Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctora en Matemática

Subvariedades de álgebras de

De Morgan Heyting y p-álgebras de Kleene

Valeria Marcela Castaño

Bahía Blanca Argentina

2017

Dedicado a
lo que más amo,
mi hija Agustina.

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue y del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur durante el período comprendido entre los meses de octubre de 2006 y Diciembre de 2016 bajo la dirección del Dr. José Patricio Díaz Varela, profesor Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur en el Área I.

Valeria Marcela Castaño

Agradecimientos

A mi director José Patricio Diaz Varela, por compartir desinteresadamente sus conocimientos e ideas conmigo, por enseñarme día a día a mejorar mi formación como investigadora. Por creer siempre en mí, por guiarme y aconsejarme en todo momento.

A Manuel Abad, por haber sido mi primer director y abrirme las puertas en su proyecto de investigación cuando yo recién comenzaba. Porque es una excelente persona, humilde, sencilla y generosa.

A mi familia, por apoyarme siempre, en todo, por estar siempre al lado mío acompañándome, queriéndome y conteniéndome.

A mi querido y gran hermano Diego, por dejarme compartir con él este amor que sentimos ambos por la matemática. Porque día a día aprendo de él, por sus sugerencias, sus consejos, su paciencia y porque siempre, siempre está dispuesto a darme una mano.

A mi gran amiga, compañera de oficina y compañera de investigación, Marce, porque toda esta experiencia la hemos hecha juntas, desde el inicio en mi carrera de Profesado en Matemática hasta la culminación de esta etapa de doctorado. Por estar siempre a mi lado, en los momentos de desaliento y en los exitosos, porque juntas se hace todo más fácil y divertido.

A mis demás amigos y compañeros de oficina, Dani, David, Cachy, Lauri, por estar presente siempre y ayudarme cuando los necesito.

A la Universidad Nacional del Comahue, porque es el lugar donde comenzó y transcurre mi estudio sobre Matemática, mi formación como investigadora y mi experiencia como docente.

A la Universidad Nacional del Sur, por abrirme las puertas para poder realizar el doctorado.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por brindarme ayuda económica que facilitó en gran parte la realización de esta tesis.

Resumen

El objetivo de esta tesis es abordar distintos problemas algebraicos acerca de algunas subvariedades de las álgebras de De Morgan Heyting y de las álgebras pseudocomplementadas de Kleene utilizando dualidades topológicas tipo Priestley correspondientes a dichas variedades. Se investiga la sucesión de subvariedades $\mathcal{SDH}_n$ de las álgebras de De Morgan Heyting caracterizadas por la identidad $x^{n('*)} \approx x^{(n+1)('*)}$ definidas por H.P. Sankappanavar en [26]. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes sobre el espacio de filtros primos para que un álgebra de De Morgan Heyting pertenezca a la variedad $\mathcal{SDH}_1$ y se caracterizan las álgebras subdirectamente irreducibles y simples de dicha variedad. Todos estos resultados son extendidos para las álgebras finitas en el caso general $\mathcal{SDH}_n$.

La clase de las álgebras de Boole es un ejemplo familiar de álgebras de Heyting y es bien conocido que existe una correspondencia entre las subálgebras de un álgebra de Boole y ciertas relaciones de equivalencia definidas sobre su espacio Booleano (ver, por ejemplo [13]). En esta tesis se extiende esta correspondencia tanto para la clase de las álgebras de Heyting como para la clase de las álgebras de De Morgan Heyting, es decir, se caracterizan las subálgebras de las álgebras de Heyting y de De Morgan Heyting definiendo ciertas relaciones de equivalencia sobre los espacios topológicos de sus respectivas representaciones tipo Priestley. Como caso particular de este resultado, se obtiene la caracterización para subálgebras maximales de las álgebras de Heyting finitas dada por M. Adams en [2].

Se estudian las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{PCDM}$ de las álgebras pseudocomplementadas de De Morgan a través de sus *pm*-espacios. Se introduce la noción de *body* de un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{PCDM}$ y se caracteriza completamente $Body(\mathbf{L})$ cuando $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible, directamente indescomponible o simple. Como consecuencia de esto, en el caso particular de las álgebras pseudocomplementadas de Kleene, surgen naturalmente tres subvariedades de la misma para las cuales se determinan identidades que las caracterizan. Se define la subvariedad $\mathcal{BPK}$, de particular interés ya que sus álgebras subdirectamente irreducibles son suma ordinal de álgebras de Boole y cadenas, realizándose un estudio de la misma. Se determina completamente el reticulado de sus subvariedades y se encuentran bases ecuacionales para cada una de ellas. Una de estas subvariedades, llamada $\mathcal{BPK}_0$ es aquella cuyos miembros subdirectamente irreducibles son de la forma $\mathbf{B} \oplus \mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole. La última parte de la tesis está destinada al estudio de la variedad $\mathcal{BPK}_0$ resolviéndose problemas tales como la obtención de las álgebras

libres con una cantidad finita de generadores libres y la descripción completa del reticulado de cuasivariedades junto con una base de cuasi-identidades para cada cuasivariedad.

Abstract

The objective of this thesis is to study several algebraic problems regarding some subvarieties of De Morgan Heyting algebras and pseudocomplemented Kleene algebras using the corresponding Priestley dualities as a main tool. We focus on the sequence of subvarieties $\mathcal{SDH}_n$, which consist of the De Morgan Heyting algebras characterized by the identity $x^{n('*)} \approx x^{(n+1)('*)}$, as defined by H. P. Sankappanavar in [26]. We give necessary and sufficient conditions on the space of prime filters for a De Morgan Heyting algebra to belong to the variety $\mathcal{SDH}_1$. We also characterize the subdirectly irreducible and simple members of this variety. These results are all further extended for finite algebras in the general case of the varieties $\mathcal{SDH}_n$.

The class of Boolean algebras is a familiar example of Heyting algebras and it is well known that there exists a correspondence between subalgebras of a Boolean algebra and certain equivalence relations on its Boolean space (see, for example, [13]). In this thesis, we extend this correspondence both for the class of Heyting algebras and for the class of De Morgan Heyting algebras, that is, we characterize the subalgebras of a Heyting algebra and a De Morgan Heyting algebra by defining certain equivalence relations on their respective Priestley spaces. The characterization of maximal subalgebras in finite Heyting algebras given by M. Adams in [2] follows now as a special case of our characterization.

We also study the subdirectly irreducible members of the variety $\mathcal{PCDM}$ of pseudocomplemented De Morgan algebras in terms of their pm-spaces. We introduce the notion of *body* of an algebra $\mathbf{L} \in \mathcal{PCDM}$ and characterize completely the *body* of $\mathbf{L}$ when $\mathbf{L}$ is subdirectly irreducible, directly indecomposable or simple. As a consequence of this, in the case of pseudocomplemented Kleene algebras, three special subvarieties arise naturally, for which we give explicit identities that characterize them. We also define the variety $\mathcal{BPK}$ which is of particular interest because its subdirectly irreducible algebras are ordinal sums of Boolean algebras and chains. We study this variety in depth. We determine the whole subvariety lattice and find explicit equational bases for each of the subvarieties. The subdirectly irreducible members of one of these subvarieties, called $\mathcal{BPK}_0$, are of the form $\mathbf{B} \oplus \mathbf{B}$, where $\mathbf{B}$ is a Boolean algebra. The last part of this thesis is devoted to the study of this variety: we characterize the finitely generated free algebras and give a full description of the quasivariety lattice as well as the corresponding quasi-equational basis for each of the quasivarieties.

Índice general

Introducción

Las álgebras de Heyting son reticulados distributivos acotados con una operación binaria $\to$ de pseudocomplementación relativa, es decir, cumplen con la condición: $a \wedge c \leq b$ si y sólo si $c \leq a \to b$. Estas álgebras conforman la semántica algebraica equivalente de la lógica intuicionista, de la misma manera que las álgebras de Boole conforman la de la lógica proposicional clásica. Las álgebras de De Morgan Heyting o *dh*-álgebras son álgebras de Heyting con una operación adicional de De Morgan. Estas álgebras son la semántica algebraica del cálculo proposicional modal simétrico de Moisil. Fueron estudiadas con el nombre de *álgebras de Heyting simétricas* por A. Monteiro en su extenso e importante trabajo "Sur les Algèbres de Heyting Symétriques". Además de la estrecha relación que tienen con ciertas lógicas, estas estructuras algebraicas son suficientemente ricas en sí mismas para desarrollar nuevas técnicas para el estudio de otras álgebras.

La obtención de una semántica adecuada para una lógica determinada posibilita la obtención y avance de los conocimientos sobre dicha lógica. De la misma forma, una representación topológica adecuada para la semántica algebraica posibilita obtener resultados algebraicos sobre dicha semántica y, en consecuencia, sobre la lógica asociada a ella. En 1936 M.H.Stone desarrolló una teoría de representación topológica para las álgebras de Boole ([30]) y en 1970 H. Priestley desarrolló una teoría de representación para reticulados distributivos acotados en términos de espacios topológicos ordenados. Posteriormente, se obtuvieron dualidades topológicas tipo Priestley para las álgebras de Heyting ([17]), de De Morgan ([10]) y las álgebras paseudocomplementadas ([24]). En esta tesis combinamos estas dualidades para obtener dualidades topológicas tipo Priestley para las álgebras de De Morgan Heyting y las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas o *pm*-álgebras con el objetivo de obtener resultados acerca de estas variedades y algunas de sus subvariedades. En esta tesis se pudieron utilizar técnicas topológicas para clasificar subvariedades y encontrar bases ecuacionales.

En el Capítulo 1 describimos brevemente las nociones fundamentales del álgebra universal que serán necesarias para el desarrollo de este trabajo junto con las representaciones topológicas mencionadas anteriormente.

H.P.Sankappanavar, en [26] realizó un estudio de las *dh*-álgebras, caracterizando algebraicamente las álgebras simples, directamente indescomponibles y subdirectamente irreducibles en esta variedad. En ese mismo trabajo, Sankappanavar introdujo una sucesión $\mathcal{SDH}_n$ de subvariedades de la variedad de las *dh*-álgebras ($\mathcal{DH}$), empezando con $\mathcal{SDH}_0$, la cual es la variedad de las álgebras de Boole y definiendo las restantes como álgebras pertenecientes a la variedad $\mathcal{DH}$ que satisfacen la identidad $x^{n('*)} \approx x^{(n+1)('*)}$. Asimismo, propuso como problema interesante, investigar la estructura del reticulado de subvariedades de $\mathcal{SDH}_1$. Es con este objetivo en mente que comenzamos el estudio de dicha variedad. En el Capítulo 2, combinamos las dualidades topológicas para las variedades de De Morgan y Heyting obteniendo una dualidad topológica tipo Preistley para las álgebras de la variedad $\mathcal{DH}$. Esta representación topológica nos permitió obtener condiciones necesarias y suficientes sobre el espacio topológico asociado a una *dh*-álgebra (finita o no) para que ésta pertenezca a la variedad $\mathcal{SDH}_1$. Caracterizamos a las álgebras subdirectamente irreducibles y simples en $\mathcal{SDH}_1$ como aquellas *dh*-álgebras que poseen un único elemento maximal en su espacio topológico asociado. Utilizando un argumento de filtración estándar y la caracterización obtenida para las *dh*-álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{SDH}_1$, demostramos que la variedad $\mathcal{SDH}_1$ está generada por sus miembros finitos. Finalmente, en la última sección de este capítulo, extendemos estos resultados para el caso general de las álgebras $\mathcal{SDH}_n$ mostrando que (en el caso finito), para que una *dh*-álgebra pertenezca a la variedad $\mathcal{SDH}_n$, sólo se deben cumplir ciertas condiciones que dependen únicamente de los elementos maximales y minimales de su espacio dual asociado. Asimismo, damos una caracterización en base a los espacios duales de las álgebras subdirectamente irreducibles finitas en estas variedades.

En [9], Cignoli, Lafalce y Petrovich establecen una dualidad entre los subreticulados de un reticulado distributivo acotado y ciertas relaciones de preorden sobre su espacio de Priestley asociado. M. Adams prueba en [2] que toda subálgebra de Heyting está a asociada a un conjunto separador definido sobre su espacio dual. En el Capítulo 3 establecemos un resultado similar para las álgebras de De Morgan Heyting, hallamos una correspondencia biunívoca entre ciertas relaciones de equivalencia sobre el dual de un álgebra en la variedad $\mathcal{DH}$ y definimos un orden sobre estas clases, de forma tal que el conjunto da las clases de equivalencias con este orden sea isomorfo al dual de la subálgebra respectiva. Para esto, en primer lugar, en la Sección 1, probamos que cada subálgebra de Heyting tiene asociada, no sólo una relación de preorden como se establece en [9], sino una relación de equivalencia sobre su espacio dual y establecemos las condiciones que tiene que tener ésta para que determine una subálgebra de Heyting. Posteriormente, basándonos en esta caracterización, encontramos una caracterización para las subálgebras de un álgebra de De Morgan Heyting que nos permitirá (en el caso finito) recuperar y calcular de manera rápida a los elementos primos de la subálgebra utilizando una única clase de equivalencia de su relación de De Morgan Heyting asociada, lo cual en general no es posible realizar para el caso de las álgebras de Heyting.

La segunda parte de esta tesis está centrada en el estudio de las álgebras de Kleene pseudocomplementadas o *pk*-álgebras. Estas álgebras son una subvariedad importante de las álgebras pseudocomplementadas de De Morgan o *pm*-álgebras, más precisamente son aquellas *pm*-álgebras que satisfacen la condición $x \wedge x' \leq y \vee y'$.

A la variedad de las *pm*-álgebras la notaremos por $\mathcal{PCDM}$ y a la de las *pk*-álgebras por $\mathcal{PK}$. En [25] Romanowska inició la investigación de la variedad $\mathcal{PCDM}$ caracterizando las álgebras subdirectamente irreducibles finitas. H.P. Sankappanavar continuó estudiando dichas álgebras caracterizando, en [27], las álgebras subdirectamente irreducibles no regulares en dicha variedad y analizando, en [28] junto con J. Vaz de Carvalho, algunas propiedades sobre sus congruencias. En el Capítulo 4, en primer lugar, describimos una dualidad topológica para dichas álgebras combinando las dualidades descriptas en el Capítulo 1. Introducimos la noción de *body* de una *pm*-álgebra como el conjunto de los elementos de su espacio dual asociado que no son maximales ni minimales y determinamos que para que un álgebra sea subdirectamente irreducible en las variedades $\mathcal{PCDM}$ y $\mathcal{PK}$ su *body* tiene que tener a lo sumo dos elementos. Como consecuencia de esto, restringiendo la cantidad de elementos que tiene en su *body* las álgebras subdirectamente irreducibles (0, a lo sumo 1 ó a lo sumo 2) surgen de manera natural tres subvariedades importantes de la variedad $\mathcal{PK}$. Describimos ecuacionalmente cada una estas subvariedades.

En la Sección 4.4 introducimos la subvariedad $\mathcal{BPK}$ de las álgebras pseudocomplementadas de Kleene, como aquella variedad generada por las álgebras pseudocomplementadas de Kleene cuyo espacio dual verifica que todo elemento no maximal está contenido en todo elemento maximal y probamos que esta subvariedad está determinada por la por la ecuación

$$x^* \leq C(y) \wedge T(x)^*$$

donde $C(x) = (x \wedge x') \vee (x \wedge x')^*$ y $T(x) = C(x) \wedge C(x)'$. La misma es de particular interés ya que sus álgebras subdirectamente irreducibles son suma ordinal de álgebras de Boole y cadenas, más precisamente, de la forma $\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}_i \oplus \mathbf{B}$ donde $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole y $\mathbf{C}_i$ es una cadena de a lo sumo tres elementos. Determinamos el reticulado de subvariedades de dicha variedad y encontramos bases ecuacionales para cada una de ellas.

El último capítulo de esta tesis está abocado a estudiar la subvariedad $\mathcal{BPK}_0$ de la variedad $\mathcal{BPK}$ definida en el Capítulo 4, aquella generada por sus miembros simples. Esta variedad es una variedad con término discriminador tal que sus álgebras admiten una implicación de Heyting. Esto posibilitó, en primer lugar describir la estructura de las álgebras libres en esta variedad con un conjunto finito de generadores libres determinando completamente cada uno de los factores que aparecen en su descomposición. Para ello, utilizamos el hecho de que que toda álgebra subdirectamente irreducible en $\mathcal{BPK}_0$ es suma ordinal de álgebras de Boole junto con la estructura conocida del álgebra de Boole libre con n generadores libres. Haber determinado las álgebras libres en la variedad $\mathcal{BPK}_0$, nos posibilitó también caracterizar las álgebras finitas débilmente proyectivas en esta variedad. Finalmente, en la Sección 5.3, determinamos las álgebras críticas en la variedad $\mathcal{BPK}_0$ para poder realizar una descripción del reticulado de sus subcuasivariedades hallando los elementos ínfimo irreducibles y supremo irreducibles del mismo. Por último determinamos cuasi-identidades que caracterizan a cada una de las cuasivariedades de dicho reticulado.

La última sección del capítulo está destinada a comentar algunos resultados concernientes a las variedades $\mathcal{BPK}_0$ y $\mathcal{BPK}_1$ y a realizar algunas consideraciones finales.

El contenido del Capítulo 2 forma parte del trabajo *"De Morgan Heyting algebras satisfying the identity $x^{n('*)} \approx x^{(n+1)('*)}$ "* publicado en la revista Mahematical Logic Quarterly ([7]). El contenido del Capítulo 3 forma parte del trabajo *"Subalgebras of Heyting and the De Morgan Heyting algebras "* publicado en la revista Studia Logica ([8]). Finalmente, los contenidos de los Capítulos 4 y 5 forman parte de trabajos en preparación.

Capítulo 1

Preliminares

Existe una amplia bibliografía sobre los temas centrales básicos del Álgebra Universal. En esta sección sólo consideraremos las nociones necesarias para el desarrollo de esta tesis, las cuales fueron extraídas principalmente de [6], [3] y [15].

Completaremos el capítulo con un resumen sobre dualidad de Priestley para reticulados distributivos y, en particular, para álgebras de Heyting, pseudocmplementadas y de De Morgan. Estos resultados serán de suma importancia para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Nociones Preliminares de Álgebra Universal

A continuación daremos definiciones básicas y fijaremos la notación que se utilizará en este trabajo.

Un **tipo de similaridad** τ es una m-upla $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ de enteros no negativos. El **orden** de τ está definido por m, y lo notamos por $O(\tau) = m$.

Un **álgebra de tipo** $\tau = (n_1, \ldots n_{O(\tau)})$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una $O(\tau)$-upla $(f_1, \ldots, f_{O(\tau)})$ tal que para cada $1 \leq i \leq O(\tau)$, f_i es una operación n_i-aria sobre A. Notaremos a las álgebras por $\langle A, F\rangle$ o simplemente por $\mathbf{A}$.

Veamos algunos ejemplos que ilustran estas definiciones, muchos de los cuales se analizarán detenidamente a lo largo de este trabajo.

Ejemplo 1.1.1. Reticulado distributivo. Un reticulado distributivo es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ de tipo $(2, 2)$ tal que satisface las siguientes identidades para todos los elementos de L:

$(L1)$ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$ $\qquad$ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$

$(L2)$ $x \wedge y = y \wedge x,$ $\qquad$ $x \vee y = y \vee x,$

$(L3)$ $x = x \wedge x,$ $\qquad$ $x = x \vee x,$

$(L4)$ $x = x \wedge (x \vee y)$, $\qquad x = x \vee (x \wedge y)$,

$(L5)$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $\qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Ejemplo 1.1.2. Reticulado distributivo acotado. Un reticulado distributivo acotado es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un reticulado distributivo que satisface $x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$, para todo $x \in L$.

Ejemplo 1.1.3. Álgebra de Boole. Un álgebra de Boole es un álgebra $\langle B, \wedge, \vee, *, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $\langle B, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado y $*$ satisface las siguientes identidades, $a \vee a^* = 1$; $a^{**} = a$ y $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$, para todo a, $b \in B$. Como es bien conocido, estas álgebras son la semántica algebraica de la lógica proposicional clásica. Notaremos la clase de estas álgebras por $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.1.4. Álgebra de Heyting. Un álgebra de Heyting es un álgebra $\langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ para la cual $\langle H, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado e $\rightarrow$ (implica) es la operación binaria de pseudocomplementación relativa, es decir, para $a, b, c \in H$,

$$a \wedge c \leq b \quad \Leftrightarrow \quad c \leq a \rightarrow b.$$

Estas álgebras son la semántica algebraica de la lógica intuicionista, las llamaremos h-**álgebras** y a su clase la notaremos con $\mathcal{H}$.

Ejemplo 1.1.5. Álgebras pseudocomplementadas. Un álgebra pseudocomplementada es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, *, 0, 1\rangle$ tal que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado y $*$ es una operación de pseudocomplementación sobre L, es decir, es una operación unaria que verifica, para cada $a \in L$,

$$a \wedge b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \leq a^*.$$

Estas álgebras serán llamadas p-**álgebras**.

Ejemplo 1.1.6. Álgebras de De Morgan. Un álgebra de De Morgan es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ tal que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticualdo distributivo acotado y $'$ es una operación unaria sobre L comúnmente llamada **negación de De Morgan** que satisface para cada $a, b \in L$:

(1) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,

(2) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ y

(3) $a'' = a$.

A estas álgebras las llamaremos $dm-$**álgebras** y a su clase la denotaremos con $\mathcal{DM}$.

Ejemplo 1.1.7. Álgebras de Kleene. Un álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ que verifica

$$x \wedge x' \leq y \vee y',$$

para todo $x, y \in L$.

Dada un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$, un subconjunto no vacío $B \subseteq A$ es un **subuniverso** de $\mathbf{A}$ si es cerrado bajo las operaciones f de F, es decir, si para cada $b_1, \ldots, b_n \in B$ se tiene que

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B.$$

$\mathbf{B} = \langle B, F^{\mathbf{B}}\rangle$ es llamada **subálgebra** de $\mathbf{A}$.

Si $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle B, F\rangle$ son dos álgebras del mismo tipo de similaridad, una función $h : A \to B$ es un **homomorfismo** si para cada operación n-aria $f \in F$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ se tiene que

$$h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Diremos que $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un **isomorfismo** si h es inyectiva y sobreyectiva.

Si consideramos un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $h(A)$, con las operaciones de $\mathbf{B}$ restringidas a este conjunto, es una subálgebra de $\mathbf{B}$. Diremos que esta subálgebra de $\mathbf{B}$ es una **imagen homomorfa** de $\mathbf{A}$.

Llamaremos **imágenes homomorfas triviales** de un álgebra $\mathbf{A}$, a aquellas álgebras que son isomorfas a $\mathbf{A}$ o bien que constan de un solo elemento.

Sea $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia indexada de álgebras del mismo tipo. Diremos que

- $\mathbf{A}$ es **producto directo** de la familia $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ y escribimos $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ si $\mathbf{A}$ es un álgebra con universo $\prod_{i\in I} A_i$ y tal que para cada operación n-aria $f \in F$, $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$ y para cada $j \in I$ se tiene que

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(j) = f^{\mathbf{A}_j}(a_1(j), \ldots, a_n(j)).$$

- $\mathbf{A}$ es **producto subdirecto** de la familia $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ si

  1. existe un homomorfismo inyectivo $h : \mathbf{A} \to \prod\limits_{i\in I} \mathbf{A}_i$ y
  2. $\pi_j \circ h$ es sobreyectivo, para cada $j \in I$, siendo $\pi_j : \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_j$ la proyección sobre la j-ésima coordenada.

Notemos que si $I = \emptyset$ entonces $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de $\emptyset$ si y sólo si $\mathbf{A} = \prod \emptyset$ es el álgebra trivial.

Los conceptos de homomorfismo junto con los de congruencia y álgebra cociente que definiremos a continuación están estrechamente relacionados y permiten obtener información sobre una clase de álgebras dada.

Una relación de **congruencia** $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$ es una relación de equivalencia θ sobre A que satisface la siguiente **propiedad de compatibilidad** para cada operación n-aria $f \in F$, es decir,

$$\text{si } (a_j, b_j) \in \theta \text{ para } j = 1, \ldots, n, \text{ entonces } (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta.$$

Si $a \in A$, escribiremos a/θ para indicar la clase de equivalencia del elemento a respecto a la congruencia θ. Existen dos **congruencias triviales**, $A \times A$ y la **congruencia identidad**, a las cuales notaremos por ∇ y Δ respectivamente.

Una congruencia especial que utilizaremos más adelante para la obtención de ciertas álgebras libres es la que se obtiene considerando el núcleo de un homomorfismo. Recordemos que si $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, el **núcleo** de h, que notamos con $\text{Núc}(h)$, se define como

$$\text{Núc}(h) = \{(a, b) \in A^2 : h(a) = h(b)\}.$$

Cada congruencia θ sobre un álgebra $\mathbf{A}$, tiene asociada el **álgebra cociente** de $\mathbf{A}$ por θ, simbolizada por $\mathbf{A}/\theta$, que es el álgebra cuyo universo es $A/\theta = \{x/\theta : x \in A\}$. El álgebra cociente es del mismo tipo de similaridad que el álgebra $\mathbf{A}$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y θ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. La **aplicación canónica o natural** $q_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ definida por $q_\theta(a) = a/\theta$ es un homomorfismo sobreyectivo.

El siguiente teorema es uno de los teoremas importantes que relacionan imágenes homomorfas con álgebras cocientes.

Teorema 1.1.8. *Sea $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo, entonces existe un isomorfismo h' de $\mathbf{A}/\text{Núc}(h)$ en $\mathbf{B}$ definido por $h = h' \circ q$, donde q es el homomorfismo natural de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}/\text{Núc}(h)$.*

Notaremos por $\text{Con}(\mathbf{A})$ al conjunto de congruencias sobre un álgebra $\mathbf{A}$. Se puede ver que dicho conjunto tiene la estructura de reticulado con las operaciones

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup ...,$$

teniendo como primer elemento a la congruencia identidad $\Delta = \{(x, x), x \in A\}$ y como último elemento a $\nabla = A^2$.

Diremos que $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de **distributividad de congruencias** si $\text{Con}(\mathbf{A})$ es un reticulado distributivo y que $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de **permutabilidad de congruencias** si todo par de congruencias sobre $\mathbf{A}$ **permuta**, es decir,

$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Notemos que si **A** es un reticulado entonces **A** siempre tiene la propiedad de distributividad de congruencias, pero no siempre la de permutabilidad.

Para investigar una clase de álgebras es útil determinar sus álgebras subdirectamente irreducibles, directamente indescomponibles y simples. A lo largo de este trabajo determinaremos cuáles son estas álgebras para ciertas variedades. Recordemos estos conceptos.

Un álgebra **A** se dice **directamente indescomponible** o simplemente **indescomponible** si **A** no es isomorfa al producto directo de dos álgebras no triviales. Estas álgebras caracterizan a las álgebras finitas de una variedad, ya que toda álgebra finita es producto directo de álgebras directamente indescomponibles, pero no se puede afirmar lo mismo para álgebras infintas. Sin embargo, G. Birkhoff prueba que toda álgebra, finita o infinita, es isomorfa al producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles las cuales están definidas de la siguiente manera.

Un álgebra **A** es **subdirectamente irreducible** si verifica:

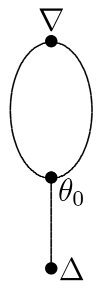
1. $|A| > 1$, ($|A|$ indica la cardinalidad del conjunto A)
2. si **A** es un producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ con un homomorfismo inyectivo h, entonces $\pi_i \circ h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo para algún $i \in I$.

Dada una clase $\mathcal{K}$ de álgebras notaremos por $\mathbf{Si}(\mathcal{K})$ a la clase de todas las álgebras subdirectamente irreducibles de la variedad $\mathcal{K}$ y por $\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{K})$ a la clase de las álgebras subdirectamente irreducibles finitas.

El siguiente teorema que caracteriza a un álgebra subidrectamente irreducible a través de su reticulado de congruencias es de gran utilidad.

Teorema 1.1.9. *Un álgebra* **A** *es subdirectamente irreducible si y sólo si tiene una mínima relación de congruencia no trivial.*

Observemos que este teorema nos asegura que un álgebra es subdirectamente irreducible si y sólo si el reticulado de sus congruencias tiene la siguiente forma



Un álgebra **A** es **simple** si A tiene más de un elemento y se verifica que $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \{\Delta, \nabla\}$. Notemos que por el Teorema 1.1.9 toda álgebra simple es subdirectamente irreducible y vale que **A** es simple si y sólo si las únicas imágenes homomorfas de **A** son las triviales.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y $G \subseteq A$, notaremos con $Sg(G)$ a la menor subálgebra de $\mathbf{A}$ que contiene al conjunto G, llamaremos a $Sg(G)$ **subálgebra generada por** G.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo de similaridad. Un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ se dice **libre** sobre $\mathcal{K}$ si existe un conjunto $G \subseteq A$ tal que

1. $Sg(G) = \mathbf{A}$

2. Si $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $f : G \to B$ es una función, entonces existe un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que $h\restriction_G = f$.

El conjunto G se dice que genera libremente a $\mathbf{A}$ y es llamado un **conjunto de generadores libres** . Además, si $f : G \to B$ es una función, donde $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ entonces, el homomorfismo h de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ que extiende a la aplicación f es único.

Se puede probar que un álgebra $\mathbf{A}$ que es libre para una clase de álgebras $\mathcal{K}$ está determinada, salvo isomorfismo, por la cardinalidad de cualquier conjunto de generadores libres.

Los siguientes son operadores que aplican clases de álgebras en clases de álgebras. Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo de similaridad:

$\mathbf{A} \in I(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es isomorfa a algún miembro de $\mathcal{K}$.

$\mathbf{A} \in S(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es una subálgebra de algún miembro de $\mathcal{K}$.

$\mathbf{A} \in H(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es una imagen homomorfa de algún miembro de $\mathcal{K}$.

$\mathbf{A} \in P(\mathcal{K})$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es un producto directo de una familia no vacía de álgebras en $\mathcal{K}$.

Si O_1 y O_2 son dos operadores sobre clases de álgebras, escribimos O_1O_2 para notar la composición de los dos operadores, y $\leq$ para notar el orden parcial usual, es decir, $O_1 \leq O_2$ si $O_1(\mathcal{K}) \subseteq O_2(\mathcal{K})$, para todo $\mathcal{K}$.

Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras es **cerrada** bajo un operador O si $O(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

En esta tesis estamos interesados principalmente en el estudio de ciertas clases de álgebras llamadas **variedades** , es decir, aquellas clases no vacías $\mathcal{V}$ de álgebras que son cerradas bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras del mismo tipo, con $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ denotamos la menor variedad que contiene a $\mathcal{K}$. Decimos que $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ es **la variedad generada por** $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{K}$ tiene un único miembro $\mathbf{A}$ escribimos simplemente $\mathcal{V}(\mathbf{A})$. Una variedad $\mathcal{V}$ está **finitamente generada** si $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{K})$ para algún conjunto finito $\mathcal{K}$ de álgebras finitas. Las clases de álgebras de Boole, de De Morgan y de Kleene son ejemplos de variedades finitamente generadas.

Teorema 1.1.10. (*Tarski*) *Si $\mathcal{V}$ es una variedad, entonces $\mathcal{V} = HSP(\mathcal{V})$.*

Dado un conjunto X (variables) y un lenguaje $\mathcal{F}$, los **términos** de tipo $\mathcal{F}$ sobre X, o $\mathcal{F}$-*términos*, se definen inductivamente:

1. Toda variable $x \in X$ es un término.
2. Toda función 0-aria es un término.
3. Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos y f es una función n-aria perteneciente a $\mathcal{F}$, entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término.

Diremos que una **identidad** del tipo $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se satisface en un álgebra $\mathbf{A}$ si para cualquier elección de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ se tiene $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, escribimos

$$\mathbf{A} \models p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx q(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si Σ es un conjunto de identidades, notamos con $M(\Sigma)$ a la clase formada por las álgebras $\mathbf{A}$ que satisfacen Σ.

Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras se denomina **clase ecuacional** si existe un conjunto de identidades Σ tal que $\mathcal{K} = M(\Sigma)$.

Observemos que si $\mathcal{K}$ es una clase ecuacional, es decir, $\mathcal{K} = M(\Sigma)$, como las identidades se preservan bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos, la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{K}) \models \Sigma$.

Uno de los resultados más importantes de G. Birkhoff que establece la relación entre clases ecuacionales y variedades es el siguiente:

Teorema 1.1.11. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo de similaridad, $\mathcal{K}$ es una clase ecuacional si y sólo si $\mathcal{K}$ es una variedad.*

Un álgebra $\mathbf{A}$ es **localmente finita** si cada subálgebra generada finitamente es finita. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras es **localmente finita** si todo miembro de $\mathcal{K}$ es localmente finito.

La variedad de las álgebra de Boole y de las álgebras de De Morgan son ejemplos de variedades localmente finitas.

Una subclase $\mathcal{W}$ de una variedad $\mathcal{V}$ es una **subvariedad** de $\mathcal{V}$ si es una variedad. La clase de todas las subvariedades de $\mathcal{V}$ forman un *reticulado* con las operaciones $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ y $\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$ que será denotado por $\Lambda(\mathcal{V})$. Los siguientes teoremas son útiles para poder encontrarlo si $\mathcal{V}$ tiene determiandas características. Para más detalles ver [16] y [12].

Teorema 1.1.12 (Jónsson)**.** *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{K})$ una variedad con distributividad de congruencias que está generada por un conjunto finito $\mathcal{K}$ de álgebras finitas y consideremos el orden $\prec$ en $\mathbf{Si}(\mathcal{V})$ dado por*

$$\mathbf{A} \prec \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in HS(\mathbf{B}).$$

Entonces, el reticulado $\Lambda(\mathcal{V})$ de subvariedades de $\mathcal{V}$ es un reticulado distributivo finito el cual es isomorfo a $\mathcal{O}(\mathbf{Si}(\mathcal{V}))$, el reticulado de conjuntos decrecientes (ideales de orden) del conjunto ordenado $\mathbf{Si}(\mathcal{V})$. Más aún, una subvariedad $\mathcal{V}_1 \in \Lambda(\mathcal{V})$ es supremo irreducible si y sólo si $\mathcal{V}_1 = V(\mathbf{A})$, para algún álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{A}$.

Teorema 1.1.13 (Davey)**.** *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con distributividad de congruencias y localmente finita. Entonces $\Lambda(\mathcal{V})$ es un reticulado distributivo completo y es isomorfo a $\mathcal{O}(\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{V}))$.*

Un término $t(x, y, z)$ cuya interpretación en un álgebra $\mathbf{A}$ es la función $t : A^3 \to A$ tal que

$$t(a,b,c) = \begin{cases} a & \text{si } a \neq b; \\ c & \text{si } a = b. \end{cases}$$

es llamado un **término discriminador** sobre el álgebra $\mathbf{A}$.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras con un término discriminador común $t(x, y, z)$, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ se llama **variedad con término discriminador** o simplemente, **variedad con discrimandor**.

Algunas de las variedades estudiadas en esta tesis son variedades con discriminador. A continuación enunciamos ciertas propiedades importantes y muy útiles que cumplen este tipo de variedades. Para ello recordemos en primer lugar la siguientes definiciones.

Sea $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$ una familia de álgebras del mismo tipo y U un ultrafiltro sobre I, definimos el **ultraproducto** $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/U$ como $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\theta_U$, donde θ_U es una congruencia sobre $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ dada por $(a, b) \in \theta_U$ si y sólo si $[[a = b]] \in U$, (acá $[[a = b]] = \{i \in I : a(i) = b(i)\}$).

Teorema 1.1.14. *Si $t(x, y, z)$ es un término discriminador para todas las álgebras de $\mathcal{K}$, entonces*

1. *$\mathcal{V}(\mathcal{K})$ es una* **variedad aritmética***, es decir, es el reticulado de congruencias de un álgebra en $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ es distributivo y sus congruencias permutan.*

2. *Los miembros indescomponibles de $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ son álgebras simples.*

3. *Las álgebras simples, son precisamente los miembros de $ISP_U(\mathcal{K}_+)$, donde $\mathcal{K}_+$ el el conjunto de álgebras de $\mathcal{K}$ más el álgebra trivial y $P_U(\mathcal{K}_+)$ es la clase de ultraproductos de miembros de $\mathcal{K}_+$.*

4. *Todo miembro de $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ es isomorfo a un producto Booleano de álgebras simples.*

Una **cuasi-identidad** es una identidad o una fórmula de la forma $(p_1 \approx q_1 \& \ldots \& p_n \approx q_n) \to p \approx q$, donde p_i y q_i son términos. Una **cuasivariedad** es una clase de álgebras cerradas bajo I, S, P y P_U que contiene al menos un álgebra trivial.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.1.15. *Dada una clase de álgebras $\mathcal{K}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$\mathcal{K}$ es una cuasivariedad,*
- *$\mathcal{K}$ está axiomatizada por cuasi-identidades y*
- *$\mathcal{K}$ es cerrada bajo $ISPP_U$ y contiene al menos un álgebra trivial.*

En el Capítulo 5 estudiaremos el reticulado de cuasivariedades de cierta variedad y determinaremos las cuasi-identidades que caracterizan a cada una de ellas.

1.2. Dualidades tipo Priestley

En esta sección haremos una breve descripción de la dualidad de Priestley para reticulados distributivos acotados. Posteriormente contaremos cómo puede extenderse esta dualidad para la clase de álgebras de Boole, de Heyting, de De Morgan y p-álgebras. Estos conceptos serán fundamentales para el desarrollo de esta tesis. Un análisis detallado de estos resultados puede encontrarse en [6], [21], [22], [17], [10] y [24].

La correspondencia que existe entre los reticulados distributivos acotados y ciertos espacios topológicos ordenados será denominada **dualidad de Priestley** y la correspondencia entre álgebras de Boole y ciertos espacios topológicos, **dualidad de Stone**. Para obtener estas correspondencias serán fundamentales las nociones de *filtro* y *filtro primo*. Recordemos que un subconjunto no vacío F de un reticulado distributivo $\mathbf{L}$ es un **filtro** si satisface:

1. Si $x \in F$, $y \in L$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$, (es decir, F es creciente).
2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$.

Un filtro F de $\mathbf{L}$ se dice **propio** si $F \neq L$ y un filtro propio será llamado **filtro primo** si además verifica la condición: $x \vee y \in F$ implica que $x \in F$ ó $y \in F$, para todo para de elementos $x, y \in L$.

Si X es un subconjunto de L, llamaremos **filtro generado** por X al menor filtro que contiene a X.

La noción dual de filtro en un reticulado dstributivo es la de *ideal*. Diremos que un subconjunto I no vacío de un reticulado distributivo $\mathbf{L}$ es un **ideal** si satisface:

1. Si $y \in I$, $x \in L$ y $x \leq y$ entonces $x \in I$, (es decir, I es decreciente).

2. Si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$.

Si X es un subconjunto de L, llamaremos **ideal generado** por X al menor ideal que contiene a X.

El siguiente resultado importante es conocido como *Teorema de de Birkhoff-Stone* o *Teorema del filtro primo.*

Teorema 1.2.1. *Si* $\mathbf{L}$ *es un reticulado distributivo,* F *es un filtro de* $\mathbf{L}$ *e* I *es un ideal de* $\mathbf{L}$ *tal que* $I \cap F = \emptyset$*, entonces existe un filtro primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap I = \emptyset$*.*

Un **espacio topológico ordenado** es una terna $\langle X, \tau, \leq \rangle$ donde X es un conjunto, τ es una topología definida sobre X y $\leq$ es una relación de orden parcial definida sobre X.

En lo que sigue llamaremos **clopen** a aquellos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados al mismo tiempo.

Diremos que un espacio topológico ordenado $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es **totalmente disconexo en el orden** si satisface el **axioma de separación de Priestley**, es decir, para cada $x, y \in X$, si $x \not\leq y$ entonces existe un clopen $V \subseteq X$ tal que $x \in V$ e $y \notin V$.

Llamaremos **espacio de Priestley** a todo espacio topológico ordenado, totalmente disconexo en el orden y compacto.

Observemos que si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio de Priestley entonces también es un **espacio de Hausdorff**, es decir, para cada $x, y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos V_1, V_2 tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $x \in V_1$ e $y \in V_2$. Por otra parte, si X es un conjunto finito entonces la topología τ no es otra que la **topología discreta** (todo subconjunto del espacio es un conjunto abierto).

Para un conjunto parcialmente ordenado (**poset**) X y $V \subseteq X$, consideraremos los siguientes conjuntos asociados a V

- $V^d = \{x \in X : x \leq y \text{ para algún } y \in V\}$
- $V^i = \{x \in X : x \geq y \text{ para algún } y \in V\}$.

Si $V = \{x\}$ escribimos simplemente x^d y x^i en lugar de $(\{x\})^d$ y $(\{x\})^i$. Diremos que un conjunto V es **creciente** si $V = V^i$ y **decreciente** si $V = V^d$.

Llamaremos $\mathcal{P}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley y cuyos morfismos son las funciones continuas que preservan el orden y $\mathcal{DL}$ a la categoría cuyos objetos son las reticulados distributivos acotados y cuyos morfismos son los homomorfismos entre reticulados distributivos acotados.

Se tiene lo siguiente:

- Si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio de Priestley entonces

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$$

es un reticulado distributivo acotado, donde $\mathbb{D}(\mathbf{X})$ denota el conjunto de subconjuntos clopen crecientes de $\mathbf{X}$.

Además, si $f : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ es una función continua que preserva el orden, entonces la aplicación $\mathbb{D}(f) : \mathbb{D}(\mathbf{X}_2) \to \mathbb{D}(\mathbf{X}_1)$ definida por

$$\mathbb{D}(f)(V) = f^{-1}(V)$$

es un homomorfismo de reticulados acotados.

- Si $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es un reticulado distributivo acotado entonces

$$\langle \mathbb{X}(\mathbf{L}), \tau, \subseteq \rangle$$

es un espacio de Priestley donde $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es el conjunto de filtros primos de $\mathbf{L}$ y τ es la topología que tiene como subbase a los conjuntos $\sigma_L(a) = \{P \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) : a \in P\}$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus \sigma_L(a)$, para $a \in L$.

Si $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ es un homomorfismo entre reticulados distributivos acotados entonces $\mathbb{X}(h) : \mathbb{X}(\mathbf{L}_2) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ definida por

$$\mathbb{X}(h)(P) = h^{-1}(P)$$

es una aplicación continua que preserva el orden.

- La aplicación $\sigma_L : \mathbf{L} \to \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es un isomorfismo de reticulados y $\epsilon_X : \mathbf{X} \to \mathbb{X}(\mathbb{D}(\mathbf{X}))$ definida por $\epsilon_X(x) = \{V \in \mathbb{D}(\mathbf{X}) : x \in V\}$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.

De esto se desprende que $\mathbb{X}$ es un funtor entre las categorías $\mathcal{DL}$ y $\mathcal{P}$ y que $\mathbb{D}$ es un funtor entre las categorías $\mathcal{P}$ y $\mathcal{DL}$. Por otra parte se puede ver que las composiciones $\mathbb{X} \circ \mathbb{D}$ y $\mathbb{D} \circ \mathbb{X}$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre las categorías $\mathcal{P}$ y $\mathcal{DL}$ respectivamente, lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2. *La categoría de los reticulados distributivos acotados y los homomorfismos de reticulados acotados es dualmente equivalente a la categoría de los espacios de Priestley y las funciones continuas que preservan el orden.*

La correspondencia entre congruencias de un reticulado distributivo acotado y ciertos subconjuntos de su espacio dual asociado se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.3. *Sea* $\mathbf{L}$ *un reticulado acotado. Existe un anti-isomorfismo* Θ *entre el reticulado de conjuntos cerrados de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *y el reticulado de congruencias de* $\mathbf{L}$ *dado por* $Y \mapsto \Theta(Y)$ *donde*

$$(a,b) \in \Theta(Y) \iff ((\forall P \in Y)(a \in P \Leftrightarrow b \in P)).$$

La dualidad de Priestley para reticulados distributivos acotados descripta anteriormente se puede extender a las categorías de álgebras de Boole, álgebras de Heyting, álgebras de De Morgan y p-álgebras. A continuación describiremos brevemente los objetos y morfismos que permiten establecer estas dualidades detallando algunos aspectos de dichas dualidades que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis.

1. **Dualidad para álgebras de Boole**

   $\langle X, \tau, \leq \rangle$ será llamado un **espacio booleano** si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio de Priestley donde $\leq$ es el orden trivial.

