UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Matemática

Sobre las Algebras de Lukasiewicz m generalizadas de orden n

Carlos Alberto Gallardo

BAHÍA BLANCA ARGENTINA

2016

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Area VI (Lógica y Fundamentos), dependiente del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre noviembre de 2009 y marzo de 2016, bajo la dirección de la Dra. Alicia Nora Ziliani.

Carlos Alberto Gallardo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Secretaría de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el día .../.../....., mereciendo
la calificación de ...(......................)

Silba el viento dentro de mí. Estoy desnudo. Dueño de nada, dueño de nadie, ni siquiera dueño de mis certezas, soy mi cara en el viento, a contraviento, y soy el viento que golpea mi cara.

Eduardo Galeano

Agradecimientos

He llegado a poder realizar este trabajo gracias a la disponibilidad y dedicación de la Dra. Alicia Ziliani, acompañandome con todo su conocimiento y calidad humana.

Además quiero agradecer al Doctor Aldo Victorio Figallo quien me ayudó a iniciar mis estudios en lógica matemática.

A Mariela, compañera de mi corazón.

Finalmente, a mis padres, a toda mi familia, a mis amigos y a todos los que, de una u otra forma, contribuyeron para que hoy me encuentre en esta instancia.

Resumen

De las numerosas subvariedades de las álgebras de Ockham, aquella estrechamente relacionada con las álgebras de De Morgan es $\mathcal{K}_{m,0}$ con $m \geq 1$, la cual está formada por las álgebras de Ockham que satisfacen la identidad adicional $f^{2m}(x) = x$. Como las álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden n (o L_n–álgebras) tienen un reducto que es un álgebra de De Morgan, T. Almada y J. Vaz de Carvalho ([1]) consideraron una generalización de las L_n–álgebras reemplazando dicho reducto por uno que pertenece a $\mathcal{K}_{m,0}$ y, de este modo, introdujeron la variedad de las álgebras de Lukasiewicz $m-$generalizadas de orden n (o L_n^m–álgebras).

En esta tesis, nosotros continuamos con el estudio de esta variedad. Al volumen lo hemos organizado en cinco capítulos. En el Capítulo I damos nociones básicas y hacemos un repaso de los resultados más importantes de álgebra universal. Además, hemos incluido una breve exposición sobre la teoría de los cálculos proposicionales extensionales implicativos standars. Por último, describimos la localización para retículos distributivos acotados. Todos estos temas los hemos incluido tanto para facilitar la lectura como para fijar los conceptos que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo.

En el Capítulo II, comenzamos nuestro estudio de las álgebras de Łukasiewicz m–

generalizadas de orden n. En primer lugar, y motivados por el rol fundamental que desempeña la implicación débil en las álgebras de Łukasiewicz de orden n, introducimos una operación de implicación en las L_n^m–álgebras. Esta implicación nos permitió considerar la noción de sistema deductivo a partir de la cual caracterizamos a las congruencias. Cabe señalar que este resultado fue fundamental para describir a las congruencias principales, de manera más simple que la obtenida en [1] a partir de la teoría de las álgebras de Ockham. Además, dicha implicación nos permitió definir un elemento fundamental para obtener una nueva caracterización de las álgebras simples y hallar el polinomio discriminador ternario para esta variedad. Algunos de los temas estudiados en este capítulo fueron expuestos en las comunicaciones:

- *Sobre las $m-$álgebras de Łukasiewicz generalizadas de orden n*, C. Gallardo y A. Ziliani, LVIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Cuyo, 2008.
- *La variedad discriminadora de las m-álgebras de Lukasiewicz generalizadas de orden n*, LVIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Mar del Plata, 2009.

Además, se encuentran publicados en [32]:

- *Weak implication on generalized Łukasiewicz algebras of order n*, A.V. Figallo, C. A. Gallardo y A. Ziliani, Bulletin of the Section of Logic, 39, 4(2010), 187–198.

En el Capítulo III, y con el propósito de hallar un cálculo proposicional para el cual las L_n^m–álgebras sean su contrapartida algebraica, introducimos una nueva operación de implicación a la que denominamos implicación standard. Ella jugó un papel primordial en la resolución del problema planteado y nos permitió obtener otra caracterización de las congruencias. A continuación describimos el cálculo hallado, que denotamos ℓ_n^m y probamos que pertenece a la clase de los sistemas proposicionales implicativos extensionales standards. Finalmente, demostramos el teorema de completitud para ℓ_n^m. Además, cabe mencionar que los resultados obtenidos en este capítulo dan respuesta positiva a un problema planteado en [1]. Algunos de estos resulatdos fueron expuestos en la siguiente presentación:

- *On the congruence m-generalized Lukasiewicz algebras of order n*, C. Gallardo y A. Ziliani, XVI EBL and 16^{th} Brazilian Logic Conference, Petrópolis, Brasil, 2011

y han sido publicados en [33]:

- *The L_n^m–propositional calculus*, C. A. Gallardo y A. Ziliani. Mathematica Bohemica, 140,1(2015), 11–33.

En el Capítulo IV, desarrollamos la teoría de localización para las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n. En particular, para cada L_n^m–álgebra L determinamos el álgebra de fracciones $L[C]$ asociada a un conjunto $\wedge$-cerrado C de L. A continuación, introducimos la noción de 1–ideal en las L_n^m–álgebras lo que nos permitió definir una topología $\mathcal{F}$ para ellas y el concepto de $\mathcal{F}$-multiplicador. Luego, a partir de estas nociones construimos el álgebra de localización $L_{\mathcal{F}}$ de L con respecto a $\mathcal{F}$. Además, mostramos que la L_n^m–álgebra de fracciones $L_[C]$ es un álgebra de localización. Posteriormente, definimos la noción de L_n^m–álgebra de cocientes y probamos la existencia de la L_n^m–álgebra maximal de cocientes. En la última sección de este capítulo nos dedicamos a analizar los resultados antes descriptos para el caso de las L_n^m–álgebras finitas. En la siguiente comunicación presentamos algunos de estos temas:

- *$\mathcal{F}$–multipliers and localization of L_n^m–algebras*, C. Gallardo y A. Ziliani, Workshop Philosophy and History of Science State University of Campinas, UNICAMP, Campinas, Brasil, 2012

Cabe mencionar que los mismos han sido aceptados para su publicación en Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing (2016). ([34])

En el Capítulo V, nos abocamos al estudio de las propiedades de las L_n^2–álgebras finitas y finitamente generadas, obteniendo importantes propiedades de los átomos en estas álgebras. A continuación, describimos detalladamente a las álgebras simples. Además, determinamos la estructura de las L_n^2–álgebras libres con un conjunto finito de generadores libres. Finalmente, indicamos un método para calcular el cardinal del álgebra libre con un conjunto finito n de generadores libres.

Abstract

Ockham algebras have a great number of subvarieties, but the ones which are more closely related to De Morgan algebras are $\mathcal{K}_{m,0}$ with $m \geq 1$. They are constituted by Ockham algebras that satisfy the additional identity $f^{2m}(x) = x$. Since Łukasiewicz-Moisil algebras of order n have a reduct which is a De Morgan algebra, T. Almada y J. Vaz de Carvalho ([1]) introduced a generalization of them, by switching this reduct by one which belongs to $\mathcal{K}_{m,0}$. Hence, they introduced the variety of $m-$generalized Łukasiewicz algebras of order n (or L_n^m–algebras).

Our aim in this thesis is to study in depth this variety. More precisely, we have organized this work in five chapters. In Chapter I, basic definitions are provided and we also do a review of the most important results in universal algebra. Furthermore, we have included as well a brief discussion on the class of standard systems of implicative extensional propositional calculi. Finally, we describe the localization for bounded distributive lattices. These topics have been included not only to simplify the reading but also to fix the notations and the definitions that we will use in this volume.

In Chapter II, we began our study of $m-$generalized Łukasiewicz algebras of order n. First, and bearing in mind the fundamental role that the weak implication played in

the study of Łukasiewicz algebras of order n, we introduced an implication operation on L_n^m–algebras which generalize the latter. This notion enabled us to consider the notion of deductive systems from which we have given a new characterization of the congruence lattice on these algebras. It is worth mentioning that this result turned out to be very useful for describing the principal congruences on L_n^m–algebras in a simpler way than the one obtained in [1], where the theory of Ockham's algebras was applied. In addition, the aforementioned implication allowed us to define a fundamental element for what follows and, in this case, to obtain a new characterization of simple algebras and to describe the ternary discriminator polynomial for this variety. Some of the above results were presented in the following meetings:

- *Sobre las m−álgebras de Łukasiewicz generalizadas de orden n*, C. Gallardo y A. Ziliani, LVIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Cuyo, 2008.

- *La variedad discriminadora de las m-álgebras de Lukasiewicz generalizadas de orden n*, LVIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Mar del Plata, 2009.

Furthermore, they were published in [32]:

- *Weak implication on generalized Łukasiewicz algebras of order n*, A.V. Figallo, C. A. Gallardo y A. Ziliani, Bulletin of the Section of Logic, 39, 4(2010), 187–198.

In Chapter III, and in order to obtain a propositional calculus which has L_n^m–algebras as the algebraic counterpart, we introduced another implication operation on these algebras which we called standard implication. This provided us with a crucial tool not only to solve the formulated problem, but also to give a new characterization of the congruence and the principal congruence lattice of these algebras, simpler than all the above obtained descriptions. Next, we described the propositional calculus, denoted by ℓ_n^m, and we proved that it belongs to the class of standard systems of implicative extensional propositional calculi. Finally, the completeness theorem for ℓ_n^m is obtained. It is worth noting that in this chapter we have given a positive answer to the problem posed in [1]. Besides, some of the topics presented in this chapter were previously discussed in the following event

- *On the congruence m-generalized Lukasiewicz algebras of order n*, C. Gallardo y A. Ziliani, XVI EBL and 16^{th} Brazilian Logic Conference, Petrópolis, Brasil, 2011.

and they have been published in [33]:

- *The L_n^m–propositional calculus*, C. A. Gallardo y A. Ziliani. Mathematica Bohemica, 140,1(2015), 11–33.

In Chapter IV, we have developed the theory of localization for $m-$generalized Łukasiewicz algebras of order n. In particular, for each L_n^m–algebra L we have determined the L_n^m–algebra of fractions $L[C]$ relative to an $\wedge$-closed system C of L. Later on, we introduced the notion of 1–ideal on L_n^m–algebras which allows us to consider a topology $\mathcal{F}$ for them and the concept of $\mathcal{F}$-multiplier. Furthermore, we have proved that the L_n^m–algebra of fractions $L[C]$ is an L_n^m–algebra of localization. Moreover, we have defined the notion of L_n^m–algebra of quotients and we have proved the existence of the maximal L_n^m–algebra of quotients. By the end of this chapter, our attention is focused on analyzing the aforementioned results for the case of finite L_n^m–algebras. Some of these results were presented in this report:

- *$\mathcal{F}$–multipliers and localization of L_n^m–algebras*, C. Gallardo y A. Ziliani, Workshop Philosophy and History of Science State University of Campinas, UNICAMP, Campinas, Brasil, 2012

Besides, it is worth mentioning that these topics have been accepted for publication in the Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing (2016). ([34]).

In Chapter V, our main aim was to study the properties of finite and finitely generated L_n^2–algebras. In particular, we have obtained important results on the atoms of them. Next, we have provided an exhaustive description of the simple L_n^2–algebras. Finally, we have determined the structure of the free L_n^2–algebras with a finite set of free generators and we have also indicated a method to calculate the cardinal number of them in terms of the number of the free generators.

Índice

Introducción

Las álgebras de De Morgan fueron introducidas por Gr. Moisil ([49]) y estudiadas, en primer lugar, por Bialynicki-Birula y H. Rasiowa ([6]) y por J. Kalman ([44]). Mientras que los primeros autores llegaron al estudio de las mismas por sus investigaciones sobre el tratamiento algebraico de la lógica constructiva con negación fuerte, J. Kalman inrodujo los retículos distributivos con una involución, no necesariamente acotados, con el propósito de obtener una abstracción común de las álgebras de Boole y de los grupos reticulados-ordenados. En particular, las álgebras de De Morgan (o M–álgebras) fueron presentadas como álgebras $\langle A, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y f es un endomorfismo dual del mismo reducto tal que $f^2 x = x$. Cabe señalar que estas álgebras constituyen la contrapartida algebraica de la bien conocida lógica de Belnap 4-valuada ([3, 4]).

En 1977, J. Berman ([5]) introdujo la noción de álgebra de Ockham, como una generalización del concepto de álgebra de De Morgan. Más precisamente, como retículos distributivos acotados con un endomorfismo dual f del mismo reducto. Estas álgebras son la contrapartida algebraica de sistemas proposicionales en las que no existen las paradojas de implicación material y omite la ley de la doble negación. La clase de álgebras de Ockham contiene, además de la clase de álgebras de De Morgan, a otras clases también conocidas, como por ejemplo, la de las álgebras de Boole, las álgebras de Kleene y las álgebras de Stone. Las álgebras de Ockham fueron así designadas por A. Urquhart, teniendo en cuenta que las leyes de Morgan se atribuyen (al menos en el caso de la lógica proposicional) al lógico Willians de Ockham. Desde el estudio iniciado por J. Berman en 1977, que evidencia la importancia de las álgebras de Ockham en general, muchos son los algebristas de referencia que han contribuido al desarrollo de la teoría.

Por otra parte, J. Berman en el mismo trabajo en que define las álgebras de Ockham ([5]), también presenta algunas subvariedades de las mismas que son notadas por $\mathcal{K}_{n,m}$ y se caracterizan por verificar la identidad $f^{2n+m} = f^m$, con $n \in I\!N$, $m \in I\!N \cup \{0\}$. Estas clases de álgebras han sido estudiada por numerosos autores (ver por ejemplo [10, 12, 64, 65, 72, 85, 86, 87]). Obsérvese que la variedad $\mathcal{K}_{1,0}$ corresponde a clase de las álgebras de De Morgan.

J. Łukasiewicz en 1920 introdujo las lógicas multivaluadas ([47]). Gr. Moisil en [50] consideró las álgebras de Łukasiewicz de orden 3 y 4 con el fin de obtener la contrapartida algebraica de las correspondientes lógicas de Łukasiewicz. Luego, generalizó estas nociones definiendo las álgebras de Łukasiewicz n-valuadas ([51]) y las estudió desde el punto de vista algebraico. Estas álgebras son retículos distributivos acotados en los cuales está definida una negación de De Morgan y $n-1$ operadores modales que satisfacen ciertos axiomas. Es bien sabido que las álgebras de Łukasiewicz n-valuadas no son la contrapartida algebraica del cálculo proposicional de Łukasiewicz n-valuado para $n \geq 5$. La noción algebraica adecuada, para todo $n \in I\!N$, $n \geq 2$, fue introducida por R. Grigolia ([41]), bajo el nombre MV_n–álgebras, siguiendo algunas ideas de C. C. Chang. Como estas estructuras no se basan directamente sobre retículos, ellas no son de fácil manejo en comparación con la contrapartida algebraica correspondiente a otros cálculos proposicionales (por ejemplo, el clásico, el intuisionista). Posteriormente, este problema fue resuelto por

R. Cignoli ([24, 25]) agregando a las operaciones básicas de las álgebras de Łukasiewicz n-valuadas ciertas operaciones binarias que satisfacen ecuaciones muy simples. El sistema así obtenido lo denominó álgebras de Łukasiewicz n-valuadas propias.

Por otra parte, T. Almada y J. Vaz De Carvalho ([1]) introdujeron la variedad de las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n como una generalización de las álgebras de Łukasiewicz n-valuadas propias, remplazando el reducto de De Morgan por uno que pertenece a $K_{m,0}$ y modificando algunas propiedades de los operadores de Moisil. Más precisamente, dichos operadores son $\vee$–hemimorfismos, pero no son $\wedge$–hemimorfismos. Este hecho nos llevó, en primer lugar, a cuestionarnos el motivo por el cual los operadores de Moisil no conservaban sus condiciones iniciales. La respuesta obtenida (ver Sección 2.7) nos motivó a continuar con el estudio de estas álgebras y los temas desarrollados son presentados en esta tesis.

1. Capítulo I

En este capítulo exponemos algunos resultados bien conocidos que nos ayudarán a entender los temas tratados en este trabajo. En primer lugar, repasamos distintos conceptos de álgebra universal que utilizamos más adelante. A continuación, teniendo en cuenta el importante libro de H. Rasiowa ([66]), exponemos en detalle tópicos sobre los cálculos proposicionales implicativos extensionales standards. Por último, basándonos fundamentalmente en el bien conocido trabajo de G. Georgescu ([35]), hacemos una reseña de resultados sobre la teoría de localización para retículos distributivos acotados los cuales juegan un papel fundamental para el desarrollo del Capítulo IV.

1.1. Nociones de álgebra universal

Nosotros daremos por conocida la teoría de los retículos distributivos, álgebras de De Morgan, álgebras de Ockham y álgebras de Lukasiewicz–Moisil, pero el lector interesado en ampliar detalles sobre estas álgebras puede consultar por ejemplo [2, 7, 6, 10, 16, 39].

1.1.1. Algebras universales

A continuación, con el objeto de facilitar la lectura del texto y fijar las notaciones, repasaremos aquellas nociones de álgebra universal que vamos a utilizar con cierta frecuencia. Los mismos pueden consultarse en [19, 40].

Sea A un conjunto no vacío y n un número natural. Una operación $n-$aria sobre A es cualquier función $f : A^n \longrightarrow A$, donde n es la aridad de f. Si $n = 0$, una operación 0–aria o constante es un elemento de A. Una operación finitaria sobre A es una operación $n-$aria para algún número entero no negativo n.

Un lenguaje o tipo de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$ cuyos elementos se llaman símbolos de función, tal que a cada miembro de $\mathcal{F}$ se le asigna un número entero no negativo n, llamado aridad de f y f se denomina símbolo de función $n-$ario.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ le corresponde una operación $n-$aria $f^{\mathcal{A}}$ sobre A que pertenece a F, llamada operación fundamental de A. El conjunto A se llama universo o soporte del álgebra $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F}\rangle$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos f en lugar de $f^{\mathcal{A}}$ y si F es finito, por ejemplo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$. En este caso, si n_i es la aridad de f_i para $1 \leq i \leq k$, también diremos que A es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos, representaremos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte A.

1.1.2. Homomorfismos y subálgebras

Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ se dice un homomorfismo de A en B si para cada símbolo de función n–ario f de $\mathcal{F}$ y para toda $n-$upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de A se verifica que:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Si h es inyectiva, diremos que h es una inmersión y si h es sobreyectiva, se denomina epimorfismo. En el caso que h sea biyectiva, el homomorfismo h es llamado isomorfismo, además diremos que A es isomorfa a B y escribiremos $A \simeq B$.

Subálgebras

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ y lo notaremos $\mathcal{B} \lhd \mathcal{A}$ (o simplemente $B \lhd A$) si $B \subseteq A$ y toda operación fundamental de $\mathcal{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, para cada $X \subseteq A$ definimos

$$[X] = \bigcap \{B : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es una subálgebra de } A\}.$$

Entonces $[X]$ es una subálgebra de A, llamada la subálgebra de A generada por X.

Si $X \subseteq A$, diremos que X genera a $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{A}$ está generada por X si $[X] = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es finitamente generada si tiene un conjunto finito de generadores.

1.1.3. Productos directos y subdirectos

Productos directos

Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Entonces el producto directo $\mathcal{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es $\prod\limits_{i \in I} A_i$ y si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de operación

$n-$ario y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, se define $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), a_2(i), \ldots,$ $a_n(i))$. Es decir, $f^{\mathcal{A}}$ se define coordenada a coordenada.

La aplicación $\Pi_j : \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow A_j$ definida por $\Pi_j(a) = a_j$, para cada $j \in I$, se denomina la proyección sobre la $j-$ésima coordenada y determina un epimorfismo $\Pi_j : \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$.

Productos subdirectos

Un álgebra $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de una familia de álgebras $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, si se verifican las siguientes condiciones:

(PS1) existe una inmersión $h : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$,

(PS2) la composición $\Pi_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ es sobreyectiva, donde $\Pi_j : \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es la proyección sobre la $j-$ésima coordenada para cada $j \in I$.

Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si tiene más de un elemento y, si $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de la familia de álgebras $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, entonces existe $j \in I$ tal que $\Pi_j \circ h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es un isomorfismo, siendo h cualquier función que verifica (PS1) y (PS2).

Variedades

Una clase no vacía $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ de álgebras del mismo tipo es una *variedad* si es una clase cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos. Uno de los resultados más importantes del álgebra universal, demostrado por Birkhoff ([19, p.75]), establece que las variedades coinciden con las clases ecuacionales, es decir, clases definidas por identidades.

Como la intersección de una clase de variedades de tipo $\mathcal{F}$ es una variedad, y como todas las álgebras de tipo $\mathcal{F}$ forman una variedad, podemos concluir que para toda clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ de álgebras del mismo tipo, existe la menor variedad que contiene a K.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras del mismo tipo, denotaremos con $\mathcal{V}(K)$, a la menor variedad que contiene a K y diremos que $\mathcal{V}(K)$ es la *variedad generada* por K. Si K tiene un único elemento A, escribimos simplemente $\mathcal{V}(A)$.

Una variedad $\mathcal{V}$ es *finitamente generada* si $\mathcal{V} = \mathcal{V}(K)$ para algún conjunto finito K de álgebras finitas.

Además, un resultado bien conocido debido a Tarski es el siguiente:

Teorema 1.1.1. ([19, p.61]) $\mathcal{V}(K) = HSP(K)$.

A continuación daremos las definiciones de aquellas clases de álgebras que utilizaremos más adelante, y también repasaremos las propiedades y conceptos que serán necesarios para el desarrollo posterior.

Algebras de Boole

Un álgebra de Boole es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ que satisface las siguientes condiciones:

(B1) $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,

(B2) $x \wedge -x = 0$,

(B3) $x \vee -x = 1$.

Las álgebras de Boole, introducidas por G. Boole en 1850 son la contrapartida algebraica de la lógica clásica. Para una mayor información sobre estas álgebras consultar, por ejemplo, en [42] y [77].

Algebras de De Morgan

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ es un *álgebra de De Morgan* (o M–álgebra) si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se satisfacen las siguientes identidades:

(M1) $\sim\sim x = x$,

(M2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

Es bien conocido que en toda M–álgebra A se verifican:

(M3) $x \leq y$ si, sólo si, $\sim y \leq \sim x$,

(M4) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$,

(M5) $\sim 1 = 0$.

La noción de álgebra de De Morgan fue estudiada por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa ([6]) y por H. Rasiowa ([66, 67]) con el nombre de *álgebras quasi–booleanas* y como un instrumento algebraico para el estudio de lógicas constructivas con negación fuerte. Más precisamente, con la lógica $4-$valuada desarrollada por Belnap en [4]. La información sobre las M–álgebras puede ser ampliada en [2, 6, 44, 55].

Algebras de Łukasiewicz trivalentes

La teoría de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes fue introducida y desarrollada por Gr. Moisil [50]. A. Monteiro (ver [56, 57]) indicó una axiomática equivalente a la dada por Moisil y la que daremos a continuación es debida a L. Monteiro (ver [58]).

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ se dice un *álgebra de Łukasiewicz trivalente* si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las siguientes identidades:

(i) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(ii) $\sim x \wedge \nabla x = \sim x \wedge x$,

(iii) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Por otra parte, es bien conocido que esta variedad está generada por $T_3 = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$ donde las operaciones $\vee, \wedge, \sim$ y ∇ están dadas por las siguientes tablas:

$$
\begin{array}{c|ccc}
\vee & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\wedge & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c}
x & \sim x & \nabla x \\
\hline
0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}.
$$

Cabe mencionar que el conocimiento de este resultado nos fue de utilidad en el Capítulo V.

Algebras de Ockham

Un álgebra de Ockham es un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se verifican las siguientes condiciones:

(O1) $f0 = 1$,

(O2) $f1 = 0$,

(O3) $f(x \wedge y) = fx \vee fy$,

(O4) $f(x \vee y) = fx \wedge fy$.

J. Berman en su importante trabajo [5] de 1977, generalizó la noción de álgebra de De Morgan omitiendo de la condición M1 de polaridad (es decir: *la ley de la doble negación*) y comenzó el estudio de las álgebras que él llamó *retículos distributivos con una operación unaria adicional*. Dos años más tarde, A. Urquhart en [83] las denominó *álgebras de Ochkam* y justificó su elección debido a que las llamadas leyes de De Morgan M2 y M4 se deben, al menos en el caso de la lógica, a William Ockham. Estas álgebras son modelos algebraicos para lógicas provistas de un operador de negación que satisface las leyes de De Morgan. Desde entonces el nombre de álgebras de Ochkam se hizo clásico y fue usado en la tesis doctoral de M. Goldberg del año 1979 ([38]) y en trabajos subsiguientes. Varios autores han estudiado estas álgebras, por ejemplo se pueden consultar los trabajos [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 31, 69, 84] y para una mayor información ver el importante libro [10] de T. Blyth y J. Varlet.

$K_{p,0}$–álgebras

Un álgebra de Ockham A es una $K_{p,0}$–álgebra, $p \in I\!N$, si se verifica que $f^{2p}x = x$ para todo $x \in A$.

Recordemos que J. Berman ([5]) también introdujo las subvariedades $\mathcal{K}_{p,q}$ (i.e.: $f^q(x) = f^{2p+q}(x)$ con $p \geq 1,\ q \geq 0$) y probó, entre otros resultados, que tienen sólo un número finito de álgebras subdirectamente irreducibles finitas. Posteriormente, P. García y F. Esteva ([31]) estudiaron completamente las álgebras de Ockham y sus subvariedades $\mathcal{K}_{p,q}$, indicando una caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathcal{K}_{p,q}$ y $\mathcal{K}_{p,0}$ a partir de los teoremas de representación de Urquhart. Por otra parte, J. C. Varlet y J. Vaz de Carvalho ([84]) desarrollaron un método simple para determinar una base ecuacional para la subvariedades $\mathcal{K}_{p,q}$, con $0 \leq q < p$, a veces con ciertas condiciones adicionales. Cabe destacar que esta última autora, en su tesis doctoral ([88]) obtuvo diversos resultados sobre las $K_{p,0}$–álgebras. Más detalles sobre esta variedad pueden consultarse en ([64, 72, 85, 86, 87]).

1.1.4. Congruencias y álgebras cociente

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces diremos que θ es una congruencia sobre $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$, si $a_i \, \theta \, b_i$, $a_i, b_i \in A$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, entonces $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \, \theta \, f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Al conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotaremos con $Con(\mathcal{A})$ o $Con(A)$, cuando sea conveniente. Si $\theta \in Con(A)$, para cada $x \in A$ representaremos con $[x]_\theta$ a la clase de congruencia relativa a θ y con $\mathcal{A}/\theta$ al álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por θ cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, [a_2]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)]_\theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y f es un símbolo de función $n-$aria en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. Por lo tanto, la aplicación canónica $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

Teorema 1.1.2. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $Con(\mathcal{A})$ ordenado por la relación de inclusión es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es la relación id_A identidad sobre A y cuyo último elemento es $A \times A$.*

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo general no lo sea.

La siguiente caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles es muy útil y la usaremos con frecuencia.

Teorema 1.1.3. *Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$ tiene primer elemento.*

Es decir, $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si existe $\theta_1 \in Con(\mathcal{A})$, $\theta_1 \neq id_A$ tal que $\theta_1 \subseteq \theta$ para toda $\theta \in Con(\mathcal{A})$.

Un teorema fundamental de álgbera universal debido a G. Birkhoff es el siguiente:

Teorema 1.1.4. *Toda álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles (las cuales son imágenes homomórficas de A).*

Como consecuencia inmediata del teorema anterior resultan los siguientes corolarios:

Corolario 1.1.5. *Toda álgebra finita es isomorfa a un producto subdirecto de un número finito de álgebra subdirectamente irreducibles finitas.*

Corolario 1.1.6. *Toda variedad está determinada por sus miembros subdirectamente irreducibles.*

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y sólo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir id_A y $A \times A$. Además, un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple si es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.

Una caracterización de las variedades semisimples es la siguiente:

Teorema 1.1.7. *Una variedad $\mathbf{V}$ es semisimple si, y sólo si, cada miembro de $\mathbf{V}$ subdirectamente irreducible es simple.*

Propiedad de extensión de congruencias

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de extensión de congruencias (PEC), si para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ y toda $\theta \in Con(\mathcal{B})$ existe $\Phi \in Con(\mathcal{A})$ tal que $\theta = \Phi \cap (\mathcal{B} \times \mathcal{B})$.

Una clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ de álgebras tiene la PEC, si toda álgebra de $\mathcal{K}$ la tiene.

Congruencias finitamente generadas

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, con $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denotaremos la congruencia generada por $\{(a_i, a_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$, es decir, la menor congruencia tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en la misma clase de equivalencia. Llamaremos congruencia principal a $\Theta(a_1, a_2)$ y notaremos con $Con_P(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias principales de A.

Propiedad de congruencias principales definibles ecuacionalmente

Una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ tiene la propiedad de congruencias principales definibles ecuacionalmente (PCPDE) si existe un número finito de pares $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ de polinomios en cuatro variables tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ y cualesquiera sean $a, b, c, d \in A$, $(c, d) \in \theta(a, b)$ si, y sólo si, $p_i(a, b, c, d) = q_i(a, b, c, d)$ para cada i, $1 \leq i \leq n$.

Congruencias factores

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, $\theta \in Con(\mathcal{A})$ es una congruencia factor si existe $\theta^* \in Con(\mathcal{A})$ tal que:

(i) $\theta \cap \theta^* = id_A$,

(ii) $\theta \vee \theta^* = A \times A$,

(iii) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$.

El par θ, θ^* se denomina par de congruencias factores. Entonces se verifica que:

$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\theta^*$,

donde el isomorfismo esta dado por $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_{\theta^*})$.

Algebras directamente indescomponibles

Un álgebra $\mathcal{A}$ es directamente indescomponible si $\mathcal{A}$ no es isomorfa al producto directo de dos álgebras no triviales.

Las congruencias factores de un álgebra $\mathcal{A}$ permiten caracterizar a las álgebras directamente indescomponibles, del siguiente modo:

Teorema 1.1.8. *Un álgebra $\mathcal{A}$ es directamente indescomponible si, y sólo si, las únicas congruencias factores de $\mathcal{A}$ son id_A y $A \times A$.*

Además, se verifican

Teorema 1.1.9. *Un álgebra subdirectamente irreducible es directamente indescomponible.*

Unos de los temas importantes del álgebra universal es el estudio de ciertas propiedades de las congruencias de un álgebra. En particular, la que presentamos a continuación.

Algebras a congruencias–distributivas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias–distributivas si $Con(\mathcal{A})$ es un retículo distributivo.

Una clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ de álgebras es a congruencias–distributivas si, y sólo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias–distributivas.

Un resultado interesante que vincula propiedades de las congruencias, debido a W. L. Blok y D. Pigozzi ([8]), es el siguiente:

Teorema 1.1.10. ([8]) Toda variedad con la PCPDE es a congruencia distributiva y tiene la PEC.

Además, se verifica que

Teorema 1.1.11. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad a congruencias–distributivas tal que todo miembro directamente indescomponible de $\mathcal{V}$ es subdirectamente irreducible, entonces $\mathcal{V}$ es semisimple.*

Algebras a congruencias conmutativas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias conmutativas si se verifica $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$, para toda θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathcal{A})$. Una clase $\mathbf{\mathcal{K}}$ de álgebras es a congruencias conmutativas si, y sólo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias conmutativas.

Las congruencias conmutativas de un álgebra $\mathcal{A}$ pueden ser caracterizadas de la siguiente manera:

Teorema 1.1.12. *Si $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$,

(ii) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$,

(iii) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

Algebras a congruencias regulares

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a congruencias regulares si para toda θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathcal{A})$ se verifica que $[a]_{\theta_1} = [a]_{\theta_2}$, para algún $a \in A$, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

Una clase $\mathbf{\mathcal{K}}$ de álgebras es a congruencias regulares si, y sólo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias regulares.

Álgebras a congruencias uniformes

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias uniformes* o *normales*, si para toda $\theta \in Con(\mathcal{A})$ y para todo $a, b \in A$ se verifica que $|[a]_\theta| = |[b]_\theta|$, donde $|X|$ denota el número de elementos de X.

Una clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ de álgebras es a congruencias normales, si toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias normales.

Variedades aritméticas

Una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es aritmética si es a congruencias distributivas y conmutativas.

1.1.5. Algebras libres

Unos de los conceptos más útiles en álgebra universal es el de álgebra libre. Dada una clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ de álgebras y un conjunto X, a veces es muy conveniente conocer cual es el álgebra de $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ más general generada por X. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ es la clase de semigrupos y $X = \{x\}$, entonces hay muchos semigrupos generados por X. El más simple es $\langle X, \cdot \rangle$, donde $x \cdot x = x$; y el más general es $\langle Y, \cdot \rangle$, donde $Y = \{x, x^2, \ldots, x^n, \cdots\}$ y $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$. El motivo por el cual decimos que el segundo semigrupo es más general, se debe al hecho que todo semigrupo generado por un elemento es una imagen homomorfica de $\langle Y, \cdot \rangle$. A tales álgebras se las denomina libres y la definición de ellas, debida a G. Birkhoff, es la siguiente:

Definición 1.1.13. ([7]) *Sea $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ una clase de álgebras similares y $\boldsymbol{\mathcal{L}} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$. $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es un álgebra que tiene a G como conjunto de generadores libres, si se verifican las siguientes condiciones:*

(L1) *$[G] = L$, donde $[X]$ denota la subálgebra generada por X.*

(L2) *para cada álgebra* $\mathcal{B} \in \mathbf{\mathcal{K}}$ *y cada función* $f : G \longrightarrow B$ *existe un homomorfismo* $h : L \longrightarrow B$ *que extiende a* f*, esto es se verifica* $h(g) = f(g)$*, para todo* $g \in G$*.*

Las dos siguientes observaciones son muy importantes:

- El homomorfismo h de (L2) es único.
- Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de $\mathbf{\mathcal{K}}$ con un conjunto G' de generadores libres tal que existe una biyección de G en G', entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$ son álgebras isomorfas.

1.2. Tópicos sobre cálculos proposicionales

1.2.1. Lenguajes formalizados de orden cero

Llamaremos *alfabeto* de un lenguaje formalizado de orden cero a cualquier sistema $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ donde

(1) X, L_0, L_1, L_2, U son conjuntos disjuntos,

(2) X es un conjunto numerable,

(3) los conjuntos L_0, L_1 son finitos (posiblemente vacíos),

(4) el conjunto L_2 es finito y siempre contiene un elemento llamado signo de implicación, que notaremos $\Rightarrow$.

Los elementos del conjunto X se denominan *variables proposicionales* y los notaremos con $p, q, r, \ldots$ o con índices si fuera necesario. Los elementos de los conjuntos L_0, L_1 y L_2 los llamaremos *constantes proposicionales, conectivos proposicionales unarios y conectivos proposicionales binarios*, respectivamente. Los elementos de U son símbolos auxiliares y asumiremos siempre que U contiene dos elementos que notaremos (,).

Los *símbolos del alfabeto* A^0 son los elementos del conjunto $X \cup L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup U$.

El conjunto $For[X]$ de todas las fórmulas sobre el alfabeto A^0, es el menor conjunto de sucesiones finitas de símbolos de A^0, tal que

(f1) $X \subseteq For[X]$,

(f2) $L_0 \subseteq For[X]$,

(f3) $\alpha \in For[X]$, $* \in L_1$ implica $*\alpha \in For[X]$,

(f4) $\alpha, \beta \in For[X]$, $\circ \in L_2$ implica $(\alpha \circ \beta) \in For[X]$,

(f5) los únicos elementos de $For[X]$ son los obtenidos por (f1), (f2), (f3) y (f4).

Llamaremos *lenguaje formalizado implicativo de orden cero*, o simplemente *lenguaje formalizado de orden cero* al par ordenado $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$, donde A^0 es un alfabeto de un lenguaje formalizado de orden cero y $For[X]$ es el conjunto de todas las fórmulas sobre A^0.

Diremos que dos *lenguajes formalizados de orden cero* $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ y $\mathfrak{L}' = (A^{0'}, For'[X])$, donde $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ y $A^{0'} = (X', L_0', L_1', L_2', U)$ son *similares* si $L_i = L_i'$, para $0 \leq i \leq 2$.

Por otra parte, dados dos lenguajes $\mathfrak{L}'$ y $\mathfrak{L}$ diremos que $\mathfrak{L}'$ es una *extensión* de $\mathfrak{L}$ si $X \subseteq X'$ y $L_i \subseteq L_i'$, para $0 \leq i \leq 2$.

De las definiciones anteriores concluimos que

Si $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}'$ son lenguajes formalizados similares de orden cero, entonces $\mathfrak{L}'$ es una extensión de de $\mathfrak{L}$ si, y sólo si, $X \subseteq X'$.

1.2.2. El álgebra de las fórmulas

En lo que sigue presentaremos a los lenguajes formalizados de orden cero desde un punto de vista algebraico.

Sea $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ un alfabeto de un lenguaje formalizado de orden cero, donde $L_0 = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $L_1 = \{*^1, \ldots, *^s\}$, $L_2 = \{\Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t\}$, con $m, s, t \in I\!N$ y sea $For[X]$ el conjunto de todas las fórmulas sobre A^0.

Ahora algebrizaremos a $For[X]$ tomando como operaciones sobre este conjunto a $L_0 \cup L_1 \cup L_2$ es decir:

(i) Elegimos como operaciones 0–arias de $For[X]$ a los símbolos de operaciones 0–arias $e_1, \ldots, e_m$. Esto es posible, pues por (f2) estos objetos están en $For[X]$.

(ii) Si $f \in L_1 \cup L_2$, entonces podemos considerar la correspondencia $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \longrightarrow f((\alpha_1, \ldots, \alpha_k))$, $1 \leq k \leq 2$. Por (f3) y (f4) tenemos que $f : For[X]^k \longrightarrow For[X]$ es una operación $k-$aria sobre $For[X]$.

Entonces el álgebra $\mathfrak{For}[X] = \langle For[X], \Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t *^1, \ldots, *^s, e_1, \ldots, e_m\rangle$ se denomina el *álgebra de las fórmulas del lenguaje formalizado* $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$. Además, $\mathfrak{For}[X]$ es un álgebra libre dentro de la clase de todas las álgebras similares y el conjunto X de todas las variables proposicionales en $\mathfrak{L}$ es el conjunto de generadores libres de $\mathfrak{For}[X]$.

1.2.3. Sustituciones y valuaciones

Llamaremos *sustitución* de un lenguaje formalizado de orden cero $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ en otro similar $\mathfrak{L}' = (A^{0'}, For'[X])$, a toda función $\rho : X \longrightarrow For'[X]$. Como X es un conjunto de generadores libres de $\mathfrak{For}[X]$ para cada sustitución ρ existe un único homomorfismo $\overline{\rho} : \mathfrak{For}[X] \longrightarrow \mathfrak{For}'[X]$ que extiende a ρ.

