Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctora en Matemática

Módulos sobre anillos de endomorfismos
y
sistemas coestratificantes propios.

Melina Vanina Verdecchia

Bahía Blanca   Argentina

2012

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctora en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 28 de septiembre de 2004 y el 13 de marzo de 2012, bajo la dirección de la Dra. María Inés Platzeck, Profesor Titular del Departamento de Matemática en el Área II.

A mi familia, especialmente a Ricardo y Mia.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que colaboraron para que este trabajo fuera posible.

En primer lugar, a mi directora de tesis Dra. María Inés Platzeck, por su dedicación incondicional y por haberme contagiado su afición por el álgebra. Gracias también por haber respetado mis tiempos y obligaciones como mamá de Mia y por haber tenido gestos únicos que nunca voy a olvidar.

A mi esposo Ricardo, por compartir mis logros y por soportar estoicamente aquellos días en los que la matemática me volvía 'intratable'. Gracias por contenerme y acompañarme desde el amor.

A mi hija Mia, para que cuando pueda leer estas líneas sepa que fue muy difícil resignar momentos con ella, dejándola en el jardín cuando tenía apenas cinco meses para poder llevar a cabo este trabajo. Espero que entienda que fue realmente necesario hacerlo y que, finalmente, fue una experiencia positiva para las dos.

A mis padres, Lino y Olga, por haberse esforzado para que tuviera una buena educación, respetando cada una de mis elecciones. Gracias por estar siempre presentes, brindándome todo su apoyo.

Al Dr. Octavio Mendoza, por su buena predisposición para venir a trabajar con nosotras desde México, y por aportar ideas y sugerencias que fueron fundamentales para desarrollar parte de este trabajo.

A Diego Castaño, por compartir sus conocimientos sobre Látex conmigo, haciendo posible que los diagramas y el diseño de esta tesis fueran tal cual los había imaginado.

Finalmente agradezco al CONICET por su apoyo económico mediante el otorgamiento de la Beca interna doctoral de tipo I y su prórroga.

Resumen

Para un álgebra de artin Λ, definimos y estudiamos la noción de sistema coestratificante propio que es una generalización de los llamados módulos propios coestándar al contexto de sistemas estratificantes. Los módulos propios coestándar fueron definidos por V. Dlab en su estudio de las álgebras quasi-hereditarias (ver [D1]).

Probamos que la categoría de los módulos filtrados por un sistema coestratificante propio es dual a la categoría de los módulos filtrados por los módulos propios coestándar sobre cierta álgebra estándarmente estratificada. Además, damos condiciones suficientes para la existencia de sistemas coestratificantes propios, e investigamos la relación entre tales sistemas y los sistemas estratificantes definidos por K. Erdmann y C. Sáenz en [ES].

Para una K-álgebra Λ de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K y para un Λ-módulo básico M, estudiamos a M con su estructura natural de módulo sobre el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_\Lambda(M)$. En particular, conocido el carcaj ordinario de Λ y sus relaciones, y dada la representación asociada al Λ-módulo M, hallamos la representación asociada a M como módulo sobre $\mathrm{End}_\Lambda(M)$.

Abstract

For an artin algebra Λ, we define and study the notion of a proper costratifying system, which is a generalization of the so-called proper costandard modules to the context of stratifying systems. The proper costandard modules were defined by V. Dlab in his study of quasi-hereditary algebras (see [D1]).

We prove that the category of modules filtered by a proper costratifying system is dual to the category of modules filtered by the proper costandard modules over a certain standardly stratified algebra. In addition, we give sufficient conditions for their existence, and investigate the relation between such systems and the stratifying systems defined by K. Erdmann and C. Sáenz in [ES].

For a finite dimensional K-algebra Λ over an algebraically closed field K and for a basic Λ-module M, we study M with its natural structure as a module over the endomorphism ring $\mathrm{End}_\Lambda(M)$. In particular, given the ordinary quiver of Λ and its relations, and given the representation associated with the Λ-module M, we find the representation associated with M as a module over $\mathrm{End}_\Lambda(M)$.

Índice general

Introducción.

Un álgebra de artin es un álgebra finitamente generada como módulo sobre su centro que es un anillo artiniano conmutativo.

Las álgebras de artin tienen la interesante propiedad, que las distingue de los anillos artinianos, de que el anillo de endomorfismos de un módulo finitamente generado es un álgebra de artin. Este ejemplo de álgebra de artin es muy importante, ya que muchas álgebras se describen como anillos de endomorfismos de módulos apropiados. El ejemplo más conocido es el anillo de matrices $M_n(K)$ de orden n sobre un cuerpo K que es isomorfo al anillo de endomorfismos de un K-espacio vectorial V de dimensión n. También es sabido, que cualquier álgebra de artin Λ es isomorfa al anillo de endomorfismos de Λ pensada como un Λ-módulo a derecha. Por otra parte, diversas álgebras que se estudian en teoría de representaciones se definen de esta manera. Por ejemplo, las álgebras de Auslander, las álgebras inclinadas, las álgebras inclinadas de conglomerado, entre otras.

Otra propiedad significativa de los anillos de endomorfismos es la utilización de los mismos en procesos de inducción sobre el número de módulos simples del anillo. En efecto, si Λ tiene l módulos simples no isomorfos dos a dos y P es la suma de las cápsulas proyectivas de $l-1$ de ellos, entonces el anillo de endomorfismos de P tiene $l-1$ simples no isomorfos dos a dos.

En este trabajo, para un álgebra de artin Λ designaremos por $\mathrm{mod}(\Lambda)$ a la categoría de los Λ-módulos a izquierda finitamente generados. Ahora bien, si M es un Λ-módulo entonces M es un $\mathrm{End}_\Lambda(M)$-módulo, cuando se define

$$fm = f(m)$$

para $m \in M$ y $f \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, y por lo tanto M es un $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$-módulo a derecha. En este sentido, los anillos de endomorfismos nos permiten comparar a las categorías $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$ definiendo funtores que induzcan equivalencias entre subcategorías de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$, respectivamente. Por ejemplo, en nuestro trabajo consideraremos, entre otros, el par de funtores adjuntos determinados por M, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $G = {}_\Lambda M_\Gamma \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ que inducen una equivalencia entre las subcategorías $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$, donde $\mathrm{add}(M)$ es la subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por las sumas directas de sumandos directos de M, y $\mathrm{proj}(\Gamma)$ es la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Gamma)$ de los Γ-módulos proyectivos finitamente generados.

De este modo, se plantean dos problemas: uno de ellos es estudiar y conocer al Γ^{op}-módulo M, y el otro es hallar módulos apropiados M y subcategorías de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que resulten equivalentes a subcategorías de $\mathrm{mod}(\Gamma)$, y tales que dicha equivalencia nos brinde nueva información sobre $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Comenzamos este trabajo abordando el primer problema planteado. Para ello consideraremos que Λ es una K-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. Esta restricción sobre Λ nos dejará utilizar un resultado muy conocido de P. Gabriel (ver Capítulo III de [ARS] o Capítulo II de [ASS]) que afirma que, para toda álgebra Λ básica de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K, existe un carcaj Q y un ideal admisible I tales que Λ es el álgebra de caminos KQ módulo el ideal I. El mismo será de gran utilidad ya que nos permitirá hacer uso de la equivalencia entre representaciones de un carcaj con relaciones, y módulos sobre el cociente del álgebra de caminos asociada a dicho carcaj por el ideal de relaciones, lo que nos da descripciones específicas de tales módulos en términos de espacios vectoriales y aplicaciones lineales.

De este modo, si M es un módulo básico en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, comenzamos mostrando cómo obtener el carcaj ordinario de $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ y sus relaciones, a partir del conocimiento del carcaj de Auslander-Reiten de Λ (Proposición 2.1.4 y Observación 2.1.7). Luego, conocido el carcaj ordinario de Γ y sus relaciones, y dada la representación asociada al Λ-módulo M, hallamos la representación asociada a M como módulo sobre Γ^{op} (Teorema 2.1.8). Esto nos permitirá describir una serie de composición de un módulo M como Γ^{op}-módulo, conociendo la de M como Λ-módulo.

También hallamos una familia de l sumandos M'_k de M en $\mathrm{mod}(\Gamma^{op})$, donde l es el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ, y estudiamos condiciones para que estos sumandos sean todos no nulos y para que sean indescomponibles no isomorfos dos a dos. Por ejemplo, probamos que lo primero ocurre si y sólo si M es sincero y que, cuando M es fielmente balanceado, entonces también se verifica lo segundo. Así, cuando M es un módulo inclinante básico, demostramos que los M'_k son precisamente los sumandos indescomponibles de ${}_{\Gamma^{op}}M$. También describimos los sumandos de ${}_{\Gamma^{op}}M$ en el caso en que todos los Λ-módulos proyectivos están en $\mathrm{add}(M)$, y cuando todos los Λ-módulos inyectivos están en dicha categoría. En particular, si M es un generador aditivo de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ los sumandos M'_k de ${}_{\Gamma^{op}}M$ son los módulos proyectivos inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos de $\operatorname{mod}(\Gamma^{op})$.

Ya en el Capítulo 3 de esta tesis, empezamos a estudiar el segundo problema propuesto, relativo a la búsqueda de subcategorías de $\operatorname{mod}(\Lambda)$ que sean equivalentes a subcategorías de $\operatorname{mod}(\Gamma)$, y que resulten interesantes.

Dado un Λ-módulo M, comenzamos estudiando las categorías C_n^M, introducidas por M. I. Platzeck y N. Pratti en [PP1], donde se interesaron en particular en el caso en que $C_0^M = C_1^M$. En este trabajo aplicaremos estas ideas en un contexto diferente y nos dedicaremos especialmente al estudio de la categoría C_2^M. Recordemos que los objetos en C_2^M son los Λ-módulos X que admiten una sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$M_2 \to M_1 \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \operatorname{add}(M)$, y tales que la sucesión inducida

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(M, M_2) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M, M_1) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M, M_0) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M, X) \to 0$$

es exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$. En particular, mostramos que los módulos en esta categoría tienen interesantes propiedades homológicas.

Por otra parte, dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, consideraremos la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ de los Λ-módulos X que tienen una $\mathcal{C}$-filtración, esto es, una filtración $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$ de submódulos con factores X_{i+1}/X_i isomorfos a un módulo en $\mathcal{C}$ para todo i. Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es la clase formada por los Λ-módulos simples entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ coincide con $\operatorname{mod}(\Lambda)$. Aquí, daremos condiciones para que el funtor $F = \operatorname{Hom}_\Lambda(M, -)$ induzca una equivalencia entre $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$. En esta dirección, estudiaremos propiedades de la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ en el caso que $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^M$.

La subcategoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ ha sido analizada para clases $\mathcal{C}$ apropiadamente elegidas. En este trabajo nos dedicaremos al caso en que $\mathcal{C}$ coincide con la familia Ψ de Λ-módulos de un sistema coestratificante propio.

En el Capítulo 4 definimos un sistema coestratificante propio como sigue.

Sea Λ una R-álgebra de artin. Un ***sistema coestratificante propio*** $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *de talla t en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$*, consiste de dos familias de Λ-módulos $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^t$ y $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$, con $Q(i)$ indescomponible para todo i, y un orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $\{1, ..., t\}$, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a) $\operatorname{End}_\Lambda(\Psi(i))$ *es un anillo con división para todo $i \in \{1, ..., t\}$.*

(b) $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ *si $i < j$.*

(c) Para cada $i \in \{1, ..., t\}$*, existe una sucesión exacta*

$$\varepsilon_i : 0 \longrightarrow Z(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i) \longrightarrow 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$.

(d) $\mathbf{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\Psi$*, esto es,* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(i), \Psi) = 0$ *para cada* $i \in \{1, ..., t\}$.

A continuación hacemos un poco de historia para que el lector entienda lo que nos motivó a introducir e investigar esta noción.

En conexión con su estudio de las álgebras quasi-hereditarias (ver Definición 1.9.5, Capítulo 1), C. Ringel definió en [R] a los módulos estándar y coestándar sobre álgebras de artin.

Recordemos que si $P(1), ..., P(l)$ es una sucesión ordenada de módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos sobre un álgebra de artin Λ, el módulo estándar ${}_\Lambda\Delta(i)$ es el mayor módulo cociente de $P(i)$ con factores de composición sólo entre $S(1), ..., S(i)$, donde $S(j)$ es el top simple de $P(j)$, y que el módulo coestándar ${}_\Lambda\nabla(i)$ es el submódulo más grande de la cápsula inyectiva $I(i)$ de $S(i)$, con factores de composición también entre $S(1), ..., S(i)$. Ringel estudió las propiedades homológicas de las categorías $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ y $\mathcal{F}({}_\Lambda\nabla)$ de los módulos que son filtrados por los módulos estándar y los módulos coestándar, respectivamente, ya que las mismas cumplen un papel esencial en el estudio de las álgebras quasi-hereditarias.

Ahora bien, cuando todos los Λ-módulos proyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ se dice que Λ es un álgebra estándarmente estratificada. Esta clase de álgebras fue originalmente definida por E. Cline, B. Parshall y L. Scott en [CPS], y ha sido ampliamente estudiada por distintos matemáticos (ver [D1], [ADL], [AHLU], [W], [ES], [PR], [Xi]).

Tiempo después, K. Erdmann y C. Sáenz extendieron la noción de módulos estándar y definieron en [ES] la noción de sistema estratificante (ver Sección 1.11, Capítulo 1), con respecto a un conjunto ordenado lineal finito. Probaron que, para un sistema estratificante $(\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t, \underline{Y}, \leq)$, la categoría de los módulos filtrados por Θ es equivalente a la categoría de los módulos filtrados por los módulos estándar sobre un álgebra estándarmente estratificada apropiada. O. Mendoza, C. Sáenz y C. C. Xi hicieron lo mismo en [MSXi] para sistemas estratificantes definidos sobre un conjunto pre-ordenado finito. También P. Webb trabajó en relación a estos temas en [W], aunque sin definir a los sistemas estratificantes.

En contraste con la situación para álgebras quasi-hereditarias, el hecho de que Λ sea un álgebra estándarmente estratificada no implica que Λ^{op} también lo sea. Sin embargo, V. Dlab definió otras clases de módulos: los módulos propios estándar (respectivamente, propios coestándar) ${}_\Lambda\overline{\Delta}(i)$ (respectivamente, ${}_\Lambda\overline{\nabla}(i)$), definidos como cierto cociente apropiado de los módulos ${}_\Lambda\Delta(i)$ (respectivamente, submódulo apropiado de los ${}_\Lambda\nabla(i)$). Estos módulos tienen la propiedad de que Λ es un álgebra estándarmente estratificada, esto es, todos los Λ-módulos proyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$, si y sólo si todos los Λ-módulos inyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$ (ver [D1] y [L]). Aquí $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$ denota a la categoría de los Λ-módulos que tienen una filtración con factores isomorfos a los módulos propios coestándar. Esto motivó el estudio de esta categoría y de la categoría $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\Delta})$ de los módulos que son filtrados por los módulos propios estándar.

En el Capítulo 4 de este trabajo definimos y estudiamos la noción de sistema coestratificante propio, que es una generalización de los módulos propios coestándar al contexto de sistemas estratificantes.

En uno de nuestros principales resultados (Teorema 4.2.3) probamos que la categoría de los módulos filtrados por un sistema coestratificante propio es dual a la categoría de los módulos filtrados por los módulos propios coestándar sobre cierta álgebra estándarmente estratificada.

Aunque los sistemas estratificantes y los sistemas coestratificantes propios son distintos, tienen ciertas características que permiten estudiarlos dentro de un mismo marco. Esto proviene del hecho que, en ambos casos, existe un módulo $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que la categoría $\mathcal{F}$ de los módulos filtrados por el correspondiente sistema está contenida en la categoría C_2^M, como se muestra en los Capítulos 3 (Lema 3.3.2) y 4 (Proposición 4.2.1) de esta tesis. En ambos casos M es Ext-proyectivo en $\mathcal{F}$. Más precisamente, M es la suma de los módulos Ext-proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos en $\mathcal{F}$.

En el Capítulo 5, con el objetivo de profundizar el estudio de los sistemas coestratificantes propios, daremos condiciones suficientes para la existencia de tales sistemas. En esta dirección, Erdmann y Sáenz probaron en [ES] que, para el caso de un sistema estratificante ($\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t, \underline{Y}, \leq$), se verifica que cada $\Theta(i)$ es indescomponible y que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ para $i \geq j$. Recíprocamente, también mostraron que para una familia dada de Λ-módulos indescomponibles $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ satisfaciendo que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ para $i \geq j$, y tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ para $i > j$, existe un sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$.

Para los sistemas coestratificantes propios, la situación es diferente. Por un lado, es verdad que los $\Psi(i)$'s de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ satisfacen que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ para $i < j$. Sin embargo, la existencia de una familia $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^t$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j))$ para $i < j$, no asegura la existencia de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$, aunque asumamos que $\mathrm{End}_\Lambda(\Psi(i))$ es un anillo con división para todo $i \in \{1, ..., t\}$. En nuestro caso, para probar un resultado de existencia para sistemas coestratificantes propios en esta dirección, asumiremos como una hipótesis adicional que la longitud de los Λ-módulos indescomponibles filtrados por Ψ está uniformemente acotada (Teorema 5.2.11).

En [R], C. Ringel construyó un módulo inclinante generalizado T asociado a un álgebra quasi-hereditaria Λ, llamado módulo inclinante característico, y probó que el álgebra $\mathrm{End}_\Lambda(T)$, llamada 'dual de Ringel', es también un álgebra quasi-hereditaria. Generalizando estos resultados, y en conexión con el estudio de las álgebras estándarmente estratificadas, I. Agoston, D. Happel, E. Lukács y L. Unger mostraron que, para un álgebra $(\Lambda, \leq)$ de este tipo, también existe un módulo inclinante característico T, tal que $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla}) = T^{\perp}$ y tal que $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1}$ (ver Teorema 2.1 y Proposición 2.2 en [AHLU]; ver también [PR]).

En este caso, se tiene que $({}_\Lambda\Delta, \{T(i)\}_{i=1}^n, \leq)$ es un sistema estratificante (Ext-inyectivo). Por otra parte, en este trabajo probamos que $({}_\Lambda\overline{\nabla}, \{T(i)\}_{i=1}^n, \leq)$ es un sistema coestratificante propio. Esto motiva el siguiente planteo:

Dado un conjunto $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos y un orden lineal $\leq$ sobre $\{1, ..., t\}$, ¿cómo se relaciona la existencia de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ con la existencia de un sistema estratificante (Ext-inyectivo) $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$?

En el Capítulo 6 vamos a contestar esta pregunta, probando dos teoremas. El primero de ellos nos da, dado un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante (Ext-inyectivo) (Teorema 6.2.1). El segundo es el resultado recíproco (Teorema 6.2.4).

En este trabajo suponemos que el lector está familiarizado con los elementos de teoría de representaciones de álgebras que pueden encontrarse en [ARS] o en [ASS]. De todas maneras, en el primer capítulo recordamos las nociones necesarias para la comprensión de esta tesis.

Por último, queremos mencionar que los resultados de los Capítulos 3 y 4 han dado lugar a un trabajo conjunto con María Inés Platzeck y Octavio Mendoza, y han sido publicados en Journal of algebra ([MPV]).

Capítulo 1

Preliminares.

En esta tesis 'álgebra' significa R-álgebra de artin, a menos que se indique lo contrario. En ciertas ocasiones trabajaremos en un contexto menos general. Esto es, con K-álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado. El término 'Λ-módulo' significa Λ-módulo a izquierda finitamente generado. Designamos por $\mathrm{mod}(\Lambda)$ a la categoría de los Λ-módulos a izquierda finitamente generados y por $\mathrm{proj}(\Lambda)$ a la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Por $\mathrm{ind}(\Lambda)$ denotamos a la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos forman un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismos de los módulos indescomponibles en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Si M es un Λ-módulo, notamos $\mathrm{add}(M)$ la subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por las sumas directas de sumandos directos de M.

Una propiedad importante de las álgebras de artin es la existencia de una dualidad $D : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$, donde Λ^{op} designa el álgebra opuesta de Λ (ver en [ARS], Sección 3 del Capítulo III).

A continuación recordamos distintos conceptos y resultados básicos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Para un estudio más detallado de los mismos recomendamos la lectura de [ARS], [ASS], [AHLU], [DR], [ES], entre otros.

1.1. Álgebras de artin.

Sea R un anillo artiniano conmutativo. Se dice que Λ es **una R-álgebra de artin**, o un álgebra de artin para abreviar, si Λ es finitamente generada como R-módulo.

Es claro que si Λ es una R-álgebra de artin vía un morfismo de anillos $R \to \Lambda$, entonces el mismo morfismo de anillos $R \to \Lambda^{op}$ convierte a Λ^{op}

en una R-álgebra de artin. Ahora bien, si M y N son Λ-módulos para una R-álgebra de artin Λ, entonces M y N son R-módulos. Para $r \in R$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ tenemos que $f(rm) = rf(m)$ para todo $m \in M$. Se define rf por $(rf)(m) = rf(m)$ para todo $m \in M$. Entonces $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ es un R-módulo. Por otra parte, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ es un subgrupo de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ y, más aún, se puede ver que es un R-submódulo, como lo establece el siguiente resultado (ver Proposición 1.1 del Capítulo III de [ARS]).

Proposición 1.1.1. *Sea Λ una R-álgebra de artin.*

(a) Si $M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ es un R-submódulo finitamente generado de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

(b) Si $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ entonces $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ es una R-álgebra de artin que es una R-subálgebra de la R-álgebra de artin $\mathrm{End}_R(M)$.

Por lo observado anteriormente es claro que $\mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ también es una R-álgebra de artin. Entonces M es un $\mathrm{End}_\Lambda(M)$-módulo, cuando se define

$$fm = f(m)$$

para $m \in M$ y $f \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, y por lo tanto M es un $\mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$-módulo a derecha.

Si $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ entonces el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,X)$ tiene una estructura natural como módulo sobre $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ dada como sigue. Para $t \in \Gamma$ y $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,X)$, se define

$$(tf)(m) = f(t(m))$$

para $m \in M$.

Por otro lado, para todo Γ-módulo Y, el grupo ${}_\Lambda M_\Gamma \otimes_\Gamma Y$ tiene una estructura de Λ-módulo dada por

$$a(m \otimes y) = am \otimes y$$

para $a \in \Lambda$, $m \in M$ e $y \in Y$.

Entonces tenemos el par de funtores adjuntos determinados por M

$$F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$$

y

$$G = {}_\Lambda M_\Gamma \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda).$$

Para cada par de módulos $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $Y \in \mathrm{mod}(\Gamma)$, sea

$$\eta_{Y,X} : \mathrm{Hom}_\Lambda(G(Y), X) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(Y, F(X))$$

la transformación natural inversible definida por

$$\eta_{Y,X}(\varphi(y))(m) = \varphi(m \otimes y),$$

para $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(G(Y), X)$, $y \in Y$ y $m \in M$. La inversa está dada por

$$\eta_{Y,X}^{-1}(\phi)(m \otimes y) = \phi(y)(m),$$

para $\phi \in \mathrm{Hom}_\Gamma(Y, F(X))$, $y \in Y$ y $m \in M$. Notamos por μ_Y y ϵ_X la unidad y la co-unidad de la adjunción, respectivamente. Esto es,

$$\mu_Y = \eta(1_{G(Y)}) : Y \to FG(Y) \quad \text{y} \quad \epsilon_X = \eta^{-1}(1_{F(X)}) : GF(X) \to X$$

El funtor F recibe el nombre de **funtor evaluación en** M, y tiene la importante propiedad que $F|_{\mathrm{add}(M)} : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{proj}(\Gamma)$ es una equivalencia de categorías con quasi-inversa $G|_{\mathrm{proj}(\Gamma)} : \mathrm{proj}(\Gamma) \to \mathrm{add}(M)$. Para un estudio más exhaustivo sobre este tema recomendamos la lectura de [ARS] (II.2.1) o [ASS] (VI.3.1).

1.2. Carcajes y sus representaciones.

En esta sección introduciremos los carcajes y sus representaciones sobre un cuerpo K. También hablaremos del álgebra de caminos asociada a un carcaj sobre un cuerpo K.

Definición 1.2.1. *Un* ***carcaj*** $Q = (Q_0, Q_1)$ *es un grafo orientado, donde los elementos del conjunto* Q_0 *son los vértices y los elementos del conjunto* Q_1 *son las flechas entre dichos vértices. Notamos por* $s : Q_1 \to Q_0$ *y* $e : Q_1 \to Q_0$ *a las aplicaciones definidas por* $s(\alpha) = i$ *y* $e(\alpha) = j$*, donde* $\alpha : i \to j$ *es una flecha del vértice* i *al vértice* j*.*

Asumiremos que Q es un carcaj finito, esto es, Q_0 y Q_1 son ambos conjuntos finitos. Un **camino** en el carcaj Q es una sucesión ordenada de flechas $p = \alpha_n ... \alpha_1$ con $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ para $1 \leq t \leq n$, o bien el símbolo e_i para $i \in Q_0$. Llamamos a los caminos e_i, **caminos triviales** y definimos $s(e_i) = e(e_i) = i$. Para un camino no trivial $p = \alpha_n ... \alpha_1$ definimos $s(p) = s(\alpha_1)$ y $e(p) = s(\alpha_n)$. Un camino no trivial p se dice un **ciclo orientado** si $s(p) = e(p)$.

Sea K un cuerpo. El **álgebra de caminos** KQ asociada a Q sobre el cuerpo K, es la K-álgebra con base formada por los caminos de Q (incluso los caminos triviales), dotada del producto dado por la composición de caminos no triviales $p = \alpha_n ... \alpha_1$ y $q = \beta_m ... \beta_1$

$$pq = \begin{cases} \alpha_n ... \alpha_1 \beta_m ... \beta_1 & \text{si } s(p) = e(q) \\ 0 & \text{si } s(p) \neq e(q) \end{cases}$$

y extendido por distributividad y asociatividad teniendo en cuenta que, si e_i y e_j son caminos triviales y α es una flecha, entonces

$$e_i\alpha = \begin{cases} \alpha & \text{si } e(\alpha) = i \\ 0 & \text{si } e(\alpha) \neq i \end{cases}, \ \alpha e_i = \begin{cases} \alpha & \text{si } s(\alpha) = i \\ 0 & \text{si } s(\alpha) \neq i \end{cases} \ \text{y} \ \ e_ie_j = \begin{cases} e_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Notemos que $\sum_{i \in Q_0} e_i$ es la unidad de KQ.

En la siguiente proposición mencionaremos algunos resultados sobre el álgebra de caminos de un carcaj. Su demostración puede hallarse en [ARS].

Proposición 1.2.2. *Sea Q un carcaj. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) El conjunto $\{e_i : i \in Q_0\}$ de todos los caminos triviales, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de KQ.

(b) El álgebra KQ es indescomponible si y sólo si el carcaj Q es conexo.

(c) KQ es una K-álgebra de dimensión finita si y sólo si Q no tiene ciclos orientados.

Recordemos que una K-álgebra Λ se dice **básica** si en la descomposición $\Lambda = \coprod P_i$ de Λ como suma de Λ-módulos proyectivos indescomponibles, $P_i \not\simeq P_j$ para $i \neq j$.

Sabemos que vale el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces existe una única (a menos de isomorfismos) K-álgebra Λ' básica de dimensión finita tal que las categorías* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathrm{mod}(\Lambda')$ *son equivalentes. Esto es, Λ y Λ' son Morita equivalentes.*

Luego, si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que Λ es básica.

Definición 1.2.4. *Sea Λ una K-álgebra básica, indescomponible y de dimensión finita sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y $\{e_1, ..., e_l\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ. El* ***carcaj ordinario*** Q_Λ ***asociado a*** Λ *se define como sigue:*

(a) Los vértices de Q_Λ son los números $1, 2, ..., l$, que están en correspondencia biyectiva con los idempotentes $e_1, e_2, ..., e_l$.

(b) Dados dos vértices $i, j \in Q_\Lambda$, las flechas $\alpha : i \to j$ están en correspondencia biyectiva con los vectores de una base del K-espacio vectorial e_j $(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)$ e_i. Esto es, el número de flechas que comienzan en el vértice i y terminan en el vértice j es:

$$\dim_K[e_j\ (\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)\ e_i].$$

Una **relación** σ sobre un carcaj Q sobre un cuerpo K es una K-combinación lineal de caminos $\sigma = a_1p_1 + ... + a_np_n$, con $a_i \in K$, $e(p_1) = ... = e(p_n)$ y $s(p_1) = ... = s(p_n)$. Además, asumiremos que la longitud $l(p_i)$ de cada p_i, que es el número de flechas en cada camino, es al menos 2. Si $\rho = \{\sigma_t\}_{t\in T}$ es un conjunto de relaciones en Q sobre K, el par (Q, ρ) es llamado un **carcaj con relaciones** sobre K. El **álgebra de caminos** $K(Q, \rho)$ **asociada al carcaj con relaciones** (Q, ρ) es por definición el cociente KQ/I, donde $I = \langle\rho\rangle$ denota el ideal en KQ generado por el conjunto de relaciones ρ.

En nuestro caso, tenemos que $I \subseteq J^2$, donde J es el ideal de KQ generado por las flechas de Q. Este ideal I de KQ se llama **admisible** si existe un número natural n tal que $J^n \subseteq I$, esto es, si existe un n tal que todo camino de Q de longitud mayor o igual que n pertenece a I. Si I es un ideal admisible, entonces se puede probar que el álgebra cociente KQ/I es de K-dimensión finita.

A continuación, recordamos un importante resultado probado por Gabriel. El lector interesado puede hallar su demostración en el Capítulo III de [ARS], o en el Capítulo II de [ASS].

Teorema 1.2.5. *Sea Λ una K-álgebra básica e indescomponible de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. Entonces existen un carcaj Q_Λ conexo y finito y un ideal admisible I_Λ de KQ_Λ tales que $\Lambda \simeq KQ_\Lambda/I_\Lambda$.*

En el caso anterior, esto es, cuando $\Lambda \simeq KQ_\Lambda/I_\Lambda$ con I_Λ un ideal admisible de KQ_Λ, se dice que el par (Q_Λ, I_Λ) es una **presentación de** Λ.

En este caso, las clases módulo I_Λ de los caminos triviales, $\overline{e}_i = e_i + I_\Lambda$, forman un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de Λ. En particular, están en correspondencia biyectiva con los vértices de Q_Λ. A cada vértice i de $(Q_\Lambda)_0$ le corresponden los siguientes Λ-módulos indescomponibles muy importantes: el proyectivo $P_i = \Lambda\overline{e}_i$, el simple $S_i = P_i/rP_i$ y el inyectivo $I_i = D(\overline{e}_i\Lambda)$. Observemos que, como K-espacios vectoriales, el proyectivo P_i está generado por los caminos no nulos que empiezan en i, el simple S_i por el idempotente $\overline{e}_i$, y una base del inyectivo I_i es la dual de la formada por los caminos no nulos que terminan en i.

Las nociones introducidas en esta sección son importantes ya que nos permiten estudiar la conexión entre módulos sobre álgebras de caminos y representaciones de carcajes.

Sea M un módulo sobre el álgebra de caminos KQ. Entonces $M = \coprod_{i\in Q_0} e_iM$ es una descomposición de M en una suma finita de K-espacios vectoriales. Ahora, si α es una flecha de i a j, entonces la multiplicación a izquierda por α induce una aplicación K-lineal de e_iM a e_jM. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.2.6. *Una* ***representación*** (V, f) *de un carcaj* Q *sobre un cuerpo* K *se define como sigue:*

(a) A cada vértice $i \in Q_0$ *se le asocia un* K*-espacio vectorial* $V(i)$*.*

(b) A cada flecha $\alpha : i \to j$ *en* Q_1 *se le asocia una aplicación* K*-lineal* $f_\alpha : V(i) \to V(j)$*.*

Notaremos $(V, f) = (V(i), f_\alpha)_{i\in Q_0,\, \alpha\in Q_1}$.

Asumiremos que las representaciones son de dimensión finita, esto es, que cada $V(i)$ tiene dimensión finita sobre K.

Un morfismo $h : (V, f) \to (V', f')$ entre dos representaciones de Q sobre K es un conjunto $\{h_i : V(i) \to V'(i)\}_{i\in Q_0}$ de K-aplicaciones lineales tales que para cada flecha $\alpha : i \to j$ en Q_1 el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{h_i} & V'(i) \\ {\scriptstyle f_\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle f'_\alpha}\downarrow \\ V(j) & \xrightarrow{h_j} & V'(j)\ . \end{array}$$

Si $h : (V, f) \to (V', f')$ y $g : (V', f') \to (V'', f'')$ son dos morfismos entre representaciones entonces la composición $g \circ h$ se define como el conjunto de aplicaciones $\{g_i \circ h_i : V(i) \to V''(i)\}_{i\in Q_0}$. Así se obtiene **la categoría de**

las representaciones de dimensión finita de Q **sobre** K, que llamamos Rep Q.

En el Teorema 1.5 del Capítulo III de [ARS] se prueba que las categorías Rep Q y f.d.(KQ) son equivalentes, donde f.d.(KQ) es la **categoría de los** KQ**-módulos de** K**-dimensión finita**.

Sea $\sigma = a_1p_1 + ... + a_np_n$ una relación con $a_i \in K$ y caminos $p_i = \alpha_{ij}...\alpha_{i1}$ tales que $e(p_1) = ... = e(p_n)$ y $s(p_1) = ... = s(p_n)$. Diremos que $f_\sigma = a_1 f_{\alpha_{1j}}...f_{\alpha_{11}} + ... + a_n f_{\alpha_{nj}}...f_{\alpha_{n1}}$ es la K-aplicación lineal asociada a la relación σ.

Para un carcaj con relaciones (Q, ρ) sobre un cuerpo K definimos la categoría de representaciones Rep (Q, ρ) como la subcategoría llena de Rep Q cuyos objetos son los (V, f) tales que $f_\sigma = 0$ para cada relación σ en ρ. Entonces la equivalencia entre las categorías Rep Q y f.d.(KQ) induce una equivalencia φ : Rep $(Q, \rho) \to$ f.d.$(K(Q, \rho))$ (ver la demostración en la Proposición 1.7 del Capítulo III de [ARS]).

