y 4.2.2 en [17], podemos decir que el resultado previo es también verdadero para el caso que $\alpha \in \mathbb{N}$.*

Observación 3.4.3. *Sin embargo, el Teorema 3.3.2 es falso para $\beta + \gamma = 1$ con $0 < \beta < 1$. Lo probamos a partir de un ejemplo. Supongamos $\omega \equiv 1$. Sea $\phi \in C_0^\infty$, $0 \leq \phi(y) \leq 1$, con soporte contenido en $[-8, 8]$, y con $\phi(y) \equiv 1$ en $[-4, 4]$. Para $0 < \alpha < 1$, definimos*

$$a(x) = \phi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha n}} \cos 2^n x \right). \tag{3.36}$$

Esta serie define una función Lipschitz-α (ver [28]), y como $\phi \in C_0^\infty$, entonces la función denotada por a también pertenece a Lipschitz-α. Luego si notamos la clase de a en E_0^q por A, se tiene que $N^+_{q,\alpha}(A;x)$ esta acotada, y así como la función a tiene soporte contenido en un intervalo acotado, en [16] probó que la clase A está en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(1)$. Entonces la clase de a en E_0^q pertenece a $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(1)$.
Si consideramos, en particular, el caso $\alpha = N + \beta$, $N = 0$ y $\beta + \gamma = 1$. Además suponemos que $\overline{I^+_{1-\alpha}}$ es una extensión acotada desde $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(1)$ en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,1}(1)$, entonces tenemos que la clase en E_0^q de la función $I^+_{1-\alpha} a(x) \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,1}(1)$ y esto es falso. Pues si fuese verdadero, por Teorema 4.2.2 en [17] se tiene que $DI^+_{1-\alpha} a(x) \in H^p$, donde H^p es el clásico espacio de Hardy, y esto es falso. La prueba de estas afirmaciones, se encuentran en [17] Capítulo 4.

Observación 3.4.4. *Hasta lo que nosotros conocemos todos los resultados de este capítulo son novedosos aún en el caso bilátero es decir si los pesos pertenecen a la clase de Muckenhoupt.*

Capítulo 4

Descomposición atómica particular de los espacios de Calderón–Hardy.

En este capítulo obtenemos una descomposición atómica para una clase $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ con propiedades adicionales que nos serán de gran utilidad para arribar a un resultado de Interpolación entre espacios de Calderón-Hardy. Para ello en la primera sección seguimos las ideas de S. Ombrosi dadas en [16] y [17] donde se da una descomposición p - atómica de los elementos de dichos espacios laterales, basándose en un método similar al dado por R. Macias y C. Segovia en [14] para encontrar descomposiciones atómicas de distribuciones en espacios de tipo homogéneo. En la segunda sección obtenemos un descomposición atómica con propiedades adicionales que nos permiten superar los inconvenientes que aparecen al estudiar resultados de interpolación entre espacios con pesos laterales. Estos resultados se encuentran en [18].

4.1. Descomposición atómica de los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$

En [16] y [17] se prueba que cada elemento del espacio $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$ se puede descomponer como

$$F = \sum_{j\geq 1} \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_j \quad \text{en} \quad E^q_N, \tag{4.1}$$

donde $\{\tilde{\lambda}_j\}$ es una sucesión de números reales no negativos y $\{\tilde{A}_j\}$ es una sucesión de elementos en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$ que satisfacen:

i) $\operatorname{sop}(\tilde{a}_j) \subset \tilde{I}_j$, donde $\tilde{a}_j$ es un representante de $\tilde{A}_j$, $\tilde{I}_j$ intervalos acotados tal que $\tilde{I}_j \subset (x_{-\infty}, \infty)$ y $\omega(\tilde{I}_j) < \infty$.

ii) $N^+_{q,\alpha}(\tilde{A}_j; x) \leq \omega(\tilde{I}_j)^{-\frac{1}{p}}, \quad x \in (x_{-\infty}, \infty)$.

Más aún, la serie converge en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$, y existen dos constantes c_1 y c_2 que no dependen de F tales que

$$c_1 \|F\|^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)} \leq \sum_{j\geq 1} \tilde{\lambda}_j^{\,p} \leq c_2 \|F\|^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)} \tag{4.2}$$

Además, en [17] Ombrosi obtiene una estimación del tamaño de los elementos $\tilde{A}_j$, esto es

$$||\tilde{A}_j||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \leq C_\omega \tag{4.3}$$

donde C_ω no depende de $\tilde{A}_j$.

A continuación introducimos el concepto de átomo y algunas de sus propiedades que serán necesarias a lo largo del trabajo.

Definición 4.1.1. *Decimos que una clase $A \in E^q_N$ es un átomo en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$ si existe un representante a de A y un intervalo I tal que:*

i) $I \subset (x_{-\infty}, \infty)$, $w(I) < \infty$,

ii) *sop*$(a) \subset I$,

iii) $N^+_{q,\alpha}(A, x) \leq 1$ *para todo* $x \in (x_{-\infty}, \infty)$.

Al intervalo I lo llamamos un intervalo asociado a A. Observemos que en la definición de átomo pedimos al intervalo I que su w-medida sea finita, condición esta que para un peso $w \in A^+_s$ no asegura que I sea un intervalo acotado. Sin embargo, si $w(I) < \infty$, I no puede ser de la forma (a, ∞), así si I no es acotado, $x_{-\infty} = -\infty$ e I es de la forma $(-\infty, b)$ con $b < \infty$.

A partir del Lema 2.2.17 dado en el Capítulo 2, podemos mostrar en el siguiente resultado, cuales son las condiciones que deben satisfacer los elementos de las clases F de E^q_N para que exista un elemento en el espacio de Calderón-Hardy y por lo tanto también átomos.

Corolario 4.1.2. *Sea f una función de soporte compacto contenido en $(x_{-\infty}, \infty)$ con derivadas continuas hasta el orden $N+1$ y denotamos por F a la clase de f en E^q_N, entonces existe una constante γ tal que γF es un átomo en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$.*

Demostración. Sea un intervalo $I = [a, b] \subset (x_{-\infty}, \infty)$ que contiene al soporte de f. Como $I \subset (x_{-\infty}, \infty)$ se tiene por Lema 1.1.1 parte 8) que $0 < \omega(x) < \infty$. Luego, por el Lema 2.2.17, existe $C > 0$ tal que $N^+_{q,\alpha}(F; x) \leq C$ tomando $\gamma = C^{-1}$ y usando la propiedad de sublinealidad de la maximal resulta que

$$N^+_{q,\alpha}(F; x) \leq 1,$$

con lo cual, γF es un átomo en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. □

El siguiente lema muestra, bajo ciertas condiciones, como se estiman la norma de los átomos en el espacio $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$.

Lema 4.1.3. *Sean $\omega \in A^+_s$, $0 < p \leq 1$ y $(\alpha + \frac{1}{q})p \geq s > 1$ o $(\alpha + \frac{1}{q})p > 1$ si $s = 1$. Entonces existe una constante $C_\omega > 0$ tal que*

$$||A||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)} \leq C_\omega \omega(I), \tag{4.4}$$

para todo átomo $A \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ con intervalo asociado I.

Demostración. Definimos $A = \omega(\tilde{I})^{\frac{1}{p}}\tilde{A}$ donde $\tilde{A}$ es un elemento de $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ tal que satisface que existe $\tilde{a}$ un representante de $\tilde{A}$ y $\tilde{I}$ un intervalo acotado que verifican:

i) $\mathrm{sop}(\tilde{a}) \subset \tilde{I}$, donde $\omega(\tilde{I}) < \infty$, $\tilde{I}$ acotados.

ii) $N^+_{q,\alpha}(\tilde{A}; x) \leq \omega(\tilde{I})^{-\frac{1}{p}}$, $\quad x \in (x_{-\infty}, \infty)$.

Es claro que A es un átomo en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ con intervalo asociado $I = \tilde{I}$, luego por (4.3) se tiene

$$\begin{aligned}
||A||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} &= \int_{x_{-\infty}}^{\infty} N^+_{q,\alpha}(A; x)^p \omega(x) dx \\
&= \int_{x_{-\infty}}^{\infty} N^+_{q,\alpha}(\omega(\tilde{I})^{\frac{1}{p}}\tilde{A}; x)^p \omega(x) dx \\
&= \omega(\tilde{I}) \int_{x_{-\infty}}^{\infty} N^+_{q,\alpha}(\tilde{A}; x)^p \omega(x) dx \\
&= \omega(\tilde{I}) ||\tilde{A}||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \\
&\leq C_\omega \omega(I)
\end{aligned}$$

de lo que resulta (4.4).

□

Observación 4.1.4. *Cabe observar que a partir del Lema 2.2.17 y el Lema 4.1.3, siempre que $0 < p \leq 1, (\alpha + 1/q)p \geq s > 1$ o $(\alpha + 1/q)p > 1$ si $s = 1$, donde $\omega \in A^+_s$, se puede garantizar la existencia de elementos no nulos en el espacio $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ pues basta considerar una función $f \in C^{N+1}_0$ con soporte contenido en $I = [a, b]$, tal que $I \subset (x_{-\infty}, \infty)$.*

El siguiente resultado sigue las ideas de la segunda parte del Teorema 1, para los espacios de Hardy, que se encuentra en el Capítulo VIII en [26].

Teorema 4.1.5. *Sea* $\omega \in A_s^+$, $1 < q < \infty$ *y* $0 < p \leq 1$, $(\alpha + 1/q)p \geq s > 1$ *o* $(\alpha + 1/q)p > 1$ *si* $s = 1$. *Sea* $\{\lambda_j\}$ *una sucesión de números no negativos y* $\{A_j\}$ *una sucesión de átomos con soportes contenidos en intervalos acotados* $\{I_j\}$ *respectivamente tal que* $\left\|\sum_{j\geq 1} \lambda_j \chi_{I_j}\right\|_{L^p(\omega)} < \infty$. *Entonces* $\sum_{j\geq 1} \lambda_j A_j$ *converge incondicionalmente, en la norma de* $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, *a* $F \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$. *Más aún, existe* C *tal que*

$$||F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)} \leq C||\sum_j \lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)} \tag{4.5}$$

Demostración. Sean A un átomo soportado en $I = (d, b)$ y sea $2I = (d - |I|, b)$ y a el representante de la clase A tal que $sop(a) \subset I$. Estimamos $N_{q,\alpha}^+(A; x)$ cuando $x \in (x_{-\infty}, \infty)$.
Sea $x \in (x_{-\infty}, d - |I|)$ y $\rho > 0$. Si $x + \rho \leq d$

$$\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

ya que $x < y < x + \rho \leq d$ y $sop(a) \subset (d, b)$.
Si $x + \rho > d$ entonces $\rho > d - x \geq d - b = |I|$. Como $\rho > |I|$ y también $-x < \rho - d$ resulta que $b - x < \rho - d + b$ es decir $b - x < \rho + |I| < 2\rho$, y asi $\rho > \dfrac{b-x}{2}$.
Considerando que $sop(a) \subset (d, b)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho^{-(\alpha+\frac{1}{q})}\left(\int_x^{x+\rho} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \rho^{-(\alpha+\frac{1}{q})}\left(\int_{d-|I|}^{d+|I|} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{2}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \frac{2^{\alpha+\frac{1}{q}}|I|^{\alpha+\frac{1}{q}}}{(2|I|)^{\alpha+\frac{1}{q}}}\left(\int_{d-|I|}^{d+|I|} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_{\alpha,q}\left(\frac{|I|}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \frac{1}{(2|I|)^{\alpha+\frac{1}{q}}}\left(\int_{d-|I|}^{d+|I|} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Como $x \leq d - |I|$ resulta que $b - x \geq |I| + (b - d) = 2|I|$ luego $\dfrac{|I|}{b-x} \leq \dfrac{1}{2}$ y así el último término de la desigualdad anterior está acotado y no depende de ρ. Luego, tomando supremo sobre $\rho > 0$ a la desigualdad anterior y utilizando la acotación $N_{q,\alpha}^+(A; x) \leq 1$ para $x \in (x_{-\infty}, \infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{\rho>0}\left(\rho^{-(\alpha+\frac{1}{q})}\left(\int_x^{x+\rho}|a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\right) &\leq C_{\alpha,q}\left(\frac{|I|}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} n^+_{q,\alpha}(a;d-|I|)\\
&= C_{\alpha,q}\left(\frac{|I|}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} N^+_{q,\alpha}(A;d-|I|)\\
&\leq C_{\alpha,q}\left(\frac{|I|}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Finalmente tomando ínfimo sobre $a \in A$ se tiene que para $x \leq d-|I|$ vale

$$N^+_{q,\alpha}(A;x) = \inf_{a\in A}\sup_{\rho>0}\rho^{-(\alpha+\frac{1}{q})}\left(\int_x^{x+\rho}|a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{\alpha,q}\left(\frac{|I|}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}. \qquad (4.8)$$

Si $x \in (d-|I|, b) = 2I$ se tiene que

$$N^+_{q,\alpha}(A;x) = \inf_{a\in A}\sup_{\rho>0}\rho^{-(\alpha+\frac{1}{q})}\left(\int_x^{x+\rho}|a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq 1. \qquad (4.9)$$

Si $x \in [b,\infty)$ como el $sop(a) \subset (d,b)$ se tiene que

$$N^+_{q,\alpha}(A;x) = \inf_{a\in A}\sup_{\rho>0}\rho^{-(\alpha+\frac{1}{q})}\left(\int_x^{x+\rho}|a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = 0. \qquad (4.10)$$

Luego por (4.8), (4.9) y (4.10), para cada $x \in (x_{-\infty},\infty)$, podemos estimar a la maximal de un átomo A como sigue

$$\begin{aligned}
N^+_{q,\alpha}(A;x) &= N^+_{q,\alpha}(A;x)\chi_{(x_{-\infty},d-|I|]}(x) + N^+_{q,\alpha}(A;x)\chi_{(d-|I|,b)}(x)\\
&\quad + N^+_{q,\alpha}(A;x)\chi_{[b,\infty)}(x) \qquad (4.11)\\
&\leq C_{\alpha,q}\left(\frac{|I|}{b-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\chi_{(x_{-\infty},d-|I|]}(x) + \chi_{(d-|I|,b)}(x)\\
&\leq C_{\alpha,q}\sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{2^i}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\left(\chi_{2^{i+1}I}(x) - \chi_{2^iI}(x)\right) + \chi_{2I}(x)\\
&\leq C_{\alpha,q}\sum_{i\geq 0}\left(\frac{1}{2^i}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\chi_{2^{i+1}I}(x). \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Luego dadas las sucesiones de números no negativos $\{\lambda_j\}$ y la de átomos $\{A_j\}$ soportados en $\{I_j\}$ respectivamente, resulta que, para cada $j \geq 1$

$$N^{+}_{q,\alpha}(A_j;x) \leq C_{\alpha,q}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i(\alpha+\frac{1}{q})}\chi_{2^{i+1}I_j}(x). \tag{4.13}$$

Sea $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$ usando (4.13) resulta que

$$\begin{aligned}
||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j A_j||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} &= ||N^{+}_{q,\alpha}\left(\sum_{j=n}^{m}\lambda_j A_j;.\right)||^p_{L^p(\omega)} \\
&\leq ||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j N^{+}_{q,\alpha}\left(A_j;.\right)||^p_{L^p(\omega)} \\
&\leq C_{\alpha,q}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i(\alpha+\frac{1}{q})}||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j\chi_{2^{i+1}I_j}||^p_{L^p(\omega)} \\
&= C_{\alpha,q}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i(\alpha+\frac{1}{q})p}||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j\chi_{2^{i+1}I_j}||^p_{L^p(\omega)}. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Como la constante de duplicación a izquierda de $\omega \in A^{+}_{s}$ es $2^s c$ por Lema 1.1.1 parte *6)* resulta que $\omega(2^{i+1}I_j) \leq 2^{is}c\omega(I_j)$. Además por Lema 1.1.5 se tiene que

$$||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j A_j||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \leq C_{\alpha,q}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i[(\alpha+\frac{1}{q})p-s]}||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j\chi_{I_j}||^p_{L^p(\omega)}. \tag{4.15}$$

Como $(\alpha+\frac{1}{q})p - s \geq 0$ e $i \geq 0$ resulta que $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\left[(\alpha+\frac{1}{q})p-s\right]} = C_{\alpha,q,s} < \infty$ y así

$$||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j A_j||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \leq C_{\alpha,q,s}||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j\chi_{I_j}||^p_{L^p(\omega)}, \tag{4.16}$$

Como por hipótesis $||\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\chi_{I_j}||^p_{L^p(\omega)} < \infty$ luego $||\sum_{j=n}^{m}\lambda_j\chi_{I_j}||^p_{L^p(\omega)}$ converge a cero cuando n y m tienden a infinito y así, por (4.16) se tiene que $\{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_j\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, luego por Corolario 2.2.7, la sucesión $\{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_j\}_{m=1}^{\infty}$ converge a una clase $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Además por (4.16) se tiene que

$$||F||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} = ||\sum_{j\geq 1}\lambda_j A_j||^p_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \leq C_{\alpha,q,s}||\sum_{j\geq 1}\lambda_j\chi_{I_j}||^p_{L^p(\omega)}$$

obteniendo así la desigualdad (4.5).