Sea $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ donde $A^0 = (X, L_0, L_1, L_2, U)$ y $L_0 = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $L_1 = \{*^1, \ldots, *^s\}, L_2 = \{\Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t\}$, $m, s, t \in I\!N$. Llamaremos *álgebra asociada al lenguaje* $\mathfrak{L}$ a un álgebra $\mathfrak{A} = \langle A, \bigvee_{\mathfrak{A}}, \rightarrow, o_1, \ldots, o_t, \star^1, \ldots, \star^s, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m\rangle$ si el álgebra $\mathfrak{A}^0 = \langle A, \rightarrow, o_1, \ldots, o_t, \star^1, \ldots, \star^s, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m\rangle$ es similar al álgebra de las fórmulas $\mathfrak{For}[X]$ del lenguaje

$\mathfrak{L}$ y $\bigvee_{\mathfrak{A}}$ es una operación 0-aria en $\mathfrak{A}$. En lo que sigue, para simplificar la notación, escribiremos $\bigvee$ en lugar de $\bigvee_{\mathfrak{A}}$ y notaremos con los mismos símbolos a las operaciones en las álgebras asociadas a $\mathfrak{L}$ que en el álgebra $\mathfrak{F}or[X]$.

Una *valuación* de $\mathfrak{L}$ en un álgebra $\mathfrak{A}$ asociada con $\mathfrak{L}$ es cualquier función de $v : X \longrightarrow A$. Como X es un conjunto de generadores libres de $\mathfrak{F}or[X]$, la aplicación v puede ser extendida de manera única a un homomorfismo $v_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{F}or[X] \longrightarrow \mathfrak{A}^0$.

Sea $\approx$ una relación de congruencia en el álgebra $\mathfrak{F}or[X]$. Entonces podemos considerar el álgebra cociente $\mathfrak{F}or[X]/\approx$. Luego, el álgebra $\mathfrak{F}or[X]/\approx(\bigvee) = (\mathfrak{F}or[X]/\approx, \bigvee)$ donde $\bigvee$ es un elemento distinguido en $\mathfrak{F}or[X]/\approx$. Como $\mathfrak{F}or[X]/\approx(\bigvee)$ es un álgebra asociada a $\mathfrak{L}$, entonces podemos considerar la valuación $v^0 : X \longrightarrow \mathfrak{F}or[X]/\approx(\bigvee)$ definida por $v^0(p) = [p]$ que se denomina *valuación canónica.*

1.2.4. Operadores de consecuencia

Sea $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ un lenguaje formalizado de orden cero y $\mathcal{P}(For[X])$ el conjunto de las partes de $For[X]$. Diremos que una función $C_{\mathfrak{L}} : \mathcal{P}(For[X]) \longrightarrow \mathcal{P}(For[X])$ es un operador de consecuencia sobre $\mathfrak{L}$ si para todo $A, B \in \mathcal{P}(For[X])$ se verifican las siguientes condiciones:

(C1) $A \subseteq C_{\mathfrak{L}}(A)$,

(C2) $A \subseteq B$ implica $C_{\mathfrak{L}}(A) \subseteq C_{\mathfrak{L}}(B)$,

(C3) $C_{\mathfrak{L}}(C_{\mathfrak{L}}(A)) = C_{\mathfrak{L}}(A)$.

En lo que sigue y cuando no haya dudas sobre el lenguaje $\mathfrak{L}$ considerado, escribiremos C en lugar de $C_{\mathfrak{L}}$.

Un *operador de consecuencia* C sobre $\mathfrak{L} = (A^0, For[X])$ puede ser definido del siguiente modo.

Elegimos

(i) un subconjunto fijo $\mathcal{A}$ de $For[X]$ que llamaremos el conjunto de los *axiomas lógicos*,

(ii) un conjunto fijo $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de *reglas de inferencia*. Más precisamente, una regla de inferencia es cualquier función $r : P \longrightarrow For[X]$ donde $P \subseteq (For[X])^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in P$ y $\beta = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, diremos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las premisas y β es la conclusión de esas premisas por medio de la regla r. Usualmente escribiremos

$$r : \frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

en lugar de $\beta = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Sea $H \subseteq For[X]$. Diremos que una *demostración formal* de una fórmula α, a partir del conjunto H de hipótesis, con respecto a un conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas y un conjunto $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de reglas de inferencia es la $n-$upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (For[X])^n$ tal que

(p_1) $\alpha_1 \in \mathcal{A} \cup H$,

(p_2) para todo i, $1 < i \leq n$, $\alpha_i \in \mathcal{A} \cup H$ o α_i es la conclusión de alguna de las fórmulas anteriores $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$, por medio de una de las reglas de inferencia r_j, $j = 1, \ldots, k$,

(p_3) $\alpha_n = \alpha$.

Luego, dada $\alpha \in For[X]$ si existe una demostración formal de α a partir de las hipótesis H, los axiomas $\mathcal{A}$ y las reglas $r_1, \ldots, r_k$ escribimos $H \vdash \alpha$. En particular, si $H = \emptyset$, escribiremos $\vdash \alpha$. Entonces, es fácil probar que la aplicación

$$C : \mathcal{P}(For[X]) \longrightarrow \mathcal{P}(For[X])$$

definida por $C(H) = \{\alpha \in For[X] : H \vdash \alpha\}$, para todo $H \subseteq For[X]$, es un operador de consecuencia sobre $\mathfrak{L}$.

1.2.5. Cálculos proposicionales extensionales implicativos standard

Sea $\mathcal{L} = (A^0, For[X])$ un lenguaje formalizado de orden cero y $C_{\mathcal{L}}$ el operador de consecuencia en $\mathcal{L}$ determinado por un conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas y por un conjunto $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de reglas de inferencia. Entonces al sistema $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ lo llamaremos *un cálculo proposicional* y a $C_{\mathcal{L}}(\emptyset)$ el *conjunto de todas las fórmulas derivables en* $\mathcal{L}$ es decir, $\alpha \in C_{\mathcal{L}}(\emptyset)$ si, y sólo si, $\vdash \alpha$.

Designaremos con $\mathbf{S}$ a la clase de los cálculos proposicionales extensionales implicativos standard, que definimos como sigue: un sistema $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ donde $C_{\mathcal{L}}$ está determinado por un conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas y por un conjunto $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de reglas de inferencia, pertenece a $\mathbf{S}$ si verifica las siguientes condiciones:

(s$_1$) $\mathcal{A}$ es cerrado por sustituciones. Es decir, para toda sustitución $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ si $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $\rho(\alpha) \in \mathcal{A}$,

(s$_2$) las reglas de inferencia r_i, $1 \leq i \leq k$, son invariantes bajo sustituciones, es decir, si la regla r_i, $1 \leq i \leq k$ asigna a las premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ la conclusión β, entonces para toda sustitución ρ la misma regla asigna a las fórmulas $\rho(\alpha_1), \ldots, \rho(\alpha_n)$ la conclusión $\rho(\beta)$,

(s$_3$) para cada $\alpha \in For[X]$, $\alpha \Rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{L}}(\emptyset)$,

(s$_4$) dadas α, $\beta \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, si α, $\alpha \Rightarrow \beta \in C_{\mathcal{L}}(H)$, entonces $\beta \in C_{\mathcal{L}}(H)$,

(s$_5$) dadas $\alpha, \beta, \gamma \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, si $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \gamma \in C_{\mathcal{L}}(H)$, entonces $\alpha \Rightarrow \gamma \in C_{\mathcal{L}}(H)$,

(s$_6$) dada $\alpha \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, la condición $\alpha \in C_{\mathcal{L}}(H)$ implica que para toda $\beta \in For[X]$, $\beta \Rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{L}}(H)$, (s$_7$) dadas $\alpha, \beta \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, las condiciones $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{L}}(H)$ implican que para cada conectivo unario $\circ$ de $\mathfrak{L}$, $\circ\,\alpha \Rightarrow \circ\,\beta \in C_{\mathfrak{L}}(H)$,

(s$_8$) dadas $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in For[X]$ y $H \subseteq For[X]$, si $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$, $\gamma \Rightarrow \delta$, $\delta \Rightarrow \gamma \in C_{\mathfrak{L}}(H)$, entonces para cada conectivo binario $\circ$ de $\mathfrak{L}$, $(\alpha \circ \gamma) \Rightarrow (\beta \circ \delta) \in C_{\mathfrak{L}}(H)$.

Un sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ del cálculo proposicional **S** es *consistente* si existe $\alpha \in For[X]$ tal que $\alpha \notin C_{\mathfrak{L}}(\emptyset)$.

1.2.6. $\mathcal{S}$-álgebras

Cualquier sistema $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ del cálculo proposicional **S** determina una clase de álgebras llamadas $\mathcal{S}-$*álgebras* del siguiente modo:

Un álgebra $\mathfrak{A} = \langle A, \bigvee, \Rightarrow, o_1, \ldots, o_t, o^1, \ldots, o^s, \mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_{m-1}\rangle$ asociada con el lenguaje formalizado $\mathfrak{L}$ es una $\mathcal{S}-$*álgebra* si verifica las siguientes condiciones:

(a$_1$) si $\mathcal{A}_l$ es el conjunto de axiomas lógicos de $\mathcal{S}$ y $\alpha \in \mathcal{A}_l$, entonces $v(\alpha) = \bigvee$ para toda valuación v de $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{A}$,

(a$_2$) si una regla de inferencia r en $\mathcal{S}$ asigna a las premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ la conclusión β, entonces para toda valuación v, la condición $v(\alpha_1) = \ldots = v(\alpha_n) = \bigvee$ implica $v(\beta) = \bigvee$,

(a$_3$) para todo $a, b, c \in A$, si $a \Rightarrow b = \bigvee$ y $b \Rightarrow c = \bigvee$, entonces $a \Rightarrow c = \bigvee$,

(a$_4$) para todo $a, b \in A$, si $a \Rightarrow b = \bigvee$ y $b \Rightarrow a = \bigvee$, entonces $a = b$.

Observemos que de (a$_1$) y (a$_2$) se deduce que:

Si α es una fórmula derivable en $\mathcal{S}$, entonces $v(\alpha) = \bigvee$ para toda valuación v de $\mathfrak{L}$ en toda $\mathcal{S}-$álgebra $\mathfrak{A}$.

Sea $\mathfrak{For}[X] = \langle For[X], \Rightarrow, \circ_1, \ldots, \circ_t *^1, \ldots, *^s, e_1, \ldots, e_m \rangle \quad t, s, m \in I\!N$ el álgebra de las fórmulas de un lenguaje formalizado de orden cero $\mathcal{L} = (A^0, For[X])$, y sea $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ un cálculo proposicional de **S**. Entonces, es simple verificar que la relación binaria $\leq$ definida en $For[X]$ por:

$$\alpha \leq \beta \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta,$$

es un pre-orden. Por otra parte, la siguiente relación:

$$\alpha \approx \beta \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ y } \vdash \beta \Rightarrow \alpha \text{ en } \mathcal{S},$$

es una congruencia en el álgebra $\mathfrak{For}[X]$. Más aún, $(For[X]/\approx, \leq)$ es un conjunto ordenado donde

$$|\alpha| \leq |\beta| \text{ si, y sólo si, } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ en } \mathcal{S}.$$

Por otra parte, de lo expuesto anteriormente se concluye que cualquier par de fórmulas derivables en $\mathcal{S}$ determinan la misma clase de equivalencia la cual será denotada con $\bigvee$. Esto es,

$$\bigvee = |\alpha| \text{ si, y sólo si, } \alpha \text{ es derivable en } \mathcal{S}.$$

Para cualquier sistema $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ del cálculo proposicional **S**, llamaremos *álgebra del sistema* $\mathcal{S}$ al álgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{S}) = \langle For[X]/\approx, \bigvee, \Rightarrow, o_1, \ldots, o_t, o^1, \ldots, o^s, |\mathrm{e}_0|, \ldots, |\mathrm{e}_{m-1}| \rangle$ tal que $\langle For[X]/\approx, \Rightarrow, o_1, \ldots, o_t, o^1, \ldots, o^s, |\mathrm{e}|_0, \ldots, |\mathrm{e}|_{\mathrm{m}-1} \rangle$ es el álgebra cociente $\mathfrak{For}[X]/\approx$ y $\bigvee$ es la clase de las fórmulas derivables de $\mathcal{S}$.

Además, para todo sistema $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ en **S** se verifica que el álgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ es una $\mathcal{S}-$álgebra. Más aún, $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ es no trivial si, y sólo si, el sistema $\mathcal{S}$ es consistente.

1.2.7. Teorema de completitud

Antes de enunciar el mencionado teorema debemos introducir las siguientes nociones.

Sea $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ un sistema consistente en la clase $\mathbf{S}$. Diremos que una fórmula α de $\mathfrak{L}$ es:

(i) *válida en un álgebra* $\mathfrak{A}$ *asociada con* $\mathfrak{L}$ si $v_{\mathfrak{A}}(\alpha) = \bigvee$ para toda valuación v de $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{A}$,

(ii) $\mathcal{S}$-*válida* si es válida en toda $\mathcal{S}$-álgebra.

Entonces tenemos que:

Para toda fórmula α *de un sistema consistente* $\mathcal{S} = (\mathfrak{L}, C_{\mathfrak{L}})$ *en* $\mathbf{S}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) α *es derivable en* $\mathcal{S}$*,*

(ii) α *es* $\mathcal{S}$*-válida,*

(iii) ${v^0}_{\mathfrak{A}(\mathcal{S})}(\alpha) = \bigvee$*, donde* v^0 *es la valuación canónica en el álgebra* $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ *del sistema* $\mathcal{S}$*,*

(iv) $|\alpha| = \bigvee$ *en el álgebra* $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ *del sistema* $\mathcal{S}$*.*

La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) indicadas arriba se conoce habitualmente con el nombre de *Teorema de completitud.*

1.3. Localización en los retículos distributivos

Esta sección esta organizada en dos subsecciones y en ellas repasaremos las nociones de localización en los retículos distributivos y la de retículo maximal de fracciones.

1.3.1. $\mathcal{F}$–multiplicadores y localización en los retículos distributivos

El concepto de multiplicador para retículos distributivos fue definido por W. H. Cornish en [29]. Posteriormente, J. Smchid ([70]) usó los multiplicadores con el propósito de dar una construcción no standard de los retículos maximales de cocientes para un retículo distributivo ([71]).

Por otra parte, la noción de topología para los retículos distributivos acotados que indicaremos a continuación fue introducida por G. Georgescu en [35] de manera similar a la dada para anillos ([46, 60, 80]) o monoides ([79]).

Definición 1.3.1. *Sea L un retículo distributivo acotado y $\mathcal{F}$ un conjunto no vacío de ideales de L. $\mathcal{F}$ es una topología para L si se verifican las siguientes condiciones:*

(T1) *$I \in \mathcal{F}$ y $x \in L$, implican que $(I : x) = \{I \in L : y \wedge x \in I\} \in \mathcal{F}$,*

(T2) *para todo par I_1, I_2 de ideales de L, si $I_2 \in \mathcal{F}$ e $(I_1 : x) \in \mathcal{F}$ para todo $x \in I_2$, entonces $I_1 \in \mathcal{F}$.*

Notaremos con $Id(L)$ al conjunto de todos los ideales del retículo L.

A continuación daremos algunos ejemplos de topologías sobre un retículo L:

(a) Si I es un ideal de L, entonces el conjunto $\mathcal{F}(I) = \{J \in Id(L) : I \subseteq J\}$ es una topología para L.

(b) Sea S un subconjunto no vacío de L, entonces diremos que S es regular ([29]) si para todo $x, y \in L$ y para todo $t \in S$ se verifica la siguiente condición:

$$x \wedge t = y \wedge t \text{ implica } x = y.$$

El conjunto $\mathcal{S}$ de los regulares de L es una topología para L.

(c) Un ideal I de L es denso, si $x \wedge t = 0$ implica $x = 0$, para todo $x \in L$ y para todo $t \in I$. El conjunto $\mathcal{D}$ de todos los ideales densos de L es una topología para L.

(d) Un subconjunto S de L se dice $\wedge$–cerrado si $1 \in S$ y, si $x, y \in S$ implica $x \wedge y \in S$. Para cada subconjunto $\wedge$–cerrado S de L el conjunto $\mathcal{F}_S = \{I \in Id(L) : I \cap S \neq \emptyset\}$ es una topología para L.

(e) Sea θ una congruencia de L y $\mathcal{F}_\theta$ el conjunto de ideales de L tales que para todo $x, y, t \in L$ verifican la siguiente propiedad:

$$\text{si } t \in I \text{ es tal que } (x \wedge t, y \wedge t) \in \theta, \text{ entonces } (x, y) \in \theta.$$

Entonces $\mathcal{F}_\theta$ es una topología para L. Observemos que si θ es la congruencia identidad, entonces $\mathcal{F}_\theta$ es la topología de los ideales regulares de L.

(f) Parar todo anillo conmutativo R, sea LR el retículo distributivo de los conjuntos abiertos y compactos del espectro primo de R y sea $\lambda : R \to LR$ la reticulación de R (i.e. la transformación canónica construida en [78, p. 173]). Entonces esta aplicación verifica las siguientes propiedades ([78, p. 173], [43, p. 192]):

(i) $\lambda(0) = 0$,

(ii) $\lambda(1) = 1$,

(iii) $\lambda(r.s) = \lambda(r) \wedge \lambda(s)$,

(iv) $\lambda(r + s) \leq \lambda(r) \vee \lambda(s)$.

Si $\mathbf{a}$ es un ideal del anillo R, notaremos con $\Gamma(\mathbf{a})$ al ideal del retículo LR generado por $\lambda(\mathbf{a})$.

Luego se verifica que

Proposición 1.3.2. [35, Proposition 1.3] *Sea R un anillo conmutativo y sea $\mathcal{F}$ la topología de Gabriel* ([80]) *para R. Entonces $\mathcal{F}^\Gamma = \{\Gamma(\mathbf{a}) \in Id(LR) : \mathbf{a} \in \mathcal{F}\}$ es una topología para el retículo LR.*

Por otra parte, G. Georgescu ([35]), teniendo en cuenta el concepto de topología para retículos distributivos acotados, definió a los multiplicadores de la siguiente manera.

Sea L un retículo distributivo acotado, $\mathcal{F}$ una topología para L y $\theta = \theta_{\mathcal{F}}$ la relación de congruencia definida por:

$(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}}$ si, y sólo si, existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $x \wedge t = y \wedge y$, para todo $t \in I$.

Definición 1.3.3. *Sea L un retículo distributivo acotado y $\mathcal{F}$ una topología para L. Un $\mathcal{F}$–multiplicador es una función $f : I \to L/\theta$ con $I \in \mathcal{F}$ si verifica la siguiente condición:*

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge [y]_{\theta_{\mathcal{F}}}$ *para todo $x \in I$, $y \in L$.*

Es claro que, $\mathbf{0}, \mathbf{1} : L \to L/\theta_{\mathcal{F}}$ definidas por $\mathbf{0}(x) = [0]_{\theta_{\mathcal{F}}}$ y $\mathbf{1}(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}}$ para todo $x \in L$ son $\mathcal{F}$–multiplicadores.

Proposición 1.3.4. ([35]) *Para todo $\mathcal{F}$–multiplicador, $f : I \to L/\theta$, se verifican las siguiente propiedades:*

(i) *$x, y \in I$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$.*

(ii) *$f(x) \leq [x]_{\theta_{\mathcal{F}}}$.*

(iii) *$f(0) = 0$.*

(iv) *$f(I)$ e $I/\theta = \{[x]_{\theta_{\mathcal{F}}} : x \in I\}$ son ideales de L/θ, y $f(I) \subseteq I/\theta$.*

(v) *$[x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \cap f(I)$ es un ideal principal de L/θ para todo $x \in I$.*

Notaremos con $M(I, L/\theta)$ al conjunto de todos los $\mathcal{F}$–multiplicadores cuyo dominio es I.

Si $I, J \in \mathcal{F}$ e $I \subseteq J$ tenemos una transformación canónica

$$\delta_{I,J} : M(J, L/\theta_{\mathcal{F}}) \to M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$$

definida por $\delta_{I,J}(f) = f\mid_I$ para todo $f \in M(J, L/\theta_{\mathcal{F}})$.

En [35], el autor consideró el sistema directo de conjuntos

$$\langle \{M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})\}_{I\in\mathcal{F}}, \{\delta_{J,I}\}\rangle$$

e indicó con $L_{\mathcal{F}}$ al límite inductivo (en la categoría de conjunto):

$$L_{\mathcal{F}} = \varinjlim_{I\in\mathcal{F}} M(I, L/\theta_{\mathcal{F}}).$$

Además, para cada $\mathcal{F}$–multiplicador $f : I \to L/\theta_{\mathcal{F}}$, denotó con $\widehat{(I,f)}$ a la clase de congruencia de f en $L_{\mathcal{F}}$.

Si $f_i \in M(I_i, L/\theta_{\mathcal{F}})$, $i = 1, 2$ son dos $\mathcal{F}$–multiplicadores, entonces las funciones

$$f_1 \wedge f_2,\ f_1 \vee f_2 : I_1 \cap I_2 \to L/\theta_{\mathcal{F}}$$

definidas por

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x),$$

$$(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x),$$

para todo $x \in I_1 \cap I_2$, son multiplicadores. Es decir, $f_1 \wedge f_2,\ f_1 \vee f_2 \in M(I_1 \cap I_2, L/\theta_{\mathcal{F}})$. Luego, en $L_{\mathcal{F}}$ quedan definidas las siguiente operaciones:

$$\widehat{(I_1, f_1)} \wedge \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \wedge f_2),$$

$$\widehat{(I_1, f_1)} \vee \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \vee f_2),$$

y denotando con $\widehat{\mathbf{0}}$ y $\widehat{\mathbf{1}}$ a $\widehat{(L, \mathbf{0})}$ y $\widehat{(L, \mathbf{1})}$ respectivamente, se tiene que

Proposición 1.3.5. ([35]) $\langle L_{\mathcal{F}}, \wedge, \vee, \widehat{\mathbf{0}}, \widehat{\mathbf{1}}\rangle$ *es un retículo distributivo acotado.*

$L_{\mathcal{F}}$ se llama *el retículo de localización* de L con respecto a la topología $\mathcal{F}$.

1.3.2. Retículo de fracciones

En [17], dado un retículo distributivo acotado L para cada subconjunto $\wedge$–cerrado S de L se consideró la relación $\sim_S$ definida sobre L de la siguiente manera:

$$x \sim_S y \Longleftrightarrow \text{existe } s \in S \text{ tal que } x \wedge s = y \wedge s.$$

Entonces $\sim_S$ es una congruencia sobre L y a $L_S = L/\sim_S$ se denomina *el retículo de fracciones* de L con respecto a S.

Posteriormente, G. Georgescu en [35] obtuvo los siguientes resultados.

Proposición 1.3.6. *Si $\mathcal{F}_S$ es la topología asociada a un subconjunto $\wedge$–cerrado S de un retículo L, entonces los retículos L_S y $L_{\mathcal{F}_S}$ son isomorfos.*

Para la demostración de este resultado el autor consideró la función

$$\alpha : L_{\mathcal{F}_S} = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_S} M(I, L_S) \to L_S \text{ definida por } \alpha(\widehat{(I, f)}) = f(s), \text{ donde } s \in I \cap S.$$

Por otra parte dado un retículo distributivo acotado L, para cada $x \in L$ la función

$$f_x : L \to L/\theta, \text{ definida por } f_x(y) = [x \wedge y]_\theta \text{ para cada } y \in I,$$

es un $\mathcal{F}$–multiplicador. A partir de este resultado, la función

$$v_{\mathcal{F}} : L \to L_{\mathcal{F}}, \text{ definida por } v_{\mathcal{F}}(x) = \widehat{(L, f_x)} \text{ para cada } x \in L,$$

es un homomorfismo de retículos distributivos acotados y $v_{\mathcal{F}}(L)$ es un subconjuto regular de $L_{\mathcal{F}}$. Además se puede probar que

Proposición 1.3.7. *Sean L un retículo distributivo acotado e I un ideal de L. Si $\mathcal{F}$ es la topología $\mathcal{F}(I) = \{J \in Id(L) : I \subseteq J\}$, entonces*

(i) *$L_{\mathcal{F}} \simeq M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ y $v_{\mathcal{F}}(x) = (I, f_x |_I)$ para todo $x \in L$,*

(ii) *existe un monomorfismo de retículos acotados* $\varphi : L/\theta_{\mathcal{F}} \to L_{\mathcal{F}}$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "v_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "p_{\mathcal{F}}"'] & L_{\mathcal{F}} \\ L/\theta_{\mathcal{F}} \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.8. *Si* L *es un retículo finito y* $\mathcal{F}$ *una topología arbitraria sobre* L*, entonces* $L_{\mathcal{F}}$ *es isomorfo a* $L/\theta_{\mathcal{F}}$*.*

Por otra parte en [35] se afirma que si $\mathcal{L}$ es la topología de los ideales regulares de L, entonces $\theta_{\mathcal{L}}$ es la congruencia identidad sobre L y $L_{\mathcal{L}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}} M(I, L)$. Además, que $v_{\mathcal{L}}$ es inyectiva y que $L_{\mathcal{L}}$ es el retículo maximal de fracciones $\mathcal{Q}(L)$ de L (ver [70, 71]). De estos resultados y la Proposición 1.3.8, Georgescu concluye el siguiente corolario.

Corolario 1.3.9. *Si* L *es un retículo finito,* $\mathcal{Q}(L)$ *es isomorfo a* L*.*

2. Capítulo II

En este capítulo, comenzamos nuestro estudio de las álgebra de Łukasiewicz m–generalizada de orden n. En primer lugar, teniendo en cuenta que la implicación débil desempeña un papel importante en el estudio de las álgebras de Łukasiewicz de orden n, introducimos una operación de implicación en las álgebra de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n. Como ella generaliza a la de las álgebras de Łukasiewicz de orden n la hemos denominado con el mismo nombre. Luego, consideramos los sistemas deductivos asociados con esta implicación y mostramos que existe un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de un álgebra de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n A y el retículo de todos los los sistemas deductivos de A. Este resultado fue fundamental para caracterizar a las congruencias principales de estas álgebras de manera más simple que la obtenida en [1]. Por otra parte, la implicación débil introducida anteriormente nos permitió definir un elemento de gran importancia en el desarrollo posterior de este trabajo. En particular en este capítulo lo utilizamos para obtener una nueva caracterización de las congruencias principales y hallar el polinomio discriminador ternario para esta variedad. Por último, damos una respuesta del porque en las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden

n no se mantienen las condiciones de los operadores de Moisil.

2.1. Introducción

En 1940, Gr.C. Moisil ([51]) introdujo las álgebras Łukasiewicz de orden 3 y de orden 4 con el propósito de obtener una contrapartida algebraica de las correspondientes lógicas de Łukasiewicz. Un año más tarde, el mismo autor generalizó estas nociones definiendo las *álgebras de Łukasiewicz n–valentes* (o L_n–algebras) (ver también [26, 27, 28, 30, 52, 53, 54, 74, 75, 76]) y las estudió desde el punto de vista algebraico. Por otra parte, en 1969, R. Cignoli en [23] (ver también [22]) las estudió bajo el nombre de *álgebras de Moisil de orden n* e indicó una definición ecuacional de las mismas equivalente a la dada por Moisil.

Definición 2.1.1. *Un álgebra de Łukasiewicz n–valuada, n entero, $n \geq 2$, es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, \{1\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es una M–álgebra y $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ es una familia de operadores unarios sobre L que satisfacen las siguientes condiciones:*

(L1) $s_i(x \vee y) = s_i x \vee s_i y,$

(L2) $s_i x \vee \sim s_i x = 1,$

(L3) $s_i \circ s_j = s_j,$

(L4) $s_i(\sim x) = \sim s_{n-i} x,$

(L5) $s_1 x \leq s_2 x \leq \ldots \leq s_{n-1} x,$

(L6) *si* $s_i x = s_i y$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$, *entonces* $x = y$.

En adelante denotaremos al álgebra de Łukasiewicz n–valuada por su conjunto soporte L o por $(L, \sim, \{s_i\}_{i\in\{1,\cdots,n-1\}})$ en caso que necesitemos especificar los operadores unarios.

Recordemos que, en toda álgebra de Łukasiewicz n–valuada valen las siguientes propiedades:

(L7) $s_i(x \wedge y) = s_i x \wedge s_i y$,

(L8) $s_i x \wedge \sim s_i x = 0$,

(L9) $x \leq y$ si, y sólo si, $s_i x \leq s_i y$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

Además, Cignoli en [23] demostró que se pueden caracterizar a las álgebras de Łukasiewicz n–valuadas mediante $(L3)$, $(L4)$, $(L5)$, $(L7)$, $(L8)$ y $(L9)$ y también, que se verifican las siguientes propiedades:

(L10) $x \leq s_{n-i} x$,

(L11) $s_1 x \leq x$,

(L12) $s_i 1 = 1$ y $s_i 0 = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$,

(L13) $\sim x \vee s_{n-i} x = 1$,

(L14) $x \wedge \sim s_i x \wedge s_{i+1} x \leq y$, $1 \leq i \leq n-1$.

Entonces, de $(L1)$, $(L2)$, $(L3)$, $(L4)$, $(L5)$, $(L10)$ y $(L14)$ se obtiene una nueva caracterización de las álgebras de Łukasiewicz n–valuadas, y en consecuencia quedan definidas por igualdades.

Por otra parte, Moisil en [52] probó el siguiente lema:

Lema 2.1.2. *Sea A un álgebra de Łukasiewicz n–valuada. Entonces, los elementos booleanos de A son los invariantes por los operadores unarios s_i.*

En particular, tenemos que un álgebra de Boole es un álgebra de Łukasiewicz n–valuada definiendo $\sim x$ como el complemento de x y $s_i x = x$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Además, cualquier álgebra de Łukasiewicz 2–valuada es un álgebra de Boole si el complemento de x es $\sim x$.

Es bien sabido que un ejemplo importante de álgebra de Łukasiewicz n–valuada es la cadena de n fracciones racionales $\mathbb{L}_n = \{\frac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\}$ con la estructura natural de retículos y las operaciones unarias $\sim$ y s_i, definidas por las prescripciones $\sim (\frac{j}{n-1}) = 1 - \frac{j}{n-1}$ y $s_i(\frac{j}{n-1}) = 0$ si $i + j < n$ o $s_i(\frac{j}{n-1}) = 1$ en otro caso. La importancia del mismo es consecuencia de la siguiente afirmación demostrada en [24]:

Teorema 2.1.3. *Sea A una L_n–álgebra no trivial. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es subdirectamente irreducible,

(ii) A es simple,

(iii) A es isomorfa a una subálgebra de $\mathbb{L}_n$.

Como la álgebras de Łukasiewicz de orden n tienen un reducto que es un álgebra De Morgan, T. Almada y J. Vaz de Carvalho en [1] las generalizaron considerando álgebras del mismo tipo que tienen un reducto en $\mathcal{K}_{m,0}$. Entonces, introdujeron la variedad $\mathcal{L}_n^m$ de la álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n se define de la siguiente manera:

Definición 2.1.4. *Un álgebra de Łukasiewicz m–generalizada de orden n (o L_n^m–algebra) es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ tal que*

(GL_1) *$\langle L, \vee, \wedge, f, 0, 1\rangle$ un retículo distributivo acotado, donde f es un endomorfismo dual que verifica la igualdad $f^{2m}x = x$, (es decir, $\langle L, \vee, \wedge, N, 0, 1\rangle \in \mathcal{K}_{m,0}$),*

(GL_2) $D_i(x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y) = D_i x \wedge D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y, \ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_3) $D_i x \wedge D_j x = D_j x, \ 1 \leq i \leq j \leq n-1,$

(GL_4) $D_i x \vee f D_i x = 1, \ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_5) $D_i f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x = f D_{n-i} \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x, \ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_6) $D_i D_j x = D_j x, \ 1 \leq i, j \leq n-1,$

(GL_7) $x \vee D_1 x = D_1 x,$

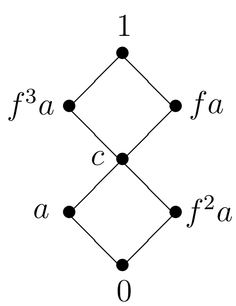
(GL_8) $D_i x = D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x, \ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_9) $(x \wedge fx) \vee y \vee fy = y \vee fy,$

(GL_{10}) $\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x \leq \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y \vee f D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y \vee D_{i+1} \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x, \ 1 \leq i \leq n-2.$

A continuación indicaremos un ejemplo de una L_n^m–álgebra que no es una L_n–álgebra.

Ejemplo 2.1.5. *Consideremos la L_3^2-algebra L determinada en la Figura 1, donde las operaciones f y D_i, $1 \leq i \leq 2$ están definidas de la siguiente manera:*



x	0	a	fa	f^2a	f^3a	c	1
fx	1	fa	f^2a	f^3a	a	c	0
D_1x	0	1	1	1	1	1	1
D_2x	0	0	1	0	1	0	1

Luego $D_1(a \wedge f^2a) = D_1 0 = 0$ y $D_1 a \wedge D_1 f^2 a = 1$. Por lo tanto, $D_i(x \wedge y) \neq D_i x \wedge D_i y$ es decir, L no es una L_3-álgebra.

Observación 2.1.6. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces, $S(L) = \{x \in L : f^2(x) = x\}$ es la mayor subálgebra de L que pertenece a la variedad de las L_n-algebras* ([1, Proposition 2.2]). *Además, esta subálgebra juega un papel fundamental en el estudio de estas álgebras. En particular, a partir de (GL_8) se deduce que en las L_n^m-álgebras las operaciones D_i, $1 \leq i \leq n-1$, están determinadas por sus restricciones sobre $S(L)$.*

2.2. La implicación débil en las L_n^m–álgebras

En esta sección, como lo anunciamos al comienzo del capítulo, introducimos una operación de implicación en las L_n^m–álgebras, llamada implicación débil, que será de gran utilidad para caracterizar a las congruencias de estas álgebras.

Comenzaremos indicando una lista de propiedades válidas en toda L_n^m–álgebra que serán de utilizadas en el resto del trabajo. Cabe señalar que las propiedades GL_{11} a GL_{16} fueron indicadas en [1], pero las hemos incluido para facilitar la lectura.

Proposición 2.2.1. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(GL_{11}) $D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y)$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$. *Luego, si* $x \leq y$, *entonces* $D_i x \leq D_i y$.

(GL_{12}) $f^2(D_i(x)) = D_i(x)$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{13}) $D_i(x) \wedge f(D_i(x)) = 0$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{14}) $f(x) \vee D_1(x) = 1$.

(GL_{15}) $f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \wedge D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) = 0$.

(GL_{16}) $(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \wedge D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) = D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))$.

(GL_{17}) $D_i(1) = 1$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{18}) $D_i(0) = 0$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{19}) $D_1 f D_i x = f D_i x$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{20}) $f D_i x$ *es el complemento booleano de* $D_i x$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{21}) $D_i x \leq D_i y$ *si, y sólo si,* $f D_i x \vee D_i y = 1$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{22}) $D_j(D_i \wedge D_i y) = D_i \wedge D_i y$, *para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$.

(GL_{23}) $D_j f D_i x = f D_i x$, *para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$.

(GL_{24}) $x \wedge f D_1 x = 0$.

(GL_{25}) $(f D_i x \wedge f D_i y) \vee (D_i x \wedge D_i y) = (D_i x \vee f D_i y) \wedge (D_i y \vee f D_i x)$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{26}) $z \in S(A)$ *implica* $D_i(x \wedge z) = D_i x \wedge D_i z$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

Dem.

(GL_{11}) : $D_i(x) \vee D_i(y) = D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \vee D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(y))$ $[GL_8]$

$= D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x) \vee \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(y))$

$= D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1}(f^{2p}(x) \vee f^{2p}(y))$

$= D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1}(f^{2p}(x \vee y)$

$= D_i(x \vee y)$. $[GL_8]$

Por otra parte, si $x \leq y$, entonces $D_i(y) = D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y)$ de donde resulta inmediato que $D_i x \leq D_i y$.