Notemos que tenemos f.d.$(K(Q, \rho)) \simeq \text{mod}(K(Q, \rho))$ cuando $J^n \subseteq \langle\rho\rangle \subseteq J^2$ para algún n. Luego, las representaciones de un carcaj con relaciones corresponden a módulos sobre el cociente de un álgebra de caminos asociada a dicho carcaj. Así obtenemos descripciones concretas de los módulos en términos de espacios vectoriales junto con aplicaciones lineales. Esto es muy práctico al momento de describir los módulos simples, proyectivos e inyectivos.

1.3. Morfismos irreducibles y sucesiones que casi se parten.

En toda esta sección Λ será un álgebra de artin básica e indescomponible. Daremos aquí nociones básicas y algunos resultados sin demostraciones que permiten desarrollar la teoría de Auslander-Reiten. Para una exposición más detallada remitimos al lector a [ARS] o a [ASS].

Definición 1.3.1. *Se dice que un morfismo $f : B \to C$ en $\text{mod}(\Lambda)$ es un* ***epimorfismo que se parte*** *si el morfismo identidad $Id_C : C \to C$ se factoriza a través de f. Dualmente, se dice que un morfismo $g : A \to B$ en $\text{mod}(\Lambda)$ es un* ***monomorfismo que se parte*** *si el morfismo identidad $Id_A : A \to A$ se factoriza a través de g.*

Definición 1.3.2. *(a) Sea $f : B \to C$ un morfismo de Λ-módulos. Entonces:*

- *f se dice* ***minimal a derecha*** *si para todo $h : B \to B$ tal que $fh = f$, se tiene que h es un automorfismo.*
- *Se dice que f* ***casi se parte a derecha*** *si no es un epimorfismo que se parte y todo morfismo $X \to C$ que no es un epimorfismo que se parte se factoriza a través de f.*
- *Por último, se dice que f es un morfismo* ***minimal que casi se parte a derecha*** *si es minimal a derecha y casi se parte a derecha.*

(b) Sea $g : A \to B$ un morfismo de Λ-módulos. Entonces:

- *g se dice* ***minimal a izquierda*** *si para todo $h : B \to B$ tal que $hg = g$, se tiene que h es un automorfismo.*
- *Se dice que g* ***casi se parte a izquierda*** *si no es un monomorfismo que se parte y todo morfismo $A \to Y$ que no es un monomorfismo que se parte se factoriza a través de g.*
- *Por último, se dice que g es un morfismo* ***minimal que casi se parte a izquierda*** *si es minimal a izquierda y casi se parte a izquierda.*

Definición 1.3.3. *Un morfismo de Λ-módulos $g : B \to C$ se dice* ***irreducible*** *si no es un monomorfismo que se parte ni un epimorfismo que se parte y si $g = ts$ para algún $s : B \to X$ y $t : X \to C$, implica que s es un monomorfismo que se parte o t es un epimorfismo que se parte.*

Se puede ver una demostración del siguiente teorema que relaciona los morfismos irreducibles y los morfismos minimales que casi se parten a derecha (o a izquierda) en [ARS] (V.5.3) o en [ASS] (IV.1.10).

Teorema 1.3.4. *(a) Sea C un Λ-módulo indescomponible. Un morfismo $g : B \to C$ es irreducible si y sólo si $B \neq 0$ y existe un morfismo $g' : B' \to C$ tal que el morfismo inducido $(g\ g') : B \oplus B' \to C$ es minimal que casi se parte a derecha.*

(b) Sea A un Λ-módulo indescomponible. Un morfismo $g : A \to B$ es irreducible si y sólo si $B \neq 0$ y existe un morfismo $g' : A \to B'$ tal que el morfismo inducido $\binom{g}{g'} : A \to B \oplus B'$ es minimal que casi se parte a izquierda.

Definición 1.3.5. *Una sucesión exacta de Λ-módulos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

se dice que es una ***sucesión que casi se parte*** *o una* ***sucesión de Auslander-Reiten*** *si g casi se parte a izquierda y f casi se parte a derecha.*

La siguiente proposición resume las propiedades y caracterizaciones de las sucesiones que casi se parten (ver demostración en [ARS] (V.1.4) y (V.5.3), o en [ASS] (IV.1.13)).

Proposición 1.3.6. *Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de Λ-módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) La sucesión casi se parte.

(b) A es indescomponible y f es un morfismo que casi se parte a derecha.

(c) C es indescomponible y g es un morfismo que casi se parte a izquierda.

(d) g es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda.

(e) f es un morfismo minimal que casi se parte a derecha.

(f) A, C son indescomponibles y g, f son irreducibles.

Además, si estas condiciones se verifican, la sucesión está unívocamente determinada por C (o por A) salvo isomorfismo.

A fin de probar que existen sucesiones que casi se parten, se consideran las categorías proyectivamente e inyectivamente estables.

La **categoría proyectivamente estable** $\underline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$ es la categoría cuyos objetos son los Λ-módulos y el conjunto de morfismos entre dos Λ-módulos M y N es $\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(M,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)/P(M,N)$, donde $P(M,N)$ es el subgrupo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ de los morfismos de M en N que se factorizan por Λ-módulos proyectivos.

En forma dual se define la **categoría inyectivamente estable** $\overline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos y el conjunto de morfismos entre dos Λ-módulos M y N es $\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(M,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)/I(M,N)$, donde $I(M,N)$ es el subgrupo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ de los morfismos de M en N que se factorizan a través de un Λ-módulo inyectivo.

Definición 1.3.7. *Sea M un Λ-módulo y $P_1 \xrightarrow{g} P_0 \to M \to 0$ una presentación proyectiva minimal de M. Sea $* = \mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$. Aplicando $*$ a la sucesión exacta anterior obtenemos la sucesión exacta $P_0^* \xrightarrow{g^*} P_1^* \to \mathrm{Coker}(g^*) \to 0$. La **traspuesta** TrM **de** M es el Λ^{op}-módulo $\mathrm{Coker}(g^*)$.*

Usando que un morfismo $f : M \to N$ puede levantarse a un morfismo entre presentaciones proyectivas de M y N, puede definirse un morfismo, la traspuesta de f, de TrM en TrN. Aunque no es único se prueba que esta operación induce un funtor $Tr : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{op}))$ que es una dualidad.

La dualidad $D : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ induce una dualidad $D : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{op})$, y la composición $DTr : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$ es una equivalencia de categorías con inversa $TrD : \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$. Luego $\tau = DTr$ y $\tau^{-1} = TrD$ son llamadas las **traslaciones de Auslander-Reiten.**

El lector puede consultar sobre estos temas en los Capítulos IV de [ARS] y de [ASS]. A continuación mencionamos el siguiente teorema de existencia cuya demostración se encuentra en [ARS] (V.1.15).

Teorema 1.3.8. *(a) Si C es un Λ-módulo indescomponible no proyectivo, entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \to \tau C \to B \to C \to 0$*

(b) Si A es un Λ-módulo indescomponible no inyectivo, entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \to A \to B \to \tau^{-1}A \to 0$

1.4. El carcaj de Auslander-Reiten.

Para definir el carcaj de Auslander-Reiten, necesitamos recordar la definición de radical de una categoría de módulos.

Definición 1.4.1. *Sea Λ un álgebra de artin y X e Y en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Se define el **radical de** $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ y se nota por $\mathrm{rad}_\Lambda(X,Y)$ al conjunto de los $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ tales que, para todo $A \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ y para todo par de morfismos $g : A \to X$, $h : Y \to A$, la composición $h \circ f \circ g$ no es un isomorfismo.*

Observación 1.4.2. Sean X e Y Λ-módulos, X indescomponible. Se sabe que:

$$(a)\ \mathrm{rad}_\Lambda(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) : f \text{ no es un monomorfismo que se parte}\}$$
$$\supseteq \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) : \mathrm{Im}(f) \subseteq rY\}, \text{ y que}$$

(b) $\mathrm{rad}_\Lambda(Y,X) = \{g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Y,X) : g \text{ no es un epimorfismo que se parte}\}$
$\supseteq \{g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Y,X) : \mathrm{Im}(g) \subseteq rX\}.$

(c) Las inclusiones en (a) y (b) son igualdades cuando X e Y son además proyectivos.

Para probar (c), en el caso del inciso (a), observemos primero que vale si suponemos además que el módulo proyectivo Y es indescomponible, pues en este caso el morfismo $X/rX \to Y/rY$ es no nulo si y sólo si es un isomorfismo. Esto es, si y sólo si el morfismo $X \to Y$ es un isomorfismo.
Sean P y Q Λ-módulos proyectivos, P indescomponible, y $f : P \to Q$ tales que $\mathrm{Im}(f) \nsubseteq rQ$. Probemos que f es un monomorfismo que se parte. Podemos considerar $Q = \oplus_{i=1}^{s} Q_i$ con Q_i indescomponible para todo $i = 1, ..., s$. Por hipótesis, existe i tal que $\mathrm{Im}(f) \nsubseteq rQ_i$. Luego, si $\pi_i : Q \to Q_i$ es la i-ésima proyección canónica, $\pi_i \circ f$ es un monomorfismo que se parte ya que Q_i es indescomponible. Por lo tanto, existe un morfismo $h : Q_i \to P$ tal que $h \circ (\pi_i \circ f) = Id_P$, esto es, $(h \circ \pi_i) \circ f = Id_P$. Luego, f es un monomorfismo que se parte. Esto demuestra que $\{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) : f \text{ no es un monomorfismo que se parte}\} \subseteq \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) : \mathrm{Im}(f) \subseteq rY\}$.

Se definen inductivamente las potencias del radical. Para X e Y en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y un número natural n se tiene que

$$\mathrm{rad}^n_\Lambda(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) \text{ tales que existen } A \in \mathrm{mod}(\Lambda),\ \text{morfismos}$$
$$g \in \mathrm{rad}_\Lambda(X,A) \text{ y } h \in \mathrm{rad}^{n-1}_\Lambda(A,Y) \text{ con } f = h \circ g\}.$$

Finalmente, se define $\mathrm{rad}^\infty_\Lambda(X,Y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{rad}^n_\Lambda(X,Y)$.

Observación 1.4.3. Queremos destacar que el radical se comporta bien respecto de la descomposición en sumandos indescomponibles de los módulos, como se prueba en la p. 179 del Capítulo V de [ARS].

Esto es, si X e Y son Λ-módulos y $X = \amalg_{i=1}^{t} X_i$ e $Y = \amalg_{j=1}^{s} Y_j$ son descomposiciones de X e Y en suma de módulos X_i e Y_j, con $\alpha_i : X_i \to X$ y $\beta_j : Y \to Y_j$ las inclusiones y proyecciones inducidas respectivamente, entonces se tiene que un morfismo $f : X \to Y$ está en $\mathrm{rad}^n_\Lambda(X,Y)$ si y sólo si $\beta_j \circ f \circ \alpha_i$ está en $\mathrm{rad}^n_\Lambda(X_i, Y_j)$ para todo $i = 1, ..., t$ y $j = 1, ..., s$.

A continuación recordamos la conexión entre morfismos irreducibles y el radical (ver [ARS] (V.7.3) o [ASS] (IV.1.6)).

Proposición 1.4.4. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre módulos indescomponibles X e Y. Entonces:*

$$f \text{ es irreducible si y sólo si } \ f \in \mathrm{rad}_\Lambda(X,Y)/\mathrm{rad}^2_\Lambda(X,Y).$$

La proposición anterior lleva a considerar el cociente

$$\mathrm{Irr}(X,Y) = \mathrm{rad}_\Lambda(X,Y)/\mathrm{rad}^2_\Lambda(X,Y).$$

Para X e Y indescomponibles si notamos $T_X = \mathrm{End}(X)/\mathrm{radEnd}(X)$ y $T_Y = \mathrm{End}(Y)/\mathrm{radEnd}(Y)$, se puede probar que $\mathrm{Irr}(X,Y)$ tiene una estructura de T_X-T_Y^{op}-bimódulo, y lo llamamos **bimódulo de los morfismos irreducibles**.

Ahora definimos el carcaj de Auslander-Reiten de Λ.

Definición 1.4.5. *Sea Λ un álgebra de artin. El* ***carcaj de Auslander-Reiten*** *de Λ es un grafo orientado valuado, que denotaremos por $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$, definido como sigue:*

(a) Los vértices de $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ están en correspondencia biunívoca con las clases de isomorfismo de Λ-módulos indescomponibles, esto es a cada módulo indescomponible M le asociamos un vértice $[M]$, y dos vértices $[M]$ y $[M']$ son los mismos si y sólo $M \simeq M'$.

(b) Existe una (y sólo una) flecha $[M] \to [N]$ si y sólo si existe un morfismo irreducible de M a N. Esta flecha tiene ***valuación*** *(a,b) donde $a = \dim_{T_M} \mathrm{Irr}(M,N)$ y $b = \dim_{T_N} \mathrm{Irr}(M,N)$.*

A los vértices correspondientes a los módulos proyectivos se los denominan **vértices proyectivos** y a los correspondientes a los módulos inyectivos, **vértices inyectivos**. Luego, DTr induce una aplicación entre los vértices no proyectivos y los vértices no inyectivos llamada **traslación** de $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$. Al funtor de traslación de Auslander-Reiten DTr lo notaremos τ y al trasladado inverso TrD por τ^{-1}, como ya lo hemos indicado en la Sección 1.3.

Observación 1.4.6. (a) Como no existen morfismos irreducibles de un módulo indescomponible en sí mismo, el carcaj de Auslander-Reiten no tiene lazos. Recordemos que un **lazo** es una flecha de un vértice i en sí mismo.

(b) $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$ es un carcaj finito si y sólo si Λ es de tipo de representación finito. Un álgebra de artin Λ se dice de **tipo de representación finito** si $\text{ind}(\Lambda)$ tiene sólo un número finito de objetos. En caso contrario, se dice que el álgebra es de **tipo de representación infinito**.

En lo que resta de esta sección, Λ será una K-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. Ahora vamos a analizar la Definición 1.4.5 en este caso. Para un Λ módulo indescomponible M, tenemos que $T_M = \text{End}(M)/\text{radEnd}(M) \simeq K$. Entonces, para toda flecha $[M] \to [N]$ de $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$ con valuación (a, b), los enteros a y b representan ambos la dimensión del K-espacio vectorial $\text{Irr}(M, N)$. Reemplazando una flecha de $[M]$ en $[N]$ con valuación (a, a) por a flechas de $[M]$ en $[N]$, la Definición 1.4.5 puede reformularse de la siguiente manera.

Definición 1.4.7. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. El **carcaj de Auslander-Reiten** $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$ asociado al álgebra Λ es un grafo orientado definido como sigue:*

(a) Los vértices de $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$ son los objetos de $\text{ind}(\Lambda)$.

(b) El número de flechas de $[M]$ en $[N]$ está dado por $\dim_K \text{Irr}(M, N)$.

Observación 1.4.8. Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K.

(a) Dado $M \in \text{ind}(\Lambda)$ no proyectivo, el número de flechas que salen de $[\tau M]$ es igual al número de flechas que llegan a $[M]$.

(b) Si Λ es de tipo de representación finito, entonces $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$ no tiene flechas múltiples.

Sea Σ una carcaj tal que Σ_0 es el conjunto de vértices y Σ_1 es el conjunto de flechas. Se dice que Σ es un **carcaj localmente finito** si el número de flechas comenzando o terminando en cada vértice de Σ es finito.

Para $x \in \Sigma_0$ denotamos por x^- el conjunto de **predecesores inmediatos de** x, esto es,

$$x^- = \{y \in \Sigma_0 : \text{existe una flecha } y \to x\}.$$

Denotamos por x^+ el conjunto de **sucesores inmediatos de** x, esto es,

$$x^+ = \{y \in \Sigma_0 : \text{existe una flecha } x \to y\}.$$

Definición 1.4.9. *Sea Σ un carcaj localmente finito sin lazos y τ una biyección cuyo dominio y codominio son ambos subconjuntos de Σ_0. El par (Σ, τ) se dice un **carcaj de traslación** si para cada $x \in \Sigma_0$ tal que τx existe, y cada $y \in x^-$, el número de flechas de y a x es igual al número de flechas de τx a y.*

De la definición sigue que, si τx existe para $x \in \Sigma_0$ entonces $(\tau x)^+ = x^-$. La biyección τ es llamada la **traslación** de Σ. Los vértices de Σ donde τ (o τ^{-1}) no está definida son llamados **proyectivos** (o **inyectivos**, respectivamente).

Todo carcaj de Auslander-Reiten es un carcaj de traslación donde τ está definida por DTr. En este caso, los vértices proyectivos corresponden a los módulos proyectivos indescomponibles y los vértices inyectivos a los módulos inyectivos indescomponibles.

Si consideramos el carcaj infinito A_∞

$$\underset{x_0}{\circ} \longrightarrow \underset{x_1}{\circ} \longrightarrow \underset{x_2}{\circ} \longrightarrow \ \ldots \underset{x_n}{\circ} \longrightarrow \underset{x_{n+1}}{\circ} \ldots ,$$

obtenemos otro ejemplo de carcaj de traslación, $\mathbb{Z}A_\infty$, que se define de la siguiente manera.

El conjunto de vértices de $\mathbb{Z}A_\infty$ es $(\mathbb{Z}A_\infty)_0 = \mathbb{Z} \times (A_\infty)_0$ y la traslación está dada por $\tau(n, x) = (n-1, x)$. Además, por cada flecha $\alpha : x \to y$ de A_∞ se colocan, para cada n, flechas $\alpha_n : (n, x) \to (n, y)$ y $\sigma(\alpha_n) : (n-1, y) \to (n, x)$.

Entonces el carcaj de traslación $\mathbb{Z}A_\infty$ es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\cdots (0,x_0) \arrow[dr] & & (1,x_0) \arrow[dr] & & (2,x_0) \arrow[dr] & & \cdots \\
& (0,x_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,x_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,x_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\cdots (-1,x_2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,x_2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,x_2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& (-1,x_3) \arrow[ur] & & (0,x_3) \arrow[ur] & & (1,x_3) \arrow[ur] & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Para un carcaj de traslación (Σ, τ), la **τ-órbita** de un punto $x \in \Sigma_0$ es el conjunto de todos los puntos de la forma $\tau^n x$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Antes de definir las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de una K-álgebra Λ, recordemos algunas definiciones.

Sean M y N dos Λ-módulos indescomponibles. Una sucesión

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow ... \xrightarrow{f_t} M_t = N$$

donde todos los M_i son indescomponibles y todos los f_i son no nulos se dice que es un **camino en** $\operatorname{mod}(\Lambda)$ de M a N si los f_i no son isomorfismos para $i = 1, ..., t$, y que es un **camino en** $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ de M a N si los f_i son irreducibles para $i = 1, ..., t$. Una sucesión de morfismos no nulos entre indescomponibles de la forma

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow ... \xrightarrow{f_t} M_t = M$$

es llamado un **ciclo en** $\operatorname{mod}(\Lambda)$ (o un **ciclo en** $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ si es un camino en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ (en $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$, respectivamente).

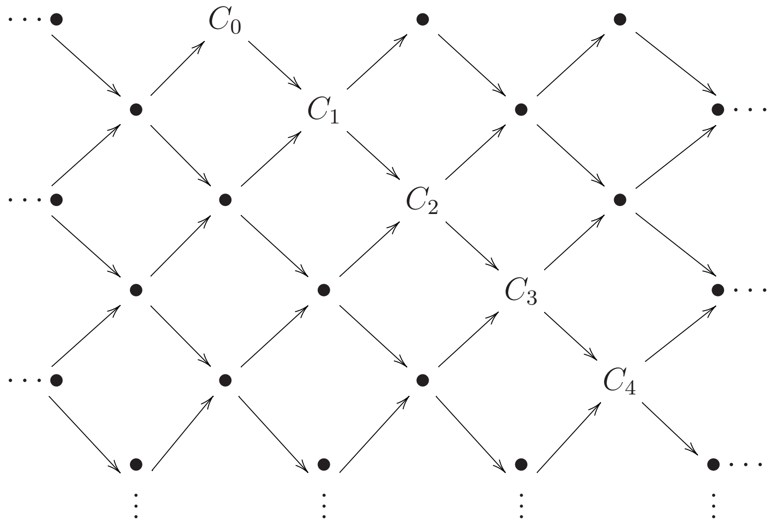
Definición 1.4.10. *Sean Λ una K-álgebra arbitraria, y $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ el carcaj de Auslander-Reiten de Λ.*

(a) *Una componente conexa $\mathcal{P}$ de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ se dice* ***preproyectiva*** *si ningún módulo de $\mathcal{P}$ está en un ciclo orientado en $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$, y todo módulo de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ está en la órbita de un proyectivo. Un Λ-módulo indescomponible es llamado* ***preproyectivo*** *si pertenece a una componente preproyectiva de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$, y un Λ-módulo arbitrario es llamado* ***preproyectivo*** *si es suma directa de Λ-módulos preproyectivos indescomponibles.*

(b) *Una componente conexa $\mathcal{Q}$ de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ se dice* ***preinyectiva*** *si ningún módulo de $\mathcal{Q}$ está en un ciclo orientado en $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$, y todo módulo de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ está en la órbita de un inyectivo. Un Λ-módulo indescomponible es llamado* ***preinyectivo*** *si pertenece a una componente preinyectiva de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$, y un Λ-módulo arbitrario es llamado* ***preinyectivo*** *si es suma directa de Λ-módulos preinyectivos indescomponibles.*

(c) *Una componente conexa $\mathcal{R}$ de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$ se dice* ***regular*** *si no contiene módulos proyectivos ni módulos inyectivos. Un Λ-módulo indescomponible es llamado* ***regular*** *si pertenece a una componente regular de $\Gamma(\operatorname{mod}(\Lambda))$, y un Λ-módulo arbitrario es llamado* ***regular*** *si es suma directa de Λ-módulos regulares indescomponibles.*

Si Λ es un álgebra hereditaria de tipo de representación infinito, entonces se tiene el siguiente gráfico de una componente regular $\mathcal{R}$ del carcaj de Auslander-Reiten de Λ:



donde $C_0 \to C_1 \to ... \to C_n \to ...$ es un camino infinito de monomorfismos irreducibles en $\mathcal{R}$ tal que el número de sumandos indescomponibles del término del medio de la sucesión que termina en C_0 es 1, y el de la que termina en C_i es 2 para todo $i \geq 1$. Aquí puede suceder que $(DTr)^n C_0 = C_0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(DTr)^n C_i = C_i$ para todo i y obtenemos lo que se llama un **tubo estable**. Recordemos que un tubo estable $\mathcal{T}$ es un **tubo de rango** n si n es el menor entero positivo tal que $X \simeq \tau^n X$, para todo módulo $X \in \mathcal{T}$.

A continuación mencionamos un resultado que establece que, si Λ es un álgebra hereditaria de tipo de representación infinito, los morfismos entre los módulos correspondientes a los vértices de $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ sólo pueden ir 'de izquierda a derecha'.

Proposición 1.4.11. *Sea Λ un álgebra hereditaria de tipo de representación infinito y L, M y N tres Λ-módulos indescomponibles.*

(a) Si L es preproyectivo y M es regular, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, L) = 0$.

(b) Si L es preproyectivo y N es preinyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, L) = 0$.

(c) Si M es regular y N es preinyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, M) = 0$.

Observación 1.4.12. Sea Q un carcaj acíclico, conexo y finito, y sea $\Lambda = KQ$. Entonces el carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$ contiene una única componente preproyectiva $\mathcal{P}$, que contiene a todos los Λ-módulos proyectivos indescomponibles. Análogamente, $\mathcal{Q}$ es la única componente preinyectiva de $\Gamma(\mathrm{mod}(\Lambda))$, que contiene a todos los Λ-módulos inyectivos indescomponibles.

1.5. Álgebra de Kronecker.

En esta sección queremos describir el carcaj de Auslander-Reiten del álgebra de Kronecker que es una clase particular de álgebra hereditaria de representación infinita. El álgebra de Kronecker es lo que se denomina un álgebra mansa, es decir, que es posible parametrizar sus módulos indescomponibles de una dimensión dada.

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces el álgebra de Kronecker sobre K es la K-álgebra Λ de dimensión finita, que es la subálgebra de $M_3(K)$ formada por todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ d & 0 & b \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in K$. Se puede probar que Λ es isomorfa al álgebra de caminos del carcaj

$$\Sigma : \underset{1}{\circ} \rightrightarrows \underset{2}{\circ}$$

sobre el cuerpo K. Por lo tanto, sabemos que $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es equivalente a la categoría de las representaciones de dimensión finita de Σ sobre K.

A continuación daremos la clasificación de los módulos indescomponibles sobre el álgebra de Kronecker que fue hecha esencialmente en [K] (ver también la Sección 7 del Capítulo VIII de [ARS] y la Sección 2 del Capítulo VIII de [ASS]). Esta clasificación fue hecha a través de las representaciones del carcaj Σ sobre el cuerpo K.

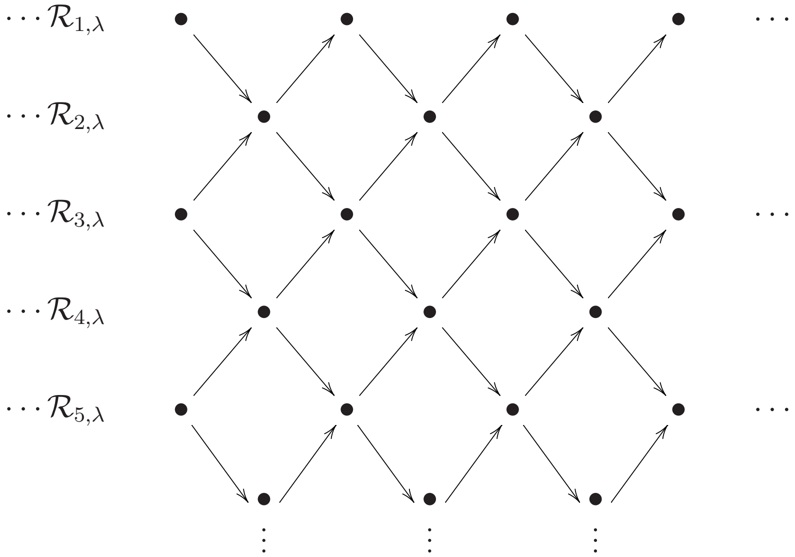
Los conjuntos de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos sobre el álgebra de Kronecker Λ son los siguientes:

- los módulos preproyectivos $\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\mathcal{P}_n$ es la representación $K^n \underset{\binom{0}{I}}{\overset{\binom{I}{0}}{\rightrightarrows}} K^{n+1}$ con I la matriz identidad $n \times n$.

- los módulos preinyectivos $\{\mathcal{Q}_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\mathcal{Q}_n$ es la representación del carcaj Σ dada por $K^{n+1} \underset{(0\ I)}{\overset{(I\ 0)}{\rightrightarrows}} K^n$ con I la matriz identidad $n \times n$.

- los módulos regulares $\{\mathcal{R}_{n,\lambda} : \lambda \in \mathbb{P}^1(K),\ n \in \mathbb{N}\}$ donde $\mathbb{P}^1(K)$ es el espacio proyectivo lineal sobre K y $\mathcal{R}_{n,\lambda}$ es la representación $K^n \underset{J_{n,\lambda}}{\overset{I}{\rightrightarrows}} K^n$ con I la matriz identidad $n \times n$ y $J_{n,\lambda}$ el bloque de Jordan correspondiente al autovalor λ.

Se sabe que para cada $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$ la componente regular del carcaj de Auslander-Reiten que contiene a $\mathcal{R}_{n,\lambda}$ es de la forma



donde todos los vértices sobre cualquier línea horizontal de la imagen anterior están identificados ya que $DTr\mathcal{R}_{n,\lambda} \simeq \mathcal{R}_{n,\lambda}$. Entonces esta componente es un tubo de rango 1, para todo $n \geq 1$ y para cada $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$.

También se puede probar que, para $\mathcal{R}_{j,\lambda}$ y $\mathcal{R}_{i,\mu}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{P}^1(K)$, $i, j \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{R}_{j,\lambda}, \mathcal{R}_{i,\mu}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{R}_{j,\lambda}, \mathcal{R}_{i,\mu})$ si $\lambda \neq \mu$ (ver Proposición 7.2 del Capítulo VIII de [ARS]).

1.6. Generadores y cogeneradores.

Sean X e Y Λ-módulos. Se dice que Y **es generado por** X si existe un epimorfismo

$$X^m \to Y \to 0,$$

para algún entero $m > 0$. Se designa por $\mathrm{Gen}(X)$ a la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por los Λ-módulos generados por X.

Naturalmente, este concepto tiene su dual. Si X e Y son Λ-módulos entonces Y se dice **cogenerado por** X si existe un monomorfismo

$$0 \to Y \to X^m,$$

para algún entero $m > 0$. Designamos por $\mathrm{Cogen}(X)$ a la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por los Λ-módulos cogenerados por X.

El siguiente resultado da una caracterización de $\mathrm{Gen}(X)$ y $\mathrm{Cogen}(X)$, para un Λ-módulo X.

Proposición 1.6.1. *Sean X e Y Λ-módulos. Entonces:*

(a) X genera a Y si y sólo si existe un subconjunto finito $H \subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ tal que $Y = \sum_{h \in H} \mathrm{Im}(h)$;

(b) X cogenera a Y si y sólo si existe un subconjunto finito $H \subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, X)$ tal que $0 = \bigcap_{h \in H} \mathrm{Ker}(h)$.

La demostración de la proposición anterior, junto con un tratamiento más completo del tema, puede hallarse en la Sección 8 del Capítulo II de [AF].

1.7. La traza y el reject.

Definición 1.7.1. *Sean X e Y Λ-módulos. La **traza** de X en Y y el **reject** de X en Y están definidos por:*

$$\mathrm{tr}_X(Y) = \Sigma\{\ \mathrm{Im}(h) :\ h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)\},$$

y

$$\mathrm{Rej}_X(Y) = \cap\{\ \mathrm{Ker}(h) :\ h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, X)\},$$

respectivamente.

Observación 1.7.2. Sean X e Y Λ-módulos. Entonces:

(a) $\mathrm{tr}_X(Y)$ es el mayor (y único a menos de isomorfismos) submódulo Z de Y generado por X, y $\mathrm{Rej}_X(Y)$ es el menor (y único a menos de isomorfismos) submódulo W de Y tal que Y/W está cogenerado por X.

(b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \mathrm{tr}_X(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(X/\mathrm{Rej}_X(Y), Y) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$.

El lector interesado puede consultar el Capítulo II de [AF].

1.8. Categorías C_n^M y $C_n^{\vee M}$.

Las categorías C_n^M, cuya definición recordamos en el párrafo siguiente, fueron introducidas por M. I. Platzeck y N. Pratti en [PP1]. En esta sección introducimos también la noción dual, esto es, las categorías $C_n^{\vee M}$.

Sea Λ una R-álgebra de artin. Para cada $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, consideramos el álgebra $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda(M)^{op}$ y los R-funtores

$$\operatorname{mod}(\Lambda) \xrightarrow{F} \operatorname{mod}(\Gamma) \text{ y } \operatorname{mod}(\Lambda) \xrightarrow{\overline{F}} \operatorname{mod}(\Gamma^{op})$$

donde $F = \operatorname{Hom}_\Lambda(M, -)$ y $\overline{F} = \operatorname{Hom}_\Lambda(-, M)$.

Siguiendo la definición dada por M. I. Platzeck y N. I. Pratti en la Sección 2 de [PP1], para $n \geq 0$ notamos por C_n^M a la subcategoría llena de $\operatorname{mod}(\Lambda)$ formada por los Λ-módulos X que admiten una sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$M_n \to M_{n-1} \to ... \to M_1 \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \operatorname{add}(M)$, y tal que la sucesión inducida

$$F(M_n) \to F(M_{n-1}) \to ... \to F(M_1) \to F(M_0) \to F(X) \to 0$$

es exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$.

Dualmente, definimos la clase $C_n^{\vee M}$, que consiste de los Λ-módulos Z admitiendo una sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$0 \to Z \to M_0 \to M_1 \to ... \to M_{n-1} \to M_n,$$

con $M_i \in \operatorname{add}(M)$, y tales que la sucesión inducida

$$\overline{F}(M_n) \to \overline{F}(M_{n-1}) \to ... \to \overline{F}(M_1) \to \overline{F}(M_0) \to \overline{F}(Z) \to 0$$

es exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma^{op})$.

El siguiente resultado expone algunas propiedades de las subcategorías C_0^M y C_1^M (ver [PP1, Proposition 2.2]). Aquí $G = M \otimes_\Gamma - : \operatorname{mod}(\Gamma) \to \operatorname{mod}(\Lambda)$ y $\epsilon : GF \to 1$ es la co-unidad de la adjunción $\eta : \operatorname{Hom}_\Lambda(G-, -) \to \operatorname{Hom}_\Gamma(-, F-)$, esto es, $\epsilon_X = \eta^{-1}(1_{F(X)}) : GF(X) \to X$, como ya se ha mencionado en la Sección 1.1 de este capítulo.

Proposición 1.8.1. *Sean $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda(M)^{op}$, $F = \operatorname{Hom}_\Lambda(M, -) : \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{mod}(\Gamma)$ y $G = M \otimes_\Gamma - : \operatorname{mod}(\Gamma) \to \operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces*

(a) $C_0^M = \operatorname{Gen}(M)$.

(b) $\mathrm{Im}(G) \subseteq C_0^M$.

(c) $C_0^M = \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\epsilon_X : GF(X) \to X$ *es un epimorfismo* $\}$.

(d) $C_1^M \subseteq \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\epsilon_X : GF(X) \to X$ *es un isomorfismo* $\}$.

A continuación, probamos el siguiente resultado para las categorías $C_0^{\vee M}$, que será muy útil en el Capítulo 2.

