Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Hipersecuentes y la Lógica Tetravalente Modal $\mathcal{TML}$

Martín Figallo

Bahía Blanca **Argentina**

2012

Contents

Agradecimientos v
Dedicatoria vii
Resumen ix
Resumen xiii

1 Capítulo I: Preliminares 1

1.1 Teoría de la demostración 1
1.1.1 Cálculos de Hilbert 2
1.1.2 Cálculos de secuentes 4
1.1.3 Cálculos de secuentes formales 8
1.1.4 Combinación de cálculos de secuentes - fibring 17
1.1.5 Hipersecuentes 20
1.2 La lógica tetravalente modal ($\mathcal{TML}$). 25
1.2.1 Álgebras tetravalentes modales 26
1.2.2 Lógicas tetravalentes modales abstractas 28
1.2.3 Cálculo de secuentes para $\mathcal{TML}$ 30

2 Capítulo II: Cálculos de Hipersecuentes Conmutativos 33

2.1 La categoría de los cálculos de hipersecuentes conmutativos 33
2.2 Fibring sin restricciones de cálculos de hipersecuentes conmutativos 42
2.3 Reglas admisibles y derivables. La propiedad de eliminación de regla . . . 48
2.4 Características de preservación por fibring 52
2.5 Extensión al fibring con restricciones 62
2.6 Cálculos de hipersecuentes e hipertraducciones 69

3 Capítulo III: Sobre la Lógica Tetravalente Modal $\mathcal{TML}$ 73

3.1 Introducción 73
3.2 La lógica M_{4m} como lógica matricial 75
3.3 La implicación contrapositiva en M_{4m} 79
3.4 M_{4m} como lógica paraconsistente 86
3.5 Presentaciones estilo Hilbert para M_{4m} en términos de la implicación contrapositiva 92
3.6 Un sistema de tableau para M_{4m} 109
3.6.1 Separando valores de verdad de M_{4m} 111
3.6.2 Describiendo las tablas de verdad de $\succ$ en términos de T/F 112
3.6.3 Obteniendo las reglas de tableau para M_{4m} 112
3.6.4 Reglas derivadas para los restantes conectivos 114
3.6.5 Correctitud y completitud de $\mathbb{T}$ 115
3.7 Maximalidad y n-maximalidad 120
3.8 La lógica tetravalente modal normal $\mathcal{TML}^N$ 126

4 Capítulo IV: Hipersecuentes para la Lógica Tetravalente Modal $\mathcal{TML}$ 129

4.1 Observaciones sobre el cálculo de Gentzen $\mathfrak{G}$ 129
4.2 Cálculo de hipersecuentes para M_{4m} 133
4.3 Completitud y correctitud 136
4.4 Reglas sustitutivas y reductivas 139
4.5 Eliminación de corte para $\mathfrak{HG}$ 150

5 Capítulo V: Lógica Tetravalente Modal con Implicación Deductiva 157

5.1 Introducción 157
5.2 Implicación deductiva en M_{4m} 160
5.3 Extensiones clásicas de las álgebras de De Morgan y las álgebras tetravalentes modales 163

5.4 Una presentación estilo Hilbert para $M_{4m}^{\sim}$ . . . 168
5.5 $M_{4m}^{\sim}$ como una extensión normal de **S5** . . . 171

6 Capítulo VI: Conclusiones y estudios futuros **179**

5 Referencias **181**

Agradecimientos

Deseo manifestar mi más profundo agradeciemiento al Dr. Marcelo Coniglio quien me orientó durante el desarrollo de esta tesis con sabiduría, paciencia, humildad y honestidad intelectual. Por sus reiterados viajes a Bahía Blanca para atenderme, como también, por recibirme en su casa durante mis estadías en Campinas. Su ayuda fue determinante para que este trabajo llegara a concretarse.

También, deseo agradecer a mi segunda directora Dra. Alicia Ziliani por sus sugerencias, correcciones y por haber sido fundamental para mi formación acádemica durante los últimos diez años. Pero principalmente, le agradezco haber estado a mi lado siempre que fue necesario.

Agradezco infinitamente a mi esposa Adriana por apoyarme incondicionalmente en todo lo que fuera necesario. Por estar conmigo en las buenas y en las malas. Sin su apoyo incondicional no hubiese podido lograr terminar esta tarea.

Finalmente, agradezco al Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE-UNICAMP) por su hospitalidad durante mis estadías en Campinas, principalmente durante el primer semestre de 2009, periodo en el cual esta tesis comenzó a ser escrita. También, agradezco al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y a sus autoridades por apoyarme en todo lo que fuera necesario.

A mi madre

Resumen

Esta tesis tiene como objeto el estudio de dos temas principales: en primer lugar nos abocamos al estudio de una clase de cálculos de Gentzen, los hipersecuentes; y en segundo lugar, abordamos el estudio de ciertas lógicas a las que dan lugar las álgebras tetravalentes modales. Ambos temas quedarán relacionados, como veremos en el Capítulo III.

Los hipersecuentes son una generalización natural de los secuentes ordinarios que resultan ser una herramienta muy adecuada para presentar formulaciones estilo Gentzen de diversas lógicas con la muy deseable propiedad de eliminación de corte (cut-elimination property). En los años recientes, el desarrollo de métodos para combinar lógicas ha recibido mucha atención, y las motivaciones para que esto suceda provienen de áreas tan disímiles como la Filosofía y las Ciencias de la Computación (ver, por ejemplo, [13] y [15]). El fibring categorial (también conocido como fibring algebraico) introducido en [55], ha demostrado ser una herramienta amplia y poderosa para combinar lógicas.

Por otro lado, la clase **TMA** de las álgebras tetravalentes modales fue considerada por primera vez por Antonio Monteiro, y fueron estudiadas principalmente por I. Loureiro, A.V. Figallo, A. Ziliani y P. Landini. Posteriormente, J.M. Font y M. Rius en [31] se interesaron en las lógicas a las que dan lugar los aspectos reticulares de estas álgebras.

Estos mismos autores introdujeron un cálculo de secuentes para una de estas lógicas, a saber, $\mathcal{TML}$.

En el Capítulo II, presentamos un modo alternativo de formular cálculos de hipersecuentes mediante la introducción de metavariables para fórmulas, secuentes e hipersecuentes respectivamente, en el lenguaje objeto. Se introduce una categoría adecuada de cálculos de hipersecuentes y se definen ambos tipos de fibring: restringido y no restringido. Los morfismos introducidos resultarán ser una novedosa noción de traducción entre lógicas la cual preserva meta-propiedades en un sentido fuerte. Finalmente, exploraremos algunas características de preservación, en particular mostraremos un resultado sobre la preservación por fibring de la propiedad de interpolación de Craig (CIP).

En el Capítulo III, retomamos la cuestion de investigar diferentes aspectos lógicos de las TMAs. Considerando la implicación contrapositiva introducida por A. Figallo y P. Landini en [28], introducimos tres cálculos de Hilbert distintos para la lógica $\mathcal{TML}$, como así tambien, un sistema de tableau correcto y completo para la semántica de las TMAs. Los aspectos paraconsistentes de $\mathcal{TML}$ también son analizados desde el punto de vista de las *Logicas de la Inconsistencia Formal*, introducidas por W. Carnielli y J. Marcos en [18], y posteriormente estudiadas en [17]. La lógica tetravalente modal normal $\mathcal{TML}^N$ es luego estudiada. Finalmente, probamos que ambas lógicas son sublógicas propias del cálculo proposicional clásico que no son maximales.

En el Capitulo IV, mostramos que el cálculo de secuentes presentado por Font y Rius en [31] para $\mathcal{TML}$ no tiene la propiedad de eliminación de corte. Formulamos, entonces, un cálculo de hipersecuentes correcto y completo con respecto a $\mathcal{TML}$ que si tiene esta tan deseable propiedad.

Finalmente, en el Capítulo V, motivados por el problema de enriquecer a $\mathcal{TML}$ con una implicación deductiva, probamos que las álgebras tetravalentes modales de A. Monteiro enriquecidas con un complemento booleano coinciden con las álgebras de De Morgan enriquecidas con un complemento booleano, o equivalentemente, con las álgebras de Boole enriquecidas con una negación de De Morgan. Estas últimas son denominadas álgebras de Boole involutivas (o simétricas) (IBAs), introducidas por Gr. Moisil y principalmente estudiadas por A. Monteiro. Probamos que las IBAs son la contrapartida algebraica de la lógica modal **S5** que satisface ecuaciones adicionales. De esta manera, la lógica que puede asociarse naturalmente a las IBAs es una extensión modal propia de **S5**. Presentamos un cálculo de Hilbert correcto y completo para esta extensión de **S5** en el lenguaje de las IBAs, esto es, sin modalidades.

Abstract

The aim of this thesis is the study of two main topics. In the first place we focus on the study of a particular class of Gentzen systems, the so called hypersequents; and in the second place, we address the study of certain logics which are given raised by tetravalent modal algebras. Both topics will be relate as we will see in Chapter III.

Hypersequents are a natural generalization od ordinary sequents and turned out to be a very suitable tool for presenting Gentzen style formulations of diverse logics with the very desirable cut-elimination property. In recent years, methods for combining logics have gained a lot of attention, and motivations come from different areas such as Philosophy and Computer Science (see for instance [13] y [15]). Categorical fibring (also known as algebraic fibring) introduced in [55], has shown to be a very wide and powerful tool for combining logics.

On the other hand, the class **TMA** of tetravalent modal algebras was first considered by Antonio Monteiro, and were studied mainly by I. Loureiro, A.V. Figallo, A. Ziliani and P. Landini. Later, J.M. Font and M. Rius en [31] were interested in the logics that can be defined taking into account the lattice–theoretical aspects of these algebras. These same authors introduced a sequent calculus for one of these logics, namely, $\mathcal{TML}$.

In Chapter II, we present an alternative way to formulate hypersequent calculi introducing meta–variables for formulas, sequents and hypersequents, respectively, in the language. A suitable category of hypersequent calculi and both kind of fibring: constrained and unconstrained. The introduced morphisms turned out to bea novel notion of translation between logics which preserve meta–properties in a strong sense. Finally, we explore some preservation features,in particular we show a preservation result by fibring of the Craig interpolation property (CIP).

In Chapter III, we retake the study of different logical aspects of TMAs. Considering the contrapositive implication introduced by A. Figallo and P. Landini in [28], we introduce three different Hilbert calculus for the logic $\mathcal{TML}$, as well as, a tableau system sound and complete with respect to the semantics of TMAs. The paraconsistent aspects of $\mathcal{TML}$ also are analyzed under the point of view of *Logics of Formal Inconsistency*, introduced by W. Carnielli and J. Marcos in [18], and later studied in [17]. Normal modal tetravalent logic $\mathcal{TML}^N$ is also studied. Finally, we prove that both logics are proper sublogics of classical propositional calculus that are not maximal.

In Chapter IV, we show that the sequent calculus presented by Font and Rius en [31] for $\mathcal{TML}$ does not admit the cut–elimination property. So, we formulate a hypersequent calculus sound and complete with respect to $\mathcal{TML}$ which does admit the so longed property.

Finally, in Chapter V, motivated by the question of enrich $\mathcal{TML}$ with a deductive implication, we prove that Monteiro's tetravalent modal algebras enriched with a boolean complement coincide with De Morgan enriched with a boolean complement, or equivalently, they coincide with Boolean algebras enriched with a De Morgan negation. The latter are called involutive Boolean algebras (or symetric Boolean algebras) (IBAs), introduced by Gr. Moisil and mainly studied by A. Monteiro. We prove that IBAs are an algebraic counterpart to yhe modal logic **S5** that satisfies some additional equations. So, the logic that naturally can be associated to IBAs is a proper modal extension of **S5**. We present a Hilbert calculus sound and complete with respect to this extension of **S5** in the language of IBAs, i.e., without modalities.

1 Capítulo I: Preliminares

Este capítulo consiste de resultados y definiciones ya conocidos en la literatura, y que componen la base teórica de las investigaciones desarrolladas en esta tesis a partir del Capítulo 2.

1.1 Teoría de la demostración.

La *Teoría de la Prueba* es el área de la lógica que estudia el concepto de *demostración matemática* o *prueba*. Puesto que la noción de demostración juega un rol central en matemática como el medio por el cual se establece la veracidad o falsedad de una proposición, la Teoría de la Prueba es, en principio al menos, el estudio de los fundamentos de toda la matemática.

Existen dos puntos de vista diferentes respecto de lo que es una demostración. El primero afirma que una demostración es una convención social por la cual los matemáticos se convencen unos a otros de la veracidad de un teorema. Es decir, una demostración se expresa en lenguaje natural, más la posibilidad de agregar símbolos y gráficos; y es suficiente para convencer a un experto de la correctitud de un teorema. Por supuesto, es imposible definir con precisión qué constituye una demostración válida en este sentido y los estandares de pruebas válidas pueden variar con el tiempo y la audiencia. El segundo punto de vista es de alcance más limitado: una *prueba* consiste de una cadena de símbolos, que satisface cierto conjunto de reglas precisamente establecido, la cual demuestra un teorema, el cual, a su vez, debe ser expresado como una cadena de símbolos. Las demostraciones de esta última clase se denominan *formales* para distinguirlas de las *sociales*.

La Teoría de la Prueba (PT por *proof theory*) tiene que ver casi exclusivamente con el estudio de las demostraciones formales. Esta rama de la lógica halla su justificación en el hecho que las demostraciones sociales y formales están estrechamente ligadas y solo estas últimas pueden ser objeto de un análisis matemático riguroso. La principal tarea de la PT puede resumirse en lo siguiente: formular un sistema lógico y conjunto de axiomas que sean apropiados para formalizar las demostraciones matemáticas y caracterizar aquellos resultados de la matemática se infieren a partir de ciertos axiomas. En segundo lugar, estudiar la estructura de las demostraciones formales, por ejemplo, encontrar formas normales para las pruebas y establecer hechos sintácticos acerca de ellas. En tercer, estudiar que clase de información adicional puede ser extraida de las pruebas, más allá de la validez del teorema probado. En muchos casos, las pruebas pueden contener información computacional o constructiva. Finalmente, estudiar cual es el mejor modo para construir una prueba, por ejemplo, que clase de pruebas pueden ser generadas eficientemente por computadoras.

1.1.1 Cálculos de Hilbert

Los cálculos de Hilbert son tal vez los sistemas de prueba más conocidos. Estos consisten, usualmente, de un pequeño conjunto de reglas que genera un conjunto de fórmulas distinguidas (teoremas) a partir de un conjunto inicial de fórmulas (axiomas). Tales sistemas proveen una estructura flexible para presentar lógicas y pueden relacionarse fácilmente con sus correspondientes clases de álgebras.

En general, solo se necesita considerar cierto "conjunto de estructuras" distinguidas. Luego, las demostraciones (formales) y reglas de inferencias son construidas a partir de miembros de este conjunto como sigue.

Definición 1.1.1 *Llamaremos regla de inferencia (proposicional) a todo par ordenado de la forma* $r = \langle \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}, \beta_{n+1} \rangle$ *tal que* $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$ *son fórmulas. A las fórmulas* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *las denominamos las premisas de* r *y a* β_{n+1} *la conclusión. En el caso e que* $n = 0$ *(o sea, el conjunto de premisas es vacio) la regla es llamada de axioma.*

Definición 1.1.2 *Sea* $r = \langle \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}, \beta_{n+1} \rangle$ *una regla de inferencia. Una instancia de* r *es un par* $r' = \langle \{\beta'_1, \ldots, \beta'_n\}, \beta'_{n+1} \rangle$ *tal que cada fórmula* β'_i *es obtenida de* β_i *por sustitución uniforme de cada variable proposicional* p_j *por una fórmula* γ_j*, para* $i = 1, \ldots, n+1$ *y* $j = 1, \ldots, k$*. Aqui, estamos asumiendo que* $\{p_1, \ldots, p_k\}$ *es el conjunto de todas las variables proposicionales que ocurren en las fórmulas de la regla* r*.*

Por ejemplo, la conocida regla de inferencia *Modus Ponens* puede ser vista como un par $MP = \langle \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2)\}, p_2 \rangle$. Si consideramos una substitución uniforme en que las variables proposicionales p_1 y p_2 son substituidas por las fórmulas α y β, respectivamente, entonces $MP' = \langle \{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta)\}, \beta \rangle$ es una instancia de MP.

Definición 1.1.3 *Un cálculo de Hilbert consiste de un conjunto de reglas de inferencia.*

Entonces, una demostración formal se define como sigue.

Definición 1.1.4 *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas. Diremos que* α *es derivable en un cálculo de Hilbert* $\mathcal{H}$ *a partir de* Γ*, y escribimos* $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$*, si existe una secuencia finita de fórmulas* $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ *tal que* α_n *es* α *y todo* α_i *es tanto una instancia de un axioma de* $\mathcal{H}$*, o* $\alpha_i \in \Gamma$*, o existe una instancia* $r' = \langle \{\beta'_1, \ldots, \beta'_m\}, \beta'_{m+1} \rangle$ *de alguna regla de inferencia* r *de* $\mathcal{H}$ *tal que* $\alpha_i = \beta'_{m+1}$ *y* $\{\beta'_1, \ldots, \beta'_m\} \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}$*. La secuencia* $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ *se dice una demostración formal en* $\mathcal{H}$*.*

Esta definición de derivación cambia cuando tratamos con lógicas modales (es decir, conteniendo operadores de *necesidad* $\Box$ y de *posibilidad* $\Diamond$, asi como una implicación $\rightarrow$ y una conjunción $\wedge$), como sigue.

Definición 1.1.5 *(1) Una derivación de la fórmula α en un cálculo de Hilbert modal $\mathcal{H}$ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 \dots \alpha_n$ tal que α_n es α y todo α_i es una instancia de un axioma de $\mathcal{H}$ o existe una instancia $r' = \langle\{\beta'_1, \dots, \beta'_m\}, \beta'_{m+1}\rangle$ de alguna regla de inferencia r de $\mathcal{H}$ tal que $\alpha_i = \beta'_{m+1}$ y $\{\beta'_1, \dots, \beta'_m\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$. Decimos que α es derivable en el cálculo de Hilbert modal $\mathcal{H}$, y escribimos $\vdash_{\mathcal{H}} \alpha$, si existe una derivación de ella.*
(2) Sea Γ un conjunto de fórmulas. Decimos que α es derivable en $\mathcal{H}$ a partir de Γ, y escribimos $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$, si $\vdash_{\mathcal{H}} \alpha$ o bien existe un subconjunto finito, no vacío $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $(\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \wedge (\dots \wedge (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \dots))) \rightarrow \alpha$ es derivable en $\mathcal{H}$.

Notemos que las lógicas modales pueden ser vistas como **lógicas de teoremas**. Es decir, apenas interesa demostrar teoremas, y las demostraciones a partir de premisas son colocadas em función de demostrar ciertos teoremas, como vimos en el item (2) de la Definición 1.1.5.

1.1.2 Cálculos de secuentes

Los cálculos de secuentes, introducidos por primera vez por Gentzen en [35] (ver también [36]), son el sistema más elegante y flexible para escribir pruebas. En esta sección desarrollaremos un cálculo de secuentes para la lógica proposicional clásica sobre el lenguaje $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\supset$ (**CPL** por *classical propositional logic*).
En los cálculos estilo Hilbert, cada línea de una prueba es una fórmula, sin embargo, en las demostraciones de cálculos de secuentes cada línea es un *secuente*. Un *secuente* es una expresión de la forma:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \vdash \beta_1, \ldots, \beta_l \tag{1}$$

donde el símbolo $\vdash$ es un nuevo símbolo denominado *deducción de secuentes* (no debe ser confundido con el símbolo de implicación $\supset$) y donde α_i y β_j son fórmulas para $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$.

El significado intuitivo de un secuente es que la conjunción de los $\alpha_i' s$ implica la disyunción de los $\beta_j' s$. De esta forma el secuente anterior es equivalente a la fórmula

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i \supset \bigvee_{j=1}^{l} \beta_l,$$

donde los símbolos $\bigvee$ y $\bigwedge$ representan conjunciones y disyunciones, respectivamente, de múltiples fórmulas. Adoptamos la convención de que la conjunción vacía (cuando $k = 0$) tiene el valor "verdadero", y la disyunción vacía (cuando $l = 0$) tiene el valor "falso". Luego, el secuente $\vdash \alpha$ tiene el mismo significado que la afirmación de la fórmula α, y el *secuente vacío* $\vdash$ es falso. Un secuente se dice que es válido si, y solo si, su correspondiente fórmula asociada lo es. La secuencia de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ se dice el *antecedente* del secuente (1), y $\beta_1, \ldots, \beta_l$ el *sucedente*.

Una *prueba* (o demostración) en un cálculo de secuentes consiste de un árbol con raiz (algunas veces un grafo dirigido acíclico) en el cual cada nodo es un secuente. La raiz del árbol, ubicada en la parte inferior del árbol, se denomina el *secuente final* y es el secuente probado. Las hojas, ubicadas en la parte superior del árbol, se denominan *secuentes iniciales* o *axiomas*. Usualmente, los únicos secuentes iniciales permitidos son los axiomas lógicos de la forma $\alpha \vdash \alpha$ donde α es una formula atómica.

A diferencia de los secuentes iniciales, cada secuente en un prueba debe ser inferido a partir de una *regla de inferencia de secuentes* (o simplemente *regla de inferencia*). Una regla de inferencia de secuentes es una expresión de la forma

$$\frac{S_1 \dots S_n}{S} \tag{2}$$

donde n es un entero positivo y $S_1, \dots, S_n, S$ son secuentes. La regla (2) indica que el secuente S, llamado *secuente inferior*, puede ser inferido a partir de los secuentes $S_1 \dots S_n$, denominados *secuentes superiores* de la regla de inferencia respectivamente.

Observación 1.1.6 *Las reglas de inferencia válidas son esquemáticas y, generalmente, las letras α y β denotarán fórmulas arbitrarias y Γ y Δ denotarán conjuntos de fórmulas arbitrarios.*

A continuación definiremos un cálculo de secuentes para **CPL** que denotaremos PK.

Definición 1.1.7 Cálculo de secuentes PK:

Axiomas:

$$\alpha \vdash \alpha$$

Reglas estructurales:

(Debilitamiento a izquierda) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}$ (Debilitamiento a derecha) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}$

(Intercambio a izquierda) $\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Pi \vdash \Delta}$ (Intercambio a derecha) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \vdash \Delta, \beta, \alpha, \Lambda}$

(Contracción a izquierda) $\dfrac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}$ (Contracción a derecha) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}$

(Corte) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

Reglas Lógicas:

$$(\wedge \text{ a izquierda}) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge \text{ a derecha}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee \text{ a izquierda}) \quad \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta \quad \beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee \text{ a derecha}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg \text{ a izquierda}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg \text{ a derecha}) \quad \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\alpha}$$

$$(\supset \text{ a izquierda}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \supset \beta, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad (\supset \text{ a derecha}) \quad \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \supset \beta}$$

Decimos que $\Gamma \vdash \Delta$ es *probable* en PK, y notaremos $PK \models \ \Gamma \vdash \Delta$, si tiene una demostración en PK (o una PK-demostración). Si α es una fórmula, escribimos $PK \models \alpha$ para significar que $PK \models \vdash \alpha$.

Como es bien sabido, la regla de corte juega un rol fundamental en los cálculos de secuentes, puesto que PK es completo aún sin considerar la regla de corte. Sin embargo, el uso de esta regla permite obtener demostraciones significativamente más cortas. Una prueba se dice que es *libre de corte* (*cut–free*) si en ella no se hace uso de la regla de corte.

Proposición 1.1.8 *(Propiedad de la subfórmula) Si P es una PK–demostración libre de corte, entonces toda fórmula que ocurre en P es una subfórmula de una fórmula en el secuente final de P.*

Teorema 1.1.9 *(Completitud y Correctitud) Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $PK \models \alpha$,

(ii) α *es una tautología.*

Un resultado muy importante en la Teoría de la Demostración es el denominado *Teorema de eliminación de Corte* (*Cut–elimination Theorem*). Este teorema establece que si un secuente tiene una PK-demostración, entonces tiene una PK-demostración libre de corte.

Teorema 1.1.10 *(Teorema de Eliminación de Corte) Si el secuente* $\Gamma \vdash \Delta$ *es probable en* PK*, entonces existe una* PK*-demostración libre de corte de* $\Gamma \vdash \Delta$*.*

La eliminación de corte en un cálculo de secuentes está relacionada en general con la decibilidad del cálculo.

1.1.3 Cálculos de secuentes formales

Con la intensión de abordar la cuestión de recuperar un sistema lógico dado a partir de combinar algunos de sus fragmentos, M. Coniglio en [21] propuso un marco formal para presentar cálculos de secuentes de la más diversa naturaleza. Utilizando el lenguaje de Teoria de Categorías, introdujo la categoría **Seq** de los cálculos de secuentes con sus morfismos. La característica principal de esta categoría es la preservación por morfismos de meta-propiedades de la relación de consecuencia, haciendo de estos una poderosa herramienta para traducir lógicas. En esta sección, repasaremos los resultados más destacados de [21], modificando en algunos casos la notación para dejar la exposición mas homogénea con la del Capítulo 2.

En adelante, consideraremos fijo el conjunto numerable $\mathcal{X} = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ de símbolos denominados *variables de conjuntos*, y un conjunto numerable $\Xi = \{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ de símbolos denominados *variables esquema* de modo tal que $\mathcal{X} \cap \Xi = \emptyset$.

Definición 1.1.11 *Una* signatura proposicional *(o simplemente signatura) es un conjunto numerable* $C = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ *de conjuntos donde* $(\mathcal{X} \cap \Xi = C_i \cap C_j = \emptyset$ *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$ *tal que* $i \neq j)$*. El* soporte *de* C *es* $|C| := \bigcup C$*. Los elementos de* C_n *se denominan conectivos* n*-arios de* C*. Los elementos en* C_0 *se denominan constantes de* C*. El álgebra de tipo* C *absolutamente libre generada por* Ξ *se denota por* $L(C)$*. A los elementos de* $L(C)$ *se los denomina* fórmulas.

Puesto que solo se trata con estructuras lógicas, las variables esquema juegan el rol usual asignado a las variables proposicionales, i.e., como generadores del lenguaje. Por otro lado, las variables de conjunto son incluidas con el objeto de representar a conjuntos de fórmulas arbitrarios dentro del lenguaje formal para cálculos de secuentes que se define abajo.

Definición 1.1.12 *(M. Coniglio, ver [21]) Sea* C *una signatura proposicional. Una* afirmación general *(o* secuente*) sobre* C *es una expresión de la forma* $\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$ *donde* $\Gamma, \Delta \subseteq L(C)$ *y* A, B *son conjuntos finitos de variables tales que* $\Gamma \cup \Delta \cup A \cup B \neq \emptyset$*. Una afirmación sobre* C *es una afirmación general sobre* C *tal que* $A = B = \emptyset$*. Algunas veces denotaremos* $A; \Gamma \succ \Delta; B$ *en lugar de* $\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$*. Con* $GenA(C)$ *y* $Asse(C)$ *denotaremos al conjunto de afirmaciones generales y afirmaciones sobre* C*, respectivamente.*

Como es usual, frecuentemente escribiremos Γ, Γ' y Γ, φ en lugar de $\Gamma \cup \Gamma'$ y $\Gamma \cup \{\varphi\}$, respectivamente. Además, escribiremos X y X, Y en lugar de $\{X\}$ y $\{X, Y\}$, respectivamente, para cualquier variable X e Y. De esta manera, por ejemplo, $\langle \Gamma, \Gamma' | \Delta, \varphi \rangle$ denotará la afirmación general $\langle \emptyset; \Gamma \cup \Gamma' | \Delta \cup \{\varphi\}; \emptyset \rangle$.

Definición 1.1.13 *(M. Coniglio, ver [21]) Sea* C *una signatura proposicional. Una* **regla de afirmación general** *sobre* C *es una expresión de la forma* $r = \langle \Upsilon, \langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle \rangle$ *tal que* $\Upsilon \cup \{\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle\}$ *es un subconjunto finito de* $GenA(C)$*. Si* $\Upsilon = \emptyset$*, entonces se dice* *que r es un axioma. Un* cálculo de secuentes *sobre C es un par $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ tal que C es una signatura y R es un conjunto de reglas de afirmación general. Diremos que Υ son las premisas de r y $\langle A;\Gamma|\Delta;B\rangle$ la conclusión, y lo notaremos $prem(r)$ y $conc(r)$, respectivamente.*

Por simplicidad, una regla de afirmación general de la forma

$$\langle\{\langle A_1;\Gamma_1|\Delta_1;B_1\rangle,\cdots,\langle A_n;\Gamma_n|\Delta_n;B_n\rangle\},\langle A;\Gamma|\Delta;B\rangle\rangle$$

será denotada de la forma

$$\frac{A_1;\Gamma_1\succ\Delta_1;B_1\ \cdots\ A_n;\Gamma_n\succ\Delta_n;B_n}{A;\Gamma\succ\Delta;B},$$

y un axioma $\langle\emptyset,\langle A;\Gamma|\Delta;B\rangle\rangle$ será denotado

$$\frac{}{A;\Gamma\succ\Delta;B}\ .$$

Dada una signatura C, una *sustitución* sobre C es una función $\sigma : \Xi \to L(C)$. Denotaremos con $\hat{\sigma} : L(C) \to L(C)$ al único homomorfismo que extiende a σ a todo $L(C)$. Una *instanciación* sobre C es una función $\varrho : \mathcal{X} \to \mathcal{P}_{fin}(L(C)\cup\mathcal{X})$, donde $\mathcal{P}_{fin}(L(C)\cup\mathcal{X})$ denota al conjunto de todos los subconjuntos finitos de $L(C)\cup\mathcal{X}$. Si $\varrho(X)\in\mathcal{P}_{fin}(L(C))$ para todo $X\in\mathcal{X}$, entonces ϱ se dice una *instanciación básica* sobre C. Dada una sustitución σ y una instanciación ϱ, la función $(\sigma,\varrho) : GenA(C)\to GenA(C)$ se define como sigue: para el secuente $\langle A;\Gamma|\Delta;B\rangle$ considere los siguientes conjuntos:

$A^{\varrho}_{\mathcal{X}} = \{Y\in\mathcal{X} : Y\in\varrho(X)$ para algún $X\in A\} = (\bigcup_{X\in A}\varrho(X))\cap\mathcal{X}$;

$A^{\varrho}_{L(C)} = \{\varphi\in L(C) : \varphi\in\varrho(X)$ para algún $X\in A\} = (\bigcup_{X\in A}\varrho(X))\cap L(C)$.

Entonces,

$$(\sigma,\varrho)(A;\Gamma \succ \Delta;B) = (A^{\varrho}_{\mathcal{X}};\hat{\sigma}(\Gamma)\cup A^{\varrho}_{L(C)} \succ \hat{\sigma}(\Delta)\cup B^{\varrho}_{L(C)};B^{\varrho}_{\mathcal{X}}).$$

Definición 1.1.14 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un cálculo de secuentes, y sea $A;\Gamma \succ \Delta;B$ un secuente sobre C. Decimos que $A;\Gamma \succ \Delta;B$ es* probable *en $\mathcal{A}$ si existe una secuencia finita*

$$\langle A_1;\Gamma_1|\Delta_1;B_1\rangle,\cdots,\langle A_n;\Gamma_n|\Delta_n;B_n\rangle$$

de elementos de $GenA(C)$ tal que $\langle A_n;\Gamma_n|\Delta_n;B_n\rangle = \langle A;\Gamma|\Delta;B\rangle$ y, para todo $1 \leq i \leq n$, existe una regla $r \in R$, una sustitución σ y una instanciación ϱ sobre C tal que:

- $(\sigma,\varrho)(prem(r)) \subseteq \{\langle A_1;\Gamma_1|\Delta_1;B_1\rangle,\cdots,\langle A_{i-1};\Gamma_{i-1}|\Delta_{i-1};B_{i-1}\rangle\}$,
- $\langle A_i;\Gamma_i|\Delta_i;B_i\rangle = (\sigma,\varrho)(conc(r))$.

Utilizando esta noción de derivación es posible definir una relación de consecuencia de multiples conclusiones sobre C. Dado un cálculo de secuentes $\mathcal{A}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \Delta$ sí, y solo si, $\Gamma \succ \Delta$ es derivable en $\mathcal{A}$.

Sin dificultad, se extiende la noción de derivación en un cálculo de secuentes utilizando secuentes como premisas, es decir, como hipótesis.

Definición 1.1.15 *Dado un conjunto $\Omega = \{\langle A_1;\Gamma_1|\Delta_1;B_1\rangle,\cdots,\langle A_n;\Gamma_n|\Delta_n;B_n\rangle\}$ de secuentes, diremos que el secuente $\langle A;\Gamma|\Delta;B\rangle$ es* derivable *en $\mathcal{A}$ a partir de Ω, denotado por*

$$\frac{A_1;\Gamma_1 \succ \Delta_1;B_1 \ \cdots \ A_n;\Gamma_n \succ \Delta_n;B_n}{A;\Gamma \succ \Delta;B},$$

si existe una secuencia finita

$$\langle \bar{A}_1; \bar{\Gamma}_1 | \bar{\Delta}_1; \bar{B}_1 \rangle, \cdots, \langle \bar{A}_m; \bar{\Gamma}_m | \bar{\Delta}_m; \bar{B}_m \rangle$$

de elementos de $GenA(C)$ *tal que* $\langle \bar{A}_m; \bar{\Gamma}_m | \bar{\Delta}_m; \bar{B}_m \rangle = \langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$ *y, para todo* $1 \leq i \leq m$, *o bien* $\langle \bar{A}_m; \bar{\Gamma}_m | \bar{\Delta}_m; \bar{B}_m \rangle \in \Omega$, *o bien, existe* $r \in R$, *una sustitución* σ *y una instanciación* ϱ *sobre* C *tal que:*

- $(\sigma, \varrho)(prem(r)) \subseteq \{\langle \bar{A}_1; \bar{\Gamma}_1 | \bar{\Delta}_1; \bar{B}_1 \rangle, \cdots, \langle \bar{A}_{i-1}; \bar{\Gamma}_{i-1} | \bar{\Delta}_{i-1}; \bar{B}_{i-1} \rangle\}$, *y*
- $\langle \bar{A}_i; \bar{\Gamma}_i | \bar{\Delta}_i; \bar{B}_i \rangle = (\sigma, \varrho)(conc(r))$.

Claramente, $A; \Gamma \succ \Delta; B$ es probable en $\mathcal{A}$ si, y solo si, $A; \Gamma \succ \Delta; B$ es derivable en $\mathcal{A}$ a partir de vacío. Esto es,

$$\overline{A; \Gamma \succ \Delta; B} \; .$$

Dadas dos sustituciones σ, σ' y dos instanciaciones ϱ, ϱ' sobre C respectivamente, se define la composición (conjuntista) $(\sigma, \varrho) \circ (\sigma', \varrho') := (\sigma \cdot \sigma', \varrho \cdot \varrho')$ como sigue: $\sigma \cdot \sigma'$ es la sustitución sobre C tal que $\sigma \cdot \sigma'(\xi) = \hat{\sigma}(\sigma'(\xi))$ para todo $\xi \in \Xi$. Por otro lado, $\varrho \cdot \varrho'$ es la instanciación sobre C tal que

$$\varrho \cdot \varrho'(X) = \bigcup_{s \in \varrho'(X)} \bar{\varrho}(s)$$

donde, para $s \in L(C) \cup \mathcal{X}$,

$$\bar{\varrho}(s) = \begin{cases} \varrho(s) & \text{si } s \in \mathcal{X}, \\ \{s\} & \text{si } s \in L(C). \end{cases}$$

Entonces, $(\sigma, \varrho) \circ (\sigma', \varrho')(\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle) = (\sigma, \varrho)((\sigma', \varrho')(\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle))$ para todo secuente $\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$.

Proposición 1.1.16 *Sea $\mathcal{A}$ un cálculo de secuentes sobre la signatura C y sea $\Omega \cup \{\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle\}$ un subconjunto finito de $GSen(C)$ tal que $\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle$ es derivable en $\mathcal{A}$ a partir de Ω. Entonces, $(\sigma, \varrho)(\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle)$ es derivable en $\mathcal{A}$ a partir de $(\sigma, \varrho)(\Omega)$, para toda sustitución σ y toda instanciación ϱ sobre C, respectivamente.*

Recordemos que en [21] fue definida la noción de *morfismo de signaturas* del siguiente modo:

Definición 1.1.17 *(M. Coniglio ver [21]) Llamaremos categoría de signaturas, y la denotaremos con* **Sig**, *a la categoría cuyos objetos son las signaturas proposicionales y, dadas las signaturas C^1 y C^2, un* morfismo *$h : C^1 \to C^2$ en* **Sig** *es una función $h : |C^1| \to L(C^2)$ tal que $h(\xi) = \xi$, para $\xi \in \Xi$ y $h(c)$ es una fórmula que depende a lo sumo de las variables esquemas $\xi_1, \ldots, \xi_n$ siempre que $c \in C^1_n$. En particular, $h(c) \in C^2_0$ si $c \in C^1_0$. Si $f : C^1 \to C^2$ y $g : C^2 \to C^3$ son dos morfismos en* **Sig** *se define la composición $f \circ g : C^1 \to C^3$ en* **Sig** *como el morfismo obtenido por la función $\hat{f} \circ g : |C^1| \to L(C^3)$, donde la función $\hat{f} : L(C^2) \to L(C^3)$ se define:*

$\hat{f}(\xi) = \xi$, *para* $\xi \in \Xi$; $\hat{f}(c) = f(c)$, *para* $c \in C^2_0$;

$\hat{f}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = f(c)(\hat{f}(\varphi_1), \ldots, \hat{f}(\varphi_n))$ *para* $c \in C^2_n, n \geq 1$.

El morfismo identidad $id_C : C \to C$ para la signatura C es la función $id_C : |C| \to L(C)$ tal que $id_C(c) = c(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ si $c \in C_n$. En particular, $id_C(c) = c$, si $c \in C^0$.
Recordemos también que si $\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle$ es una afirmación general sonbre C^1 y $h : C^1 \to C^2$ es un morfismo de signatura entonces $\hat{h}(\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle)$ es, por definición (ver [21]), la afirmación general $\langle A; \hat{h}(\Gamma)|\hat{h}(\Delta); B\rangle$ sobre C^2.

Definición 1.1.18 *Si* $\langle A; \Gamma | \Delta; B\rangle$ *es un secuente sobre* C^1 *y* $h : C^1 \to C^2$ *es un morfismo de signatura, entonces* $\hat{h}(\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle)$ *se define como el secuente* $\langle A; \hat{h}(\Gamma)|\hat{h}(\Delta); B\rangle$ *sobre* C^2*. Además, dada una regla de afirmación general* r*, entonces* $\hat{h}(r)$ *es la regla de afirmación general* $\langle \hat{h}(prem(r)), \hat{h}(conc(r))\rangle$ *sobre* C^2*.*

Observación 1.1.19 *En la definición anterior se asume tácitamente que* $\hat{h}(X) = X$ *para todo* $X \in \mathcal{X}$*.*

Definición 1.1.20 *La categoría* **Seq** *de los cálculos de secuentes se define como sigue: sus objetos son cálculos de secuentes de la forma* $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ *tal que* C *es una signatura proposicional. Dados dos cálculos de secuentes* $\mathcal{A}_i = \langle C^i, R_i\rangle$ *(para* $i = 1, 2$*), un morfismo* $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *en* **Seq** *es un morfismo* $h : C^1 \to C^2$ *en* **Sig** *tal que, para toda regla* $r \in R_1$*, se tiene que* $\hat{h}(conc(r))$ *es derivable en* $\mathcal{A}_2$ *a partir* $\hat{h}(prem(r))$*. La composición de morfismos y el morfismo identidad en* **Seq** *son como en* **Sig***.*

La siguiente proposición muestra que, en efecto, la noción de morfismo en **Seq** asegura la preservación de meta-propiedades.

Teorema 1.1.21 *Sea* $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *un morfismo en* **Seq** *y supongamos que*

$$\frac{A_1; \Gamma_1 \succ \Delta_1; B_1 \ \ \cdots \ \ A_n; \Gamma_n \succ \Delta_n; B_n}{A; \Gamma \succ \Delta; B},$$

vale en $\mathcal{A}_1$*. Entonces,*

$$\frac{A_1; \hat{h}(\Gamma_1) \succ \hat{h}(\Delta_1); B_1 \ \ \cdots \ \ A_n; \hat{h}(\Gamma_n) \succ \hat{h}(\Delta_n); B_n}{A; \hat{h}(\Gamma) \succ \hat{h}(\Delta); B}$$

vale en $\mathcal{A}_2$*.*

Esta característica de los morfismos **Seq** tiene un profundo impacto en la fortaleza del proceso de combinación entre lógicas denominado *fibring*. Como se muestra en [21], la preservación de meta-propiedades es lo que permite reconstruir una lógica mediante el *fibring* de dos o más fragmentos de ella.

La existencia de un morfismo entre dos cálculos de secuentes requiere algún tipo de compatibilidad entre ellos. Más precisamente, diremos que una regla de cálculos de secuentes r es *estructural* si no hay ocurrencias de conectivos en r. Por ejemplo, la regla de corte, debilitamiento, y contracción son reglas estructurales. Como consecuencia de la noción de morfismo h en **Seq**, se tiene que debe ser $\hat{h}(r) = r$ para toda regla estructural r.

Ejemplo 1.1.22 *Considere las siguientes signaturas para la lógica proposicional clásica:*

$$C^1 \text{ tal que } C_0^1 = \{\bot\};\ C_2^1 = \{\Rightarrow\} \ \text{ y } \ C_n^1 = \emptyset, \ \text{ para todo } n \geq 3 \text{ y } n = 1.$$

$$C^2 \text{ tal que } C_0^2 = \{\top\};\ C_1^1 = \{\neg\};\ C_2^1 = \{\vee\} \ \text{ y } \ C_n^1 = \emptyset, \ \text{ para todo } n \geq 3.$$

Sea el cálculo $\mathcal{A}_1 = \langle C^1, R_1 \rangle$ para la lógica proposicional clásica sobre C^1 donde R_1 consiste de las siguientes reglas, donde X, Y, Z, W son variables y ξ, ξ' son variables esquema.

$$\frac{}{X;\xi \succ \xi;Y} \qquad \frac{X \succ Y}{X, Z \succ Y} \qquad \frac{X \succ Y}{X \succ Y, Z} \qquad \frac{X;\xi \succ Y \qquad Z \succ \xi;W}{X, Z \succ Y, W}$$

$$\frac{}{X;\bot \succ Y} \qquad \frac{X \succ \xi;Y \qquad X;\xi' \succ Y}{X;(\xi \Rightarrow \xi') \succ Y} \qquad \frac{X;\xi \succ \xi';Y}{X \succ (\xi \Rightarrow \xi');Y}$$

Notemos que las primeras cuatro reglas son estructurales.

Consideremos ahora el cálculo de secuentes $\mathcal{A}_2 = \langle C^2, R_2 \rangle$, en el cual a las cuatro primeras reglas del cálculo anterior se le anexan las reglas abajo.

$$\frac{X \succ \xi;Y}{X;\neg\xi \succ Y} \qquad \frac{X;\xi \succ Y}{X \succ \neg\xi;Y}$$

$$\frac{X;\xi \succ Y \qquad\qquad X;\xi' \succ Y}{X;(\xi \vee \xi') \succ Y} \qquad \frac{X \succ \xi,\xi';Y}{X \succ \xi \vee \xi';Y}$$

Claramente $\mathcal{A}_2$ es adecuado para la lógica proposicional clásica sobre C^2. Consideremos los siguientes morfismos en **Sig***:*

- $h : C^1 \to C^2$ *tal que* $h(\bot) = \neg\top$ *y* $h(\Rightarrow) = (\neg\xi_1 \vee \xi_2)$*.*
- $h' : C^2 \to C^1$ *tal que* $h'(\top) = \bot \Rightarrow \bot$*;* $h'(\xi) = \xi$ *(para* $\xi \in \mathcal{V}$*);* $h'(\neg) = \xi_1 \Rightarrow \bot$*; y* $h'(\vee) = ((\xi_1 \Rightarrow \bot) \Rightarrow \xi_2)$*.*

Es fácil chequear que ambos morfismos en **Sig** *son también morfismos en* **Seq***. En efecto, las siguientes derivaciones en* $\mathcal{A}_2$

$$\frac{X \succ \bot;Y}{X;\neg\bot \succ Y}, \qquad \frac{\dfrac{X \succ \xi;Y(Hip)}{X;\neg\xi \succ Y} \qquad X;\xi' \succ Y(Hip)}{X;\neg\xi \vee \xi' \succ Y},$$

$$\frac{\dfrac{X;\xi \succ \xi';Y(Hip)}{X \succ \neg\xi,\xi';Y}}{X \succ \neg\xi \vee \xi' \succ Y}$$

muestran que $h : C^1 \to C^2$ *en un morfismo en* **Seq***. Por otro lado, las derivaciones en* $\mathcal{A}_1$

$$\frac{X;\bot \succ \bot;Y}{X \succ \bot \Rightarrow \bot;Y}, \qquad \frac{X \succ \xi;Y(hip) \qquad X;\bot \succ Y}{X;\xi \Rightarrow \bot \succ Y}, \qquad \frac{\dfrac{X;\xi \succ;Y(Hip)}{X;\xi \succ \bot;Y}}{X \succ \xi \Rightarrow \bot;Y},$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X, \xi \succ Y (Hip)}{X; \xi \succ \bot; Y}}{X \succ (\xi \Rightarrow \bot); Y} \qquad X; \xi' \succ Y (Hip)}{X; (\xi \Rightarrow \bot) \Rightarrow \xi' \succ Y},$$

$$\dfrac{\dfrac{X \succ \xi, \xi'; Y (Hip) \qquad X; \bot \succ \xi'; Y}{X; \xi \Rightarrow \bot \succ \xi'; Y}}{X \succ (\xi \Rightarrow \bot) \Rightarrow \xi'; Y},$$

muestran que $h' : C^2 \to C^1$ *también es un morfismo en* **Seq**.

1.1.4 Combinación de cálculos de secuentes - fibring

Recientemente, el desarrollo de métodos para combinar lógicas ha obtenido mucho atención, y las motivaciones provienen de áreas tan disímiles como la Filosofía y las Ciencias de la Computación (cf. [13]). En general, lógicas presentadas de diferentes modos requieren técnicas de combinación *ad hoc*. El *fibring categorial* introducido en [55], ha mostrado ser una herramienta muy útil y amplia para combinar lógicas, permitiendo combinar una vasta clase de sistemas lógicos de diversas naturalezas (ver [15]).
En general, es posible definir dos tipos diferentes de fibring: *fibring no restringido*, en el cual no se comparten constructores lógicos de las lógicas cobinadas, y *fibring restringido* en el cual algunos constructores son compartidos.
El siguiente resultado es conocido (ver [55]).

Proposición 1.1.23 *La categoría* **Sig** *tiene coproductos finitos.*

Dadas las signaturas C^1 y C^2, el coproducto de C^1 y C^2 será denotado por $C^1 \oplus C^2$, con inyecciones canónicas $i_1 : C^1 \to C^1 \oplus C^2$ y $i_2 : C^2 \to C^1 \oplus C^2$. Es importante notar que

$C^1 \oplus C^2$ se obtiene simplemente como la unión disjunta de C^1 y C^2 en todos los niveles, i.e., $(C^1 \oplus C^2)_k$ es la unión disjunta de C^1_k y C^2_k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.24 *Sean $\mathcal{A}_j = \langle C^j, R_j \rangle$ dos cálculos de secuentes ($j = 1, 2$). El* fibring *(categorial) de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ es el cálculo de secuentes $C^1 \oplus C^2 = \langle C, R \rangle$ donde*

- $C = C^1 \oplus C^2$*;*
- $R = \{\hat{i_1}(r_1) : r_1 \in R_1\} \cup \{\hat{i_2}(r_2) : r_2 \in R_2\}$*.*

i_1 y i_2 son las inyecciones canónicas del coproducto $C^1 \oplus C^2$ y $\hat{i_j}(r_j)$ es como en la Definición 1.1.18 para $j = 1, 2$.