(GL_{12}) :

(1) $D_i x \vee f D_i x = 1$, $[GL_4]$

(2) $fD_ix \wedge f^2D_ix = 0,$ [(1),O_4]

(3) $D_ix \vee (fD_ix \wedge f^2D_ix) = D_ix,$ [(2)]

(4) $D_ix \vee f^2D_ix = D_ix,$ [(3),GL_4]

(5) $f^2D_ix \leq D_ix.$ [(4)]

Por otra parte,

(6) $D_ix = D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) = f^{2m-1}(D_{n-i}(f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x),$ [GL_8,GL_5]

(7) $f^2D_ix = f(D_{n-i}(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x)),$ [GL_5,GL_8]

(8) $D_{n-i}(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) \vee f(D_{n-i}(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x)) = 1.$ [GL_4]

Sea $z = f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x)$, entonces

(9) $f^{2m-1}D_{n-i}z \wedge D_{n-i}z = 0,$ [(8), GL_1,O_4]

(10) $fD_{n-i}z \vee (f^{2m-1}D_{n-i}z \wedge D_{n-i}z) = fD_{n-i}z,$ [(9)]

(11) $(fD_{n-i}z \vee f^{2m-1}D_{n-i}z \wedge (fD_{n-i}z \vee D_{n-i}z) = fD_{n-i}z,$ [(10)]

(12) $fD_{n-i}z \vee f^{2m-1}D_{n-i}z = fD_{n-i}z,$ [(11),GL_4]

(13) $D_ix \leq f^2D_ix.$ [(6),(7),(12)]

(GL_{13}) :

(1) $D_i(x) \vee f(D_i(x)) = 1,$ [GL_4]

(2) $f(D_i(x)) \wedge f(f(D_i(x))) = f(1),$ [(1),O_4]

(3) $f(D_i(x)) \wedge D_i(x) = 0.$ [(2),GL_{12}]

(GL_{14}) :

(1) $D_1(x) \wedge f(D_1(x)) = 0,$ $[GL_{13}]$

(2) $(x \vee D_1(x)) \wedge f(D_1(x)) = 0,$ $[(1), GL_7]$

(3) $(x \wedge f(D_1(x))) \vee (D_1(x) \wedge f(D_1(x))) = 0,$ $[(2)]$

(4) $x \wedge f(D_1(x)) = 0,$ $[(3), GL_{13}]$

(5) $f(x) \vee f^2(D_1(x)) = 1,$ $[(4), O_3]$

(6) $f(x) \vee D_1(x) = 1.$ $[(5), GL_{12}]$

(GL_{15}) :

(1) $f(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))) \vee D_1(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))) = 1,$ $[GL_{14}]$

(2) $\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p+2}(x) \vee (D_1(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))) = 1,$ $[(1), O_4]$

(3) $\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x) \vee f(D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))) = 1,$ $[(2), GL_5]$

(4) $f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \wedge f^2(D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))) = 0,$ $[(3), O_3]$

(5) $f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))) \wedge D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) = 0.$ $[(4), GL_{12}]$

(GL_{16}) :

(1) $f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \leq D_1 f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)),$ $[GL_7]$

(2) $D_1 f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) = f D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)),$ $[GL_5]$

(3) $f^{2m-1} f D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \leq f^{2m-1} f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)),$ $[(1),(2)]$

(4) $D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \leq \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x),$ $[(3), GL_1]$

(5) $D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x)) \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x) = D_{n-1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(x))$. [(4)]

(GL_{17}) :

(1) $D_1(1) = 1 \vee D_1(1) = 1$, [$GL_7$]

(2) $D_i(1) = D_i(D_1(1)) = D_1(1) = 1$, para todo $i, 1 \leq i \leq n-1$. [(1),GL_6]

(GL_{18}) :

(1) $D_i(0) = D_i(f(1))$, [O_2]

(2) $1 = \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(1)$

(3) $D_i(0) = D_i(f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(1)))$ [(1),(2)]

$= f(D_{n-i}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(1)))$ [GL_5]

$= f(D_{n-i}(1))$ [(2)]

$= f(1) = 0$, para todo $i, 1 \leq i \leq n-1$. [GL_{17},O_2]

(GL_{19}) :

(1) $D_i f D_i x = D_1 D_{n-i} f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p} x$ [GL_5,GL_8]

$= D_{n-i} f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p} x$ [GL_6]

$= f D_i x$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. [GL_5,GL_8]

(GL_{20}) :

(1) $D_i x \wedge f D_i x = 0$, [GL_{13}]

(2) $f D_i x \vee D_1 D_i x = 1$, [$GL_{14}$]

(3) $fD_ix \vee D_ix = 1,$ $[(2), GL_6]$

(4) fD_ix es el complemento booleano de D_ix, para todo i, $1 \leq i \leq n-1.$ $[(1),(3)]$

(GL_{21}) : Supongamos que

(1) $D_ix \leq D_iy,$

(2) $D_ix \vee fD_ix \leq D_iy \vee fD_ix,$ $[(1)]$

(3) $D_iy \vee fD_ix = 1$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1.$ $[(2), GL_{20}]$

Recíprocamente, sea ahora

(1) $fD_ix \vee D_iy = 1,$

(2) $fD_ix \vee D_ix = fD_ix \vee D_iy,$ $[(1), GL_{20}]$

(3) $D_ix \wedge (fD_ix \vee D_ix) = D_ix \wedge (fD_ix \vee D_iy),$ $[(2)]$

(4) $D_ix = D_ix \wedge D_iy,$ $[(3), GL_{20}]$

(5) $D_ix \leq D_iy$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1.$ $[(4)]$

(GL_{22}) : $D_j(D_i \wedge D_iy) = D_j(D_i(x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y)) = D_i(x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y)$ $[GL_2, GL_8]$

$= D_ix \wedge D_iy$, para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1.$ $[GL_2]$

(GL_{23}) : $D_jfD_ix = D_j(D_{n-i}(f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) = D_{n-i}(f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x)$ $[GL_5, GL_8]$

$= fD_ix$, para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1.$ $[GL_5]$

(GL_{24}) :

(1) $x \leq D_1x,$ $[GL_7]$

(2) $x \wedge fD_1x \leq D_1x \leq fD_1x = 0,$ [(1),GL_{13}]

(3) $x \wedge fD_1x = 0.$ [(2)]

(GL_{25}) : $(fD_ix \wedge fD_iy) \vee (D_ix \wedge D_iy) = (fD_ix \wedge D_iy) \wedge (fD_ix \wedge D_ix) \wedge (fD_iy \wedge D_iy) \wedge (fD_iy \wedge D_ix)$ [GL_4]

$= (D_ix \vee fD_iy) \wedge (D_iy \vee fD_ix)$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{26}): Sea $z \in S(L)$, entonces por GL_2 tenemos que $D_i(x \wedge z) = D_i(x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}z)$
$= D_ix \wedge D_iz$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. □

Definición 2.2.2. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y sea F un filtro de A. Diremos que F es un g-filtro si para todo $x \in F$ existe $b \in F \cap S(A)$ tal que $b \leq x$.*

Denotaremos por $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{F}_g(L)$ al conjunto de todos los filtros y de todos los g-filtros de A respectivamente, ambos ordenados por inclusión.

Proposición 2.2.3. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces existe un isomorfismo de orden entre $\mathcal{F}_g(A)$ y $\mathcal{F}(S(A))$ determinado por las correspondencias $F \longmapsto F \cap S(A) = G$ y $G \longmapsto G^* = \{x \in A : b \leq x \ \text{ para } \ b \in G\}$, que son inversas entre sí.*

Dem. Supongamos que $G \in \mathcal{F}(S(A))$ y sean $x, y \in G^*$. Entonces, existen $b_1, b_2 \in G$ tal que $b_1 \leq x$, $b_2 \leq y$ y entonces, $b_1 \wedge b_2 \leq x \wedge y$. Por lo tanto, $x \wedge y \in G^*$. Por otra parte, sea $z \in A$ tal que $x \leq z$. Entonces, $b_1 \leq x \leq z$ lo que implica que $z \in G^*$. De estas afirmaciones y la definición de G^* concluimos que G^* es un g-filtro de A. Además, $G^* \cap S(A) = G$. En efecto, sea $x \in G^* \cap S(A)$. Entonces, existe $b \in G$ tal que $b \leq x$ y entonces, $x \in G$. La otra inclusión es simple de verificar.

Supongamos ahora que $F \in \mathcal{F}_g(A)$ y sea $G = F \cap S(A)$. Entonces $G^* = F$. En efecto, sea $x \in F$. De la hipótesis, existe $b \in F \cap S(A)$ tal que $b \leq x$ y entonces, $x \in G^*$. La otra inclusión es inmediata de la definición de G^*. Además, es claro que cada correspondencia preserva el orden. Entonces, la demostración está completa. $\square$

Ahora en las L_n^m–álgebras introducimos una nueva operación binaria $\to$, que llamaremos *implicación débil*, de la siguiente manera:

$$x \to y = D_1 f x \vee y.$$

Cabe señalar que esta operación coincide con las implicación considerada por R. Cignoli ([23]) para la L_n–algebras.

Proposición 2.2.4. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(w_1) $x \to x = 1,$

(w_2) $x \to (y \to x) = 1,$

(w_3) $x \leq y$ *implica* $x \to y = 1,$

(w_4) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1,$

(w_5) $((x \to y) \to x) \to x = 1,$

(w_6) $x \to (x \wedge y) = x \to y,$

(w_7) $D_i x \to D_i y = f D_i x \vee D_i y,$

(w_8) $D_i x \to D_i y = 1$ *si, y sólo si* $D_i x \leq D_i y,$

(w_9) $x \to f D_1 f x = 1,$

(w_{10}) $f D_i x \to D_i x$ *es el complemento booleano de* $D_i x \to f D_i x,$

(w_{11}) $D_i(x \to y) = x \to D_i y,$

(w_{12}) $f(D_{n-1}x \wedge (D_{n-1}x \to fy)) = D_{n-1}x \to f^2y$,

(w_{13}) $(D_ix \to fy) \vee fz = D_ix \to f(y \wedge z)$,

(w_{14}) $x \leq y$ *implica* $z \to x \leq z \to y$,

(w_{15}) $x \leq y$ *implica* $y \to z \leq x \to z$,

(w_{16}) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$,

(w_{17}) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z)$,

(w_{18}) $(fD_ix \to D_ix) \wedge (D_ix \to fD_ix) = 0$,

(w_{19}) $(fD_ix \to D_ix) \vee (D_ix \to fD_ix) = 1$,

(w_{20}) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

Dem. Solo probaremos w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_8, w_{12}, w_{15} y w_{16}.

(w_1) De GL_1 y GL_{14} tenemos que $x \to x = D_1f^{2m-1}x \vee x = D_1f^{2m-1}x \vee ff^{2m-1}x = D_1f^{2m-1}x \vee f^{2m}x = 1$.

(w_2) Teniendo en cuenta GL_{14} inferimos que $x \to (y \to x) = D_1f^{2m-1}x \vee D_1f^{2m-1}y \vee x = 1 \vee D_1f^{2m-1}y = 1$.

(w_3) Como $x \leq y$, tenemos que $D_1f^{2m-1}y \vee y \leq D_1f^{2m-1}x \vee y$ de donde por GL_{14} concluimos que $1 \leq D_1f^{2m-1}x \vee y$. Por lo tanto, $1 = x \to y$.

(w_4) De GL_6, GL_{11} y GL_{20} tenemos que $(x \to y) \to (x \to z) = D_1((fD_1fx \wedge fy) \vee D_1fx) \vee z = D_1(fy \vee D_1fx) \vee z$. Por otra parte, $x \to (y \to z) = D_1fx \vee D_1fy \vee z$. Entonces, por GL_{11} y GL_6 inferimos que $(x \to y) \to (x \to z) = x \to (y \to z)$ y por lo tanto, de w_1 concluimos la demostración.

(w_5) Por GL_{12} y GL_{23} resulta que $(x \to y) \to x = D_1 f^{2m-1}(D_1 f^{2m-1}x \vee y) \vee x \leq D_1 f(D_1 f^{2m-1}x) \vee x \leq f(D_1 f^{2m-1}x) \vee x$. Por otra parte, de GL_7 y GL_1 tenemos que $f(D_1 f^{2m-1}x) \leq f f^{2m-1}x = x$. Luego, de las afirmaciones anteriores inferimos que $(x \to y) \to x \leq x$ de donde por w_3 concluimos que $((x \to y) \to x) \to x = 1$.

(w_8) Teniendo en cuenta que $D_i x \to D_i y = 1$ y GL_{19} obtenemos que $1 = f D_i x \vee D_i y$. Luego, por GL_{23} resulta que $D_i x \leq D_i y$. La recíproca es consecuencia directa de w_3.

(w_{12}) De GL_{19} y GL_{20} tenemos que $f(D_{n-1}x \wedge (D_{n-1}x \to fy)) = f(D_{n-1}x \wedge (D_1 f D_{n-1}x \vee fy)) = f(D_{n-1}x \wedge (f D_{n-1}x \vee fy)) = D_{n-1}x \to f^2 y$.

(w_{15}) De la hipótesis deducimos que $D_1 f^{2m-1}y \leq D_1 f^{2m-1}x$. Luego, $D_1 f^{2m-1}y \vee z \leq D_1 f^{2m-1}x \vee z$ de donde se concluye la demostración.

(w_{16}) $x \to (y \wedge z) = D_1 f^{2m-1}x \vee (y \wedge z) = (D_1 f^{2m-1}x \vee y) \wedge (D_1 f^{2m-1}x \vee z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$. □

Definición 2.2.5. *Un subconjunto D de una L_n^m–álgebra A es un sistema deductivo (s.d.) de A, si $1 \in D$ y además, $x \in D$ y $x \to y \in D$ implican que $y \in D$.*

Denotaremos por $\mathcal{D}(A)$ el conjunto de los sistemas deductivos de A.

Proposición 2.2.6. *Sea F un filtro de una L_n^m–álgebra A. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F es un sistema deductivo de A,*

(ii) *F satisface: $x \in F$ implica $f D_1 f x \in F$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x \in F$. Por w_9 tenemos que $x \to fD_1fx = 1 \in F$ y de (i) concluimos que $fD_1fx \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sean $x, x \to y \in F$. Entonces de (ii) obtenemos que $fD_1fx \wedge (D_1fx \vee y) \in F$ de donde, por GL_{20}, resulta que $fD_1fx \wedge y \in F$. Por lo tanto, $y \in F$. $\square$

Corolario 2.2.7. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $F \subseteq A$. Si F es un s.d. de A, entonces F es un g-filtro de A.*

Dem. Supongamos que $x, y \in F$. Entonces, de w_2 y w_6 concluimos que $x \to (x \wedge y) = x \to y \in F$. Luego, de la hipótesis tenemos que $x \wedge y \in F$. Por otra parte, sea $z \in A$ tal que $x \leq z$. Entonces, por w_3 y la hipótesis resulta que $z \in F$. Por lo tanto, F es un filtro de A. Luego, de la hipótesis y la Proposición 2.2.6 inferimos que $fD_1fx \in F$. De esta última afirmación, GL_7 y GL_{12} afirmamos que $fD_1fx \leq f^{2m}x = x$, con lo que concluimos la demostración. $\square$

2.3. Caracterización de las L_n^m–congruencias

Para alcanzar los objetivos propuestos con respecto a las congruencias en estas álgebras, vamos a definir un elemento que será fundamental en lo que sigue.

Definición 2.3.1. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $a, b \in A$. Entonces $w_{a,b} = \bigwedge_{i=1}^{n-1}((D_ia \to D_ib) \wedge (D_ib \to D_ia))$.*

La Proposición 2.2.6 y el Lema 2.3.2 jugarán un papel fundamental en la demostración del Teorema 2.3.7.

Lema 2.3.2. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $a, b \in A$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $w_{a,b} = \bigwedge_{i=1}^{n-1}((fD_ia \wedge fD_ib) \vee (D_ia \wedge D_ib))$,

(ii) $D_j w_{a,b} = w_{a,b}$,

(iii) $w_{a,b} \in S(A)$,

(iv) $D_j(a \wedge w_{a,b}) = D_j(b \wedge w_{a,b})$,

(v) $a \wedge w_{a,b} = b \wedge w_{a,b}$, *para todo* $a, b \in S(A)$,

(vi) $fD_1 f w_{a,b} = w_{a,b}$.

Dem.

(i) De GL_{25} y w_7 tenemos que $w_{a,b} = \bigwedge_{i=1}^{n-1}((D_i a \to D_i b) \wedge (D_i b \to D_i a)) = \bigwedge_{i=1}^{n-1}((fD_i a \vee D_i b) \wedge (fD_i b \vee D_i a))$.

(ii) Por (i), GL_6 y GL_{23}, obtenemos que $w_{a,b} = \bigwedge_{i=1}^{n-1}((fD_i a \wedge fD_i b) \vee (D_i b \wedge D_i a)) = \bigwedge_{i=1}^{n-1}((D_j fD_i a \wedge D_j fD_i b) \vee (D_j D_i b \wedge D_j D_i a))$. Entonces, de (i), GL_{12}, GL_{11} y GL_{26} concluimos la demostración.

(iii) Es consecuencia de (ii) y GL_{12}.

(iv) Teniendo en cuenta (iii), GL_{26}, (ii), (i) y GL_{13} resulta que $D_j(a \wedge w_{a,b}) = D_j a \wedge w_{a,b} = ((D_j a \wedge D_j b) \wedge \bigwedge_{i=1}^{j-1}((fD_i a \wedge fD_i b) \vee (D_i b \wedge D_i a)) \wedge \bigwedge_{i=j+1}^{n-1}((fD_i a \wedge fD_i b) \vee (D_i b \wedge D_i a)) = D_j(b \wedge w_{a,b})$.

(v) Es consecuencia directa de la hipótesis, (iii), (iv), [1, Proposition 2.2] y el principio de determinación.

(vi) De (ii) y (iii) tenemos que $fD_1 f w_{a,b} = f^2 D_{n-1} w_{a,b} = D_{n-1} w_{a,b} = w_{a,b}$. $\square$

Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $z \in A$. Denotaremos por $[z)$ el filtro generado por z (i.e.: $[z) = \{x \in A : z \leq x\}$).

Proposición 2.3.3. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$, $k \in \mathbf{N}$ y $a_j, b_j \in A$, $1 \leq j \leq k$. Entonces $[\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j})$ es un s.d. de A.*

Dem. Como $D = [\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j})$ es un filtro de A, sólo resta probar la condición (ii) de la Proposición 2.2.6. Supongamos que $x \in D$. Entonces, $fD_1f(\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j}) \leq fD_1fx$. Por otra parte, de (iii) en el Lema 2.3.2 tenemos que $\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j} \in S(A)$ y entonces, $fD_1f(\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j}) = f^2D_{n-1}(\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j})$. Luego, por GL_{12} y (ii) del Lema 2.3.2 concluimos que $fD_1f(\bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j}) = \bigwedge_{j=1}^k w_{a_j,b_j}$. Esta última afirmación implica que $fD_1fx \in D$. □

La Observación 2.3.4 será fundamental para determinar el retículo de las congruencias de las L_n^m-algebras.

Observación 2.3.4. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $F \in \mathcal{D}(A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *existe $w \in F$ tal que $x \wedge D_{n-1}w = y \wedge D_{n-1}w$,*

(ii) *existe $u \in F$ tal que $D_{n-1}u \to fx = D_{n-1}u \to fy$.*

En lo que sigue, denotaremos con $Con(A)$ el retículo de las congruencias de A y con A/R al álgebra cociente de A por R, para toda $R \in Con(A)$. Además, para cada $x \in A$ denotaremos con $[x]_R$ a la clase de equivalencia de x módulo R.

Proposición 2.3.5. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$, $F \in \mathcal{D}(A)$ y $R(F) = \{(x, y) \in A^2 :$ existe $w \in F$ tal que $D_{n-1}w \to fx = D_{n-1}w \to fy\}$. Entonces $R(F) \in Con(A)$ y $[1]_{R(F)} = F$.*

Dem. Sea $(x, y), (y, z) \in R(F)$. Entonces, de (ii) en la Observación 2.3.4 tenemos que existen $w_1, w_2 \in F$ tales que $x \wedge D_{n-1}w_1 = y \wedge D_{n-1}w_1$ e $y \wedge D_{n-1}w_2 = z \wedge D_{n-1}w_2$. Así, por GL_8 y GL_2 inferimos que $x \wedge D_{n-1}(w_1 \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w_2) = z \wedge D_{n-1}(w_1 \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w_2)$. Además, como F es un filtro tenemos que $w_1 \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p} w_2 \in F$ y entonces por la Observación 2.3.4 concluimos que $(x, z) \in R(F)$.

Supongamos ahora que $(x, y) \in R(F)$. Entonces, (1) existe $w \in F$ tal que $D_{n-1}w \to fx = D_{n-1}w \to fy$ de donde inferimos que $D_{n-1}w \wedge (D_{n-1}w \to fx) = D_{n-1}w \wedge (D_{n-1}w \to fy)$. De ésta afirmación y w_{12} concluimos que $(fx, fy) \in R(F)$. Por otra parte, de (1) tenemos que $(D_{n-1}w \to fx) \vee fz = (D_{n-1}w \to fy) \vee fz$. Entonces, por w_{13} resulta que $D_{n-1}w \to f(x \wedge z) = D_{n-1}w \to f(y \wedge z)$. Por lo tanto, $(x \wedge z, y \wedge z) \in R(F)$ lo que nos permite concluir que $R(F)$ es compatible con $\wedge$. Teniendo en cuenta que $x \vee y = f^{2m-1}(fx \wedge fy)$, de los resultados anteriores obtenemos que $R(F)$ es compatible con $\vee$. Además, de (1) inferimos que $D_{n-1}w \to f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) = D_{n-1}w \to f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y)$. Entonces, $D_{n-i}(D_{n-1}w \to f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x)) = D_{n-i}(D_{n-1}w \to f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y))$. De ésta afirmación, w_{11}, GL_5 y GL_8 concluimos que $(D_i x, D_i y) \in R(F)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

Por otra parte, sea $x \in F$. Entonces, de GL_7, GL_8 y GL_1 tenemos que $fD_1 fx \leq x$. Además, de la Proposición 2.2.6 y GL_{23} deducimos que $D_{n-1}fD_1fx = fD_1fx \in F$. Por lo tanto, $D_{n-1}fD_1fx \wedge x = D_{n-1}fD_1fx$ y por la Observación 2.3.4 resulta que $x \in [1]_{R(F)}$. Supongamos ahora que $x \in [1]_{R(F)}$. Luego, por la Observación 2.3.4 existe $w \in F$ tal que $x \wedge D_{n-1}w = D_{n-1}w$ y entonces, $D_{n-1}w \leq x$. Con el fin de completar la demostración, sólo resta probar que $D_{n-1}w \in F$. En efecto, por la Proposición 2.2.6 tenemos que $fD_1f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w) \in F$. Teniendo en cuenta que $f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w) \in S(A)$ y GL_8 concluimos que $fD_1f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w) = D_{n-1}(f^2 \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w) = D_{n-1}w$ y entonces, $D_{n-1}w \in F$. □

Proposición 2.3.6. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $\theta \in Con(A)$. Entonces $[1]_\theta$ es un s.d. y $R([1]_\theta) = \theta$.*

Dem. Solo probaremos que $R([1]_\theta) = \theta$. Sea (1) $\theta_1 = \theta \cap S(A)^2 \in Con(S(A))$. Entonces (2) $R([1]_{\theta_1}) = \theta_1$. En efecto, si $(x, y) \in R([1]_{\theta_1})$, por la Observación 2.3.4 existe $v \in [1]_{\theta_1}$ tal que $x \wedge D_{n-1}v = y \wedge D_{n-1}v$. Como $(D_{n-1}v, 1) \in \theta_1$ tenemos que $(x \wedge D_{n-1}v, x) \in \theta_1$ y $(y \wedge D_{n-1}v, y) \in \theta_1$ de donde resulta que $(x, y) \in \theta_1$. Por lo tanto, $R([1]_{\theta_1}) \subseteq \theta_1$. Supongamos ahora que $(x, y) \in \theta_1$. Entonces, por w_1 inferimos que $(D_i x \to D_i y) \wedge (D_i y \to D_i x) \in [1]_{\theta_1}$. Además, teniendo en cuenta la Definición 2.3.1 obtenemos que $w_{x,y} \in [1]_{\theta_1}$. Luego, de (ii) y (v) en el Lema 2.3.2 y la Observación 2.3.4 tenemos que $D_{n-1} w_{x,y} \to fx = D_{n-1} w_{x,y} \to fy$ de donde concluimos que $(x, y) \in R([1]_{\theta_1})$.

Por otra parte, $R([1]_{\theta_1}) \subseteq R([1]_\theta) \cap S(A)^2$. Recíprocamente si $(x, y) \in R([1]_\theta) \cap S(A)^2$, existe $u \in [1]_\theta$ tal que (3) $D_{n-1} u \to fx = D_{n-1} u \to fy$. Luego, de GL_{12} tenemos que $t = D_{n-1} u \in [1]_\theta \cap S(A)^2$, de donde por (1) concluimos que $t \in [1]_{\theta_1}$. Por lo tanto, de GL_6 y (3) inferimos que $(x, y) \in R([1]_{\theta_1})$ lo que nos permite afirmar que $R([1]_{\theta_1}) = R([1]_\theta) \cap S(A)^2$. De esta afirmación y (2) deducimos que $\theta_1 = R([1]_\theta) \cap S(A)^2$. Como $R([1]_\theta)$ y θ son extensiones de θ_1 de A, por [1, Proposition 3.4] inferimos que $R([1]_\theta) = \theta$. $\square$

El Teorema 2.3.7, que indicamos a continuación, es una consecuencia directa de la Proposición 2.3.5 y la Proposición 2.3.6.

Teorema 2.3.7. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces:*

(i) $Con(A) = \{R(F) : F \in \mathcal{D}(A)\}$ *donde* $R(F) = \{(x, y) \in A^2 :$ *existe* $w \in F$ *tal que* $D_{n-1} w \to fx = D_{n-1} w \to fy\}$,

(ii) *el retículo $Con(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son isomorfismos, consirando las aplicaciones $\theta \longmapsto [1]_\theta$ y $F \longmapsto R(F)$ son una inversa de la otra.*

A continuación, del Teorema 2.3.7 y la Proposición 2.2.3 vamos a indicar nuevas demostraciones de los resultados establecidos en [1, Proposition 3.3, Proposition 3.4].

Teorema 2.3.8. *$\mathcal{L}_n^m$ tiene la propiedad de extensión de congruencias.*

Dem. Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Si B es una subálgebra de A y $\theta \in Con(B)$, por el Teorema 2.3.7 existe un s.d. F de B tal que $R(F) = \theta$. Sea $T = \{y \in A : fD_1 fx \leq y$, para algún

$x \in F\}$, entonces es simple verificar que T es un s.d. de A. Además, $R(T) \cap (B \times B) = \theta$. En efecto, sea $(x, y) \in R(T) \cap (B \times B)$. Entonces, existe (1) $w \in T$ tal que (2) $x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w = y \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w$. De (1), como F es un g-filtro de A existe $a \in F$ tal que $fD_1fa \leq w \leq \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}w$ y además, $fD_1fa \in F$. Luego, $x \wedge fD_1fa = y \wedge fD_1fa$ de donde concluimos por GL_{12} que $x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(fD_1fa) = y \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}(fD_1fa)$ y por lo tanto $(x, y) \in \theta$. Recíprocamente, sea $(x, y) \in \theta$. Luego, existe $w \in F$ tal que $x \wedge D_{n-1}w = y \wedge D_{n-1}w$. Como por GL_7 tenemos que $fD_1fw \leq w$, entonces $w \in T$ de donde inferimos que $(x, y) \in R(T) \cap (B \times B)$. $\square$

Recordemos que si $\mathcal{V}$ es una variedad y $A, B \in \mathcal{V}$ son tales que B es una subálgebra de A, diremos que A es una extensión perfecta de B si toda congruencia de B tiene una única extensión a A.

Corolario 2.3.9. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces A es una extensión perfecta de $S(A)$.*

Dem. Sea $\theta \in Con(S(A))$ y supongamos que existen $\phi, \psi \in Con(A)$ tal que $\phi \cap S^2(A) = \theta = \psi \cap S^2(A)$. Entonces $[1]_\phi \cap S(A) = [1]_\psi \cap S(A) = [1]_\theta$. Sean $G = [1]_\phi \cap S(A)$ y $H = [1]_\psi \cap S(A)$. Como $G, H \in \mathcal{F}(S(A))$ y $G = H$, por la Proposición 2.2.3 tenemos que $G^* = H^*$. Además $G^* = [1]_\phi$. En efecto, sean $x \in [1]_\phi$ y $\underline{x} = \bigwedge_{p=0}^{m-1} f^{2p}x$, entonces $(\underline{x}, 1) \in [1]_\phi$. Además, como $\underline{x} \in S(A)$ y $\underline{x} \leq x$ resulta que $x \in G^*$, por lo tanto $[1]_\phi \subseteq G^*$. La otra inclusión es inmediata. De manera análoga tenemos que $H^* = [1]_\psi$. Luego, $[1]_\phi = [1]_\psi$ de donde por el Teorema 2.3.7 concluimos que $\phi = \psi$. $\square$

2.4. L_n^m–congruencias principales

A continuación vamos indicar una caracterización de las L_n^m–congruencias principales diferente de la indicada en [1, Proposition 3.1] y donde el elemento $w_{a,b}$ introducido en la Definición 2.3.1 juega un papel fundamental.

Teorema 2.4.1. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $a, b \in S(A)$*. Entonces* $\theta(a,b) = \{(x,y) \in A^2 : w_{a,b} \to fx = w_{a,b} \to fy\}$*.*

Dem. Sea $R = \{(x,y) \in A^2 : w_{a,b} \to fx = w_{a,b} \to fy\}$. Por (v) en el Lema 2.3.2 y la Observación 2.3.4 tenemos que $(a,b) \in R$. Además, por (ii) y (iii) del Lema 2.3.2 inferimos que $R = R([w_{a,b}))$, de donde por la Proposición 2.3.5, resulta que R es una congruencia en A.

Por otra parte, sea $\rho \in Con(A)$ tal que $(a,b) \in \rho$ y supongamos que $(x,y) \in R$. Entonces, por w_1 tenemos que $((D_i a \to D_i b) \wedge (D_i b \to D_i a), 1) \in \rho$, y por la Definición 2.3.1 concluimos que $(w_{a,b}, 1) \in \rho$. Luego, tenemos que $(x, x \wedge w_{a,b}) \in \rho$ y $(y, y \wedge w_{a,b}) \in \rho$. De estas afirmaciones y la Observación 2.3.4 obtenemos que $(x,y) \in \rho$. $\square$

En lo que sigue vamos a mostrar la relación que existe entre el Teorema 2.4.1 y los resultados obtenidos en [1, 89] con el fin de determinar las congruencias principales.

Teorema 2.4.2. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$*,* $a, b \in S(A)$ *y* $a \leq b$*. Entonces* $\theta(a,b) = \theta_{D_{0,1}}(a,b) \vee \theta_{D_{0,1}}(fa, fb) \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} \theta_{D_{0,1}}(D_i a, D_i b)$*.*

Dem. Sea $\alpha = \theta_{D_{0,1}}(a,b) \vee \theta_{D_{0,1}}(fa, fb) \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} \theta_{D_{0,1}}(D_i a, D_i b)$. Si $(x,y) \in \theta(a,b)$, por el Teorema 2.4.1, la Observación 2.3.4 y (ii) en el Lema 2.3.2 tenemos que $x \wedge w_{a,b} = y \wedge w_{a,b}$. Teniendo en cuenta que $a \leq b$ concluimos que $x \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (fD_i b \vee D_i a) = y \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (fD_i b \vee D_i a)$. Como $(D_i a, D_i b) \in \alpha$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, por GL_{20} inferimos que $(x, x \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (fD_i b \vee D_i a)) \in \alpha$ e $(y, y \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (fD_i b \vee D_i a)) \in \alpha$, entonces $(x,y) \in \alpha$. Esta última afirmación implica que $\theta(a,b) \subseteq \alpha$. Para probar la otra inclusión observemos que $\theta(a,b) \in Con_{\mathcal{L}_n^m}(A)$ es una congruencia de retículos y que $(a,b) \in \theta(a,b)$. Por lo tanto, $\alpha \subseteq \theta(a,b)$. $\square$

Por otra parte, con el propósito de obtener la caracterización de las congruencias principales anunciada anteriormente, vamos a describir en primer lugar ciertos elementos utilizados por J. Vaz de Carvalho en [89] y obtenidos a partir de algunos resultados no publicados establecidos por M. Sequeira en el estudio de las congruencias sobre álgebras pertenecientes a ciertas subvariedades de álgebras de Ockham. Dichos elementos están definidos como sigue:

Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $T = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Para cada $z \in A$ y $s \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$q_s z = \bigwedge_{\substack{J \subseteq T \\ |J| = s}} \bigvee_{j \in J} f^{2j} z.$$

Luego, el Lema 2.4.3 resume algunas propiedades importantes de estos elementos.

Lema 2.4.3. [89, pag. 297] *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $f^2 q_s z = q_s z$, $s \in \{1, \ldots, m\}$,

(ii) $q_s z \leq q_{s+1} z$, $s \in \{1, \ldots, m-1\}$,

(iii) $q_1 z = \bigwedge\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p} z$ *y* $\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p} z = q_m z$,

(iv) $z \in S_A$ *implica* $q_s z = z$, $s \in \{1, \ldots, m\}$,

(v) $x \leq z$ *implica* $q_s x \leq q_s z$, $s \in \{1, \ldots, m\}$.

Lema 2.4.4. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $a, b \in S(A)$. Entonces $w_{a,b} = p^{\mathbf{A}}(a, b)$ siendo $p^{\mathbf{A}}(a, b) = \bigwedge_{s=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n-1} (D_i(q_s(a \wedge b)) \vee f(D_i(q_s(a \vee b))))$.*

Dem. Como $a, b \in S(A)$, por los resultados establecidos en [89] tenemos que $q_s(a \wedge b) = a \wedge b$ y $q_s(a \vee b) = a \vee b$. Entonces, $p^{\mathbf{A}}(a, b) = \bigwedge_{i=1}^{n-1} (D_i(a \wedge b) \vee f(D_i(a \vee b))$ y por (i) en el Lema 2.3.2 concluimos que $p^{\mathbf{A}}(a, b) = w_{a,b}$. $\square$

Teorema 2.4.5. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $a, b \in S(A)$*. Entonces* $\theta(a,b) = \{(x,y) \in A^2 : x \wedge p^{\mathbf{A}}(a,b) = y \wedge p^{\mathbf{A}}(a,b)\}$*.*

Dem. De los Lemas 2.4.4 y 2.3.2 tenemos que $(x,y) \in \{(x,y) \in A^2 : x \wedge p^{\mathbf{A}}(a,b) = y \wedge p^{\mathbf{A}}(a,b)\}$ es equivalente a que $x \wedge D_1 w_{a,b} = y \wedge D_1 w_{a,b}$. Esta condición es equivalente a $f(x \wedge D_1 w_{a,b}) = f(y \wedge D_1 w_{a,b})$, que a su vez es equivalente a $w_{a,b} \to fx = w_{a,b} \to fy$. Por lo tanto, del Teorema 2.4.1 la demostración está terminada. $\square$

Finalmente, obtenemos la caracterización de las L_n^m–congruencias principales buscada.

Teorema 2.4.6. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $a, b \in A$*. Entonces existe* $k \in \mathbf{N}$ *y* $(a_j, b_j) \in S(A)^2$*,* $1 \leq j \leq k$ *tal que* $\theta(a,b) = R([\bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j}])$*.*

Dem. Del Teorema 2.4.1 y la Proposición 2.3.5 tenemos que $\theta(x,y) = R([w_{x,y}])$ para cada $(x,y) \in S(A)^2$. Entonces, por [1, Proposition 3.1] existe $k \in \mathbf{N}$ y $(a_j, b_j) \in S(A)^2$, $1 \leq j \leq k$, tal que $\theta(a,b) = \bigvee_{j=1}^{k} R([w_{a_j,b_j}])$. Como $\bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j} \leq w_{a_j,b_j}$, por la Proposición 2.3.3 y el Teorema 2.3.7 inferimos que $R([w_{a_j,b_j}]) \subseteq R([\bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j}])$. Además, $(1, \bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j}) \in \varphi$, para todo $\varphi \in Con(A)$ tal que $R([w_{a_j,b_j}]) \subseteq \varphi$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$ y entonces, $R([\bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j}]) \subseteq \varphi$. Luego, $\bigvee_{j=1}^{k} R([w_{a_j,b_j)}) = R([\bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j}])$. A partir de ésta última igualdad obtenemos que $\theta(a,b) = R([\bigwedge_{j=1}^{k} w_{a_j,b_j}])$. $\square$

2.5. Otra caracterización de las L_n^m–álgebras simples

En el Teorema 2.5.2 daremos una demostración de los resultados establecidos en [1, Proposition 4.1] a partir de la noción de sistema deductivo. Además, en el Teorema 2.5.4 indicaremos una nueva caracterización de las L_n^m–álgebras simples para la cual los elementos introducidos en la Definición 2.3.1 son fundamentales.

Proposición 2.5.1. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $F \in \mathcal{D}(A)$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F es maximal,*

(ii) *F es irreducible,*

(iii) *F es completamente irreducible.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.3.7, el Corolario 2.3.9 y los resultados establecidos en [23, Theorem 2.21]. □

Teorema 2.5.2. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es subdirectamente irreducible,

(ii) $S(A)$ es una subálgebra de $\mathbb{L}_n$,

(iii) A es simple,

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como A es subdirectamente irreducible por el Corolario 2.3.9 tenemos que $S(A)$ es subdirectamente irreducible. Luego, por [23, Corollary 5.6] concluimos que $S(A)$ es una subálgebra de $\mathbb{L}_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis y los resultados establecidos en [23] tenemos que $S(A)$ es un álgebra de Lukasiewicz de orden n simple. Por lo tanto, $S(A)$ y $\{1\}$ son los únicos sistemas deductivos de $S(A)$. Luego del Teorema 2.3.7 y el Corolario 2.3.9 inferimos que los únicos sistemas deductivos de A son los triviales, de donde concluimos que A es simple.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es inmediata por resultados de álgebra universal. □

Corolario 2.5.3. *Toda L_n^m-álgebra no trivial es semisimple.*

Teorema 2.5.4. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $a \in A$, $a > 0$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es simple,*

(ii) $w_{D_1a,1} = 1$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $F = [w_{D_1a,1})$. Luego, por el inciso (vi) del Lema 2.3.2 y la Proposición 2.2.6 concluimos que F es un s.d.. Por lo tanto, de la Proposición 2.3.5 tenemos que $R(F) \in Con(A)$ y $F = [1]_{R(F)}$ de donde resulta que $(w_{D_1a,1}, 1) \in R(F)$. Si $w_{D_1a,1} = 0$, entonces $D_1a = 0$ y por lo tanto de GL_7 obtenemos que $a = 0$. Como A es simple y las únicas congruencias son id_A y $A \times A$, entonces $w_{D_1a,1} = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $\theta \in Con(A)$ tal que $\theta \neq id_A$. Luego existen $x, y \in A$, $x \neq y$ tal que $(x, y) \in \theta = R([1]_\theta)$. Entonces del Teorema 2.3.7 y la Observación 2.3.4 existe $v \in [1]_\theta$ tal que $x \wedge D_{n-1}v = y \wedge D_{n-1}v$. Es decir, existe $v \neq 1$ tal que $(fv, 0) \in \theta$ con $fv \neq 0$. Como sabemos que $w_{D_1a,1} = 1$ para todo $a > 0$, entonces $w_{D_1fv,1} = 1$. Luego, $(0, w_{D_1fv}) = (0, 1) \in \theta$ y por lo tanto $\theta = A \times A$. □

2.6. L_n^m–polinomio discriminador ternario

Recordemos que la función discriminadora ternaria t sobre un conjunto A está definida por las condiciones siguientes:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad x = y, \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, una variedad $\mathcal{V}$ es una variedad discriminadora, si posee un polinomio p que coincide con la función discriminadora ternaria sobre cada miembro subdirectamente irreducible de $\mathcal{V}$; un tal polinomio es llamado polinomio discriminador ternario para $\mathcal{V}$.

Teniendo en cuenta el Lema 2.3.2, el polinomio discriminador ternario para las L_n^m–álgebras queda determinado del siguiente modo:

Proposición 2.6.1. *Sean $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $p : A^3 \to A$ la función definida para todo $(a, b, c) \in A^3$ por $p(a, b, c) = (\bigwedge_{s=1}^m w_{q_s(a\wedge b), q_s(a\vee b)} \wedge c) \vee (f \bigwedge_{s=1}^m w_{q_s(a\wedge b), q_s(a\vee b)} \wedge a)$. Entonces*

(i) $p(a,a,b) = b$,

(ii) $p(a,b,c) = a$, *si* $a \neq b$.

Dem. (i) Teniendo en cuenta GL_{20}, para todo $a, b \in A$, resulta que:

$p(a,a,b) = (\bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge a),q_s(a\vee a)} \wedge b) \vee (f \bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge a),q_s(a\vee a)} \wedge a) = (1 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = b$.