Proposición 1.8.2. *Sean* M *un* Λ*-módulo,* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ *y* $\overline{F} = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, M) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$. *Entonces* $\mathrm{Cogen}(M) = C_0^{\vee M}$.

Demostración. Es claro que se verifica la inclusión $C_0^{\vee M} \subseteq \mathrm{Cogen}(M)$.
Sea $Z \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Sabemos que $\overline{F}(Z) = \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, M)$ es un R-módulo finitamente generado. Sean $h_1, h_2, ..., h_n$ sus generadores y consideremos la aplicación $h = (h_1...h_n)^t : Z \to M^n$. Entonces, como $h_1, h_2, ..., h_n \in \mathrm{Im}(\overline{F}(h))$, tenemos que $\overline{F}(h) : \overline{F}(M^n) \to \overline{F}(Z)$ es un epimorfismo. Por otro lado, si $Z \in \mathrm{Cogen}(M)$ sabemos que existe un monomorfismo $g = (g_1...g_s)^t : Z \to M^s$. Como $h_1, h_2, ..., h_n$ generan $\mathrm{Hom}_\Lambda(Z, M)$, resulta que $g_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} h_j$, con $r_{ij} \in R$. Luego $g = (r_{ij}).h$, y de aquí sigue que h es un monomorfismo, por serlo g. Esto prueba que $Z \in C_0^{\vee M}$, completando la demostración de la proposición. □

1.9. Módulos estándar, coestándar, propios estándar y propios coestándar.

En los Capítulos 4, 5 y 6 de esta tesis definimos y estudiamos la noción de sistema coestratificante propio, que es una generalización de los llamados módulos propios coestándar al contexto de los sistemas estratificantes. Los módulos propios coestándar fueron definidos por V. Dlab en su estudio de las álgebras quasi-hereditarias (ver [D1]).

En esta sección recordamos la definición (ver [R, DR, D1, ADL]) de las siguientes clases de módulos: estándar, coestándar, propios estándar y propios coestándar. Los módulos estándar y coestándar sobre álgebras de artin fueron definidos por C. Ringel en conexión con el estudio de las álgebras quasi-hereditarias, donde las categorías de los módulos filtrados por ellos juega un rol esencial.

Sea Λ una R-álgebra de artin. Como ya lo hemos mencionado, $D : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ denota a la dualidad usual para álgebras de artin, y $*$ denota al funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. Entonces $*$ induce una dualidad de $\mathrm{proj}(\Lambda)$ a $\mathrm{proj}(\Lambda^{op})$.

Para un número natural t, consideramos $[1,t] = \{1, ..., t\}$. Sea l el número de Λ-módulos simples no isomorfos dos a dos, esto es l es el rango del grupo de Grothendieck $K_0(\Lambda)$. Fijamos un orden lineal $\leq$ sobre $[1,l]$ y notamos $(\Lambda, \leq)$ para indicar que consideramos Λ con el orden $\leq$.

Sea ${}_\Lambda P = \{{}_\Lambda P(i) : i \in [1,l]\}$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfismos de Λ-módulos proyectivos indescomponibles. La cápsula inyectiva del Λ-módulo simple ${}_\Lambda S(i) = \mathrm{top}({}_\Lambda P(i))$ es denotada por ${}_\Lambda I(i)$. Para el álgebra Λ^{op}, siempre consideramos el conjunto de representantes ${}_{\Lambda^{op}}P = \{{}_{\Lambda^{op}}P(i) : i \in [1,l]\}$ de Λ^{op}-módulos proyectivos indescomponibles, donde ${}_{\Lambda^{op}}P(i) = ({}_\Lambda P(i))^*$ para todo $i \in [1,l]$.

Ahora sí, teniendo en cuenta estas elecciones, podemos definir las siguientes clases de módulos.

Definición 1.9.1. *(a) El conjunto de los* Λ***-módulos estándar*** *es* ${}_\Lambda\Delta = \{{}_\Lambda\Delta(i) : i \in [1,l]\}$*, donde* ${}_\Lambda\Delta(i) = {}_\Lambda P(i)/\mathrm{tr}_{\oplus_{j>i}\,{}_\Lambda P(j)}\,({}_\Lambda P(i))$*. Entonces,* ${}_\Lambda\Delta(i)$ *es el mayor módulo cociente de* ${}_\Lambda P(i)$ *con factores de composición sólo entre los* ${}_\Lambda S(j)$ *con* $j \leq i$*.*

(b) El conjunto de los Λ***-módulos coestándar*** *es* ${}_\Lambda\nabla = D({}_{\Lambda^{op}}\Delta)$*, donde el par* $({}_{\Lambda^{op}}P, \leq)$ *es usado para calcular* ${}_{\Lambda^{op}}\Delta$*.*

(c) El conjunto de los Λ***-módulos propios estándar*** *es* ${}_\Lambda\overline{\Delta} = \{{}_\Lambda\overline{\Delta}(i) : i \in [1,l]\}$*, donde* ${}_\Lambda\overline{\Delta}(i) = {}_\Lambda P(i)/\mathrm{tr}_{\oplus_{j\geq i}\,{}_\Lambda P(j)}\,(\mathrm{rad}\,{}_\Lambda P(i))$*. Entonces,* ${}_\Lambda\overline{\Delta}(i)$ *es el mayor módulo cociente de* ${}_\Lambda\Delta(i)$ *que satisface la condición de multiplicidad* $[{}_\Lambda\overline{\Delta}(i) : S(i)] = 1$*.*

(d) El conjunto de los Λ***-módulos propios coestándar*** *es* ${}_\Lambda\overline{\nabla} = D({}_{\Lambda^{op}}\overline{\Delta})$*, donde el par* $({}_{\Lambda^{op}}P, \leq)$ *es usado para calcular* ${}_{\Lambda^{op}}\overline{\Delta}$*.*

El siguiente resultado recuerda algunos hechos homológicos básicos acerca de los módulos estándar y propios coestándar. Se puede ver una demostración de los mismos en [R] o en [DR].

Proposición 1.9.2. *Sea* Λ *un álgebra de artin y* $\leq$ *un orden lineal definido sobre* $[1,l]$*. Valen las siguientes afirmaciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Delta(i), {}_\Lambda\Delta(j)) = 0$ *para* $i > j$*.*

(b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda({}_\Lambda\Delta(i), {}_\Lambda\Delta(j)) = 0$ *para* $i \geq j$*.*

(c) $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\overline{\nabla}(i), {}_\Lambda\overline{\nabla}(j)) = 0$ *para* $i < j$.

(d) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda({}_\Lambda\overline{\nabla}(i), {}_\Lambda\overline{\nabla}(j)) = 0$ *para* $i < j$.

(e) $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Delta(i), {}_\Lambda\overline{\nabla}(j)) = 0$ *para* $i \neq j$.

(f) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda({}_\Lambda\Delta(i), {}_\Lambda\overline{\nabla}(j)) = 0$ *para todo* i, j.

Dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, notamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que contiene al módulo cero y a los Λ-módulos M que tienen una $\mathcal{C}$-filtración, esto es, un Λ-módulo no nulo M pertenece a $\mathcal{C}$ si existe una filtración $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_s = M$ con factores M_{i+1}/M_i isomorfos a un módulo en $\mathcal{C}$ para todo i. Entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ es la menor subcategoría en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que es cerrada por extensiones y contiene a $\mathcal{C}$.

Queremos mencionar algunas propiedades básicas de las categorías $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ y $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$. Para ello, recordemos antes los siguientes conceptos (ver [AR]).

Sea M un Λ-módulo. Dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, se dice que $f : C \to M$ es una **$\mathcal{C}$-aproximación a derecha de** M si $C \in \mathcal{C}$ y la aplicación $\mathrm{Hom}_\Lambda(C_1, f) : \mathrm{Hom}_\Lambda(C_1, C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C_1, M)$ es suryectiva para todo $C_1 \in \mathcal{C}$. Una **$\mathcal{C}$-aproximación minimal a derecha de** M es una $\mathcal{C}$-aproximación que es minimal a derecha. La noción de **$\mathcal{C}$-aproximación minimal a izquierda de** M se define dualmente. Para cada número natural n, ponemos ${}^{\perp_n}\mathcal{C} = \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) : \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M, -)|_\mathcal{C} = 0\}$ y ${}^\perp\mathcal{C} = \cap_{n>0}\, {}^{\perp_n}\mathcal{C}$. Las nociones de $\mathcal{C}^{\perp_n}$ y $\mathcal{C}^\perp$ son introducidas análogamente.

Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que es cerrada por isomorfismos y por sumandos directos. Se dice que $\mathcal{C}$ es **resolvente** si es cerrada por extensiones y por núcleos de epimorfismos, y $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{C}$. La subcategoría $\mathcal{C}$ es llamada **contravariantemente finita** en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, si todo $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tiene una $\mathcal{C}$-aproximación a derecha. Las nociones de subcategoría **coresolvente** y subcategoría **covariantemente finita** son definidas dualmente. Una subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que es contravariantemente finita y covariantemente finita es llamada **funtorialmente finita**.

La demostración de la siguiente proposición se puede completar a partir de resultados publicados en [AR, DR, R, ADL, AHLU].

Proposición 1.9.3. *Para* $(\Lambda, \leq)$ *valen las siguientes afirmaciones.*

(a) $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ *es una subcategoría resolvente y funtorialmente finita de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$ *es una subcategoría coresolvente y covariantemente finita de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(c) $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) = \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,-)|_{\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})} = 0\} = {}^{\perp_1}\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$.

(d) $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla}) = \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,M)|_{\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)} = 0\} = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1}$.

Antes de formular el teorema que establece la relación entre un álgebra quasi-hereditaria Λ y la subcategoría $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$, recordemos la definición de tales álgebras.

Definición 1.9.4. *Sea Λ un álgebra.*

(a) Se dice que un ideal L de Λ es un ***ideal hereditario*** *de Λ, si $L^2 = L$, $L(\mathrm{rad}\ \Lambda)L = 0$ y L, considerado como un Λ-módulo a izquierda ${}_\Lambda L$, es proyectivo.*

(b) Una ***cadena hereditaria*** *$\mathcal{H}$ de ideales de Λ es una cadena*

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_s = \Lambda$$

tal que L_i/L_{i-1} es un ideal hereditario de Λ/L_{i-1} para todo $1 \leq i \leq s$.

Definición 1.9.5. *Se dice que un álgebra Λ es* ***quasi-hereditaria*** *si admite una cadena hereditaria $\mathcal{H}$.*

Los ideales L_i son Λ-módulos proyectivos, por lo tanto $L_i = tr_{Q_i}(\Lambda)$ con Q_i proyectivo. Puede verse que una cadena hereditaria induce un orden $\leq$ en el conjunto de proyectivos indescomponibles de Λ, por lo que podemos considerar los módulos estándar correspondientes a este orden. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.9.6. *Si Λ es un álgebra quasi-hereditaria entonces, para Λ con el orden $\leq$ inducido por su cadena hereditaria, se verifica que ${}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ y que $\dim_K\ \mathrm{End}({}_\Lambda\Delta(i)) = 1$ para todo $i \in [1,l]$.*

Recíprocamente, si para $(\Lambda,\leq)$ se verifica que ${}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ y que $\dim_K\ \mathrm{End}({}_\Lambda\Delta(i)) = 1$ para todo $i \in [1,l]$, entonces Λ es un álgebra quasi-hereditaria.

El lector puede consultar la demostración del teorema anterior en [CPS] o en [DR].

1.10. Álgebras estándarmente estratificadas.

Las álgebras estándarmente estratificadas fueron originalmente definidas por Cline, Parshall y Scott en [CPS], y han sido extensamente estudiadas por distintos matemáticos (ver [D1], [ADL], [AHLU], [W], [ES], [PR], [Xi]).

Definición 1.10.1. *El álgebra Λ es un* ***álgebra estándarmente estratificada*** *con respecto al orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1, l]$, si* $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$. *Diremos que el par $(\Lambda, \leq)$ es* ***estándarmente estratificado****.*

Notemos que las álgebras estándarmente estratificadas generalizan a las álgebras quasi-hereditarias, que además verifican la condición de que $\dim_K \ \mathrm{End}({}_\Lambda\Delta(i)) = 1$ para todo $i \in [1, l]$. Esto nos permite decir que un álgebra estándarmente estratificada $(\Lambda, \leq)$ es quasi-hereditaria si y sólo si ${}_\Lambda\Delta(i) = {}_\Lambda\overline{\Delta}(i)$ para todo $i \in [1, l]$.

En contraste con la situación para álgebras quasi-hereditarias, si Λ es un álgebra estándarmente estratificada entonces Λ^{op} no necesariamente lo es. Sin embargo, la definición de Dlab de los módulos propios estándar permitió formular el siguiente resultado para álgebras estándarmente estratificadas (ver [D1] o [ADL]).

Proposición 1.10.2. *Para $(\Lambda, \leq)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) ${}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$, esto es, Λ es estándarmente estratificada.

(b) $\Lambda_\Lambda \in \mathcal{F}(\overline{\Delta}_\Lambda)$.

En [R], C. Ringel construyó un módulo inclinante generalizado T asociado a un álgebra quasi-hereditaria Λ, llamado **módulo inclinante característico**, y probó que el álgebra $\mathrm{End}_\Lambda(T)$, llamada 'dual de Ringel', es también un álgebra quasi-hereditaria.

Recordemos que T es llamado un módulo **inclinante generalizado** si:

- T tiene dimensión proyectiva finita,
- $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(T, T) = 0$ para todo $i > 0$, y
- existe una sucesión exacta $0 \to {}_\Lambda\Lambda \to T^0 \to T^1 \to ... \to T^m \to 0$ con $T^j \in \mathrm{add}(T)$ para todo j.

Generalizando los resultados de C. Ringel para álgebras quasi-hereditarias, en conexión con el estudio de las álgebras estándarmente estratificadas, I. Agoston, D. Happel, E. Lukács y L. Unger mostraron que, para un álgebra de este tipo $(\Lambda, \leq)$, también existe un módulo inclinante característico T, tal que $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla}) = T^\perp$ y tal que $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1}$ (ver Teorema 2.1 y Proposición 2.2 en [AHLU]; ver también [PR]).

En la siguiente proposición mostramos algunas propiedades del módulo inclinante característico de un álgebra estándarmente estratificada (ver [AHLU, Lema 2.5]).

Proposición 1.10.3. *Sea $(\Lambda, \leq)$ un álgebra estándarmente estratificada, con $\leq$ un orden lineal sobre el conjunto $[1, l]$, y $T = \bigoplus_{i=1}^{l} T(i)$ el módulo inclinante característico asociado a Λ, donde los sumandos $T(i)$ son indescomponibles. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) Para cada $1 \leq i \leq l$ existe una sucesión exacta

$$0 \to X(i) \to T(i) \to \overline{\nabla}(i) \to 0$$

con $X(i) \in \mathcal{F}(\{\overline{\nabla}(1), ..., \overline{\nabla}(i)\})$.

(b) Para cada $1 \leq i \leq l$ existe una sucesión exacta

$$0 \to \Delta(i) \to T(i) \to Y(i) \to 0$$

con $Y(i) \in \mathcal{F}(\{\Delta(1), ..., \Delta(i-1)\})$.

(c) $\mathrm{Hom}_\Lambda(T(i), \overline{\nabla}(j)) = 0$ *si* $i < j$ *y* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(T(i), \overline{\nabla}(i)) = 1$.

(d) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Delta(j), T(i)) = 0$ *si* $i < j$.

Además, en el Teorema 2.6 de [AHLU] se generaliza el concepto del 'dual de Ringel' $\mathrm{End}_\Lambda(T)$ para álgebras quasi-hereditarias a álgebras estándarmente estratificadas, probando que para el módulo inclinante característico T asociado al álgebra estándarmente estratificada Λ se verifica que $\mathrm{End}_\Lambda(T)$ es nuevamente un álgebra estándarmente estratificada (ver también [PR]).

Para terminar esta sección, recordamos que un álgebra Λ es un **álgebra propiamente estratificada** con respecto al orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1, l]$, si y sólo si su representación regular está filtrada por los módulos estándar y por los módulos propios estándar. Esto es, $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\Delta})$ (ver [D2]).

1.11. Sistemas estratificantes.

En esta sección consideramos Λ un álgebra de artin y $\leq$ un orden lineal sobre el conjunto $[1,t]$.

Erdmann y Sáenz extendieron la noción de módulos estándar y definieron a los sistemas estratificantes en 1.1 de [ES] de la siguiente manera.

Definición 1.11.1. *Sean $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos e $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos indescomponibles. El sistema $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un* ***sistema estratificante de talla*** *t, si valen las siguientes condiciones:*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *si $i > j$.*

(b) Para cada $i \in [1,t]$, existe una sucesión exacta

$$0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-, Y)|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$, *donde $Y = \bigoplus_{i=1}^t Y(i)$.*

Además, en [ES] probaron que para un sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ el álgebra $A = \mathrm{End}({}_\Lambda Y)$ es estándarmente estratificada.

Resulta de la definición que si $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante, entonces $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ si $i \geq j$. Esta propiedad juntamente con la propiedad (a) de la definición: $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ si $i > j$, caracteriza a los sistemas estratificantes, como resulta de la siguiente proposición, demostrada en [ES] y en [MMS1].

Proposición 1.11.2. *Sean $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos no nulos y $\leq$ un orden lineal sobre $[1,t]$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$, *si $i > j$, y* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$, *si $i \geq j$.*

(2) Existe un conjunto $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos indescomponibles tal que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante de talla t.

Además, si valen (1) y (2) entonces el conjunto $\underline{Y}$ está unívocamente determinado.

Debido a esto, en [MMS1] E. Marcos, O. Mendoza y C. Sáenz dieron la siguiente definición de sistema estratificante $(\Theta, \leq)$ de talla t, que depende sólo del conjunto $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$.

Definición 1.11.3. *Un* ***sistema estratificante*** $(\Theta, \leq)$ ***de talla*** t *está formado por un conjunto* $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ *de* Λ*-módulos indescomponibles y un orden lineal* $\leq$ *sobre el conjunto* $[1, t]$*, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *si* $i > j$.

(b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *si* $i \geq j$.

Esta última es la definición que utilizaremos en el resto de este trabajo cuando nos refiramos a sistema estratificante. También, para evitar confusiones, seguiremos a [MMS1], donde llaman **sistema estratificante Ext-inyectivo** a un sistema estratificante en el sentido de [ES]. Este nombre se basa en el hecho de que la familia $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ de (2) en la proposición anterior consiste precisamente de los módulos indescomponibles **Ext-inyectivos** de $\mathcal{F}(\Theta)$. Esto es, satisfacen que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-, Y(i))|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$ para todo $i \in [1, t]$.

Es interesante que un sistema estratificante $(\Theta, \leq)$ de talla t determine también una familia $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ de módulos indescomponibles **Ext-proyectivos** de $\mathcal{F}(\Theta)$ (esto es, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(i), -)|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$ para todo $i \in [1, t]$), de modo tal que $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-proyectivo, según la definición introducida por E. Marcos, O. Mendoza y C. Sáenz en [MMS2].

Definición 1.11.4. *Un* ***sistema estratificante Ext-proyectivo*** $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, consiste de dos familias de* Λ*-módulos* $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ *y* $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$*, con* $Q(i)$ *indescomponible para todo* i*, y un orden lineal* $\leq$ *sobre el conjunto* $[1, t]$*, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *si* $i > j$.

(b) Para cada $i \in [1, t]$*, existe una sucesión exacta*

$$\varepsilon_i : 0 \longrightarrow K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \longrightarrow 0,$$

con $K(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q, -)|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$*, donde* $Q = \bigoplus_{i=1}^t Q(i)$.

Utilizaremos la noción de sistema estratificante Ext-inyectivo (Ext-proyectivo, respectivamente) $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ $((\Theta, \underline{Q}, \leq)$, respectivamente) de talla t, cuando necesitemos explicitar que $\underline{Y}$ ($\underline{Q}$, respectivamente) es la familia de

Ext-inyectivos (Ext-proyectivos, respectivamente) asociada al sistema estratificante $(\Theta, \leq)$ de talla t.

Sean Λ un álgebra y l el rango del grupo de Grothendieck $K_0(\Lambda)$. Fijemos un orden lineal $\leq$ sobre $[1, l]$. Entonces los Λ-módulos estándar forman el **sistema estratificante canónico** $({}_\Lambda\Delta, \leq)$, y los Λ-módulos coestándar forman el **sistema estratificante cocanónico** $({}_\Lambda\nabla, \leq^{op})$. Ambos sistemas son de talla l.

Como mencionamos en la Sección 1.10, si $(\Lambda, \leq)$ es un álgebra estándarmente estratificada existe un Λ-módulo inclinante generalizado T, llamado módulo inclinante característico, tal que $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1}$. En este caso, se puede mostrar que T tiene una descomposición $T = \bigoplus_{i=1}^{l} T(i)$ en módulos indescomponibles tal que $({}_\Lambda\Delta, \underline{T}, \leq)$ es el sistema estratificante Ext-inyectivo asociado a $({}_\Lambda\Delta, \leq)$, donde $\underline{T} = \{T(i)\}_{i=1}^{l}$ (ver [MMS1]).

En la siguiente proposición recopilamos algunos resultados de [ES] y de [MMS1].

Proposición 1.11.5. *Sean $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante Ext-inyectivo de talla t y $A = \mathrm{End}({}_\Lambda Y)$, donde $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$. Si $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda Y_{A^{op}}) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(A)$ y $G = \mathrm{Hom}_A(-, {}_\Lambda Y_{A^{op}}) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) $\mathrm{add}(Y) = \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{F}(\Theta)^{\perp_1}$.

(b) $\mathcal{F}(\Theta)$ es es cerrada por sumandos directos.

(c) Los funtores $F_{|\mathcal{F}(\Theta)} : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_A\Delta)$ y $G_{|\mathcal{F}({}_A\Delta)} : \mathcal{F}({}_A\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ son dualidades inversas exactas.

(d) ${}_A\Delta(i) \simeq F(\Theta(i))$ para todo $i \in [1, t]$.

(e) El par $(A, \leq^{op})$ es estándarmente estratificado.

(f) Sea ${}_AT$ es el A-módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada A. Entonces, la categoría $\mathrm{add}({}_AT)$ es equivalente a la categoría $\mathcal{F}(\Theta) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Theta)$.

Dualmente, para los sistemas estratificantes Ext-proyectivos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.11.6. *([MMS2]) Sean* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un sistema estratificante Ext-proyectivo de talla* t *y* $B = \mathrm{End}({}_{\Lambda}Q)^{op}$*, donde* $Q = \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$*. Sean* F *el funtor* $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(Q, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(B)$ *y* G *el funtor* ${}_{\Lambda}Q_B \bigotimes - : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) $\mathrm{add}(Q) = \mathcal{F}(\Theta) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Theta)$.

(b) Los funtores $F_{|_{\mathcal{F}(\Theta)}} : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$ *y* $G_{|_{\mathcal{F}({}_B\Delta)}} : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ *son equivalencias inversas exactas.*

(c) ${}_B\Delta(i) \simeq F(\Theta(i))$ *para todo* $i \in [1, t]$.

(d) El par $(B, \leq)$ *es estándarmente estratificado.*

Capítulo 2

Módulos sobre anillos de endomorfismos.

Sea M un Λ-módulo básico. En este trabajo será de gran importancia la relación entre $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$, donde $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$. La primera parte de este capítulo está fundamentalmente dedicada al estudio de M considerado como módulo sobre $\mathrm{End}_\Lambda(M) = \Gamma^{op}$, de la manera natural. Describimos una familia de l sumandos M'_k de M en $\mathrm{mod}(\Gamma^{op})$, donde l es el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ, y estudiamos condiciones para que estos sumandos sean todos no nulos y para que sean indescomponibles no isomorfos dos a dos. Por ejemplo, probamos que lo primero ocurre si y sólo si M es sincero y que, cuando M es fielmente balanceado, entonces también se verifica lo segundo. Así, cuando M es un módulo inclinante básico, demostramos que los M'_k son precisamente los sumandos indescomponibles de ${}_{\Gamma^{op}}M$. También describimos los sumandos de ${}_{\Gamma^{op}}M$ en el caso en que todos los Λ-módulos proyectivos están en $\mathrm{add}(M)$, y cuando todos los Λ-módulos inyectivos están en dicha categoría. En particular, si M es un generador aditivo de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ los sumandos M'_k de ${}_{\Gamma^{op}}M$ son los módulos proyectivos inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos de $\mathrm{mod}(\Gamma^{op})$.

El estudio y desarrollo de este capítulo ha sido motivado por el Capítulo 4 de esta tesis. Como se menciona en el mismo, Erdmann y Sáenz probaron en [ES] que a partir de un sistema estratificante Θ se puede obtener un Λ-módulo M cuya álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ es estándarmente estratificada, de modo tal que la categoría de los módulos filtrados por Θ es equivalente a la categoría de los módulos filtrados por los módulos estándar sobre $\mathrm{End}_\Lambda(M)$. Motivados por esto, en el Capítulo 4 definimos y estudiamos la noción de sistema coestratificante propio. Uno de nuestros principales resultados establece que la categoría de los módulos filtrados por un sistema coestratificante propio es equivalente a la categoría de los módulos filtrados por los módulos propios estándar sobre cierta álgebra de endomorfismos cuya opuesta es estándarmente estratificada.

Las equivalencias arriba mencionadas se obtienen estudiando funtores de la forma $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $\overline{F} = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, M) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$ para un apropiado módulo M y tal que $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$. Con este fin comenzamos a trabajar con módulos sobre Γ^{op} y observamos que, ya en ejemplos sencillos, se tropieza con la necesidad de describir una serie de composición de un módulo M como Γ^{op}-módulo, conociendo la de M como Λ-módulo. Más precisamente, conocido el carcaj de Λ y sus relaciones, y dada la descripción de M por su representación, saber cuál es la representación asociada a M como módulo sobre Γ^{op}.

Por último, en este capítulo introducimos también los funtores $G = M \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\overline{G} = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(-, M) : \mathrm{mod}(\Gamma^{op}) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ que serán de gran utilidad en el Capítulo 6, y describimos las representaciones asociadas a $F(X)$ y $\overline{F}(X)$, para un Λ-módulo X, y las representaciones asociadas a $G(Y)$ y $\overline{G}(Y)$, para un Γ^{op}-módulo Y.

2.1. El Γ^{op}-módulo M.

En este capítulo Λ será una K-álgebra básica de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K, salvo mención explícita de lo contrario.

Sea M un módulo básico en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Comenzamos mostrando cómo obtener el carcaj ordinario de $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ y sus relaciones, a partir del conocimiento del carcaj de Auslander-Reiten de Λ (Proposición 2.1.4 y Observación 2.1.7).

Lema 2.1.1. *Sea Λ una K-álgebra básica de dimensión finita, $1 = e_1 + e_2 + ... + e_l$ una descomposición de 1 en una suma de idempotentes ortogonales primitivos. Sean $P_i = \Lambda e_i$, $S_i = P_i/rP_i$ para $i = 1, ..., l$, y $\omega : P_j \to rP_i$ un morfismo de Λ-módulos. Entonces $\mathrm{Im}(\omega) \nsubseteq r^2P_i$ si y sólo si el morfismo inducido $\omega : P_j \to P_i$ satisface $\omega \neq g \circ f$ con $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(P_j, Q)$, $g \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q, P_i)$ y Q proyectivo.*

Demostración. Sea $\omega : P_j \to rP_i$ un morfismo tal que $\mathrm{Im}\,(\omega) \nsubseteq r^2P_i$. Entonces es claro que $\omega : P_j \to P_i$ no es un isomorfismo. Por lo observado en 1.4.2, para un módulo proyectivo Q, si $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(P_j, Q)$ y $g \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q, P_i)$ entonces $\mathrm{Im}(f) \subseteq rQ$ e $\mathrm{Im}(g) \subseteq rP_i$, respectivamente. Luego, $(g \circ f)(P_j) \subseteq g(rQ) \subseteq r^2P_i$, de donde concluimos que $\omega \neq g \circ f$.
Ahora, supongamos que $\omega : P_j \to P_i$ no es un isomorfismo y que $\omega \neq g \circ f$ con $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(P_j, Q)$, $g \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q, P_i)$ y Q proyectivo. Probemos que

$\mathrm{Im}(\omega) \nsubseteq r^2P_i$. Sea $Q = P_0(rP_i)$ y $\pi : Q \to rP_i$ un epimorfismo. Entonces existe $\varphi : P_j \to Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P_j \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \arrow[d, "\omega"] \\ Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & rP_i. \end{tikzcd}$$

Como $\pi \in \mathrm{rad}(Q, P_i)$, tenemos que $\varphi \notin \mathrm{rad}(P_j, Q)$. Entonces, por la Observación 1.4.2, φ es un monomorfismo que se parte. Por lo tanto, $\mathrm{Im}(\varphi)$ es sumando directo de Q y es no nulo. Luego, $\pi(\mathrm{Im}(\varphi)) \nsubseteq r^2P_i$. Esto es, $\mathrm{Im}(\omega = \pi \circ \varphi) \nsubseteq r^2P_i$, como queríamos demostrar. $\square$

Lema 2.1.2. *Sea Λ una K-álgebra básica de dimensión finita, $1 = e_1 + e_2 + ... + e_l$ una descomposición de 1 en una suma de idempotentes ortogonales primitivos. Sean $P_i = \Lambda e_i$ y $S_i = P_i/rP_i$, para $i = 1, ..., l$. Sea Q_Λ el carcaj ordinario de Λ e i el vértice de Q_Λ correspondiente al Λ-módulo simple S_i. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existen al menos t flechas α del vértice i al vértice j en Q_Λ.

(b) La multiplicidad de S_j en rP_i/r^2P_i es mayor o igual que t.

(c) $\dim_K(\mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, rP_i/r^2P_i)) \geq t$.

(d) Existen $\omega_1, ..., \omega_t$ en $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)$ que no son isomorfismos, tales que si $\sum_{s=1}^{t} a_s\omega_s = g \circ f$ con $a_1, ..., a_t \in K$, $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(P_j, Q)$, $g \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q, P_i)$ con Q proyectivo, entonces $a_s = 0$ para todo $s = 1, ..., t$.

Demostración. Sabemos que el número de flechas α del vértice i al vértice j coincide con $\dim_K(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_i, S_j))$. Entonces, de la Proposición (1.14) en III de [ARS] sigue que las condiciones (a), (b) y (c) son equivalentes.
Si $\omega : P_j \to P_i$ es un morfismo que no es un isomorfismo, entonces $\mathrm{Im}(\omega) \subseteq rP_i$. En tal caso designaremos por $\overline{\omega}$ al morfismo inducido $P_j \to rP_i/r^2P_i$.
La equivalencia de (c) y (d) resulta de las siguientes observaciones.
Sean $\varphi_1, ..., \varphi_t \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, rP_i/r^2P_i)$ y $\omega_1, ..., \omega_t \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)$ tales que $\overline{\omega}_s = \varphi_s$ para todo $1 \leq s \leq t$. Si $a_1, ..., a_t \in K$, entonces $a_1\varphi_1 + ... + a_t\varphi_t = 0$ en $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, rP_i/r^2P_i)$, si y sólo si $\mathrm{Im}(a_1\omega_1 + ... + a_t\omega_t) \subseteq r^2P_i$. Por el Lema 2.1.1 sabemos que esta última condición equivale a decir que existen morfismos $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(P_j, Q)$, $g \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q, P_i)$ con Q proyectivo tales que $a_1\omega_1 + ... + a_t\omega_t = g \circ f$. $\square$

Observación 2.1.3. Sean A y B Λ-módulos tales que $B = \amalg_{j=1}^{m} B_j$. Si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : A \to \amalg_{j=1}^{m} B_j$ entonces: $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(A, B)$ si y sólo si $f_j \in \mathrm{rad}_\Lambda(A, B_j)$ para todo j. Más aún, si A y B_j son indescomponibles para todo j entonces $f \in \mathrm{rad}_\Lambda(A, B)$ si y sólo si f_j no es un isomorfismo para todo j (ver las Observaciones 1.4.2 y 1.4.3).

Proposición 2.1.4. *Sea Λ una K-álgebra básica de dimensión finita, l el número de simples no isomorfos de Λ y $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, donde los M_i son Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Sea $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ y $S_{\mathbf{i}}$ el Γ-módulo simple correspondiente al módulo proyectivo $P_{\mathbf{i}} = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M_i)$. Sea Q_Γ el carcaj ordinario de Γ e $\mathbf{i}$ el vértice de Q_Γ correspondiente al Γ-módulo simple $S_{\mathbf{i}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existen t flechas α del vértice $\mathbf{i}$ al vértice $\mathbf{j}$ en Q_Γ.

(b) Existen $f_1, ..., f_t \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_j, M_i)$ tales que, si $a_1, ..., a_t \in K$ no son todos nulos entonces $\sum_{s=1}^{t} a_s f_s \neq g \circ h$, con $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{pmatrix} : M_j \to \bigoplus_{k=1}^{r} M_{i_k}$, $g = (g_1 \ \cdots \ g_r) : \bigoplus_{k=1}^{r} M_{i_k} \to M_i$ donde $M_{i_k} \in \{M_1, ..., M_n\}$ y h_k, g_k son no isomorfismos para todo $k = 1, ..., r$.

Demostración. La proposición resulta del Lema 2.1.2 aplicado a los proyectivos $P_{\mathbf{i}} = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M_i)$, de la Observación 2.1.3 y la equivalencia de categorías $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{proj}(\Gamma)$. □

Observación 2.1.5. Resulta de la proposición anterior que existe una biyección entre el conjunto de flechas del vértice $\mathbf{i}$ al vértice $\mathbf{j}$ en Q_Γ y un conjunto maximal de morfismos de M_j en M_i satisfaciendo (b) de la Proposición 2.1.4. Esto es, morfismos que definen una base del espacio de 'los morfismos irreducibles en add(M)', o sea, de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_j, M_i)$ módulo los morfismos que se factorizan en add(M) en la forma $g \circ h$, donde g no es un epimorfismo que se parte y h no es un monomorfismo que se parte.