   La categoría cuyos objetos son las álgebras de Boole y los morfismos son los homomorfismos booleanos es dualmente equivalente a la categoría cuyos objetos son los espacios booleanos y los morfismos las funciones continuas.

   Bajo esta dualidad:

   - Si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio booleano, entonces $\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, *.\emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole donde la operación unaria está dada por

     $$V^* = V^c = X \setminus V$$

     para cada $V \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$.

2. **Dualidad para álgebras de Heyting**

   Llamaremos **espacio de Heyting** o h-**espacio** a un espacio de Priestley $\langle X, \tau, \leq \rangle$ tal que V^d es clopen, para cada clopen $V \subseteq X$.

   Si $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son espacios de Heyting, llamaremos h-**morfismo** a las funciones f continuas que preservan el orden y que verifican que si $f(x) \leq z$ entonces existe x_1 tal que $x \leq x_1$ y $f(x_1) = z$, para todo $x \in X_1, z \in X_2$.

   Se tiene que la categoría de las álgebras de Heyting y homomorfismos de Heyting es dualmente equivalente a la categoría de los espacios de Heyting y h-morfismos.

   Bajo esta dualidad:

- Si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio de Heyting entonces $\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, \rightarrow, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Heyting, donde $\rightarrow$ está dada por

$$V_1 \rightarrow V_2 = (V_1 \cap V_2^c)^{dc},$$

  para todo $V_1, V_2 \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$.

- Las congruencias de un álgebra de Heyting se corresponden con los conjuntos cerrados y crecientes de su correspondiente espacio dual.

3. **Dualidad para las álgebras de De Morgan**

$\langle X, \tau, \leq, \phi \rangle$ será llamado un **espacio de De Morgan** o dm-**espacio** si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio de Priestley y $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ es un **homeomorfismo involutivo** ($\phi = \phi^{-1}$) que invierte el orden.

Llamaremos dm-**morfismo** a las aplicaciones $f : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$ que son funciones continuas que preservan el orden y verifican $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$.

La categoría de las álgebras de De Morgan y homomorfismos de De Morgan es dualmente equivalente a la categoría de los espacios de De Morgan y los dm-morfismos.

Observemos que bajo esta dualidad:

- Si $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ es un espacio de De Morgan, $\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, ', \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de De Morgan, donde para $V \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$,

$$V' = (\phi(V))^c.$$

- Recíprocamente, si $\langle M, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ es un álgebra de De Morgan y $\phi : \mathbb{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{X}(\mathbf{M})$ es tal que

$$\phi(P) = P'^c,$$

  donde $P' = \{a' \in M : a \in P\}$, entonces $\langle \mathbb{X}(\mathbf{M}), \phi \rangle$ es un espacio de De Morgan. ϕ es llamada la **transformación de Birula-Rasiowa** .

- Las congruencias de un álgebra de De Morgan se corresponden con los subconjuntos cerrados e involutivos de su correspondiente espacio dual, (notemos que V es **involutivo** si $\phi(V) = V$).

4. **Dualidad para las p-álgebras**

$\langle X, \tau, \leq \rangle$ será llamado un p-**espacio** si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un espacio de Priestley tal que V^d es abierto para cada $V \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$.

Es bien conocido que para cada elemento x de un espacio de Priestley $\mathbf{X}$, existen al menos dos elementos $m, u \in X$ minimal y maximal respectivamente, tales que $m \leq x \leq u$. Al conjunto de todos los elementos maximales lo notaremos por $Max(\mathbf{X})$ y al de todos los elementos minimales por $Min(\mathbf{X})$. Estos conjuntos jugarán un papel fundamental en el estudio de las p-álgebras.

Llamaremos **p-morfismos** a las aplicaciones entre p-espacios $f : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ que son funciones continuas que preservan el orden y verifican

$$f(P^i \cap Max(\mathbf{X}_1)) = f(P)^i \cap Max(\mathbf{X}_2).$$

La categoría de las p-álgebras con sus p-homomorfismos es dualmente equivalente a la categoría de los p-espacios y los p-morfismos.

Bajo esta dualidad:

- Si $\langle X, \tau, \leq \rangle$ es un p-espacio entonces $\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, *, \emptyset, X \rangle$ es una p-álgebra, donde para $V \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$,

$$V^* = (V^d)^c.$$

- Las congruencias de una p-álgebra se corresponden con los subconjuntos cerrados Y de su correspondiente espacio dual que satisfacen

$$Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y^i \subseteq Y.$$

Parte I

Álgebras de De Morgan Heyting

Capítulo 2

Variedades $\mathcal{SDH}_n$

Las **álgebras de De Morgan Heyting** ó dh**-álgebras** son álgebras $\langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, ', 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$ que son al mismo tiempo álgebras de Heyting y álgebras de De Morgan. A esta variedad la llamaremos $\mathcal{DH}$. Como mencionamos en la introducción, fueron, en primer lugar, estudiadas por A. Monteiro con el nombre de *álgebras de Heyting simétricas* y son la semántica algebraica del cálculo proposicional modal simétrico de Moisil [18, p. 60]. Posteriormente estas álgebras fueron estudiadas por Sankappanavar en [26], quien introdujo una sucesión $\mathcal{SDH}_n$ de subvariedades de la variedad $\mathcal{DH}$, empezando con $\mathcal{SDH}_0$, la cual es la variedad de las álgebras de Boole, y definió las restantes como álgebras pertencientes a la variedad $\mathcal{DH}$ que satisfacen la identidad $x^{n('*)} \approx x^{(n+1)('*)}$. Asimismo, H.P. Sankappanavar dejó como problema investigar el reticulado de subvariedades de $\mathcal{SDH}_1$. Si bien este problema no se pudo resolver en su totalidad debido a su complejidad, logramos obtener varios resultados acerca de esta variedad y generalizarlos para el caso finito $\mathcal{SDH}_n$. En primer lugar, establecemos una dualidad tipo Priestley para las álgebras de la variedad $\mathcal{DH}$, dualidad que se encuentra de manera natural combinando las dualidades descriptas para $\mathcal{H}$ y $\mathcal{DM}$. Luego, utilizamos esta dualidad para obtener condiciones necesarias y suficientes sobre el espacio de filtros primos para que un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$ (finita o no) pertenezca a la variedad $\mathcal{SDH}_1$, y caracterizamos las álgebras subdirectamente irreducibles y simples en $\mathcal{SDH}_1$. Esta caracterización será utilizada para demostrar que dicha variedad está generada por sus miembros finitos. Finalmente, extendemos estos resultados en el caso general para las álgebras $\mathcal{SDH}_n$. Los resultados de este capítulo fueron publicados en [7].

2.1. Dualidad para la variedad $\mathcal{DH}$

Las álgebras de Heyting ($\mathcal{H}$) y de De Morgan ($\mathcal{DM}$) fueron definidas en el Capítulo 1. En esta sección daremos una dualidad topológica para las álgebras de De Morgan Heyting basándonos en las dualidades tipo Priestley descriptas en ese mismo capítulo para cada una de esas categorías. El objetivo de esta dualidad es permitirnos poder realizar un estudio de las variedades $\mathcal{SDH}_n$.

Definición 2.1.1. Un **espacio de De Morgan Heyting** es un par $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ donde $\mathbf{X}$ es un espacio de Heyting y ϕ es un homeomorfismo involutivo que invierte el orden. Llamaremos a estos espacios *dh*-**espacios**.

Los siguientes lemas y proposiciones se siguen inmediatamente de las dualidades descriptas para las categorías $\mathcal{H}$ y $\mathcal{DM}$ y muestran que la categoría cuyos objetos son los *dh*-espacios y cuyos morfismos son las funciones que son *h*-morfismos y *dm*-morfismos, es dualmente equivalente a la categoría cuyos objetos son las *dh*-álgebras y cuyos morfismos son los $\mathcal{DH}$-homomorfismos.

Lema 2.1.2.

(1) *Si* $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$ *entonces* $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L}), \tau, \leq, \phi \rangle$ *es un espacio de De Morgan Heyting, donde* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es el conjunto de filtros primos de* $\mathbf{L}$*, y* $\phi : \mathbb{X}(\mathbf{L}) \to \mathbb{X}(\mathbf{L})$ *está definida por:*
$$\phi(P) = P'^c = L \setminus \{a' : a \in P\}.$$

(2) *Si* $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ *es un homomorfismo de álgebras de De Morgan Heyting, entonces* $\mathbb{X}(h) : \mathbb{X}(\mathbf{L}_2) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ *definida por* $\mathbb{X}(h)(Q) = h^{-1}(Q)$ *para todo* $Q \in \mathbb{X}(\mathbf{L}_2)$ *es un h-morfismo y dm-morfismo.*

Tenemos entonces que $\mathbb{X}$ es un funtor entre las categorías de las álgebras de De Morgan Heyting y la de los *dh*-espacios.

Lema 2.1.3.

(1) *Sea* $\langle X, \tau, \leq, \phi \rangle$ *un dh-espacio, entonces* $\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, \to, ', \emptyset, X \rangle \in \mathcal{DH}$*, donde,* $\mathbb{D}(\mathbf{X})$ *denota el conjunto de clopens crecientes de* $\mathbf{X}$*, e* $\to$ *y* $'$ *están definidas por:*

$$V_1 \to V_2 = (V_1 \cap V_2^c)^{dc},$$

$$V_1' = X \setminus \phi(V_1) = \phi(V_1)^c,$$

para todo $V_1, V_2 \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$.

(2) *Sea* $f : \langle \mathbf{X}_1, \phi_1 \rangle \to \langle \mathbf{X}_2, \phi_2 \rangle$ *un morfismo en la categoría de los dh-espacios entonces la aplicación* $\mathbb{D}(f) : \mathbb{D}(\mathbf{X}_2) \to \mathbb{D}(\mathbf{X}_1)$ *definida por*

$$\mathbb{D}(f)(V) = f^{-1}(V)$$

es un homomorfismo entre dh-álgebras.

De esto se tiene que $\mathbb{D}$ es un funtor entre las categorías de los dh-espacios y las dh-álgebras.

Veamos ahora que las categorías de las dh-álgebras y la de los dh-espacios son dualmente equivalentes.

Proposición 2.1.4.

(1) *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$, *entonces* $\mathbf{L} \cong \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

(2) *Sea* $\langle X, \tau, \leq, \phi \rangle$ *un dh-espacio entonces* $\mathbf{X} \cong \mathbb{X}(\mathbb{D}(\mathbf{X}))$ *como espacios de De Morgan Heyting.*

Demostración. Para probar (1) basta considerar la aplicación

$$\sigma_L : \mathbf{L} \to \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \text{ tal que } a \mapsto \sigma(a) = \{P \in \mathbb{X}(L) : a \in P\}$$

y para probar (2) basta considerar la aplicación

$$\epsilon_X : \mathbf{X} \to \mathbb{X}(\mathbb{D}(\mathbf{X})) \text{ tal que } x \mapsto \epsilon_X(x) = \{V \in \mathbb{D}(\mathbf{X}) : x \in V\}.$$

□

Con estas definiciones y proposiciones se puede ver que las composiciones $\mathbb{X} \circ \mathbb{D}$ y $\mathbb{D} \circ \mathbb{X}$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre las categorías de los dh-espacios y dh-álgebras respectivamente.

2.2. Espacios duales para las álgebras de $\mathcal{SDH}_1$

Si $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Heyting es bien conocido que si definimos la operación unaria $x^* = x \to 0$ para todo $x \in A$, dicha operación es un **pseudocomplemento** para $\mathbf{A}$.

Recordemos que la variedad $\mathcal{SDH}_1$ es la subvariedad de las álgebras de De Morgan Heyting ($\mathcal{DH}$) definidas por la identidad $x'^* \approx x^{2('*)}$.

En [26] H.P. Sankappanavar probó que las álgebras $\mathcal{SDH}_1$ son **álgebras de Stone dobles**, es decir cumplen las identidades $x^* \vee x^{**} \approx 1$ y $x^+ \wedge x^{++} \approx 0$ donde $+$ es el pseudocomplemento dual dado por $x^+ = x'^{*\prime}$.

A continuación daremos condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de De Morgan Heyting $\mathbf{L}$ sea un álgebra $\mathcal{SDH}_1$. Estas condiciones las daremos teniendo en cuenta su espacio de filtros primos.

Veamos ahora cómo se traduce la identidad que caracteriza a las álgebras $\mathcal{SDH}_1$ ($x'^* \approx x^{2('*)}$) teniendo en cuenta la dualidad de Priestley encontrada. Para esto tendremos en cuenta las siguientes propiedades que cumple la transformación de Birula-Rasiowa ϕ.

Lema 2.2.1. *Sea* $\mathbf{L}$ *una dh-álgebra. Todo subconjunto* $M \subseteq \mathbb{X}(\mathbf{L})$ *cumple:*

(1) $\phi(M^c) = \phi(M)^c$,

(2) $\phi(M^d) = \phi(M)^i$,

(3) $\phi(M^i) = \phi(M)^d$.

Demostración.

(1) Se prueba teniendo en cuenta las siguientes equivalencias:

$$P \in \phi(M)^c \Leftrightarrow P \notin \phi(M) \Leftrightarrow \phi(P) \notin M \Leftrightarrow \phi(P) \in M^c \Leftrightarrow \phi(\phi(P)) \in \phi(M^c).$$

(2) Sea $Q \in \phi(M^d)$ entonces $Q = \phi(R)$ con $R \subseteq P$ para algún $P \in M$. Como ϕ invierte el orden tenemos que $\phi(P) \subseteq \phi(R) = Q$, por lo que $Q \in (\phi(M))^i$.

Recíprocamente, supongamos $Q \in \phi(M)^i$ entonces $\phi(P) \subseteq Q$ para algún $P \in M$. Luego $\phi(Q) \subseteq P$, lo que nos asegura que $\phi(Q) \in M^d$ o equivalentemente $Q \in \phi(M^d)$.

(3) Sea $Q \in \phi(M^i)$ entonces $Q = \phi(R)$ con $P \subseteq R$ para algún $P \in M$. Como ϕ invierte el orden tenemos que $Q = \phi(R) \subseteq \phi(P)$, por lo que $Q \in (\phi(M))^d$.

Recíprocamente, supongamos $Q \in \phi(M)^d$ entonces $Q \subseteq \phi(P)$ para algún $P \in M$. Luego $P \subseteq \phi(Q)$, lo que nos asegura que $\phi(Q) \in M^i$ o lo que es equivalente $Q \in \phi(M^i)$.

□

Teniendo en cuenta los isomorfismos $\mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cong \mathbf{L}$ y $\mathbb{X}(\mathbb{D}(\mathbf{X})) \cong \mathbf{X}$ traduciremos la identidad que caracteriza a las álgebras $\mathcal{SDH}_1$ en una condición sobre los filtros primos.

Lema 2.2.2. *Un álgebra de De Morgan* $\mathbf{L}$ *está en la variedad* $\mathcal{SDH}_1$ *si y sólo si todo subconjunto* V*, abierto, cerrado y creciente de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$*, verifica* $V^d = \phi(V^d)^d$.

Demostración. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ entonces $\mathbf{L}$ verifica la identidad $x'^* \approx x^{2('*)}$. Luego, como $\mathbb{D}(\mathbb{X})(\mathbf{L}) \cong \mathbf{L}$ se tiene que para todo $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X})(\mathbf{L})$ la igualdad $V'^* = V^{2('*)}$ se sigue, o, lo que es equivalente, ya que $'$ es una biyección, $V^* = V^{*'*}$.

Por las definiciones de $\rightarrow$ y $'$ tenemos que:

- $V^* = V \rightarrow \emptyset = (V \cap \emptyset^c)^{dc} = V^{dc}$

- $V^{*\prime *} = (V^{dc})^{\prime *} = ((\phi(V^{dc})^c)^* = ((\phi(V^{dc})^c)^{dc}$

Por lo que la condición estaría dada por:

$$V^{dc} = ((\phi(V^{dc})^c)^{dc}.$$

Finalmente, por el Lema 2.2.1 (1) esta expresión resulta

$$V^{*\prime *} = (\phi(V^{dc})^c)^{dc} = ((\phi((V^d)^{cc})^{dc} = (\phi(V^d))^{dc}$$

Luego, si $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ entonces su espacio de Morgan asociado tiene que verificar la condición:

$$V^d = (\phi(V^d))^d.$$

Recíprocamente, es fácil ver que los espacios de De Morgan Heyting $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ que verifican la condición $V^d = (\phi(V^d))^d$ para todo clopen creciente V de $\mathbf{X}$ hacen que $\mathbb{D}(\mathbf{X}) \in \mathcal{SDH}_1$. $\square$

Este resultado nos ayudará a caracterizar los espacios asociados a las álgebras $\mathcal{SDH}_1$. Recordemos que un filtro propio U es un **ultrafiltro** si para todo filtro $F \subseteq L$ se cumple la implicación $U \subseteq F \Rightarrow U = F$, es decir, si es un elemento maximal en $\mathbb{X}(\mathbf{L})$.

Proposición 2.2.3. *Si $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ entonces debe verificar:*

(1) *Todo $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ está contenido en un único ultrafiltro.*

(2) *Si $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y $P \subseteq U$, entonces $\phi(P) \subseteq U$, siendo U un ultrafiltro de $\mathbf{L}$.*

Demostración. Para probar (1) recordemos que si $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ siempre existe un ultrafiltro de $\mathbf{L}$ que contiene a P y un elemento minimal de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ contenido en él.

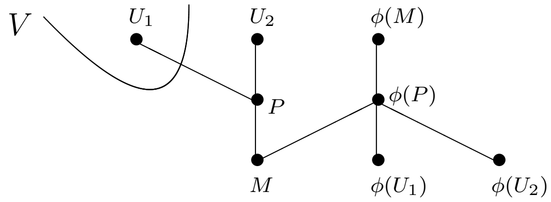
Supongamos que P esté contenido en dos ultrafiltros distintos, es decir, $P \subseteq U_1$, $P \subseteq U_2$ con U_1, U_2 ultrafiltros y $U_1 \neq U_2$.

Consideremos M un filtro primo minimal de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $M \subseteq P$ y, en consecuencia, $M \subseteq U_1$ y $M \subseteq U_2$.

Además, como M es minimal, $\phi(M)$ es ultrafiltro, luego $\phi(M) \neq U_1$ ó $\phi(M) \neq U_2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\phi(M) \neq U_1$.

Luego, $U_1 \not\subseteq \phi(M)$ y como $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es totalmente disconexo en el orden, existe V, abierto, cerrado y creciente de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $U_1 \in V$ pero $\phi(M) \notin V$.

Esta situación se ilustra en la siguiente figura.



Como $\phi(M) \notin V$ y $\phi(M)$ es ultrafiltro entonces $\phi(M) \notin V^d$. Veamos que $\phi(M) \in \phi(V^d)^d$.

Sabemos que $U_1 \in V$ entonces $U_1^d \subseteq V^d$ y por lo tanto, $\phi(U_1^d) \subseteq \phi(V^d)$, es decir, $\phi(U_1^d)^d \subseteq \phi(V^d)^d$.

Luego, alcanza con ver que $\phi(M) \in \phi(U_1^d)^d$.

Como $P \subseteq U_1$, $\phi(U_1) \subseteq \phi(P)$ por lo que $\phi(P) \in \phi(U_1)^i$. De $\phi(P) \subseteq \phi(M)$, resulta $\phi(M) \in \phi(U_1)^i$ y, en consecuencia, $\phi(M) \in \phi(U_1)^{id}$.

Por otra parte, por Lema 2.2.1 (2) $\phi(U_1^d)^d = \phi(U_1)^{id}$.

Esto prueba que $\phi(M) \in \phi(U_1^d)^d \subseteq \phi(V^d)^d$.

Luego, existe un abierto, cerrado y creciente $V \subseteq \mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que

$$V^d \neq \phi(V^d)^d$$

lo cual es una contradicción pues $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$.

Por lo tanto todo filtro primo está contenido en un único ultrafiltro.

Para probar (2), supongamos P filtro primo tal que $P \subseteq U$, U ultrafiltro, pero $\phi(P) \not\subseteq U$ y veamos que $\mathbf{L} \notin \mathcal{SDH}_1$, o lo que es equivalente que existe un abierto, cerrado y creciente de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ que no verifica la condición $V^d = \phi(V^d)^d$.

Como $\phi(P) \not\subseteq U$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es totalmente disconexo en el orden, existe un clopen creciente V de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $\phi(P) \in V$, pero $U \notin V$.

Es claro que $\phi(P) \in V^d$. Si suponemos que $\phi(P) \in \phi(V^d)^d$ entonces existe $\phi(Q)$ tal que $\phi(P) \subseteq \phi(Q)$ y $Q \subseteq R$ con $R \in V$. De esto se deduce que $Q \subseteq P \subseteq U$ y $Q \subseteq R$. Como por (1) Q tiene que estar contenido en un único ultrafiltro resulta que $R \subseteq U$ y por lo tanto $U \in V$ pues V es creciente, lo cual es una contradicción.

Esto prueba que $V^d \neq \phi(V^d)^d$ para algún V abierto, cerrado y creciente, es decir, $\mathbf{L} \notin \mathcal{SDH}_1$. $\square$

El recíproco de la proposición anterior también es válido como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.2.4. *Si* $\mathbf{L}$ *es una dh-álgebra que satisface las condiciones:*

1. *Todo* $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ *está contenido en un único ultrafiltro.*

2. *Si* $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ *y* $P \subseteq U$*, entonces* $\phi(P) \subseteq U$*, siendo* U *un ultrafiltro de* $\mathbf{L}$*,*

entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$.

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ una *dh*-álgebra. Para demostrar que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$, resta demostrar que para todo abierto, cerrado y creciente V de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$, se cumple la igualdad $V^d = \phi(V^d)^d$.

Supongamos, $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$, $P \in V^d$, entonces existe $Q \in V$ tal que $P \subseteq Q$.

Por la condiciones (1) y (2), existe un único ultrafiltro U de $\mathbf{L}$ que contiene a Q y $\phi(Q)$, es decir,

$$Q \subseteq U \quad \text{y} \quad \phi(Q) \subseteq U.$$

Como $\phi(Q) \subseteq U$ entonces $\phi(U) \subseteq Q$ y como $Q \in V$, $\phi(U) \in V^d$.

Además, de $P \subseteq Q \subseteq U$, obtenemos

$$P \subseteq U = \phi(\phi(U))$$

donde $\phi(U) \in V^d$. Esto muestra que $P \in \phi(V^d)^d$, lo que prueba que $V^d \subseteq \phi(V^d)^d$.

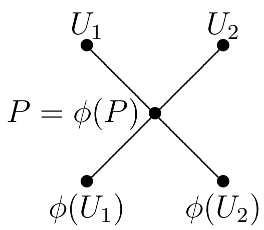
Para probar la otra inclusión, supongamos $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$, $P \in \phi(V^d)^d$. Luego, existe $R \in V^d$ tal que $P \subseteq \phi(R)$ y como $R \in V^d$, existe $Q \in V$ tal que $R \subseteq Q$.

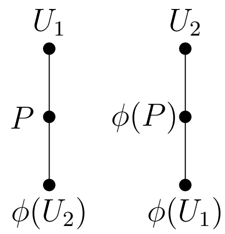
Sea U el único ultrafiltro que contiene a Q y a $\phi(Q)$. Por la condición (2) se sigue que

$$R \subseteq Q \subseteq U \quad \text{y} \quad \phi(R) \subseteq U.$$

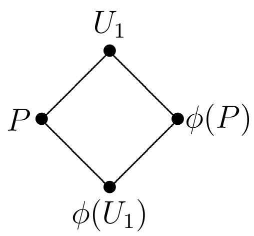
Finalmente, ya que $P \subseteq \phi(R)$ resulta que $P \subseteq U$. Pero $U \in V$ ya que $Q \in V$ y V es creciente. Lo que muestra que $P \in V^d$. $\square$

Hemos probado entonces que el espacio dual de un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ está caracterizado con la condición de que para cada filtro primo $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$, debe existir un único ultrafiltro U de $\mathbf{L}$ que contenga tanto a P como como a $\phi(P)$. De esta manera, podemos determinar por ejemplo, de una manera simple, que las álgebras de De Morgan Heyting asociadas a los siguientes espacios duales, no son álgebras de la variedad $\mathcal{SDH}_1$





mientras que la *dh*-álgebra asociada al siguiente espacio dual sí lo es.



2.3. Álgebras subdirectamente irreducibles y simples en $\mathcal{SDH}_1$

Las condiciones que los espacios duales de las *dh*-álgebras deben cumplir para pertenecer a la variedad $\mathcal{SDH}_1$ dadas en la sección anterior nos permitirán caracterizar, de una manera sencilla, a las álgebras subdirectamente irreducibles en esta variedad (finitas o no) como aquellas álgebras cuyo espacio dual asociado tiene un único ultrafiltro. En esta sección mostraremos este resultado y caracterizaremos también a las álgebras simples de dicha variedad.

Recordemos, como vimos en la Sección 1.2, que existe un anti-isomorfismo entre el reticulado de congruencias de un álgebra de Heyting $\mathbf{H}$ y el reticulado de conjuntos cerrados y crecientes de $\mathbb{X}(\mathbf{H})$. Por otra parte existe un anti-isomorfismo entre el reticulado de congruencias de un álgebra de De Morgan $\mathbf{M}$ y el reticulado de conjuntos cerrados e involutivos de $\langle\mathbb{X}(\mathbf{M}), \phi\rangle$.

Teniendo en cuenta estos resultados, la siguiente proposición que caracteriza a las congruencias en una *dh*-álgebra y, por lo tanto, en un álgebra en $\mathcal{SDH}_1$ es inmediata.

Proposición 2.3.1. *Sea* $\mathbf{L}$ *una dh-álgebra. Existe un anti-isomorfismo* Θ *entre el reticulado de conjuntos cerrados, crecientes e involutivos de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *y el reticulado de congruencias de* $\mathbf{L}$ *dado por* $Y \mapsto \Theta(Y)$ *donde*

$$(a, b) \in \Theta(Y) \Longleftrightarrow ((\forall P \in Y)(a \in P \Leftrightarrow b \in P)).$$

Lema 2.3.2. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra en* $\mathcal{SDH}_1$ *y* U *un ultrafiltro de* $\mathbf{L}$*. Entonces el conjunto* $Y = \phi(U)^i$ *es cerrado, creciente e involutivo.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro de $\mathbf{L}$. Claramente, Y es cerrado pues $\phi(U) \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y el creciente de un elemento de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es un conjunto cerrado por ser un espacio de Priestley. Probemos ahora que Y es involutivo. Para esto, notemos que, utilizando el Lema 2.2.1, la condición de involutivo se traduce en la siguiente condición más simple dada por las siguientes equivalencias.

$$\phi(Y) = Y \;\Leftrightarrow\; \phi(\phi(U)^i) = Y \;\Leftrightarrow\; \phi(\phi(U))^d = Y \;\Leftrightarrow\; U^d = Y.$$

Supongamos que $P \in Y = \phi(U)^i$ entonces $\phi(U) \subseteq P$, es decir, $\phi(P) \subseteq U$. Luego, por la condición (2) de la Proposición 2.2.3 obtenemos $\phi(\phi(P)) = P \subseteq U$, y por lo tanto $P \in U^d$.

Recíprocamente, si $P \in U^d$, $P \subseteq U$ y otra vez por la condición (2) de la Proposición 2.2.3 tenemos que $\phi(U) \subseteq P$, es decir, $P \in \phi(U)^i = Y$. Esto muestra que Y es un conjunto involutivo. $\square$

Proposición 2.3.3. *Toda álgebra subdirectamente irreducible en* $\mathcal{SDH}_1$ *tiene un único ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra subdirectamente irreducible en la variedad $\mathcal{SDH}_1$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ el conjunto de todos los ultrafiltros de $\mathbf{L}$. En el Lema 2.3.2 probamos que $Y_i = \phi(U_i)^i$ es cerrado, creciente e involutivo para todo $i \in I$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.3.1, tenemos que para cada Y_i existe una congruencia $\Theta(Y_i)$ sobre $\mathbf{L}$ asociada a cada Y_i.

Consideremos el conjunto

$$Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$$

Observemos que $Y = \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Entonces Y es un conjunto cerrado, creciente e involutivo tal que $\Theta(Y) = \Delta$, donde por Δ denotamos a la congruencia identidad sobre $\mathbf{L}$.

Finalmente, ya que Θ es un anti-isomorfismo, tenemos que

$$\Theta(\bigcup_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I} \Theta(Y_i) = \Delta.$$

De esto y puesto que $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible debe existir $i \in I$ tal que $\Theta(Y_i) = \Delta$. Luego, $Y_i = Y = \mathbb{X}(\mathbf{L})$, y, en consecuencia, $\mathbf{L}$ tiene un único ultrafiltro. □

De este resultado se desprende inmediatamente que toda álgebra simple en la variedad $\mathcal{SDH}_1$ tiene un único ultrafiltro. La recíproca de este resultado también es válida como se muestra a continuación.

Proposición 2.3.4. *Si un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ tiene un único ultrafiltro entonces $\mathbf{L}$ es simple.*

Demostración. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ y supongamos que $\mathbf{L}$ tiene un único ultrafiltro U. Supongamos que θ es una congruencia sobre $\mathbf{L}$ distinta de ∇, donde ∇ es el elemento más grande en el reticulado de congruencias sobre $\mathbf{L}$. Entonces, por la Proposición 2.3.1 existe un conjunto no vacío $Y \subseteq \mathbb{X}(\mathbf{L})$, cerrado, creciente e involutivo, tal que $\Theta(Y) = \theta$. Veamos que $Y = \mathbb{X}(\mathbf{L})$.

Observemos que $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = [\phi(U), U] = \{P \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) : \phi(U) \subseteq P \subseteq U\}$. Como $Y \neq \emptyset$, existe $P \in Y$ y, como $P \subseteq U$, resulta $U \in Y$. Pero entonces $\phi(U) \in Y$ pues Y es involutivo, de lo que se desprende que $Y = \mathbb{X}(\mathbf{L})$, y, por lo tanto, $\theta = \Delta$.

Esto prueba que $\mathbf{L}$ no tiene más congruencias que las triviales, es decir, $\mathbf{L}$ es simple. □

De esta manera, logramos caracterizar las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{SDH}_1$. De los resutados expuestos en [26] se desprende que la sucesión de variedades $\mathcal{SDH}_n$ son variedades con término discriminador, por lo que sabemos que las álgebras subdirectamente irreducibles coinciden las las simples (ver Teorema 1.1.14). Este último hecho se puede deducir también de las Proposiciones 2.3.3 y 2.3.4. Hemos probado entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.3.5. *Para toda álgebra* $\mathbf{L}$ *en la variedad* $\mathcal{SDH}_1$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible.*

(2) $\mathbf{L}$ *es simple.*

(3) $\mathbf{L}$ *tiene un único ultrafiltro.*

(4) $\mathbf{L} \setminus \{0\}$ *es ultrafiltro.*

Como en las álgebras finitas los ultrafiltros se corresponden con los átomos, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.6. *Para todo álgebra finita* $\mathbf{L}$ *en la variedad* $\mathcal{SDH}_1$*, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes*

(1) $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible.*

(2) $\mathbf{L}$ *es simple.*

(3) $\mathbf{L}$ *tiene un único ultrafiltro.*

(4) $\mathbf{L}$ *tiene un único átomo (o un único coátomo).*

2.4. Aplicación: generación por miembros finitos

A continuación aplicaremos la caracterización para las álgebras simples $\mathcal{SDH}_1$ encontrada anteriormente para probar que esta variedad está generada por sus miembros finitos. Para esto utilizaremos un argumento de filtración estándar.

Recordemos en primer lugar que un álgebra de Heyting también se puede definir como un reticulado distributivo acotado $\langle H, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ en el cual existe el pseudocomplemento de a relativo a b (notado por $a \to b$) para todo par de elementos $a, b \in H$, en otras palabras, existe un elemento más grande $c \in H$ tal que $a \wedge c \leq b$. De esto resulta que todo reticulado distributivo acotado finito tiene la estructura de álgebra de Heyting.

Lema 2.4.1. *Si* $\langle L, \wedge, \vee, ', \to, 0, 1\rangle$ *es un álgebra simple en la variedad* $\mathcal{SDH}_1$ *y* $N = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *es un subconjunto finito de* L *entonces existe un conjunto finito* $L_1 \subseteq L$ *y una operación* $\to_1$ *con las siguientes propiedades:*

(1) $\langle L_1, \wedge, \vee, ', \to_1, 0, 1\rangle$ *es un álgebra simple finita en* $\mathcal{SDH}_1$*,*

(2) $N \subseteq L_1$*,*

(3) *si* $a, b \in L_1$ *y* $a \to b \in L_1$ *entonces* $a \to_1 b = a \to b$*.*

Demostración. Llamemos $\mathbf{L}_1$ al álgebra de De Morgan generada por N. Como la variedad de álgebras de De Morgan es localmente finita, tenemos que $\mathbf{L}_1$ es finita y verifica $N \subseteq L_1$. Luego, por lo observado anteriormente, es posible definir en $\mathbf{L}_1$ una operación $\to_1$ para la cual $\mathbf{L}_1$ resulta una dh-álgebra. Probaremos que $\mathbf{L}_1$ con esta operación es también un álgebra simple en $\mathcal{SDH}_1$.

Como $\mathbf{L}$ es un álgebra simple entonces tiene un único ultrafiltro U. Veamos que $\mathbf{L}_1$ también tiene un único ultrafiltro, o lo que es equivalente, ya que es finita, que tiene un único átomo. Para esto supongamos que $\mathbf{L}_1$ tiene dos átomos distintos a y b y llamémosle $F_{L_1}(a)$ y $F_{L_1}(b)$ a los filtros generados por a y b respectivamente en $\mathbf{L}_1$.

Consideremos los filtros de $\mathbf{L}$:

$$F_L(a) = \{x \in L : x \geq a\} \text{ y } F_L(b) = \{x \in L : x \geq b\}.$$

$F_L(a)$ y $F_L(b)$ están contenidos en el único ultrafiltro U de $\mathbf{L}$, por lo que $a, b \in U$. De esto tenemos que $a \wedge b = 0 \in U$, lo que contradice el hecho de que U sea un ulrafiltro. Esto muestra que $\mathbf{L}_1$ tiene un único átomo y por el Corolario 2.3.6 concluimos que $\mathbf{L}_1$ es un álgebra simple en $\mathcal{SDH}_1$.

Para probar (3), consideremos $\to_1$ la implicación con la cual $\mathbf{L}_1$ es un álgebra de Heyting y supongamos que a y b son dos elementos de L_1 tales que $a \to b \in L_1$.

Recordemos que las operaciones $\to$ y $\to_1$, por ser implicaciones de Heyting tienen las siguientes propiedades:

(a) Si $a, b \in L$ entonces para todo $x \in L$, las condiciones $a \wedge x \leq b$ y $x \leq a \to b$ son equivalentes.

(b) Si $a, b \in L_1$ entonces para todo $x \in L_1$, las condiciones $a \wedge x \leq b$ y $x \leq a \to_1 b$ son equivalentes.

Ya que $a \to b \leq a \to b$, usando (a), tenemos $a \wedge (a \to b) \leq b$. Además, como $a \to b \in L_1$, de (b) obtenemos $a \to b \leq a \to_1 b$. De manera análoga se demuestra que $a \to_1 b \leq a \to b$, por lo que $a \to b = a \to_1 b$. $\square$

Teorema 2.4.2. *La variedad $\mathcal{SDH}_1$ está generada por sus miembros simples finitos.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}_{fin}$ la clase de todas de todas las álgebras simples finitas en $\mathcal{SDH}_1$ y supongamos que tenemos un término ψ tal que $\mathcal{S}_{fin} \models \psi \approx 1$ pero $\mathcal{SDH}_1 \not\models \psi \approx 1$. Entonces existe un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ tal que $\mathbf{L} \not\models \psi \approx 1$.

Sea $\Sigma(\psi)$ el conjunto de todos los subtérminos de ψ y sea $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ tal que $\psi^L(\overline{a}) \neq 1$. Consideremos el conjunto finito N formado por todos los subtérminos evaluados en $\overline{a}$, es decir, $N = \{\sigma(\overline{a}) : \sigma \in \Sigma(\psi)\}$. Si $\mathbf{L}_1$ es el álgebra simple finita en la variedad $\mathcal{SDH}_1$ del Lema 2.4.1 resulta que $\mathbf{L}_1 \not\models \psi \approx 1$, lo que contradice nuestra suposición. $\square$

2.5. Dualidad y álgebras subdirectamente irreducibles finitas en las variedades $\mathcal{SDH}_n$

La identidad $x'^{*} \approx x^{2('*)}$ caracteriza a las dh-álgebras que pertenecen a la variedad $\mathcal{SDH}_1$ estudiadas previamente. Notaremos por

$$x^{n('*)} = \begin{cases} x & \text{si } n = 0; \\ (x^{(n-1)('*)})'^{*} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

En [26] se definieron las variedades $\mathcal{SDH}_n$, $n \in \omega$, como aquellas subvariedades de $\mathcal{DH}$ que satisfacen la identidad $x^{(n+1)('*)} = x^{n('*)}$. Estas subvariedades son las que estudiaremos a continuación. Notemos que $\mathcal{SDH}_0$ coincide con la variedad de las álgebras de Boole y que para cada $n \in \omega$

$$\mathcal{SDH}_n \subseteq \mathcal{SDH}_{n+1}.$$

El siguiente objetivo es caracterizar los espacios de filtros primos de un álgebra subdirectamente irreducible finita en la variedad $\mathcal{SDH}_n$, para todo $n \in \omega$.

Para cualquier subconjunto V de un conjunto parcialmente ordenado R, definimos inductivamente

$$V^{0(di)} = V$$

y

$$V^{(n+1)(di)} = (V^{n(di)})^{di}.$$

Utilizando estas definiciones y el isomorfismo $\mathbf{L} \cong \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ traduciremos la identidad que debe verificar una dh-álgebra para estar en la variedad $\mathcal{SDH}_n$ en una condición sobre sus filtros primos.

Recordemos que dada $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$ las operaciones $'$ y $*$ sobre $\mathbf{L}$ se traducen en $\mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ como $V' = \phi(V)^c$ y $V^* = V^{dc}$, para todo $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Lema 2.5.1. *Para todo $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ se cumple*

$$V^{k(*')} = \begin{cases} \phi(V^{\frac{k-1}{2}(di)d}) & \textit{si } k \textit{ es impar;} \\ V^{\frac{k}{2}(di)} & \textit{si } k \textit{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre k. Si $k = 1$, teniendo en cuenta el Lema 2.2.1, $V^{*'} = \phi(V^{dc})^c = \phi(V^d)$ por lo que el resultado se sigue. Supongamos que la propiedad se verifica para k.

Si k es par, $V^{k(*')} = V^{\frac{k}{2}(di)}$. Luego,

$$V^{(k+1)(*')} = (V^{\frac{k}{2}(di)})^{*'} = \phi((V^{\frac{k}{2}(di)})^d).$$

Si k es impar, $V^{k(*')} = \phi(V^{\frac{k-1}{2}(di)d})$, y entonces

$$\begin{aligned} V^{(k+1)(*')} &= (\phi(V^{\frac{k-1}{2}(di)d}))^{*'} = \phi(\phi(V^{\frac{k-1}{2}(di)d})^d) = (\phi(\phi(V^{\frac{k-1}{2}(di)d})))^i = \\ &= (V^{\frac{k-1}{2}(di)})^{di} = V^{\frac{k+1}{2}(di)} \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad se sigue para todo k natural. $\square$

Lema 2.5.2. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$*. Entonces* $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ *si y sólo si para cada* $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ *se verifica:*

$$\begin{cases} \phi\left(V^{\frac{n-1}{2}(di)d}\right) = V^{\frac{n+1}{2}(di)} & \textit{si } n \textit{ es impar;} \\ \phi\left(V^{\frac{n}{2}(di)}\right) = V^{\frac{n}{2}(di)d} & \textit{si } n \textit{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ si y sólo si en el conjunto $\mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ se cumple $V^{n(\prime *)} = V^{(n+1)(\prime *)}$. Teniendo en cuenta que $\prime$ es una involución, esta igualdad es equivalente a:

$$V^{(n-1)(*\prime)*} = V^{n(*\prime)*} \tag{2.1}$$

Utilizando el lema anterior y las propiedades de ϕ resulta:

Si n es par,

$$\begin{aligned} V^{(n-1)(*\prime)*} &= \left(\phi(V^{\frac{n-2}{2}(di)d})\right)^{dc} \\ &= \left(\phi(V^{\frac{n-2}{2}(di)di})\right)^{c} \\ &= \left(\phi(V^{\frac{n}{2}(di)})\right)^{c} \end{aligned}$$

y $V^{n(*\prime)*} = \left(V^{\frac{n}{2}(di)}\right)^{dc}$, así, por (2.1) tenemos

$$\phi\left(V^{\frac{n}{2}(di)}\right) = V^{\frac{n}{2}(di)d}.$$

Si n es impar,

$$\begin{aligned} V^{n(*\prime)*} &= \left(\phi(V^{\frac{n-1}{2}(di)d})\right)^{dc} \\ &= \left(\phi(V^{\frac{n-1}{2}(di)di})\right)^{c} \\ &= \left(\phi(V^{\frac{n+1}{2}(di)})\right)^{c} \end{aligned},$$

y $V^{(n-1)(*\prime)*} = \left(V^{\frac{n-1}{2}(di)}\right)^{dc}$. Así, por (2.1),

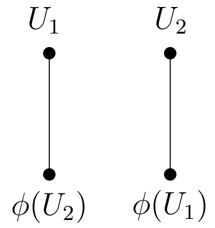
$$\phi(V^{\frac{n+1}{2}(di)}) = V^{\frac{n-1}{2}(di)d}$$

y finalmente

$$V^{\frac{n+1}{2}(di)} = \phi\left(V^{\frac{n-1}{2}(di)d}\right).$$

$\square$

Usando este resultado, es fácil ver que existen dh-álgebras finitas que no pertenecen a $\mathcal{SDH}_n$ para ningún $n < \omega$. Por ejemplo, el álgebra de De Morgan Heyting $\mathbf{L}$ cuyo espacio de filtros primos es



no pertenece a $\mathcal{SDH}_n$ para ningún $n < \omega$, puesto que si consideramos por ejemplo el clopen creciente $V = \{U_1\}$, $V^{n(di)}$ siempre estará contenido en una componente conexa a diferencia de $\phi(V^{n(di)})$ que siempre estará contenido en la otra.

Recordemos que una **componente conexa** de un conjunto parcialmente ordenado X es un subconjunto no vacío de X que es creciente y decreciente al mismo tiempo y es minimal con respecto a esta propiedad. Luego, todo conjunto ordendo X es unión disjunta de sus componentes conexas. También diremos que X es **conexo** cuando está formado exactamente por una componente conexa. Para poder dar una caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{SDH}_n$ usaremos el siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en [18].

Teorema 2.5.3. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de De Morgan finita y sea* $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L}), \phi \rangle$ *su espacio de De Morgan asociado. Si* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *es la descomposición de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *en componentes conexas y existe* $P \in S_i$ *tal que* $\phi(P) \in S_j$ *entonces se cumple que* $\phi(S_i) \subseteq S_j$.

Sea $S_1, \ldots, S_n$ la descomposición de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ en componentes conexas. Si $\phi(S_i) \subseteq \phi(S_j)$, es fácil ver que $\phi(S_i) = S_j$ y $\phi(S_j) = S_i$ y, por lo tanto $\phi(S_i \cup S_j) = S_i \cup S_j$. En este caso, si $i \neq j$, diremos que $S_i \cup S_j$ es una **componente ϕ-conexa** de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ y si $\phi(S_i) = S_i$ también diremos que S_i es una **componente ϕ-conexa**. El espacio $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ será llamado **ϕ-conexo** cuando $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es conexo o $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = S_i \cup S_j$ con $\phi(S_i) \subseteq S_j$, $i \neq j$.

En [18] también se muestra que si $\mathbf{L}$ es un álgebra de De Morgan finita, $\mathbf{L}$ es directamente indescomponible si y sólo si $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo. Para las álgebras $\mathcal{SDH}_n$ finitas tenemos el siguiente resultado más fuerte.