(ii) Sean $a, b \in A$ tales que $a \neq b$. Como $a, b \in R([\bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)})$ tenemos que $a \wedge \bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)} = b \wedge \bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)}$. De esta afirmación, teniendo en cuenta que $S(A)$ es un álgebra simple, $\bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)} \in B(S(A))$ y $a \neq b$ concluimos que $\bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)} = 0$. Por lo tanto, $p(a,b,c) = (\bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)} \wedge c) \vee (f \bigwedge_{s=1}^{m} w_{q_s(a\wedge b),q_s(a\vee b)} \wedge a) = (0 \wedge c) \vee (1 \wedge a) = a$. □

De la proposición anterior obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.6.2. L_n^m *es una variedad discriminadora.*

Corolario 2.6.3. *La variedad* $\mathcal{L}_n^m$ *es aritmética, filtral, a congruencias regulares, a congruencias normales, cada congruencia principal es una congruencia factor y cada congruencia compacta es principal.*

De todo lo demostrado anteriormente podemos afirmar que la noción de la implicación débil introducida en la Sección 1.2 ha sido muy beneficiosa ya que nos permitió determinar los elementos introducidos en la Definición 2.3.1 y a partir de ellos obtener de manera más simple algunos de los resultados establecidos en [89]

2.7. Observación sobre la definición de las L_n^m–álgebras

Antes de finalizar este capítulo nos parece interesante plantearnos el siguiente interrogante: ¿por qué las álgebras de Lukasiewicz m–generalizadas de orden n no pueden ser definidas como álgebras de Lukasiewicz-Moisil de orden n cambiando la condición $f^2x = x$

por $f^{2m}x = x$ con $m \in I\!N \setminus \{1\}$?. Más precisamente, mantener las propiedades de los operadores de Moisil cambiando solamente la negación. A continuación detallaremos la justificación que nosotros encontramos de este hecho.

Si sustituimos (GL_2) por

$(GL_{2'})$ $D_i(x \wedge y) = Di(x) \wedge Di(y)$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$,

y mantenemos el resto de las condiciones de un álgebra de Lukasiewicz m–generalizada de orden n, entonces utilizando (GL_8) obtenemos que $D_i(\bigwedge_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) = \bigwedge_{p=0}^{m-1}(D_i f^{2p}x)$ $= \bigwedge_{p=0}^{m-1} D_i(\overline{f^{2p}x}) = D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Como $\bigwedge_{p=0}^{m-1} f^{2p}x$, $\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x \in S(A)$ por el Principio de Determinación de Moisil resulta que $\bigwedge_{p=0}^{m-1} f^{2p}x$ $= \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x$. Luego, teniendo en cuenta que $\bigwedge_{p=0}^{m-1} f^{2p}x \leq x \leq \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x$ obtenemos que $x = f^2x$ para todo $x \in A$. Es decir, tendríamos las álgebras de Lukasiewicz Moisil de orden n y no una nueva variedad de álgebras.

3. Capítulo III

El objetivo principal de este capítulo es mostrar la existencia de un sistema lógico para el cual las L_n^m–álgebras constituyan su contrapartida algebraica dando así una respuesta positiva a la pregunta planteada en [1]. Con este propósito definimos en primer lugar una nueva operación de implicación en las L_n^m–álgebras a la que denominamos implicación estandar, la cual desempeñó un rol fundamental para determinar $\mathcal{L}_n^m$– cálculo proposicional. A continuación, buscando simplificar las demostraciones de la Sección 3.4, introducimos los k_{2m}–retículos e indicamos una caracterización de los mismos teniendo en cuenta los resultados establecidos en [48]. En la Sección 3.4, la más importante de este capítulo, presentamos el $\mathcal{L}_n^m$– cálculo proposicional que denotamos por ℓ_n^m y mostramos que es un cálculo implicativo extensional estandar. Además, probamos que las L_n^m–álgebras y ℓ_n^m-álgebras son equivalentes. Finalmente, obtenemos el teorema de completitud para ℓ_n^m.

3.1. Preliminares

Recordemos que en el Capítulo II introdujimos la implicación débil de la siguiente manera: $x \to y = D_1 fx \vee y$ y mostramos algunas propiedades de la misma. Cabe destacar que esta implicación ha sido también de fundamental importancia para determinar un cálculo proposicional cuya contrapartida algebraica son las L_n^m–álgebras.

A continuación, indicaremos propiedades de esta implicación necesarias para el desarrollo de las secciones subsiguientes, y con el objeto de facilitar la lectura incluiremos algunas de las ya establecidas en la Sección I del capítulo anterior .

Proposición 3.1.1. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces las siguientes propiedades se verifican:*

(W_1) $x \to 1 = 1,$

(W_2) $x \to x = 1,$

(W_3) $1 \to x = x,$

(W_4) $x \to (y \to x) = 1,$

(W_5) $x \leq y$ *implica* $x \to y = 1,$

(W_6) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z),$

(W_7) $x \to (x \wedge y) = x \to y,$

(W_8) $(x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to (y \wedge z))) = 1,$

(W_9) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z),$

(W_{10}) $D_i x \to D_i y = fD_i x \vee D_i y,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(W_{11}) $D_i x \to D_i y = 1$ *si, y sólo si* $D_i x \leq D_i y,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(W_{12}) $D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y) = 1$ *si, y sólo si* $x = y$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(W_{13}) $((x \wedge z) \to (y \wedge z)) \to (z \to (x \to y)) = 1$,

(W_{14}) $D_iq_sx \to D_1x = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(W_{15}) $D_iq_s(x \wedge fx) \to D_iq_s((x \wedge fx) \wedge (y \vee fy)) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(W_{16}) $D_iq_s(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) \to D_iq_s((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}x) \wedge (\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}y \vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}y) \vee$ $D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}x))) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(W_{17}) $D_iq_sx \to D_iq_s(x \wedge f^{2m-1}(fx \wedge fy)) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(W_{18}) $D_iq_s((x \wedge f^{2m-1}(fy \wedge fz) \vee f^{2m-1}(f(z \wedge x) \wedge f(y \wedge x))) \to D_iq_s(x \wedge f^{2m-1}(fy \wedge fz) \wedge$ $f^{2m-1}(f(z \wedge x) \wedge f(y \wedge x))) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(W_{19}) $x \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)) = y \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))$,

(W_{20}) $D_jq_kx \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)) = D_jq_ky \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge$ $y))$, $1 \leq j \leq n-1$, $1 \leq k \leq m$,

(W_{21}) $D_{n-1}q_1x \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)) = D_{n-1}q_1y \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to$ $D_iq_s(x \wedge y))$.

Dem. Sólo probaremos W_{13}, W_{14}, W_{15}, W_{18}, W_{19} y W_{20} ya que la demostración de las restantes propiedades es de rutina.

(W_{13}) : De W_9 y W_6 tenemos que $((x \wedge z) \to (y \wedge z)) \to (z \to (x \to y)) = ((x \wedge z) \to (y \wedge z)) \to ((x \wedge z) \to y))$. Entonces, por W_5 y W_1 concluimos que $((x \wedge z) \to (y \wedge z)) \to (z \to (x \to y)) = (x \wedge z) \to 1 = 1$.

(W_{14}) : De (ii) en el Lema 2.4.3 y GL_{11} inferimos que $D_iq_sx \leq D_iq_mx$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$. Por otra parte, por (iii) en el Lema 2.4.3, GL_8 y GL_3 tenemos que $D_iq_mx = D_ix \leq D_1x$, $1 \leq i \leq n-1$, de donde por W_{11} concluimos que $D_iq_sx \to D_1x = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$.

(W_{15}) : De GL_9 tenemos que $x \wedge fx = (x \wedge fx) \wedge (y \vee fy)$ de donde resulta que $D_iq_s(x \wedge fx) = D_iq_s((x \wedge fx) \wedge (y \vee fy))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$. Luego, por W_2 concluimos la demostración.

(W_{18}) : Es consecuencia directa del hecho que $x \wedge f^{2m-1}(fy \wedge fz) = f^{2m-1}(f(z \wedge x) \wedge f(y \wedge x))$ y W_2.

(W_{19}) : En virtud de GL_{23} y la definición de la implicación débil, tenemos que $D_iq_s(x \wedge y) \vee fD_iq_s(x \vee y) = D_iq_s(x \wedge y) \vee D_1fD_iq_s(x \vee y) = D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$. Luego, por [89, Proposición 3.5] concluimos que $x \wedge \bigwedge_{s=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)) = y \wedge \bigwedge_{s=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))$.

(W_{20}) : Se obtiene siguiendo un razonamiento análogo a W_{19}. □

3.2. La implicación standard

Con el fin de establecer un cálculo proposicional extensional implicativo (ver [66]) que tenga a las $\mathcal{L}_n^m$–álgebras como contrapartida algebraica, introducimos otra operación implicación $\twoheadrightarrow$ sobre estas álgebras por medio de la fórmula:

$$x \twoheadrightarrow y = D_{n-1}q_1y \vee \bigwedge_{s=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)),$$

y la denominamos *implicación standard*.

Por otra parte, cabe destacar que esta implicación nos permitió obtener una nueva descripción del retículo de las congruencias de las L_n^m–álgebras, que desempeñó un papel importante en lo que sigue.

Proposición 3.2.1. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

$(S1)$ $x \twoheadrightarrow 1 = 1,$

$(S2)$ $x \twoheadrightarrow x = 1,$

$(S3)$ $1 \twoheadrightarrow x = D_{n-1}q_1x,$

$(S4)$ $D_{n-1}q_1x \wedge (x \twoheadrightarrow y) = D_{n-1}q_1y \wedge (y \twoheadrightarrow x),$

$(S5)$ $x \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = y \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x),$

$(S6)$ $(x \twoheadrightarrow y) \rightarrow ((y \twoheadrightarrow z) \rightarrow (x \twoheadrightarrow z)) = 1,$

$(S7)$ $(D_{n-1}q_1x \wedge (x \twoheadrightarrow y)) \rightarrow y = 1,$

$(S8)$ $f^2(x \twoheadrightarrow y) = x \twoheadrightarrow y,$

$(S9)$ $D_j(x \twoheadrightarrow y) = x \twoheadrightarrow y$, $1 \leq j \leq n-1$.

Dem. Sólo probaremos $S4$, $S5$, $S6$ y $S9$ ya que la demostración de las restantes es directa.

$(S4)$: Teniendo en cuenta la definición de la implicación standard y W_{21} tenemos que $D_{n-1}q_1x \wedge (x \twoheadrightarrow y) = (D_{n-1}q_1x \wedge D_{n-1}q_1y) \vee (D_{n-1}q_1x \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \rightarrow D_iq_s(x \wedge y)) = (D_{n-1}q_1x \wedge D_{n-1}q_1y) \vee (D_{n-1}q_1y \wedge \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \rightarrow D_iq_s(x \wedge y)) = D_{n-1}q_1y \wedge (y \twoheadrightarrow x).$

$(S5)$: Teniendo en cuenta los incisos (i) y (iii) del Lema 2.4.3 inferimos que $D_{n-1}q_1x \leq q_1x \leq x$ de donde obtenemos que:

$x \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = x \wedge (D_{n-1}q_1y \vee \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \rightarrow D_iq_s(x \wedge y) \wedge (D_{n-1}q_1x \vee \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_iq_s(x \vee y) \rightarrow D_iq_s(x \wedge y)))$

$= (D_{n-1}q_1y \vee \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x\vee y) \to D_iq_s(x\wedge y))) \wedge ((x \wedge D_{n-1}q_1x) \vee (x \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))))$

$= (D_{n-1}q_1y \vee \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x\vee y) \to D_iq_s(x\wedge y))) \wedge (D_{n-1}q_1x \vee (x \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))))$

$= (D_{n-1}q_1x \wedge D_{n-1}q_1y) \vee (D_{n-1}q_1y \wedge x \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x\vee y) \to D_iq_s(x\wedge y)) \vee (D_{n-1}q_1x \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)) \vee (x \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))$.

Análogamente, tenemos que $y \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = (D_{n-1}q_1y \wedge D_{n-1}q_1x)$ $\vee (D_{n-1}q_1x \wedge y \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x\vee y) \to D_iq_s(x\wedge y)) \vee (D_{n-1}q_1y \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x\vee y) \to D_iq_s(x \wedge y)) \vee (y \wedge \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))$. Entonces, utilizando W_{19} y W_{21} inferimos que $x \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = y \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x))$.

($S6$): Sea A una L_n^m–álgebra subdirectamente irreducible, entonces por ([1, Proposición 4.1]) tenemos que el conjunto de los elementos booleanos de $S(A)$ es $\{0,1\}$. Entonces por(i) en el Lemma 2.4.3 y GL_{20} tenemos que $D_iq_s(a \vee b) \to D_iq_s(a \wedge b) \in \{0,1\}$ para todo $a, b \in A$. Supongamos ahora que existen $x, y \in A$ tal que $D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y) = 1$. Luego por W_{12} tenemos que $x = y$ y por W_2 obtenemos que $(x \twoheadrightarrow y) \to ((y \twoheadrightarrow z) \to (x \twoheadrightarrow z)) = (x \twoheadrightarrow x) \to ((x \twoheadrightarrow z) \to (x \twoheadrightarrow z)) = 1$. Por otra parte, si suponemos que existen $x, y, z \in A$ tal que $D_iq_s(y \vee z) \to D_iq_s(y \wedge z) = 1$ o $D_iq_s(x \vee z) \to D_iq_s(x \wedge z) = 1$, siguiendo con un razonamiento análogo probamos $S6$. Finalmente, si $D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y) = D_iq_s(y \vee z) \to D_iq_s(y \wedge z) = D_iq_s(x \vee z) \to D_iq_s(x \wedge z) = 0$, entonces $y \twoheadrightarrow z = D_{n-1}q_1z = x \twoheadrightarrow z$, luego por W_2 y W_1 concluimos la demostración.

($S9$): Utilizando GL_{23}, GL_{11}, GL_{12}, GL_{26} y GL_6, tenemos que para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, $D_j(x \twoheadrightarrow y) = D_j(D_{n-1}q_1y \vee \bigwedge_{s=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n-1}(D_iq_s(x \vee y) \to D_iq_s(x \wedge y))) = D_jD_{n-1}q_1y \vee$

$D_j \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_i q_s(x \vee y) \to D_i q_s(x \wedge y)) = D_{n-1} q_1 y \vee \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_j D_i q_s(x \vee y) \to D_j D_i q_s(x \wedge$ $y)) = D_{n-1} q_1 y \vee \bigwedge\limits_{s=1}^{m} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} (D_i q_s(x \vee y) \to D_i q_s(x \wedge y)).$ □

Para cada $A \in \mathcal{L}_n^m$, recordemos que $\mathcal{D}(A)$ es el conjunto de sistemas deductivos de A asociado a $\to$.

Lema 3.2.2. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$ y $F \in \mathcal{D}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para todo $x, y \in A$:*

(i) *existe $u \in F$ tal que $D_{n-1} u \to fx = D_{n-1} u \to fy$,*

(ii) *existe $w \in F$ tal que $x \wedge D_{n-1} w = y \wedge D_{n-1} w$,*

(iii) $x \twoheadrightarrow y, y \twoheadrightarrow x \in F$.

Dem. Teniendo en cuenta la Observación 2.3.4 probaremos solamente la equivalencia entre (ii) y (iii).

(ii)$\Rightarrow$ (iii): De la hipótesis y el Teorema 2.3.7 tenemos que $(x, y) \in R_F = \{(a, b) \in A^2 :$ existe $w \in F$ tal que $a \wedge D_{n-1} w = b \wedge D_{n-1} w\}$ y entonces, $(D_i q_s(x \vee y), D_i q_s(x \wedge y)) \in R_F$. Luego, $(D_i q_s(x \vee y) \to D_i q_s(x \wedge y), 1) \in R_F$ lo que implica que $(D_{n-1} q_1 y \vee \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \bigwedge\limits_{s=1}^{m} (D_i q_s(x \vee y) \to q_s(x \wedge y)), 1) \in R_F$. Por lo tanto, $x \twoheadrightarrow y \in F$. Similarmente, tenemos que $y \twoheadrightarrow x \in F$.

(iii)$\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y $S8$ tenemos que $w = (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) \in F \cap S(A)$ y resulta que $S(A)$ es una L_n–álgebra tenemos que $D_{n-1} w \leq w$. Entonces, por $S5$ concluimos que $x \wedge D_{n-1} w = y \wedge D_{n-1} w$. □

Teorema 3.2.3. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces, se verifica que:*

(i) $Con(A) = \{R(F) : F \in \mathcal{D}(A)\}$ *where* $R(F) = \{(x, y) \in A^2 : x \twoheadrightarrow y,$ $y \twoheadrightarrow x \in F\}$,

(ii) *los retículos* $Con(A)$ *y* $\mathcal{D}(A)$ *son isomorfos considerando las funciones* $\theta \longmapsto [1]_\theta$ *y* $F \longmapsto R(F)$ *una inversa de la otra.*

Dem. Es consecuencia directa del Lema 3.2.2 y el Teorema 2.3.7. □

Lema 3.2.4. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $a, b \in A$. *Si* $w = (a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)$, *entonces* $[w)$ *es un sistema deductivo de* A.

Dem. Teniendo en cuenta la Proposición 2.2.6 sólo resta probar que $fD_{n-1}fx \in [w)$ para todo $x \in [w)$. Por $S8$, GL_5, GL_{26} y $S9$ tenemos que $fD_{n-1}fw = fD_{n-1}f((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)) = f^2D_1((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)) = f^2(D_1(a \twoheadrightarrow b) \wedge D_1(b \twoheadrightarrow a)) = f^2((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)) = w$. Luego $[w)$ es un sistema deductivo de A. □

A partir de los resultados anteriores, podemos obtener una nueva caracterización de las congruencias principales en las L_n^m–algebras.

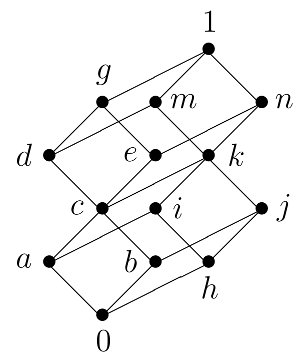
Teorema 3.2.5. *Sea* $A \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $a, b \in A$. *Entonces* $\theta(a, b) = \{(x, y) \in A^2 : x \wedge ((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)) = y \wedge ((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a))\}$.

Dem. Sea $T = \{(x, y) \in A^2 : x \wedge ((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)) = y \wedge ((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a))\}$. Por $S5$ tenemos que $(a, b) \in T$. Además, por $S9$ y $S8$ resulta que $T = \{(x, y) \in A^2 : x \wedge D_{n-1}((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a)) = y \wedge D_{n-1}((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a))\}$ y entonces, por el Lema 3.2.4, el Lema 3.2.2 y el Teorema 2.3.7 concluimos que $T \in Con(A)$.

Por otra parte, sea $R \in Con(A)$ tal que $(a, b) \in R$ y supongamos que $(x, y) \in T$. Entonces, tenemos que $((a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a), 1) \in R$ de donde resulta que $(x \wedge (a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a), x) \in R$ y $(y \wedge (a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a), y) \in R$. De estas últimas afirmaciones y el hecho que $(x, y) \in T$ concluimos que $(x, y) \in R$. Por lo tanto, $T = \theta(a, b)$. □

A continuación indicaremos un ejemplo que ilustra los resultados obtenidos en el Teorema 3.2.3, el Lema 3.2.4 y el Teorema 3.2.5

Ejemplo 3.2.6. *Consideremos la L_3^2-algebra A cuyo diagrana de Hasse es el indicado a continuación y donde las operaciones f, D_i, $1 \leq i \leq 2$ y q_i, $1 \leq i \leq 2$ están definidas de la siguiente manera:*



x	0	a	b	c	d	e	g	h	i	j	k	m	n	1
fx	1	n	m	k	i	j	h	g	e	d	c	a	b	0
D_1x	0	g	g	g	g	g	g	h	1	1	1	1	1	1
D_2x	0	0	0	0	g	g	g	h	h	h	h	1	1	1
q_1x	0	0	0	c	c	c	g	h	h	h	k	k	k	1
q_2x	0	c	c	c	g	g	g	h	k	k	k	1	1	1

$\twoheadrightarrow$	0	a	b	c	d	e	g
0	1	h	h	h	h	h	1
a	h	1	h	h	h	h	1
b	h	h	1	h	h	h	1
c	h	h	h	1	h	h	1
d	h	h	h	h	1	h	1
e	h	h	h	h	h	1	1
g	h	h	h	h	h	h	1

Si $w = (a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a) = h$, por el Lema 3.2.4 obtenemos que $F = [h) =$

$\{h, i, j, k, m, n, 1\}$ es un sistema deductivo de A. Entonces, por el Teorema 3.2.3 tenemos que $A/R(F) = \{[0]_{R(F)}, [1]_{R(F)}\}$ donde $[1]_{R(F)} = F$ y $[0]_{R(F)} = \{0, a, b, c, d, e, g\}$.

Por otra parte, de $(S1)$ y $(S3)$ tenemos que $g \twoheadrightarrow 1 = 1$ and $1 \twoheadrightarrow g = g$. Entonces, del Teorema 3.5.3 obtenemos que $\theta(g, 1) = \{(x, y) \in A^2 : x \wedge g = y \wedge g\} = Id_A \cup \{(g, 1), (1, g), (d, m), (m, d), (n, e), (e, n), (c, k), (k, c), (a, i), (i, a),$
$(b, j), (j, b), (0, h), (h, 0)\}$.

Por el Teorema 3.2.5 es fácil verificar la Proposición 3.2.7, que será de gran utilidad en el desarrolllo del $\mathcal{L}_n^m$–cálculo proposicional.

Proposición 3.2.7. *Sea $A \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

$(S10)$ $D_i x \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = D_i y \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)$, $1 \leq i \leq n-1$,

$(S11)$ $D_i q_s(fx \vee fy) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = D_i q_s(fx \wedge fy) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

$(S12)$ $D_i q_s((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = D_i q_s((x \wedge z) \wedge (y \wedge z)) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

$(S13)$ $D_i q_s((x \to z) \vee (y \to z)) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = D_i q_s((x \to z) \wedge (y \to z)) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

$(S14)$ $D_i q_s((x \twoheadrightarrow z) \vee (y \twoheadrightarrow z)) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = D_i q_s((x \twoheadrightarrow z) \wedge (y \twoheadrightarrow z)) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$.

Dem. Solo probaremos $(S10)$, $(S11)$ y $(S14)$.

$(S10)$: De $S5$ y GL_{26} tenemos que $D_i x \wedge D_i((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = D_i y \wedge D_i((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x))$, $1 \leq i \leq n-1$. Luego, de $S8$, GL_{26} y $S9$ concluimos que $D_i x \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = D_i y \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x))$, $1 \leq i \leq n-1$.

($S11$): De $S5$ y el Teorema 3.2.5 inferimos que $(fx \wedge fy) \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = (fx \vee fy) \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x))$. Luego por GL_{26} y $S9$ concluimos que $D_i q_s(fx \vee fy) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) = D_i q_s(fx \wedge fy) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)$, $1 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq s \leq m$.

($S14$): Teniendo en cuenta $S5$ y el Teorema 3.2.5 deducimos que $((x \twoheadrightarrow z) \wedge (y \twoheadrightarrow z)) \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = ((x \twoheadrightarrow z) \vee (y \twoheadrightarrow z)) \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x))$. Entonces de GL_{26} y $S9$ deducimos que $D_i q_s((x \twoheadrightarrow z) \wedge (y \twoheadrightarrow z)) \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = D_i q_s((x \twoheadrightarrow z) \vee (y \twoheadrightarrow z)) \wedge ((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x))$, $1 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq s \leq m$. $\square$

3.3. Una caracterización de los $\mathbf{k_{2m}}$–retículos

El objetivo de esta sección es encontrar una formulación equivalente a GL_1 para demostrarlo de una forma más simple. Para ello, hemos tenido en cuenta los resultados establecidos en [48].

Definición 3.3.1. *Un k_{2m}–retículo, $m \in \mathbb{N}$, es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, f \rangle$ tal que $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo distributivo y f es una operación unaria de A que verifica las siguientes condiciones:*

(r1) $f^{2m}x = x$,

(r2) $f(x \vee y) = fx \wedge fy$.

El Teorema 3.3.3 nos permitirá caracterizar a los k_{2m}–retículos por medio de las operaciones de ínfimo $\wedge$ y el endomorfismo dual f. Para facilitar la demostración utilizaremos la caracterización de Sholander para los retículos distributivos que indicaremos a continuación.

Teorema 3.3.2. ([73]) *Un álgebra $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ de tipo $(2, 2)$ es un retículo distributivo si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

(l1) $a = a \wedge (a \vee b)$,

(l2) $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$.

Teorema 3.3.3. *Sea* $\langle A, \wedge, f\rangle$ *un álgebra de tipo* $(2,1)$. *Entonces* $\langle A, \wedge, \vee, f\rangle$ *es un* k_{2m}*−retículo,* $m \in \mathbb{N}$*, definiendo* $(s): a \vee b = f^{2m-1}(fa \wedge fb)$ *para todo* $a, b \in A$ *si, y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

(m1) $a = a \wedge f^{2m-1}(fa \wedge fb)$,

(m2) $a \wedge f^{2m-1}(fb \wedge fc) = f^{2m-1}(f(c \wedge a) \wedge f(b \wedge a))$.

Dem. De $(l1)$, $(l2)$ y teniendo en cuenta la definición de $\vee$ resultan inmediatas $(m1)$ y $(m2)$. Para demostrar la recíproca, veamos en primer lugar que A es un retículo distributivo, es decir que $(l1)$ y $(l2)$ se verifican. En efecto, de $(m1)$, $(m2)$ y (s) tenemos que $(l1)$: $a \wedge (a \vee b) = f^{2m-1}(fa \wedge fb) \wedge a = a$ y $(l2)$: $(c \wedge a) \vee (b \wedge a) = f^{2m-1}(f(c \wedge a) \wedge f(b \wedge a)) = a \wedge f^{2m-1}(fb \wedge fc) = a \wedge (b \vee c)$. Entonces, por $(m1)$ y $(m2)$ obtenemos que $(r1)$: $a = a \wedge f^{2m-1}(fa \wedge fa) = f^{2m-1}(f(a \wedge a) \wedge f(a \wedge a)) = f^{2m-1}(fa \wedge fa) = f^{2m-1}fa$. Finalmente, de $(r1)$ y (s) resulta $(r2)$: $f(a \vee b) = ff^{2m-1}(fa \wedge fb) = fa \wedge fb$. □

3.4. El $\mathcal{L}_n^m$–cálculo proposicional

En esta sección, que es la principal de este capítulo, describiremos un cálculo proposicional y demostraremos que tiene a las L_n^m–álgebras como la contrapartida algebraica. Además, estabamos interesados en encontrar un cálculo que perteneciera a la clase de los sistemas proposicionales implicativo extensionales standard. La complejidad de la implicación standard junto con el hecho de que las L_n^m–álgebras no verifican el Principio de Determinación de Moisil y que los operadores de D_i no son $\wedge$–homomorfismos, han hecho que en éste el cálculo el número de axiomas y reglas de inferencia sean mayores que en el cálculo proposicional de Łukasiewicz n–valuado. ([16]). La terminología y símbolos usados aquí coinciden con los de [66].

Sea $\mathcal{L} = (A^0, F)$ un lenguaje formalizado de orden cero, donde en el alfabeto $A^0 = (V, L_0, L_1, L_2, U)$ el conjunto

(i) V de las variables proposicionales es numerable,

(ii) L_0 es no vacío,

(iii) L_1 contiene n elementos denotados por f, D_i para $1 \leq i \leq n-1$, llamados negación y operadores de Moisil generalizados, respectivamente.

(iv) L_2 contiene cuatro elementos denotados por $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\twoheadrightarrow$ llamados conjunción, disjunción, implicación débil e implicación standard, respectivamente.

(v) U contiene dos elementos denotados por $($, $)$.

En lo que sigue, para cada $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ en el conjunto F de todas las fórmulas sobre A^0, $\bigvee\limits_{p=0}^{k} \alpha_p$, $\bigwedge\limits_{p=0}^{k} \alpha_p$ significará $\alpha_0 \vee (\ldots \vee (\alpha_{k-1} \vee \alpha_k))\ldots)$ y $\alpha_0 \wedge (\ldots \wedge (\alpha_{k-1} \wedge \alpha_k))\ldots)$ respectivamente. Además, para cada α en F, $f^t\alpha$ es el resultado de aplicar t veces la operación f a α si $t > 0$, o α si $t = 0$. Por otra parte, para cada α, β in F, escribiremos para simplificar $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta$ y $q_s\alpha$ en lugar de $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, $(\alpha \twoheadrightarrow \beta) \wedge (\beta \twoheadrightarrow \alpha)$ and $\bigwedge\limits_{\substack{J \subseteq T \\ |J| = s}} \bigvee\limits_{j \in J} f^{2j}\alpha$, donde $T = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ y $s \in \{1, \ldots, m\}$, respectivamente.

Suponemos que el conjunto $\mathcal{A}_l$ de los axiomas lógicos consiste de todas las fórmulas de la siguiente forma, donde α, β, γ son fórmulas en F:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, (A3) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(A4) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,

(A6) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

(A7) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))$,

(A8) $\alpha \to D_1\alpha$,

(A9) $D_jD_i\alpha \leftrightarrow D_i\alpha$, $1 \leq i, j \leq n-1$,

(A10) $D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha \leftrightarrow D_i\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$,

(A11) $((\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)) \to (\gamma \to (\alpha \to \beta))$,

(A12) $D_i\alpha \vee fD_i\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$,

(A13) $D_iq_s(\alpha \vee \alpha) \to D_iq_s(\alpha \wedge \alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A14) $D_iq_s\alpha \to D_iq_s(\alpha \wedge D_1\alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A15) $D_iq_s(f^2D_i\alpha \vee D_i\alpha) \to D_iq_s(f^2D_i\alpha \wedge D_i\alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A16) $D_iq_s(D_i(\alpha \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee (D_i\alpha \wedge D_i\beta)) \to D_iq_s(D_i(\alpha \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \wedge (D_i\alpha \wedge D_i\beta))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A17) $D_iq_s(D_j\alpha \vee (D_i\alpha \wedge D_j\alpha)) \to D_iq_s(D_j\alpha \wedge (D_i\alpha \wedge D_j\alpha))$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A18) $D_iq_s(D_if(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \vee fD_{n-i}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)) \to D_iq_s(D_if(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge fD_{n-i}$ $(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A19) $D_iq_s(\alpha \wedge f\alpha) \to D_iq_s((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(A20) $D_i q_s(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \to D_i q_s(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha \wedge (\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta \vee f D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}$
$(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))),\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A21) $D_i q_s \alpha \to D_i q_s(\alpha \wedge f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\beta)),\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A22) $D_i q_s((\alpha \wedge f^{2m-1}(f\beta \wedge f\gamma)) \vee f^{2m-1}(f(\gamma \wedge \alpha) \wedge f(\beta \wedge \alpha))) \to D_i q_s(\alpha \wedge f^{2m-1}(f\beta \wedge$
$f\gamma) \wedge f^{2m-1}(f(\gamma \wedge \alpha) \wedge f(\beta \wedge \alpha))),\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A23) $\alpha \twoheadrightarrow \beta \leftrightarrow D_{n-1} q_1 \beta \vee \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{s=1}^{m} (D_i q_s(\alpha \vee \beta) \to D_i q_s(\alpha \wedge \beta)),$

(A24) $(D_i q_s(f\alpha \vee f\beta) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s(f\alpha \wedge f\beta) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A25) $(D_i \alpha \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i \beta \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),\ 1 \leq i \leq n-1,$

(A26) $(D_i q_s((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A27) $(\alpha \wedge \gamma) \twoheadrightarrow (\gamma \wedge \alpha),$

(A28) $(D_i q_s((\gamma \to \alpha) \vee (\gamma \to \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A29) $(D_i q_s((\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A30) $(D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \vee (\gamma \twoheadrightarrow \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \wedge (\gamma \twoheadrightarrow \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A31) $(D_i q_s((\alpha \twoheadrightarrow \gamma) \vee (\beta \twoheadrightarrow \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\alpha \twoheadrightarrow \gamma) \wedge (\beta \twoheadrightarrow \gamma) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$

(A32) $(\alpha \twoheadrightarrow \beta) \to ((\beta \twoheadrightarrow \gamma) \to (\alpha \twoheadrightarrow \gamma)),$

(A33) $(f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\beta) \twoheadrightarrow (\alpha \vee \beta)) \wedge ((\alpha \vee \beta) \twoheadrightarrow f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\beta))$,

(A34) $(D_{n-1}q_1\alpha \wedge (\alpha \twoheadrightarrow \beta)) \rightarrow \beta$.

El operador de consecuencia $C_{\mathcal{L}}$ en $\mathcal{L} = (A^0, F)$ está determinado por $\mathcal{A}_l$ y por las siguientes reglas de inferencia:

$(R1)$ $\dfrac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$,

$(R2)$ $\dfrac{D_i\alpha \rightarrow D_j\beta, D_j\beta \rightarrow D_i\alpha}{D_i\alpha \twoheadrightarrow D_j\beta}$, $1 \leq i, j \leq n-1$,

$(R3)$ $\dfrac{D_iq_s\alpha \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta)}{D_iq_s(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta))}$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

$(R4)$ $\dfrac{\alpha}{D_{n-1}q_1\alpha}$,

$(R5)$ $\dfrac{D_iq_s(\alpha \vee \beta) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta)}{D_iq_s(\beta \vee \alpha) \rightarrow D_iq_s(\beta \wedge \alpha)}$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$.

El sistema $\ell_n^m = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ así obtenido, será llamado el $\mathcal{L}_n^m$–cálculo proposicional. Cabe mencionar que las conectivas anteriores no son independientes, sin embargo, las hemos considerado por simplicidad. Denotaremos con $\mathcal{T}$ al conjunto de todas las fórmulas derivable en ℓ_n^m y si $\alpha \in \mathcal{T}$, escribiremos $\vdash \alpha$.

El Lema 3.4.1 resume las reglas y teoremas más importantes necesarios para el desarrollo futuro.

Lema 3.4.1. *En ℓ_n^m se verifican las siguientes reglas y teoremas:*

$(R6)$ $\dfrac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$,

$(R7)$ $\dfrac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)}$,

$(T1)$ $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$,

$(T2)$ $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$,

$(R8)$ $\dfrac{\alpha \to \beta}{(\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)}$,

$(R9)$ $\dfrac{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$,

$(R10)$ $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$,

$(T3)$ $\vdash (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$,

$(T4)$ $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$,

$(R11)$ $\dfrac{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$,

$(R12)$ $\dfrac{\alpha \to \beta}{(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)}$,

$(R13)$ $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$,

$(T12)$ $\vdash \alpha \twoheadrightarrow \alpha$,

$(R14)$ $\dfrac{D_i q_s(\alpha \vee \beta) \to D_i q_s(\alpha \wedge \beta)}{\alpha \twoheadrightarrow \beta}$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

$(R15)$ $\dfrac{\alpha, \alpha \twoheadrightarrow \beta}{\beta}$,

$(R16)$ $\dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \gamma}{\alpha \twoheadrightarrow \gamma}$,

$(R17)$ $\dfrac{\beta}{\alpha \twoheadrightarrow \beta}$,

$(R18)$ $\dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{f\alpha \twoheadrightarrow f\beta}$,

$(R19)$ $\dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{D_i\alpha \twoheadrightarrow D_i\beta}$, $1 \leq i \leq n-1$,

$(R20)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\alpha \wedge \gamma) \twoheadrightarrow (\beta \wedge \gamma)}$,

$(R21)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\gamma \wedge \alpha) \twoheadrightarrow (\gamma \wedge \beta)}$,

$(R22)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\alpha \vee \gamma) \twoheadrightarrow (\beta \vee \gamma)}$,

$(R23)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\gamma \vee \alpha) \twoheadrightarrow (\gamma \vee \beta)}$,

$(R24)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\gamma \rightarrow \alpha) \twoheadrightarrow (\gamma \rightarrow \beta))}$,

$(R25)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\alpha \rightarrow \gamma) \twoheadrightarrow (\beta \rightarrow \gamma))}$,

$(R26)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \twoheadrightarrow (\gamma \twoheadrightarrow \beta))}$,

$(R27)\ \dfrac{\alpha \twoheadrightarrow \beta, \beta \twoheadrightarrow \alpha}{(\alpha \twoheadrightarrow \gamma) \twoheadrightarrow (\beta \twoheadrightarrow \gamma))}$.

Dem. La demostración de $R6$ a $R10$ es de rutina.

$(T3)$:

(1) $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$, [$A2$]

(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, [$T1$]

(3) $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$, [(2),$R10$]

(4) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. [(3),(1),$R1$]

$(T4)$:

(1) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, [$A2$]

(2) $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$, [(1),$R6$]

(3) $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$, [(2),$R7$]

(4) $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$, [$A1$]

(5) $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, [(4),(3),$R1$]

(6) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$. [(5),$R10$]

$R11$ y $R12$ son consecuencia de $R4$.

$(R13)$:

(1) α, β,

(2) $(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta)))$, [$A7$]

(3) $\alpha \to \alpha$, [$T1$]

(4) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta))$, [(3),(2),$R1$]

(5) $\alpha \to \beta$, [(1),$R6$]

(6) $\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$, [(4),(5),$R1$]

(7) $\alpha \wedge \beta$. [(6),(1),$R1$]

$(T12)$:

(1) $D_i q_s(\alpha \vee \alpha) \to D_i q_s(\alpha \wedge \alpha)$, [$A13$]

(2) $\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{s=1}^{m} (D_i q_s(\alpha \vee \alpha) \to D_i q_s(\alpha \wedge \alpha))$, [(1),$R13$]

(3) $\alpha \twoheadrightarrow \alpha$. [(2),$A4$,$R1$,$A23$]

$(R14)$:

(1) $D_iq_s(\alpha \vee \beta) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$,

(2) $\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{s=1}^{m} (D_iq_s(\alpha \vee \beta) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta))$, [(1),$R13$]

(3) $\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{s=1}^{m} (D_iq_s(\alpha \vee \beta) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (D_{n-1}q_1\beta \vee \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{s=1}^{m} (D_iq_s(\alpha \vee \beta) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta)))$, [$A4$]

(4) $D_{n-1}q_1\beta \vee \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{s=1}^{m} (D_iq_s(\alpha \vee \beta) \rightarrow D_iq_s(\alpha \wedge \beta)))$, [(2),(3),$R1$]

(5) $\alpha \twoheadrightarrow \beta$. [(4),$A23$]

$(R15)$: Es consecuencia de $R4$, $R13$, $A34$ y $R1$.

$(R16)$: Es de rutina.

$(R17)$: Se obtiene como consecuencia de $R4$, $A3$, $R1$ y $A23$.