$\square$

A continuación obtenemos una descomposición atómica de los espacios $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ la cual se obtiene a partir del teorema anterior, realizando ciertas modificaciones, a la prueba del Teorema 2.1 dada en [16].

Teorema 4.1.6. *(Descomposición atómica) Sea $\omega \in A_s^+$, $1 < q < \infty$ y $0 < p \leq 1$, tal que $(\alpha + 1/q)p \geq s > 1$ o $(\alpha + 1/q)p > 1$ si $s = 1$. Si $F \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ entonces existe una sucesión $\{\lambda_j\}$ de números reales no negativos y una sucesión $\{A_j\}$ de átomos con soporte contenido en intervalos acotados $\{I_j\}$ respectivamente, tal que $\sum_{j\geq 1} \lambda_j A_j$ converge incondicionalmente a F en E_N^q y en la norma $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$. Más aún existen constantes absolutas C_1 y C_2 tal que*

$$C_1 || \sum_{j\geq 1} \lambda_j \chi_{I_j} ||_{L^p(\omega)} \leq ||F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)} \leq C_2 || \sum_{j\geq 1} \lambda_j \chi_{I_j} ||_{L^p(\omega)} \tag{4.17}$$

Además, para $r > 0$

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j^r \chi_{I_j}(x) \leq C_r [N_{q,\alpha}^+(F;x)]^r \tag{4.18}$$

en casi todo punto $x \in (x_{-\infty}, \infty)$, donde C_r no depende de F.

Demostración. Para $F \in E_N^q$ tal que pertenece a $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, Ombrosi obtiene en [16] una descomposición dada por (4.1) y (4.2), esto es que vale

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_j \quad \text{en} \quad E_N^q$$

y

$$c_1 \|F\|_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(w)}^p \leq \sum_{j\geq 1} \tilde{\lambda}_j^{\,p} \leq c_2 \|F\|_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(w)}^p$$

donde $\tilde{\lambda}_j$ son números reales no negativos y los elementos $\tilde{A}_j \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ tal que satisfacen

i) $\text{sop}(\tilde{a}_j) \subset \tilde{I}_j$, donde $\tilde{a}_j$ es un representante de $\tilde{A}_j$, $\tilde{I}_j$ intervalos acotados tal que $\tilde{I}_j \subset (x_{-\infty}, \infty)$ y $\omega(\tilde{I}_j) < \infty$.

ii) $N_{q,\alpha}^+(\tilde{A}_j; x) \leq \omega(\tilde{I}_j)^{-\frac{1}{p}}, \quad x \in (x_{-\infty}, \infty)$.

Consideramos $A_j = \omega(\tilde{I}_j)^{\frac{1}{p}} \tilde{A}_j$, luego $a_j(y) = \omega(\tilde{I}_j)^{\frac{1}{p}} \tilde{a}_j(y)$ es un representante de A_j tal que $sopa_j = sop\tilde{a}_j \subset \tilde{I}_j = I_j$, además por la sublinealidad de la maximal se verifica

$$N_{q,\alpha}^+(A_j;x) = \omega(I_j)^{\frac{1}{p}} N_{q,\alpha}^+(\tilde{A}_j;x) \leq \omega(I_j)^{\frac{1}{p}} \omega(I_j)^{-\frac{1}{p}} = 1,$$

de lo que resulta que A_j es un átomo soportado en I_j. Además de (4.1) se tiene que

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_j \omega(I_j)^{-\frac{1}{p}} A_j \quad \text{en} \quad E_N^q. \tag{4.19}$$

Si llamamos

$$\lambda_j = \tilde{\lambda}_j \omega(I_j)^{-\frac{1}{p}} \tag{4.20}$$

de la identidad (4.19) resulta que

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j \quad \text{en} \quad E_N^q. \tag{4.21}$$

Es decir existe una sucesión de números reales no negativos $\{\lambda_j\}$ y existe una sucesión de átomos $\{A_j\}$ tal que $\sum_{j\geq 1} \lambda_j A_j$ converge a F en E_N^q. Veamos que $\sum_{j\geq 1} \lambda_j A_j$ converge a F en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$,

$$\begin{aligned}
||\sum_{j\geq 1} \lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)}^p &\leq \sum_{j\geq 1} ||\lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)}^p \\
&= \sum_{j\geq 1} {\lambda_j}^p ||\chi_{I_j}||_{L^p(\omega)}^p \\
&= \sum_{j\geq 1} {\lambda_j}^p \omega(I_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} \tilde{\lambda}_j^p \omega(I_j)^{-1} \omega(I_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} \tilde{\lambda}_j^p \\
&\leq c_2 ||F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}}^p(\omega), \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

esta última desigualdad se obtiene a partir de (4.2). Además como $F \in \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ resulta por (4.22) que $||\sum_{j\geq 1} \lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)}^p < \infty$ luego por Teorema 4.1.5 resulta que $\sum_{j\geq 1} \lambda_j A_j$ converge a F en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$.

Veamos que vale (4.17).

Como $||\sum_{j\geq 1} \lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)}^p < \infty$ se satisface la desigualdad (4.5), esto es que existe C tal que

$$||F||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)}^p \leq C^p ||\sum_j \lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)}^p, \tag{4.23}$$

luego de (4.22) y (4.23) se tiene la desigualdad (4.17).

Veamos que vale (4.18).

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ consideremos $\Omega_i = \{x \in (x_{-\infty}, \infty) : N_{q,\alpha}^+(F;x) \geq 2^i\} = \bigcup_{j\geq 1} \hat{I}_j^i$ donde $\hat{I}_j^i$ son los intervalos acotados dados en el Teorema 2.1 desarrollado en [16] que representan los intervalos acotados $\tilde{I}_j$.

Sea $r > 0$,

$$\begin{aligned}
[N_{q,\alpha}^{+}(F;x)]^r &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} [N_{q,\alpha}^{+}(F;x)]^r \left(\chi_{\Omega_i}(x) - \chi_{\Omega_{i+1}}(x)\right) \\
&\geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^i)^r \left(\chi_{\Omega_i}(x) - \chi_{\Omega_{i+1}}(x)\right) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^i)^r \chi_{\Omega_i(x)} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^i)^r \chi_{\Omega_{i+1}(x)} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^i)^r \chi_{\Omega_i(x)} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^i)^r 2^{-r} \chi_{\Omega_i(x)} \\
&= (1-2^{-r}) \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{ir} \chi_{\Omega_i}(x) \\
&= (1-2^{-r}) \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{ir} \sum_{j\geq 1} \chi_{\tilde{I}_j^i}(x). \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, definamos

$$\tilde{\lambda}_j^i = c2^i(\omega(\tilde{I}_j^i))^{\frac{1}{p}}, \qquad (4.25)$$

donde c es la constante de la condición ii) del Lema 4.3 dado en [16]. Luego utilizando (4.25) y (4.20) se tiene

$$2^{ir} = c^{-r}(\tilde{\lambda}_j^i)^r(\omega(\tilde{I}_j^i))^{-\frac{r}{p}} = c^{-r}(\lambda_j^i)^r(\omega(I_j^i))^{\frac{r}{p}}(\omega(\tilde{I}_j^i))^{-\frac{r}{p}} = c^{-r}(\lambda_j^i)^r,$$

y así por (4.24) resulta

$$[N_{q,\alpha}^{+}(F;x)]^r \geq (1-2^{-r})c^{-r} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ({\lambda_j}^i)^r \chi_{I_j^i}(x),$$

luego

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ({\lambda_j}^i)^r \chi_{I_j^i}(x) \leq C_r [N_{q,\alpha}^{+}(F;x)]^r$$

donde $C_r = \frac{c^r}{1-2^{-r}}$ tal que c no depende de F. □

A partir de la descomposición atómica de los espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ se puede garantizar que el parámetro q puede estar fijo, siempre y cuando se satisfagan las condiciones que nos aseguran que estos espacios son no vacíos, esto es que, $(\alpha + \frac{1}{q}) > s \geq 1$ o $(\alpha + \frac{1}{q}) \geq 1$ si $s = 1$ (ver Observación 4.1.4). A continuación damos la prueba.

Proposición 4.1.7. *Si* $(\alpha + \frac{1}{q})p \geq s > 1$ *o* $(\alpha + \frac{1}{q})p \geq 1$, *si* $s = 1$. *Entonces*

$$\mathcal{H}_{\hat{q},\alpha}^{p,+}(\omega) \equiv \mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$$

para todo $1 < \hat{q}, q < \infty$ *donde* $\hat{q}$ *satisface* $(\alpha + \frac{1}{\hat{q}})p \geq s > 1$ *o* $(\alpha + \frac{1}{\hat{q}})p \geq 1$ *si* $s = 1$.

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega) \subset \mathcal{H}^{p,+}_{\hat{q},\alpha}(\omega)$. Como $\left(\alpha + \frac{1}{q}\right) p \geq s > 1$ o $\left(\alpha + \frac{1}{q}\right) p \geq 1$ por la Observación 4.1.4 resulta que $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ tiene elementos no nulos entonces existe $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$, tal que $F \neq 0$ luego por el Teorema 4.1.6 existe una sucesión de números reales no negativos $\{\lambda_j\}$ y una sucesión de átomos $\{A_j\}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j = F \quad \text{en} \quad \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega).$$

Para $j \geq 1$ los elementos A_j son átomos en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ entonces $N^{+}_{q,\alpha}(A_j; x) \leq 1$ para $x \in (x_{-\infty}, \infty)$ luego por el Lema 2.2.15 se tiene que $A_j \in \Lambda_\alpha$, α independiente de q, y así resulta nuevamente por el Lema 2.2.15 que $N^{+}_{\hat{q},\alpha}(A_j; x) \leq C$. A partir de la sublinealidad de la maximal se tiene que $N^{+}_{\hat{q},\alpha}(C^{-1}A_j; x) \leq 1$ luego $\{\hat{A}_j = C^{-1}A_j\}$ es una sucesión de átomos en $\mathcal{H}^{p,+}_{\hat{q},\alpha}(\omega)$ soportados en $\hat{I}_j = I_j$ y sea $\{\hat{\lambda}_j = C\lambda_j\}$ una sucesión de números reales no negativos tal que por (4.17) se satisface

$$||\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j \chi_{\hat{I}_j}|| = ||\sum_{j=1}^{\infty} C\lambda_j \chi_{I_j}|| < \infty,$$

ya que $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Luego por Teorema 4.1.5 resulta que $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j \hat{A}_j$ converge a G en $\mathcal{H}^{p,+}_{\hat{q},\alpha}(\omega)$, esto es

$$G = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j \hat{A}_j = \sum_{j=1}^{\infty} C\lambda_j C^{-1} A_j = F,$$

por lo tanto $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j \hat{A}_j$ converge a F en $\mathcal{H}^{p,+}_{\hat{q},\alpha}(\omega)$.
En forma análoga se puede probar que $\mathcal{H}^{p,+}_{\hat{q},\alpha}(\omega) \subset \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. □

4.2. Una descomposición atómica particular

En esta sección obtenemos una descomposición atómica del espacio $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$ con la siguiente propiedad adicional: para cada átomo (con intervalo asociado I) que intervenga en la descomposición atómica de un elemento $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$, dada en el Teorema 4.1.6, existe otro átomo de la descomposición con intervalo asociado J que sigue a I, esto es que J esté contiguo a la derecha de I. Decimos que J sigue a I, si $I = [c, d]$ y $J = [d, e]$. Además las medidas de I y J son comparables: $|I| = 4|J|$. Esta manera de descomponer el espacio $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(w)$ sigue las ideas de la descomposición atómica de los espacios de Hardy laterales que obtienen Ombrosi, Segovia y Testoni en [21]. Para ello, necesitamos de los dos lemas siguientes que nos permitirán partir un átomo.

El siguiente lema es el Lema 7 de [21], el cual nos detalla una forma de descomponer intervalos acotados.

Lema 4.2.1. *Sea $r > 0$. Existe una sucesión de funciones $\{\eta_h\}_{h=-\infty}^{\infty}$ en C_0^∞ tal que*

(1) $0 \le \eta_h \le 1$ *and* $\displaystyle\sum_{h=-\infty}^{\infty} \eta_h(x) = \chi_{(-\infty,r)}(x)$.

(2) $supp(\eta_h) \subset I_h = [r - 2^{-h}r, r - 2^{-h-2}r]$.

(3) Si denotamos por $r_h = \frac{r}{2^h}$ *y* $x \in I_h$ *entonces* $\frac{1}{4}r_h \le r - x \le r_h$.

(4) Cada x pertenece a los sumo a tres intervalos I_h.

(5) Para cada entero no negativo i, existe una constante positiva c_i tal que

$$|D^i\eta_h(x)| \le c_i r_h^{-i}$$

.

Demostración. Sea

$$g(y) = \int_y^{\frac{y}{2}} \rho(t)dt,$$

donde $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ es una función no negativa soportada en [-2,-1] tal que $\int \rho(t)dt = 1$, y sean

$$\eta_h(x) = g\left(\frac{x-r}{2^{-h-2}r}\right).$$

No es difícil ver que la familía $\{\eta_h\}_{h=-\infty}^{\infty}$ verifica las condiciones del lema. Para detalles de la prueba ver [23]. □

Lema 4.2.2. *Sea A un átomo en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(w)$ con soporte contenido en intervalos acotados I. Entonces existe una sucesión $\{A_h\}$ de átomos con intervalos acotados asociados $\{I_h\}$ tal que*

$$A = C\sum_{h\ge -1} A_h \quad en \quad E_N^q,$$

donde C no depende de A. Además $I = \bigcup_{h\ge -1} I_h$, y ningún punto $x \in I$ pertenece a más de tres intervalos I_h. Más aún para cada h el intervalo $I_{h+2} = I_h^+$ sigue al I_h y $|I_h^+| \le |I_h| \le 4|I_h^+|$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $I = [0, r]$, $r > 0$. Sea a un representante del átomo A con soporte en I, entonces por la condición iii) de Definición 4.1.1 se tiene que

$$N_{q,\alpha}^+(A; x) \le 1 \;\text{ para todo }\; x \in (x_{-\infty}, \infty), \tag{4.26}$$

en particular resulta que la maximal es finita para todo $x \in (x_{-\infty}, \infty)$. Entonces, por Lema 2.2.3 parte i), para cada $x \in (x_{-\infty}, \infty)$ existe un único representante $\hat{a}$ de la clase A tal que $n_\alpha^+(\hat{a};x) < \infty$ y $n_{q,\alpha}^+(\hat{a};x) = N_{q,\alpha}^+(A;x)$, que es equivalente a decir que existe un único polinomio $P(x,y)$ en la variable y de grado a lo sumo N tal que $n_{q,\alpha}^+(a(y)-P(x,y);x) = N_{q,\alpha}^+(A;x)$, donde a es un representante de A. Además como $sop(a) \subset [0,r]$ resulta que

$$n_{q,\alpha}^+(a;r) = \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_r^{r+\rho} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

por la unicidad del representante resulta que $P(r,y) = 0$, y también $N_{q,\alpha}^+(A;r) = n_{q,\alpha}^+(a,r) = 0$.
Consideremos la sucesión de funciones $\{\eta_h\}_{h=-\infty}^{\infty}$ dadas en el Lema 4.2.1 asociado al intervalo $(-\infty, r)$ entonces por Lema 4.2.1 parte *(1)* tenemos

$$a(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a(x)\eta_h(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \theta_h(x). \tag{4.27}$$

Para cada h, denotamos por Θ_h a la clase de $\theta_h(x) = \eta_h(x)a(x)$ en E_N^q. Por argumentos similares dados en el Lema 4.5 en [16] y usando Lema 4.2.1, podemos probar que para cada $h \in \mathbb{Z}$, existe una constante C que no depende de h, tal que

$$N_{q,\alpha}^+(\Theta_h;x) \leq C \tag{4.28}$$

para todo $x \in (x_{-\infty}, \infty)$.