Lema 2.5.4. *Si* $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ *es un álgebra finita tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es* ϕ*-conexo entonces* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo y que $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son componentes conexas no vacías tales que $\phi(S_1) = S_2$. Tomemos un ultrafiltro U de S_1 y consideremos el abierto, cerrado y creciente $V = \{U\}$. Luego, se cumple que $V^{m(di)} \subseteq S_1$ para todo m pero $\phi(V^{m(di)}) \subseteq S_2$, lo que muestra (Lema 2.5.2) que $\mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ no es una $\mathcal{SDH}_n$-álgebra para ningún n. En consecuencia debe ser $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = S$, donde S es una componente conexa. $\square$

Proposición 2.5.5. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra finita en* $\mathcal{SDH}_n$*, entonces* $\mathbf{L}$ *es directamente indescomponible si y sólo si* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es conexo.*

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra directamente indescomponible en $\mathcal{SDH}_n$ y supongamos que $S_1, S_2, \ldots, S_r$ es la descomposición de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ en componentes conexas. Por la demostración del Lema 2.5.4, $\phi(S_i) \subseteq S_i$ para todo i. Llamemos $\mathbf{L}_i$ al álgebra de De Morgan Heyting asociada con cada S_i. Sabemos que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \times \ldots \times \mathbf{L}_r$, donde $\mathbf{L}$ es un álgebra de De Morgan. Ya que $\mathbf{L}_i$ es finita, $\mathbf{L}_i$ es un álgebra de Heyting y además como $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$, tenemos que $\mathbf{L}_i \in \mathcal{SDH}_n$. Luego, $\mathbf{L}$ no sería directamente indescomponible, lo cual es una contradicción.

Por otra parte, si suponemos que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es conexo, resulta que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo, lo que implicaría que $\mathbf{L}$ es un álgebra de De Morgan directamente indescomponible y en consecuencia también sería una álgebra $\mathcal{SDH}_n$ directamente indescomponible. ☐

Como las variedades $\mathcal{SDH}_n$ son variedades con término discriminador, por el Teorema 1.1.14 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5.6. *Para toda álgebra finita* $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible.*

(2) $\mathbf{L}$ *es simple.*

(3) $\mathbf{L}$ *es directamente indescomponible.*

(4) $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es conexo.*

El siguiente objetivo es poder determinar de una manera sencilla, y en función de los espacios duales, cuándo un álgebra en $\mathcal{DH}$ pertenece a la variedad $\mathcal{SDH}_n$, es decir, cuáles son los *dh*-espacios que se corresponden con las álgebras en las variedades $\mathcal{SDH}_n$. Para esto necesitaremos de las siguientes definiciones.

Sea R un conjunto ordenado. Un $(n+1)$***-fence*** es un conjunto ordenado $F = \{f_0, \ldots, f_n\} \subseteq R$ que verifica

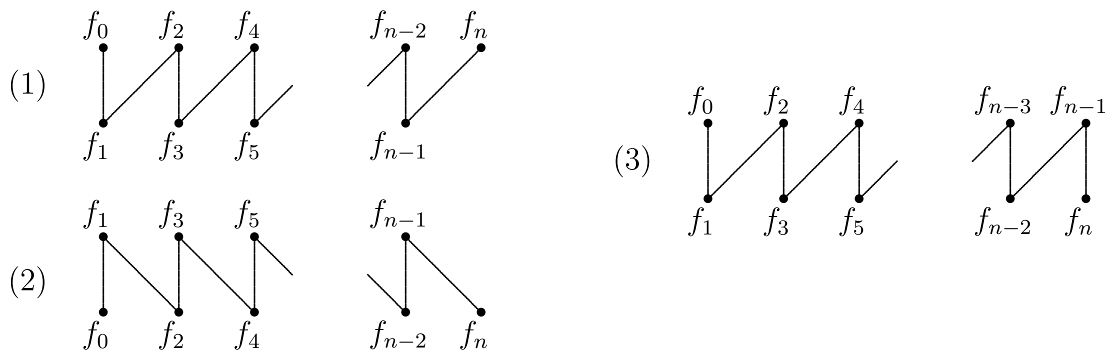
$$f_0 > f_1,\ f_1 < f_2,\ f_2 > f_3, \ldots, f_{n-1} < f_n \text{ ó } f_0 < f_1,\ f_1 > f_2,\ f_2 < f_3, \ldots, f_{n-1} > f_n$$

si n es par, y

$$f_0 < f_1,\ f_1 > f_2,\ f_2 < f_3, \ldots, f_{n-1} < f_n \text{ ó } f_0 > f_1,\ f_1 < f_2,\ f_2 > f_3, \ldots, f_{n-1} > f_n$$

si n es impar, y esos son los únicos elementos comparables en el conjunto. Diremos que n es la **longitud** del *fence* y que los puntos f_0 y f_n son sus **extremos**. Una información más detallada puede verse [29] y [4].

A continuación mostramos algunas figuras de *fences*:



(1) y (2) son *fences* con un número impar de elementos que no son isomorfos, mientras que (3) es el único *fence* que se puede obtener (salvo isomorfismos) con una cantidad par de elementos.

Si R es un conjunto ordenado, con $Max(R)$ y $Min(R)$ denotaremos a los conjuntos de sus elementos maximales y minimales respectivamente. Notaremos por $\mathbb{F}^{U,n}$ a la unión de todos los *fences* de longitud n que comienzan en U y que se pueden formar en $Max(R) \cup Min(R)$, es decir $\mathbb{F}^{U,n}$ consiste de todos los elementos $P \in Max(R) \cup Min(R)$ tal que existe un *fence* de longitud n que comienza en U y contiene a P.

Si $\mathbf{L}$ es un *dh*-álgebra y U es un ultrafiltro de $\mathbf{L}$, podemos considerar los siguientes *fences* de longitud n contenidos en $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ que comienzan en el ultrafiltro U.:

$$\{U_0 = U, M_1, U_2, M_3, U_4, M_5, \ldots, M_{n-1}, U_n\}, \quad \text{ó}$$
$$\{U_0 = U, M_1, U_2, M_3, U_4, M_5, \ldots, U_{n-1}, M_n\}$$

donde $U_i \in Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$, $M_i \in Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

El primero de estos dos *fences* es de longitud par y se corresponde con el conjunto ordenado de la figura (1), mientras que el segundo *fence* es de longitud impar y su conjunto ordenado es isomorfo a la figura (3). Al conjunto $\{U_0\}$ lo consideraremos como un *fence* de longitud 0.

Para simplificar la notación, en lo que sigue notaremos por $\overline{R}$ al conjunto $Max(R) \cup Min(R)$, para cualquier conjunto ordenado R.

Lema 2.5.7. *Si* $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$, $U \in Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ *y* $V = \{U\}$, *entonces*

$$\overline{V^{n(di)}} = \bigcup_{i=0}^{2n} \mathbb{F}^{U,i}.$$

Demostración. La demostración la haremos haciendo inducción sobre n.
Para $n = 0$, $\overline{V^{0(di)}} = \{U\}$ y $\bigcup_{i=0}^{0} \mathbb{F}^{U,i} = \mathbb{F}^{U,0} = \{U\}$.

Supongamos que $\overline{V^{n(di)}} = \bigcup_{i=0}^{2n} \mathbb{F}^{U,i}$ y probemos que $\overline{V^{(n+1)(di)}} = \bigcup_{i=0}^{2(n+1)} \mathbb{F}^{U,i}$.

Sea $P \in \overline{V^{(n+1)(di)}} = \overline{(V^{n(di)})^{di}}$.

- Si P es maximal entonces existe un elemento minimal $M \in \overline{V^{n(di)d}}$, tal que $M \subseteq P$. Luego, existe $S \in \overline{V^{n(di)}}$, S maximal tal que $M \subseteq S$. Ya que por hipótesis $\overline{V^{n(di)}} = \bigcup_{i=0}^{2n} \mathbb{F}^{U,i}$, existe un *fence* de longitud t, $t \leq 2n$, de la forma

$$U\ M_1\ U_2\ M_3\ \ldots\ M_{t-1}\ U_t\ =\ S.$$

  De esta manera, la secuencia

$$U\ M_1\ U_2\ M_3\ \ldots\ M_{t-1}\ S\ M\ P$$

  es un *fence* de longitud $t+2 \leq 2n+2 = 2(n+1)$ y entonces $P \in \bigcup_{i=0}^{2(n+1)} \mathbb{F}^{U,i}$.

- Si P es minimal, $P \in \overline{V^{n(di)d}}$, es decir, existe $S \in \overline{V^{n(di)}}$, S maximal tal que $P \subseteq S$. Ya que $\overline{V^{n(di)}} = \bigcup_{i=0}^{2n} \mathbb{F}^{U,i}$, existe un *fence* de longitud t, $t \leq 2n$ de la forma

$$U\ M_1\ U_2\ M_3\ \ldots\ M_{t-1}\ U_t\ =\ S.$$

  Luego, la secuencia

$$U\ M_1\ U_2\ M_3\ \ldots\ M_{t-1}\ S\ P$$

  es un *fence* de longitud $t+1 \leq 2(n+1)$.

  Así, $P \in \bigcup_{i=0}^{2(n+1)} \mathbb{F}^{U,i}$.

Esto prueba que $\overline{V^{(n+1)(di)}} \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=0}^{2(n+1)} \mathbb{F}^{U,i}$.

Para probar la otra inclusión supongamos $P \in \bigcup_{i=0}^{2(n+1)} \mathbb{F}^{U,i}$. Si P es maximal entonces existe un *fence* de la forma

$$U\ M_1\ U_2\ M_3\ \ldots\ U_{t-2}\ M_{t-1}\ U_t\ =\ P$$

con $t \leq 2n+2$. Así,

$$U\ M_1\ U_2\ M_3\ \ldots\ U_{t-2}$$

es una secuencia de longitud $t-2 \leq 2n$.

Por hipótesis $U_{t-2} \in \overline{V^{n(di)}}$, lo cual implica que

$$M_{t-1} \in \overline{V^{n(di)d}}$$

y en consecuencia

$$U_t = P \in \overline{V^{(n+1)(di)}}.$$

Si P es minimal, entonces existe un *fence* de la forma

$$U\ M_1\ U_2\ M_2\ \ldots\ U_{t-1}\ M_t\ =\ P,$$

con $t \leq 2(n+1)$.

Ahora bien, t es impar ya que la secuencia termina en un elemento minimal, así $t < 2(n+1)$, por lo que $t+1 \leq 2n+2$ y $t-1 \leq 2n$. Luego, la secuencia

$$U\ M_1\ U_2\ M_2\ \ldots\ U_{t-1}$$

es un *fence* de longitud $t-1 \leq 2n$.

Por hipótesis, tenemos $U_{t-1} \in \overline{V^{n(di)}}$ y ya que $M_{t-1} \subseteq P$ concluimos que

$$P \in \overline{V^{n(di)d}} \subseteq \overline{V^{(n+1)(di)}}.$$

$\square$

La siguiente proposición establece condiciones necesarias y suficientes sobre el conjunto de filtros primos de un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{DH}$ finita para que ésta pertenezca a la variedad $\mathcal{SDH}_n$.

Teorema 2.5.8. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra finita en* $\mathcal{DH}$ *tal que su espacio dual* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es conexo. Entonces* $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ *si y sólo si todo ultrafiltro* U *de* $\mathbf{L}$ *verifica:*

$$\begin{cases} Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra finita en $\mathcal{DH}$ cuyo espacio dual $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es conexo. Supongamos que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$. Observemos que, ya que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es un conjunto finito y conexo, si W es un subconjunto decreciente de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ y $W \neq \mathbb{X}(\mathbf{L})$ entonces $|W| < |W^i|$, y por lo tanto,

$$|\phi(W)| < |W^i|. \tag{2.2}$$

De la misma forma, si W es un conjunto creciente de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ distinto de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ entonces $|W| < |W^d|$ y, en consecuencia

$$|\phi(W)| < |W^d|. \tag{2.3}$$

- Si n es impar, U es un ultrafiltro y consideramos el subconjunto clopen creciente $V = \{U\}$, entonces
$$V^{\frac{n-1}{2}(di)d} = \mathbb{X}(L)$$
ya que si esto no sucediera, por (2.2), tendríamos $|\phi(V^{\frac{n-1}{2}(di)d})| < |V^{\frac{n+1}{2}(di)}|$ y entonces $\mathbf{L} \notin \mathcal{SDH}_n$ por Lema 2.5.2.

  Supongamos que existe U_1 maximal tal que $U_1 \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$, entonces por el Lema 2.5.7, $U_1 \notin \overline{V^{\frac{n-1}{2}(di)}}$, y como U_1 es maximal, $U_1 \notin \overline{V^{\frac{n-1}{2}(di)d}}$, lo que contradice el hecho de que $V^{\frac{n-1}{2}(di)d} = \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Hemos probado así que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$.

- De manera similar, si n es par, U es un ultrafiltro y consideramos el subconjunto creciente $V = \{U\}$ entonces

$$\overline{V^{\frac{n}{2}(di)}} = \mathbb{X}(\mathbf{L}),$$

ya que si esto no pasara, por (2.3), tendríamos $|\phi(V^{\frac{n}{2}(di)})| \leq |V^{\frac{n}{2}(di)d}|$, lo que contradice que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ (Lema 2.5.2). Supongamos ahora que existe $\phi(U_1) \in Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ tal que $\phi(U_1) \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$, entonces $\phi(U_1) \notin \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{F}^{U,i}$ ya que n es par y por el Lema 2.5.7 tenemos que $\phi(U_1) \notin \overline{V^{\frac{n}{2}(di)}}$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que si n es par, $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$.

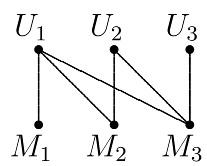
Para probar la recíproca, supongamos que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$ si n es impar y $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$ si n es par.

Sea V un subconjunto clopen creciente de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$, $V \neq \emptyset$, y sea U un ultrafiltro en V. Consideremos el subconjunto clopen creciente formado por U, es decir, sea $V_1 = \{U\}$.

Si n es impar, por el Lema 2.5.7, $\overline{V_1^{\frac{n-1}{2}(di)}} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$, y por hipótesis, $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \overline{V_1^{\frac{n-1}{2}(di)}}$. Ya que $V_1 \subseteq V$ resulta $V^{\frac{n-1}{2}(di)d} = \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Por lo tanto $\phi(V^{\frac{n-1}{2}(di)d}) = \phi(V^{\frac{n-1}{2}(di)di}) = V^{\frac{n+1}{2}(di)} = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y en consecuencia, $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$.

Si n es par entonces $\overline{V_1^{\frac{n}{2}(di)}} = \bigcup_{j=0}^{n} \mathbb{F}^{U,j}$, y por hipótesis, $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}^{U,i}$. Así, $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} \mathbb{F}^{U,j}$, es decir, $V^{\frac{n}{2}(di)} = \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Luego, $\phi(V^{\frac{n}{2}(di)}) = V^{\frac{n}{2}(di)d}$, lo que implica que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$. $\square$

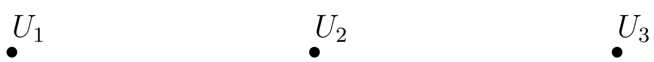
Sea $\mathbf{L}$ una *dh*-álgebra en la cual el conjunto de maximales y minimales de su espacio de filtro primos está dado por :



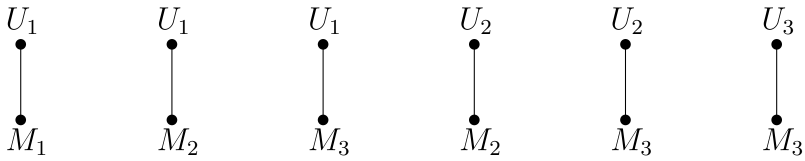
Aplicaremos el Teorema 2.5.8 para determinar cuáles son los $n \in \omega$, tales que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$.

A continuación mostramos los *fences* de longitud n, para $n = 0, 1, 2$:

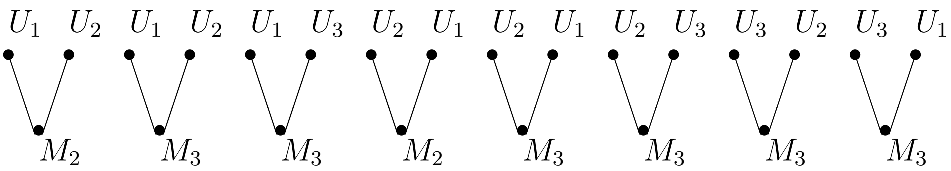
Fences de longitud 0



Fence de longitud 1:



Fences de longitud 2:



Luego, tenemos que

$$\begin{array}{ll} \mathbb{F}^{U_1,0} = \{U_1\} & \mathbb{F}^{U_2,0} = \{U_2\} \\ \mathbb{F}^{U_1,1} = \{U_1, M_1, M_2, M_3\} & \mathbb{F}^{U_2,1} = \{U_2, M_2, M_3\} \\ \mathbb{F}^{U_1,2} = \{U_1, U_2, U_3, M_2, M_3\} & \mathbb{F}^{U_2,2} = \{U_1, U_2, U_3, M_2, M_3\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{F}^{U_3,0} = \{U_3\} \\ \mathbb{F}^{U_3,1} = \{U_3, M_3\} \\ \mathbb{F}^{U_3,2} = \{U_1, U_2, U_3, M_3\} \end{array}$$

Observemos que

(1) $\bigcup_{i=0}^{0} \mathbb{F}^{U_1,i} = \{U_1\}$; (2) $\bigcup_{i=0}^{1} \mathbb{F}^{U_3,i} = \{U_3, M_3\}$; (3) $\bigcup_{i=0}^{2} \mathbb{F}^{U_1,i} = \overline{\mathbb{X}(L)}$

(4) $\bigcup_{i=0}^{2} \mathbb{F}^{U_2,i} = \{U_1, U_2, U_3, M_2, M_3\}$; (5) $\bigcup_{i=0}^{2} \mathbb{F}^{U_3,i} = \{U_1, U_2, U_3, M_3\}$

Luego podemos asegurar, por el Teorema 2.5.8, que $\mathbf{L} \notin \mathcal{SDH}_1$ (por (1)), $\mathbf{L} \notin \mathcal{SDH}_2$ (por (2)), pero $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_3$ (por (3), (4) y (5)), y en consecuencia, $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_n$ para $n \geq 3$.

De este mismo teorema se desprenden inmediatamente los siguientes resultados que nos dan una simple caracterización para que un álgebra subdirectamente irreducible de De Morgan Heyting pertenezca a la variedad $\mathcal{SDH}_2$ ó $\mathcal{SDH}_3$.

Corolario 2.5.9. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra finita en* $\mathcal{DH}$ *tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es conexo. Entonces* $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_2$ *si y sólo si* $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$*, es un grafo bipartido completo, es decir,* $\phi(U_1) \subseteq U_2$ *para cualquier par de ultrafiltros* U_1*,* U_2 *de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$*.*

Demostración. Supongamos que $L \in \mathcal{SDH}_2$ y que U_1, U_2 son ultrafiltros de L. Por Teorema 2.5.8 tenemos que $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \mathbb{F}^{U_2,0} \cup \mathbb{F}^{U_2,1}$. Como $\phi(U_1)$ es un elemento minimal, necesariamente, $\phi(U_1) \in \mathbb{F}^{U_2,1}$ y así $\phi(U_1) \subseteq U_2$.

Para probar la recíproca, consideremos un ultrafiltro U_2 de $\mathbf{L}$ y un elemento minimal M de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$. Como M es minimal, es de la forma $M = \phi(U_1)$ para algún ultrafiltro U_1. Por hipótesis, $\phi(U_1) \subseteq U_2$, por lo que $\phi(U_1) \in \mathbb{F}^{U_2,1}$ y así $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \mathbb{F}^{U_2,0} \cup \mathbb{F}^{U_2,1}$. $\square$

Corolario 2.5.10. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra finita en* $\mathcal{DH}$ *cuyo espacio dual es conexo.* $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_3$ *si y sólo si para todo par de ultrafiltros* U_1, U_2 *existe un elemento minimal de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *tal que* $M \subseteq U_1$ *y* $M \subseteq U_2$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_3$ y sean U_1, U_2 dos ultrafiltros distintos de $\mathbf{L}$. Por Teorema 2.5.8 $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \mathbb{F}^{U_2,0} \cup \mathbb{F}^{U_2,1} \cup \mathbb{F}^{U_2,2}$. Luego $U_1 \in \mathbb{F}^{U_2,0} \cup \mathbb{F}^{U_2,1} \cup \mathbb{F}^{U_2,2}$. Ahora bien, puesto que U_1 es un ultrafiltro distinto de U_2, necesariamente $U_1 \in \mathbb{F}^{U_2,2}$, es decir, existe un *fence* $\{U_2, M, U_1\}$ donde M es un elemento minimal tal que $M \subseteq U_1$ y $M \subseteq U_2$.

Para probar la recíproca, sea U un ultrafiltro de $\mathbf{L}$. Si $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \{U\}$, entonces $\mathbf{L} \in \mathcal{SDH}_1$ y por lo tanto a $\mathcal{SDH}_3$. Supongamos que existe otro ultrafiltro U_1 distinto de U, por hipótesis, existe un elemento minimal M tal que $M \subseteq U$ y $M \subseteq U_1$. Luego, $U_1 \in \mathbb{F}^{U,2}$ y de esta manera $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq \mathbb{F}^{U,0} \cup \mathbb{F}^{U,1} \cup \mathbb{F}^{U,2}$, lo que demuestra el resultado. $\square$

Capítulo 3

Subálgebras de Heyting y de De Morgan Heyting

El cálculo de subálgebras es una herramienta básica para la descripción y estudio de cualquier variedad. En [9], Cignoli, Lafalce y Petrovich establecen una dualidad entre los subreticulados de un retiulado distributivo acotado y ciertas relaciones de preorden sobre su espacio de Priestley asociado. M. Adams prueba en [2] que toda subálgebra de Heyting está a asociada a un conjunto separador definido sobre su espacio dual. El objetivo de este capítulo es poder establecer un resultado similar para las álgebras de De Morgan Heyting. Para esto, en primer lugar, en la Sección 1, probamos que cada subálgebra de Heyting tiene asociada, no sólo una relación de preorden, sino una relación de equivalencia sobre su espacio dual y establecemos las condiciones que tiene que tener ésta para que determine una subálgebra de Heyting. Esto nos permitirá, en la Sección 4, obtener una correspondencia biunívoca entre ciertas relaciones de equivalencia sobre un álgebra en la variedad $\mathcal{DH}$ y sus subálgebras. Esta correspondencia posibilitará recuperar y calcular de manera rápida a los elementos primos de una subálgebra finita utililando una única clase de equivalencia de su relación asociada, lo cual en general no es posible realizar para el caso de las álgebras de Heyting. Estos resultados fueron publicados en [8].

3.1. Caracterización de las subálgebras de Heyting

La clase de álgebras de Boole es un ejemplo familiar de álgebras de Heyting y es bien conocido que existe una correspondencia entre las subálgebras de un álgebra de Boole y ciertas relaciones de equivalencia definidas sobre su espacio de Stone (ver, por ejemplo, [13]). En esta sección extenderemos esta correspondencia a la clase de álgebras de Heyting y más adelante a la clase de álgebras de De Morgan Heyting. Para esto utilizaremos la dualidad descripta en la Sección 2.1.

Dada un álgebra de Heyting **L** siempre es posible definir una relación de equivalencia sobre su espacio dual asociado de la siguiente manera.

Definición 3.1.1. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra de Heyting, para cada $L_1 \subseteq L$, definimos el conjunto

$$\mathbb{E}(\mathbf{L}_1) = \{(P, Q) \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) \times \mathbb{X}(\mathbf{L}) : P \cap L_1 = Q \cap L_1\}$$

Claramente, $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ en donde la clase determinada por un elemento $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ será denotada por $\overline{P}$ y el conjunto cociente asociado a la relación por $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$. Cignoli y Adams en [9] definieron esta relación en reticulados distributivos acotados y la asociaron con los subreticulados distributivos acotados, pero considerando la inclusión en lugar de la igualdad, lo que la convierte en un pre-orden, pero no necesariamente en una relación de equivalencia.

Las siguientes son algunas propiedades importantes que se desprenden de esta relación de equivalencia cuando es definida sobre álgebras de Heyting. La primera nos ayudará a determinar un orden sobre el conjunto cociente $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ como veremos más adelante.

Proposición 3.1.2. *Sea $\mathbf{L}$ un álgebra de Heyting. Si consideramos la relación de equivalencia $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ asociada con la subálgebra $\mathbf{L}_1$, entonces se verifica la condición*

$$(H) \qquad \textit{si } P \subseteq Q \textit{ entonces } \overline{P} \subseteq \overline{Q}^{d},$$

para todo $P, Q \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$.

Demostración. Consideremos el homomorfismo de Heyting (inmersión) $i : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}$ tal que $i(x) = x$. Entonces, por la dualidad de Priestley sabemos que $\mathbb{X}(i) : \mathbb{X}(\mathbf{L}) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ definido por

$$\mathbb{X}(i)(P) = i^{-1}(P) = P \cap L_1$$

es un h-morfismo (para la definición de h-morfirmo ver Sección 1.2.)

Ahora, supongamos $P \subseteq Q$, entonces $P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1$, es decir, $i^{-1}(P) \subseteq i^{-1}(Q)$. Consideremos $P_1 \in \overline{P}$, por la definición de i tenemos que $i^{-1}(P_1) \subseteq i^{-1}(Q)$. Ya que $\mathbb{X}(i)$ es un h-morfismo, existe $P' \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $P_1 \subseteq P'$ y $\mathbb{X}(i)(P') = i^{-1}(Q)$, lo que implica $i^{-1}(P') = i^{-1}(Q)$, y entonces $P' \cap L_1 = Q \cap L_1$. Así, $P_1 \subseteq P'$ con $\overline{P'} = \overline{Q}$. Esto muestra que $\overline{P} \subseteq \overline{Q}^{d}$. □

Lema 3.1.3. *Las clases de equivalencia determinadas por la relación $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ son conjuntos cerrados y convexos.*

Demostración. Sea $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y $P \cap L_1 = Q \in \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$. Si consideramos el h-morfismo $\mathbb{X}(i)$ de la demostración de la Proposición 3.1.2, como el conjunto $\{Q\} \subseteq \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ es cerrado y $\mathbb{X}(i)$ es una aplicación continua, resulta que $\mathbb{X}(i)^{-1}(\{Q\}) = \{R \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) : R \cap L_1 = Q\} = \overline{P}$ es cerrado. Por otra parte, supongamos que $P_1, P_2 \in \overline{P}$ y $P_1 \subseteq R \subseteq P_2$, entonces $P_1 \cap L_1 \subseteq R \cap L_1 \subseteq P_2 \cap L_1 = P_1 \cap L_1$ y, en consecuencia, $P_1 \cap L_1 = R \cap L_1$, lo que muestra que $R \in \overline{P}$. □

Claramente es posible definir una relación de orden parcial sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ dada por

$$\overline{P} \leq \overline{Q} \quad \text{si y sólo si} \quad P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1.$$

Lo que mostramos a continuación es que, en el caso de álgebras de Heyting, este orden se puede caracterizar en función de ciertas condiciones que deben cumplir los elementos del conjunto cociente.

Proposición 3.1.4. *El orden $\leq$ definido anteriormente es equivalente a*

$$\overline{P} \leq \overline{Q} \text{ si y sólo si } \overline{P} \subseteq \overline{Q}^d. \tag{3.1}$$

Demostración. Supongamos que $\overline{P} \subseteq \overline{Q}^d$, entonces existe $Q' \in \overline{Q}$ tal que $P \subseteq Q'$. Luego, $P \cap L_1 \subseteq Q' \cap L_1 = Q \cap L_1$, por lo que $\overline{P} \leq \overline{Q}$.

Recíprocamente, supongamos que $\overline{P} \leq \overline{Q}$, es decir, $P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1$. En la demostración de la Proposición 3.1.2 mostramos que esto implica $\overline{P} \subseteq \overline{Q}^d$, lo que finaliza la demostración. $\square$

Luego, si $\mathbf{L}$ es un álgebra de Heyting y $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es la relación de equivalencia asociada a la subálgebra $\mathbf{L}_1$, es posible definir un orden sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ dado por

$$\overline{P} \leq \overline{Q} \iff P \cap L_1 = Q \cap L_1 \iff \overline{P} \subseteq \overline{Q}^d. \tag{3.2}$$

Proposición 3.1.5. *Dada un álgebra de Heyting $\mathbf{L}$ y una subálgebra $\mathbf{L}_1$ de $\mathbf{L}$, el conjunto cociente $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ con la topología cociente y el orden definido en (3.1) es homoeomorfo e isomorfo en el orden al espacio $\mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$. En particular, $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es un espacio de Heyting.*

Demostración. En primer lugar, probaremos que $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ son homeomorfos como espacios topológicos. Sabemos que $i : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}$ es un homomorfismo inyectivo de álgebras de Heyting. Ya que i es 1-1, es fácil ver que $\mathbb{X}(i)$ es una aplicación sobreyectiva. Así, la aplicación $\mathbb{X}(i) : \mathbb{X}(\mathbf{L}) \to \mathbb{X}(\mathbf{L})$ definida por $\mathbb{X}(i)(P) = i^{-1}(P) = P \cap L_1$ es un h-morfismo sobreyectivo.

Como $\mathbb{X}(i) : \mathbb{X}(\mathbf{L}) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ es una función continua y $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ entonces existe una función continua $h : \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ tal que $\mathbb{X}(i) = h \circ \pi$, donde π es la aplicación canónica.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}(\mathbf{L}) \arrow[r, "\mathbb{X}(i)"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{X}(\mathbf{L}_1) \\
\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1) \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Además, como $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ son espacios compactos de Hausdorff y $\mathbb{X}(i)$ una función continua sobreyectiva, entonces $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ son homeomorfos como espacios topológicos.

Para probar que h es un isomorfismo de orden. Supongamos $\overline{P} \leq \overline{Q}$, por (3.2), $P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1$, es decir, $h(\overline{P}) \subseteq h(\overline{Q})$.

Recíprocamente, supongamos $h(\overline{P}) \subseteq h(\overline{Q})$, entonces $P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1$. Como $\mathbb{X}(i)$ es un h-morfismo, existe $P' \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $P \subseteq P'$ y $\mathbb{X}(i)(P') = Q \cap L_1$. Luego, $\overline{P} \leq \overline{P'} = \overline{Q}$

Como h y h^{-1} son isomorfismos de orden entonces ambas son h-morfismos. Luego, h es un isomorfismo entre espacios de Heyting. □

La condición (H) dada en la Proposición 3.1.2 nos lleva a considerar la siguiente notación y definición.

Dado un espacio de Heyting $\mathbf{H}$ y $\mathcal{E}$ una relación de equivalencia sobre $\mathbf{H}$, notaremos por $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ a la familia de subconjuntos $V \in \mathbb{D}(\mathbf{H})$ que satisfacen la siguiente condición:

$$(S) \qquad \text{si } a \in V \text{ entonces } \overline{a} \subseteq V,$$

donde $\overline{a}$ es la clase de equivalencia del elemento a. Es decir, V es unión de ciertas clases de equivalencia.

Definición 3.1.6. Dado un espacio de Heyting $\langle H, \leq, \tau \rangle$, una relación de equivalencia $\mathcal{E}$ sobre $\mathbf{H}$ es llamada **relación de Heyting** si las siguientes condiciones se satisfacen:

(1) $\overline{a}$ es cerrado y convexo para cada $a \in H$.

(2) Para cada $a, b \in H$ tales que $a \leq b$ se tiene que $\overline{a} \subseteq \overline{b}^d$.

(3) Si $\overline{a} \neq \overline{b}$ entonces existe $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ que **separa** a a y a b, es decir, existe $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ tal que $a \in V$ y $b \notin V$ ó $b \in V$ y $a \notin V$.

La siguiente proposición muestra que para cada subálgebra de Heyting existe una *relación de Heyting* sobre su espacio de filtros primos asociada a ella. Recordemos que $\sigma(a) = \{P \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) : a \in P\}$ es el subconjunto abierto, cerrado y creciente de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ asociado al elemento $a \in L$.

Proposición 3.1.7. *Si $\mathbf{L}_1$ es una subálgebra de un álgebra de Heyting $\mathbf{L}$, entonces $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es una relación de Heyting sobre el h-espacio $\mathbb{X}(\mathbf{L})$.*

Demostración. Ya vimos que $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})$. Por el Lema 3.1.3, los elementos de $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ son cerrados y convexos, es decir, se verifica la condición (1) de la Definición 3.1.6. Además, por la Proposición 3.1.2, la condición (2) también se sigue. Resta ver que se satisface la condición (3).

Para esto, supongamos que $\overline{P}, \overline{Q} \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ y $\overline{P} \neq \overline{Q}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\overline{P} \not\leq \overline{Q}$, es decir, por (3.2), $P \cap L_1 \nsubseteq Q \cap L_1$. Entonces, existe $a \in P \cap L_1$ tal que $a \notin Q \cap L_1$. Luego, $P \in \sigma(a)$ pero $Q \notin \sigma(a)$. Probemos que $\sigma(a) \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$.

Sea $R \in \sigma(a)$ y $S \in \overline{R}$, entonces $R \cap L_1 = S \cap L_1$. Ya que $a \in L_1$, se sigue que $a \in R \cap L_1$, por lo que $a \in S$ y así $S \in \sigma(a)$. Esto muestra que $\overline{R} \subseteq \sigma(a)$, lo que completa la demostración. □

Proposición 3.1.8. *Dado un espacio de Heyting* $\mathbf{H}$ *y una relación de Heyting* $\mathcal{E}$ *sobre* $\mathbf{H}$*, la relación binaria* $\preceq$ *definida por:*

$$\overline{a} \preceq \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \subseteq \overline{b}^{d}$$

es una relación de orden sobre $\mathbf{H}/\mathcal{E}$*.*

Demostración. Se verifica inmediatamente que $\preceq$ está bien definida, es reflexiva y transitiva. Para ver que cumple con la propiedad antisimétrica, supongamos que $\overline{a} \preceq \overline{b}$ y $\overline{b} \preceq \overline{a}$, entonces $a \leq b'$ y $b' \leq a'$, donde $b' \in \overline{b}$ y $a' \in \overline{a}$. Como $\overline{a}$ es convexa, resulta $b' \in \overline{a}$, es decir, $\overline{a} = \overline{b}$. □

Observemos que para que $\preceq$ sea un orden no es necesaria la condición (3) de la Definición 3.1.6.

El siguiente resultado muestra que cada relación de Heyting definida sobre un h-espacio tiene asociada una subálgebra de Heyting.

Proposición 3.1.9. *Dado un espacio de Heyting* $\mathbf{H}$*, si* $\mathcal{E}$ *es una relación de Heyting sobre* $\mathbf{H}$ *entonces* $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ *es una subálgebra de Heyting de* $\mathbb{D}(\mathbf{H})$*.*

Demostración. Claramente, $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ es subreticulado de $\mathbb{D}(\mathbf{H})$ y $\emptyset, H \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$. Falta ver, que es cerrado por $\rightarrow$, es decir, dados $V_1, V_2 \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$, $(V_1 \cap V_2^c)^{dc} \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$.

Como $V_1, V_2 \in \mathbb{D}(\mathbf{H})$ entonces $(V_1 \cap V_2^c)^{dc} \in \mathbb{D}(\mathbf{H})$ pues $\mathbb{D}(\mathbf{H})$ es álgebra de Heyting.

Veamos que $(V_1 \cap V_2^c)^{dc}$ verifica la condición (S). Sea $\overline{a}$ una clase asociada a $\mathcal{E}$ y $a' \in \overline{a}$. Si suponemos que $a' \in (V_1 \cap V_2^c)^d$, entonces $a' \leq b$ con $b \in V_1 \cap V_2^c$. Luego, por la condición (2) de la Definición 3.1.6, resulta que $\overline{a'} \subseteq \overline{b}^d$. Pero $\overline{b} \subseteq V_1 \cap V_2^c$ pues V_1 y $V_2 \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$, lo que prueba que $\overline{a} = \overline{a'} \subseteq \overline{b}^d \subseteq (V_1 \cap V_2^c)^d$.

Esto prueba que $(V_1 \cap V_2^c)^d$ es unión de clases de equivalencia, y, en consecuencia, $(V_1 \cap V_2^c)^{dc}$ también.

Luego, $(V_1 \cap V_2^c)^{dc} \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ y, $\langle \mathbb{S}(\mathcal{E}), \cap, \cup, \rightarrow, \emptyset, H \rangle$ es una subálgebra de Heyting de $\mathbb{D}(\mathbf{H})$. □

Hemos probado que existe una correspondencia entre subálgebras de Heyting y relaciones de Heyting dada por los operadores $\mathbb{E}$ y $\mathbb{S}$. Tenemos las siguientes situaciones:

- $$\begin{array}{ccccc} \mathbf{L}_1 & \rightsquigarrow & \mathbb{E}(\mathbf{L}_1) & \rightsquigarrow & \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Subálg. de } \mathbf{L}_1 & & \text{Rel. de Heyting sobre } \mathbb{X}(\mathbf{L}) & & \text{Subálg. sobre } \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \rightsquigarrow & \mathbb{S}(\mathcal{E}) & \rightsquigarrow & \mathbb{E}(\mathbb{S}(\mathcal{E})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rel. de Heyting sobre } \mathbf{H} & & \text{Subálg. de } \mathbb{D}(\mathbf{H}) & & \text{Rel. de Heyting sobre } \mathbb{X}(\mathbb{D}(\mathbf{H})) \end{array}$$

A continuación mostramos que esta correspondencia es biunívoca. Para esto, recordemos que dada un álgebra de Heyting $\mathbf{L}$, la aplicación $\sigma : \mathbf{L} \to \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ definida por $\sigma(a) = \{P \in \mathbb{X}(L) : a \in P\}$ es un isomorfismo entre álgebras de Heyting. Además, dado un espacio de Heyting $\mathbf{H}$, la aplicación $\epsilon_{\mathbf{H}}(x) = \{V \in \mathbb{D}(\mathbf{H}) : x \in V\}$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden entre los espacios $\mathbf{H}$ y $\mathbb{X}(\mathbb{D}(\mathbf{H}))$.

Proposición 3.1.10. *Para cada subálgebra de Heyting $\mathbf{L}_1$ de un álgebra de Heyting $\mathbf{L}$, $\mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)) = \sigma_L(\mathbf{L}_1)$.*

Demostración. Supongamos $\sigma(a) \in \sigma(\mathbf{L}_1)$ y probemos que $\sigma(a) \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$. Consideremos $P \in \sigma(a)$ y $Q \in \overline{P}$, entonces $Q \cap L_1 = P \cap L_1$. Como $a \in L_1 \cap P$, resulta $a \in Q$, es decir, $Q \in \sigma(a)$.

Esto muestra que $\sigma(\mathbf{L}_1) \subseteq \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$.

Para probar la otra inclusión, supongamos $V \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$, como V es abierto, cerrado y creciente, $V = \sigma(a)$ para algún $a \in L$.

Supongamos que $a \notin L_1$. Sea F el filtro de $\mathbf{L}$ generado por $a^i \cap L_1$. Ya que $a^d \cap F = \emptyset$, por el teorema de Birkhoff-Stone, existe $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $a^i \cap L_1 \subseteq P$ y $a \notin P$. Sea I el ideal de $\mathbf{L}$ generado por $(L \setminus P) \cap L_1$. Ya que $I \cap a^i = \emptyset$, otra vez por el teorema de Birkhoff-Stone, existe $Q \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $a \in Q$ y $Q \cap L_1 \cap (L \setminus P) = \emptyset$, es decir, $Q \cap L_1 \subseteq P \cap L_1$ y por lo tanto, $\overline{Q} \leq \overline{P}$. Ya que $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ es una relación de Heyting, resulta, por (3.2), que existe $P' \in \overline{P}$ tal que $Q \subseteq P'$. Luego, como $\sigma(a)$ es creciente, tenemos que $P' \in \sigma(a)$ y ya que $\sigma(a) \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$ resulta $\overline{P} \subseteq \sigma(a)$ y, en consecuencia $a \in P$, lo cual es una contradicción.

Luego, $a \in L_1$ y $\mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)) \subseteq \sigma(\mathbf{L}_1)$. □

Proposición 3.1.11. *Sea $\mathbf{H}$ un espacio de Heyting y $\mathcal{E}$ una relación de Heyting sobre $\mathbf{H}$ entonces $(\epsilon(x), \epsilon(y)) \in \mathbb{E}(\mathbb{S}(\mathcal{E}))$ si y sólo si $(x, y) \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Supongamos que $(\epsilon(x), \epsilon(y)) \notin \mathbb{E}(\mathbb{S}(\mathcal{E}))$ entonces, $\epsilon(x) \cap \mathbb{S}(\mathcal{E}) \neq \epsilon(y) \cap \mathbb{S}(\mathcal{E})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$, tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Luego, como $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$, V es unión de clases, por lo que $\overline{x} \neq \overline{y}$ y entonces $(x, y) \notin \mathcal{E}$.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que $(x, y) \notin \mathcal{E}$. Entonces $\overline{x} \neq \overline{y}$. Por la condición (3) de la Definición 3.1.6, podemos suponer que existe $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Luego, $\epsilon(x) \cap \mathbb{S}(\mathcal{E}) \neq \epsilon(y) \cap \mathbb{S}(\mathcal{E})$, y, por lo tanto, $(\epsilon(x), \epsilon(y)) \notin \mathbb{E}(\mathbb{S}(\mathcal{E}))$. □

A partir de estos resultados mostramos que hay una correspondencia biunívoca entre las subálgebras de Heyting de un álgebra de Heyting dada y las relaciones de Heyting de su espacio dual.

3.2. Subálgebras de Heyting finitas

Si consideramos álgebras de Heyting finitas, es posible demostrar que no es necesario pedir las tres condiciones dadas en la Definición 3.1.6 para que una relación de equivalencia sea de Heyting. Este hecho simplifica los cálculos a la hora de encontrar todas las subálgebras de un álgebra de Heyting dada.

A continuación probaremos que si $\mathbf{H}$ es un espacio de Heyting finito y $\mathcal{E}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{H}$, sólo es suficiente que $\mathcal{E}$ cumpla la condición (2) de la Definición 3.1.6 para que sea una relación de Heyting. Para esto nos valdremos, en primer lugar, del siguiente resultado.

Lema 3.2.1. *Si $\mathbf{H}$ es un espacio de Heyting finito y $\mathcal{E}$ una relación de equivalencia sobre $\mathbf{H}$ que satisface la condición (2) de la Definición 3.1.6 entonces $\overline{a}^{dc}$ es un conjunto abierto, cerrado y creciente que verifica la condición (S), es decir, $\overline{a}^{dc} \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$.*

Demostración. Sea $\overline{a} \in \mathbf{H}/\mathcal{E}$, $\overline{a}^d$ es abierto y cerrado pues la topología en $\mathbf{H}$ es la discreta, por lo que $\overline{a}^{dc}$ es un conjunto abierto, cerrado y creciente.

Veamos que verifica la condición (S). Supongamos que $b \in \overline{a}^d$ y $b_1 \in \overline{b}$, entonces $b \leq a_1$, con $a_1 \in \overline{a}$. Luego, por la condición (2) resulta $\overline{b_1} = \overline{b} \subseteq \overline{a_1}^d = \overline{a}^d$ y, por lo tanto $b_1 \in \overline{a}^d$.

Esto muestra que $\overline{a}^d$ cumple la condición (S), y por consiguiente, $(\overline{a})^{dc}$ también. □

Proposición 3.2.2. *Si $\mathbf{H}$ es un espacio de Heyting finito entonces, para cada relación de equivalencia $\mathcal{E}$ definida sobre $\mathbf{H}$ se tiene que la condición (2) implica las condiciones (1) y (3) de la Definición 3.1.6.*

Demostración. Veamos primero que (2) implica (1). Sea $\overline{a}$ una clase de equivalencia asociada a $\mathcal{E}$ y supongamos $a \leq b \leq a_1$, con $a, a_1 \in \overline{a}$. Luego, por la condición (2) tenemos que $\overline{a} \subseteq \overline{b}^d$ y $\overline{b} \subseteq \overline{a}^d$, es decir, existe $b_1 \in \overline{b}$ tal que $a_1 \leq b_1$ y existe $a_2 \in \overline{a}$ tal que $b_1 \leq a_2$. Reiterando este procedimiento, tenemos una sucesión del tipo

$$a \leq b \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \ldots$$

y como H es finito en algún momento obtenemos $a_n = b_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\overline{a} = \overline{b}$. Esto indica que $\overline{a}$ es convexa. Además, ya que la topología en $\mathbf{H}$ es la discreta, $\overline{a}$ es un conjunto cerrado.