Ejemplo 1.1.25 *Negación intuicionista y clásica.*
Sea $C^\neg$ la signatura que solo contiene un símbolo de negación $\neg \in C^\neg_1$. Consideremos el cálculo de secuentes $\mathcal{A}^i_\neg = \langle C^\neg, R^i_\neg \rangle$ dado por las siguientes reglas, donde X, Y son variables y ξ, ξ' son variables esquema.

$$\frac{}{X; \xi \succ \xi} \qquad \frac{X \succ \xi}{X, Y \succ \xi} \qquad \frac{X \succ}{X, Y \succ} \qquad \frac{X \succ}{X \succ \xi}$$

$$\frac{X \succ \xi \qquad Y; \xi \succ \xi'}{X, Y \succ \xi'} \qquad \frac{X \succ \xi \qquad Y; \xi \succ}{X, Y \succ}$$

$$\frac{X; \xi \succ}{X \succ \neg\xi} \qquad \frac{X \succ \xi \qquad Y \succ \neg\xi}{X, Y \succ}$$

Claramente, $\mathcal{A}^i_\neg$ es un cálculo de secuentes adecuado para la negación intuicionista. Notemos que

$$(l\neg)\frac{X \succ \xi}{X; \neg\xi \succ}.$$

es una regla derivada de $\mathcal{A}^i_\neg$, como lo muestra la siguiente derivación

$$\frac{X \succ \xi \,(Hip) \qquad \neg\xi \succ \neg\xi}{X; \neg\xi \succ}$$

Observemos también que el lado derecho de cada secuente demostrable en el cálculo $\mathcal{A}^i_\neg$ *tiene a lo sumo una fórmula.*

Consideremos, ahora, el cálculo de secuentes $\mathcal{A}_\neg = \langle C^\neg, R_\neg\rangle$ *tal que* $R_\neg$ *se obtiene a partir de* $R^i_\neg$ *adicionando la siguiente regla.*

$$\frac{X; \neg\xi \succ}{X \succ \xi}$$

Claramente, $\mathcal{A}_\neg$ *es un cálculo de secuentes adecuado para la negación clásica.*

Ejemplo 1.1.26 *Disyunción clásica.*

Sea $C^\vee$ *la signatura que solo contiene al símbolo* $\vee \in C^\vee_2$ *para la disyunción y sea* $\mathcal{A}_\vee$ *el cálculo de secuentes que contiene las siguientes reglas: sean* X, Y, Z *variables y* ξ, ξ', ξ'' *variables esquema. Primero tomamos las seis primeras reglas del cálculo* $\mathcal{A}^i_\neg$ *del Ejemplo 1.1.25 y le agregamos las siguientes.*

$$\frac{X \succ \xi}{X \succ \xi \vee \xi'} \qquad\qquad \frac{X \succ \xi'}{X \succ \xi \vee \xi'}$$

$$\frac{X \succ \xi \vee \xi' \qquad Y; \xi \succ \xi'' \qquad Z; \xi' \succ \xi''}{X, Y, Z \succ \xi''} \qquad\qquad \frac{X \succ \xi \vee \xi' \qquad Y; \xi \succ \qquad Z; \xi' \succ}{X, Y, Z \succ}$$

Es claro que las propiedades de la disyunción clásica son "capturadas" por estas reglas.

Consideremos ahora el fibring $\mathcal{A}_{\neg\vee} := \mathcal{A}_\neg \oplus \mathcal{A}_\vee$ de los cálculos definidos en los Ejemplos 1.1.25 y 1.1.26. Entonces, no es difícil verificar que $\mathcal{A}_{\neg\vee}$ recupera a la lógica proposicional clásica sobre la signatura $C^{\neg\vee} := C^\neg \oplus C^\vee$. Es decir, $\mathcal{A}_{\neg\vee}$ puede ser visto como la presentación estilo Gentzen de la lógica proposicional clásica en términos de $\neg$ y $\vee$. Como fue observado en [21], lo mismo no sucede con la combinación (fibring) de los correspondientes cálculos de Hilbert o de relaciones de consecuencia. Esto muestra que, combinando reglas que preservan más meta-propiedades, las lógicas resultantes de la combinación son más fuertes.

1.1.5 Hipersecuentes

Los hipersecuentes (ver [4, 49] entre otros) constituyen una generalización natural de los secuentes comunes y resultaron ser muy útiles para presentar cálculos estilo Gentzen para diversas lógicas no clásicas con la muy deseable propiedad de eliminación de corte. También, los hipersecuentes son muy adecuados para describir propiedades disyuntivas por medios analíticos. La prueba de la propiedad de eliminación de corte en un cálculo de (hiper)secuentes para una lógica dada es deseable debido a sus importantes consecuencias, tales como la consistencia de la lógica como así también propiedades de interpolación. La eliminación, en algunos sistemas, de otras reglas como la contracción ya ha sido estudiada en la literatura. Sería interesante investigar el significado de la eliminación de reglas arbitrarias en un cálculo de (hiper)secuentes arbitrario, una cuestión que aparentemente no ha sido abordada. Una presentación general sobre la eliminación de reglas arbitrarias en cálculos de Hilbert se puede encontrar en [40]. La cuestión de eliminación de reglas en cálculos de hipersecuentes será brevemente abordada en el Capítulo 2, en el contexto de combinación de cálculos de hipersecuentes.
En esta tesis utilizaremos la noción de hipersecuentes basados en multiconjuntos, esto es, conjuntos en los cuales no hay un orden y puede haber más de una ocurrencia del mismo elemento.

Definición 1.1.27 *Sea L un lenguaje. Un* hipersecuente *es una expresión de la forma:*

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \ldots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

donde Γ_i *y* Δ_i *son multiconjuntos de fórmulas en el lenguaje* L*, para* $1 \leq i \leq n$*. Los* $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$*'s se denominan* **componentes** *del hipersecuente. Si para todo i se verifica que* Δ_i *consiste de una sola fórmula, el hipersecuente se dice monoconcluido(single-conclusioned).* *Una* **regla de inferencia de hipersecuente** *es una relación binaria de la forma*

$$\{\langle\{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}, \Theta\rangle : \Theta_1, \ldots, \Theta_n, \Theta \textit{ son hipersecuentes}\}.$$

En adelante utilizaremos las letras $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ como meta-variables para hipersecuentes. Una regla de inferencia de hipersecuente también puede ser representada por

$$\frac{\Theta_1 \ \ldots \ \Theta_n}{\Theta}$$

Cada hipersecuente Θ_i se dice una *premisa* de la regla de inferencia de hipersecuente y Θ se dice la *conclusión*. Al igual que en los cálculos de secuentes ordinarios, las reglas de inferencia, usualmente, son divididas en *reglas lógicas* y *reglas estructurales*.
Generalmente, las reglas lógicas son idénticas a aquellas utilizadas en cálculos de secuentes ordinarios, y la diferencia entre las diferentes lógicas se debe principalmente a las diferencias entre sus reglas estructurales.

Axiomas y algunas reglas estandar

En la mayoría de los cálculos de hipersecuentes, los únicos axiomas son de la forma $\alpha \Rightarrow \alpha$, exactamente como en los cálculos de secuentes ordinarios.

Reglas Lógicas:

$$(\neg \Rightarrow) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}$$

$$(\Rightarrow \neg) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha|\, \mathcal{H}}$$

$$(\vee \Rightarrow) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H} \quad \mathcal{G}|\, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}$$

$$(\Rightarrow \vee) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta|\, \mathcal{H}} \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta|\, \mathcal{H}}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}} \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta|\, \mathcal{H}}$$

$$(\Rightarrow \wedge) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha|\, H \qquad \mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta|\, \mathcal{H}}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \alpha|\, \mathcal{H} \qquad \mathcal{G}|\, \beta, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2|\, \mathcal{H}}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow) \qquad \frac{\mathcal{G}|\, \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta|\, \mathcal{H}}{\mathcal{G}|\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta|\, \mathcal{H}}$$

Las reglas estructurales estandar en sistemas tipo Gentzen ordinarios son: contracción, debilitamiento y corte (ver Definición 1.1.7). En cálculos de hipersecuentes se tienen dos versiones de las primeras dos reglas: una versión *interna* y otra *externa*. Las externas tratan con las componentes dentro de un hipersecuente. Las internas tratan con las fórmulas dentro de un cierto componente.

Reglas Estructurales Externas:

Debilitamiento Externo (EW).

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}|\mathcal{H}}$$

Contracción Externa (EC).

$$\frac{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta|\,\Gamma \Rightarrow \Delta|\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta|\mathcal{H}}$$

Permutación Externa (EC).

$$\frac{\mathcal{G}|\,\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1|\,\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2|\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2|\,\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1|\mathcal{H}}$$

Reglas Estructurales Internas:

Debilitamiento Interno.

$$(LIW)\frac{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta|\,\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\,\mathcal{H}} \qquad (RIW)\frac{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta|\,\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha|\,\mathcal{H}}$$

Contracción Interna (IW).

$$\frac{\mathcal{G}|\,\alpha, \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\,\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta|\,\mathcal{H}} \qquad \frac{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \alpha|\,\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha|\,\mathcal{H}}$$

Comunicación (Com).

$$\frac{\mathcal{G}_1|\,\Gamma_1, \Rightarrow \alpha_1\,|\,\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{G}_2|\,\Gamma_2 \Rightarrow \alpha_2\,|\,\mathcal{H}_2}{\mathcal{G}_1|\mathcal{G}_2|\,\Gamma_1 \Rightarrow \alpha_2|\,\Gamma_2, \Rightarrow \alpha_1|\,\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_2}$$

Corte (C).

$$\frac{\mathcal{G}_1|\,\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \alpha|\,\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{G}_2|\,\alpha, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2|\,\mathcal{H}_2}{\mathcal{G}_1|\mathcal{G}_2|\,\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2|\,\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_2}$$

Splitting rules.

$$(S_c)\frac{\mathcal{G}|\,\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2|\,\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1|\,\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2|\mathcal{H}}$$

$$(S_I)\frac{\mathcal{G}|\,\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \alpha|\,\mathcal{H}}{\mathcal{G}|\,\Gamma_1 \Rightarrow \alpha|\,\Gamma_2 \Rightarrow \alpha|\mathcal{H}}$$

(S_c) es la forma básica de splitting. (S_I) es la versión monoconcluida o intuicionista.

Definición 1.1.28 *Un cálculo de hipersecuentes es un par $G = \langle C, R \rangle$, donde C es una signatura y R es un conjunto de reglas de inferencia de hipersecuentes.*

Una *prueba* (o demostración) en un cálculo de hipersecuentes G consiste de un árbol con raiz, en el cual cada nodo es un hipersecuente. La raiz del árbol, ubicada en la parte inferior del árbol, se denomina el *hipersecuente final* y es el hipersecuente probado. Las hojas, ubicadas en la parte superior del árbol, se denominan *hipersecuentes iniciales* o *axiomas*. Vemos entonces que las nociones de prueba en cálculos de secuentes y en cálculos de hipersecuentes são análogas. Si existe una demostración de un hipersecuente $\mathcal{H}$ en G diremos que $\mathcal{H}$ es demonstrable en G, y lo denotaremos por $\vdash_G \mathcal{H}$.

Diremos que una fórmula ψ es *derivable* a partir de un conjunto de fórmulas Γ en un cálculo de hipersecuentes G, y lo indicaremos con

$$\Gamma \vdash_G \psi,$$

si $\vdash_G \Delta \Rightarrow \psi$, donde Δ es un multiconjunto finito de fórmulas en Γ.

Ejemplo 1.1.29 *El siguiente ejemplo fue extraido de [4].*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \qquad \beta \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta | \beta \Rightarrow \alpha}\,(Com)}{\Rightarrow (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha) | \beta \Rightarrow \alpha}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha) | \Rightarrow \beta \to \alpha}\,(\Rightarrow \vee)}{\Rightarrow (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha) | \Rightarrow (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)}\,(EC)$$

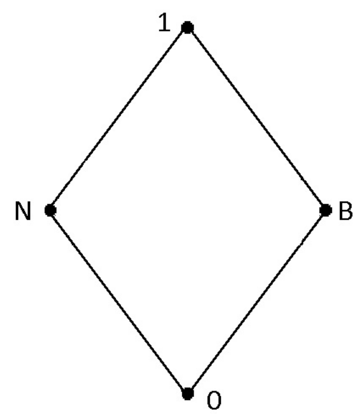
1.2 La lógica tetravalente modal ($\mathcal{TML}$).

Finalizamos este capítulo de preliminares con una breve descripción de la lógica que constituye el ejemplo principal de aplicación de nuestras investigaciones: la lógica tetravalente modal de Monteiro.

La clase de las álgebras tetravalente modales (**TMA**) fueron consideradas por primera vez por Antonio Monteiro, y estudiadas principalmente por I. Loureiro, A.V. Figallo, A. Ziliani and P. Landini. Posteriormente, J.M. Font y M. Rius se interesaron por las lógicas a las que dan lugar los aspectos algebraicos y reticulares de estas algebras. Ellos introdujeron un cálculo de secuentes (para una de estas lógicas) cuya lógica sentencial asociada coincide con la lógica matricial de las dos matrices formadas por el álgebra tetravalente modal de cuatro elementos con cada uno de sus filtros primos. La lógica caracterizada por dicho cálculo de secuentes fue llamada *lógica tetravalente modal* ($\mathcal{TML}$).

1.2.1 Álgebras tetravalentes modales

En 1966, L. Monteiro (ver[53]) demostró que la axiomática dada por A. Monteiro para la variedad de las algebras de Łukasiewicz trivalentes era independiente. Para exhibir la independencia de uno de dichos axiomas él consideró el álgebra $\mathfrak{M}_{4m} = \langle M_4, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ donde el retículo $M_4 = \{\mathbf{1}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \mathbf{0}\}$ está dado por



tal que $\neg\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\neg\mathbf{B} = \mathbf{B}$, $\neg\mathbf{0} = \mathbf{1}$ y $\neg\mathbf{1} = \mathbf{0}$, y el operador unario $\Box$ se define como: $\Box\mathbf{1} = \mathbf{1}$, y $\Box a = \mathbf{0}$ si $a \neq \mathbf{1}$.

A. Monteiro, motivado por el ejemplo anterior, consideró a la clase de álgebras generada por $\mathfrak{M}_{4m}$, a las que llamó *algebras tetravalentes modales*.

Recordemos entonces que un *álgebra tetravalente modal* es un álgebra $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0)$ tal que su reducto no modal $\mathfrak{A}^- = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 0\rangle$ es un álgebra de De Morgan, y la operación unaria $\Box$ satisface, para todo $a \in A$, los siguientes dos axiomas:

$$\Box a \wedge \neg a = 0,$$

$$\neg\Box a \wedge a = \neg a \wedge a.$$

Durante su última estadía en Lisboa (1977-1979), A. Monteiro, le sugirió a I. Loureiro que desarrollara la teoría de estas álgebras y, muchos de los resultados que esta última obtuvo, formaron parte de su tesis doctoral. La teoría de estas álgebras fue desarrollada principalmente por I. Loureiro (ver [44, 45, 46, 47] entre otros) y A. V. Figallo (ver [26, 27, 28]).

Notemos que si a las dos ecuaciones anteriores agregamos la ecuación $\Box x = x$ obtenemos la variedad de las álgebras de Boole.
No es difícil verificar que:

Proposición 1.2.1 *En toda TMA A y para todo $a, b \in A$ valen los siguientes:*

(i)	$\neg\Box a \vee a = 1.$	*(ix)*	$\Box^2 a = \Box a.$
(ii)	$\Box a \vee \neg a = a \vee \neg a.$	*(x)*	$\Box(\Box a \wedge \Box b) = \Box a \wedge \Box b.$
(iii)	$\Box a \vee \neg\Box a = 1.$	*(xi)*	$\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b.$
(iv)	$\Box a \wedge \neg\Box a = 0.$	*(xii)*	$\Box(\Box a \vee \Box b) = \Box a \vee \Box b.$
(v)	$\Box a \leq a.$	*(xiii)*	$\Box\neg\Box a = \neg\Box a.$
(vi)	$\Box 1 = 1.$	*(xiv)*	$\Box(a \vee \Box b) = \Box a \vee \Box b.$
(vii)	$\Box 0 = 0.$	*(xv)*	$a \wedge \Box\neg a = 0.$
(viii)	$a \leq b$ *implica* $\Box a \leq \Box b.$		

Las Propiedades (v), (vi), (ix) y (xi) muestran que $\Box$ es un operador interior.

Proposición 1.2.2 *La variedad* **TMA** *está generada por el álgebra $\mathfrak{M}_{4m}$. Sus únicas subvariedades propias son la variedad de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes* $\mathbf{Ł}_3$*, y la variedad de las álgebras de Boole* $\mathbf{B}$*.*

En cualquier retículo distributivo U denotamos por $\mathcal{P}r(U)$ y $\mathcal{F}(U)$ a la familia de todos los *filtros primos* y *filtros* de U respectivamente.

Consideremos la siguiente construcción. Para todo $X \subseteq A$ definimos

$$\Phi(X) = \{a \in A : \neg a \notin X\}$$

Entonces, se verifica:

Proposición 1.2.3 *En toda algebra de De Morgan U la función Φ satisface:*

(i) Si $P \in \mathcal{P}r(U)$, entonces $\Phi(P) \in \mathcal{P}r(U)$.

(ii) Φ es una involución sobre $\mathcal{P}r(U)$, esto es, $\Phi(\Phi(P)) = P$, para todo $P \in \mathcal{P}r(U)$.

(i) $\Phi(X) = A \setminus \neg X$ para todo $X \subseteq A$, donde $\neg X = \{\neg a : a \in X\}$.

1.2.2 Lógicas tetravalentes modales abstractas

Recordemos que una *lógica abstracta* ([32]) es un par $\mathbb{L} = \langle U, C\rangle$ donde U es un álgebra abstracta y C es un *operador de clausura* (en el sentido topológico) sobre el conjunto de las partes de A, siendo A el universo de U. Dualmente, las lógicas abstractas pueden también ser representadas como pares $\mathbb{L} = \langle U, \mathcal{C}\rangle$, donde $\mathcal{C}$ es el *sistema de clausura* naturalmente asociado con C, esto es, $\mathcal{C} = \{X \subseteq A : C(X) = X\}$, la familia de los conjuntos cerrados de C. Equivalentemente, $\mathbb{L}$ puede ser presentada como el par $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{U}, \mathcal{E}\rangle$ donde $\mathcal{E}$ es una base del sistema de clausura $\mathcal{C}$, en el sentido topológico.
Utilizamos las abreviaturas $C(a)$ para $C(\{a\})$, si $a \in A$, y $C(X, a)$ para $C(X \cup \{a\})$.
En [31] fueron introducidas las nociones de *lógica quasi tetravalente modal* y *lógica tetravalente modal* como sigue.

Definición 1.2.4 *Sea $\mathfrak{U} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ un álgebra de tipo (2,2,1,1,0). Una lógica abstracta $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{U}, \mathcal{C}\rangle$ es una* **lógica quasi tetravalente modal** *cuando existe una base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ tal que cada uno de sus miembros $P \in \mathcal{E}$ satisface las siguientes condiciones:*

(L1) *P es un filtro primo, i. e., $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}r(\mathfrak{A})$;*

(L2) *$\Phi(P) \in \mathcal{E}$ y $\Phi^2(P) = P$;*

(L3) *$0 \notin P$;*

(L4) *$\Box a \in P$ sí, y solo si, $\Box a \in \Phi(P)$, para todo $a \in A$;*

(L4) *$a \in P \cap \Phi(P)$ sí, y solo si, $\Box a \in P \cap \Phi(P)$, para todo $a \in A$.*

Si la lógica abstracta es finitaria entonces decimos que $\mathbb{L}$ es una **lógica tetravalente modal** *(TML).*

Un ejemplo natural de TML es cualquiera de la forma $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{A}, \mathcal{F} \rangle$ donde $\mathfrak{A}$ es una TMA y $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{A})$ es la familia de todos sus filtros. Una instancia particular y paradigmática de lógica tetravalente modal es la lógica determinada por el álgebra de cuatro elementos $\mathfrak{M}_{4m}$ y todos sus filtros que denotaremos $\mathbb{L}_{4m} = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \mathcal{F} \rangle$

Si $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{A}, \mathbf{C} \rangle$ y $\mathbb{L}' = \langle \mathfrak{A}', \mathbf{C}' \rangle$ son dos lógicas abstractas del mismo tipo de similaridad, se dice que $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ es un homomorfismo lógico de $\mathbb{L}$ a $\mathbb{L}'$ cuando es una función continua en el sentido topológico. Dada una familia $\{\mathbb{L}_i = \langle \mathfrak{A}_i, \mathbf{C}_i \rangle\}_{i \in I}$ de lógicas abstractas, un álgebra $\mathfrak{A}$ y su correspondiente familia de homomorfismos $h_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_i)$, la lógica abstracta **proyectivamente generada a partir de** $\{\mathbb{L}_i\}_{i \in I}$ por $\{h_i\}_{i \in I}$ es $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{A}, \mathcal{C} \rangle$ donde $\mathcal{C}$ tiene como base a la familia $\{{h_i}^{-1}[T] : T \in \mathbf{C}_i, i \in I\}$.
La siguiente es una caracterización de la noción de lógica tetravalente modal en términos del operador de clausura.

Teorema 1.2.5 *Sea $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0 \rangle$ un álgebra de tipo (2,2,1,1,0) y sea $\mathbb{L} = \langle \mathfrak{A}, \mathcal{C} \rangle$ una lógica abstracta sobre $\mathfrak{A}$. Entonces, $\mathbb{L}$ es una lógica tetravalente modal si, y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(L'1) $\mathbb{L}$ *es finitaria;*

(L'2) $\mathcal{C}(a \wedge b) = \mathcal{C}(a, b)$, *para todo* $a, b \in A$*;*

(L'3) $\mathcal{C}(X, a \vee b) = \mathcal{C}(X, a) \cap \mathcal{C}(X, b)$, *para todo* $a, b \in A$ *y todo* $X \subseteq A$*;*

(L'4) $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(\neg\neg a)$, *para todo* $a \in A$*;*

(L'5) $a \in \mathcal{C}(b)$ *implica* $\neg b \in \mathcal{C}(\neg a)$, *para todo* $a, b \in A$*;*

(L'6) $\mathcal{C}(0) = A$*;*

(L'7) $\mathcal{C}(a) \cap \mathcal{C}(\neg\Box a) = \mathcal{C}(\emptyset)$, *para todo* $a \in A$*; y*

(L'8) $\mathcal{C}(a, \neg\Box a) = \mathcal{C}(a, \neg a)$, *para todo* $a \in A$.

Definición 1.2.6 *Sea* $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ *un álgebra de tipo (2,2,1,1,0). Entonces,* $\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{A})$ *es la lógica abstracta proyectivamente generada a partir de la lógica* $\mathbb{L}_{4m}$ *por la familia* $Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_{4m})$.

1.2.3 Cálculo de secuentes para $\mathcal{TML}$

En adelante, denotaremos con $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \wedge, \vee, \neg, \Box, \bot\rangle$ al álgebra absolutamente libre de tipo (2,2,1,1,0) generada por algún conjunto numerable de variables. LLamamos *fórmulas sentenciales* a los miembros de Fm, y nos referiremos a ellas por medio de letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, etc.; y denotaremos a los conjuntos de formulas por letras griegas mayúsculas Γ, Δ, etc.

Particularizando la Definición 1.2.6 al álgebra de las fórmulas Fm obtenemos la lógica abstracta $\mathbb{L}_{4m}(Fm)$, la cual es, en efecto, una lógica sentencial, i.e., invariante bajo sustituciones, porque esta lógica coincide con la lógica definida a partir de la familia formada por las dos matrices $\langle \mathfrak{M}_{4m}, F_{\mathbf{N}} \rangle$ y $\langle \mathfrak{M}_{4m}, F_{\mathbf{B}} \rangle$ en la forma tradicional.

Con el objeto de caracterizar esta lógica por medio de un sistema deductivo sintáctico, se introdujo en [31] un cálculo de secuentes denominado $\mathfrak{G}$. Los axiomas y reglas de $\mathfrak{G}$ son las siguientes:

Axiomas

$$\text{(Axioma estructural)} \quad \alpha \vdash \alpha \qquad\qquad \text{(Axioma modal)} \quad \vdash \alpha \vee \neg \Box \alpha$$

Reglas estructurales

$$\text{(Debilitamiento)} \quad \frac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta, \beta \vdash \alpha} \qquad\qquad \text{(Corte)} \quad \frac{\Delta \vdash \alpha \quad \Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta \vdash \beta}$$

Reglas Lógicas

$$(\wedge \vdash) \quad \frac{\Delta, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Delta, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma} \qquad\qquad (\vdash \wedge) \quad \frac{\Delta \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee \vdash) \quad \frac{\Delta, \alpha \vdash \gamma \quad \Delta, \beta \vdash \gamma}{\Delta, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$$

$$(\vdash \vee) \quad \frac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad\qquad \frac{\Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg) \quad \frac{\alpha \vdash \beta}{\neg \beta \vdash \neg \alpha} \qquad\qquad (\bot) \quad \frac{\Delta \vdash \bot}{\Delta \vdash \alpha}$$

$$(\neg\neg \vdash) \quad \frac{\Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta, \neg\neg\alpha \vdash \beta} \qquad\qquad (\vdash \neg\neg) \quad \frac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \neg\neg\alpha}$$

$$(\Box\vdash)\ \frac{\Delta, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta}{\Delta, \alpha, \neg\Box\alpha \vdash \beta} \qquad\qquad (\vdash\Box)\ \frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \neg\alpha}{\Delta \vdash \alpha \wedge \neg\Box\alpha}$$

La noción de derivación en el cálculo $\mathfrak{G}$ se define de modo usual. Este genera una lógica proposicional $\mathcal{TML} = \langle Fm, \vdash_{\mathcal{TML}}\rangle$ definida como sigue: para todo conjunto finito $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{TML}} \varphi$ sí, y solo si, el secuente $\Gamma \vdash \varphi$ tiene una derivación $\mathfrak{G}$. En [31] se prueba que el cálculo de secuente $\mathfrak{G}$ es correcto y completo con respecto a la lógica tetravalente modal $\mathbb{L}_{4m}(Fm)$, constituyendo la contrapartida sintáctica de ella.

Teorema 1.2.7 (Correctitud y Completitud de $\mathcal{TML}$, cf. [31]) *La lógica proposicional $\mathcal{TML}$ coincide con la lógica $\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})$. En términos más precisos: para todo conjunto finito $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$,*

$$\Gamma \models_{\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})} \alpha \quad \textit{sí, y solo si} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{TML}} \alpha.$$

Más aún,

Proposición 1.2.8 ([31]) *Una ecuación arbitraria $\psi \approx \varphi$ es válida en toda TMA si, y solo si, $\psi \dashv\vdash_{\mathcal{TML}} \varphi$.*

Como consecuencia de esto tenemos que:

Corolario 1.2.9 ([31])

(i) *La ecuación $\psi \approx 1$ es válida en toda TMA si, y solo si, $\vdash_{\mathcal{TML}} \psi$.*

(ii) *Para cualquier $\psi, \varphi \in Fm$, $\psi \vdash_{\mathcal{TML}} \varphi$ si, y solo si, $\psi \models_{TMA} \varphi$, si, y solo si, $h(\psi) \leq h(\varphi)$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{U})$, para todo $\mathfrak{U} \in$ **TMA**.*

2 Capítulo II: Cálculos de Hipersecuentes Conmutativos

En este capítulo nos proponemos generalizar el trabajo hecho en [21], brevemente descripto aqui en las secciones 1.1.3 y 1.1.4, al marco más rico de los hipersecuentes. De esta manera, partiendo de una presentación formal de hipersecuentes en la cual se introduzcan meta-variables, en el lenguaje objeto, para el contexto (i.e. secuentes), definiremos ambos tipos de fibring – restringido y no restringido– de tales sistemas como un operador categorial dentro de una categoría apropiada de hipersecuentes. Además, exploraremos algunas características de preservación, en particular mostraremos un resultado sobre la preservación por fibring de cálculos de hipersecuentes conmutativos de la propiedad de interpolación de Craig. Los morfismos introducidos pueden ser vistos como una novedosa noción de traducción entre lógicas la cual preserva meta-propiedades en un sentido fuerte. Asi, haremos en el final del capítulo una breve discusión sobre la relevancia de este abordaje en lo que concierne a la teoría de las traducciones entre lógicas.

2.1 La categoría de los cálculos de hipersecuentes conmutativos

En esta sección presentamos la categoría de los cálculos de hipersecuentes conmutativos generalizando la noción de *cálculos de afirmaciones* (*assertion calculi*) introducida en [21] y discutida aqui en la Seccion 1.1.3.

En lo que sigue consideraremos un conjunto numerable $\Xi = \{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ de símbolos denominados *variables de tipo 1* (o variables esquema); un conjunto numerable $\mathcal{X} = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ a cuyos elementos denominamos *variables de tipo 2* (o variables de conjuntos); y, finalmente, un conjunto numerable $\mathfrak{H} = \{H_i : i \in \mathbb{N}\}$ cuyos elementos son denominados *variables de tipo 3* (variables de secuentes) donde estos tres conjuntos son disjuntos dos a dos.

Generalizando a los multiconjuntos la Definición 1.1.12 de *afirmación general*, un *secuente* sobre la signatura C es una expresión de la forma $(A; \Gamma \succ \Delta; B)$ donde Γ y Δ son multiconjuntos de fórmulas en $L(C)$ y A, B son multiconjuntos finitos de variables de conjunto tales que $\Gamma \cup \Delta \cup A \cup B \neq \emptyset$. El conjunto de todos los secuentes sobre C será denotado por $Seq(C)$.

Es importante notar que un secuente (en nuestro sentido) no es más que un secuente conmutativo ordinario, enriquecido con variables de tipo 2 para conjuntos de fórmulas (describiendo el contexto de un secuente) y variables de tipo 1 para fórmulas. Este formalismo permitirá definir, de un modo preciso, cálculos de secuentes y su fibring (cf. [21]). Ahora, introduciremos la noción de hipersecuente conmutativo utilizando a las variables para los secuentes ,i.e., variables de tipo 3.

Definición 2.1.1 *Un* hipersecuente conmutativo *h sobre C es un par $h = \langle \mathcal{H}; \mathcal{S} \rangle$ donde $\mathcal{H}$ es un multiconjunto finito de variables de secuentes y $\mathcal{S}$ es un multiconjunto finito de secuentes. El conjunto de todos los hipersecuentes conmutativos sobre C será denotado por $HSeq(C)$.*

Siguiendo la notación tradicional, el hipersecuente conmutativo

$$h = \langle \{G_1, \ldots, G_n\}; \{(A_1; \Gamma_1 \succ \Delta_1; B_1), \ldots, (A_m; \Gamma_m \succ \Delta_m; B_m)\} \rangle$$

será notado en lo que sigue como

$$h = G_1|\dots|G_n|A_1;\Gamma_1 \succ \Delta_1;B_1|\dots|A_m;\Gamma_m \succ \Delta_m;B_m.$$

Como hicimos en el Capítulo 1 con los secuentes, cualquier componente vacía de un (hiper)secuente será omitida de la notación. Por ejemplo, notaremos $(A;\Gamma \succ \Delta)$ y $(\succ \Delta;B)$ en lugar de $(A;\Gamma \succ \Delta;\emptyset)$ y $(\emptyset;\emptyset \succ \Delta;B)$, respectivamente. Como es usual, Γ,Γ' y Γ,φ son abreviaturas de $\Gamma\cup\Gamma'$ y $\Gamma\cup\{\varphi\}$, respectivamente. Además, escribiremos X y X,Y en lugar de $\{X\}$ y $\{X,Y\}$, respectivamente, para variables cualesquiera X e Y. La misma notación aplica para las variables de secuentes. Más aun, dado un multisubconjunto finito $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{H}$ el hipersecuente $\langle\mathcal{H};\emptyset\rangle$ será simplemente denotado por $\mathcal{H}$ (vea por ejemplo la regla (EW) en el Ejemplo 2.1.9). Análogamente, dado un multiconjunto finito $\mathcal{S}$ de $Seq(C)$, el hipersecuente $\langle\emptyset;\mathcal{S}\rangle$ será simplemente denotado por $\mathcal{S}$ (vea por ejemplo el axioma en el Ejemplo 2.1.9).

Definición 2.1.2 *Sea C una signatura. Una regla de inferencia (n-aria) de hipersecuentes conmutativos sobre C es un par $r = \langle\{h_1,\dots,h_n\},h\rangle$ tal que $h_i,h \in HSeq(C)$. Si $n=0$, entonces r se dice un* axioma. *Un* cálculo de hipersecuentes conmutativo *(chc) es un par $\mathcal{A} = \langle C,R\rangle$ donde C es una signatura y R es un conjunto finito de reglas de inferencia de hipersecuentes conmutativos sobre C.*

Por simplicidad, denotaremos respectivamente a los pares $\langle\{h_1,\dots,h_n\},h\rangle$ y $\langle\emptyset,h\rangle$ por

$$\frac{h_1 \quad \dots \quad h_n}{h} \quad \text{y} \quad \frac{}{h}\ .$$

Ejemplo 2.1.3 *La regla lógica de hipersecuentes $r_{\neg\succ}$ para la negación que usualmente es presentada*

$$r_{\neg\succ} = \frac{G|\,\Gamma \vdash \Delta,\alpha}{G|\,\neg\alpha,\Gamma \vdash \Delta},$$

acá sera presentada

$$\frac{\langle\{G\};\{(\{X\};\emptyset \succ \{\xi\};\{Y\})\}\rangle}{\langle\{G\};\{(\{X\};\{\neg\xi\} \succ \emptyset;\{Y\})\}\rangle}$$

o simplemente

$$\frac{G|X \succ \xi;Y}{G|X;\neg\xi \succ Y}$$

(ver Observación 2.1.5 más abajo).

De ahora en adelante, denotaremos $\mathcal{MP}_{fin}(X)$ al conjunto de todos los multisubconjuntos finitos del conjunto X.

Recordemos que una sustitución sobre la signatura C es una función $\sigma : \Xi \to L(C)$ y que denotaremos $\hat{\sigma} : L(C) \to L(C)$ al único homomorfismo que extiende a σ sobre $L(C)$. Adaptando [21], una instanciación sobre C será una función $\varrho : \mathcal{X} \to \mathcal{MP}_{fin}(L(C) \cup \mathcal{X})$. Si ϱ es una instanciación sobre C y $A \in \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X})$ es un multiconjunto finito de variables de tipo 2, definimos los siguientes multiconjuntos finitos, analogos a los conjuntos finitos del mismo nombre introducidos en la Sección 1.1.3:

$$A^{\varrho}_{\mathcal{X}} = \{Y \in \mathcal{X} : Y \in \varrho(X) \text{ para algún } X \in A\} = (\textstyle\bigcup_{X \in A} \varrho(X)) \cap \mathcal{X};$$

$$A^{\varrho}_{L(C)} = \{\varphi \in L(C) : \varphi \in \varrho(X) \text{ para algún } X \in A\} = (\textstyle\bigcup_{X \in A} \varrho(X)) \cap L(C).$$

De esta manera, dada una sustitución σ y una instanciación ϱ sobre C, respectivamente, la función $(\sigma, \varrho) : Seq(C) \to Seq(C)$ se define del siguiente modo, generalizando la noción introducida en la Sección 1.1.3: dado un secuente $(A; \Gamma \succ \Delta; B)$, entonces

$$(\sigma, \varrho)(A; \Gamma \succ \Delta; B) = (A^{\varrho}_{\mathcal{X}}; \hat{\sigma}(\Gamma) \cup A^{\varrho}_{L(C)} \succ \hat{\sigma}(\Delta) \cup B^{\varrho}_{L(C)}; B^{\varrho}_{\mathcal{X}}).$$

Con el objeto de tratar con hipersecuentes introduciremos la noción de sustitución para variables de tipo 3.

Definición 2.1.4 *Diremos que* λ *es una* instanciación de secuentes *sobre* C *si* λ *es una función de* $\mathfrak{H}$ *en el conjunto* $\mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C))$ *de todos los multisubconjuntos finitos del conjunto* $\mathfrak{H} \cup Seq(C)$*.*

Sea λ una instanciación de secuentes y $h = \langle \mathcal{H}; \mathcal{S} \rangle$ un hipersecuente sobre C. Considere los siguientes multiconjuntos:

$$\mathcal{H}^{\lambda}_{\mathfrak{H}} = \{G \in \mathfrak{H} : G \in \lambda(H) \text{ para algún } H \in \mathcal{H}\} = (\bigcup_{H \in \mathcal{H}} \lambda(H)) \cap \mathfrak{H};$$

$$\mathcal{H}^{\lambda}_{Seq(C)} = \{s \in Seq(C) : s \in \lambda(H) \text{ para algún } H \in \mathcal{H}\} = (\bigcup_{H \in \mathcal{H}} \lambda(H)) \cap Seq(C).$$

Entonces, dada una sustitución σ, una instanciación ϱ y una instanciación de secuentes λ sobre C, respectivamente, la función $(\sigma, \varrho, \lambda) : HSeq(C) \to HSeq(C)$ se define como sigue:

$$(\sigma, \varrho, \lambda)(h) = \langle \mathcal{H}^{\lambda}_{\mathfrak{H}}; (\sigma, \varrho)(\mathcal{S}) \cup \mathcal{H}^{\lambda}_{Seq(C)} \rangle.$$

Observación 2.1.5 (Reglas extensionales vs. reglas intensionales) *Recordemos el Ejemplo 2.1.3. A pesar de las aparentes similitudes entre la notación tradicional para reglas de hipersecuentes y las nuestras, existen profundas diferencias entre* $r_{\neg\succ}$ *y nuestra presentación. En la primera,* G *denota a un multiconjunto arbitrario de secuentes concretos; y a su vez,* Γ *y* Δ *denotan multiconjuntos arbitrarios de fórmulas; finalmente,* α *denota una fórmula concreta arbitraria. Esto es,* $r_{\neg\succ}$ *consiste de* infinitas *reglas concretas obtenidas mediante la instanciación de sus* meta-variables*, es decir, variables en el metalenguaje: es un abordaje* extensional *a las reglas de inferencia. Por otro lado, nuestra notación es extremadamente precisa:* G*,* X*,* Y *y* ξ *son variables concretas del* *lenguaje formal de los hipersecuentes, y es por esto que la regla es presentada como un único objeto lingüístico, en lugar de infinitos representados por variables en el meta-lenguaje, como es hecho en el abordaje usual de (hiper)secuentes. En otras palabras, proponemos un abordaje* intensional *para las reglas de inferencia. A pesar de las obvias ventajas de este hecho, existe una ventaja mucho más importante de nuestro abordaje de los (hiper)secuentes. Puesto que estamos interesados en combinar diferentes cálculos de (hiper)secuentes, el uso de variables formales en lugar de meta-variables (esto es, variables informales) es crucial. De hecho, en el abordaje intensional, las reglas están* preparadas *para ser combinadas, puesto que están "abiertas" a aceptar nuevos conectivos: ξ puede ser reemplazada por* cualquier *fórmula, mientras que X e Y pueden ser reemplazadas por* cualquier *conjunto de fórmulas, como así también G está abierta a ser sustituida por* cualquier *multiconjunto de secuentes, y esto vale en* cualquier *lenguaje. Esto es, si agregamos nuevos conectivos al lenguaje (como consecuencia de un proceso de combinación), el significado de la regla será el mismo. Por otro lado, en el abordaje extensional tradicional de (hiper)secuentes, esta posibilidad no está permitida, y la regla debe ser extendida para poder lidiar con el nuevo lenguaje. Esta es la novedad principal de nuestro abordaje para combinar hipersecuentes, originalmente introducido en [21] para secuentes.*

Ahora estamos en condiciones de introducir la noción de *derivación* en un cálculo de hipersecuentes conmutativo.

Definición 2.1.6 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un cálculo de hipersecuentes conmutativo y sea $\Upsilon \cup \{h\} \subseteq HSeq(C)$ un conjunto de hipersecuentes. Diremos que h es derivable en $\mathcal{A}$ a partir de Υ, y escribiremos $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$, si existe una secuencia finita $h_1 \dots h_n$ de elementos de $HSeq(C)$ tal que $h_n = h$ y, para todo $1 \leq i \leq n$, o bien $h_i \in \Upsilon$, o bien existen: una regla de hipersecuentes $r \in R$, $r = \langle\{h'_1, \dots, h'_k\}, h'\rangle$, una sustitución σ, una instanciación ϱ*

y una instanciación de secuentes λ *sobre* C *tales que* $(\sigma, \varrho, \lambda)(h'_j) \in \{h_1, \ldots, h_{i-1}\}$ *(para* $1 \leq j \leq k$*) y* $(\sigma, \varrho, \lambda)(h') = h_i$*. Si* $\Upsilon = \emptyset$*, solamente diremos que* h *es probable en* $\mathcal{A}$*.*

Observación 2.1.7 *El poder expresivo de los hipersecuentes, conjuntamente con la posibilidad de usar variables de tipo 1, 2 o 3, permite definir reglas estructurales de modos muy diferentes. Por ejemplo, la regla de contracción, tal como fuera señalado por A. Avron, admite dos versiones: una interna (dentro del secuente) y una externa (dentro del contexto del hipersecuente). De esta manera, la versión interna de la contracción (usando variables de tipo 1) y la versión externa (usando variables de tipo 2) son como sigue:*

$$\frac{G|X;\xi,\xi \succ Y}{G|X;\xi \succ Y}, \qquad \frac{G|X \succ \xi,\xi;Y}{G|X \succ \xi;Y},$$

$$\frac{G|X \succ Y|X \succ Y}{G|X \succ Y}.$$

Y podemos agregar más posibilidades si, ahora, usamos variables de tipo 3:

$$\frac{G|G|H}{G|H}.$$

Claramente, la versión con variables de tipo 3 puede simular a la versión con variables de tipo 2, mientras que cada aplicación concreta de la contracción de nivel 3 es recuperada por sucesivas aplicaciones de contracciones de nivel 2. Por otro lado, la contracción interna puede ser definida alternativamente usando variables de tipo 2:

$$\frac{G|X,X,Y \succ Z}{G|X,Y \succ Z}, \qquad \frac{G|X \succ Y,Y,Z}{G|X \succ Y,Z}.$$

De modo análogo a lo anterior, las contracciones de nivel 2 y nivel 1 son equivalentes.

A continuación vamos a definir la categoría formal de cálculos de hipersecuentes conmutativos. Como vimos en la Sección 1.1.3, en [21] fue utilizada una categoría apropiada de signaturas con sus morfismos.

Recordemos que si $(A; \Gamma \succ \Delta; B)$ es un secuente sobre C y $f : C \to C'$ es un morfismo de signaturas, entonces $\hat{f}(A; \Gamma \succ \Delta; B)$ es, por definición, el secuente $(A; \hat{f}(\Gamma) \succ \hat{f}(\Delta); B)$ sobre C'. Esto puede extenderse naturalmente a hipersecuentes:

$$\hat{f}(\langle \mathcal{H}; \mathcal{S} \rangle) = \langle \mathcal{H}; \hat{f}(\mathcal{S}) \rangle.$$

Queda claro, entonces, que $\hat{f}(h)$ es un hipersecuente sobre C' siempre que h sea un hipersecuente sobre C.

La categoría de los hipersecuentes conmutativos es definida como sigue.

Definición 2.1.8 *La categoría* **CHC** *de los cálculos de hipersecuentes conmutativos es la categoría cuyos objetos son chc's de la forma* $\mathcal{A} = \langle C, R \rangle$*. Un morfismo* $f : \langle C, R \rangle \to \langle C', R' \rangle$ *en* **CHC** *es un morfismo* $f : C \to C'$ *en* **Sig** *tal que, para toda regla* $r = \langle \{h_1, \ldots, h_n\}, h \rangle$ *en* R*, se verifica que* $\hat{f}(h)$ *es derivable en* $\langle C', R' \rangle$ *a partir del conjunto de hipersecuentes* $\{\hat{f}(h_1), \ldots, \hat{f}(h_n)\}$*. La composición de morfismos, como así también el morfismo identidad en* **CHC** *se definen como en* **Sig**.

Finalizaremos esta sección con un ejemplo de un cálculo de hipersecuentes tomado de la literatura, presentado en términos de nuestro marco formal. A pesar de las similitudes con la presentación usual de hipersecuentes, el lector debería tener en mente las observaciones hechas en la Observación 2.1.5.

Ejemplo 2.1.9 Lógica de Lukasiewicz trivalente (Ł$_3$).

La siguiente formulación de **Ł**$_3$ es debida a A. Avron en [3], y puede fácilmente ser reformulada como un chc como sigue:

Axiomas

$$\overline{\xi \succ \xi}$$

Reglas estructurales externas

Debilitamiento externo:

$$(EW) \quad \frac{G}{G|H}$$

Contracción externa:

$$(EC) \quad \frac{G|X \succ Y|X \succ Y}{G|X \succ Y}$$

Reglas estructurales internas

Debilitamiento interno:

$$(LIW) \quad \frac{G|\, X \succ Y}{G|Z, X \succ Y} \qquad (RIW) \quad \frac{G|\, X \succ Y}{G|X \succ Y, Z}$$

Contracción interna:

$$(LIC) \quad \frac{G|X; \xi, \xi \succ Y}{G|X; \xi \succ Y} \qquad (RIC) \quad \frac{G|X \succ \xi, \xi; Y}{G|X \succ \xi; Y}$$

Merging:

$$(M) \quad \frac{G_1|X_1, X_2, X_3 \succ Y_1, Y_2, Y_3 \quad G_2|\, X'_1, X'_2, X'_3 \succ Y'_1, Y'_2, Y'_3}{G_1|G_2|X_1, X'_1 \succ Y_1, Y'_1|\, X_2, X'_2 \succ Y_2, Y'_2|\, X_3, X'_3 \succ Y_3, Y'_3}$$

Reglas lógicas:

$$(\neg \succ) \qquad \frac{G|\, X \succ \xi; Y}{G|\, X; \neg\xi \succ Y}$$

$$(\succ \neg) \qquad \frac{G|\, X; \xi \succ Y}{G|\, X \succ \neg\xi; Y}$$

$$(\vee \succ) \qquad \frac{G|\, X; \xi \succ Y \quad G|\, X; \xi' \succ Y}{G|\, X; \xi \vee \xi' \succ Y}$$

$$(\succ \vee) \qquad \frac{G|\, X \succ \xi; Y}{G|\, X \succ \xi \vee \xi'; Y} \qquad \frac{G|\, X \succ \xi'; Y}{G|\, X \succ \xi \vee \xi'; Y}$$

$$(\wedge \succ) \qquad \frac{G|\, X; \xi \succ Y}{G|\, X; \xi \wedge \xi' \succ Y} \qquad \frac{G|\, X; \xi' \succ Y}{G|\, X; \xi \wedge \xi' \succ Y}$$

$$(\succ \wedge) \qquad \frac{G|\, X \succ \xi; Y \quad G|\, X \succ \xi'; Y}{G|\, X \succ \xi \wedge \xi'; Y}$$

$$(\to\succ) \qquad \frac{G|\, X_1 \succ \xi; Y_1 \quad G|\, X_2; \xi' \succ Y_2}{G|\, X_1, X_2; \xi \to \xi' \succ Y_1, Y_2}$$

$$(\succ\to) \qquad \frac{G|\, X; \xi \succ \xi'; Y}{G|\, X \succ \xi \to \xi'; Y}$$

2.2 Fibring sin restricciones de cálculos de hipersecuentes conmutativos

Aprovechando el marco formal para definir cálculos de hipersecuentes descripto en la sección anterior, estamos en condiciones, ahora, de combinar dichos sistemas de prueba. El método de combinación aquí propuesto es conocido en la literatura como fibring (categorial) (ver [33, 55]). Como vimos en la Sección 1.1.4 para el caso de secuentes, el fibring categorial puede ser realizado de dos modos (relacionados): el más simple, denominado *fibring sin restricciones* consiste de unir las reglas de inferencias de los dos sistemas que están siendo combinados, donde las reglas deben ser reescritas en el lenguaje generado por la libre combinación de los símbolos de ambos sistemas. En términos formales, este es el coproducto de ambos sistemas, en la categoría en la que los sistemas están presentados. En la Sección 2.5 mostraremos el segundo (y más general) modo de fibring categorial, denominado *fibring con restricciones* en el cual algunos conectivos de los sistemas a ser combinados son compartidos en el sistema resultante.