Recordemos que una **representación** X del carcaj Q_Λ está determinada por un conjunto de espacios vectoriales $X(k)$, para cada vértice k de Q_Λ, junto con transformaciones K-lineales $g_\beta : X(k) \to X(t)$, para cada flecha $\beta : k \to t$ de Q_Λ. Notaremos $X = (X(k), g_\beta)_{k=1}^{l}$, donde l es el número de simples no isomorfos de Λ y β recorre el conjunto de las flechas de Q_Λ.

Observación 2.1.6. Sabemos que, si $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$, entonces M es un módulo sobre $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ cuando se define

$$fm = f(m)$$

para $m \in M$ y $f \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$.

Ahora bien, dada una presentación $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ de Γ^{op}, estamos interesados en describir la representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a ${}_{\Gamma^{op}}M$.

Notemos que, a partir de la Observación 2.1.5 y de la Proposición 2.1.4 aplicada al álgebra $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$, resulta que existe una biyección entre el conjunto de flechas del vértice $\mathbf{i}$ al vértice $\mathbf{j}$ en $Q_{\Gamma^{op}}$ y un conjunto maximal de morfismos de M_i en M_j satisfaciendo (b) de la Proposición 2.1.4.

Designaremos por f_α al morfismo asociado a la flecha α bajo esta correspondencia. De esta manera, la familia $\{\overline{f}_\alpha : \alpha \in Q_{\Gamma^{op}}\}$ constituye una base de $\mathrm{rad}\Gamma^{op}/\mathrm{rad}^2\Gamma^{op}$, donde $f_\alpha : M_i \to M_j$ se considera como morfismo de M en M de la manera natural: $M \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{f_\alpha} M_j \xrightarrow{\iota_j} M$ (aquí hemos identificado $\mathrm{End}_{\Gamma^{op}}(\Gamma^{op})$ con Γ^{op} vía $\theta \mapsto \theta(id_M)$, dado que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \iota_i f_\alpha \pi_j)(id_M) = \iota_j f_\alpha \pi_i$). Luego, por el Teorema 1.9 del Capítulo III de [ARS], los f_α generan al álgebra Γ^{op}.

En lo que sigue, consideraremos la presentación correspondiente $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ de Γ^{op}. Si $X = (X(i), \varphi_\alpha)_{i=1}^{l}$ es una representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$, indicaremos ${}_{\Gamma^{op}}X$ al Γ^{op}-módulo correspondiente. Esto es, ${}_{\Gamma^{op}}X = \bigoplus_{i=1}^{l} X(i)$ con la estructura de Γ^{op}-módulo dada por

$$f_\alpha \star x_i = \varphi_\alpha(x_i),$$

para $x_i \in X(i)$ y $\alpha : \mathbf{i} \to \mathbf{j}$ en $Q_{\Gamma^{op}}$.

Observación 2.1.7. Para un camino $\gamma = \alpha_r ... \alpha_1$ en $Q_{\Gamma^{op}}$, definimos $f_\gamma = f_{\alpha_r} \circ ... \circ f_{\alpha_1}$. Entonces de la Proposición 2.1.4 resulta para $a_1, ..., a_t \in K$ y $\gamma_1, ..., \gamma_t$ en $Q_{\Gamma^{op}}$, que $\sum_{s=1}^{t} a_s \gamma_s \in I_{\Gamma^{op}}$ si y sólo si $\sum_{s=1}^{t} a_s \mathrm{Hom}_\Lambda(M, f_{\gamma_s}) = 0$ en Γ^{op}, si y sólo si $\sum_{s=1}^{t} a_s f_{\gamma_s} = 0$, utilizando la equivalencia de categorías $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{proj}(\Gamma)$.

El próximo teorema describe una familia de l sumandos directos M'_k del Γ^{op}-módulo M, donde l es el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ.

Antes de enunciarlo, observemos que al morfismo $f_\alpha : M_i \to M_j$ correspondiente a la flecha α del vértice $\mathbf{i}$ al vértice $\mathbf{j}$ en $Q_{\Gamma^{op}}$, le podemos asociar una familia de morfismos $\{f_\alpha(k) : M_i(k) \to M_j(k)\}_{k=1}^l$, donde l es el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ. En efecto, como $M_i(k) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M_i)$ y $M_j(k) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M_j)$ son los espacios vectoriales asociados al vértice k de la representación asociada a M_i y M_j, respectivamente, entonces se define $f_\alpha(k)(\varphi) = f_\alpha \circ \varphi$ para cada $\varphi \in M_i(k)$.

Teorema 2.1.8. *Sea Λ una K-álgebra básica de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K, ${}_\Lambda M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, donde los M_i son Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Sea $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ la presentación de $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ definida en 2.1.6 y sea $M_i(k) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M_i)$ el espacio vectorial asociado al vértice k de la representación asociada a ${}_\Lambda M_i$. Entonces la representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a M es $(M_i, f_\alpha)_{i=1}^n$. Además, tenemos que $M'_k = (M_i(k), f_\alpha(k))_{i=1}^n$ es una representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ y ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^l {}_{\Gamma^{op}}M'_k$.*

Demostración.

Sabemos que M tiene una estructura de Γ^{op}-módulo. Denotemos por $\bullet$ a la operación que la define. Esto es, $f \bullet m = f(m)$ para $f \in \Gamma^{op}$ y $m \in M$. Por otro lado, notemos por $\star$ a la operación que define la estructura de Γ^{op}-módulo de $(M_i, f_\alpha)_{i=1}^n$.

Veamos ahora que la representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a M es $(M_i, f_\alpha)_{i=1}^n$. En efecto, el módulo asociado a $(M_i, f_\alpha)_{i=1}^n$ es $\bigoplus_{i=1}^n M_i = M$. Entonces sólo nos resta probar que su estructura $\star$ de Γ^{op}-módulo coincide con la de M. Para ello debemos probar que para cada $m \in M$ y cada $f \in \Gamma^{op}$ se verifica que $f \bullet m = f \star m$. Esto es, $f(m) = f \star m$. Como ${}_\Lambda M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, basta probar que para cada $m_s \in M_s$ y cada $f \in \Gamma^{op}$ se verifica que $f(m_s) = f \star m_s$. Por la Observación 2.1.6 sabemos que los f_α generan al álgebra Γ^{op}. Luego, basta probar que para cada $m_s \in M_s$ y cada $f_\alpha : M_s \to M_r$, donde $\alpha : \mathbf{s} \to \mathbf{r}$ es una flecha en $Q_{\Gamma^{op}}$, se cumple que $f_\alpha(m_s) = f_\alpha \star m_s$, y esto vale por lo observado en 2.1.6.

Ahora bien, de la Observación 2.1.7 resulta que $M'_k = (M_i(k), f_\alpha(k))_{i=1}^n$ es una representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$. Además, se verifica que

$$\bigoplus_{k=1}^l M'_k = (\bigoplus_{k=1}^l M_i(k), \bigoplus_{k=1}^l f_\alpha(k))_{i=1}^n = (M_i, f_\alpha)_{i=1}^n = M,$$

lo que completa la demostración del teorema. $\square$

Observación 2.1.9. Sea M un Λ-módulo tal que ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^{l} {}_{\Gamma^{op}}M'_k$, con las notaciones de 2.1.8. Entonces ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M)$. En efecto, ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \simeq \oplus_{i=1}^{n} M_i(k) \simeq \oplus_{i=1}^{n}\mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M_i) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M) \simeq e_k M$.

Ejemplo 2.1.10. Sea Λ el álgebra de caminos del carcaj

$$Q_\Lambda : \quad \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ},$$

y consideremos el Λ-módulo $M = \bigoplus_{i=1}^{3} M_i$, con $M_1 = 3$, $M_2 = 1$ y $M_3 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$, donde los módulos se describen por sus factores de composición. En este caso, el álgebra $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ está dada por el carcaj

$$Q_{\Gamma^{op}} : \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\mu} \underset{2}{\circ}$$

con la relación $\mu\varepsilon = 0$. Aquí la flecha ε corresponde a la inclusión ι de M_1 en M_3, y μ al epimorfismo π de M_3 en M_2 con núcleo $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$, que satisfacen $\pi \circ \iota = 0$.

Luego

$${}_{\Gamma^{op}}\Gamma^{op} = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}.$$

Ahora, queremos describir a M como Γ^{op}-módulo. Sabemos que

$${}_\Lambda M = \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}.$$

En el siguiente diagrama las filas representan a los sumandos de ${}_\Lambda M$, y las flechas verticales corresponden a los morfismos entre los M_i's que dan lugar a las flechas ε y μ del carcaj de Γ^{op}.

$$\begin{tikzcd}
{}_\Lambda M_1 : 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d, "1"'] \\
{}_\Lambda M_3 : K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & K \arrow[r, "1"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\
{}_\Lambda M_2 : K \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Aquí, las columnas representan a los sumandos de ${}_{\Gamma^{op}}M$. Esto es

$${}_{\Gamma^{op}}M = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}.$$

En este caso, dichos sumandos son indescomponibles.

En el siguiente ejemplo mostramos que no siempre los sumandos que aparecen en la descripción de M como Γ^{op}-módulo son indescomponibles.

Ejemplo 2.1.11. Sea Λ el álgebra de caminos del carcaj de Kronecker

$$Q_\Lambda : \qquad \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd}$$

(ver Sección 1.5 en los Preliminares), y consideremos el Λ-módulo $M = M_1 \oplus M_2$, donde $M_1 = 2$ y $M_2 = {}_2{}^1{}_2{}^1{}_2$. En este caso, el álgebra $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ está dada por el carcaj

$$Q_{\Gamma^{op}} : \qquad \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd} \qquad .$$

Sabemos que

$${}_\Lambda M = 2 \oplus {}_2{}^1{}_2{}^1{}_2,$$

y queremos describir a M como Γ^{op}-módulo.
En el siguiente diagrama las filas representan a los sumandos de ${}_\Lambda M$, y las flechas verticales corresponden a los morfismos entre los M_i's que dan lugar a las flechas del carcaj de Γ^{op}.

$$\begin{tikzcd} {}_\Lambda M_1 : & 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & K \arrow[d, shift right=3, "\iota_1"'] \arrow[d, "\iota_2"] \arrow[d, shift left=3, "\iota_3"] \\ {}_\Lambda M_2 : & K^2 \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & K^3 \end{tikzcd}$$

donde $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y las aplicaciones ι_j son las inclusiones en la j-ésima coordenada para $j = 1, 2, 3$. Aquí, las columnas representan a los sumandos de ${}_{\Gamma^{op}}M$. Esto es

$${}_{\Gamma^{op}}M = (2 \oplus 2) \oplus {}_2\,{}^1_2\,{}_2\,.$$

En este caso, resulta que el primer sumando ${}_{\Gamma^{op}}M_1 = 2 \oplus 2$ no es indescomponible.

Del Teorema 2.1.8 surgen diversas preguntas, entre ellas: ¿cuándo son todos los M'_k módulos indescomponibles?, ¿cuándo son todos no nulos?, ¿cuándo son no isomorfos dos a dos? Recordemos a continuación algunos conceptos necesarios para responder a las cuestiones anteriores. El lector puede consultar más sobre los mismos en [AF] y en [ASS].

Sean S y T anillos. Para un bimódulo ${}_SM_T$ se tienen los homomorfismos canónicos de anillos

$$\lambda : S \to \mathrm{End}_{T^{op}}(M_T) \text{ y } \rho : T \to \mathrm{End}_S({}_SM)$$

tales que para $s \in S$, $m \in M$ y $t \in T$

$$\lambda(s) : m \mapsto sm \text{ y } \rho(t) : m \mapsto mt.$$

Se dice que ${}_SM$ (respectivamente, M_T) es **fiel** si y sólo si λ (respectivamente, ρ) es inyectivo. Esto equivale a decir que el anulador $\mathrm{Ann}({}_SM) = \{s \in S : sM = 0\}$ es nulo (respectivamente, el anulador $\mathrm{Ann}(M_T) = \{t \in T : Mt = 0\}$ es nulo). Si λ y ρ son ambos epiyectivos decimos que ${}_SM_T$ es un **bimódulo balanceado**. Si λ y ρ son isomorfismos, entonces ${}_SM_T$ es llamado un **bimódulo fielmente balanceado**.

En lo que sigue vamos a necesitar la siguiente definición.

Definición 2.1.12. *Un Λ-módulo M se dice* ***sincero*** *si cada Λ-módulo simple es un factor de composición de M.*

Ahora recordamos una caracterización de los módulos sinceros.

Proposición 2.1.13. *Sea M un Λ-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) M es sincero.

(b) Para todo Λ-módulo proyectivo $P \neq 0$, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) \neq 0$.

(c) Para todo Λ-módulo inyectivo $I \neq 0$, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I) \neq 0$.

De este modo, todo módulo fiel es sincero. Observemos que la recíproca no vale. En efecto, si Λ es el álgebra de caminos del carcaj

$$Q_\Lambda : \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\circ}$$

y consideramos el Λ-módulo $M = 1 \oplus 2$, entonces M es sincero pero no es fiel, ya que $\alpha M = 0$.

Proposición 2.1.14. *Sean* ${}_\Lambda M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$*, donde los* M_i *son* Λ*-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos,* l *el número de simples no isomorfos dos a dos de* Λ *y* ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^l M'_k$ *la descomposición del Teorema 2.1.8. Entonces:*

(a) ${}_\Lambda M$ *es sincero si y sólo si,* ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \neq 0$ *para todo* $k = 1, ..., l$.

(b) Si ${}_\Lambda M_\Gamma$ *es fielmente balanceado, entonces los* Γ^{op}*-módulos* M'_k *son indescomponibles y no isomorfos dos a dos.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.8, sabemos que $M'_k = (M_i(k), f_\alpha(k))_{i=1}^n$ es una representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ y que ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^l {}_{\Gamma^{op}}M'_k$.

(a) Supongamos que M es sincero y que existe $s \in \{1, ..., l\}$ tal que $M'_s = 0$. Entonces $M_i(s) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Esto es, $0 = e_s M = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_s, M)$, lo que contradice la sinceridad de M. Luego, ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \neq 0$ para todo $k = 1, ..., l$.
Ahora supongamos que ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \neq 0$ para todo $k = 1, ..., l$. Entonces, para cada $k = 1, ..., l$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $M_i(k) \neq 0$. Esto es, para cada $k = 1, ..., l$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M_i) \neq 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M) \neq 0$ para todo $k = 1, ..., l$, lo que prueba que M es sincero.

(b) A continuación, asumamos que ${}_\Lambda M_\Gamma$ es fielmente balanceado. En particular, ${}_\Lambda M$ es fiel. Luego, M es un Λ-módulo sincero y entonces, por (a), ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \neq 0$ para todo $k = 1, ..., l$. También por hipótesis sabemos que $\Lambda \simeq \mathrm{End}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M)$. De aquí, como Λ es básica obtenemos que, en realidad, ${}_{\Gamma^{op}}M$ es suma de l módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Esto se obtiene utilizando la equivalencia de categorías entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$ inducida por el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$. $\square$

Ejemplo 2.1.15. El siguiente ejemplo muestra que el hecho de que un Λ-módulo sea fiel, no garantiza que en la descomposición del mismo como suma directa de Γ^{op}-módulos, todos los sumandos sean no isomorfos dos a dos.
Sea Λ el álgebra de caminos del carcaj

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underset{l}{\circ}$$

y ${}_\Lambda M = {}_\Lambda P_1$. Entonces M es un Λ-módulo fiel y, como $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op} \simeq K$, tenemos que ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq K^l$.

Ejemplo 2.1.16. En el Ejemplo 2.1.10 vimos que ${}_{\Gamma^{op}}M = {}^{3}_{2} \oplus {}_{3} \oplus {}^{1}_{3}$. En este caso $\Lambda \not\simeq \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}M)$. Esto es, ${}_{\Lambda}M$ no es fielmente balanceado. Por lo tanto, este ejemplo muestra que no vale la recíproca de la Proposición 2.1.14 (b).

Recordemos ahora el siguiente concepto (ver [As]).

Definición 2.1.17. *Se dice que un Λ-módulo T es* ***inclinante****, si satisface las siguientes condiciones.*

(a) La dimensión proyectiva de T es menor o igual que 1.

(b) $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(T, T) = 0$.

(c) Existe una sucesión exacta $0 \to \Lambda \to T' \to T'' \to 0$ con $T', T'' \in \mathrm{add}(T)$.

Sea T un módulo inclinante básico. Entonces sabemos que T es fielmente balanceado y, como corolario de la Proposición 2.1.14, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.18. *Si ${}_{\Lambda}T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ es un módulo inclinante básico, entonces en la descomposición ${}_{\Gamma^{op}}T = \bigoplus_{k=1}^{n} T'_k$ dada en el Teorema 2.1.8, todos los T'_k son indescomponibles y no isomorfos dos a dos.*

Con métodos muy diferentes se calculan en la Sección 6 del Capítulo VI de [ASS] los factores de descomposición de los sumandos indescomponibles de ${}_{\Gamma^{op}}T$.

En lo que resta de la sección, para M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ consideraremos el álgebra de artin $\Gamma = \mathrm{End}({}_{\Lambda}M)^{op}$ y los funtores $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, M) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$, y notaremos por D a la dualidad usual para álgebras de artin. Sabemos que los funtores $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, -)$ y $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, M)$ inducen, por restricción, una equivalencia entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$ y una dualidad entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma^{op})$, respectivamente.

A continuación damos una descripción de los Γ-módulos proyectivos inyectivos, cuando todos los Λ-módulos inyectivos están en $\mathrm{add}(M)$.

Proposición 2.1.19. *Sea M un Λ-módulo tal que $D(\Lambda) \in \mathrm{add}(M)$ y sea $\Gamma = \mathrm{End}_{\Lambda}(M)^{op}$. Si P es un Γ-módulo proyectivo inyectivo, entonces $P \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, I)$ para algún Λ-módulo inyectivo I.*

Demostración. Como P es proyectivo sobre Γ, existe un módulo X en $\mathrm{add}(M)$ tal que $P \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X)$. Sea $j : X \to I$ una cápsula inyectiva de X. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(M,j)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, I),$$

donde $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, X)$ es inyectivo ya que, por hipótesis, P lo es. Luego $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, j)$ se parte, esto es, existe $t : \mathrm{Hom}_\Lambda(M, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X)$ tal que $t \circ \mathrm{Hom}_\Lambda(M, j) = id_{\mathrm{Hom}_\Lambda(M,X)}$. Entonces, como $I, X \in \mathrm{add}(M)$ y el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)|_{\mathrm{add}(M)}$ es lleno, existe $h : I \to X$ tal que $t = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, h)$. Luego, como el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)|_{\mathrm{add}(M)}$ es fiel se tiene que $id_X = h \circ j$. Por lo tanto, j se parte y es un isomorfismo, de donde se concluye que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, j)$ también es un isomorfismo. Este último razonamiento completa la prueba de la proposición. □

Antes de hacer la siguiente observación recordemos que un álgebra de artin Λ se dice **autoinyectiva** si es inyectiva y proyectiva como Λ-módulo. En la Sección 3 del Capítulo IV de [ARS] se prueba que el hecho de que Λ sea autoinyectiva equivale a que un Λ-módulo es proyectivo si y sólo si es inyectivo.

Observación 2.1.20. Notemos que si I es un Λ-módulo inyectivo, no siempre $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I)$ es un Γ-módulo inyectivo, aún asumiendo que I está en $\mathrm{add}(M)$. En efecto, consideremos ${}_\Lambda M = D(\Lambda)$ y l el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ. Entonces sabemos que, para todo $k = 1, ..., l$, los módulos $\mathrm{Hom}_\Lambda(D(\Lambda), I_k)$ son proyectivos sobre $\Gamma = \mathrm{End}(D(\Lambda))^{op} \simeq \Lambda$. Luego, si estos módulos fueran todos inyectivos tendría que ser necesariamente Λ un álgebra autoinyectiva.

Ahora probemos el siguiente lema que será de gran utilidad en la Proposición 2.1.22.

Lema 2.1.21. *Sean M un Λ-módulo y l el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ. Entonces para todo i tal que $1 \leq i \leq l$, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, M) \simeq D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_i)$.*

Demostración. Sea i tal que $1 \leq i \leq l$. Entonces:

$$D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_i) = D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, D(e_i\Lambda)) \simeq D\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(e_i\Lambda, DM) \simeq$$
$$\simeq D((DM)e_i) \simeq e_i(D^2M) \simeq e_iM \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e_i, M) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, M).$$

□

Recordemos que, por el Teorema 2.1.8, para ${}_{\Lambda}M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ con los M_i Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, se tiene que $M'_k = (M_i(k), f_\alpha(k))_{i=1}^{n}$ es una representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ y que ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^{l} {}_{\Gamma^{op}}M'_k$, donde l es el número de simples no isomorfos dos a dos de Λ.

Proposición 2.1.22. *Sea M un Λ-módulo tal que ${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^{l} {}_{\Gamma^{op}}M'_k$, con las notaciones de 2.1.8.*

(a) Si ${}_{\Lambda}\Lambda \in \mathrm{add}(M)$, entonces todos los Γ^{op}-módulos M'_k son proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos. En particular, ${}_{\Gamma^{op}}M$ es proyectivo.

(b) Si $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathrm{add}(M)$, entonces ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \simeq D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_k)$ para todo k. Luego, todos los Γ^{op}-módulos M'_k son inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos. En particular, ${}_{\Gamma^{op}}M$ es inyectivo.

Demostración. Por la Observación 2.1.9 y el Lema 2.1.21, sabemos que ${}_{\Gamma^{op}}M'_k \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M) \simeq D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_k)$, para todo $k = 1, ..., l$.
Supongamos ahora que ${}_{\Lambda}\Lambda \in \mathrm{add}(M)$. Esto es, todos los Λ-módulos proyectivos están en $\mathrm{add}(M)$. Luego, de la dualidad entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma^{op})$, sigue que los Γ^{op}-módulos $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_k, M)$ son proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos.
Por otra parte, si suponemos que $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathrm{add}(M)$, de la equivalencia entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$, sigue que los Γ-módulos $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_k)$ son proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Esto es, los Γ^{op}-módulos $D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_k)$ son inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos. □

Recordamos, a continuación, la definición de generador aditivo de Λ, para Λ un álgebra de artin. Para un estudio más detallado de esta clase de módulos recomendamos la Sección 5 del Capítulo VI de [ARS].

Definición 2.1.23. *Se dice que un Λ-módulo M es un **generador aditivo** de Λ si $\mathrm{add}(M) = \mathrm{mod}(\Lambda)$.*

Observación 2.1.24. Es claro que un módulo M es un generador aditivo de Λ si y sólo si cada Λ-módulo indescomponible es isomorfo a un sumando de M. Luego, Λ es de tipo de representación finito si y sólo si Λ tiene un generador aditivo.

Si Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finito, utilizando la Proposición 2.1.22 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.25. *Sea M un generador aditivo de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces en la descomposición ${}_{\Gamma^{op}}M = \bigoplus_{k=1}^{l} M'_k$ de 2.1.8, los Γ^{op}-módulos M'_k son los proyectivos inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos de* $\mathrm{mod}(\Gamma^{op})$.

Demostración. Como M es un generador aditivo de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, sabemos que $D(\Lambda) \in \mathrm{add}(M)$ y $\Lambda \in \mathrm{add}(M)$. Luego, de la Proposición 2.1.22 sigue que los Γ^{op}-módulos M'_k son proyectivos inyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Ahora supongamos que N es un Γ^{op}-módulo proyectivo inyectivo indescomponible. Luego, $D(N)$ es un Γ-módulo proyectivo inyectivo indescomponible y, por la Proposición 2.1.19, $D(N) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M, I)$ para algún Λ-módulo inyectivo indescomponible I. Por lo tanto, $N \simeq D\mathrm{Hom}_\Lambda(M, I) \simeq M'_k$ para algún $1 \leq k \leq l$, por (a) de la Proposición 2.1.22, lo que completa la demostración del corolario. $\square$

Observemos que en este caso, como Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finito y M es un generador aditivo básico de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, si Λ no es semisimple $\Gamma_M = \mathrm{End}({}_\Lambda M)^{op}$ es el álgebra de Auslander de Λ. (ver Proposición 5.4 del Capítulo VI de [ARS]).

Ejemplo 2.1.26. Sea Λ el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{\circ}{3} \\
\overset{\circ}{1} \arrow[r, "\alpha"] & \overset{\circ}{2} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\
 & & \overset{\circ}{4}
\end{tikzcd}$$

con las relaciones $\beta\alpha = 0$ y $\gamma\alpha = 0$. En este caso el carcaj de Auslander-Reiten de Λ está dado por

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
3 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
& \begin{smallmatrix}&2&\\3&&4\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2 \arrow[ur] & & 1\,. \\
4 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Consideremos a M como la suma directa de todos los Λ-módulos indescomponibles. Luego M es un generador aditivo de $\operatorname{mod}(\Lambda)$ y, según el carcaj anterior, $M = \bigoplus_{i=1}^{8} M_i$, donde $M_1 = 3$, $M_2 = 4$, $M_3 = \begin{smallmatrix}&2&\\3&&4\end{smallmatrix}$, $M_4 = \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}$, $M_5 = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$, $M_6 = 2$, $M_7 = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ y $M_8 = 1$.

En este caso, el álgebra $\Gamma^{op} = \operatorname{End}_\Lambda(M)$ está dada por el carcaj

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\overset{\circ}{1} \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \overset{\circ}{4} \arrow[dr, "\nu"] & & \overset{\circ}{7} \arrow[dr, "\xi"] & \\
& \overset{\circ}{3} \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \overset{\circ}{6} \arrow[ur, "\rho"] & & \overset{\circ}{8} \\
\overset{\circ}{2} \arrow[ur, "\delta"'] & & \overset{\circ}{5} \arrow[ur, "\omega"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

con las relaciones $\eta\varepsilon = 0$, $\mu\delta = 0$, $\xi\rho = 0$ y $\nu\eta = \omega\mu$. Los módulos indescomponibles proyectivos inyectivos sobre Γ^{op} son:

$$P_7 = I_8 = \begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix},\ P_3 = I_7 = \begin{smallmatrix}&3&\\4&&5\\&6&\\&7&\end{smallmatrix},\ P_1 = I_5 = \begin{smallmatrix}1\\3\\5\end{smallmatrix} \text{ y } P_2 = I_4 = \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix}.$$

Entonces, según el Corolario 2.1.25,

$${}_{\Gamma^{op}}M = \begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\4&&5\\&6&\\&7&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\\5\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix}.$$

El siguiente ejemplo muestra que si el Λ-módulo M sólo cumple la condición de que todos los inyectivos de Λ están en la categoría $\operatorname{add}(M)$, entonces los sumandos de M como Γ^{op}-módulo son inyectivos pero no necesariamente proyectivos.

Ejemplo 2.1.27. Sea Λ un álgebra de artin no autoinyectiva. Consideremos el módulo ${}_\Lambda M = D(\Lambda_\Lambda)$. Luego, ${}_{\Lambda^{op}}M = D({}_\Lambda\Lambda)$ y $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M) \simeq \Lambda^{op}$. En este caso, como Λ no es un álgebra autoinyectiva, es claro que los sumandos de ${}_{\Gamma^{op}}M$ son módulos inyectivos pero no son todos proyectivos.

2.2. Algunas representaciones especiales.

Sea Λ una K-álgebra básica de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K, l el número de simples no isomorfos de Λ y $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, donde los M_i son Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos.

En esta sección, para $\Gamma = \mathrm{End}({}_\Lambda M)^{op}$, consideraremos los funtores

$$\mathrm{mod}(\Lambda) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}(\Gamma),$$

donde $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ y $G = M \otimes_\Gamma -$, así como los funtores

$$\mathrm{mod}(\Lambda) \underset{\overline{G}}{\overset{\overline{F}}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}(\Gamma^{op}),$$

donde $\overline{F} = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ y $\overline{G} = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(-, M)$.

Notemos que, por [CE] p. 120, tenemos que

$$G = M \otimes_\Gamma - \simeq D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M, D-) \simeq D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M, -)D.$$

Entonces, consideraremos el funtor $H = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M, -)$.

Nuestro objetivo en esta sección es describir, dado un Λ-módulo X, las representaciones asociadas a $F(X)$ y $\overline{F}(X)$ como módulos sobre Γ y Γ^{op}, respectivamente, y también dar una descripción, para un Γ^{op}-módulo Y, de las representaciones asociadas a $H(Y)$ y $\overline{G}(Y)$ como módulos sobre Λ^{op} y Λ, respectivamente. Por último, utilizando H y el isomorfismo $G \simeq D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M, -)D$, describiremos para un Γ-módulo Z, la representación asociada al Λ-módulo $G(Z)$.

Sabemos que F y G definen equivalencias inversas entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$, y $\overline{F}$ y $\overline{G}$ dualidades inversas entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma^{op})$. La siguiente proposición extiende este resultado y nos será muy útil en lo que sigue.

Proposición 2.2.1. *Sean* $M' \in \mathrm{add}(M)$*,* $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *e* $Y \in \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$*. Entonces:*

(a) $\mathrm{Hom}_\Gamma(F({}_\Lambda M'), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M', X)$*.*

(b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}M'), \overline{G}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M')$*.*

(c) $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\overline{F}({}_\Lambda M'), \overline{F}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(X, {}_\Lambda M')$*.*

(d) $\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(H({}_{\Gamma^{op}}M'), H(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M', Y)$*.*

Para probar 2.2.1 precisamos el siguiente resultado en el que se tiene la hipótesis adicional de que el Λ-módulo X y el Γ^{op}-módulo Y están generados por M, en un caso, y están cogenerados por M, en el otro.

En la demostración de este lema utilizaremos la categoría C_0^M, formada por los módulos X que admiten una sucesión exacta $M_0 \to X \to 0$ con $M_0 \in \mathrm{add}(M)$, y tal que la sucesión inducida $F(M_0) \to F(X) \to 0$ es exacta, y la categoría definida dualmente, $C_0^{\vee M}$ (ver la Sección 1.8 del Capítulo de Preliminares).

Lema 2.2.2. *Sean* $M' \in \mathrm{add}(M)$*,* $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *e* $Y \in \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$*.*

(a) Si $X \in \mathrm{Gen}({}_\Lambda M)$*, entonces* $\mathrm{Hom}_\Gamma(F({}_\Lambda M'), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M', X)$*.*

(b) Si $Y \in \mathrm{Cogen}({}_{\Gamma^{op}}M)$*, entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}M'), \overline{G}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M')$*.*

(c) Si $X \in \mathrm{Cogen}({}_\Lambda M)$*, entonces* $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\overline{F}({}_\Lambda M'), \overline{F}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(X, {}_\Lambda M')$*.*

(d) Si $Y \in \mathrm{Gen}({}_{\Gamma^{op}}M)$*, entonces* $\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(H({}_{\Gamma^{op}}M'), H(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M', Y)$*.*

Demostración. Sean $M' \in \mathrm{add}(M)$ y $X \in \mathrm{Gen}({}_\Lambda M)$. Probemos que la aplicación $F_{M',X} : \mathrm{Hom}_\Lambda(M', X) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(F(M'), F(X))$, inducida por F, es un isomorfismo. Como $\mathrm{Gen}({}_\Lambda M) = C_0^M$, existe un epimorfismo $f : M^r \to X$ tal que $F(f) : F(M^r) \to F(X)$ también es un epimorfismo. Como $F(M')$ es Γ-proyectivo, dado $\omega : F(M') \to F(X)$ existe $\varphi : F(M') \to F(M^r)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & F(M') \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \arrow[d, "\omega"] \\ F(M^r) \arrow[r, two heads, "F(f)"] & F(X). \end{tikzcd}$$

Pero $M', M^r \in \operatorname{add}(M)$ y sabemos que F induce una equivalencia entre $\operatorname{add}(M)$ y $\operatorname{proj}(\Gamma)$. Luego, existe un morfismo $g : M' \to M^r$ tal que $F(g) = \varphi$. Así hemos probado que, dado $\omega : F(M') \to F(X)$ existe $h = f \circ g$ tal que $F(h) = \omega$, lo que demuestra que $F_{M',X}$ es epiyectiva. Veamos que es inyectiva. Sea $t : M' \to X$ tal que $F_{M',X}(t) = 0 : F(M') \to F(X)$. Entonces la aplicación $\operatorname{Hom}_\Lambda(M^s, M') \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M^s, X)$ es nula para todo $s \in \mathbb{N}$. Como $M' \in \operatorname{add}(M)$, dado r existe $M'' \in \operatorname{add}(M)$ tal que $M' \oplus M'' \simeq M^r$. Sea $\pi : M^r \to M'$ la proyección canónica. Luego, $t \circ \pi = 0$ y, como π es un epimorfismo, $t = 0$. Esto completa la demostración de (a).