Para deducir la condición (3) de la (2), supongamos que $\overline{x} \neq \overline{y}$. Primero observemos que de (1) y (2) se tiene que $\preceq$ (definida en la Proposición 3.1.8) es un orden. Luego, $\overline{y} \not\preceq \overline{x}$ ó $\overline{x} \not\preceq \overline{y}$. En el primero de los casos, si consideramos el conjunto $V = \overline{x}^{dc}$, tenemos que $x \notin V$, pero $y \in V$. En efecto, si suponemos que $y \notin (\overline{x})^{dc}$, entonces $y \in \overline{x}^d$, es decir, existe $x_1 \in \overline{x}$ tal que $y \leq x_1$, pero entonces $\overline{y} \preceq \overline{x}$, absurdo. Además, por el Lema 3.2.1, $\overline{x}^{dc} \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$. Luego, existe $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ tal que separa a y y a x. Para el segundo caso, basta considerar al conjunto $V = \overline{y}^d$ y realizar un razonamiento análogo al anterior para mostrar que $x \in V$ pero $y \notin V$. Esto muestra que se verifica la condición (3). $\square$

Recordemos que si $\mathbf{L}$ es un álgebra de Heyting finita, los filtros primos de $\mathbf{L}$ están generados por sus elementos primos. Esto permite establecer la siguiente relación entre los elementos de $\mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$ y $\mathbf{L}_1$.

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathbf{L}$ un álgebra de Heyting finita y $\mathbf{L}_1$ una subálgebra de $\mathbf{L}$. Si $V = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$, entonces $V = \bigcup_{i=1}^n \sigma(p_i)$, donde p_i es el elemento primo que genera a P_i para cada $i = 1, 2, \ldots n$. Además, $\displaystyle\bigvee_{i=1}^n p_i \in L_1$.*

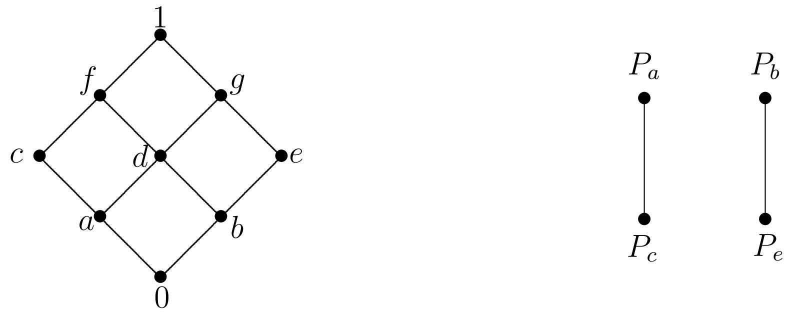
Demostración. Supongamos $V = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$. Sea p_i el elemento primo que genera a P_i, para cada i. Claramente, $V \subseteq \bigcup_{i=1}^n \sigma(p_i)$.

Para probar la otra inclusión, supongamos $Q \in \bigcup_{i=1}^n \sigma(p_i)$, entonces $p_i \in Q$ para algún i, por lo que $P_i \subseteq Q$ y como V es creciente $Q \in V$.

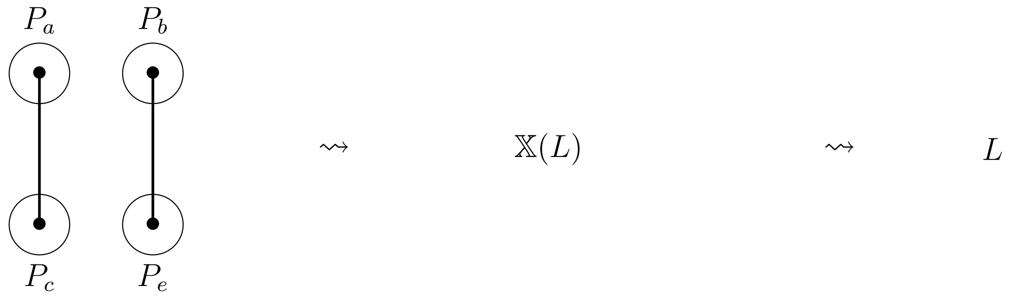
Luego, $V = \bigcup_{i=1}^n \sigma(p_i) = \sigma(\bigvee_{i=1}^n p_i)$ y por la demostración de la Proposición 3.1.10, $\bigvee_{i=1}^n p_i \in L_1$. $\square$

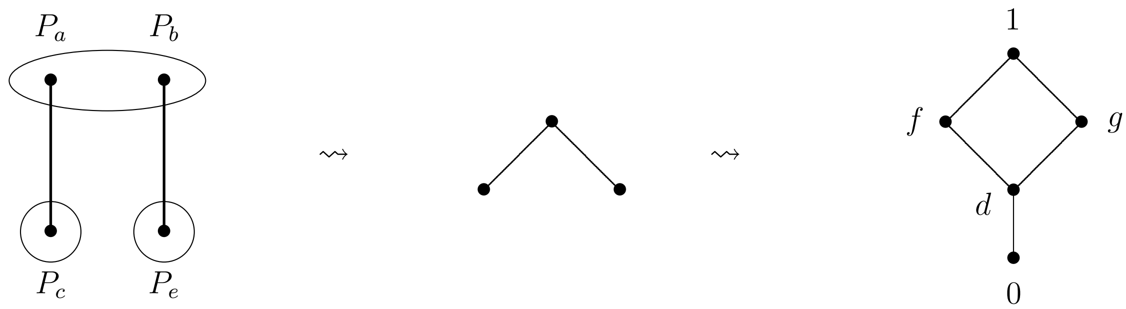
El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar todas las subálgebras de Heyting de un álgebra de Heyting finita $\mathbf{L}$. Para esto debemos determinar todas las relaciones de Heyting posibles sobre su espacio dual, es decir, todas las particiones posibles sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ que satisfacen la condición (2). Y finalmente, utilizando la Proposición 3.2.3 encontrar la subálgebra asociada a dicha partición.

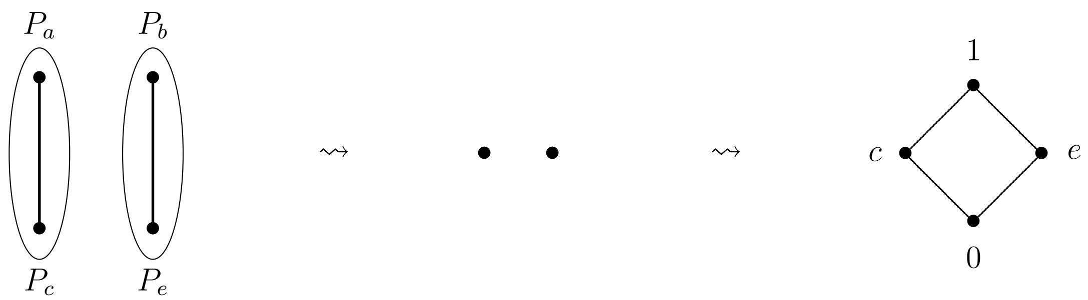
Consideremos el álgebra de Heyting $\mathbf{L}$ cuyo espacio dual se muestra también en la figura:

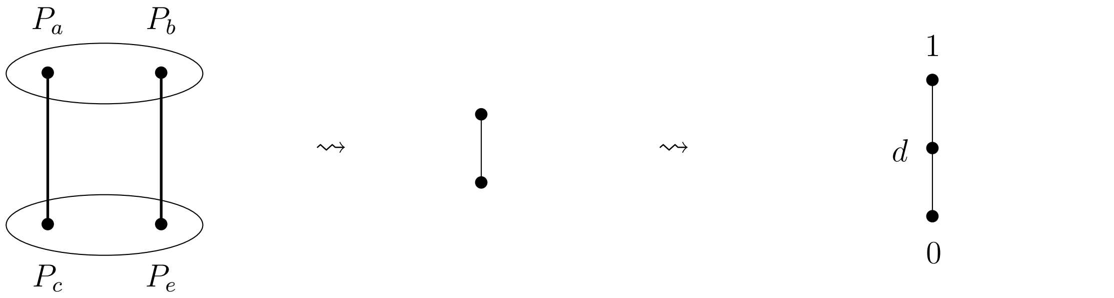


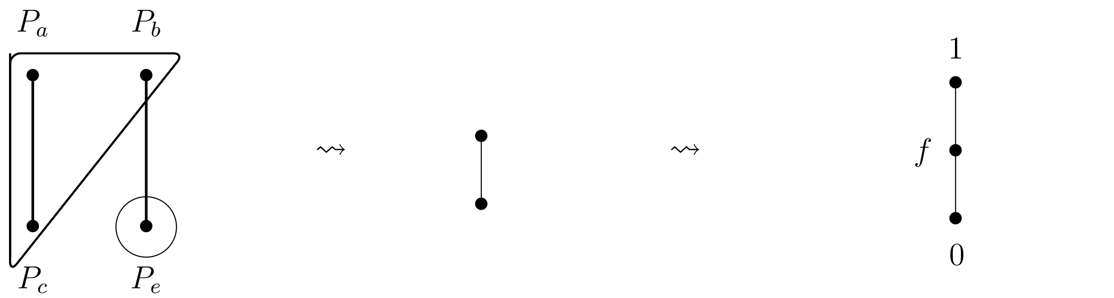
En lo que sigue, mostramos las particiones asociadas a las distintas relaciones de Heyting en $\mathbb{X}(\mathbf{L})$, seguidas de su espacio de Heyting asociado $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L}), \preceq \rangle$ y finalmente seguidas por la subálgebra asociada a dicha relación.

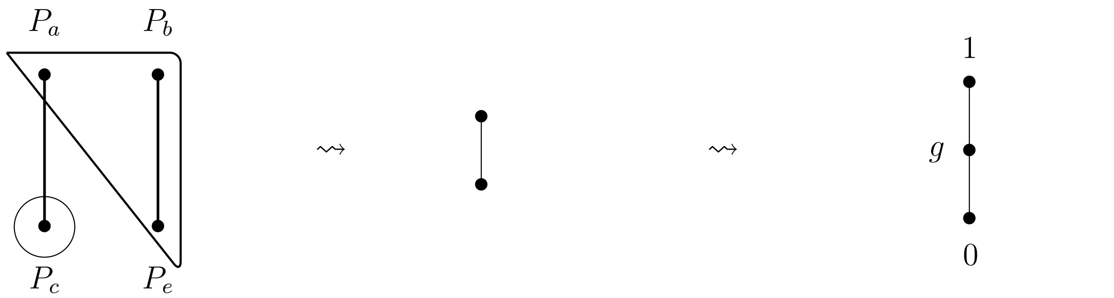


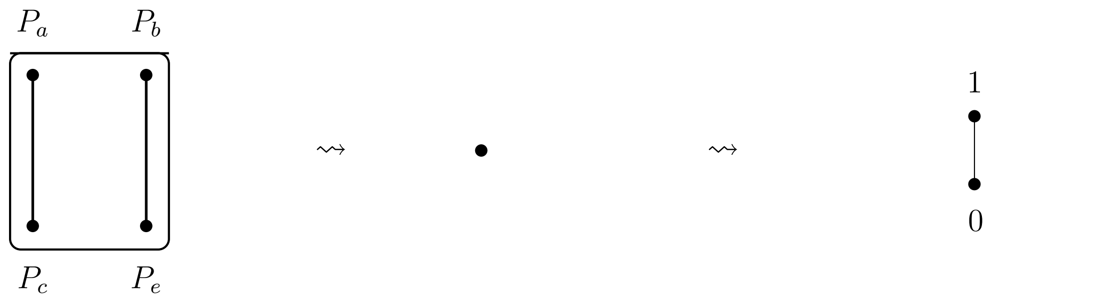


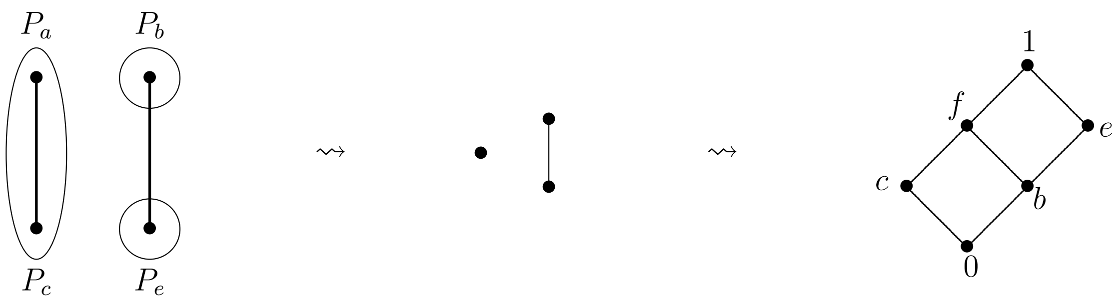


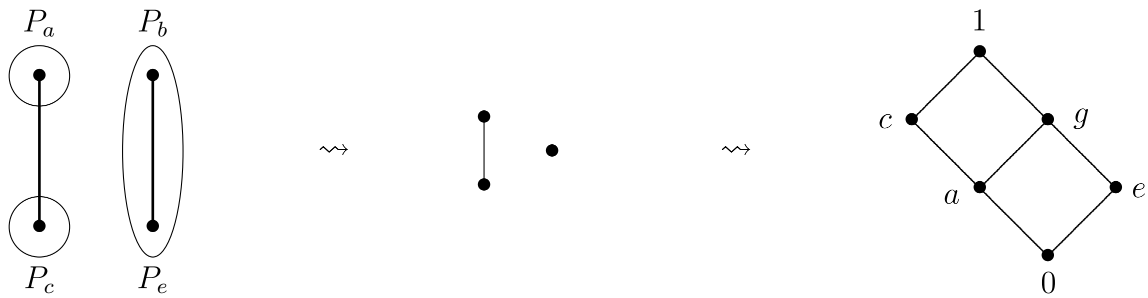

P_a P_b
P_c P_e
$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$
1
d
0


P_a P_b
P_c P_e
$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$
1
f
0

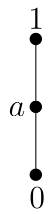

P_a P_b
P_c P_e
$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$
1
g
0


P_a P_b
P_c P_e
$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$
1
0


P_a P_b
P_c P_e
$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$
1
f
e
c
b
0

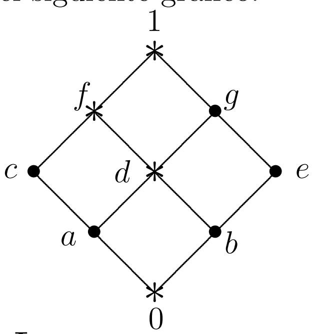


Observemos que la condición (2) es necesaria para que $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ sea una subálgebra de Heyting. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo. Si consideramos la relación de equivalencia $\mathcal{E}$ sobre el álgebra $\mathbf{L}$ del ejemplo anterior cuya partición asociada en $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathcal{E} = \{P_c, P_b, P_e\}, \{P_a\}\}$, claramente $\mathcal{E}$ no satisface la condición (2) por lo que $\mathbb{S}(\mathcal{E}) = \{\sigma(0), \sigma(a), \sigma(1)\}$

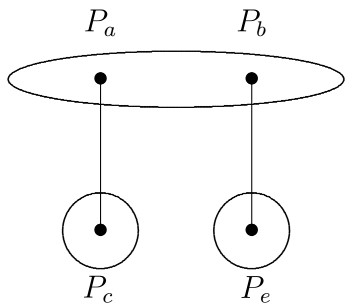


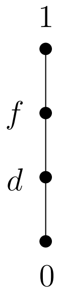
no es subálgebra de Heyting.

Consideremos ahora a $\mathbf{L}$ como reticulado distributivo junto con la subágebra señalada en la figura. La relación de equivalencia asociada a la subálgebra se muestra en el siguiente gráfico.



$\mathbf{L}_1$





$\mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$

En el ejemplo anterior vimos que esta relación, también determinaba la subálgebra de Heyting $\{0, d, f, g, 1\}$. Esto muestra que en reticulados distributivos a distintas subálgebras pueden corresponderles las mismas relaciones de equivalencia, hecho que no puede suceder si consideramos subálgebras de Heyting. Por otra parte, en reticulados distributivos puede resultar que clases que estén determinadas por elementos incomparables del álgebra, resulten comparables en el espacio dual de la subálgebra, situación que tampoco puede pasar si consideramos subálgebras de Heyting. Esto se deduce de manera rápida de la caracterización del orden definido entre las clases de equivalencia dada en la Proposición 3.1.8.

3.3. Aplicación: subálgebras de Heyting maximales

M. Adams definió en [2] el conjunto $S_{P,Q} = \{(T,P) \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) \times \{P\} : T \nsubseteq P \text{ y } T \subseteq Q\} \cup \{(T,Q) \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) \times \{Q\} : T \nsubseteq Q \text{ y } T \subseteq P\}$ con $P \neq Q$ de un álgebra de Heyting $\mathbf{L}$ y mostró que las subálgebras maximales de $\mathbf{L}$ están caracterizadas por un par de filtros primos distintos P y Q que verifican $S = P^d \cup \{Q\} = Q^d \cup \{P\}$, siendo su conjunto separador asociado (conjunto que caracteriza a cada subálgebra) el conjunto $S_{P,Q}$. A continuación mostraremos este resultado para el caso finito utilizando la caracterización para subálgebras de Heyting encontrada en la sección anterior.

Para esto, observemos que si $\mathbf{H}$ es un espacio de Heyting, y $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ son relaciones de Heyting tales que $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ es fácil ver que $\mathbb{S}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{E}')$. De hecho, existe un anti-isomorfismo entre el reticulado de subálgebras de un álgebra de Heyting y las relaciones de Heyting sobre su espacio dual.

Proposición 3.3.1. *Sea $\mathbf{H}$ un espacio de Heyting finito y $\mathcal{E}$ una relación de Heyting definida sobre $\mathbf{H}$. Si $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ es una subálgebra maximal entonces para todo $\overline{x} \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathcal{E}$, $\overline{x}$ tiene a lo sumo 2 elementos.*

Demostración. Sea $\mathcal{E}$ una relación de Heyting sobre $\mathbf{H}$ y $\mathcal{P} = \{\overline{x}_i\}_{i\in I}$ la partición asociada a $\mathcal{E}$. Supongamos que $\overline{x}_m$ tiene al menos 3 elementos para algún $m \in I$ y sea y un elemento minimal de $\overline{x}_m$. Consideremos la siguiente partición $\mathcal{P}_1$ que es un refinamiento de $\mathcal{P}$.

(*i*) Si $\overline{x}_i \prec \overline{x}_m$, consideramos cada elemento de $\overline{x}_i$ como un elemento unitario de la partición $\mathcal{P}_1$, es decir, para cada $z \in \overline{x}_i$ consideramos el elemento $P_z = \{z\}$.

(*ii*) $P_{m_1} = \{y\}$; $\qquad P_{m_2} = \overline{x}_m \setminus \{y\}$.

(*iii*) Si $\overline{x}_i \not\prec \overline{x}_m$, hacemos $P_{x_i} = \overline{x}_i$.

Claramente, $\mathcal{P}_1$ es una partición de $\mathbf{H}$. Probemos que su relación de equivalencia asociada $\mathcal{E}_1$ es una relación de Heyting.

Observemos primero que $\mathcal{E}_1$ cumple la condición (2) de la Definición 3.1.6, es decir, si $z \leq w$, $P_z \subseteq P_w^d$. En efecto, supongamos $z \leq w$ y consideremos los siguientes casos:

- Si $\overline{z} \not\preceq \overline{x}_m$ entonces $\overline{w} \not\preceq \overline{x}_m$. En efecto, si $\overline{w} \preceq \overline{x}_m$, por la definición de $\preceq$ dada en la Proposición 3.1.8, existe $t \in \overline{x}_m$ tal que $w \leq t$, pero entonces $z \leq w \leq t$ lo que implicaría que $\overline{z} \preceq \overline{x}_m$, contrario a nuestra suposición. Luego, $P_z = \overline{z}$ y $P_w = \overline{w}$ y como $\mathcal{E}$ es una relación de Heyting, tenemos que $P_z \subseteq P_w^d$.
- Si $\overline{z} \prec \overline{x}_m$ entonces $P_z = \{z\}$ y como $z \leq w$, resulta $P_z \subseteq P_w^d$.
- Si $\overline{z} = \overline{x}_m$ puede pasar que $P_z = \overline{x}_{m_1} = \{y\}$ en cuyo caso $P_z \subseteq P_w^d$ ó que $P_z = \overline{x}_{m_2} = \overline{x}_m \setminus \{y\}$ en cuyo caso $\overline{w} \not\preceq \overline{x}_m$ ó $\overline{w} = \overline{x}_m$. En el primero de los casos $P_w = \overline{w}$ y así $P_z = \overline{x}_{m_2} \subseteq P_w^d$ (pues $\overline{z} \subseteq \overline{w}^d$). Y en el segundo, $P_w = \overline{x}_{m_2}$ por lo que $P_z = \overline{x}_{m_2} \subseteq P_w^d$.

Esto prueba que $\mathcal{E}_1$ satisface la condición (2) de la Definición de relación de Heyting. Luego, como $\mathbf{H}$ es un espacio de Heyting finito, por la Proposición 3.2.2, $\mathcal{E}_1$ satisface las condiciones (1) y (3), lo que demuestra que es una relación de Heyting.

Finalmente, teniendo en cuenta que $\mathcal{P}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{E}_1$ no es trivial, $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}$ y así $\mathbb{S}(\mathcal{E}) \subsetneq \mathbb{S}(\mathcal{E}')$, por lo que $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ no sería una subálgebra maximal. □

La siguiente proposición establece una caracterización de las subálgebras de Heyting maximales que coincide con el resultado dado por M. Adams en [2].

Proposición 3.3.2. *Sea $\mathbf{H}$ un espacio de Heyting finito y $\mathcal{E}$ una relación de Heyting. Entonces $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ es maximal si y sólo si cada clase de equivalencia asociada a $\mathcal{E}$ es unitaria, excepto una que es de la forma $\overline{x} = \{x_1, x_2\}$ donde $\{x_1\}^i \cup \{x_2\} = \{x_2\}^i \cup \{x_1\}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ es una subálgebra maximal de $\mathbb{D}(\mathbf{H})$. Por la Proposición 3.3.1 sabemos que si $\overline{x} \in \mathcal{E}$ entonces $\overline{x}$ tiene a lo sumo dos elementos. Consideremos el siguiente conjunto

$$R = \{\overline{x} \in \mathcal{E} : \overline{x} \text{ tiene exactamente dos elementos }\}$$

y sea $\overline{x}_m$ un elemento maximal de R respecto del orden $\preceq$.

Sea $\mathcal{P}_1$ el refinamiento de $\mathbf{H}/\mathcal{E}$ dado por: $P_m = \overline{x}_m$ y $P_x = \{x\}$ para todo $x \in H \setminus \overline{x}$. Realizando el mismo procedimiento utilizado en la demostración de la Proposición 3.3.1 se puede probar que la relación de equivalencia $\mathcal{E}_1$ asociada a la partición $\mathcal{P}_1$ es una relación de Heyting. Esto prueba que $\mathbf{H}/\mathcal{E}$ tiene una única clase de equivalencia $\overline{x} = \{x_1, x_2\}$ de dos elementos y que el resto de las clases son unitarias. Resta probar que $\{x_1\}^i \cup \{x_2\} = \{x_2\}^i \cup \{x_1\}$.

Sea $y \in \{x_1\}^i \cup \{x_2\}$, $y \neq x_1, x_2$, entonces $x_1 \leq y$ y por lo tanto $\overline{x} \preceq \overline{y} = \{y\}$. Por la condición (2) de la definición de relación de Heyting se deduce que $x_2 \leq y$ y entonces $y \in \{x_2\}^i \cup \{x_1\}$.

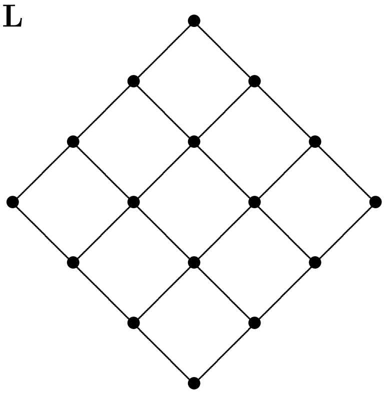
De manera similar se puede demostrar la otra inclusión. Luego, $\{x_1\}^i \cup \{x_2\} = \{x_2\}^i \cup \{x_1\}$.

Claramente, si $\mathcal{E}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{H}$ que satisface que cada clase de equivalencia es unitaria, excepto una que satisface $\{x_1\}^i \cup \{x_2\} = \{x_2\}^i \cup \{x_1\}$, entonces $\mathcal{E}$ es una relación de Heyting tal que su subálgebra $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ asociada es maximal. $\square$

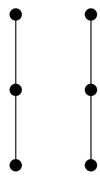
En el siguiente ejemplo mostramos cómo encontrar todas las subálgebras maximales de un álgebra de Heyting $\mathbf{L}$ utilizando la caracterización dada en la proposición anterior.

Consideremos el álgebra de Heyting $\mathbf{L}$ con su espacio de Heyting asociado:

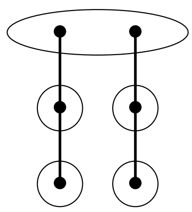
$\mathbf{L}$



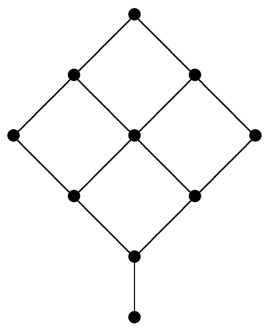
$\mathbb{X}(\mathbf{L})$

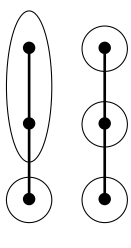


Las siguientes figuras muestran las relaciones de Heyting asociadas a subálgebras maximales no isomorfas seguida de su correspondiente subálgebra maximal asociada. Para recuperar estas últimas utilizamos la Proposición 3.2.3.

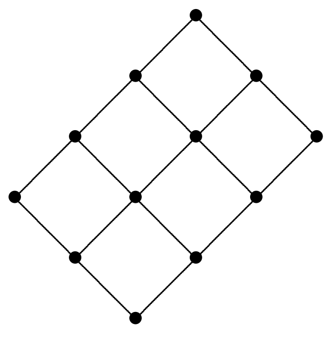


$\rightsquigarrow$





$\rightsquigarrow$



3.4. Caracterización de subálgebras de De Morgan Heyting

En esta sección daremos condiciones necesarias y suficientes para que la subálgebra asociada a una relación de Heyting sobre un dh-espacio sea una subálgebra de De Morgan Heyting. De esta manera, podremos determinar todas las subálgebras de una dh-álgebra a través de ciertas relaciones de Heyting sobre su espacio dual asociado. Más aún, si el álgebra de De Morgan Heyting es finita, lograremos calcular los elementos primos de la subálgebra utilizando sólo la clase de equivalencia asociada a él.

Proposición 3.4.1. *Sea $\mathbf{L}$ un álgebra de De Morgan Heyting. Si $\mathbf{L}_1$ es subálgebra de $\mathbf{L}$ y $\leq$ es el orden definido sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ en (3.2) entonces se verifica:*

(1) $\overline{P}$ es cerrado y convexo para todo $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$.

(2) Si $\overline{P} \leq \overline{Q}$ entonces $\overline{P} \subseteq \overline{Q}^d$

(3) Si $\overline{P} \neq \overline{Q}$ entonces existe un $V \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$ que separa a P y Q.

(4) Para cada $\overline{P} \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$, $\phi(\overline{P}) \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$, donde $\phi(\overline{P}) = \{\phi(Q) : Q \in \overline{P}\}$.

Demostración. Como $\mathbf{L}_1$ es una subálgebra de Heyting entonces por la Proposición 3.1.7, $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ satisface las condiciones (1), (2) y (3). Resta ver que satisface la condición (4).

Consideremos el homomorfismo entre álgebras de De Morgan Heyting $i : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}$ tal que $i(x) = x$, entonces $\mathbb{X}(i) : \mathbb{X}(\mathbf{L}) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ dado por $\mathbb{X}(i) = i^{-1}(P) = P \cap L_1$ es un morfismo entre dh-espacios por lo que cumple

$$(\phi_{\mathbf{L}_1} \circ \mathbb{X}(i))(P) = (\mathbb{X}(i) \circ \phi)(P), \tag{3.3}$$

es decir,

$$\phi_{\mathbf{L}_1}(P \cap L_1) = \phi(P) \cap L_1, \tag{3.4}$$

para todo $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$.

Teniendo en cuenta este resultado probaremos que $\phi(\overline{P}) = \overline{\phi(P)}$.

Sea $\phi(R) \in \phi(\overline{P})$ con $R \in \overline{P}$, así $R \cap L_1 = P \cap L_1$. Luego,

$$\phi_{\mathbf{L}_1}(R \cap L_1) = \phi_{\mathbf{L}_1}(P \cap L_1).$$

De (3.4), resulta $\phi(R) \cap L_1 = \phi(P) \cap L_1$ y entonces $\phi(R) \in \overline{\phi(P)}$. Esto muestra que $\phi(\overline{P}) \subseteq \overline{\phi(P)}$.

Supongamos ahora que $R \in \overline{\phi(P)}$ entonces $R \cap L_1 = \phi(P) \cap L_1$. Luego,

$$\phi_{\mathbf{L}_1}(R \cap L_1) = \phi_{\mathbf{L}_1}(\phi(P) \cap L_1)),$$

por lo que $\phi(R) \cap L_1 = \phi(\phi(P)) \cap L_1 = P \cap L_1$. Tenemos entonces que $\phi(R) \in \overline{P}$, y en consecuencia, $R \in \phi(\overline{P})$.

Esto muestra que la imagen por ϕ de una clase de equivalencia es una clase de equivalencia también, es decir, todo $\overline{P} \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ cumple que $\phi(\overline{P}) \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$. □

Observación 3.4.2. El orden $\leq$ definido sobre $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ en (3.2) fue definido a través de la condición (H). Si $\mathbf{L}$ es un álgebra de De Morgan Heyting, $\leq$ también satisface:

$$(DH) \qquad \text{si} \;\; \overline{P} \leq \overline{Q} \quad \text{entonces} \quad \overline{Q} \subseteq \overline{P}^{i}$$

En efecto, supongamos $\overline{P} \leq \overline{Q}$ entonces, por (3.2), $P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1$. De esto, $\phi_{\mathbf{L}_1}(Q \cap L_1) \subseteq \phi_{\mathbf{L}_1}(P \cap L_1)$, es decir, $\phi(Q) \cap L_1 \subseteq \phi(P) \cap L_1$ y así, $\overline{\phi(Q)} \leq \overline{\phi(P)}$. Como se verifica la condición (H),

$$\overline{\phi(Q)} \subseteq (\overline{\phi(P)})^{d}.$$

Luego, $\phi\left(\overline{\phi(Q)}\right) \subseteq \phi\left((\overline{\phi(P)})^{d}\right)$, y por el Lema 2.2.1, $\phi\left(\overline{\phi(Q)}\right) \subseteq \left(\phi(\overline{\phi(P)})\right)^{i}$. En la demostración de la Proposición 3.4.1 vimos que $\phi(\overline{P}) = \overline{\phi(P)}$, por lo que $\phi\left(\overline{\phi(Q)}\right) \subseteq \left(\phi(\phi(\overline{P}))\right)^{i}$, y, finalmente $\overline{Q} \subseteq \overline{P}^{i}$.

La condición (4) en la Proposición 3.4.1 nos permite definir una aplicación Φ de $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ en $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ de la siguiente manera: $\Phi(\overline{P}) = \{\phi(Q) : Q \in \overline{P}\}$.

Proposición 3.4.3. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de De Morgan Heyting y* $\mathbf{L}_1$ *una subálgebra de* $\mathbf{L}$. *El par* $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1), \Phi \rangle$ *con la topología cociente y el orden* $\leq$ *definido en (3.2) es isomorfo al espacio de De Morgan Heyting* $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L}_1), \phi_{\mathbf{L}_1} \rangle$.

Demostración. Para probar que $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1), \Phi \rangle$ es un *pm*-espacio, mostraremos que Φ es un homeomorfismo involutivo que invierte el orden.

Veamos que Φ es un anti-isomorfismo de período dos, es decir, $\Phi(\Phi(\overline{P})) = \overline{P}$ y $\overline{P} \leq \overline{Q}$ si y sólo si $\Phi(\overline{Q}) \leq \Phi(\overline{P})$.

En la demostración de la Proposición 3.4.1 vimos que $\Phi(\overline{P}) = \overline{\phi(P)}$. Luego, tenemos

$$\Phi(\Phi(\overline{P})) = \Phi(\overline{\phi(P)}) = \overline{\phi(\phi(P))} = \overline{P}.$$

Veamos ahora que si $\overline{P} \leq \overline{Q}$ entonces $\Phi(\overline{Q}) \leq \Phi(\overline{P})$.

Ya que $\overline{P} \leq \overline{Q}$, por (3.2), $P \cap L_1 \subseteq Q \cap L_1$ y entonces $\phi_{\mathbf{L}_1}(Q \cap L_1) \subseteq \phi_{\mathbf{L}_1}(P \cap L_1)$. De (3.4) resulta $\phi(Q) \cap L_1 \subseteq \phi(P) \cap L_1$, es decir, $\overline{\phi(Q)} \leq \overline{\phi(P)}$ y en consecuencia $\Phi(\overline{Q}) \leq \Phi(\overline{P})$.

Ya que $\Phi = \Phi^{-1}$, se sigue que si $\Phi(\overline{P}) \leq \Phi(\overline{Q})$ entonces $\overline{Q} \leq \overline{P}$.

Para probar que Φ es una aplicación continua, consideremos un abierto $U = \{\overline{P}_i, i \in I\} \subseteq \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ entonces, $\bigcup_{i\in I} \overline{P}_i$ es un conjunto abierto de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$.

Como $\phi(\bigcup_{i\in I} \overline{P}_i)$ es abierto pues ϕ es homeomorfismo, entonces $\Phi(U) = \{\Phi(\overline{P}_i), i \in I\}$ también lo es. Por otra parte, $\Phi^{-1}(U) = \Phi(U)$ por lo que concluimos que $\Phi^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

Esto muestra que Φ es un homeomorfismo involutivo que revierte el orden.

En la Proposición 3.1.5 vimos que $h : \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1) \to \mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$ dado por $\mathbb{X}(i) = h \circ \pi$ es un morfismo entre espacios de Heyting. Ahora probaremos que h es un morfismo en la categoría de espacios de De Morgan Heyting, es decir, sólo resta probar que $h \circ \Phi = \phi_{\mathbf{L}_1} \circ h$.

Para esto, observemos que $\mathbb{X}(i)$ es un morfismo en la categoría de espacios de De Morgan y que la aplicación canónica π verifica, $\Phi \circ \pi = \pi \circ \phi$. En efecto,

$$(\Phi \circ \pi)(P) = \Phi(\overline{P}) = \overline{\phi(P)} = (\pi \circ \phi)(P).$$

Luego tenemos,

$$\begin{aligned}
(h \circ \Phi)(\overline{P}) &= (h \circ \Phi \circ \pi)(P) \\
&= (h \circ \pi \circ \phi)(P) \\
&= (\mathbb{X}(i) \circ \phi)(P) \\
&= (\phi_{\mathbf{L}_1} \circ \mathbb{X}(i))(P) \\
&= (\phi_{\mathbf{L}_1} \circ h \circ \pi)(P)) \\
&= (\phi_{\mathbf{L}_1} \circ h)(\overline{P}).
\end{aligned}$$

Esto muestra que h es un isomorfismo entre los espacios de De Morgan Heyting $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ y $\mathbb{X}(\mathbf{L}_1)$. □

En la Proposición 3.4.1 enumeramos las propiedades que cumplen las clases de equivalencia de la relación asociada a una subálgebra de De Morgan Heyting. Las propiedades (1)-(3) vienen dadas porque el álgebra considerada es de Heyting. A éstas se le adiciona la condición (4) pues estamos considerando álgebras de De Morgan también. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.4.4. Sea $\langle X, \leq, \tau, \phi\rangle$ un espacio de De Morgan Heyting y $\mathcal{E}$ una relación de equivalencia sobre X. $\mathcal{E}$ es llamada una **relación de De Morgan Heyting** si cumple con las siguientes condiciones:

(1) $\overline{a}$ es cerrado y convexo para cada $a \in X$.

(2) Para cada $a, b \in X$ tales que $a \leq b$ se tiene que $\overline{a} \subseteq \overline{b}^d$.

(3) Si $\overline{a} \neq \overline{b}$ entonces existe $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ que separa a y b.

(4) Para cada $\overline{a} \in \mathbf{X}/\mathcal{E}$, $\phi(\overline{a}) \in \mathbf{X}/\mathcal{E}$.

Teniendo en cuenta esta definición y la Proposición 3.4.1, cada subálgebra $\mathbf{L}_1$ de una dh-álgebra tiene asociada una relación de De Morgan Heyting dada por $\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$. Recíprocamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.4.5. *Dado un dh-espacio* $\mathbf{X}$*, si* $\mathcal{E}$ *es una relación de De Morgan Heyting entonces el conjunto* $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ *es una subálgebra de De Morgan Heyting de* $\mathbb{D}(\mathbf{X})$*.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.9 sabemos que $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ es subálgebra de Heyting. Falta ver que si $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$ entonces $V' = \phi(V)^c \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$.

Sabemos que $\phi(V)^c$ es abierto, cerrado y creciente. Además, si $a \in \phi(V)$ entonces $a = \phi(b)$ para $b \in V$ y por la condición (4), $\phi(\overline{b}) = \overline{a}$. Por otra parte, $\overline{b} \subseteq V$ pues $V \in \mathbb{S}(\mathcal{E})$, entonces $\overline{a} \subseteq \phi(V)$.

Esto muestra que $\phi(V)$ cumple la condición (S), y, por lo tanto, $V' = \phi(V)^c$ también. □

Análogamente al caso de álgebras de Heyting, si $\mathbf{L}$ es una dh-álgebra y $\mathbf{L}_1$ es una subálgebra de $\mathbf{L}$ entonces $\mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)) = \sigma_L(\mathbf{L}_1)$. Además, si $\mathbf{X}$ es un dh-espacio y $\mathcal{E}$ es una relación de De Morgan Heyting se tiene que $(\epsilon(x), \epsilon(y)) \in \mathbb{E}(\mathbb{S}(\mathcal{E}))$ si y sólo si $(x, y) \in \mathcal{E}$.

Esto muestra que existe una correspondencia biunívoca entre subálgebras de De Morgan Heyting y relaciones de De Morgan Heyting.

Por la Proposición 3.4.3 sabemos que dada una subálgebra de De Morgan Heyting, hay tantas clases de equivalencia en su relación asociada como filros primos de la subálgebra. Los siguientes resultados muestran cómo recuperar cada elemento primo de la subálgebra, cuando el álgebra considerada es finita.

Lema 3.4.6. *Si* $\mathbf{L}_1$ *es subálgebra de De Morgan Heyting de* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{L}$ *es finita, para cada* $\overline{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$*,* $\overline{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m\}$ *en* $\mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ *tales que* $\overline{P} \leq \overline{Q}$*, se tiene que* $\displaystyle\bigvee_{j=1}^{m} q_i \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i$*, donde* P_i *está generado por el elemento primo* p_i *y* Q_j *por el elemento primo* q_j*.*

Demostración. Supongamos que $Q_j \in \overline{Q}$. Como $\overline{P} \leq \overline{Q}$, por la condición (DH), existe $P_i \in \overline{P}$ tal que $P_i \subseteq Q_j$. De esto se deduce que $q_j \leq p_i$ para algún i y en consecuencia $\bigvee_{j=1}^{m} q_j \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i$. □

Proposición 3.4.7. *Sea* $\mathbf{L}$ *una dh-álgebra finita y* $\mathbf{L}_1$ *una subálgebra de* $\mathbf{L}$*. Para cada* $\overline{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$ *se tiene que* $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} p_i \in L_1$*, donde* p_i *es el elemento primo que genera a* P_i*. Más aún, todo elemento primo de* $\mathbf{L}_1$ *tiene esta forma.*

Demostración. Sea $\overline{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \in \mathbb{X}(\mathbf{L})/\mathbb{E}(\mathbf{L}_1)$. Veamos primero que $\overline{P}^i \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$. Ya que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es finito, $\overline{P}^i$ es un conjunto, abierto, cerrado y creciente. Sólo falta ver que se verifica la condición (S).

Supongamos $Q \in \overline{P}^i$, entonces existe $R \in \overline{P}$ tal que $R \subseteq Q$, pero entonces $\overline{R} = \overline{P} \leq \overline{Q}$ y por la condición (DH), resulta $\overline{Q} \subseteq \overline{P}^i$, lo que prueba que $\overline{P}^i \in \mathbb{S}(\mathbb{E}(\mathbf{L}_1))$.

Sabemos por la Proposición 3.2.3,

$$\overline{P}^i = \bigcup_{Q_i \in \overline{P}^i} \sigma(q_i) = \sigma(\bigvee_{Q_i \in \overline{P}^i} q_i).$$

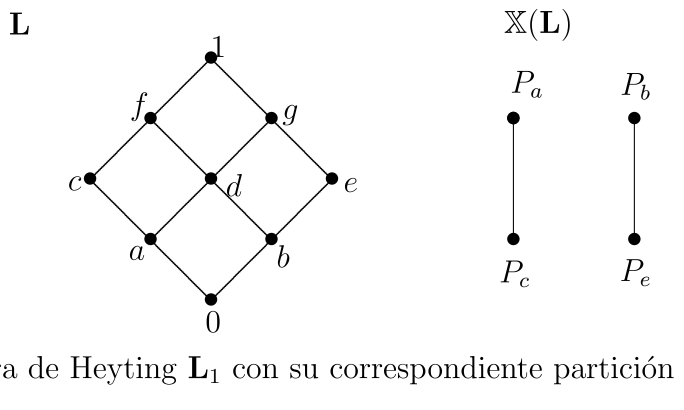
Luego, por el lema anterior, puesto que $\overline{P} \leq \overline{Q_i}$, para todo $\overline{Q_i} \in \overline{P}^i$, resulta $\bigvee_{Q_i \in \overline{P}^i} q_i \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i$. Por otra parte, es claro que $\bigvee_{i=1}^{n} p_i \leq \bigvee_{Q_i \in \overline{P}^i} q_i \leq$, de lo que resulta

$$\bigvee_{Q_i \in \overline{P}^i} q_i = \bigvee_{i=1}^{n} p_i.$$

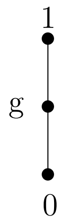
Finalmente, otra vez por la Proposición 3.2.3, $\bigvee_{i=1}^{n} p_i \in L_1$. □

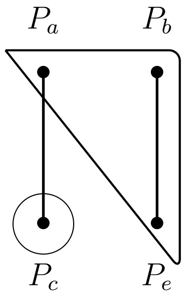
Hemos probado que si p_i es el elemento primo que genera a P_i para cada $P_i \in \overline{P}$ entonces $\bigvee_{i=1}^{n} p_i$ es un elemento primo de $\mathbf{L}_1$. Más aún, todo elemento primo de $\mathbf{L}_1$ tiene esta forma. Esto nos permite recuperar y calcular de una manera rápida los elementos primos de la subálgebra a partir de su relación de De Morgan Heyting asociada. Para recuperarlos, debemos tomar cada clase de equivalencia y hacer el supremo de de los elementos primos que generan a los filtros correspondientes a dicha clase.

El siguiente ejemplo muestra que esto no sucede para álgebras de Heyting en general. Consideremos la siguiente álgebra de Heyting y su espacio dual asociado



y la subálgebra de Heyting $\mathbf{L}_1$ con su correspondiente partición asociada





Si consideramos $\overline{P_c} = \{P_c\}$, $\bigvee\limits_{P \in \overline{P_c}} p = c$ pero $c \notin L_1$.

Parte II

Álgebras de Kleene pseudocomplementadas

Capítulo 4

La variedad $\mathcal{BPK}$

Las álgebras de Kleene psedocomplementadas o *pk*-álgebras son una subvariedad importante de las **álgebras pseudocomplementadas de De Morgan** o *pm*-**álgebras**. Estas últimas son álgebras $\langle L, \wedge, \vee, *, \prime, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ que son al mismo tiempo *p*-álgebras y álgebras de De Morgan. A la variedad de las *pm*-álgebras la notaremos por $\mathcal{PCDM}$ y a la de las *pk*-álgebras por $\mathcal{PK}$. Como mencionamos en la Introducción, en [25] Romanowska inició la investigación de la variedad $\mathcal{PCDM}$ caracterizando las álgebras subdirectamente irreducibles finitas. H.P. Sankappanavar continuó estudiando dichas álgebras caracterizando las álgebras subdirectamente irreducibles no regulares en dicha variedad. Extendiendo estos resultados, en este capítulo caracterizamos a las álgebras subdirectamente irreducibles cuyo espacio dual es ϕ-conexo a través de condiciones sobre su espacio de filtros primos y establecemos condiciones necesarias para que un álgebra (finita o no) sea subdirectamente irreducible. Resultados similares se encontraron también para la variedad de las álgebras de Kleene pseudocomplementadas.