Previamente a la definición del fibring sin restricciones, es necesario introducir algunos conceptos y mostrar algunos resultados. Adaptando las definiciones de [21] descriptas en la Sección 1.1.3, tenemos:

Definición 2.2.1 *Dadas las sustituciones* σ, σ' *e instanciaciones* ϱ, ϱ' *sobre* C*, el producto* $(\sigma, \varrho) \cdot (\sigma', \varrho')$ *está dado por*

$$(\sigma, \varrho) \cdot (\sigma', \varrho') = (\sigma \cdot \sigma', (\varrho \cdot \varrho')_\sigma)$$

donde $\sigma \cdot \sigma'$ *es la sustitución sobre* C *dada por* $\sigma \cdot \sigma'(\xi) = \hat{\sigma}(\sigma'(\xi))$ *y* $(\varrho \cdot \varrho')_\sigma$ *es la instanciación sobre* C *dada por*

$$(\varrho \cdot \varrho')_\sigma(X) = (\{X\}^{\varrho'}_{\mathcal{X}})^{\varrho}_{\mathcal{X}} \cup (\{X\}^{\varrho'}_{\mathcal{X}})^{\varrho}_{L(C)} \cup \hat{\sigma}(\{X\}^{\varrho'}_{L(C)}).$$

La demostración del siguiente resultado es directa:

Proposición 2.2.2 *Sean* σ, σ' *sustituciones sobre* C *y sean* ϱ, ϱ' *instanciaciones sobre* C*. Entonces, para todo* $s \in Seq(C)$*,*

$$[(\sigma, \varrho) \cdot (\sigma', \varrho')](s) = (\sigma, \varrho)((\sigma', \varrho')(s)).$$

Con el objeto de considerar variables de tipo 3 introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2.3 *Dadas las sustituciones* σ, σ'*, instanciaciones* ϱ, ϱ' *e instanciaciones de secuentes* λ, λ' *sobre* C*, el producto* $(\sigma, \varrho, \lambda) \cdot (\sigma', \varrho', \lambda')$ *está dado por*

$$(\sigma, \varrho, \lambda) \cdot (\sigma', \varrho', \lambda') = (\sigma \cdot \sigma', (\varrho \cdot \varrho')_\sigma, (\lambda \cdot \lambda')_{\sigma\varrho})$$

donde $\sigma \cdot \sigma'$ y $(\varrho \cdot \varrho')_\sigma$ son como en la Definición 2.2.1; y $(\lambda \cdot \lambda')_{\sigma\varrho}$ es la instanciación de secuentes dada por

$$(\lambda \cdot \lambda')_{\sigma\varrho}(H) = (\{H\}^{\lambda'}_{\mathfrak{H}})^{\lambda}_{\mathfrak{H}} \cup (\{H\}^{\lambda'}_{\mathfrak{H}})^{\lambda}_{Seq(C)} \cup (\sigma, \varrho)(\{H\}^{\lambda'}_{Seq(C)}).$$

Utilizando la Proposicón 2.2.2 no es difícil probar el siguiente resultado.

Proposición 2.2.4 *Sean σ, σ' sustituciones sobre C, sean ϱ, ϱ' instanciaciones sobre C y sean λ, λ' instanciaciones de secuentes sobre C. Entonces,para todo $h \in HSeq(C)$,*

$$[(\sigma, \varrho, \lambda) \cdot (\sigma', \varrho', \lambda')](h) = (\sigma, \varrho, \lambda)((\sigma', \varrho', \lambda')(h)).$$

La siguiente proposición será de mucha utilidad.

Proposición 2.2.5 *Sea $h_1 \dots h_n$ una derivación de h en $\mathcal{A}$ a partir de Υ. Entonces, para toda terna $(\sigma, \varrho, \lambda)$, la secuencia $(\sigma, \varrho, \lambda)(h_1) \dots (\sigma, \varrho, \lambda)(h_n)$ es una derivación de $(\sigma, \varrho, \lambda)(h)$ en $\mathcal{A}$ a partir de $(\sigma, \varrho, \lambda)(\Upsilon)$.*

Dem. Por inducción sobre n, teniendo en cuenta la Definición 2.1.6 y la Proposición 2.2.4. ■

La demostración del siguiente resultado no es difícil. En particular, el inciso (i) es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.5.

Teorema 2.2.6

(i) Si $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$, entonces $(\sigma, \varrho, \lambda)(\Upsilon) \vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h)$, para toda terna $(\sigma, \varrho, \lambda)$.

(ii) Si $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}_1} h$, entonces $\hat{f}(\Upsilon) \vdash_{\mathcal{A}_2} \hat{f}(h)$, para todo morfismo $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ in **CHC**.

Dem. (ii): Sea $\Upsilon = \{h_1, \ldots, h_n\} \subseteq HSeq(C^1)$. Demostraremos por inducción sobre la longitud l de la derivación de h en $\mathcal{A}_1$ que $\hat{f}(h)$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir de $\hat{f}(\Upsilon) = \{\hat{f}(h_1), \ldots, \hat{f}(h_n)\}$.

Si $l = 1$, entonces tenemos dos casos posibles:

Caso 1: $h = (\sigma, \varrho, \lambda)(g)$ para algún axioma $r = \langle \emptyset, g \rangle \in R_1$, alguna sustitución σ, una instanciación ϱ y una instanciación de secuentes λ sobre C^1. Considere, ahora, la sustitución $\sigma' : \Xi \to L(C^2)$, la instanciación $\varrho' : \mathcal{X} \to \mathcal{P}_{fin}(L(C^2) \cup \mathcal{X})$ y la instanciación de secuentes $\lambda' : \mathfrak{H} \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C))$ tales que $\sigma' := \hat{f} \circ \sigma$, $\varrho' = \hat{f} \circ \varrho$ y $\lambda' = \hat{f} \circ \lambda$. Entonces,

$$\hat{f}((\sigma, \varrho, \lambda)(g)) = (\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(g))$$

Como r es un axioma en R_1 y f es un morfismo se tiene que $\hat{f}(g)$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir del conjunto vacío. Por la Proposición 2.2.5, tenemos que $(\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(g))$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir del conjunto vacío, i.e., $\hat{f}((\sigma, \varrho, \lambda)(g)) = \hat{f}(h)$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir del conjunto vacío, y por lo tanto, $\hat{f}(h)$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir de $\hat{f}(\Upsilon)$.

Caso 2: $h = h_i$ para algún $1 \leq i \leq n$. En este caso la demostración es obvia.

Supongamos ahora que el lema es verdadero para todo $l \leq m$, y sea

$$k_1 \ldots k_{m+1}$$

una derivación de h en $\mathcal{A}_1$ a partir Υ de longitud $m+1$. Entonces, tenemos tres casos para analizar. El caso 1 y el caso 2 son análogos a los tratados anteriormente. Analicemos el caso 3.

Caso 3: Existe una regla de inferencia de chc $r = \langle \{g_1, \ldots, g_k\}, g \rangle$ en R_1, una sustitución σ y una instanciación ϱ y una instanciación de secuentes λ sobre C^1 tales que $(\sigma, \varrho, \lambda)(g_j) \in \{k_1, \ldots, k_m\}$ para todo $1 \leq j \leq k$ y $(\sigma, \varrho, \lambda)(g) = h = k_{m+1}$.

Observemos que $(\sigma, \varrho, \lambda)(g_j)$ es derivable en $\mathcal{A}_1$ a partir de Υ, para cada $1 \leq j \leq k$, mediante una derivación de longitud menor o igual que m. Por hipótesis inductiva, (*) $\hat{f}((\sigma, \varrho, \lambda)(g_j))$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir de $\hat{f}(\Upsilon)$. Consideremos, como antes,la sustitución $\sigma' : \Xi \to L(C^2)$, la instanciación $\varrho' : \mathcal{X} \to \mathcal{P}_{fin}(L(C^2) \cup \mathcal{X})$ y la instanciación de secuentes $\lambda' : \mathfrak{H} \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C))$ tales que $\sigma' = \hat{f} \circ \sigma$, $\varrho' = \hat{f} \circ \varrho$ y $\lambda' = \hat{f} \circ \lambda$. Entonces,

$$\hat{f}((\sigma, \varrho, \lambda)(k)) = (\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(k))$$

para cualquier hipersecuente k. En particular,

$$\hat{f}(h) = \hat{f}(k_{m+1}) = \hat{f}((\sigma, \varrho, \lambda)(g)) = (\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(g)).$$

Como $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ es un morfismo en **CHC** y r es una regla en $\mathcal{A}_1$, entonces el hipersecuente conmutativo $(\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(g))$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir de

$$\{(\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(g_1)), \ldots, (\sigma', \varrho', \lambda')(\hat{f}(g_k))\}$$

Luego, por (*), $\hat{f}(h)$ es derivable en $\mathcal{A}_2$ a partir de $\hat{f}(\Upsilon)$. ■

Recordemos de [21] el siguiente resultado:

Proposición 2.2.7 *La categoría* **Sig** *tiene coproductos finitos.*

El coproducto de las signaturas C y C' será denotado por $C \oplus C'$, con las inyecciones canónicas $i : C \to C \oplus C'$ y $i' : C' \to C \oplus C'$.

El fibring (sin restricciones) de cálculos de hipersecuentes se define como es esperado:

Definición 2.2.8 *Sean $\mathcal{A} = \langle C, R \rangle$ y $\mathcal{A}' = \langle C', R' \rangle$ dos chc's. El fibring (sin restricciones) de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ es el cálculo de hipersecuentes conmutativo $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}' = \langle C, R \rangle$ donde:*

- $C = C \oplus C'$,
- $R = \{\hat{i}(r) : r \in R\} \cup \{\hat{i'}(r) : r \in R\}$,

La caracterización del fibring sin restricciones como un coproducto puede ser probado sin dificultad.

Proposición 2.2.9 *Sean $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ y $\mathcal{A}' = \langle C', R'\rangle$ dos chc's. Entonces, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}'$ es el coproducto en* **CHC** *de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ con inyecciones canónicas inducidas por las inyecciones i e i' en* **Sig**.

Dem. Consideremos el cálculo de hipersecuentes conmutativos $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 = \langle C, R\rangle$ y consideremos las inyecciones canónicas $i_j : C^j \to C^1 \oplus C^2$, para $j = 1, 2$. Si $r \in R_j$, entonces, por definición, $\hat{i_j}(r) \in R$. Luego, $i_j : \mathcal{A}_j \to \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ es un morfismo en **CHC**, para $j = 1, 2$. Veamos que i_j es el morfismo inclusión de $\mathcal{A}_j$ en $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, para $j = 1, 2$.
Sea $\mathcal{A}' = \langle C', R'\rangle$ un cálculo de hipersecuentes conmutativo tal que existen morfismos $f_j : \mathcal{A}_j \to \mathcal{A}'$ en **CHC** para $j = 1, 2$. Por definición de la categoría **CHC**, tenemos que $f_j : C^j \to C'$ es un morfismo en **Sig**, para $j = 1, 2$. Luego, (*) existe $f : C^1 \oplus C^2 \to C'$ de forma tal que el siguiente diagrama conmuta en **Sig**.

$$\begin{tikzcd}
C^1 \arrow[dr, hook, "i_1"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & C^2 \arrow[dl, hook', "i_2"'] \arrow[ddl, "f_2"] \\
& C^1 \oplus C^2 \arrow[d, "f"] & \\
& C' &
\end{tikzcd}$$

Sea $r \in R$, entonces existe $r_j \in R_j$ tal que $r = \hat{i_j}(r_j)$, para algún $1 \leq j \leq 2$. Entonces, por (*) tenemos que $\hat{f}(r) = \hat{f}(\hat{i_j}(r)) = \hat{f}_j(r)$ es una regla derivada en $\mathcal{A}'$. De esta manera mostramos que $f : \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}'$ hace que el siguiente diagrama conmute en **CHC**.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \arrow[dr, hook, "i_1"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & \mathcal{A}_2 \arrow[dl, hook', "i_2"'] \arrow[ddl, "f_2"] \\
& \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \arrow[d, "f"'] & \\
& \mathcal{A}' &
\end{tikzcd}$$

■

2.3 Reglas admisibles y derivables. La propiedad de eliminación de regla

Recordemos que una regla de inferencia es *admisible* en un sistema formal si el conjunto de los teoremas del sistema es cerrado bajo la aplicación de la regla. En nuestro contexto, podemos establecer la siguiente definición:

Definición 2.3.1 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R \rangle$, y sea $r = \langle \{h_1, \ldots, h_n\}, h \rangle$ una regla de inferencia sobre C (r puede o no pertenecer a R). Decimos que r es una* **regla de inferencia admisible** *de $\mathcal{A}$ si, para toda sustitución σ, instanciación ϱ e instanciación de secuentes λ sobre C, respectivamente, se verifica que*

$$si \vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h_i) \text{ para todo } i = 1, \ldots n, \text{ entonces} \vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h).$$

Es decir que, una regla admisible es tal que sus conclusiones valen siempre que las premisas valgan, y, por lo tanto, la regla puede ser agregada al sistema sin alterar al conjunto de teoremas.

Proposición 2.3.2 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ y sea r una regla de inferencia sobre C. Sea $\mathcal{A}^r = \langle C, R \cup \{r\}\rangle$. Entonces, r es admisible en $\mathcal{A}$ si, y solo si, para todo hipersecuente h sobre C,*

$$\vdash_{\mathcal{A}^r} h \quad \textit{implica} \quad \vdash_{\mathcal{A}} h.$$

Dem. Supongamos que r es admisible en $\mathcal{A}$ y que $\vdash_{\mathcal{A}^r} h$. Consideremos una derivación

$$\pi : \qquad h_1 \dots h_n$$

de h en $\mathcal{A}^r$. Si la regla r no es usada en la derivación, tenemos que $\vdash_{\mathcal{A}} h$ como queríamos. En otro caso, si la regla $r = \langle\{h'_1, \dots, h'_k\}, h'\rangle$ es usada, consideremos la primera aplicación de r en la derivación π. Esa aplicación tiene a $(\sigma, \varrho, \lambda)(h'_i)$ como premisa (para $i = 1, \dots, k$), y a $(\sigma, \varrho, \lambda)(h')$ como conclusión, para alguna terna $(\sigma, \varrho, \lambda)$. Pero entonces, $\vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h'_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$ y por eso $\vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h')$, puesto que r es admisible. Por lo tanto, la primera aplicación de r en la derivación π puede ser reemplazada por una derivación en $\mathcal{A}$. Usando el mismo procedimiento con cualquier otra aplicación de r en π se obtiene una derivación de h en $\mathcal{A}$, probando de este modo que $\vdash_{\mathcal{A}} h$.
Recíprocamente, supongamos que para todo hipersecuente h sobre C,

$$\vdash_{\mathcal{A}^r} h \quad \text{implica} \quad \vdash_{\mathcal{A}} h,$$

donde $r = \langle\{h'_1, \dots, h'_k\}, h'\rangle$. Asumamos que $\vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h'_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$. Entonces, claramente $\vdash_{\mathcal{A}^r} (\sigma, \varrho, \lambda)(h'_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$. Puesto que r es una regla de $\mathcal{A}^r$, se tiene que $\vdash_{\mathcal{A}^r} (\sigma, \varrho, \lambda)(h')$. Entonces, por hipótesis, $\vdash_{\mathcal{A}} (\sigma, \varrho, \lambda)(h')$ y, por lo tanto, r es admisible en $\mathcal{A}$. ■

Claramente, si $r \in R$ entonces r es admisible en $\langle C, R\rangle$. Una noción relacionada es la de *regla derivable*. Una regla r se dice que es *derivable* en un chc si sus conclusiones pueden ser derivadas a partir de sus premisas utilizando las restantes reglas del sistema. Formalmente:

Definición 2.3.3 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc, y sea $r = \langle \Upsilon, h\rangle$ una regla de inferencia sobre C tal que $r \notin R$. Decimos que r es una* regla de inferencia derivable de *$\mathcal{A}$ si $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$.*

En adelante, si $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$, denotaremos como $\mathcal{A}_r$ al chc $\langle C, R \setminus \{r\}\rangle$.

Observación 2.3.4
(i) Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un morfismo en **CHC** *y $r \in R$, entonces se verifica que $\hat{f}(r)$ es una regla de inferencia derivable de $\mathcal{A}'$.*
(ii) Toda regla derivable es admisible, pero la recíproca no vale.

Recordemos que el *teorema de eliminación de corte* (Hauptsatz) establece que cualquier sentencia que posee una demostración en el cálculo de secuentes (o cálculo de hipersecuentes) que hace uso de la regla de corte, también posee una demostración libre de corte, esto es, una demostración que no hace uso de la regla de corte. Fue mostrado originalmente por G. Gentzen (ver [36]) para los sistemas **LJ** y **LK** que formalizan a la lógica intuicionista y clásica, respectivamente. Es bien sabido que en un cálculo de secuentes que tiene un teorema de eliminación de corte, la regla de corte es admisible en el cálculo que se obtiene removiendola. Teniendo esto en mente, introducimos la siguiente definición:

Definición 2.3.5 *(Propiedad de eliminación de regla) Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc, y sea r una regla en R. Diremos que $\mathcal{A}$* admite la eliminación de la regla r *(o simplemente que $\mathcal{A}$ tiene la* propiedad de r-eliminación*) si: cada vez que $h \in HSeq(C)$ tiene una demostración en $\mathcal{A}$, entonces existe una demostración de h en $\mathcal{A}_r$.*

Entonces, por la Poposición 2.3.2 tenemos que:

Corolario 2.3.6 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc, y sea r una regla en R. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) r es admisible en $\mathcal{A}_r$,

(ii) $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de r-eliminación.

Una bien conocida generalización del teorema de eliminación de corte es el *teorema de eliminación de corte fuerte* (ver [37], [38] y [6]). En nuestro contexto, esta propiedad puede ser establecida como sigue: $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ tiene el teorema de eliminación de corte fuerte si, siempre que $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$, existe una derivación $h_1 \ldots h_n$ of h en $\mathcal{A}$ a partir de Υ en la cual toda aplicación de la regla de corte es hecha sobre una fórmula que ocurre en algún hipersecuente de Υ. Claramente, si $\Upsilon = \emptyset$ entonces recuperamos la noción de eliminación de corte.
Daremos un paso más en la generalización de la eliminación de corte.

Definición 2.3.7 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc, y sea r una regla en R. Diremos que $\mathcal{A}$* admite la eliminación plena de la regla *r (o simplemente que $\mathcal{A}$ tiene la* propiedad de eliminación plena de *r) si para toda derivación de h en $\mathcal{A}$ a partir de Υ, existe una derivación de h en $\mathcal{A}_r$ a partir Υ.*

Claramente, si $\mathcal{A}$ admite la eliminación plena de r entonces admite la eliminación de r: basta tomar $\Upsilon = \emptyset$. La recíproca no vale.
El siguiente resultado es la contrapartida al Corolario 2.3.6 en términos de la noción de derivabilidad.

Proposición 2.3.8 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R \rangle$ un chc, y sea r una regla en R. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{A}$ admite la eliminación plena de r,

(ii) r es derivable en $\mathcal{A}_r$.

Dem. Es rutina. ■

2.4 Características de preservación por fibring

En esta sección exploraremos la preservación por fibring de algunas propiedades. En particular, veremos que la propiedad de r-eliminación no es preservada por fibring de cálculos de hipersecuentes conmutativos, provisto que uno (o ambos) de los cálculos tengan dicha propiedad. Además, utilizando la noción de traducción propuesta en [15], seremos capaces de traducir derivaciones de un cálculo dado en otro. A partir de esto, probaremos un resultado de preservación de la propiedad de interpolación de Craig por fibring de cálculos de hipersecuentes conmutativos.

La propiedad de eliminación de regla no es preservada por fibring de cálculos de hipersecuentes conmutativos dado que solo uno de los cálculos tenga dicha la propiedad: por ejemplo, ocurre con la propiedad de eliminación de corte. Para corroborar este hecho, es suficiente analizar el siguiente ejemplo encontrado en la literatura.

Ejemplo 2.4.1 *A. Avron (en [5]) construyó una serie de cálculos estilo Gentzen para algunas lógicas intermedias incluyendo a la lógica de Dummett LC. Presentaremos esos cálculos en nuestro contexto.*

El sistema $GLCW_{\rightarrow}$ *se define como sigue:* $GLCW_{\rightarrow} = \langle C^{\rightarrow}, R_{\rightarrow} \rangle$, *donde la signatura* $C^{\rightarrow}$ *es* $\{\rightarrow\}$ *y el conjunto de reglas* R *tiene solo: el axioma, las reglas* $(\rightarrow\succ)$, $(\succ\rightarrow)$, *las reglas estructurales de contracción interna y externa; y el debilitamiento tal como en el Ejemplo 2.1.9, conjuntamente con las siguientes versiones de las reglas de splitting y corte.*

$$(S\succ)\ \frac{G|X, Y \succ \xi}{G|\ X \succ \xi|\ Y \succ \xi} \qquad\qquad (Cut)\ \frac{G_1|X_1 \succ \xi; Y_1 \qquad G_2|X_2; \xi \succ Y_2}{G_1|G_2|\ X_1, X_2 \succ Y_1, Y_2}$$

Se demostró que $GLCW_{\rightarrow}$ *tiene la propiedad de eliminación de corte, esto es:* $GLCW_{\rightarrow}$ *y* $(GLCW_{\rightarrow})_{(Cut)}$ *prueban los mismos hipersecuentes (sin premisas).*

Después de esto, se analizó el efecto de agregar distintos conectivos estandares y sus asociadas reglas lógicas a $GLCW_{\rightarrow}$. *Siguiendo el procedimiento estandar para manipular la negación en el contexto de la lógica intuicionista, primeramente se agregó la constante proposicional al lenguaje junto con el axioma*

$$(N) \quad \bot \succ \xi$$

y se definió $\neg\varphi$ *como* $\varphi \rightarrow \bot$. *Es decir que*

$$GLCW_{\overset{\sim}{\rightarrow}} = \langle C^{\overset{\sim}{\rightarrow}}, R_{\overset{\sim}{\rightarrow}} \rangle = \langle \{\rightarrow, \bot\}, R_{\rightarrow} \cup \{(N)\} \rangle;$$

y se demostró que $GLCW_{\overset{\sim}{\rightarrow}}$ *también goza de la propiedad de eliminación de corte.*

De un modo análogo, se adiciona la disyunción a $GLCW_{\overset{\sim}{\rightarrow}}$ *junto con la versión monoconcluida (single-conclusion) de las reglas* $(\vee\succ)$ *y* $(\succ\vee)$ *del Ejemplo 2.1.9, generando el sistema* $GLCW$, *esto es:*

$$GLCW = \langle C^{\overset{\sim}{\rightarrow},\vee}, R_{\overset{\sim}{\rightarrow},\vee} \rangle = \langle \{\rightarrow, \bot, \vee\}, R_{\overset{\sim}{\rightarrow}} \cup \{(\vee\succ), (\succ\vee)\} \rangle.$$

Al igual que en los casos anteriores, el sistema resultante $GLCW$ *tiene la propiedad de eliminación de corte.*

Para finalizar este proceso, se agrega la conjunción a GLCW junto con las versiones monoconcluidas de las reglas ($\wedge \succ$) *y* ($\succ \wedge$) *del Ejemplo 2.1.9, dando lugar al sistema* GLC^*. *Es aquí donde ocurre la sorpresa:* GLC^* *no tiene la propiedad de eliminación de corte. En efecto, la siguiente secuencia de hipersecuentes es una demostración de* $\{(\xi \succ \xi'), (\xi' \succ \xi)\}$ *la cual no admite eliminación de corte (ver [5]).*

(1)	$\xi \succ \xi$	*Axioma*
(2)	$\xi' \succ \xi'$	*Axioma*
(3)	$\xi, \xi' \succ \xi \wedge \xi'$	*(1), (2) y* ($\succ \wedge$)
(4)	$\{(\xi \succ \xi \wedge \xi'), (\xi' \succ \xi \wedge \xi')\}$	*(3) 1* ($S \succ$)
(5)	$\xi \wedge \xi' \succ \xi$	*(1) y* ($\wedge \succ$)
(6)	$\{(\xi \succ \xi \wedge \xi'), (\xi' \succ \xi)\}$	*(4), (5) y corte*
(7)	$\xi \wedge \xi' \succ \xi'$	*(2) y* ($\wedge \succ$)
(8)	$\{(\xi \succ \xi'), (\xi' \succ \xi)\}$,	*(6), (7) y corte*

Entonces, si definimos el cálculo $Conc$ como sigue:

$$Conc = \langle \{\wedge\}, \{(\wedge \succ), (\succ \wedge), (Cut)\} \rangle$$

(usando una vez más las reglas del Ejemplo 2.1.9) es claro que

$$GLC^* = GLCW \oplus Conc,$$

donde $GLCW$ admite eliminación de corte pero GLC^* $Conc$ no lo hacen. Esto prueba la siguiente proposición.

Proposición 2.4.2 *En general, el fibring sin restricciones de cálculos de hipersecuentes conmutativos no preserva la propiedad de eliminación de corte, dado que solo uno de los cálculos tenga esta meta-propiedad.*

Sospechamos que lo mismo sucede si consideramos la eliminación de corte fuerte. Notemos que *Conc* no admite eliminación de corte. Un caso más interesante es cuando ambos sistemas admiten la r-eliminación. Sin embargo, no es difícil verificar que el sistema obtenido no necesariamente admite la r-eliminación. En efecto, consideremos el cálculo de secuentes para el fragmento multiplicativo de la lógica abeliana y el cálculo de secuentes del fragmento aditivo de la lógica lineal (ver [49]). Ambos cálculos adminten la eliminación de corte pero el cálculo resultante del fibring entre ellos no la admite. Luego,

Proposición 2.4.3 *En general, el fibring sin restricciones de cálculos de hipersecuentes conmutativos no preserva la propiedad de eliminación de corte, dado que ambos cálculos tengan esta meta-propiedad.*

Observación 2.4.4 *Notemos que, como aún no estamos compartiendo conectivos en el fibring, y como r está presente en ambos cálculos, entonces r debe ser una regla sin ocurrencia de conectivos, esto es, una regla estructural como, por ejemplo, el corte o la contracción.*

Observación 2.4.5 *Pueden existir ejemplos mucho más sencillos que los anteriores pero creemos que estos son interesantes.*

Por otro lado, las cosas cambian cuando consideramos la propiedad de r-eliminación plena. De la Proposición 2.3.8 tenemos:

Proposición 2.4.6 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc. Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de r-eliminación plena, también la tiene $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}'$, para cualquier chc $\mathcal{A}' = \langle C', R'\rangle$.*

Finalizaremos esta sección mostrando un resultado de preservación de una versión débil de la propiedad de interpolación de Craig mediante el fibring de cálculos de hipersecuentes conmutativos

Los siguientes dos resultados son herramientas para codificar derivaciones de un cálculo en una extensión de él, y viceversa. La técnica utilizada para traducir derivaciones está basada en la noción de *goedelización* introducida in [15]:

Definición 2.4.7 *Sean C y C' dos signaturas tales que $C \leq C'$ (i.e., $C_n \subseteq C'_n$ para todo n), y consideremos una goedelización (i.e., una biyección recursiva) $g : L(C') \to \mathbb{N}$. La traducción $\tau_g : L(C') \to L(C)$ es la función definida inductivamente como sigue:*

- $\tau_g(\xi_i) = \xi_{2i+1}$, *para* $\xi_i \in \Xi$;
- $\tau_g(c) = c$, *para* $c \in C_0$;
- $\tau_g(c') = \xi_{2g(c')}$, *para* $c' \in C'_0 \setminus C_0$;
- $\tau_g(c(\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k)) = c(\tau_g(\gamma'_1), \ldots, \tau_g(\gamma'_k))$, *para* $c \in C_k$, $k > 0$ *y* $\gamma'_i \in L(C')$;
- $\tau_g(c'(\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k)) = \xi_{2g(c'(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_k))}$, *para* $c \in C'_k \setminus C_k$, $k > 0$ *y* $\gamma'_i \in L(C')$.

La sustitución $\tau_g^{-1} : \Xi \to L(C')$ es la función definida como

- $\tau_g^{-1}(\xi_{2i+1}) = \xi_i \quad y$
- $\tau_g^{-1}(\xi_{2i}) = g^{-1}(i)$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Denotaremos τ_g^{-1} a la única extensión de τ_g^{-1} a todo $L(C)$. Se puede probar que τ_g y τ_g^{-1} son funciones inversas una de la otra. La función definida como

$$\hat{\tau}_g(A; \Gamma \succ \Delta; B) = (A; \tau_g(\Gamma) \succ \tau_g(\Delta); B)$$

induce a la función $\hat{\tau}_g : \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C')) \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C))$ de un modo natural; y si definimos

$$\hat{\hat{\tau}}_g(\langle \mathcal{H}; \mathcal{S} \rangle) = \langle \mathcal{H}; \hat{\tau}_g(\mathcal{S}) \rangle,$$

esta induce a la función $\hat{\hat{\tau}}_g : \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C')) \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C))$.

Análogamente, definimos $\hat{\tau}_g{}^{-1} : \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C)) \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C'))$ y $\hat{\hat{\tau}}_g{}^{-1}$: $\mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C')) \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C))$.

Observación 2.4.8 *Es fácil verificar que* $\hat{\tau}_g$ *y* $\hat{\tau}_g{}^{-1}$*;* $\hat{\hat{\tau}}_g$ *y* $\hat{\hat{\tau}}_g{}^{-1}$ *son funciones inversas una de la otra, respectivamente.*

Lema 2.4.9 *Sean C y C' dos signaturas tales que $C \leq C'$; y sea $g : L(C') \to \mathbb{N}$ una goedelización.*

(i) Si $\sigma' : \Xi \to L(C')$ es una sustitución sobre C', entonces $\bar{\sigma} : \Xi \to L(C)$ dada por $\bar{\sigma}(\xi) = \tau_g(\sigma'(\xi))$ es una sustitución sobre C tal que $\hat{\bar{\sigma}}(\varphi) = \tau_g(\hat{\sigma}'(\varphi))$ para todo $\varphi \in L(C)$.

(ii) Si $\varrho' : \mathcal{X} \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C'))$ es una instanciación sobre C' y $\hat{\tau}_g : \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C')) \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathcal{X} \cup L(C))$ está definida como antes, entonces la composición $\bar{\varrho} = \hat{\tau}_g \circ \varrho'$ es una instanciación sobre C.

(iii) Si $\lambda' : \mathfrak{H} \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C'))$ es una instanciación de secuentes sobre C' y $\hat{\hat{\tau}}_g : \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C')) \to \mathcal{MP}_{fin}(\mathfrak{H} \cup Seq(C))$ está definida como antes, entonces la composición $\bar{\lambda} = \hat{\hat{\tau}}_g \circ \lambda'$ es una instanciación de secuentes sobre C.

(iv) Con la notación utilizada en los incisos anteriores, Si $h \in HSeq(C)$ entonces

$$\hat{\hat{\tau}}_g((\sigma', \varrho', \lambda')(h)) = (\bar{\sigma}, \bar{\varrho}, \bar{\lambda})(h).$$

Dem. Es una consecuencia inmediata de las definiciones de sustitución, instanciación e instanciación de secuentes, y de la Definición 2.4.7. ■

Ahora estamos en condiciones de codificar derivaciones.

Proposición 2.4.10 *Sean $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ y $\mathcal{A}' = \langle C', R'\rangle$ dos chc's tales que $C \leq C'$ y $R \subseteq R'$, y sea $\Upsilon \cup \{h\} \subseteq HSeq(C')$ tal que $h_1 \dots h_n$ es una derivación h en $\mathcal{A}'$ a partir Υ usando exclusivamente reglas de R. Entonces, $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon) \vdash_{\mathcal{A}} \hat{\hat{\tau}}_g(h)$, para cualquier goedelización $g : L(C') \to \mathbb{N}$. Más aún, $\hat{\hat{\tau}}_g(h_1) \dots \hat{\hat{\tau}}_g(h_n)$ es una derivación de $\hat{\hat{\tau}}_g(h)$ en $\mathcal{A}$ a partir de $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon)$.*

Dem. Usaremos inducción sobre la longitud l de la derivación. Si $l = 1$, entonces tenemos dos posibles casos:

Caso 1: $h_1 \in \Upsilon$ y $h_1 = h$. Entonces, $\hat{\hat{\tau}}_g(h_1) \in \hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon) \subseteq HSeq(C)$ y $\hat{\hat{\tau}}_g(h) = \hat{\hat{\tau}}_g(h_1)$. Por lo tanto, $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon) \vdash_{\mathcal{A}} \hat{\hat{\tau}}_g(h)$.

Caso 2: h_1 es un axioma. Esto es decir que, existe $r \in R$, $r = \langle \emptyset, h'\rangle$, una sustitución σ' sobre C', una instanciación ϱ' sobre C' y una instanciación de secuente λ sobre C' tal que $h_1 = (\sigma', \varrho', \lambda')(h')$. Por inciso (iv) del Lema 2.4.9, $\hat{\hat{\tau}}_g(h_1) = \hat{\hat{\tau}}_g((\sigma', \varrho', \lambda')(h')) = (\bar{\sigma}, \bar{\varrho}, \bar{\lambda})(h')$, donde $\bar{\sigma}$, $\bar{\varrho}$ y $\bar{\lambda}$ son una sustitución, instanciación, e instanciación de secuente, respectivamente, sobre C. Esto significa que $\vdash_{\mathcal{A}} \hat{\hat{\tau}}_g(h)$ y, por lo tanto, $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon) \vdash_{\mathcal{A}} \hat{\hat{\tau}}_g(h)$.

Supongamos ahora que la afirmación vale para derivaciones de longitud $l = m$ y veamos que lo mismo ocurre para $l = m + 1$.

Sea

$$h_1 \dots h_m h_{m+1}$$

una derivación de h en $\mathcal{A}'$ a partir de Υ. Entonces, $\hat{\hat{\tau}}_g(h_1) \dots \hat{\hat{\tau}}_g(h_m)$ es una derivación de $\hat{\hat{\tau}}_g(h_m)$ en $\mathcal{A}$ a partir de $\hat{\tau}_g(\Upsilon)$, por la hipótesis inductiva.
Si h_{m+1} es una axioma o pertenece a Υ, el tratamiento es como antes.
Por otro lado, supongamos que existe $r \in R$, $r = \langle \{g_1, \dots, g_k\}, g' \rangle$, una sustitución σ', una instanciación ϱ' y una instanciación de secuente λ' sobre C' tal que $(\sigma', \varrho', \lambda')(g_j) \in \{h_1, \dots, h_m\}$, para $1 \leq j \leq k$, y $(\sigma,' \varrho', \lambda')(g') = h_{m+1} = h$. Entonces, $\hat{\hat{\tau}}_g((\sigma, \varrho, \lambda)(g_j)) = (\bar{\sigma}, \bar{\varrho}, \bar{\lambda})(g_j) \in \{\hat{\hat{\tau}}_g(h_1), \dots, \hat{\hat{\tau}}_g(h_m)\}$, para $1 \leq j \leq k$, y $\hat{\hat{\tau}}_g((\sigma', \varrho', \lambda')(g')) = (\bar{\sigma}, \bar{\varrho}, \bar{\lambda})(g') = \hat{\hat{\tau}}_g(h_{m+1}) = \hat{\hat{\tau}}_g(h)$, por el inciso (iv) del Lema 2.4.9. Por la hipótesis inductiva, podemos afirmar que

$$\hat{\hat{\tau}}_g(h_1) \dots \hat{\hat{\tau}}_g(h_m) \hat{\hat{\tau}}_g(h_{m+1})$$

es una derivación de $\hat{\hat{\tau}}_g(h)$ en $\mathcal{A}$ a partir de $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon)$. ■

Y recíprocamente:

Proposición 2.4.11 *Sean $\mathcal{A} = \langle C, R \rangle$ y $\mathcal{A}' = \langle C', R' \rangle$ dos chc's tales que $C \leq C'$ y $R \subseteq R'$, y sea $\Upsilon \cup \{h\} \subseteq HSeq(C)$ tal que $h_1 \dots h_n$ es una derivación de h en $\mathcal{A}$ a partir de Υ. Entonces, ${\hat{\hat{\tau}}_g}^{-1}(h_1) \dots {\hat{\hat{\tau}}_g}^{-1}(h_n)$ es una derivación de ${\hat{\hat{\tau}}_g}^{-1}(h)$ en $\mathcal{A}'$ a partir de ${\hat{\hat{\tau}}_g}^{-1}(\Upsilon)$, para cualquier goedelización $g : L(C') \to \mathbb{N}$.*

Dem. Es similar a la demostración anterior. ■

Como aplicación de estos dos últimos resultados, será demostrado que haciendo el fibring de dos chc's que satisfacen la propiedad de interpolación de Craig, el chc obtenido satisface una versión más débil de esta propiedad.

Dados dos hipersecuentes h, denotaremos con $Var(h)$ al conjunto de todas las variables esquema que ocurren en fórmulas en h. Si Υ es un conjunto de hipersecuentes, entonces $Var(\Upsilon)$ denota al subconjunto $\bigcup_{h\in\Upsilon} Var(h)$ de Ξ.

Definición 2.4.12 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc. Decimos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de interpolación de Craig (CIP) si, para todo $\Upsilon \cup \{h\} \subseteq HSeq(C)$ tal que $Var(\Upsilon) \cap Var(h) \neq \emptyset$, si $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$, entonces existe un conjunto $\Upsilon' \subseteq HSeq(C)$ donde $Var(\Upsilon') \subseteq Var(\Upsilon) \cap Var(h)$, $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h'$ para todo $h' \in \Upsilon'$, y $\Upsilon' \vdash_{\mathcal{A}} h$.*

Definición 2.4.13 *(Propiedad de interpolación de Craig débil) Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un chc. Decimos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de interpolación de Craig débil (WCIP) si, para todo $\Upsilon \cup \{h\} \subseteq HSeq(C)$ tal que $Var(\Upsilon) \cap Var(h) \neq \emptyset$, si $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$, entonces existe un conjunto $\Upsilon' \subseteq HSeq(C)$ y un conjunto $V \subseteq Var(\Upsilon) \cup Var(h)$ tal que $Var(\Upsilon') \subseteq V \cap Var(h)$, $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h'$ para todo $h' \in \Upsilon'$, y $\Upsilon' \vdash_{\mathcal{A}} h$.*

Observemos que, si $V \subseteq Var(\Upsilon)$ entonces el interpolante de Craig débil Υ' de la última definición es de hecho el interpolante de Craig para $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}} h$.

Lema 2.4.14 *Sean C y C' dos signaturas tales que $C \leq C'$, y sea $g : L(C') \to \mathbb{N}$ como en la Definición 2.4.7. Sea $\alpha, \beta \in L(C)$ tal que $Var(\alpha) \subseteq Var(\beta)$. Entonces, $Var(\tau_g^{-1}(\alpha)) \subseteq Var(\tau_g^{-1}(\beta))$.*

Dem. Directo, a partir de la Definición 2.4.7. ■

Teorema 2.4.15 *Sean $\mathcal{A}_i = \langle C_i, R_i\rangle$ dos chc's que satisfacen CIP, para $i = 1, 2$. Entonces, $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ tiene la WCIP.*

Dem. Asumamos que $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} h$, donde $Var(\Upsilon) \cap Var(h) \neq \emptyset$. Consideremos, sin pérdida de generalidad, una derivación $h_1 \ldots h_k h_{k+1} \ldots h_n$ de h en $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ a partir Υ tales que $h_{k+1} \ldots h_n$ solo contiene aplicaciones de las reglas de $i_1(R_1)$ y $h_j \notin \Upsilon$ para $k+1 \leq j \leq n$. Sea $\bar{\Upsilon} = \{h_i : 1 \leq i \leq k \text{ y } h_i \notin \Upsilon\}$. Entonces, $h_1 \ldots h_k h_{k+1} \ldots h_n$ es una derivación de h en $i_1(\mathcal{A}_1) = \langle i_1(C_1), i_1(R_1) \rangle$ a partir de $\Upsilon \cup \bar{\Upsilon}$. Considere una sustitución σ sobre $C_1 \oplus C_2$ tal que $\sigma(\xi) \in Var(\Upsilon)$ siempre que $\xi \notin Var(\Upsilon) \cup Var(h)$, y $\sigma(\xi) = \xi$, en otro caso. Sean ϱ y λ la instanciación identidad y la instanciación de secuente identidad sobre $C_1 \oplus C_2$, respectivamente. Por la Proposición 2.2.5, el secuente $(\sigma, \varrho, \lambda)(h_1) \ldots (\sigma, \varrho, \lambda)(h_n)$ es una derivación de h en $i_1(\mathcal{A}_1)$ a partir $\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})$. Esto es, $\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon}) \vdash_{i_1(\mathcal{A}_1)} h$. Notemos además que $Var((\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})) \subseteq Var(\Upsilon) \cup Var(h)$. Sea $g : L(C_1 \oplus C_2) \to \mathbb{N}$ y $\tau_g : L(C_1 \oplus C_2) \to L(C_1)$ como en la Definición 2.4.7. Por la Proposición 2.4.10, $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})) \vdash_{\mathcal{A}_1} \hat{\hat{\tau}}_g(h)$. Puesto que $\mathcal{A}_1$ tiene la CIP por hipótesis, existe $\Upsilon' \subseteq HSeq(C_1)$ con $Var(\Upsilon') \subseteq Var(\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon}))) \cap Var(\hat{\hat{\tau}}_g(h))$ tal que $\hat{\hat{\tau}}_g(\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})) \vdash_{\mathcal{A}_1} \Upsilon'$ y $\Upsilon' \vdash_{\mathcal{A}_1} \hat{\hat{\tau}}_g(h)$. Por la Proposición 2.4.11 y la Observación 2.4.8, $\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon}) \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} \hat{\hat{\tau}}_g^{\,-1}(\Upsilon')$ y $\hat{\hat{\tau}}_g^{\,-1}(\Upsilon') \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} h$. Puesto que $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})$ por construcción de $(\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})$, se tiene que $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} \hat{\hat{\tau}}_g^{\,-1}(\Upsilon')$ y $\hat{\hat{\tau}}_g^{\,-1}(\Upsilon') \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} h$. Por el Lema 2.4.14, $Var(\hat{\hat{\tau}}_g^{\,-1}(\Upsilon')) \subseteq V \cap Var(h)$, donde $V = Var(\Upsilon \cup (\sigma, \varrho, \lambda)(\bar{\Upsilon})) \subseteq Var(\Upsilon) \cup Var(h)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ tiene la WCIP. ■

Observación 2.4.16 *Es importante notar que, bajo las hipótesis del Teorema 2.4.15, si existe una derivación de h en $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ a partir de Υ tal que las variables esquema en h que no ocurren en $Var(\Upsilon)$ son usadas exclusivamente en axiomas y reglas de solo uno de los cálculos $i_j(\mathcal{A}_j)$ para $j = 1, 2$, entonces $\Upsilon \vdash_{\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2} h$ tiene un interpolante en el sentido de la Definición 2.4.12.*

Por otro lado, es fácil adaptar las definiciones y demostraciones de [16] y entonces obtener la preservación de CIP mediante el fibring de chc's dado que uno de los cálculos tiene CIP y existe un puente *(*bridge*) entre el fibring y tal cálculo (cf. [16]).*

2.5 Extensión al fibring con restricciones

En la Sección 2.2 introdujimos la noción de fibring sin restricciones en **CHC**, esto es, la combinación de dos chc's que no comparten ningún conectivo. Sin embargo, frecuentemente es necesario combinar lógicas en las cuales existen conectivos en común. Es en este momento en el que aparece la restricción.

En esta sección introduciremos la noción de *fibring con restricciones* dentro de la categoría **CHC**, exhibiendo dos construcciones distintas. De esta forma, la noción de fibring introducida en la sección anterior aparecerá como un caso particular de la noción de fibring definida aquí.

Primera construcción

La construcción que realizaremos es análoga a la exhibida en [55] y [21].

Introduzcamos el *funtor olvido* $N : \mathbf{CHC} \to \mathbf{Sig}$ de la manera natural: $N(\langle C, R\rangle) = C$ y $N(h) = h$ si h es un morfismo en **CHC**.

Recordemos que si $F : \mathcal{C} \to D$ es un funtor, un *levantamiento cocartesiano* de un morfismo $f : F(c) \to d$ en $\mathcal{D}$, es un morfismo $f^* : c \to c'$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(f^*) = f$ y que satisface la siguiente propiedad universal: Para cada morfismo $g : c \to c''$ en $\mathcal{C}$, y todo morfismo $h : d \to F(c'')$ en $\mathcal{D}$ que verifica $h \circ f = F(g)$, existe un único morfismo $h^* : c' \to c''$ en $\mathcal{C}$ tal que $h^* \circ f^* = g$. F se dice una *cofibración* si todo $f : F(c) \to d$ en $\mathcal{D}$ admite un levantamiento cocartesiano.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "g"'] & c' \arrow[dl, "h^*"] \\ c'' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F(g)"'] & d \arrow[d, "h"] \\ & c'' \end{tikzcd}$$

Proposición 2.5.1 *El funtor olvido N es una cofibración.*

Dem. Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ un c.h.c. y sea $f : N(\mathcal{A}) \to C'$ un morfismo de signaturas. Consideremos el c.h.c. $\mathcal{A}' = \langle C', R'\rangle$ tal que

$$R' := \hat{f}(R) = \{\hat{f}(r) : r \in R\}.$$

Definimos el morfismo $f^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ como $f^* = f$ en **CHC**. Sean $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$, $\mathcal{A}'' = \langle C'', R''\rangle$ un morfismo en **CHC**; y $h : C' \to N(\mathcal{A}'')$ un morfismo en **Sig** tales que $h \circ f = N(g)$. Entonces, tomando $h^* : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ en **CHC** como $h^* = h$, es claro que $N(h^*) = h$ y $h^* \circ f^* = h \circ f = N(g) = g$. ■

Dado un morfismo de signaturas $h : C \to C'$ y dado el chc $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ definido sobre C, denotaremos con $h_N(\mathcal{A})$ al codominio del levantamiento cocartesiano de h a través de N. Esto es, $h_N(\mathcal{A}) = \langle C', R'\rangle$ donde R' es como en la demostración de la Propiedad 2.5.1.
Un morfismo de signaturas $h : C \to C'$ se dice *literal* si, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $c \in C_n$, existe $c' \in C'_n$ tal que $h(c) = c'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Definición 2.5.2 *Sean C' y C'' dos signaturas. Un sharing constraint sobre C' y C'' es un diagrama $\mathcal{G}$ en* **Sig** *de la forma*

$$C' \xleftarrow{h'} \bar{C} \xrightarrow{h''} C''$$

para alguna signatura $\bar{C}$, y algunos monomorfismos h' y h'' tales que ambos son literales. El pushout del diagrama $\mathcal{G}$, si existe, será denotado $C' \overset{\mathcal{G}}{\oplus} C''$.