A continuación, probemos (b). Sea $Y \in \operatorname{Cogen}({}_{\Gamma^{op}}M) = C_0^{\vee M}$ y mostremos que la aplicación $\overline{G}_{M',Y} : \operatorname{Hom}_\Lambda(Y, M') \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\overline{G}(M'), \overline{G}(Y))$, inducida por $\overline{G}$, es un isomorfismo. Como $\operatorname{Cogen}({}_{\Gamma^{op}}M) = C_0^{\vee M}$, existe un monomorfismo $f : Y \to M^r$ tal que $\overline{G}(f) : \overline{G}(M^r) \to \overline{G}(Y)$ es un epimorfismo. Por otra parte, de ${}_{\Gamma^{op}}M' \in \operatorname{add}(M)$, sigue que $\overline{G}(M')$ es $\operatorname{End}_{\Gamma^{op}}(M)$-proyectivo. Entonces, dado $\omega : \overline{G}(M') \to \overline{G}(Y)$ existe $\varphi : \overline{G}(M') \to \overline{G}(M^r)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \overline{G}(M') \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \arrow[d, "\omega"] \\ \overline{G}(M^r) \arrow[r, two heads, "\overline{G}(f)"] & \overline{G}(Y). \end{tikzcd}$$

Como ${}_{\Gamma^{op}}M', {}_{\Gamma^{op}}M^r \in \operatorname{add}(M)$ y el funtor $\operatorname{Hom}_{\Gamma^{op}}(-, M)$ induce una equivalencia entre $\operatorname{add}({}_{\Gamma^{op}}M)$ y $\operatorname{proj}(\operatorname{End}_{\Gamma^{op}}(M))$, entonces existe un morfismo $g : {}_{\Gamma^{op}}M^r \to {}_{\Gamma^{op}}M'$ tal que $\overline{G}(g) = \varphi$. Esto prueba que, dado $\omega : \overline{G}(M') \to \overline{G}(Y)$ existe $h = f \circ g$ tal que $\overline{G}(h) = \omega$. Luego, $\overline{G}_{M',Y}$ es epiyectiva. Probemos ahora que $\overline{G}_{M',Y}$ es una aplicación inyectiva. Sea $t : Y \to M'$ tal que $\overline{G}_{M',Y}(t) = 0 : \overline{G}(M') \to \overline{G}(Y)$. Entonces $\operatorname{Hom}_{\Gamma^{op}}(M', M^s) \to \operatorname{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M^s)$ es la aplicación nula para todo $s \in \mathbb{N}$. Como en el caso anterior, al verificarse que $M' \in \operatorname{add}(M)$, tenemos que dado r existe $M'' \in \operatorname{add}(M)$ tal que $M' \oplus M'' \simeq M^r$. Ahora consideramos la inclusión canónica $\iota : M' \to M^r$. Entonces, $\iota \circ t = 0$ y, como ι es un monomorfismo, $t = 0$, concluyendo así la demostración de (b).

La prueba de (c) es análoga a la de (a), utilizando que $\operatorname{Cogen}({}_\Lambda M) = C_0^{\vee M}$ (ver Proposición 1.8.2) y la de (d) es análoga a la de (b), a partir del hecho que $\operatorname{Gen}({}_{\Gamma^{op}}M) = C_0^M$. $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de dar la demostración de la Proposición 2.2.1, en la que usamos ciertas propiedades de la traza y el reject de un módulo, que han sido mencionadas en la Sección 1.7 de los Preliminares de este trabajo.

Demostración. (Proposición 2.2.1.)
Sean $X \in \text{mod}(\Lambda)$, $Y \in \text{mod}(\Gamma^{op})$ y M' un Λ-módulo tal que $M' \in \text{add}(M)$. Por lo observado en 1.7.2 (a) se tiene que

$$\text{tr}_M(X) \in \text{Gen}(M) \text{ y que } \ Y/\text{Rej}_M(Y) \in \text{Cogen}(M);$$

y por 1.7.2 (b), sabemos que

$$F(\text{tr}_M(X)) \simeq F(X) \text{ y que } \ \overline{G}(Y/\text{Rej}_M(Y)) \simeq \overline{G}(Y).$$

Entonces, usando esto último y el Lema 2.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}&\text{Hom}_\Gamma(F(M'), F(X)) \simeq \text{Hom}_\Gamma(F(M'), F(\text{tr}_M(X))) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_\Lambda(M', \text{tr}_M(X)) \simeq \text{Hom}_\Lambda(M', X),\end{aligned}$$

lo que prueba (a), y

$$\begin{aligned}&\text{Hom}_\Lambda(\overline{G}(M'), \overline{G}(Y)) \simeq \text{Hom}_\Lambda(\overline{G}(M'), \overline{G}(Y/\text{Rej}_M(Y))) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y/\text{Rej}_M(Y), M') \simeq \text{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M'),\end{aligned}$$

lo que termina la demostración del inciso (b).
La prueba de (c) y (d) es análoga las anteriores utilizando que $X/\text{Rej}_M(X) \in \text{Cogen}(M)$ en el primer caso, y que $\text{tr}_M(Y) \in \text{Gen}(M)$ en el otro caso. □

2.2.1. La representación de (Q_Γ, I_Γ) asociada a $F(X) = \text{Hom}_\Lambda(M, X)$.

En la Observación 2.1.6 describimos una presentación $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ de Γ^{op}. En lo que sigue, consideraremos la presentación dual (Q_Γ, I_Γ) a la misma. Queremos describir la representación de (Q_Γ, I_Γ) asociada al Γ-módulo $F(X) = \text{Hom}_\Lambda(M, X)$, para $X \in \text{mod}(\Lambda)$.

Sea $S_\mathbf{i}$ el Γ-módulo simple correspondiente al módulo proyectivo $P_\mathbf{i} = F(M_i)$ y notemos por $\mathbf{i}$ al vértice de Q_Γ asociado a $S_\mathbf{i}$.

Sea $(V_{F(X)}, h_{F(X)})$ la representación de (Q_Γ, I_Γ) correspondiente a $F(X)$. Sabemos que $V_{F(X)}(\mathbf{i}) = e_\mathbf{i}F(X)$. Pero

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{i}}F(X) &\simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma e_{\mathbf{i}}, F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(P_{\mathbf{i}}, F(X)) = \\ &= \mathrm{Hom}_\Gamma(F(M_i), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M_i, X), \end{aligned}$$

donde el último isomorfismo sigue de la Proposición 2.2.1 (a). Por lo tanto, $V_{F(X)}(\mathbf{i}) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M_i, X)$.

Además, si $\varepsilon : \mathbf{r} \to \mathbf{s}$ es una flecha de (Q_Γ, I_Γ), sabemos que $h_{F(X),\varepsilon} : e_{\mathbf{r}}F(X) \to e_{\mathbf{s}}F(X)$ es la aplicación inducida por la multiplicación a izquierda por ε, esto es, $h_{F(X),\varepsilon}(t) = \varepsilon.t$ para $t \in e_{\mathbf{r}}F(X) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M_r, X)$. Por otro lado, por lo observado en 2.1.6, sabemos que existe un morfismo $f_\varepsilon : M_s \to M_r$ asociado a la flecha ε, tal que $m_s.\varepsilon = f_\varepsilon(m_s)$ para todo $m_s \in M_s$, y a partir del cual obtenemos la aplicación

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(f_\varepsilon, X) : \mathrm{Hom}_\Lambda(M_r, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M_s, X),$$

donde $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_\varepsilon, X)(t) = t \circ f_\varepsilon$, para cada $t \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_r, X)$. Ahora bien, para $m_s \in M_s$,

$$(t \circ f_\varepsilon)(m_s) = t(f_\varepsilon(m_s)) = t(m_s.\varepsilon) = (\varepsilon.t)(m_s).$$

Luego, $\varepsilon.t = t \circ f_\varepsilon$ para todo $t \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_r, X)$, de donde $h_{F(X),\varepsilon} = \mathrm{Hom}_\Lambda(f_\varepsilon, X)$.

En consecuencia,

$$(V_{F(X)}, h_{F(X)}) = (\mathrm{Hom}_\Lambda(M_i, X), \mathrm{Hom}_\Lambda(f_\varepsilon, X))_{i=1}^n,$$

donde n es el número de sumandos indescomponibles no isomorfos dos a dos de M y ε recorre el conjunto de flechas de Q_Γ.

Ejemplo 2.2.3. Sea Λ el álgebra considerada en el Ejemplo 2.1.10, esto es, Λ es el álgebra de caminos del carcaj

$$Q_\Lambda : \quad \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ}.$$

Consideremos al Λ-módulo $M = \bigoplus_{i=1}^3 M_i$, donde $M_1 = 3$, $M_2 = 1$ y $M_3 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$. En este caso, el álgebra $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ está dada por el carcaj

$$Q_\Gamma : \quad \underset{1}{\circ} \overset{\varepsilon}{\longleftarrow} \underset{3}{\circ} \overset{\mu}{\longleftarrow} \underset{2}{\circ}$$

con la relación $\varepsilon\mu = 0$. Ahora, dado Λ-módulo $X = S_1$, queremos describir la representación de (Q_Γ, I_Γ) asociada al Γ-módulo

$$F(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix},\ 1).$$

Según lo demostrado anteriormente, la representación asociada a $F(X)$ es

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M_1,X) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(f_\varepsilon,1)}{\longleftarrow} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_3,X) \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(f_\mu,1)}{\longleftarrow} \mathrm{Hom}_\Lambda(M_2,X),$$

donde $f_\varepsilon : 3 \to \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$ es el morfismo asociado a la flecha ε del carcaj Q_Γ y $f_\mu : \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \to 1$ el asociado a la flecha μ.
Como

- $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_1,X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ 1) = 0$,
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_2,X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(1,\ 1) \simeq K$ y
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_3,X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix},\ 1) \simeq K$,

sólo nos resta calcular la aplicación lineal $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_\mu,1)$.
Sea $1_K \in \mathrm{Hom}_\Lambda(1,\ 1) \simeq K$. Sabemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_\mu,1)(1_K) = 1_K \circ f_\mu$. Escribamos esta composición de morfismos como sigue:

$$\begin{array}{rcccc}
{}_\Lambda M_3 : K & \xrightarrow{1} & K & \xrightarrow{1} & K \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
{}_\Lambda M_2 : K & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
{}_\Lambda X :\ K & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

Esto es, $1_K \circ f_\mu = 1_K$. Por lo tanto, la representación de (Q_Γ, I_Γ) asociada a $F(X)$ es

$$0 \leftarrow K \overset{1}{\leftarrow} K\,.$$

Luego,

$$F(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix},\ 1) = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}.$$

2.2.2. La representación de (Q_Λ, I_Λ) asociada a $\overline{G}(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M)$.

Antes de describir la representación de (Q_Λ, I_Λ) asociada a $\overline{G}(Y)$, para un Γ^{op}-módulo Y, recordemos lo siguiente. Como $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ con los M_i Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, por el Teorema 2.1.8, sabemos que $M'_k = (M_i(k), f_\alpha(k))_{i=1}^n$ es una representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ y que

${}_{\Gamma^{op}}M \simeq \bigoplus_{k=1}^{l} {}_{\Gamma^{op}}M'_k$. Entonces, dado un Γ^{op}-módulo Y, queremos describir la representación $(V_{\overline{G}(Y)}, h_{\overline{G}(Y)})$ de (Q_Λ, I_Λ) asociada a $\overline{G}(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M)$ como módulo sobre Λ.

Notaremos por i al vértice de Q_Λ correspondiente al Λ-módulo simple S_i. Sabemos que $V_{\overline{G}(Y)}(i) = e_i\overline{G}(Y)$. Probemos que $e_i\overline{G}(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M'_i)$. Notemos que, como ${}_{\Gamma^{op}}M'_i \simeq e_iM$ (ver Observación 2.1.9), basta probar que $e_i\overline{G}(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, e_iM)$.

Sea $f \in e_i\overline{G}(Y) = e_i\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M)$. Entonces $f = e_ig$ para algún Γ^{op}-morfismo $g : Y \to M$, y para cada $y \in Y$, $f(y) = (e_ig)(y) = e_ig(y) \in e_iM$. Luego, $\mathrm{Im}(f) \subseteq e_iM$ y esto implica que $f \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, e_iM)$.

Por otra parte, sea $f \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, e_iM) \subseteq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M)$. Entonces, para cada $y \in Y$, $(e_if)(y) = e_if(y) = e_i(e_im) = e_i^2m = e_im = f(y)$, para algún $m \in M$. Luego, $f = e_if \in e_i\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M) = e_i\overline{G}(Y)$. Así hemos demostrado que $e_i\overline{G}(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, e_iM)$. Por lo tanto, $V_{\overline{G}(Y)}(i) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M'_i)$.

Sea $\alpha : r \to s$ una flecha de (Q_Λ, I_Λ). Sabemos que, como $\alpha e_r\overline{G}(Y)) = e_s\alpha\overline{G}(Y) \subset e_s\overline{G}(Y)$, la multiplicación a izquierda por α induce por restricción una aplicación K-lineal $h_{\overline{G}(Y),\alpha} : e_r\overline{G}(Y) \to e_s\overline{G}(Y)$. Esto es, $h_{\overline{G}(Y),\alpha}(t) = \alpha.t = (\alpha\ .) \circ t$ para todo $t \in e_r\overline{G}(Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M'_r)$. Esto es, $h_{\overline{G}(Y),\alpha} = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, (\alpha\ .))$.

Finalmente,

$$(V_{\overline{G}(Y)}, h_{\overline{G}(Y)}) = (\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M'_i), \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, (\alpha\ .)))_{i=1}^{l},$$

donde l es el número de simples no isomorfos de Λ y α recorre el conjunto de flechas de Q_Λ.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos nuevamente a Λ y ${}_\Lambda M$ como en el Ejemplo 2.1.10. Esto es, Λ es el álgebra de caminos del carcaj

$$Q_\Lambda : \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\beta} \underset{3}{\circ},$$

y consideramos el Λ-módulo $M = \bigoplus_{i=1}^{3} M_i$, donde $M_1 = 3$, $M_2 = 1$ y $M_3 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$.

Allí también hemos mostrado que el álgebra $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ está dada por el carcaj

$$Q_{\Gamma^{op}} : \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\mu} \underset{2}{\circ}$$

con la relación $\mu\varepsilon = 0$. Además, ${}_{\Gamma^{op}}M = \bigoplus_{k=1}^{3} {}_{\Gamma^{op}}M'_k$, donde ${}_{\Gamma^{op}}M'_1 = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, ${}_{\Gamma^{op}}M'_2 = 3$ y ${}_{\Gamma^{op}}M'_3 = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$.

Consideremos ${}_{\Gamma^{op}}Y = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$, y hallemos la representación de Q_Λ asociada al Λ-módulo

$$\overline{G}(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, M) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right).$$

Por lo demostrado en 2.2.2, esta representación es de la forma

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M_1') \overset{\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y,(\alpha\ .))}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M_2') \overset{\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y,(\beta\ .))}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M_3').$$

Entonces calculemos:

- $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M_1') = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0$,
- $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M_2') = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ 3) = 0$ y
- $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Y, {}_{\Gamma^{op}}M_3') = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) \simeq K$.

Luego, la representación asociada a $\overline{G}(Y)$ es

$$0 \to 0 \to K\ .$$

Por lo tanto, $\overline{G}(Y) = 3$.

2.2.3. La representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a $\overline{F}(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)$.

Mediante un procedimiento análogo al utilizado en 2.2.1 y usando (c) de la Proposición 2.2.1, se puede probar que para un Λ-módulo X, la representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a $\overline{F}(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M)$ es:

$$(V_{\overline{F}(X)}, h_{\overline{F}(X)}) = (\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_i), \mathrm{Hom}_\Lambda(X, f_\varepsilon))_{i=1}^n,$$

donde n es el número de sumandos indescomponibles no isomorfos dos a dos de M y ε recorre el conjunto de flechas de $Q_{\Gamma^{op}}$.

Ilustramos este caso con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.5. Sean Λ y ${}_\Lambda M$ como en el Ejemplo 2.1.10. Esto es,

$$Q_\Lambda : \quad \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ},$$

y $M = \bigoplus_{i=1}^{3} M_i$, donde $M_1 = 3$, $M_2 = 1$ y $M_3 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$.
Ya hemos visto que $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ está dada por el carcaj

$$Q_{\Gamma^{op}} : \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\mu} \underset{2}{\circ}$$

con la relación $\mu\varepsilon = 0$. Sea ${}_\Lambda X = S_3$, y hallemos la representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a

$$\overline{F}(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ 3 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}).$$

Sabemos que la representación asociada a $\overline{F}(X)$ es

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(3, f_\varepsilon)} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_3) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(3, f_\mu)} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_2),$$

donde $f_\varepsilon : 3 \to \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$ es el morfismo asociado a la flecha ε del carcaj $Q_{\Gamma^{op}}$ y $f_\mu : \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \to 1$ el asociado a la flecha μ.
Como

- $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_1) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ 3) \simeq K$,
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_2) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ 1) = 0$ y
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, M_3) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}) \simeq K$,

sólo nos resta calcular la aplicación lineal $\mathrm{Hom}_\Lambda(3, f_\varepsilon)$.
Sea $1_K \in \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ 3) \simeq K$. Sabemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(3, f_\varepsilon)(1_K) = f_\varepsilon \circ 1_K$. Esto es:

$$\begin{tikzcd}
{}_\Lambda X : 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d, "1"] \\
{}_\Lambda M_2 : 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d, "1"] \\
{}_\Lambda M_3 : K \arrow[r, "1"] & K \arrow[r, "1"] & K .
\end{tikzcd}$$

Luego, $f_\varepsilon \circ 1_K = 1_K$ y, entonces la representación de $(Q_{\Gamma^{op}}, I_{\Gamma^{op}})$ asociada a $\overline{F}(X)$ es

$$K \xrightarrow{1} K \to 0\ .$$

Por lo tanto,

$$\overline{F}(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(3,\ 3 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}.$$

2.2.4. La representación de $(Q_{\Lambda^{op}}, I_{\Lambda^{op}})$ asociada a $H(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M,Y)$.

Por último, dado un Γ^{op}-módulo Y, queremos describir la representación $(V_{H(Y)}, h_{H(Y)})$ de $(Q_{\Lambda^{op}}, I_{\Lambda^{op}})$ asociada al Λ^{op}-módulo $H(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M,Y)$. Para ello, como en 2.2.2, tenemos en cuenta lo demostrado en el Teorema 2.1.8.

Observemos que, si notamos por i al vértice de Q_Λ correspondiente al Λ-módulo simple S_i, tenemos que $V_{H(Y)}(i) = H(Y)e_i$. Queremos probar que $H(Y)e_i = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_i, Y)$. Pero, por lo observado en 2.1.9, ${}_{\Gamma^{op}}M'_i \simeq e_iM$. Entonces basta probar que $H(Y)e_i = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(e_iM, Y)$.

Sabemos que

$$H(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\bigoplus_{k=1}^{l} {}_{\Gamma^{op}}M'_k, Y) \simeq$$

$$\bigoplus_{k=1}^{l} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_k, Y) \simeq \bigoplus_{k=1}^{l} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(e_kM, Y).$$

Luego, es claro que

$$H(Y)e_i = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M,Y)e_i \simeq \bigoplus_{k=1}^{l} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(e_kM, Y)e_i \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(e_iM, Y).$$

Por lo tanto, $V_{H(Y)}(i) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_i, Y)$.

Sea $\alpha : r \to s$ una flecha del carcaj Q_Λ. Entonces, la multiplicación a derecha por α induce por restricción una aplicación K-lineal $h_{H(Y),\alpha} : H(Y)e_s \to H(Y)e_r$. Esto es, $h_{H(Y),\alpha}(t) = t.\alpha = t \circ (.\ \alpha)$ para todo $t \in H(Y)e_s \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_s, Y)$. Esto es, $h_{H(Y),\alpha} = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \alpha), Y)$.

Por lo tanto,

$$(V_{H(Y)}, h_{H(Y)}) = (\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_i, Y), \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \alpha), Y))_{i=1}^{l},$$

donde l es el número de simples no isomorfos de Λ y α recorre el conjunto de flechas de Q_Λ.

Ejemplo 2.2.6. Continuamos trabajando con el Ejemplo 2.1.10. Esto es, Λ es el álgebra de caminos del carcaj

$$Q_\Lambda : \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\beta} \underset{3}{\circ},$$

y consideramos el Λ-módulo $M = \bigoplus_{i=1}^{3} M_i$, donde $M_1 = 3$, $M_2 = 1$ y $M_3 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$. Ya hemos mencionado que el álgebra $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ está dada por el carcaj

$$Q_{\Gamma^{op}}: \quad \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\mu} \underset{2}{\circ},$$

con la relación $\mu\varepsilon = 0$, y que ${}_{\Gamma^{op}}M = \bigoplus_{k=1}^{3} {}_{\Gamma^{op}}M'_k$, donde ${}_{\Gamma^{op}}M'_1 = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, ${}_{\Gamma^{op}}M'_2 = 3$ y ${}_{\Gamma^{op}}M'_3 = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$.

Consideremos ahora ${}_{\Gamma^{op}}Y = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$. Queremos hallar la representación de $Q_{\Lambda^{op}}$ asociada al Λ^{op}-módulo

$$H(Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M, Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right).$$

Sabemos que la misma es

$$\mathrm{Hom}({}_{\Gamma^{op}}M'_1, Y) \xleftarrow{\mathrm{Hom}((.\ \alpha), Y)} \mathrm{Hom}({}_{\Gamma^{op}}M'_2, Y) \xleftarrow{\mathrm{Hom}((.\ \beta), Y)} \mathrm{Hom}({}_{\Gamma^{op}}M'_3, Y).$$

Primero obtenemos:

- $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_1, Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) \simeq K$,
- $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_2, Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(3, \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) \simeq K$ y
- $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_3, Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) \simeq K$.

Sea $1_K \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_2, Y) \simeq K$ y calculemos $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \alpha), Y)(1_K) = 1_K \circ (.\ \alpha)$. Para ello consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
{}_{\Gamma^{op}}M'_1 & & {}_{\Gamma^{op}}M'_2 & & {}_{\Gamma^{op}}Y \\
\\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1} \\
K & \xrightarrow{1} & K & \xrightarrow{1} & K \\
\big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
K & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

Luego, $1_K \circ (.\ \alpha) = 1_K$, de donde $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \alpha), Y) = 1$. Análogamente se puede probar que $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \beta), Y) = 1$. Por lo tanto, la representación asociada al Λ^{op}-módulo $H(Y)$ es

$$K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K\,.$$

Luego, $H(Y) = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$.

2.2.5. La representación de (Q_Λ, I_Λ) asociada a $G(Z) = M \otimes_\Gamma Z$.

Como mencionamos al principio de esta sección, para el funtor

$$G = M \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda),$$

consideramos $G = M \otimes_\Gamma - \simeq DHD$, donde $H = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(M, -)$.

Por otro lado, en 2.2.4 probamos que dado un Γ^{op}-módulo Y, la representación de $(Q_{\Lambda^{op}}, I_{\Lambda^{op}})$ asociada al Λ^{op}-módulo $H(Y)$ es

$$(V_{H(Y)}, h_{H(Y)}) = (\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_i, Y), \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \alpha), Y))_{i=1}^{l},$$

donde l es el número de simples no isomorfos de Λ y α recorre el conjunto de flechas de Q_Λ.

Por lo tanto, dado un Γ-módulo Z, la representación de (Q_Λ, I_Λ) asociada al Λ-módulo $G(Z) \simeq (DHD)(Z)$ es

$$\begin{aligned}(V_{G(Z)}, h_{G(Z)}) &= (D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}M'_i, DZ), D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}((.\ \alpha), DZ))_{i=1}^{l} = \\ &= ({}_{\Gamma^{op}}M'_i \otimes_\Gamma Z, (.\ \alpha) \otimes_\Gamma Z)_{i=1}^{l},\end{aligned}$$

donde l es el número de simples no isomorfos de Λ y α recorre el conjunto de flechas de Q_Λ.

Observación 2.2.7. En los ejemplos resulta más fácil trabajar con el funtor H y luego usar que $G \simeq DHD$.

Capítulo 3

Categoría C_2^M y módulos $\mathcal{C}$-filtrados.

Sea M un Λ-módulo. Las categorías C_n^M, cuya definición recordamos en la primera sección de este capítulo, fueron introducidas por M. I. Platzeck y N. Pratti en [PP1], donde se interesaron en particular en el caso en que $C_0^M = C_1^M$. Aquí aplicamos estas ideas en un contexto diferente.

La primer sección de este capítulo está dedicada al estudio de la categoría C_2^M. Mostramos que los módulos en esta categoría tienen interesantes propiedades homológicas. En la segunda sección, dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, estudiamos propiedades de la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ de módulos filtrados por $\mathcal{C}$ en el caso que $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^M$.

En la Sección 3 aplicamos estos resultados a la categoría de módulos filtrados por un sistema estratificante dando una nueva prueba (ver Teorema 3.3.4) de hechos ya demostrados en [ES] y en [MMS2], ya que dicha categoría está contenida en C_2^Q, para un apropiado Q.

Más adelante, en el Capítulo 4, probaremos que para la categoría de los módulos filtrados por un sistema coestratificante propio también existe cierto módulo Q tal que esta categoría está contenida en C_2^Q. Esto nos permitirá aplicar los resultados de la Sección 2 también en este caso (ver Teorema 4.2.3).

Otros ejemplos de categorías contenidas en C_2^M son los módulos de torsión de un módulo inclinante M. Esto da un nuevo enfoque para probar resultados muy conocidos en teoría inclinante ([PP1], [PP2]).

3.1. La categoría C_2^M.

Sea Λ una R-álgebra de artin. Para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, consideramos el álgebra $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ y los funtores

$$\mathrm{mod}(\Lambda) \xrightarrow{F} \mathrm{mod}(\Gamma) \xrightarrow{G} \mathrm{mod}(\Lambda),$$

donde $F = \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M_\Gamma, -)$ y $G = {}_\Lambda M_\Gamma \otimes_\Gamma -$. Siguiendo la definición dada por M. I. Platzeck y N. I. Pratti en la Sección 2 de [PP1], para $n \geq 0$ notamos por C_n^M a la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por los Λ-módulos X que admiten una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$M_n \to M_{n-1} \to ... \to M_1 \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{add}(M)$, y tal que la sucesión inducida

$$F(M_n) \to F(M_{n-1}) \to ... \to F(M_1) \to F(M_0) \to F(X) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

A continuación recordamos un resultado muy útil debido a M. Auslander en [A].

Teorema 3.1.1. *Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ y $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$: $\mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$, Entonces:*

(a) La restricción $F|_{C_1^M} : C_1^M \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ es fiel y llena.

(b) $F : \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, X) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(F(Z), F(X))$ es un isomorfismo en $\mathrm{mod}(R)$, para todo $Z \in \mathrm{add}(M)$, $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(c) La restricción $F|_{\mathrm{add}(M)} : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{proj}(\Gamma)$ es una equivalencia de R-categorías.

Observación 3.1.2. Como consecuencia del Teorema 3.1.1 (b) y la exactitud a izquierda de F, tenemos que si $X \in C_2^M$ entonces existe una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \to K \to M_0 \to X \to 0,$$

con $M_0 \in \mathrm{add}(M)$ y $K \in C_1^M$, tal que la sucesión

$$0 \to F(K) \to F(M_0) \to F(X) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

El siguiente resultado, probado en [PP1], será muy útil en lo que sigue. Aquí $\epsilon : GF \to 1$ es la co-unidad de la adjunción $\eta : \mathrm{Hom}_\Lambda(G-,-) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(-,F-)$, esto es, $\epsilon_X = \eta^{-1}(1_{F(X)}) : GF(X) \to X$.

Proposición 3.1.3. *Sean* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,-) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ *y* $G = M \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces*

$$C_1^M \subseteq \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda) \textit{ tal que } \epsilon_X : GF(X) \to X \textit{ es un isomorfismo } \}.$$

Demostración. Ver [PP1, Proposición 2.2]. □

Las siguientes proposiciones muestran que los módulos en C_2^M tienen interesantes propiedades homológicas.

Proposición 3.1.4. *Sean* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,-) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ *e* $\mathcal{Y} \subseteq C_1^M$ *tales que* $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$. *Entonces, para todo* $X \in C_2^M$, $Y \in \mathcal{Y}$, *la aplicación inducida por* F

$$\rho_{X,Y} : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,Y) \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma(F(X),F(Y))$$

es un isomorfismo de R-módulos.

Demostración. Sea $X \in C_2^M$ e $Y \in \mathcal{Y}$. Por la Observación 3.1.2 existe una sucesión exacta

$$\varepsilon : 0 \to K \to M_0 \to X \to 0,$$

con $K \in C_1^M$ y $M_0 \in \mathrm{add}(M)$, tal que la sucesión

$$F(\varepsilon) : 0 \to F(K) \to F(M_0) \to F(X) \to 0$$

es exacta en mód (Γ). Como $M_0 \in \mathrm{add}(M)$ y $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_0,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_\Gamma(F(M_0),F(Y))$ ya que $F(M_0) \in \mathrm{proj}(\Gamma)$ (ver Teorema 3.1.1 (c)). Entonces, aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,Y)$ a ε, y $\mathrm{Hom}_\Gamma(-,F(Y))$ a $F(\varepsilon)$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M_0,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(K,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{X,Y}"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_\Gamma(F(M_0),F(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Gamma(F(K),F(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_\Gamma(F(X),F(Y)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 3.1.1, resulta que las dos primeras flechas verticales son isomorfismos. Por lo tanto $\rho_{X,Y}$ es un isomorfismo. □

Proposición 3.1.5. *Sean* $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda(M)^{op}$ *y* $F = \operatorname{Hom}_\Lambda(M, -) : \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{mod}(\Gamma)$. *Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

(a) $F(C_2^M) \subseteq \operatorname{Ker} \operatorname{Tor}_1^\Gamma(M, -)$.

(b) Si $\varepsilon : 0 \to F(X) \to Y' \to F(Z) \to 0$ *es exacta en* $\operatorname{mod}(\Gamma)$, *con* $X, Z \in C_2^M$, *entonces existe una sucesión exacta* $\eta : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\varepsilon \simeq F(\eta)$.

Demostración. Consideremos el funtor $G = M \otimes_\Gamma - : \operatorname{mod}(\Gamma) \to \operatorname{mod}(\Lambda)$.

(a) Sea $X \in C_2^M$. Por la Observación 3.1.2 existe una sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$\mu : 0 \to K \to M_0 \to X \to 0,$$

con $K \in C_1^M$ y $M_0 \in \operatorname{add}(M)$, tal que la sucesión

$$F(\mu) : 0 \to F(K) \to F(M_0) \to F(X) \to 0$$

es exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$. Aplicando el funtor G a $F(\mu)$, y como $F(M_0) \in \operatorname{proj}(\Gamma)$, obtenemos diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^\Gamma(M, F(X)) \arrow[r] & GF(K) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_K"] & GF(M_0) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{M_0}"] & GF(X) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos ya que $K, M_0, X \in C_1^M$ (ver 3.1.3). De este modo, $\operatorname{Tor}_1^\Gamma(M, F(X)) = 0$.

(b) Sea $\varepsilon : 0 \to F(X) \to Y' \xrightarrow{g} F(Z) \to 0$ exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$, con $X, Z \in C_2^M$. Aplicando G a ε, obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Tor}_1^\Gamma(M, F(Z)) \to GF(X) \to G(Y') \to GF(Z) \to 0.$$

Como $C_2^M \subseteq C_1^M$, de la última sucesión y (a), resulta el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
G(\varepsilon) : 0 \arrow[r] & GF(X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & G(Y') \arrow[r] \arrow[d, equal] & GF(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & G(Y') \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

A continuación mostramos que η es la sucesión buscada, donde $Y = G(Y')$. En efecto, aplicando el funtor exacto a izquierda F a $G(\varepsilon)$, obtenemos el diagrama conmutativo y exacto que sigue

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"', "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & FGF(X) \arrow[r] & FG(Y') \arrow[r, "FG(g)"] & FGF(Z). &
\end{tikzcd}$$

De la igualdad $\theta g = FG(g)h$ y el hecho de que θ es un isomorfismo, sigue que $FG(g)$ es un epimorfismo. Por lo tanto h es un isomorfismo, y esto prueba que $\varepsilon \simeq F(\eta)$. $\square$

Para un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y una clase de objetos $\mathcal{X}$ en $\mathcal{A}$, sea $F(\mathcal{X}) = \{Z \in \mathcal{B} : Z \simeq F(X) \text{ para algún } X \in \mathcal{X}\}$.

Corolario 3.1.6. *Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $\mathcal{X} \subseteq C_2^M$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, entonces $F(\mathcal{X})$ también lo es.*

Demostración. La demostración sigue inmediatamente de la Proposición 3.1.5 (b). $\square$

3.2. Relación entre la categoría C_2^M y los módulos $\mathcal{C}$-filtrados.

Sean Λ un álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Como ya lo hemos mencionado en los Preliminares de esta tesis, notamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a la clase de los Λ-módulos que tienen una $\mathcal{C}$-filtración, esto es, una filtración $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$ de submódulos con factores M_{i+1}/M_i isomorfos a un módulo en $\mathcal{C}$ para todo i. Entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ es la menor clase en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que es cerrada por extensiones y contiene a $\mathcal{C}$. Además, es inmediato ver que ${}^{\perp_1}\mathcal{C} = {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Por otra parte observemos que las sucesiones exactas en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ son las sucesiones exactas de Λ-módulos con objetos en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Los siguientes lemas nos serán muy útiles en lo que sigue.

Lema 3.2.1. *Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. Si la restricción $F|_{\mathcal{F}(\mathcal{C})} : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ es un funtor exacto y $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^M$, entonces $F(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$.*

Demostración. Como la restricción $F|_{\mathcal{F}(\mathcal{C})} : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ es un funtor exacto, sabemos que $F(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$. Por otro lado, la condición $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^M$ y el Corolario 3.1.6 nos permiten probar la otra inclusión. $\square$

Recordemos que una clase $\mathcal{X}$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es **resolvente** si es cerrada por extensiones y por núcleos de epimorfismos, y $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}$ (ver [AR]).

Lema 3.2.2. *Si $\mathcal{X}$ es una subcategoría resolvente de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, entonces* $\mathrm{proj}(\Lambda) = \mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{X}$.

Demostración. Asumamos que $\mathcal{X}$ es resolvente. Es claro que $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Para completar la demostración sólo nos resta probar la otra inclusión. Sea $X \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{X}$, y consideremos la sucesión exacta

$$\varepsilon : 0 \to K \to P_0(X) \to X \to 0$$

en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, donde $P_0(X)$ es la cápsula proyectiva de X. Como $\mathcal{X}$ es resolvente, concluimos que $K \in \mathcal{X}$, y por lo tanto ε se parte, ya que $X \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Luego $X \in \mathrm{proj}(\Lambda)$. $\square$

Lema 3.2.3. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías, y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ funtores adjuntos. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ subcategorías llenas de $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ respectivamente, cerradas por isomorfismos y tales que la restricción $F|_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es una equivalencia de categorías. Si $\epsilon_A : GF(A) \to A$ es un isomorfismo para todo $A \in \mathfrak{A}$, entonces la restricción $G|_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ es una quasi-inversa de $F|_{\mathfrak{A}}$.*

Demostración. Sea $B \in \mathfrak{B}$. Primero, probemos que $G(B) \in \mathfrak{A}$. En efecto, como $B \in \mathfrak{B}$ y $F|_{\mathfrak{A}}$ es denso, existe un isomorfismo $\rho : B \to F(A)$ en $\mathfrak{B}$ para algún $A \in \mathfrak{A}$. De este modo $G(B) \simeq GF(A) \simeq A$ y por lo tanto $G(B) \in \mathfrak{A}$.