En efecto, por Lema 4.2.1 item *(2)* resulta que para $h \in \mathbb{Z}$,

$$sop\theta_h = sop(a\eta_h) \subset [0,r]\bigcap I_h \subset [0,r],$$

además $I_{h+2} = [r-2^{-h-2}r, r-2^{-h-4}r]$ sigue a $I_h = [r-2^{-h}r, r-2^{-h-2}r]$ y también se tiene que $|I_{h+2}| = \frac{3}{4}2^{-h}r < |I_h| = \frac{3}{16}2^{-h}r = 4|I_{h+2}|$.
Es claro que $[0,r] = \bigcup_{h=0}^{\infty} I_h \subset [0,r]$, y cada $x \in [0,r]$ resulta que pertenece a lo sumo a $3I_h$.
Supongamos que $x \geq r - 2^{-h-2}r$, luego

$$N_{q,\alpha}^+(\Theta_h;x) = 0. \tag{4.29}$$

Supongamos $r - 2^{-h+1}r \geq x \leq r - 2^{-h-2}r$, definimos

$$P_h(x,y) = \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dy^k}\left(\eta_h(y)P(x,y)|_{y=x}\frac{(y-x)^k}{k!}\right)$$

Sea $\rho > 0$, estimemos $\rho^{-\alpha}|\theta_h(y) - P_h(x,y)|_{q,[x,x+\rho]}$.
Para ello, dado que $r - 2^{-h+1}r \geq x \leq r - 2^{-h-2}r$ e $y \in [x, x+\rho]$ resulta que

$$|r-y| = |r-x+x-y| \leq |r-x| + |x-y| \leq C(\rho + r_h)$$

luego por la condición $iii)$ de la Definición 4.1.1, Lema 2.2.2 y esta última desigualdad, se tiene que

$$\begin{aligned} |\frac{d^k}{dy^k}(P(x,y))| &= |\frac{d^k}{dy^k}(P(x,y)-P(r,y))| \\ &\leq c_k \left(N^+_{q,\alpha}(A;x)+N^+_{q,\alpha}(A;r)\right)(|x-y|+|r-y|)^{\alpha-k} \\ &\leq c_k(\rho+r_h)^{\alpha-k}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Además teniendo en cuenta que $|r-x|\leq 2r_j$

$$\begin{aligned} |\frac{d^k}{dy^k}(P(x,y))|_{y=x}| &= |\frac{d^k}{dy^k}(P(x,y)-P(r,y))|_{y=x}| \\ &\leq c_k r_h^{\alpha-k} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Supongamos que $\rho\geq r_j$, luego por Leibnitz y reordenando la suma resulta

$$P_h(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{d^k}{dy^k}(P(x,y))|_{y=x}\frac{(y-x)^k}{k!}\times\left(\frac{d^j}{dy^j}\sum_{j=0}^{N-k}(\eta_h(x))\frac{(y-x)^j}{j!}\right)\right] \tag{4.32}$$

Teniendo en cuenta que $0\leq\eta_h(x)\leq 1$

$$\begin{aligned} |\theta_h(y)-P_h(x,y)| &\leq \eta_h|a(y)|+|P_h(x,y)| \\ &\leq \eta_h|a(y)-P(x,y)|+|P(x,y)|+|P_h(x,y)| \end{aligned} \tag{4.33}$$

Luego por (4.31), (4.32), la condición (5) del Lema 4.2.1 y el hecho que $\rho\geq r_h$ se tiene que

$$\begin{aligned} |P_h(x,y)| &\leq C\sum_{k=0}^{N} r_h^{\alpha-k}\rho^k\left(\sum_{j=0}^{N-k} c r_k^{-j}\rho^j\right) \\ &\leq C_N\sum_{k=0}^{N} r_h^{\alpha-k}\rho^k\left(\frac{\rho}{r_h}\right)^{N-k} \\ &\leq C_N\sum_{k=0}^{N} r_h^{\alpha-N}\rho^N \\ &\leq C_N\rho^\alpha. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Además a partir de (4.30) con $k=0$ resulta

$$|P(x,y)|\leq C\rho^\alpha,$$

luego integrando (4.33) sobre $[x,x+\rho]$ usando (4.34) y la última desigualdad se obtiene

$$\rho^{-\alpha}\left|\theta_h(y)-P_h(x,y)\right|_{q,[x,x+\rho]}\leq\rho^{-\alpha}\left|a(y)-P(x,y)\right|_{q,[x,x+\rho]}+C. \tag{4.35}$$

Supongamos $\rho < r_h$. Observemos que

$$P_h(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\left[\frac{d^k}{dy^k}(\eta_j(x))\frac{(y-x)^k}{k!}\times\left(\frac{d^j}{dy^j}\sum_{j=0}^{N-k}(P(x,y))|_{y=x}\frac{(y-x)^j}{j!}\right)\right] \quad (4.36)$$

Si a la expresión (4.36) sumamos y restamos

$$\eta_h(y) - P(x,y) + \sum_{k=0}^{N}\frac{d^k}{dx^k}\eta_h(y)\frac{(y-x)^k}{k!}P(x,y)$$

resulta que, agrupando convenientemente, podemos obtener la siguiente acotación

$$\begin{aligned} |\theta_h - P_h(x,y)| &\leq \eta_h(y)|a(y)-P(x,y)| + |\eta_h(y) - \sum_{k=0}^{N}\frac{d^k}{dx^k}\eta_h(x)\frac{(y-x)^k}{k!}||P(x,y)| \\ &+ \sum_{k=0}^{N}|\frac{d^k}{dx^k}\eta_j(x)\frac{(y-x)^k}{k!}|\times|P(x,y) - \sum_{j=0}^{N-k}\frac{d^j}{dy^j}P(x,y)|_{y=x}\frac{(y-x)^j}{j!}| \\ &\leq |a(y)-P(x,y)| + S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Estimemos S_1. Si $y \in [x, x+\rho]$ usando la Fórmula de Taylor por la condición (5) del Lema 4.2.1, la desigualdad (4.30) con $k = 0$ y recordando que $\alpha = N + \beta$ y $\rho < r_j$ se tiene que

$$\begin{aligned} S_1 &= \left|\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\eta_j(\xi)\frac{(y-x)^{N+1}}{(N+1)!}\right||P(x,y)| \\ &\leq Cr_h^{-(N+1)}\rho^{N+1}r_h^{\alpha} \\ &\leq C\rho^{N+1}r_h^{\alpha-(N+1)} \\ &= C\rho^{\alpha-(\beta-1)}r_h^{\alpha-(\alpha-\beta+1)} \\ &= C\rho^{\alpha} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para estimar S_2, argumentamos de igual manera que para S_1,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{d^k}{dx^k}\eta_h(x)\frac{(y-x)^k}{k!}\right|\left|\frac{d^{N+1-k}}{dy^{N+1-k}}P(x,y)|_{y=\xi}\frac{(y-x)^{N+1-k}}{(N+1-k)!}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N}Cr_h^k\rho^{N+1-k}(r_h+\rho)^{k+\beta-1} \\ &\leq C\sum_{k=1}^{N}r_h^{-k}(2r_h)^{k+\beta-1}\rho^{N+1} \\ &= C\rho^{\alpha} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Integrando (4.37) y teniendo en cuenta (4.38) y (4.39) se tiene que (4.35) vale también para $\rho < r_h$ luego tomando supremo sobre $\rho > 0$ se tiene que

$$N^{+}_{q,\alpha}(\Theta_h; x) \leq C \quad \text{para} \quad x \in [-2^{-h+1}r + r, -2^{-h-2}r + r]. \quad (4.40)$$

Por último, supongamos $x < -2^{-h+1}r + r$ y estimemos $\rho^{-\alpha}|\theta_h|_{q,[x,x+\rho]}$.
Como el sop$\theta_h \subset [-2^{-h}r + r, -2^{-h-2}r + r]$ y $x < -2^{-h+1}r + r$ basta considerar $\rho + x > -2^{-h}r + r$, pues de lo contrario $\rho^{-\alpha}|\theta_h|_{q,[x,x+\rho]} = 0$.
Luego $\rho > -2^{-h}r + r - x \geq -r_h + 2r_h = r_h > \frac{r_h}{2}$, además teniendo en cuenta que $-2^{-h}r + r \leq y \leq \rho + x$ tenemos que

$$\begin{aligned} |y - r| &\leq (y - (2^{-h}r + r) + r_h) \\ &\leq (x + \rho - (2^{-h}r + r) + r_j) \leq -2^{-h}r + r + \rho - 2^{-h}r - r + r_h \\ &\leq \rho \end{aligned}$$

Usando que $P(r, y) = 0$, el Lema 2.2.2, la condición *iii*) de la Definición 4.1.1, la desigualdad anterior y siempre que $-2^{-h}r + r \leq y \leq \rho + x$ se tiene que

$$|P(x, y)| = |P(x, y) - P(r, y)| \leq C[\rho + |y - r|]^{\alpha} \leq C\rho^{\alpha}$$

A partir de esta última estimación y debido a que $x \leq -2^{-h}r + r < \rho + x$ resulta que

$$\frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{-2^{-h}r+r}^{x+\rho} |P(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \tag{4.41}$$

Luego teniendo en cuenta que sop$\eta_h \subset [-2^{-h}r + r, -2^{-h-2}r + r]$, que $x < -2^{-h}r + r$, además que $0 \leq \eta_h(x) \leq 1$, la estimación 4.41 y la condición *iii)* de la Definición 4.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho^{-\alpha}|\theta_h|_{q,[x,x+\rho]} &= \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{-2^{-h}r+r}^{x+\rho} |\eta_h(y)a(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{-2^{-h}r+r}^{x+\rho} |a(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{-2^{-h}r+r}^{x+\rho} |\eta_j(y)a(y) - P(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{-2^{-h}r+r}^{x+\rho} |P(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{-2^{-h}r+r}^{x+\rho} |a(y) - P(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + C \\ &< \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{q}}} \left(\int_{x}^{x+\rho} |a(y) - P(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + C \\ &\leq C \end{aligned} \tag{4.42}$$

Luego a partir de (4.28), (4.40) y (4.42) se tiene que vale (4.28) para $x \in (x_{-\infty}, \infty)$.
Para cada $h \geq -1$ definimos la función

$$a_h(y) = C^{-1}\theta_h(y)$$

donde C es la constante de (4.28) y denotamos por A_h a la clase de a_h en E_N^q luego se tiene que

$$N_{q,\alpha}^+(A_h;x) = C^{-1}N_{q,\alpha}^+(\Theta_h;x) \leq 1 \tag{4.43}$$

además $sop(a_h) = sop(\theta_h) \subset I_h = [r - 2^{-h}r, r - 2^{-h-2}r]$ entonces la clase A_h es un átomo en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ con intervalo asociado I_h. Más aún

$$A = \sum_{h\geq -1} CA_h \quad \text{en} \quad E_N^q. \tag{4.44}$$

Para probar (4.44), vemos que $\sum_{h\geq -1} CA_h$ converge en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, por Lema 4.1.3 tenemos

$$||A_h||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)}^p \leq C_\omega \omega(I_h) \tag{4.45}$$

donde C_ω no depende de h. Entonces por (4.45) y Lema 4.2.1 parte *(4)* resulta que

$$\sum_{h\geq -1} ||CA_h||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)}^p \leq C^p C_\omega \sum_{h\geq -1} \omega(I_h) < \infty. \tag{4.46}$$

Veamos que $\{\sum_{h\geq -1}^n CA_h\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$, para ello consideremos $\epsilon > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m$. Por (4.46) tenemos que

$$||C(\sum_{h=-1}^m A_h - \sum_{h=-1}^n A_h)||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)}^p \leq \sum_{h=n}^m ||CA_h||_{\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)}^p \leq \epsilon. \tag{4.47}$$

Entonces por Lema 2.2.7 y (4.47) tenemos que $\sum_{h\geq -1} CA_h$ converge en $\mathcal{H}_{q,\alpha}^{p,+}(\omega)$ y por Corolario 2.2.4 la serie $\sum_{h\geq -1} CA_h$ converge en E_N^q. Solo resta ver que la serie $\sum_{h\geq -1} CA_h$ converge a A. Llamemos F al límite de la serie de las clases dada por $\sum_{h\geq -1} CA_h$. Por (4.28) y Lema 2.2.3 item *i)* resulta que θ_h es el único representante de la clase $\Theta_h = CA_h$ tal que $N_{q,\alpha}^+(\Theta_h;x) = n_{q,\alpha}^+(\theta_h;x) = 0$ para $x \geq r$ ya que $P_h(x,y) = 0, x \geq r$. Si probamos que,

$$\sum_{h\geq -1} N_{q,\alpha}^+(\Theta_h;x) < \infty, \quad \text{en c.t.p} \quad x \in (x_{-\infty}, \infty) \tag{4.48}$$

entonces por Lema 2.2.6 item *ii)* la serie $\sum_{h\geq -1} \theta_h$ converge en $L_{loc}^q(x_{-\infty}, \infty)$ al representante f de la clase F, esto es

$$\sum_{h\geq -1} \theta_h(y) = f(y) \quad \text{en} \quad \text{c.t.p} \quad y,$$

como una consecuencia de la identidad (4.27) resulta que $a(y) = f(y)$ en casi todo punto y. Entonces las clases A y $F = \sum_{h\geq -1} CA_h$ son las mismas en E_N^q, esto es $A = \sum_{h\geq -1} CA_h$ in E_N^q.

Sólo resta probar la desigualdad (4.48). En efecto, sea $x \in (x_{-\infty}, \infty)$, si $x \geq r$ entonces $\sum_{h\geq -1} N_{q,\alpha}^+(\Theta_h; x) = 0$ porque $N_{q,\alpha}^+(\Theta_h; x) = 0$ para todo $h \geq -1$. Si $x \in (x_{-\infty}, r)$, fijamos h_0 tal que $h_0 < h$ y tomemos x a la izquierda de I_{h_0}, esto es $x < r - 2^{-h_0}r$. Como $sop\theta_h \subset I_h$ está a la derecha de I_{h_0} entonces tomamos $\rho > |I_{h_0}| = \frac{3}{4}2^{-h_0}r$ tal que $[x, x+\rho]$ contenga algún elemento del $sop(\theta_h) \subset I_h$, en caso contrario resulta que

$$\int_x^{x+\rho} |\theta_h(y)|^q dy = 0.$$

Como x está a la izquierda de I_{h_0} resulta que para $h < h_0$ se tiene

$$P_h(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i}(\eta_h(t)P(x,t)|)_{t=x}\frac{(y-x)^i}{i!} = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_x^{x+\rho} |\theta_h(y) - P_h(x,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{42^{h_0}}{3r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_x^{x+\rho} |\theta_h(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{42^{h_0}}{3r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_h = r-2^{-h}r}^{x_h+|I_h|} |\eta_h(y)|^q |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{42^{h_0}}{3r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|} |a(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{C_{h_0}}{r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|} |a(y) - P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \left(\frac{C_{h_0}}{r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|} |P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{\tilde{C_{h_0}}}{2^h}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|I_h|}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|} |a(y) - P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \left(\frac{C_{h_0}}{r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|} |P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\tilde{C_{h_0}}}{2^h}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|I_h|^\alpha}\left(\frac{1}{|I_h|}\int_{x_h}^{x_h+|I_h|}|a(y)-P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$+\left(\frac{C_{h_0}}{r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|}|P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (I)+(II) \tag{4.49}$$

$$(I) = \left(\frac{\tilde{C_{h_0}}}{2^h}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|I_h|^\alpha}\left(\frac{1}{|I_h|}\int_{x_h}^{x_h+|I_h|}|a(y)-P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq \left(\frac{\tilde{C_{h_0}}}{2^h}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} n^+_{q,\alpha}(a-P(x_h,.);x_h)$$

$$= \left(\frac{\tilde{C_{h_0}}}{2^h}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}} N^+_{q,\alpha}(A;x_h)$$

$$\leq \frac{C_{h_0,\alpha}}{2^{h(\alpha+\frac{1}{q})}} \tag{4.50}$$

Por Lema 2.2.2 para $k=0$ con $f_1=a(.)-P(x_h,.), f_2=a(.)-P(r,.), x_1=x_h$ y $x_2=r$, tenemos que

$$\begin{aligned} |P(x_h,y)| &= |P(x_h,y)-P(r,y)| \\ &\leq C(n^+_{q,\alpha}(a-P(x_h,.);x_h)+n^+_{q,\alpha}(a-P(r,.);r))(|x_h-y|+|r-y|)^\alpha \\ &\leq 2(2^{-h}r)^\alpha. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Usando (4.51) podemos acotar (II) como sigue

$$\begin{aligned} (II) &= \left(\frac{C_{h_0}}{r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|}|P(x_h,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2\left(\frac{C_{h_0}}{r}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\left(\int_{x_h}^{x_h+|I_h|}(2^{-h}r)^{q\alpha} dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{C_{\alpha,h_0}}{2^{h(\alpha+\frac{1}{q})}}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Entonces por (4.50) y (4.52) tenemos que

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha+\frac{1}{q}}\left(\int_x^{x+\rho}|\theta_h(y)-P_h(x,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{h_0,\alpha}2^{-h(\alpha+\frac{1}{q})}, \tag{4.53}$$

tomando supremo sobre $\rho>0$, en la desigualdad anterior obtenemos para $h>h_0$

$$n^+_{q,\alpha}(\theta_h;x) = N^+_{q,\alpha}(\Theta_h;x) \leq C_{h_0,\alpha}2^{-h(\alpha+\frac{1}{q})}, \tag{4.54}$$

usando que $\alpha + \frac{1}{q} > 0$ y (4.54) podemos estimar (4.48) como sigue,

$$\begin{aligned}\sum_{h\geq -1} N^+_{q,\alpha}(\Theta_h;x) &= \sum_{h=-1}^{h_0} N^+_{q,\alpha}(\Theta_h;x) + \sum_{h>h_0} N^+_{q,\alpha}(\Theta_h;x)\\ &\leq D_{h_0,\alpha} + C_{h_0,\alpha}\sum_{h>h_0} 2^{-h(\alpha+\frac{1}{q})} < \infty.\end{aligned}$$

□

Como consecuencia del Teorema 4.1.6 y del Teorema 4.2.2 se tiene la descomposición " particular" buscada.