Observe que, al ser monomorfismos, h' y h'' son funciones inyectivas.
Es bien sabido que un pushout puede ser obtenido como un coproducto seguido de un coecualizador, siempre que estas construcciones existan en la categoría en cuestión.
Entonces, dado un sharing constraint $\mathcal{G}$ en **Sig**, considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{C} \arrow[dl, hook', "h'"'] \arrow[dr, hook, "h''"] & \\
C' \arrow[dr, hook, "i'"'] & & C' \arrow[dl, hook', "i''"] \\
 & C' \oplus C'' \arrow[d, "q"] & \\
 & C' \overset{\mathcal{G}}{\oplus} C'' &
\end{tikzcd}$$

donde i' e i'' son las inyecciones canónicas de C' y C'' sobre $C' \oplus C''$, y $C' \overset{\mathcal{G}}{\oplus} C''$ es el codominio del coecualizador q de $i' \circ h'$ y $i' \circ h''$, siempre que exista. Por lo tanto,

$$\langle C' \overset{\mathcal{G}}{\oplus} C'', \{q \circ i', q \circ i''\}\rangle$$

es el pushout de $\mathcal{G}$ en **Sig**. A continuación, veremos que esos coequalizadores existen en **Sig**.

Proposición 2.5.3 *(i) Sea* $C' \xleftarrow{h'} \bar{C} \xrightarrow{h''} C''$ *un sharing constraint en* **Sig** *y sea* $\langle C' \oplus C'', \{i', i''\}\rangle$ *el coproducto de* C' *y* C'' *en* **Sig**. *Entonces,* $i' \circ h'$ *y* $i'' \circ h''$ *son literales.*

(ii) Sean $h, h'; C \to C'$ *morfismos literales en* **Sig**. *Entonces, existe el coecualizador* $\langle C'', \{C' \xrightarrow{h''} C''\}\rangle$ *de* $\bar{C} \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} C'$ *en* **Sig**.

Dem. Es rutina. ∎

Luego, el fibring sin restricciones se define de la siguiente manera:

Definición 2.5.4 *Sean $\mathcal{A}' = \langle C', R' \rangle$ y $\mathcal{A}'' = \langle C'', R'' \rangle$ dos cálculos de hipersecuentes conmutativos, y sea $\mathcal{G}$ un sharing constraint sobre C' y C''. Entonces, su fibring $\mathcal{G}$-restringido por simbolos compartidos es el cálculo de hipersecuentes conmutativo*

$$\mathcal{A}' \overset{\mathcal{G}}{\oplus} \mathcal{A}'' = q_N(\mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}'')$$

donde q es el coecualizador en **Sig** *de $i' \circ h'$ y $i'' \circ h''$.*

Segunda construcción: cálculos cocientes

Sea C una signatura y sea $\equiv \subseteq |C| \times |C|$ una relación de equivalencia sobre $|C|$. Diremos que $\equiv$ es una *congruencia de signatura sobre C* si verifica la siguiente condición:

$$c_1 \equiv c_2 \text{ implica } c_1, c_2 \in C_n, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que $C/\equiv \, = \{C_n/\equiv\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una signatura. El *mapeo canónico* $q : |C| \to L(C/\equiv)$ es la función definida como sigue:

- $q(c) = [c]$, if $c \in C_0$,
- $q(c) = [c](\xi_1, \ldots, \xi_n)$, si $c \in C_n$, para $n \geq 1$

donde $[c]$ denota la clase de equivalencia de c por $\equiv$. Claramente, q es un morfismo $q : C \to C/\equiv$ en **Sig**.

Definición 2.5.5 *Sea $\mathcal{A} = \langle C, R \rangle$ un chc y sea $\equiv$ una congruencia de signatura sobre C. El* cálculo de hipersecuentes cociente *(o simplemente el* cálculo cociente*) determinado* *por $\equiv$ es el chc $\mathcal{A}/\!\equiv\; = \langle C/\!\equiv, R'\rangle$ tal que*

$$R' = \{\hat{q}(r) : r \in R\}$$

Es fácil verificar que $\mathcal{A}/\!\equiv$ es, en efecto, un cálculo de hipersecuentes conmutativo (i.e. es un objeto de **CHC**) y, además, que q induce un morfismo $q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\!\equiv$ en **CHC**.

Proposición 2.5.6 *Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de r-elimination, también la tiene $\mathcal{A}/\!\equiv$ para cualquier congruencia $\equiv$.*

Dem. Directo. ■

Sea $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ y $\mathcal{A}' = \langle C', R'\rangle$ dos chc a ser combinados y que comparten los conectivos de la signatura $C \cap C' = \{C_n \cap C'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $inc : C \cap C' \to C$ y $inc' : C \cap C' \to C'$ los morfismos inclusión. Considere ahora el coproducto $C \oplus C'$ y las inyecciones canónicas $i : C \to C \oplus C'$, $i' : C' \to C \oplus C'$. Entonces, la relación $\equiv$ dada por

$$\equiv\; = \{(\lfloor i \circ inc(c)\rfloor, \lfloor i' \circ inc'(c)\rfloor) : c \in C \cap C'\} \cup \{(c', c') : c' \in (C \cup C') \setminus C \cap C'\}$$

donde $C \cup C' = \{C_n \cup C'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\lfloor c(\xi_1, \ldots, \xi_n)\rfloor = c$ para todo conectivo c, es una congruencia sobre $C \oplus C'$.

$$\begin{tikzcd}
& C \cap C' \arrow[dl, hook', "inc"'] \arrow[dr, hook, "inc'"] & \\
C \arrow[dr, hook, "i"'] & & C' \arrow[dl, hook', "i'"] \\
& C \oplus C' \arrow[d, "q"'] & \\
& (C \oplus C')/\equiv &
\end{tikzcd}$$

El *fibring con restricción de* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{A}'$ *compartiendo los símbolos en* $C \cap C'$ es el chc

$$\mathcal{A} \overset{C \cap C'}{\oplus} \mathcal{A}' = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}')/\equiv .$$

Observemos que si $c' \in (C \oplus C')_n$, tenemos los siguientes casos:

(I) $[c'] = \{\lfloor i \circ inc(c) \rfloor, \lfloor i' \circ inc'(c) \rfloor\}$, para $c \in (C_n \cap C'_n)$;

(II) $[c'] = \{\lfloor i(c) \rfloor\}$ para un único $c \in C_n \setminus C'_n$;

(III) $[c'] = \{\lfloor i'(c) \rfloor\}$ para un único $c \in C'_n \setminus C_n$.

Ejemplo 2.5.7 *Sea* $|C| = \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \Box\}$ *y* $|C'| = \{\neg, \rightarrow, \&, \circ\}$. *Entonces,*

$$
\begin{tikzcd}
& \{\neg, \to\} \arrow[dl, hook', "inc"'] \arrow[dr, hook, "inc'"] & \\
\{\neg, \to, \wedge, \vee, \Box\} \arrow[dr, hook, "i"'] & & \{\neg, \to, \&, \circ\} \arrow[dl, hook', "i'"] \\
& \{\neg_1, \to_1, \wedge_1, \vee_1, \Box_1, \neg_2, \to_2, \&_2, \circ_2\} \arrow[d, "q"'] & \\
& \{\overline{\neg}_1 = \overline{\neg}_2, \overline{\to}_1 = \overline{\to}_2, \overline{\wedge}_1, \overline{\vee}_1, \overline{\Box}_1, \overline{\&}_2, \overline{\circ}_2\} &
\end{tikzcd}
$$

Luego, la fórmula $\overline{\Box}_1\overline{\neg}_1(\xi_1 \overline{\to}_1 (\xi_2 \overline{\&}_2 \xi_3))$ *de* $L((C^1 \oplus C^2)/\equiv)$ *proviene de identificar las siguientes fórmulas de* $L(C^1 \oplus C^2)$*:*

- $\Box_1\neg_1(\xi_1 \to_1 (\xi_2 \&_2 \xi_3))$,
- $\Box_1\neg_1(\xi_1 \to_2 (\xi_2 \&_2 \xi_3))$,
- $\Box_1\neg_2(\xi_1 \to_1 (\xi_2 \&_2 \xi_3))$, *y*
- $\Box_1\neg_2(\xi_1 \to_2 (\xi_2 \&_2 \xi_3))$.

De las Proposiciones 2.4.6 y 2.5.6, podemos establecer lo siguiente:

Proposición 2.5.8 *Sea* $\mathcal{A}$ *un chc. Si* $\mathcal{A}$ *tiene la propiedad de* r*-eliminación plena, también la tiene* $\mathcal{A} \overset{C\cap C'}{\oplus} \mathcal{A}'$*, para todo chc* $\mathcal{A}'$*.*

Por otro lado, usando la Proposición 2.5.6 es fácil adaptar la prueba del Teorema 2.4.15 para obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.5.9 *Sean* $\mathcal{A}_i = \langle C_i, R_i \rangle$ *dos chc's que satisfacen la propiedad CIP, para* $i = 1, 2$*. Entonces,* $\mathcal{A}_1 \overset{C_1\cap C_2}{\oplus} \mathcal{A}_2$ *tiene la propiedad WCIP.*

2.6 Cálculos de hipersecuentes e hipertraducciones

Como fuera mencionado anteriormente, en [21] se propuso la noción de meta-fibring basado en meta-traducciones. Dentro de este marco, diseñado para lidiar con cálculos de secuentes, todo morfismo f (denominado *meta-traducción*), en la categoría de los cálculos de secuentes, tiene la siguiente propiedad: toda regla de secuentes (formal) de la forma

$$(r) \qquad \frac{s_1 \quad \dots \quad s_n}{s}$$

es preservada por f. Interpretando a las reglas de secuentes (como la anterior) como meta-propiedades de la lógica asociada a un cálculo dado, un morfismo f puede ser, por lo tanto, visto como una traducción entre lógicas que preserva todas las meta-propiedades como la anterior. Este fue el punto de partida en [21], también adoptado en [14], donde las meta-traducciones fueron llamadas *traducciones contextuales*.

La principal diferencia entre meta-traducciones y la noción usual de traducción es que esta última solo preserva meta-propiedades "simples", de la lógica, de la forma $\Gamma \vdash \varphi$, mientras que la primera preserva combinaciones de ellas descriptas como reglas de secuentes. Como fuera argumentado en [14], las traducciones contextuales refinan el concepto usual de traducción entre lógicas, ayudando a analizar cuestiones complejas de como una lógica debería ser traducida en otra, como así también, la cuestión de como una lógica puede ser extendida fielmente. Como fuera probado recientemente, la noción más simple de traducción conservadora demostró no ser lo suficientemente informativa, puesto que cualquier par de sistemas deductivos pueden ser traducidos uno en el otro (cf. [42]). Obviamente, este no es el caso de las meta-traducciones: para poder ser traducible contextualmente, la lógica de llegada debe satisfacer al menos todas las reglas estructurales de la lógica de partida (ver [14]). Esto explica porqué el morfismo inclusión entre el cálculo de secuentes **INT** de la lógica proposicional intuicionista y **CPL**, el cálculo de secuentes de la lógica proposicional clásica, es una meta-traducción y por eso **INT** puede ser considerada como una "buena" sublógica de **CPL**, puesto que toda meta-propiedad de la primera es gozada por la segunda (cf. [14]).

Pero las cosas no son tan simples. Como es bien conocido, Gödel fue el primero en observar (cf. [39]) que, a diferencia de lo que ocurre en la lógica clásica, la lógica proposicional intuicionista tiene la propiedad de disyunción, a saber:

(DP) Si $(\alpha \vee \beta)$ es un teorema, entonces α es un teorema o β es un teorema.

No es difícil ver que (DP) no puede ser expresada como una meta-propiedad en el lenguaje (formal) de secuentes introducido en [21]. De hecho, la meta-propiedad (DP) tiene la forma

$$\frac{\vdash \alpha \vee \beta}{\vdash \alpha \quad \text{o} \quad \vdash \beta}$$

la cual cae fuera del alcance del lenguaje de reglas de secuentes de la forma de (r). Entonces, **INT** no debería ser considerada "tan buena" sublógica de **CPL**, como podría creerse, puesto que la primera satisface la meta-propiedad (DP) que no es satisfecha por la última. Esta distinción puede ser hecha de modo preciso dentro del marco de los hipersecuentes.

Recordemos la noción de morfismo en la categoría **CHC** de chc's dada en la Definición 2.1.8. Entonces, toda regla de hipersecuentes (formal) de la forma

$$(r') \qquad \frac{h_1 \quad \dots \quad h_n}{h}$$

es preservada por tales morfismos. Al igual de lo que fuera hecho con secuentes, una regla de hipersecuentes (r') puede ser vista como una meta-propiedad de la lógica asociada al cálculo dado, pero escrita en un (meta)lenguaje más rico que permite expresar meta-propiedades tales como (DP). En efecto, (DP) puede ser representada como la siguiente regla de hipersecuentes

$$(DP') \qquad \frac{\vdash \xi \vee \xi'}{\vdash \xi \quad | \quad \vdash \xi'}.$$

Por la Definición 2.1.8, un morfismo f forzará a la lógica de llegada a satisfacer la siguiente meta-propiedad:

$$(DP') \qquad \frac{\vdash \varphi(\xi, \xi')}{\vdash f(\xi) \quad | \quad \vdash f(\xi')}$$

donde $\varphi(\xi, \xi')$ es la fórmula asociada por f a $\vee$. En particular, si f es el morfismo inclusión, la regla (DP') será satisfecha por la lógica de llegada (puesto que en ese caso $\varphi(\xi, \xi')$ es $\xi \vee \xi'$). En otras palabras, si la lógica proposicional intuicionista (presentada como un cálculo de hipersecuentes) es extendida a través del morfismo inclusión de cálculos de hipersecuentes, el cálculo de llegada debe satisfacer la propiedad de disyunción. Esto justifica llamar a los morfismos de cálculos de hipersecuentes como *hipertraducciones*.

De la discusión anterior, creemos que el marco formal de los hipersecuentes puede arrojar luz sobre el tópico de traducciones entre lógicas y su significado.

En el Capítulo IV introduciremos un cálculo de hipersecuentes libre de cortes para la lógica tetravalente modal $\mathcal{TML}$.

3 Capítulo III: Sobre la Lógica Tetravalente Modal $\mathcal{TML}$

Como fue mencionado anteriormente, la lógica $\mathcal{TML}$ asociada a las álgebras tetravalentes modales desempeña un papel importante en esta tesis. En este capítulo, la variedad de álgebras tetravalentes modales (TMAs) de A. Monteiro es analizada desde diferentes aspectos lógicos. Entre otras propiedades, se revelan las características paraconsistentes de la lógica $\mathcal{TML}$, mostrando que es una genuina Lógica de la Inconsistencia Formal (**LFI**, ver [18, 17]). Tomando ventaja de la implicación contrapositiva introducida por A.V. Figallo y P. Landini, distintos cálculos estilo Hilbert para estas lógicas son propuestos, como así también un sistema de tableaux decidible. Se muestra que esta es una sublógica de la lógica proposicional clásica **CPL** que no es maximal.

3.1 Introducción

Este capítulo retoma la cuestión de estudiar los aspectos lógicos de las TMAs. Considerando la implicación contrapositiva introducida por A. V. Figallo y P. Landini en [28], introducimos tres cálculos de Hilbert y un sistema de tableaux correctos y completos con respecto a una semántica naturalmente asociada las TMAs.

El carácter paraconsistente de la lógica de las TMAs también será analizado desde el punto de vista de las *Lógicas de la inconsistencia formal*, introducidas por W. Carnielli y J. Marcos en [18] y posteriormente estudiadas en [17].
Es importante notar que existen diferentes maneras de relacionar a una lógica con una clase dada de álgebras (cf.[41]). Sin embargo, nos concentraremos principalmente en el estudio de las TMAs bajo la perspectiva lógica de la Definición 3.1.1. En la Sección 3.8 estudiaremos brevemente otra lógica asociada a las TMAs, la lógica tetravalente modal normal $\mathcal{TML}^N$.
Recordemos (ver Sección 1.2.3) que $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \wedge, \vee, \neg, \Box, \bot \rangle$ denota al álgebra absolutamente libre de tipo (2,2,1,1,0) generada por un conjunto numerable de variables. Llamamos a Fm el conjunto de las fórmulas sentenciales, y nos referiremos a ellas con las letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ etc.. Además, denotaremos a los conjuntos de fórmulas con letras griegas mayúsculas Γ, Δ, etc..

Definición 3.1.1 *La lógica de la clase* **TMA** *definida sobre* $\mathfrak{Fm}$ *es la lógica proposicional* $\mathbb{L}_{TMA} = \langle Fm, \models_{TMA} \rangle$ *dada como sigue: para todo conjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, $\Gamma \models_{TMA} \alpha$ *si, y solo si, existe* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *finito tal que para todo* $\mathfrak{A} \in \mathbf{TMA}$ *y todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{A})$, $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma_0\} \leq h(\alpha)$. *En particular,* $\emptyset \models_{TMA} \alpha$ *si, y solo si,* $h(\alpha) = 1$ *para todo* $\mathfrak{A} \in \mathbf{TMA}$ *y todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{A})$.

Consideremos, ahora, a la lógica asociada con el álgebra $\mathfrak{M}_{4m}$, la cual es definida a continuación.

Definición 3.1.2 *La lógica tetravalente modal* M_{4m} *es la lógica proposicional* $M_{4m} = \langle Fm, \models_{M_{4m}} \rangle$ *dada como sigue: para todo conjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, $\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha$ *si, y solo si, existe* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *finito tal que para todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$, $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma_0\} \leq h(\alpha)$.

En particular, $\emptyset \models_{M_{4m}} \alpha$ *si, y solo si,* $h(\alpha) = 1$ *para todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$*. En este caso, decimos que* α *es válida en* M_{4m}*.*

Puesto que $\mathfrak{M}_{4m}$ genera la variedad **TMA**, es inmediato probar que:

Proposición 3.1.3 *La lógica* M_{4m} *coindice con la lógica* $\mathbb{L}_{TMA}$*. Esto es: para todo conjunto finito* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*,* $\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha$ *si, y solo si,* $\Gamma \models_{TMA} \alpha$*.*

Como se mencionó anteriormente, en este capítulo la lógica $\mathbb{L}_{TMA}$ será considerada la contrapartida lógica de las TMAs. Por la Proposición 3.1.3, es equivalente a analizar su presentación más simple a través de la lógica M_{4m}. Existen otras presentaciones para esta lógica, a saber $\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})$ y $\mathcal{TML}$ (recordar la Definición 1.2.6 y la Sección 1.2.3 en el Capítulo 1) , la primera de las cuales será brevemente analizada en la siguiente sección.

3.2 La lógica M_{4m} como lógica matricial

Un estudio profundo e interesante de la lógica tetravalente modal asociada a **TMA** en términos de lógicas abstractas fue propuesto por J. Font y M. Rius en [31], siendo que algunos de sus resultados fueron brevemente descriptos aqui en las Secciones 1.2.2 y 1.2.3. En ese marco, es que fueron introducidas las nociones (amplias) de *quasi lógica tetravalente modal* y *lógica tetravalente modal*. La lógica tetravalente modal M_{4m} aparece como un caso particular, y estos mismos autores mostraron que ella puede ser caracterizada como una lógica matricial. Específicamente, considere la lógica proposicional $\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})$ definida por la familia de matrices $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{N, 1\} \rangle$ y $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{B, 1\} \rangle$ sobre $\mathfrak{M}_{4m}$ (ver Definición 1.2.6). Su relación de consecuencia es definida del modo usual: para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, $\Gamma \models_{\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})} \alpha$ si, y solo si, existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que

1. para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$, $h(\Gamma_0) \subseteq \{N, 1\}$ implica $h(\alpha) \in \{N, 1\}$;

2. para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$, $h(\Gamma_0) \subseteq \{B, 1\}$ implica $h(\alpha) \in \{B, 1\}$.

Como fuera probado en [31], la lógica $\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})$ coincide con M_{4m}:

Teorema 3.2.1 ([31]) *Para todo conjunto finito* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*,*

$$\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha \quad \textit{si, y solo si,} \quad \Gamma \models_{\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})} \alpha.$$

Corolario 3.2.2 *Para todo conjunto finito* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*,*

$$\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha \quad \textit{si, y solo si,} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{TML}} \alpha.$$

Esto permite una caracterización de la lógica tetravalente modal M_{4m} como la lógica matricial en término de dos matrices lógicas. Es importante notar que, como $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{N, 1\}\rangle$ y $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{B, 1\}\rangle$ son isomorfas, $\mathbb{L}_{4m}(\mathfrak{Fm})$ (y, por lo tanto, M_{4m}) puede ser caracterizada como la lógica matricial en términos de una única matriz lógica. En la Proposición 3.2.4 daremos una prueba directa de la caracterización M_{4m} por medio de una única matriz lógica, sin usar el Teorema 3.2.1.
A continuación mostraremos algunos resultados sobre M_{4m}, vista como lógica matricial, que serán de utilidad en lo que sigue.

Lema 3.2.3 *Sea* $h : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{M}_{4m}$*,* $\mathcal{V}' \subseteq Var$ *y* $h' : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{M}_{4m}$ *tales que, para todo* $p \in \mathcal{V}'$*,*

$$h'(p) = \begin{cases} h(p) & \textit{si } h(p) \in \{0,1\} \\ N & \textit{si } h(p) = B \\ B & \textit{si } h(p) = N \end{cases} . \textit{ Entonces } h'(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \textit{si } h(\alpha) \in \{0,1\} \\ N & \textit{si } h(\alpha) = B \\ B & \textit{si } h(\alpha) = N \end{cases}$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ *tal que* $Var(\alpha) \subseteq \mathcal{V}'$*.*

Dem. Este resultado es fácilmente demostrado por inducción sobre la longitud de α. ∎

A partir de este resultado podemos dar una prueba directa de la caracterización de la lógica M_{4m} por medio de una única matriz, sin hacer uso del Teorema 3.2.1.

Proposición 3.2.4 *Sea $\mathcal{M}_N = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{N, 1\}\rangle$ y sea $\mathcal{M}_B = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{B, 1\}\rangle$ las matrices lógicas de la Sección 3.2. Entonces*

(i) $\models_{M_{4m}} = \models_{\mathcal{M}_N}$,

(ii) $\models_{M_{4m}} = \models_{\mathcal{M}_B}$.

Por lo tanto, M_{4m} puede ser caracterizada por medio de una única matriz.

Dem. Puesto que $\models_{M_{4m}}$ es una relación de consecuencia finitaria; y debido a la presencia de la conjunción (ínfimo) $\wedge$ en M_{4m}, es suficiente considerar las inferencias en M_{4m} de la forma $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$ (en el caso de que β sea un teorema es suficiente considerar α como $\neg\bot$).
(i) Supongamos que $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $h(\alpha) \in \{1, N\}$. Como $h(\alpha) \leq h(\beta)$, tenemos que $h(\beta) \in \{1, N\}$. Entonces, $\alpha \models_{\mathcal{M}_N} \beta$.
Recíprocamente, supongamos que $\alpha \models_{\mathcal{M}_N} \beta$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. Si $h(\alpha) = 0$, la demostración está terminada. Si $h(\alpha) = N \in \{1, N\}$, entonces $h(\beta) \in \{1, N\}$ y, por lo tanto, $h(\alpha) \leq h(\beta)$. Si $h(\alpha) = B$, sea h' como en el lema anterior. Entonces, $h'(\alpha) = N \in \{1, N\}$ y, por lo tanto, $h'(\beta) \in \{1, N\}$. De esta manera, $h(\beta) \in \{1, B\}$ y entonces $h(\alpha) \leq h(\beta)$. Si $h(\alpha) = 1$, entonces $h(\beta) \in \{1, N\}$. Si $h(\beta) = N$, tenemos que $h'(\alpha) = 1$ y $h'(\beta) = B \notin \{1, N\}$, una contradicción. Luego, $h(\beta) = 1$ y $h(\alpha) \leq h(\beta)$. En todos los casos mostramos que $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$.
(ii) La prueba es análoga. ∎

Observación 3.2.5 *El reducto de De Morgan de $\mathfrak{M}_{4m}$ coincide con una de las estructuras algebraicas $FOUR$ asociada a la bien conocida lógica 4-valuada de Belnap, a saber, el reducto dado por el orden* **de verdad** *en lugar del dado por el orden* **de conocimiento** *(cf. [9, 2]). Más aún, M_{4m} presentada por medio de $\mathcal{M}_N$ es una extensión modal de la lógica matricial de ese mismo reducto de $FOUR$.*
Por otro lado, es inmediato que el reducto de $\mathcal{M}_N$ a la signatura $\langle \wedge, \vee, \Box, \bot \rangle$ coincide con la lógica modal 4-valorada PM4 introducida en [10]. De la Proposición 3.2.4(i), se tiene que el reducto sin negación de M_{4m} coincide con PM4 (como relaciones de consecuencia).

Corolario 3.2.6 *Si $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$ y $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$, entonces $\alpha \models_{M_{4m}} \bot$ ó $\models_{M_{4m}} \beta$.*

Dem. Supongamos que $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$, $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$ y que $\alpha \not\models_{M_{4m}} \bot$ y $\not\models_{M_{4m}} \beta$. Entonces, existen $h, h'' \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$ tales que $h(\alpha) \neq 0$ y $h''(\beta) \neq 1$. Puesto que $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$, podemos elegir $h = h''$. Entonces, $h(\alpha) \neq 0$ and $h(\beta) \neq 1$. Como $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$, tenemos que $h(\alpha) \leq h(\beta)$. Entonces, $h(\alpha) \neq 1$. Si $h(\alpha) = N$, entonces $h(\beta) = N$. Definamos h' sobre $Var(\beta)$ como en el Lema 3.2.3; entonces $h'(\beta) = B$. Extendemos h' sobre $Var(\alpha)$ poniendo $h'(p) = h(p)$. Luego, $h'(\alpha) = h(\alpha) = N$ y, por lo tanto $h'(\alpha) \not\leq h'(\beta)$, lo cual es una contradicción. El caso en el cual $h(\alpha) = B$ se trata análogamente. $\blacksquare$

En una lógica dada, un conjunto de conectivos lógicos es *funcionalmente completo* si puede ser usado para expresar todas las posibles tablas de verdad sobre una semántica matricial dada correcta y completa con respecto a la lógica. Decimos que la lógica es *funcionalmente completa* si contiene un conjunto de conectivos lógicos funcionalmente completo. A continuación mostraremos que en M_{4m} el conjunto $\{\vee, \wedge, \Box, \neg, \bot\}$ no es funcionalmente completo.

Lema 3.2.7 *Sea* $h : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{M}_{4m}$, $h' : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{M}_{4m}$ *y* $p \in Var$ *tales que* $h(p) = B$ *y* $h'(p) = N$. *Entonces,* $h(\alpha) \in \{0, 1, B\}$ *y* $h'(\alpha) \in \{0, 1, N\}$ *para todo* $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ *tal que* $Var(\alpha) \subseteq \{p\}$.

Dem. Sigue del hecho que $\{0, 1, N\}$ y $\{0, 1, B\}$ son subálgebras de $\mathfrak{M}_{4m}$. ■

Corolario 3.2.8 *En* M_{4m} *no es posible definir la negación clásica (booleana)* $-$ *de modo tal que* $-0 = 1$, $-1 = 0$, $-N = B$ *y* $-B = N$.

Dem. Es una consecuencia inmediata del Lema 3.2.7. ■

Corolario 3.2.9 *En* M_{4m}, *el conjunto* $\{\vee, \wedge, \Box, \neg, \bot\}$ *no es funcionalmente completo.*

3.3 La implicación contrapositiva en M_{4m}

El lenguaje original de la lógica de las TMAs – en particular, el lenguaje de la lógica M_{4m}– no tiene a una *implicación* como conectivo primitivo. Es una cuestión natural preguntarse como definir un operado binario en las TMAs, en término de los restantes operadores, con el "comportamiento" de una implicación. Tales operadores son útiles a la hora de caracterizar el retículo de las congruencias de una clase de álgebras determinada.

Algunas propuestas para operadores de implicación en las TMAs aparecen en la literatura. Concerniendo a las álgebras de De Morgan, un operador de implicación fue propuesto por M.L. Gastaminza y S. Gastaminza en [34] definido como sigue:

(I1) $x \hookrightarrow y = \neg x \vee y$.

Por otro lado, I. Loureiro propuso en [44] la siguiente implicación para las TMAs:

(I2) $x \to y = \neg\Box x \vee y.$

Considerando el operador

(I3) $x \mapsto y = (x \to y) \wedge (\neg\Box\neg y \vee \neg x),$

A. Figallo y P. Landini introdujeron en [28] un operador de implicación para las TMAs definido como sigue:

(I4) $x \succ y = (x \mapsto y) \wedge ((x \hookrightarrow y) \to (\Box\neg x \vee y)).$

Este operador fue denominado en [58] *implicación contrapositiva* para las TMAs.
No es difícil ver que la implicación contrapositiva puede ser reescrita de una forma más simple:

(I5) $x \succ y = (x \to y) \wedge (\neg y \to \neg x) \wedge ((\neg x \vee y) \to (\Box\neg x \vee y)).$

La principal característica de la implicación contrapositiva es que internaliza la relación de consecuencia (siempre que sólo una premisa es considerada), como veremos en el Teorema 3.2. Otro aspecto importante de esta implicación es que todos los operadores de las TMAs pueden ser definidas en términos de $\succ$ y 0. De hecho:

Proposición 3.3.1 (cf. [28]) *En toda TMA vale:*

(i) $1 = (0 \succ 0),$

(ii) $\neg x = (x \succ 0)$,

(iii) $x \vee y = (x \succ y) \succ y$,

(iv) $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$,

(v) $\Box x = \neg(x \succ \neg x)$.

Por lo tanto, $\succ$ *y* 0 *son suficientes para generar todas las operaciones de una TMA dada.*

Además, a partir de la Proposición 3.3.1 se dio en [28] una axiomatización para las TMAs en términos de $\succ$ y 0 como sigue.

Proposición 3.3.2 (cf. [28]) *En toda TMA puede definirse una operación binaria* $\succ$ *y un elemento* 0 *tal que las siguientes condiciones valen:*

(C1) $(1 \succ x) = x$,

(C2) $(x \succ 1) = 1$,

(C3) $(x \succ y) \succ y = (y \succ x) \succ x$,

(C4) $x \succ (y \succ z) = 1$ *implica* $y \succ (x \succ z) = 1$,

(C5) $((x \succ (x \succ y)) \succ x) \succ x = 1$,

(C6) $(0 \succ x) = 1$,

(C7) $(x \succ 0) = \neg x$,

(C8) $((x \vee y) \succ z) \succ ((x \succ z) \wedge (y \succ z)) = 1$.

Recíprocamente, si un álgebra con una operación binaria $\succ$ *y un elemento* 0 *que satisfaga (C1)-(C8) donde* $1 =_{def} 0 \succ 0$, $x \vee y =_{def} (x \succ y) \succ y$ *y* $x \wedge y =_{def} \neg(\neg x \vee \neg y)$, *entonces la estructura resultante es una TMA donde* $\Box x =_{def} \neg(x \succ \neg x)$.

Definición 3.3.3 *Un* **álgebra tetravalente modal contrapositiva** *es un álgebra* $\langle A, \succ, 0\rangle$ *de tipo* $(2,0)$ *que satisfaga los items (C1)–(C6) y (C8) de la Proposición 3.3.2 (con las abreviaturas definidas ahí). Denotaremos a esta clase de álgebras por* $\mathbf{TMA}^c$.

Observe que las clases de álgebras **TMA** y $\mathbf{TMA}^c$ coinciden. La diferencia principal reside en el lenguaje utilizado para definir cada clase y en el hecho de que la caracterización de esta última clase esconde que la misma es una variedad. Como veremos en la Sección 3.5, el lenguaje de las TMA^cs es más adecuado para definir una presentación estilo Hilbert de la lógica tetravalente modal M_{4m}. Esto se debe a la presencia de la implicación contrapositiva $\succ$, puesto que, en general, los sistemas axiomáticos son mejor descriptos en términos de un conectivo de implicación. Más aún, como veremos en esa misma seción, el lenguaje de las TMA^cs describe con más naturalidad el hecho de que M_{4m} está contenido en el cálculo proposicional clásico **CPL**.
Notemos que en el álgebra $\mathfrak{M}_{4m}$, la implicación contrapositiva $\succ$ tiene la siguiente tabla de verdad:

$\succ$	0	N	B	1
0	1	1	1	1
N	N	1	B	1
B	B	N	1	1
1	0	N	B	1

Observación 3.3.4 *Claramente, la lógica de las álgebras tetravalentes modales contrapositivas* $\models_{TMA^c}$ *puede ser definida por analogía con la Definición 3.1.1. De esto, se puede establecer una versión análoga a la Proposición 3.1.3.*

Por otro lado, el conectivo $\succ$ tiene algunas propiedades interesantes, que mostramos abajo:

Proposición 3.3.5 *Sean* $\alpha, \beta \in Fm$. *Entonces, las siguientes condiciones valen en* M_{4m}*:*

(i) $\models_{M_{4m}} \bot \succ \alpha$ (ii) $\models_{M_{4m}} \alpha \succ \top$

(iii) $\models_{M_{4m}} \alpha \succ (\beta \succ \alpha)$ (iv) $\models_{M_{4m}} (\alpha \vee \beta) \succ (\beta \vee \alpha)$

(v) $\models_{M_{4m}} \neg\neg\alpha \succ \alpha$ (vi) $\models_{M_{4m}} \alpha \succ \neg\neg\alpha$

(vii) $\models_{M_{4m}} \Box\alpha \succ \Box\Box\alpha$ (viii) $\models_{M_{4m}} \Box\alpha \succ \alpha$

(ix) $\models_{M_{4m}} \alpha \succ \Box\Diamond\alpha$ (x) $\models_{M_{4m}} \Box\alpha \succ \Diamond\alpha$

(xi) $\models_{M_{4m}} \Box(\alpha \succ \beta) \succ (\Box\alpha \succ \Box\beta)$

(xii) $\models_{M_{4m}} (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \succ (\Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta) \vee \Diamond(\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\beta \wedge \Diamond\alpha))$.

Dem. Directo analizando las tablas de verdad. ■

Observación 3.3.6 *El teorema (xi) es el axioma* **(K)** (*ver* [8]). *Los teoremas (vii), (viii), (ix), (x) y (xii) se corresponden con los axiomas* **(4)**, **(T)**, **(B)**, **(D)** *y* **(.3)**, *respectivamente* (*ver* [8]). *Por lo tanto,* M_{4m} *satisface todos los axiomas modales de la lógica modal clásica* **S5**. *Sin embargo, no podemos afirmar que* M_{4m} *sea una lógica modal normal puesto que la implicación* $\succ$ *no satisface algunas propiedades de la implicación clásica* (*ver* [8]).

Existen similitudes muy interesantes entre la lógica de Łukasiewicz $Ł_3$ *(vista como lógica modal) y* M_{4m}*. En ambas lógicas,* $\Box\alpha$ *y* $\Diamond\alpha$ *están definidas por las mismas fórmulas, a saber,* $\neg(\alpha \succ \neg\alpha)$ *y* $\neg\alpha \succ \alpha$*, respectivamente (en el caso de* $Ł_3$*,* $\neg$ *y* $\succ$ *denotan, respectivamente, la negación e implicación). Más aún, ambas implicaciones (la de* $Ł_3$ *y la contrapositiva) no satisfacen la ley de contracción:* $\alpha \succ (\alpha \succ \beta)$ *no es equivalente a* $(\alpha \succ \beta)$*. Luego, ambas lógicas satisfacen el siguiente principio modal:* $\alpha \succ (\alpha \succ \Box\alpha)$*, el cual no es válido en la lógica modal clásica* **S5***.*

Sea $\Box^0\alpha =_{def} \alpha$ y $\Box^{n+1}\alpha =_{def} \Box^n\Box\alpha$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, se define $\Diamond^n\alpha$. Entonces,

Proposición 3.3.7 M_{4m} *satisface la siguiente bien conocida instancia de los esquemas de Lemmon-Scott* (cf. [43]) *para todo* $n, l, k, m \in \mathbb{N}$,

$$\models_{M_{4m}} \Diamond^k\Box^l\alpha \succ \Box^m\Diamond^n\alpha,$$

pero $\not\models_{M_{4m}} \Box\Diamond\alpha \succ \Diamond\Box\alpha$*.*

Dem. De la Proposición 3.3.5. ■

Finalmente, en M_{4m} tenemos una versión débil del *Meta-teorema de la Deducción* con respecto a la implicación contrapositiva.

Teorema 3.3.8 ([28]) *Sean* $\alpha, \beta \in Fm$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\alpha \models_{M_{4m}} \beta$,

(ii) $\models_{M_{4m}} \alpha \succ \beta$.

Este último resultado muestra que la implicación contrapositiva $\succ$ internaliza la relación de consecuencia de M_{4m} siempre que solo una única premisa sea considerada. En términos algebraicos, $\succ$ internaliza el orden $\leq$ de las TMAs.

Es importante notar que no es posible "mejorar" el Teorema 3.3.8 en el siguiente sentido:

Proposición 3.3.9 *En M_{4m} ambas direcciones del meta-teorema de la deducción, con respecto a $\succ$, falla si más de una premisa es permitida. Específicamente:*

(i) $\alpha, \beta \models_{M_{4m}} \gamma$ *no implica que* $\alpha \models_{M_{4m}} \beta \succ \gamma$,

(ii) $\alpha \models_{M_{4m}} \beta \succ \gamma$ *no implica que* $\alpha, \beta \models_{M_{4m}} \gamma$.

Dem. (i) Observemos que $N \wedge B \leq 0$, pero $N \not\leq B \succ 0 = B$. Con el objeto de exhibir un ejemplo de este hecho, considere $\alpha = (\bullet p \wedge \bullet q \wedge \bullet(p \succ q) \wedge p)$, $\beta = q$ y $\gamma = \bot$, donde p, q son dos variables proposicionales distintas, y $\bullet\delta =_{def} \Diamond(\delta \wedge \neg\delta)$ es el operador de *inconsistencia* (ver Sección 3.4 abajo). Entonces, $h(\alpha \wedge \beta) = 0 = h(\gamma)$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. Esto es, $\alpha, \beta \models_{M_{4m}} \gamma$. Ahora, sea h tal que $h(p) = N$ y $h(q) = B$. Luego, $h(\alpha) = N$ y $h(\beta) = B$ y por eso $h(\alpha) \not\leq h(\beta \succ \gamma) = B \succ 0 = B$. Por lo tanto, $\alpha \not\models_{M_{4m}} \beta \succ \gamma$.

(ii) Notemos que $N \leq N \succ 0 = N$, pero $N \wedge N = N \not\leq 0$. Por ejemplo, considere $\alpha = p$, $\beta = \neg p$ y $\gamma = \bot$, donde p es una variable proposicional. Entonces, $\alpha \models_{M_{4m}} \beta \succ \gamma$ puesto que $\alpha \models_{M_{4m}} \neg\neg\alpha$. Considere, ahora, $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $h(p) = N$. Luego, $h(\alpha \wedge \beta) = N \not\leq 0 = h(\gamma)$ y por eso $\alpha, \beta \not\models_{M_{4m}} \gamma$. ■

En particular, la implicación contrapositiva no satisface el *modus ponens* local (en el sentido de [15]).

La importancia de la implicación contrapositiva será confirmada en la Sección 3.5, donde una axiomatización estilo Hilbert para M_{4m} será presentada en términos de $\succ$ y $\perp$. Esto es, exhibiremos una axiomatización de la lógica tetravalente modal M_{4m} vista como la lógica cuya contrapartida algebraica son las álgebras tetravalentes modales contrapositivas.

3.4 M_{4m} como lógica paraconsistente

En esta sección nos abocaremos a analizar a M_{4m} bajo la perspectiva de la paraconsistencia. Veremos que las contradicciones (con respecto a $\neg$) no necesariamente trivializan las inferencias, y por lo tanto, esta es un lógica paraconsistente en el sentido de da Costa (cf. [22, 23]). Más aún, mostraremos que M_{4m} es una *Lógica de la Inconsistencia Formal* (**LFI**, por sus siglas en inglés), gentilmente explosiva (gently explosive) con respecto a un conjunto de fórmulas adecuado $\bigcirc(p)$ el cual depende solamente de la variable proposicional p (cf. [18, 17]).

No es difícil ver que M_{4m} no es una lógica trivial. De hecho, si p y q son variables proposicionales diferentes, entonces tenemos que

$$p, \neg p \not\models_{M_{4m}} q. \tag{3}$$

En efecto, es suficiente tomar un homomorfismo h tal que $h(p) = N$ y $h(q) = B$. Luego, M_{4m} es *no explosiva* con respecto a $\neg$. Por otro lado,

$$\not\models_{M_{4m}} q \vee \neg q \tag{4}$$

(utilizando el mismo homomorfismo). De esta manera, M_{4m} es una lógica paracompleta.[1] Veremos en la Sección 3.7 que M_{4m} es una sublógica de la lógica proposicional clásica. Recordemos de [17] que una lógica $\mathbb{L}$ es *gentilmente explosiva* con respecto a la negación $\neg$ y al conjunto de fórmulas $\bigcirc(p)$ (que solo dependen de la variable proposicional p) si: (1) existen α y β tales que $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash_{\mathbb{L}} \beta$; (2) existen α y β tales que $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash_{\mathbb{L}} \beta$; (3) existen α y β tales que $\alpha, \neg\alpha \nvdash_{\mathbb{L}} \beta$; y (4) $\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbb{L}} \beta$, para todo α y β. Si $\bigcirc(p)$ es finito, entonces $\mathbb{L}$ se dice una lógica finita y gentilmente explosiva (finitely gently explosive) con respecto a $\bigcirc(p)$ y $\neg$.

Consideremos en el lenguaje de M_{4m} al conjunto $\bigcirc(p) = \{\Box(p \vee \neg p)\}$. Entonces

Lema 3.4.1 *La lógica M_{4m} es finita y gentilmente explosiva con respecto a $\bigcirc(p)$ y $\neg$.*

Dem. Sean p y q variables proposicionales distintas. Es fácil ver que

$$\bigcirc(p), p \not\models_{M_{4m}} q \quad \text{y} \quad \bigcirc(p), \neg p \not\models_{M_{4m}} q.$$

Por otro lado, está claro que $h((\Box(p \vee \neg p)) \wedge p \wedge \neg p) = 0$, para toda $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. De esta manera, tenemos que $\bigcirc(p), p, \neg p \models_{M_{4m}} \perp$. ■

De este resultado y de (3) tenemos que:

Teorema 3.4.2 *La lógica M_{4m} es una* **LFI** *con respecto a $\neg$ y con operador de consistencia $\circ$ definido por $\circ\alpha = \Box(\alpha \vee \neg\alpha)$, para todo $\alpha \in Fm$.*

Además, al igual que en los sistemas C_n de da Costa (cf. [22, 23]), el operador de consistencia se propaga a través de los restantes conectivos.

[1] Los aspectos paracompletos de M_{4m} no serán estudiados en esta tesis.

Teorema 3.4.3 *La lógica M_{4m} satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\models_{M_{4m}} \circ\bot$ (ii) $\circ\alpha \models_{M_{4m}} \circ\Box\alpha$

(iii) $\circ\alpha \models_{M_{4m}} \circ\neg\alpha$ (iv) $\circ\alpha, \circ\beta \models_{M_{4m}} \circ(\alpha\#\beta)$ *para* $\# \in \{\wedge, \vee, \succ\}$.

Dem. Directo de considerar las tablas de verdad de M_{4m}. ■

Más aún, $\models_{M_{4m}} \circ\neg^n\circ\alpha$, para todo $n \geq 0$. En particular, $\models_{M_{4m}} \circ\circ\alpha$. De este modo, M_{4m} valida todos los axiomas $(cc)_n$ de la lógica LFI **mCi** (ver [17]).

Como es usual en el marco de las **LFI**s, es posible definir un operador de inconsistencia $\bullet$ sobre M_{4m} del siguiente modo:

$$\bullet\alpha =_{def} \neg \circ \alpha.$$

Entonces, $\bullet\alpha$ es equivalente a $\Diamond(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Observemos que $\bullet$ y $\circ$ pueden ser expresados equivalentemente como $\bullet\alpha = \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$ y $\circ\alpha = \Box\alpha \vee \Box\neg\alpha$. La tabla de verdad de ambos conectivos se muestra abajo:

p	$\circ p$	$\bullet p$
0	1	0
N	0	1
B	0	1
1	1	0

Teorema 3.4.4 *En M_{4m} vale:*

(i) $\alpha \wedge \neg\alpha \models_{M_{4m}} \bullet\alpha$ *pero* $\bullet\alpha \not\models_{M_{4m}} \alpha \wedge \neg\alpha$,

(ii) $\bullet\alpha \models_{M_{4m}} \bullet\neg\alpha$ *y* $\bullet\neg\alpha \models_{M_{4m}} \bullet\alpha$,

(iii) $\bullet(\alpha\#\beta) \models_{M_{4m}} \bullet\alpha \vee \bullet\beta$ *para* $\# \in \{\wedge, \vee, \succ\}$*; la recíproca no vale.*

Dem. Directo. ■

Este último resultado muestra que el concepto de inconsistencia, por un lado, y el de contradicción, por el otro, pueden ser diferenciados en la lógica M_{4m}. Esta es una característica valiosa en el universo de las **LFI**s, solo satisfecha por **mbC**, la más débil de la jerarquía presentada en [17]. A pesar del hecho de que M_{4m} no es funcionalmente completa (cf. Corolario 3.2.9), esta goza de una gran poder expresivo. Por ejemplo, en M_{4m} es posible hablar de valores de verdad "clásicos" (0 y 1), como así también de valores "no clásicos", a saber, N y B. Este hecho ya fue usado en la demostración de la Proposición 3.3.9(i). De esta manera, por ejemplo, si $\circ\alpha$ es satisfecho entonces α solo asume valores de verdad 0 ó 1. Por otro lado, $\bullet\alpha$ afirma que los valores de verdad de α son N ó B. De esta manera, es posible expresar que "p y q asumen los valores de verdad N o B pero distintos" a través de la sentencia $\bullet p \wedge \bullet q \wedge \bullet(p \succ q)$.

Observación 3.4.5 *Las fórmulas modales* $\Box\alpha \vee \Box\neg\alpha$ *y* $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$*, utilizadas para definir el operador de consistencia* $\circ\alpha$ *y el operador de inconsistencia* $\bullet\alpha$ *en* M_{4m}*, coinciden con las fórmulas introducidas por H. Montgomery y R. Routley en [54] para definir los conceptos filosóficos de* **no contingencia** *(denotado por* $\triangle$*) y de* **contingencia** *(denotado por* ∇*), respectivamente. Las lógicas de contingencia y no contingencia fueron extensivamente estudiadas por diferentes autores. Es interesante notar que el operador de no contingencia tiene propiedades de propagación similares a aquellas que tiene el operador de consistencia* $\circ$ *propuesto por da Costa (cf. [22, 23]). Por otro lado, es bien conocida la ley de interacción entre los operadores de contingencia y no contingencia.*

$$(\triangle\alpha \wedge \nabla(\alpha \wedge \beta)) \to \nabla\beta$$

es traducido a la siguiente ley de interacción entre los operadores de inconsistencia y consistencia de M_{4m}:

$$(\circ\alpha \wedge \bullet(\alpha \wedge \beta)) \succ \bullet\beta.$$

El cual es válido en M_{4m}. Hasta donde nosotros sabemos, este último principio (interpretando $\succ$ como un operador de implicación) nunca fue considerado en la literatura de las **LFI***s. Sería interesante analizar otras lógicas paraconsistentes (además de M_{4m}) que satisfagan tal principio, como así también, sus posibles aplicaciones, tal vez a la teoría de las bases de datos inconsistente.*

Como es usual con las **LFI**s, es interesante analizar la posibilidad de reproducir a la lógica clásica dentro de M_{4m}. El siguiente resultado será útil en la Proposición 3.7.2.
Pensemos a **CPL** en el lenguaje generado por la conjunción $\wedge$, la disyunción $\vee$ y la negación $\neg$ (intencionalmente estamos utilizando los mismos símbolos para los conectivos comunes de M_{4m} y **CPL**). Sea $\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$ el álgebra de las fórmulas de **CPL** en ese lenguaje. Entonces, tenemos el siguiente *Derivability Adjustment Theorem* (DAT) con respecto a **CPL**.