Para poder realizar este estudio, en la Sección 4.1. describimos una dualidad tipo Priestley para las *pm*-álgebras, combinando las dualidades descriptas en el Capítulo 1 para las *p*-álgebras y álgebras de De Morgan. Introducimos la noción de *body* de un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{PCDM}$ como el conjunto de los elementos de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ que no son ni maximales ni minimales y determinamos $Body(\mathbf{L})$ cuando $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible en las variedades $\mathcal{PCDM}$ y $\mathcal{PK}$. Como consecuencia de esto, surgen de manera natural tres subvariedades importantes de la variedad $\mathcal{PK}$ para las cuales obtenemos bases ecuacionales.

Finalmente, introducimos la subvariedad $\mathcal{BPK}$ de las álgebras pseudocomplementadas de Kleene que está generada por las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas de la forma $\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}_i \oplus \mathbf{B}$ donde $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole, $\mathbf{C}_i$ es una cadena de a lo sumo tres elementos y $\oplus$ es una variación de la *suma ordinal*. Determinamos el reticulado de subvariedades de dicha variedad y encontramos bases ecuacionales para cada una de ellas.

4.1. Propiedades básicas y dualidad de las *pm*-álgebras

Para poder realizar un estudio de las variedades $\mathcal{PCDM}$ y $\mathcal{PK}$, en primer lugar, enunciaremos algunas de las propiedades básicas de las p-álgebras que serán de gran utilidad en el desarrollo de este capítulo. Las demostraciones de las mismas pueden verse en [3].

Todo par de elementos a, b de una p-álgebra $\mathbf{L}$ verifica:

(1) $a \wedge a^* = 0$

(2) $a \leq a^{**}$

(3) $a^{***} = a^*$

(4) Si $a \leq b$ entonces $b^* \leq a^*$

(5) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

(6) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$

Por otra parte, toda p-álgebra $\mathbf{L}$ tiene asociado dos subconjuntos importantes de L:

$$Rg(\mathbf{L}) = \{x \in L : x^{**} = x\}$$

y

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \{x \in L : x^* = 0\}$$

Los elementos de $Rg(\mathbf{L})$ son llamados **regulares** y los de $\mathcal{D}(\mathbf{L})$. **densos** En [3] se muestra también que la clase de las álgebras pseudocomplementadas satisface el siguiente teorema que relaciona a estos dos subconjuntos.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Glivenko)**.** *En una p-álgebra $\mathbf{L}$, $Rg(\mathbf{L})$ es un álgebra de Boole con las mismas operaciones que $\mathbf{L}$, excepto $\vee^{Rg(\mathbf{L})}$ que está definido por $x \vee^{Rg(\mathbf{L})} y = (x \vee y)^{**}$. Además, la aplicación $h : \mathbf{L} \to Rg(\mathbf{L})$ definida por $h(x) = x^{**}$ es un homomorfismo sobreyectivo de p-álgebras y*

$$Rg(\mathbf{L}) \cong \mathbf{L}/\mathcal{D}(\mathbf{L}).$$

A continuación, describiremos los objetos y morfismos que definen una categoría que resultará dualmente equivalente a la categoría de las pm-álgebras.

Definición 4.1.2. $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ será llamado un pm**-espacio** si $\mathbf{X}$ es un espacio de Priestley que cumple:

- Y^d es abierto para todo $Y \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$ y
- $\phi : X \to X$ es una aplicación continua que invierte el orden y tal que $\phi = \phi^{-1}$.

Definición 4.1.3. Dados dos *pm*-espacios $\langle \mathbf{X}_1, \phi_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{X}_2, \phi_2 \rangle$, llamaremos ***pm*-morfismo** a las funciones $f : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ continuas que preservan el orden y verifican

- $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$.
- $f(x^i \cap Max(\mathbf{X}_1)) = f(x)^i \cap Max(\mathbf{X}_2)$, para cada $x \in X_1$.

Por las dualidades vistas en el Capítulo 1, es claro que $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ es un *pm*-espacio si y sólo si $\mathbf{X}$ es un *p*-espacio y $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ es un *dm*-espacio. Se puede probar entonces de manera natural el siguiente resultado.

Teorema 4.1.4. *La categoría de las pm-álgebras con sus pm-homomorfismos es dualmente equivalente a la categoría de los pm-espacios y los pm-morfismos.*

Observemos que bajo esta dualidad:

- Si $\langle \mathbf{X}, \phi \rangle$ es un *pm*-espacio, entonces $\langle \mathbb{D}(\mathbf{X}), \cap, \cup, ', *, \emptyset, X \rangle$ es una *pm*-álgebra, donde para $V \in \mathbb{D}(\mathbf{X})$,

$$V' = (\phi(V))^c$$

y

$$V^* = V^{dc}.$$

- Recíprocamente, si $\langle L, \wedge, \vee, ', *, 0, 1 \rangle$ es una *pm*-álgebra y $\phi : \mathbb{X}(\mathbf{L}) \to \mathbb{X}(\mathbf{L})$ es tal que

$$\phi(P) = P'^c,$$

donde $P' = \{a' \in L : a \in P\}$, entonces $\langle \mathbb{X}(\mathbf{L}), \phi \rangle$ es un *pm*-espacio.

4.2. *pm*-álgebras subdirectamente irreducibles y simples

Como vimos en la Sección 1.2 existe una correspondencia biunívoca entre las congruencias de un álgebra de De Morgan $\mathbf{L}$ y los subconjuntos cerrados e involutivos de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$. Por otra parte, vimos en esa misma sección que si $\mathbf{L}$ es una *p*-álgebra existe una correspondencia biunívoca entre sus congruencias y los subconjuntos cerrados Y de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ que satisfacen $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y^i \subseteq Y$.

Combinando estos resultados tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pm-álgebra. El reticulado de congruencias de* $\mathbf{L}$ *es dualmente isomorfo al reticulado de conjuntos cerrados e involutivos* Y *de* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *que satisfacen la condición*

$$Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y^i \subseteq Y. \tag{4.1}$$

A los conjuntos $Y \subseteq \mathbb{X}(\mathbf{L})$ que satisfacen estas condiciones (cerrados, involutivos y tales que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y^i \subseteq Y$) los llamaremos **$\mathcal{C}$-subconjuntos**. Es fácil ver, debido a la simetría dada por la operación de De Morgan, que en toda *pm*-álgebra, los $\mathcal{C}$-subconjuntos Y también satisfacen la condición

$$Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y^d \subseteq Y.$$

Los siguientes resultados muestran que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es un $\mathcal{C}$-conjunto para toda *pm*-álgebra.

Lema 4.2.2. $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ *y* $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ *son conjuntos cerrados en* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$*, para toda álgebra de De Morgan pseudocomplementada.*

Demostración. Veamos que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$. Para esto probemos que $\mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es abierto. En efecto, sea $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$, y tomemos $U \in Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ tal que $P \subseteq U$. Entonces $U \not\subseteq P$, y como $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es totalmente disconexo en el orden existe un conjunto abierto, cerrado y creciente V tal que $U \in V$ pero $P \notin V$. Como $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es un p-espacio resulta que V^d es abierto por lo que $V^d \setminus V$ es un entorno abierto de P disjunto de $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Ya que $\phi(Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))) = Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ y ϕ es un homeomorfismo, tenemos que $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es un conjunto cerrado. □

Claramente $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es cerrado, involutivo y cumple con la condición (4.1), por lo que se tiene que es un $\mathcal{C}$-subconjunto. Más aún, si el espacio dual asociado a una *pm*-álgebra $\mathbf{L}$ es ϕ-conexo, se tiene que todo $\mathcal{C}$-subconjunto contiene a $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ como lo establece el siguiente resultado.

Lema 4.2.3. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pm-álgebra tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es* ϕ*-conexo. Si* Y *es un* $\mathcal{C}$*-subconjunto no vacío entonces* $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq Y$.

Demostración. Para probar que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq Y$ mostraremos primero que $(Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y)^d = (Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y)^i$.

Si $P \in (Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y)^d$ entonces $P \in Y^d$. Sabemos que existe un filtro minimal M tal que $M \subseteq P$, por lo que $M \in Y^d$ y como M es minimal $M \in Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y^d$. Ya que Y es un $\mathcal{C}$-subconjunto se tiene que $M \in Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}) \cap Y^d \subseteq Y$, y por lo tanto $M \in Y$. Finalmente, como M es minimal y $M \subseteq P$, resulta $P \in (Y \cap Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))^i$. La otra inclusión se demuestra de manera análoga. Esto prueba que $(Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y)^d = (Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cap Y)^i$ es un conjunto creciente, decreciente e involutivo. Ya que

$\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo e Y involutivo, necesariamente $(Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))\cap Y)^d = (Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))\cap Y)^i = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y, en consecuencia, $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq Y$. □

A continuación caracterizaremos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles $\mathbf{L} \in \mathcal{PCDM}$ a través de su espacio dual, cuando $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es una componente ϕ-conexa.

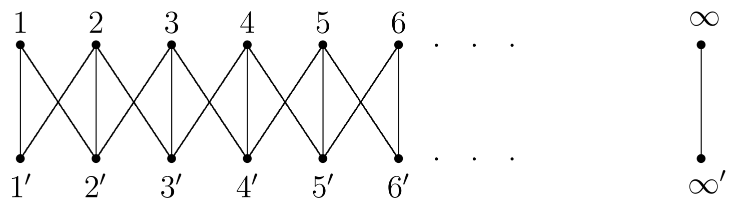
Teorema 4.2.4. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de De Morgan pseudocomplementada tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es* ϕ*-conexo. Entonces* $\mathbf{L}$ *es simple si y sólo si* $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{X}(\mathbf{L}) \neq Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$. Entonces la congruencia θ_Y asociada al $\mathcal{C}$-subconjunto $Y = Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es una congruencia no trivial y en consecuencia, $\mathbf{L}$ no es simple.

Recíprocamente, si suponemos $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ ϕ-conexo, $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))\cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ e Y un $\mathcal{C}$-subconjunto no vacío, por el Lema 4.2.3 $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq Y$, resulta $Y = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y, en consecuencia, $\mathbf{L}$ es simple. □

Observemos que existen álgebras de De Morgan pseudocomplementadas cuyo dual consta solamente de elementos maximales y minimales, pero que no son simples. Esto se puede ver teniendo en cuenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.5. Consideremos los conjuntos $X_1 = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la topología que proviene de hacer la compactificación por un punto de la topolgía discreta en $\mathbb{N}$ y el conjunto $X_2 = \{0, 1\}$ con la topología discreta. En el producto $X_1 \times X_2 = A$, consideramos la topología producto τ y el orden $\leq$ dado por la siguiente figura:



donde por cuestiones prácticas y abuso de notación, llamamos $n = (n, 1)$ y $n' = (n, 0)$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

El espacio $\mathbf{A} = \langle X_1 \times X_2, \tau, \leq\rangle$ es compacto por el teorema de Tychonoff y es fácil ver que es totalmente disconexo en el orden. Luego, $\mathbf{A}$ es un espacio de Priestley. Más aún, para cada clopen creciente $Y \subseteq A$ se verifica que Y^d es abierto, por lo que resulta que $\mathbf{A}$ es un p-espacio. Si ahora definimos la operación

$$g : A \to A \text{ tal que } g(n) = n' \text{ y } g(n') = n$$

resulta que $\langle A, \tau, \leq, g\rangle$ es un pm-espacio.

Afirmamos que el álgebra de De Morgan pseudcomplementada asociada al *pm*-espacio $\mathbf{A}$ tiene una única congruencia no trivial. Para esto veamos que el único $\mathcal{C}$-subconjunto no trivial es $\{\infty, \infty'\}$. Claramente $\{\infty, \infty'\}$ es un $\mathcal{C}$-subconjunto.

Veamos que no hay otro. Supongamos Y un $\mathcal{C}$-subconjunto que tenga un elemento en $A \setminus \{\infty', \infty\}$. Como $A \setminus \{\infty', \infty\}$ es una componente ϕ-conexa e Y cumple que $Y^i \cap Max(\mathbf{A}) \subseteq Y$ se tiene que $A \setminus \{\infty', \infty\} \subseteq Y$. Además, como Y es cerrado y $A \setminus \{\infty', \infty\}$ no lo es, resulta que $Y = A$. Luego, la *pm*-álgebra asociada a este *pm*-espacio $\mathbf{A}$ no es simple.

Este ejemplo nos permite afirmar también que la variedad $\mathcal{PCDM}$ no es localmente finita. Para esto basta considerar el clopen creciente $V = \{1\}$ y notar que las sucesivas aplicaciones de $*\prime$ están dadas por $V^{*\prime} = \{1, 1', 2\}$, $V^{2(*\prime)} = \{1, 1', 2, 2', 3\}$, $V^{3(*\prime)} = \{1, 1', 2, 2', 3, 3', 4\}$, etc.

Para poder dar una caracterización de las álgebras De Morgan pseudocomplementadas subdirectamente irreducibles a través de sus espacios duales asociados llamaremos **body de** $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ a

$$Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus (Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))).$$

El siguiente resultado nos da una condición necesaria para que un álgebra $\mathbf{L} \in \mathcal{PCDM}$ (finita o no) sea subdirectamente irreducible.

Notaremos por $|X|$ al número de elementos del conjunto X.

Teorema 4.2.6. *Si* $\mathbf{L}$ *es una pm-álgebra subdirectamente irreducible no trivial, entonces* $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| \leq 2$.

Demostración. Supongamos que $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ tiene más de dos elementos, $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \bigcup_{i \in I} \{P_i, \phi(P_i)\}$ donde $|I| \geq 2$ y consideremos los subconjuntos,

$$Y_i = Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup \{P_i, \phi(P_i)\}$$

para cada $i \in I$. Por el Lema 4.2.2 tenemos que Y_i es un $\mathcal{C}$-subconjunto para cada $i \in I$. Como $\bigcup_{i \in I} Y_i = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ resulta $\bigcap_{i \in I} \theta_{Y_i} = \Delta$ donde $\theta_{Y_i} \neq \Delta$ para todo $i \in I$. De esto se deduce que $\mathbf{L}$ no es un álgebra subdirectamente irreducible. $\square$

Observación 4.2.7. De la demostración de este teorema se sigue también que en una *pm*-álgebra subdirectamente irreducible el *body* del espacio dual no puede tener dos elementos de la forma

$$\begin{array}{cc} \phi(P) = P & \phi(Q) = Q \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

De esto se desprende inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 4.2.8. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de De Morgan pseudocomplementada. Si* $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible entonces* $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| < 2$ *ó* $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \{P, \phi(P)\}$*, con* $\phi(P) \neq P$.

Teorema 4.2.9. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pm-álgebra tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es* ϕ*-conexo. Si* $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| \leq 1$ *ó* $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \{P, \phi(P)\}$*, con* $\phi(P) \neq P$ *entonces* $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{L}$ es una *pm*-álgebra tal que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo. Si $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| = 0$, por el Teorema 4.2.4, $\mathbf{L}$ es simple, y por lo tanto, subdirectamente irreducible. Si $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| = 1$ e Y es un $\mathcal{C}$-subconjunto, como $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo, aplicando el Lema 4.2.3 resulta $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq Y$. Luego, $Y = Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ ó $Y = \mathbb{X}(\mathbf{L})$, de lo que se sigue que $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible. Finalmente, si $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \{P, \phi(P)\}$, con $\phi(P) \neq P$, teniendo en cuenta otra vez el Lema 4.2.3 es fácil ver que los únicos $\mathcal{C}$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ son $Y_1 = Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ e $Y_2 = \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Así, $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible. □

Notemos que el Ejemplo 4.2.5 muestra que, para el caso infinito, existen álgebras de De Morgan pseudocomplementadas que tienen más de una componente ϕ-conexa y sin embargo son subdirectamente irreducibles.

Ya que para cada álgebra subdirectamente irreducible finita $\mathbf{L}$ en $\mathcal{PCDM}$, $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es ϕ-conexo, el teorema anterior nos da una caracterización para las álgebras pseudocomplementadas de De Morgan subdirectamente irreducibles para el caso finito.

Corolario 4.2.10. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pm-álgebra finita. Entonces* $\mathbf{L}$ *es subdirectamente irreducible si y sólo si* $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| \leq 1$ *ó* $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \{P, \phi(P)\}$*, con* $\phi(P) \neq P$.

4.3. *pk*-álgebras subdirectamente irreducibles

Una importante subvariedad de las álgebras de De Morgan paseudocomplementadas es la variedad $\mathcal{PK}$ de las **álgebras de Kleene pseudocomplentadas**. Recordemos que estas últimas son *pm*-álgebra que satisfacen la condición

$$x \wedge x' \leq y \vee y'$$

para todo x, y del álgebra. A. Monteiro probó en [18] que un álgebra de De Morgan $\mathbf{L}$ es un álgebra de Kleene si y sólo si cada filtro primo P de $\mathbf{L}$ verifica que P y $\phi(P)$ son **comparables**, es decir, $P \subseteq \phi(P)$ ó $\phi(P) \subseteq P$.

Esta caracterización, junto con el Teorema 4.2.8, nos permite decir, que si $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es un espacio dual de un álgebra pseudocomplementada de Kleene subdirectamente irreducible, $\mathbf{L}$ debe tener necesariamente alguna de estas formas:

- **Forma 1:** $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$, ó
- **Forma 2:** $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup \{P\}$, donde $\phi(P) = P$, ó
- **Forma 3:** $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = Min(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \cup \{\phi(P), P\}$, con $\phi(P) \subset P$.

Para simplificar la notación, en lo que sigue, utilizaremos la notación Max y Min para nombrar los conjuntos $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ y $Min(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ respectivamente.

Las condiciones halladas sobre $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ para que una *pk*-álgebra sea subdirectamente irreducible nos determinan de manera natural dos subvariedades propias de la variedad $\mathcal{PK}$, una determinada por aquellas álgebras subdirectamente irreducibles que no tienen elementos en su *body* y la otra determinada por aquellas álgebras subdirectamente irreducibles que tienen a lo sumo 1 elemento en su *body*. Nuestro siguiente objetivo es encontrar ecuaciones que caractericen a dichas subvariedades.

A continuación, introducimos el siguiente término que será de gran utilidad para encontrar bases ecuacionales para las subvariedades anteriormente mencionadas y para otras que definiremos más adelante. Llamaremos $C(x)$ al término

$$C(x) = (x \wedge x') \vee (x \wedge x')^*. \tag{4.2}$$

Notemos que para toda *pk*-álgebra $\mathbf{L}$ y todo elemento $a \in L$, $C(a)$ es un elemento denso del álgebra. En efecto $C(a)^* = ((a \wedge a') \vee (a \wedge a')^*)^* = (a \wedge a')^* \wedge (a \wedge a')^{**} = 0$. En términos de dualidad, teniendo en cuenta que $V^* = V^{dc}$, esto significa

$$Max \subseteq C(V), \tag{4.3}$$

para todo $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Ya que en toda *pk*-álgebra subdirectamente irreducible, $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ tiene a lo sumo dos elementos que deben ser comparables, llamaremos a éstos P y $\phi(P)$ y supondremos que $\phi(P) \subseteq P$. Los siguientes resultados nos serán de gran utilidad.

Lema 4.3.1. *Si* $\mathbf{L}$ *es una pk-álgebra entonces*

$$Q \in V \cap V' \quad \textit{si y sólo si} \quad Q \in V \quad \textit{y} \quad \phi(Q) \notin V,$$

para todo $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Demostración. De la definición de $'$ en $\mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ obtenemos las siguientes equivalencias:

$$Q \in V \cap V' \Leftrightarrow Q \in V \text{ y } Q \in V' \Leftrightarrow Q \in V \text{ y } Q \in \phi(V)^c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Q \in V \text{ y } Q \notin \phi(V) \Leftrightarrow Q \in V \text{ y } \phi(Q) \notin V.$$

□

Para el caso particular de las *pk*-álgebras subdirectamente irreducibles tenemos el siguiente resultado más fuerte.

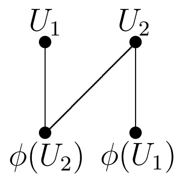
Proposición 4.3.2. *Si* $\mathbf{L}$ *es un álgebra de Kleene pseudocomplementada subdirectamente irreducible, entonces para cada* $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$,

$$V \cap V' \subseteq Max \cup \{P\}.$$

Demostración. Consideremos el caso en el que $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = Max \cup Min \cup \{P, \phi(P)\}$, con $\phi(P) \subsetneq P$. Si $Q \in Min$ entonces $Q = \phi(U)$, para algún U maximal en $\mathbb{X}(\mathbf{L})$. Si suponemos que $\phi(U) \in V \cap V'$, entonces $\phi(U) \in V$. Luego, por el Lema 4.3.1 $U \notin V$. Pero como $\mathbf{L}$ es un álgebra de Kleene, $\phi(U) \subseteq U$, lo que contradice que V es creciente. Si suponemos $Q = \phi(P) \in V \cap V'$ entonces $\phi(P) \in V$ y $P \notin V$, lo cual también contradice el hecho de que V sea creciente. De estos dos resultados obtenemos que para que Q sea un elemento de $V \cap V'$, o bien Q es P o bien Q es un elemento maximal.

Para demostrar que el resultado se sigue para las otras posibles formas de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ se utilizan argumentos similares. $\square$

Notemos que si $\mathbf{L}$ no es necesariamente un álgebra de Kleene, el resultado no se verifica. Basta considerar un álgebra de De Morgan Heyting cuyo espacio dual esté dado por la siguiente figura:



Tomando como conjunto clopen creciente a $V = \{\phi(U_1), U_2\}$, en este caso tenemos que $V \cap V' = V \not\subseteq Max(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Estos resultados permitirán axiomatizar las subvariedades de $\mathcal{PK}$ que resultan de tener en cuenta la cantidad de elementos que pueden formar parte de $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$.

Teorema 4.3.3. *Si* $\mathbf{L}$ *es un álgebra subdirectamente irreducible de Kleene pseudocomplementada entonces*

$$\mathbf{L} \textit{ satisface } C(x)' \leq C(x) \textit{ para todo } x \in L \quad \Longleftrightarrow \quad |Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| = 0,$$

donde $C(x)$ *es el término definido en (4.2).*

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ una *pk*-álgebra subdirectamente irreducible y supongamos que existe $P \in Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\phi(P) \subseteq P$. Sabemos que existe $U \in \mathbb{X}(\mathbf{L})$, U maximal tal que $P \subset U$. Como $U \not\subseteq P$, por el axioma de separación de Priestley, existe V_U, clopen creciente, tal que

$$U \in V_U \quad \text{pero} \quad P \notin V_U.$$

Afirmamos que $P \in C(V_U)'$, pero $P \notin C(V_U)$. En efecto, ya que $P \notin V_U$ y V_U es creciente, $\phi(P) \notin V_U$. Luego ni P ni $\phi(P)$ pertencen a $V_U \cap V_U'$.

Por otra parte, $\phi(U) \notin V_U$, pues $\phi(U) \subseteq \phi(P) \subseteq P$ y V_U es creciente, por lo que nuevamente por el Lema 4.3.1, resulta $U \in V_U \cap V_U'$. Esto último nos permite afirmar (ya que $P \subseteq U$) que $P \in (V_U \cap V_U')^d$, y, en consecuencia, $P \notin (V_U \cup V_U')^*$.

Combinando estos dos resultados tenemos que $P \notin C(V_U) = (V_U \cap V_U') \cup (V_U \cap V_U')^*$.

Además, como ni P ni $\phi(P)$ son elementos de $C(V_U)$, resulta $P \in C(V_U)' = \phi(C(V_U))^c$.

Esto muestra que existe un elemento P y un clopen creciente V_U tal que $P \in C(V_U)'$ pero $P \notin C(V_U)$, por lo que la expresión $C(x)' \leq C(x)$ no se seguiría en $\mathbf{L}$.

Para probar la recíproca, supongamos que $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| = 0$.

Sabemos por (4.3) que $Max \subseteq C(V)$ para cualquier $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$, entonces

$$C(V)' \subseteq (Max)' = \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Min \subseteq Max \subseteq C(V).$$

□

Teorema 4.3.4. *Si* $\mathbf{L}$ *es un álgebra de Kleene pseudocomplementada subdirectamente irreducible entonces*

$$\mathbf{L} \textit{ satisface } C(x)' \wedge C(x) \leq C(y) \textit{ para todo } x, y \in L \iff |Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| \leq 1.$$

Demostración. Supongamos que $\mathbf{L}$ es una pk-álgebra subdirectamente irreducible en la cual $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = \{\phi(P), P\}$ con $\phi(P) \subsetneq P$.

Como $P \not\subseteq \phi(P)$, por el axioma de separación de Priestley, existe un clopen creciente V_P de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que

$$P \in V_P \quad \text{pero} \quad \phi(P) \notin V_P.$$

Probemos que $P \in C(V_P) \cap C(V_P)'$. En efecto, por el Lema 4.3.1, $P \in V_P \cap V_P'$, y así $P \in C(V_P)$.

Para mostrar que $P \in C(V_P)'$ notemos que como $P \in V_P \cap V_P'$ y $\phi(P) \subset P$, $\phi(P) \in (V_P \cap V_P')^d$, y, en consecuencia, $\phi(P) \notin (V_P \cap V_P')^*$. Además, por la Proposición 4.3.2, $\phi(P) \notin V_P \cap V_P'$, lo que indica que $\phi(P) \notin C(V_P)$.

Ahora bien, de $P \in C(V_P)$ y $\phi(P) \notin C(V_P)$, nuevamente por el Lema 4.3.1, resulta $P \in C(V_P) \cap C(V_P)'$.

Por otra parte, sabemos que existe un maximal U, tal que $P \subseteq U$. Y como $U \not\subseteq P$, por el axioma de separación de Priestley, existe un clopen creciente V_U tal que $U \in V_U$, pero $P \notin V_U$. En particular, $P \notin V_U \cap V_U'$. Finalmente, como $U \in V_U$, pero $\phi(U) \notin V_U$, resulta $U \in V_U \cap V_U'$, y ya que $P \subseteq U$, $P \notin (V_U \cap V_U)^*$. Combinando estos dos resultados obtenemos $P \notin C(V_U)$.

Todo lo dicho, muestra que $P \in C(V_P) \cap C(V_P)'$, pero $P \notin C(V_U)$, por lo que no se seguiría $C(x) \wedge C(x)' \leq C(y)$ en $\mathbf{L}$.

Recíprocamente, sea $\mathbf{L}$ tal que $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| \leq 1$.

- Supongamos $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| = 0$. Por la Proposición 4.3.2, tenemos que
$$C(V)' \cap C(V) \subseteq Max \subseteq C(W).$$
- Supongamos $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| = 1$.

  Sabemos por la Proposición 4.3.2 que $C(V)' \cap C(V) \subseteq Max \cup \{P\}$.

  Por otra parte, si $P \in Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ y $P \in C(V)' \cap C(V)$ entonces $P \in C(V)$ y $\phi(P) \notin C(V)$ por el Lema 4.3.1. Pero como $\phi(P) = P$, esto es un absurdo.

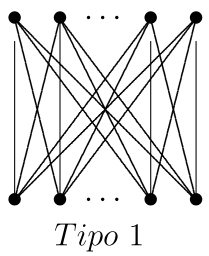
  Luego, $C(V)' \cap C(V) \subseteq Max \subseteq C(W)$ para todo W abierto, cerrado y creciente.

$\square$

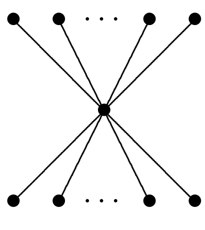
De esta manera hemos encontrado identidades que caracterizan a la subvariedad de las *pk*-álgebras generadas por aquellas álgebras subdirectamente irreducibles que no tienen elementos en su *body*, la cual será denominada $\mathcal{PK}_0$, y a la subvariedad generada por aquellas *pk*-álgebras subdirectamente irreducibles que tienen a lo sumo un elemento en su *body*, que será llamada $\mathcal{PK}_1$. Claramente tenemos que
$$\mathcal{PK}_0 \subset \mathcal{PK}_1.$$

4.4. Álgebras $\mathcal{BPK} = B \oplus C \oplus B$

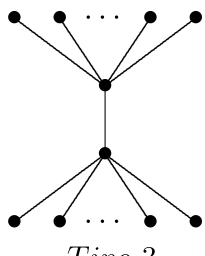
Hasta el momento hemos visto que si $\mathbf{L}$ es una *pk*-álgebra subdirectamente irreducible su espacio dual asociado puede tener a lo sumo dos elementos en su *body*. A partir de ahora nos abocaremos a estudiar la subvariedad de las álgebras de Kleene pseudocomplementadas generada por las álgebras subdirectamente irreducibles cuyo espacio dual verifica que todo elemento no maximal esté contenido en todo elemento maximal, es decir, cuyo espacio dual tenga alguna de estas tres formas.



Tipo 1



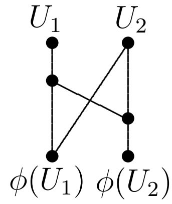
Tipo 2



Tipo 3

Esta subvariedad será llamada $\mathcal{BPK}$ y nombraremos a las álgebras de $\mathcal{BPK}$ como *bpk*-**álgebras** ó **álgebras de Kleene pseudocomplmentadas** *bundle*.

Observemos que existen álgebras de Kleene pseudocomplementadas subdirectamente irreducibles cuyos espacios duales no tienen ninguna de las formas mencionadas, por ejemplo, el álgebra cuyo espacio dual es



Sean $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ reticulados distributivos acotados tales que $L_1 \cap L_2 = \{1^{L_1}\} = \{0^{L_2}\}$. Definimos la **suma** $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$ como el poset sobre la unión $L_1 \cup L_2$ tal que, $a \leq b$ en $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, si $a, b \in L_1$ y $a \leq_{L_1} b$, ó si $a, b \in L_2$ y $a \leq_{L_2} b$, ó si $a \in L_1$ y $b \in L_2$. Observemos que la suma así definida no es la *suma ordinal* usual ya que la condición $1^{L_1} = 0^{L_2}$ no es requerida en ésta.

Los resultados que daremos a continuación muestran que si $\mathbf{L}$ es un álgebra de Kleene pseudocomplementada subdirectamente irreducible cuyo espacio dual asociado es de Tipo 1, 2 ó 3, entonces $\mathbf{L} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{C} \oplus \mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole y $\mathbf{C}$ es una cadena. Para poder mostrar esto, y encontrar identidades que caractericen a la subvariedad determinada por estas álgebras subdirectamente irreducibles, utilizaremos el término $C(x)$ definido en la sección anterior, junto con el término $T(x)$ que definimos a continuación:

$$T(x) = C(x) \wedge C(x)'. \tag{4.4}$$

En lo que sigue mostramos que la identidad

$$x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$$

caracteriza a la variedad generada por las álgebras subdirectamente irreducibles cuyos espacios duales son del Tipo 1, 2 ó 3 y garantiza la existencia del menor elemento denso para estas álgebras. Para esto, necesitaremos de los siguientes lemas.

Lema 4.4.1. *Sea $\mathbf{L}$ una pk-álgebra subidrectamente irreducible. Si existe una componente conexa S_i de su espacio dual tal que $V \cap S_i \neq \emptyset$ y $Min(S_i) \not\subseteq V^d$ entonces existe un elemento minimal M tal que $M \in V^*$ y $M \notin T(V)^*$.*

Demostración. Supongamos V un clopen creciente y S_i una componente conexa de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ cuya intersección con V es no vacía y tal que $Min(S_i) \not\subseteq V^d$.

Consideremos ahora los siguientes subconjuntos A y B que particionan al conjunto formado por los minimales de S_i.

$$A = \{\phi(W) \in S_i : \phi(W) \in V^d\}$$

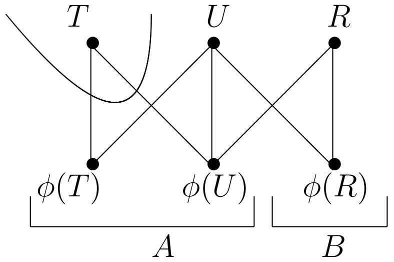
$$B = \{\phi(W) \in S_i : \phi(W) \notin V^d\}$$

Claramente estos conjuntos son disjuntos y no vacíos. Como B^i no es conexo (pues no existen componentes conexas incluidas en S_i), existe $\phi(U) \in A$ y $\phi(R) \in B$ tal que

$$\phi(R) \subseteq U.$$

Como $U \notin V$, pues $\phi(R) \in B$, y $\phi(U) \in A$, debe existir $T \in V$ tal que $\phi(U) \subseteq T$ y $\phi(T) \notin V$.

Esta situación se muestra en la siguiente figura:



Como $T \in V$ y $\phi(T) \notin V$, por Lema 4.3.1, $T \in V \cap V'$ y así $\phi(U) \in (V \cap V')^d$. Ésto y la Proposición 4.3.2 nos permite afirmar que $\phi(U) \notin (V \cap V')^* \cup (V \cap V') = C(V)$. Luego, ya que $U \in C(V)$ por ser maximal, otra vez por Lema 4.3.1, resulta $U \in T(V)$.

Finalmente, ya que $\phi(R) \subseteq U$, $\phi(R) \in T(V)^d$, es decir, $\phi(R) \notin T(V)^*$. Por otra parte, ya que $\phi(R) \in B$, tenemos que $\phi(R) \in V^*$. $\square$

Lema 4.4.2. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pk-álgebra subdirectamente irreducible,* $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = \bigcup_{i \in I} S_i$ *la descomposición de su espacio dual en componentes conexas* S_i *y* V *un clopen creciente tal que* $V \cap V' \neq \emptyset$*. Si existe una componente conexa* S_{i_0} *tal que* $(V \cap V') \cap S_{i_0} = \emptyset$ *entonces para alguna componente conexa* S_{j_0} *que tenga elementos en común con* $V \cap V'$ *vale* $Min(S_{j_0}) \nsubseteq (V \cap V')^d$*.*

Demostración. Supongamos que existe una componente conexa S_{i_0} de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $S_{i_0} \cap (V \cap V') = \emptyset$ y supongamos, por el contrario, que toda componente S_j que tiene elementos en común con $V \cap V'$, cumple $Min(S_j) \subseteq (V \cap V')^d$. Para una componente S_j cualquiera, puede suceder:

- $(V \cap V') \cap S_j = \emptyset$. En este caso, al no tener elementos en común $V \cap V'$ con S_j resulta $(V \cap V')^d \cap S_j = \emptyset$, por lo que $S_j \subseteq (V \cap V')^*$. De esto tenemos que $S_j \subseteq C(V) = (V \cap V') \cup (V \cap V')^*$. Como $S_j \subseteq C(V)$, y $\phi(S_j) = S_j$ por ser $\mathbf{L}$ álgebra de Kleene, resulta $\phi(S_j) \subseteq C(V)$. Esto muestra que todo elemento $Q \in S_j$ cumple que tanto Q como $\phi(Q)$ están $C(V)$. Luego, por el Lema 4.3.1, ningún elemento de S_j puede estar en $T(V) = C(V) \wedge C(V)'$, ni en su decreciente, por lo que finalmente resulta $S_j \subseteq T(V)^*$.

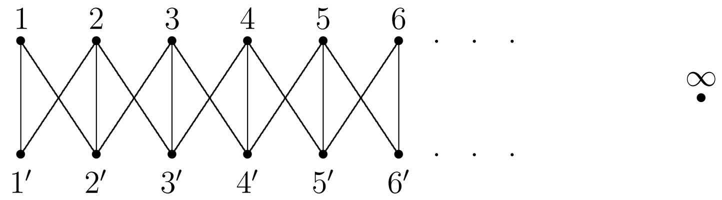
- $(V \cap V') \cap S_j \neq \emptyset$. En este caso, ya que hay elementos en común entre S_j y $V \cap V'$, por nuestra suposición $Min(S_j) \subseteq (V \cap V')^d$, lo que implica que para todo $\phi(U)$ minimal de S_j, $\phi(U) \notin (V \cap V')^* = (V \cap V')^{dc}$. Además, por la

Proposición 4.3.2, ya que $\phi(U)$ es minimal, $\phi(U) \notin V \cap V'$. Combinando estos resultados, $\phi(U) \notin C(V) = (V \cap V') \cup (V \cap V')^*$. Esto, y el hecho de que $Max(\mathbb{X}(\mathbf{L})) \subseteq C(V)$, permite afirmar, (Lema 4.3.1) que $U \in T(V)$ para todo $U \in S_j$. Luego, $S_j \subseteq T(V)^d$ y, por lo tanto $S_j \cap T(V)^* = \emptyset$.

Estos casos muestran que $T(V)^*$ es unión de componentes conexas y como por hipótesis existe S_{i_0} tal que $(V \cap V') \cap S_{i_0} = \emptyset$, $T(V)^* \neq \emptyset$. Además, por hipótesis existe S_j tal que $(V \cap V') \cap S_j \neq \emptyset$, lo que indica que $T(V)^* \neq \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Pero esto implicaría que $T(V)^*$ y $(T(V)^*)^c$ son elementos booleanos. Si esto pasara, $\mathbf{L}$ no sería un álgebra directamente indescomponible (ver [27, Corollary 5.5], p. 390) y por lo tanto, tampoco subdirectamente irreducible. Luego, debe existir una componente S_{j_0} de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $Min(S_{j_0}) \nsubseteq (V \cap V')^d$. $\square$

Notemos que en una *pk*-álgebra subdirectamente irreducible podría suceder que su espacio dual tenga elementos que fueran maximales y minimales al mismo tiempo como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.3. Consideremos el conjunto $X = (\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ con la topología τ que proviene de hacer la compactificación por un punto de la topología discreta en $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ y el orden $\leq$ dado por la siguiente figura:



donde por cuestiones prácticas y abuso de notación, llamamos $n = (n, 1)$ y $n' = (n, 0)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Si consideramos la aplicación $g : X \to X$ tal que $g(n) = n'$, $g(n') = n$ y $g(\infty) = \infty$, se puede probar que $\langle X, \tau, \leq, g \rangle$ es un *pk*-espacio que posee elementos maximales y minimales a la vez.

Sin embargo, en una *pk*-álgebra subdirectamente irreducible que satisface $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ esto no es posible como lo demuestra el siguiente resultado.

Proposición 4.4.4. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pk-álgebra subdirectamente irreducible con más de 2 elementos que satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$*, para todo* $x, y \in L$ *entonces no existen elementos en* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *que sean maximales y minimales a la vez.*

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ una *pk*-álgebra subdirectamente irreducible y supongamos que su espacio dual asociado tiene un elemento $U \in Max \cap Min$. Por la condición de Kleene tenemos que $\phi(U) = U$. Más aún, $\{U\}$ es una componente ϕ-conexa de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$.

Como **L** tiene más de 2 elementos, existe un maximal U_1 de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ distinto de U. Consideremos el clopen creciente V_{U_1} que contiene a U_1 pero no a U (V_{U_1} existe por el axioma de separación de Priestley).

Observemos que $V_{U_1} \cap V'_{U_1} \neq \emptyset$, pues de lo contrario, por el Lema 4.3.1, para todo filtro primo P, se tendría $P, \phi(P) \in V$ ó bien $P, \phi(P) \notin V$, lo que implicaría que V fuera un clopen creciente involutivo asociado a un elemento boleano, y, en consecuencia, **L** descomponible.

Tenemos entonces que $V_{U_1} \cap V'_{U_1}$ es un clopen creciente distinto de vacío y tal que $(V_{U_1} \cap V'_{U_1}) \cap \{U\} = \emptyset$. Luego, por el Lema 4.4.2 existe una componente conexa S_i tal que $(V_{U_1} \cap V'_{U_1}) \cap S_i \neq \emptyset$ y

$$Min(S_i) \nsubseteq (V_{U_1} \cap V'_{U_1})^d.$$

Aplicando el Lema 4.4.1 al clopen creciente $V_{U_1} \cap V'_{U_1}$, resulta que existe un elemento minimal M tal que $M \in (V_{U_1} \cap V'_{U_1})^*$, pero $M \notin T(V_{U_1} \cap V'_{U_1})^*$.

Escribamos a M de la forma $M = \phi(R)$ y notemos que $\phi(R) \neq R$. En efecto, si esto no ocurriera, como por el Lema 4.3.1, $\phi(R) \notin T(V_{U_1} \cap V'_{U_1})$ y $\phi(R)$ es maximal, $\phi(R) \notin T(V_{U_1} \cap V'_{U_1})^d$, y entonces $\phi(R) \in T(V_{U_1} \cap V'_{U_1})^*$, contrariamente a lo que habíamos probado. Luego, $R \nsubseteq \phi(R)$ y, por el axioma de separación de Priestley, existe un clopen creciente V_R tal que $R \in V_R$ y $\phi(R) \notin V_R$.

Por el Lema 4.3.1, $R \in V_R \cap V'_R$ y como $\phi(R) \subseteq R$, resulta $\phi(R) \notin (V_R \cap V'_R)^*$. Además, como $\phi(R) \notin V_R$, $\phi(R) \notin V_R \cap V'_R$. Combinando estos dos resultados tenemos que $M = \phi(R) \notin C(V_R)$.

Hemos probado entonces que existe $M = \phi(R)$ tal que $M \in (V_{U_1} \cap V'_{U_1})^*$ pero $M \notin T(V_{U_1} \cap V'_{U_1})^* \vee C(V_R)$, por lo que $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ no se seguiría en **L**. $\square$

Recordemos que Max es un conjunto cerrado para toda *pm*-álgebra (Lema 4.2.2). Para el caso particular de las *pk*-álgebras subdirectamente irreducibles que satisfacen la condición $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$, ya que éstas pueden tener a lo sumo 2 elementos en su *body* y $Min \cap Max = \emptyset$ se tiene el siguiente resultado más fuerte que nos asegura la existencia del menor elemento denso para estas álgebras.

Proposición 4.4.5. *Si* **L** *es una pk-álgebra subdirectamente irreducible que satisface $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$, para todo $x, y \in L$, entonces Max es abierto.*

Demostración. Como vimos en la demostración del Lema 4.2.2, Min es un conjunto cerrado. Por otra parte, ya que **L** es subdirectamente irreducible, $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es finito y por lo tanto $Min \cup Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ también es cerrado. Como en $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ no existen elementos maximales y minimales al mismo tiempo (Proposición 4.4.4), resulta que $Min \cup Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})) = Max^c$. Esto muestra que Max^c es un conjunto cerrado y así, Max es abierto. $\square$

Tenemos entonces que Max es un clopen creciente que verifica $Max^* = \emptyset$, es decir, está asociado a un elemento denso del álgebra **L**, y como todo clopen creciente asociado a un denso debe contener a Max, es posible asegurar que su elemento asociado es el **menor** denso del álgebra, al cual notaremos en adelante por d. Resulta así el siguiente corolario importante.

Corolario 4.4.6. *En toda pk-álgebra subdirectamente irreducible que verifica* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ *existe el menor elemento denso.*

Observemos que el Ejemplo 4.4.3 nos brinda un ejemplo de una *pk*-álgebra subdirectamente irreducible que no tiene un menor elemento denso. Para ver esto, consideremos la sucesión infinita de elementos densos distintos de 1, cuyos clopen crecientes están dados por $V_1 = Max \cup \{2', 3', \ldots\}$, $V_2 = Max \cup \{3', 4', \ldots\}$, $V_3 = Max \cup \{4', 5', \ldots\}$, etc. Si existiera un menor elemento denso, su clopen creciente asociado W debería estar contenido en cada una de los V_i, lo que implicaría que $W = Max$, sin embargo, esto no es posible, pues con la topología indicada Max no es un conjunto abierto.

A continuación, nos valdremos de la existencia del menor denso en las álgebras subdirectamente irreducibles que satisfacen $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$, para poder probar que la estructura subyacente de reticulado distributivo en dichas álgebras es isomorfa a $\mathbf{B} \oplus \mathbf{C} \oplus \mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole y $\mathbf{C}$ una cadena.