$(R18)$:

(1) $\alpha \twoheadrightarrow \beta$,

(2) $\beta \twoheadrightarrow \alpha$,

(3) $\alpha \twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow \beta$, [(1),(2),$R13$]

(4) $(D_iq_s(f\alpha \vee f\beta) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow \beta)) \rightarrow (D_iq_s(f\alpha \wedge f\beta) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow \beta))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [$A24$]

(5) $(\alpha \twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow \beta) \rightarrow (D_iq_s(f\alpha \vee f\beta) \rightarrow D_iq_s(f\alpha \wedge f\beta))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [$A11$,(4),$R1$]

(6) $D_iq_s(f\alpha \vee f\beta) \rightarrow D_iq_s(f\alpha \wedge f\beta)$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [(3),(5),$R1$]

(7) $f\alpha \twoheadrightarrow f\beta$. [(6),$R14$]

($R19$) :

(1) $\alpha \twoheadrightarrow \beta$,

(2) $\beta \twoheadrightarrow \alpha$,

(3) $\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta$, [(1),(2),$R13$]

(4) $(D_i\alpha \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \rightarrow (D_i\beta \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta))$, $1 \le i \le n-1$, [$A25$]

(5) $(\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta) \rightarrow (D_i\alpha \rightarrow D_i\beta)$, $1 \le i \le n-1$, [$A11$,(4),$R1$]

(6) $D_i\alpha \rightarrow D_i\beta$, $1 \le i \le n-1$, [(3),(5),$R1$]

(7) $(D_i\beta \wedge (\beta \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \alpha)) \rightarrow (D_i\alpha \wedge (\beta \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \alpha))$, $1 \le i \le n-1$, [$A25$]

(8) $\beta \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \alpha$, [(2),(1),$R13$]

(9) $(\beta \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \alpha) \rightarrow (D_i\beta \rightarrow D_i\alpha)$, $1 \le i \le n-1$, [$A11$,(7),$R1$]

(10) $D_i\beta \rightarrow D_i\alpha$, $1 \le i \le n-1$, [(8),(9),$R1$]

(11) $D_i\alpha \twoheadrightarrow D_i\beta$, $1 \le i \le n-1$. [(6),(10),$R2$]

($R20$) :

(1) $\alpha \twoheadrightarrow \beta$,

(2) $\beta \twoheadrightarrow \alpha$,

(3) $\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta$, [(1),(2),$R13$]

(4) $(D_iq_s((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \rightarrow (D_iq_s((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta))$,
$1 \le i \le n-1$, $1 \le s \le m$, [$A26$]

(5) $(\alpha \twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \beta) \rightarrow (D_i q_s((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow D_i q_s((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma)))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [$A11$,(4),$R1$]

(6) $D_i q_s((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow D_i q_s((\alpha \wedge \gamma) \wedge (\beta \wedge \gamma))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [(3),(5),$R1$]

(7) $(\alpha \wedge \gamma) \twoheadrightarrow (\beta \wedge \gamma)$. [(6),$R14$]

($R22$) :

(1) $\alpha \twoheadrightarrow \beta$, $\beta \twoheadrightarrow \alpha$,

(2) $f\alpha \twoheadrightarrow f\beta$, $f\beta \twoheadrightarrow f\alpha$, [(1),$R18$]

(3) $(f\alpha \wedge f\gamma) \twoheadrightarrow (f\beta \wedge f\gamma)$, [(2),$R20$]

(4) $(f\beta \wedge f\gamma \twoheadrightarrow (f\alpha \wedge f\gamma)$, [(2),$R20$]

(5) $f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\gamma) \twoheadrightarrow f^{2m-1}(f\beta \wedge f\gamma)$, [(3),(4),$R18$]

(6) $f^{2m-1}(f\beta \wedge f\gamma) \twoheadrightarrow (\beta \vee \gamma)$, [$A5$,$A33$,$R1$]

(7) $(\alpha \vee \gamma) \twoheadrightarrow f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\gamma)$, [$A6$,$A33$,$R1$]

(8) $(\alpha \vee \gamma) \twoheadrightarrow (\beta \vee \gamma))$. [(7),(5),(6),$R16$]

($R24$) :

(1) $\alpha \twoheadrightarrow \beta$, $\beta \twoheadrightarrow \alpha$,

(2) $\alpha \twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \beta$, [(1)$R13$]

(3) $(D_i q_s((\gamma \rightarrow \alpha) \vee (\gamma \rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \rightarrow (D_i q_s((\gamma \rightarrow \alpha) \wedge (\gamma \rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \beta))$, [$A28$]

(4) $(\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta) \to ((D_i q_s((\gamma \to \alpha) \vee (\gamma \to \beta)) \to (D_i q_s((\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta))),$ [A11,(3),R1]

(5) $D_i q_s((\gamma \to \alpha) \vee (\gamma \to \beta)) \to D_i q_s((\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta)),$ [(2),(4),R1]

(6) $(\gamma \to \alpha) \twoheadrightarrow (\gamma \to \beta).$ [(5),R14]

(R26) :

(1) $\alpha \twoheadrightarrow \beta,$

(2) $\beta \twoheadrightarrow \alpha,$

(3) $\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta,$ [(1),(2),R13]

(4) $(D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \vee (\gamma \twoheadrightarrow \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \wedge (\gamma \twoheadrightarrow \beta)) \wedge (\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta)),$ $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [A30]

(5) $(\alpha \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \beta) \to ((D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \vee (\gamma \twoheadrightarrow \beta)) \to (D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \wedge (\gamma \twoheadrightarrow \beta))), 1 \leq i \leq n-1,$ $1 \leq s \leq m,$ [A11,(4),R1]

(6) $D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \vee (\gamma \twoheadrightarrow \beta)) \to D_i q_s((\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \wedge (\gamma \twoheadrightarrow \beta)),$ $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [(3),(5),R1]

(7) $(\gamma \twoheadrightarrow \alpha) \twoheadrightarrow (\gamma \twoheadrightarrow \beta).$ [(6),R14]

Usando un razonamiento similar a R20, R22, R24 y R26 inferimos R21, R23, R25 y R27 respectivamente. □

Teorema 3.4.2. *El cálculo proposicional ℓ_n^m pertenece a la clase de los sistemas proposicionales implicativos extensionales standards.*

Dem. Tenemos que probar las condiciones (s1) a (s8) perteneciente de la Sección 1.2.5. Es claro que (s1) y (s2) se verifican. Además, (s3), (s4), (s5) y (s6) se deducen de $T12$, $R15$, $R16$ y $R17$, respectivamente. Por otra parte, teniendo en cuenta $R18$ y $R19$, resulta (s7). Finalmente, si $\alpha \twoheadrightarrow \beta$, $\beta \twoheadrightarrow \alpha$, $\delta \twoheadrightarrow \gamma$, $\gamma \twoheadrightarrow \delta \in C_{\mathcal{L}}(H)$ para cada subconjunto H de fómulas, entonces por $R20$ tenemos que $(\alpha \wedge \delta) \twoheadrightarrow (\beta \wedge \delta) \in C_{\mathcal{L}}(H)$. Además, por $R21$ tenemos $(\beta \wedge \delta) \twoheadrightarrow (\beta \wedge \gamma) \in C_{\mathcal{L}}(H)$. Entonces por $R16$ inferimos que $(\alpha \wedge \delta) \twoheadrightarrow (\beta \wedge \gamma) \in C_{\mathcal{L}}(H)$. Siguiendo un razonamiento análogo, de $R22$, $R23$, $R25$, $R26$ y $R27$ concluimos la demostración de (s8). $\square$

3.5. Relación entre las L_n^m–álgebras y las ℓ_n^m–álgebras

En lo que sigue, nuestro objetivo será establecer una relación entre las L_n^m–álgebras y las ℓ_n^m–álgebras que son la clase de álgebras determinadas por el sistema ℓ_n^m. Para ello, el Lema 3.5.1 jugará un papel fundamental.

Lema 3.5.1. *En ℓ_n^m se verifican los siguientes teoremas:*

($T13$) $\vdash (\alpha \wedge f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\beta)) \twoheadrightarrow \alpha,$

($T14$) $\vdash \alpha \twoheadrightarrow (\alpha \wedge f^{2m-1}(f\alpha \wedge f\beta)),$

($T15$) $\vdash (\alpha \wedge f^{2m-1}(f\beta \wedge f\gamma)) \twoheadrightarrow f^{2m-1}(f(\gamma \wedge \alpha) \wedge f(\beta \wedge \alpha)),$

($T16$) $\vdash f^{2m-1}(f(\gamma \wedge \alpha) \wedge f(\beta \wedge \alpha)) \twoheadrightarrow (\alpha \wedge f^{2m-1}(f\beta \wedge f\gamma)),$

(T17) $\vdash D_1(\alpha \twoheadrightarrow \alpha),$

(T18) $\vdash f^2 D_1\alpha \twoheadrightarrow D_1\alpha,$

(T19) $\vdash D_1\alpha \twoheadrightarrow f^2 D_1\alpha,$

(T20) $\vdash D_i(\alpha \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \twoheadrightarrow (D_i\alpha \wedge D_i\beta),\ 1 \leq i \leq n-1,$

(T21) $\vdash (D_i\alpha \wedge D_i\beta) \twoheadrightarrow D_i(\alpha \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta)$, $1 \leq i \leq n-1$,

(T22) $\vdash D_j\alpha \twoheadrightarrow (D_i\alpha \wedge D_j\alpha)$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$,

(T23) $\vdash (D_i\alpha \wedge D_j\alpha) \twoheadrightarrow D_j\alpha$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$,

(T24) $\vdash D_i f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \twoheadrightarrow fD_{n-i}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$,

(T25) $\vdash fD_{n-i}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \twoheadrightarrow D_i f(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$,

(T26) $\vdash D_i\alpha \twoheadrightarrow D_jD_i\alpha$, $1 \leq i, j \leq n-1$,

(T27) $\vdash D_jD_i\alpha \twoheadrightarrow D_i\alpha$, $1 \leq i, j \leq n-1$,

(T28) $\vdash (\alpha \wedge D_1\alpha) \twoheadrightarrow \alpha$,

(T29) $\vdash \alpha \twoheadrightarrow (\alpha \wedge D_1\alpha)$,

(T30) $\vdash D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \twoheadrightarrow D_i\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$,

(T31) $\vdash D_i\alpha \twoheadrightarrow D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$,

(T32) $\vdash ((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta)) \twoheadrightarrow (\alpha \wedge f\alpha)$,

(T33) $\vdash (\alpha \wedge f\alpha) \twoheadrightarrow ((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta))$,

(T34) $\vdash ((\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge (\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta \vee fD_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))) \twoheadrightarrow \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$,

(T35) $\vdash (\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \twoheadrightarrow ((\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge (\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta \vee fD_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)))$, $1 \leq i \leq n-1$.

Dem. La demostración de $T13$ a $T25$ es de rutina.

$(T26)$:

(1) $(D_i\alpha \to D_jD_i\alpha) \wedge (D_jD_i\alpha \to D_i\alpha)$, $1 \leq i, j \leq n-1$, [$A9$]

(2) $((D_i\alpha \to D_jD_i\alpha) \wedge (D_jD_i\alpha \to D_i\alpha)) \to (D_i\alpha \to D_jD_i\alpha)$, $1 \leq i, j \leq n-1$, [$A5$]

(3) $D_i\alpha \to D_jD_i\alpha$, $1 \leq i, j \leq n-1$, [(1),(2),$R1$]

(4) $((D_i\alpha \to D_jD_i\alpha) \wedge (D_jD_i\alpha \to D_i\alpha)) \to (D_jD_i\alpha \to D_i\alpha)$, $1 \leq i, j \leq n-1$, [$A6$]

(5) $D_jD_i\alpha \to D_i\alpha$, $1 \leq i, j \leq n-1$, [(1),(4),$R1$]

(6) $D_i\alpha \twoheadrightarrow D_jD_i\alpha$, $1 \leq i, j \leq n-1$. [(3),(5),$R2$]

$(T28)$: Resulta como consecuencia de $A14$, $R3$, $R5$, y $R14$.

$(T30)$:

(1) $(D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \to D_i\alpha) \wedge (D_i\alpha \to D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))$, $1 \leq i \leq n-1$, [$A10$]

(2) $D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \to D_i\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$, [$A5$,(1),$R1$]

(3) $D_i\alpha \to D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)$, $1 \leq i \leq n-1$, [$A6$,(1),$R1$]

(4) $D_i(\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \twoheadrightarrow D_i\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$. [(2),(3),$R2$]

$(T32)$:

(1) $D_iq_s(\alpha \wedge f\alpha) \to D_iq_s((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta))$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [$A19$]

(2) $D_iq_s((\alpha \wedge f\alpha) \vee ((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta))) \to D_iq_s((\alpha \wedge f\alpha) \wedge ((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta))$,
$1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq s \leq m$, [(1),$R3$]

(3) $D_iq_s(((\alpha \wedge f\alpha)) \wedge (\beta \vee f\beta)) \vee (\alpha \wedge f\alpha)) \to D_iq_s(((\alpha \wedge f\alpha)) \wedge (\beta \vee f\beta)) \wedge (\alpha \wedge f\alpha)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$ [(2),$R5$]

(4) $((\alpha \wedge f\alpha) \wedge (\beta \vee f\beta)) \twoheadrightarrow (\alpha \wedge f\alpha).$ [(3),$R14$]

$(T34)$:

(1) $D_iq_s(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \to D_iq_s((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)\wedge((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta)\vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta)\vee D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$ [$A20$]

(2) $D_iq_s((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \vee ((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge ((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)))) \to$
$D_iq_s((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge ((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge (\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)))),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$ [(1),$R3$]

(3) $D_iq_s(((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge ((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))) \vee (\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)) \to$
$D_iq_s(((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha) \wedge ((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta) \vee D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha))) \wedge (\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)),$
$1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq s \leq m,$ [(2),$R5$]

(4) $(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)\wedge((\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta)\vee fD_i(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\beta)\vee D_{i+1}(\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha)) \twoheadrightarrow \bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}\alpha,\ 1 \leq i \leq n-1.$
[(3),$R14$]

Un argumento similar al empleado en $T26$, $T28$, $T30$, $T32$ y $T34$ nos permite probar $T27$, $T29$, $T31$, $T33$ y $T35$ respectivamente. □

Proposición 3.5.2. *Si α es una fórmula derivable en ℓ_n^m, entonces $v(\alpha) = 1$ para toda valuación v de $\mathcal{L}$ en cada ℓ_n^m–álgebra $\mathcal{U}$.*

Dem. Como α es una fórmula derivable en ℓ_n^m si, sólo si $\vdash \alpha$, entonces por (a_1) y (a_2) concluimos que $v(\alpha) = 1$ para toda valuación v de $\mathcal{L}$ en cada ℓ_n^m–álgebra $\mathcal{U}$. □

Proposición 3.5.3. *Sea* $\langle L, \vee, \wedge, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1\rangle \in \mathcal{L}_n^m$*. Entonces* $\langle L, \rightarrow, \twoheadrightarrow, \vee, \wedge,$ $f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 1\rangle$ *es una* ℓ_n^m*–álgebra, donde* $\rightarrow$ *y* $\twoheadrightarrow$ *están definidas como en la Sección 3.1 y en la Sección 3.2 respectivamente.*

Dem. Probemos que se verifican las condiciones (a_1) a (a_4) de la Sección 1.2.5. En efecto, teniendo en cuenta las definiciones de $\rightarrow$ y $\twoheadrightarrow$ se deducen (a_1) y (a_2). Por otra parte, sean $a, b, c \in L$ tales que $a \twoheadrightarrow b = b \twoheadrightarrow c = 1$. Luego, de $S6$ y W_3 concluimos (a_3). Además, si $a \twoheadrightarrow b = b \twoheadrightarrow a = 1$, de $S5$ inferimos (a_4). $\square$

Proposición 3.5.4. *Sea* $\langle A, \rightarrow, \twoheadrightarrow, \vee, \wedge, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 1\rangle$ *una* ℓ_n^m*–álgebra. Entonces* $\langle A, \vee, \wedge, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1\rangle \in \mathcal{L}_n^m$*, donde* $0 = f1$.

Dem. De $T18$, $T19$ y (a_4) inferimos que $f^2D_1(\alpha \twoheadrightarrow \alpha) = D_1(\alpha \twoheadrightarrow \alpha)$. Además, de $T17$ tenemos que $D_1(\alpha \twoheadrightarrow \alpha) = 1$ de donde concluimos que $f^2 1 = 1$. Esta afirmación y el hecho que $f1 = 0$ implican que $f0 = 1$. Por otra parte, de $T13$, $T14$, $T15$ y $T16$ se deducen las condiciones $(m1)$ y $(m2)$ del Teorema 3.3.3 y por lo tanto, se verifica GL_1. Luego, de (a_4) y teniendo en cuenta $T20$ a $T35$ inferimos GL_2, GL_3 y GL_5 a GL_{10}. Además, de $A12$ y (a_1) de la Sección 1.2.5 obtenemos GL_4, lo que completa la demostración. $\square$

De las Proposiciones 3.5.3 y 3.5.4 concluimos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.5. *Las nociones de* ℓ_n^m*–álgebra y* $\mathcal{L}_n^m$*–álgebra son equivalentes.*

Sea $\equiv$ la relación binaria definida sobre F de la siguiente manera:

$$\alpha \equiv \beta \text{ si, y sólo si } \vdash \alpha \twoheadrightarrow \beta \text{ and } \vdash \beta \twoheadrightarrow \alpha \in \ell_n^m.$$

Entonces, $\equiv$ es una relación de congruencia en $\langle F, \rightarrow, \twoheadrightarrow, \wedge, \vee, f, D_1, \cdots, D_{n-1}\rangle$ y $\mathcal{T}$ determina una clase de equivalencia. Por otra parte, es simple verificar que la relación $\leq$ definida sobre $F/\equiv$ por

$$[\alpha] \leq [\beta] \text{ si, y sólo si} \vdash \alpha \twoheadrightarrow \beta,$$

es un preorden en $F/\equiv$.

Proposición 3.5.6. *$\mathcal{F} = \langle F/\equiv, \to, \twoheadrightarrow, \wedge, \vee, f, D_1, \cdots, D_{n-1}, 1\rangle$ es una ℓ_n^m-algebra, donde $1 = \mathcal{T}$.*

Dem. Sea v una valuación de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{F}$ y sea ρ una sustitución de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$ tal que $v(x) = [\rho(x)]$ para cada variable proposicional x en $\mathcal{L}$. Luego, tenemos que (1) $v(\alpha) = [\rho(\alpha)]$ para cada fórmula α en $\mathcal{L}$. Además, se verifican las condiciones (a_1)–(a_4). En efecto, si $\alpha \in \mathcal{A}$ entonces por (s_1) tenemos que $\rho(\alpha) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $[\rho(\alpha)] = 1$ de donde resulta (a_1).

Supongamos que una regla de inferencia r asigna a las premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una fórmula β como conclusión y sea $v(\alpha_i) = 1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, de (1) $[\rho(\alpha_i)] = 1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Entonces, de (s_2) obtenemos que $[\rho(\beta)] = 1$ de donde por (1) resulta que $v(\beta) = 1$ lo que prueba (a_2).

Teniendo en cuenta $\vdash \alpha \twoheadrightarrow \beta$ si, y sólo si, $1 = [\alpha \twoheadrightarrow \beta] = [\alpha] \twoheadrightarrow [\beta]$ tenemos que, $[\alpha] \leq [\beta]$ si, y sólo si, $[\alpha] \twoheadrightarrow [\beta] = 1$. De esta afirmación deducimos (a_3) y (a_4). $\square$

De la Proposición 3.5.4 y la Proposición 3.5.6 concluimos el siguiente teorema.

Teorema 3.5.7. *$\mathcal{F} = \langle F/\equiv, \wedge, \vee, f, D_1, \cdots, D_{n-1}, 0, 1\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{L}_n^m}$.*

3.6. El teorema de completitud

Por otra parte, como ℓ_n^m es consistente, de [66, VIII 7] y el Teorema 3.5.5 tenemos que vale teorema de completitud para ℓ_n^m, el cual está incluido en el Teorema 3.6.1.

Teorema 3.6.1. *Sea α una fórmula de ℓ_n^m. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) α *es derivable en* ℓ_n^m,

(ii) α *es válida en cada* L_n^m*–álgebra,*

(iii) $v_0(\alpha) = 1$, *donde* v_0 *es la valuación canónica* ([66, VIII 3.4]) en el álgebra $\mathcal{F}$.

Observación 3.6.2. *En el caso en que* $m = 1$, *concluimos que el cálculo proposicional* ℓ_n^1 *tiene como contrapartida algebraica a la álgebras de Łukasiewicz-Moisil* n*–valuadas.*

4. Capítulo IV

En este capítulo nos abocamos a desarrollar la teoría de localización para las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n, que tiene sus raíces en los trabajos de J. Schmid ([70]) y G. Georgescu ([35]). Para tal fin en primer lugar obtuvimos, en el Teorema 4.1.5, una nueva definición de las L_n^m–álgebras que es más conveniente para alcanzar los objetivos propuestos. A continuación, para cada L_n^m–álgebra L determinamos la L_n^m–álgebra de fracciones $L[C]$ con respecto a un sistema $\wedge$–cerrado C de L. En la Sección 4.3, que es el núcleo de este capítulo, introducimos la noción de 1–ideal en las L_n^m–álgebras lo que nos permitió considerar una topología para ellas. Además, definimos el concepto de $\mathcal{F}$– multiplicador, donde $\mathcal{F}$ es una topología para una L_n^m– álgebra L y construimos la L_n^m–álgebra de localización $L_{\mathcal{F}}$. Luego, demostramos que el álgebra $L[C]$ es una L_n^m–álgebra de localización. Por otra parte, definimos las nociones de subconjunto regular de una L_n^m–álgebra y la de L_n^m–álgebra de cocientes. Asimismo, obtuvimos algunos resultados que nos permitieron probar la existencia de la L_n^m–álgebra máximal de cocientes. Finalmente, en la última sección de este capítulo describimos explícitamente las L_n^m–álgebras $L[C]$ y $L_{\mathcal{F}}$ en el caso finito.

4.1. Introducción

Los multiplicadores fueron estudiados en diversas ramas de la matemática y la mejor fuente de información a tal fin es el trabajo de M. Petrich ([59]). En particular, el concepto de multiplicador para retículos distributivos fue introducido por W. H. Cornish en [29], en el cual prueba que dado un retículo L, el retículo de los multiplicadores $M(L)$ es la extensión maximal de L que lo contiene como ideal $\vee$–denso. Los multiplicadores sobre semiretículos y retículos habían sido estudiados previamente, desde el punto de vista de los operadores de interior, por G. Szász ([81]), G. Szász y J.Szendri ([82]), M. Kolibiar ([45]) entre otros autores.

En [81] y [82] los autores investigaron multiplicadores sobre semiretículos pensados, en primer lugar, como semigrupos y luego, como semiretículos superiores. En este último caso consideraron la noción dual de multiplicador, a la que denominaron traslación y determinaron diversas condiciones para que un operador de clausura sea una traslación.

Además, J. Schmid en [70] estudió $\wedge$–multiplicadores sobre semiretículos cuyos dominios son ideales del retículo. Pero su principal objetivo, fue mostrar que la conocida construcción del anillo de cocientes de un anillo conmutativo puede efectuarse para retículos distributivos siguiendo un razonamiento análogo.

Por otra parte, G. Georgescu en [35] definió la noción de $\mathcal{F}$–multiplicador donde $\mathcal{F}$ es una topología sobre un retículo distributivo L y determinó el retículo de localización $L_{\mathcal{F}}$ con respecto a $\mathcal{F}$ teniendo en cuenta, la construcción en teoría de anillos para determinar el anillo de localización asociado a una topología de Gabriel. Además, en este trabajo obtuvo algunos resultados sobre la localización de las álgebras Lukasiewicz y las álgebras de Post.

En 2005, D. Buşneag y F. Chirteş en [18] obtuvieron resultados similares para las álgebras de Lukasiewicz–Moisil n–valuadas. Estos autores definieron las nociones de álgebra Łukasiewicz–Moisil n–valuadas de fracciones y el álgebra maximal de fracciones, demostrando la existencia de esta última. Finalmente en este trabajo dieron una descripción explícita del álgebra maximal de fracciones para las álgebras de Lukasiewicz–Moisil n–valuadas finitas y las álgebras de Boole.

Por otra parte S. Rudeanu, en su importante trabajo [68], teniendo en cuenta que en un gran número de investigaciones en la teoría de localización y álgebra maximal de fracciones en diferentes clases de álgebras tales como: álgebras de Hilbert, álgebras de Hertz, MV álgebras, BL álgebras, pseudo–BL álgebras, pseudo–MV álgebras, retículos residuados y álgebras Lukasiewicz–Moisil, revelan técnicas y resultados similares, da un enfoque unificador con el propósito de eliminar redundancias.

A continuación consideraremos la siguiente definición de las L_n^m–álgebras que es equivalente a la dada en el Capítulo II pero a nuestro criterio es más útil para lo que sigue. Observemos que con el fin de que no existan confusiones con la notaciones, ya que vamos a trabajar con funciones, la negación será notada por N en lugar de f.

Definición 4.1.1. *Un álgebra de Łukasiewicz m–generalizada de orden n es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, N, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(GL_1) $\langle L, \vee, \wedge, N, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado, donde N es un endomorfismo dual tal que $N^{2m}x = x$, (es decir, $\langle L, \vee, \wedge, N, 0, 1\rangle \in \mathcal{K}_{m,0}$),*

(GL_2) $D_i(x \wedge \overline{y}) = D_ix \wedge D_i\overline{y},\ 1 \leq i \leq n-1,$ *donde $\overline{z}$ denota al elemento* $\bigvee_{p=0}^{m-1} N^{2p}z,$

(GL_3) $D_ix \wedge D_jx = D_jx,\ 1 \leq i \leq j \leq n-1,$

(GL_4) $D_ix \vee ND_ix = 1,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_5) $D_iN\overline{x} = ND_{n-i}\overline{x},\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_6) $D_iD_jx = D_jx,\ 1 \leq i, j \leq n-1,$

(GL_7) $x \vee D_1x = D_1x,$

(GL_8) $D_ix = D_i\overline{x},\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_9) $(x \wedge Nx) \vee y \vee Ny = y \vee Ny,$

(GL_{10}) $\overline{x} \leq \overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x},\ 1 \leq i \leq n-2.$

Lema 4.1.2. *Sea* $\langle L, \vee, \wedge, N, 0, 1\rangle \in \mathcal{K}_{m,0}$ *y* $x, y \in L$. *Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(K1) $N^2\overline{x} = \overline{x},$

(K2) $N\overline{x} = \overline{N\overline{x}},$

(K3) $N^2\overline{x} = N\overline{N\overline{x}},$

(K4) $x \leq y$ *implica* $\overline{x} \leq \overline{y},$

(K5) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y},$

(K6) $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$

Dem. Es de rutina. $\square$

Observación 4.1.3. *Sea* $L \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $D_i(L) = \{x \in L : D_ix = x\}$ *para cada* i, $1 \leq i \leq n-1$. *Entonces,* $D_i(L)$ *coincide con el conjunto* $B(S(L))$ *de todos elementos booleanos de* $S(L)$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$.

Lema 4.1.4. *Sea* $L \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $x, y \in L$. *Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(GL_{27}) $\overline{D_ix} = D_i\overline{x} = D_ix,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_{28}) $S(L) = \{x \in A : x = \overline{x}\}$,

(GL_{29}) $D_i x = D_i y$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$ *implica* $\overline{x} = \overline{y}$.

Dem. Solo probaremos (GL_{29}). De la hipótesis y (GL_8) tenemos que $D_i\overline{x} = D_i\overline{y}$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Además, por $(K1)$ inferimos que $\overline{x}, \overline{y} \in S(L)$. Entonces, de estas afirmaciones y sabiendo que $S(L)$ es una L_n-álgebra, por el Principio de Determinación de Moisil ([16, Proposition 4.3]) concluimos que $\overline{x} = \overline{y}$. $\square$

Teorema 4.1.5. *Sea* $\mathbb{L} = \langle L, \vee, \wedge, N, \{D_i\}_{1\leq i\leq n-1}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de tipo* $(2, 2, 1, \{1_i\}_{1\leq i\leq n-1}, 0, 0)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbb{L} \in \mathcal{L}_n^m$,

(ii) $\mathbb{L}$ *es una* $\mathcal{K}_{m,0}$*-álgebra y se verifican* (GL_2), (GL_3), (GL_4), (GL_5), (GL_6), (GL_8), (GL_9) *y* (GL_{29}).

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia directa de la Definición 2.1.4 y el Lema 4.1.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sólo queda por demostrar (GL_7) y (GL_{10}). Para ello probaremos primero que se cumplen las siguientes propiedades:

(I) $N^2 D_i\overline{x} = D_i x$. Teniendo en cuenta (GL_5), (GL_8) y el Lema 4.1.2 tenemos que $N^2 D_i\overline{x} = N(ND_i\overline{x}) = ND_{n-i}\overline{N\overline{x}} = D_i N\overline{N\overline{x}} = D_i(N^2\overline{x}) = D_i\overline{x} = D_i x$.

(II) $D_i(x \vee y) = D_i x \vee D_i y$. Aplicando (GL_8), (I), el Lema 4.1.2, (GL_5), (GL_1) y (GL_2) inferimos que $D_i(x\vee y) = D_i(\overline{x \vee y}) = D_i N^2(\overline{x}\vee\overline{y}) = D_i N(N\overline{x}\wedge N\overline{y}) = ND_{n-i}(\overline{N\overline{x}}\wedge \overline{N\overline{y}}) = N(D_{n-i}(N\overline{x})\wedge D_{n-i}(N\overline{y})) = ND_{n-i}(N\overline{x})\vee ND_{n-i}(N\overline{y})) = N^2 D_i\overline{x}\vee N^2 D_i\overline{y} = D_i x \vee D_i y$.

(III) $D_j ND_i x = ND_i x$, $1 \leq i, j \leq n-1$. Es consecuencia directa de (I), (GL_5), el Lema 4.1.2, (GL_6) y (GL_8).

(IV) $\overline{D_i x} = D_i x$. Teniendo en cuenta (I) podemos afirmar que $\overline{D_i \overline{x}} = D_i x$. Luego por (GL_8) concluimos la demostración.

(GL_7) Usando (GL_2), (GL_8), (IV), (GL_6) y (GL_3) tenemos que $D_i(\overline{x} \wedge \overline{D_1 x}) = D_i\overline{x} \wedge D_i\overline{D_1 x} = D_i x \wedge D_i D_1 x = D_i x \wedge D_1 x = D_i x$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Luego, por (GL_{29}) obtenemos que $\overline{\overline{x} \wedge \overline{D_1 x}} = \overline{x}$ de donde por el Lema 4.1.2 y (IV) inferimos que $\overline{x} \wedge D_1 x = \overline{x}$. Por lo tanto, $\overline{x} \leq D_1 x$ lo que implica que $x \leq D_1 x$.

(GL_{10}) Usando (II), (III) y (GL_6) obtenemos que $D_j(\overline{x} \vee \overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x}) = D_j\overline{x} \vee D_j\overline{y} \vee D_j ND_i\overline{y} \vee D_j D_{i+1}\overline{x} = D_j\overline{x} \vee D_j\overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x}$. Si $i+1 \leq j$, por (GL_3) tenemos que $D_j\overline{x} \leq D_{i+1}\overline{x}$, entonces por (III), (GL_6) y (II) deducimos que $D_j(\overline{x} \vee \overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x}) = D_j\overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x} = D_j(\overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x})$. Si $j < i+1$, por (GL_4) tenemos que $D_j\overline{y} \vee ND_i\overline{y} = 1$. Por lo tanto, $1 = D_j\overline{x} \vee D_j\overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x}$. Por otra parte, de (II), (III) y (GL_6) concluimos que $D_j(\overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x}) = 1$. Por consiguiente, $D_j(\overline{x} \vee \overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x}) = D_j(\overline{y} \vee ND_i\overline{y} \vee D_{i+1}\overline{x})$ para todo j, $1 \leq j \leq n-1$. Entonces, en ambos casos a partir de estas afirmaciones, (GL_{29}) y el Lema 4.1.2 concluimos que se verifica (GL_{10}). □

Si bien la definición de homomorfismo es la indicada en el Capítulo I, en el caso particular de las L_n^m–álgebras la misma queda descripta del siguiente modo.

Definición 4.1.6. *Sean $L, L' \in \mathcal{L}_n^m$. Una función $h : L \longrightarrow L'$ es un L_n^m-homomorfismo si se verifican las siguientes condiciones para todo $x, y \in L$:*

(i) $h(0) = 0$, $h(1) = 1$,

(ii) $h(Nx) = Nh(x)$,

(iii) $h(D_i x) = D_i h(x)$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$,

(iv) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$,

(v) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$.

Observemos que la condición (v) en la Definición 4.1.6 es una consecuencia directa de (ii), (iii), $(O3)$ y el hecho que $N^{2m}z = z$.

Definición 4.1.7. *Sean $L, L' \in \mathcal{L}_n^m$ y $h : L \longrightarrow L'$ un homomorfismo. El nucleo de h, que notaremos $ker(h)$, está definido por:*

$$ker(h) = \{(x, y) \in L \times L : h(x) = h(y)\}.$$

Es bien sabido ([19]) que $ker(h)$ es una congruencia de L.

4.2. L_n^m–álgebra de fracciones relativa a un sistema $\wedge$–cerrado

Definición 4.2.1. *Un subconjunto no vacío C de una L_n^m–álgebra L es un sistema $\wedge$–cerrado de L, si satisface las siguientes condiciones:*

(S1) $1 \in C$,

(S2) $x, y \in C$ *implican* $x \wedge y \in C$.

Denotaremos por $C(L)$ al conjunto de todos sistemas $\wedge$–cerrados de L.

Lema 4.2.2. *Sea C un sistema $\wedge$–cerrado de una L_n^m–algebra L. Entonces, la relación binaria θ_C definida por*

$$(x, y) \in \theta_C \Leftrightarrow \text{ existe } s \in C \cap B(S(L)) \text{ tal que } x \wedge s = y \wedge s$$

es una congruencia de L.

Dem. Solo probaremos que θ_C es compatible con $\wedge$, D_i para todo i, $1 \leq i \leq n-1$ y N. Sea $(x, y) \in \theta_C$. Entonces, existe $s \in C \cap B(S(L))$ tal que (1) $x \wedge s = y \wedge s$. Por consiguiente, $(x \wedge z) \wedge s = (y \wedge z) \wedge s$ para todo $z \in L$. Luego, $(x \wedge z, y \wedge z) \in \theta_C$ para todo $z \in L$.

De esta afirmación y la hipótesis que $(x_1, y_1) \in \theta_C$, tenemos que $(x \wedge x_1, y \wedge x_1) \in \theta_C$ y $(x_1 \wedge y, y_1 \wedge y) \in \theta_C$ de donde por la transitividad de θ_C concluimos que $(x \wedge x_1, y \wedge y_1) \in \theta_C$. Además, de (1) y (GL_{26}) inferimos que $D_i x \wedge D_i s = D_i y \wedge D_i s$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$ y entonces, por la Observación 4.1.3 tenemos que $(D_i x, D_i y) \in \theta_C$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Por otra parte, (1) implica que $Nx \vee ND_j s = Ny \vee ND_j s$, $1 \leq j \leq n-1$, de donde por (GL_{20}) concluimos que $(Nx, Ny) \in \theta_C$. □

Sea C un sistema $\wedge$–cerrado de una L_n^m–álgebra L y $x \in L$. Entonces, denotaremos con $L[C]$ al álgebra cociente L/θ_C y con $q_C : L \to L[C]$ al homomorfismo canónico.

Observación 4.2.3. *Como para cada $s \in C \cap B(S(L))$ tenemos que $s \wedge s = s \wedge 1$, entonces $[s]_C = [1]_C$ y por lo tanto, $q_C(C \cap B(S(L))) = \{[1]_C\}$.*

Teorema 4.2.4. *Si $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $f : L \to L'$ es un L_n^m–homomorfismo tal que $f(C \cap B(S(L))) = \{1\}$, entonces existe un único L_n^m–homomorfismo $f' : L[C] \to L'$ tal que $f' \circ q_C = f$.*

Dem. En primer lugar observemos que $ker(q_C) \subseteq ker(f)$. En efecto, sea $(x, y) \in ker(q_C) = \theta_C$, entonces existe $s \in C \cap B(S(L))$ tal que $x \wedge s = y \wedge s$. Esta última afirmación y el hecho que $f(C \cap B(S(L))) = \{1\}$ implican que $f(x) = f(x) \wedge f(s) = f(y) \wedge f(s) = f(y)$. Por lo tanto, $(x, y) \in ker(f)$. Entonces, como consecuencia directa de [16, Proposition 5.16 (ii)] concluimos la demostración. □

El Teorema 4.2.4 nos permite llamar a $L[C]$ la L_n^m–álgebra de fracciones relativa a un sistema $\wedge$–cerrado C de L.

Observación 4.2.5. *Del Teorema 4.2.4 tenemos que:*

(i) *Si $C \cap B(S(L)) = \{1\}$, entonces θ_C coincide con la congruencia identidad de L de donde resulta que $L[C] \simeq L$.*

(ii) *Si C es un sistema $\wedge$–cerrado de L tal que $0 \in C$ (por ejemplo $C = L$ o $C = B(S(L))$), entonces $\theta_C = L \times L$. Luego, $L[C] = \{[0]_C\}$.*

4.3. $\mathcal{F}$–multiplicadores y la localización en las L_n^m–álgebras

Teniendo en cuenta las localizaciones construidas por la escuela de Georgescu-Buşneag en términos de multiplicadores, nosotros desarrollaremos la localización para el caso particular de las L_n^m - álgebras. Entonces, teniendo en cuenta el importante trabajo de S. Rudeanu ([68]), el punto de partida de esta sección es definir un concepto adecuado de ideal y de considerar una familia conveniente $\mathcal{F}$ de ideales que nos permitirá definir la noción de $\mathcal{F}$–multiplicador.

Definición 4.3.1. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Un subconjunto no vacío I de L es un 1–ideal de L, si I es un ideal del retículo L que verifica la condición: $x \in I$ implica $D_1 x \in I$.*

Observemos que $\{0\}$ y L son 1–ideales de L. Denotaremos con $\mathcal{I}_1(L)$ al conjunto de todos los 1–ideales de L.

Observación 4.3.2. *Si $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y $x \in I$, entonces de (GL_3) inferimos que $D_i x \in I$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.*

Si X es un subconjunto no vacío de L, denotaremos por $\langle X \rangle$ al 1–ideal de L generado por X. En particular, si $X = \{a\}$ escribiremos $\langle a \rangle$ en lugar de $\langle \{a\} \rangle$.

Es simple probar que:

$$\langle X \rangle = \{y \in L : \text{ existen } x_1, \ldots, x_k \in X \text{ tal que } y \leq D_1(\bigvee_{i=1}^{k} x_i)\}.$$

Por otra parte, si $a \in L$ entonces $\langle a \rangle = \{x \in L : x \leq D_1 a\}$ y si $a \in B(S(L))$ inferimos que $\langle a \rangle = \{x \in L : x \leq a\}$.

Sea $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y $x \in L$. Denotaremos por $(I : x) = \{y \in L : x \wedge \overline{y} \in I\}$.

Lema 4.3.3. *Sea $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y $x \in L$. Entonces $(I : x)$ es un 1–ideal de L.*

Dem. Es consecuencia directa de la Definición 4.3.1, (GL_{26}), (GL_{27}) y (GL_7). □

Definición 4.3.4. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ e $I \in \mathcal{I}_1(L)$. Un multiplicador de L es una función $h : I \to L$, que verifica la siguiente condición:*

$$h(e \wedge x) = e \wedge h(x), \textit{ para cada } e \in L \textit{ y } x \in I \cap S(L).$$

Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Denotaremos con $M(I, L)$ al conjunto de todos los multiplicadores con dominio $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y con $M(L) = \bigcup\limits_{I \in \mathcal{I}_1(L)} M(I, L)$.