Teorema 3.4.6 *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto finito de fórmulas en* **CPL**. *Entonces, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ si, y solo si, $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_{M_{4m}} \alpha$ donde* $\mathrm{Var}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Dem. ($\Leftarrow$) Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}, \mathbb{B}_1)$ donde $\mathbb{B}_1$ es el álgebra de Boole con un átomo (esto es, $\mathbb{B}_1 = \{0, 1\}$). Puesto que $\mathbb{B}_1$ puede verse como una **TMA**-subálgebra de $\mathfrak{M}_{4m}$ (poniendo $\Box(x) = x$, para todo x), tenemos que $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. Luego, por hipótesis tenemos que

$$h(\bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \circ p_j) \leq h(\alpha).$$

Como $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{B}_1)$, entonces $h(p_j) \in \{0,1\}$ para todo j, $1 \leq j \leq n$. De esta manera, por definición de $\circ$, $h(\circ p_j) = \circ h(p_j) = 1$ para todo j, $1 \leq j \leq n$. Entonces, si $h(\alpha_i) = 1$ para todo i, $1 \leq i \leq k$ tenemos que $h(\bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \circ p_j) = 1$ y, por lo tanto, $h(\alpha) = 1$. Esto significa que $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que $h(\Gamma \cup \{\circ p_1, \ldots, \circ p_n\}) \subseteq \{1, N\}$, donde $\mathrm{Var}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Entonces, $h(p_i) \in \{1, 0\}$ para todo i y por eso $h \in Hom(\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}, \mathbb{B}_1)$. Como $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ y $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$, entonces $h(\alpha) = 1$ y $h(\alpha) \in \{1, N\}$. Esto muestra, por la Proposición 3.2.4(i), que $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_{M_{4m}} \alpha$. ■

Recordemos de [17] que una lógica $\mathbb{L}$ es *marcadamente* paraconsistente (boldly paraconsistent) si no existe una fórmula $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

(i) $\nvdash_L \beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ para algún $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, y

(ii) $\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbb{L}} \beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ para todo $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Corolario 3.4.7 *La lógica M_{4m} es marcadamente paraconsistente.*

Dem. Supongamos que existe una fórmula $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ que satisface las cláusulas (i) y (ii) del corolario para la lógica M_{4m}. Sea p una variable proposicional tal que $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$. Por (ii), $(p \wedge \neg p) \models_{M_{4m}} \beta(p_1, \ldots, p_n)$, tal que $Var(p \wedge \neg p) \cap Var(\beta(p_1, \ldots, p_n)) = \emptyset$. Como $(p \wedge \neg p) \not\models_{M_{4m}} \perp$, se tiene que, por el Corolario 3.2.6, $\models_{M_{4m}} \beta(p_1, \ldots, p_n)$. Luego, $\models_{M_{4m}} \beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ para todo $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, lo que contradice (i). ■

Una lógica paraconsistente que no es marcadamente paraconsistente no es una "genuina" lógica paraconsistente: de una contradicción es posible derivar todas las instancias del mismo esquema. Por ejemplo, la lógica minimal de Johánsson es paraconsistente, pero no marcadamente paraconsistente puesto que $\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\beta$, para todo α y todo β. Acabamos de probar, en el Corolario 3.4.7, que M_{4m} es una genuina lógica paraconsistente. Por otro lado, debido al Corolario 3.2.8, esta es una **LFI** en la cual no es definible una negación clásica. Esta es una característica inusual para las **LFI**s, revelando la importancia de mirar a M_{4m} bajo la perspectiva de la paraconsistencia.

3.5 Presentaciones estilo Hilbert para M_{4m} en términos de la implicación contrapositiva

En esta sección abordamos la cuestión de definir cálculos estilo Hilbert para la lógica M_{4m}. Como argumentamos anteriormente, la presencia de un conectivo de implicación simplifica la definición de un sistema lógico estilo Hilbert, puesto que se tienen más posibilidades de utilizar axiomas en lugar de reglas de inferencia. En el caso del lenguaje original $\mathfrak{Fm}$ de M_{4m}, no existe un conectivo de implicación primitivo y entonces el comportamiento de los conectivos dados debe describirse casi exclusivamente mediante reglas de inferencia. Este es el motivo por el cual una presentación para M_{4m} estilo Gentzen, como lo es el sistema $\mathfrak{G}$ introducido en [31], y reproducido aquí en la Sección 1.2.3 del Capítulo 1, tiene más sentido que un cálculo Hilbert.

Sin embargo, tomando ventaja de la Proposición 3.3.1, la cual establece que la lógica M_{4m} puede ser descripta solo en términos de $\succ$ y $\perp$, definiremos en esta sección tres sistemas estilo Hilbert para la lógica tetravalente modal M_{4m} presentada en términos de la implicación $\succ$ y el bottom $\perp$.

El hecho de que la lógica M_{4m} pueda ser descripta en términos de $\succ$ y $\perp$ simplifica su estudio: las demostraciones hechas por inducción sobre la complejidad de las fórmulas son significativamente más simples. Por ejemplo, las demostraciones de los Lemas 3.2.3 y 3.2.7 en el lenguaje usando solo $\succ$ y $\perp$ que en su lenguaje original (un conectivo unario y tres binarios).

El cálculo propuesto en primer lugar requiere de algunas reglas de inferencia para poder describir las propiedades básicas de las ecuaciones algebraicas (como la transitividad y la *substitution salva veritate* de Leibniz para la relación de igualdad). El segundo sistema básicamente pone todas esas reglas de inferencia en términos de axiomas modales, haciendo uso de la siguiente propiedad de M_{4m}: $\models_{M_{4m}} \alpha$ sii $\models_{M_{4m}} \Box\alpha$. El sistema resultante será más simple que el anterior, dejando más clara la naturaleza modal de ésta lógica. Probaremos correctitud y completitud de estos sistemas, como así también, una versión débil del meta-teorema de la deducción.

En adelante denotaremos por $\mathfrak{Fm}' = \langle Fm', \succ, \bot \rangle$ al álgebra absolutamente libre de tipo de similaridad $(2, 0)$ generada por un conjunto numerable Var. Los elementos de Var son llamados de variables o fórmulas atómicas. Por $\top$ queremos significar $\bot \succ \bot$; por $\neg\alpha$ queremos significar $\alpha \succ \bot$ (de esta manera, $\top$ denota $\neg\bot$); $\alpha \vee \beta$ denota $(\alpha \succ \beta) \succ \beta$, y $\alpha \wedge \beta$ denota $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. Además, se asumirá que la relación de consecuencia $\models_{M_{4m}}$ está definida sobre el lenguaje $\mathfrak{Fm}'$ en lugar de $\mathfrak{Fm}$.

Definición 3.5.1 *Denotemos con $\mathcal{H}^1_{4m} = \langle Fm', \vdash_1 \rangle$ a la lógica proposicional definida a través del siguiente cálculo de Hilbert, donde α, β, $\gamma \in Fm'$, con las notaciones antes mencionadas.*

Axiomas

(A0) $\top$

(A1) $\alpha \succ \top$

(A2) $(\alpha \vee \beta) \succ (\beta \vee \alpha)$

(A3) $\bot \succ \alpha$

(A4) $\top \succ (\alpha \succ \alpha)$

(A5) $(\alpha \succ (\alpha \succ \beta)) \vee \alpha$

(A6) $((\alpha \vee \beta) \succ \gamma) \succ ((\alpha \succ \gamma) \wedge (\beta \succ \gamma))$

Reglas de Inferencia

$$\text{(MP)} \quad \frac{\alpha \qquad \vdash \alpha \succ \beta}{\beta} \qquad\qquad \text{(R1)} \quad \frac{\vdash \alpha \succ (\beta \succ \gamma)}{\vdash \beta \succ (\alpha \succ \gamma)}$$

$$\text{(R2)} \quad \frac{\vdash \alpha \succ \beta \qquad \vdash \beta \succ \alpha}{\vdash (\gamma \succ \alpha) \succ (\gamma \succ \beta)} \qquad\qquad \text{(R3)} \quad \frac{\vdash \alpha \succ \beta}{\vdash (\beta \succ \gamma) \succ (\alpha \succ \gamma)}.$$

$$\text{(Conj)} \quad \frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Observación 3.5.2 *Notemos que las reglas (R1), (R2) y (R3) son globales (en el sentido de [15]). Esto significa que transforman teoremas en teoremas. Es similar a lo que ocurre con la regla de Necesitación, o con la regla de Generalización de la lógica de primer orden. A su vez, (MP) es una regla mixta: su consecuencia β será un teorema siempre que la premisa α sea un teorema, pero la otra premisa $\alpha \succ \beta$ debe siempre ser un teorema. Finalmente, (Conj) es una regla puramente local (cf. [15]) que permite combinar fórmulas arbitrarias dentro de una derivación.*

Debido a su naturaleza, la noción de derivación de premisas en $\mathcal{H}^1_{4m}$ será definida utilizando la noción de derivación a partir de un conjunto vacío de hipótesis. Esto es diferente a lo que usualmente sucede en un cálculo de Hilbert en el cual las reglas de inferencia no son globales.

Para toda instancia de la regla r de $\mathcal{H}^1_{4m}$, su versión local será la regla de inferencia r_l obtenida a partir de r eliminando toda ocurrencia de $\vdash$. De esta manera, por ejemplo, la versión local de (MP) es el Modus Ponens usual, mientras que $(\mathrm{Conj})_l$ es (Conj). Así, toda regla local r_l es una regla de inferencia en el sentido usual.

Definición 3.5.3 *(1) Una derivación de una fórmula α en $\mathcal{H}^1_{4m}$ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tales que α_n es α y todo α_i es, o bien, una instancia de un axioma o es la consecuencia de alguna regla de inferencia local r_l de $\mathcal{H}^1_{4m}$ cuyas premisas aparecen en la secuencia $\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}$. Diremos que α es derivable en $\mathcal{H}^1_{4m}$, y escribiremos $\vdash_1 \alpha$, si existe una derivación de ella en $\mathcal{H}^1_{4m}$.*
(2) Una derivación de una fórmula α en $\mathcal{H}^1_{4m}$ a partir de un conjunto de premisas Γ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tal que α_n es α y, para todo $1 \leq i \leq n$, la fórmula α_i es obtenida como sigue:

(i) *α_i es una instancia de una axioma; o*

(ii) *α_i pertenece a Γ; o*

(iii) *existe un conjunto $\{j, k_1, \ldots k_m\} \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ tal que $\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_m}$ es una derivación de $\alpha_j \succ \alpha_i$ (de esta manera α_i es obtenida a partir de α_j y $\alpha_j \succ \alpha_i$ por (MP)); o*

(iv) *existe un conjunto $\{k_1, \ldots k_m\} \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ donde $\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_m}$ es una derivación de una premisa de una regla (Rj) tal que α_i es la conclusión de esa regla (así α_i es obtenida a partir de α_{k_m} por (Rj)); o*

(v) *α_i es de la forma $\alpha_j \wedge \alpha_k$ para $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$ (así α_i es obtenido a partir de α_j y α_k por (Conj)).*

Diremos que α es derivable en $\mathcal{H}^1_{4m}$ a partir de Γ, y escribimos $\Gamma \vdash_1 \alpha$, si existe una derivación de α en $\mathcal{H}^1_{4m}$ a partir de Γ.

Debería notarse que, si $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ es una derivación de α en $\mathcal{H}^1_{4m}$, entonces toda α_i satisface las condiciones (i)-(v) de la Definición 3.5.3(2), y por ello la noción de derivación a partir de premisas en $\mathcal{H}^1_{4m}$ está bien definida. Más aún, $\vdash_1 \alpha$ si, y solo si, $\emptyset \vdash_1 \alpha$, y la siguiente meta-propiedad vale:

Proposición 3.5.4 *(Propiedad de Corte) Si* $\Gamma, \alpha \vdash_1 \beta$ *y* $\Gamma \vdash_1 \alpha$*, entonces* $\Gamma \vdash_1 \beta$*.*

Dem. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha\beta_1 \ldots \beta_n$ es una derivación de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ en $\mathcal{H}^1_{4m}$, y sea $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ una derivación de α a partir de Γ en $\mathcal{H}^1_{4m}$. Entonces, $\alpha_1 \ldots \alpha_m\beta_1 \ldots \beta_n$ es una derivación de β a partir de Γ en $\mathcal{H}^1_{4m}$. ■

A continuación probaremos que ciertas fórmulas son teoremas y ciertas reglas son admisibles (ver la Sección 2.3 del Capítulo 2).

Proposición 3.5.5 *La siguiente regla es admisible en* $\mathcal{H}^1_{4m}$*:*

(T) $\dfrac{\alpha \succ \beta \qquad \beta \succ \gamma}{\alpha \succ \gamma}$.

Dem. De (R3) y (MP). ■

Proposición 3.1 *Las siguientes fórmulas son teoremas de* $\mathcal{H}^1_{4m}$*.*

(T1) $\alpha \succ \alpha$,

(T2) $\alpha \succ (\beta \succ \alpha)$.

Dem. (T1) La siguiente secuencia es una derivación de $\alpha \succ \alpha$ in $\mathcal{H}^1_{4m}$:

$$\top\,(\top \succ (\alpha \succ \alpha))\,(\alpha \succ \alpha).$$

(T2) De $\vdash_1 \beta \succ \top$ y $\vdash_1 \top \succ (\alpha \succ \alpha)$ se tiene que $\vdash_1 \beta \succ (\alpha \succ \alpha)$, por (T). Entonces, de (R1) se tiene $\vdash_1 \alpha \succ (\beta \succ \alpha)$. ■

Proposición 3.5.6 *Las siguientes reglas son admisibles en* $\mathcal{H}^1_{4m}$:

(i) $\dfrac{\beta \succ \gamma}{((\beta \succ \gamma) \succ \gamma) \succ \gamma}$ (ii) $\dfrac{\alpha \succ \gamma \qquad \beta \succ \gamma}{(\alpha \vee \beta) \succ \gamma}$

(iii) $\dfrac{\gamma \succ \alpha \qquad \gamma \succ \beta}{\gamma \succ (\alpha \wedge \beta)}$

Dem. (i)

(1)	$\vdash_1 \beta \succ \gamma$	[hip.]
(2)	$\vdash_1 (\gamma \succ \gamma) \succ (\beta \succ \gamma)$	[(1), R3]
(3)	$\vdash_1 ((\beta \succ \gamma) \succ \gamma) \succ ((\gamma \succ \gamma) \succ \gamma)$	[(2), R3]
(4)	$\vdash_1 (\gamma \succ (\gamma \succ \gamma)) \succ \top$	[(A1)]
(5)	$\vdash_1 \top \succ (\gamma \succ \gamma)$	[(A4)]
(6)	$\vdash_1 (\gamma \succ (\gamma \succ \gamma)) \succ (\gamma \succ \gamma)$	[(4), (5), (T)]
(7)	$\vdash_1 ((\gamma \succ (\gamma \succ \gamma)) \succ (\gamma \succ \gamma)) \succ (((\gamma \succ \gamma) \succ \gamma) \succ \gamma)$	[(A2)]
(8)	$\vdash_1 ((\gamma \succ \gamma) \succ \gamma) \succ \gamma$	[(6), (7), (MP)]
(9)	$\vdash_1 ((\beta \succ \gamma) \succ \gamma) \succ \gamma$	[(3), (8), (T)]

(ii)

(1)	$\vdash_1 \alpha \succ \gamma$	[hip.]
(2)	$\vdash_1 \beta \succ \gamma$	[hip.]
(3)	$\vdash_1 (\gamma \succ \beta) \succ (\alpha \succ \beta)$	[(1), R3]
(4)	$\vdash_1 ((\alpha \succ \beta) \succ \beta) \succ ((\gamma \succ \beta) \succ \beta)$	[(3), R3]
(5)	$\vdash_1 ((\gamma \succ \beta) \succ \beta) \succ ((\beta \succ \gamma) \succ \gamma)$	[(A2)]
(6)	$\vdash_1 ((\alpha \succ \beta) \succ \beta) \succ ((\beta \succ \gamma) \succ \gamma)$	[(4), (5), (T)]
(7)	$\vdash_1 ((\beta \succ \gamma) \succ \gamma) \succ \gamma$	[(2), (i)]
(8)	$\vdash_1 ((\alpha \succ \beta) \succ \beta) \succ \gamma$	[(6), (7), (T)]

(iii) Se deduce de (ii). ■

Ahora estamos en condiciones de establecer una versión débil del Teorema de la Deducción para $\mathcal{H}^1_{4m}$.

Teorema 3.2 *(Meta-teorema de la Deducción) Sean $\alpha, \beta \in \mathfrak{Fm}'$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\alpha \vdash_1 \beta$,

(b) $\vdash_1 \alpha \succ \beta$.

Dem.

(a) $\Rightarrow$ (b): Usamos inducción sobre la longitud n de una derivación de β a partir de α. Si $n = 1$, entonces tenemos los siguientes casos:

(i) $\alpha = \beta$. Entonces, $\vdash_1 \alpha \succ \beta$, por $(T1)$.

(ii) $\vdash_1 \beta$. Como $\vdash \beta \succ (\alpha \succ \beta)$, por $(T2)$, tenemos $\vdash \alpha \succ \beta$, por (MP).

Supongamos que la afirmación vale para toda derivación de longitud k, $k \leq n$. Consideremos ahora una derivación de β a partir de α de longitud $n+1$. Tenemos, entonces, los siguientes casos:

(iii) $\alpha = \beta$ ó $\vdash_1 \beta$. La demostración es como en los casos (i) y (ii).

(iv) Si $\alpha \neq \beta$ y $\nvdash_1 \beta$, entonces β fue obtenido a partir de fórmulas previas en la secuencia mediante alguna regla de inferencia. Como la consecuencia de las reglas (R1)-(R3) son teoremas, las únicas reglas a ser consideradas son (MP) y (Conj). En el primer caso, existe un conjunto $\{i, j_1, \ldots j_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_m}$ es una derivación de $\alpha_i \succ \beta$ y β es obtenido a partir de α_i y $\alpha_i \succ \beta$ mediante la aplicación de (MP). Por la H.I. tenemos $\vdash_1 \alpha \succ \alpha_i$. Luego, por (T), se tiene $\vdash_1 \alpha \succ \beta$. En el segundo caso, β es de la forma $\alpha_j \wedge \alpha_k$ para $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ y β se obtiene de α_j y α_k por (Conj). Por la H.I., $\vdash_1 \alpha \succ \alpha_j$ y $\vdash_1 \alpha \succ \alpha_k$. Por la Proposición 3.5.6(2), $\vdash \alpha \succ \beta$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Consideremos la siguiente derivación:

$$\alpha\alpha_1 \dots \alpha_n\beta$$

donde $\alpha_1 \dots \alpha_n$ es una derivación de $\alpha \succ \beta$ en $\mathcal{H}^1_{4m}$ y β se obtiene de α y $\alpha \succ \beta$ por (MP). ■

El próximo resultado será de mucha utilidad.

Proposición 3.5.7 *Las siguientes condiciones son equivalentes en* $\mathcal{H}^1_{4m}$.

(i) $\vdash_1 \alpha$,

(ii) $\vdash_1 \alpha \succ \top$ *y* $\vdash_1 \top \succ \alpha$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Suponga que $\vdash_1 \alpha$, y sea $\alpha_1 \dots \alpha_n$ una derivación de α. Por (T2), existe una derivación $\beta_1 \dots \beta_m$ de $\alpha \succ (\top \succ \alpha)$. Entonces, la siguiente secuencia es una derivación de $\top \succ \alpha$:

$$\alpha_1 \dots \alpha_n\beta_1 \dots \beta_m(\top \succ \alpha)$$

donde $\top \succ \alpha$ se obtiene a partir de α_n y β_m por (MP). Por otro lado, $\vdash_1 \alpha \succ \top$ se deduce de (A1).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $\alpha_1 \dots \alpha_n$ una derivación de $\top \succ \alpha$. Entonces, $\top\alpha_1 \dots \alpha_n\alpha$ es una derivación de α (recordemos que $\top$ es una derivación de si mismo, por (A0)). ■

Sea $\equiv \subseteq Fm' \times Fm'$ definida por $\equiv =_{def} \{(\alpha, \beta) \ : \ \vdash_1 \alpha \succ \beta \text{ y } \vdash_1 \beta \succ \alpha\}$.

Lema 3.5.8 $\equiv$ *es una congruencia sobre* $\mathfrak{Fm}'$.

Dem. Claramente $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{Fm}'$. Además, a partir del conjunto de hipótesis

$$\{\vdash_1 \alpha \succ \beta, \vdash_1 \beta \succ \alpha, \vdash_1 \gamma \succ \delta, \vdash_1 \delta \succ \gamma\}$$

se tiene que $\vdash_1 (\alpha \succ \gamma) \succ (\beta \succ \delta)$. En efecto, considere la siguiente (meta)derivación sintáctica:

(1) $\vdash_1 \alpha \succ \beta$ [(hip.)]

(2) $\vdash_1 \beta \succ \alpha$ [(hip.)]

(3) $\vdash_1 \gamma \succ \delta$ [(hip.)]

(4) $\vdash_1 \delta \succ \gamma$ [(hip.)]

(5) $\vdash_1 (\alpha \succ \gamma) \succ (\beta \succ \gamma)$ [(2),(R3)]

(6) $\vdash_1 (\beta \succ \gamma) \succ (\beta \succ \delta)$ [(3),(4),(R2)]

(7) $\vdash_1 (\alpha \succ \gamma) \succ (\beta \succ \delta)$ [(5), (6), (T)]

Análogamente, a partir del mismo conjunto de hipótesis de antes, se prueba que $\vdash_1 (\beta \succ \delta) \succ (\alpha \succ \gamma)$. ■

Teorema 3.5.9 *El álgebra de Lindenbaum* $\mathfrak{Fm}'/\equiv$ *de* $\mathcal{H}^1_{4m}$ *es un álgebra tetravalente modal contrapositiva definiendo:* $|\alpha| \succ |\beta| =_{def} |\alpha \succ \beta|$ *y* $0 =_{def} |\bot|$ *donde* $|\gamma|$ *denota la clase de equivalencia de la fórmula* γ. *Más aún,* $|\alpha| \leq |\beta|$ *si, y solo si,* $\vdash_1 \alpha \succ \beta$.

Dem. Por el Lema 3.5.8, sabemos que las operaciones en $\mathfrak{Fm}'/\equiv$ están bien definidas. Denotemos con 1 a $0 \succ 0$. Notemos que $|\alpha| = 1$ si, y solo si, $\vdash_1 \alpha$, por la Proposición 3.5.7. El hecho que $\mathfrak{Fm}'/\equiv \in \mathbf{TMA}^c$ es una consecuencia directa de los axiomas y reglas de inferencia de $\mathcal{H}^1_{4m}$, las cuales reflejan fielmente la definición de las TMA^{c}s (ver la Definición 3.3.3). En particular, (A2) codifica (C3) y (A5) representa a (C5), mientras que (C8) está codificado por el axioma (A6). Dejamos los detalles de la demostración al lector. ■

Teorema 3.5.10 *(Correctitud y Completitud de $\mathcal{H}^1_{4m}$) Las siguientes condiciones son equivalentes, para todo subconjunto $\Gamma \cup \{\beta\}$ de Fm':*

(i) $\Gamma \vdash_1 \beta$,

(ii) $\Gamma \models_{M_{4m}} \beta$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii) (Correctitud): Es fácil ver que todo axioma de $\mathcal{H}^1_{4m}$ es válido en M_4 (cf. Definición 3.1.2). Por otro lado, si una instancia de una premisa de una regla (Rj) es válida en M_4 entonces la respectiva conclusión por (Rj) es también válida en M_4. Si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{M}_{4m})$ es tal que $h(\alpha) \in \{1, N\}$ y $\alpha \succ \beta$ es válido, entonces $h(\beta) \in \{1, N\}$. Finalmente, si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{M}_{4m})$ es tal que $h(\alpha), h(\beta) \in \{1, N\}$, entonces $h(\alpha \wedge \beta) \in \{1, N\}$.
Supongamos, ahora, que $\Gamma \vdash_1 \beta$, y sea $\alpha_1 \dots \alpha_n$ una derivación de β en $\mathcal{H}^1_{4m}$ a partir Γ. Sea $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma : \alpha = \alpha_i$ para algún $1 \leq i \leq n\}$. Por inducción sobre n es fácil verificar que $\Gamma_0 \models_{M_{4m}} \beta$, usando la Definición 3.5.3(2) y por las observaciones anteriores. Por lo tanto, $\Gamma \models_{M_{4m}} \beta$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) (Completitud): Supongamos que $\Gamma \models_{M_{4m}} \beta$. Por la Definición 3.1.2, existe un subconjunto finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \models_{M_{4m}} \beta$. Sea γ igual a $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$. Como $h(\alpha \wedge \delta) \in \{1, N\}$ implica que $h(\alpha), h(\delta) \in \{1, N\}$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{M}_{4m})$, entonces $\gamma \models_{M_{4m}} \beta$. De aquí, $\models_{M_{4m}} \gamma \succ \beta$. Esto significa que $h(\gamma \succ \beta) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{U})$ y todo $\mathfrak{U} \in \mathbf{TMA}^c$, por la Observación 3.3.4. En particular, $h(\gamma \succ \beta) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{Fm}'/\equiv)$, por el Teorema 3.5.9. Sea $h : \mathfrak{Fm}' \to \mathfrak{Fm}'/\equiv$ la

aplicación canónica $h(\delta) = |\delta|$. Entonces, $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{Fm}'/\equiv)$ y $|\gamma \succ \beta| = 1$. Luego, $\vdash_1 \gamma \succ \beta$, por la Proposición 3.5.7. De esta manera, $\gamma \vdash_1 \beta$, por el Teorema 3.2 y por eso $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash_1 \beta$, por (Conj). Por lo tanto, $\Gamma \vdash_1 \beta$. ■

El cálculo $\mathcal{H}^1_{4m}$ es una contrapartida sintáctica (estilo Hilbert) de las TMA^{c}s, o equivalentemente, de la lógica M_{4m} presentada en el lenguaje $\succ$, $\perp$. Este cálculo es relativamente simple, pero tiene muchas reglas de inferencia, lo cual incrementa la complejidad de su meta-lógica, esto es, el análisis de las meta-propiedades formales. Es posible sustituir a las reglas (R1)-(R3) por axiomas que envuelvan al operador de necesidad $\Box$, debido al hecho que esas reglas son *globales*, esto es, concerniendo a la teoremicidad (theoremhood) (ver Observación 3.5.2). Tomemos, por ejemplo, a la regla de inferencia

$$\text{(R1)} \quad \frac{\vdash \alpha \succ (\beta \succ \gamma)}{\vdash \beta \succ (\alpha \succ \gamma).}$$

Observemos que

$$(*) \qquad \models_{M_{4m}} \alpha \quad \text{si, y solo si,} \quad \models_{M_{4m}} \Box\alpha$$

para todo $\alpha \in Fm$. Por la completitud de $\mathcal{H}^1_{4m}$, y teniendo en cuenta la interdefinibilidad de los lenguajes $\mathfrak{Fm}$ y $\mathfrak{Fm}'$, se deduce que: $\vdash_1 \alpha$ si, y solo si, $\vdash_1 \Box\alpha$. Acá, $\Box\alpha$, con $\alpha \in Fm'$, representa a $(\alpha \succ (\alpha \succ \perp)) \succ \perp$.

Ahora, observemos que la regla (R1) puede ser obtenida a partir del axioma

$$\text{(AxR1)} \quad \Box(\alpha \succ (\beta \succ \gamma)) \succ \Box(\beta \succ (\alpha \succ \gamma))$$

en cualquier sistema con (MP) como en $\mathcal{H}^1_{4m}$ y tal que, $\vdash \alpha$ sii $\vdash \Box\alpha$ vale. De hecho, asumiendo que $\vdash \alpha \succ (\beta \succ \gamma)$, se tiene que $\vdash \Box(\alpha \succ (\beta \succ \gamma))$. Luego, por (MP) con (AxR1) se deduce que $\vdash \Box(\beta \succ (\alpha \succ \gamma))$. Pero entonces, $\vdash \beta \succ (\alpha \succ \gamma)$ y, por lo tanto, (R1) es admisible. [2]

[2]En rigor, deberíamos decir que la regla $\alpha \succ (\beta \succ \gamma) \ / \ \beta \succ (\alpha \succ \gamma)$ es admisible.

Concerniendo a (R2), considere el axioma

$$\text{(AxR2)}\quad \Box(\alpha \succ \beta) \succ (\Box(\beta \succ \alpha) \succ \Box((\gamma \succ \alpha) \succ (\gamma \succ \beta))).$$

Entonces, la regla (R2) puede ser obtenida a partir de (AxR2) en cualquier sistema con (MP) como en $\mathcal{H}^1_{4m}$, y tal que, $\vdash \alpha$ si, y solo si, $\vdash \Box\alpha$ vale. En efecto, supongamos que $\vdash \alpha \succ \beta$ y $\vdash \beta \succ \alpha$, entonces $\vdash \Box(\alpha \succ \beta)$ y $\vdash \Box(\beta \succ \alpha)$ y, por eso, $\vdash \Box((\gamma \succ \alpha) \succ (\gamma \succ \beta))$, por el axioma (AxR2) y (MP) dos veces. De acá, $\vdash (\gamma \succ \alpha) \succ (\gamma \succ \beta)$ y, por lo tanto, (R2) es una regla admisible.

Finalmente, (R3) puede ser obtenida análogamente a partir del axioma

$$\text{(AxR3)}\quad \Box(\alpha \succ \beta) \succ \Box((\beta \succ \gamma) \succ (\alpha \succ \gamma))$$

como sigue: supongamos que $\vdash \alpha \succ \beta$, entonces $\vdash \Box(\alpha \succ \beta)$ y, luego, $\vdash \Box((\beta \succ \gamma) \succ (\alpha \succ \gamma))$, por (MP) y (AxR3). Pero entonces, $\vdash (\beta \succ \gamma) \succ (\alpha \succ \gamma)$ y, por lo tanto, (R3) también es admisible.

Esta es la estrategia adoptada para introducir una variante del cálculo $\mathcal{H}^1_{4m}$ con el objeto de caracterizar alternativamente a la lógica M_{4m} en el lenguaje $\succ$, $\bot$.

Definición 3.5.11 *Denotaremos con* $\mathcal{H}^2_{4m} = \langle Fm', \vdash_2 \rangle$ *a la lógica proposicional obtenida a partir de* $\mathcal{H}^1_{4m}$ *removiendo las reglas* $(R1)$, $(R2)$ *y* $(R3)$, *y anexando los axiomas (AxR1)-(AxR3) como antes, conjuntamente con el axioma*

$$(\text{Ax}\,\Box)\quad \Box\alpha \succ \alpha$$

y la regla de inferencia

$$(\text{Nec})\quad \frac{\vdash \alpha}{\vdash \Box\alpha}.$$

La noción de derivación $\vdash_2 \alpha$, *y la de una derivación a partir de premisas* $\Gamma \vdash_2 \alpha$, *se define en* $\mathcal{H}^2_{4m}$ *modificando adecuadamente a la Definición 3.5.3.*

Teorema 3.5.12 *Los cálculos* $\mathcal{H}^1_{4m}$ *y* $\mathcal{H}^2_{4m}$ *son equivalentes.*

Dem. Observemos que $\mathcal{H}^2_{4m}$ es un sistema sobre el lenguaje Fm' con (MP) como en $\mathcal{H}^1_{4m}$ y tal que la meta-propiedad $\vdash_2 \alpha$ si, y solo si, $\vdash_2 \Box\alpha$ vale, puesto que puede ser fácilmente obtenida de (Ax$\Box$), (Nec) y (MP). Como (AxR1)-(AxR3) son axiomas de $\mathcal{H}^2_{4m}$, entonces (R1)-(R3) son reglas admisibles de $\mathcal{H}^2_{4m}$, como se mostró anteriormente. De aquí, se tiene que $\mathcal{H}^1_{4m}$ está contenido en $\mathcal{H}^2_{4m}$ en el siguiente sentido: $\Gamma \vdash_1 \alpha$ implica $\Gamma \vdash_2 \alpha$, para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm'$.
Recíprocamente, como los axiomas (AxR1)-(AxR3) son válidos en M_{4m}, entonces son derivables en $\mathcal{H}^1_{4m}$, por el Teorema 3.5.10. Lo mismo vale para (Ax$\Box$). Finalmente, (Nec) es una regla de inferencia admisible de $\mathcal{H}^1_{4m}$. Luego, $\mathcal{H}^2_{4m}$ está contenido en $\mathcal{H}^1_{4m}$, esto es: $\Gamma \vdash_2 \alpha$ implica $\Gamma \vdash_1 \alpha$, para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm'$. Esto completa la demostración. ■

Corolario 3.5.13 *(Correctitud y completitud) Las siguientes condiciones son equivalentes, para todo subconjunto* $\Gamma \cup \{\beta\}$ *de* Fm'*:*

(i) $\Gamma \vdash_2 \beta$,

(ii) $\Gamma \models_{M_{4m}} \beta$.

Observación 3.5.14 *Debería notarse que la presentación de* $\mathcal{H}^2_{4m}$ *hace uso esencial de la modalidad* $\Box$*, a pesar de que esta no es un operador primitivo de la signatura. Por* *lo tanto, podría ser conveniente presentar $\mathcal{H}^2_{4m}$ en la signatura que contenga a $\succ$, $\neg$ y $\Box$ como primitivos. De cualquier forma, los detalles técnicos de tal tarea son triviales y no serán tratados acá.*

A continuación presentaremos un tercer cálculo de Hilbert para M_{4m}, en el cual la noción de derivabilidad será la usual para lógicas modales.

Definición 3.5.15 *Denotemos con $\mathcal{H}^3_{4m} = \langle Fm', \vdash_3 \rangle$ a la lógica proposicional definida a través del siguiente cálculo de Hilbert, donde α, β, $\gamma \in Fm'$, y con las notaciones anteriores.*

Axiomas

(B1) $\alpha \succ \alpha$,

(B2) $\alpha \succ (\beta \succ \alpha)$

(A2) $(\alpha \vee \beta) \succ (\beta \vee \alpha)$

(A3) $\perp \succ \alpha$

(B5) $(\alpha \succ (\alpha \succ \beta)) \vee \alpha$

(A6) $((\alpha \vee \beta) \succ \gamma) \succ ((\alpha \succ \gamma) \wedge (\beta \succ \gamma))$

(B7) $\Box(\alpha \succ (\beta \succ \gamma)) \succ \Box(\beta \succ (\alpha \succ \gamma))$

(B8) $\Box(\alpha \succ \beta) \succ (\Box(\beta \succ \alpha) \succ \Box((\gamma \succ \alpha) \succ (\gamma \succ \beta)))$

(B9) $\Box(\alpha \succ \beta) \succ \Box((\beta \succ \gamma) \succ (\alpha \succ \gamma))$

(B10) $\Box\alpha \succ \alpha$

Reglas de inferencia

(MP) $\dfrac{\alpha \qquad \alpha \succ \beta}{\beta}$ (Conj) $\dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ (Nec) $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

La definición de derivación en $\mathcal{H}^3_{4m}$ corresponde a la usual en sistemas de Hilbert modales (ver Definición 1.1.5). Es decir:

Definición 3.5.16 *(1) Una derivación de una fórmula α en $\mathcal{H}^3_{4m}$ es una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tal que α_n es α y todo α_i es una instancia de un axioma o es consecuencia de alguna regla de inferencia cuyas premisas aparecen en la secuencia $\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}$. Decimos que α es derivable en $\mathcal{H}^3_{4m}$, y escribimos $\vdash_3 \alpha$, si existe una derivación de ella en $\mathcal{H}^3_{4m}$.*
(2) Sea Γ un conjunto de fórmulas. Decimos que α es derivable en $\mathcal{H}^3_{4m}$ a partir de Γ, y escribimos $\Gamma \vdash_3 \alpha$, si $\vdash_3 \alpha$ o bien existe un subconjunto finito, no vacío $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $(\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \wedge (\ldots \wedge (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \ldots))) \succ \alpha$ es derivable en $\mathcal{H}^3_{4m}$.

Observación 3.5.17 *La definición anterior implica que $\emptyset \vdash_3 \alpha$ si, y solo si, $\vdash_3 \alpha$. Es fácil probar que $\alpha \vdash_3 \beta$ si, y solo si, $\vdash_3 \alpha \succ \beta$, y por lo tanto el Meta-teorema de la Deducción es forzado a ser válido, el cual refleja al Teorema 3.3.8. Sin embargo, como fuera establecido en la Proposición 3.3.9, la versión general del Meta-teorema de la Deducción no es válido en M_{4m} y, por lo tanto, esta es básicamente una lógica de tautologías (o teoremas). Este es el caso de la vasta mayoría de las lógicas modales estudiadas en la literatura, donde una lógica modal es simplemente presentada como conjunto de fórmulas (cf. [8]). Esto justifica la definición de derivación a partir de premisas en el cálculo $\mathcal{H}^3_{4m}$ propuesta anteriormente, la cual es similar a la usada en el contexto de las lógicas modales (ver Definición 1.1.5).*

Proposición 3.5.18 *Las siguientes reglas son admisibles en $\mathcal{H}_{4m}$:*

(R1) $\dfrac{\alpha \succ (\beta \succ \gamma)}{\beta \succ (\alpha \succ \gamma)}$ (R2) $\dfrac{\alpha \succ \beta \quad \beta \succ \alpha}{(\gamma \succ \alpha) \succ (\gamma \succ \beta)}$

(R3) $\dfrac{\alpha \succ \beta}{(\beta \succ \gamma) \succ (\alpha \succ \gamma)}$ (T) $\dfrac{\alpha \succ \beta \quad \beta \succ \gamma}{\alpha \succ \gamma}$

(R4) $\dfrac{\alpha \succ \gamma \qquad \beta \succ \gamma}{(\alpha \vee \beta) \succ \gamma}$ (R5) $\dfrac{\gamma \succ \alpha \qquad \gamma \succ \beta}{\gamma \succ (\alpha \wedge \beta)}$

Dem.

(R1): Observe que $\vdash_3 \alpha$ si, y solo si, $\vdash_3 \Box\alpha$, por (B10), (Nec) y (MP). Además, asumiendo $\vdash_3 \alpha \succ (\beta \succ \gamma)$, se tiene que $\vdash_3 \Box(\alpha \succ (\beta \succ \gamma))$. Entonces, por (MP) con (B7), se prueba que $\vdash_3 \Box(\beta \succ (\alpha \succ \gamma))$. Pero entonces, $\vdash_3 \beta \succ (\alpha \succ \gamma)$ y, por lo tanto, (R1) es admisible. La admisibilidad de las reglas (R2) y (R3) se prueba análogamente, usando (B8) y (B9), respectivamente.

(T): Sale de (R3) y (MP).

(R4) La demostración es análoga a la exhibida en 3.5.6 (ii).

(R5) De (R4) y las propiedades básicas de la negación $\neg$. ■

Proposición 3.5.19 *En $\mathcal{H}^3_{4m}$ vale lo siguiente:*

(i) $\vdash_3 \alpha \succ \top$;

(ii) $\vdash_3 \alpha$ *si, y solo si,* $\vdash_3 \alpha \succ \top$ *y* $\vdash_3 \top \succ \alpha$.

Dem.

(i) Por (B2) se tiene que $\vdash_3 \bot \succ (\alpha \succ \bot)$. Por (R1) (cf. Proposición 3.5.18) se tiene que $\vdash_3 \alpha \succ (\bot \succ \bot)$, esto es, $\vdash_3 \alpha \succ \top$.

(ii) Supongamos que $\vdash_3 \alpha$. Como $\alpha \succ (\top \succ \alpha)$ es una instancia de (B2), entonces $\vdash_3 \top \succ \alpha$ se deduce de (MP). Por otro lado, de (i) se tiene $\vdash_3 \alpha \succ \top$. Recíprocamente, supongamos que $\vdash_3 \top \succ \alpha$. Como $\vdash_3 \top$, por (B1), sigue $\vdash_3 \alpha$ usando (MP). ■

Sea $\equiv \subseteq Fm' \times Fm'$ definida por $\equiv =_{def} \{(\alpha, \beta) : \vdash_3 \alpha \succ \beta$ and $\vdash_3 \beta \succ \alpha\}$.

Lema 3.5.20 *La relación $\equiv$ es una congruencia sobre $\mathfrak{Fm}'$.*

Dem. Análoga a la demostración del Lema 3.5.8. ■

Teorema 3.5.21 *El álgebra de Lindenbaum $\mathfrak{Fm}'/\equiv$ de $\mathcal{H}^3_{4m}$ es un álgebra tetravalente modal contrapositiva definiendo: $|\alpha| \succ |\beta| =_{def} |\alpha \succ \beta|$ y $0 =_{def} |\bot|$ donde $|\gamma|$ denota la clase de equivalencia de γ.*

Dem. Las operaciones en $\mathfrak{Fm}'/\equiv$ están bien definidas, por el Lema 3.5.20. Con 1 denotamos a $0 \succ 0$, esto es, $1 = |\top|$. Notemos que $|\alpha| = 1$ si, y solo si, $\vdash_3 \alpha$, por la Proposición 3.5.19(ii). El hecho que $\mathfrak{Fm}'/\equiv \in \mathbf{TMA}^c$ es una consecuencia directa de los axiomas y reglas de inferencia de $\mathcal{H}^3_{4m}$, las cuales reflejan fielmente la definición de TMA^{c}s (ver Definición 3.3.3). En particular, (A2) representa a (C3) y (B5) representa (C5), mientras que (C7) está dado por el axioma (B6). ■

Teorema 3.5.22 *(Correctitud y completitud de $\mathcal{H}^3_{4m}$) Las siguientes condiciones son equivalentes, para todo subconjunto $\Gamma \cup \{\beta\}$ de Fm':*

(i) $\Gamma \vdash_3 \beta$,

(ii) $\Gamma \models_{M^c_{4m}} \beta$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii) (Correctitud): Es fácil ver que cada axioma de $\mathcal{H}^3_{4m}$ es válido en M^c_{4m} (cf. Observación 3.3.4). Por otro lado, si una instancia de las premisas de una regla de inferencia es válida en M^c_{4m} entonces, la respectiva conclusión es también válida en M^c_{4m}. Supongamos ahora que $\Gamma \vdash_3 \beta$. Si $\vdash_3 \beta$, sea $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ una derivación de β en $\mathcal{H}^3_{4m}$. Usando inducción sobre k, es fácil ver que β es válido en M^c_{4m}, por las observaciones anteriores. Por otro lado, si $\nvdash_3 \beta$, existe un subconjunto finito $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\vdash_3 \delta$, donde δ es $(\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \wedge (\ldots \wedge (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \ldots))) \succ \alpha$. Como se observara anteriormente, δ es válido en M^c_{4m}, y, por lo tanto $\Gamma_0 \models_{M^c_{4m}} \beta$. Luego, $\Gamma \models_{M^c_{4m}} \beta$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) (Completitud): Supongamos que $\Gamma \models_{M^c_{4m}} \beta$. Por la Observación 3.3.4, existe un subconjunto finito $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \models_{M^c_{4m}} \beta$. Si $n = 0$, esto es, si $\models_{M^c_{4m}} \beta$, entonces $h(\beta) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{U})$ y todo $\mathfrak{U} \in \mathbf{TMA}^c$. En particular, $h(\beta) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{Fm}'/{\equiv})$, por el Teorema 3.5.21. Sea $h : \mathfrak{Fm}' \to \mathfrak{Fm}'/{\equiv}$ la aplicación canónica dada por $h(\delta) = |\delta|$, para todo δ. Entonces, $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{Fm}'/{\equiv})$ y, por lo tanto, $|\beta| = 1$. Por la Proposición 3.5.19(ii), se tiene que $\vdash_3 \beta$. De esta manera, $\Gamma \vdash_3 \beta$, por la definición de derivación en $\mathcal{H}^3_{4m}$. Por otro lado, si $n > 0$, sea γ la fórmula $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n$. Como $h(\alpha \wedge \delta) \in \{1, N\}$, tenemos que $h(\alpha), h(\delta) \in \{1, N\}$, para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}', \mathfrak{M}^c_{4m})$, entonces $\gamma \models_{M^c_{4m}} \beta$. De acá, $\models_{M^c_{4m}} \gamma \succ \beta$. Luego, $\vdash_3 \gamma \succ \beta$, teniendo en cuenta la primer parte de la demostración. Por lo tanto, $\Gamma \vdash_1 \beta$, por la definición de derivación en $\mathcal{H}^3_{4m}$. ■

3.6 Un sistema de tableau para M_{4m}

Recordemos que en [31] fue presentado un cálculo de secuentes para M_{4m}, el cual fue reproducido aqui en la Sección 1.2.3 del Capítulo 1. Como veremos en la Sección 4.1, este cálculo no goza de la propiedad de eliminación de corte y entonces no provee un método decidible para chequear validez en M_{4m}. Claro que los cálculos de Hilbert introducidos en la sección anterior no aportan mucho a la cuestión de dar un método decidible, dentro de la teoría (proof-theoretic), para la lógica tetravalente modal. En esta sección, adaptando técnicas generales introducidas en [11], definiremos un sistema de tableau decidible para chequear validez en la lógica M_{4m}. Esto constituye, hasta donde nosotros sabemos, el primer procedimiento de decisión (proof-theoretic) introducido en la literatura para chequear validez en la lógica tetravalente modal, además de las tablas de verdad de cuatro valores de M_{4m}.

El procedimiento para encontrar un conjunto de reglas de tableau para M_{4m} está basado en el método general presentado en [11] para obtener semánticas bivaluadas y reglas de tableau para una amplia clase de matrices lógicas finitas (ver [12] para un mayor desarrollo de esta técnica). La matriz lógica dada debe satisfacer solo una condición: ser lo suficientemente expresiva para **separar** (diferenciar) los diferentes valores de verdad de la misma clase, a saber, distinguidos y no distinguidos.

Puesto que estamos interesados en solo un ejemplo, la lógica M_{4m}, simplificaremos el procedimiento para obtener las reglas de tableau sin entrar en los detalles de la construcción general presentados en [11] y en [12]. Más aún, para el beneficio del lector, presentaremos pruebas originales de correctitud y completitud del sistema de tableau generado, generalizando las pruebas clásicas de [57], y, es por esto que, esta sección es completamente autocontenida.

Por simplicidad, y tomando ventaja una vez más de la implicación contrapositiva, utilizaremos el lenguaje $\mathfrak{Fm}'' = \langle Fm'', \succ, \neg \rangle$. La utilización de $\neg$ en lugar de $\perp$ como conectivo primitivo será conveniente para simplificar la presentación de las reglas, además de que la negación $\neg$ jugará un rol fundamental en lo que sigue. Cabe notar que el poder expresivo de $\mathfrak{Fm}''$ es el mismo que el de $\mathfrak{Fm}'$, puesto que $\perp$ puede ser definido en la primera como $\neg(\alpha \succ \alpha)$, para cualquier α. Además, las reglas de tableau serán extendidas al lenguaje usual $\mathfrak{Fm}$ de las álgebras tetravalentes modales.