Lema 4.4.7. *Sea* $\mathbf{L}$ *una pk-álgebra subdirectamente irreducible que satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ *para todo* $x, y \in L$*, entonces, para cada* $a \in L$*,* $a \neq 0$*, resulta* $a^* \leq d$*, donde* d *es el menor elemento denso de* $\mathbf{L}$*.*

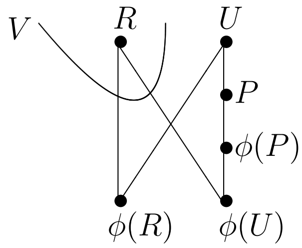
Demostración. Como $\mathbf{L}$ es un álgebra subdirectamente irreducible, por Corolario 4.4.6 existe el menor elemento denso d cuyo conjunto abierto, cerrado y creciente asociado es Max. Si $a = 1$ el resultado se sigue inmediatamente. Consideremos entonces $a \in L$, $a \neq 0, 1$. Llamemos V al conjunto abierto, cerrado y creciente asociado al elemento a y supongamos, por el contrario que existe un filtro primo Q en $V^* = V^{dc}$ tal que $Q \notin Max$. Para mostrar que no se sigue $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$, probaremos que existe un clopen creciente V_1 y y un filtro $R \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Max$ tal que $R \in V_1^*$ pero $R \notin T(V_1)^*$.

Sea $\mathbb{X}(\mathbf{L}) = \bigcup_{i \in I} S_i$ la descomposición de $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ en componentes conexas y consideremos los siguientes dos casos.

(a) Supongamos que $Min \subseteq V^d$. Como $Q \in V^*$ y $Q \notin Max$, entonces $Q \in Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$. Como $\mathbf{L}$ es subdirectamente irreducible, resulta que $Q = P$ ó $Q = \phi(P)$ (donde P el único elemento en $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})$ tal que $\phi(P) \subseteq P$). Esto indica que necesariamente $P \in V^*$. Probemos ahora que $P \notin T(V)^*$.

Sea $U \in Max$ tal que $P \subseteq U$. Afirmamos que $U \notin V$. En efecto, si $U \in V$, como $P \subseteq U$, $P \in V^d$, es decir, $P \notin V^*$, lo cual contradice lo que habíamos probado anteriormente. Análogamente, $\phi(U) \notin V$.

Como supusimos $Min \subseteq V^d$ y $\phi(U)$ es minimal, existe $R \in V$ tal que $\phi(U) \subseteq R$, o, de manera equivalente, $\phi(R) \subseteq U$. Como sabemos que $U \notin V$, $\phi(R) \notin V$. Esta situación se muestra en el siguiente gráfico



Luego, $R \in V$ pero $\phi(R) \notin V$, por lo que $R \in V \cap V'$ (Lema 4.3.1). Teniendo en cuenta que $\phi(U) \subseteq R$ y $R \in V \cap V'$ tenemos que $\phi(U) \notin (V \cap V')^*$. Además, por la Proposición 4.3.2, $\phi(U) \notin V \cap V'$, lo que implica que $\phi(U) \notin C(V)$. Ahora bien, como $C(V)$ contiene a todos los maximales, resulta que $U \in C(V)$ y otra vez, por el Lema 4.3.1 obtenemos $U \in T(V)$.

Finalmente, ya que $P \subseteq U$, resulta que $P \notin T(V)^*$. Hemos encontrado $V_1 = V$ y $R = P$ tal que $P \in V^*$ pero $P \notin T(V)^*$.

(b) Supongamos que $Min \not\subseteq V^d$. Puede pasar que exista una componente conexa cuya intersección con V sea vacío o que toda componente conexa tenga intersección no vacío con V. Analicemos estas dos situaciones.

  (i) Si toda intersección de una componente conexa con V es no vacía, por la suposición que hicimos debe existir S_i tal que $S_i \cap V \neq \emptyset$ y $Min(S_i) \not\subseteq V^d$. Luego, es posible asegurar, por el Lema 4.4.1 que existe un minimal $\phi(R)$ tal que $\phi(R) \in V^*$ pero $\phi(R) \notin T(V)^*$.

  (ii) Supongamos que existe una componente conexa S_j tal que $V \cap S_j \neq \emptyset$. Como V no es conexo y $V \neq \emptyset$, resulta $V \cap V' \neq \emptyset$. Aplicando el Lema 4.4.2, existe una componente conexa S_i tal que $Min(S_i) \not\subseteq (V \cap V')^d$. Basta tomar entonces el clopen creciente $W = V \cap V'$ y aplicarle el Lema 4.4.1 para encontrar un minimal $\phi(R)$ tal que $\phi(R) \in W^*$ pero $\phi(R) \notin T(W)^*$.

Estos dos casos muestran que si existe $V \in \mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$, $V \neq \emptyset, \mathbb{X}(\mathbf{L})$, tal que $V^* \not\subseteq Max$, entonces existe un filtro primo R que no es maximal que cumple $R \in V_1^*$ y $R \notin T(V_1)^*$, para algún clopen creciente V_1.

Luego, tomando $W = Max$ (clopen creciente asociado al menor elemento denso d), ya que $C(W) = Max$ y $R \notin Max$, obtenemos

$$V_1^* \not\subseteq C(W) \vee T(V_1)^*.$$

Con esto hemos probado que si $\mathbf{L}$ satisface $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ resulta $a^* \leq d$, para $a \in L$, $a \neq 0$. □

Proposición 4.4.8. *Si* $\mathbf{L}$ *es un álgebra de Kleene pseudocomplementada subdirectamente irreducible que satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ *entonces* $L = [0, d] \cup [d, d'] \cup [d', 1]$.

Demostración. Para $d = 1$ el resultado es trivial. Supongamos entonces que $d \neq 1$ y observemos que todo $a \in L$ verifica $a \leq d$ ó $a \geq d$. En efecto, si tomamos un $a \in L$ tal que $a \not\geq d$, entonces $a^* \neq 0$ pues d es el menor elemento denso de L. Pero como L es un álgebra pseudocomplementada $a \leq a^{**}$ y por el Lema 4.4.7, $a^{**} \leq d$, y en consecuencia $a \leq d$.

Aplicando este resultado a a y a' tenemos los siguientes casos.

- Si $a \leq d$ entonces $a \in [0, d]$.
- Si $a \geq d$ y $a' \leq d$ entonces $a \geq d'$ y así $a \in [d', 1]$.
- Si $a \geq d$ y $a' \geq d$ entonces $a \geq d$ y $a \leq d'$, y así $a \in [d, d']$.

De considerar estos tres casos, resulta $a \in [0, d] \cup [d, d'] \cup [d', 1]$. □

Proposición 4.4.9. *Si* $\mathbf{L}$ *es una pk-álgebra subdirectamente irreducible que satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ *entonces* $[d, d']$ *tiene a lo sumo tres elementos.*

Demostración. De la dualidad obtenemos que los conjuntos abiertos, cerrados y crecientes asociados a los elementos d y d' son $\sigma(d) = Max$ y $\sigma(d') = \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Min$, así, si $a \in [d, d']$ tenemos que $Max \subseteq \sigma(a) \subseteq \mathbb{X}(L) \setminus Min$.

Por otra parte, por el Teorema 4.2.8, $|\mathrm{Body}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| \leq 2$ y como $\phi(P)$ y P son elementos comparables para cada filtro P entonces $\sigma(a) = Max$ ó $\sigma(a) = Max \cup \{P\}$ ó $\sigma(a) = Max \cup \{P, \phi(P)\} = \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Min$. Esto prueba que $[d, d']$ sólo puede ser una cadena con 1, 2 ó 3 elementos. □

Por el Teorema 4.1.1 (Glivenko), sabemos que toda álgebra pseudocomplementada cumple

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{L}) \cong \mathbf{L}/\mathcal{D}(\mathbf{L})$$

donde $\mathrm{Rg}(\mathbf{L})$ es el conjunto de elementos regulares del álgebra y tiene una estructura de álgebra de Boole y $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ es el subconjunto de elementos densos del álgebra.

Por el Corolario 4.4.6 sabemos que en toda álgebra de Kleene pseudocomplementada $\mathbf{L}$ subdirectamente irreducible que verifica $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ existe el menor elemento denso d. En consecuencia, tenemos que para estas álgebras $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = [d, 1]$. Aplicando ahora el Teorema de Glivenko obtenemos

$$[0, d] \cong \mathbf{L}/\mathcal{D}(\mathbf{L})$$

tiene la estructura de álgebra de Boole con las operaciones dadas en el Teorema 4.1.1.

Además, teniendo en cuenta que $'$ es un anti-isomorfismo involutivo, es claro que $[d', 1]$ también tiene la estructura de un álgebra de Boole. Las Proposiciones 4.4.8, 4.4.9 y lo mencionado anteriormente justifican el siguiente teorema.

Teorema 4.4.10. *Si* $\mathbf{L}$ *es una pk-álgebra subdirectamente irreducible que satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ *entonces* $\mathbf{L}$ *tiene una estructura subyacente de reticulado distributivo dada por*

$$\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}_i \oplus \mathbf{B},$$

donde $\mathbf{C}_i$ *es una cadena de* i *elementos, con* $1 \leq i \leq 3$*, y* $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole.*

Esto nos permite afirmar que las pk-álgebras subdirectamente irreducibles que satisfacen $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ tienen un espacio del dual de Tipo 1, 2 ó 3 como lo establece el siguiente corolario.

Corolario 4.4.11. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Kleene pseudocomplementada subdirectamente irreducible que satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$*. Si* $P \in \mathbb{X}(\mathbf{L}) \setminus Max$ *entonces* $P \subseteq U$ *para todo* $U \in Max$*. Más aún,* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es un conjunto ordenado de Tipo 1, 2 ó 3.*

La recíproca también es cierta y puede probarse de manera más directa como se muestra a continuación.

Proposición 4.4.12. *Si* $\mathbf{L}$ *es un álgebra de Kleene pseudocomplenentada subdirectamente irreducible tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es un conjunto ordenado de Tipo 1, 2 ó 3 entonces* $\mathbf{L}$ *satisface* $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$*, para todo* $x, y \in L$.

Demostración. Sea $a, b \in L$, $V = \sigma(a)$ y $W = \sigma(b)$ los conjuntos abiertos, cerrados y crecientes que representan a a y b respectivamente. Supongamos $V \neq \emptyset$. Como $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es de Tipo 1,2 ó 3 resulta $V^{dc} \subseteq Max$.

Además, ya que $C(b)$ es un elemento denso tenemos $Max \subseteq C(W)$. Esto nos permite afirmar que $V^* \subseteq C(W)$, o lo que es equivalente $a^* \leq C(b)$.

Si consideramos que $V = \emptyset$, $V^* = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ y $T(V)^* = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ por lo que se cumple también $V^* \subseteq C(W) \cup T(V)^*$. Luego, $a^* \leq C(b) \vee T(a)^*$. □

Teniendo en cuenta que en un reticulado distributivo, toda expresión de la forma $a \leq b$ se puede expresar como una igualdad, a saber, $a \wedge b = a$, los resultados anteriores nos proveen una base ecuacional para la variedad $\mathcal{BPK}$ de las álgebras de Kleene pseudocomplenetadas *bundle*. Éstas están caracterizadas por la identidad

$$x^* \wedge (C(y) \vee T(x)^*) \approx x^*$$

dentro de la variedad $\mathcal{PK}$.

4.5. Subvariedades de la variedad $\mathcal{BPK}$

El objetivo de esta sección es determinar el reticulado de subvariedades de $\mathcal{BPK}$, la subvariedad determinada por todas las álgebras de Kleene pseudocomplementadas que satisfacen $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$.

Como vimos en la sección anterior, si $\mathbf{L}$ es una *bpk*-álgebra subdirectamente irreducible, $\mathbf{L} = [0, d] \oplus [d, d'] \oplus [d', 1]$, donde $[0, d]$ y $[d', 1]$ tienen la estructura de reticulado booleano y $[d, d']$ es una cadena de a lo sumo tres elementos. Observemos en primer lugar que:

Proposición 4.5.1. *Sea* $\mathbf{L} = [0, d] \oplus [d, d'] \oplus [d', 1]$ *un álgebra en la variedad* $\mathcal{BPK}$*. Si* S *es un subreticulado booleano de* $[0, d]$ *entonces* $S \cup S'$ *es una subálgebra de* $\mathbf{L}$*, donde* $S' = \{a' \in L : a \in S\}$*.*

Demostración. Basta notar que los elementos de $[0, d]$ son todos elementos regulares de $\mathbf{L}$, que se verifican las leyes de De Morgan y que para todo $x \in S'$, $x^* = 0$. $\square$

Sea G un conjunto finito de generadores de una *bpk*-álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{L}$ y sea d el menor elemento denso de $\mathbf{L}$.

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\widetilde{G} = G \cup G'$$

y

$$\widetilde{G}_1 = \widetilde{G} \cap [0, d].$$

Sea $\mathbf{S}$ el subreticulado booleano generado por $\widetilde{G}_1$, es decir, $S = Sg(\widetilde{G}_1)$. Si $[d, d'] = \{d, d'\}$ entonces, como por lo observado anteriormente $S \cup S'$ es subálgebra $\mathbf{L}$, y $G \subseteq S \cup S'$, es fácil ver que la subálgebra generada por G es $S \cup S'$. Como $\widetilde{G}_1$ es un conjunto finito y la variedad de las álgebras de Boole es localmente finita, resulta que S es finito, por lo que $Sg(G) = S \cup S'$ también lo es. Para el caso en el que $[d, d'] = \{d, e = e', d'\}$ y $e \in G$, resulta $Sg(G) = S \cup S' \cup \{e\}$. Esto muestra que $\mathcal{BPK}$ es una variedad localmente finita.

Ya que $\mathcal{BPK}$ es una variedad que tiene distributividad de congruencias y es localmente finita podemos aplicar el Teorema 1.1.12 de Jónsson y la generalización dada por el Teorema 1.1.13 de Davey para encontrar el reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{BPK})$ de $\mathcal{BPK}$. De esta forma, el reticulado $\Lambda(\mathcal{BPK})$ es un reticulado distributivo completo isomorfo a $\mathcal{O}(\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK}))$, el reticulado de conjuntos decrecientes (ideales de orden) del conjunto ordenado $\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK})$. Recordemos que el orden definido sobre las álgebras subdirectamnte irreducibles finitas de $\mathcal{BPK}$ ($\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK})$) está dado por $\mathbf{A} \prec \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in HS(\mathbf{B})$.

Vamos a determinar ahora condiciones necesarias y suficientes que nos permitan establecer de una manera simple cuándo dos elementos de $\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK})$ están relacionados a través de $\prec$.

Definición 4.5.2. Notaremos por $\mathbb{B}_{(i,m)}$ al álgebra subdirectamente irreducible de $\mathcal{BPK}$ que tiene una estructura de reticulado subyacente dada por

$$\mathbb{B}_{(i,m)} = \mathbf{B}_i \oplus \mathbf{C}_m \oplus \mathbf{B}_i$$

donde $\mathbf{B}_i$ es el álgebra de Boole con i átomos y $\mathbf{C}_m$ es la cadena de m elementos, para $1 \leq m \leq 3$.

Ya que $'$ es un anti-isomorfismo involutivo, es claro que existe una única *pk*-álgebra (salvo isomorfismos) cuyo reticulado subyacente es $\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}_i \oplus \mathbf{B}$.

El orden en $\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK})$ queda establecido por la siguiente proposición.

Proposición 4.5.3. *Si* $\mathbb{B}_{(i,m)}, \mathbb{B}_{(j,n)} \in \mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK})$ *entonces*

$$\mathbb{B}_{(i,m)} \prec \mathbb{B}_{(j,n)} \quad \textit{si y sólo si} \quad i \leq j \ \textit{y} \ m \leq n$$

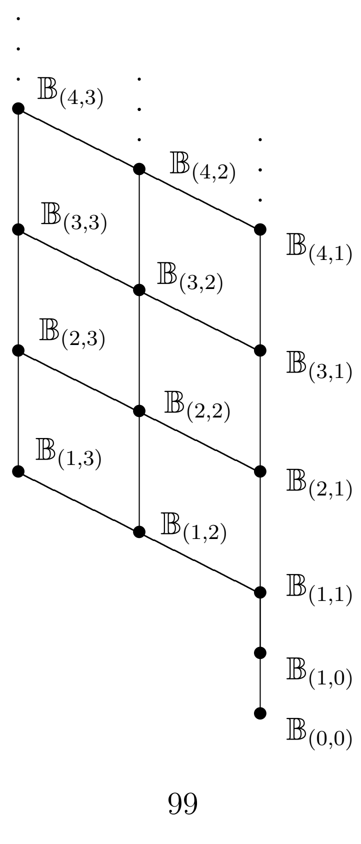
Demostración. Es inmediato que si $\mathbb{B}_{(i,m)} \prec \mathbb{B}_{(j,n)}$, es decir, $\mathbb{B}_{(i,m)} \in HS(\mathbb{B}_{(j,n)})$ entonces $i \leq j$ y $m \leq n$.

Para mostrar la recíproca, consideremos los siguientes casos:

- Si $m = n$ e $i \leq j$ entonces $\mathbb{B}_{(i,m)}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{(j,m)}$, y así $\mathbb{B}_{(i,m)} \in HS(\mathbb{B}_{(j,m)})$.
- Si $m = 2$, $n = 3$ e $i \leq j$ entonces $\mathbb{B}_{(i,m)}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{(j,n)}$, y así $\mathbb{B}_{(i,m)} \in HS(\mathbb{B}_{(j,n)})$.
- Si $m = 1 < n$ e $i \leq j$, teniendo en cuenta que $\mathbb{B}_{(i,1)} \in H(\mathbb{B}_{(i,n)})$, (pues podemos identificar el segmento $[d, d']$ del álgebra $\mathbb{B}_{(i,n)}$ con el elemento $d = d'$ del álgebra $\mathbb{B}_{(i,1)}$) resulta que $\mathbb{B}_{(i,m)} \in HS(\mathbb{B}_{(j,n)})$.

$\square$

La siguiente figura muestra el conjunto ordenado $\mathbf{Si_{fin}}(\mathcal{BPK})$. Acá $\mathbb{B}_{(1,0)}$ es la cadena de dos elementos y $\mathbb{B}_{(0,0)}$ el álgebra trivial.



Notaremos por $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i,m)})$ a la variedad generada por $\mathbb{B}_{(i,m)}$, y llamaremos $\mathcal{BPK}_1$ y $\mathcal{BPK}_0$ a las variedades

$$\mathcal{BPK}_0 = \mathcal{V}\left(\{\mathbb{B}_{(i,1)} : i \geq 1\}\right)$$

y

$$\mathcal{BPK}_1 = \mathcal{V}\left(\{\mathbb{B}_{(i,1)} : i \geq 1\} \cup \{\mathbb{B}_{(i,2)} : i \geq 1\}\right).$$

Los subíndices elegidos se corresponden con la máxima cantidad de elementos que pueden tener en su *body* las álgebras subdirectamente irreducibles que las generan. Es decir, $\mathcal{BPK}_0$ está generada por aquellas *pk*-álgebras subdirectamente irreducibles *bundle* que no tienen elementos en su *body* y $\mathcal{BPK}_1$ por aquellas que a lo sumo tienen uno.

Claramente,

$$\mathcal{BPK}_0 \subseteq \mathcal{BPK}_1 \subseteq \mathcal{BPK}.$$

En la Sección 4.4 encontramos una ecuación que caracteriza a las álgebras en la variedad $\mathcal{BPK}$ dentro de la variedad de las álgebras de Kleene pseudocomplementadas y en los Teoremas 4.3.3 y 4.3.4 ecuaciones que caracterizan a las subvariedades de $\mathcal{PK}$ generadas por aquellas álgebras subdirectamente irreducibles (no necesariamente *bundle*) que no tienen elementos en el *body* o tienen a lo sumo 1, respectivamente. Combinando estos dos resultados obtenemos lo siguiente.

- La variedad $\mathcal{BPK}_0$ es la subvariedad de $\mathcal{PK}$ caracterizada por las ecuaciones

  $$x^* \leq C(y) \vee T(x)^* \quad \text{y} \quad C(x)' \leq C(x).$$

  Más aún, las únicas álgebras subdirectamente irreducibles finitas en dicha variedad son las isomorfas a $\mathbb{B}_{(i,1)}$

- La variedad $\mathcal{BPK}_1$ es la subvariedad de $\mathcal{PK}$ caracterizada por las ecuaciones

  $$x^* \leq C(y) \vee T(x)^* \quad \text{y} \quad C(x)' \wedge C(x) \leq C(y).$$

  Y las únicas álgebras subdirectamente irreducibles finitas en dicha variedad son las isomorfas a $\mathbb{B}_{(i,1)}$ ó $\mathbb{B}_{(i,2)}$.

A continuación, detallamos cuál es el conjunto de elementos supremo irreducibles $\mathcal{J}(\Lambda(\mathcal{BPK}))$ del reticulado de subvariedades de $\Lambda(\mathcal{BPK})$.

Sabemos por el Teorema 1.1.12 de Jónsson que $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i,m)})$ es supremo irreducible para todo par (i, m), $1 \leq m \leq 3$. Los siguientes resultados permiten encontrar exactamente al conjunto $\mathcal{J}(\Lambda(\mathcal{BPK}))$.

Proposición 4.5.4. *$\mathcal{BPK}_0$, $\mathcal{BPK}_1$ y $\mathcal{BPK}$ son elementos supremo irreducibles de $\Lambda(\mathcal{BPK})$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{BPK}_0 = \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2$. Entonces, por lo expuesto anteriormente, si $\mathbf{L}$ es un álgebra subdirectamente irreducible finita de $\mathcal{V}_1$ ó $\mathcal{V}_2$, resulta $\mathbf{L} = \mathbb{B}_{(i,1)}$ para algún i. Consideremos los conjuntos $I_1 = \{i : \mathbb{B}_{(i,1)} \in \mathcal{V}_1\}$ e $I_2 = \{i : \mathbb{B}_{(i,1)} \in \mathcal{V}_2\}$. Si ambos conjuntos I_1 e I_2 son finitos entonces existiría i_0 tal que $\mathbb{B}_{(i_0,1)} \notin \mathcal{V}_1$ y $\mathbb{B}_{(i_0,1)} \notin \mathcal{V}_2$, lo cual es imposible. Por lo tanto, o bien I_1 es un conjunto infinito o bien I_2 es infinito y así $\mathcal{V}_1 = \mathcal{BPK}_0$ ó $\mathcal{V}_2 = \mathcal{BPK}_0$.

Para demostrar que $\mathcal{BPK}_1$ y $\mathcal{BPK}$ son supremos irreducibles se utilizan argumentos similares. □

Teorema 4.5.5. *$\mathcal{BPK}_0$, $\mathcal{BPK}_1$ y $\mathcal{BPK}$ son las únicas subvariedades supremo irreducibles de la variedad $\mathcal{BPK}$ que no son finitamente generadas.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad supremo irreducible de $\mathcal{BPK}$ que no está finitamente generada. Consideremos los siguientes conjuntos

$$I_1 = \{i : \mathbb{B}_{(i,1)} \in \mathcal{V}\}, \quad I_2 = \{i : \mathbb{B}_{(i,2)} \in \mathcal{V}\}, \quad I_3 = \{i : \mathbb{B}_{(i,3)} \in \mathcal{V}\}$$

junto con las variedades que ellos generan

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}(\{\mathbb{B}_{(i,1)}, i \in I_1\}), \quad \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}(\{\mathbb{B}_{(i,2)}, i \in I_2\}), \quad \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}(\{\mathbb{B}_{(i,3)}, i \in I_3\}).$$

Luego, es posible escribir $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 \vee \mathcal{V}_3$. Si I_1, I_2 e I_3 fueran conjuntos finitos entonces $\mathcal{V}$ sería finitamente generada, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, alguno de estos tres conjuntos debe ser necesariamente infinito. Si I_3 es infinito, $\mathcal{V}_3 = \mathcal{BPK}$, y de esta manera $\mathcal{V} = \mathcal{BPK}$. Si el que es infinito es el conjunto I_2 e I_3 es finito entonces $\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 = \mathcal{BPK}_1$, y llamándole i_3 al elemento más grande de I_3 resulta $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$. De esto, obtenemos $\mathcal{V} = \mathcal{BPK}_1 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$ y como $\mathcal{V}$ no es finitamente generada pero es supremo irreducible, $\mathcal{V} = \mathcal{BPK}_1$. Finalmente, supongamos que I_1 es infinito pero I_2 e I_3 no lo son y llamemos i_2 e i_3 a los elementos más grandes de I_2 e I_3 respectivamente. Entonces $\mathcal{V}_1 = \mathcal{BPK}_0$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)})$ y $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$. Bajo estas condiciones, $\mathcal{V} = \mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$, y ya que $\mathcal{V}$ es supremo irreducible y no está finitamente generada, resulta $\mathcal{V} = \mathcal{BPK}_0$. □

Estos resultados nos permiten concluir que si $\mathcal{V}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{BPK}$ entonces $\mathcal{V}$ tiene alguna de las siguientes formas.

- Si $\mathcal{V}$ es supremo irreducible entonces $\mathcal{V}$ es $\mathcal{BPK}$, $\mathcal{BPK}_1$, $\mathcal{BPK}_0$, $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_1,1)})$, $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)})$ ó $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$.
- Si $\mathcal{V}$ no es supremo irreducible entonces $\mathcal{V}$ es

  $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_1,1)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$,

  $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_1,1)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)})$,

  $\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$,

$\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_2,2)})$,

$\mathcal{BPK}_1 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)})$.

en todos los casos vale $i_1 > i_2 > i_3$.

Como $\Lambda(\mathcal{BPK})$ es un reticulado distributivo completo, todo elemento es supremo de elementos supremo irreducibles, así, al determinar cuáles son éstos hemos obtenido la estructura del reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{BPK})$.

4.6. Bases ecuacionales

En la Sección 4.4 vimos que un álgebra de Kleene pseudocomplementada está en la variedad $\mathcal{BPK}$ si y sólo si verifica $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ para todo par de elementos x e y del álgebra. En la Sección 4.5 caracterizamos a las subvariedades de Kleene pseudocomplementadas $\mathcal{BPK}_0$ y $\mathcal{BPK}_1$ adicionándole dos identidades más. Los siguientes resultados muestran que es posible caracterizar la subvariedad $\mathcal{BPK}_1$ a través de una única ecuación.

Teorema 4.6.1. *Si* $\mathbf{L}$ *es una pk-álgebra subdirectamente irreducible que satisface*

$$T(x)^* \vee C(y) = C(x) \vee T(y)^*$$

entonces $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es un conjunto ordenado de Tipo 1 ó 2, es decir,* $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_1$.

Demostración. Veamos primero que si $\mathbf{L}$ satisface $T(x)^* \vee C(y) = C(x) \vee T(y)^*$ para todo $x, y \in L$ entonces también satisface $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$, es decir, es un álgebra en la variedad $\mathcal{BPK}$. En efecto, como $x \wedge x' \leq x$, resulta $x^* \leq (x \wedge x')^* \leq C(x)$, y de esto, $x^* \leq C(x) \vee T(y)^* = C(y) \vee T(x)^*$.

Finalmente, probemos que si $P \in Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ entonces $P = \phi(P)$. Supongamos por el contrario que $P \neq \phi(P)$ y mostremos que $\mathbf{L}$ no satisface la identidad $T(x)^* \vee C(y) = C(x) \vee T(y)^*$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi(P) \subsetneq P$. Si consideramos los conjuntos abiertos, cerrados y crecientes $V = Max$ y $W = Max \cup \{P\}$. Entonces

$$T(V)^* \vee C(W) = Max \cup \{P\}$$

y

$$C(V) \vee T(W)^* = Max,$$

lo cual muestra que existen elementos en el álgebra que no satisfacen la identidad. Queda demostrado entonces que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es un conjunto de tipo 1 ó 2. $\square$

Notemos que si $\mathbf{L}$ es un álgebra de Kleene pseudocomplementada subdirectamente irreducible tal que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ es de Tipo 1 o Tipo 2 entonces $C(V) = Max$ para cada $V \neq \mathbb{X}(\mathbf{L}), \emptyset$, es decir, para todo elemento x del álgebra distinto de 0 y 1, $C(x)$ da como resultado el menor elemento denso del álgebra.

Proposición 4.6.2. *Si* $\mathbf{L}$ *es una pk-álgebra subdirectamente irreducible tal que* $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ *es de Tipo 1 ó 2 entonces* $\mathbf{L}$ *satisface* $T(x)^* \vee C(y) = C(x) \vee T(y)^*$ *para todo* $x, y \in L$.

Demostración. Sea $V, W \neq \mathbb{X}(\mathbf{L}), \emptyset$, entonces, por la observación anterior

$$C(V) = C(W) = Max$$

y

$$T(V)^* = T(W)^* = \emptyset.$$

Luego, la igualdad $T(x)^* \vee C(y) = C(x) \vee T(y)^*$ se sigue para todo $x, y \neq 0, 1$ en $\mathbf{L}$. Si $V = \emptyset$ ó $V = \mathbb{X}(\mathbf{L})$ entonces $C(V) = T(V)^* = \mathbb{X}(\mathbf{L})$. Por lo tanto, $\mathbf{L}$ satisface la identidad $T(x)^* \vee C(y) = C(x) \vee T(y)^*$ para todo $x, y \in L$. □

Teniendo en cuenta esto e introduciendo la notación $\gamma(x, y) = T(x)^* \vee C(y)$, tenemos que $\mathcal{BPK}$, $\mathcal{BPK}_1$ y $\mathcal{BPK}_0$ son las subvariedades de la álgebras pseudocomplementadas de Kleene caracterizadas por:

- $\mathcal{BPK}$:
$$x^* \wedge \gamma(x, y) \approx x^*.$$
- $\mathcal{BPK}_1$:
$$\gamma(x, y) \approx \gamma(y, x).$$
- $\mathcal{BPK}_0$:
$$x^* \wedge \gamma(x, y) \approx x^* \quad \text{y} \quad C(x)' \wedge C(x) \approx C(x)'.$$

Para poder dar bases ecuacionales para las restantes subvariedades de $\mathcal{BPK}$ supremo irreducibles necesitaremos del siguiente resultado que establece que si una p-álgebra satisface cierta identidad, su espacio dual tiene a lo sumo un número determinado de elementos maximales. Su demostración puede verse en [3, Teorema 2], p. 162.

Teorema 4.6.3. *Si* $\mathbf{L}$ *es una p-álgebra y* $n > 0$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1})^* \vee \bigvee_{i<n}(x_0 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} \wedge x_i^* \wedge x_{i+1} \wedge \ldots x_{n-1})^* \approx 1$ *es una identidad en* $\mathbf{L}$.

(2) *Todo filtro primo está contenido en a lo sumo n filtros maximales.*

Definiendo

$$\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1})^* \vee \bigvee_{i<n}(x_0 \wedge \ldots \wedge x_{i-1} \wedge x_i^* \wedge x_{i+1} \wedge \ldots x_{n-1})^*$$

y teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos obtener las siguientes caracterizaciones para las subvariedades supremo irreducibles.

Teorema 4.6.4. *Dada un álgebra pseudocomplementada de Kleene* $\mathbf{L}$*:*

- $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK} \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models x^* \wedge \gamma(y,x) \approx x^*$,
- $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_1 \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models \gamma(y,x) \approx \gamma(x,y)$,
- $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_0 \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models x^* \wedge \gamma(y,x) \approx x^*$ *y* $C(x) \wedge C(x)' \approx C(x)'$,
- $\mathbf{L} \in \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n,1)}) \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models x^* \wedge \gamma(y,x) \approx x^*$ *y* $C(x) \wedge C(x)' \approx C(x)'$ *y* $\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \approx 1$,
- $\mathbf{L} \in \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n,2)}) \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models \gamma(y,x) \approx \gamma(x,y)$ *y* $\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \approx 1$,
- $\mathbf{L} \in \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n,3)}) \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models x^* \wedge \gamma(y,x) \approx x^*$ *y* $\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \approx 1$.

Observemos que en toda álgebra subdirectamente irreducible finita de la variedad $\mathcal{BPK}$ tenemos que los posibles valores que puede tomar $\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ se encuentran en $[0,d] \cup \{1\}$. Este hecho nos permite también caracterizar a las siguientes subvariedades que no son supremo irreducibles dentro de la variedad $\mathcal{PK}$ de la siguiente manera:

Proposición 4.6.5. *Dada un álgebra pseudocomplementada de Kleene* $\mathbf{L}$*:*

- $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_1 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n,3)}) \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models x^* \wedge \gamma(y,x) \approx x^*$ *y* $C(y)' \leq (C(y) \vee \beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$.
- $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_2 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n,3)}) \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models x^* \wedge \gamma(y,x) \approx x^*$ *y* $C(y) \wedge C(y)' \leq (C(z) \vee \beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$.

Demostración. Para probar el primer item, basta notar que si $\mathbf{L} \models C(y)' \leq (C(y) \vee \beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$ y $\mathbf{L} \models \beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \approx 1$ entonces $\mathbf{L}$ tiene a los sumo n elementos maximales en su dual, por lo que $\mathbf{L} \in \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n,3)})$. Por el contrario, si existen elementos en L tales que $\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq 1$, entonces $\beta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq d$ y como $d \leq C(y)$, resulta que $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_0$. Análogamente, se prueba el segundo item. $\square$

Para encontrar identidades que caractericen a las subvariedades restantes es suficiente poder escribir a éstas como intersección de las subvariedades ya axiomatizadas. Esto lo podemos lograr de la siguiente manera:

- $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_1,1)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,2)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_3,3)}) = \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_1,3)}) \cap (\mathcal{BPK}_1 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_3,3)})) \cap (\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,3)}))$,
- $\mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_1,1)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,2)}) = \mathcal{BPK}_1 \cap \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_1,3)}) \cap (\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,3)}))$,
- $\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,2)}) \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(i_3,3)}) = (\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,3)})) \cap (\mathcal{BPK}_1 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_3,3)}))$,
- $\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,2)}) = \mathcal{BPK}_1 \vee (\mathcal{BPK}_0 \vee \mathcal{V}(\mathbb{B}_{(n_2,3)}))$.

Capítulo 5

La variedad $\mathcal{BPK}_0$

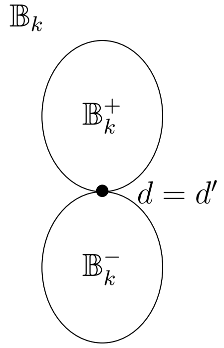
En el capítulo previo, introdujimos la subvariedad $\mathcal{BPK}$ y determinamos todas sus subvariedades junto con identidades que las describen completamente. Una de ellas es la subvariedad $\mathcal{BPK}_0$, la cual está generada por aquellos miembros de $\mathcal{BPK}$ que son simples. En este capítulo nos abocaremos a estudiar con más detalle esta subvariedad. En primer lugar describiremos la estructura de sus álgebras libres con un conjunto finito de generadores libres determinando cada uno de los factores que aparecen en su descomposición. Para ello, puesto que toda álgebra subdirectamente irreducible en $\mathcal{BPK}_0$ es suma ordinal de álgebras de Boole, utilizaremos la estructura conocida del álgebra de Boole libre con n generadores libres. Posteriormente, utilizamos estos resultados para caracterizar las álgebras finitas débilmente proyectivas. En la Sección 5.3 describimos el reticulado de cuasivariedades de la variedad $\mathcal{BPK}_0$ ($\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$) y encontramos cuasi-identidades que caracterizan a cada una de las cuasivariedades de dicho reticulado. Finalmente, en la última sección, establecemos algunos resultados concernientes a las variedades $\mathcal{BPK}_0$ y $\mathcal{BPK}_1$ junto con algunas consideraciones finales.

5.1. Álgebras libres

Recordemos que $\mathcal{BPK}_0$ es la subvariedad de las álgebras de Kleene pseudocomplementadas generada por las álgebras subdirectamente irreducibles cuyo espacio dual es de Tipo 1, es decir, es un grafo bipartido completo y cuyo reticulado distributivo subyacente es de la forma $\mathbb{B}_{(k,1)} = \mathbf{B_k} \oplus \mathbf{C_1} \oplus \mathbf{B_k}$. Para simplificar la notación notaremos a dichas álgebras por $\mathbb{B}_k$, es decir, $\mathbb{B}_k = \mathbf{B_k} \oplus \mathbf{B_k}$, donde por $\mathbf{B_k}$ entendemos el álgebra de Boole con k átomos. Más aún, escribiremos

$$\mathbb{B}_k = \mathbf{B_k} \oplus \mathbf{B_k} = \mathbb{B}_k^- \oplus \mathbb{B}_k^+ \quad (\text{ notemos que } 1^- = 0^+)$$

donde por $\mathbb{B}_k^-$ entendemos el subreticulado de $\mathbb{B}_k$ determinado por el segmento $[0, d]$ y por $\mathbb{B}_k^+$ el subreticulado de $\mathbb{B}_k$ determinado por el segmento $[d, 1]$. Esto se muestra en la siguiente figura



H.P. Sankappanavar define como álgebras **regulares** a aquellas que verifican la cuasi identidad: $x^* = y^* \ \&\ x'^* = y'^* \Rightarrow \ x = y$. Notemos que las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad $\mathcal{BPK}_0$ cumplen dicha condición. Una característica importante de estas álgebras es que es posible definir una implicación de Heyting en función de las operaciones $*, ', \wedge$ y $\vee$ de la siguiente manera (ver [26])

$$a \to b = (a^* \vee b^{**})^{**} \wedge [(a \vee a^*)'^{*'} \vee a^* \vee b \vee b^*].$$

En el Capítulo 4, mostramos que $x^* \leq C(y) \vee T(x)^*$ y $C(x)' \leq C(x)$ son identidades que caracterizan a las álgebras en $\mathcal{BPK}_0$ dentro de la variedad $\mathcal{PK}$. Observemos que puesto que es una variedad en la que es posible definir una implicación de Heyting y está generada por sus miembros finitos, también es posible caracterizarla a través de las identidades

$$C(x)' \wedge C(x) \approx C(x) \quad \text{y} \quad x^{2('*)} \approx x^{3('*)}.$$

La primera identidad indica que el espacio dual asociado a un álgebra subdirectamente irreducible finita $\mathbf{L}$ no tiene elementos en $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ (Teorema 4.3.3) y la segunda que todo elemento minimal está por debajo de todo elemento maximal (Corolario 2.5.9).

La última identidad nos dice que la varidad $\mathcal{BPK}_0$ es de **rango finito** en el sentido que establece Sankappanavar en [26], es decir, toda álgebra $\mathbf{L}$ en la variedad verifica que para $a \in L$, existe $n \in \omega$ tal que $(a \wedge a'^*)^{n('*)} = (a \wedge a'^*)^{(n+1)('*)}$. Además, como dijimos anteriormente, es posible definir una implicación de Heyting por lo que podemos afirmar que posee un término discriminador (ver [26]).

Observemos que los términos $C(x) = (x \wedge x') \vee (x \wedge x')^*$ y $T(x) = C(x) \wedge C'(x)$ introducidos en el Captíulo 4, también nos permiten establecer de forma explícita un término discriminador para esta variedad. En efecto, es fácil ver que en toda álgebra subdirectamente irreducible de la variedad $\mathcal{BPK}_0$ se cumple:

$$F(x) = T(x)^* \wedge x^{**} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Es inmediato entonces que un término discriminador para las álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{BPK}_0$ es

$$t(x,y,z) = [F((x \to y) \wedge (y \to x)) \wedge z] \vee [(F((x \to y) \wedge (y \to x)))^* \wedge x].$$

En lo que sigue de la sección notaremos por $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(G)$ al álgebra libre de la variedad $\mathcal{V}$ sobre un conjunto de generadores G y supondremos que $|G| = n$. Nuestro próximo objetivo es determinar la estructura de $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$.

Ya que $\mathcal{BPK}_0$ es una variedad con término discriminador, por el Teorema 1.1.14 tenemos que toda álgebra no trivial finita $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_0$ es producto directo de álgebras simples, es decir,

$$\mathbf{L} \cong \prod_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i,$$

donde cada $\mathbf{A}_i$ es un álgebra simple en $\mathcal{BPK}_0$.

Por otra parte, ya que $\mathcal{BPK}_0$ es una variedad localmente finita (Sección 4.5), tenemos que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ es finita. Además, puesto que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ es libre y $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta$ es simple si y sólo si θ es una congruencia maximal (ver [26, Teorema 8.9]), $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ admite una factorización de la forma

$$\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G) \cong \prod_{\theta \in \mathcal{M}} \mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta, \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de congruencias maximales sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$, que además es finito.

Como los factores $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta$ son miembros simples de $\mathcal{BPK}_0$, por lo visto en el capítulo anterior resulta que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k$ ó $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbf{2}$ (cadena de dos elementos). Para determinar completamente el álgebra libre $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ necesitamos resolver los problemas siguientes.

- **Problema 1:** Hallar qué valores de k hacen que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k$ (de esta forma sabríamos qué álgebras $\mathbb{B}_k$ son factores del álgebra libre).

- **Problema 2:** Dado un k tal que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k$, calcular cuántas son las congruencias maximales que determinan un cociente isomorfo a $\mathbb{B}_k$ (de esta forma sabríamos cuántos factores iguales a $\mathbb{B}_k$ tiene el álgebra libre).

Para resolver el Problema 1, necesitaremos de la estructura del álgebra de Boole libre y de la relación que existe entre los conjuntos generadores de $\mathbf{B}_k$ y $\mathbb{B}_k$, la cual está dada en los siguientes resultados.

Recordemos en primer lugar, que, por la Proposición 4.5.1, si $\mathbb{B}_k = \mathbf{B_k} \oplus \mathbf{B_k}$ y $\mathbf{S}$ es un subreticulado booleano de $\mathbf{B_k}$ entonces $\mathbf{S} \cup \mathbf{S'}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_k$ donde $S' = \{a' \in L : a \in S\}$.

Además, vale lo siguiente:

Proposición 5.1.1. *Si* $\mathbf{S}$ *es una subálgebra de* $\mathbb{B}_k$*,* $S \neq \{0,1\}$ *entonces* $\mathbf{S} \cap \mathbb{B}_k^-$ *es subálgebra del álgebra de Boole* $\mathbb{B}_k^-$

Demostración. Para mostrar esto basta recordar que en $\mathbb{B}_k^-$ todos los elementos, excepto 1^-, son regulares ($x^{**} = x$) y que $\mathbb{B}_k^-$ es un álgebra de Boole con las mismas operaciones que $\mathbb{B}_k$, excepto el supremo que está definido por $x \vee^{Rg(\mathbf{L})} y = (x \vee y)^{**}$ (Teorema 4.1.1 de Glivenko). □

Lema 5.1.2. *Cada* $\mathbb{B}_k = \mathbf{B_k} \oplus \mathbf{B_k} = \mathbb{B}_k^- \oplus \mathbb{B}_k^+$*,* $k \geq 2$ *satisface:*

(1) *Si* G *es un conjunto de generadores de* $\mathbb{B}_k$ *entonces es posible obtener un conjunto de generadores de* $\mathbb{B}_k$ *contenido en* $\mathbb{B}_k^-$ *cuya cardinalidad es menor o igual que la de* G*.*

(2) *Dado* $G \subseteq \mathbb{B}_k^-$*,* G *genera a* $\mathbf{B_k}$ *si y sólo si* G *genera a* $\mathbb{B}_k$ *.*

Demostración. Sea G un conjunto de generadores de $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}_k^- \oplus \mathbb{B}_k^+$ y consideremos los conjuntos

$$A_1 = G \cap \mathbb{B}_k^- \quad \text{y} \quad A_2 = G \cap \mathbb{B}_k^+$$

Se sigue inmediatamente que $A_1 \cup A_2' \subseteq \mathbb{B}_k^-$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{B}_k$ cuya cardinalidad es menor o igual que la de G.

Para probar (2) supongamos que $\mathbf{B_k}$ está generada por un conjunto G. Consideremos la subálgebra de $\mathbb{B}_k$ generada por G, $Sg_{\mathbb{B}_k}(G)$. Por Proposición 5.1.1 sabemos que $Sg_{\mathbb{B}_k}(G) \cap \mathbb{B}_k^-$ es sbuálgebra de Boole de $\mathbf{B_k}$ y que además contiene a G. De esto resulta que $Sg_{\mathbb{B}_k}(G) \cap \mathbb{B}_k^- = \mathbf{B_k}$, y, en consecuencia $Sg_{\mathbb{B}_k}(G) = \mathbf{B_k} \oplus \mathbf{B_k}$.