Teorema 4.2.3. *Sea $\omega \in A^+_s$, $1 < q < \infty$ y $0 < p \leq 1$, tal que $(\alpha + 1/q)p \geq s > 1$ o $(\alpha + 1/q)p > 1$ si $s = 1$. Si $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ entonces existe una sucesión $\{\lambda_j\}$ de números reales positivos y una sucesión $\{A_{j,h}\}$ de átomos con soporte contenido en intervalos acotados $\{I_{j,h}\}$ respectivamente, tal que $\sum_{j\geq 1, h\geq -1} \lambda_j A_{j,h}$ converge incondicionalmente a F en E^q_N y en la norma de $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$. Además para cada j,h, el intervalo $I_{j,h+2} = I^+_{j,h}$ sigue al $I_{j,h}$ y $|I^+_{j,h}| \leq |I_{j,h}| \leq 4|I^+_{j,h}|$. Más aún, existen dos constantes C_1 y C_2 ambas independiente de la clase F tal que*

$$C_1 || \sum_{j\geq 1, h\geq -1} \lambda_j \chi_{I_{j,h}} ||_{L^p(\omega)} \leq ||F||_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \leq C_2 || \sum_{j\geq 1, h\geq -1} \lambda_j \chi_{I_{j,h}} ||_{L^p(\omega)} \qquad (4.55)$$

Además , para $r > 0$

$$\sum_{j\geq 1, h\geq -1} \lambda^r_j \chi_{I_{j,h}}(x) \leq C[N^+_\alpha(F;x)]^r \qquad (4.56)$$

en casi todo punto $x \in (x_{-\infty}, \infty)$, con C que no depende de F.

Demostración. Por el Teorema 4.1.6 existe una sucesión $\{\lambda_j\}$ de números reales no negativos y una sucesión de átomos $\{A_j\}$ soportados en intervalos acotados $\{I_j\}$ respectivamente tal que

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j \quad \text{en} \quad \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega), \qquad (4.57)$$

además existe $C_1 > 0$ tal que

$$|| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_{I_j} ||_{L^p(\omega)} \leq C_1^{-1} ||F||_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)}. \qquad (4.58)$$

Por el Lema 4.2.2 existe una constante $C > 0$ tal que cada átomo A_j se descompone como

$$A_j = C \sum_{h=-1}^{\infty} A_{j,h} \quad \text{en} \quad E^q_N, \qquad (4.59)$$

donde $A_{j,h}$ son átomos soportados en intervalos acotados $I_{j,h}$ respectivamente, tal que $I_{j,h} \subset I_j$ y cada $x \in I_j$ pertenece a lo sumo a tres $I_{j,h}$. Además el intervalo $I_{j,h+2} = I^+_{j,h}$ sigue al $I_{j,h}$ y $|I^+_{j,h}| < |I_{j,h}| < 4|I^+_{j,h}|$. Luego de (4.57) y (4.59) se tiene que

$$F = C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=-1}^{\infty} \lambda_j A_{j,h} \quad \text{en} \quad \mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega), \tag{4.60}$$

Además, como para cada j fijo, si $x \in I_j$ entonces x pertenece a lo sumo a tres $I_{j,h}$ y asi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=-1}^{\infty} \lambda_j \chi_{I_{j,h}}(x) \leq 3 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_{I_j}(x)$$

luego por (4.58) resulta que

$$||\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=-1}^{\infty} \lambda_j \chi_{I_{j,h}}||_{L^p(\omega)} \leq 3||\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_{I_j}||_{L^p(\omega)} \leq 3C_1^{-1}||F||_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} < \infty. \tag{4.61}$$

Luego por el Teorema 4.1.5 resulta que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=-1}^{\infty} \lambda_j A_{j,h}$ converge en $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)$ y por (4.60) debe ser F. Además por Teorema 4.1.5 existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$||F||_{\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\omega)} \leq C_2 ||\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=-1}^{\infty} \lambda_j \chi_{I_{j,h}}||_{L^p(\omega)}. \tag{4.62}$$

Luego de (4.61) y (4.62) se tiene (4.55). Sólo resta ver que vale (4.56). Por la desigualdad (4.18) del Teorema 4.1.6 y considerando que para cada j fijo si $x \in I_j$ entonces x pertenece a lo sumo a tres $I_{j,h}$ resulta que para $r > 0$,

$$[N^+_{q,\alpha}(F;x)]^r \geq {C_r}^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^r \chi_{I_j}(x) \geq \frac{{C_r}^{-1}}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=-1}^{\infty} {\lambda_j}^r \chi_{I_{j,h}}(x), \tag{4.63}$$

donde C_r es independiente de F. $\square$

Capítulo 5

Interpolación Compleja entre los espacios de Calderón-Hardy laterales con pesos.

En este capítulo y como una aplicación de la descomposición atómica obtenida en el Teorema 4.2.3, construímos una función que nos permitirá interpolar entre espacios de Calderón-Hardy laterales con pesos en A_∞^+. Esto es el Teorema 5.1.2 de la siguiente sección. Como antecedente a este resultado destacamos las versiones para espacios de Hardy tanto en [21] como en el Capítulo XII de [26]. De hecho la mayoría de los resultados de esta sección siguen el espíritu de las técnicas usadas en [21] y [26]. Luego, en la última sección probamos un Teorema de Interpolación Compleja entre espacios de Calderón-Hardy laterales con pesos en A_∞^+ similar al probado por Testoni para espacios de Hardy laterales en [27].

5.1. Notación y Resultados principales

Llamamos Ω a la franja en el plano complejo dada por

$$\Omega = \{z = u + it \in \mathbb{C} : 0 \leq u \leq 1\}.$$

Para $0 < p_0, p_1 \leq 1$ y $z \in \Omega$ definimos $p(z)$ como

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

y para $0 \leq u \leq 1$ definimos el número $\mu(u) = \frac{up(u)}{p_1}$, es claro que $0 \leq \mu(u) \leq 1$ si $0 \leq u \leq 1$.
Sean $\omega, \nu \in A_\infty^+$ y $\tau > 0$ tales que $\omega(x) \leq \tau$ y $\nu(x) \leq \tau$. Definimos el peso

$$\mu(u)(x) = \omega(x)^{1-\mu(u)}\nu(x)^{\mu(u)}.$$

De la misma manera definimos $r(z)$ y $\tilde{\mu}(u)$, para $0 < r_0, r_1 < \infty$ y $\tilde{\omega}, \tilde{\nu} \in A_\infty^+$.
Sea ℓ un número real fijo $0 < \ell < 1$, escribimos $p = p(\ell), r = r(\ell), \mu = \mu(\ell)$ y $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\ell)$.

Con la finalidad de dar un Teorema de Interpolación compleja entre espacios de Calderón-Hardy $\mathcal{H}^{p,+}_{q,\alpha}(\mu)$ sobre el parámetro p, dejamos fijos los parámetros q y α, en particular por lo probado en Capítulo 4 Proposición 4.1.7, podemos considerar $q = 2$ y α tal que $(\alpha + \frac{1}{2})p(u) \geq s > 1$ o $(\alpha + \frac{1}{2})p(u) > 1$ si $s = 1$. Por tal motivo, a lo largo de este capítulo, en la notación del espacio de Calderón-Hardy omitimos escribir el parámetro q, asumiendo $q = 2$.
Con la notación y definiciones dadas podemos enunciar los principales resultados de este capítulo.

Teorema 5.1.1. *Sean $z \in \Omega$ y $T_z : \mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega) + \mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu) \longrightarrow \mathcal{H}^{r_0,+}_{\alpha}(\tilde{\omega}) + \mathcal{H}^{r_1,+}_{\alpha}(\tilde{\nu})$ una familia de operadores lineales. Sea $g_x(z,y)$ el representante de T_zF tal que $N^+_\alpha(T_zF;x) = n^+_\alpha(g_x(z,.);x) < \infty$. Supongamos que para $x \in (x_{-\infty},\infty)$ y $\rho > 0$*

$$\Psi(x,\rho,z) = \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}} \int_x^{x+\rho} (g_x(z,y))^2\, dy$$

es una función medible respecto de x, continua y acotada para $z \in \Omega$ y analítica en el interior de Ω, para cada (x,ρ) fijo en $(x_{-\infty},\infty) \times (0,\infty)$ y tal que $g_x(z,y)$ tome valores reales cuando $z = \ell$, para $0 < \ell < 1$.
Si además existen constantes $C, \beta > 0$, tal que

$$||T_{it}F||_{\mathcal{H}^{r_0,+}_{\alpha}(\tilde{\omega})} \leq Ce^{\beta|t|}||F||_{\mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega)} \quad y \quad ||T_{1+it}F||_{\mathcal{H}^{r_1,+}_{\alpha}(\tilde{\nu})} \leq Ce^{\beta|t|}||F||_{\mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu)}, \tag{5.1}$$

entonces para $0 < \ell < 1$ y $F \in \mathcal{H}^{p,+}_{\alpha}(\mu)$,

$$||T_\ell F||_{\mathcal{H}^{r,+}_{\alpha}(\tilde{\mu})} \leq C||F||_{\mathcal{H}^{p,+}_{\alpha}(\mu)}.$$

Esta clase de resultados de la teoría de interpolación compleja fueron introducidos por A. P. Calderón en [2] y A. P. Calderón y A. Torchinsky en [4]. Las aplicaciones de estos resultados para estudiar operadores fuertemente singulares en el contexto de los espacios pesados de Hardy pueden ser encontrados en [6] y en [21]. En la última sección de este capítulo veremos que el Teorema 5.1.1 es una consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 5.1.2.

1. *Sea $F(z)$ una función de variable compleja $z \in \Omega$ la cual toma valores en $\mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega) + \mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu)$, y para cada $z \in \Omega$ denotamos $f_x(z,y)$ al representante de $F(z)$ tal que $n_\alpha(f_x(z,.);x) < \infty$.*
   Sea $\Phi(x,\rho,z) = \dfrac{1}{\rho^{2\alpha+1}} \displaystyle\int_x^{x+\rho} (f_x(z,y))^2\, dy$ una función medible respecto de la variable x, continua y acotada para $z \in \Omega$, analítica en el interior de Ω, para cada (x,ρ) fijo en $(x_{-\infty},\infty) \times (0,\infty)$ y tal que $f_x(z,y)$ tome valores reales cuando $z = \ell$, para $0 < \ell < 1$.
   Si $F(it) \in \mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega)$, $\sup_t ||F(it)||_{\mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega)} < \infty$, $F(1+it) \in \mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu)$ y $\sup_t ||F(1+it)||_{\mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu)} < \infty$, entonces $F(\ell) \in \mathcal{H}^{p,+}_{\alpha}(\mu)$ para $0 < \ell < 1$ y $p_0 < p < p_1$. Además se satisface que existe la constante $C > 0$ tal que

$$||F(\ell)||_{\mathcal{H}^{p,+}_{\alpha}(\mu)} \leq C \left(\sup_t ||F(it)||_{\mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega)} \right)^{1-\ell} \left(\sup_t ||F(1+it)||_{\mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu)} \right)^{\ell}. \tag{5.2}$$

2. *Para F en un conjunto $\mathcal{D}$ denso en $\mathcal{H}_{\alpha}^{p,+}(\mu)$ existe una función $F(z)$ tal que $\Phi(x,\rho,z)$ tiene las propiedades establecidas en 1 entonces $F(\ell) = F$ y*

$$||F(u+it)||^{p(u)}_{\mathcal{H}_{\alpha}^{p(u),+}(\mu(u))} \leq \tilde{C}||F||^{p}_{\mathcal{H}_{\alpha}^{p,+}(\mu)} \tag{5.3}$$

se satisface para $z = u+it \in \Omega$ y $\tilde{C}$ no depende de F. El conjunto $\mathcal{D}$ consiste de todas las combinaciones lineales finitas de átomos en $\mathcal{H}_{\alpha}^{p,+}(\mu)$.

Observación 5.1.3. *Una versión del Teorema 5.1.1 sin suponer que los pesos están acotados, se puede obtener considerando $\omega_{\tau}(x) = min\{\omega(x),\tau\}$ y $\nu_{\tau}(x) = min\{\nu(x),\tau\}$ para $\tau > 0$ y asumiendo que la constante C en (5.1) no dependa de τ.*

Observación 5.1.4. *Vale la pena señalar que estos resultados pueden ser obtenidos en el contexto de los pesos Muckenhoupt con una prueba más sencilla. De hecho no es necesario asumir que los pesos son acotados.*

5.2. Lemas previos

Para probar la primera parte del Teorema 5.1.2, necesitamos del siguiente resultado que puede encontrarse en el Capítulo XII de [26] como también una consecuencia de este lema que demostramos en esta sección.

Lema 5.2.1. *Sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua en Ω y analítica en el interior de Ω tal que*

$$|g(z)| \leq c\, exp(A(exp(a|Im(z)|)))$$

para algunas constantes $c > 0$, $A \in \mathbb{R}$ y $0 < a < \pi$. Entonces, para $0 < \ell < 1$, se tiene que

$$ln(|g(\ell)|) \leq \int_{-\infty}^{\infty} ln(|g(it)|)P_0(\ell,t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} ln(|g(1+it)|)P_1(\ell,t)dt$$

donde P_0 y P_1 son los núcleos de Poisson para Ω.

Corolario 5.2.2. *Con las hipótesis de Lema 5.2.1 y la notación introducida en la Sección 5.1 se tiene que*

$$|g(\ell)|^{\frac{p}{2}} \leq \left(\frac{1}{1-\ell}\int_{-\infty}^{\infty} |g(it)|^{\frac{p_0}{2}} P_0(\ell,t)dt\right)^{1-\mu} \left(\frac{1}{\ell}\int_{-\infty}^{\infty} |g(1+it)|^{\frac{p_1}{2}} P_1(\ell,t)dt\right)^{\mu} \tag{5.4}$$

donde $p = p(\ell)$ y $\mu = \mu(\ell)$.

Demostración. Por el lema anterior sabemos que para $0 < \ell < 1$ se tiene

$$ln|g(\ell)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} ln|g(it)|P_0(\ell,t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} ln|g(1+it)|P_1(\ell,t)dt$$

$$\begin{aligned}
|g(\ell)|^{\frac{p}{2}} &\leq exp\left(\frac{p}{2}\int_{-\infty}^{\infty} ln|g(it)|P_0(\ell,t)dt\right) exp\left(\frac{p}{2}\int_{-\infty}^{\infty} ln|g(1+it)|P_1(\ell,t)dt\right)\\
&= exp\left(\frac{2p}{2p_0}\int_{-\infty}^{\infty} ln|g(it)|^{\frac{p_0}{2}}P_0(\ell,t)dt\right) exp\left(\frac{2p}{2p_1}\int_{-\infty}^{\infty} ln|g(1+it)|^{\frac{p_1}{2}}P_1(\ell,t)dt\right)\\
&= exp\left(\frac{p(1-\ell)}{p_0(1-\ell)}\int_{-\infty}^{\infty} ln|g(it)|^{\frac{p_0}{2}}P_0(\ell,t)dt\right) exp\left(\frac{p\ell}{p_1\ell}\int_{-\infty}^{\infty} ln|g(1+it)|^{\frac{p_1}{2}}P_1(\ell,t)dt\right)
\end{aligned}$$

aplicando la desiguadad de Jensen a la última línea de la desigualdad anterior resulta

$$|g(\ell)|^{\frac{p}{2}} \leq \left(\frac{1}{1-\ell}\int_{-\infty}^{\infty} |g(it)|^{\frac{p_0}{2}}P_0(\ell,t)dt\right)^{\frac{p(1-\ell)}{p_0}} \left(\frac{1}{\ell}\int_{-\infty}^{\infty} |g(1+it)|^{\frac{p_1}{2}}P_1(\ell,t)dt\right)^{\frac{p\ell}{p_1}}$$

y como $\mu = \frac{p\ell}{p_1}$ y $1-\mu = \frac{p(1-\ell)}{p_0}$ se tiene la tesis del corolario.

□

5.3. Una función interpoladora entre espacios de Calderón-Hardy

A continuación probamos la segunda parte del Teorema 5.1.2 donde se construye una función interpoladora utilizando como herramienta principal la descomposición atómica particular dada en el Teorema 4.2.3.