En las subsecciones siguientes, asumiremos que el lector está familiarizado con la definición de tableau, como así también con las nociones relacionadas de reglas de clausura, ramas abiertas y cerradas, etc.. Para más detalles se puede consultar [57].

3.6.1 Separando valores de verdad de M_{4m}

De ahora en más, M_{4m} será vista como la matriz lógica $\mathcal{M}_N = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{N, 1\} \rangle$ (cf. Proposición 3.2.4(i)). Consideremos la función $f : M_4 \to \{T, F\}$ dada por $f(1) = f(N) = T$ y $f(0) = f(B) = F$. Esta función parte los valores de verdad en dos clases: los distinguidos y los no distinguidos.

Considere ahora la fórmula $\neg p$ en Fm''. Esta fórmula (vista como un operador sobre M_4) "separa" los valores de verdad de M_{4m} como sigue: dado $x \in M_4$,

$x = 1$ si, y solo si, $f(x) = T$ y $f(\neg x) = F$;

$x = N$ si, y solo si, $f(x) = T$ y $f(\neg x) = T$;

$x = B$ si, y solo si, $f(x) = F$ y $f(\neg x) = F$;

$x = 0$ si, y solo si, $f(x) = F$ y $f(\neg x) = T$.

De acá se tiene que:

$$(\ddagger) \begin{cases} x \in \{1, N\} & \text{si, y solo si, } \ f(x) = T; \\ x \in \{1, B\} & \text{si, y solo si, } \ f(\neg x) = F; \\ x \in \{0, B\} & \text{si, y solo si, } \ f(x) = F; \\ x \in \{0, N\} & \text{si, y solo si, } \ f(\neg x) = T. \end{cases}$$

3.6.2 Describiendo las tablas de verdad de $\succ$ en términos de T/F

Por inspección de la tabla de verdad de $\succ$ y usando (‡) se tiene que, para todo $x, y \in M_4$:

$$f(x \succ y) = T \text{ sii } \begin{cases} \qquad\qquad f(y) = T & \text{ó} \\ f(\neg x) = T, \quad f(y) = F,\ f(\neg y) = T & \text{ó} \\ f(x) = F, \quad f(y) = F,\ f(\neg y) = F. & \end{cases}$$

$$f(x \succ y) = F \text{ sii } \begin{cases} f(x) = T, \quad f(y) = F,\ f(\neg y) = F & \text{ó} \\ f(\neg x) = F, \quad f(y) = F,\ f(\neg y) = T. & \end{cases}$$

$$f(\neg(x \succ y)) = T \text{ sii } \begin{cases} f(x) = T, \quad f(y) = F,\ f(\neg y) = T & \text{ó} \\ f(\neg x) = F, \quad f(y) = T,\ f(\neg y) = T. & \end{cases}$$

$$f(\neg(x \succ y)) = F \text{ sii } \begin{cases} \qquad\qquad f(\neg y) = F & \text{ó} \\ f(\neg x) = T, \quad f(y) = T,\ f(\neg y) = T & \text{ó} \\ f(x) = F, \quad f(y) = F,\ f(\neg y) = T. & \end{cases}$$

3.6.3 Obteniendo las reglas de tableau para M_{4m}

Sustituyendo en las expresiones anteriores los valores de verdad x, y por las fórmulas α, β de Fm'', y sustituyendo las ecuaciones "$f(x) = T$" y "$f(x) = F$" por las fórmulas signadas $T(\alpha)$ y $F(\alpha)$, respectivamente, obtenemos automáticamente las siguientes reglas de tableau para M_{4m}:

$$\frac{T(\alpha \succ \beta)}{T(\beta) \mid T(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta) \mid F(\alpha), F(\beta), F(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \succ \beta)}{T(\alpha), F(\beta), F(\neg\beta) \mid F(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\neg(\alpha \succ \beta))}{T(\alpha), F(\beta), T(\neg\beta) \mid F(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\neg(\alpha \succ \beta))}{F(\neg\beta) \mid T(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta) \mid F(\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\neg\neg\alpha)}{T(\alpha)} \qquad \frac{F(\neg\neg\alpha)}{F(\alpha)}$$

Regla de clausura:

$$\frac{T(\alpha), F(\alpha)}{\star}$$

Sea $\mathbb{T}$ un sistema de tableau definido por las anteriores reglas. Dada la fórmula signada η, un tableau completo comenzando con η se denomina *un tableau para* η. Decimos que una fórmula α en Fm'' es *probable en* $\mathbb{T}$, y lo notamos $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$, si existe un tableau cerrado para la fórmula signada $F(\alpha)$.

3.6.4 Reglas derivadas para los restantes conectivos

Dado un sistema de tableau, en general, es conveniente definir reglas derivadas con el propósito de obtener demostraciones más cortas. Este es el objetivo de esta sección, en la cual obtendremos, entre otras cosas, reglas de tableau relativamente simples para el lenguaje estandar $\mathfrak{Fm}$ de M_{4m}.

Comenzaremos estableciendo un conjunto fundamental de reglas derivadas:

Proposición 3.6.1 *Las siguientes reglas pueden ser derivadas en* $\mathbb{T}$*:*

$$\frac{T(\alpha \succ \beta), T(\neg(\alpha \succ \beta))}{F(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta) \mid T(\alpha), T(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \succ \beta), F(\neg(\alpha \succ \beta))}{T(\alpha), F(\beta), F(\neg\beta) \mid F(\alpha), F(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\alpha \succ \beta), F(\neg(\alpha \succ \beta))}{F(\alpha), F(\beta) \mid T(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta) \mid T(\beta), F(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \succ \beta), T(\neg(\alpha \succ \beta))}{T(\alpha), F(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

Dem. Directo, utilizando las reglas de $\mathbb{T}$. ■

Ahora derivaremos reglas de tableau para los conectivos originales de M_{4m}. Recordemos de la Proposición 3.3.2 que $\alpha \vee \beta =_{def} (\alpha \succ \beta) \succ \beta$, $\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ y $\Box\alpha =_{def} \neg(\alpha \succ \neg\alpha)$.

Proposición 3.6.2 *Las siguientes reglas pueden ser derivadas en* $\mathbb{T}$*:*

$$\frac{T(\alpha \vee \beta)}{T(\alpha) \mid T(\beta)} \qquad \frac{T(\neg(\alpha \vee \beta))}{T(\neg\alpha), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \vee \beta)}{F(\alpha), F(\beta)} \qquad \frac{F(\neg(\alpha \vee \beta))}{F(\neg\alpha), \mid F(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\alpha \wedge \beta)}{T(\alpha), T(\beta)} \qquad \frac{T(\neg(\alpha \wedge \beta))}{T(\neg\alpha) \mid T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \wedge \beta)}{F(\alpha) \mid F(\beta)} \qquad \frac{F(\neg(\alpha \wedge \beta))}{F(\neg\alpha), F(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\Box\alpha)}{T(\alpha), F(\neg\alpha)} \qquad \frac{F(\Box\alpha)}{F(\alpha) \mid T(\neg\alpha)} \qquad \frac{T(\neg\Box\alpha)}{F(\Box\alpha)} \qquad \frac{F(\neg\Box\alpha)}{T(\Box\alpha)}$$

Dem. Directo, utilizando las reglas de $\mathbb{T}$ y la Proposición 3.6.1. ■

3.6.5 Correctitud y completitud de $\mathbb{T}$

Ahora probaremos que $\mathbb{T}$ es adecuado, esto es, que $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$ si, y solo si, $\models_{M_{4m}} \alpha$, para toda fórmula α. Comenzaremos introduciendo algunas definiciones y resultados previos.

Dada una fórmula $\alpha \in Fm''$, el *grado* de α, denotado por $d(\alpha)$, es un número natural definido como sigue: $d(p) = 1$ (para $p \in Var$); $d(\alpha \succ \beta) = d(\alpha) + d(\beta) + 1$; $d(\neg\alpha) = d(\alpha) + 1$.

Es claro que el grado de las fórmulas que ocurren en la conclusión de la regla de $\mathbb{T}$ es estrictamente menor que el grado de la premisa de la regla. Luego, es inmediato probar el siguiente resultado que será muy útil.

Proposición 3.6.3 *Dada una fórmula signada η, siempre es posible construir un tableau completo para η (abierto o cerrado).*

Dem. Directo. ■

Dado un homomorfismo $h : \mathfrak{Fm}'' \to \mathfrak{M}_{4m}$ y una fórmula signada η, decimos que h *satisface* η si

– $\eta = T(\alpha)$ y $h(\alpha) \in \{1, N\}$;

– $\eta = F(\alpha)$ y $h(\alpha) \in \{0, B\}$;

Se deduce, entonces, que h satisface $T(\neg\alpha)$ sii $h(\alpha) \in \{0, N\}$, y h satisface $F(\neg\alpha)$ si, y solo si, $h(\alpha) \in \{1, B\}$.
Sea Υ un conjunto de fórmulas signadas. Entonces h *satisface* Υ si h satisface η, para todo $\eta \in \Upsilon$.

Lema 3.6.4 *Sea $h : \mathfrak{Fm}'' \to \mathfrak{M}_{4m}$ un homomorfismo, y sea*

$$\frac{\eta}{\Upsilon_1 \mid \ldots \mid \Upsilon_n}$$

una regla de $\mathbb{T}$. Si h satisface η, entonces h satisface Υ_i, para algún $1 \leq i \leq n$.

Dem. Prueba por casos. ■

Proposición 3.6.5 *Si $\not\models_{M_{4m}} \alpha$, entonces todo tableau completo para $F(\alpha)$ es abierto.*

Dem. Supongamos que $\not\models_{M_{4m}} \alpha$ y supongamos que existe un tableau cerrado completo $\mathcal{T}$ para $F(\alpha)$. Como $\not\models_{M_{4m}} \alpha$, existe un homomorfismo h tal que $h(\alpha) \in \{0, B\}$. De esta manera, h satisface $F(\alpha)$. Por los lemas anteriores, h debe satisfacer que el conjunto de fórmulas signadas que ocurren en alguna rama θ de $\mathcal{T}$. Puesto que $\mathcal{T}$ es cerrado, la rama θ es cerrada, esto es, la regla de clausura fue usada en θ. Pero es una tarea fácil verificar que ningún homomorfismo puede satisfacer simultaneamente ambas premisas de la regla de clausura. Esto nos conduce a una contradicción, y entonces, todo tableau completo para $F(\alpha)$ debe ser abierto. ■

Corolario 3.6.6 (Correctitud de $\mathbb{T}$) *Si $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$, entonces $\models_{M_{4m}} \alpha$.*

Con el propósito de probar la completitud, necesitamos establecer el siguiente resultado.

Proposición 3.6.7 *Sea θ una rama abierta de un tableau abierto completo $\mathcal{T}$, y sea Υ el conjunto de fórmulas signadas que ocuren en θ. Sea h un homomorfismo tal que, para todo $\alpha \in Var$:*

$$(\ddagger\ddagger)\begin{cases} h(\alpha) \in \{1, N\} & si \;\; T(\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{1, B\} & si \;\; F(\neg\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{0, B\} & si \;\; F(\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{0, N\} & si \;\; T(\neg\alpha) \in \Upsilon. \end{cases}$$

En cualquier otro caso $h(\alpha)$ es arbitrario, para $\alpha \in Var$. Entonces, $(\ddagger\ddagger)$ vale para cualquier fórmula compleja α.

Dem. Por inducción sobre el grado de α.

(i) $\alpha \in Var$. El resultado es claramente verdadero.

(ii) $\alpha = \neg\beta$. Si $T(\alpha) \in \Upsilon$, entonces $T(\neg\beta) \in \Upsilon$ y $h(\beta) \in \{0, N\}$, por la hipótesis inductiva. De esta manera, $h(\alpha) \in \{1, N\}$. Si $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$, entonces $T(\neg\neg\beta) \in \Upsilon$ y $T(\beta) \in \Upsilon$, puesto que $\mathcal{T}$ es completo. De esta manera, $h(\beta) \in \{1, N\}$, por la hipótesis inductiva, y luego, $h(\alpha) \in \{0, N\}$. Los otros casos se prueban análogamente.

(iii) $\alpha = \beta \succ \gamma$.

(iii.1) $T(\alpha) \in \Upsilon$. Como $\mathcal{T}$ es completo, la regla para $T(\beta \succ \gamma)$ fue usada, particionando el árbol en tres ramas. Una de ellas es una sub-rama de θ, y, por lo tanto, uno de los siguientes casos vale:

(iii.1.1) $T(\gamma) \in \Upsilon$. Entonces $h(\gamma) \in \{1, N\}$, por la hipótesis inductiva. Luego, $h(\alpha) \in \{1, N\}$, por la definición de $\succ$.

(iii.1.2) $T(\neg\beta), F(\gamma), T(\neg\gamma) \in \Upsilon$. Entonces, $h(\beta) \in \{0, N\}$ y $h(\gamma) = 0$, por la hipótesis inductiva. Luego, $h(\alpha) \in \{1, N\}$, por la definición de $\succ$.

(iii.1.3) $F(\beta), F(\gamma), F(\neg\gamma) \in \Upsilon$. Luego, $h(\beta) \in \{0, B\}$ y $h(\gamma) = B$, por la hipótesis inductiva. Luego, $h(\alpha) = 1 \in \{1, N\}$, por la definición de $\succ$.

La demostración en los restantes tres casos de (iii) (a saber: $F(\alpha) \in \Upsilon$, $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$ y $F(\neg\alpha) \in \Upsilon$) son análogos. $\blacksquare$

Proposición 3.6.8 *Supongamos que existe un tableau abierto y completo para $F(\alpha)$. Entonces, $\not\models_{M_{4m}} \alpha$.*

Dem. Consideremos, por hipótesis, una rama abierta θ de un tableau abierto y completo $\mathcal{T}$ para $F(\alpha)$, y sea Υ el conjunto de fórmulas signadas que ocurren en θ. Sea h un homomorfismo definido como en la Proposición 3.6.7. Entonces, $h(\alpha) \in \{0, B\}$, puesto que $F(\alpha) \in \Upsilon$, y por lo tanto, $\not\models_{M_{4m}} \alpha$. $\blacksquare$

Teorema 3.6.9 (Completitud de $\mathbb{T}$) *Si $\models_{M_{4m}} \alpha$, entonces $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$.*

Dem. Si $\models_{M_{4m}} \alpha$, entonces, por la Proposición 3.6.8, todo tableau completo para $F(\alpha)$ es cerrado, y por lo tanto, existe (por la Proposición 3.6.3) un tableau cerrado para $F(\alpha)$. Esto es, $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$. $\blacksquare$

Corolario 3.6.10 *Sea α una fórmula. Entonces, todo tableau completo para $F(\alpha)$ es abierto, o todo tableau completo para $F(\alpha)$ es cerrado.*

Dem. Supongamos que existe un tableau abierto completo $\mathcal{T}$ para $F(\alpha)$, como así también un tableau cerrado completo $\mathcal{T}'$ para $F(\alpha)$. Por la Proposición 3.6.8, $\not\models_{M_{4m}} \alpha$. Por otro lado, por el Corolario 3.6.6, se tiene que $\models_{M_{4m}} \alpha$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 3.6.11 *Supongamos que* $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$. *Entonces, todo tableau completo para* $T(\neg\alpha)$ *es cerrado.*

Dem. Si $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$, entonces $\models_{M_{4m}} \alpha$, por el Corolario 3.6.6. Luego, $h(\alpha) \in \{1, N\}$ para todo homomorfismo h. Supongamos que existe un tableau abierto completo $\mathcal{T}$ para $T(\neg\alpha)$, y sea Υ el conjunto de fórmulas signadas obtenido a partir de una rama abierta θ de $\mathcal{T}$. Definamos un homomorfismo h como en la Proposición 3.6.7. Entonces, $h(\alpha) \in \{0, N\}$, puesto que $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$. Pero $h(\alpha) \in \{1, N\}$ y, por lo tanto, $h(\alpha) = N$. Usando el Lema 3.2.3 existe un homomorfismo h' tal que $h'(\alpha) = B$, una contradicción. Por lo tanto, todo tableau completo para $T(\neg\alpha)$ es cerrado. ■

Este último resultado muestra que desde la perspectiva de los tableaux, en M_{4m} (aún vista como la lógica matricial de $\mathcal{M}_N$), las tautologías solo toman el valor 1 por medio de homomorfismos. Sin embargo, la Proposición 3.6.11 nos permitirá probar, solo utilizando las herramientas del tableau, la admisibilidad de la Regla de Necesitación (Nec). Para poder ver esto, suponga que $\models_{M_{4m}} \alpha$, y inicie un tableau en $\mathbb{T}$ para $F(\Box\alpha)$. Por la Proposición 3.6.2, dos ramas son originadas: una con $F(\alpha)$ y la otra con $T(\neg\alpha)$. Por la Proposición 3.6.3, ambos tableaux terminarán. Usando el Teorema 3.6.9 y la Proposición 3.6.11 ambos tableaux son cerrados y, por eso, el tableau original para $F(\Box\alpha)$ es cerrado. Esto prueba que $\models_{M_{4m}} \Box\alpha$, por el Corolario 3.6.6 .

Es interesante notar que el sistema de tableau $\mathbb{T}$ permite decidir si, dada una fórmula, esta es válida ó no en M_{4m}, y por esto, decide la validez en la variedad **TMA** de ecuaciones de la forma $\alpha \approx 1$. Con respecto a las inferencias de la forma $\alpha \vdash_{M_{4m}} \beta$, estas pueden ser recuperadas en $\mathbb{T}$ por medio de tableaux para $F(\alpha \succ \beta)$. De esta manera, $\mathbb{T}$ decide la validez en la variedad **TMA** de ecuaciones de la forma $\alpha \approx \beta$. Finalmente, como ocurre con el caso clásico (cf. [57]), el conjunto de las fórmulas signadas de una rama abierta de una tableau abierto y completo, permite encontrar un modelo para ese conjunto de fórmulas: en particular, encuentra un contraejemplo para una fórmula no válida. Sin embargo, la utilidad de este sistema de tableau es limitado debido a su complejidad, y al hecho que la lógica tiene una matriz característica con solo cuatro elementos.

3.7 Maximalidad y n-maximalidad

En esta sección, analizaremos con precisión la relación que existe entre M_{4m} y la lógica proposicional clásica **CPL**. Luego de introducir el concepto de n-maximalidad (el cual es más débil que el de maximalidad usual), probaremos que M_{4m} no es maximal con respecto a **CPL**.

Probaremos que M_{4m} es una sublógica de **CPL**, pero esta inclusión surgirá naturalmente en el lenguaje de las TMA^{c}s, esto es, utilizando la implicación contrapositiva.

Definición 3.7.1 *Sea* $\mathbf{CPL}_\Box$ *una extensión de* **CPL** *(presentada como un cálculo de secuentes en el lenguaje generado por* $\wedge, \vee, \neg$*) agregando la modalidad* $\Box$ *juntamente con el axioma*

$(Eq\Box) \quad \vdash (\neg\alpha \vee \Box\alpha) \wedge (\neg\Box\alpha \vee \alpha)$

El axioma de secuentes $(Eq\Box)$ establece la equivalencia lógica entre α y $\Box\alpha$ en el lenguaje dado (recordemos que $\alpha \Leftrightarrow \beta =_{def} (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$ en **CPL**). Semánticamente, $\mathbf{CPL}_\Box$ se caracteriza agregando, a las tablas de verdad usuales sobre $\mathbb{B}_1$, el siguiente operador: $\Box(x) = x$ para $x \in \{0, 1\}$, generando, de esta forma, una relación de consecuencia que será denotada con $\models_{\mathbf{CPL}_\Box}$.

Proposición 3.7.2 *La lógica tetravalente modal M_{4m}, presentada en el lenguaje de las TMAs, es una sublógica de $\mathbf{CPL}_\Box$. Más aún, la lógica $\mathcal{TML}_\Box$ obtenida a partir de $\mathcal{TML}$ agregando el axioma $(Eq\Box)$ es exactamente $\mathbf{CPL}_\Box$.*

Dem. Observemos que $\mathcal{TML}_\Box$ está semánticamente caracterizada por los homomorfismos h de las TMAs tales que $h((\neg\alpha \vee \Box\alpha) \wedge (\neg\Box\alpha \vee \alpha)) = 1$, esto es, tal que $h(\neg\alpha \vee \Box\alpha) = 1$ para toda fórmula α (puesto que siempre $h(\neg\Box\alpha \vee \alpha) = 1$). Pero $h(\neg\alpha \vee \Box\alpha) = 1$ si, y solo si, $h(\neg\alpha \vee \alpha) = 1$ si, y solo si, $h(\Box(\neg\alpha \vee \alpha)) = 1$ si, y solo si, $h(\circ\alpha) = 1$, para toda fórmula α (recordemos la definición de $\circ$ en la Sección 3.4). Entonces, por el Teorema 3.4.3 y los resultados (y observaciones) previos, $\Gamma \vdash_{\mathcal{TML}_\Box} \alpha$ si, y solo si, $\Gamma_0 \vdash_{\mathcal{TML}_\Box} \alpha$ para algún $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito si, y solo si, $\Gamma_0, \{\circ\beta : \beta \in Fm\} \models_{TMA} \alpha$ si, y solo si, $\Gamma_0, \{\circ\beta : \beta \in Fm\} \models_{M_{4m}} \alpha$ si, y solo si, $\Gamma_0, \{\circ\beta : \beta \in Fm_n\} \models_{M_{4m}} \alpha$ si, y solo si, $\Gamma_0, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_{M_{4m}} \alpha$, donde $Var(\Gamma_0 \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y $Fm_n = \{\beta \in Fm : Var(\beta) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}\}$. Pero entonces, utilizando un argumento similar al dado en la prueba del Teorema 3.4.6, lo último es equivalente a $\Gamma_0 \models_{\mathbf{CPL}_\Box} \alpha$, lo cual, a su vez, es equivalente a $\Gamma_0 \vdash_{\mathbf{CPL}_\Box} \alpha$. ■

El hecho que M_{4m} pueda ser vista como una sublógica de **CPL** se prueba de un modo algo artificial: es necesario agregar a **CPL** un nuevo conectivo (irrelevante) $\Box$ con el objeto de lidiar con el lenguaje de M_{4m}.[3]

[3]Esta situación es completamente análoga con varias **LFI**s tales como **mbC** o **mCi**. Estas son sublógicas de **CPL** pero, debido a la presencia del operador de consistencia $\circ$ en sus respectivas sig-

Consideremos, ahora, una presentación alternativa de M_{4m} en términos de la implicación contrapositiva (i.e., el cálculo $\mathcal{H}^1_{4m}$) dado en la Definición 3.5.1. Es claro que, si interpretamos $\succ$ y $\perp$ como la implicación material y el bottom clásico, todos los axiomas y reglas de inferencia de $\mathcal{H}^1_{4m}$ son válidas en **CPL**, ahora presentado como el cálculo de Hilbert en el lenguaje (funcionalmente completo) $\succ$, $\perp$. En otras palabras, M_{4m} (en este mismo lenguaje) es una sublógica de **CPL**, pensada en el lenguaje de la implicación material y bottom.

Por supuesto, la implicación contrapositiva $\succ$ de $\mathcal{H}^1_{4m}$ no satisface muchas de las propiedades de la implicación material. Por ejemplo,

$$\nvdash_1 (\alpha \succ (\beta \succ \gamma)) \succ ((\alpha \succ \beta) \succ (\alpha \succ \gamma))$$

si bien que en **CPL** es una tautología cuando $\succ$ es leida como la implicación material. Como $\mathcal{H}^1_{4m}$ describe la lógica M_{4m} en otro lenguaje, sabemos por la Proposición 3.7.2 que es suficiente agregar a $\mathcal{H}^1_{4m}$ el axioma esquema $(Eq\Box)$ como antes (escrito en el lenguaje $\succ$, $\perp$) para recuperar **CPL** en ese mismo lenguaje. Esta es una mejor situación que la anterior ya que no es necesario agregar nuevos conectivos a **CPL**.

Una cuestión natural que surge es saber si es posible recuperar **CPL** a partir de $\mathcal{H}^1_{4m}$ agregando algún principio involucrando más propiedades básicas de la implicación (como, por ejemplo, la propiedad exhibida anteriormente). La respuesta es positiva, como se muestra en el siguiente resultado:

Proposición 3.7.3 *La lógica definida sobre $\succ, \perp$ obtenida a partir de $\mathcal{H}^1_{4m}$ agregando el axioma esquema*

$$(Adj) \quad (\alpha \succ (\beta \succ \gamma)) \succ ((\alpha \wedge \beta) \succ \gamma)$$

naturas, es necesario considerar una extensión **eCPL** of **CPL**. La lógica **eCPL** se obtiene a partir de **CPL** agregando un nuevo operador $\circ$ conjuntamente con el axioma $\circ\alpha$. Semánticamente, se agrega a la matriz usual para **CPL** el operador $\circ(x) = 1$, para $x \in \{0, 1\}$. Luego, puede probarse que tales **LFI**s son sublógicas de **eCPL** (cf. [17]).

es exactamente **CPL** *(presentada en el lenguaje* $\succ, \bot$*).*

Dem. Suponga que (*Adj*) es adicionado a $\mathcal{H}^1_{4m}$. Claramente, la lógica obtenida está contenida en **CPL** (presentada en el lenguaje $\succ, \bot$). Como instancia particular de (*Adj*) obtenemos

$$\vdash (\alpha \succ ((\alpha \succ \beta) \succ \beta)) \succ ((\alpha \wedge (\alpha \succ \beta)) \succ \beta)$$

en la nueva lógica. Pero, $\vdash \alpha \succ ((\alpha \succ \beta) \succ \beta)$ vale en M_{4m} (cf. [28]), por lo tanto, por (MP), $\vdash (\alpha \wedge (\alpha \succ \beta)) \succ \beta$. En particular, $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ y, por eso, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$. Por la regla de Necesitación, $\vdash \Box(\alpha \vee \neg\alpha)$, para todo α. Esto es, $\vdash \circ\alpha$, para todo α (ver la Sección 3.4). Pero entonces, la lógica coincide con **CPL**, por el Teorema 3.4.6 y la Proposición 3.5.4. ■

Por supuesto, el mismo resultado puede obtenerse considerando el cálculo $\mathcal{H}^2_{4m}$, o $\mathcal{H}^3_{4m}$, en lugar de $\mathcal{H}^1_{4m}$.

Consideremos la lógica M^c_{4m}, definida en términos de la implicación contrapositiva. Es claro que, si interpretamos $\succ$ y $\bot$ como la implicación material y el bottom clásico, todos los axiomas y reglas de inferencia de $\mathcal{H}^1_{4m}$ son válidos en **CPL**, ahora presentado como un cálculo de Hilbert en el lenguaje (funcionalmente completo) $\succ$, $\bot$, y observando que $\Box\alpha$ es equivalente a α en **CPL**(en el lenguaje de la implicación material y bottom).
Por supuesto, la implicación contrapositiva $\succ$ de $\mathcal{H}_{4m}$ no satisface varias propiedades de la implicación material (como ya vimos). Es natural preguntarse si es el caso que M^c_{4m} es una sublógica maximal de **CPL**, ambas dadas en el lenguaje Fm'.
Recordemos que una lógica $\mathbf{L}_1$ se dice que es *maximal* con respecto a otra lógica $\mathbf{L}_2$ cuando: 1) ambas están definidas sobre el mismo lenguaje; 2) la relación de consecuencia $\vdash_{\mathbf{L_1}}$ de

$\mathbf{L}_1$ está contenida en $\vdash_{\mathbf{L_2}}$, y 3) si φ es una fórmula esquema tal que $\vdash_{\mathbf{L_2}} \varphi$ pero $\nvdash_{\mathbf{L_1}} \varphi$, la extensión de $\mathbf{L}_1$ obtenida al agregar φ como esquema válido, coincide con $\mathbf{L}_2$.

La noción de maximalidad de una lógica con respecto a otra puede ser extendida naturalmente, en el marco proposicional, como sigue:

Definición 3.7.4 *Sean $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ dos lógicas proposicionales definidas sobre el mismo lenguaje tales que la relación de consecuencia $\vdash_{\mathbf{L_1}}$ de $\mathbf{L}_1$ está contenida en $\vdash_{\mathbf{L_2}}$ de $\mathbf{L}_2$. Sea $n \geq 1$ un número natural. Diremos que $\mathbf{L}_1$ es n-***maximal*** *con respecto a $\mathbf{L}_2$ si, para toda fórmula esquema $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ con a lo sumo n variables proposicionales $\{p_1, \ldots, p_n\}$ tal que $\vdash_{\mathbf{L_2}} \varphi$ pero $\nvdash_{\mathbf{L_1}} \varphi$, la extensión de $\mathbf{L}_1$ obtenida al agregar φ como esquema válido coincide con $\mathbf{L}_2$.*

Claramente, si $\mathbf{L}_1$ es n-maximal con respecto a $\mathbf{L}_2$, entonces ella es m-maximal con respecto a $\mathbf{L}_2$ para todo $1 \leq m < n$. Además, $\mathbf{L}_1$ es maximal en el sentido usual con respecto a $\mathbf{L}_2$ si, y solo si, ella es n-maximal con respecto a $\mathbf{L}_2$ para todo $n \geq 1$.

De ahora en adelante, pensaremos a M'_{4m} como sublógica de **CPL**, ambas definidas sobre el mismo lenguaje Fm^c.

Proposición 3.7.5 *M^c_{4m} es 1-maximal con respecto a* **CPL**.

Dem. Sea $\alpha(p) \in Fm'$ una fórmula con exactamente una variable proposicional p tal que $\vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ pero $\not\models_{M^c_{4m}} \alpha$. Por el Lema 3.2.3, si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^c, \mathfrak{M}^c_{4m})$ entonces $h(\alpha) = 1$ si, y solo si, $h(p) \in \{0, 1\}$ y $h(\alpha) \in \{0, N, B\}$ si, y solo si, $h(p) \in \{N, B\}$. Sea M^{α}_{4m} la lógica obtenida a partir de M^c_{4m} al agregar α como esquema válido. Semánticamente, M^{α}_{4m} está caracterizada como en la Observación 3.3.4 por el conjunto de todos los homomorfismos $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^c, \mathfrak{M}^c_{4m})$ tal que $h(\alpha') = 1$ para toda instancia α' de α. Entonces, los únicos homomorfismos permitidos son los clásicos, y, por lo tanto, M^{α}_{4m} coincide con **CPL**. ■

Pero,

Proposición 3.7.6 *M_{4m}^c no es 2-maximal con respecto a* **CPL**.

Dem. Sea $\alpha(p, q)$ la fórmula $\circ p \vee \circ q \vee \Box(p \succ q)$ (recordemos $\circ$ de la Sección 3.4). Es fácil ver que, para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^c, \mathfrak{M}_{4m}^c)$, $h(\alpha) = 0$ si $(h(p), h(q)) \in \{(N, B), (B, N)\}$ y $h(\alpha) = 1$, en otro caso. Luego, se tiene que $\vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ pero $\not\models_{M_{4m}^c} \alpha$. Probaremos que la lógica M_{4m}^α obtenida a partir de M_{4m}^c al agregar α como esquema válido no coincide con **CPL** y, por lo tanto, M_{4m}^c no es 2-maximal con respecto a **CPL**. Observemos que M_{4m}^α está semánticamente caracterizada, como en la Observación 3.3.4, por el conjunto H de homomorfismos $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^c, \mathfrak{M}_{4m}^c)$ tal que $h(\alpha') = 1$ para toda instancia α' de α. Claramente, $H = H_1 \cup H_2$, donde H_1 y H_2 son los conjuntos

$$H_1 = \{h \in Hom(\mathfrak{Fm}^c, \mathfrak{M}_{4m}^c) \ : \ h(Var) \subseteq \{0, N, 1\}\}$$

$$H_2 = \{h \in Hom(\mathfrak{Fm}^c, \mathfrak{M}_{4m}^c) \ : \ h(Var) \subseteq \{0, B, 1\}\}$$

respectivamente. Notemos que $h \in H_1 \cap H_2$ si, y solo si, h es un homomorfismo clásico. Consideremos, ahora, $h \in H_2$ tal que $h(p) = B$ y $h(q) \in \{0, 1\}$, para todo $q \in Var \setminus \{p\}$. Entonces, $h(p \vee \neg p) = B$ y, por lo tanto, $p \vee \neg p$ no es válida en M_{4m}^α. Esto muestra que M_{4m}^α es una sublógica propia de **CPL**. ■

De este último resultado arribamos a una respuesta negativa a la cuestión de la maximalidad M_{4m}^c con respecto a **CPL**.

Corolario 3.7.7 *M_{4m}^c no es maximal con respecto a* **CPL**.

De las proposiciones 3.7.5 y 3.7.6, obtenemos un buen ejemplo de una lógica que es 1-maximal pero no 2-maximal con respecto a otra. Esto muesta que la n-maximalidad, en general, no implica $n+1$-maximalidad y, por lo tanto, la n-maximalidad es un concepto interesante que merece un estudio más profundo.

3.8 La lógica tetravalente modal normal $\mathcal{TML}^N$

En el trabajo [28] fue propuesto el siguiente problema: encontrar una axiomatización para la lógica matricial $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{1\}\rangle$ en el lenguaje $\{\succ, \neg, \top\}$. Observemos que esta lógica, considerada sobre el lenguaje $\mathfrak{Fm}$ de las TMAs, fue brevemente estudiada en [31], donde fue denominada $\mathcal{TML}^N$. Sin embargo, no fue presentada una axiomatización estilo Hilbert para dicha lógica. Es importante mencionar que un cálculo estilo Hilbert para $\mathcal{TML}^N$ fue propuesto en [7], pero utilizando dos conectivos de implicación y muchos axiomas.
En esta sección, probaremos que el cálculo de Hilbert $\mathcal{H}_{4m}$ para M^c_{4m} es adecuado para la lógica matricial $\langle \mathfrak{M}^c_{4m}, \{1\}\rangle$ en el lenguaje $\{\succ, \perp\}$, desde que la noción de derivación a partir de premisas (cf. Definición 3.5.3(2)) sea reemplazada por la usual. Esto representa una respuesta positiva a la cuestión planteada en [28].

Definición 3.8.1 *La lógica normal de la variedad* $\mathbf{TMA}^c$ *es la lógica* $\mathbb{L}^N_{TMA}$ *definida sobre* $\mathfrak{Fm}'$ *por la familia de matrices* $\langle \mathfrak{U}, \{1\}\rangle$*, para* $\mathfrak{U} \in \mathbf{TMA}^c$*. Por otro lado, la lógica tetravalente modal normal* M^N_{4m} *es la lógica sobre* $\mathfrak{Fm}'$ *dada por la matriz* $\langle \mathfrak{M}^c_{4m}, \{1\}\rangle$*.*

La afirmación análoga a la Proposición 3.1.3 es, por supuesto, válida:

Proposición 3.8.2 *La lógica* M^N_{4m} *coincide con la lógica* $\mathbb{L}^N_{TMA}$*.*

Adaptando un resultado de [31], obtenemos el siguiente:

Proposición 3.8.3 *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas en* Fm'*. Entonces,*

$$\Gamma \models_{M^N_{4m}} \alpha \quad \textit{si, y solo si,} \quad \Box\Gamma \models_{M^c_{4m}} \alpha.$$

Observación 3.8.4 *Notemos que el Meta-teorema de la Deducción no es válido en M_{4m}^N. Por ejemplo, $\Diamond p, p \models_{M_{4m}^N} \Box p$ pero $\Diamond p \not\models_{M_{4m}^N} p \succ \Box p$. Más aún, la forma más débil del Meta-teorema de la Deducción presentado en el Teorema 3.3.8 para M_{4m}^c no vale en M_{4m}^N. Por ejemplo, $p \models_{M_{4m}^N} \Box p$ pero $\not\models_{M_{4m}^N} p \succ \Box p$. La lógica M_{4m}^N no es paraconsistente, pues $\alpha, \neg\alpha \models_{M_{4m}^N} \beta$ vale para todo $\alpha, \beta \in Fm'$. Sin embargo, M_{4m}^N es paracompleta: $\not\models_{M_{4m}^N} p \vee \neg p$ para todo $p \in Var$. Más aún, M_{4m}^c y M_{4m}^N tienen las mismas fórmulas válidas.*

El cálculo de Hilbert $\mathcal{H}_{4m}^N$ está definido por los mismos axiomas y reglas de inferencia de $\mathcal{H}_{4m}^3$, pero la noción de derivación a partir de premisas está ahora definido del modo usual, esto es, como en la Definición 1.1.4 (contraste con la Definición 3.5.16(2)):

Definición 3.8.5 *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas en Fm'. Diremos que α es derivable en $\mathcal{H}_{4m}^N$ a partir de Γ, y escribimos $\Gamma \vdash_4 \alpha$, si existe una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tal que α_n es α y todo α_i es tanto una instancia de un axioma, o $\alpha_i \in \Gamma$, o es consecuencia de alguna regla de inferencia cuyas premisas aparecen en la secuencia $\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}$.*

Obviamente, $\vdash_3 \alpha$ si, y solo si, $\vdash_4 \alpha$. Por otro lado, las relaciones de consecuencia son diferentes, como veremos abajo.

Teorema 3.8.6 *(Correctitud de $\mathcal{H}_{4m}^N$) Sea $\Gamma \cup \{\beta\}$ un subconjunto de Fm'. Entonces, $\Gamma \vdash_4 \beta$ implica que $\Gamma \models_{M_{4m}^N} \beta$.*

Dem. Los axiomas de $\mathcal{H}_{4m}^N$ son válidos en M_{4m}^N. Por otro lado, es fácil ver que si un homomorfismo h asigna el valor 1 a las premisas de una regla de $\mathcal{H}_{4m}^N$ entonces, este debe asignar el valor 1 a la conclusión de la regla. ■

Proposición 3.8.7 *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas en* Fm'*. Entonces,*

$$\Box\Gamma \vdash_3 \alpha \quad \textit{implica que} \quad \Gamma \vdash_4 \alpha.$$

Dem. Sea $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm^c$, y supongamos que $\Box\Gamma \vdash_3 \alpha$. En el caso que $\vdash_3 \alpha$, el resultado es inmediato. En caso contrario, existe un subconjunto finito, no vacío, $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ de Γ tal que $(\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_k) \succ \alpha$ es derivable en $\mathcal{H}^3_{4m}$, por la Definición 3.5.16. Entonces, α puede ser derivado a partir de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ en $\mathcal{H}^N_{4m}$ como sigue: de las hipótesis $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, las fórmulas $\Box\gamma_1, \ldots, \Box\gamma_k$ son obtenidas por (Nec). Usando (Conj) repetidamente obtenemos $(\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_k)$. Entonces, la derivación de $(\Box\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_k) \succ \alpha$ en $\mathcal{H}^3_{4m}$ (la cual también es una derivación en $\mathcal{H}^N_{4m}$) se anexa. Por (MP), se tiene α. Por lo tanto, $\Gamma \vdash_4 \alpha$ como era deseado. ■

Teorema 3.8.8 *(Completitud de* $\mathcal{H}^N_{4m}$*) Sea* $\Gamma \cup \{\beta\}$ *un subconjunto de* Fm'*. Entonces,* $\Gamma \models_{M^N_{4m}} \beta$ *implica que* $\Gamma \vdash_4 \beta$*.*

Dem. De la Proposición 3.8.3, el Teorema 3.5.22 y la Proposición 3.8.7. ■

Proposición 3.8.9 *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un subconjunto de* Fm'*. Entonces,* $\Gamma \vdash_3 \alpha$ *implica que* $\Gamma \vdash_4 \alpha$*.*

Dem. Adaptando la demostración de la Proposición 3.8.7. ■

Notemos que la recíproca de la Proposición 3.8.9 no es verdadera. Por ejemplo, $p \vdash_4 \Box p$ pero $p \nvdash_3 \Box p$.

Como M^c_{4m} y M^N_{4m} tienen las mismas fórmulas válidas, es fácil ver que las proposiciones 3.7.5 y 3.7.6 también son válidas para M^N_{4m} con respecto a **CPL**, y, por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.8.10 M^N_{4m} *es* 1*-maximal, pero no es maximal con respecto a* **CPL***.*

4 Capítulo IV: Hipersecuentes para la Lógica Tetravalente Modal $\mathcal{TML}$

En este capítulo profundizaremos al estudio de la teoría de prueba de la lógica tetravalente modal M_{4m}. Estudiaremos propiedades de cálculo de secuentes $\mathfrak{G}$ presentado en [31]. En particular, mostraremos que este cálculo no admite la eliminación de corte. Presentaremos el cálculo de hipersecuentes $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$, y probaremos que este es correcto y completo con respecto a la lógica tetravalente modal. Finalmente, mostraremos que $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ tiene la propiedad de eliminación de corte.

4.1 Observaciones sobre el cálculo de Gentzen $\mathfrak{G}$

En esta sección indicaremos algunas propiedades del cálculo de Gentzen $\mathfrak{G}$. Entre otras cosas, probaremos que $\mathfrak{G}$ no admite eliminación de corte. Con ese objetivo en mente, exhibiremos un secuente $\Gamma \vdash \varphi$ que es probable, pero tal que toda derivación de él debe hacer uso, indefectiblemente, de la regla de corte.

El Corolario 3.2.2 es una poderosa herramienta para determinar si un secuente dado de $\mathfrak{G}$ es probable o no. Por ejemplo,

Proposición 4.1.1 *En $\mathfrak{G}$ tenemos que el secuente $\neg\Box\alpha \vdash \alpha$ es probable si, y solo si, el secuente $\vdash \alpha$ es probable.*

Dem. En efecto, supongamos que el secuente $\neg\Box\alpha \vdash \alpha$ es probable en $\mathfrak{G}$. Entonces, $h(\neg\Box\alpha) \leq h(\alpha)$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. Pero, considerando todas los casos, debemos tener que $h(\neg\Box\alpha) = 0$ y $h(\alpha) = 1$, para todo h, y entonces el secuente $\vdash \alpha$ es probable en $\mathfrak{G}$. La recíproca es directa. ■

Sin dificultad se demuestra la siguiente afirmación.

Proposición 4.1.2 *Las siguientes dos condiciones son mutuamente equivalentes, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in Fm$:*

(i) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ *es probable en* $\mathfrak{G}$,

(ii) $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \beta$ *es probable en* $\mathfrak{G}$.

Dem. $(i) \Rightarrow (ii)$. No es difícil probar que el secuente $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_i$, para $1 \leq i \leq n$, es derivable $\mathfrak{G}$. Usando este hecho, inducción sobre n, la hipótesis (i) y la regla de corte, tenemos que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ es derivable en $\mathfrak{G}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Considere la siguiente derivación en $\mathfrak{G}$:

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha, \beta \vdash \alpha}\,(\mathrm{w}) \qquad \cfrac{\beta \vdash \beta}{\alpha, \beta \vdash \alpha}\,(\mathrm{w})}{\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta}\,(\vdash \wedge)$$

Usando esto e inducción sobre n es posible probar que el secuente $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ es derivable.

Ahora, suponga que $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \beta$ is probable in $\mathfrak{G}$. Entonces, tenemos

$$\text{(corte)}\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\vdash\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n\vdash\beta\end{array}}{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\vdash\beta}$$

■

Recordemos de la Sección 2.3 del Capítulo 2, que una regla de inferencia es *admisible* en un sistema formal si el conjunto de teoremas del sistema es cerrado bajo la regla; y una regla se dice *derivable* en el mismo sistema formal si su conclusión puede ser derivada a partir de sus premisas utilizando otras reglas del sistema.

Una regla bien conocida para aquellos lectores familiarizados con las lógicas modales, y que hemos utilizado con frecuencia en el Capítulo 3, es la *Regla de Necesitación*, la cual establece que si φ es un teorema, también lo es $\Box\varphi$. Formalmente,

$$\text{(Nec)}\ \dfrac{\vdash\varphi}{\vdash\Box\varphi}$$

Entonces, tenemos que:

Lema 4.1.3 *La Regla de necesitación es admisible en* $\mathfrak{G}$.

Dem. Del Corolario 1.2.9 y considerando el álgebra $\mathfrak{M}_{4m}$. ■

A partir del lema anterior, podemos obtener una derivación del secuente $\vdash\Box(\alpha\vee\neg\Box\alpha)$ en $\mathfrak{G}$, para cualquier $\alpha\in\mathfrak{Fm}$. Sea π la derivación de $\vdash\Box(\alpha\vee\neg\Box\alpha)$ y sea r la última regla utilizada en π. Claramente, π hace uso de más de una regla puesto que $\Box(\alpha\vee\neg\Box\alpha)$ no es un axioma. Luego, tenemos los dos casos siguientes:

Caso 1:

$$(r)\ \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash \varphi\end{array}}{\vdash \Box(\alpha \vee \neg\Box\alpha)}$$

Caso 2:

$$(r)\ \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2\end{array}}{\vdash \Box(\alpha \vee \neg\Box\alpha)}$$

En el caso 1, (r) tiene solo una premisa y, por lo tanto, puede ser: $(\bot)$, debilitamiento (weakening), $(\wedge \vdash)$, $(\vee \vdash)$, $(\vdash \vee)$, $(\neg)$, $(\neg\neg \vdash)$, $(\vdash \neg\neg)$, $(\Box \vdash)$ ó $(\Box \vdash)$. En el caso de $(\bot)$, la única posibilidad es tener $\Gamma = \emptyset$. Pero esto implicaría que el secuente $\vdash \bot$ es probable, lo que contradice la correctidud con respecto a $\mathcal{TML}$. De esta forma, este caso es descartado. Por otro lado, ninguna de las restantes reglas tiene la estructura de (r), por eso, también son descartadas.

Luego, π es de la forma descripta en el caso 2. Entonces, (r) debe ser una de las siguientes reglas: la regla de corte, $(\vdash \wedge)$ ó $(\vee \vdash)$. Es claro que (r) no puede ser $(\vdash \wedge)$ ni $(\vee \vdash)$. Consecuentemente, (r) debe ser la regla de corte.

Acabamos de probar la siguiente afirmación.

Proposición 4.1.4 *Toda prueba de* $\vdash \Box(\alpha \vee \neg\Box\alpha)$ *en* $\mathfrak{G}$ *utiliza la regla de corte.*

Más aún, teniendo en cuenta el Lema 4.1.3, tenemos que:

Lema 4.1.5 *Para todo* $\varphi \in Fm$ *tal que* $\vdash \varphi$ *es derivable en* $\mathfrak{G}$*, se tiene que* $\vdash \Box\varphi$ *es derivable en* $\mathfrak{G}$*; y toda derivación de* $\vdash \Box\varphi$ *en* $\mathfrak{G}$ *hace uso de la regla de corte.*

Consecuentemente,

Teorema 4.1 $\mathfrak{G}$ *no admite eliminación de corte.*

4.2 Cálculo de hipersecuentes para M_{4m}

Recordemos que $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \wedge, \vee, \neg, \Box, \bot \rangle$ es el álgebra absolutamente libre de tipo (2,2,1,1,0) generada por un conjunto numerable de variables. Llamamos a Fm el conjunto de las fórmulas sentenciales, y nos referiremos a ellas con las letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ etc.; y denotaremos a los conjuntos de fórmulas con letras griegas mayúsculas Γ, Δ, etc..