Lema 4.3.5. *Si $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y $f : I \to L$ es un multiplicador de L, entonces $f(x) \leq x$ para todo $x \in I$.*

Dem. Sea $x \in I$. Teniendo en cuenta que $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y que $x \leq \overline{x}$, resulta que $\overline{x} \in I$. Esta afirmación y $(K1)$ implican que $\overline{x} \in I \cap S(L)$ de donde por la Definición 4.3.4 inferimos que $f(x) = f(x \wedge \overline{x}) = x \wedge f(\overline{x})$. Luego, $f(x) \leq x$. □

Lema 4.3.6. *Sean $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $h, g \in M(I, L)$. Entonces $h(x) = g(x)$ para todo $x \in I \cap S(L)$ implica que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.*

Dem. Sea $x \in I$. Como $I \in \mathcal{I}_1(L)$ y $\overline{x} \leq D_1 x$, tenemos que $\overline{x} \in I \cap S(L)$. Entonces de la hipótesis inferimos que $h(\overline{x}) = g(\overline{x})$ y teniendo en cuenta que h y g son multiplicadores, tenemos que $h(x) = h(x \wedge \overline{x}) = x \wedge h(\overline{x}) = x \wedge g(\overline{x}) = g(x)$. □

Teniendo en cuenta la noción de topología para retículos introducida en [35], nosotros consideramos este concepto para el caso particular de las L_n^m–álgebras.

Definición 4.3.7. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $\mathcal{F}$ un conjunto no vacío de 1–ideales de L. $\mathcal{F}$ se dirá una topología para L si se verifican las siguientes condiciones:*

(T1) *Si* $I \in \mathcal{F}$ *y* $x \in L$*, entonces* $(I : x) \in \mathcal{F}$*,*

(T2) *Si* I_1*,* $I_2 \in \mathcal{I}_1(L)$*,* $I_2 \in \mathcal{F}$ *y* $(I_1 : x) \in \mathcal{F}$ *para todo* $x \in I_2$*, entonces* $I_1 \in \mathcal{F}$*.*

Como en el caso de los retículos distributivos ([39]) nosotros tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.3.8. *Sea* $\mathcal{F}$ *una topología para una* L_n^m*–álgebra* L*.*

(i) *Si* $I_1 \in \mathcal{F}$ *y* $I_2 \in \mathcal{I}_1(L)$ *son tales que* $I_1 \subseteq I_2$*, entonces* $I_2 \in \mathcal{F}$*,*

(ii) *Si* I_1*,* $I_2 \in \mathcal{F}$*, entonces* $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{F}$*.*

La intersección de topologías para L es una topología. Entonces el conjunto de todas las topologías para L es un retículo completo con respecto a la inclusión. A continuación, vamos a demostrar que cada sistema $\wedge$– cerrado de L determina una topología para L.

Proposición 4.3.9. *Sea* $L \in \mathcal{L}_n^m$ *y* $C \in C(L)$*. Entonces* $\mathcal{F}_C = \{I \in \mathcal{I}_1(L) : I \cap C \cap B(S(L)) \neq \emptyset\}$ *es una topología para* L*.*

Dem. Si $I \in \mathcal{F}_C$ y $x \in L$, entonces del Lema 4.3.3 y el hecho que $I \subseteq (I : x)$ resulta que $(I : x) \in \mathcal{F}_C$. Por lo tanto, (T1) se verifica. Con el propósito de demostrar (T2), sean I_1, $I_2 \in \mathcal{I}_1(L)$ tales que $I_2 \in \mathcal{F}_C$ y $(I_1 : x) \in \mathcal{F}_C$ para cada $x \in I_2$. Sea $x_0 \in I_2 \cap C \cap B(S(L))$, entonces de la hipótesis tenemos que $(I_1 : x_0) \in \mathcal{F}_C$ de donde resulta que existe $y_0 \in (I_1 : x_0) \cap C \cap B(S(L))$. Luego, $x_0 \wedge y_0 \in I_1 \cap C \cap B(S(L))$ y por lo tanto concluimos que $I_1 \in \mathcal{F}_C$. $\square$

La topología $\mathcal{F}_C$ será llamada la topología asociada con el sistema $\wedge$–cerrado C de L.

Usando el concepto de $\mathcal{F}$–multiplicadores, asociaremos a cada topología $\mathcal{F}$ para una L_n^m–álgebra L un álgebra $L_{\mathcal{F}}$ que juega el mismo rol para estas álgebras que el anillo de localización en la teoría de anillos.

Sea $\mathcal{F}$ una topología para una L_n^m–álgebra L. Consideremos la relación binaria $\theta_{\mathcal{F}}$ definida sobre L de la siguiente manera:

$$(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \text{existe } I \in \mathcal{F} \text{ tal que } e \wedge x = e \wedge y \text{ para todo } e \in I \cap S(L).$$

Lema 4.3.10. *$\theta_{\mathcal{F}}$ es una L_n^m–congruencia de L.*

Dem. Es simple verificar las propiedades reflexiva y simétrica. La propiedad transitiva resulta de (ii) del Lema 4.3.8. Por otra parte sea $(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}}$, luego existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $e \wedge x = e \wedge y$ para todo $e \in I \cap S(L)$. Entonces, para todo $z \in L$ tenemos que $e \wedge (x \wedge z) = e \wedge (y \wedge z)$ y $e \wedge (x \vee z) = e \wedge (y \vee z)$ para todo $e \in I \cap S(L)$. Por lo tanto, $\theta_{\mathcal{F}}$ es compatible con $\wedge$ y $\vee$. Además, de la Observación 4.3.2 inferimos que $D_i e \wedge x = D_i e \wedge y$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Luego, de (GL_{26}) y (GL_6) deducimos que $D_i e \wedge D_j x = D_i e \wedge D_j y$ para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$ y así tenemos que $D_i(e \wedge D_j x) = D_i(e \wedge D_j y)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. De esta última afirmación y teniendo en cuenta que $e \wedge D_j x$, $e \wedge D_j y \in S(L)$, obtenemos que $e \wedge D_j x = e \wedge D_j y$ para todo $e \in I \cap S(L)$, con lo que concluimos que $(D_j x, D_j y) \in \theta_{\mathcal{F}}$, para todo j, $1 \leq j \leq n-1$. Por otra parte, como $I \in \mathcal{I}_1(L)$ tenemos que $D_1 e \wedge x = D_1 e \wedge y$ y por (GL_1) resulta que $ND_1 e \vee Nx = ND_1 e \vee Ny$. De esta última afirmación, (GL_{13}) y (GL_7) inferimos que $(Nx, Ny) \in \theta_{\mathcal{F}}$. $\square$

Por lo tanto, $L/\theta_{\mathcal{F}}$ es una L_n^m–álgebra. Observemos que, a fin de simplificar la notación, utilizaremos para las operaciones del álgebra cociente $L/\theta_{\mathcal{F}}$ la misma notación que para la L_n^m–álgebra L.

Definición 4.3.11. *Sea $\mathcal{F}$ una topología para L e $I \in \mathcal{F}$. Un $\mathcal{F}$–multiplicador de L es una función $f : I \to L/\theta_{\mathcal{F}}$, que verifica la siguiente condición:*

$$f(e \wedge x) = [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f(x), \text{ para cada } e \in L \text{ y } x \in I \cap S(L).$$

Lema 4.3.12. *Para cada $\mathcal{F}$–multiplicador $f : I \to L/\theta_{\mathcal{F}}$, $f(x) \leq [x]_{\theta_{\mathcal{F}}}$ para todo $x \in I$.*

Dem. Es consecuencia directa de (GL_7) y la Definición 4.3.11. $\square$

Las funciones $\mathbf{0}, \mathbf{1} : L \to L/\theta_{\mathcal{F}}$ definidas por $\mathbf{0}(x) = [0]_{\theta_{\mathcal{F}}}$ y $\mathbf{1}(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}}$ para todo $x \in L$ son $\mathcal{F}$–multiplicadores.

Denotaremos con $M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ al conjunto de los $\mathcal{F}$–multiplicadores con dominio $I \in \mathcal{F}$ y por

$$M(L/\theta_{\mathcal{F}}) = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} M(I, L/\theta_{\mathcal{F}}).$$

Si $I, J \in \mathcal{F}$ e $I \subseteq J$, tenemos una función canónica $\delta_{I,J} : M(J, L/\theta_{\mathcal{F}}) \to M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ definida por $\delta_{I,J}(f) = f\mid_I$ para cada $f \in M(J, L/\theta_{\mathcal{F}})$.

Consideremos el sistema directo de conjuntos

$$\langle \{M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})\}_{I \in \mathcal{F}}, \{\delta_{J,I}\}_{I,J \in \mathcal{F}, I \subseteq J} \rangle$$

y denotaremos con $L_{\mathcal{F}}$ al límite inductivo (en la categoría de conjuntos):

$$L_{\mathcal{F}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} M(I, L/\theta_{\mathcal{F}}).$$

Para cada $\mathcal{F}$–multiplicador $f : I \to L/\theta_{\mathcal{F}}$ denotaremos con $\widehat{(I, f)}$ a la clase de congruencia de f en $L_{\mathcal{F}}$.

Observación 4.3.13. *Si $f_i : I_i \to L/\theta_{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2$ son $\mathcal{F}$–multiplicadores, entonces $\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$ si, y sólo si existe $K \in \mathcal{F}$, $K \subseteq I_1 \cap I_2$ tal que $f_1\mid_K = f_2\mid_K$.*

Sea $f_i \in M(I_i, L/\theta_{\mathcal{F}})$, $i = 1, 2$. Entonces consideremos las siguientes funciones

$$f_1 \wedge f_2,\ f_1 \vee f_2 : I_1 \cap I_2 \to L/\theta_{\mathcal{F}}$$

definidas por

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x),$$

$$(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x),$$

para todo $x \in I_1 \cap I_2$.

Lema 4.3.14. $f_1 \wedge f_2,\ f_1 \vee f_2 \in M(I_1 \cap I_2, L/\theta_{\mathcal{F}})$.

Dem. La demostración es directa. □

Para cada $f \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$, consideremos la función

$$f^* : I \to L/\theta_{\mathcal{F}}$$

definida por

$$f^*(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge Nf(D_1 x)$$

para todo $x \in I$.

Lema 4.3.15. $f^* \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$.

Dem. Es consecuencia directa de (GL_{26}), (GL_1) y (GL_{24}). En efecto,

$$\begin{aligned}
f^*(e \wedge x) &= [e \wedge x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge Nf(D_1(e \wedge x)) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge Nf(D_1 e \wedge D_1 x) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N([D_1 e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f(D_1 x)) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge (N[D_1 e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \vee Nf(D_1 x)) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge Nf(D_1 x).
\end{aligned}$$

Luego, $f^*(e \wedge x) = [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f^*(x)$. □

Observación 4.3.16. *Para todo $x \in L$, tenemos que* $\mathbf{0}^*(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N[0]_{\theta_{\mathcal{F}}} = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [1]_{\theta_{\mathcal{F}}} = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}}$, *es decir,* $\mathbf{0}^* = \mathbf{1}$. *Análogamente resulta que* $\mathbf{1}^* = \mathbf{0}$.

Sea $f \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$. Para cada i, $1 \leq i \leq n-1$ consideremos la función

$$\widetilde{D_i} : M(I, L/\theta_{\mathcal{F}}) \to M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$$

definida por

$$\widetilde{D_i} f(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 x)$$

para todo $x \in I$.

Lema 4.3.17. *$\widetilde{D_i} f \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.*

Dem. Se deduce de (GL_{26}), (GL_6) y (GL_7). En efecto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{D_i} f(e \wedge x) &= [e \wedge x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1(e \wedge x)) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 e \wedge D_1 x) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i([D_1 e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f(D_1 x)) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [D_1 e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 x) \\
&= [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{D_i} f(e \wedge x) = [e]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \widetilde{D_i} f(x)$. □

Observación 4.3.18. *Para cada $f \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ denotaremos con $\overline{f} = \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{*_{2p}}$, donde $f^{*_0}(x) = x$, $f^{*_1}(x) = f^*(x)$ y $f^{*_j}(x) = (f^{*_{j-1}})^*(x)$ para todo j, $1 < j \leq m-1$. Además, $\widehat{(I, f)}^{*_j}$ y $\overline{\widehat{(I, f)}}$ lo denotaremos con $\widehat{(I, f^{*_j})}$ y $\widehat{(I, \overline{f})}$, respectivamente.*

Lema 4.3.19. *Si $f \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$, entonces se verifican las siguientes identidades:*

(i) $f^{*_j}(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N^j f(D_1 x)$ *para todo j, $1 \leq j \leq 2m-1$,*

(ii) $\overline{f}(x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \overline{f}(D_1 x)$.

Dem. Es de rutina. □

Observación 4.3.20. *Del Lema 4.3.14, Lema 4.3.15 y Lema 4.3.17 podemos definir en $L_{\mathcal{F}}$ las siguientes operaciones:*

$$\widehat{(I_1, f_1)} \wedge \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \wedge f_2),$$

$$\widehat{(I_1, f_1)} \vee \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \vee f_2),$$

$$\widehat{(I, f)}^{\,*} = \widehat{(I, f^*)},$$

$$D_i^{\mathcal{F}}\widehat{(I, f)} = (\widehat{I, \widetilde{D}_i f}), \text{ para cada } i,\ 1 \leq i \leq n-1.$$

Además, denotaremos a $\widehat{(L, \mathbf{0})}$ y $\widehat{(L, \mathbf{1})}$ con $\widehat{\mathbf{0}}$ y $\widehat{\mathbf{1}}$, respectivamente.

Proposición 4.3.21. $\langle L_{\mathcal{F}}, \wedge, \vee, ^*, \{D_i^{\mathcal{F}}\}_{1 \leq i \leq n-1}, \widehat{\mathbf{0}}, \widehat{\mathbf{1}} \rangle$ *es una L_n^m–álgebra.*

Dem. Para probar esta afirmación utilizaremos el Teorema 4.1.5. Sea $f \in M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ y $f_k \in M(I_k, L/\theta_{\mathcal{F}})$, donde $I, I_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2$ y sea $I' = I_1 \cap I_2 \in \mathcal{F}$.

(GL_1): Es simple verificar que $\langle M(I, L/\theta_{\mathcal{F}}), \wedge, \vee, \widehat{\mathbf{0}}, \widehat{\mathbf{1}} \rangle$ es un retículo distributivo acotado. Además, es una $K_{m,0}$–álgebra, ya que para todo $x \in I'$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(f_1 \vee f_2)^*(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N(f_1 \vee f_2)(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N(f_1(D_1 x) \vee f_2(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge (N f_1(D_1 x) \wedge N f_2(D_1 x)) \\
&= ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N f_1(D_1 x)) \wedge ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N f_2(D_1 x)) \\
&= f_1^*(x) \wedge f_2^*(x).
\end{aligned}$$

Entonces, $(f_1 \vee f_2)^* = f_1^* \wedge f_2^*$. Por lo tanto, $(\widehat{(I_1, f_1)} \vee \widehat{(I_2, f_2)})^* = (\widehat{(I_1, f_1)}^{\,*} \wedge (\widehat{(I_2, f_2)}^{\,*}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta la Observación 4.3.18, el Lema 4.3.19, (GL_1), (GL_6), (GL_{24}) y (GL_7) tenemos que para todo $x \in I$

$$\begin{aligned}
f^{*2m}(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N f^{*2m-1}(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N([D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N^{2m-1} f(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge (N[D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \vee f(D_1 x)) \\
&= ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N[D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}}) \vee ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f(D_1 x)) \\
&= [0]_{\theta_{\mathcal{F}}} \vee ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f(D_1 x) \\
&= f(x \wedge D_1 x) = f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{*2m} = f$. Luego $\widehat{(I,f)}^{*2m} = \widehat{(I,f)}$.

Para completar la demostración queda por verificar

(GL_2): Para todo $x \in I'$ e $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{D_i}(f_1 \wedge \overline{f_2})(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i(f_1(D_1 x) \wedge \overline{f_2}(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f_1(D_1 x) \wedge D_i \overline{f_2}(D_1 x) \\
&= \widetilde{D_i} f_1(x) \wedge \widetilde{D_i} \overline{f_2}(x) \\
&= (\widetilde{D_i} f_1 \wedge \widetilde{D_i} \overline{f_2})(x).
\end{aligned}$$

Entonces, $\widetilde{D_i}(f_1 \wedge \overline{f_2}) = \widetilde{D_i} f_1 \wedge \widetilde{D_i} \overline{f_2}$ y por lo tanto, $D_i^{\mathcal{F}}(\widehat{I', f_1 \wedge \overline{f_2}}) = D_i^{\mathcal{F}}(\widehat{I_1, f_1}) \wedge D_i^{\mathcal{F}}(\widehat{I_2, \overline{f_2}})$.

(GL_3): Para todo $x \in I$ e $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tales que $i \leq j$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{D_i} f(x) \wedge \widetilde{D_j} f(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 x) \wedge D_j f(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_j f(D_1 x) = \widetilde{D_j} f(x).
\end{aligned}$$

Entonces, $\widetilde{D_i} f \wedge \widetilde{D_j} f = \widetilde{D_j} f$ para todo i, j, $1 \leq i \leq j \leq n-1$, lo que implica que $D_i^{\mathcal{F}}\widehat{(I,f)} \wedge D_j^{\mathcal{F}}\widehat{(I,f)} = D_j^{\mathcal{F}}\widehat{(I,f)}$.

(GL_4): Para todo $x \in I$ e $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{D_i} f \vee (\widetilde{D_i} f)^*)(x) &= \widetilde{D_i} f(x) \vee (\widetilde{D_i} f)^*(x) \\
&= ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 x)) \vee ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N\widetilde{D_i} f(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge (D_i f(D_1 x) \vee N([D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i f(D_1 D_1 x))) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge (D_i f(D_1 x) \vee [N D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \vee N D_i f(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [1]_{\theta_{\mathcal{F}}} = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}}.
\end{aligned}$$

Luego, $\widetilde{D_i} f \vee (\widetilde{D_i} f)^* = \mathbf{1}$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, $D_i^{\mathcal{F}} \widehat{(I, f)} \vee (D_i^{\mathcal{F}} \widehat{(I, f)})^* = \widehat{\mathbf{1}}$.

(GL_5): Para todo $x \in I$ e $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, aplicando (GL_{20}), (GL_5) y (GL_{26}) tenemos que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{D_i} \overline{f})^*(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N\widetilde{D_i} \overline{f}(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N([D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i \overline{f}(D_1 D_1 x)) \\
&= ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N[D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}}) \vee ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N D_i \overline{f}(D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N D_i \overline{f}(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_{n-i} N \overline{f}(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_{n-i} [D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_{n-i} N \overline{f}(D_1 x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_{n-i}([D_1 x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge N \overline{f}(D_1 D_1 x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_{n-i}(\overline{f})^*(D_1 x) = \widetilde{D_{n-i}}(\overline{f})^*(x).
\end{aligned}$$

Luego, $(\widetilde{D_i} \overline{f})^* = \widetilde{D_{n-i}}(\overline{f})^*$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$ y entonces $(D_i^{\mathcal{F}} \widehat{(I, \overline{f})})^* = (D_{n-i}^{\mathcal{F}} \widehat{(I, \overline{f})})^*$.

(GL_6): Para todo $x \in I$ e $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, teniendo en cuenta (GL_6), (GL_{26}) y (GL_7)

resulta que

$$\begin{aligned}
\widetilde{D_i}\widetilde{D_j}f(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i\widetilde{D_j}f(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i[D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_iD_jf(D_1D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [D_iD_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_iD_jf(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_jf(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_jf(D_1x) = \widetilde{D_j}f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{D_i}\widetilde{D_j}f = \widetilde{D_j}f$ para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n-1$, lo cual implica que $D_i^{\mathcal{F}}D_j^{\mathcal{F}}\widehat{(I,f)} = D_j^{\mathcal{F}}\widehat{(I,f)}$.

(GL_8): Para todo $x \in I$ e $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, aplicando el Lema 4.3.19, (GL_{26}), (GL_6), (GL_7) y (GL_8) tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{D_i}\overline{f}(x) &= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i\overline{f}(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i([D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \overline{f}(D_1D_1x)) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [D_iD_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i\overline{f}(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge [D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i\overline{f}(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_if(D_1x) = \widetilde{D_i}f(x).
\end{aligned}$$

Luego, $\widetilde{D_i}\overline{f} = \widetilde{D_i}f$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, $D_i^{\mathcal{F}}\overline{\widehat{(I,f)}} = D_i^{\mathcal{F}}\widehat{(I,f)}$.

(GL_9): Para todo $x \in I'$, de (GL_7) y (GL_9) obtenemos que

$$\begin{aligned}
(f_1 \wedge f_1^*)(x) &= f_1(x) \wedge f_1^*(x) \\
&= f_1(x \wedge D_1x) \wedge f_1^*(x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f_1(D_1x) \wedge [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge Nf_1(D_1x) \\
&= [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f_1(D_1x) \wedge Nf_1(D_1x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge (f_2(D_1x) \vee Nf_2(D_1x)) \\ &= ([x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge f_2(D_1x)) \vee f_2^*(x) \\ &= f_2(x \wedge D_1x) \vee f_2^*(x) \\ &= (f_2 \vee f_2^*)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_1 \wedge f_1^* \leq f_2 \vee f_2^*$ y entonces, $((\widehat{(I_1, f_1)} \wedge \widehat{(I_1, f_2)}^*) \vee \widehat{(I_2, f_2)} \vee \widehat{(I_2, f_2)}^* = \widehat{(I_2, f_2)} \vee \widehat{(I_2, f_2)}^*$.

(GL_{29}): Sea $\widetilde{D_i}\overline{f_1} = \widetilde{D_i}\overline{f_2}$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Entonces, para todo $x \in I'$ teniendo en cuenta (GL_6), (GL_{26}), Lema 4.3.19 y (L_7) tenemos que se verifican las siguientes igualdades:

1. $\widetilde{D_i}\overline{f_1}(D_1x) = \widetilde{D_i}\overline{f_2}(D_1x)$,

2. $[D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i\overline{f}_1(D_1D_1x) = [D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge D_i\overline{f}_2(D_1D_1x)$,

3. $D_i([D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \overline{f_1}(D_1x)) = D_i([D_1x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \overline{f_2}(D_1x))$,

4. $D_i\overline{f_1}(D_1x) = D_i\overline{f_2}(D_1x)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$

5. $\overline{f_1}(D_1x) = \overline{f_2}(D_1x)$.

A partir de esta última igualdad concluimos que $\overline{f_1}(x) = \overline{f_1}(x \wedge D_1x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \overline{f_1}(D_1x) = [x]_{\theta_{\mathcal{F}}} \wedge \overline{f_2}(D_1x) = \overline{f_2}(x \wedge D_1x) = \overline{f_2}(x)$, para todo $x \in I'$. Por lo tanto, $\overline{f_1} = \overline{f_2}$. Luego, $D_i^{\mathcal{F}}\widehat{(I_1, f_1)} = D_i^{\mathcal{F}}\widehat{(I_2, f_2)}$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$ lo que implica que $\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$.

Entonces de los resultados anteriores y teniendo en cuenta el Teorema 4.1.5 concluimos la demostración. $\square$

La L_n^m–álgebra $L_{\mathcal{F}}$ será llamada la L_n^m–álgebra de localización de L con respecto a la topología $\mathcal{F}$.

Lema 4.3.22. *Sea $\mathcal{F}_C$ la topología asociada al sistema $\wedge$–cerrado C. Entonces $\theta_{\mathcal{F}_C} = \theta_C$.*

Dem. Sea $(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}_C}$. Entonces existe $I \in \mathcal{F}_C$ tal que $s \wedge x = s \wedge y$, para todo $s \in I \cap S(L)$. Como existe $s_0 \in I \cap C \cap B(S(L))$ tal que $s_0 \wedge x = s_0 \wedge y$, inferimos que $(x, y) \in \theta_C$. Recíprocamente, sea $(x, y) \in \theta_C$. Entonces existe $s_0 \in C \cap B(S(L))$ tal que $x \wedge s_0 = y \wedge s_0$. Considerando que $I = \langle s_0 \rangle$ concluimos que $(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}_C}$. □

Observación 4.3.23. *Del Lema 4.3.22, tenemos que $L/\theta_{\mathcal{F}_C} = L[C]$. Entonces un $\mathcal{F}_C$–multiplicador puede ser considerado como una función $f : I \to L[C]$ donde $I \in \mathcal{F}_C$ y $f(e \wedge x) = [e]_C \wedge f(x)$ para todo $x \in I$ y $e \in L$.*

Lema 4.3.24. *Sea $\widehat{(I_1, f_1)}, \widehat{(I_2, f_2)} \in L_{\mathcal{F}_C}$ tal que $\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$. Entonces, existe $I \subseteq I_1 \cap I_2$ tal que $f_1(s_0) = f_2(s_0)$ para todo $s_0 \in I \cap C \cap B(S(L))$.*

Dem. De la hipótesis y la Observación 4.3.13, tenemos que existe $I \in \mathcal{F}_C$, $I \subseteq I_1 \cap I_2$ tal que $f_1 \mid_I = f_2 \mid_I$ y por lo tanto, $f_1(s_0) = f_2(s_0)$ para cada $s_0 \in I \cap C \cap B(S(L))$. □

Teorema 4.3.25. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Si $\mathcal{F}_C$ es la topología asociada al sistema $\wedge$–cerrado C entonces, $L_{\mathcal{F}_C}$ es isomorfa a $L[C]$.*

Dem. Sea $\alpha : L_{\mathcal{F}_C} \to L[C]$ definida por $\alpha\widehat{(I, f)} = f(s)$ para todo $s \in I \cap C \cap B(S(L))$. Del Lema 4.3.24, tenemos que α está bien definida. Además, α es inyectiva. En efecto, supongamos que $\alpha\widehat{(I_1, f_1)} = \alpha\widehat{(I_2, f_2)}$. Entonces, existe $s_1 \in I_1 \cap C \cap B(S(L))$ y $s_2 \in I_2 \cap C \cap B(S(L))$ tales que $f_1(s_1) = f_2(s_2)$. Luego considerando $f_1(s_1) = [x]_C$ y $f_2(s_2) = [y]_C$, tenemos que existe $s \in C \cap B(S(L))$ tal que $x \wedge s = y \wedge s$. Si $s' = s \wedge s_1 \wedge s_2$, entonces inferimos que $f_1(s') = f_1(s' \wedge s_1) = [s']_C \wedge f_1(s_1) = [s']_C \wedge f_2(s_2) = f_2(s')$. Sea $I = \langle s' \rangle$, entonces $I \in \mathcal{F}_C$, $I \subseteq I_1 \cap I_2$ y $f_1|_I = f_2|_I$. La Observación 4.3.13 nos permite deducir que

$\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$. Probemos ahora que α es sobreyectiva, sea $[a]_C \in L[C]$ y $f_a : L \to L[C]$ definida por $f_a(x) = [a \wedge x]_C$ para todo $x \in L$. Es simple verificar que f_a es un $\mathcal{F}_C$-multiplicador. Además de la Observación 4.2.3 tenemos que $\alpha(\widehat{L, f_a}) = f_a(s) = [a \wedge s]_C = [a]_C$, donde $s \in C \cap B(S(L))$. Es simple verificar que esta función es un homomorfismo de retículos distributivos acotados. Además, como $\alpha(D_i^{\mathcal{F}_C}(\widehat{I, f})) = \alpha(\widehat{(I, \widetilde{D}_i f)}) = \widetilde{D}_i f(s) = [s]_{\theta_{\mathcal{F}_C}} \wedge D_i f(s) = D_i f(s) = D_i(\alpha(\widehat{I, f}))$ and $\alpha((\widehat{I, f})^*) = \alpha(\widehat{(I, f^*)}) = f^*(s) = [s]_{\theta_{\mathcal{F}_C}} \wedge N f(D_1 s) = N f(D_1 s) = N(\alpha(\widehat{I, f}))$. Luego α es un L_n^m–isomorfismo. □

4.4. L_n^m–álgebra maximal de cocientes

Definición 4.4.1. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Un conjunto no vacío $I \subseteq L$ es regular, si para todo $x, y \in L$ tal que $x \wedge \overline{e} = y \wedge \overline{e}$ para todo $e \in I$, entonces $x = y$.*

Denotaremos con $\mathcal{R}(L) = \{I \subseteq L$: I es un subconjunto regular de $L\}$. Observemos que $L \in \mathcal{R}(L)$. Más generalmente, todo subconjunto de L que contiene a 1 es regular.

Lema 4.4.2. *Si $I, J \in \mathcal{R}(L)$, entonces $I \cap J \in \mathcal{R}(L)$.*

Dem. Es de rutina. □

Lema 4.4.3. *$T = \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$ es una topología para L.*

Dem. Es claro que T es una familia de 1–ideales de L. Por otra parte, sean $I \in T$ y $x, y, a \in L$ tales que $x \wedge \overline{e} = y \wedge \overline{e}$ para todo $e \in (I : a)$. De esta última afirmación inferimos que $a \wedge \overline{e} \in I$. Como $x \wedge a \wedge \overline{e} = y \wedge a \wedge \overline{e}$, teniendo en cuenta que I es regular concluimos que $x = y$. Por lo tanto se verifica (T1).

Supongamos ahora que $I, J \in \mathcal{I}_1(L)$, $J \in T$ y $(I : a) \in T$ para todo $a \in J$, entonces $I \in T$. En efecto, sólo resta demostrar que $I \in \mathcal{R}(L)$. Sean $x, y \in L$ tales que $x \wedge \overline{e} = y \wedge \overline{e}$ para todo $e \in I$. Como I es un 1–ideal de L inferimos que $D_1 e \in I$ de donde por (GL_3) y (GL_{27}) tenemos que $\overline{D_{n-1} e} \in I$, con lo que concluimos que $D_{n-1} e \in (I : a)$. Además, de

$x \wedge \overline{e} \wedge D_{n-1}e = y \wedge \overline{e} \wedge D_{n-1}e$, (GL_{16}) y el hecho que $(I : a)$ es regular, obtenemos que $x = y$. Entonces se verifica (T2). $\square$

Proposición 4.4.4. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$, $a \in L$ y $I \in \mathcal{I}_1(L)$. Entonces, la función $h_a : I \to L$ definida por $h_a(x) = a \wedge x$ para todo $x \in I$, es un multiplicador de L.*

Dem. Es de rutina. $\square$

La función h_a definida en la Proposición 4.4.4 es llamada multiplicador principal. Si $dom\, h_a = L$ la notaremos con h_a^t.

Proposición 4.4.5. *$M_R(L) = \{f \in M(L) : dom\, f \in \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)\}$ es una L_n^m-subálgebra de $M(L)$, donde para todo $f_1, f_2 \in M_R(L)$ tales que $f_1 : I_1 \to L$ y $f_2 : I_2 \to L$ las operaciones están definidas de la siguiente manera:*

- $f_1 \wedge f_2 : I_1 \cap I_2 \to L$, $(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x)$,
- $f_1 \vee f_2 : I_1 \cap I_2 \to L$, $(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x)$,
- $f_j^* : I_j \to L$, $f_j^*(x) = x \wedge N f_j(D_1 x)$, *para* $j = 1, 2$,
- $\widetilde{D_i} f_j : I_j \to L$, $\widetilde{D_i} f_j(x) = x \wedge D_i f_j(D_1 x)$ *para cada* i, $1 \leq i \leq n-1$ *y* $j = 1, 2$.

Dem. Observemos que si $\mathcal{F} = T$, entonces la relación de congruencia $\theta_{\mathcal{F}}$ definida en el párrafo anterior es exactamente la relación identidad sobre L y entonces $M(I, L/\theta_{\mathcal{F}})$ es $M(I, L)$. Luego, aplicando un razonamiento análogo al de la Proposition 4.3.21 deducimos que $M(L)$ es una L_n^m-álgebra y $M_R(L)$ es una L_n^m-subálgebra de $M(L)$. $\square$

Definición 4.4.6. *Sea ρ_L la relación binaria sobre $M_R(L)$ definida por:*

$$(h_1, h_2) \in \rho_L \Leftrightarrow h_1(x) = h_2(x) \text{ } para\, todo \text{ } x \in dom\, h_1 \cap dom\, h_2.$$

Lema 4.4.7. *ρ_L es una congruencia sobre la L_n^m–álgebra $M_R(L)$.*

Dem. Es inmediata. □

Sea $h \in M_R(L)$ con $I = dom\, h$. Entonces $[I, h]$ y $L_{\mathcal{M}}$ denotan la clase de equivalencia de h relativa a ρ_L y el álgebra cociente $M_R(L)/\rho_L$, respectivamente.

Observación 4.4.8. *De la Definición 4.4.6, para todo $I \in \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$ y $a \in L$ tenemos que $[L, h_a^t] = [I, h_a]$.*

Lema 4.4.9. *$L_{\mathcal{M}}$ es una L_n^m–álgebra, donde las operaciones están definidas para todo $[I_1, h_1], [I_2, h_2] \in L_{\mathcal{M}}$ de la siguiente manera:*

- $[I_1, h_1] \wedge [I_2, h_2] = [I_1 \cap I_2, h_1 \wedge h_2]$,
- $[I_1, h_1] \vee [I_2, h_2] = [I_1 \cap I_2, h_1 \vee h_2]$,
- $[I_1, h_1]^* = [I_1, h_1^*]$,
- $\widetilde{D_i}[I_1, h_1] = [I_1, \widetilde{D_i} h_1]$ *para cada i, $1 \leq i \leq n-1$.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 4.4.5 y el Lema 4.4.7. □

Lema 4.4.10. *Sea $\overline{v}_L : L \to L_{\mathcal{M}}$ la función definida por $\overline{v}_L(a) = [L, h_a^t]$ para todo $a \in L$. Entonces,*

(i) $\overline{v}_L$ es un monomorfismo en $\mathcal{L}_n^m$,

(ii) para cada $a \in \mathcal{B}(L)$, $[L, h_a^t] \in \mathcal{B}(L_{\mathcal{M}})$,

(iii) $\overline{v}_L(L) \in \mathcal{R}(L_{\mathcal{M}})$.

Dem. (i) Es claro que, $\overline{v}_L(0) = [L, \mathbf{0}]$ y $\overline{v}_L(1) = [L, \mathbf{1}]$. Además, tenemos que

(a) $\overline{v}_L(D_i a) = \widetilde{D_i}\overline{v}_L(a)$. En efecto, usando (GL_{12}), (GL_{26}), (GL_6) y (GL_7) inferimos que $(\widetilde{D_i}h^t_a)(x) = x \wedge D_i h^t_a(D_1 x) = x \wedge D_i(a \wedge D_1 x) = x \wedge D_i a \wedge D_i D_1 x = x \wedge D_i a \wedge D_1 x = x \wedge D_i a = h^t_{D_i a}(x)$. Por lo tanto, $(h^t_{D_i a})(x) = (\widetilde{D_i}h^t_a)(x)$ para todo $x \in L$ y entonces, $[L, h^t_{D_i a}] = [L, \widetilde{D_i}h^t_a)]$.

(b) $\overline{v}_L(a \wedge b) = \overline{v}_L(a) \wedge \overline{v}_L(b)$. En efecto, como $h^t_{a\wedge b}(x) = x \wedge a \wedge b = h^t_a(x) \wedge h^t_b(x)$ para todo $x \in L$, tenemos que $[L, h^t_{a\wedge b}] = [L, h^t_a \wedge h^t_b]$. Por lo tanto, $\overline{v}_L(a \wedge b) = [L, h^t_{a\wedge b}] = [L, h^t_a \wedge h^t_b] = [L, h^t_a] \wedge [L, h^t_b] = \overline{v}_L(a) \wedge \overline{v}_L(b)$.

(c) $\overline{v}_L(Na) = (\overline{v}_L(a))^*$. Teniendo en cuenta (GL_1) y (GL_{24}) obtenemos que $(h^{t*}_{\ a})(x) = x \wedge N h^t_a(D_1 x) = x \wedge N(a \wedge D_1 x) = x \wedge (Na \vee ND_1 x) = (x \wedge Na) \vee 0 = h^t_{Na}(x)$. Entonces, $(\overline{v}_L(a))^* = [L, h^t_a]^* = [L, h^{t*}_{\ a}] = [L, h^t_{Na}] = \overline{v}_L(Na)$.

Finalmente, probemos que $\overline{v}_L$ es inyectiva. Consideremos $a, b \in L$ tales que $\overline{v}_L(a) = \overline{v}_L(b)$. Entonces, $h^t_a(x) = a \wedge x = b \wedge x = h^t_b(x)$ para todo $x \in L$. Por lo tanto, eligiendo $x = 1$ obtenemos que $a = b$.

(ii) Es consecuencia directa de (i), ya que los morfismos preservan los elementos booleanos.

(iii) Sean $[I_1, h_1], [I_2, h_2] \in L_{\mathcal{M}}$ y supongamos que $[L, \overline{h^t_a}] \wedge [I_1, h_1] = [L, \overline{h^t_a}] \wedge [I_2, h_2]$ para todo $[L, \overline{h^t_a}] \in \overline{v}_L(L)$. De la hipótesis, para cada $a \in L$ existe $K_a \subseteq L \cap I_1 \cap I_2 = I_1 \cap I_2$ tal que $\overline{h^t_a}(x) \wedge h_1(x) = \overline{h^t_a}(x) \wedge h_2(x)$ para todo $x \in K_a$. Por otra parte, de (GL_{12}) y (GL_7) inferimos que $\overline{h^t_a}(x) = \bigvee\limits_{p=0}^{m-1}(x \wedge N^{2p}h^t_a(D_1 x)) = x \wedge \bigvee\limits_{p=0}^{m-1} N^{2p}h^t_a(D_1 x) = x \wedge \bigvee\limits_{p=0}^{m-1} N^{2p}(D_1 x \wedge a) = \bigvee\limits_{p=0}^{m-1}(x \wedge D_1 x \wedge N^{2p}a) = \bigvee\limits_{p=0}^{m-1}(x \wedge N^{2p}a) = x \wedge \bigvee\limits_{p=0}^{m-1} N^{2p}a = x \wedge \overline{a}$. De las afirmaciones anteriores concluimos que $x \wedge \overline{a} \wedge h_1(x) = x \wedge \overline{a} \wedge h_2(x)$ y entonces por el Lema 4.3.5 resulta que $\overline{a} \wedge h_1(x) = \overline{a} \wedge h_2(x)$. Luego, teniendo en cuenta que $L \in \mathcal{R}(L)$ concluimos que $h_1(x) = h_2(x)$ y por lo tanto, $\overline{v}_L(L) \in \mathcal{R}(L_{\mathcal{M}})$. $\square$.