Prueba de la Segunda Parte del Teorema 5.1.2
Sea $F \in \mathcal{D}$, esto es

$$F = \sum_{j\in J} \lambda_j A_j$$

donde J es un conjunto finito, $\lambda_j \geq 0$ y A_j son átomos en el espacio $\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$ tal que cada representante a_j de la clase A_j está soportado en intervalos acotados I_j. Cabe observar que, como consecuencia del Teorema 4.1.6, el conjunto $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$. Descomponemos cada A_j como en el Lema 4.2.2 para obtener una descomposición de F similar a la dada en el Teorema 4.2.3.
Esto es

$$F = C\sum_{j\in J}\lambda_j \sum_{h\geq -1} A_{j,h} \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$$

donde $A_j = C\displaystyle\sum_{h\geq -1} A_{j,h}$ con C que no depende sobre A_j, además cada representante $a_{j,h}$ de la clase $A_{j,h}$ es tal que $sop(a_{j,h}) \subset I_{j,h} \subset I_j$ y para cada $x \in I_j$, x pertenece a los sumo a tres $I_{j,h}$. Además $I_{j,h+2}$ sigue a $I_{j,h}$ y $|I_{j,h+2}| < |I_{j,h}| < 4|I_{j,h+2}|$.
Definimos $F(z)$ de la misma manera que en [21] y [26], para lo cual consideramos $\displaystyle\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}\lambda_{j,h}(z)A_{j,h}$ donde $\lambda_{j,h}(z) = \lambda_j^{\frac{p}{p(z)}}\left(\dfrac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{(z-\ell)p}{p_0p_1}}$. Usando las propiedades

de la descomposición atómica y siguiendo los argumentos dados en [21] para probar una desigualdad análoga para espacios de Hardy laterales, se obtiene la siguiente desigualdad para los espacios de Calderón-Hardy,

$$||\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}|\lambda_{j,h}(u+it)|\chi_{I_{j,h}}||^{p(u)}_{L^{p(u)}(\mu(u))}\leq C||F||^{p}_{\mathcal{H}^{p,+}_{\alpha}(\mu)}, \tag{5.5}$$

con el próposito de brindar mayor claridad y comprensión a la prueba del Teorema es que dejamos la demostración de esta desigualdad para más adelante.
Utilizando el Teorema 4.1.5, se obtiene que $\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}|\lambda_{j,h}(u+it)|B_{j,h}$ converge en $\mathcal{H}^{p(u),+}_{\alpha}(\mu(u))$ para toda sucesión de átomos $\{B_{j,h}\}$ en $\mathcal{H}^{p(u),+}_{\alpha}(\mu(u))$ tal que cada representante $b_{j,h}$ de la clase $B_{j,h}$ está soportado en $\{I_{j,h}\}$ respectivamente. En particular, tomando $B_{j,h}=e^{i\theta_{j,h}}A_{j,h}$ donde $\theta_{j,h}=Arg(\lambda_{j,h})$, podemos definir

$$F(z)=\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}\lambda_{j,h}(u+it)A_{j,h}\quad \text{en}\quad \mathcal{H}^{p(u),+}_{\alpha}(\mu(u)).$$

También por Teorema 4.1.5 se tiene que existe una constante C, que no depende de u tal que

$$||F(u+it)||^{p(u)}_{\mathcal{H}^{p(u),+}_{\alpha}(\mu(u))}\leq C^{p(u)}||\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}|\lambda_{j,h}(u+it)|\chi_{I_{j,h}}||^{p(u)}_{L^{p(u)}(\mu(u))}. \tag{5.6}$$

Veamos que la constante C se puede elegir independiente de u. En efecto, $\mu(u)\in A^+_s$ con la misma constante C cualquiera sea u como puede observarse en la prueba del Lema 1.1.4, entonces $\mu(u)$ es duplicante a la izquierda con constante de duplicación independiente de u. Cabe mencionar también que en la prueba del Teorema 4.1.5 la dependencia de la constante respecto de $p(u)$ es continua, con lo cual la elección de C en (5.6) es independiente de u. Finalmente, combinando las desigualdades (5.5) y (5.6), se tiene

$$||F(u+it)||^{p(u)}_{\mathcal{H}^{p(u),+}_{\alpha}(\mu(u))}\leq \tilde{C}||F||^{p}_{\mathcal{H}^{p,+}_{\alpha}(\mu)},$$

donde $\tilde{C}=C^{p(u)}C$ con $p(u)$ acotada pues $0\leq u\leq 1$.
A continuación probamos que $F(z)$ y $\Phi(x,\rho,z)$ satisface las propiedades establecidas en la primera parte del Teorema 5.1.2. Para ver que $F(z)\in\mathcal{H}^{p_0,+}_{\alpha}(\omega)+\mathcal{H}^{p_1,+}_{\alpha}(\nu)$ usaremos el hecho de que al menos $|\lambda_{j,h}(z)|\leq\lambda_{j,h}(0)$ o $|\lambda_{j,h}(z)|\leq\lambda_{j,h}(1)$ se satisface, y escribimos $F(z)=F_0(z)+F_1(z)$ donde

$$F_0(z)=\sum_{j\in J}\sum_{\substack{h\geq -1\\ |\lambda_{j,h}(z)|\leq\lambda_{j,h}(0)}}\lambda_{j,h}(z)A_{j,h}.$$

Veamos que, usando (5.6) y (5.5) se tiene que $F_k(z)\in\mathcal{H}^{p_k,+}_{\alpha}(\mu(k))$, para $k=0,1$. En efecto,

$$\begin{aligned} ||F_k(z)||_{\mathcal{H}^{p_k,+}_\alpha(\mu(k))} &\leq C||\sum_{j\in J}\sum_{\substack{h\geq -1\\ |\lambda_{j,h}(z)|\leq \lambda_{j,h}(k)}} \lambda_{j,h}(z)\chi_{I_j^h}||_{L^{p_k}(\mu(k))} \\ &\leq C||\sum_{j\in J}\sum_{\substack{h\geq -1\\ |\lambda_{j,h}(z)|\leq \lambda_{j,h}(k)}} \lambda_{j,h}(k)\chi_{I_j^h}||_{L^{p_k}(\mu(k))} \\ &\leq C||F||^{\frac{p}{p_k}}_{\mathcal{H}^{p_k}_\alpha(\mu(k))} < \infty, \end{aligned}$$

para $p_k = p(k)$, $\mu(k)(x) = \omega(x)^{1-\mu(k)}\nu(x)^{\mu(k)}$ y $\mu(k) = k$, donde $k = 0, 1$.
Afirmamos que, para casi todo $x \in (x_{-\infty}, \infty)$, el único representante de $F(z)$ denotado por $f_x(z, y)$, tal que realiza la maximal, esto es

$$N^+_\alpha(F(z); x) = n^+_\alpha(f_x(z, \cdot); x) < \infty, \tag{5.7}$$

está dado por

$$f_x(z,y) = \sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}\lambda_{j,h}(z)\left(a_{j,h}(y) - \sum_{i=0}^{N}\frac{d^i}{dt^i}\left(\eta_h(t)P_j(x,t)\right)|_{t=x}\frac{(y-x)^i}{i!}\right), \tag{5.8}$$

con $P_j(x,t)$ el Polinomio de Taylor de grado N de a_j en x, y η_h las funciones definidas en Lema 4.2.1. Escribimos $P_{j,h}(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\frac{d^i}{dt^i}\left(\eta_h(t)P_j(x,t)\right)|_{t=x}\frac{(y-x)^i}{i!}$.
Para facilitar la lectura de la prueba posponemos la demostración de la afirmación de (5.7) para más adelante.
Para cualquier entero no negativo M consideramos

$$F_M(z) = \sum_{j\in J}\sum_{h=-1}^{M}\lambda_{j,h}(z)A_{j,h},$$

$$f_{x,M}(z,y) = \sum_{j\in J}\sum_{h=-1}^{M}\lambda_{j,h}(z)\left(a_{j,h}(y) - P_{j,h}(x,y)\right)$$

y

$$\Phi_M(x,\rho,z) = \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}\left(f_{x,M}(z,y)\right)^2 dy. \tag{5.9}$$

Es claro que, para $z = \ell$, $0 < \ell < 1$, $f_x(z, y)$ dada por (5.8) toma valores reales, pues $\lambda_{j,h}(\ell) = \lambda_j^{\frac{p}{p(\ell)}}$. Además, no es difícil ver que, $\Phi_M(x, \rho, z)$ es una función medible en la variable x, y que para cada (x, ρ) fijo en $(x_{-\infty}, \infty)\times(0, \infty)$ es una función acotada y continua en Ω, y analítica en el interior de Ω. Para probar que $\Phi(x, \rho, z)$ tiene estas tres propiedades es suficiente probar que, para cada (x, ρ) fijo en $(x_{-\infty}, \infty) \times (0, \infty)$, la función $\Phi_M(x, \rho, z)$ converge uniformemente a $\Phi(x, \rho, z)$ en Ω.

Para ello, descomponemos $F(z) - F_M(z) = F_0^M(z) + F_1^M(z)$ donde

$$F_0^M(z) = \sum_{j \in J} \sum_{\substack{h \geq M+1 \\ |\lambda_{j,h}(z)| \leq \lambda_{j,h}(0)}} \lambda_{j,h}(z) A_{j,h},$$

y $F_1^M(z) = F(z) - F_M(z) - F_0^M(z)$. Usando desigualdades (5.5) y (5.6) veamos que dado $\epsilon > 0$ existe M_0 que no depende de $z \in \Omega$ tal que para $M \geq M_0$,

$$||F_k^M(z)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_k,+}(\mu(k))} < \epsilon, \tag{5.10}$$

para $k = 0, 1$.
En efecto,

$$F_0^M(z) = \sum_{j \in J} \sum_{\substack{h \geq M+1 \\ |\lambda_{j,h}(z)| \leq \lambda_{j,h}(0)}} \lambda_{jh}(z) A_{jh} \tag{5.11}$$

Como $F \in \mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$ por (5.5) sabemos que, en particular, resulta

$$||\sum_{j \in J} \sum_{\substack{h \geq M+1 \\ |\lambda_{j,h}(z)| \leq \lambda_{j,h}(0)}} |\lambda_{j,h}(z)| \chi_{I_{j,h}}||_{L^{p(u)}(\mu(u))}^{p(u)} < \infty,$$

luego por Teorema 4.1.5 y usando las desigualdades (5.6) y (5.5) se tiene

$$\begin{aligned} ||F_0^M(z)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)} &\leq C||\sum_{j \in J} \sum_{\substack{h \geq M+1 \\ |\lambda_{j,h}(z)| \leq \lambda_{j,h}(0)}} |\lambda_{j,h}(z)| \chi_{I_{j,h}}||_{L^{p_0}(\omega)} \\ &\leq C||\sum_{j \in J} \sum_{h \geq M+1} \lambda_{j,h}(0) \chi_{I_{j,h}}||_{L^{p_0}(\omega)} \\ &\leq \hat{C}||F - F_M||_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}^{\frac{p}{p(0)}} \\ &< \epsilon, \end{aligned} \tag{5.12}$$

esta última desigualdad resulta ya que, como $F \in \mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$ por (5.5) se tiene que la serie $\sum_{j \in J} \sum_{h \geq -1} |\lambda_{j,h}(z)| \chi_{I_{j,h}}$ converge en $L^{p(u)}(\mu(u))$ y así existe M_0 tal que para todo $M \geq M_0$ vale la (5.12).
En forma análoga usando que $|\lambda_{j,h}(z)| \leq \lambda_{j,h}(1)$ se tiene que dado ϵ existe M_1 tal que para todo $M \geq M_1$

$$||F_1^M(z)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)} < \epsilon. \tag{5.13}$$

Además, si

$$f_{0,x}^M(z, y) = \sum_{j \in J} \sum_{\substack{h \geq M+1 \\ |\lambda_{j,h}(z)| \leq \lambda_{j,h}(0)}} \lambda_{j,h}(z) \left(a_{j,h}(y) - P_{j,h}(x, y)\right),$$

se tiene que $f_x(z,\cdot) - f_{x,M}(z,\cdot) = f_{0,x}^M(z,\cdot) + f_{1,x}^M(z,\cdot)$, donde $f_{k,x}^M(z,\cdot)$ es el único representante de $F_k^M(z)$ tal que $n_\alpha^+(f_{k,x}^M(z,\cdot);x) < \infty$ para $k = 0,1$. La prueba de esta afirmación es análoga a la que daremos más adelante para probar (5.7). Veamos que Φ_M converge uniformemnte a Φ para todo $z \in \Omega$ y (x,ρ) fijo en $(x_{-\infty},\infty)$,

$$
\begin{aligned}
|\Phi(x,\rho,z) - \Phi_M(x,\rho,z)| &= \left|\frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}\left((f_x(z,y))^2 - (f_{x,M}(z,y))^2\right)dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y) - f_{x,M}(z,y)|\,|(f_x(z,y)) + f_{x,M}(z,y)|\,dy \\
&\leq \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\left(\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y) - f_{x,M}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y) + f_{x,M}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y) - f_{x,M}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y) + f_{x,M}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\underbrace{\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_{0,x}^M(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathcal{T}_0} + \underbrace{\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_{1,x}^M(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathcal{T}_1}\right) \\
&\quad \times\underbrace{\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y) + f_{x,M}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathcal{T}_2}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

En lo que sigue estimamos $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, para lo cual, con el fin de simplificar suponemos que F tiene un sólo átomo soportado en $I = [0,r]$ y, así, el subíndice j no lo escribiremos. Para acotar $\mathcal{T}_0$, usaremos la forma que tiene la descomposición atómica. Como para $x \geq r$, $\mathcal{T}_0 = 0$, consideremos $x < r$ y elegimos $\delta > 0$ tal que $x + \delta < r$ y $M^* = M^*(x,\delta)$ tal que para cada $h > M^*$ el soporte de a_h y $[x, x+\delta]$ son disjuntos. Notemos que, como M^* no depende de ϵ, podemos primero elegir M^* y entonces tomar M_0 como en (5.10) tal que $M_0 \geq M^*$.
Además $P_h(x,y) = 0$ para $h > M_0$ y luego $f_{0,x}^M(z,y) = \displaystyle\sum_{\substack{h \geq M+1 \\ |\lambda_h(z)| \leq \lambda_h(0)}} \lambda_h(z)a_h(y)$.

Además, para todo $u \in [x, x+\delta]$ se tiene que

$$
\mathcal{T}_0 \leq \frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_u^{u+\rho}\left|f_{0,x}^M(z,y)\right|^2dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq n_\alpha^+(f_{0,u}^M(z,.);u).
$$

Luego se tiene que

$$\left(\int_x^{x+\delta} \mathcal{T}_0^{p_0}\omega(u)du\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\int_{x-\infty}^{\infty} \left(N_\alpha^+(F_0^M(z);u)\right)^{p_0}\omega(u)du\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

y, por (5.10),

$$\mathcal{T}_0 \leq \omega([x,x+\delta])^{-1/p_0}\ \epsilon. \tag{5.15}$$

Un argumento similar nos da

$$\mathcal{T}_1 \leq \nu([x,x+\delta])^{-1/p_1}\ \epsilon. \tag{5.16}$$

Ahora estimamos $\mathcal{T}_2$.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2 &= \frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho} |f_{x,M}(z,y)-f_x(z,y)+2(f_x(z,y)-f_{x,M^*}(z,y)+f_{x,M^*}(z,y))|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \underbrace{\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_{x,M}(z,y)-f_x(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathcal{T}_3} + \underbrace{\frac{2}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_x(z,y)-f_{x,M^*}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathcal{T}_4} +\\ &\quad + \underbrace{\frac{2}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}|f_{x,M^*}(z,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathcal{T}_5}\end{aligned} \tag{5.17}$$

Procediendo como antes se tiene

$$\mathcal{T}_3 \leq \epsilon\,(\omega([x,x+\delta])^{-\frac{1}{p_0}} + \nu([x,x+\delta])^{-\frac{1}{p_1}}). \tag{5.18}$$

En forma análoga se puede estimar $\mathcal{T}_4$, pero en vez de usar (5.10) se usa que $||F_k^{M^*}(z)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_k,+}(\mu(k))} < C$ donde $C = \max_{k=0,1}\left\{\hat{C}||F-F_{M^*}||_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}^{\frac{p}{p_k}}\right\}$ que claramente no depende de z, y así se obtiene que

$$\mathcal{T}_4 \leq C\,(\omega([x,x+\delta])^{-\frac{1}{p_0}} + \nu([x,x+\delta])^{-\frac{1}{p_1}}).$$

Finalmente para estimar $\mathcal{T}_5$, primero acotamos los coeficientes $\lambda_h(z)$, de la siguiente manera

$$|\lambda_h(z)| = \left|\lambda^{\frac{p}{p(z)}}\left(\frac{\omega(I_{h+2})}{\nu(I_{h+2})}\right)^{\frac{(z-\ell)p}{p_0p_1}}\right| = \lambda^{\frac{p}{p(u)}}\left(\frac{\omega(I_{h+2})}{\nu(I_{h+2})}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \leq C_{h,p,I} \tag{5.19}$$

donde la última desigualdad se tiene ya que $0 \leq u \leq 1$ y $p(u)$ es acotada para $0 \leq u \leq 1$. Luego resulta que $\mathcal{T}_5$ se puede estimar como

$$\mathcal{T}_5 \leq \left(\frac{4}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}\left(\sum_{h=-1}^{M^*} C_{h,p,I}|(a_h(y)-P_h(x,y))|\right)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq C, \tag{5.20}$$

donde C no depende de z.
A partir de (5.15), (5.16), (5.17), (5.18) y (5.20) se tiene que para cada (x,ρ) fijo en $(x_{-\infty},\infty)\times(0,\infty)$ la función $\Phi_M(x,\rho,z)$ converge uniformemente a $\Phi(x,\rho,z)$ en Ω.
Sólo nos resta ver las pruebas de (5.5) y (5.7).
Veamos en principio la validez de (5.5). Para ello, probemos que existe $\beta_{j,h}\in I_{j,h+2}$ y una constante C tal que

$$\frac{\mu(u)(x,\beta_{j,h})}{\beta_{j,h}-x}\leq 4c\frac{\mu(u)(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|} \tag{5.21}$$

para todo $x\in I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2}$ tal que $x<\beta_{j,h}$.
En efecto, como M^- es del tipo débil $(1,1)$ con constante 2 con respecto a la medida de Lebesgue, se tiene que para cada $j\in J$ y $h\geq -1$