Definición 4.2.1 Cálculo de hipersecuentes $\mathfrak{HG}$:
Axiomas:

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

Reglas estructurales:

(Debilitamiento interno) $\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}$ (Debilitamiento Externo) $\dfrac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}|\mathcal{H}}$

(Contracción externa) $\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha|\Gamma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}$ (Split modal) $\dfrac{\mathcal{G}|\Box\Gamma, \Delta \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow |\Delta \Rightarrow \beta}$

(Corte) $\dfrac{\mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \alpha \quad \mathcal{G}'|\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \beta}$

Reglas Lógicas

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma \quad \mathcal{G}|\Gamma, \beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma}$$

$$(\Rightarrow \vee)_1\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta} \qquad (\Rightarrow \vee)_2\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg\wedge \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \gamma \quad \mathcal{G}|\Gamma, \neg\beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma}$$

$$(\Rightarrow \neg\wedge)_1\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg\alpha}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)} \qquad (\Rightarrow \neg\wedge)_2\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg\beta}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

$$(\neg\vee \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma} \qquad (\Rightarrow \neg\vee)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg\alpha \quad \mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg\beta}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}$$

$$(\neg\neg \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad (\Rightarrow \neg\neg)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg\neg\alpha}$$

$$(\Box \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad (\Rightarrow \Box)\ \frac{\mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow \Box\alpha}$$

$$(\bot)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \bot}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha} \qquad (\neg\Box \Rightarrow)\ \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \gamma}$$

Escribiremos $\mathfrak{HG} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$ para indicar que el secuente $\Rightarrow \alpha$ es probable en $\mathfrak{HG}$. Si $\mathfrak{HG} \vdash \Rightarrow \alpha$, escribiremos $\mathfrak{HG} \vdash \alpha$.

Proposición 4.2.2 *Los siguientes secuentes son probables en* $\mathfrak{G}$*.*

(i) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$,

(ii) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$.

Dem. Rutina. ■

La versión de la regla $(\neg)$ en el contexto de los hipersecuentes es $(\neg)$ $\dfrac{\mathcal{G}|\alpha \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}$. Entonces vale la siguiente afirmación:

Proposición 4.2.3 *$(\neg)$ es admisible en* $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$*.*

Dem. Es consecuencia de la Proposición 4.10 de [30], con las debidas adaptaciones. ■

La Proposición 4.2.3 afirma que $(\neg)$ es eliminable en $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$, i.e., si existe una demostración en $\mathfrak{H}\mathfrak{G}+$ $(\neg)$ del hipersecuente G, entonces existe una demostración de G en $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$.

Proposición 4.2.4 $\mathfrak{H}\mathfrak{G} \vdash \alpha \vee \neg\Box\alpha$.

Dem.

Es consecuencia de la Proposición 4.2.4 y la siguiente prueba en $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\Box\alpha \Rightarrow \alpha}\,(\Box\Rightarrow)}{\Box\alpha \Rightarrow \,|\, \Rightarrow \alpha}\,(\text{Split})}{\Rightarrow \neg\Box\alpha| \Rightarrow \alpha}\,(\neg)}{\Rightarrow \alpha \vee \neg\Box\alpha| \Rightarrow \alpha}\,(\Rightarrow\vee)_1}{\Rightarrow \alpha \vee \neg\Box\alpha| \Rightarrow \alpha \vee \neg\Box\alpha}\,(\Rightarrow\vee)_2}{\Rightarrow \alpha \vee \neg\Box\alpha}\,(\text{EC})
$$

■

4.3 Completitud y correctitud

En esta sección probaremos que $\mathfrak{HG}$ es correcto y completo con respecto a la lógica tetravalente modal M_{4m}.

Teorema 4.3.1 *Sea $\alpha \in \mathfrak{Fm}$. Si $\mathfrak{G} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$, entonces $\mathfrak{HG} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$.*

Dem. Basta observar que todas las reglas estructurales de $\mathfrak{G}$, junto con el axioma y las reglas lógicas $(\wedge \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \wedge)$, $(\vee \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \vee)$, $(\neg\neg \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \neg\neg)$, $(\neg\Box \Rightarrow)$ y $(\bot)$, tienen su versión hipersecuencial en $\mathfrak{HG}$. Además, por la Proposición 4.2.4, el axioma modal es probable en $\mathfrak{HG}$. Falta ver que $(\Rightarrow \neg\Box)$ es derivable en $\mathfrak{HG}$. En efecto, usando (Corte) tres veces, obtenemos la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{{\scriptstyle(\text{hip.})}\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha \qquad \alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{{\scriptstyle(\text{hip.})}\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha \qquad \alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha} \qquad {\scriptstyle(\neg)}\dfrac{{\scriptstyle(\Box \Rightarrow)}\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\Box\alpha \Rightarrow \alpha}}{\neg\alpha \Rightarrow \neg\Box\alpha}}{\Gamma \Rightarrow \neg\Box\alpha}}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \neg\Box\alpha}\,{\scriptstyle(\Rightarrow \wedge)}$$

■

Corolario 4.3.2 *(Completitud) $\mathfrak{HG}$ es completo con respecto a la lógica M_{4m}.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 4.3.1 y el Corolario 3.2.2. ■

Recordemos que, para todo conjunto finito $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, $\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha$ si, y solo si, para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$, $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma\} \leq h(\alpha)$. En particular, $\emptyset \models_{M_{4m}} \alpha$ si, y solo si, $h(\alpha) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. En este caso, decimos que α es válida en M_{4m}. Luego, es natural la siguiente definición.

Definición 4.3.3 *Un secuente $\Gamma \Rightarrow \alpha$ es válido en M_{4m} si, y solo si, $\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha$. Diremos que el hipersecuente $S_1|\cdots|S_n$ es válido en M_{4m} si, y solo si, existe i, $1 \leq i \leq n$, tal que S_i es válido en M_{4m}. Finalmente, diremos que M_{4m} valida la regla de hipersecuentes*

$$\frac{\mathcal{G}_1 \cdots \mathcal{G}_n}{\mathcal{G}}$$

si, y solo si, siempre que $\mathcal{G}_i$ es válido en M_{4m} para todo i, $1 \leq i \leq n$, entonces $\mathcal{G}$ es válido en M_{4m}.

Si $\mathcal{G}$ es válido en M_{4m} notaremos $\models_{M_{4m}} \mathcal{G}$.

Existe una noción semántica más débil que la de hipersecuentes válidos y de reglas de hipersecuentes válidas, que es más útil, y que será la que adoptaremos aqui:

Definición 4.3.4 *Sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$. El homomorfismo h satisface un secuente $\Gamma \Rightarrow \alpha$ si, y solo si, $\bigwedge\limits_{\gamma \in \Gamma} h(\gamma) \leq h(\alpha)$. Decimos que h satisface un hipersecuente $S_1|\cdots|S_n$ si, y solo si, existe i, $1 \leq i \leq n$, tal que h satisface S_i. Finalmente, diremos que h satisface la regla de hipersecuentes*

$$\frac{\mathcal{G}_1 \cdots \mathcal{G}_n}{\mathcal{G}}$$

si, y solo si, siempre que h satisface $\mathcal{G}_i$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, entonces h satisface $\mathcal{G}$. Un hipersecuente (respectivamente, una regla de hipersecuentes) es debilmente válida en M_{4m}, o w-válida, si es satisfecho(a) por todo homomorfismo h.

Claramente un secuente (visto también como hipersecuente) es válido en M_{4m} si, y solamente si, es satisfecho por todo homomorfismo h.

Proposición 4.3.5 *Las reglas $(\neg\wedge \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \neg\wedge)_1$, $(\Rightarrow \neg\wedge)_2$, $(\Rightarrow \neg\vee)$, $(\neg\wedge \Rightarrow)$, $(\Box \Rightarrow)$ y $(\Rightarrow \Box)$ de $\mathfrak{HG}$ son w-válidas en M_{4m}.*

Dem. Haremos la prueba solamente para $(\neg\wedge \Rightarrow)$, el resto se demuestra análogamente utilizando propiedades de las álgebras tetravalentes modales. Sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$ tal que h satisface los hipersecuentes $\mathcal{G}|\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \gamma$ y $\mathcal{G}|\Gamma, \neg\beta \Rightarrow \gamma$. Tenemos los siguientes casos: (1) existe un secuente $S \in \mathcal{G}$ tal que h satisface S, ó (2) para todo secuente $S \in \mathcal{G}$ se tiene que h no satisface S. Si ocurre (1), la demostración está concluida. Si es el caso de (2), entonces h satisface $\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \gamma$ y h satisface $\Gamma, \neg\beta \Rightarrow \gamma$. Luego, $\bigwedge\limits_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge h(\neg\alpha) \leq h(\gamma)$ y $\bigwedge\limits_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge h(\neg\beta) \leq h(\gamma)$. De aqui,

$$(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge h(\neg\alpha)) \vee (\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge h(\neg\beta)) \leq h(\gamma)$$

y, como en las TMA's vale la ley distributiva, tenemos

$$\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge (h(\neg\alpha) \vee h(\neg\beta)) \leq h(\gamma).$$

Por propiedades de homomorfismos y de las álgebras tetravalentes modales tenemos que $h(\neg\alpha) \vee h(\neg\beta) = h(\neg(\alpha \wedge \beta))$. Luego, h satisface el secuente $\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$ y, como consecuencia, h satisface el hipersecuente $\mathcal{G}|\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$. ■

Teorema 4.3.6 *(Correctitud) $\mathfrak{HG}$ es correcto con respecto a la lógica M_{4m}: para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, si $\mathfrak{HG} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$, entonces $\models_{M_{4m}} \Gamma \Rightarrow \alpha$ (es decir, $\Gamma \models_{M_{4m}} \alpha$).*

Dem. Basta ver que el axioma de $\mathfrak{HG}$ es válido en M_{4m}, y que las reglas de $\mathfrak{HG}$ son w-válidas. Es claro que $\models_{M_{4m}} \alpha \Rightarrow \alpha$. Es fácil verificar que las reglas estructurales de debilitamiento interno (IW) y corte (Corte) son w-válidas, puesto que son la versión hipersecuencial de respectivas reglas en $\mathfrak{G}$. Lo mismo sucede con las reglas lógicas $(\vee \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \vee)_1$, $(\Rightarrow \vee)_2$, $(\wedge \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \wedge)$, $(\neg\neg \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \neg\neg)$, $(\neg\Box \Rightarrow)$ y $(\perp)$. Por otro lado, hemos probado en la Proposición 4.3.5 que las restantes reglas lógicas son w-válidas.

Veamos que la regla Split modal es w-válida. Supongamos que h es un homomorfismo que satisface $\mathcal{G}|\Box\Gamma, \Delta \Rightarrow \beta$. Entonces, tenemos las dos posibilidades siguientes. La primera posibilidad es que exista un secuente $S \in \mathcal{G}$ tal que h satisface S. Es claro que en este caso h satisface $\mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow |\Delta \Rightarrow \beta$. Caso contrario, h satisface $\Box\Gamma, \Delta \Rightarrow \beta$. Luego,

$$\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\Box\gamma) \wedge \bigwedge_{\delta\in\Delta} h(\delta) \leq h(\alpha)$$

$\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \Box h(\gamma) \wedge \bigwedge_{\delta\in\Delta} h(\delta) \leq h(\alpha)$$

$\Leftrightarrow$

$$\Box \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge \bigwedge_{\delta\in\Delta} h(\delta) \leq h(\alpha).$$

Por la definición de $\Box$ en $\mathfrak{M}_{4m}$, tenemos que (1) $\Box \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) = 0$ ó (2) $\Box \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) = 1$. Si es el caso de (1) entonces, $\Box \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) = \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\Box\gamma) = 0$. Como consecuencia, h satisface el secuente $\Box\Gamma \Rightarrow$ y asi h satisface el hipersecuente $\mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow |\Delta \Rightarrow \beta$. Contrariamente, si sucede (2), tenemos que $\bigwedge_{\delta\in\Delta} h(\delta) = 1 \wedge \bigwedge_{\delta\in\Delta} h(\delta) = \Box \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) \wedge \bigwedge_{\delta\in\Delta} h(\delta) \leq h(\alpha)$. Luego, h satisface el secuente $\Delta \Rightarrow \beta$ y entonces h satisface el hipersecuente $\mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow |\Delta \Rightarrow \beta$.
Claramente la Contracción Externa (EC) es w-válida. ■

4.4 Reglas sustitutivas y reductivas

En esta sección presentaremos las nociones de *regla sustitutiva* y *regla reductiva* adaptadas a nuestro cálculo $\mathfrak{HG}$. Estas nociones fueron introducidas en [20] para hipersecuentes tales que los respectivos secuentes son pares de multiconjuntos.
Observe que un hipersecuente $\mathcal{H}$ puede ser visto como un multiconjunto finito de secuentes. Asi, hipersecuentes de la forma $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma \Rightarrow \alpha)$ y $(\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha|\Delta \Rightarrow \beta)$ pueden ser vistos como

los multiconjuntos finitos de secuentes $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}' \cup \{(\Gamma \Rightarrow \alpha)\}$ y $\mathcal{G} \cup \{(\Gamma \Rightarrow \alpha), (\Delta \Rightarrow \beta)\}$, respectivamente. En la definición siguiente, si $\mathcal{G}$ es un hipersecuente (o sea, un multiconjunto finito de secuentes) y $S \in \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} - \{S\}$ denota el hipersecuente obtenido de $\mathcal{G}$ eliminando una única ocurrencia del secuente S. Por otro lado, si Γ es un conjunto de fórmulas y $\alpha \in \Gamma$ entonces, como es usual, $\Gamma - \{\alpha\}$ denota el conjunto obtenido de Γ eliminando α.

Definición 4.4.1 *Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ hipersecuentes; $S_1 = (\Gamma \Rightarrow \beta)$ y $S_2 = (\Delta \Rightarrow \gamma)$ secuentes; y α una fórmula, todos en la misma signatura. Definimos $CUT_\alpha(\mathcal{G}_1; S_1; \mathcal{G}_2; S_2)$ como sigue: si $S_i \in \mathcal{G}_i$ para $i = 1, 2$, $\alpha \in \Gamma$ y $\gamma = \alpha$, entonces $CUT_\alpha(\mathcal{G}_1; S_1; \mathcal{G}_2; S_2) = \{\mathcal{G}\}$ tal que $\mathcal{G}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}_1 - \{S_1\})|(\mathcal{G}_2 - \{S_2\})|(\Gamma - \{\alpha\}, \Delta \Rightarrow \beta)$. En caso contrario, $CUT_\alpha(\mathcal{G}_1; S_1; \mathcal{G}_2; S_2) = \emptyset$.*

Claramente $CUT_\alpha(\mathcal{G}_1; S_1; \mathcal{G}_2; S_2) = \{\mathcal{G}\}$ si, y solo si, $\mathcal{G}$ es el resultado de aplicar (Corte) a partir de los hipersecuentes $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, siendo que α es la fórmula cortada a izquierda en el secuente S_1 de $\mathcal{G}_1$ y a derecha en el secuente S_2 de $\mathcal{G}_2$.

Definición 4.4.2 *Sea (r) una regla de hipersecuentes de la forma siguiente.*

$$(r) \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma_1 \Rightarrow \alpha_1 \quad \cdots \quad \mathcal{G}|\Gamma_n \Rightarrow \alpha_n}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}$$

Se dice que (r) es sustitutiva en $\mathfrak{HG}$ si se verifica alguna de las siguientes condiciones: Para cualquier fórmula $\bar{\alpha}$ que no es la fórmula principal de (r), cualquier $\beta \in Fm$, cualquier $\Sigma \subseteq Fm$ finito y cualquier hipersecuente $\mathcal{G}'$,

1. *si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, entonces el hipersecuente de*

$$CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha); (\Gamma \Rightarrow \alpha); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$$

puede ser derivado aplicando (r) o cualquier otra regla de $\mathfrak{HG}$ *que no sea (Corte) con premisas en* $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma_i \Rightarrow \alpha_i); (\Gamma_i \Rightarrow \alpha_i); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$*, para* $i = 1, \ldots, n$.

2. *si* $\bar{\alpha} = \alpha$ *entonces, el hipersecuente de*

$$CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \beta); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \beta); (\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha); (\Gamma \Rightarrow \alpha))$$

puede ser derivado aplicando (r) o cualquier otra regla de $\mathfrak{HG}$ *que no sea (Corte) con premisas en* $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \beta); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \beta); (\mathcal{G}|\Gamma_i \Rightarrow \alpha_i); (\Gamma_i \Rightarrow \alpha_i))$*, para* $i = 1, \ldots, n$.

Intuitivamente, las reglas sustitutivas permiten que cualquier aplicación de corte sea *trasladada hacia arriba* en la prueba, posiblemente usando diferentes reglas del cálculo.

Lema 4.4.3 *Las reglas estructurales de debilitamiento interno (IW) y contracción externa (EC) de* $\mathfrak{HG}$ *son sustitutivas.*

Dem. El debilitamiento interno

$$\frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}$$

(cuya fórmula principal es α) es una regla sustitutiva. En efecto, si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma - \{\bar{\alpha}\}, \Sigma, \alpha \Rightarrow \beta)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ por debilitamiento interno, donde $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \beta); (\Gamma \Rightarrow \beta); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$.
Por otro lado, si $\bar{\alpha} = \beta$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma)$, que puede ser obtenido a partir de $\mathcal{H} = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma \Rightarrow \gamma)$ por debilitamiento interno, observando que $\{\mathcal{H}\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma \Rightarrow \bar{\alpha}))$.

Análogamente se prueba que el debilitamiento externo y la contracción externa son sustitutivas. ■

Lema 4.4.4 *Todas las reglas lógicas de $\mathfrak{HG}$, a excepción de ($\Rightarrow \Box$), son sustitutivas.*

Dem. (i) La regla

$$(\wedge \Rightarrow) \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\wedge \Rightarrow)$, es decir, diferente de $\alpha \wedge \beta$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ por $(\wedge \Rightarrow)$.

Si $\bar{\alpha} = \gamma$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H} = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma')$ por $(\wedge \Rightarrow)$, observando que $\{\mathcal{H}\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \bar{\alpha}))$.

(ii) La regla

$$(\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\Rightarrow \wedge)$, es decir, diferente de $\alpha \wedge \beta$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \wedge \beta); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \wedge \beta); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $\mathcal{H} = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \alpha \wedge \beta)$. Sean $\{\mathcal{H}_1\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$ y $\{\mathcal{H}_2\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \beta); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \beta); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}_1 = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \alpha)$ y $\mathcal{H}_2 = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \beta)$. Claramente $\mathcal{H}$ es derivable de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ usando la regla $(\Rightarrow \wedge)$.

Como $\bar{\alpha}$ no puede ser la fórmula principal de $(\Rightarrow \wedge)$, la segunda condición de la Definición 4.4.2 no debe analizarse.

(iii) La regla

$$(\vee \Rightarrow) \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma \quad \mathcal{G}|\Gamma, \beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\vee \Rightarrow)$, es decir, diferente de $\alpha \vee \beta$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma), (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma)$. Sean $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$ y $\{\mathcal{H}''\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \beta \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \beta \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha \Rightarrow \gamma)$ y $\mathcal{H}'' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \beta \Rightarrow \gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}''$ por $(\vee \Rightarrow)$.

Si $\bar{\alpha} = \gamma$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H} = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma')$ y $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \beta \Rightarrow \gamma')$ por $(\vee \Rightarrow)$, observando que $\{\mathcal{H}\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$ y $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \beta \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \beta \Rightarrow \bar{\alpha}))$.

(iv) La regla

$$(\Rightarrow \vee)_1 \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\Rightarrow \vee)_1$, es decir, diferente de $\alpha \vee \beta$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \vee \beta); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \vee \beta); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $\mathcal{H} = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \alpha \wedge \beta)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H} = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \alpha \vee \beta)$. Claramente $\mathcal{H}$ es derivable de $\mathcal{H}'$ usando la regla $(\Rightarrow \vee)_1$.

Como $\bar{\alpha}$ no puede ser la fórmula principal de $(\Rightarrow \vee)_1$, la segunda condición de la Definición 4.4.2 no debe analizarse. Análogamente se prueba que $(\Rightarrow \vee)_2$ es sustitutiva.

(v) La regla

$$(\neg\wedge\Rightarrow)\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma\quad \mathcal{G}|\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\gamma}{\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\vee\Rightarrow)$, es decir, diferente de $\neg(\alpha\wedge\beta)$. Si $\bar{\alpha}\in\Gamma$, i.e., $\Gamma=\Gamma'\cup\{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma);(\Gamma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma),(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))=\{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma)$. Sea $\{\mathcal{H}'\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma);(\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$ y $\{\mathcal{H}''\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\gamma);(\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\gamma);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}'=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma)$ y $\mathcal{H}''=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma,\neg\beta\Rightarrow\gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}''$ por $(\neg\wedge\Rightarrow)$.

Si $\bar{\alpha}=\gamma$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\bar{\alpha});(\Gamma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\bar{\alpha}))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma,\Gamma,\alpha\vee\beta\Rightarrow\gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H}=(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma,\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma')$ y $\mathcal{H}'=(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma,\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\gamma')$ por $(\neg\wedge\Rightarrow)$, observando que $\{\mathcal{H}\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\bar{\alpha});(\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\bar{\alpha}))$ y $\{\mathcal{H}'\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\mathcal{G}|\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\bar{\alpha});(\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\bar{\alpha}))$.

(vi) La regla

$$(\Rightarrow\neg\wedge)_1\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma\Rightarrow\neg\alpha}{\mathcal{G}|\Gamma\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\Rightarrow\neg\wedge)_1$, es decir, diferente de $\neg(\alpha\wedge\beta)$. Si $\bar{\alpha}\in\Gamma$, i.e., $\Gamma=\Gamma'\cup\{\bar{\alpha}\}$, entonces el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta));(\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta));(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$ es $\mathcal{H}=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta))$. Sea $\{\mathcal{H}'\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg\alpha);(\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg\alpha);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta))$. Claramente $\mathcal{H}$ es derivable de $\mathcal{H}'$ usando la regla $(\Rightarrow\neg\wedge)_1$.

Como $\bar{\alpha}$ no puede ser la fórmula principal de $(\Rightarrow\neg\wedge)_1$, la segunda condición de la Definición 4.4.2 no debe analizarse. Análogamente se prueba que $(\Rightarrow\neg\wedge)_2$ es sustitutiva.

(vii) La regla

$$(\neg\vee\Rightarrow)\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma}{\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\neg\vee\Rightarrow)$, es decir, diferente de $\neg(\alpha\vee\beta)$. Si $\bar{\alpha}\in\Gamma$, i.e., $\Gamma=\Gamma'\cup\{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma);(\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))=\{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma)$. Sea $\{\mathcal{H}'\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma);(\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}'=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ por $(\wedge\Rightarrow)$.

Si $\bar{\alpha}=\gamma$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\bar{\alpha});(\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\bar{\alpha}))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma,\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H}=(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma,\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma')$ por $(\neg\vee\Rightarrow)$, observando que $\{\mathcal{H}\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\Sigma,\bar{\alpha}\Rightarrow\gamma');(\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\bar{\alpha});(\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\bar{\alpha}))$.

(viii) La regla

$$(\Rightarrow\neg\vee)\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma\Rightarrow\neg\alpha\quad \mathcal{G}|\Gamma\Rightarrow\neg\beta}{\mathcal{G}|\Gamma\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\Rightarrow\neg\vee)$, es decir, diferente de $\neg(\alpha\vee\beta)$. Si $\bar{\alpha}\in\Gamma$, i.e., $\Gamma=\Gamma'\cup\{\bar{\alpha}\}$, entonces el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta));(\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta));(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$ es $\mathcal{H}=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)$. Sean $\{\mathcal{H}_1\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg\alpha);(\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg\alpha);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$ y $\{\mathcal{H}_2\}=CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg\beta);(\Gamma',\bar{\alpha}\Rightarrow\neg\beta);(\mathcal{G}'|\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha});(\Sigma\Rightarrow\bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}_1=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg\alpha)$ y $\mathcal{H}_2=(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma',\Sigma\Rightarrow\neg\beta)$. Claramente $\mathcal{H}$ es derivable de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ usando la regla $(\Rightarrow\neg\vee)$.

Como $\bar{\alpha}$ no puede ser la fórmula principal de $(\Rightarrow\neg\vee)$, la segunda condición de la Definición 4.4.2 no debe analizarse.

(ix) La regla

$$(\neg\neg \Rightarrow)\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\neg\vee \Rightarrow)$, es decir, diferente de $\neg\neg\alpha$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha \Rightarrow \gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ por $(\neg\neg \Rightarrow)$.
Si $\bar{\alpha} = \gamma$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H} = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma')$ por $(\neg\neg \Rightarrow)$, siendo que $\{\mathcal{H}\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$.
(x) La regla

$$(\Rightarrow \neg\neg)\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \neg\neg\alpha}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\Rightarrow \neg\neg)$, es decir, diferente de $\neg\neg\alpha$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \neg\neg\alpha); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \neg\neg\alpha); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $\mathcal{H} = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \neg\neg\alpha)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \alpha)$ y, claramente, $\mathcal{H}$ es derivable de $\mathcal{H}'$ usando la regla $(\Rightarrow \neg\neg)$.
Como $\bar{\alpha}$ no puede ser la fórmula principal de $(\Rightarrow \neg\neg)$, la segunda condición de la Definición 4.4.2 no debe analizarse.
(xi) La regla

$$(\Box \Rightarrow)\quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\Box \Rightarrow)$, es decir, diferente de $\Box\alpha$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow$

$\gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \Box\alpha \Rightarrow \gamma)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha \Rightarrow \gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ por $(\Box \Rightarrow)$.

Si $\bar{\alpha} = \gamma$, el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H} = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma')$ por $(\Box \Rightarrow)$, siendo que $\{\mathcal{H}\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$.

(xii) La regla

$$(\neg\Box \Rightarrow) \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \gamma}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\neg\Box \Rightarrow)$, es decir, diferente de $\neg\Box\alpha$. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \gamma)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \gamma); (\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \gamma); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \gamma)$. Claramente $\mathcal{H}$ es obtenido de $\mathcal{H}'$ por $(\neg\Box \Rightarrow)$.

Si $\bar{\alpha} = \gamma$, entonces $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \bar{\alpha})) = \{\mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{H}$ es el hipersecuente $(\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \gamma')$, que puede ser obtenido de $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}'|\mathcal{G}|\Sigma, \Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \gamma')$ por $(\neg\Box \Rightarrow)$, observando que $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}'|\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\Sigma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma'); (\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}))$.

(xiii) La regla

$$(\bot) \quad \frac{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \bot}{\mathcal{G}|\Gamma \Rightarrow \alpha}$$

es sustitutiva. En efecto, sea $\bar{\alpha}$ una fórmula que no es la fórmula principal de $(\bot)$, esto es, $\bar{\alpha}$ no es α. Si $\bar{\alpha} \in \Gamma$, i.e., $\Gamma = \Gamma' \cup \{\bar{\alpha}\}$, entonces el hipersecuente de $CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$ es $\mathcal{H} = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \alpha)$. Sea $\{\mathcal{H}'\} = CUT_{\bar{\alpha}}((\mathcal{G}|\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow$

$\perp); (\Gamma', \bar{\alpha} \Rightarrow \perp); (\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}); (\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}))$. Luego $\mathcal{H}' = (\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma', \Sigma \Rightarrow \perp)$ y, claramente, $\mathcal{H}$ es derivable de $\mathcal{H}'$ usando la regla $(\perp)$.

Como $\bar{\alpha}$ no puede ser la fórmula principal de $(\perp)$, la segunda condición de la Definición 4.4.2 no debe analizarse. ■

Definición 4.4.5 *Las reglas lógicas para la fórmula esquema* $\star(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *son* reductivas *si para todas las instancias de las reglas lógicas a izquierda y a derecha de* $\star$ *de la forma:*

$$\frac{\mathcal{G}|S_1 \ \ldots \ \mathcal{G}|S_n}{\mathcal{G}|\Gamma, \star(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \Rightarrow \gamma} \qquad\qquad \frac{\mathcal{G}|S'_1 \ \ldots \ \mathcal{G}|S'_m}{\mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \star(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

el hipersecuente $\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma$ *es derivable a partir* $\mathcal{G}|S_1, \ldots, \mathcal{G}|S_n$, $\mathcal{G}|S'_1, \ldots, \mathcal{G}|S'_m$ *usando la regla de corte con las fórmulas* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Lema 4.4.6 *Las reglas lógicas que introducen a las fórmulas esquema* $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg(\alpha \wedge \beta)$, $\neg(\alpha \vee \beta)$, $\neg\neg\alpha$ *y* $\Box\alpha$, *a izquierda y a derecha, son reductivas.*

Dem. (i) $(\Rightarrow \wedge)$ y $(\wedge \Rightarrow)$:

$$\frac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma} \qquad \dfrac{\mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \alpha \qquad \mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}}{\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}$$

puede ser reemplazado por

$$\frac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma \qquad \mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma, \beta \Rightarrow \gamma}(*) \qquad \mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \beta}{\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}$$

Observemos que el hipersecuente consecuencia de $(*)$, debería ser $\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma, \Sigma \Rightarrow \gamma$, pero Γ y Σ son conjuntos de fórmulas tenemos que $\Gamma, \Sigma, \Sigma = \Gamma \cup \Sigma \cup \Sigma = \Gamma \cup \Sigma = \Gamma, \Sigma$.

(ii) $(\Rightarrow \vee)$ y $(\vee \Rightarrow)_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma,\alpha\Rightarrow\gamma \qquad \mathcal{G}|\Gamma,\beta\Rightarrow\gamma}{\mathcal{G}|\Gamma,\alpha\vee\beta\Rightarrow\gamma} \qquad \dfrac{\mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\alpha}{\mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\alpha\vee\beta}}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma\Rightarrow\gamma}$$

puede ser reemplazado por

$$\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma,\alpha\Rightarrow\gamma \qquad \mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\alpha}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma\Rightarrow\gamma}$$

Idem para $(\Rightarrow\vee)$ y $(\vee\Rightarrow)_2$.

(iii) $(\Rightarrow\neg\wedge)$ y $(\neg\wedge\Rightarrow)_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma \qquad \mathcal{G}|\Gamma,\neg\beta\Rightarrow\gamma}{\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma} \qquad \dfrac{\mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg\alpha}{\mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)}}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma\Rightarrow\gamma}$$

puede ser reemplazado por

$$\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha\Rightarrow\gamma \qquad \mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg\alpha}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma\Rightarrow\gamma}$$

Idem para $(\Rightarrow\neg\wedge)$ y $(\neg\wedge\Rightarrow)_2$.

(iv) $(\Rightarrow\neg\vee)$ y $(\neg\vee\Rightarrow)$:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma}{\mathcal{G}|\Gamma,\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma} \qquad \dfrac{\mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg\alpha \qquad \mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg\beta}{\mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)}}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma\Rightarrow\gamma}$$

puede ser reemplazado por

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma,\neg\alpha,\neg\beta\Rightarrow\gamma \qquad \mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg\alpha}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma,\neg\beta\Rightarrow\gamma} \qquad \mathcal{G}|\Sigma\Rightarrow\neg\beta}{\mathcal{G}|\Gamma,\Sigma\Rightarrow\gamma}$$

(v) ($\Rightarrow \neg\neg$) y ($\neg\neg \Rightarrow$):

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad \dfrac{\mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \neg\neg\alpha}}{\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}$$

puede ser reemplazado por

$$\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma \qquad \mathcal{G}|\Sigma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}$$

(vi) ($\Rightarrow \Box$) y ($\Box \Rightarrow$):

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad \dfrac{\mathcal{G}|\Box\Sigma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Box\Sigma \Rightarrow \Box\alpha}}{\mathcal{G}|\Gamma, \Box\Sigma \Rightarrow \gamma}$$

puede ser reemplazado por

$$\dfrac{\mathcal{G}|\Gamma, \alpha \Rightarrow \gamma \qquad \mathcal{G}|\Box\Sigma \Rightarrow \alpha}{\mathcal{G}|\Gamma, \Box\Sigma \Rightarrow \gamma}$$

■

4.5 Eliminación de corte para $\mathfrak{HG}$

La siguiente definición es necesaria para lo que sigue.

Definición 4.5.1 *Llamaremos* **longitud** *de la derivación d en un cálculo de hipersecuentes, y lo notaremos $|d|$, al máximo número de reglas de inferencia más uno, que ocurren en cualquier rama de d. La* **complejidad** *de una fórmula α, $|\alpha|$ es el número de ocurrencias de sus conectivos. El* **rango de corte** *de una derivación d, $\rho(d)$, es el máximo de las complejidades de las fórmulas cut más uno. Si d es libre de corte, entonces $\rho(d) = 0$.*

Lema 4.5.2 *Se puede restringir al axioma $\alpha \Rightarrow \alpha$ a instancias atómicas para las derivaciones libres de corte en $\mathfrak{HG}$.*

Dem. Usando inducción sobre la complejidad de la fórmula α, mostrando que $\alpha \Rightarrow \alpha$ es derivable en $\mathfrak{HG}$ sin corte usando solo versiones atómicas de ese axioma. ■

Lema 4.5.3 *Sean d_l y d_r derivaciones en $\mathfrak{HG}$ tales que:*

(i) d_l *es una derivación de* $\mathcal{G}|\Gamma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma$,

(ii) d_r *es una derivación de* $\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}$,

(iii) $\rho(d_l) < |\bar{\alpha}|$ *y* $\rho(d_r) < |\bar{\alpha}|$, *y*

(iv) $\bar{\alpha}$ *es una fórmula compuesta y* d_r *termina con una regla lógica o una regla modal introduciendo a* $\bar{\alpha}$.

Entonces, podemos encontrar una derivación d en $\mathfrak{HG}$ de $\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma$ *con* $\rho(d) < |\bar{\alpha}|$.

Dem. Considere una derivación d_l' del hipersecuente

$$\mathcal{G}|\Gamma_1, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma_1| \cdots |\Gamma_n, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma_n$$

tal que $\rho(d_l') < |\bar{\alpha}|$. Se requiere esta hipótesis para poder lidiar con la contracción externa (EC). Probaremos por inducción sobre $|\rho(d_l')|$, que podemos hallar una derivación de

$$\mathcal{G}|\Gamma_1, \Sigma \Rightarrow \gamma_1| \cdots |\Gamma_n, \Sigma \Rightarrow \gamma_n$$

con rango de corte menor que $|\bar{\alpha}|$. Por el Lema 4.5.2 podemos suponer que todas las aplicaciones de (id) en d_l' son atómicas. Si d_l' termina en un secuente inicial entonces la demostración está concluida. En otro caso, sea (r) la última regla de inferencia aplicada en d_l'.

(i) Si (r) actúa sobre $\mathcal{G}$, entonces la afirmación es verdadera por la hipótesis inductiva (H.I.) y la aplicación de (r).

(ii) Si (r) es una regla de $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$, diferente de (Split) y $(\Rightarrow \Box)$, que no introduce a $\bar{\alpha}$, entonces la afirmación es verdadera. Sale del Lema 4.4.4, la H.I., seguido de la aplicación de (r) y/o cualquier otra regla de $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ que no sea la regla de corte.

(iii) Si (r) es una regla de introducción a izquierda de $\bar{\alpha}$, entonces $\bar{\alpha} = \alpha \wedge \beta$, ó $\bar{\alpha} = \alpha \vee \beta$, ó $\bar{\alpha} = \neg(\alpha \wedge \beta)$, ó $\bar{\alpha} = \neg(\alpha \vee \beta)$, ó $\bar{\alpha} = \neg\neg\alpha$ ó $\bar{\alpha} = \Box\alpha$.

Sea (r') la última regla de inferencia aplicada en d_r.

(a) Si (r') es una regla de introducción a derecha de $\bar{\alpha}$, entonces, por el Lema 4.4.6, la afirmación es verdadera.

(b) Si (r') es $(\bot)$. Entonces tenemos la siguiente situación:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathcal{G}|\Gamma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma\end{array} \qquad \dfrac{\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bot}{\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}}}{\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}$$

que puede ser reemplazada por

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bot\end{array}}{\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \gamma}\,(\bot)}{\mathcal{G}'|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}\,(\text{IW})}{\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma}\,(\text{EW})$$

(iv) Si (r) es $(\neg\Box \Rightarrow)$ y $\bar{\alpha} = \neg\Box\alpha$. Sea (r') la última regla de inferencia aplicada en d_r. Por la condición (iv) del Lema 4.5.3, (r') es $(\bot)$ y el tratamiento es análogo al del caso (iii) (b).

(v) Si (r) es el Split Modal y la fórmula principal es $\bar{\alpha} = \Box\alpha$ y d_l' termina como sigue:

$$\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ \mathcal{G}|\Box\Gamma, \Delta, \Box\alpha \Rightarrow \gamma \\ \hline \mathcal{G}|\Box\Gamma, \Box\alpha \Rightarrow |\Delta \Rightarrow \gamma \end{array}$$

Observe que, como $\Box\alpha$ es la fórmula introducida por la última regla de d_r (por hipótesis), entonces d_r es de la forma

$$\begin{array}{c} d_0 \\ \vdots \\ \mathcal{G}'|\Box\Sigma \Rightarrow \alpha \\ \hline \mathcal{G}|\Box\Sigma \Rightarrow \Box\alpha \end{array}$$

donde $(\Rightarrow \Box)$ es la última regla aplicada. Entonces, aplicándole la H.I. a d_1 y d_r, tenemos que existe una derivación d_1' de
$\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Box\Gamma, \Delta, \Box\Sigma \Rightarrow \gamma$ con rango de corte menor que $|\bar{\alpha}|$. Luego, podemos construir d con las condiciones deseadas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \text{(Split)}\ \dfrac{\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Box\Gamma, \Delta, \Box\Sigma \Rightarrow \gamma}{\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Box\Gamma, \Box\Sigma \Rightarrow |\Delta \Rightarrow \gamma} \end{array}$$

(vi) Si (r) es el Split Modal y la fórmula principal no tiene la forma de $\bar{\alpha} = \Box\alpha$ y d_l' termina como sigue:

$$\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ \mathcal{G}|\Box\Gamma, \Delta, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma \\ \hline \mathcal{G}|\Box\Gamma \Rightarrow |\Delta, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma \end{array}$$

Entonces, aplicándole la H.I. a d_1 y d_r, tenemos que existe una derivación d_1' de $\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Box\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow \gamma$ con rango de corte menor que $|\bar{\alpha}|$. Luego, podemos construir d con las condiciones deseadas de la siguiente forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c} d \\ \vdots \\ \mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Box\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow \gamma \end{array}}{\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Box\Gamma \Rightarrow |\Delta, \Sigma \Rightarrow \gamma}\ \text{(Split)}$$

(vii) Si (r) es $(\Rightarrow \Box)$, el tratamiento es análogo al del casos (v).

■

Lema 4.5.4 *Sean d_l y d_r derivaciones en $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ tales que:*

(i) d_l *es una derivación de* $\mathcal{G}|\Gamma, \bar{\alpha} \Rightarrow \gamma$,

(ii) d_r *es una derivación de* $\mathcal{G}'|\Sigma \Rightarrow \bar{\alpha}$,

(iii) $\rho(d_l) < |\bar{\alpha}|$ *y* $\rho(d_r) < |\bar{\alpha}|$.

Entonces, podemos encontrar una derivación d *en* $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ *de* $\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma$ *con* $\rho(d) < |\bar{\alpha}|$.

Dem. Por el Lema 4.5.2, podemos asumir que todas las aplicaciones del axioma son atómicas en d_l y d_r. Considere una derivación d_r' del hipersecuente

$$\mathcal{G}'|\Sigma_1 \Rightarrow \bar{\alpha}| \cdots |\Sigma_n \Rightarrow \bar{\alpha}$$

tal que $\rho(d_r') < |\bar{\alpha}|$. Probaremos por inducción sobre $|d_r'|$, que podemos hallar una derivación de

$$\mathcal{G}|\mathcal{G}'|\Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \gamma| \cdots |\Gamma, \Sigma_n \Rightarrow \gamma$$

con rango de corte menor que $|\bar{\alpha}|$. Sea (r) la última regla de inferencia aplicada en d_r':

(i) Si $\bar{\alpha}$ es atómica.

1. Si (r) es un secuente inicial, entonces la afirmación vale trivialmente.
2. Si (r) actua solo sobre G', entonces la afirmación se deduce por la H.I. y la aplicación de (r).
3. Si (r) es una regla de $\mathfrak{HG}$, diferente de (Split) y $(\Rightarrow \Box)$, entonces la afirmación es verdadera. Sale del Lema 4.4.4, la H.I., seguido de la aplicación de (r) y/o cualquier otra regla de $\mathfrak{HG}$ que no sea la regla de corte.
4. Si (r) es (Split) ó $(\Rightarrow \Box)$. Como $\bar{\alpha}$ es atómica, $\bar{\alpha} \neq \Box\alpha$. Puesto que $\bar{\alpha}$ solo puede ser una fórmula de esta regla que no cambia luego de la aplicación de (r), la afirmación vale por la H.I. y la aplicación de (r).

(ii) Si $\bar{\alpha} = \alpha \wedge \beta$, ó $\bar{\alpha} = \alpha \vee \beta$, ó $\bar{\alpha} = \neg(\alpha \wedge \beta)$, ó $\bar{\alpha} = \neg(\alpha \vee \beta)$, ó $\bar{\alpha} = \neg\neg\alpha$.

1. Si (r) es cualquier regla que no sea una regla que introduce a $\bar{\alpha}$, la demostración procede como en los casos 2–4 de antes.
2. Si (r) es una regla que introduce $\bar{\alpha}$. La afirmación vale por el Lema 4.5.3.

(iii) Si $\bar{\alpha} = \Box\alpha$.

1. Si (r) es cualquier regla que no sea una regla que introduce a $\bar{\alpha}$, la demostración procede como en los casos 2–4 de antes.
2. Si (r) es $(\Box \Rightarrow)$ ó (Split), la afirmación vale por la H.I. y la subsecuente aplicación de la correspondiente regla.
3. Si (r) es $(\Rightarrow \Box)$, la aplicación vale por el Lema 4.5.3.
4. Cualquier otro caso se maneja como en el caso de que $\bar{\alpha}$ es atómico.

(iv) Si $\bar{\alpha} = \neg\Box\alpha$.

Como no existen reglas que introduzcan (a derecha) a $\neg\Box\alpha$, cualquiera sea la regla (r) la demostración procede como en los casos 2–4 de antes.

■

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema de eliminación de corte.

Teorema 4.5.5 $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ *admite eliminación de corte.*

Dem. Sea d una derivación en $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ con $\rho(d) > 0$. La prueba procede por doble inducción sobre $(\rho(d), n\rho(d))$, donde $n\rho(d)$ es el número de aplicaciones de la regla de corte en d con rango menor que $\rho(d)$. Considere la aplicación de corte en la posición más alta en d con rango de corte $\rho(d)$. Aplicando el Lema 4.5.4 a sus premisas obtenemos una derivación donde $\rho(d)$ o $n\rho(d)$ decrece. ■

5 Capítulo V: Lógica Tetravalente Modal con Implicación Deductiva

5.1 Introducción

En 1954, Gr. Moisil introdujo la noción de *álgebras de Boole simétricas* (cf. [50, 51], las cuales fueron estudiadas en detalle por A. Monteiro en [52] bajo el nombre de *álgebras de Boole involutivas* (ver también [1]). Estas álgebras no deberian ser confundidas con las estructuras de mismo nombre introducidas en [24], las cuales son de una naturaleza muy diferente.

Un **álgebra de Boole simétrica** es una estructura $\langle A, \wedge, \vee, \sim, T, 0\rangle$ donde el reducto $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0\rangle$ es un álgebra de Boole y T es un automorfismo involutivo sobre A, esto es, $T : A \to A$ es un automorfismo tal que $T(T(x)) = x$, para todo $x \in A$. Por otro lado, un **álgebra de Boole involutiva** es una estructura $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \neg, 0\rangle$ donde $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0\rangle$ es un álgebra de Boole y $\neg$ es un automorfismo involutivo dual sobre A, esto es, $\neg : A \to A^d$ es un isomorfismo (donde A^d denota el dual de A) tal que $\neg\neg x = x$, para todo $x \in A$. Esto es equivalente a decir que $\neg$ es una negación de De Morgan, esto es, una negación $\neg$ definida sobre un retículo acotado distributivo tal que $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ y $\neg\neg x = x$ (y por eso $\neg 0 = 1$).

Como se observara en [52], ambas clases de estructuras coinciden: en efecto, dado T, entonces $\neg x = \sim T(x)$ es un automorfismo involutivo dual. Recíprocamente, dado $\neg$, el mapeo $T(x) = \sim\neg x$ es un automorfismo involutivo, y una construcción es la inversa de la otra.

Como fuera establecido en el capítulo 3, $\mathcal{TML}$ no es funcionalmente completa. Como consecuencia, no es posible definir una implicación deductiva (esto es, satisfaciendo el meta-teorema de la deducción) en ella, en función de los conectivos primitivos de la lógica. La "mejor" implicación que puede ser definida en $\mathcal{TML}$, i.e., que tiene propiedades deseables en una implicación, es la *implicación contrapositiva*; y esta no es una implicación deductiva. El propósito del presente capítulo es enriquecer la lógica $\mathcal{TML}$ con una implicación deductiva o, lo que es equivalente, con una negación suplementaria. Esto dará lugar a una nueva lógica, por un lado, y a una nueva estructura algebraica, por el otro.

Desde el punto de vista semántico, lo que estamos buscando es un operador binario $\Rightarrow$ definido en el álgebra $\mathfrak{M}_{4m}$ de tal modo que la siguiente condición valga, para todo $a, b, c \in \mathfrak{M}_{4m}$

$$c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \Rightarrow b$$

Como vimos en el Capítulo 3, la implicación contrapositiva $\succ$ (cuya tabla está abajo)

$\succ$	0	N	B	1
0	1	1	1	1
N	N	1	B	1
B	B	N	1	1
1	0	N	B	1

no verifica esta condición. Más aún, el problema es precisamente el modo en el que están definidos $B \succ 0$ y $N \succ 0$, pues

$$N \wedge B \leq 0 \ \text{ pero } \ N \not\leq B \succ 0 = B$$

y recíprocamente,

$$N \leq N \succ 0 \ \text{ pero } \ N \wedge N \not\leq 0.$$

Después de analizar todas las posibilidades, concluimos que la tabla de $\Rightarrow$ debería ser:

$\Rightarrow$	0	N	B	1
0	1	1	1	1
N	B	1	B	1
B	N	N	1	1
1	0	N	B	1

Es decir, $x \Rightarrow y = x \succ y$ para todo x, y excepto cuando $y = 0$ y, $x = B$ o $x = N$.
Sea $\psi(x, y)$ una fórmula definida como sigue:

$$\psi(x, y) = \bullet x \wedge \bullet y \wedge \Box((x \succ y) \succ y).$$

Tenemos que $\psi(x, y) = 1$ si, y solo si, $x, y \in \{\mathrm{N}, \mathrm{B}\}$ y $x \neq y$, y $\psi(x, y) = 0$ en otro caso.

Entonces, un modo de definir la deducción implicativa podría ser en términos del predicado γ como sigue:

$$x \Rightarrow y = z \quad \text{si, y solo si,} \quad \gamma(x, y, z)$$

donde

$$
\begin{aligned}
\gamma(x,y,z) \quad =_{def} \quad & (\psi(x,y) \wedge (z \succ y) \wedge (y \succ z)) \vee \\
& (\bullet x \wedge \bullet y \wedge (x \succ y) \wedge (y \succ x) \wedge (\top \succ z)) \vee \\
& (\bullet x \wedge (y \succ \bot) \wedge \psi(x,z)) \vee \\
& (\bullet x \wedge (\top \succ y) \wedge (\top \succ z)) \vee \\
& ((x \succ \bot) \wedge (\top \succ z)) \vee \\
& ((\top \succ x) \wedge (y \succ z) \wedge (z \succ y))
\end{aligned}
$$

Pero una implicación con tales características no puede ser definida en M_{4m}.