Ahora denotemos por $\mu : 1 \to FG$ a la unidad de la adjunción $\eta : \mathrm{Hom}_\Lambda(G-, -) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(-, F-)$, esto es, $\mu_Y = \eta(1_{G(Y)}) : Y \to FG(Y)$. A continuación vamos a probar que la transformación natural $\mu_B : B \to FG(B)$ es un isomorfismo para todo $B \in \mathfrak{B}$. Para ello, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\rho"', "\simeq"] & FG(B) \arrow[d, "FG(\rho)"', "\simeq"] & \\
F(A) \arrow[r, "\mu_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[r, "F(\epsilon_A)"'] & F(A).
\end{tikzcd}$$

Observemos que $F(\epsilon_A)$ es un isomorfismo ya que ϵ_A lo es. De esta última afirmación y del hecho de que $F(\epsilon_A)\mu_{F(A)} = 1_{F(A)}$, podemos concluir que $\mu_{F(A)}$ es un isomorfismo. Luego μ_B es un isomorfismo y esto prueba el lema. $\square$

Sabemos que los funtores $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $G = M \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ son adjuntos. Si F induce una equivalencia entre dos subcategorías $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$ respectivamente, entonces el lema anterior da una condición suficiente para que la quasi-inversa de esta equivalencia sea la restricción de G a $\mathfrak{B}$.

Ahora estamos en condiciones de probar el principal resultado de esta sección, formulado en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4. *Sean $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{C}$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $G = M \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$. Si $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^M$, entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) $F|_{\mathcal{F}(\mathcal{C})} : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es una equivalencia exacta de categorías con quasi-inversa $G|_{\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))} : \mathcal{F}(F(\mathcal{C})) \to \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

(b) Si $\mathrm{add}(M) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es cerrada por núcleos de epimorfismos, entonces $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es resolvente y $\mathrm{add}(M) = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^M$ y recordemos que ${}^{\perp_1}\mathcal{C} = {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

(a) Por el Teorema 3.1.1 (a), sabemos que $F|_{\mathcal{F}(\mathcal{C})} : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es una equivalencia de categorías. Además, como $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$, tenemos que $F|_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}$ es exacto. Entonces, por el Lema 3.2.1, obtenemos que $F(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{F}(F(C))$ y esto prueba la primera afirmación en (a). El resto de la demostración de (a) sigue inmediatamente de la Proposición 3.1.3 y el Lema 3.2.3.

(b) Sea $\mathrm{add}(M) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$ y sea $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ cerrada por núcleos de epimorfismos. Por el Teorema 3.1.1 (c), sabemos que $F|_{\mathrm{add}(M)} : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{proj}(\Gamma)$ es una equivalencia de donde sigue que $\mathrm{proj}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$. Como además $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es cerrada por extensiones, se tiene que $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es resolvente. Luego, por el Lema 3.2.2, $\mathrm{proj}(\Gamma) = \mathcal{F}(F(\mathcal{C})) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$.
Las hipótesis implican que $\mathrm{add}(M) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C}) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Sea $A \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Entonces $F(A) \in \mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ y, como $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$ es resolvente, existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(F(\mathcal{C}))$

$$\varepsilon : 0 \to Z' \to P \to F(A) \to 0$$

con $P \in \text{proj}(\Gamma)$. Por (a), tenemos que $Z' \simeq F(Z)$ para algún $Z \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Por lo tanto, por la Proposición 3.1.5 (b), existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$

$$\eta : 0 \to Z \to Q \to A \to 0$$

tal que $F(\eta) \simeq \varepsilon$. Como $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C})$, η se parte, y entonces ε también. Luego $F(A) \in \text{proj}(\Gamma) = F(\text{add}(M))$. En consecuencia, $A \in \text{add}(M)$.

□

3.3. Aplicación a los sistemas estratificantes Ext-proyectivos.

Los resultados de la sección anterior pueden ser aplicados al estudio de los sistemas coestratificantes propios, los cuales serán introducidos en el Capítulo 4 de este trabajo.

A continuación, mostramos que éstos pueden también ser utilizados para obtener, de manera unificada, resultados conocidos acerca de los sistemas estratificantes Ext-proyectivos. A tal fin, comenzamos con dos lemas. El primero de ellos establece un resultado probado en [MMS2], el cual es fundamental para nuestras consideraciones, y el segundo es un útil lema técnico. Para empezar, recordamos la definición de sistema estratificante Ext-proyectivo, ya mencionada en la Sección 1.11 del Capítulo Preliminares de esta tesis.

Definición 3.3.1. *(ver [MMS2]) Sea Λ una R-álgebra de artin. Un* ***sistema estratificante Ext-proyectivo*** $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *de talla t en* $\text{mod}(\Lambda)$*, consiste de dos familias de Λ-módulos $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ y $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$, con $Q(i)$ indescomponible para todo i, y un orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1, t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\text{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *si $i > j$.*

(b) Para cada $i \in [1, t]$, existe una sucesión exacta

$$\varepsilon_i : 0 \longrightarrow K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \longrightarrow 0,$$

con $K(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$.

(c) $\underline{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\Theta$*, esto es,* $\text{Ext}^1_\Lambda(Q(i), -)|_\Theta = 0$ *para cada $i \in [1, t]$.*

Lema 3.3.2. *Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un sistema estratificante Ext-proyectivo en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *de talla* t*. Entonces, para cada* $M \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j \geq i\})$*, existe una sucesión exacta en* $\mathcal{F}(\Theta)$

$$0 \to N \to Q_0(M) \to M \to 0$$

tal que $Q_0(M) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j \geq i} Q(j))$ *y* $N \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$*. Más aún, para* $Q = \oplus_{i=1}^{t} Q(i)$*,* $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq C_m^Q$ *para todo* $m \geq 0$*.*

Demostración. La primera parte de la demostración del lema se puede ver en la Proposición 2.10 de [MMS2]. Probemos ahora la última afirmación del mismo. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Si aplicamos el funtor $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \to N \to Q_0(M) \to M \to 0,$$

donde $Q_0(M) \in \mathrm{add}(Q)$ y $N \in \mathcal{F}(\Theta)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to F(N) \to F(Q_0(M)) \to F(M) \to 0$$

usando (c) de la Definición 3.3.1. Esto prueba que si $M \in \mathcal{F}(\Theta)$, entonces $M \in C_0^Q$. El proceso se reitera aplicando lo demostrado al módulo $N \in \mathcal{F}(\Theta)$. □

Para el siguiente lema, consideramos un conjunto $\{M_1, ..., M_n\}$ de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ y $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$. Entonces $F(M_i)$ es un Γ-módulo proyectivo para todo $1 \leq i \leq n$, y para $X \in C_1^M$ existe una sucesión exacta

$$M'' \to M' \to X \to 0$$

tal que

$$F(M'') \to F(M') \to F(X) \to 0$$

es una presentación proyectiva de $F(X)$. En el resultado que sigue estudiaremos esta presentación proyectiva en el caso particular en que $M' = M_i$.

Lema 3.3.3. *Sean* $J \subseteq [1, t]$*,* $X \neq 0$ *y*

$$M'' \xrightarrow{\alpha} M_i \xrightarrow{\beta} X \to 0$$

una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, con* $M'' \in \mathrm{add}(\oplus_{j \in J} M_j)$*, tal que la sucesión inducida*

$$F(M'') \xrightarrow{F(\alpha)} F(M_i) \xrightarrow{F(\beta)} F(X) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\Gamma)$*. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) $\mathrm{Im}(F(\alpha)) \subseteq \mathrm{tr}_{\oplus_{j\in J}F(M_j)}(\mathrm{rad}\, F(M_i))$.

(b) Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_j, X) = 0$ *para todo* $j \in J$*, entonces*

$$\mathrm{Im}(F(\alpha)) = \mathrm{tr}_{\oplus_{j\in J}F(M_j)}(F(M_i)).$$

Demostración. La demostración es una consecuencia directa del Teorema 3.1.1. En efecto:

(a) Por hipótesis $X \neq 0$ y β es un epimorfismo, luego $F(\beta) \neq 0$ ya que F es un funtor fiel. Además como $F(M_i)$ es un Γ-módulo proyectivo indescomponible, se tiene que $F(\beta)$ es una cápsula proyectiva. Luego $\mathrm{Im}(F(\alpha)) \subseteq \mathrm{rad}\, F(M_i)$, lo que prueba (a) ya que $M'' \in \mathrm{add}(\oplus_{j\in J} M_j)$.

(b) Por (a), es suficiente probar la inclusión

$$\mathrm{tr}_{\oplus_{j\in J}F(M_j)}(F(M_i)) \subseteq \mathrm{Im}(F(\alpha)).$$

Sea $\theta \in \mathrm{Hom}_\Gamma(F(M_j), F(M_i))$ para algún $j \in J$. Entonces $F(\beta)\theta \in \mathrm{Hom}_\Gamma(F(M_j), F(X))$, que es cero por el Teorema 3.1.1 (b). Luego $\mathrm{Im}(\theta) \subseteq \mathrm{Im}(F(\alpha))$, probando el resultado. □

Ahora estamos en condiciones de presentar una prueba diferente del siguiente resultado ya conocido (ver [ES], [MMS2]; ver también [W] por resultados relacionados al tema), que relaciona a los módulos filtrados por los $\Theta(i)$ de un sistema estratificante, con los módulos filtrados por los módulos estándar $\Delta(i)$ de un álgebra estándarmente estratificada (ver Definición 1.9.1).

Teorema 3.3.4. *Sean* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un sistema estratificante Ext-proyectivo de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*,* $Q = \oplus_{i=1}^t Q(i)$*,* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(Q)^{op}$*,* $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ *y* $G = Q \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, valen las siguientes afirmaciones.*

(a) La familia ${}_\Gamma P = \{F(Q(i)) : i \in [1, t]\}$ *es un conjunto de representantes de los* Γ*-módulos proyectivos indescomponibles. En particular* Γ *es un álgebra básica y* $\mathrm{rk}\, K_0(\Gamma) = t$*.*

(b) $(\Gamma, \leq)$ *es un álgebra estándarmente estratificada, esto es,* $\mathrm{proj}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F}({}_\Gamma\Delta)$*.*

(c) La restricción $F|_{\mathcal{F}(\Theta)} : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_\Gamma\Delta)$ *es una equivalencia exacta de categorías y* $G|_{\mathcal{F}({}_\Gamma\Delta)} : \mathcal{F}({}_\Gamma\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ *es una quasi-inversa de* $F|_{\mathcal{F}(\Theta)}$*.*

(d) $F(\Theta(i)) \simeq {}_{\Gamma}\Delta(i)$*, para todo* $i \in [1,t]$.

(e) $\mathrm{add}(Q) = \mathcal{F}(\Theta) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Theta)$.

Demostración. (a) sigue del hecho que $Q = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos (ver [ARS, II Proposición 2.1]).

Por otro lado, por el Lema 3.3.2 sabemos que $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq C_2^Q$, entonces las hipótesis del Teorema 3.2.4 son satisfechas por $\mathcal{C} = \Theta$ y $M = Q$. Además, el mismo lema implica, para cada $i \in [1,t]$, la existencia de una presentación

$$Q' \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \to 0$$

con $Q' \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j>i} Q(j))$ tal que la sucesión inducida

$$F(Q') \xrightarrow{F(\alpha_i)} F(Q(i)) \xrightarrow{F(\beta_i)} F(\Theta(i)) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Como $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(Q(j), \Theta(i)) = 0$ para todo $j > i$ (ver [MMS2, Lema 2.6 (b)]), concluimos de (b) del Lema 3.3.3 que

$$\mathrm{Im}(F(\alpha_i)) = \mathrm{tr}_{\oplus_{j>i} F(Q(j))}\, F(Q(i)).$$

Pero, de acuerdo con (a), los Γ-módulos estándar son los factores ${}_{\Gamma}\Delta(i) = F(Q(i))/\mathrm{tr}_{\oplus_{j>i}F(Q(j))}F(Q(i))$. Por lo tanto ${}_{\Gamma}\Delta(i) = F(Q(i))/\mathrm{Im}\,(F(\alpha_i)) \simeq F(\Theta(i))$ para todo $i \in [1,t]$. Los items (c) y (d) siguen ahora del Teorema 3.2.4 (a).

Por otro lado, como $\mathrm{add}(Q) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$ y $F(\mathcal{F}(\Theta)) = \mathcal{F}({}_{\Gamma}\Delta)$ es cerrada por núcleos de epimorfismos (ver [DR], [Xi]), podemos aplicar el Teorema 3.2.4 y obtener que (b) y (e) valen. $\square$

Capítulo 4

Sistemas coestratificantes propios.

C. Ringel definió en [R] a los módulos estándar sobre álgebras de artin con el objetivo de estudiar a las álgebras quasi-hereditarias. Recordemos que, si $P(1), \ldots, P(l)$ es una sucesión ordenada de módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos sobre un álgebra de artin Λ, entonces ${}_\Lambda\Delta(i)$ es el mayor módulo cociente de $P(i)$ con factores de composición sólo entre $S(1), \ldots, S(i)$, donde $S(j)$ es el top simple de $P(j)$.

En el trabajo mencionado arriba, Ringel también estudió las propiedades homológicas de la categoría $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ de los módulos que son filtrados por los módulos estándar. Tiempo después, Cline, Parshall y Scott introdujeron en [CPS] la clase de las álgebras estándarmente estratificadas, esto es, Λ es estándarmente estratificada si todos los Λ-módulos proyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ (ver Sección 1.10 del Capítulo de Preliminares).

En [ES] K. Erdmann y C. Sáenz extendieron la noción de módulos estándar y definieron a los sistemas estratificantes con respecto a un conjunto ordenado lineal finito. Probaron que, para un sistema estratificante Θ, la categoría de los módulos filtrados por Θ es equivalente a la categoría de los módulos filtrados por los módulos estándar sobre un álgebra estándarmente estratificada apropiada. O. Mendoza, C. Sáenz y C. C. Xi hicieron lo mismo en [MSXi] para sistemas estratificantes definidos sobre un conjunto pre-ordenado finito.

A diferencia de lo que ocurre con las álgebras quasi-hereditarias, el hecho de que Λ sea un álgebra estándarmente estratificada no implica que Λ^{op} también lo sea. Sin embargo, V. Dlab introdujo en [D1] una nueva clase de módulos, los módulos propios estándar (ver Sección 1.9), con la propiedad que Λ es un álgebra estándarmente estratificada, esto es, Λ está filtrada por los módulos estándar, si y sólo si Λ^{op} está filtrada por los módulos propios estándar. Esto motivó el estudio de la categoría de los módulos filtrados por los módulos propios estándar (ver [AHLU], [L]).

En la primera sección de este capítulo definimos la noción de sistema coestratificante propio, generalizando a los llamados módulos propios coestándar, e ilustramos este nuevo concepto con varios ejemplos.

Sea $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Comenzamos la Sección 2 mostrando cómo se aplican resultados sobre la categoría C_2^M demostrados en el Capítulo 3 de esta tesis. Probamos que, como en el caso de los sistemas estratificantes, también para los sistemas coestratificantes propios existe un Λ-módulo M tal que la categoría de los módulos filtrados por el sistema coestratificante propio Ψ está contenida en C_2^M (Proposición 4.2.1). Esto nos permitirá utilizar el Teorema 3.2.4 del capítulo anterior para comparar los módulos filtrados por Ψ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ con aquéllos filtrados por $\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Psi)$ en $\operatorname{mod}(\operatorname{End}_\Lambda(M)^{op})$, que coincide precisamente con los módulos propios estándar de $\operatorname{End}_\Lambda(M)^{op}$. Uno de los hechos que demostramos como consecuencia del mismo, es que la categoría de los módulos filtrados por un sistema coestratificante propio es dual a la categoría de los módulos filtrados por los módulos propios coestándar sobre cierta álgebra estándarmente estratificada.

Por último, caracterizamos la situación en el caso en el que el sistema coestratificante propio está formado por los módulos estándar de un álgebra estándarmente estratificada. Probamos que esto ocurre, por ejemplo, si y solamente si la categoría de los módulos filtrados por el sistema coestratificante propio es coresolvente.

4.1. Definición de sistema coestratificante propio.

En esta sección introducimos la noción de sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ e ilustramos con algunos ejemplos. También mostramos que las nociones de Ψ-longitud y Ψ-multiplicidad están bien definidas.

Definición 4.1.1. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Un **sistema coestratificante propio** $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ **de talla** t en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, consiste de dos familias de Λ-módulos $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^t$ y $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$, con $Q(i)$ indescomponible para todo i, y un orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1, t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a) $\operatorname{End}_\Lambda(\Psi(i))$ *es un anillo con división para todo* $i \in [1, t]$.

(b) $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ *si* $i < j$.

(c) Para cada $i \in [1,t]$, existe una sucesión exacta

$$\varepsilon_i : 0 \longrightarrow Z(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i) \longrightarrow 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$.

(d) $\mathbf{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\Psi$, esto es, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(i), -)|_\Psi = 0$ para cada $i \in [1,t]$.

Notaremos por Q al Λ-módulo $\bigoplus_{i=1}^t Q(i)$.

La noción de **sistema estratificante propio** se define dualmente.

Observación 4.1.2. Sean Λ una R-álgebra de artin y $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces:

(a) Para cada $i \in [1,t]$, la aplicación $\beta_i : Q(i) \to \Psi(i)$ es una $\mathrm{add}(Q)$-aproximación minimal a derecha de $\Psi(i)$. En efecto, esto sigue del hecho de que $Q(i)$ es indescomponible y $\mathbf{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\Psi = {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Psi)$.

(b) Sea $(\Psi', \mathbf{Q}', \leq)$ otro sistema coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Si $\Psi(i) \simeq \Psi'(i)$ para todo $i \in [1,t]$, entonces existe un diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{F}(\Psi)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z(i) \arrow[r] \arrow[d] & Q(i) \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d] & \Psi(i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'(i) \arrow[r] & Q'(i) \arrow[r, "\beta'_i"] & \Psi'(i) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos. Esta afirmación sigue de (a), ya que $\mathcal{F}(\Psi) = \mathcal{F}(\Psi')$.

Ejemplo 4.1.3. Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un sistema estratificante Ext-proyectivo de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ (ver Definición 1.11.4 en el Capítulo Preliminares). Si $\mathrm{End}_\Lambda(\Theta(i))$ es un anillo con división para todo $i \in [1,t]$, entonces $(\Psi = \Theta, \mathbf{Q} = \underline{Q}, \leq^{op})$ es un sistema coestratificante propio de talla t.

Notemos que, cuando $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio, no siempre $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq^{op})$ es un sistema estratificante Ext-proyectivo pues puede ocurrir que en la filtración del núcleo de la sucesión ε_i aparezca $\Psi(i)$ como factor de composición (ver Ejemplo 4.1.7).

Ejemplo 4.1.4. Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Para $i \in [1, t]$, consideremos las familias de Λ-módulos $\Psi_i = \{\Psi(j) : j \leq i\}$ y $\mathbf{Q}_i = \{Q(j) : j \leq i\}$. Entonces, $(\Psi_i, \mathbf{Q}_i, \leq)$ es un sistema coestratificante propio en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, de talla menor o igual que t.

Ejemplo 4.1.5. Sean $(\Lambda, \leq)$ un álgebra estándarmente estratificada y $T = \bigoplus_{i=1}^{l} T(i)$ el módulo inclinante característico asociado (ver Sección 1.10 del Capítulo de Preliminares). Consideremos $\mathbf{Q} = \{T(1), \cdots, T(l)\}$ y $\Psi = {}_{\Lambda}\overline{\nabla}$ los módulos propios coestándar.

Por definición de módulo propio coestándar, $\mathrm{End}_{\Lambda}({}_{\Lambda}\overline{\nabla}(i)) \simeq K$ para todo i. Además, (c) de la Proposición 1.9.2 nos dice que el conjunto ${}_{\Lambda}\overline{\nabla}$ verifica la condición sobre el Hom en la definición de sistema coestratificante propio, y por (a) de la Proposición 1.10.3 sabemos que para cada $1 \leq i \leq l$ existe una sucesión exacta

$$0 \to X(i) \to T(i) \to \overline{\nabla}(i) \to 0$$

con $X(i) \in \mathcal{F}(\{\overline{\nabla}(1), ..., \overline{\nabla}(i)\})$. Por otro lado, por el Teorema 2.1 en [AHLU], T verifica que $\mathcal{F}({}_{\Lambda}\overline{\nabla}) = T^{\perp_1}$, por lo que se cumple la condición (d) de la Definición 5.1.1. Así, tenemos que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio de talla l en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Decimos que $({}_{\Lambda}\overline{\nabla}, \{T(i)\}_{i=1}^{l}, \leq)$ es el **sistema coestratificante propio canónico** asociado al álgebra estándarmente estratificada $(\Lambda, \leq)$.

Ejemplo 4.1.6. El siguiente es un ejemplo de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ tal que $\Psi \neq {}_{\Lambda}\overline{\nabla}$ y $(\Lambda, \leq)$ es un álgebra estándarmente estratificada. Sea Λ el álgebra de caminos del carcaj

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ}.$$

Consideremos el orden natural sobre $\{1, 2, 3\}$. Los Λ-módulos propios coestándar pueden ser descriptos de la siguiente manera

$${}_{\Lambda}\overline{\nabla}(1) = 1, \quad {}_{\Lambda}\overline{\nabla}(2) = {\scriptstyle \begin{matrix}1\\2\end{matrix}}, \quad {}_{\Lambda}\overline{\nabla}(3) = {\scriptstyle \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}}.$$

Ahora, consideremos

$$\Psi = \{\Psi(1) = 3,\ \Psi(2) = 1,\ \Psi(3) = {\scriptstyle \begin{matrix}1\\2\end{matrix}}\}$$

y

$$\mathbf{Q} = \{Q(1) = 3,\ Q(2) = 1,\ Q(3) = {\scriptstyle \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}}\}.$$

Entonces $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio de talla 3 en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, que no es el canónico.

Ejemplo 4.1.7. El siguiente es un ejemplo de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ tal que $\Psi \neq {}_\Lambda\overline{\nabla}$ y $(\Lambda, \leq)$ no es un álgebra estándarmente estratificada.

Sea Λ dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[loop above, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

con las relaciones $\beta^2 = 0$, $\alpha\beta = 0$ y $\beta\gamma = 0$. Consideremos el orden natural $\leq$ sobre $\{1, 2, 3\}$, y los conjuntos

$$\Psi = \{\Psi(1) = 2,\ \Psi(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix},\ \Psi(3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\}$$

y

$$\mathbf{Q} = \{Q(1) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix},\ Q(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix},\ Q(3) = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}\}.$$

Entonces $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio de talla 3 en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, y $\Psi \neq {}_\Lambda\overline{\nabla} = \{1, 2, 3\}$.

Lema 4.1.8. *Sea* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Si* $i < j$ *entonces:*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q(i), \Psi(j)) = 0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(i), \Psi(j))$.

(b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$.

Demostración. Sea $i < j$. Por (c) de la Definición 5.1.1, existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Psi)$

$$\varepsilon_i \ : \quad 0 \longrightarrow Z(i) \longrightarrow Q(i) \longrightarrow \Psi(i) \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Psi(j))$ a ε_i, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Q(i), \Psi(j)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(i), \Psi(j)) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) \longrightarrow 0.$$

Sabemos que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(\lambda) : \lambda \leq i\})$ y, como $\lambda \leq i < j$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(\lambda), \Psi(j)) = 0$ (ver (b) y (c) de la Definición 5.1.1). Entonces, es fácil ver que $\mathrm{Hom}_\Lambda(Z(i), \Psi(j)) = 0$. Finalmente, el lema sigue de la última sucesión. $\square$

K. Erdmann y C. Saenz probaron en [ES] que la multiplicidad de filtración $[M : \Theta(i)]$ de $\Theta(i)$ en un Λ-módulo Θ-filtrado M está bien definida, para el módulo simple relativo $\Theta(i)$ asociado a un sistema estratificante $(\Theta, \leq)$. El mismo resultado vale para el módulo simple relativo $\Psi(i)$ de un sistema coestratificante propio, como lo establecemos en el siguiente lema.

Lema 4.1.9. *Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio de talla t en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces:*

(a) Para cada $M \in \mathcal{F}(\Psi)$, la multiplicidad de filtración $[M : \Psi(i)]_\xi$ de $\Psi(i)$ en M no depende de la Ψ-filtración ξ de M dada.

(b) $Q(i) \not\simeq Q(j)$ si $i \neq j$.

Demostración. (a) La demostración es dual a la dada en [ES, Lema 1.4] (ver también [MMS2, Lemma 2.6]), la que puede ser adaptada usando el Lema 4.1.8 y el concepto de longitud en vez del concepto de dimensión.

(b) Supongamos que $Q(i) \simeq Q(j)$ e $i < j$. Por (a) y la Definición 5.1.1, sabemos que $[Q(i) : \Psi(j)] = 0$ y $[Q(j) : \Psi(j)] > 0$, lo que contradice lo primero que asumimos. $\square$

Dado un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, el lema anterior muestra que la multiplicidad de filtración $[M : \Psi(i)]_\xi$ de $\Psi(i)$ en M está bien definida. Entonces podemos definir la función **Ψ-longitud** $\ell_\Psi : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathbb{N}$ como sigue, $\ell_\Psi(M) = \sum_{i=1}^{t}[M : \Psi(i)]$. Puede probarse que la Ψ-longitud es una función aditiva, esto es, que para cada sucesión exacta $0 \to N \to E \to M \to 0$ en $\mathcal{F}(\Psi)$, tenemos que $\ell_\Psi(E) = \ell_\Psi(N) + \ell_\Psi(M)$.

Lema 4.1.10. *Sea $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de Λ-módulos que satisface la condición $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ para $i < j$. Entonces, para cada $M \in \mathcal{F}(\Psi)$, toda Ψ-filtración de M puede ser reordenada, con los mismos Ψ-factores de composición, para obtener una Ψ-filtración $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_s = M$ tal que $M_i/M_{i-1} \simeq \Psi(k_i)$, con $k_1 \leq \cdots \leq k_s$.*

Demostración. La prueba está basada en la siguiente observación. Sea $Z \subseteq Y \subseteq X$ una cadena de Λ-submódulos tales que $X/Y \simeq A$ e $Y/Z \simeq B$. Si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) = 0$ entonces existe un Λ-submódulo W tal que $Z \subseteq W \subseteq X$ con $X/W \simeq B$ y $W/Z \simeq A$. $\square$

El siguiente lema es una generalización del Lema 1.7 de [AHLU] al contexto de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$. Allí, I. Agoston, D.

Happel, E. Lukács y L. Unger mostraron que, si bien la categoría $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$ no es cerrada por núcleos de epimorfismos, se puede probar una propiedad para los módulos propios coestándar análoga a la que demostramos en nuestro próximo resultado. Este lema muestra, en particular, que los $\Psi(i)'$s se comportan en cierto sentido como objetos simples en $\mathcal{F}(\Psi)$ ya que, si $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$, todo morfismo no nulo $X \to \Psi(i)$ es suryectivo, y esto es fundamental en todo lo que sigue.

Lema 4.1.11. *Sean* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*,* $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Psi(i))$*. Si* $f \neq 0$ *entonces* f *es suryectiva y* $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$*.*

Demostración. La demostración del lema es una adaptación de la prueba dada en [AHLU].
Sean $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Psi(i))$. Por el Lema 4.1.10, sabemos que existe una Ψ-filtración de X

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X_s = X$$

donde los factores isomorfos a $\Psi(i)$ aparecen al final de la Ψ-filtración. Sean $K = \mathrm{Ker}(f)$ y $r = \max\{j \in [0,t] : X_j \subseteq K\}$. Entonces, $f \neq 0$ implica $r < s$, y la restricción de f a X_{r+1}, que llamamos g, induce una aplicación no nula $\overline{g} : X_{r+1}/X_r \to \Psi(i)$.
Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(j), \Psi(i)) = 0$ para $j < i$ y $X_{r+1}/X_r \cong \Psi(j)$ con $j \leq i$, obtenemos que $X_{r+1}/X_r \cong \Psi(i)$. Luego, como $\mathrm{End}_\Lambda(\Psi(i))$ es un anillo con división, sabemos que $\overline{g}$ es un isomorfismo (por lo tanto un epimorfismo) y esto implica que f es suryectiva. Más aún, tenemos que $X_{k+1}/X_k \cong \Psi(i)$ para $k \in [r, s-1]$.
Procederemos por inducción sobre el número $[X : \Psi(i)] = n$ para mostrar que $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$.
Si $n = 1$ entonces $r + 1 = s$ y $X_{s-1} \subseteq K \subsetneq X$. Como $X/K \cong \Psi(i)$, ya que f es suryectiva, tenemos que $\ell_\Lambda(X/K) = \ell_\Lambda(\Psi(i))$. Además, $\ell_\Lambda(X/X_{s-1}) = \ell_\Lambda(\Psi(i))$. Entonces $\ell_\Lambda(K) = \ell_\Lambda(X_{s-1})$, de donde $K = X_{s-1} \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$.
Ahora vamos al caso $n > 1$. Podemos también asumir que $X_{s-1} \subseteq K$. Esto nos da una aplicación no nula, y entonces suryectiva, $f_{|X_{s-1}} : X_{s-1} \to \Psi(i)$.

Por lo tanto, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & X/X_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{|X_{s-1}}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X/X_{s-1} \arrow[r] & 0 \\
 & \Psi(i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Psi(i) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0\,. & &
\end{tikzcd}$$

Como $[X_{s-1} : \Psi(i)] < [X : \Psi(i)]$, por hipótesis inductiva sigue que $K' \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Finalmente, de $X/X_{s-1} \cong \Psi(i)$, tenemos que $K \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. $\square$

Corolario 4.1.12. *Sea* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces cualquier aplicación no nula* $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q(i), \Psi(i))$ *es una* $\mathrm{add}(Q)$*-aproximación minimal a derecha de* $\Psi(i)$.

Demostración. Sea $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q(i), \Psi(i))$. Entonces, por el Lema 4.1.11, tenemos que $0 \to \mathrm{Ker}(f) \to Q(i) \xrightarrow{f} \Psi(i) \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Además, de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q, \mathrm{Ker}\,(f)) = 0$ y $Q(i)$ indescomponible, obtenemos que f es una $\mathrm{add}(Q)$-aproximación minimal a derecha de $\Psi(i)$. $\square$

4.2. El álgebra estándarmente estratificada asociada a un sistema coestratificante propio.

En esta sección probamos que, para un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$, el álgebra $\mathrm{End}_\Lambda(Q)$ es estándarmente estratificada. Más aún, la categoría de módulos filtrados por Ψ es dual a la categoría de módulos filtrados por los módulos propios coestándar sobre $\mathrm{End}_\Lambda(Q)$. Finalmente, mostramos que $\mathcal{F}(\Psi)$ es coresolvente precisamente cuando Ψ coincide con los módulos coestándar de un álgebra estándarmente estratificada.

La siguiente proposición es importante para nuestras consideraciones, ya que nos permitirá aplicar resultados del Capítulo 3. El lector debe recordar que, para $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $n \geq 0$, C_n^M es la subcategoría llena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por los Λ-módulos X que admiten una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$M_n \to M_{n-1} \to ... \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{add}(M)$, y tal que la sucesión inducida

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, M_n) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M_{n-1}) \to ... \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M_0) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\mathrm{End}_\Lambda(M)^{op})$.

Proposición 4.2.1. *Sea* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, para cada* $M \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$, *existe una sucesión exacta* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow Q' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *en* $\mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$ *con* $Q' \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j\leq i} Q(j))$. *En particular,* $\mathcal{F}(\Psi) \subseteq C_m^Q$ *para todo* $m \geq 0$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Realizaremos inducción sobre $\ell_\Psi(M)$. Si $\ell_\Psi(M) = 1$ entonces $M \simeq \Psi(i)$ para algún $i \in [1, t]$, y de (c) de la Definición 5.1.1 de sistema coestratificante propio tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i) \longrightarrow 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$.

Sea $\ell_\Psi(M) > 1$. Entonces, existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$

$$0 \longrightarrow \Psi(i_1) \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\gamma} M_1 \to 0,$$

con $\ell_\Psi(M_1) < \ell_\Psi(M)$. Luego, por la hipótesis inductiva, existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$

$$0 \longrightarrow M_1' \longrightarrow Q_1' \xrightarrow{\beta} M_1 \longrightarrow 0$$

con $Q_1' \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j\leq i} Q(j))$. Como $Q \in {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Psi)$, existe un morfismo $\overline{\beta} : Q_1' \to$

M tal que $\beta = \gamma\overline{\beta}$. Así obtenemos un diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z(i_1) \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_1' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q(i_1) \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\beta_{i_1}"'] & Q(i_1) \oplus Q_1' \arrow[r, "(0{,}1)"] \arrow[d, "f"'] & Q_1' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Psi(i_1) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $f = (\alpha\beta_{i_1}, \overline{\beta})$ y $X_2 = \mathrm{Ker}(f)$. Entonces $X_2 \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$ y la sucesión vertical ubicada en el medio es la deseada.

Sea $M \in \mathcal{F}(\Psi)$. Aplicando el funtor $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \to N \to Q_0(M) \to M \to 0,$$

donde $Q_0(M) \in \mathrm{add}(Q)$ y $N \in \mathcal{F}(\Psi)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to F(N) \to F(Q_0(M)) \to F(M) \to 0$$

usando (d) de la Definición 5.1.1. Esto prueba que si $M \in \mathcal{F}(\Psi)$, entonces $M \in C_0^Q$. El proceso se reitera aplicando lo demostrado al módulo $N \in \mathcal{F}(\Psi)$. $\square$

Corolario 4.2.2. *Sean* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(Q)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ *y* $G = Q \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces:*

(a) La restricción $F|_{\mathcal{F}(\Psi)} : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathcal{F}(F(\Psi))$ *es una equivalencia exacta de categorías con quasi-inversa* $G|_{\mathcal{F}(F(\Psi))} : \mathcal{F}(F(\Psi)) \to \mathcal{F}(\Psi)$.