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{x\in I_{j,h+2}: M^-(\mu(u)\chi_{I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2}})(x)>4\frac{\mu(u)(I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}\right\}\right|\\
\leq\ & \frac{|I_{j,h+2}|}{2\mu(u)(I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2})}\int_{x_{-\infty}}^{\infty}\mu(u)(x)\chi_{I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2}}(x)dx\\
=\ & \frac{|I_{j.h+2}|}{2}\\
<\ & |I_{j,h+2}|,
\end{aligned}$$

luego existe $\beta_{j,h}\in I_{j,h+2}$ tal que

$$\begin{aligned}
M^-\left(\mu(u)\chi_{I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2}}\right)(x) &\leq 4\frac{\mu(u)(I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}\\
&\leq 4C\frac{\mu(u)(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}
\end{aligned}\tag{5.22}$$

donde C es la constante de duplicación a la izquierda de $\mu(u)$ y no depende de u.
Por otra parte como

$$\begin{aligned}
M^-\left(\mu(u)\chi_{I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2}}\right)(\beta_{j,h}) &= \sup_{\tilde h>0}\frac{1}{\tilde h}\int_{\beta_{j,h}-\tilde h}^{\beta_{j,h}}\mu(u)(t)\chi_{I_{j,h}\bigcup I_{j,h+2}}(t)dt\\
&\geq \frac{\mu(u)(x,\beta_{j,h})}{|x-\beta_{j,h}|},
\end{aligned}\tag{5.23}$$

luego por (5.22) y (5.23) se tiene (5.21).
Denotamos por $\alpha_{j,h}$ el extremo izquierdo de $I_{j,h}$ y consideremos los conjuntos

$$E_{j,h}=\{x\in(\alpha_{j,h},\beta_{j,h}):\quad \mu(u)(x)\leq 4c\gamma\frac{\mu(u)(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}\}$$

donde γ es la constante de la parte 2 del Lema 1.1.6 con $\lambda=4c\frac{\mu(u)(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}$ y así

$$\mu(u)(E_{j,h}) > \frac{1}{2}\mu(u)(\alpha_{j,h}, \beta_{j,h}) \tag{5.24}$$

Cabe mencionar que, como $\mu(u) \in A_s^+$ con la misma constante C cualquiera sea u resulta que, por la observación realizada atrás del Lema 1.1.6, la constante γ del Lema 1.1.6 puede ser elegida tal que no dependa de u. Como $I_{j,h} \subset (\alpha_{j,h}, \beta_{j,h})$, usando (5.24) y por el Lema 1.1.5 resulta que existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} |\lambda_{j,h}(u+it)\chi_{I_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu(u))} \leq \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} |\lambda_{j,h}(u+it)\chi_{(\alpha_{j,h},\beta_{j,h})} \right\|_{L^{p(u)}(\mu(u))} \tag{5.25}$$

Por (5.24) podemos aplicar el Lema 1.1.5 y se obtiene

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} |\lambda_{j,h}(u+it)|\chi_{(\alpha_{j,h},\beta_{j,h})} \right\|_{L^{p(u)}(\mu(u))} \\ &\leq C_{p,\eta} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} |\lambda_{j,h}(u+it)|\chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu(u))} \\ &= C_{p,\eta} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} |\lambda_{j,h}(u+it)|\mu(u)^{\frac{1}{p(u)}}\chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

teniendo en cuenta que si $x \in E_{j,h}$ se satisface

$$\mu(u)(x) < 4c\gamma \frac{\mu(u)(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}$$

y a partir de la definiciones de los coeficientes $\lambda_{j,h}(u+it)$ y del peso $\mu(u)(x)$ se tiene la siguiente acotación del último término de (5.26)

$$\begin{aligned} < \;& C_{p,\eta} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})} \right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \left[4\frac{\gamma c\mu(u)(I_{j,h+2})}{|I_{j.h+2}|} \right]^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\ = \;& C_{p,\eta} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})} \right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \left(\frac{4c\gamma}{|I_{j,h+2}|} \int_{I_{j.h+2}} \mu(u)(x)dx \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\ = \;& C_{p,\eta} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})} \right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{4c\gamma}{|I_{j,h+2}|} \int_{I_{j.h+2}} \omega(x)^{1-\mu(u)}\nu(x)^{\mu(u)}dx \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Como $\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1} = \frac{\mu(u)-\mu}{p(u)}$ y usando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{1-\mu(u)}$, $p' = \frac{1}{\mu(u)}$, $f(x) = \omega(x)^{1-\mu(u)}$ y $g(x) = \nu(x)^{\mu(u)}$ la expresión (5.27) se acota por

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,\eta} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{\mu(u)-\mu}{p(u)}} \left(4\frac{\gamma c}{|I_{j.h+2}|}\right)^{\frac{1}{p(u)}} \left(\int_{I_{j,h+2}} \left(\omega(x)^{1-\mu(u)}\right)^{\frac{1}{1-\mu(u)}}\right)^{\frac{1-\mu(u)}{p(u)}} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\int_{I_{j,h+2}} \left(\nu(x)^{\mu(u)}\right)^{\frac{1}{\mu(u)}}\right)^{\frac{\mu(u)}{p(u)}} \chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&= C_{p,\eta,\gamma} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{\mu(u)-\mu}{p(u)}} \frac{(\omega(I_{j,h+2}))^{\frac{1-\mu(u)}{p(u)}} (\nu(I_{j,h+2}))^{\frac{\mu(u)}{p(u)}}}{|I_{j,h+2}|^{\frac{1}{p(u)}}} \chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&= C_{p,\eta,\gamma} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{(\omega(I_{j,h+2}))^{1-\mu}(\nu(I_{j,h+2}))^{\mu}}{|I_{j,h+2}|}\right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{E_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&\leq C_{p,\eta,\gamma} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{(\omega(I_{j,h+2}))^{1-\mu}(\nu(I_{j,h+2}))^{\mu}}{|I_{j,h+2}|}\right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{j,h}\cup I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}\cup I_{j,h+6}} \right\|_{L^{p(u)}}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Utilizando primero el Lema 1.1.4 y luego el Lema 1.1.5, el último término de (5.28) se puede acotar por

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,\eta,\gamma,\omega,\nu} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{1}{|I_{j,h+4}|} \int_{I_{j,h+4}} \omega^{1-\mu}\nu^{\mu} dx\right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{j,h}\cup I_{j,h+2}\cup I_{j.h+4}\cup I_{j,h+6}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&\leq C(_{p,\eta,\gamma,\omega,\nu} \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{j,h+4})}{|I_{j,h+4}|}\right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{j,h+6}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&= C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq 1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|}\right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{j,h+4}} \right\|_{L^{p(u)}}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

donde $C = C(p, \eta, \gamma, \omega, \nu)$ que claramente no depende de u.
Consideremos

$$M_{\mu}^{+} g(x) = \sup_{\tilde{h}>0} \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\tilde{h}} g(t)\mu(t)dt$$

Como M_{μ}^{+} es de tipo débil respecto del peso μ con constante 2, se tiene que para cada $j \in J$y $h \geq -1$

$$\mu\left(\left\{x\in I_{j,h+2}M^{+}(\mu^{-1}(\chi_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}}))(x)>4\frac{|I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}|}{\mu(I_{j,h+2})}\right\}\right)$$
$$\begin{aligned}&\leq \frac{\mu(I_{j,h+2})}{2|I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}|}\int_{x-\infty}^{\infty}\mu^{-1}\chi_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}}(x)\mu(x)dx\\ &= \frac{\mu(I_{j,h+2})}{2|I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}|}\int_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}}\mu^{-1}(x)\mu(x)dx\\ &< \mu(I_{j,h+2}),\end{aligned}$$

como $\mu(I_{j,h+2})>0$ existe $c_{j,h}\in I_{j,h+2}$ tal que

$$M^{+}(\mu^{-1}(\chi_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}}))(c_{j,h})\leq 4\frac{|I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}|}{\mu(I_{j,h+2})}\quad\leq\quad 8\frac{|I_{j,h+2}|}{\mu(I_{j,h+2})},\tag{5.30}$$

luego existe $x\in I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}$ con $x>c_{j,h}$ tal que

$$\begin{aligned}M^{+}(\mu^{-1}\chi_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}})(c_{j,h}) &= \sup_{\tilde{h}>0}\frac{1}{\mu(c_{j,h},c_{j,h}+\tilde{h})}\int_{c_{j,h}}^{c_{j,h}+\tilde{h}}\mu^{-1}\chi_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}}(t)\mu(t)dt\\ &\geq \frac{x-c_{j,h}}{\mu(c_{j,h},x)}\end{aligned}\tag{5.31}$$

por (5.30) y (5.31) resulta la siguiente desigualdad

$$\frac{\mu(I_{j,h+2})}{8|I_{j,h+2}|}\leq\frac{\mu(c_{j,h},x)}{x-c_{j,h}}.$$

Llamamos $d_{j,h}$ al extremo derecho de $I_{j,h+4}$ y $F_{j,h}$ al conjunto dado por

$$F_{j,h}=\{x\in(c_{j,h},d_{j,h}):\mu(x)>\frac{\beta\mu(I_{j,h+2})}{8|I_{j,h+2}|}\}$$

aplicando la primera parte del Lema 1.1.6 con $\lambda=\frac{\mu(I_{j,h+2})}{8|I_{j,h+2}|}$ se tiene que

$$|F_{j,h}|>\frac{1}{2}(d_{j,h}-c_{j,h}).$$

Usando que $I_{j,h+4}\subset(c_{j,h},d_{j,h})$, el Lema 1.1.5 y la definición de $F_{j,h}$ resulta que el último término de (5.29) se puede acotar por

$$\begin{aligned}
&\leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{(c_{j,h},d_{j,h})} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&\leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{F_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&\leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \mu^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{F_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}} \\
&= C \left[\int_{x-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \mu^{\frac{1}{p(u)}}(x) \chi_{F_{j,h}}(x) \right)^{p(u)} dx \right]^{\frac{1}{p(u)}} \\
&= C \left[\int_{x-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{F_{j,h}}(x) \right)^{p(u)} \mu(x) dx \right]^{\frac{1}{p(u)}} \\
&= C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{F_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu)} \\
&\leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{j,h+2}\cup I_{j,h+4}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu)} \\
&\leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{j,h+4}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu)} \\
&= C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq 3} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu)} \\
&\leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu)} \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

donde $C = C_{p,\eta,\gamma,\omega,\nu}$, luego de (5.26), (5.27), (5.28), (5.29) y (5.32) resulta que vale

$$\left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} |\lambda_{j,h}(u+it)| \chi_{I_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu(u))} \leq C \left\| \sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{j,h}} \right\|_{L^{p(u)}(\mu)} . \qquad (5.33)$$

Por la desigualdad puntual (4.56) del Teorema 4.2.3 con $r = \frac{p}{p(u)}$ se tiene

$$\sum_{j\in J} \sum_{h\geq -1} \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{j,h}} \leq 3C_r (N_\alpha^+(F;x))^{\frac{p}{p(u)}}$$

donde $C_r = \frac{c^r}{1-2^{-r}}$ con c independiente de F. Luego si elevamos al exponente $p(u)$ a la desigualdad puntual anterior e integramos con medida μ respecto de x resulta que

$$\left[\int_{x-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}\lambda_j^{\frac{p}{p(u)}}\chi_{I_{j,h}}\right)^{p(u)}\mu(x)dx\right]^{\frac{1}{p(u)}} \leq 3C_r\left[\int_{x-\infty}^{\infty}\left(N_\alpha^+(F;x)\right)^p\mu(x)dx\right]^{\frac{1}{p(u)}}$$
$$= \left\|N_\alpha^+(F;.)\right\|_{L^p(\mu)}^{\frac{p}{p(u)}}$$
$$= \|F\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}^{\frac{p}{p(u)}}, \tag{5.34}$$

finalmente de (5.33) y (5.34) se tiene la desigualdad (5.5).
Por último veamos que vale (5.7). En efecto, usando el mismo argumento dado en el Capítulo 4, para probar la estimación (4.48) del Lema 4.2.2, se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J}\sum_{h\geq -1}N_\alpha^+(\lambda_{j,h}(z)A_{j,h};x)\\
&\quad=\sum_{j\in J}\sum_{h=-1}^{h_0+1}N_\alpha^+(\lambda_{j,h}(z)A_{j,h};x)+\sum_{j\in J}\sum_{h>h_0+1}N_\alpha^+(\lambda_{j,h}(z)A_{j,h};x)\\
&\leq D_{h_0,\alpha,J}+C_{h_0,\alpha,J}\sum_{j\in J}\sum_{h>h_0+1}|\lambda_{j,h}(z)|2^{-h(\alpha+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}\tag{5.35}$$

Finalmente para ver que la serie de (5.35) es finita sólo resta estimar los coeficientes $\lambda_{j,h}(z)$, en efecto,

$$\begin{aligned}
|\lambda_{j,h}(z)| &= \left|\lambda_j^{\frac{p}{p(z)}}\left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{(z-\ell)p}{p_0p_1}}\right| = \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}}\left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}}\\
&= \lambda_j^{\frac{p}{p(u)}}\underbrace{\left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|^s}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}}}_{A}\underbrace{\left(\frac{|I_{j,h+2}|^s}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}}}_{B}
\end{aligned}$$

Como ω y ν son pesos en $A_\infty^+=\bigcup_{s\geq 1}A_s^+$, resulta que existe $s_0\geq 1$ y $s_1\geq 1$ tal que $\omega\in A_{s_0}^+$ y $\nu\in A_{s_1}^+$, luego tomando $s=max\{s_0,s_1\}$ resulta que $\omega,\nu\in A_s^+$, luego utilizando Lema 1.1.3 se tienen las siguientes estimaciones para A y B.
Si $u<\ell$

$$A=\left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|^s}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}}=\left(\frac{|I_{j,h+2}|^s}{\omega(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{-(u-\ell)p}{p_0p_1}}\leq C_{\omega,p,I,s} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{|I_{h+2}|^s}{\nu(I_{h+2})}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \leq \left(\frac{|I_{h+2}|^{s-1}}{\tau}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}}\\
&\leq C_{\nu,I,\tau,s}2^{h(s-1)\frac{|u-\ell|p}{p_0p_1}}
\end{aligned}\tag{5.37}$$

Si $u > \ell$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{|I_{j,h+2}|^s}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \leq \left(\frac{\tau}{|I_{j,h+2}|^{s-1}}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \\ &\leq C_{\omega,I,\tau,s} 2^{h(s-1)\frac{|u-\ell|p}{p_0p_1}} \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$B = \left(\frac{|I_{j,h+2}|^s}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{(u-\ell)p}{p_0p_1}} \leq C_{\nu,I,,p,s} \tag{5.39}$$

Luego a partir de (5.36), (5.37), (5.38) y (5.39) se tiene

$$|\lambda_{j,h}(z)| = \left|\lambda_j^{\frac{p}{p(z)}}\left(\frac{\omega(I_{j,h+2})}{\nu(I_{j,h+2})}\right)^{\frac{(z-\ell)p}{p_0p_1}}\right| \leq C_{\omega,\nu,p,s,\tau,I}\lambda_j^{\frac{p}{p(u)}} 2^{h(s-1)\frac{|u-\ell|p}{p_0p_1}}, \tag{5.40}$$

donde $(s-1)\frac{|u-\ell|p}{p_0p_1} - (\alpha+\frac{1}{2}) < 0$, pues como $(\alpha+\frac{1}{2})p(u) > s \geq 1$ si suponemos, sin pérdida de generalidad, $p_0 \leq p(u) \leq p_1$ resulta que $(s-1)\frac{|u-\ell|p}{p_0p_1} \leq \frac{(s-1)}{p_0} < \frac{s}{p_0} < (\alpha+\frac{1}{2})$, y así la última serie dada en (5.35) converge.
Además, por la Observación 2.2.16 dada en el Capítulo 2, se tiene que el único representante en la clase $\lambda_{j,h}(z)A_{j,h}$ tal que realiza la maximal es $\lambda_{j,h}(z)\,(a_{j,h}(y) - P_{j,h}(x,y))$, esto es, $N_\alpha^+(\lambda_{j,h}(z)A_{j,h};x) = n_\alpha^+(\lambda_{j,h}(z)\,(a_{j,h}(.) - P_{j,h}(x,.);x))$. Entonces, la afirmación (5.7) sigue del Lema 2.2.6 parte *ii*).