Para probar la recíproca, consideremos G un conjunto de generadores de $\mathbb{B}_k$, $G \subseteq \mathbb{B}_k^-$. Consideremos la subálgebra de $\mathbf{B_k}$ generada por G, $Sg_{\mathbf{B_k}}(G)$. Por la Proposición 4.5.1, sabemos que $Sg_{\mathbf{B_k}}(G) \cup (Sg_{\mathbf{B_k}}(G))' = Sg_{\mathbf{B_k}}(G) \oplus Sg_{\mathbf{B_k}}(G)$ es una subálgebra de $\mathbb{B}_k$ que contiene a G, por lo que resulta $Sg_{\mathbf{B_k}}(G) \oplus Sg_{\mathbf{B_k}}(G) = \mathbb{B}_k$ y, en consecuencia $Sg_{\mathbf{B_k}}(G) = \mathbf{B_k}$. □

De este resultado se desprende que si el álgebra $\mathbb{B}_k$ es n generada entonces el álgebra de Boole $\mathbf{B_k}$ también lo es. Como la mayor álgebra de Boole n generada es el álgebra libre de Boole $\mathbf{B_{2^n}}$ y tiene 2^n átomos y $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ es n generada, se sigue inmediatamente que los cocientes simples $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta$ no pueden tener más de 2^n átomos.

Más aún, sabemos que si G es un conjunto de generadores libres tal que $|G| = n$ entonces existe un homomorfismo sobreyectivo de Boole $h : \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G) \to \mathbf{B_k}$, para cada k tal que $1 \leq k \leq 2^n$, es decir, toda álgebra de Boole con una cantidad de átomos menor o igual que 2^n es n-generada. Luego, por el Lema 5.1.2, también existe un homomorfismo sobreyectivo $\overline{h} : \mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G) \to \mathbb{B}_k$, para todo $k \leq 2^n$. Se tiene entonces el siguiente resultado que resuelve el Problema 1.

Proposición 5.1.3. *$\mathbb{B}_k$ es cociente $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ si y sólo si $1 \leq k \leq 2^n$.*

Con el objetivo de resolver el Problema 2, es decir, dado un k, hallar cuántas congruencias θ hacen que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k$ consideraremos los siguientes subconjuntos del conjunto $\mathcal{M}$ de congruencias maximales:

$$\mathcal{M}_0 = \{\theta \in Con(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)) : \mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbf{2}\},$$

$$\mathcal{M}_k = \{\theta \in Con(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)) : \mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k\}, \qquad \text{para } k \geq 1$$

La proposición 5.1.3 nos dice que $|\mathcal{M}_k| \neq \emptyset$, para cada $1 \leq k \leq n$. Con lo probado anteriormente y utilizando esta notación, podemos reescribir (5.1) de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G) = \mathbf{2}^{|\mathcal{M}_0|} \times \mathbf{3}^{|\mathcal{M}_1|} \times \prod_{k=2}^{2^n} \mathbb{B}_k^{|\mathcal{M}_k|}. \tag{5.2}$$

Queremos determinar $|\mathcal{M}_k|$. Para ello necesitamos las siguientes definiciones:

- $\mathbb{H}_k = Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbb{B}_k)$ (conjunto de todos los homomorfismos sobreyectivos de $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ en $\mathbb{B}_k$.)
- $\mathbb{A}_k = Aut(\mathbb{B}_k)$ (conjunto de todos los automorfismos de $\mathbb{B}_k$.)
- $s : \mathbb{H}_k \to \mathcal{M}_k$ tal que $s(h) = \text{Núc}(h)$, donde $\text{Núc}(h)$ es el núcleo del homomorfismo h.

Observemos que s es sobreyectiva pues para cada $\theta \in \mathcal{M}_k$ existe el homomorfismo sobreyectivo canónico $q : \mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G) \to \mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k$.

La siguiente es una proposición que se puede probar fácilmente utilizando un resultado de álgebra universal (Teorema 1.1.8).

Proposición 5.1.4. *Si $h \in \mathbb{H}_k$ y $a \in \mathbb{A}_k$ entonces h y $a \circ h$ tienen el mismo núcleo, es decir, $s(h) = s(a \circ h)$.*

Además, si $h_1 \in \mathbb{H}_k$ tiene el mismo núcleo que h entonces existe $a \in \mathbb{A}_k$ tal que $h_1 = a \circ h$.

Esto nos dice que $s^{-1}(\theta) = \{a \circ h : a \in A_k\}$ para cada $\theta \in \mathcal{M}_k$. Y entonces

$$|\mathcal{M}_k| = \frac{|Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbb{B}_k)|}{|Aut(\mathbb{B}_k)|} \tag{5.3}$$

A continuación, determinaremos el número de elementos de los conjuntos $\mathbb{A}_k = Aut(\mathbb{B}_k)$ y $\mathbb{H}_k = Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbb{B}_k)$.

El Lema 5.1.2 nos permite afirmar que la cantidad de automorfismos del álgebra $\mathbb{B}_k$ coincide con la cantidad de automorfismos del álgebra de Boole $\mathbf{B_k}$ y es fácil ver que este número es $k!$. Luego tenemos que $|Aut(\mathbb{B}_k)| = |Aut(\mathbf{B_k})| = k!$. También es conocido que el número de homomorfismos sobreyectivos del álgebra de Boole libre $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ en $\mathbf{B_k}$ está dado por $|Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G), \mathbf{B_k})| = \dfrac{2^n!}{(2^n - k)!}$, pero éste no coincide con $|Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbf{B_k})|$ como veremos más adelante.

Para calcular la cantidad de homomorfismos sobreyectivos del álgebra libre $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ en $\mathbb{B}_k$, notemos que hay una correspondencia biunívoca entre homomorfismos sobreyectivos de $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ en $\mathbb{B}_k$ y n-uplas que generen a $\mathbb{B}_k$. En efecto, si $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ y $h \in Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbb{B}_k)$ entonces $(h(g_1), \ldots, h(g_n))$ es una n-upla cuyas componentes generan a $\mathbb{B}_k$ y si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{B}_k$, como $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)$ es un álgebra libre con n generadores libres, existe un único homomorfismo que aplique g_i en x_i. Por Lema 5.1.2, a la n-upla $(h(g_1), \ldots, h(g_n))$ que genera a $\mathbb{B}_k$, siempre es posible asociarle una n-upla $(\overline{h}(g_1), \ldots, \overline{h}(g_n))$ que la genere y cuyas componentes estén en $\mathbb{B}_k^-$ (sustituyendo $h(g_i)$ por $h(g_i)'$ si fuera necesario).

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.1.5. Dada $\mathbb{B}_k$ y una n-upla $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $x_i \in \mathbb{B}_k^-$ llamaremos $S_{\mathbf{u}}$ al conjunto de n-uplas de $\mathbb{B}_k$ dado por

$$S_{\mathbf{u}} = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{B}_k^n : y_i = x_i \text{ ó } y_i = x_i'\}.$$

Si consideramos un álgebra $\mathbb{B}_k$ y $\mathbf{u}$ una n-upla cuyas componentes generen al álgebra de Boole $\mathbb{B}_k^-$, por Lema 5.1.2, tenemos que si $\mathbf{v} \in S_{\mathbf{u}}$ entonces $\mathbf{v}$ genera a $\mathbb{B}_k$.

El problema de calcular $|Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbb{B}_k)|$ se reduce entonces a encontrar, dada una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ cuyas componentes estén en $\mathbb{B}_k^-$ y generen al álgebra de Boole $\mathbb{B}_k^-$, cuántas n-uplas asociadas (en el sentido anteriormente mencionado) que generen $\mathbb{B}_k$ pueden encontrarse, es decir, cuál es el cardinal de $S_{(x_1, \ldots, x_n)}$.

Es claro que si $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ es una n-upla que genere a $\mathbb{B}_k^-$ como álgebra de Boole y los $x_i \neq 1^-$ (acá $1^- = d$) entonces $|S_{\mathbf{u}}| = 2^n$ (las n-uplas de $S_{\mathbf{u}}$ resultan de elegir x_i ó x_i' en cada componente). No sucedería lo mismo si algún $x_i = 1^-$ para algún i, puesto que $d = d'$ en $\mathbb{B}_k$. Luego, es necesario saber, dada una n-upla $\mathbf{u}$ que genere al álgebra de Boole $\mathbb{B}_k^-$, cuántas de estas componentes son 1^-, o, el problema equivalente, dado un homomorfismo sobreyectivo del álgebra de Boole libre $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ en $\mathbb{B}_k$ qué generadores tienen como imagen al 1.

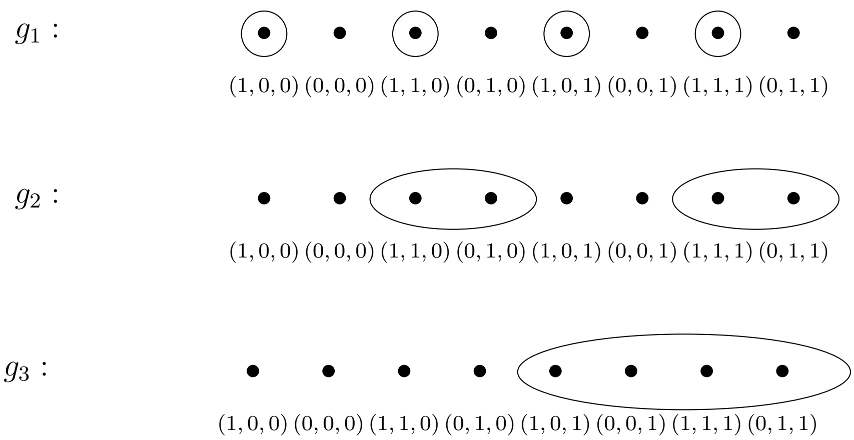
Recordemos entonces, cómo construir el dual del álgebra de Boole libre con n generadores libres.

Consideremos $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ el álgebra de Boole con dos elementos y $\mathbf{2}^n$ el producto cartesiano de n álgebras $\mathbf{2}$, es decir, sus elementos son de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in \{0, 1\}$. La familia de todos los subconjuntos de $\mathbf{2}^n$ es el álgebra de Boole libre con n generadores libres y los conjuntos

$$g_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{2}^n, x_i = 1\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

resultan ser generadores libres del álgebra de Boole libre.

A modo de ejemplo, mostramos cómo es el espacio dual de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ cuando $|G| = 3$ e indicamos un conjunto de generadores libres.



Por otra parte, por la dualidad descripta en la Sección 1.2 para álgebras de Boole, es claro que la cantidad de homomorfismos sobreyectivos de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ en $\mathbf{B_k}$ coincide con la cantidad de funciones inyectivas (continuas) que se pueden obtener de $\mathbb{X}(\mathbf{B_k})$ en $\mathbb{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G))$. Más aún, la cantidad de funciones inyectivas que se pueden obtener de $\mathbb{X}(\mathbf{B_k})$ a $\mathbb{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G))$ coincide con la cantidad de k-uplas posibles que se pueden obtener en $\mathbb{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G))$.

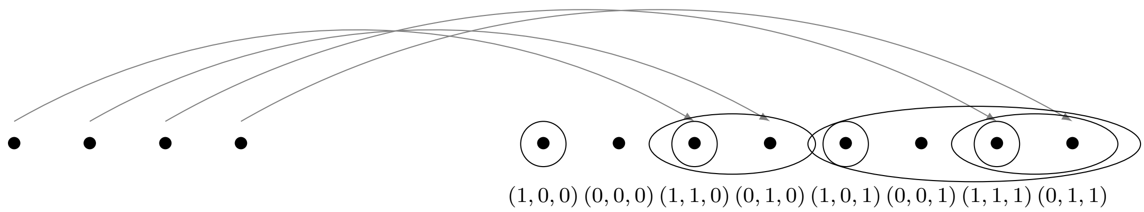
Teniendo en cuenta el dual del álgebra libre de Boole descripto anteriormente, esta elección se puede graficar con la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \ldots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

donde cada fila representa un elemento del dual de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$, es decir, $x_{ij} = 0$ ó $x_{ij} = 1$ y hay k filas distintas, pues se eligen k de estos elementos.

Sea $f : \mathbb{X}(\mathbf{B_k}) \to \mathbb{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G))$ una función inyectiva. Supongamos que en su epimorfismo asociado se cumple que la imagen de un generador g_i sea 1. Esto se traduce, vía la dualidad, en que $\mathbb{D}(f)(V_{g_i}) = f^{-1}(V_{g_i}) = \mathbb{X}(\mathbf{B_k})$, donde V_{g_i} es clopen creciente asociado al generador g_i, es decir, la preimagen del clopen creciente asociado a g_i debe resultar todo el espacio $\mathbb{X}(\mathbf{B_k})$.

Veamos esto en un ejemplo. Consideremos el álgebra de Boole con tres generadores libres con los generadores g_1, g_2 y g_3 indicados en el ejemplo anterior y consideremos la función inyectiva $f : \mathbb{X}(\mathbf{B_4}) \to \mathbb{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G))$ que se muestra en la siguiente figura:



En este caso la matriz asociada a la función f está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y se cumple $f^{-1}(V_{g_1}) \neq \mathbb{X}(\mathbf{B_k})$; $f^{-1}(V_{g_3}) \neq \mathbb{X}(\mathbf{B_k})$ pero $f^{-1}(V_{g_2}) = \mathbb{X}(\mathbf{B_k})$, es decir, en el epimorfismo asociado de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ a $\mathbf{B_k}$, el único generador cuya imagen es 1 es g_2. Observemos también que es equivalente que la imagen de un generador g_i a través del epimorfismo es 1 a que en la matriz asociada a f todos los elementos de su columna i sean 1.

De esta manera, la cantidad de columnas en las cuales todos los elementos son 1 se corresponde con la cantidad de generadores del álgebra de Boole libre que a través del epimorfismo asociado tienen como imagen a 1.

Definición 5.1.6. Sea $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ el álgebra de Boole libre con n generadores libres, llamaremos $g(n, k)$ al cardinal del conjunto de homomorfismos sobreyectivos de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ en el álgebra de Boole $\mathbf{B_k}$ tales que las imágenes de los elementos de G son todas diferentes a 1.

Observemos que $g(0, 1) = 1$ y que $g(n, k) = 0$ para todo $k > 2^n$, pues la mayor álgebra de Boole n generada tiene 2^n átomos.

Sabemos que la cantidad total de homomorfismos sobreyectivos $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G)$ a $\mathbf{B_k}$ está dada por $V_{2^n}^k = \dfrac{2^n!}{(2^n - k)!}$. Si a esta cantidad le restamos la cantidad de homomorfismos sobreyectivos tal que la imagen de g_i es 1 para exactamente un generador

g_i, luego la cantidad de homomorfismos sobreyectivos tal que la imagen de g_i es 1 para exactamente dos generadores, etc., obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia que nos dice qué cantidad de homomorfismos sobreyectivos $h : \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(G) \to \mathbf{B_k}$ cumplen con $h(g_i) \neq 1$ para todo g_i o, equivalentemente, ninguna columna está formada totalmente por unos en su matriz asociada.

$$g(n,k) = V^k_{2^n} - \sum_{i=i}^{n} \binom{n}{i} g(n-i,k).$$

Utilizando este resultado encontramos una fórmula para contar la cantidad de homomorfismos sobreyectivos de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(n)$ a $\mathbf{B_k}$ tal que exactamente i generadores tienen como imagen a 1, o, lo que es lo mismo, su matriz asociada tiene i columnas formadas solamente por unos. Esta fórmula está dada por:

$$f(n,k,i) = \binom{n}{i} g(n-i,k).$$

(cant. de n-uplas que generan a $\mathbb{B}_k^-$ con exactamente i componentes iguales a 1^-)

El número combinatorio $\binom{n}{i}$ resulta de considerar las distintas elecciones para las i columnas formadas por 1.

Luego, dada el álgebra $\mathbb{B}_k$, hay $f(n,k,i)$ n-uplas $(x_1,\ldots,x_n)$ con exactamente i componentes iguales a 1^- que generan a $\mathbb{B}_k^-$. Además, asociada a cada n-upla hay 2^{n-i} n-uplas distintas en $\mathbb{B}_k$ (las que resultan de considerar en la i-ésima componente distinta de 1^-, x_i ó x_i') que la generan. En consecuencia, hay $2^{n-i}f(n,k,i)$ n-uplas distintas que generen a $\mathbb{B}_k$.

Considerando ahora la cantidad posible de elementos 1 que puede tener una n-upla que genere a $\mathbb{B}_k^-$, obtenemos la cantidad de n-uplas distintas que generan a $\mathbb{B}_k$ ó, lo que es equivalente,

$$|Sob(\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G), \mathbb{B}_k)| = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} f(n,k,i).$$

Finalmente, de (5.3) resulta que el número de congruencias θ tales que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(G)/\theta \cong \mathbb{B}_k$, donde $|G| = n$ está dado por

$$|\mathcal{M}_k| = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} f(n,k,i)}{k!}.$$

para $k \geq 2$, lo que resuelve el Problema 2.

Es fácil ver que $|\mathcal{M}_0| = 2^n$ y que $|\mathcal{M}_1| = 3^n - 2^n$. Luego, de (5.2), las álgebras libres sobre un conjunto finito de generadores libres en la variedad $\mathcal{BPK}_0$ son de la forma

$$\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n) \cong \mathbf{2}^{2^n} \times \mathbf{3}^{3^n - 2^n} \times \prod_{k=2}^{2^n} \mathbb{B}_k^{\frac{\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} f(n,k,i)}{k!}}$$

Con la ayuda de un programa de computación sencillo, mostramos algunos ejemplos de álgebras libres en la variedad $\mathcal{BPK}_0$.

- $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(1) \cong \mathbf{2}^2 \times \mathbf{3} \times \prod_{k=2}^{2} \mathbb{B}_k^{\frac{\sum_{i=0}^{1} 2^{1-i} f(1,k,i)}{k!}} = \mathbf{2}^2 \times \mathbf{3} \times \mathbb{B}_2^2$.
- $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(2) \cong \mathbf{2}^4 \times \mathbf{3}^5 \times \prod_{k=2}^{4} \mathbb{B}_k^{\frac{\sum_{i=0}^{2} 2^{2-i} f(2,k,i)}{k!}} = \mathbf{2}^4 \times \mathbf{3}^5 \times \mathbb{B}_2^{20} \times \mathbb{B}_3^{16} \times \mathbb{B}_4^4$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(3) \cong \mathbf{2}^8 \times \mathbf{3}^{19} \times \prod_{k=2}^{8} \mathbb{B}_k^{\frac{\sum_{i=0}^{2} 2^{2-i} f(2,k,i)}{k!}} = \mathbf{2}^8 \times \mathbf{3}^{19} \times \mathbb{B}_2^{158} \times \mathbb{B}_3^{400} \times \mathbb{B}_4^{548} \times \mathbb{B}_5^{448} \times \mathbb{B}_6^{224} \times \mathbb{B}_7^{64} \times \mathbb{B}_8^8$

5.2. Álgebras débilmente proyectivas finitas

En esta sección caracterizaremos a las álgebras débilmente proyectivas finitas en la variedad $\mathcal{BPK}_0$. Si $\mathcal{V}$ es una variedad, recordemos que un álgebra $\mathbf{L}$ es **débilmente proyectiva** si para cada par de álgebras $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ en $\mathcal{V}$ y para cada $f : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ homomorfismo sobreyectivo y $h : \mathbf{L} \to \mathbf{L}_2$ homomorfismo, existe un homomorfismo $g : \mathbf{L} \to \mathbf{L}_1$ tal que $f \circ g = h$.

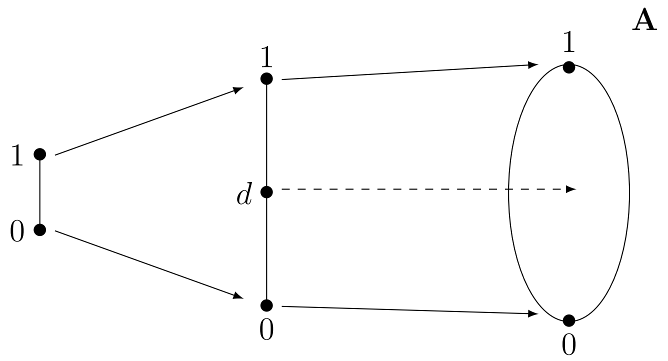
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}_1 \arrow[d, "f"'] & \\
\mathbf{L}_2 & \mathbf{L} \arrow[l, "h"] \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Observemos que la definición de **objetos proyectivos** en la teoría de categorías es similar a la definición de álgebras débilmente proyectivas dada, sólo que considerando *epimorfismos* en lugar de *homomorfismos sobreyectivos*. Si consideramos la categoría asociada a la variedad $\mathcal{BPK}_0$, cuyos objetos son las álgebras en $\mathcal{BPK}_0$ y cuyos morfismos son los homomorfismos de dicha variedad, tenemos que las nociones de álgebra proyectiva y débilemente proyectiva no son equivalentes. Esto se debe a que las nociones de epimorfismo y homomorfismo sobreyectivo no coinciden en dicha categoría, a diferencia de las de monomorfismo y homomorfismo inyectivo que coinciden en cualquier variedad.

Para ver esto, consideremos la cadena de dos y tres elementos, las cuales son álgebras de la variedad $\mathcal{BPK}_0$, y el homomorfismo $f : \mathbf{2} \to \mathbf{3}$ dado por $f(0) = 0$ y

$f(1) = 1$ y veamos que f es un **epimorfismo**, es decir, si existen homomorfismos h y g tales que $g \circ f = h \circ f$ entonces $h = g$.

Tenemos la siguiente situación:



Claramente, $g(0) = h(0) = 0$ y $g(1) = h(1) = 1$. Para probar que $h = g$, resta ver que la imagen de d está completamente determinada.

Notemos que d es un elemento denso que cumple $d = d'$, por lo que su imagen por cualquier homomorfismo también es un elemento denso que coincide con su propia negación. Supongamos que el álgebra $\mathbf{A}$ tiene dos elementos m y n con esas caracterísiticas (es decir, dos posibles imágenes de d) entonces al ser ambos elementos densos $m^* = n^* = 0$ y como $m = m'$ y $n = n'$, resulta también $m'^* = n'^* = 0$. Ahora bien, toda álgebra subdirectamente irreducible en la variedad $\mathcal{BPK}_0$ cumple con la condición de regularidad establecida al principio de la Sección 5.1, es decir, si $x^* = y^*$ y $x'^* = y'^*$ entonces $x = y$. Esto indica que $n = m$ y, en consecuencia la imagen del elemento d es única para cualquier homomorfismo. Luego, hemos encontrado un epimorfismo, que no es homomorfismo sobreyectivo, por lo que ambos conceptos no coinciden en $\mathcal{BPK}_0$.

Recordemos que dadas dos álgebras $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}_1$ en la variedad $\mathcal{V}$, diremos que $\mathbf{L}$ es un **retracto** de $\mathbf{L}_1$ si existen homomorfismos $f : \mathbf{L} \to \mathbf{L}_1$ y $g : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}$ tal que $g \circ f = id_{\mathbf{L}}$. Un resultado conocido establece que $\mathbf{L}$ es un álgebra débilmente proyectiva si y sólo si es un retracto de algún álgebra libre $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(n)$, con $n < \omega$.

A continuación, veremos en primer lugar cuándo un álgebra en $\mathcal{BPK}_0$ no es débilmente proyectiva.

Proposición 5.2.1. *Si* $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_0$ *es un álgebra con un* **punto fijo** *(*$x = x'$*) entonces* $\mathbf{L}$ *no es débilmente proyectiva.*

Demostración. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra en $\mathcal{BPK}_0$ con un punto fijo, es decir, existe $x \in L$ tal que $x = x'$. Consideremos $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}$ y $\mathbf{L}_1 = \mathbf{2} \times \mathbf{L}$. Es claro que existe un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{L}_1$ a $\mathbf{L}_2$ dado por la proyección $\pi_{\mathbf{L}}$ y un homomorfismo de $\mathbf{L}_2$ en $\mathbf{L}_2$ dado por la identidad, pero no existe ningún homomorfismo de $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}$ en $\mathbf{L}_1 = \mathbf{2} \times \mathbf{L}$ pues $\mathbf{L}$ tiene un punto fijo y $\mathbf{L}_1$ no. $\square$

Observemos que si $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_0$ es un álgebra finita, como $\mathcal{BPK}_0$ es una variedad con término discriminador, $\mathbf{L}$ es producto directo de álgebras simples, es decir, $\mathbf{L} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$ donde $\mathbf{D}_i \cong \mathbb{B}_k$ para algún k. Notemos que toda álgebra $\mathbb{B}_k$, con $k > 2$ tiene un punto fijo ($d = d'$), por lo que si ninguno de los factores $\mathbf{D}_i$ en $\mathbf{L}$ es isomorfo a $\mathbf{2}$, resulta que $\mathbf{L}$ tiene un punto fijo y por la proposición anterior, no puede ser un álgebra débilmente proyectiva. Luego, para que $\mathbf{L}$ sea un álgebra débilmente proyectiva, necesariamente algún $\mathbf{D}_i = \mathbf{2}$. Más aún, toda álgebra finita en $\mathcal{BPK}_0$ de la forma $\mathbf{2} \times \mathbf{A}$ es un álgebra débilmente proyectiva como se muestra a continuación.

Proposición 5.2.2. *Si* $\mathbf{L} = \mathbf{2} \times \mathbf{A}$ *es un álgebra finita en* $\mathcal{BPK}_0$ *entonces* $\mathbf{L}$ *es débilmente proyectiva.*

Demostración. Sea $\mathbf{L} = \mathbf{2} \times \mathbf{A}$ un álgebra finita. Para ver que $\mathbf{L}$ es débilmente proyectiva, por lo mencionado al principio de esta sección, es suficiente mostrar que $\mathbf{L}$ es un retracto del álgebra libre $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n)$, para algún n.

En la Sección 5.1. vimos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n) = \prod_{i=0}^{2^n} \mathbb{B}_i^{m_i}$$

donde $\mathbb{B}_0 = \mathbf{2}$ y $m_i = |\mathcal{M}_i|$. Es claro, por cómo hallamos estos cardinales en la sección anterior, que m_i es estrictamente creciente en el número de generadores libres, es decir, si el álgebra simple $\mathbb{B}_i$ es m_i veces factor en la descomposición de $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n)$ entonces en la descomposición de $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n+1)$ lo será en un número mayor a m_i.

Como $\mathbf{L} = \mathbf{2} \times \mathbf{A}$ también es producto de álgebras simples, entonces $\mathbf{L} = \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i}$, donde $\mathbf{D}_i = \mathbb{B}_k$ para algún k. Sea k_0 el mayor de éstos k que aparecen en la descomposición de $\mathbf{L}$. Luego, siempre es posible encontrar un álgebra libre con una cantidad de generadores libres n_0 ($2^{n_0} > k$) de forma tal que todos los $\mathbf{D}_i$ resulten ser factores de ella. Además, como la cantidad de factores $\mathbb{B}_i$ que aparecen en la descomposición $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n)$ es mayor que la que aparece en la descomposición de $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n+1)$, es posible encontrar n_0 suficientemente grande tal que $\mathbf{D}_i$ sea factor del álgebra libre $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_1}(n_0)$ por lo menos r_i veces.

De esta forma tenemos que $\mathcal{F}_{\mathcal{BPK}_0}(n_0) = \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i} \times \prod_{j=1}^{s} \mathbf{E}_j$ donde tanto $\mathbf{D}_i$ como $\mathbf{E}_j$ son isomorfos a álgebras del tipo $\mathbb{B}_k$. Consideremos ahora la aplicación $g : \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i} \to \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i} \times \prod_{j=1}^{s} \mathbf{E}_j$ dada por

$$(e, x) \longmapsto (e, x, e, \ldots, e)$$

donde $e \in \mathbf{2}$ y $x \in \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i}$. Claramente, esta aplicación es un homomorfismo. Además, si consideramos la aplicación $f : \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i} \times \prod_{j=1}^{s} \mathbf{E}_j \to \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i}$ dado por la proyección, resulta que $g \circ f = id_{\mathbf{L}}$. Queda probado entonces que $\mathbf{L} = \mathbf{2} \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{D}_i^{r_i}$ es un retracto del álgebra libre y, por lo tanto un álgebra débilmente proyectiva. $\square$

Corolario 5.2.3. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{BPK}_0$. $\mathbf{L}$ *es un álgebra débilmente proyectiva finita si y sólo si* $\mathbf{L}$ *no tiene un punto fijo si y sólo si* $\mathbf{L} \cong \mathbf{2} \times \mathbf{A}$*, para algún álgebra* $\mathbf{A}$ *finita.*

5.3. Cuasivariedades

En esta sección daremos una descripción del reticulado de cuasivariedades de la variedad $\mathcal{BPK}_0$, al cual notaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$. Además, daremos una axiomatización para cada una de las cuasivariedades de $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$. Para ello, necesitaremos determinar las álgebra críticas de dicha variedad. Recordemos que un álgebra finita $\mathbf{A}$ es **crítica** si no pertenece a la cuasivariedad generada por sus subálgebras propias. Notaremos por $Cri(\mathcal{V})$ a la clase de álgebras críticas de $\mathcal{V}$ y por $\mathcal{Q}(\mathcal{K})$ a la cuasivariedad generada por la clase de álgebras $\mathcal{K}$.

La importancia de las álgebras críticas radica en el siguiente resultado del cual transcribimos una demostración dada por J. Gispert y A. Torrens en [14] pues dicho artículo no ha sido publicado.

Teorema 5.3.1. *Toda cuasivariedad localmente finita está generada por sus álgebras críticas.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ una cuasivariedad localmente finita y sea $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de subálgebras finitamente generadas de $\mathbf{A}$. Es bien conocido que $\mathbf{A}$ puede sumergirse en un ultraproducto de miembros de $\mathcal{F}$ (ver, por ejemplo, [6, Capítulo V, Teorema 2.14]). Por lo tanto, $\mathbf{A} \in ISP_U(\mathcal{F})$. Como $\mathcal{K}$ es localmente finita, tenemos que $\mathbf{A} \in ISP_U(\{\mathbf{B} \leq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ es finita}\}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{K}_{fin})$, donde $\mathcal{K}_{fin}$ denota la clase de las álgebras finitas de $\mathcal{K}$. Esto muestra que $\mathcal{K} = \mathcal{Q}(\mathcal{K}_{fin})$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_{fin}$. Afirmamos que $\mathcal{Q}(\mathbf{A}) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{B} \leq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ es crítica}\})$. Procedemos por inducción sobre el cardinal de A. Si $|A| = 1$, entonces $\mathbf{A}$ es crítica y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $|A| = n > 1$. Si $\mathbf{A}$ es crítica, no hay nada más que probar. Por otra parte, si $\mathbf{A}$ no es crítica, entonces $\mathcal{Q}(\mathbf{A}) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{B} \leq \mathbf{A} : \mathbf{B} \neq \mathbf{A}\})$. Para cada $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, se tiene que $|B| < n$, por lo que, por hipótesis inductiva, $\mathcal{Q}(\mathbf{B}) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{C} \leq \mathbf{B} : \mathbf{C} \text{ es crítica}\})$. Juntando estos resultados obtenemos que $\mathcal{Q}(\mathbf{A}) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{C} \leq \mathbf{A} : \mathbf{C} \text{ es crítica}\})$, como queríamos probar.

Finalmente tenemos que

$$\mathcal{K} = \mathcal{Q}(\mathcal{K}_{fin}) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{B} : \mathbf{B} \text{ es crítica}, \mathbf{B} \leq \mathbf{A}, \mathbf{A} \in \mathcal{K}_{fin}\}) = \mathcal{Q}(Cri(\mathcal{K})) \subseteq \mathcal{K}.$$

□

Del Capítulo 4, Sección 5, tenemos que $\mathcal{BPK}_0$ es una variedad (cuasivariedad) localmente finita por lo que sus subcuasivariedades están determinadas por sus álgebras críticas. Para poder determinarlas notemos que también es una variedad con término discriminador (Cap. 5. Sección 1), lo que nos permite afirmar que toda álgebra finita es producto de álgebras simples, es decir, de álgebras isomorfas a $\mathbb{B}_m$,

$m \in \omega$ o a la cadena de dos elementos a la cual notaremos por $\mathbb{B}_0$. Recordemos también que se cumple

$$\mathbb{B}_m \leq \mathbb{B}_n \text{ si y sólo si } m \leq n \tag{5.4}$$

Todas estas características nos permiten determinar a sus álgebras críticas y un orden conveniente de éstas a través de los siguientes resultados.

Lema 5.3.2. *Si $\mathbb{B}_{m_1} \times \mathbb{B}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{B}_{m_l}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{B}_{n_r}$, entonces cada $\mathbb{B}_{m_i}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{n_j}$ para algún j.*

Demostración. Si $\mathbb{B}_{m_1} \times \mathbb{B}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{B}_{m_l}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{B}_{n_r}$ entonces $\mathbb{B}_{m_1} \times \mathbb{B}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{B}_{m_l} \in \mathcal{V}(\mathbb{B}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{B}_{n_r}) = \mathcal{V}(\mathbb{B}_{n_1}, \ldots, \mathbb{B}_{n_r})$.

Además $\mathbb{B}_{m_i} \in \mathcal{V}(\mathbb{B}_{n_1}, \ldots, \mathbb{B}_{n_r})$ para todo $1 \leq i \leq l$ y como $\mathbb{B}_{m_i}$ es subdirectamente irreducibe, por el Lema de Jónsson (Lema 1.1.12), $\mathbb{B}_{m_i} \in HS(\mathbb{B}_{n_1}, \ldots, \mathbb{B}_{n_r}) = IS(\mathbb{B}_{n_1}, \ldots, \mathbb{B}_{n_r})$. Luego, $\mathbb{B}_{m_i}$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{n_j}$ para algún $1 \leq j \leq r$. □

Lema 5.3.3. *Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de la forma $\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_2} \times \ldots \mathbb{B}_{n_l}$ que tiene dos factores isomorfos entre sí entonces $\mathbf{A}$ no es un álgebra crítica.*

Demostración. Supongamos $\mathbf{A} = \mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{B}_{n_l}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad que $\mathbb{B}_{n_1} \cong \mathbb{B}_{n_2}$. Consideremos el álgebra $\mathbf{A}^* = \mathbb{B}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{B}_{n_l}$, es decir, el álgebra que resulta de eliminar el primer factor en $\mathbf{A}$.

Si a cada elemento de $\mathbf{A}^*$ le asociamos un elemento de $\mathbf{A}$ a través de la asignación $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_2, x_2, \ldots, x_n)$, obtenemos que $\mathbf{A}^*$ es subálgebra propia de $\mathbf{A}$. Y si a cada elemento de $\mathbf{A}$ le asignamos un elemento de $\mathbf{A}^* \times \mathbf{A}^*$ de la siguiente manera $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto ((x_1, x_3, \ldots, x_n), (x_2, x_3, \ldots, x_n))$ resulta que $\mathbf{A} \leq \mathbf{A}^* \times \mathbf{A}^*$. Esto muestra que $\mathbf{A} \in ISP(\mathbf{A}^*)$ y, por lo tanto no es crítica. □

Lema 5.3.4. *Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de la forma $\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_2} \times \ldots \mathbb{B}_{n_r}$ con más de dos factores distintos entonces $\mathbf{A}$ no es un álgebra crítica en $\mathcal{BPK}_0$.*

Demostración. Podemos considerar a $\mathbf{A} = \mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_2} \times \ldots \mathbb{B}_{n_r}$ cuyos factores están ordenados en forma creciente, es decir, $n_i \leq n_{i+1}$. Afirmamos que $\mathbf{A} \in ISP(\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_r})$ y que $\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_r}$ es subálgebra propia de $\mathbf{A}$. Para probar esto último, basta considerar la aplicación no sobreyectiva de $\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_r}$ en $\mathbf{A}$ dada por $(x, y) \longmapsto (x, x, \ldots, x, y)$. Y para mostrar que $\mathbf{A} = \mathbb{B}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{B}_{n_r}$ es subálgebra de $(\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_i})^r$ basta considerar la aplicación entre estas álgebras dada por $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \longmapsto ((x_1, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_1, x_r))$. Esto muestra que $\mathbf{A}$ pertenece a una subcuasivariedad generada por una subálgebra propia, lo cual indica que no es un álgebra crítica. □

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra crítica en $\mathcal{BPK}_0$, ya que ésta es una variedad con término discriminador, $\mathbf{A}$ es producto de álgebras simples. Teniendo en cuenta los lemas anteriores obtenemos que debe ser de la forma $\mathbb{B}_m$ ó $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$, con $0 \leq m < n$ (recordemos que $\mathbb{B}_0 = \mathbf{2}$). El siguiente resultado muestra que todas las álgebras de esta forma resultan ser álgebras críticas.

Proposición 5.3.5. *$\mathbb{B}_m$ y $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$, con $0 \leq m < n < \omega$ son álgebras críticas.*

Demostración. Si suponemos que $\mathbb{B}_m$ no es crítica, entonces por (5.4), $\mathbb{B}_m \in ISP(\{\mathbb{B}_j : j < m\})$, es decir, $\mathbb{B}_m$ es subálgebra de $\mathbb{B}_{j_1} \times \ldots \times \mathbb{B}_{j_r}$, donde $j_i < m$ para todo $0 \leq i \leq r$. Pero entonces, por el Lema 5.3.2, $\mathbb{B}_m$ es subálgebra $\mathbb{B}_{j_s}$, para algún $1 \leq s \leq r$, lo cual es una contradicción pues $m > j_s$.

Con un razonamiento similar, se puede demostrar que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$, con $0 \leq m < n < \omega$ también es un álgebra crítica. □

Una vez conocidas las álgebras críticas en $\mathcal{BPK}_0$, para poder obtener el reticulado de cuasivariedades, necesitamos saber, dadas dos álgebras críticas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ cuándo $\mathcal{Q}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathbf{B})$ o lo que es equivalente cuándo $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}(\mathbf{B})$. Sabemos que esto sucede cuando

$$\mathbf{A} \in ISPP_U(\mathbf{B})$$

y como $\mathbf{B}$ es finita, esto a su vez equivale a que

$$\mathbf{A} \in ISP(\mathbf{B}).$$

Luego, el orden entre las álgebras críticas que nos interesa es

$$\mathbf{A} \preceq \mathbf{B} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \in \mathcal{Q}(\mathbf{B}) \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \in ISP(\mathbf{B}).$$

Como las álgebras críticas en $\mathcal{BPK}_0$ son de la forma $\mathbb{B}_m$ ó $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ $(m < n)$, el orden entre ellas se puede caracterizar de la siguiente manera.

Proposición 5.3.6.

(1) *Si $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$, $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q \in Cri(\mathcal{K})$ entonces*

$$\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q \quad \textit{si y sólo si} \quad m \leq p \ \textit{ y } \ n \leq q.$$

(2) *Si $\mathbb{B}_p$, $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \in Cri(\mathcal{K})$ entonces*

$$\mathbb{B}_p \preceq \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \quad \textit{si y sólo si} \quad p \leq m.$$

(3) *Si $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n, \mathbb{B}_p \in Cri(\mathcal{K})$ entonces*

$$\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_p \quad \textit{si y sólo si} \quad n \leq p.$$

Demostración. Si $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ entonces $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \in ISP(\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q)$. Como $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ es finita, podemos afirmar que es subálgebra de un producto finito de copias de $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, es decir, es isomorfa a un álgebra $\mathbf{B}$ tal que

$$\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \cong \mathbf{B} \leq (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q) \times (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q) \times \ldots \times (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q).$$

Aplicando el Lema 5.3.2, resulta que $\mathbb{B}_n$ es subálgebra de $\mathbb{B}_p$ ó $\mathbb{B}_q$ y como $p < q$ resulta $n \leq q$. Por otra parte, si consideramos la inmersión

$$i : \mathbf{B} \to (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q) \times (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q) \times \ldots \times (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q),$$

por la dualidad de Priestley sabemos que

$$\mathbb{X}(i) : \mathbb{X}((\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q) \times (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q) \times \ldots \times (\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q)) \to \mathbb{X}(\mathbf{B})$$

es un *pm*-morfismo, por lo que cumple con las condiciones

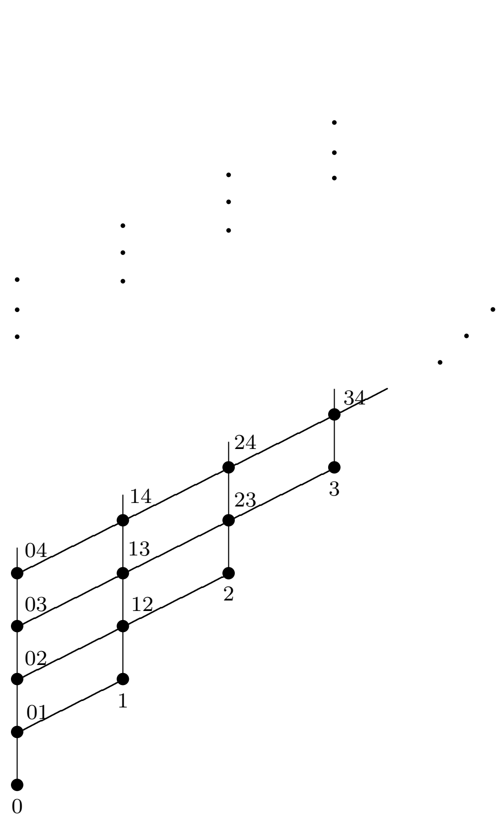
$$\mathbb{X}(i)(x^i \cap Max) = (\mathbb{X}(i)(x))^i \cap Max \quad \text{y} \quad \mathbb{X}(i)(x^d \cap Min) = (\mathbb{X}(i)(x))^d \cap Min,$$

ésta última dada por la simetría de la operación de De Morgan. Esto nos permite asegurar que la cantidad de maximales de la componente conexa asociada a $\mathbb{B}_p$ debe ser mayor o igual a la cantidad de maximales de alguna de las componentes conexas del dual de $\mathbf{B} \cong \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$. Como $n > m$, podemos asegurar que $p \geq m$.

Ahora bien, si $m \leq p$ y $n \leq q$, es claro que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ es subálgebra de $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, por lo que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$.

Con un procedimiento análogo se demuestran (2) y (3). $\square$

En la siguiente figura mostramos el conjunto ordenado de álgebras críticas de la variedad $\mathcal{BPK}_0$. En este gráfico mn representa al álgebra crítica $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ $(m < n)$ y m al álgebra crítica $\mathbb{B}_m$, $m \geq 0$.



Al conjunto ordenado de álgebras críticas de la variedad $\mathcal{BPK}_0$ con la relación $\preceq$ definida anteriormente lo notaremos por P y llamaremos $D(P)$ al reticulado distributivo formado por los subconjuntos decrecientes de P. Observemos que a cada subcuasivariedad $\mathcal{K}$ de $\mathcal{BPK}_0$ le podemos asociar un elemento en $D(P)$, que es el conjunto de álgebras críticas de $\mathcal{K}$. La recíproca también es válida y lo probaremos en el resto de la sección.

A continuación, definimos algunas subcuasivariedades particulares de $\mathcal{BPK}_0$ que serán utilizadas para poder encontrar cuasi-identidades que caractericen a cada una de las subcuasivariedades definidas anteriormente.

- $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{A} \in Cri(\mathcal{BPK}_0) : \mathbb{B}_m \notin IS(\mathbf{A})\}) = M_{m-1}$,

  es decir, es aquella subcuasivariedad generada por las álgebras críticas que no contienen como subálgebra a un álgebra isomorfa a $\mathbb{B}_m$.
- $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n) = \mathcal{Q}(\{\mathbf{A} \in Cri(\mathcal{BPK}_0) : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbf{A})\})$.

Como vimos en el Teorema 1.1.15 una clase $\mathcal{K}$ es una cuasivariedad si y sólo si existe un conjunto Δ de cuasi-identidades tales que $\mathcal{K}$ sea la clase de todas las álgebras que satisfacen dicho conjunto de cuasi-identidades. El siguiente objetivo es encontrar un conjunto Δ de cuasi-identidades que caracterice cada una de las subcuasivariedad de $\mathcal{BPK}_0$ definidas anteriormente. Los siguientes lemas forman la base para poder construirlas.