(b) Si $\mathcal{F}(F(\Psi))$ *es cerrada por núcleos de epimorfismos, entonces*

$$\mathrm{add}(Q) = \mathcal{F}(\Psi) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Psi).$$

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que $\mathcal{F}(\Psi) \subseteq C_2^Q$. Por otro lado, de $Q(i)$ indescomponible para cada i y $\mathcal{F}(\Psi)$ cerrada por extensiones, obtenemos que $\mathrm{add}(Q) \subseteq \mathcal{F}(\Psi)$. Luego, las hipótesis del Teorema 3.2.4 son satisfechas por $\mathcal{C} = \Psi$ y $M = Q$, y entonces sigue el resultado. $\square$

Vamos a probar que la familia $\{F(\Psi(i))\}_{i=1}^t$ coincide con la familia de los módulos propios estándar sobre Γ. Este hecho y el corolario previo nos conducen al principal resultado de esta sección, que establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3. *Sean* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(Q)^{op}$, $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ *y* $G = Q \otimes_\Gamma - : \mathrm{mod}\,(\Gamma) \to \mathrm{mod}\,(\Lambda)$. *Sean* ${}_\Gamma\overline{\Delta} = \{{}_\Gamma\overline{\Delta}(i) \ : \ i \in [1,t]\}$ *los módulos propios estándar correspondientes al par* $({}_\Gamma P, \leq^{op})$, *donde* $\leq^{op}$ *es el orden opuesto a* $\leq$. *Entonces:*

(a) La familia ${}_\Gamma P = \{F(Q(i)) \ : \ i \in [1,t]\}$ *es un conjunto de representantes de los* Γ*-módulos proyectivos indescomponibles. En particular* Γ *es un álgebra básica y* $\mathrm{rk}\, K_0(\Gamma) = t$.

(b) La restricción $F|_{\mathcal{F}(\Psi)} : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ *es una equivalencia exacta de categorías con quasi-inversa* $G|_{\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})} : \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \to \mathcal{F}(\Psi)$.

(c) $F(\Psi(i)) \simeq {}_\Gamma\overline{\Delta}(i)$, *para todo* $i \in [1,t]$.

(d) $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ *es un álgebra estándarmente estratificada.*

(e) $\mathrm{add}(Q) = \mathcal{F}(\Psi) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Psi)$.

(f) $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ *es resolvente y cerrada por sumandos directos en* $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Demostración. Es bien conocido que el funtor $F : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$ induce, por restricción, una equivalencia de $\mathrm{add}(Q)$ a $\mathrm{proj}(\Gamma)$ (ver [ARS, II Proposition 2.1]).

(a) Por (b) del Lema 4.1.9 sabemos que $Q = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ es una familia de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Luego (a) resulta de lo mencionado arriba.

(b) y (c) Por el Corolario 4.2.2, sabemos que la restricción $F|_{\mathcal{F}(\Psi)} : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathcal{F}(F(\Psi))$ es una equivalencia exacta de categorías y $G|_{\mathcal{F}(F(\Psi))} : \mathcal{F}(F(\Psi)) \to \mathcal{F}(\Psi)$ es una quasi-inversa de $F|_{\mathcal{F}(\Psi)}$. Así, para obtener (b) y (c), es suficiente probar que

$$F(\Psi(i)) \simeq {}_\Gamma\overline{\Delta}(i) = {}_\Gamma P(i)/\mathrm{tr}_{\bigoplus_{j \geq^{op} i} {}_\Gamma P(j)}\,(\mathrm{rad}\,{}_\Gamma P(i)), \text{ para todo } i \in [1,t].$$

Sea $i \in [1, t]$. Por (c) de la Definición 5.1.1 de sistema coestratificante propio sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to Z(i) \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i) \to 0,$$

donde $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Entonces, aplicando la Proposición 4.2.1 al módulo $Z(i)$, obtenemos una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(t) \longrightarrow Q' \xrightarrow{t} Z(i) \longrightarrow 0,$$

donde $Q' \in \operatorname{add}(\bigoplus_{j \leq i} Q(j))$.
A partir de las dos sucesiones exactas anteriores, y sabiendo que F es exacto en $\mathcal{F}(\Psi)$, tenemos una presentación $Q' \xrightarrow{\alpha_i t} Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i) \to 0$ tal que $F(Q') \xrightarrow{F(\alpha_i t)} F(Q(i)) \xrightarrow{F(\beta_i)} F(\Psi(i)) \to 0$ es exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$. Luego, aplicando (a) del Lema 3.3.3, sigue que

$$\operatorname{Im}(F(\alpha_i)) = \operatorname{Im}(F(\alpha_i t)) \subseteq \operatorname{tr}_{\bigoplus_{j \leq i} F(Q(j))} (\operatorname{rad} F(Q(i))).$$

Entonces, para probar que $F(\Psi(i)) \simeq {}_{\Gamma}\overline{\Delta}(i)$, es suficiente mostrar la inclusión $\operatorname{tr}_{\bigoplus_{j \leq i} F(Q(j))} (\operatorname{rad} F(Q(i))) \subseteq \operatorname{Im}(F(\alpha_i))$. Para probar tal inclusión, asumimos que $j \leq i$ y consideramos un morfismo $\delta : F(Q(j)) \to \operatorname{rad} F(Q(i))$.
Sea $\imath : \operatorname{rad} F(Q(i)) \to F(Q(i))$ el morfismo inclusión, que no es un isomorfismo ya que $F(Q(i)) \in \operatorname{proj}(\Gamma)$ es no nulo por ser indescomponible (ver (a)). Además, por la equivalencia $F|_{\operatorname{add}(Q)} : \operatorname{add}(Q) \to \operatorname{proj}(\Gamma)$, existe un morfismo $\eta : Q(j) \to Q(i)$ tal que $\imath\delta = F(\eta)$. Por lo tanto $\operatorname{Im}(\delta) \subseteq \operatorname{Im}(F(\eta))$. Probaremos ahora que $\operatorname{Im}(F(\eta)) \subseteq \operatorname{Im}(F(\alpha_i))$, de donde sigue que $\operatorname{Im}(\delta) \subseteq \operatorname{Im}(F(\alpha_i))$, probando que $\operatorname{tr}_{\bigoplus_{j \leq i} F(Q(j))} (\operatorname{rad} F(Q(i))) \subseteq \operatorname{Im}(F(\alpha_i))$. Para probar que $\operatorname{Im}(F(\eta)) \subseteq \operatorname{Im}(F(\alpha_i))$, necesitamos mostrar que $F(\beta_i)F(\eta) = 0$ ya que tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(F(\alpha_i)) \longrightarrow F(Q(i)) \xrightarrow{F(\beta_i)} F(\Psi(i)) \longrightarrow 0.$$

Entonces, nos basta probar que la composición $Q(j) \xrightarrow{\eta} Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i)$ es cero. Si $j < i$ esto es verdad ya que, por el Lema 4.1.8, sabemos que $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(Q(j), \Psi(i)) = 0$.
Sea $i = j$ y supongamos que $\beta_i\eta \neq 0$. Por el Corolario 4.1.12, sabemos que $\beta_i\eta : Q(i) \to \Psi(i)$ y $\beta_i : Q(i) \to \Psi(i)$ son ambas $\operatorname{add}(Q)$-aproximaciones minimales a derecha de $\Psi(i)$. Entonces, del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Q(i) \arrow[r, "\beta_i\eta"] \arrow[d, "\eta"] & \Psi(i) \arrow[d, equal] \\ Q(i) \arrow[r, "\beta_i"'] & \Psi(i) \end{tikzcd}$$

obtenemos que η es un isomorfismo. De este modo $F(\eta) = \imath\delta$ también es un isomorfismo, contradiciendo que la inclusión $\imath : \operatorname{rad} F(Q(i)) \to F(Q(i))$ no es un isomorfismo. Luego, $\beta_i \eta = 0$ como queríamos demostrar.

(d) El hecho de que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ sea un álgebra estándarmente estratificada es equivalente a la condición ${}_\Gamma\Gamma \in \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ (ver [D1, 2.2], [ADL, 2.2] o [L]). Es fácil comprobar que esto vale. En efecto, $Q \in \mathcal{F}(\Psi)$ y entonces $\Gamma_\Gamma \simeq F(Q) \in \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$.

(e) y (f) Como $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada (ver (d)), de (b) de la Proposición 1.9.3 sigue que $\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla})$ es coresolvente. Entonces obtenemos por dualidad que $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ es resolvente.
Por otro lado, como en (b) probamos que $F|_{\mathcal{F}(\Psi)}$ es una equivalencia exacta de categorías, sabemos que $\mathcal{F}(F(\Psi)) = \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$. Como esta última subcategoría es resolvente, entonces es cerrada por núcleos de epimorfismos. Por lo tanto, del Corolario 4.2.2 resulta que $\operatorname{add}(Q) = \mathcal{F}(\Psi) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Psi)$.
Finalmente, veamos que $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ es cerrada por sumandos directos en $\operatorname{mod}(\Gamma)$. En efecto, tenemos que $D_\Gamma(\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})) = \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) = \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)^{\perp_1}$ (la última igualdad sigue de de la Proposición 1.9.3 (d)), y entonces el resultado se obtiene observando que $\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)^{\perp_1}$ es cerrada por sumandos directos en $\operatorname{mod}(\Gamma^{op})$. $\square$

Observación 4.2.4. Recordemos que un álgebra Λ is propiamente estratificada si y sólo si ${}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\Delta})$ (ver [D2]). En este caso, los módulos estándar forman un sistema estratificante, y los módulos propios estándar un sistema estratificante propio.

Ejemplo 4.2.5. Sea $({}_\Lambda\overline{\nabla}, \{T(i)\}_{i=1}^{l}, \leq)$ el sistema coestratificante propio canónico asociado al álgebra estándarmente estratificada $(\Lambda, \leq)$ (ver Ejemplo 4.1.5), y por (d) del Teorema 4.2.3, $\Gamma^{op} = \operatorname{End}_\Lambda(T)$ es el 'dual de Ringel' de Λ (ver Sección 1.10).

Ejemplo 4.2.6. Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ el sistema coestratificante propio considerado en el Ejemplo 4.1.6. En este caso, el álgebra $\Gamma^{op} = \operatorname{End}_\Lambda(Q)$ está dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\mu} \underset{2}{\circ}.$$

con la relación $\mu\varepsilon = 0$ (ver Ejemplo 2.1.10 del Capítulo 2, observando que el Λ-módulo Q que estamos considerando aquí coincide con el Λ-módulo M del ejemplo citado). Entonces

$${}_{\Gamma^{op}}\Gamma^{op} = {\textstyle\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}} \oplus 2 \oplus {\textstyle\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}\ .$$

Consideremos $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$, donde $3 \leq^{op} 2 \leq^{op} 1$. Entonces los módulos estándar correspondientes son

$$ {}_{\Gamma^{op}}\Delta = \left\{ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(1) = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(2) = 2,\ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(3) = 3 \right\}. $$

En este caso, es fácil verificar directamente que ${}_{\Gamma^{op}}\Gamma^{op} \in \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$. Esto es, $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada.

Ejemplo 4.2.7. Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ el sistema coestratificante propio considerado en el Ejemplo 4.1.7. Esto es, Λ es el álgebra dada por el carcaj

$$ \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[loop above, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd} $$

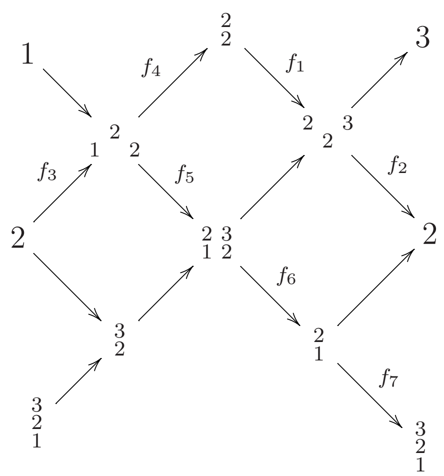
con las relaciones $\beta^2 = 0$, $\alpha\beta = 0$ y $\beta\gamma = 0$,

$$ \Psi = \left\{ \Psi(1) = 2,\ \Psi(2) = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix},\ \Psi(3) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \right\} $$

y

$$ \mathbf{Q} = \left\{ Q(1) = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix},\ Q(2) = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix},\ Q(3) = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \right\}. $$

En este caso el carcaj de Auslander-Reiten de Λ está dado por



.

Luego, $\Gamma^{op} = \mathrm{End}({}_{\Lambda}Q)$ está dada por el carcaj

$$ \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, shift left, "\mu"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd} $$

con las relaciones $\varepsilon\mu = 0$ y $\mu\delta\mu = 0$. Aquí la flecha μ corresponde al morfismo $f_\mu = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, la flecha δ al morfismo $f_\delta = f_4$ y la flecha ε corresponde al morfismo $f_\varepsilon = f_7 \circ f_6 \circ f_5$, que satisfacen $f_\varepsilon \circ f_\mu = 0$ y $f_\mu \circ f_\delta \circ f_\mu = 0$.

Entonces

$$ {}_{\Gamma^{op}}\Gamma^{op} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} . $$

Si consideramos $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$, con $3 \leq^{op} 2 \leq^{op} 1$, entonces los módulos estándar son

$$ {}_{\Gamma^{op}}\Delta = \{ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(1) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix},\ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(2) = 2,\ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(3) = 3\}. $$

Se puede ver directamente que ${}_{\Gamma^{op}}\Gamma^{op} \in \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$. Esto es, $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada.

Proposición 4.2.8. *Sean* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(Q)^{op}$ *y* $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$. *Si* $X, Y \in \mathcal{F}(\Psi)$ *entonces la aplicación* $\rho_{X,Y} : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma(F(X), F(Y))$, *inducida por* F*, es un isomorfismo.*

Demostración. Como $\mathbf{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\Psi)$, el resultado es un consecuencia directa de la Proposición 3.1.4 aplicada a $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\Psi)$ y $M = Q$, ya que la Proposición 4.2.1 muestra que $\mathcal{F}(\Psi) \subseteq C_m^Q$ para cada $m \geq 0$. $\square$

Sea $\mathcal{C}$ una clase de Λ-módulos tal que $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathrm{add}(Q)$ para algún Λ-módulo Q. Sea $M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Recordamos que una **$\mathcal{C}$-cubierta proyectiva de** M, es un morfismo suryectivo $f : Q_M \to M$ de Λ-módulos tal que $Q_M \in \mathrm{add}(Q)$, $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ y f es una $\mathrm{add}(Q)$-aproximación minimal a derecha de M.

Proposición 4.2.9. *Sea* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces* $\mathcal{F}(\Psi)$ *es cerrada por sumandos directos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *y cada objeto en* $\mathcal{F}(\Psi)$ *admite una* Ψ*-cubierta proyectiva.*

Demostración. Recordemos que tenemos la equivalencia exacta

$$ F = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, -) : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}), $$

y también que $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ es cerrada por sumandos directos en $\mathrm{mod}(\Gamma)$ (ver (f) del Teorema 4.2.3). Queremos trasladar esta propiedad a $\mathcal{F}(\Psi)$. Sean $G : \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \to \mathcal{F}(\Psi)$ una quasi-inversa de F y $M \in \mathcal{F}(\Psi)$, y sean $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ y $F(M) = \bigoplus_{j=1}^m X_j$ con M_i y X_j módulos indescomponibles para todo i, j. Como $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ es cerrada por sumandos directos, entonces $X_j \in \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$.

Tenemos $M \simeq GF(M) \simeq \bigoplus_{j=1}^{m} G(X_j)$. Como G es fiel y lleno, G preserva indescomponibles. En efecto, si $e : G(X) \to G(X)$ es un morfismo idempotente, entonces $e = G(e_1)$, para algún morfismo $e_1 : X \to X$. Como G es fiel, resulta que e_1 es idempotente. Pero, como X es indescomponible, entonces $e_1 = 0$ ó $e_1 = id_X$, por lo que $e = 0$ ó $e = G(id_X) = id_{G(X)}$. Esto prueba que $G(X)$ es indescomponible. Luego, del Teorema de Krull-Schmidt sigue que $M_i \simeq G(X_{i_j})$ para algún i_j, probando que $M_i \in \mathcal{F}(\Psi)$, como queríamos.

A continuación probemos que $\mathcal{F}(\Psi)$ admite Ψ-cubiertas proyectivas. Por la Proposición 4.2.1 conocemos la existencia de una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Psi)$

$$0 \to M' \to Q' \xrightarrow{f'} M \to 0,$$

donde f' es una add(Q)-aproximación a derecha de M. Sabemos que $Q' = Q'_1 \oplus Q'_2$, donde $f'|_{Q'_1} : Q'_1 \to M$ es un morfismo minimal a derecha llamado la 'versión minimal a derecha' de f', y $f'|_{Q'_2} = 0$ (ver Sección 2, Capítulo I, [ARS]). Como $Q'_1 \in \text{add}(Q)$, $M' = Q'_2 \oplus \text{Ker}(f')$, y resulta que $\text{Ker}(f') \in \mathcal{F}(\Psi)$. De este modo, como $\mathcal{F}(\Psi)$ es cerrada por sumandos directos, obtenemos que la versión minimal a derecha $f = f'|_{Q'_1} : Q'_1 \to M$ de f' es la Ψ-cubierta proyectiva que buscábamos. $\square$

Para álgebras estándarmente estratificadas sabemos que existe un módulo inclinante T, llamado módulo inclinante característico, tal que $T^{\perp} = \mathcal{F}(\overline{\nabla})$. En el Teorema 2.6 en [AHLU] se prueba que para tales álgebras también existe un $\Gamma = \text{End}(T)^{op}$-módulo coinclinante T' tal que $\mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta}) = {}^{\perp}T'$. Tal módulo T' se llama el módulo coinclinante característico, y coincide con $F(D(\Lambda_\Lambda))$.

El siguiente lema prueba que si los inyectivos de Λ están filtrados por los $\Psi(i)$'s de un sistema coestratificante propio cuya talla coincide con $\text{rk}\, K_0(\Lambda)$, entonces $F(D(\Lambda_\Lambda))$ es un Γ-módulo coinclinante generalizado. Este resultado será útil en lo que sigue.

Recordemos que U es llamado un módulo **coinclinante generalizado** si:

- U tiene dimensión inyectiva finita,
- $\text{Ext}^i_\Lambda(U, U) = 0$ para todo $i > 0$, y
- existe una sucesión exacta $0 \to U^m \to ... \to U^1 \to U^0 \to D(\Lambda_\Lambda) \to 0$ con $U^j \in \text{add}(U)$ para todo j.

Lema 4.2.10. *Sean* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda({}_\Lambda Q)^{op}$, $F = \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, -) : \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{mod}(\Gamma)$ *y* $U = F(D(\Lambda_\Lambda))$. *Sea* ${}_\Gamma\overline{\Delta}$ *la familia de los módulos propios estándar. Si* $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\Psi)$ *y* $t = \operatorname{rk} K_0(\Lambda)$, *entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) U *es un* Γ*-módulo coinclinante generalizado.*

(b) $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) = {}^{\perp}U$ *y* $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \cap \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1} = \operatorname{add}(U)$.

Demostración. Sea $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\Psi)$ y $t = \operatorname{rk} K_0(\Lambda)$. Como $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(-, D(\Lambda_\Lambda)) = 0$, de la Proposición 4.2.8, sigue que $\operatorname{Ext}^1_\Gamma(F(X), F(D(\Lambda_\Lambda))) = 0$ para cada $X \in \mathcal{F}(\Psi)$. Luego, $U = F(D(\Lambda_\Lambda)) \in \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1}$ y entonces $\operatorname{add}(U) \subseteq \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \cap \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1}$. Además, como vimos en el Teorema 4.2.3, $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada. Entonces, del Teorema 2.6 (vi) en [AHLU] resulta que existe un Γ-módulo coinclinante básico U' tal que $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) = {}^{\perp}U'$ y $\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \cap \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1} = \operatorname{add}(U')$. Finalmente, como U' y U tienen el mismo número de sumandos directos indescomponibles y $\operatorname{add}(U) \subseteq \operatorname{add}(U')$, concluimos que $U' \simeq U$ y la demostración está completa. □

Por el Teorema 4.2.3 (e) sabemos que los módulos Ext-proyectivos en $\mathcal{F}(\Psi)$ coinciden con $\operatorname{add}(Q)$. La siguiente proposición describe los Ext-inyectivos en $\mathcal{F}(\Psi)$.

Proposición 4.2.11. *Sean* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$, $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda({}_\Lambda Q)^{op}$, $F = \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, -) : \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{mod}(\Gamma)$ *y* $G = Q \otimes_\Gamma - : \operatorname{mod}(\Gamma) \to \operatorname{mod}(\Lambda)$. *Si* ${}_{\Gamma^{op}}T$ *es el módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$, *entonces*

$$\mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} = \operatorname{add}(GD({}_{\Gamma^{op}}T)).$$

Demostración. Por la Proposición 4.2.8, sabemos que

$$X \in \mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} \Leftrightarrow F(X) \in \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \cap \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1}.$$

Por otro lado, usando [AHLU, Theorem 1.6 (iii), Proposition 2.2 (i)], obtenemos que

$$D(\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \cap \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1}) = \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) = \operatorname{add}({}_{\Gamma^{op}}T).$$

Entonces, tenemos que $X \in \mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1}$ si y sólo si $X \in \operatorname{add}(GD({}_{\Gamma^{op}}T))$.
□

Recordemos que una clase $\mathcal{X}$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es **coresolvente**, si es cerrada por extensiones y por conúcleos de monomorfismos, y contiene a todos los Λ-módulos inyectivos [AR]. A continuación, caracterizamos cuándo un sistema coestratificante propio es el canónico (ver Ejemplo 4.1.5).

Teorema 4.2.12. *Sean Λ un álgebra de artin básica y $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Sean $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(Q)^{op}$ y ${}_{\Gamma^{op}}T$ el módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) $\mathcal{F}(\Psi)$ *es coresolvente.*

(b) $\mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} = \mathrm{add}(D(\Lambda_\Lambda))$.

(c) $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\Psi)$ *y* $t = \mathrm{rk}\, K_0(\Lambda)$.

(d) $\Lambda \simeq \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}Q)$ *y* ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$.

(e) $t = \mathrm{rk}\, K_0(\Lambda)$ *y existe una elección del conjunto de representantes* ${}_\Lambda P = \{{}_\Lambda P(i) : i \in [1,t]\}$ *de Λ-módulos proyectivos indescomponibles tal que* ${}_\Lambda\overline{\nabla}(i) \simeq \Psi(i)$ *para todo* $i \in [1,t]$ *y* $(\Lambda, \leq)$ *es un álgebra estándarmente estratificada.*

(f) $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\Psi)$ *y Q es un Λ-módulo inclinante generalizado.*

Demostración. Consideremos los funtores quasi-inversos $F : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})$ y $G : \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \to \mathcal{F}(\Psi)$, dados en el Teorema 4.2.3. Entonces, de [CE, p. 120], tenemos $G = Q \bigotimes_\Gamma - \simeq D\mathrm{Hom}_\Gamma(-, D(Q))$.

La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ sigue del dual del Lema 3.2.2.

$(b) \Rightarrow (d)$ Sea $\mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} = \mathrm{add}(D(\Lambda_\Lambda))$. Entonces $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\Psi)$, de donde

$$D(\Lambda_\Lambda) \simeq GF(D(\Lambda_\Lambda)) = G(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q, D(\Lambda_\Lambda))) \simeq G(D(Q)).$$

Por la proposición anterior sabemos que $\mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} = \mathrm{add}(GD({}_{\Gamma^{op}}T))$. Entonces, de la hipótesis sigue que $\mathrm{add}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{add}(GD({}_{\Gamma^{op}}T))$. Luego, como Λ es básica, obtenemos que $GD({}_{\Gamma^{op}}T) \simeq G(D(Q))$, de donde ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$. Por último afirmamos que $\Lambda \simeq \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}Q)$. En efecto, los isomorfismos

$$D(\Lambda_\Lambda) \simeq G(D(Q)) \simeq D\mathrm{Hom}_\Gamma(D(Q), D(Q)) \simeq D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Q, Q),$$

muestran que $\Lambda \simeq \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}Q)$.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sean $\Lambda \simeq \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}Q)$ y ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$. En particular, como ${}_{\Gamma^{op}}T$ es básico, tenemos que ${}_{\Gamma^{op}}Q$ lo es también, y así $t = \mathrm{rk}\, K_0(\Lambda)$. Por otro lado, por el Ejemplo 4.1.5, sabemos que $({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}, \{{}_{\Gamma^{op}}T(i)\}_{i=1}^t, \leq^{op})$ es un sistema coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Gamma^{op})$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4.2.3 a este sistema, obtenemos una equivalencia exacta $\widetilde{F} = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(T, -) : \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) \to \mathcal{F}({}_A\overline{\Delta})$ tal que $\widetilde{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(i)) \simeq {}_A\overline{\Delta}(i)$ para todo $i \in [1, t]$, con $A = \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}T)^{op}$. El mismo teorema implica que $(A^{op}, \leq)$ es un álgebra estándarmente estratificada y los ${}_A\overline{\Delta}(i)$'s corresponden al par $({}_AP, \leq)$, donde ${}_AP = \{{}_AP(i) = \widetilde{F}(T(i))\}_{i=1}^t$.

Como estamos asumiendo que ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$, obtenemos que sus anillos de endomorfismos son isomorfos. Como además supusimos que $A = \mathrm{End}({}_{\Gamma^{op}}T)^{op}$, identificaremos Λ y A^{op} a través de este isomorfismo. Entonces ${}_\Lambda\overline{\nabla} = D({}_A\overline{\Delta})$, donde los A-módulos proyectivos son $({}_AP(i))^* = \mathrm{Hom}_A({}_AP(i), A)$.

Finalmente, nos resta probar que ${}_\Lambda\overline{\nabla}(i) \simeq \Psi(i)$ para todo $i \in [1, t]$. Sea $i \in [1, t]$. Como $F(\Psi(i)) \simeq {}_\Gamma\overline{\Delta}(i)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi(i) &\simeq GD({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(i)) \simeq D\mathrm{Hom}_\Gamma(D({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(i)), D(Q)) \simeq \\ &\simeq D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(Q, {}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(i)) \simeq D\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(T, {}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(i)) \simeq D({}_A\overline{\Delta}(i)) \simeq \\ &\simeq {}_\Lambda\overline{\nabla}(i).\end{aligned}$$

$(e) \Rightarrow (f)$ Asumamos que vale (e). En particular ${}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$. Entonces, de [D1, 2.2] (ver también [L]) sigue que $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla}) = \mathcal{F}(\Psi)$. Si ${}_\Lambda T = \oplus_{i=1}^t T(i)$ es el módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada $(\Lambda, \leq)$, sabemos que $({}_\Lambda\overline{\nabla}, \{T(i)\}_{i=1}^t, \leq)$ es un sistema coestratificante propio. De ${}_\Lambda\overline{\nabla}(i) \simeq \Psi(i)$, para todo $i \in [1, t]$, y la unicidad de los sistemas coestratificantes propios probada en la Observación 4.1.2, concluimos que ${}_\Lambda Q \simeq {}_\Lambda T$. Por lo tanto ${}_\Lambda Q$ es un módulo inclinante.

$(e) \Rightarrow (a)$ Como $(\Lambda, \leq)$ es un álgebra estándarmente estratificada, sabemos que $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$ es coresolvente (ver (b) de la Proposición 1.9.3). Además, $\mathcal{F}(\Psi) = \mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla})$ ya que ${}_\Lambda\overline{\nabla}(i) \simeq \Psi(i)$ para todo $i \in [1, t]$, y entonces vale (e).

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $\mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} = \mathrm{add}(D(\Lambda_\Lambda))$. Entonces, la Proposición 4.2.11 nos dice que $\mathrm{add}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{add}(GD({}_{\Gamma^{op}}T))$, y por lo tanto $t = \mathrm{rk}\, K_0(\Lambda)$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sean $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\Psi)$ y $t = \mathrm{rk}\, K_0(\Lambda)$. Aplicando el funtor G a la segunda igualdad en el Lema 4.2.10 (b), obtenemos las igualdades $\mathcal{F}(\Psi) \cap \mathcal{F}(\Psi)^{\perp_1} = G(\mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta}) \cap \mathcal{F}({}_\Gamma\overline{\Delta})^{\perp_1}) = \mathrm{add}(GF(D(\Lambda_\Lambda))) = \mathrm{add}(D(\Lambda_\Lambda))$.

$(f) \Rightarrow (c)$ Sabemos que $t = \operatorname{card}(\operatorname{ind}(\operatorname{add}(Q))) = \operatorname{rk} K_0(\Lambda)$, donde la última igualdad vale ya que ${}_\Lambda Q$ es inclinante, y esto completa nuestra demostración. $\square$

Ejemplo 4.2.13. Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ el sistema coestratificante propio considerado en el Ejemplo 4.2.7. Luego, Λ es el álgebra dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[loop above, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

con las relaciones $\beta^2 = 0$, $\alpha\beta = 0$ y $\beta\gamma = 0$,

$$\Psi = \{\Psi(1) = 2,\ \Psi(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix},\ \Psi(3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\}$$

y

$$\mathbf{Q} = \{Q(1) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix},\ Q(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix},\ Q(3) = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}\}.$$

Por otra parte, $\Gamma^{op} = \operatorname{End}({}_\Lambda Q)$ está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, shift left, "\mu"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd}$$

con las relaciones $\varepsilon\mu = 0$ y $\mu\delta\mu = 0$.

Por el Teorema 4.2.3 sabemos que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada. Aquí, el módulo inclinante característico es

$${}_{\Gamma^{op}}T = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus 3.$$

Para hallar ${}_{\Gamma^{op}}T$ usamos que

$$\operatorname{add}({}_{\Gamma^{op}}T) = \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) \cap {}^{\perp_1}\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) = \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) \cap \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$$

(ver Proposición 4.2.11, y (d) de la Proposición 1.9.3), y el hecho de que, para cada $1 \leq i \leq 3$, ${}_{\Gamma^{op}}T$ satisface simultáneamente las sucesiones exactas

$$0 \to X(i) \to T(i) \to \overline{\nabla}(i) \to 0$$

con $X(i) \in \mathcal{F}(\{\overline{\nabla}(j) : j \leq^{op} i\})$, y

$$0 \to \Delta(i) \to T(i) \to Y(i) \to 0$$

con $Y(i) \in \mathcal{F}(\{\Delta(j) : j <^{op} i\})$ (ver (a) y (b) de la Proposición 1.10.3, Capítulo Preliminares).

Aquí los módulos estándar son

$$_{\Gamma^{op}}\Delta = \{_{\Gamma^{op}}\Delta(1) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix},\ _{\Gamma^{op}}\Delta(2) = 2,\ _{\Gamma^{op}}\Delta(3) = 3\},$$

y los módulos propios coestándar son

$$_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla} = \{_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(1) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix},\ _{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix},\ _{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(3) = 3\}.$$

Entonces, por ejemplo, las sucesiones para $_{\Gamma^{op}}T(1) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ son

$$0 \to (X(1) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to {}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}(1) \to 0$$

con $X(1) \in \mathcal{F}(\{\overline{\nabla}(1) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\})$, y

$$0 \to {}_{\Gamma^{op}}\Delta(1) \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to (Y(1) = 3) \to 0$$

con $Y(1) \in \mathcal{F}(\{_{\Gamma^{op}}\Delta(2) = 2,\ _{\Gamma^{op}}\Delta(3) = 3\})$.

Es claro que $_{\Gamma^{op}}T$ no es isomorfo a

$$_{\Gamma^{op}}Q = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus 2$$

(aquí $_{\Gamma^{op}}Q$ se puede obtener aplicando el Teorema 2.1.8 y las técnicas utilizadas en los ejemplos del Capítulo 2).

Además, es fácil ver que $\Lambda \not\simeq \mathrm{End}(_{\Gamma^{op}}Q)$. Luego, en este ejemplo ninguna de las condiciones de (d) del teorema anterior se verifican.

Capítulo 5

Sobre la existencia y construcción de sistemas coestratificantes propios.

En el Capítulo 4 definimos y estudiamos la noción de sistema coestratificante propio, la cual es una generalización de los llamados módulos propios coestándar al contexto de los sistemas estratificantes.

K. Erdmann y C. Sáenz definieron en [ES] la noción de sistema estratificante $(\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}, \underline{Y}, \leq)$, y probaron que un sistema de este tipo satisface que cada $\Theta(i)$ es indescomponible y que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ para $i \geq j$. Recíprocamente, también mostraron que para una familia dada de Λ-módulos indescomponibles $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ satisfaciendo que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ para $i \geq j$, y tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ para $i > j$, existe un sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$.

Para los sistemas coestratificantes propios, la situación es diferente. Por un lado, es verdad que los $\Psi(i)$'s de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ satisfacen que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ para $i < j$ (ver Lema 4.1.8). Sin embargo, la existencia de una familia $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^{t}$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j))$ para $i < j$, no asegura la existencia de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$, aunque asumamos que $\mathrm{End}_\Lambda(\Psi(i))$ es un anillo con división para todo $i \in [1, t]$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.0.14. Sea Λ el álgebra de Kronecker (ver Sección 1.5 del Capítulo de Preliminares), esto es, Λ es isomorfa al álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{array}{ccc} \circ & \rightrightarrows & \circ \\ 1 & & 2 \end{array}$$

con el orden natural $1 \leq 2$. Consideremos $\Psi = \{\Psi(1) = K \overset{1}{\underset{1}{\rightrightarrows}} K\}$. Entonces con las notaciones de 1.5, $\Psi(1) = \mathcal{R}_{1,1}$ pertenece a un tubo $\mathcal{T}$ de rango 1 del carcaj de Auslander-Reiten de Λ.