□

Prueba de la Primera Parte del Teorema 5.1.2

Para cada $z \in \Omega$, $F(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega) + \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$, entonces $F(z) = F_0(z) + F_1(z)$ donde $F_k(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_k,+}(\mu(k))$ para $k = 0,1$, y así $N_\alpha^+(F_k(z);x) \in L^{p_k}(\mu(k))$ para $k = 0,1$. Entonces $N_\alpha^+(F_k(z);x) < \infty$ en casi todo punto $x \in (x_{-\infty},\infty)$ con respecto a la medida $\mu(k), k = 0,1$. Más aún como como $\mu(k)(x) > 0$, para $x \in (x_{-\infty},\infty)$ y $k = 0,1$, se tiene que $N_\alpha^+(F_k(z);x) < \infty$ para casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue.
Además como $N_\alpha^+(F(z);x) \leq N_\alpha^+(F_0(z);x) + N_\alpha^+(F_1(z);x)$ resulta que $N_\alpha^+(F(z);x) < \infty$ para casi todo $x \in (x_{-\infty},\infty)$. Entonces, por Lema 2.2.3 parte *(i)*, existe un único representante $f_x(z) \in F(z)$ tal que $n_\alpha^+(f_x(z);x) = N_\alpha^+(F(z);x) < \infty$ y así para cada $x \in (x_{-\infty},\infty)$

$$N_\alpha^+(F(z);x) = n_\alpha^+(f_x(z);x) = \sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}(|f_x(z,y)|)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea $x \in (x_{-\infty},\infty)$, $0 < \ell < 1$ y $\rho(x)$ una función positiva y medible, denotamos $\Phi(x,\rho(x),\ell) = \dfrac{1}{\rho(x)^{2\alpha+1}}\displaystyle\int_x^{x+\rho(x)}(f_x(\ell,y))^2\,dy,$, observemos que como por hipótesis $f_x(\ell,y)$ toma valores reales, entonces $\Phi(x,\rho(x),\ell)$ es no negativa.

Aplicando el Corolario 5.2.2, la desigualdad de Hölder y el Teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|(\Phi(.,\rho(.),\ell))^{\frac{1}{2}}\right\|^p_{L^p(\mu)} &= \int_{x_{-\infty}}^{\infty}(\Phi(x,\rho(x),\ell))^{\frac{p}{2}}\,\mu(x)dx \\
&\le \left(\frac{1}{1-\ell}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x_{-\infty}}^{\infty}|\Phi(x,\rho(x),it)|^{\frac{p_0}{2}}\,\omega(x)dx\right)P_0(\ell,t)dt\right)^{1-\mu} \\
&\quad \left(\frac{1}{\ell}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x_{-\infty}}^{\infty}|\Phi(x,\rho(x),1+it)|^{\frac{p_1}{2}}\,\nu(x)dx\right)P_1(\ell,t)dt\right)^{\mu}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Para $k=0,1$ se tiene,

$$\begin{aligned}
|\Phi(x,\rho(x),k+it)|^{\frac{1}{2}} &= \left|\frac{1}{\rho(x)^{2\alpha}}\left(\frac{1}{\rho(x)}\int_x^{x+\rho(x)}(f_x((k+it,)y))^2dy\right)\right|^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{\rho(x)^{\alpha}}\left(\frac{1}{\rho(x)}\int_x^{x+\rho(x)}|f_x((k+it,)y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le n^+_\alpha(f_x(k+it);x) = N^+_\alpha(F(k+it);x),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

usando (5.42) y las igualdades $\int_{-\infty}^{\infty}P_0(\ell,t)dt = 1-\ell$, $\int_{-\infty}^{\infty}P_1(\ell,t)dt=\ell$, $\mu p_1 = \ell p$ y $p_0(1-\mu)=(1-\ell)p$, se tiene que (5.41) está acotado como sigue

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1-\ell}\int_{-\infty}^{\infty}||F(it)||^{p_0}_{\mathcal{H}^{p_0,+}_\alpha(\omega)}P_0(\ell,t)dt\right)^{1-\mu}\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\infty}^{\infty}||F(1+it)||^{p_1}_{\mathcal{H}^{p_1,+}_\alpha(\nu)}P_1(\ell,t)dt\right)^{\mu} \\
&\le \left(\sup_t ||F(it)||_{\mathcal{H}^{p_0,+}_\alpha(\omega)}\right)^{(1-\ell)p}\left(\sup_t ||F(1+it)||_{\mathcal{H}^{p_1,+}_\alpha(\nu)}\right)^{\ell p}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Así, para $0<\ell<1$ y $\rho(x)$ una función positiva y medible, se tiene probado que

$$\left\|(\Phi(.,\rho(.),\ell))^{\frac{1}{2}}\right\|^p_{L^p(\mu)} \le \left(\sup_t ||F(it)||_{\mathcal{H}^{p_0,+}_\alpha(\omega)}\right)^{(1-\ell)p}\left(\sup_t ||F(1+it)||_{\mathcal{H}^{p_1,+}_\alpha(\nu)}\right)^{\ell p} \tag{5.44}$$

Veamos que dado $\epsilon>0$, existe una función positiva medible $\rho(x)$ tal que, para todo $0<\ell<1$ se verifica

$$||N^+_\alpha(F(\ell);.)||^p_{L^p(\mu)} \le \left\|(\Phi(.,\rho(.),\ell))^{\frac{1}{2}}\right\|^p_{L^p(\mu)} + \epsilon. \tag{5.45}$$

Para $m\in\mathbb{N}$ consideramos los conjuntos

$$A_m = \{x\in(x_{-\infty},\infty) : m-1\le |x| < m\}.$$

Sea $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso en $\mathbb{R}^+$ y dado $\epsilon>0$ elegimos $\epsilon_m^p = \frac{\epsilon}{2^m\mu(A_m)}$. Definimos para cada $\rho_k>0$ y cada $m\in\mathbb{N}$

$$E_k^m = \{x \in A_m : n_\alpha^+(f_x(\ell,.);x) - \epsilon_m < (\Phi(x,\rho_k,\ell))^{\frac{1}{2}}\}.$$

Como, por Teorema 2.2.14, $N_\alpha^+(F(\ell);x)$ es semicontinua inferiormente resulta que $N_\alpha^+(F(\ell);x)$ es medible y $\Phi(x,\rho_k,z)$ es medible en x, luego E_k^m son medibles. Consideramos

$$F_1^m = E_1^m$$

y si $k \geq 2$

$$F_k^m = E_k^m - E_{k-1}^m$$

luego F_k^m son medibles y disjuntos. Además como $N_\alpha^+(F;.) \in L^p(\mu)$ y $\mu(x) > 0$ en casi todo punto $x \in (x_{-\infty},\infty)$, luego por la definición de $N_\alpha^+(F;x)$ y la densidad de $\{\rho_k\}$ se tiene que, salvo un conjunto de medida nula,

$$A_m = \bigcup_{k\geq 1} F_k^m. \tag{5.46}$$

De (5.46) resulta que

$$(x_{-\infty},\infty) = \bigcup_{m\geq 1} A_m = \bigcup_{k,m\geq 1} F_k^m$$

Definimos

$$\rho(x) = \sum_{k,m\geq 1} \rho_k \chi_{F_k^m}(x)$$

luego ρ es medible por ser F_k^m medibles y es positiva pues, para cada $k \geq 1$, $\rho_k > 0$. Además como para casi todo $x \in (x_{-\infty},\infty)$, los F_k^m son disjuntos para todo $k,m \geq 1$, resulta que existen índices únicos k y m tales que $x \in F_k^m$ y por lo tanto $\rho(x) = \rho_k$.

$$N_\alpha^+(F(\ell);x) - \epsilon_m < (\Phi(x,\rho_k,\ell))^{\frac{1}{2}} = (\Phi(x,\rho(x),\ell))^{\frac{1}{2}}, \tag{5.47}$$

luego usando (5.46), (5.47) y $\epsilon_m^p = \frac{\epsilon}{2^m\mu(A_m)}$, se tiene

$$\begin{aligned}
||N_\alpha^+(F(\ell);.) - (\Phi(.,\rho(.),\ell))^{\frac{1}{2}}||_{L^p(\mu)}^p &= \int_{x_{-\infty}}^{\infty} |N_\alpha^+(F(\ell);x) - (\Phi(x,\rho(x),\ell))^{\frac{1}{2}}|^p \mu(x)dx \\
&= \sum_{k,m\geq 1} \int_{F_m^k} |N_\alpha^+(F(\ell);x) - (\Phi(x,\rho(x),\ell))^{\frac{1}{2}}|^p \mu(x)dx \\
&< \sum_{k,m\geq 1} \int_{F_m^k} \epsilon_m^p \mu(x)dx = \sum_{m\geq 1} \int_{A_m} \epsilon_m^p \mu(x)dx \\
&= \sum_{m\geq 1} \epsilon_m^p \mu(A_m) = \epsilon \sum_{m\geq 1} \frac{1}{2^m}
\end{aligned}$$

y así se tiene que

$$||N_\alpha^+(F(\ell);.)||^p_{L^p(\mu)} - ||(\Phi(.,\rho(.),\ell))^{\frac{1}{2}}||^p_{L^p(\mu)} \leq ||N_\alpha^+(F(\ell);.) - (\Phi(.,\rho(.),\ell))^{\frac{1}{2}}||^p_{L^p(\mu)} < \epsilon$$

de lo que resulta (5.45) luego por (5.44) y (5.45) se tiene la tesis de la primera parte del Teorema 5.1.2.

□

5.4. Interpolación entre espacios de Calderón-Hardy laterales con pesos

En esta última sección intentaremos clarificar el hecho de que teoremas de la forma 5.1.2 implican teoremas de la forma 5.1.1. Para eso necesitamos introducir parte de teoria abstracta general que comenzó con el trabajo [2] de A. P. Calderón.

5.4.1. Definiciones

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial topológico y A_k $(k = 0, 1)$ subespacios de $\mathbb{V}$. Sobre A_k esta definida $\|\cdot\|_k$ que, para todo $x, y \in A_k$ y todo escalar γ, satisface:

- $\|x\|_k = 0 \implies x = 0$.
- $\|\gamma x\|_k = |\gamma| \, \|x\|_k$.
- $\|x + y\|_k \leq c \left(\|x\|_k + \|y\|_k\right)$, donde c es una constante que no depende de x e y.
- $(A_k, \|\cdot\|_k) \hookrightarrow \mathbb{V}$.

Definición 5.4.1. *En $A_0 + A_1$ se define*

$$\|v\| = \text{ínf} \left\{ \|a_0\|_0 + \|a_1\|_1 : v = a_0 + a_1, \; a_j \in A_k \right\}.$$

Se verifican, para todo $v, w \in A_0 + A_1$ y todo escalar γ,

- $\|v\| = 0 \implies v = 0$.
- $\|\gamma v\| = |\gamma| \, \|v\|$.
- $\|v + w\| \leq c \left(\|v\| + \|w\|\right)$.

Definición 5.4.2. *Sean $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ y $\mathcal{F} = \{f\}$ una familia de funciones de variable compleja, $f : \Omega \longrightarrow A_0 + A_1$ que cumple para todo $t \in \mathbb{R}$ y $k = 0, 1$:*

1. $f\,(k+it) \in A_k$
2. $\|f\,(k+it)\|_k \leq C$.
   Se define

$$\|f\|_F = \text{máx}\left\{\sup_t \|f(it)\|_0\,,\ \sup_t \|f(1+it)\|_1\right\}.$$

Definición 5.4.3. *Si* $0 < s < 1$*, se definen los espacios intermedios*

$$A_s = \{a \in A_0 + A_1 :\ \exists f \in \mathcal{F}\ , a = f(s)\}$$

y

$$\|a\|_s = \inf_{\substack{f(s)=a \\ f\in\mathcal{F}}} \|f\|_F\,.$$

Se verifican

- $\|\gamma f\|_F = |\gamma|\,\|f\|_F$ para toda $f \in \mathcal{F}$.
- $\|\gamma\|_s = |\gamma|\,\|a\|_s$ para todo $a \in A_s$.

5.4.2. Teorema de interpolación

Consideremos, con las definiciones de la sección anterior,

- $\left(A_k, \|\cdot\|_{A_k}\right),\ \left(B_k, \|\cdot\|_{B_k}\right),\ k = 0, 1.$
- $\mathcal{F} = \{f\}_{f\in\mathcal{F}}\,,\ \widetilde{\mathcal{F}} = \left\{\tilde{f}\right\}_{\tilde{f}\in\widetilde{\mathcal{F}}}.$
- $A_s = \{f(s)\}_{f\in\mathcal{F}}\,,\ B_s = \left\{\tilde{f}(s)\right\}_{\tilde{f}\in\widetilde{\mathcal{F}}}.$

Entonces tenemos el siguiente teorema de interpolación:

Teorema 5.4.4. *Sea* $\mathcal{L}_z : A_0 + A_1 \longrightarrow B_0 + B_1$ $(z \in \Omega)$ *una familia de operadores tal que para* $k = 0, 1$,

$$\mathcal{L}_{k+it} : A_k \longrightarrow B_k$$

y, además, existen constantes c*,* $\xi > 0$ *tales que para todo* $a_k \in A_k$ *y todo* $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathcal{L}_{j+it} a_j\|_{B_j} \leq c \exp(\xi t^2)\,\|a_j\|_{A_j}\,.$$

Si para toda $f \in \mathcal{F}$ *y* $\kappa \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $\kappa e^{\xi z^2}\mathcal{L}_z f \in \widetilde{\mathcal{F}}$*, entonces para cada* s*,* $0 < s < 1$,

$$\mathcal{L}_s : A_s \longrightarrow B_s$$

y existe $c_s > 0$ *tal que*

$$\|\mathcal{L}_s a\|_{B_s} \leq c_s\,\|a\|_{A_s}\,,$$

para todo $a \in A_s$.

Demostración. Dados $\varepsilon > 0$ y $a \in A_s$ por la Definición 5.4.3 existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = a$ y $\|f\|_F \leq \|a\|_{A_s} + \varepsilon$. Si definimos

$$g(z) = c^{-1} e^{\xi z^2} \mathcal{L}_z f(z),$$

entonces, por hipótesis, $g \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y, por la Definición 5.4.3, es

$$\|g(s)\|_{B_s} \leq \|g\|_{\tilde{F}}.$$

Como $f(s) = a$, entonces

$$c^{-1} e^{\xi s^2} \|\mathcal{L}_s a\|_{B_s} = \|g(s)\|_{B_s} \leq \|g\|_{\tilde{F}} = \text{máx}\left\{\sup_t \|g(it)\|_{B_0},\ \sup_t \|g(1+it)\|_{B_1}\right\}$$

$$= \text{máx}\left\{\sup_t \left(\left(c^{-1} e^{-\xi t^2}\right) \|\mathcal{L}_{it} f(it)\|_{B_0}\right),\ \sup_t \left(\left(c^{-1} e^{\xi\left(1-t^2\right)}\right) \|\mathcal{L}_{1+it} f(1+it)\|_{B_1}\right)\right\}$$

$$\leq \text{máx}\left\{\sup_t \left(e^{-\xi t^2} e^{\beta t^2} \|f(it)\|_{A_0}\right),\ \sup_t \left(e^{\xi\left(1-t^2\right)} e^{\xi t^2} \|f(1+it)\|_{A_1}\right)\right\}$$

$$\leq e^{\xi}\, \text{máx}\left\{\sup_t \|f(it)\|_{A_0},\ \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1}\right\} = e^{\xi} \|f\|_F \leq e^{\xi}\left(\|a\|_{A_s} + \varepsilon\right).$$

Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario se tiene que

$$\|\mathcal{L}_s a\|_{B_s} \leq c\, e^{\xi(1-s^2)} \|a\|_{A_s},$$

como queríamos probar. □

5.4.3. Caracterización de $\|\cdot\|_s$

Con las definiciones introducidas en la Subsección 5.4.1 tenemos la siguiente proposición que relaciona a las "normas" intermedias con las $\|\cdot\|_k$ $(k = 0, 1)$.

Proposición 5.4.5. *Si $\mathcal{F}$ es una familia como la dada en la Definición 5.4.2 que además cumple las siguientes dos condiciones:*

3. para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\gamma\, e^{\xi z} f \in \mathcal{F}$ donde $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$,

4. si para $k = 0$ o $k = 1$ es $\|f(k+it)\|_k = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$,

entonces

$$\|a\|_s = \inf_{\substack{f(s) = a \\ f \in \mathcal{F}}} \left\{\left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^{s}\right\}.$$

Demostración. Veamos primero que el miembro de la izquierda es menor o igual que el de la derecha.
Sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = a$. Si para $k = 0$ o $k = 1$ es $\sup_t \|f(k+it)\|_k = 0$ entonces, por la Condición 4, es $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ y $\|a\|_s = 0$, valiendo la igualdad. Si no, sea $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^\sigma = \frac{\sup\limits_t \|f(it)\|_0}{\sup\limits_t \|f(1+it)\|_1}.$$

Sea $g(z) = e^{\sigma(z-s)} f(z)$. Por la Condición *3* se tiene que $g \in \mathcal{F}$ y, además, $g(s) = f(s) = a$.
Por la definición de σ se tiene que

$$\|g(it)\|_0 = e^{-\sigma s} \|f(it)\|_0 \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s,$$

$$\|g(1+it)\|_1 = e^{\sigma(1-s)} \|f(1+it)\|_1 \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s.$$

Y, por lo tanto, usando Definiciones 5.4.3 y 5.4.2,

$$\|a\|_s \leq \|g\|_F \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s,$$

para toda $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = a$.
Para ver la otra desigualdad, consideramos $\varepsilon > 0$ y $g \in \mathcal{F}$ tal que $g(s) = a$ con $\|g\|_F \leq \|a\|_s + \varepsilon$.
Luego

$$\begin{aligned}
&\inf_{\substack{f(s)=a \\ f \in \mathcal{F}}} \left\{ \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s \right\} \\
&\leq \left(\sup_t \|g(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|g(1+it)\|_1\right)^s \\
&\leq \max\left\{\sup_t \|g(it)\|_0 \,,\, \sup_t \|g(1+it)\|_1\right\} \\
&= \|g\|_F \leq \|a\|_s + \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

5.4.4. Identificación de los espacios intermedios

En el caso en que los espacios A_k $(k = 0, 1)$ sean espacios de Calderón-Hardy laterales, se identificarán los espacios intermedios con los espacios de Calderón-Hardy correspondientes.