Lema 5.3.7. *Una $\mathcal{BPK}_0$-álgebra $\mathbf{A}$ contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbb{B}_n$ si y sólo si existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que*

(i) $(\bigvee_{i=1}^n a_i)' = \bigvee_{i=1}^n a_i$

(ii) $a_j^* = \bigvee_{i \neq j} a_i$

Demostración. Supongamos que $\mathbb{B}_n$ es subálgebra de $\mathbf{A}$ y sea $f : \mathbb{B}_n \to \mathbf{A}$ una inmersión. Si llamamos $x_1, x_2, \ldots x_n$ a los átomos de $\mathbb{B}_n$, tenemos que los elementos $a_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ satisfacen las condiciones requeridas. Para mostrar que la recíproca se cumple, veamos en primer lugar que si existen elementos $a_1, a_2, \ldots a_n$ que verifiquen (i) y (ii), ninguno de ellos puede ser 0. En efecto, si suponemos que $a_j = 0$ para algún j, de (ii) resulta $a_j^* = 1 = \bigvee_{i \neq j} a_i$ y como $a_j = 0$, $\bigvee_{i=1}^n a_i = 1$, lo que contradice (i). Veamos ahora que la subálgebra $\mathbf{B}$ generada por los elementos $a_1, a_2, \ldots a_n$ $(Sg(\{a_i, i = 1, \ldots n\})$es una subálgebra isomorfa a $\mathbb{B}_n$.

Es fácil ver $Sg(\{a_i, i = 1, \ldots, n\})$ está formada exactamente por los elementos de la forma $\bigvee_{i=1}^k a_i$ y $(\bigvee_{i=1}^k a_i)'$, con $k = 1, \ldots, n$. Además, de la condición $a_j^* = \bigvee_{i \neq j} a_i$, se puede deducir que $a_i \wedge a_j = 0$ para todo $i \neq j$, lo cual indica que los a_i son átomos de $\mathbf{B}$. En efecto,

$$0 = a_j^* \wedge a_j = (\bigvee_{i \neq j} a_i) \wedge a_j = \bigvee_{i \neq j} (a_i \wedge a_j),$$

lo que implica que $a_i \wedge a_j = 0$ para todo $i \neq j$. Esto muestra también que todos los a_i deben ser distintos, ya que si $i \neq j$ pero $a_i = a_j$, por lo probado anteriormente $a_i \wedge a_j = a_i = 0$, lo que contradice el hecho de que ningún a_i puede ser 0.

Por otra parte, $d = \bigvee_{i=1}^n a_i$ es un elemento denso ya que

$$d^* = (\bigvee_{i=1}^n a_i)^* = \bigwedge_{i=1}^n a_i^* = \bigwedge_{i=1}^n (\bigvee_{j \neq i} a_j) = 0$$

pues $a_i \wedge a_j = 0$, para todo $i \neq j$.

Finalmente, de $d = (\bigvee_{i=1}^n a_i)' = \bigvee_{i=1}^n a_i$, obtenemos $a_i \leq d = d' \leq a_j'$. Todas estas condiciones muestran que $\mathbf{B}$ está contenida en $[0, d] \oplus [d, 1]$ y $\mathbf{B} \cap [0, d]$ es un álgebra de Boole cuyos átomos son $a_1, a_2, \ldots a_n$. Luego, $\mathbf{B} \cong \mathbb{B}_n$. $\square$

Es bien conocido que si $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \prime, 0, 1\rangle$ es una *pm*-álgebra y a es un **elemento booleano** de $\mathbf{A}$ (es decir, existe b tal que $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$) entonces el segmento $[0, a]$ es un reticulado distributivo con las mismas operaciones $\wedge$ y $\vee$ de $\mathbf{A}$ (ver [26]; pág. 133). Si además a verifica que $a' = a^*$ y definimos las operaciones $*_a$ y $\prime_a$ como

$$x^{*_a} = x^* \wedge a \tag{5.5}$$

$$x^{\prime_a} = x' \wedge a \tag{5.6}$$

respectivamente, obtenemos que $\langle [0, a], \wedge, \vee, *_a, \prime_a\rangle$ es una *pm*-álgebra. En efecto, veamos que $*_a$ es un pseudocomplemento. Supongamos que $x \wedge y = 0$, entonces $x \wedge a \wedge y = 0$, lo que implica que $a \wedge y \leq x^*$, por lo que se cumple $a \wedge y \leq x^* \wedge a = x^{*_a}$. Si suponemos que $y \leq x^{*_a} = x^* \wedge a$ entonces $y \wedge x \leq x \wedge x^* \wedge a = 0$. Estas dos condiciones prueban que ^{*_a} es un pseudocomplemento. Para probar que $\prime_a$ es una negación de De Morgan, probemos que $\prime_a$ es involutiva y que invierte el orden. En efecto,

$$\begin{aligned} x^{\prime_a \prime_a} &= (x' \wedge a)^{\prime_a} = (x' \wedge a)' \wedge a = (x \wedge a) \vee (a' \wedge a) \\ &= (x \wedge a) \vee 0 = x \wedge a = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \wedge y)^{\prime_a} &= (x \wedge y)' \wedge a \\ &= (x' \wedge a) \vee (y' \wedge a) \\ &= x^{\prime_a} \vee y^{\prime_a}. \end{aligned}$$

También se puede probar que la aplicación $\alpha_a : \mathbf{A} \to [0, a]$ tal que $\alpha_a(x) = x \wedge a$ es un homomorfismo sobreyectivo entre *pm*-álgebras.

Si llamamos $b = a^*$, es fácil ver entonces que $\mathbf{A}$ es isomorfa al producto directo de las *pm*-álgebras $[0, a]$ y $[0, b]$ bajo la aplicación $\alpha : \mathbf{A} \to [0, a] \times [0, b]$ definida por

$$\alpha(x) = (\alpha_a(x), \alpha_b(x)).$$

Esto nos permite demostrar el siguiente resultado que establece cuándo un álgebra crítica de la forma $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ es subálgebra de otra cualquiera.

Lema 5.3.8. *Una $\mathcal{BPK}_0$-álgebra* $\mathbf{A}$ *contiene una subálgebra isomorfa a* $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ *si y sólo si existen elementos distintos de cero* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n \in A$ *tales que si* $a = \bigvee_{i=1}^m a_i$ *y* $b = \bigvee_{i=1}^n b_i$ *se verifica*

(*i*) $a^* \vee b^* = 1, \qquad a^{*\prime} = b^*,$

(*ii*) $a_j^* \wedge b^* = \bigvee_{i \neq j} a_i, \qquad b_j^* \wedge a^* = \bigvee_{i \neq j} b_i,$

(*iii*) $a' \wedge b^* = a, \qquad b' \wedge a^* = b.$

Demostración. Sea $f : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \to \mathbf{A}$ una inmersión, $x_1, x_2, \ldots x_m$ los átomos de $\mathbb{B}_m$ e $y_1, y_2, \ldots y_n$ los átomos de $\mathbb{B}_n$. Si consideramos los elementos $a_i = f(x_i, 0)$, $1 \leq i \leq m$ y $f(0, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, éstos satisfacen las condiciones requeridas. Para probar la recíproca, mostremos que la subálgebra $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ generada por los elementos $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_n$ es una $\mathcal{BPK}_0$-álgebra isomorfa a $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$.

En primer lugar notemos que de la condición (*i*) resulta $a^* \vee b^* = 1$ y

$$a^* \wedge b^* = a^* \wedge a^{*\prime} = a^{*\prime\prime} \wedge a^{*\prime} = (a^{*\prime} \vee a^*)' = (b^* \vee a^*)' = 1' = 0,$$

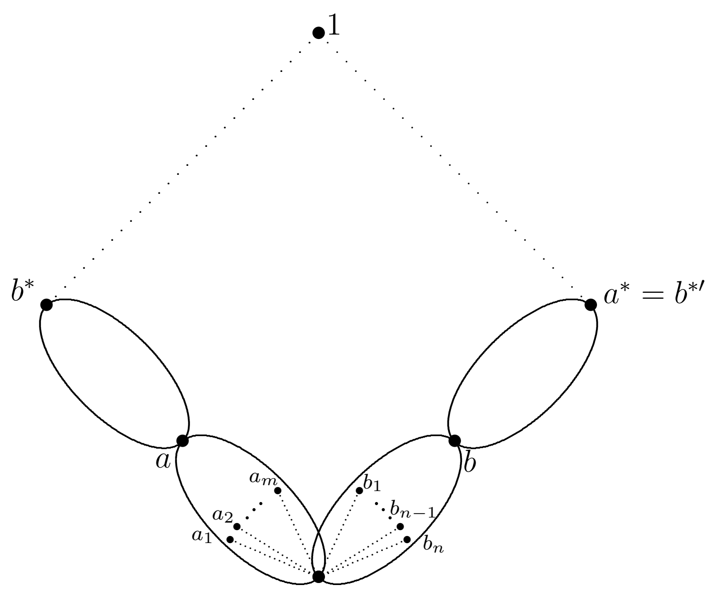
es decir, a^* y b^* forman un par de elementos booleanos que satisfacen $b^{*\prime} = a^*$. Esto nos permite, por lo mencionado anteriormente, expresar a $\mathbf{A}$ como producto de dos *pm*-álgebras $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \leq [0, b^*] \times [0, a^*]$, donde las operaciones de pseudocomplementación y negación en los segmentos están definidas como en (5.5) y (5.6). Además, de la condición (*iii*) resulta

$$a_i \leq a = a' \wedge b^* \leq b^*, \quad 1 \leq i \leq m$$

y

$$b_i \leq b = b' \wedge a^* \leq a^*, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Para esquematizar esta situación, mostramos la siguiente figura.



Probemos ahora que $\mathbf{B}_1 \subseteq [0, b^*]$ tiene la estructura de un álgebra de la forma $\mathbb{B}_m$ con las operaciones mencionadas. Para esto, probemos que los elementos a_i cumplen las condiciones del Lema 5.3.7. De la condición (iii) resulta que $a'^b = a' \wedge b^* = a$ y de la condición (ii) se tiene que $a_j^{*_b} = a_j^* \wedge b^* = \bigvee_{i \neq j} a_i$. Esto prueba que el segmento $[0, b^*]$ tiene una subálgebra isomorfa a $\mathbb{B}_m$ (la subálgebra $\mathbf{B}_1$ generada por los elementos a_i). Análogamente se demuestra que $[0, a^*]$ contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbb{B}_n$ (la subálgebra $\mathbf{B}_2$ generada por los elementos b_i), y, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \cong \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$. □

Observación 5.3.9. En la demostración de esta proposición, sólo usamos el hecho de que los elementos a_i y b_j sean no nulos para asegurarnos que las subálgebras $\mathbf{B}_1$ (generada por los elementos a_i) y $\mathbf{B}_2$ (generadas por los elementos b_i) tengan exactamente m y n átomos respectivamente. Por otra parte, si $a = \bigvee_{i=1}^m a_i = 0$, resulta que los elementos b_j satisfacen las condiciones del Lema 5.3.7, por lo que podemos asegurar que todos ellos son no nulos y que $\mathbf{A}$ contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbb{B}_n$.

Lema 5.3.10. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{BPK}_0$-álgebra en la que existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots b_n$ que satisfacen las condiciones $(i)-(iii)$ del Lema 5.3.8 entonces si algún $a_i = 0$ resulta $a = \bigvee_{i=1}^m a_i = 0$ y si algún $b_j = 0$ entonces $b = \bigvee_{j=1}^n b_j = 0$.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $b_1 = 0$. Por la condición (ii), $b_1^* \wedge a^* = a^* = \bigvee_{j \neq 1}^n b_j = \bigvee_{j=1}^n b_j = b$. De la condición (i) obtenemos $a^{*\prime} = b' = b^*$ y finalmente, de la condición (iii) resulta $b' \wedge a^* = b^* \wedge a^* = b = 0$, pues a^* y b^* forman un par de elementos booleanos como se vió en la demostración del Lema 5.3.8. Análogamente se prueba que $a = \bigvee_{i=1}^m a_i = 0$ si algún $a_i = 0$. □

Si consideramos la cuasi-identidad

$$\left[\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right)' \approx \bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) \ \& \ \&_{j=1}^{n} \left(x_j^* \approx \bigvee_{i \neq j, i=1}^{n} x_i\right)\right] \implies 0 \approx 1$$

es claro que todas las álgebra críticas $\mathbf{A} \in \mathcal{BPK}_0$ tales que no contienen a $\mathbb{B}_n$ como subálgebra la satisfacen. Más aún, las únicas álgebras críticas que la satisfacen son precisamente las álgebras críticas $\mathbf{A}$ tales que $\mathbb{B}_n \notin IS(\mathbf{A})$. Como la cuasivariedad M_{n-1} está generada por estas álgebras obtenemos:

Teorema 5.3.11.

$M_{n-1} = (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_n)$ está caracterizada por las identidades de $\mathcal{BPK}_0$ y la cuasi-identidad

$$\left[\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right)' \approx \bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) \ \& \ \&_{j=1}^{n} \left(x_j^* \approx \bigvee_{i \neq j, i=1}^{n} x_i\right)\right] \implies 0 \approx 1$$

Realizando un razonamiento análogo, por el Lema 5.3.8, se tiene la siguiente axiomatización para $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$.

Teorema 5.3.12.

$(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ está caracterizada por las identidades de $\mathcal{BPK}_0$ y la cuasi-identidad

$$(1) \qquad \left(\bigvee_{i=1}^{m} x_i\right)^* \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} y_i\right)^* \approx 1 \ \& \ \left(\left(\bigvee_{i=1}^{m} x_i\right)^{*\prime} \approx \left(\bigvee_{j=1}^{n} y_j\right)^*\right)$$

$$\& \ \left(\&_{j=1}^{m}\left(x_j^* \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} y_i)^* \approx \bigvee_{j\neq i, i=1}^{m} x_i\right)\right) \& \ \left(\&_{j=1}^{n}\left(y_j^* \wedge (\bigvee_{i=1}^{m} x_i)^* \approx \bigvee_{i\neq j, i=1}^{n} y_i\right)\right)$$

$$\& \left((\bigvee_{i=1}^{m} x_i)' \wedge (\bigvee_{j=1}^{n} y_j)^*\right) \approx \bigvee_{i=1}^{m} x_i \ \& \ \left((\bigvee_{j=1}^{n} y_j)' \wedge (\bigvee_{i=1}^{m} x_i)^*\right) \approx \bigvee_{j=1}^{n} y_j \implies \bigvee_{i=1}^{n} y_i \approx 0$$

Demostración. Veamos que las únicas álgebras críticas que satisfacen la cuasi-identidad (1) son las que generan a la cuasivariedad $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$. Sabemos que las álgebras críticas en $\mathcal{BPK}_0$ son de la forma $\mathbb{B}_p$ ó $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$. Consideremos los siguientes casos.

- Supongamos que el álgebra crítica $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ es tal que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q)$. Luego, $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ no puede ser subálgebra de $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, lo que implica, por el Lema 5.3.8 que no pueden existir elementos $x_i, y_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ no nulos que hagan que el antecedente sea verdadero.

  Supongamos entonces que algún x_i ó y_j es 0, entonces por Lema 5.3.10 resulta $a = \bigvee_{i=1}^{m} x_i = 0$ ó $b = \bigvee_{j=1}^{n} y_j = 0$. Si $b = 0$, el consecuente es verdadero y la identidad se sigue. Supongamos entonces que $b = \bigvee_{i=1}^{n} y_i \neq 0$ y $a = \bigvee_{i=1}^{m} x_i = 0$. En este caso, por la Observación 5.3.9 todos los $b_i = 0$ son no nulos y $\mathbb{B}_n$ sería subálgebra de $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, y en consecuencia $n \leq p < q$, lo cual es un absurdo, ya que implicaría que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ también lo sería.

  Esto indica que la cuasi-identidad se cumple para todas las álgebras críticas $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ que verifican $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q)$.

- Supongamos que el álgebra crítica $\mathbb{B}_p$ es tal que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbb{B}_p)$, es decir, $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \not\preceq \mathbb{B}_p$. Luego, por la Proposición 5.3.6, $p < n$. Utilizando un razonamiento análogo al anterior tenemos que si $\bigvee_{j=1}^{n} y_i \neq 0$, necesariamente $\bigvee_{i=1}^{m} x_i = 0$, por lo que $\mathbb{B}_n$ sería subálgebra de $\mathbb{B}_p$ contradiciendo el hecho de que $p < n$. Esto indica que la cuasi-identidad (1) se verifica para todas las álgebras críticas que cumplen $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbb{B}_p)$.

- Supongamos que el álgebra crítica $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ es tal que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \in ISP(\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q)$. En este caso, $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ y, por la Proposición 5.3.6, $m \leq p$ y $n \leq q$. Pero entonces $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ es subálgebra de $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, y, por Lema 5.3.8, existen elementos no nulos x_i e y_j que hacen que el antecedente de (1) sea verdadero y el consecuente falso, por lo que la cuasi-identidad no se cumpliría para estas álgebras críticas $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$.

- Supongamos que el álgebra crítica $\mathbb{B}_p$ es tal que $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \in ISP(\mathbb{B}_p)$. En este caso, otra vez por la Proposición 5.3.6, resulta $n \leq p$, por lo que $\mathbb{B}_n$ es subálgebra de $\mathbb{B}_p$. Luego, basta tomar a los elementos y_j como n átomos de $\mathbb{B}_p$ y a los elementos x_i nulos, para mostrar que la cuasi-identidad (1) no se sigue para estas álgebras.

Estos casos muestran que sólo las álgebras críticas del conjunto $\{\mathbf{A} \in Cri(\mathcal{BPK}_0) : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbf{A})\}$ satisfacen (1), por lo que la cuasivariedad $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ queda caracterizada por (1) dentro de $\mathcal{BPK}_0$. $\square$

Como una consecuencia de las cuasi-identidades encontradas podemos asegurar que las únicas álgebras críticas que aparecen en las cuasivariedades $M_{n-1} = (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_n)$ y $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ son exactamente las que establece la siguiente proposición.

Proposición 5.3.13.

(1) $Cri(M_{n-1}) = \{\mathbf{A} \in Cri(\mathcal{BPK}_0) : \mathbb{B}_n \notin IS(\mathbf{A})\}$

(2) $Cri((\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n) = \{\mathbf{A} \in Cri(\mathcal{BPK}_0) : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \notin ISP(\mathbf{A})\}$

Este resultado nos permite afirmar que para todo $V \in D(P)$, es decir, para todo V subconjunto decreciente del conjunto ordenado de las álgebras críticas de $\mathcal{BPK}_0$, existe una subcuasivariedad $\mathcal{K}$ en $\mathcal{BPK}_0$ tal que $Cri(\mathcal{K}) = V$. Esta cuasivariedad la podemos obtener de la siguiente manera.

- Si V es un conjunto finito de álgebras críticas, consideremos los conjuntos $T = \{i : \mathbb{B}_i \in V\}$ y $S_p = \{j : \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_j \in V\}$. Como todos estos conjuntos son finitos, sea t_0 el último elemento de T y s_p el último elemento de S_p, para cada p. Claramente, por el orden establecido en las álgebras críticas (si $p_1 < p_2$ entonces $s_{p_1} \geq s_{p_2}$. Consideremos la cuasivariedad

$$\mathcal{K} = (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_{t_0} \times \mathbb{B}_{t_0+1}) \cap \bigcap_{0 \leq p \leq t_0 - 1} (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_{s_p+1})$$

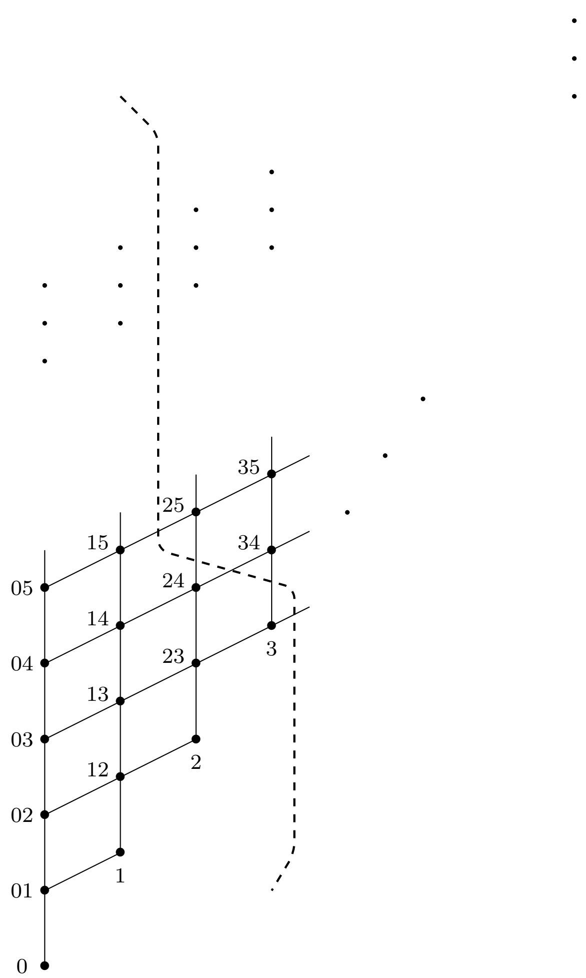
Por Proposición 5.3.13 tenemos que las álgebras críticas de esta cuasivariedad son exactamente las que se encuentran en V.

- Si $V \neq Cri(\mathcal{BPK}_0)$ y no es un conjunto finito. Consideremos el conjunto $T = \{i : \mathbb{B}_i \in V\}$ el cual es finito pues $V \neq \mathcal{BPK}_0$ y sea t_0 su último elemento. Consideremos también el conjunto $R = \{i : Cri(M_i) \subseteq V\}$, el cual es distinto de vacío pues V no es finito, cuyo último elemento es r_0 y los conjuntos $S_p = \{j : \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_j \in V\}$ para $r_0 + 1 \leq p \leq t_0 - 1$, cuyos últimos elementos son s_p. La cuasivariedad

$$\mathcal{K} = M_{t_0} \cap \bigcap_{r_0+1 \leq p \leq t_0-1} (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_{s_p+1}) \cap (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_{t_0} \times \mathbb{B}_{t_0+1})$$

  es una cuasivariedad cuyo conjunto de álgebras críticas es exactamente el conjunto V.

A modo de ejemplo, consideremos el decreciente $V \in D(P)$ que se muestra en la siguiente figura



Este conjunto decreciente tiene asociada la cuasivariedad:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= M_{t_0} \cap \bigcap_{r_0+1 \leq p \leq t_0-1} (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_{s_p+1}) \cap (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_{t_0} \times \mathbb{B}_{t_0+1}) \\
&= M_3 \cap \bigcap_{2 \leq p \leq 2} (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_{s_p+1}) \cap (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_3 \times \mathbb{B}_4) \qquad , \\
&= M_3 \cap (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_5) \cap (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_3 \times \mathbb{B}_4)
\end{aligned}
$$

en este caso, $r_0 = 1, t_0 = 3$, $s_2 = 4$. Notemos que en este caso particular M_3 puede obviarse.

Sabemos que a cada subcuasivariedad le podemos asociar un conjunto de álgebras críticas que es un elemento de $D(P)$. Los resultados anteriores nos permiten demostrar que la recíproca también es cierta, es decir, que a todo subconjunto decreciente de P le podemos asociar una cuasivariedad cuyo conjunto de álgebras críticas es exactamente dicho conjunto decreciente. Hemos probado entonces:

Teorema 5.3.14.

$$\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0) \cong D(P).$$

A continuación mostraremos que las subcuasivariedades M_n y $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ son ínfimo irreducibles, más aún, junto con $\mathcal{BPK}_0$ son las únicas subcuasivariedades ínfimo irreducibles en $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$.

Lema 5.3.15. *Las cuasivariedades $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$, $m < n$ y M_{n-1} son elementos ínfimo irreducibles de $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$.*

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n) = \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2$, donde $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ son cuasivariedades tales que $\mathcal{K}_1 \not\subseteq \mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_2 \not\subseteq \mathcal{K}_1$. En estas condiciones podemos afirmar que existen álgebras críticas $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_2$ y $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1$. De esta forma $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \notin (\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ y, por lo tanto, $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbf{A}_1$ y $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n \preceq \mathbf{A}_2$. Esto nos permite decir, por la Proposición 5.3.6 que $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son álgebras $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$, donde $m \leq p$ y $n \leq q$ o bien son álgebras $\mathbb{B}_p$ con $m, n \leq p$. Supongamos, por ejemplo que $\mathbf{A}_1 = \mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_1}$ y $\mathbf{A}_2 = \mathbb{B}_{p_2} \times \mathbb{B}_{q_2}$, $p_1, p_2 \geq m$ y $q_1, q_2 \geq n$. Como $\mathbf{A}_1$ no es subálgebra de $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_2$ no es subálgebra de $\mathbf{A}_1$, necesariamente $p_1 \neq p_2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p_1 < p_2$, entonces $q_2 < q_1$ y así $\mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_2} \leq \mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_1}$ y $\mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_2} \leq \mathbb{B}_{p_2} \times \mathbb{B}_{q_2}$ por lo que $\mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_2} \in \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_1$. Por otra parte, $\mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_2}$ contiene a $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ como subálgebra, lo que implicaría que $\mathbb{B}_{p_1} \times \mathbb{B}_{q_2} \notin (\mathcal{BPK}_1 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$, absurdo. Si suponemos que $\mathbf{A}_1 = \mathbb{B}_r$ y $\mathbf{A}_2 = \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_q$ basta considerar el álgebra $\mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_{min(r,q)}$ para llegar a un absurdo.

Un razonamiento análogo nos permite demostrar que M_{n-1} también es ínfimo irreducible. $\square$

Proposición 5.3.16. *Las cuasivariedades $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$, y M_n son las únicas subcuasivariedades ínfimo irreducibles de $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ una cuasivariedad en $\mathcal{BPK}_0$ y consideremos el conjunto de sus álgebras críticas $Cri(\mathcal{K})$. Sabemos que éste es un conjunto decreciente y mostramos anteriormente que $\mathcal{K}$ se puede escribir cómo una intersección finita de subcuasivariedades M_n y $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ por lo que éstas resultan las únicas subcuasivariedades ínfimo irreducibles. $\square$

Corolario 5.3.17. *Toda subcuasivariedad de $\mathcal{BPK}_0$ es un ínfimo finito de subcuasivariedades de la forma $(\mathcal{BPK}_0 : \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n)$ y M_n.*

Observemos finalmente que los Teoremas 5.3.11 y 5.3.12 nos permiten obtener una axiomatización para cada subcuasivariedad ínfimo irreducible. Para dar una axiomatización para una cuasivariedad arbitraria de $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$ sólo debemos tener en cuenta cómo puede escribirse como intersección de cuasivariedades ínfimo irreducibles tal como se mostró en esta sección.

El siguiente objetivo será determinar las cuasivariedades supremo reducibles en $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$. En primer lugar, notemos que por el Teorema 5.3.14 se deduce que $Cri(\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2) = Cri(\mathcal{K}_1) \cup Cri(\mathcal{K}_2)$, para todo par de subcuasivariedades $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$. Luego, tenemos que $\mathcal{Q}(\mathbb{B}_i \times \mathbb{B}_j)$ y $\mathcal{Q}(\mathbb{B}_i)$ son supremos irreducibles en $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$.

Lema 5.3.18. *Las cuasivariedades $\mathcal{BPK}_0$ y M_n son supremo irreducibles en $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$, para cada n.*

Demostración. Si $\mathcal{BPK}_0 = \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2$, uno de los conjuntos $I_1 = \{j : \mathbb{B}_j \in \mathcal{K}_1\}$ o $I_2 = \{j : \mathbb{B}_j \in \mathcal{K}_2\}$ es infinito. Si suponemos que I_1 es infinito, resultaría que $\mathbb{B}_k \times \mathbb{B}_l \in \mathcal{K}_1$ cualquiera sean k, l, $k < l$. Y esto implicaría que $\mathcal{BPK}_0 = \mathcal{K}_1$.

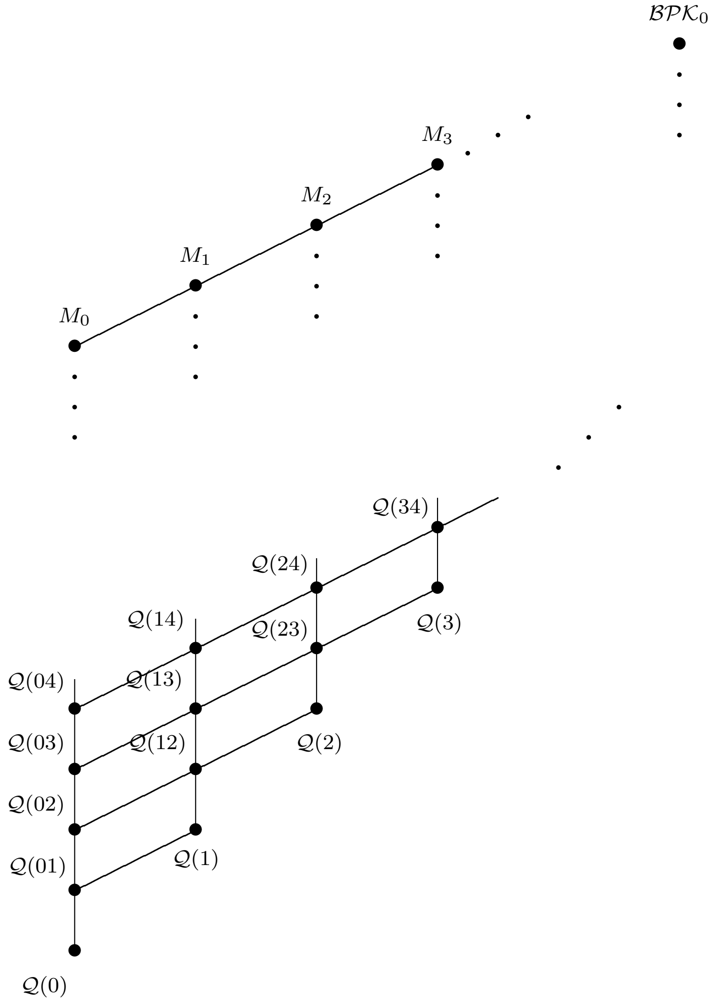
Si $M_n = \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2$, uno de los conjuntos $I_1 = \{j : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_j \in \mathcal{K}_1\}$ o $I_2 = \{j : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_j \in \mathcal{K}_2\}$ sería infinito y así $M_n = \mathcal{K}_1$ o bien $M_n = \mathcal{K}_2$. $\square$

Teorema 5.3.19. *$\mathcal{Q}(\mathbb{B}_i \times \mathbb{B}_j)$, $\mathcal{Q}(\mathbb{B}_i)$, $\mathcal{BPK}_0$ y M_n son las únicas subcuasivariedades supremo irreducibles en $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ una subcuasivariedad supremo irreducible de $\mathcal{BPK}_0$. Supongamos que $\mathcal{K} \neq \mathcal{BPK}_0$ y que está generada por una cantidad finita de álgebras críticas, es decir, $Cri(\mathcal{K}) = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n\}$, donde $\mathbf{A}_k = \mathbb{B}_i \times \mathbb{B}_j$ o $\mathbf{A}_k = \mathbb{B}_i$. Luego $\mathcal{K} = \bigvee_{k=1}^{n} \mathcal{Q}(\mathbf{A}_k)$, pero como es supremo irreducible, $\mathcal{K} = \mathcal{Q}(\mathbf{A}_k)$, para algún k, $1 \leq k \leq n$.

Supongamos ahora que $\mathcal{K}$ no esté finitamente generada. Entonces $Cri(\mathcal{K})$ no es un conjunto finito, pero como $\mathcal{K} \neq \mathcal{BPK}_0$, el conjunto $\{j : \mathbb{B}_j \in \mathcal{K}\}$ deber ser finito. Luego, existe j_0 tal que $\mathbb{B}_{j_0} \in \mathcal{K}$ y $\mathbb{B}_{j_0+1} \notin \mathcal{K}$. Otra vez, ya que $\mathcal{K}$ no está generada por una cantidad finita de álgebras críticas debe existir $i_0 \leq j_0$ tal que el conjunto $\{k : \mathbb{B}_{i_0} \times \mathbb{B}_k \in \mathcal{K}\}$ no sea finito. Si $i_0 \neq j_0$ entonces $\mathcal{K}$ no es supremos irreducible, lo cual contradeciría nuestra hipótesis. Debe cumplirse entonces que $\mathbb{B}_{j_0} \times \mathbb{B}_k \in \mathcal{K}$ para todo k y así $\mathcal{K} = M_{j_0}$. $\square$

En la siguiente figura se muestra el conjunto ordenado de todas las cuasivariedades supremo irreducibles (recordemos que mn representa al álgebra crítica $\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_n$ y n al álgebra crítica $\mathbb{B}_n$).



La importancia de determinar los elementos supremo irreducibles de $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$ radica en el siguiente resultado.

Proposición 5.3.20. *Toda cuasivariedad $\mathcal{K}$ de $\mathcal{BPK}_0$ es supremo de una cantidad finita de cuasivariedades supremo irreducibles.*

Demostración. Es claro que si $\mathcal{K} = \mathcal{BPK}_0$ o $\mathcal{K}$ es una cuasivariedad finitamente generada, el resultado se verifica. Supongamos que $\mathcal{K} \neq \mathcal{BPK}_0$ y que $\mathcal{K}$ no está finitamente generada. En estas condiciones tenemos que los conjuntos $\{i : M_i \subseteq \mathcal{K}\}$ y $\{j : \mathbb{B}_j \in \mathcal{K}\}$ son no vacíos y acotados. Si i_0 y j_0 son los últimos elementos de estos conjuntos respectivamente, resulta que el conjunto $P(i_0, j_0) = \{kl : \mathbb{B}_k \times \mathbb{B}_l \in \mathcal{K}$ and $i_0 < k,\ j_0 < l\}$ es finito (posiblemente vacío). Luego, podemos escribir

$$\mathcal{K} = M_{i_0} \vee \mathcal{Q}(\mathbb{B}_{j_0}) \vee \bigvee_{kl \in P(i_0,j_0)} Q(\mathbb{B}_k \times \mathbb{B}_l).$$

Lo que muestra que $\mathcal{K}$ es supremo de una cantidad finita de cuasivariedades supremo irreducibles. $\square$

Hemos encontrado entonces el reticulado de cuasivariedades $\mathcal{L}(\mathcal{BPK}_0)$, junto con los elementos supremo reducibles e ínfimo irreducibles, así como también un conjunto de cuasi-identidades que caracterizan a cada uno de ellos.

5.4. Algunas conclusiones y consideraciones generales

En la Sección 4.4 determinamos completamente el reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{BPK}$ junto con identidades que caracterizan a cada uno de sus elementos. Una característica importante de las variedades $\mathcal{BPK}_0$ y $\mathcal{BPK}_1$, es que determinan pares slpitting del reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{BPK}$. Recordemos que un **par splitting** (a, b) de un reticulado $\mathbf{L}$ es un par de elementos del reticulado que verifica $a \not\leq b$ y para todo $c \in L$, $a \leq c$ ó $c \leq b$, en otras palabras, b es el elemento más grande que no está sobre a.

Teniendo en cuenta el siguiente resultado se sigue que $(\mathcal{V}(\mathbf{4}), \mathcal{BPK}_0)$, donde $\mathbf{4}$ es la cadena de cuatro elementos, es un par *splitting* del reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{BPK}$, es decir, $\mathcal{V}(\mathbf{4}) \nsubseteq \mathcal{BPK}_0$ y para cada subvariedad $\mathcal{V}$ del reticulado de subvariedades de $\mathcal{BPK}$, se verifica que $\mathcal{V}(\mathbf{4}) \subseteq \mathcal{V}$ ó $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{BPK}_0$.

Proposición 5.4.1. *Toda álgebra subdirectamente irreducible en la variedad $\mathcal{BPK}$ que no pertenece a la variedad $\mathcal{BPK}_0$ contiene como subálgebra a un álgebra isomorfa a $\mathbf{4}$.*

Demostración. Si $\mathbf{L}$ es un álgebra subdirectamente irreducible que no pertenece a la variedad $\mathcal{BPK}_0$ entonces, $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L})| \geq 1$. Como $\mathbf{L}$ es un álgebra subdirectamente irreducible que pertenece a la variedad $\mathcal{BPK}$, por el Corolario 4.4.6 existe el menor elemento denso d, cuyo elemento asociado en $\mathbb{D}(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$ es $V_d = Max$. Por la Proposición 4.4.4, sabemos que $\mathbb{X}(\mathbf{L})$ no puede tener elementos que sean maximales y minimales a la vez. Luego,

$$V_d = Max \iff \phi(V_d) = Min \iff V_{d'} = (\phi(V_d))^c = \mathbb{X}(L) \setminus Min.$$

Esto muestra que $d \leq d'$ en $\mathbf{L}$. Además, como $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| \geq 1$, obtenemos una cadena $0 < d < d' < 1$ que claramente es subálgebra de $\mathbf{L}$ pues d y d' son elementos densos. $\square$

Por otra parte, tenemos que el par $(\mathcal{V}(\mathbf{5}), \mathcal{BPK}_1)$, donde $\mathbf{5}$ es la cadena de 5 elementos, es también un par *splitting* del reticulado de subvariedades de $\mathcal{BPK}$ como lo demuestra la siguiente proposición.

Proposición 5.4.2. *Toda álgebra subdirectamente irreducible en la variedad $\mathcal{BPK}$ que no pertenece a la variedad $\mathcal{BPK}_1$ contiene como subálgebra a un álgebra isomorfa a* **5**.

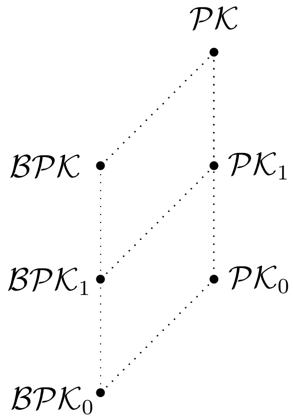
Demostración. Si $\mathbf{L}$ es un álgebra subdirectamente irreducible que no pertenece a la variedad $\mathcal{BPK}_1$ entonces, $|Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))| = 2$. Sean $\phi(P) \subset P$ los dos elementos de $Body(\mathbb{X}(\mathbf{L}))$. Como en la demostración de la Proposición 5.4.1 tenemos que los elementos del dual asociados a d y d' son comparables y vale $V_d \subset V_{d'}$. Si ahora consideramos además el elemento $W = Max \cup \{P\}$, entonces tenemos la siguiente cadena de 5 elementos

$$\emptyset \subset Max \subset Max \cup \{P\} \subset Max \cup \{\phi(P), P\} \subset \mathbb{X}(\mathbf{L})$$

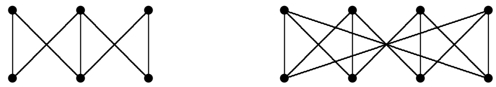
que claramente es subálgebra de $\mathbf{L}$ pues son todos elementos densos y $W' = W$. $\square$

Estos resultados nos dan una caracterización algebraica de las variedades $\mathcal{BPK}_0$ y $\mathcal{BPK}_1$, ya que nos dicen que las únicas álgebras subdirectamente irreducibles que están en dichas variedades son aquellas que no contienen como subálgebra a **4** ó a **5** respectivamente.

En la segunda parte de esta tesis, hemos considerado las siguientes subvariedades de las álgebras pseudocomplementadas de Kleene que se muestran en el siguiente gráfico:



Las subvariedades $\mathcal{BPK}_1$ y $\mathcal{BPK}_0$ estudiadas están incluidas en las variedades $\mathcal{PK}_1$ y $\mathcal{PK}_0$ respectivamente y esta inclusión es estricta. Para mostrar esto, basta mostrar que existen *pk*-álgebras que tienen cero ó un elemento en su *body*, pero no son *bundle*, es decir, no todo elemento no maximal está contenido en todo elemento maximal. Por ejemplo, las *pk*-álgebras cuyos espacios duales asociados son los que se muestran en la figura, si bien no tienen elementos en su *body*, por lo que están en la variedad $\mathcal{PK}_0$, no cumplen con la condición *bundle*, por lo que no pertenecen a la variedad $\mathcal{BPK}_0$.



Si bien el problema de determinar el reticulado de subvariedades de $\mathcal{PK}$ es complejo, ¿se podrán determinar los pares *splitting* en el reticulado de subvariedades de $\mathcal{PK}$? Un problema interesante que nos gustaría abordar en un futuro sería determinar completamente el reticulado de subvariedades de la variedad $\mathcal{PK}_0$. Notemos que en esta variedad, se puede probar que es posible definir una implicación de Heyting. Además los espacios duales asociados a sus álgebras subdirectamente irreducibles, al estar formados sólo por elementos maximales y minimales tales que $\phi(U) \subseteq U$ se pueden asociar a grafos simples. Estas características, junto con la caracterización de subálgebras dadas en el Capítulo 3 para las álgebras de De Morgan Heyting, podrían resultar de gran ayuda para lograr dicho objetivo.

Bibliografía

[1] M. Abad, J. P. Diaz Varela, *Varieties and Quasivarieties of Monadic Tarski Algebras*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online. Vol. 6, (2002), 451-464.

[2] M. E. Adams, *Maximal subalgebras of Heyting algebras*; Proceeding of Edinburgh Mathematical Society (1986) 29, 359-365.

[3] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press; Columbia, MO; (1974).

[4] T. S. Blyth, *Lattices and Ordered Algebraic Structures*, Universitext. Springer-Verlag London, 2005.

[5] T. S. Blyth and J. C. Varlet, *Ockham Algebras*, Oxford University Press, New York, 1994.

[6] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Volumen 78 de *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] V. Castaño, M. Muñoz Santis, *De Morgan Heyting algebras satisfying the identity* $x^{n('*)} \approx x^{(n+1)('*)}$, Math. Log. Quart. 57, N°2, 2011.

[8] V. Castaño, M. Muñoz Santis, *Subalgebras of Heyting and the De Morgan Heyting algebras*, Studia Logica 98:123-139, 2011.

[9] R. Cignoli, S. Lafalce and A. Petrovich, *Remarks on Priestley Duality for Distributive Lattices*, Kluwer Academic Publisher, Netherland, 1991, Order 8:299-315.

[10] W. H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproducts of de Morgan algebras*, Bull. Aust. Math. Soc. 16 (1977), 1-13.

[11] B. A. Davey, *Subdirectly irreducible distributive double p-algebras*, Algebra Universalis 8, No. 1 (1978), 73–88.

[12] B. A. Davey, *On the lattice of subvarieties* Houston J. Math. 5(1979), 183-192.

[13] S. Koppelberg, **Topological dualty**, in Handbook of Boolean Algebras, Vol. 1 (J. D. Monk and R. Bonnet, Eds.), North - Holland, Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo, pp. 95-126.

[14] J. Gispert, A. Torrens, Locally finite quasivarieties of MV-algebras, preprint.

[15] G. Grätzer; *Lattice Theory: first concepts and distributive lattices*; W. H. Freeman and Company; Estados Unidos; (1971).

[16] B. Jónsson, *Algebras whose congruece lattices are distributive* Math. Scand. 21(1967), 110-121.

[17] P. Morandi, *Dualities in Lattice Theory* (apuntes personales), Página Web http://sierra.nmsu.edu/morandi/, (2005).

[18] A. Monteiro, *Sur les Algèbres de Heyting Symétriques*, Portugaliae Mathematica; Vol. 39; (1980).

[19] L. Monteiro, *Algèbres de Boole monadiques libres* Algebra Universalis 8, (1978), 374-380.

[20] H. P. Sankappanavar, *Heyting Algebras with a Dual Lattice Endomorphism*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 33 (1987), 565-573.

[21] H. A. Priestley, *Representation of Distributive Lattices by Means of Ordered Stone Spaces*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 186-190.

[22] H. A. Priestley, *Ordered Topological Spaces and the Representation of Distributive Lattices*, Proc. London Math. Soc. 24 (1972), 507-530.

[23] H. A. Priestley, *Ordered Sets and Duality for Distributive Lattices*, Ann. Discrete Math. 23 (1984) 39-60.

[24] H. A. Priestley, *The Construction of Spaces Dual to Pseudocomplemented Distriburive Lattices*, Q. J. Math. Oxf. 26 (1975) 215-228.

[25] A. Romanowska, *Subdirectly irreducible pseudocomplemented De Morgan algebras*, Algebra Universalis **12** (1981), 70-75.

[26] H. P. Sankappanavar, *Heyting Algebras with a Dual Lattice Endomorphism*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 33 (1987), 565-573.

[27] H. P. Sankappanavar, *Pseudocomplemented Okham and De Morgan Algebras*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 32 (1986), 385-394.

[28] H. P. Sankappanavar, J. Vaz de Carvalho, *Congruence properties of pseudocomplemented De Morgan algebras*, Math. Log. Quart. 60 (2014), 425-436.

[29] B. S. W. Schröder, *Ordered sets. An introduction*, Birkhäuser Boston, 2003.

[30] M. H. Stone, *The theory of representations for a Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111.

[31] J. Varlet, *A regular variety of type* $\langle 2, 2, 1, 1, 0, 0 \rangle$, Algebra Universalis **2** (1972), 218-223.