Definición 4.4.11. *Diremos que una L_n^m-álgebra L' es una L_n^m–álgebra de cocientes de L si se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *L es una L_n^m-subálgebra de L',*

(ii) *Para cada $a', b', c' \in L'$, $a' \neq b'$ existe $e \in L$ tal que $\overline{e} \wedge a' \neq \overline{e} \wedge b'$ y $D_1 e \wedge c' \in L$.*

Escribiremos $L \preceq L'$ para indicar que L' es una L_n^m–álgebra de cocientes de L.

Lema 4.4.12. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $[I, g] \in L_{\mathcal{M}}$. Entonces, $I \subseteq \{a \in L : \widetilde{D_1}[L, h_a^t] \wedge [I, g] \in \overline{v}_L(L)\}$.*

Dem. Observemos que dado $a \in L$, $\widetilde{D_1}[L, h_a^t] \wedge [I, g] = [I, \widetilde{D_1} h_a^t \wedge g]$. Supongamos ahora que $a \in I$. Entonces aplicando la Proposición 4.4.5, (GL_{12}), (GL_{26}), (GL_6), (GL_7), el Lema 4.3.5 y la Propososición 4.4.4 tenemos que para todo $x \in I$:

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{D_1} h_a \wedge g)(\overline{x}) &= \widetilde{D}_1 h_a(\overline{x}) \wedge g(\overline{x}) \\
&= \overline{x} \wedge D_1(a \wedge D_1 \overline{x}) \wedge g(\overline{x}) \\
&= \overline{x} \wedge D_1 a \wedge D_1 \overline{x} \wedge g(\overline{x}) \\
&= \overline{x} \wedge D_1 a \wedge g(\overline{x}) \\
&= D_1 a \wedge g(\overline{x}) \\
&= \overline{x} \wedge g(D_1 a) \\
&= h_{g(D_1 a)}(\overline{x}).
\end{aligned}
$$

Esta afirmación y el Lema 4.3.6 implican que $(\widetilde{D}_1 h_a \wedge g)(x) = h_{g(D_1 a)}(x)$, para todo $x \in I$. Por lo tanto, $[I, \widetilde{D_1} h_a \wedge g] = [I, h_{g(D_1 a)}]$ y teniendo en cuenta la Observación 4.4.8 y el Lema 4.4.10 inferimos que $[I, \widetilde{D_1} h_a^t \wedge g] = [L, h_{g(D_1 a)}^t] = \overline{v}_L(g(D_1 a))$, con lo que concluimos la demostración. $\square$

Lema 4.4.13. *Sea $L' \in \mathcal{L}_n^m$, $L \preceq L'$ y $a' \in L'$. Entonces, $I_{a'} = \{x \in L : D_1 x \wedge a'$ $\in L\} \in \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$.*

Dem. Sea $e \in I_{a'}$, entonces $D_1 e \wedge a' \in L$. Luego por (GL_6) tenemos que $D_1 D_1 e \wedge a' \in L$, de donde resulta que $D_1 e \in I_{a'}$. Por lo tanto, $I_{a'} \in \mathcal{I}_1(L)$. Para probar que $I_{a'} \in \mathcal{R}(L)$, sean $x, y \in L$ tales que $x \wedge \overline{e} = y \wedge \overline{e}$ para todo $e \in I_{a'}$ y supongamos que $x \neq y$. Entonces, teniendo en cuenta que $L \preceq L'$, existe $e_1 \in I_{a'}$ tal que $x \wedge \overline{e}_1 \neq y \wedge \overline{e}_1$, lo cual es una contradicción. Luego concluimos que $I_{a'} \in \mathcal{R}(L)$. $\square$

Teorema 4.4.14. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces $L_{\mathcal{M}}$ verifica las siguientes condiciones:*

(i) $\overline{v}_L(L) \preceq L_{\mathcal{M}}$,

(ii) *Para toda L_n^m-álgebra $L^{'}$ tal que $L \preceq L^{'}$, existe un L_n^m-monomorfismo $u : L^{'} \to L_{\mathcal{M}}$ que induce el monomorfismo canónico $\overline{v}_L$ de L en $L_{\mathcal{M}}$.*

Dem. (i) Del Lema 4.4.10 tenemos que $\overline{v}_L(L)$ es una subálgebra de $L_{\mathcal{M}}$. Entonces, solo resta probar que para todo $[I, g], [J, s], [H, t] \in L_{\mathcal{M}}$, si $[I, g] \neq [J, s]$, existe $a_o \in L$ tal que $[I, g] \wedge [L, \overline{h_{a_o}^t}] \neq [J, s] \wedge [L, \overline{h_{a_o}^t}]$ y $\widetilde{D_1}[L, h_{a_o}^t] \wedge [H, t] \in \overline{v}_L(L)$. En efecto, supongamos que para todo $a \in L$ tenemos que $[I, g] \wedge [L, \overline{h_a^t}] = [J, s] \wedge [L, \overline{h_a^t}]$ y entonces, $(\overline{h_a^t} \wedge g)(x) = (\overline{h_a^t} \wedge s)(x)$ para cada $x \in I \cap J$. En consecuencia, $\overline{a} \wedge x \wedge g(x) = \overline{a} \wedge x \wedge s(x)$. Esta afirmación y el Lema 4.3.5 implican que $\overline{a} \wedge g(x) = \overline{a} \wedge s(x)$ y teniendo en cuenta que $L \in \mathcal{R}(L)$, concluimos que $g(x) = s(x)$ para cada $x \in I \cap J$. Por lo tanto, $[I, g] = [J, s]$ lo cual es una contradicción. Por otra parte, como $[H, t] \in L_{\mathcal{M}}$, por el Lema 4.4.12 inferimos que $H \subseteq \{a \in L : \widetilde{D_1}[L, h_a^t] \wedge [H, t] \in \overline{v}_L(L)\}$. Entonces, como $a_o \in L$ concluimos que $\widetilde{D_1}[L, h_{a_o}^t] \wedge [H, t] \in \overline{v}_L(L)$.

(ii) Por el Lema 4.4.13 para cada $a' \in L'$ tenemos que $I_{a'} \in \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$. Entonces, definimos el multiplicador $h_{a'} : I_{a'} \to L$ por $h_{a'}(x) = a' \wedge x$ y $u : L' \to L_{\mathcal{M}}$ por $u(a') = [I_{a'}, h_{a'}]$ para cada $a' \in L'$. Luego, tenemos que $[L, h_{a'}^t] = [I_{a'}, h_{a'}]$ y $u_{|_L} = \overline{v}_L$.

Además, siguiendo un razonamiento análogo al del Lema 4.4.10, concluimos que u es un homomorfismo. Finalmente, para probar que u es inyectiva consideremos $a', b' \in L'$ tales que $u(a') = u(b')$. Esta última afirmación y la Observación 4.4.8 implican que $[L, h^t_{a'}] = [I_{a'}, h_{a'}] = [I_{b'}, h_{b'}] = [L, h^t_{b'}]$. Por lo tanto, $a' \wedge x = h_{a'}(x) = h_{b'}(x) = b' \wedge x$ para cada $x \in L$. Luego, eligiendo $x = 1$ obtenemos que $a' = b'$. $\Box$

El Teorema 4.4.14 proporciona la motivación para la siguiente definición.

Definición 4.4.15. *Para toda L^m_n–álgebra L, diremos que $L_{\mathcal{M}}$ es una L^m_n-álgebra maximal de cocientes para L.*

La Proposición 4.4.16 muestra la conexión entre $L_{\mathcal{M}}$ y $L_{\mathcal{F}}$ definida en la Sección 4.3 en el caso en que la topología $\mathcal{F} = \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$.

Proposición 4.4.16. *Sea $L \in \mathcal{L}^m_n$. Si $\mathcal{F} = \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$, entonces $L_{\mathcal{M}} = L_{\mathcal{F}}$.*

Dem. Como digimos anteriormente si $\mathcal{F} = \mathcal{I}_1(L) \cap \mathcal{R}(L)$ entonces $\theta_{\mathcal{F}}$ es la relación identidad sobre L. Si $[I_1, f_1], [I_2, f_2] \in L_{\mathcal{M}}$ son tales que $[I_1, f_1] = [I_2, f_2]$, entonces es simple verificar que $\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$. Recíprocamente, si $\widehat{(I_1, f_1)}, \widehat{(I_2, f_2)} \in L_{\mathcal{F}}$ son tales que $\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$ entonces existe $K \in \mathcal{F}$ y $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in K$. Como $K \in \mathcal{I}_1(L)$, por el Lema 4.3.5 tenemos que $f_i(x) \in K$ de donde $D_1 f_i(x) \in K$ para todo $x \in K$, $i = 1, 2$. Esta última afirmación, (GL_8) y (GL_7) implican que $\overline{f_i(x)} \in K$, para todo $x \in K$, $i = 1, 2$. Por lo tanto, $z \wedge \overline{f_i(x)} \in K$ para todo $z \in L$, $i = 1, 2$. Luego, teniendo en cuenta que f_1, f_2 son multiplicadores y que $\overline{f_1(x)} = \overline{f_2(x)}$ para todo $x \in K$ inferimos que $f_1(w) \wedge \overline{f_1(x)} = f_1(w \wedge \overline{f_1(x)}) = f_2(w \wedge \overline{f_2(x)}) = f_2(w) \wedge \overline{f_2(x)} = f_2(w) \wedge \overline{f_1(x)}$ para todo $w \in S(L) \cap I_1 \cap I_2$. Además, teniendo en cuenta que $f_1(x) \in K$ y que $K \in \mathcal{R}(L)$ concluimos que $f_1(w) = f_2(w)$ para todo $w \in S(L) \cap I_1 \cap I_2$. Luego, por el Lema 4.3.6 resulta que $f_1(y) = f_2(y)$ para todo $y \in I_1 \cap I_2$ y por lo tanto $[I_1, f_1] = [I_2, f_2]$lo que completa la demostración. $\Box$

Observación 4.4.17. *Como toda L_n^m–álgebra es un retículo distributivo, algunos de los resultados anteriores también pueden obtenerse de los establecidos en [68]. Ellos son el Teorema 4.2.4 y la Proposición 4.3.21, que resultan del Teorema 4.1 y el Corolario 2.1 de [68], respectivamente.*

Además, como para $m = 1$ las L_n^m–álgebras coinciden con las álgebras de Lukasiewicz–Moisil de orden n, algunas de las afirmaciones hechas en [18] y [20] se deducen como caso particular de lo que hemos establecidos anteriormente en este capítulo. Tal es el caso de la Proposición 4.26 y el Teorema 3.2 en [20] y en [18] respectivamente.

4.5. Localización en las L_n^m–álgebras finitas

En esta sección, nos abocaremos a considerar los resultados anteriores en el caso particular de L_n^m-álgebras finitas. Más concretamente, vamos a demostrar que para cada L_n^m–álgebra finita L y $C \in C(L)$, el álgebra $L[C]$ es isomorfa a una subálgebra especial de L. Para ello, los siguientes resultados serán fundamentales.

Proposición 4.5.1. *Sea L una L_n^m–álgebra finita e $I \subseteq L$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I \in I_1(L)$,

(ii) $I = \langle a \rangle$ *para algún* $a \in B(S(L))$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como L es finita, a partir de un resultado bien conocido de retículos finitos tenemos que $I = \langle b \rangle$ para algún $b \in L$. Además, de la hipótesis tenemos que $D_1 b \in \langle b \rangle$ y por (GL_6), $\langle b \rangle = \langle D_1 b \rangle$. Entonces, inferimos que $a = D_1 b \in B(S(L))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $x \in I$. Entonces $x \leq a$ y así, $D_1 x \leq D_1 a = a$. Por lo tanto, $D_1 x \in I$. □

Proposición 4.5.2. *Sea L una L_n^m–álgebra finita y $C \in C(L)$. Entonces, $\mathcal{F}_C = \{\langle a \rangle :$ $a \in B(S(L)), \bigwedge\limits_{x \in C \cap B(S(L))} x \leq a\}$.*

Dem. Consideremos $\mathcal{T} = \{\langle a\rangle : a \in B(S(L)), \bigwedge_{x\in C\cap B(S(L))} x \leq a\}$. Si suponemos que $I \in \mathcal{F}_C$, entonces por la Proposición 4.5.1 tenemos que $I = \langle a\rangle$ para algún $a \in B(S(L))$. Por otra parte, de la Proposición 4.3.9 existe $c \in C \cap \langle a\rangle \cap B(S(L))$, lo cual implica que $\bigwedge_{x\in C\cap B(S(L))} x \leq c \leq a$. Por lo tanto, $I \in \mathcal{T}$. Recíprocamente, si suponemos que $I \in \mathcal{T}$, entonces $\bigwedge_{x\in C\cap B(S(L))} x \in I \cap C \cap B(S(L))$. Además, de la Proposición 4.5.1 resulta que $I \in \mathcal{I}_1(L)$. De estas afirmaciones y la Proposición 4.3.9 concluimos que $I \in \mathcal{F}_S$. $\square$

Proposición 4.5.3. *Sea L una L_n^m–álgebra finita y $C \in C(L)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}_C}$,

(ii) $x \wedge b = y \wedge b$, *donde* $b = \bigwedge_{x\in C\cap B(S(L))} x$.

Dem. Es de rutina. $\square$

Proposición 4.5.4. *Sea L una L_n^m–álgebra finita y $\langle a\rangle \in \mathcal{I}_1(L)$. Entonces, $L_a = \langle\langle a\rangle, \wedge, \vee, \sim_a, \{D_i\}_{i\in\{1,\cdots,n-1\}}, 0, a\rangle$ es una L_n^m–álgebra, donde $N_a x = Nx \wedge a$.*

Dem. Es simple verificar que $\langle\langle a\rangle, \wedge, \vee, 0, a\rangle$ es un retículo distributivo. Además, si $x, y \in \langle a\rangle$ entonces, tenemos que $N_a^{2m}x = N_a^{2m-1}(N_a x) = N_a^{2m-1}(Nx \wedge a) = N_a^{2m-2}(N_a(Nx \wedge a)) = N_a^{2m-2}(N(Nx \wedge a) \wedge a) = N_a^{2m-2}(N^2x \vee Na) \wedge a) = N_a^{2m-2}((N^2x \wedge a) \vee (Na \wedge a)) = N_a^{2m-2}(N^2x \wedge a) = \cdots = N^{2m}x_a \wedge a = x \wedge a$. Como $a = D_1 a$ y $x \in \langle a\rangle$, resulta que $N_a^{2m}x = x$. Por otra parte, $D_i x \in \langle a\rangle$ para todo $x \in \langle a\rangle$ y $1 \leq i \leq n-1$. En efecto, como $x \leq a = D_1 a$ tenemos que $D_i x \leq D_i D_1 a$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. $\square$

Finalmente, alcanzamos el objetivo deseado.

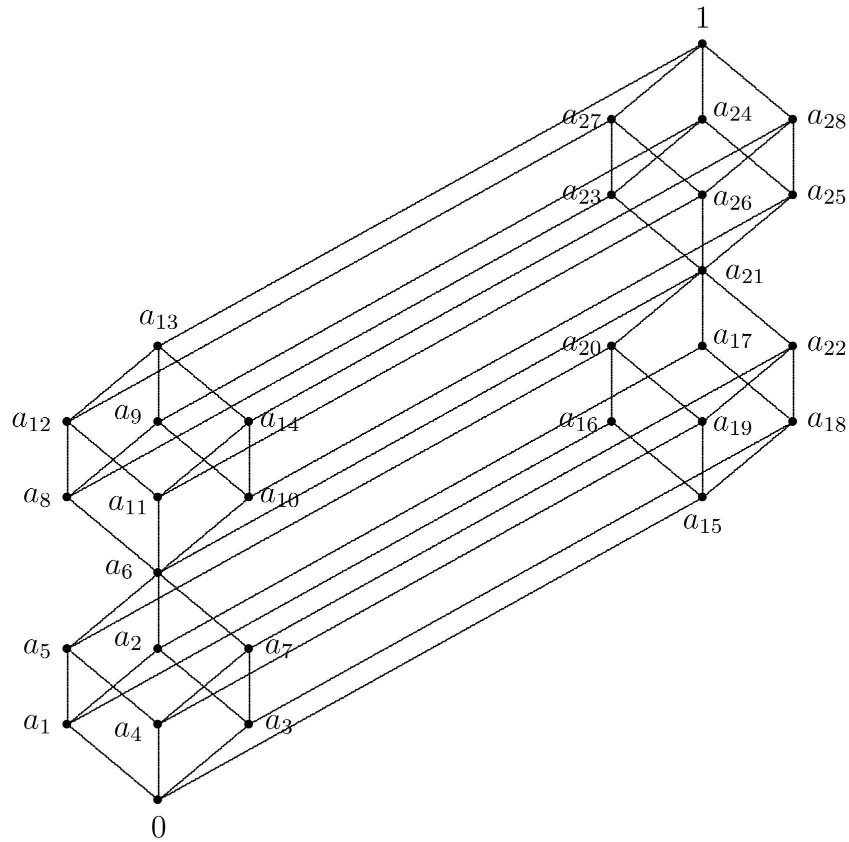
Proposición 4.5.5. *Sea L una L_n^m–álgebra finita y $C \in C(L)$. Entonces, existe un isomorfismo entre $L[C]$ y L_b, donde* $b = \displaystyle\bigwedge_{x \in C \cap B(S(L))} x.$

Dem. Sea $\beta : L \to L_b$ la función definida por $\beta(x) = x \wedge b$. Es simple verificar que β es un $0,1$–epimorfismo de retículos. Además, para todo $x \in L$, $\beta(Nx) = Nx \wedge b = (Nx \wedge b) \vee (Nb \wedge b) = N(x \wedge b) \wedge b = N\beta(x) \wedge b = N_a\beta(x)$ y $\beta(D_i x) = D_i x \wedge b = D_i x \wedge D_i b = \ D_i(x \wedge b) = D_i\beta(x)$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, β es un L_n^m–epimorfismo. Por otra parte, $x \in [1]_{\theta_C} \Leftrightarrow (x,1) \in \theta_C \Leftrightarrow$ existe $s \in C \cap B(S(L))$ tal que $x \wedge s = s \Leftrightarrow x \wedge b = b \Leftrightarrow \beta(x) = b \Leftrightarrow x \in Ker(\beta)$. Luego, teniendo en cuenta un resultado bien conocido de álgebra universal ([16, p. 59]) concluimos que $L[C]$ es isomorfa a L_b $\square$

Corolario 4.5.6. *Sea L una L_n^m–álgebra finita y $C \in C(L)$. Entonces, $L_{\mathcal{F}_C}$ es isomorfa a L_b, donde* $b = \displaystyle\bigwedge_{x \in C \cap B(S(L))} x$. *Más precisamente,* $L_{\mathcal{F}_C} = \{\widehat{(\langle b \rangle, f_x)} : x \in \langle b \rangle\}$.

Dem. Es consecuencia del Teorema 4.3.25 y la Proposición 4.5.5. $\square$

Ejemplo 4.5.7. *Consideremos la L_3^3–álgebra L:*



donde la operaciones f y D_1, D_2 están definidas a continuación:

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
$\sim x$	1	a_{28}	a_{26}	a_{27}	a_{24}	a_{25}	a_{21}	a_{23}	a_{17}	a_{18}	a_{22}	a_{20}	a_{16}	a_{15}	a_{19}	a_{13}
D_1x	0	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{15}
D_2x	0	0	0	0	0	0	0	0	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}	a_{13}

x	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	1
$\sim x$	a_{14}	a_{11}	a_{12}	a_9	a_{10}	a_6	a_8	a_2	a_3	a_7	a_5	a_1	a_4	0
D_1x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D_2x	a_{15}	a_{15}	a_{15}	a_{15}	a_{15}	a_{15}	a_{15}	1	1	1	1	1	1	1

Entonces, $B(S(L)) = \{0, a_{13}, a_{15}, 1\}$. *Si consideramos* $C = \{a_2, a_{17}, a_{13}, 1\}$, *por la Proposición 4.5.5 tenemos que* $L[C]$ *es isomorfo a* $L_{a_{13}} = \{0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}, a_{11},a_{12},a_{13}\}$. *Además,* $\mathcal{F}_C = \{\langle a_{13}\rangle, \langle 1\rangle = L\}$ *y teniendo en cuenta el Corolario 4.5.6 resulta que* $L_{\mathcal{F}_C} = \{(\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_0), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_1}), (\langle\widehat{a_{13}, \rangle, f}_{a_2}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_3}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_4}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_5}),$ $(\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_6}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_7}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_8}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_9}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_{10}}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_{11}}), (\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_{12}}),$ $(\langle\widehat{a_{13}\rangle, f}_{a_{13}})\}$.

5. Capítulo V

En este capítulo investigamos la variedad $\mathcal{L}_n^2$ constituida por las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n considerando $m = 2$. Es decir, las L_n^2–álgebras en las cuales $f^4x = x$. En primer lugar, mostramos propiedades de los átomos que serán de gran utilidad para describir detalladamente a las álgebras simples de $\mathcal{L}_n^2$. Más precisamente, hallamos el número de L_n^2–álgebras simples y su cardinal. Además, teniendo en cuenta las conclusiones resultantes del Capítulo II, $\mathcal{L}_n^2$ es localmente finita lo que nos motivó a estudiar las álgebras finitas de esta variedad. Entre los resultados que obtuvimos se destaca el Teorema 5.3.5 que nos suministra una factorización de dichas álgebras. En la última sección de este capítulo, nos centramos en las álgebras libres de esta variedad con un conjunto finito de generadores libres. En particular, abordamos el estudio de las L_n^2–álgebras libres para $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$. Los resultados anteriores nos permitieron inferir la forma para calcular el cardinal del álgebra libre para $n \in I\!N$, $n > 5$ con un conjunto finito de generadores libres, en función del número de generadores de la misma.

5.1. Propiedades de los átomos en las L_n^2–álgebras

Definición 5.1.1. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $x \in L$. Diremos que x es un átomo de L si para todo $y \in L$ tal que $0 \leq y \leq x$ implica que $y = 0$ o $y = x$.*

Al conjunto de los átomos de L lo notaremos con $\mathcal{A}t(L)$.

Proposición 5.1.2. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^2$. Si x es átomo de L, entonces $f^2x \in \mathcal{A}t(L)$.*

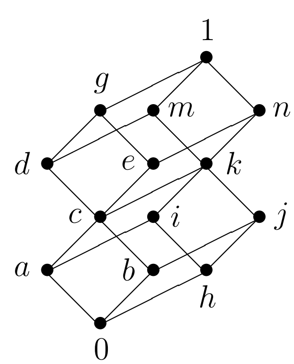
Dem. Sea $x \in \mathcal{A}t(L)$. Si $x \in S(L)$, entonces es inmediato que $f^2x \in \mathcal{A}t(L)$. Por otra parte, si $x \notin S(L)$ y existe $y \in L$ tal que $0 \leq y \leq f^2x$, entonces $0 \leq f^2y \leq x$. Luego de esta afirmación y la hipótesis tenemos que $f^2y = 0$ o $f^2y = x$. Por lo tanto, $y = 0$ o $y = f^2x$, es decir $f^2x \in \mathcal{A}t(L)$. $\square$

Más generalmente, es simple verificar que:

Corolario 5.1.3. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Si x es átomo de L, entonces $f^{2p}x \in \mathcal{A}t(L)$, $0 \leq p \leq m-1$.*

Observación 5.1.4. *El Corolario 5.1.3 nos induce a pensar que en las L_n^m–álgebras hay un número par de átomos y que si $x \in \mathcal{A}t(L)$, entonces $f^{2p}x$ $0 \leq p \leq m-1$ son átomos distintos. El ejemplo que indicaremos a continuación muestran que estas afirmaciones no son válidas.*

Ejemplo 5.1.5. *Consideremos la L_3^2–álgebra L cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la siguiente figura y las operaciones f y D_i, $1 \leq i \leq 2$, están definidas de la siguiente manera:*



x	0	a	b	c	d	e	g	h	i	j	k	m	n	1
fx	1	n	m	k	i	j	h	g	e	d	c	a	b	0
D_1x	0	g	g	g	g	g	g	h	1	1	1	1	1	1
D_2x	0	0	0	0	g	g	g	h	h	h	h	1	1	1

Observemos que $\mathcal{A}t(L) = \{a, b, h\}$, luego el número de átomos no es siempre par. Además, $h \in \mathcal{A}t(L)$ y $h = f^2h$.

Proposición 5.1.6. *Sea L una L_n^2–álgebra simple. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *si existe $x \in \mathcal{A}t(L) \setminus S(L)$, entonces $\mid \mathcal{A}t(L) \mid= 2$,*

(ii) *si existe $x \in \mathcal{A}t(L) \cap S(L)$, entonces $\mid \mathcal{A}t(L) \mid= 1$.*

Dem. Solo demostraremos (i). De la hipótesis y la Proposición 5.1.2 tenemos que $x, f^2x \in \mathcal{A}t(L)$. Veamos ahora que si $y \in \mathcal{A}t(L)$, entonces $y = x$ o $y = f^2x$. Como L es simple, $S(L)$ es una cadena. Luego, $\overline{x} \leq \overline{y}$ o $\overline{y} \leq \overline{x}$ y además, de la Proposición 5.1.2 resulta que $f^2y \in \mathcal{A}t(L)$. Si $\overline{x} \leq \overline{y}$, entonces como $x \leq \overline{x}$ tenemos que $x \leq \overline{y}$. Por lo tanto, $x = x \wedge (y \vee f^2y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge f^2y)$. De esta última afirmación si $x \neq y$ y $x \neq f^2y$, teniendo en cuenta que $x, f^2x, y, f^2y \in \mathcal{A}t(L)$ obtenemos que $x = 0$ lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $x = y$ o $x = f^2y$. Por otra parte, si $\overline{y} \leq \overline{x}$ la demostración resulta de manera análoga a la anterior. $\square$

Proposición 5.1.7. *Sea L una L_n^2–álgebra simple. Si $a \in \mathcal{A}t(L) \setminus S(L)$, entonces $\mid [0, \overline{a}] \mid=$ 4.*

Dem. De la hipótesis y la Proposición 5.1.6 tenemos que a y f^2a son los únicos átomos de L. Además, como $a \notin S(L)$ concluimos que $a < \overline{a}$ y $f^2a < \overline{a}$ de donde resulta que

$a, f^2a \in [0, \overline{a}]$. Si suponemos que existe $y \in [0, \overline{a}]$ tal que (1) $0 < y < \overline{a}$, entonces inferimos que $a \leq y$ o $f^2a \leq y$.

Si $a \leq y$, entonces $\overline{a} \leq \overline{y}$. Además, de (1) tenemos que $\overline{y} \leq \overline{a}$. Luego, de las afirmaciones anteriores concluimos que $q_2a = q_2y$ y por lo tanto, (2) $q_2(a \wedge y) = q_2a = q_2y = q_2(a \vee y)$. Por otra parte, $q_1y = 0$. En efecto, pues si $q_1y \neq 0$, entonces $a < q_1y$ o $f^2a < q_1y$. En ambos casos tenemos que $\overline{a} \leq q_1y$. Además, como $q_1y \leq y$ e $y \notin S(L)$ obtenemos que $\overline{a} < y$, lo que contradice que (1). Luego, tenemos que (3) $q_1(a \wedge y) = q_1a = 0 = q_1y = q_1(a \vee y)$. Por lo tanto de (2) y (3) concluimos que $a = y$.

Si $f^2a \leq y$, razonando de manera análoga resulta que $f^2a = y$.

De lo demostrado anteriormente podemos afirmar que $\mid [0, \overline{a}] \mid = 4$. □

5.2. Algebras simples

A continuación indicaremos algunos resultados válidos en $\mathcal{L}_n^m$ y necesarios para el desarrollo posterior. Sus demostraciones pueden ser vistas en el Cápítulo II o en [1].

(T1) Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) L es subdirectamente irreducible,
- (ii) $S(L)$ es una subálgebra de $\mathbb{L}_n$,
- (iii) L es simple,

(T2) $\mathcal{L}_n^m$ es semisimple y localmente finita.

(T3) Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $a \in L$. L es simple si, y sólo si $w_{D_1a,1} = 1$, $a > 0$.

En esta sección con el próposito de determinar los objetos libres de $\mathcal{L}_n^2$, estudiaremos en detalles las L_n^2–álgebras simples.

Proposición 5.2.1. *Sea L una L_n^2–álgebra y $a, b \in L$ tal que $[a, b] \cap S(L) = \{a, b\}$. Entonces $|[a, b]| = 2$ o $|[a, b]| = 4$.*

Dem. Si no existe $x \in [a, b]\backslash S(L)$ resulta que $|[a, b]| = 2$. Si existe $x \in [a, b]\backslash S(L)$, entonces $f^2x \in [a, b]$ y $x \neq f^2x$. Luego $|[a, b]| \geq 4$. Observemos que no existe $y \in [a, b] \setminus S(L)$ tal que $x < y$ o $y < x$. En efecto, si existe $y \in [a, b] \setminus S(L)$ tal que si $x < y$, entonces $q_1x = q_1y$ y $q_2x = q_2y$. Luego, tenemos que $q_1(x \wedge y) = q_1x = q_1y = q_1(x \vee y)$ y $q_2(x \wedge y) = q_2(x \vee y)$ de donde inferimos que $x = y$, contradicción. Si $y < x$, razonando de manera análoga obtenemos una contradicción. Similarmente, resulta que no existe $y \in [a, b] \setminus S(L)$ tal que $f^2x < y$ o $y < f^2x$. De las afirmaciones anteriores inferimos que x y f^2x son átomos de $[a, b]$. Además son únicos, ya que si existiera un átomo $z \in [a, b]$, $z \neq x$ y $z \neq f^2x$, entonces $z = z \wedge b = z \wedge (x \vee f^2x) = (z \wedge x) \vee (z \wedge f^2x) = a$, contradicción. Por lo tanto, $|[a, b]| = 4$. □

Corolario 5.2.2. *Sea L una L_n^2–álgebra y $a, b \in L$ tal que $[a, b] \cap S(L) = \{a, b\}$. Entonces se verifican las siguientes condiciones*

(i) $|[a, b]| = 2$ *si, y sólo si,* $|[fb, fa]| = 2$,

(ii) $|[a, b]| = 4$ *si, y sólo si,* $|[fb, fa]| = 4$.

Dem. Solo demostraremos que si $|[a, b]| = 4$, entonces $|[fb, fa]| = 4$. En efecto, por hipótesis existe $x \in [a, b] \setminus S(L)$. Luego $[a, b] = \{a, x, f^2x, b\}$ de donde resulta que $\{fa, fx, f^3x, fb\} \subseteq [fb, fa]$. Si suponemos que existe $y \in [fb, fa] \setminus \{fa, fx, f^3x, fb\}$, entonces $a < fy < b$ y por lo tanto $fy = x$ o $fy = f^2x$. De esta afirmación concluimos que $y = f^3x$ o $y = fx$, contradicción. □

Teorema 5.2.3. *El cardinal de cada L_n^2–álgebra simple, con n impar es $j + 4t$, donde $2 \leq j \leq n$ y si j es impar, $0 \leq t \leq \frac{j-1}{2}$ o si j es par, $0 \leq t \leq \frac{j-2}{2}$. Si n es par $|L| = 2j+4t$, $1 \leq j \leq n/2$ donde $0 \leq t \leq j - 1$.*

Dem. Si L una L_n^2–álgebra simple, por (T1) resulta que $S(L)$ es una subálgebras de $\mathbb{L}_n$. Luego, teniendo en cuenta la Proposición 5.2.1 y el Corolario 5.2.2 obtenemos el resultado buscado. $\square$

A continuación y teniendo en cuenta que el objetivo final de este capítulo es determinar las L_n^2–álgebras libres, nos ocuparemos de calcular el número de álgebras simples no isomorfas de esta variedad. De los resultados anteriores podemos determinar el diagrama de Hasse de ellas. El mismo se obtendrá a partir de subálgebras de $\mathbb{L}_n$ y la distribución de un número par de rombos de modo tal que se verifique el Corolario 5.2.2. Por otra parte, cabe destacar que existen distintas álgebras simples con las mismas cantidad de pares de rombos. Con el propósito de alcanzar el objetivo planteado tenemos el siguiente corolario que es consecuencia del Teorema 5.2.3

Corolario 5.2.4. *Si particionamos las L_n^2–álgebras simples del sigiente modo:*

Tipo I : las subálgebras de $\mathbb{L}_n$,

Tipo II : las subálgebras de $\mathbb{L}_n$ con cardinalidad impar que tengan un número par de rombos que verifiquen el Corolario 5.2.2,

Tipo III : las subálgebras de $\mathbb{L}_n$ con cardinalidad par que tengan un número par de rombos que verifiquen el Corolario 5.2.2,

Entonces se verifica que

(i) $|Tipo\, I| = 2^{\frac{n-1}{2}}$,

$$|Tipo\, II| = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j-1} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right),$$

$$|Tipo\, III| = \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right), \text{ cuando } n \text{ es impar,}$$

(ii) $|Tipo\,I| = 2^{\frac{n-2}{2}}$, $|Tipo\,II| = 0$,

$$|Tipo\,III| = \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\binom{(n-2)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right), \textit{ cuando } n \textit{ es par.}$$

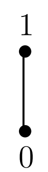
De los resultados anteriores se concluye el siguiente teorema.

Teorema 5.2.5. *En $\mathcal{L}_n^2$ el número de álgebras simples no isomorfas es:*

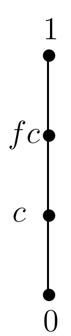
(i) $2^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j-1} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right) + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right)$, *si n es impar,*

(ii) $2^{\frac{n-2}{2}} + \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\binom{(n-2)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right)$, *si n es par.*

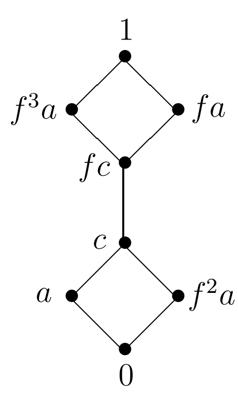
Ejemplo 5.2.6. *Teniendo en cuenta el Teorema 5.2.5 resulta que para $n = 4$, las álgebras simples no isomorfas son las siguientes:*



A_1



A_2



A_3

x	D_1x	D_2x	D_3x
0	0	0	0
a	1	0	0
f^2a	1	0	0
c	1	0	0
fc	1	1	0
f^3a	1	1	1
fa	1	1	1
1	1	1	1

5.3. Algebras finitas

En esta sección determinaremos propiedades de las L_n^m–álgebras finitas. Entre los resultados obtenidos se destaca el Teorema 5.3.5 que nos suministra una factorización de dichas álgebras.

Teniendo en cuenta la Proposición 2.2.6 obtenemos el Lema 5.3.1 y el Lema 5.3.3 que son fundamentales para la demostración del Teoream 5.3.5.

Lema 5.3.1. *Sea L una L_n^m–álgebra finita y $D \subseteq L$.Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *D es un sistema deductivo de L,*

(ii) *existe $a \in L$ tal que $D = [fD_1fa)$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y el Corolario 2.2.7 resulta que D es un filtro. Luego como L es un álgebra finita existe $a \in L$ tal que $D = [a)$. Como $fa \leq D_1fa$ entonces $f^{2m-1}D_1fa = fD_1fa \leq f^{2m}D_1fa = a$. Por lo tanto, $D = [fD_1fa)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si $x \in D$, entonces $fD_1fa \leq x$. Luego $fD_1fx \in D$ y por la Proposición 2.2.6 tenemos que D es un sistema deductivo de L. □

Lema 5.3.2. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $a \in L$. Entonces $a \in B(S(L))$ si, sólo si, $a = fD_1fa$.*

Dem. Es consecuencia directa que $S(L)$ es una L_n–álgebra. □

Lema 5.3.3. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ finita no trivial y $a \in L$. $H = [a)$ es un sistema deductivo maximal de L si, sólo si, a es un átomo de $B(S(L))$.*

Dem. Si H es un s.d. de L, por el Lema 5.3.1 deducimos que $a = fD_1fa$. Luego, por GL_{23} tenemos que $fD_1fa \in B(S(L))$. Además, si $x \in B(S(L))$ es tal que $0 < x < fD_1fa$, entonces por GL_{11} y GL_{23} inferimos que $0 \leq fD_1fx \leq fD_1fa$. De esta afirmación resulta que $H = [fD_1fa) \subseteq [fD_1fx)$. Como H es un s.d. maximal de L, $H = [fD_1fx)$ o

$[fD_1fx) = L$. Si $H = [fD_1fx)$ como $x \in S(L)$, concluimos que $fD_1fa = D_{n-1}x \leq x$, contradicción. Por otra parte, si $[fD_1fx) = L$, entonces teniendo en cuenta que $x \in B(S(L))$ resulta que $0 = fD_1fx = D_{n-1}x = x$, lo que contradice lo supuesto. Por lo tanto, a es un átomo de $B(S(L))$.

Recíprocamente, del Lema 5.3.2 y la Proposición 2.2.6 tenemos que $[a)$ es un s.d. de L. Veamos ahora que es maximal. Sea T un s.d. de L tal que $[a) \subseteq T \neq L$. Como L es finita, existe $x \in L$ tal que $T = [x)$ de donde resulta que $[a) \subseteq [x)$. Por lo tanto, $0 < x \leq a$ y como a es un átomo de $B(S(L))$, concluimos que $a = x$. $\square$

Como consecuencia directa del Lema 5.3.3 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3.4. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ finita no trivial. $|\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(L)| = |\mathcal{A}t(B(S(L)))|$, donde $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(L)$ es el conjunto de los s.d. maximales de L.*

Teorema 5.3.5. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ finita no trivial. Entonces $L \simeq \prod_{i=1}^{k} L/[a_i)$, donde $\{a_i\}_{1\leq i\leq k}$ es el conjunto de todos los átomos de $B(S(L))$.*

Dem. Sea $h : L \to \prod_{i=1}^{k} L/[a_i)$ definida por $h(x) = (q_1(x), \cdots, q_k(x))$, donde $q_i : L \to L/[a_i)$ es el epimorfismo canónico para cada i, $1 \leq i \leq k$. De la Observación 2.3.4, el Teorema 2.3.7 y el Teorema 5.3.3 inferimos que h es un monomorfismo. Luego, solo resta probar que h es epiyectiva. Sea $y = (y_1, \cdots, y_k) \in \prod_{i=1}^{k} L/[a_i)$, entonces como para cada i, $1 \leq i \leq k$, q_i es epiyectiva tenemos que existe $x_i \in L$ tal que $q_i(x_i) = y_i$. Consideremos $x = \bigvee_{i=1}^{k}(x_i \wedge a_i)$ y veamos que $h(x) = y$. En efecto, $h(x) = h(\bigvee_{i=1}^{k}(x_i \wedge a_i))) = (q_1(\bigvee_{i=1}^{k}(x_i \wedge a_i)), \cdots, q_k(\bigvee_{i=1}^{k}(x_i \wedge a_i)))$. Como los elementos booleanos de $S(L/[a_i)) = \{0, 1\}$, entonces $q_j(a_i) \in \{0, 1\}$. Si $q_j(a_i) = 1$, con $j \neq i$, entonces $a_i \in [a_j)$ y por lo tanto $a_j) < a_i$, lo que contradice que a_i es átomo de $B(S(L))$. Luego $q_j(a_i) = 0$ para todo $j \neq i$ y $q_i(a_i) = 1$. De donde concluimos que $h(x) = (q_1(x_1), \cdots, q_k(x)) = (y_1, \cdots, y_k) = y$. $\square$

Proposición 5.3.6. *Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ finita, $b \in S(L)$ tal que $b \neq 0$, entonces*

(i) $\langle [0,b], \vee, \wedge, \widetilde{f}, \widetilde{D}_1, \cdots, \widetilde{D}_{n-1}, 0, b\rangle$ *es una* L_n^m*–álgebra, donde* $\widetilde{f}x = fx \wedge fD_1fb$ *y* $\widetilde{D}_ix = D_ix \wedge fD_1fb$ *para todo* i*,* $1 \leq i \leq n-1$*.*

(ii) $L/[b)$ *y* $[0,b]$ *son álgebras isomorfas.*

Dem. (i): Sean $x, y \in [0,b]$, entonces es simple verificar que $x \vee y$, $x \wedge y \in [0,b]$. Además, como $b \in S(L)$ tenemos que $fD_1fb \leq b$ y por lo tanto se deduce que $\widetilde{f}x, \widetilde{D}_ix \in [0,b]$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

(ii) Sea $h_b : L/[b) \to [0,b]$ definida por $h_b([x]) = x \wedge fD_1fb$. Es claro que h_b está bien definida y es biyectiva. Por otra parte, h_b es un homomorfismo en $\mathcal{L}_n^m$. En efecto, teniendo en cuenta GL_{12} y GL_{13} resulta que $\widetilde{f}h_b([x]) = \widetilde{f}(x \wedge fD_1fb) = \widetilde{f}x \vee \widetilde{f}(fD_1fb) = (fx \wedge fD_1fb) \vee (D_1fb \wedge fD_1fb) = fx \wedge fD_1fb = h_b(f[x])$. Por otra parte, de GL_{12}, GL_{26}, GL_{23} y GL_{13} deducimos que $\widetilde{D}_ih_b([x]) = D_ih_b([x]) \wedge fD_1fb = D_i(x \wedge fD_1fb) \wedge fD_1fb = D_ix \wedge fD_1fb = h_b(D_i[x])$. □

Como consecuencia inmediata del Teorema 5.3.5 y la Proposición 5.3.6 obtenemos el siguiente corolario.