Definición 5.4.6. *Sean* $\omega, \nu \in A_\infty^+$ *tal que* $\omega \leq \tau$ *y* $\nu \leq \tau$ *para algún* $\tau < 0$. *Se define* $\mathcal{F} = \{F\}$ *a la familia de las funciones de variable compleja* $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega) + \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$ *tales que* $f_x(z, y)$ *es el único representante de* $F(z)$ *tal que* $N_\alpha^+(F(z); x) = n_\alpha^+(f_x(z, .); x) < \infty$ *y para cada* $x \in (x_{-\infty}, \infty)$ *y* $\rho > 0$ *definimos* $\Phi(x, \rho, z) = \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}} \int_x^{x+\rho} (f_x(z, y))^2 dy$ *tal que:*

1. $\Phi(x, \rho, z)$ *es continua y acotada para* $z \in \Omega$ *y* (x, ρ) *fijos en* $(x_{-\infty}, \infty) \times (0, \infty)$.
2. $\Phi(x, \rho, z)$ *es analítica para* z *en el interior de* Ω *y* (x, ρ) *fijo en* $(x_{-\infty}, \infty) \times (0, \infty)$.
3. $f_x(\ell, y)$ *tome valores reales cuando* $z = \ell$ *para* $0 < \ell < 1$.
4. $F(k + it) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_k,+}(\mu(k))$ *y* $\|F(k + it)\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p(k),+}(\mu(k))} \leq C$ *para* $k = 0, 1$.

Veamos, en principio, que la familia $\mathcal{F}$ cumple con las condiciones *1* y *2* de la Defininción 5.4.2 y con la condición *3* de la Proposición 5.4.5.
Es claro que las propiedades *1* y *2* de la Defininción 5.4.2 se obtienen en forma inmediata de la Definición 5.4.6 parte *4*.
Veamos que $\mathcal{F}$ cumple con la condición *3* de la Proposición 5.4.5, esto es dada $F \in \mathcal{F}$, queremos ver que $\gamma e^{\xi z} F \in \mathcal{F}$. Para ello debemos ver que $\gamma e^{\xi z} F : \Omega \to \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega) + \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$ es tal que $\gamma e^{\xi z} f_x(z, y)$ es su único representante tal que $n_\alpha^+(\gamma e^{\xi z} f_x(z, y); x) < \infty$. En efecto, $F(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega) + \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$ entonces existen clases $F_0(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)$ y $F_1(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$ tal que $F(z) = F_0(z) + F_1(z)$.

$$\begin{aligned}\left(\int_{x_{-\infty}}^{\infty} |N_\alpha^+(\gamma e^{\xi z} F_k(z); x)|^{p_k} \mu(k) dx\right)^{\frac{1}{p_k}} &= |\gamma e^{\xi z}| \left(\int_{x_{-\infty}}^{\infty} |N_\alpha^+(F_k(z); x)|^{p_k} \mu(k) dx\right)^{\frac{1}{p_k}} \\ &= \gamma e^{\xi u} \left(\int_{x_{-\infty}}^{\infty} |N_\alpha^+(F_k(z); x)|^{p_k} \mu(k) dx\right)^{\frac{1}{p_k}} \leq C_k \qquad (5.48)\end{aligned}$$

Luego $\gamma e^{\xi z} F_k(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_k,+}(\mu(k)), k = 0, 1$, y como $F(z) = F_0(z) + F_1(z)$ resulta que $\gamma e^{\xi z} F(z) \in \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega) + \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$.
Sólo resta ver que $\gamma e^{\xi z} f_x(z, y)$ es el único representante de $\gamma e^{\xi z} F(z)$ que realiza la maximal, donde $f_x(z, y) \in F$ es tal que $n_\alpha^+(f_x(z, y); x) = N_\alpha^+(F(z); x) < \infty$ luego usando la sublinealidad de la maximal se tiene que

$$N_\alpha^+(\gamma e^{\xi z} F(z); x) = \gamma e^{\xi u} N_\alpha^+(F(z); x) < \infty \qquad (5.49)$$

y así existe un único representante $\hat{f}_x(z, y) \in \gamma e^{\xi z} F(z)$ tal que $N_\alpha^+(\hat{f}_x(z, y); x) = n_\alpha^+(\hat{f}_x(z, y); x) < \infty$ luego por unicidad resulta que $\hat{f}_x(z, y) = \gamma e^{\xi z} f_x(z, y)$.
Ahora, definimos

$$\hat{\Phi}(x, \rho, z) = \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}} \int_x^{x+\rho} (\hat{f}_x(z, y))^2 dy \qquad (5.50)$$

y debemos ver que se satisfacen las condiciones *1*, *2*, *3* y *4* de la Definición 5.4.6. Es claro que la condición *4* se verifica ya que, la clase F la satisface. Para ver que valen *1* y *2* consideramos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x,\rho,z) &= \frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}(\hat{f}_x(z,y))^2dy \\ &= (\gamma e^{\xi z})^2\frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}(f_x(z,y))^2dy \\ &= (\gamma e^{\xi z})^2\Phi(x,\rho,z), \end{aligned} \tag{5.51}$$

como $\Phi(x,\rho,z)$ es continua y acotada para $z\in\Omega$ y (x,ρ) fijos en $(x_{-\infty},\infty)\times(0,\infty)$ y analítica para z en el interior de Ω y (x,ρ) fijo en $(x_{-\infty},\infty)\times(0,\infty)$ resulta que $\hat{\Phi}(x,\rho,z)$ satisface *1* y *2*. Por último, la condición *3* claramente se satisface ya que $f_x(\ell,y)$ es real para $0<\ell<1$.

Los siguientes corolarios dan la identificación de los espacios intermedios.

Corolario 5.4.7. *La familia $\mathcal{F}$ cumple la Condición 4 de la Proposición 5.4.5.*

Demostración. Sea $F\in\mathcal{F}$ tal que si $k=0$ o $k=1$ es $\|F\,(k+it)\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p(k),+}(\mu(k))}=0$ para todo $t\in\mathbb{R}$.
Por la primera parte del Teorema 5.1.2 se tiene que para $0<\ell<1$

$$||F(\ell)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)} \leq \left(\sup_t ||F(it)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)}\right)^{1-\ell}\left(\sup_t ||F(1+it)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)}\right)^{\ell}$$

Como por hipótesis $||F(it)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)}=0$ o $||F(1+it)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)}=0$, de la desigualdad anterior se tiene que $||F(\ell)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}=0$ y así $F(\ell)=0$ para $0<\ell<1$.
Del mismo modo, como $F\,(\cdot+it_0)\in\mathcal{F}$ para cada $t_0\in\mathbb{R}$, pues satisface *1*, *2*, *3* y *4* de la Definición 5.4.6 y además, por hipótesis, para cada $t_0\in\mathbb{R}$ se tiene que $||F(it+it_0)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)}=0$ o $||F(1+it+it_0)||_{\mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)}=0$. Entonces, reiterando para $F\,(\cdot+it_0)$ el mismo argumento que para $F(\cdot)$ se tiene que $F(\ell+it_0)=0$ para $0<\ell<1$ y cada $t_0\in\mathbb{R}$, lo cual implica que la clase $F(z)=0$ para todo z en el interior de Ω.
Además para cada $x\in(x_{-\infty},\infty)$

$$\Phi(x,\rho,z)=\frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\int_x^{x+\rho}(f_x(z,y))^2dy=0, \tag{5.52}$$

para todo $\rho>0$ y z en el interior de Ω. Sólo resta ver que $F(z)=0$ para todo $z\in\partial\Omega$, en efecto dado $z\in\partial\Omega$ sea z_n en el interior de Ω tal que z_n tiende a z cuando $n\to\infty$, luego por la continuidad de Φ en Ω se tiene que $\Phi(x,\rho,z_n)$ tiende a $\Phi(x,\rho,z)$, pero como $\Phi(x,\rho,z_n)=0$ pues z_n pertenece al interior de Ω resulta que

$$\Phi(x,\rho,z)=0 \quad \text{para todo} \quad z\in\partial\Omega, \tag{5.53}$$

por lo tanto de (5.52) y (5.53) se tiene que para x fijo en $(x_{-\infty},\infty)$ y para todo $\rho>0$, $\Phi(x,\rho,z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Consideramos $y>x$ y $h>0$, luego si tomamos en particular $\rho=y-x$ y $\rho=y-x+h$ se tiene

$$0=\int_x^y (f_x(z,t))^2\,dt-\int_x^{y+h}(f_x(z,t))^2\,dt=\int_y^{y+h}(f_x(z,t))^2\,dt$$

y asi se tiene que $0=\frac{1}{h}\int_y^{y+h}(f_x(z,t))^2\,dt$.
Como $f_x\in L^2_{loc}$ por el Teorema de diferenciación de Lebesgue resulta que $f_x(z,y)=0$ en casi todo punto $y>x$ para todo $x\in(x_{-\infty},\infty)$. Luego se tiene que $n_\alpha^+(f_x(z,.);x)=\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\int_x^{x+\rho}(f_x(z,y))^2dy\right)^{\frac{1}{2}}=0$ y así $\int_{x_{-\infty}}^{\infty}|N_\alpha^+(F(z);x)|^p\mu_k(x)dx=0$ es decir $\|F(z)\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu_k)}=0,\ k=0,1$. Por lo tanto se tiene que $F(z)=0$ para todo $z\in\Omega$.

□

Corolario 5.4.8. *Si* $A_0=\mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)$, $A_1=\mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$, $0<\ell<1$, $p=p(\ell)$ *y* $\mu=\mu(\ell)$ *entonces*

$$A_\ell=\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$$

y

$$\|\cdot\|_\ell\equiv\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}.$$

Demostración. Veamos que existe $C_1>0$ tal que $||.||_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}\le C_1||.||_\ell$ y asi $A_\ell\subset\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$. Sea $H\in A_\ell$ luego para toda $F\in\mathcal{F}$ tal que $F(\ell)=H$, se tiene por la primera parte del Teorema 5.1.2 que

$$\|H\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}=\|F(\ell)\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}\le C\left(\sup_t\|F(it)\|_0\right)^{1-\ell}\left(\sup_t\|F(1+it)\|_1\right)^{\ell}.$$

Luego tomando ínfimo, sobre $F\in\mathcal{F}$ tal que $F(\ell)=H$, en la desigualdad anterior por la Proposición 5.4.5 se tiene que

$$\|H\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}\le C\,\|H\|_\ell\,. \tag{5.54}$$

Veamos que existe $C_2>0$ tal que $||.||_\ell\le C_2||.||_{H_\alpha^{p,+}(\mu)}$ y asi $\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)\subset A_\ell$. Sea ahora $H\in\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)$. Por la segunda parte del Teorema 5.1.2 existe $F\in\mathcal{F}$ tal que $H=F(\ell)$ y

$$\|F(k+it)\|_k^{p_k}\le\tilde{C}\,\|H\|^p_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}, \tag{5.55}$$

para $k=0,1$. Además por la Definición 5.4.3, $H\in A_\ell$. Luego usando la Proposición 5.4.5 y (5.55) resulta que

$$\begin{aligned}\|H\|_\ell &\le \left(\sup_t\|F(it)\|_0\right)^{1-\ell}\left(\sup_t\|F(1+it)\|_1\right)^{\ell}\\ &\le \tilde{C}_{p_0,p_1}\left(\|H\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}\right)^{\frac{p}{p_0}(1-\ell)}\left(\|H\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}\right)^{\frac{p}{p_1}\ell}\\ &= \tilde{C}_{p_0,p_1}\,\|H\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}\,.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Luego por (5.54) y (5.56) se tiene que $\|\cdot\|_\ell\equiv\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}$ □

Resumiendo, hemos probado que $\mathcal{F}$ es una familia que verifica las condiciones *1* y *2* de la Definición 5.4.2, como también satisface las condiciones *3* y *4* de la Proposición 5.4.5 y además el Teorema 5.1.2, entonces si $A_0 = \mathcal{H}_\alpha^{p_0,+}(\omega)$ y $A_1 = \mathcal{H}_\alpha^{p_1,+}(\nu)$, por el Corolario 5.4.8 resulta que

$$A_\ell = \mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu) \ \text{ y } \ ||.||_{A_\ell} \equiv ||.||_{\mathcal{H}_\alpha^{p,+}(\mu)}$$

con $p = p(\ell)$ y $\mu = \mu(\ell)$ con $0 < \ell < 1$.
Utilizando el Teorema 5.4.4 y el Corolario 5.4.8 que identifica los espacios intermedios A_ℓ se tiene la prueba del Teorema 5.1.1.

Bibliografía

[1] A. P. Calderón, *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions,* Studia Math., XLIV, (1972), 563-582.

[2] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation the complex method,* Studia Math., T. XXIV, (1964), 113-190.

[3] A. P. Calderón and A. Torchinsky, *Parabolic Maximal Functions Associated with a distribution,* Advances in Math., 16, 1-64 (1975).

[4] A. P. Calderón and A. Torchinsky, *Parabolic Maximal Functions Associated with a distribution, II* Advances in Math., 24, 101-171 (1977).

[5] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations,* Studia Math., 20, 171-225 (1961).

[6] S. Chanillo, *Weighted norm inequalities for strongly singular convolutionn operators,* Trans. Amer.Soc. 282 (1),77-107, (1984).

[7] A.Gatto, J. G. Jiménez and C. Segovia, *On the solution of the equation $\Delta^m F = f$ for $f \in H^p$,* Conference on Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund, **Vol(II)**, Wadsworth international mathematics series, (1981).

[8] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier Analysis,* Pearson Educ. Inc., (2004).

[9] E.Harboure, O. Salinas, B.Viviani, *Acotación de la integral fraccionaria en espacios de Orlicz y de oscilación media ϕ acotada*, Actas del 2do. Congreso Dr. A. Monteiro, Bahía Blanca, (1997), 41-50.

[10] P.Hajlasz and P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 145, Number 688, (2000).

[11] F. J. Martín-Reyes, *New proof of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal Functions*, Proc.Amer. Math. Soc., **117**, (1993), 691-698.

[12] F. J. Martín-Reyes, L.Pick and A. de la Torre, *A_∞^+ condition*, Can. J. Math., 45 (6). 1993, 1231-1244.

[13] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega and A. de la Torre, *Weighted inequalities for the one-sided maximal functions*, Trans .Amer. Math. Soc., **319**, (1990), 517-534.

[14] R. Macías and C. Segovia, *A descomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Advances in Math. 33, (1979), 271-309.

[15] B. Muckenhoupt, *Weighted Norm inequalities for the Hardy Maximal Function*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol 165, (1972), 207-226.

[16] S. Ombrosi, *On spaces associated with primitives of distributions in one-sided Hardy spaces*, Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol.**42**, Num **2**, (2001), 81-102.

[17] S. Ombrosi, *Sobre espacios asociados a primitivas de distribuciones en espacios de Hardy laterales*, Ph.D.Thesis Universidad Nacional de Buenos Aires, (2002).

[18] S.Ombrosi, A. Perini, R. Testoni *An Interpolation Theorem of Calderón-Hardy Spaces* enviado a publicar.

[19] S. Ombrosi and L. de Rosa, *Boundeness of the Weyl Fractional Integral on the one-sided weighted Lebesque and Lipchitz Spaces,* Publications Mathemàtiques, Vol.**47**, Num **1**, (2003), 81-102.

[20] S. Ombrosi and C. Segovia, *One-sided singular integral operators on Calderón-Hardy spaces,* Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol.**45**, Num **1**, (2003), 17-32.

[21] S. Ombrosi, C. Segovia, and R. Testoni *An interpolation theorem between one-sided Hardy spaces,*Arkiv för Matematik, Vol **45**, (2006), 335-348.

[22] A. Perini *Boundedness of one-sided fractional integrals in the one sided Calderon- Hardy spaces,* Comment Math. Univ. Carolinae. 52,1 (2011) 57-75.

[23] L. de Rosa and C. Segovia, *Weighted H^p spaces for one sided maximal functions,* Contemporary Math., **189**, (1995), 161-183.

[24] E. Sawyer, *Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **297**, (1986), 53-61.

[25] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press- New Jersey,(1970).

[26] J. Strömberg and A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces,* Lecture notes in Math. 1381, Springer-Verlag, 1989.

[27] R. Testoni, *Acotación y tipo débil de Operadores fuertemente singulares laterales en espacios L^p_ω con peso $\omega \in A_p^+$*, Ph.D.Thesis Universidad Nacional de Buenos Aires, (2005).

[28] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Vol 2, Cambridge Univ. Press,1997.