Proposición 5.1.1 *En la matriz $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{N, 1\} \rangle$, la implicación $\Rightarrow$, como la indicada en la tabla anterior, no puede ser definida en términos de los restantes conectivos.*

Dem. Suponga que $\Rightarrow$ es definible en $\langle \mathfrak{M}_{4m}, \{N, 1\} \rangle$ y sea $\phi(x) =_{def} x \Rightarrow \bot$. Por el Lema 3.2.7, $\phi(N) \in \{0, N, 1\}$ y $\phi(B) \in \{0, B, 1\}$. Pero, por la tabla de $\Rightarrow$, deberiamos tener $\phi(N) = B$ y $\phi(B) = N$, una contradicción. ■

En este capítulo abordaremos la cuestión de enriquecer la lógica M_{4m} con una implicación deductiva. Esto dará lugar a una nueva lógica, como así también a una nueva estructura algebraica, que resultará coincidir con las álgebras de Boole simétricas (o involutivas).

5.2 Implicación deductiva en M_{4m}

En esta sección analizaremos las posibilidades de extender la matriz lógica $\mathfrak{M}_{4m}$ (la cual genera la lógica $\mathcal{TML}$ de las TMAs) con un operador de implicación clásico (o booleano). Como veremos, los modelos algebraicos de esta nueva lógica serán las álgebras de Boole simétricas (o involutivas).

Un modo de adicionar una implicación deductiva a $\mathfrak{M}_{4m}$ es definiendo un operador unario $*$, al que vamos a denominar *operador switch*, del siguiente modo:

p	$*p$
0	0
N	B
B	N
1	0

Entonces, $\Rightarrow$ puede ser definida como

$$x \Rightarrow y =_{def} (\bullet x \wedge \Box(y \succ \bot) \wedge *x) \vee ((\circ x \vee \neg\Box(y \succ \bot)) \wedge (x \succ y)). \qquad (5)$$

Proposición 5.2.1 *Agregar $*$ a $\mathfrak{M}_{4m}$ es equivalente a agregar una implicación clásica $\Rightarrow$ a $\mathfrak{M}_{4m}$.*

Dem. De la ecuación (5) tenemos que $*$ conjuntamente con los restantes conectivos de $\mathfrak{M}_{4m}$ define $\Rightarrow$. Por otro lado, en $\mathfrak{M}_{4m}$ enriquecida con $\Rightarrow$, podemos definir a $*$ como:

$$*x = (x \Rightarrow \bot) \wedge \neg\Box\neg.x$$

■

Análogamente, $*$ nos permite definir una negación clásica, esto es, un operador unario $\sim$ definido por la siguiente tabla:

p	$*p$
0	1
N	B
B	N
1	0

En efecto, es suficiente definir

$$\sim x = \neg(\neg x \succ *x). \tag{6}$$

Proposición 5.2.2 *Agregar $*$ a $\mathfrak{M}_{4m}$ es equivalente a agregar una negación clásica $\sim$ a $\mathfrak{M}_{4m}$.*

Dem. Es fácil ver que la ecuación (6) produce la negación clásica en $\mathfrak{M}_{4m}$ enriquecida con $*$. Por otro lado, en $\mathfrak{M}_{4m}$ enriquecida con $\sim$, el conectivo $*$ puede ser definido como sigue: $*x = \sim x \vee \sim\neg x$. ■

Corolario 5.2.3 *Agregar la negación clásica $\sim$ a $\mathfrak{M}_{4m}$ es equivalente a agregar la implicación clásica $\Rightarrow$ a $\mathfrak{M}_{4m}$.*

Dem. Es una consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores. Sin embargo, una prueba directa de este hecho se obtiene usando la interdefinición usual de estos conectivos clásicos. De esta manera, dado $\Rightarrow$, podemos definir $\sim x = x \Rightarrow 0$. Recíprocamente, si tenemos $\sim$, la implicación clásica es obtenida como $x \Rightarrow y = \sim x \vee y$. ■

Sea $\mathfrak{M}^{+}_{4m}$ el álgebra $\langle M_4, \wedge, \vee, \sim, \neg, \Box, 0\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 1)$ donde el reducto $\langle M_4, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ es el álgebra tetravalente modal $\mathfrak{M}_{4m}$ y $\sim$ está definida como en la tabla anterior.

Proposición 5.2.4 *En $\mathfrak{M}_{4m}^{+}$ valen las siguientes identidades: para todo $x, y \in M_4$*

(i) $\neg{\sim}x = {\sim}\neg x$,

(ii) $\Box x = x \wedge \neg{\sim}x$,

(iii) $\Diamond x = x \vee \neg{\sim}x$,

(iv) $\neg\Box x = {\sim}\Box x$,

(v) $\Box\neg x = \Box{\sim}x$.

Debido al Corolario 5.2.3, la deseada extensión de la lógica tetravalente modal por una implicación clásica es equivalente a la extensión por una negación clásica. De esta manera, y por razones que quedarán claras más adelante, nos focalizaremos en la lógica obtenida a partir de $\mathfrak{M}_{4m}$ agregando la negación clásica $\sim$.

5.3 Extensiones clásicas de las álgebras de De Morgan y las álgebras tetravalentes modales

En la sección anterior, vimos en el Corolario 5.2.3 que la extensión de $\mathfrak{M}_{4m}$ mediante una implicación clásica coincide con su extensión mediante una negación clásica. La fácil prueba de este hecho puede ser generalizada a álgebras tetravalentes modales arbitrarias. El punto importante a observar es que, si comenzamos con un álgebra de De Morgan, en lugar de un álgebra tetravalente modal, y la extendemos mediante un complemento booleano, en la estructura resultante se puede definir una única modalidad $\Box$ que satisface las propiedades de las álgebras tetravalente modales. Debido a la unicidad de $\Box$, se tiene que las álgebras tetravalentes modales más un complemento booleano coinciden con las álgebras de De Morgan más un complemento booleano. Además, veremos que esta nueva estructura coincide con las álgebras de Boole simétricas (o involutivas) introducidas por Gr. Moisil en [50] (ver también [51]) y principalmente estudiadas por A. Monteiro (cf. [52]).

Proposición 5.3.1 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0\rangle$ un álgebra de De Morgan, y considere el operador $\sim : A \to A$ tal que $x \wedge \sim x = 0$ y $x \vee \sim x = 1$ para todo $x \in A$, donde $1 = \neg 0$ es el último elemento de A. Sea $\Box x =_{def} x \wedge \neg\sim x$ para todo $x \in A$. Entonces, $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ es un álgebra tetravalente modal.*

Dem. Sea $x \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \vee \neg\Box x &= x \vee \neg(x \wedge \neg\sim x) \\ &= x \vee (\neg x \wedge \neg\neg\sim x) \\ &= x \vee (\neg x \wedge \sim x) \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} x \wedge \neg\Box x &= x \wedge \neg(x \wedge \neg\sim x) \\ &= x \wedge (\neg x \wedge \neg\neg\sim x) \\ &= (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge \sim x) \\ &= (x \wedge \neg x) \vee 0 = (x \wedge \neg x) \end{aligned}$$

■

En adelante, un operador $\sim : A \to A$ como en la Proposición 5.3.1 será llamado un *complemento booleano.*

Lema 5.3.2 *([52]) Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0\rangle$ un álgebra de De Morgan, y considere un complemento booleano $\sim$ en A. Entonces, $\neg\sim x = \sim\neg x$ para todo $x \in A$.*

Dem. La demostración puede ser encontrada en [52]. ■

El siguiente resultado relaciona, como veremos, a las extensiones clásicas de las álgebras tetravalentes modales con las álgebras de Boole simétricas (o involutivas).

Proposición 5.3.3 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ un álgebra tetravalente modal, y consideremos un complemento Booleano $\sim$ en A. Entonces, $\Box x = x \wedge \neg{\sim} x$ para todo $x \in A$.*

Dem. Sea $x \in A$. Entonces, $\Box x \leq x$, por definición de algebra tetravalente modal. Por otro lado, $x \vee \neg\Box x = 1$, y entonces

$$\begin{aligned} {\sim} x &= {\sim} x \wedge 1 = {\sim} x \wedge (x \vee \neg\Box x) \\ &= ({\sim} x \wedge x) \vee ({\sim} x \wedge \neg\Box x) \\ &= {\sim} x \wedge \neg\Box x \end{aligned}$$

Luego, ${\sim} x \leq \neg\Box x$. De aquí, $\Box x \leq \neg{\sim} x$ y, entonces, $\Box x \leq x \wedge \neg{\sim} x$. Sea $y \in A$ tal que $y \leq x$ e $y \leq \neg{\sim} x$. Sigue que $y \leq {\sim}\neg x$, por el Lema 5.3.2, y entonces $y = y \wedge x$ y $y \wedge \neg x = 0$. En consecuencia, y recordando que $x \vee \neg x = \neg x \vee \Box x$,

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 = (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg x) = y \wedge (x \vee \neg x) \\ &= y \wedge (\neg x \vee \Box x) = (y \wedge \neg x) \vee (x \wedge \Box x) \\ &= 0 \vee (y \wedge \Box x) = y \wedge \Box x \end{aligned}$$

Esto es, $y \leq \Box x$. Es decir, $\Box x = x \wedge \neg{\sim} x$. ■

Corolario 5.3.4 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0\rangle$ un álgebra de De Morgan equipada adicionalmente con un complemento booleano $\sim$. Entonces, $\Box x = x \wedge \neg{\sim} x$, para todo $x \in A$, es el único operador unario sobre A tal que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ es un álgebra tetravalente modal. De esta manera, las álgebras de De Morgan más un complemento booleano son las mismas que las álgebras tetravalentes modales más un complemento booleano.*

Es aquí donde aparecen las álgebras de Boole simétricas (o involutivas). Es claro que las álgebras de De Morgan enriquecidas con un complemento Booleano, como las consideradas en la Proposición 5.3.1 coinciden, por definición, con las álgebras de Boole simétricas. Por lo tanto, el Corolario 5.3.4 puede ser reformulado como sigue:

Corolario 5.3.5 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \neg, 0\rangle$ un álgebra de Boole involutiva. Entonces, $\Box x = x \wedge \neg \sim x$, para todo $x \in A$, es el único operador unario sobre A de modo tal que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ es un álgebra tetravalente modal. De esta manera, las álgebras de Boole involutivas coinciden con las álgebras tetravalentes modales enriquecida con un complemento booleano.*

De las consideraciones anteriores vemos que la variedad de las álgebras de Boole involutivas (o simétricas) pueden ser definidas de diferentes modos. Por conveniencia, adoptaremos la perspectiva de ver a estas álgebras como álgebras de Boole extendidas con una negación de De Morgan. Claramente esta variedad está generada por $\mathfrak{M}^{+}_{4m}$ sobre el lenguaje $\wedge, \vee, \sim, \neg, \bot$, por la Proposición 5.2.4(ii).

Recordemos que el operador de implicación $\Rightarrow$ se define en un álgebra de Boole como sigue: $x \Rightarrow y = \sim x \vee y$. Como $\wedge$, $\vee$ y 0 pueden ser definidos en términos de $\Rightarrow$ y $\sim$, entonces podemos considerar, de ahora en más, el álgebra absolutamente libre $\mathfrak{Fm}^{\sim} = \langle Fm^{\sim}, \Rightarrow, \sim, \neg\rangle$ de tipo (2,1,1) generado por algún conjunto numerable Var de variables, como el lenguaje formal para la variedad **IBA** de las álgebras de Boole involutivas (o simétricas). De esta manera, el generador de la variedad **IBA** es $\mathfrak{M}^{\sim}_{4m}$, el álgebra 4-valuada $\langle M_4, \Rightarrow, \sim, \neg\rangle$ de tipo (2,1,1). Una lógica para la variedad **IBA** puede ser definida naturalmente como sigue:

Definición 5.3.6 *La lógica de las álgebras de Boole involutivas definida sobre* $\mathfrak{Fm}^{\sim}$ *es la lógica proposicional* $IBA = \langle Fm^{\sim}, \models_{IBA}\rangle$ *dada como sigue: para todo conjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm^{\sim}$, $\Gamma \models_{IBA} \alpha$ *si, y solo si, existe un conjunto finito* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *tal que, para todo* $\mathfrak{U} \in \mathbf{IBA}$ *y* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{U})$, $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma_0\} \leq h(\alpha)$. *En particular,* $\emptyset \models_{IBA} \alpha$ *si, y solo si* $h(\alpha) = 1$, *para todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{U})$.

Una lógica naturalmente asociada al álgebra $\mathfrak{M}^{\sim}_{4m}$ como en la definición anterior es la siguiente:

Definición 5.3.7 *La lógica tetravalente modal con negación clásica* $M^{\sim}_{4m}$ *definida sobre* $\mathfrak{Fm}^{\sim}$ *es la lógica proposicional* $M^{\sim}_{4m} = \langle Fm^{\sim}, \models_{M^{\sim}_{4m}}\rangle$ *dada como sigue: para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm^{\sim}$, $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \alpha$ *si, y solo si, existe un conjunto finito* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *tal que, para todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{M}^{\sim}_{4m})$, $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma_0\} \leq h(\alpha)$. *En particular,* $\emptyset \models_{M^{\sim}_{4m}} \alpha$ *si, y solo si,* $h(\alpha) = 1$, *para todo* $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{M}^{\sim}_{4m})$.

Como **IBA** está generada por $\mathfrak{M}^{\sim}_{4m}$, el siguiente resultado es inmediato:

Proposición 5.3.8 *Las lógicas* IBA *y* $M^{\sim}_{4m}$ *coinciden, esto es: para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm^{\sim}$, $\Gamma \models_{IBA} \alpha$ *si, y solo si,* $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \alpha$.

Proposición 5.3.9 $M^{\sim}_{4m}$ *es una extensión conservadora de la lógica proposicional clásica* **CPL**: $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$ *si, y solo si,* $\Gamma \models \beta$ *en* **CPL**, *para todo* $\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq Fm^{\sim}$ *sin ocurrencias de* $\neg$

Dem. Es inmediato, a partir de la definición de $M^{\sim}_{4}$. ■

Observación 5.3.10 $M^{\sim}_{4m}$ *satisface el Meta-teorema de la Dedución:* $\Gamma, \alpha \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$ *si, y solo si,* $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} (\alpha \Rightarrow \beta)$, *para todo* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq Fm^{\sim}$.

El siguiente resultado muestra que $M_{4m}^{\sim}$ puede ser vista como una matriz lógica. Este hecho será útil en lo que sigue.

Proposición 5.3.11 *Sean* $\mathcal{M}_N^{\sim} = \langle \mathfrak{M}_{4m}^{\sim}, \{N, 1\} \rangle$ *y* $\mathcal{M}_B^{\sim} = \langle \mathfrak{M}_{4m}^{\sim}, \{B, 1\} \rangle$ *las matrices lógicas obtenidas a partir del álgebra* $\mathfrak{M}_{4m}^{\sim}$. *Entonces,*

(i) $\models_{M_{4m}^{\sim}} = \models_{\mathcal{M}_N^{\sim}}$,

(ii) $\models_{M_{4m}^{\sim}} = \models_{\mathcal{M}_B^{\sim}}$.

Por lo tanto, la lógica tetravalente modal con negación clásica $M_{4m}^{\sim}$ *puede ser caracterizada por una única matriz lógica.*

Dem. La demostración es análoga a la dada para M_{4m} en el Capítulo 3. ■

5.4 Una presentación estilo Hilbert para $M_{4m}^{\sim}$

En esta sección definiremos un cálculo estilo Hilbert para la lógica $M_{4m}^{\sim}$ de $\mathfrak{M}_{4m}^{\sim}$ la cual, por la Proposición 5.3.8, puede ser considerada como una lógica de la variedad **IBA** de las álgebras de Boole involutivas (o simétricas). Recordemos que $Fm^{\sim}$ es el conjunto de las fórmulas proposicionales generado por Var a partir de los conectivos $\Rightarrow$, $\sim$ y $\neg$. Observemos que, en este lenguaje, las ecuaciones que caracterizan a la negación de De Morgan $\neg$ son las siguientes: $x = \neg\neg x$, y $\neg(\sim x \Rightarrow y) = \sim(\neg x \Rightarrow \sim\neg y)$.

Definición 5.4.1 *Denotemos con* $\mathcal{H}_{4m}^{\sim} = \langle Fm^{\sim}, \vdash_{\mathcal{H}_{4m}^{\sim}} \rangle$ *a la lógica proposicional definida a través del siguiente cálculo de Hilbert, donde* α, β, $\gamma \in Fm^{\sim}$.

Axiomas

(A1) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

(A2) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$

(A3) $({\sim}\beta \Rightarrow {\sim}\alpha) \Rightarrow (({\sim}\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta)$

(A4) $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$

(A5) $\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$

(A6) $\neg({\sim}\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow {\sim}(\neg\alpha \Rightarrow {\sim}\neg\beta)$

(A7) ${\sim}(\neg\alpha \Rightarrow {\sim}\neg\beta) \Rightarrow \neg({\sim}\alpha \Rightarrow \beta)$

Reglas de inferencia

(MP) $\dfrac{\alpha \qquad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$ (CP) $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}$

Observación 5.4.2 *Los axiomas (A1)-(A3) más (MP) constituyen una axiomatización correcta y completa del cálculo proposicional clásico* **CPL** *en el lenguaje generado por* $\Rightarrow$ *y* $\sim$ *(cf. [48]). Por otro lado, los axiomas (A4)-(A7) describen las condiciones requeridas para una negación de De Morgan en el lenguaje dado, como se mencionó anteriormente. Finalmente, la regla (CP) es requerida para garantizar la propiedad crucial de que la negación de De Morgan preserva equivalencias lógicas.*

La noción de demostración adoptada será la de un cálculo de Hilbert modal (recuerde la Definición 1.1.5), que toma aquí la siguiente forma:

Definición 5.4.3 *(1) Una derivación de una fórmula* α *en* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$ *es una secuencia finita de fórmulas* $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ *tal que* α_n *es* α *y todo* α_i *es una instancia de un axioma, o* α_i *es la*

consecuencia de α_j *y* $\alpha_k = (\alpha_j \Rightarrow \alpha_i)$ *por (MP) para algún* $j, k \leq i-1$*, o* $\alpha_i = (\neg\beta \Rightarrow \neg\gamma)$ *es la consecuencia de* $\alpha_j = (\gamma \Rightarrow \beta)$ *por (CP) para algún* $j \leq i-1$*. Diremos que* α *es derivable en* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$*, y escribimos* $\vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$*, si existe una derivación de* α *en* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$*.*
(2) Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas en* Fm*. Diremos que* α *es derivable en* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$ *a partir de* Γ*, y escribimos* $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$*, si* α *es derivable en* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$*, o bien existe un subconjunto finito no vacío* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ *de* Γ *tal que* $(\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\gamma_n \Rightarrow \alpha))\ldots)$ *es derivable en* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$*.*

Sea $\equiv \subseteq Fm^{\sim} \times Fm^{\sim}$ la relación binaria definida por

$$\equiv =_{def} \{(\alpha, \beta) \ : \ \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha \Rightarrow \beta \text{ y } \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \beta \Rightarrow \alpha\}.$$

Lema 5.4.4 *La relación* $\equiv$ *es una congruencia sobre* $\mathfrak{Fm}^{\sim}$*.*

Dem. Claramente, $\equiv$ es compatible con $\Rightarrow$ y $\sim$ puesto que (A1)–(A3) es una axiomatización de **CPL**. Esto es, $\equiv$ es una congruencia booleana. Por otro lado, de la regla (CP), es inmediato que $\equiv$ es compatible con $\neg$. ■

Teorema 5.1 *El álgebra de Lindenbaum* $\mathfrak{Fm}^{\sim}/\!\equiv$ *de* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$ *es un álgebra de Boole involutiva con:* $|\alpha| \Rightarrow |\beta| =_{def} |\alpha \Rightarrow \beta|$*,* $\sim\!|\alpha| =_{def} |\!\sim\!\alpha|$ *y* $\neg|\alpha| =_{def} |\neg\alpha|$*, donde* $|\gamma|$ *denota la clase de equivalencia de la fórmula* γ*.*

Dem. Es claro que $\mathfrak{Fm}^{\sim}/\!\equiv$ es un álgebra de Boole con una operación adicional $\neg$. Por otro lado, de los axiomas (A4)–(A7) y de la regla (CP), tenemos que $\neg$ es una negación de De Morgan. ■

Teorema 5.4.5 *(Correctitud y Completitud de* $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$*) Las siguientes condiciones son equivalentes, para todo subconjunto* $\Gamma \cup \{\beta\}$ *de* $Fm^{\sim}$*:*

(i) $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \beta$,

(ii) $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii) (Correctitud): Es claro que cada axioma de $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$ es válido en $M^{\sim}_4$. Por otro lado, si una instancia de las premisas de (MP) o de (CP) es válida en $M^{\sim}_4$, entonces la respectiva conclusión es también válida en $M^{\sim}_4$. De aqui sigue que los teoremas de $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$ son válidos en $M^{\sim}_4$.

Supongamos ahora que $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \beta$. Si β es teorema de $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$ entonces es válido en $M^{\sim}_4$, y entonces $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$. Si β no es teorema, existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tal que $(\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\gamma_n \Rightarrow \beta))\ldots)$ es teorema de $\mathcal{H}^{\sim}_{4m}$, por la Definición 5.4.3(2). Por lo que acabamos de observar, esta fórmula es válida en $M^{\sim}_4$, luego, $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) (Completitud): Supongamos que $\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$. De la Definición 5.3.6, existe un subconjunto finito $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma_0\} \leq h(\beta)$. Si $n = 0$, esto es, si $\models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$, entonces $h(\beta) = 1$, para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{U})$ y todo $\mathfrak{U} \in \mathbf{IBA}$, por la Definición 5.3.6. En particular, $h(\beta) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{Fm}^{\sim}/\equiv)$, por el Teorema 5.1. Sea $h : \mathfrak{Fm}^{\sim} \rightarrow \mathfrak{Fm}^{\sim}/\equiv$ la aplicación canónica dada por $h(\delta) = |\delta|$, para todo δ. Entonces, $h \in Hom(\mathfrak{Fm}^{\sim}, \mathfrak{Fm}^{\sim}/\equiv)$ y, por lo tanto, $|\beta| = 1$. Luego, se deduce que $\vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \beta$, y, de esta manera $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \beta$. Por otro lado, si $n > 0$, entonces $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models_{M^{\sim}_{4m}} \beta$. Por la Observación 5.3.10, $\models_{M^{\sim}_{4m}} (\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\gamma_n \Rightarrow \beta))\ldots)$. Del caso anterior, $\vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} (\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\gamma_n \Rightarrow \beta))\ldots)$ y entonces, por la Definición 5.4.3(2), $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \beta$, como era deseado. ■

5.5 $M^{\sim}_{4m}$ como una extensión normal de S5

En esta sección, veremos que existe aun una perspectiva más para comprender a las álgebras de Boole involutivas: son álgebras modales para $S5$ que satisfacen axiomas modales adicionales y, por esto, están generadas por un álgebra que pertenece a la jerarquía de las álgebras de Henle (cf. [56, 25]).

En [52], fue observado que, dada un álgebra de Boole involutiva A, el operador $\exists x = x \vee \neg{\sim}x$ define a un operador de posibilidad sobre A, en el sentido de [50, 51]. También, se obtuvo una caracterización de las álgebras de Boole involutivas como un caso particular de las álgebras de Boole monádicas. Más aún, se probó que la negación de De Morgan $\neg$ puede ser definida en términos de $\exists$ y los restantes operadores de A como

$$\neg x = (x \wedge \exists{\sim}x) \vee {\sim}\exists x. \tag{7}$$

Notemos que la definición de Monteiro del operador de posibilidad $\exists$ (o, en la notación de álgebras modales, $\Diamond$) coinciden, a menos de dualidades, con el operador de necesidad $\Box$ que encontramos en la Proposición 5.3.1, la cual, por la Proposición 5.3.3, es única. Adaptando la ecuación (7), se tiene que

$$\neg x = (x \wedge {\sim}\Box x) \vee \Box{\sim}x. \tag{8}$$

De esto, podemos enriquecer a las álgebras de Boole con un operador modal $\Box$ que satisfaga ciertas propiedades, en lugar de anexar la negación de De Morgan. En ambos casos es obtenida la misma clase de estructuras, a saber, las álgebras de Boole involutivas, puesto que la negación de De Morgan puede, entonces, ser definida por la ecuación (8). Esta es la clave para traducir las ecuaciones que caracterizan a $\neg$ al lenguaje de las álgebras de Boole más $\Box$. Luego:

Proposición 5.5.1 *Las álgebras de Boole involutivas coinciden con las álgebras de Boole equipadas con un operador unario $\Box$ que satisfaga las siguientes ecuaciones:*

$$\neg'(x \vee y) = \neg' x \wedge \neg' y \tag{9}$$

$$\neg'\neg' x = x \tag{10}$$

donde $\neg' x$ *es una abreviatura para* $(x \wedge \sim\Box x) \vee \Box\sim x$*, para todo* x*.*

Dem. Como fue probado, dada un álgebra de Boole involutiva, definiendo $\Box x = x \wedge \neg\sim x$, la estructura resultante es una álgebra tetravalente modal. Ahora, definamos $\neg' x = (x \wedge \sim\Box x) \vee \Box\sim x$. Luego, es fácil ver que $\neg' x = \neg x$, para todo x. Puesto que $\neg$ es una negación de De Morgan y $\neg' x = \neg x$, para todo x, las ecuaciones (9) y (10) son satisfechas.

Recíprocamente, si un álgebra de Boole es equipada con un operador monádico $\Box$ que satisfaga las ecuaciones (9) y (10), para $\neg' x$ dado por $(x \wedge \sim\Box x) \vee \Box\sim x$, entonces claramente $\neg' x$ es una negación de De Morgan y, por lo tanto, la estructura inducida, es un álgebra de Boole involutiva. ■

Proposición 5.5.2 *Sea* $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \Box, 0\rangle$ *un álgebra de Boole involutiva vista como un álgebra de Boole junto con un operador unario* $\Box$ *como en la Proposición 5.5.1. Entonces,* $\neg' x = (x \wedge \sim\Box x) \vee \Box\sim x$*, para todo* $x \in A$*, es el único operador sobre* A *tal que* $\langle A, \wedge, \vee, \neg', \Box, 0\rangle$ *es un álgebra tetravalente modal.*

Dem. Claramente, $\neg'$ es una negación de De Morgan y por eso $\langle A, \wedge, \vee, \neg', \sim, 0\rangle$ es un álgebra de De Morgan enriquecida con un complemento booleano $\sim$. Por el Corolario 5.3.4, el operador $\Box' x = x \wedge \neg'\sim x$ es tal que $\langle A, \wedge, \vee, \neg', \Box', 0\rangle$ es un álgebra tetravalente modal. Es fácil probar que $\Box' x = \Box x$, luego, se tiene que $\langle A, \wedge, \vee, \neg', \Box, 0\rangle$ es un álgebra tetravalente modal.

Supongamos, ahora, que $\neg$ es una negación de De Morgan en A tal que la estructura $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0\rangle$ es una álgebra tetravalente modal. Por la Proposición 5.3.3, $\Box x = x \wedge \neg\sim x$. De esto, se tiene fácilmente que $\neg' x = (x \wedge \sim\Box x) \vee \Box\sim x = \neg x$, para todo x. ■

Recordemos que un *álgebra modal* es una estructura $\langle A, \wedge, \vee, \sim, \Box, 0, 1\rangle$ donde el reducto $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y $\Box$ es un operador unario sobre A tal que $\Box 1 = 1$ y $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$ (cf. [8]). A su vez, un *álgebra modal para* **S5** es un álgebra modal que satisface, adicionalmente, las siguientes relaciones, para todo x:

(T) $\Box x \leq x$;

(4) $\Box x \leq \Box\Box x$;

(B) $x \leq \Box{\sim}\Box{\sim} x$.

Tenemos, de esta manera, el siguiente resultado:

Proposición 5.5.3 *Las álgebras de Boole involutivas coinciden con las álgebras modales para* **S5** *que satisfacen adicionalmente las ecuaciones (9) y (10) de la Proposición 5.5.1.*

Dem. Sea A un álgebra de Boole involutiva vista como un álgebra tetravalente modal enriquecida con un complemento booleano $\sim$, por el Corolario 5.3.5. Entonces, A es un álgebra modal que satisface las propiedades (T), (4), (B) (ver Proposición 3.3.5 y Observación 3.3.6). Por otro lado, de la Proposición 5.5.1 las ecuaciones (9) y (10) también valen. La recíproca es consecuencia de la Proposición 5.5.1. ■

Recordemos que un cálculo sentencial L' es una *extensión* (débil) de otro cálculo sentencial L si están definidos en el mismo lenguaje y toda fórmula probable en L es también probable en L'. En [56], fue introducida la noción de extensión normal de **S5** como una extensión S de **S5** que es cerrada bajo sustituciones, modus ponens y, si α es probable en S, entonces $\Box\alpha$ es probable en S.

Por otro lado, recordemos que un *álgebra de Henle* (cf. [56, 25]) es un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \sim, i, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tal que su reducto $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole, y

$i(1) = 1$, e $i(x) = 0$ para todo $x \in A$, $x \neq 1$. Una *matriz de Henle* es una matriz lógica $\langle H, \{1\}\rangle$ tal que H es un álgebra de Henle. H_n es el álgebra de Henle con n átomos (2^n elementos). Además, si H es un álgebra de Henle finita, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que H y H_n son isomorfas.

Teorema 5.5.4 *([56]) Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *S es una extensión normal propia de* **S5***;*

(ii) *S es una lógica dada por la matriz $\langle H_n, \{1\}\rangle$, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Por los resultados de la Sección 5.3, es claro que $\mathfrak{M}_{4m}^{\sim}$ es un álgebra de Henle cuando es presentada en el lenguaje $\wedge, \vee, \sim, 0, 1$ y $\Box$. Luego, es inmediato que $\mathfrak{M}_{4m}^{\sim} = H_2$. Teniendo en cuenta que $M_{4m}^{\sim}$ puede ser vista como una lógica modal, y que las lógicas modales son "lógicas de teoremas" , es decir, su mayor interés es probar teoremas o considerar la clase de fórmulas válidas (recuerde la Definición 1.1.5), podemos considerar a la lógica matricial dada por la matriz $\mathcal{M}_1 = \langle \mathfrak{M}_{4m}^{\sim}, \{1\}\rangle$ sobre la signatura $\wedge, \vee, \sim, 0, 1$, $\Box$. Entonces, tenemos que $\mathcal{M}_1 = \langle H_2, \{1\}\rangle$; y por el Teorema 5.5.4:

Teorema 5.5.5 *La lógica matricial dada por $\mathcal{M}_1$ es una extensión normal propia de* **S5***.*

Observación 5.5.6 *El hecho que la lógica de las álgebras de Boole involutivas sea una extensión de* **S5** *es un descubrimiento interesante: esto significa que la variedad generada por el álgebra de Henle H_2 es* **IBA***.*

Finalmente, una axiomatización estilo Hilbert para $\mathcal{M}_1$ en el lenguaje Fm puede ser fácilmente obtenida a partir de $\mathcal{H}_{4m}^{\sim}$, siguiendo la técnica utilizada en el Capítulo 3 para las lógicas de las TMAs. En efecto, sea $(\mathcal{H}_{4m}^{\sim})^N$ el sistema de Hilbert idéntico a $\mathcal{H}_{4m}^{\sim}$, pero donde la noción de derivación es la usual en los cálculos de Hilbert (ver Definición 1.1.4). Es decir, en lugar de la Definición 5.4.3 consideramos la siguiente:

Definición 5.5.7 *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas en Fm. Diremos que α es derivable en $(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N$ a partir de Γ, y escribimos $\Gamma \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$, si existe una secuencia finita de fórmulas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tal que α_n is α y todo α_i es una instancia de un axioma, o bien $\alpha_i \in \Gamma$, o bien α_i es la consecuencia de α_j y $\alpha_k = (\alpha_j \Rightarrow \alpha_i)$ por (MP) para algún $j, k \leq i-1$, o $\alpha_i = (\neg\beta \Rightarrow \neg\gamma)$ es la consecuencia de $\alpha_j = (\gamma \Rightarrow \beta)$ por (CP) para algún $j \leq i-1$.*

Teorema 5.5.8 *(Correctitud) Si $\Gamma \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$ entonces $\Gamma \models_{\mathcal{M}_1} \alpha$.*

Dem. Todos los axiomas son válidos, y las reglas de inferencia preservan validez. ∎

Con el objeto de probar la completitud, será útil considerar la modalidad $\Box\alpha =_{def} \alpha \wedge \neg{\sim}\alpha$, donde $\alpha \wedge \beta =_{def} {\sim}(\alpha \Rightarrow {\sim}\beta)$ (recordemos la Sección 5.3). Adaptando un resultado de [31], es immediato demostrar lo siguiente:

Proposición 5.5.9 *$\Gamma \models_{\mathcal{M}_1} \alpha$ si, y solo si, $\Box\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \alpha$.*

Por otro lado, es fácil probar lo siguiente:

Proposición 5.5.10 *Vale: $\alpha \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \Box\alpha$.*

Dem. Sea γ un teorema de $(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N$. Entonces, $\vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \neg\neg\gamma$, por (A5) y (MP). Consideremos ahora la siguiente derivación en $(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N$:

1. α (Hip.)

2. $\alpha \Rightarrow ({\sim}\alpha \Rightarrow \neg\gamma)$ (de la lógica clásica)

3. ${\sim}\alpha \Rightarrow \neg\gamma$ (MP, 1,2)

4. $\neg\neg\gamma \Rightarrow \neg{\sim}\alpha$ (CP, 3)

5. $\neg{\sim}\alpha$ (MP con 4 y el teorema $\neg\neg\gamma$)

6. $\alpha \wedge \neg{\sim}\alpha$ (por 1,5 y la lógica clásica)

$\blacksquare$

Proposición 5.5.11 *Si* $\Box\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$ *entonces* $\Gamma \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$.

Dem. Asumamos que $\Box\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$. Si $\vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$ entonces el resultado es obvio, puesto que ambos cálculos tienen los mismos teoremas. Si $\nvdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$, existe un subconjunto finito no vacío $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} (\Box\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\Box\gamma_n \Rightarrow \alpha))\ldots)$, y por lo tanto $\vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N}$ $(\Box\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\Box\gamma_n \Rightarrow \alpha))\ldots)$. Consideremos ahora una derivación en $(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N$ como sigue: a partir de las hipótesis $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ se deriva $\Box\gamma_1, \ldots, \Box\gamma_n$, por la Proposición 5.5.10. Usando (MP) n veces con el teorema $(\Box\gamma_1 \Rightarrow (\ldots(\Box\gamma_n \Rightarrow \alpha))\ldots)$ se tiene α. Esto muestra que $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$, y por eso $\Gamma \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$. $\blacksquare$

Teorema 5.5.12 *(Completitud) Si* $\Gamma \models_{\mathcal{M}_1} \alpha$ *entonces* $\Gamma \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$.

Dem. Si $\Gamma \models_{\mathcal{M}_1} \alpha$, entonces $\Box\Gamma \models_{M^{\sim}_{4m}} \alpha$, por la Proposición 5.5.9. Usando el Teorema 5.4.5, se tiene que $\Box\Gamma \vdash_{\mathcal{H}^{\sim}_{4m}} \alpha$ y luego $\Gamma \vdash_{(\mathcal{H}^{\sim}_{4m})^N} \alpha$, por la Proposición 5.5.11. $\blacksquare$

6 Capítulo VI: Conclusiones y estudios futuros

En esta tesis se generaliza de un modo natural el tratamiento de los cálculos de secuentes y su fibring introducido en [21]. Además, algunas características de preservación son analizadas. Finalmente, la relevancia de este enfoque concerniente a la teoría de las traducciones entre lógicas es puesta de manifiesto. Uno de los pasos a seguir será la extensión de estos resultados a los hipersecuentes no conmutativos.

Muchas otras cuestiones permanecen abiertas, y merecen un futuro estudio. El uso de hipersecuentes en lugar de secuentes abre interesantes posibilidades para abordar la cuestión de como una lógica puede ser construida (o desconstruida) a partir (en) sus fragmentos, junto con la línea seguida en [21]. También, se podría estudiar la preservación por fibring de otras meta-propiedades.

Por otro lado, presentamos algunos resultados novedosos sobre los aspectos lógicos de las álgebras tetravalentes modales (TMAs). Nos focalizamos en el operador de implicación contrapositivo $\succ$, definible en estas álgebras, mostrando que esta implicación (tal vez el "mejor" operador de implicación definible sobre las TMAs) permite definir, de un modo muy sencillo, representaciones estilo Hilbert para la lógica de las TMAs. Llamamos $\mathbf{TMA}^c$ a la clase de las TMAs presentadas en el lenguaje $\succ, \bot$. Algunos resultados acerca de esta lógica bajo la perspectiva de las lógicas paraconsistentes (más específicamente, desde el punto de vista de las Lógicas de la Inconsistencia Formal) también fueron obtenidas. La relación entre la lógica de las TMAs y la lógica clásica fue también estudiada. Presentamos un sistema de tableau correcto y completo para M_{4m} el cual, en contraste con el cálculo de secuentes propuesto en [31], es decidible. También fue estudiada la lógica tetravalente modal normal asociada a las TMAs. Adicionalmente, estudiamos la relación entre estas lógicas y la lógica proposicional clásica, mostrando que estas son sublógicas que no son maximales.

Los temas estudiados en los Capítulos II y III son relacionados en el Capítulo IV hallando un cálculo de hipersecuentes para la lógica tetravalente modal que tiene la propiedad de eliminación de corte. Este resultado es importante en si puesto que el cálculo de secuentes presentado por Font y Rius [31] para esta misma lógica no tiene esta propiedad tan deseable en cualquier cálculo de Gentzen. Un estudio futuro será ver si es posible encontrar un cálculo de secuentes (no ya de hipersecuentes) con la propiedad de eliminación de corte, tal vez modificando el presentado en [31].

Concluimos que la lógica M_{4m} de las TMAs reveló ser un ejemplo interesante de lógica modal multi–valuada, paraconsistente y paracompleta, la cual parece ser adecuada para aplicaciones concretas tales como el análisis de bases de datos inconsistentes. Como se puede apreciar, a lo largo del capítulo, la implicación contrapositiva juega un importante rol en el estudio de esta lógica. Posteriores estudios de las TMAs, principalmente desde el punto de vista lógica, deberían tener en cuenta las “buenas” propiedades de este operador.

References

[1] Abad, M. and Monteiro, L. Free symmetric Boolean Algebras. *Rev. Unión Mat. Argentina* 27 (1976), 207–215.

[2] Arieli, O. and Avron, A., The value of the four values. Artificial Intelligence v. 102, n. 1 (1998), pp. 97–141.

[3] A. Avron. Natural 3-valued logics characterization and proof theory. *Journal of Simbolic Logic*, 56:276–294, 1991.

[4] A. Avron. The method of hypersequents in the proof theory of propositional nonclassical logics. In *Logic: from Foundations to Applications, European Logic Colloquium*, pages 1–32. Oxford Science Publications. Clarendon Press. Oxford, 1996.

[5] A. Avron. Hypersequents, logical consequence and intermediate logics for concurrency. In *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 4:225–248, 1991.

[6] A. Avron. Gentzen–type systems, resolution and tableaux. *Journal of Automated Reasoning*, 10:265–281, 1993.

[7] Bianco, E., *Una contribución al estudio de las álgebras de De Morgan modales 4−valuadas*. Ms. thesis, Universidad Nacional del Sur (Bahía Blanca), 2008.

[8] Blackburn, P., de Rijke, M. and Venema, Y., Modal Logic. Cambridge University Press, 2001. ISBN 0-521-80200-8

[9] Belnap, N., How computers should think. In: *Contemporary Aspects of Philosophy* (Editor: G. Ryle). Oriol Press, pp. 30–56, 1976.

[10] Béziau, J.-Y., A new four-valued approach to modal logic. *Logique et Analyse*, v. 54, n. 213 (2011).

[11] Caleiro, C., Carnielli, W.A., Coniglio, M. E. and Marcos, J. Two's company: The humbug of many logical values. In: *Logica Universalis* (Editor J.-Y. Béziau). Basel: Birkhäuser, pp. 169-189, 2005.

[12] Caleiro, C. and Marcos, J., Classic-Like Analytic Tableaux for Finite-Valued Logics. In: *Logic, Language, Information And Computation*, Lecture Notes in Computer Science vol. 5514, pp. 268-280. Eds.: H. Ono; M. Kanazawa and R. de Queiroz. Springer, 2009.

[13] W. A. Carnielli and M. E. Coniglio. Combining Logics. In E. N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2007.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/logic-combining/`

[14] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio and I. M. L. D'Ottaviano. New dimensions on translations between logics. *Logica Universalis*, 3 (1): 1–18, 2009.

[15] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, D. Gabbay, P. Gouveia and C. Sernadas. *Analysis and Synthesis of Logics - How To Cut And Paste Reasoning Systems*, vol. 35 of *Applied Logic Series*, Springer, Amsterdam, 2008.

[16] W. A. Carnielli, J. Rasga and C. Sernadas. Preservation of Interpolation Features by Fibring. *Journal of Logic and Computation*, 18 (1): 123–151, 2008.

[17] Carnielli, W.A., Coniglio, M.E. and Marcos, J., Logics of Formal Inconsistency. In: *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 14, pp. 15-107. Eds.: D. Gabbay; F. Guenthner. Springer, 2007.

[18] Carnielli, W.A. and Marcos, J., A taxonomy of **C**-systems. In W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, and I. M. L. D'Ottaviano, editors, *Paraconsistency — The logical way to the inconsistent*, volume 228 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pp. 1–94. Marcel Dekker, New York, 2002.

[19] A. Ciabattoni, N. Galatos and K. Terui. From Axioms to Analytic Rules in Nonclassical Logics. *IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (LICS'08), IEEE, pages 229–240, 2008.

[20] A. Ciabattoni, G. Metcalfe, and F. Montagna.*Adding modalities to MTL and its extensions*. Por aparecer en *Proceedings of the 26th Linz Symposium*.

[21] M. E. Coniglio. Recovering a logic from its fragments by meta-fibring. *Logica Universalis*, 1(2):377–416, 2007. Preprint available as :"The Meta-Fibring environment: Preservation of meta-properties by fibring", *CLE e-Prints*, v. 5., n. 4, 2005. URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_5,n_4,2005.html`

[22] Da Costa, N.C.A., *Inconsistent Formal Systems* (in Portuguese). Habilitation Thesis, 1963. Republished by Editora UFPR, Curitiba, 1993.

[23] Da Costa, N.C.A., Calculs propositionnel pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, série A, vol. 257(1963), 3790–3792.

[24] Díaz, R. and Rivas, M. Symmetric Boolean Algebras. *Acta mathematica Universitatis Comenianae* 79 (2010), no. 2, 181–198.

[25] Dunn, J. M. and Hardegree G. M. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. Oxford Logic Guides: 41. Clarendon Press. Oxford, 2001.

[26] Figallo, A.V., Notes on generalized N-lattices. *Rev. Unión Mat. Argentina* 35 (1990), 61–65.

[27] Figallo, A.V., On the congruences in four-valued modal algebras. *Portugaliae Mathematica* 49 (1992), 249–261.

[28] Figallo, A.V. and Landini, P., On generalized I-algebras and 4-valued modal algebras. *Reports on Mathematical Logic* 29 (1995), 3–18.

[29] Figallo, A.V. and Ziliani, A., Symmetric tetra-valued modal algebras. *Notas Soc. Mat. Chile* v. 10, n. 1 (1991), 133–141.

[30] Font, J.M., Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices. *Logic Journal of the I.G.P.L.* v. 5 (1997), n. 3, 413-440.

[31] Font, J.M. and Rius, M., An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics. *J. Symbolic Logic* v. 65, n. 2 (2000), 481-518.

[32] Font, J.M. and Jansana, R., A general algebraic semantics for sentencial logics, Lecture Notes in Logic, vol. 7, Springer-Verlag, 1996.

[33] D. M. Gabbay. *Fibring Logics*. Volume 38 of Oxford Logic Guides, Oxford, 1998.

[34] Gastaminza, M.L. and Gastaminza, S., Characterization of a De Morgan lattice in terms of implication and negation. Proc. Japan Acad. v. 44, n. 7 (1968), 659–662.

[35] G. Gentzen. *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift, 39, pp 176–210, 405–431 (1935).

[36] G. Gentzen. *Recherches sur la déduction Logique* traduit de L'Allemand par R. Feys et J. Ladrière, Presses Universitaires de France, 108, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1955.

[37] J. Y. Girard, Y. Lafont and P. Taylor. *Proofs and Types*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[38] J. Y. Girard. *Proof theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, 1987.

[39] K. Gödel. On the intuitionistic propositional calculus (1932). In: S. Feferman et al., editors, *K. Gödel's Collected Works*, volume 1, pages 223-225. Oxford University Press, Oxford, 1986.

[40] C. Grabmayer. Derivability and Admissibility of Inference Rules in Abstract Hilbert Systems. Technical Report, Faculteit der Exacte Wetenschapen, Divisie Wiskunde & Informatica, August 2003.

[41] Jansana, R., Propositional Consequence Relations and Algebraic Logic, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2011 Edition), E.N. Zalta (ed.). http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/consequence-algebraic/

[42] E. Jerb́ek.The ubiquity of conservative translations. Preprint, 2011. `http://arxiv.org/abs/1108.6263v1`

[43] Lemmon, E.J. and Scott, D., An Introduction to Modal Logic. In: *The Lemmon notes*, K. Segerberg (editor). Volume 11 of American Philosophical Quarterly Monograph series. Basil Blackwell, Oxford, 1977.

[44] Loureiro, I., *Álgebras Modais Tetravalentes*. PhD thesis, Faculdade de Ciências de Lisboa, 1983.

[45] Loureiro, I., Homomorphism kernels of a tetravalent modal algebra. *Portugaliae Mathematica*, 39 (1980), 371–377.

[46] Loureiro, I., Finitely generated free tetravalent nodal algebras. *Discrete Mathematics*, 46 (1983), 41–48.

[47] Loureiro, I., Prime spectrum of tetravalent modal algebras. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24 (1983), 389–394.

[48] Mendelson, E.. Introduction to Mathematical Logic. Springer; 4th edition, 1997.

[49] G. Metcalfe, N. Olivetti and D. Gabbay. *Proof Theory for Fuzzy Logics*, Springer, Series: Applied Logic Series, Vol. 36 2009.

[50] Moisil, Gr.C. Algebra schemelor cu elemente ventil. *Revista Universitatii C.I. Parhon*si a Politechnicci Bucaresti Seria St. Nat. 4-5 (1954), pp. 9–42.

[51] Moisil, Gr.C. Essais sur les logiques non chrysippiennes. Éditions de l'Académie de la Republique Socialiste de Roumanie, 1972.

[52] Monteiro, A. Notas del curso *Álgebras de Boole Involutivas*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1969. Reprinted as Álgebras de Boole Involutivas, Informe Técnico Interno Nro. 78, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2002.

[53] Monteiro, L. Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes, *Bulletin de la Societé des Sciences Mathématiques et Physiques de la R. P. Roumanie, Nouvelle Série*. vol. 7 (1963), 199–202.

[54] Montgomery, H. and R. Routley, Contingency and non-contingency bases for normal modal logics. *Logique et analyse*, 9 (1966), 318–328.

[55] A. Sernadas, C. Sernadas, and C. Caleiro. Fibring of logics as a categorical construction. *Journal of Logic and Computation*, 9(2):149–179, 1999.

[56] Scroggs, S. J. Extensions of The Lewis System **S5**. *The Journal of Symbolic Logic*, 16 (1951), n. 2, 112–120.

[57] Smullyan, R.M., First-order logic. Berlin: Springer-Verlag, 1968. Corrected republication by Dover Publications, New York, 1995.

[58] Ziliani, A., *Algebras de De Morgan modales* 4*-valuadas monádicas*. PhD thesis, Universidad Nacional del Sur (Bahía Blanca), 2001.