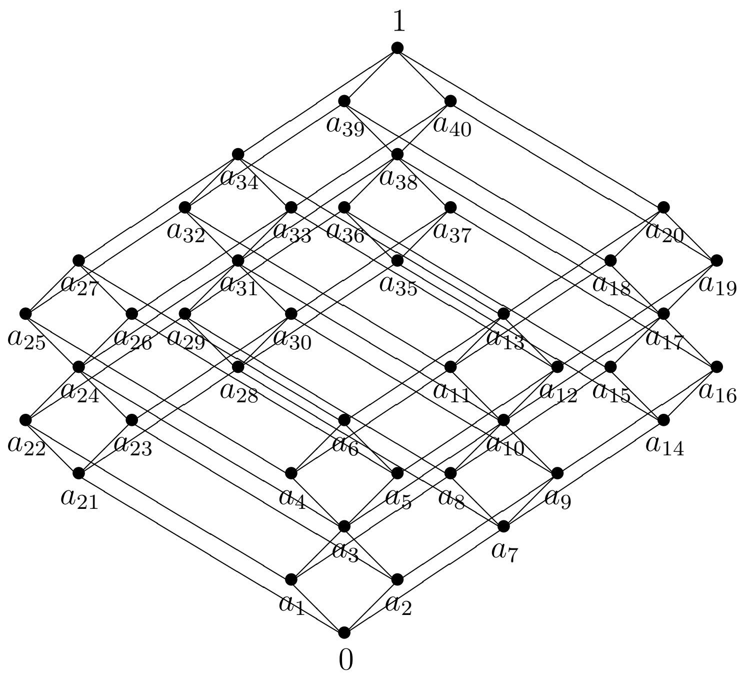
Corolario 5.3.7. *Sea* $L \in \mathcal{L}_n^m$ *fnita no trivial. Si* $\{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$ *es la familia de todos los átomos de* $B(S(L))$*, entonces* L *es isomorfa a* $\prod_{i=1}^{k} [0, a_i]$*.*

Ejemplo 5.3.8. *Sea* $L \in \mathcal{L}_3^2$ *el álgebra cuyo diagrama de Hasse indicamos a continuación y donde las operaciones están dadas por las siguientes tablas:*

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
fx	1	a_{40}	a_{39}	a_{38}	a_{36}	a_{37}	a_{35}	a_{34}	a_{33}	a_{32}	a_{31}	a_{29}	a_{30}	a_{28}	a_{27}	a_{26}
D_1x	0	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_{14}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{14}	a_{20}
D_2x	0	0	0	0	a_6	a_6	a_6	0	0	0	0	a_6	a_6	a_6	a_{14}	a_{14}

x	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}
fx	a_{25}	a_{24}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	a_{20}	a_{19}	a_{18}	a_{17}	a_{15}	a_{16}	a_{14}	a_{13}	a_{12}
D_1x	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{21}	a_{27}	a_{27}	a_{27}	a_{27}	a_{27}	a_{27}	a_{35}	1
D_2x	a_{14}	a_{14}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{21}	a_{21}	a_{21}	a_{21}	a_{27}	a_{27}	a_{27}	a_{21}	a_{21}

x	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	1
fx	a_{11}	a_{10}	a_8	a_9	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_1	a_2	0
D_1x	1	1	1	1	1	a_{35}	1	1	1	1	1	1
D_2x	a_{21}	a_{21}	a_{27}	a_{27}	a_{27}	a_{35}	a_{35}	a_{35}	a_{35}	1	1	1



5.4. L_n^2–álgebras libres

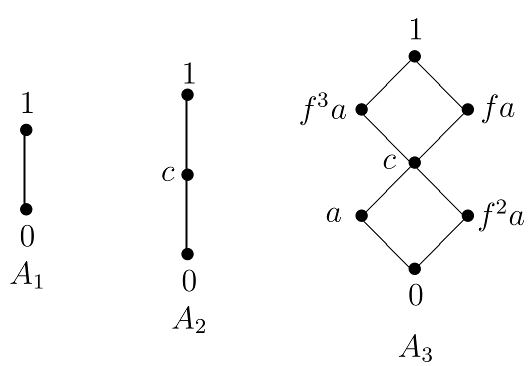
En esta sección nuestro objetivo es determinar la estructura de las L_n^2–álgebras libres finitamente generadas e indicar una forma para calcular su cardinal en término del número de generadores libres. Para ello, mencionaremos algunas consideraciones previas.

Denotaremos con $\mathcal{L}_n^2(r)$ la L_n^2–álgebra libre con un conjunto G de generadores libres tal que $|G| = r$, donde r es un número cardinal con $0 < r < \omega$. La noción de álgebra libre está definida en la Sección 1.1.5. Como las L_n^2–álgebras constituyen una variedad, para cualquier cardinal r, $0 < r < \omega$ el álgebra libre existe y es única a menos de isomorfismo (ver [7]).

Nuestro objetivo inicial fue encontrar la fórmula que nos permitiera calcular el cardinal de $\mathcal{L}_n^2(r)$ para todo r, $0 < r < \omega$. Con tal propósito, teniendo en cuenta los resultados establecidos por R. Cignoli en [23], comenzamos resolviendo algunos casos particulares que describiremos a continuación. La dificultad que presenta esta variedad no nos permitió obtener la fórmula deseada en caso general, pero si determinar el método con el cual se puede hallar dicho cardinal.

5.4.1. L_3^2–álgebras libres

En lo que sigue de esta sección, para calcular el cardinal de $\mathcal{L}_3^2(r)$ teniendo en cuenta el Corolario 5.2.4 resulta que las L_3^2–álgebras simples son A_1, A_2 y A_3 cuyos diagramas de Hasse son los siguientes:



x	D_1x	D_2x
0	0	0
a	1	0
f^2a	1	0
c	1	0
f^3a	1	1
fa	1	1
1	1	1

En primer lugar, teniendo en cuenta (T2), el Corolario 1.1.5 y el Teorema 2.5.2 concluimos que:

(I) $\mathcal{L}_3^2(r) = {A_1}^{|\mathcal{E}_1|} \times {A_2}^{|\mathcal{E}_2|} \times {A_3}^{|\mathcal{E}_3|}$,

donde $\mathcal{E}_j = \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_3^2(r)) : \mathcal{L}_3^2(n)/M \simeq A_j\}$, $1 \leq j \leq 3$ y $\mathcal{M}(\mathcal{L}_3^2(r))$ denota al conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de $\mathcal{L}_3^2(r)$. Luego, conocemos la estructura de los factores de $\mathcal{L}_3^2(r)$, por lo tanto sólo debemos calcular el número de veces que aparecen cada uno de ellos.

Determinación de $|\mathcal{E}_j|$

En lo que sigue si L, L' son L_3^2–álgebras, indicaremos con $Epi(L, L')$ y $Aut(L)$ el conjunto de los epimorfismos de L en L' y el conjunto de los automorfismos de L respectivamente.

Lema 5.4.1. $|\mathcal{E}_j| = \dfrac{|Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j)|}{|Aut(A_j)|}$, $1 \leq j \leq 3$.

Dem. Sea $\alpha : Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j) \longrightarrow \mathcal{E}_j$ la aplicación definida por $\alpha(h) = ker(h)$. Luego, α es sobre. En efecto, para cada $M \in \mathcal{E}_j$ sea $f = \gamma_M \circ q_M$, donde q_M es la aplicación canónica y γ_M es el L_3^2-isomorfismo de $\mathcal{L}_3^2(r)/M$ en A_j. Entonces, $f \in Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j)$ y $ker(f) = M$ de donde resulta que $\alpha(f) = M$. Además, si $M \in \mathcal{E}_j$ y $\alpha(h) = M$, entonces $\alpha^{-1}(M) = \{g \circ h : g \in Aut(A_j)\}$. Por lo tanto, $|\mathcal{E}_j| \cdot |Aut(A_j)| = |Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j)|$ de donde concluimos la demostración. $\square$

Observación 5.4.2. *Es claro que* $|Aut(A_1)| = |Aut(A_2)| = 1$ *y que sólo existen* 2 *automorfismos de* A_3.

Luego, teniendo en cuenta el Lema 5.4.1 y la Observación 5.4.2 solo resta calcular $|Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j)|$ con $1 \leq j \leq 3$.

Lema 5.4.3. *Sea* $F^*(G, A_j) = \{f : G \longrightarrow A_j : [f(G)] = A_j\}$, $1 \leq j \leq 3$. *Entonces* $|Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j)| = |F^*(G, A_j)|$.

Dem. Sea $\beta : Epi(\mathcal{L}_3^2(r), A_j) \longrightarrow F^*(G, A_j)$ la aplicación definida por $\beta(h) = h/G$. Es simple verificar que β es inyectiva. Por otra parte, para cada $f \in F^*(G, A_j)$ existe un único homomorfismo $h_f : \mathcal{L}_3^2(r) \longrightarrow A_j$ que extiende a f. Además, $h_f(\mathcal{L}_3^2(r)) = h_f([G]) = [f(G)] = A_j$ de donde concluimos que β es sobre. □

Corolario 5.4.4. (i) $|\mathcal{E}_1| = 2^r$,

(ii) $|\mathcal{E}_2| = 3^r - 2^r$,

(iii) $|\mathcal{E}_3| = \dfrac{7^r - 3^r}{2}$.

Dem. Del Lema 5.4.1, el Lema 5.4.3 y la Observación 5.4.2 obtenemos (i) y (ii). Además, teniendo en cuenta que las subálgebras de A_3 son A_1 y A_2 resulta que $|F^*(G, A_3)| = 7^r - (2^r + 3^r - 2^r)$, de donde concluimos (iii). □

De los resultados anteriores podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.4.5. *Sea* $\mathcal{L}_3^2(r)$ *la* L_3^2*–álgebra libre con* r *generadores libres. Entonces el cardinal* $|\mathcal{L}_3^2(r)|$ *puede expresarse por la fórmula siguiente:*

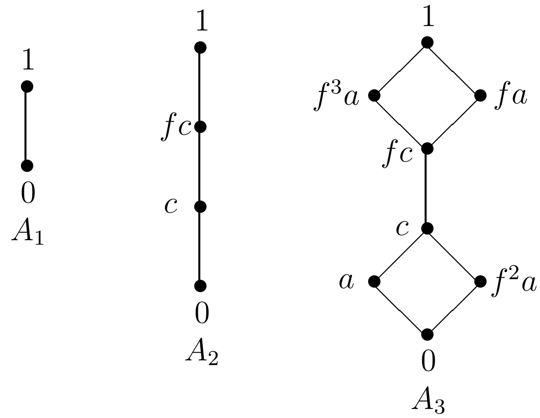
$$|\mathcal{L}_3^2(r)| = 2^{2^r} \times 3^{3^r - 2^r} \times 7^{\frac{7^r - 3^r}{2}}.$$

Ejemplo 5.4.6. *Por el Teorema 5.4.5 tenemos que para* $n = 1$

$$|\mathcal{L}_3^2(1)| = 2^2 \times 3 \times 7^2 = 588.$$

5.4.2. L_4^2–álgebras libres

A continuación, para calcular el cardinal de $\mathcal{L}_4^2(r)$ debemos determinar las L_4^2–álgebras simples. Teniendo en cuenta el Corolario 5.2.4 resulta que ellas son A_i con $1 \leq i \leq 3$, cuyos diagramas de Hasse se indican a continuación:



x	D_1x	D_2x	D_3x
0	0	0	0
a	1	0	0
f^2a	1	0	0
c	1	0	0
fc	1	1	0
f^3a	1	1	1
fa	1	1	1
1	1	1	1

De (T2), el Corolario 1.1.5 y el Teorema 2.5.2 deducimos que:

(II) $\mathcal{L}_4^2(r) = {A_1}^{|\mathcal{E}_1|} \times {A_2}^{|\mathcal{E}_2|} \times {A_3}^{|\mathcal{E}_3|}$.

donde $\mathcal{E}_j = \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_4^2(r)) : \mathcal{L}_4^2(n)/M \simeq A_j\}$, $1 \leq j \leq 3$, y $\mathcal{M}(\mathcal{L}_4^2(r))$ denota al conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de $\mathcal{L}_4^2(r)$.

Para determinar $|\mathcal{E}_j|$, $1 \leq j \leq 3$ aplicaremos un razonamiento análogo al del caso anterior. Sabemos que

$$|\mathcal{E}_j| = \frac{|Epi(\mathcal{L}_4^2(n), A_j)|}{|Aut(A_j)|}, 1 \leq j \leq 3.$$

En primer lugar observemos que $|Aut(A_1)| = |Aut(A_2)| = 1$ y $|Aut(A_3)| = 2$. Además, como $|Epi(\mathcal{L}_4^2(r), A_j)| = |F^*(G, A_j)|$, $1 \leq j \leq 3$ tenemos que:

(i) $|\mathcal{E}_1| = 2^r$,

(ii) $|\mathcal{E}_2| = 4^r - 2^r$,

Lema 5.4.7. $|\mathcal{E}_3| = 2^{2r-1}(2^r - 1)$.

Dem. Como las subálgebras de A_5 son A_1 y A_2 resulta que $|F^*(G, A_3)| = 2^{2r}(2^r - 1)$. De esta afirmación y teniendo en cuenta que $|Aut(A_3)| = 2$ concluimos que

$$|\mathcal{E}_3| = \frac{|F^*(G, A_3)|}{2} = \frac{2^{2r}(2^r - 1)}{2} = 2^{2r-1}(2^r - 1). \qquad \square$$

Luego de lo demostrado anteriormente concluimos el Teorema 5.4.8.

Teorema 5.4.8. *Sea $\mathcal{L}_4^2(r)$ la L_4^2–álgebra libre con r generadores libres. Entonces el cardinal $|\mathcal{L}_4^2(r)|$ puede expresarse por la fórmula siguiente:*

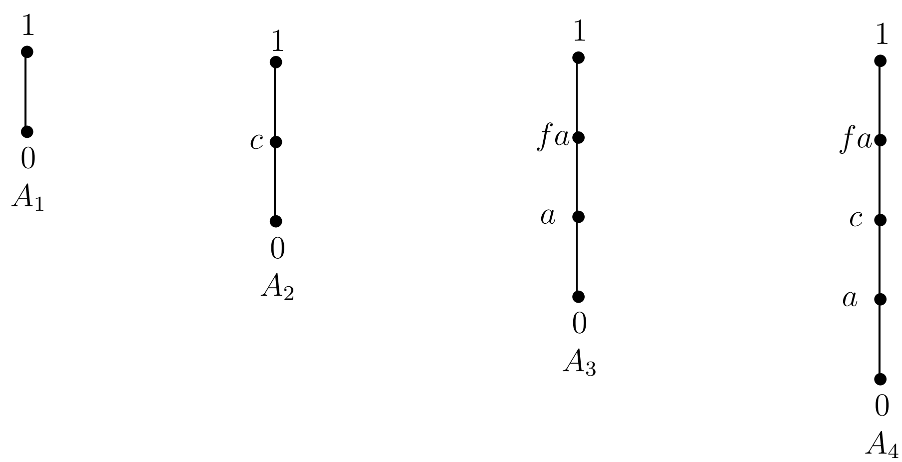
$$|\mathcal{L}_4^2(r)| = 2^{2^r} \times 4^{4^r - 2^r} \times 8^{2^{2r-1}(2^r-1)}.$$

Ejemplo 5.4.9. *Por el Teorema 5.4.8 tenemos que para $r = 1$*

$$|\mathcal{L}_4^2(1)| = 2^2 \times 4^2 \times 8^2 = 4096.$$

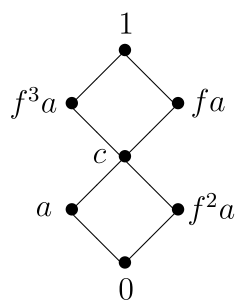
5.4.3. L_5^2–álgebras libres

Como en los casos anteriores, a partir del Corolario 5.2.4 tenemos que las las L_5^2–álgebras simples son A_i , $1 \leq i \leq 9$, de donde podremos calcular calcular el cardinal de $\mathcal{L}_5^2(r)$.



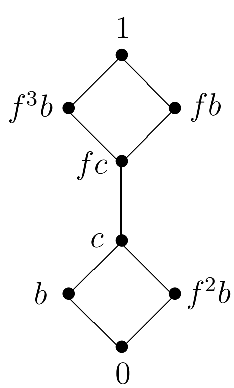
Teniendo en cuenta que A_i, $1 \leq i \leq 3$, son subálgebras de A_4 solo describimos los operadores D_i en este caso:

x	D_1x	D_2x	D_3x	D_4x
0	0	0	0	0
a	1	0	0	0
c	1	1	0	0
fa	1	1	1	0
1	1	1	1	1

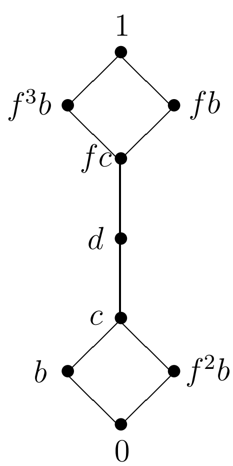


A_5

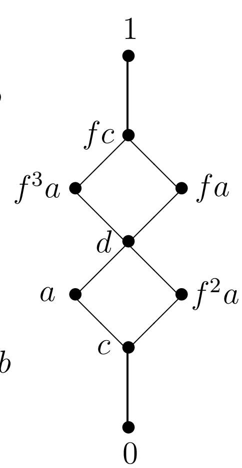
x	D_1x	D_2x
0	0	0
a	1	0
f^2a	1	0
c	1	0
fa	1	1
f^3a	1	1
1	1	1



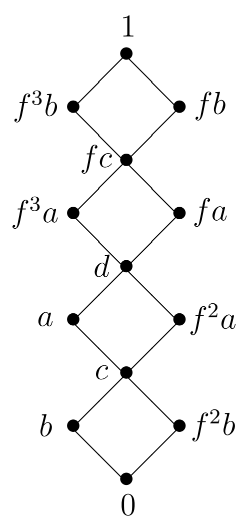
A_6



A_7



A_8



A_9

Como A_i, $i = 6, 7, 8$, son subálgebras de A_9, solo indicamos para este caso los operadores D_i:

x	0	b	f^2b	c	a	f^2a	d	f^3a	fa	fc	f^3b	fb	1
D_1x	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D_2x	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D_3x	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
D_4x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

De (T2), el Corolario 1.1.5 y el Teorema 2.5.2 deducimos que:

(III) $\mathcal{L}_5^2(r) = \prod_{j=1}^{9} A_i^{|\mathcal{E}_j|}$.

donde $\mathcal{E}_j = \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_5^2(r)) : \mathcal{L}_5^2(n)/M \simeq A_j\}$, $1 \leq j \leq 9$, y $\mathcal{M}(\mathcal{L}_5^2(r))$ denota al conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de $\mathcal{L}_5^2(r)$.

Para determinar $|\mathcal{E}_j|$, $1 \leq j \leq 9$ aplicaremos el mismo razonamiento que en los casos anteriores. En primer lugar observemos que $|Aut(A_j)| = 1$ para $1 \leq j \leq 4$, $|Aut(A_j)| = 2$ para $5 \leq j \leq 8$ y $|Aut(A_9)| = 4$. Además, como $|Epi(\mathcal{L}_5^2(r), A_j)| = |F^*(G, A_j)|$, $1 \leq j \leq 9$ tenemos que:

(i) $\mathcal{E}_1 = 2^r$,

(ii) $\mathcal{E}_2 = 3^r - 2^r$.

(iii) $\mathcal{E}_3 = 4^r - 2^r$.

(iv) $\mathcal{E}_4 = 5^r - 3^r$.

(v) $\mathcal{E}_5 = \dfrac{7^r - 3^r}{2}$.

(vi) $\mathcal{E}_6 = 2^{2r-1}(2^r - 1)$.

Lema 5.4.10. $\mathcal{E}_7 = \dfrac{9^r - 8^r - 5^r + 4^r}{2}$.

Dem. Como las subálgebras de A_7 son A_1, A_2, A_3, A_4 y A_6 resulta que:

$$|F^*(G, A_7)| = 9^r - (2^r + 3^r + 4^r + 5^r + 8^r - 6 \cdot 2^r - 3^r - 3 \cdot 4^r + 9 \cdot 2^r + 4^r - 5 \cdot 2^r + 2^r)$$

por lo tanto,

$$\mathcal{E}_7 = \frac{|F^*(G, A_7)|}{2} = \frac{9^r - (-4^r + 5^r + 8^r)}{2}. \qquad \square$$

Lema 5.4.11. $\mathcal{E}_8 = \dfrac{9^r - 5^r}{2}$.

Dem. Teniendo en cuenta que $|Aut(A_8)| = 2$ y que las subálgebras de A_8 son A_1, A_2, A_3 y A_4, resulta que:

$$\mathcal{E}_8 = \frac{9^r - (2^r + 3^r + 4^r + 5^r - 4 \cdot 2^r - 3^r - 4^r + 4 \cdot 2^r - 2^r)}{2} = \frac{9^r - 5^r}{2}. \qquad \square$$

Lema 5.4.12. $\mathcal{E}_9 = \dfrac{13^r - 2 \cdot 9^r + 5^r}{4}$.

Dem. Se obtiene como consecuencia que $|Aut(A_9)| = 4$ y que $|F^*(G, A_9)| = 13^r - (2^r + 3^r + 4^r + 5^r + 8^r + 2 \cdot 9^r - 8 \cdot 2^r - 3 \cdot 3^r - 6 \cdot 4^r - 3 \cdot 5^r - 8^r + 22 \cdot 2^r + 3 \cdot 3^r + 9 \cdot 4^r + 5^r - 29 \cdot 2^r - 3^r - 5 \cdot 4^r + 20 \cdot 2^r + 4^r - 7 \cdot 2^r + 2^r)$ dado que las subálgebras de A_9 son A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A_7 y A_8. $\square$

De los resultados establecidos en los incisos (i) a (vi), el Lema 5.4.10, el Lema 5.4.11 y el Lema 5.4.12 concluimos el siguiente teorema:

Teorema 5.4.13. *Sea $\mathcal{L}_5^2(r)$ la L_5^2–álgebra libre con r generadores libres. Entonces el cardinal $|\mathcal{L}_5^2(r)|$ puede expresarse por la fórmula siguiente:*

$$|\mathcal{L}_5^2(r)| = 2^{2^r} \times 3^{3^r - 2^r} \times 4^{4^r - 2^r} \times 5^{5^r - 3^r} \times 7^{\frac{7^r - 3^r}{2}} \times 8^{2^{2r-1}(2^r - 1)} \times 9^{9^r - 5^r - 2^{2r-1}(2^r - 1)} \times 13^{\frac{13^r - 2 \cdot 9^r + 5^r}{4}}.$$

Ejemplo 5.4.14. *Por el Teorema 5.4.13 tenemos que para $n = 1$*

$$|\mathcal{L}_5^2(1)| = 2^{12} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2 = 1.219.276.800.$$

Conclusiones y estudios futuros

En esta tesis continuamos investigando a las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n introducidas en [1]. Hemos realizados un estudio algebraico de las mismas a partir de la noción de ideal (o dualmente de filtro) del retículo subyacente. Para ello empleamos algunas técnicas similares a la de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil de orden n desarrolladas en [16]. En este punto cabe destacar que, el hecho que en las L_n^m–álgebras los operadores unarios D_i, $1 \leq i \leq n-1$, no sean $\wedge$–hemimorfismo ([37]), hizo mucho más compleja la resolución de los temas. Además, hemos encontrado un operador de implicación sobre estas álgebras que nos permitió asegurar que son la contrapartida álgebraica de un cálculo proposicional estilo Hilbert. Dicho cálculo para $m = 1$ coincide con el de Łukasiewicz n–valuado.

Desde esta perspectiva se plantea como trabajo futuro encontrar un cálculo de secuentes que sea correcto y completo con respecto a estas álgebras. Además, sería apreciable que este cálculo tuviera la Propiedad de Eliminación de Corte, debido a sus múltiples consecuencias positivas como la decibilidad, consistencia, teoremas de interpolación, etc.

Por otra parte, pensamos que otros problemas quedan abiertos y serían interesantes de resolver. Tal es el caso de encontrar una equivalencia natural entre la categoría de las L_n^m–álgebras y la de ciertos espacios topológicos. Para ello podría tenerse en cuenta, por ejemplo, los resultados de H. Priestley ([61, 62, 63]) o los de R. Goldblatt ([37]), dado que hasta el momento solo conocemos estudios algebraicos de estas álgebras.

Otra alternativa es considerar las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n con un cuantificador existencial. Efectuando numerosos cálculos podemos afirmar que, como en el caso de las álgebras de Boole, con cada cuantificador existencial sobre una L_n^m–álgebra está asociado un cuantificador universal. Por lo tanto, podemos llamar L_n^m–álgebras monádicas a la nueva clase de álgebra. La misma resultaría una generalización de las álgebras de Łukasiewicz n–valuadas monádicas ([36]).

Finalmente, teniendo en cuenta los resultados establecidos en [21], sería atrayente definir las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n de similaridad, que generalizarían a las álgebras de Łukasiewicz–Moisil de similaridad.

Referencias

[1] T. Almada and J. Vaz De Carvalho, *A generalization of the Lukasiewicz algebras*, Studia Logica, 69 (2001), 329-338.

[2] R. Balbes and P. Dwinger, Distributive Lattices, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.

[3] N. Belnap, *How a computer should think*, Contemporary Aspects of Philosophy, G. Ryle Ed. Oriel Press, Boston (1976), 30–56.

[4] N. Belnap, A useful four-valued logic, Modern Uses of Multiple-Valued Logic, Ed. Reidel , Dordrecht–Boston, (1977), 8–37.

[5] J. Berman, *Distributive lattices with an additional unary operation*, Aequationes Math., 16 (1977), 165–171.

[6] A. Białynicki–Birula and H. Rasiowa, *On the representation of quasi-boolean algebras*, Bulletin Academie Polen. Sci., 3 (1957), 259–261.

[7] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, 3^{rd} edition, Providence, 1967.

[8] W. Blok and D. Pigozzi, *On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I*, Algebra Universalis, 15 (1982), 195-227.

[9] T. S. Blyth, J. Fang and J. C. Varlet, *Subdirectly irreducible Ockham algebras*, General algebra, Proc. Conf. Vienna/Austria 1990, Contrib. Gen. Algebra, 7 (1991), 3748.

[10] T. S. Blyth and J. C. Varlet, Ockham Algebras, Oxford University Press, New York, 1994.

[11] T. S. Blyth, J. Fang and J. C. Varlet, *Ockham Algebras with pseudocomplementation*, Communications in Algebra, 25 (1997), 36053615.

[12] T. Blyth and J. Fang, *Extended Ockham algebras*, Commun. Algebra, 28, 3 (2000), 12711284.

[13] T. Blyth, H. Silva and J. Varlet, *Ockham algebras arising from monoids.* Algebra Colloq., 8, 3 (2001), 315326.

[14] T. S. Blyth and H. J. Silva, *On Ockham algebras whose endomorphism semigroups are regular*, Communications in Algebra, 24 (1996), 919928.

[15] T. S. Blyth and H. J. Silva, *Endomorphism regular Ockham algebras of finite Boolean type*, Glasgow Math. J., 39 (1997), 99-110.

[16] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, Łukasiewicz–Moisil Algebras, Annals of Discrete Mathematics, 49, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[17] A. Brezuleanu and R. Diaconescu, *Sur la duale de la catégorie des treillis*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. XIV, 3 (1969), 311–323.

[18] D. Buşneag and F. Chirteş, LM_n-algebra of fractions and maximal LM_n-algebra of fractions, Discrete Math., 296, 2-3 (2005), 143–165.

[19] S. Burris and H. Sankappanavar, A course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 78, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[20] F. Chirteş, *Localization of LM_n-algebras*, Cent. Eur. J. Math., 3, 1 (2005), 105–124.

[21] F. Chirteş, *Similarity Lukasiewicz-Moisil algebras*, Annals of the University of Craiova , Math. Comp. Sci. Ser., 35 (2008), 54-75.

[22] R. Cignoli, *Estudio Algebraico de Lógicas Polivalentes: Algebras de Moisil de orden* n, Tesis Doctoral, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1969.

[23] R. Cignoli, *Moisil Algebras*, Notas de Lógica Matemática 27, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1970.

[24] R. Cignoli, *Some algebraic aspects of many-valued logics*, Brazilian Conference on Mathematical Logic, 3 (1980), 49–69.

[25] R. Cignoli, *Proper* n*–valued Łukasiewicz algebras as* S*–algebras of Łukasiewicz* n*–valued propositional calculi*, Studia Logica, 41 (1982), 3–16.

[26] R. Cignoli and A. Monteiro, *Boolean elements in Łukasiewicz algebras II*, Proc. Japan Acad., 41 (1965), 676–680.

[27] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Algebras das Logicas de Łukasiewicz*, Campinas UNICAMP - CLE, 1995. (Coleção CLE, v. 12).

[28] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer, 2000.

[29] W. Cornish, *The multiplier extension of a distributive lattice*, J. Algebra, 32 (1974), 339-355.

[30] I. D'Ottaviano, *A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*, EVORA, F.R.R. (Ed.) Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea, Coleão CLE, 11 (1992), 65–94.

[31] F. Esteva and P. García. *On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras*, Studia Logica, 55 (1995), 319–346.

[32] A. V. Figallo, C. Gallardo, A. Ziliani, *Weak implication on generalized Łukasiewicz algebras of order n*, Bull. Sect. Logic Univ. Lódź 39, 4 (2010), 187–198.

[33] C. Gallardo, A. Ziliani, *The L_n^m–propositional calculus*, C. A. Gallardo y A. Ziliani. Mathematica Bohemica 140, 1 (2015), 11–33.

[34] C. Gallardo, A. Ziliani, *Localization of m–generalized Łukasiewicz algebras of order n*, C. Gallardo y A. Ziliani. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. (En prensa)

[35] G. Georgescu, *$\mathcal{F}$–multipliers and the localization of distributive lattices*, Algebra Universalis, 21 (1985), 181–197.

[36] G. Georgescu, C. Vraciu, *Algebre Boole monadice si algebre Łukasiewicz monadice*, Studii Cerc. Mat., 23, 7 (1971), 1025-1048.

[37] R. Goldblatt, *Varieties of complex algebras*, Ann. Pure Appl. Logic., 44 (1989), 173–242.

[38] M. Goldberg, *m Distributive p-algebras and Ockham algebras: A topological approach*, Bull. Aust. Math. Soc., 22 (1980), 159–160.

[39] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Birrkhäuser Verlag, Basel, 1978.

[40] G. Grätzer, Universal Algebra, Springer–Verlag, 2^{rd} Ed., 1979.

[41] R. Grigolia, *Algebraic analysis of Łukasiewicz–Tarsky n–valued logical systems*, R. Wojcicki, G. Malinowski (Eds.), Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi, Polish Acad. Sciences, Ossolineum, Wroclaw, (1977), 81–92.

[42] P. R. Halmos, Lectures on Boolean Algebras, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[43] P. T. Johnstone, Stone space, Cambrigde University Press, 1982.

[44] J. A. Kalman, *Lattices with involution*, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958), 485–491.

[45] M. Kolibiar, *Bermerkungen über Translation der Verbände*, Acta Fa. Ferrum Natur. (Univ. Comeniam Math), 5, (1961), 455–458.

[46] J. Lambek, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, 1996.

[47] J. Łukasiewicz, *On three–valued logic* (Polish). Ruch Filozoficzny, 5 (1920), 160–171.

[48] R. Maronna, A characterization of Morgan lattices, Portugal. Math, 23 (1964), 169–171.

[49] Gr. C. Moisil, *Recherches sur l' algèbre de la logique*, Ann. Sci. Univ. Jassy, 22 (1935), 1–117.

[50] Gr. C. Moisil, *Recherches sur les logiques non chrysippiennes*, Ann. Sc. de l′ Universitéde Jassy , 26 (1940), 431466.

[51] Gr. C. Moisil, *Notes sur les logiques non–chrysippiennes*, Ann. Sci. Univ. Jassy, 27 (1941), 86–98.

[52] Gr. C. Moisil, *Le algèbre di Łukasiewicz*, Acta Logica, Bucharest, 6 (1963), 97–135.

[53] Gr. C. Moisil, *Sur les logiques de Łukasiewicz a un nombre fini de valeurs*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 9 (1964), 905–920.

[54] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non–chrysippiennes*, Ed. Academiei, Bucarest, 1972.

[55] A. Monteiro, *Algebras de De Morgan*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, 1er Semestre de 1962, Bahía Blanca, Argentina.

[56] A. Monteiro, *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., R.P. Roum., 7, 55 (1963), 3–12. (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 21, Inst. Mat. Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964).

[57] A. Monteiro, *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[58] L. Monteiro, *Axiomes indépendents pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum., 7 (55), (1963). (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 22, Inst. Mat. Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.)

[59] M. Petrich, *The translational hull in semigroups and rings*, Semigroup Forum, 1, (1970), 283–360.

[60] N. Popescu, Abelian Categories with Applications to Rings and Modules, Academic Press, New York, 1973.

[61] H. A. Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc., 2 (1970), 186–190.

[62] H. A. Priestley, *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc., 4, 3 (1972), 507–530.

[63] H. A. Priestley, *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Ann. Discrete Math. 23 (1984), 39–60.

[64] M. Ramalho, *The coherent algebras in the varieties $K_{n,m}$ of Ockham algebras*, Portugaliae Mathematica, 50, 4 (1993), 435–445.

[65] M. Ramalho and M. Sequeira, *On generalized MS–algebras*, Port. Math., 44 (1987), 315–328.

[66] H. Rasiowa, An algebraic approach to non-classical logics, North–Holland Publishing Co., Amsterdam (1974).

[67] H. Rasiowa and R. Sikorski, The mathematics of metamathematics, North-Holland, Warzawa-Amsterdam, 1970.

[68] S. Rudeanu, *Localizations and fractions in algebra of logic*, J. of Mult.-Valued Logic and Soft Computing, 16 (2010), 467–504.

[69] H. P. Sankappanavar. *Distributive lattices with a dual endomorphism.* Z. Math. Logik Grundlag.Math. 31, 5, 385392. 1985.

[70] J. Schmid, *Multipliers on distributive lattices and rings of quotients*, Houston J. Math., 6 (1980), 401-425.

[71] J. Schmid, *Distributive lattices and rings of quotients*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 33 (1980), 675-696.

[72] M. Sequeira,*Varieties of Ockham algebras satisfying* $x \leq f^4(x)$, Portugaliae Mathematica, 45 (1988), 4, 369391.

[73] M. Sholander, *Postulates for distributive lattices*, Can. J. Math. 3 (1951), 28–30.

[74] C. Sicoe, *Sur les ideaux des algèbres lukasiewicziennes polivalentes*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 12 (1967), 391-401.

[75] C. Sicoe, *On many-valued Lukasiewicz algebras*, Proc. Japan Acad., 43 (1967), 725-728.

[76] C. Sicoe, *Sur la dèfinition des algèbres lukasiewicziennes polivalentes*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 13 (1968), 1027-1030.

[77] R. Sikorski, *Boolean Algebras, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiele*, Band 25, SpringerVerlag, Berlin, 1964.

[78] H. Simmon, *Reticulated rings*, J. Algebra, 66 (1980), 169–192.

[79] B. Stenström, *Flatness and localization over monoids*, Math. Nachrichten, 48 (1971), 315-334.

[80] B. Stenström, Rings of quotients, Springer-Verlag, 1975.

[81] G. Szász, *Die Translationen der Halbverbände*, Acta Sci. Math. (Szeged), 17 (1956), 165–169.

[82] G. Szász and J.Szendri, *Über der Translation der Halbverbände*, Acta Sci. Math. (Szeged), 18 (1957), 44–47.

[83] A. Urquhart, *Distributive lattices with a dual homomorphic operation*, Studia Logica, 38 (1979), 201–209.

[84] J. C. Varlet and J. Vaz de Carvalho, *Equational bases for varieties of Ockham algebras*, Algebra Universalis, 44 (2000), 251-269.

[85] J. C. Varlet and J. Vaz de Carvalho, *On the varieties $P_{2m,0}$ of Ockham algebras*. To appear in Bull. Soc. Roy. Sci. Liège.

[86] J. Vaz de Carvalho, *The subvariety $K_{2,0}$ of Ockham algebras*, Bull. Soc. R. Sci. Liège, 53 (1984), 393-400.

[87] J. Vaz de Carvalho. *Congruences on algebras of $K_{n,0}$*, Bull. Soc. R. Sci. Li'ege, 54 (1985), 301-303.

[88] J. Vaz de Carvalho. Sobre as variedades $K_{n,0}$ e Álgebras de Lukasiewicz generalizadas, Doctoral Thesis, Portugal, 1986

[89] J. Vaz De Carvalho, *On the variety of* $m-$*generalized Lukasiewicz algebras of order* n, Studia Logica, 94 (2010), 291–305.