Por la estructura del tubo resulta que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}(\Psi)$. En efecto, como $\mathcal{T}$ es de rango 1, $DTr\Psi(1) = \Psi(1)$. Entonces, de la sucesión que casi se parte

$$0 \to \Psi(1) \to \mathcal{R}_{2,1} \to \Psi(1) \to 0,$$

sigue que $\mathcal{R}_{2,1} \in \mathcal{F}(\Psi)$. Reiterando el proceso, se prueba que todos los módulos en el tubo $\mathcal{T}$ son filtrados por Ψ. Luego $\mathcal{F}(\Psi)$ contiene módulos de longitud arbitraria.

Sea ahora $Q(1) \in \mathcal{F}(\Psi)$. Entonces, existe un monomorfismo $\Psi(1) \to Q(1)$. Como $\Psi(1)$ es un módulo regular, entonces no hay morfismos no nulos de $\Psi(1)$ en módulos preproyectivos (ver Proposición 1.4.11). Luego $Q(1)$ es regular o preinyectivo. Además, si es regular está en $\mathcal{T}$, dado que no hay morfismos no nulos entre módulos de distintos tubos (ver en el último párrafo de la Sección 1.5).

Si hay, además, una aplicación $Q(1) \to \Psi(1)$, entonces $Q(1) \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, si $Q(1)$ satisface (c) en la Definición 5.1.1, tenemos que $Q(1) = \mathcal{R}_{i,1} = K^i \overset{1}{\underset{J_{i,1}}{\rightrightarrows}} K^i$ para algún $i \geq 1$ (aquí $J_{i,1}$ denota el bloque de Jordan correspondiente al autovalor 1) y, usando nuevamente la estructura del tubo, tenemos que existe una sucesión exacta que no se parte

$$0 \longrightarrow \Psi(1) \longrightarrow (K^{i+1} \overset{1}{\underset{J_{i+1,1}}{\rightrightarrows}} K^{i+1}) \longrightarrow Q(1) \longrightarrow 0.$$

Luego $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(1), \Psi(1)) \neq 0$.

Esto prueba que no es posible hallar un módulo $Q(1) \in \mathcal{F}(\Psi)$ satisfaciendo (c) y (d) en 5.1.1. Luego, no existe un sistema coestratificante propio $(\Psi, \{Q(1)\}, \leq)$ para la familia Ψ.

Con el ejemplo previo en mente, probaremos el resultado de existencia que queríamos para sistemas coestratificantes propios, asumiendo como hipótesis adicional que la longitud $\ell_\Lambda(X)$ de los módulos indescomponibles X en $\mathcal{F}(\Psi)$ es uniformemente acotada.

En la primer sección de este capítulo introducimos la noción de sistema pre-coestratificante propio $(\Psi, \leq)$. Ésta difiere de la de sistema coestratificante propio, dada en la Definición 5.1.1, en que no incluye a una familia $\mathbf{Q}$ de Λ-módulos indescomponibles ni condiciones sobre la misma. Este nuevo concepto nos garantiza la existencia de Ψ-filtraciones ordenadas para los módulos $X \in \mathcal{F}(\Psi)$, y nos permite definir cierto 'mínimo'de estas Ψ-filtraciones que depende sólo de X y no de la Ψ-filtración ordenada elegida.

Finalmente, en la Sección 2, probamos el principal resultado del capítulo (Teorema 5.2.11). Dado un sistema pre-coestratificante propio $(\Psi, \leq)$, tal que la longitud de los módulos Ψ-filtrados está acotada, demostramos inductivamente la existencia de una familia $\mathbf{Q}$ de Λ-módulos tal que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio. A tal fin, introducimos como auxiliar, una nueva clase de módulos $\mathcal{F}'(\Psi)$ y mostramos las propiedades que verifica la misma.

5.1. Sistemas pre-coestratificantes propios.

Comenzamos esta sección recordando la definición de sistema coestratificante propio introducida en 5.1.1.

Definición 5.1.1. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Un* ***sistema coestratificante propio*** $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ ***de talla*** t *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$*, consiste de dos familias de Λ-módulos $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^t$ y $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$, con $Q(i)$ indescomponible para todo i, y un orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1,t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a) $\operatorname{End}_\Lambda(\Psi(i))$ *es un anillo con división para todo* $i \in [1,t]$.

(b) $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ *si* $i < j$.

(c) Para cada $i \in [1,t]$, existe una sucesión exacta

$$\varepsilon_i : 0 \longrightarrow Z(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Psi(i) \longrightarrow 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$.

(d) $\mathbf{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\Psi$*, esto es,* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Q(i), -)|_\Psi = 0$ *para cada* $i \in [1,t]$.

Notaremos por Q al Λ-módulo $\bigoplus_{i=1}^t Q(i)$.

Ahora sí, introducimos el concepto de sistema pre-coestratificante propio.

Definición 5.1.2. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Un* ***sistema pre-coestratificante propio*** *$(\Psi, \leq)$* ***de talla*** *t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ consiste de una familia de Λ-módulos $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^{t}$ y un orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1,t]$, satisfaciendo las condiciones (a) y (b) de 5.1.1 y la condición*

(c') $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ *para $i < j$.*

Observación 5.1.3. No es difícil probar, usando un argumento inductivo, que si la familia Ψ verifica (b) en la definición anterior, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y) = 0$, para $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j < s\})$, $Y \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \geq s\})$ y $s \in [1,t]$.

Definición 5.1.4. *Sea $(\Psi, \leq)$ un sistema pre-coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, y sea $X \in \mathcal{F}(\Psi)$. Una* ***Ψ-filtración ordenada de X de longitud*** *n es una Ψ-filtración*

$$\mathfrak{O}_{n,X} \ : \quad 0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X,$$

con factores $X_k/X_{k-1} \simeq \Psi(i_k)$ para $1 \leq k \leq n$, donde $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$. En este caso, también decimos que $\mathbf{min}\,(\mathfrak{O}_{n,X}) = i_1$.

Observación 5.1.5. La hipótesis sobre Ext^1, asumida en (c') de la Definición 5.1.2, asegura la existencia de Ψ-filtraciones ordenadas (ver Lema 4.1.10). Más aún, cada Ψ-filtración de X puede ser reordenada para obtener una Ψ-filtración ordenada con los mismos Ψ-factores de composición.

Nuestro objetivo es mostrar que $\min(\mathfrak{O}_{n,X})$ depende sólo de X, y no de la Ψ-filtración ordenada elegida. Para ello, comenzamos demostrando el siguiente lema.

Lema 5.1.6. *Sea $(\Psi, \leq)$ un sistema pre-coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, y consideremos el siguiente diagrama en $\mathrm{mod}(\Lambda)$*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Psi(\tilde{s}) \arrow[d, "q"] & \\
\varepsilon : 0 \arrow[r] & \Psi(s) \arrow[r] & X \arrow[r, "p"] & Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde ε es una sucesión exacta. Si $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) \ : \ j \geq s\})$ y $q \neq 0$, entonces $\tilde{s} \geq s$.

Demostración. Sean $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) \ : \ j \geq s\})$ y $q \neq 0$. Consideremos el pull-back del diagrama anterior

$$\begin{array}{ccccccccc} \varepsilon' \ : \ 0 & \longrightarrow & \Psi(s) & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & \Psi(\tilde{s}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\| & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \\ \varepsilon \ : \ 0 & \longrightarrow & \Psi(s) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & Y & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Si ε' no se parte, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(\tilde{s}), \Psi(s)) \neq 0$, y entonces $\tilde{s} \geq s$. Asumamos ahora que ε' se parte. Luego, existe $q' : \Psi(\tilde{s}) \to X$ tal que $pq' = q$, y como $q \neq 0$, se tiene que $0 \neq q' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(\tilde{s}), X)$. Por lo tanto, de la Observación 5.1.3, concluimos que $\tilde{s} \geq s$ ya que $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) \ : \ j \geq s\})$. $\square$

Proposición 5.1.7. *Sea* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *y sea* $X \in \mathcal{F}(\Psi)$. *Si* $\mathfrak{O}_{m,X}$ *y* $\mathfrak{O}'_{n,X}$ *son* Ψ*-filtraciones ordenadas de* X, *entonces* $\mathrm{mín}\,(\mathfrak{O}_{m,X}) = \mathrm{mín}\,(\mathfrak{O}'_{n,X})$.

Demostración. Sean $\mathrm{mín}\,(\mathfrak{O}_{m,X}) = i_1$ y $\mathrm{mín}\,(\mathfrak{O}'_{n,X}) = j_1$. Entonces, tenemos las sucesiones exactas

$$\varepsilon_1 \ : \ 0 \to \Psi(i_1) \xrightarrow{\nu_1} X \xrightarrow{p_1} Y \to 0$$

y

$$\varepsilon_2 \ : \ 0 \to \Psi(j_1) \xrightarrow{\nu_2} X \xrightarrow{p_2} Z \to 0$$

en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Sea $q = p_1\nu_2 : \Psi(j_1) \to Y$. Si $q \neq 0$, entonces del Lema 5.1.6 sigue que $j_1 \geq i_1$ ya que $X \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \geq i_1\})$. Por otro lado, si $q = 0$, existe algún $\nu : \Psi(j_1) \to \Psi(i_1)$ tal que $\nu_1\nu = \nu_2 \neq 0$. Luego $0 \neq \nu \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(j_1), \Psi(i_1))$ y de este modo $j_1 \geq i_1$. Similarmente, puede verse que $j_1 \leq i_1$, y entonces se prueba la igualdad deseada. $\square$

La proposición anterior nos permite introducir la siguiente definición.

Definición 5.1.8. *Sea* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *y sea* $X \in \mathcal{F}(\Psi)$. *Entonces* $\min\,(X) = \min\,(\mathfrak{O}_{n,X})$ *para cualquier* Ψ*-filtración ordenada* $\mathfrak{O}_{n,X}$ *de* X *de longitud* n.

De la última definición sigue directamente que valen las siguientes afirmaciones.

Observación 5.1.9. Sea $(\Psi, \leq)$ un sistema pre-coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, y sea $X \in \mathcal{F}(\Psi)$. Entonces, existe una sucesión exacta $0 \to \Psi(\min(X)) \to X \to X' \to 0$ en $\mathcal{F}(\Psi)$, que satisface las dos condiciones siguientes:

(a) $\text{mín}\,(X') \geq \min\,(X)$.

(b) Si X tiene una Ψ-filtración ordenada de longitud n, entonces X' tiene una Ψ-filtración ordenada de longitud $n-1$.

5.2. Construcción de la familia $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$.

Sea $(\Psi, \leq)$ un sistema pre-coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. El objetivo de esta sección es probar la existencia de una familia de Λ-módulos $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ tal que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio. La demostración será hecha bajo la hipótesis que $\ell_\Lambda(\mathrm{ind}(\mathcal{F}(\Psi))) < \infty$.

Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, la **Λ-longitud de la clase** $\mathcal{C}$ es $\ell_\Lambda(\mathcal{C}) = \sup\{\ell_\Lambda(C) \ : \ C \in \mathcal{C}\}$, donde $\ell_\Lambda(C)$ es la longitud del Λ-módulo C. Los lemas siguientes serán usados en lo que sigue.

Lema 5.2.1. *Sea* $\varepsilon : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{\alpha_1}{\alpha_2}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{(\beta_1 \ \beta_2)} Z \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta que no se parte en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, donde* X *y* Z *son* Λ*-módulos indescomponibles e* $Y_1 \neq 0$*,* $Y_2 \neq 0$*. Entonces* $\beta_1\alpha_1 = -\beta_2\alpha_2 \neq 0$*.*

Demostración. Supongamos que $\beta_1\alpha_1 = -\beta_2\alpha_2 = 0$. Entonces, puede probarse que $X = \mathrm{Ker}\,(\alpha_1) \oplus \mathrm{Ker}\,(\alpha_2)$. Luego, utilizando el hecho que X es indescomponible, se tiene que $\mathrm{Ker}\,(\alpha_1) = 0$ ó $\mathrm{Ker}\,(\alpha_2) = 0$. Podemos asumir que $\mathrm{Ker}\,(\alpha_1) = 0$ (la demostración para el otro caso es muy similar). De este modo $X = \mathrm{Ker}\,(\alpha_2)$ y así $\alpha_2 = 0$. Entonces $Z \simeq \mathrm{Coker}\,(\binom{\alpha_1}{0}) = Y_1/\alpha_1(X) \oplus Y_2$. Además, como Z es indescomponible e $Y_2 \neq 0$, tenemos que $\alpha_1(X) = Y_1$. Por lo tanto α_1 es un isomorfismo y $(\alpha_1^{-1} \ 0)\binom{\alpha_1}{0} = 1_X$. Luego ε se parte, lo que es una contradicción. $\square$

Lema 5.2.2. *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por extensiones, y sea* $\{\beta_i : X_i \to X_{i-1}\}_{i=1}^{n}$ *una familia de epimorfismos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Si* $\mathrm{Ker}\,(\beta_i) \in \mathcal{C}$ *para todo* $i \in [1, n]$*, entonces* $\mathrm{Ker}(\beta_1 \cdots \beta_n) \in \mathcal{C}$*.*

Demostración. Realizamos la demostración haciendo inducción sobre n. Es inmediato que el lema vale para $n = 1$.
Sea $n > 1$. Ahora, consideremos el siguiente diagrama exacto y conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Ker}(\beta_n) \arrow[d] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ker}(\beta_n) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta_1 \cdots \beta_n) \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "\beta_n"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta_1 \cdots \beta_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[r, "\beta_1 \cdots \beta_{n-1}"] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis $\mathrm{Ker}(\beta_n) \in \mathcal{C}$, y por inducción $\mathrm{Ker}(\beta_1 \cdots \beta_{n-1}) \in \mathcal{C}$. Luego, como $\mathcal{C}$ es cerrada por extensiones, tenemos que $\mathrm{Ker}(\beta_1 \cdots \beta_n) \in \mathcal{C}$ y esto termina la prueba. $\square$

Para continuar con la construcción de la familia $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$, comencemos con una familia con un solo elemento, $\Psi = \{\Psi(1)\}$, tal que $\mathrm{End}_\Lambda(\Psi(1))$ es un anillo con división. Necesitamos construir un módulo indescomponible $Q(1)$ y una sucesión exacta $\varepsilon_1 : 0 \to Z(1) \to Q(1) \to \Psi(1) \to 0$, con $Z(1) \in \mathcal{F}(\{\Psi(1)\})$, y tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(1), \Psi(1)) = 0$. Esto lo vamos a hacer mediante sucesivas extensiones de la siguiente manera:

- Si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(1), \Psi(1)) = 0$, elegimos $Q(1) = \Psi(1)$.

- Si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(1), \Psi(1)) \neq 0$, consideramos una sucesión exacta que no se parte $0 \to \Psi(1) \to X_1 \overset{\beta_1}{\to} X_0 \to 0$, donde $X_0 = \Psi(1)$. En el caso que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_1, \Psi(1)) = 0$, elegimos $Q(1) = X_1$. En caso contrario, una sucesión exacta que no se parte $0 \to \Psi(1) \to X_2 \overset{\beta_2}{\to} X_1 \to 0$. Si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_2, \Psi(1)) \neq 0$, reiteramos el proceso y encontramos sucesiones exactas que no se parten $0 \to \Psi(1) \to X_{i+1} \overset{\beta_{i+1}}{\to} X_i \to 0$ para $i \geq 1$. Como todos los $X_i \in \mathcal{F}(\Psi)$, $\ell_\Lambda(X_{i+1}) > \ell_\Lambda(X_i)$ y estamos asumiendo que $\ell_\Lambda(\mathrm{ind}(\mathcal{F}(\Psi))) < \infty$, este proceso debe detenerse. Luego, existe un número natural n tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_n, \Psi(1)) = 0$, y elegimos $Q(1) = X_n$. Si X_n es indescomponible, la sucesión exacta $0 \to Z(1) \to X_n \overset{\beta_1 \cdots \beta_n}{\longrightarrow} \Psi(1) \to 0$, con $Z(1) = \mathrm{Ker}(\beta_1 \cdots \beta_n)$, satisface las condiciones requeridas ya que $Z(1) \in \mathcal{F}(\Psi)$ (ver Lema 5.2.2).

Sea $\mathcal{F}'(\{\Psi(1)\})$ la familia de todos los módulos X_i que aparecen usando el procedimiento anterior. Entonces, en realidad hemos demostrado el resultado siguiente.

Lema 5.2.3. *Sea* $\Psi(1) \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\mathrm{End}_\Lambda(\Psi(1))$ *es un anillo con división y* $\ell_\Lambda(\mathrm{ind}(\mathcal{F}(\{\Psi(1)\}))) < \infty$. *Entonces, existe una sucesión exacta que no se parte* $0 \to Z(1) \to Q(1) \to \Psi(1) \to 0$ *tal que* $Z(1) \in \mathcal{F}(\{\Psi(1)\})$ *y* $Q(1) \in {}^{\perp_1}\Psi(1) \cap \mathcal{F}'(\{\Psi(1)\})$.

Sólo necesitamos mostrar que el módulo $Q(1)$ del lema es indescomponible. Para ello, probaremos que cada X_i en $\mathcal{F}'(\{\Psi(1)\})$ es indescomponible. Con mayor generalidad, para una familia $\Psi = \{\Psi(1), \cdots, \Psi(t)\}$, definimos a continuación la clase $\mathcal{F}'(\Psi)$ y más adelante, en la Proposición 5.2.10, probamos que los módulos en $\mathcal{F}'(\Psi)$ son indescomponibles.

Definición 5.2.4. *Sea* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Para cada número natural* n *definimos inductivamente la clase* $\mathcal{F}'_n(\Psi)$ *como sigue:*

(a) $\mathcal{F}'_1(\Psi) = \Psi$, *y*

(b) supongamos que $n > 1$ *y que* $\mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$ *ya ha sido definida. Entonces* $X \in \mathcal{F}'_n(\Psi)$ *si y sólo si* $X \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$, *ó* X *admite una* Ψ*-filtración ordenada de longitud* n *y una sucesión exacta que no se parte*

$$\varepsilon_n \; : \quad 0 \to \Psi(\text{mín}\,(X)) \to X \to X' \to 0 \text{ con } X' \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi).$$

Definimos $\mathcal{F}'(\Psi) = \cup_{i \geq 1} \mathcal{F}'_i(\Psi)$.

Observación 5.2.5.

1. Observemos que $\mathcal{F}'_1(\Psi) \subseteq \mathcal{F}'_2(\Psi) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}'_n(\Psi) \subseteq \mathcal{F}(\Psi)$, para cada n.

2. En la definición anterior ε_n es una sucesión en $\mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \geq \min(X)\})$, y X' satisface $\min(X') \geq \min(X)$, como sigue del Lema 5.1.6.

Para un sistema pre-coestratificante propio $(\Psi, \leq)$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, probaremos que cada módulo X en $\mathcal{F}'(\Psi)$ es indescomponible. Haremos la demostración por inducción sobre n tal que X admite una Ψ-filtración ordenada de longitud n. Si $Y \in \mathcal{F}'(\{\Psi(j) : j \geq \min(X)\})$ y $\min(Y) = \min(X)$, entonces la existencia de la sucesión de 5.2.4 nos dice que hay un monomorfismo $\Psi(\text{mín}(X)) \to Y$ con conúcleo en $\mathcal{F}'(\{\Psi(j) : j \geq \min(X)\}) \cup \{0\}$. Ahora bien, para demostrar lo mencionado al comienzo del párrafo, necesitamos probar, más aún, que la condición sobre el conúcleo también se verifica para $Y \in \mathcal{F}'(\{\Psi(j) : j \geq \min(X)\})$ y para cualquier monomorfismo $\eta : \Psi(\min(X)) \to Y$ (no sólo para el dado en la definición). Para ello, comenzamos estudiando propiedades de los monomorfismos con dominio $\Psi(i)$ para algún $i \in [1, t]$.

Definición 5.2.6. *Para cada* $N \in \text{mod}(\Lambda)$*, consideramos la clase* $\mathbb{M}_N$ *de todos los* $X \in \text{mod}(\Lambda)$ *que satisfacen la siguiente propiedad:*

$$\textit{Para todo}\, f \in \text{Hom}_\Lambda(N, X), \quad f \textit{ es cero o es un monomorfismo.}$$

Proposición 5.2.7. *Sea* $0 \to N \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *una sucesión exacta en* $\text{mod}(\Lambda)$*, y sea* $L \in \text{mod}(\Lambda)$*. Entonces vale lo siguiente.*

(a) Si $N \in \mathbb{M}_L$ *y* $Z \in \mathbb{M}_L$*, entonces* $X \in \mathbb{M}_L$*.*

(b) Si $\text{Hom}_\Lambda(L, N) = 0$ *y* $\eta : L \to X$ *es no nulo, entonces* $\beta\eta \neq 0$*.*

(c) Si $Z \in \mathbb{M}_L$ *y* $\eta : L \to X$ *es tal que* $\beta\eta \neq 0$*, entonces* $\eta\,(L) \cap \alpha\,(N) = 0$*.*

Demostración. (a) Asumimos que $N \in \mathbb{M}_L$ y que $Z \in \mathbb{M}_L$, y sea $0 \neq f : L \to X$. A continuación probamos que f es un monomorfismo. En efecto, si $\beta f = 0$, entonces existe $f' : L \to N$ tal que $f = \alpha f'$. Por lo tanto $f' \neq 0$ y entonces f' es un monomorfismo, obteniendo en este caso que f es un monomorfismo. Por otro lado, en el caso que $\beta f : L \to Z$ es no nulo, se tiene que βf es un monomorfismo, y entonces f también lo es.

(b) Sea $\text{Hom}_\Lambda(L, N) = 0$ y sea $\eta : L \to X$ no nulo. Si $\beta\eta : L \to Z$ es cero, entonces existe $\eta' : L \to N$ tal que $\eta = \alpha\eta'$. Luego $\eta = 0$ pues $\eta' \in \text{Hom}_\Lambda(L, N) = 0$, lo que es una contradicción. Esto nos permite concluir que $\beta\eta \neq 0$.

(c) Sean $Z \in \mathbb{M}_L$ y $\eta : L \to X$ tales que $0 \neq \beta\eta : L \to Z$. En particular, como $Z \in \mathbb{M}_L$, tenemos que $\beta\eta$ es un monomorfismo.
Ahora probemos que $\eta\,(L) \cap \alpha\,(N) = 0$. Sea $\lambda = \eta\,(x) = \alpha\,(y)$ con $x \in L$ e $y \in N$. Entonces $\beta\eta\,(x) = \beta\alpha\,(y) = 0$ y como $\beta\eta$ es un monomorfismo, concluimos que $x = 0$ y por lo tanto $\lambda = 0$. Luego $\eta\,(L) \cap \alpha\,(N) = 0$. □

Proposición 5.2.8. *Sea* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Si* $X \in \mathcal{F}(\Psi)$ *y* $\lambda \leq \min(X)$, *entonces* $X \in \mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{F}(\Psi)$. Para abreviar escribimos $\min(X) = i_0$ y consideramos $\lambda \leq i_0$. Realizamos la demostración por inducción sobre n tal que X admite una Ψ-filtración ordenada de longitud n.
Si $n = 0$, tenemos que $X = 0$ y entonces $X \in \mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$. Por otro lado, si $n = 1$ entonces $X \simeq \Psi(i_0)$ y $\lambda \leq i_0$. Sea $0 \neq f : \Psi(\lambda) \to X \simeq \Psi(i_0)$. Como $(\Psi, \leq)$ es un sistema pre-coestratificante propio, resulta que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(\lambda), \Psi(i_0)) \neq 0$ implica $\lambda \geq i_0$, de donde $\lambda = i_0$. Luego $f \in \mathrm{End}_\Lambda(\Psi(\lambda))$, que es un anillo con división, por lo que f es un isomorfismo. Esto prueba que $X \in \mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$ en este caso.
Sea $n > 1$ y supongamos que X admite una Ψ-filtración ordenada de longitud n. Si $\lambda < i_0$, por la Observación 5.1.3, obtenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(\lambda), X) = 0$ y así $X \in \mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$. Asumamos ahora que $\lambda = i_0$. Por la Observación 5.1.9, sabemos que existe una sucesión exacta

$$\varepsilon \ : \quad 0 \to \Psi(i_0) \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X' \to 0$$

con $\min(X') \geq i_0$ y tal que X' tiene una Ψ-filtración ordenada de longitud $n-1$. Entonces, por inducción, $X' \in \mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$. Ahora, como $\mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$ es cerrada por extensiones, como probamos en (a) de la Proposición 5.2.7, obtenemos que $X \in \mathbb{M}_{\Psi(\lambda)}$. $\square$

Estamos ahora en condiciones de probar el resultado arriba mencionado sobre conúcleos de monomorfismos $\Psi(\text{mín}\,(X)) \to X$.

Proposición 5.2.9. *Sean* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces, para cada* $X \in \mathcal{F}'_n(\Psi)$ *y cada morfismo no nulo* $\eta : \Psi(\min(X)) \to X$, *tenemos que* $X/\eta(\Psi(\min(X))) \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi) \cup \{0\}$.

Demostración. Consideremos $X \in \mathcal{F}'_n(\Psi)$, $i_0 = \min(X)$ y un morfismo no nulo $\eta : \Psi(i_0) \to X$. Procedemos por inducción sobre n.
Si $n = 1$ entonces $X = \Psi(i_0)$ y por lo tanto η es un isomorfismo, luego $X/\eta(\Psi(i_0)) = 0$.
Sea $n > 1$. Si $X \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$, entonces por inducción obtenemos que

$$X/\eta(\Psi(\min(X))) \in \mathcal{F}'_{n-2}(\Psi) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi) \cup \{0\}.$$

En caso contrario, existe una sucesión exacta que no se parte

$$\varepsilon \ : \quad 0 \to \Psi(i_0) \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X' \to 0,$$

con $X' \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$. Por la Observación 5.2.5 (2), sabemos que $\min(X') \geq i_0$. Entonces, por la Proposición 5.2.8, concluimos que $X' \in \mathbb{M}_{\Psi(i_0)}$.
Si $\alpha(\Psi(i_0)) = \eta(\Psi(i_0))$ entonces $X/\eta(\Psi(i_0)) \simeq X' \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$.
Sea $\alpha(\Psi(i_0)) \neq \eta(\Psi(i_0))$. Afirmamos que $0 \neq \beta\eta : \Psi(i_0) \to X'$. En efecto, si $\beta\eta = 0$ existe un morfismo $\eta' : \Psi(i_0) \to \Psi(i_0)$ tal que $\eta = \alpha\eta'$, luego η' es un isomorfismo ya que $\eta' \neq 0$. De este modo $\eta(\Psi(i_0)) = \alpha(\eta'(\Psi(i_0))) = \alpha(\Psi(i_0))$, contradiciendo nuestra hipótesis y probando que $\beta\eta \neq 0$. Entonces, de $X' \in \mathbb{M}_{\Psi(i_0)}$ y (c) de la Proposición 5.2.7, concluimos que $\beta\eta : \Psi(i_0) \to X'$ es un monomorfismo y que $\alpha(\Psi(i_0)) \cap \eta(\Psi(i_0)) = 0$. Así, obtenemos el siguiente diagrama exacto y conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Psi(i_0) & \longrightarrow & \beta\eta(\Psi(i_0)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow & & \\
\varepsilon : & 0 & \longrightarrow & \Psi(i_0) & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{\beta} & X' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\varepsilon' : & 0 & \longrightarrow & \Psi(i_0) & \longrightarrow & X/\eta(\Psi(i_0)) & \longrightarrow & X'/\beta\eta(\Psi(i_0)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & .
\end{array}$$

Como $X' \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$, por inducción tenemos que $X'/\beta\eta(\Psi(i_0)) \in \mathcal{F}'_{n-2}(\Psi) \cup \{0\}$. Si $X'/\beta\eta(\Psi(i_0)) = 0$ entonces $X/\eta(\Psi(i_0)) \simeq \Psi(i_0) \in \mathcal{F}'_1(\Psi) \subseteq \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$. En el caso que $X'/\beta\eta(\Psi(i_0)) \in \mathcal{F}'_{n-2}(\Psi)$, $X'/\beta\eta(\Psi(i_0))$ tiene una Ψ-filtración ordenada de longitud $n-2$, y usando la sucesión ε' obtenemos que $X/\eta(\Psi(i_0))$ tiene una Ψ-filtración ordenada de longitud $n-1$. Por otro lado, como la sucesión ε no se parte, resulta que ε' tampoco se parte. Esto prueba que $X/\eta(\Psi(i_0)) \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$. □

Proposición 5.2.10. *Sea* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, todo* Λ*-módulo en* $\mathcal{F}'(\Psi)$ *es indescomponible.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{F}'_n(\Psi)$ y $i_0 = \min(X)$. Probaremos haciendo inducción sobre n que X es un Λ-módulo indescomponible. Si $n = 1$ entonces $X = \Psi(i_0)$ y por lo tanto X es indescomponible.

Sea $n > 1$. Si $X \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$ entonces, por inducción, obtenemos que X es indescomponible. En caso contrario, existe una sucesión exacta que no se parte $\varepsilon : 0 \to \Psi(i_0) \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ con $Z \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$. Por la hipótesis inductiva sabemos que Z es indescomponible. Probemos ahora que X es indescomponible.

Supongamos que $X = X' \oplus X''$ con $X', X'' \neq 0$. Entonces

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \end{pmatrix} : \Psi(i_0) \to X' \oplus X'' \text{ y } \beta = (\beta' \ \beta'') : X' \oplus X'' \to Z.$$

De este modo, por el Lema 5.2.1, $\beta'\alpha'(\Psi(i_0)) = -\beta''\alpha''(\Psi(i_0)) \neq 0$. Luego, por la Proposición 5.2.8, tenemos que $\beta''\alpha'' : \Psi(i_0) \to Z$ y $\beta'\alpha' : \Psi(i_0) \to Z$ son monomorfismos. En particular, α' y α'' son monomorfismos. Además, de $\beta'\alpha'(\Psi(i_0)) = -\beta''\alpha''(\Psi(i_0))$, sigue que el epimorfismo $\beta : X \to Z$ induce un epimorfismo

$$X'/\alpha'(\Psi(i_0)) \oplus X''/\alpha''(\Psi(i_0)) \xrightarrow{\overline{\beta}} Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0)).$$

Las igualdades

$$\begin{aligned} \ell_\Lambda(X'/\alpha'(\Psi(i_0)) \oplus X''/\alpha''(\Psi(i_0))) &= \ell_\Lambda(X) - \ell_\Lambda(\Psi(i_0)) - \ell_\Lambda(\Psi(i_0)) = \\ &= \ell_\Lambda(Z) - \ell_\Lambda(\Psi(i_0)) = \\ &= \ell_\Lambda(Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0))) \end{aligned}$$

muestran que $\overline{\beta}$ es un isomorfismo.

A continuación, mostraremos que $Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0))$ es indescomponible. Supongamos que $Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0)) = 0$. Entonces, por el isomorfismo $\overline{\beta}$, tenemos $X' = \alpha'(\Psi(i_0))$. Por lo tanto, el morfismo $((\alpha')^{-1} \ 0) : X' \oplus X'' \to \Psi(i_0)$ muestra que ε se parte, una contradicción, probando que $Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0)) \neq 0$. Ahora, consideremos la sucesión exacta

$$\varepsilon' : 0 \longrightarrow \Psi(i_0) \xrightarrow{\beta'\alpha'} Z \longrightarrow Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0)) \longrightarrow 0.$$

Como $Z \in \mathcal{F}'_{n-1}(\Psi)$, de la Proposición 5.2.9 sigue que $Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0))$ pertenece a $\mathcal{F}'_{n-2}(\Psi)$. Luego, por inducción, obtenemos que $Z/\beta'\alpha'(\Psi(i_0))$ es indescomponible.

Finalmente, usando que la aplicación $\overline{\beta}$ es un isomorfismo, tenemos que $\alpha'(\Psi(i_0)) = X'$ ó $\alpha''(\Psi(i_0)) = X''$. En cualquier caso, ε se parte, lo que contradice lo asumido. Esta contradicción demuestra que X es un Λ-módulo indescomponible. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el principal resultado de este capítulo.

Teorema 5.2.11. *Sea* $(\Psi, \leq)$ *un sistema pre-coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Si* $\ell_\Lambda(\mathrm{ind}(\mathcal{F}(\Psi))) < \infty$ *entonces existe una familia* $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ *de* Λ*-módulos en* $\mathcal{F}'(\Psi)$ *tal que* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *es un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Sea $\ell_\Lambda(\mathrm{ind}(\mathcal{F}(\Psi))) < \infty$. Como los módulos en $\mathcal{F}'(\Psi)$ son indescomponibles (ver la proposición anterior), la demostración se completa mostrando que existe una familia $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos en $\mathcal{F}'(\Psi)$, satisfaciendo las condiciones (c) y (d) de la Definición 5.1.1 de sistema coestratificante propio. Para probar esto realizaremos inducción sobre la talla t de Ψ. Si $t = 1$, el resultado sigue directamente del Lema 5.2.3.

Sea $t > 1$. Para simplificar, podemos asumir que el orden $\leq$ considerado en $[1, t]$ es el natural. Así tenemos que $(\widetilde{\Psi}, \leq)$, con $\widetilde{\Psi} = \{\Psi(2), ..., \Psi(t)\}$, es un sistema pre-coestratificante propio de talla $t - 1$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, de la hipótesis inductiva aplicada a este sistema de menor talla, concluimos la existencia de una familia $\widetilde{Q} = \{\widetilde{Q}(i)\}_{i=2}^t$ en $\mathcal{F}'(\widetilde{\Psi}) \subseteq \mathcal{F}'(\Psi)$ satisfaciendo:

($\widetilde{c}$) para cada $i \in [2, t]$ existe una sucesión exacta

$$\widetilde{\varepsilon}_i : 0 \to \widetilde{Z}(i) \to \widetilde{Q}(i) \xrightarrow{\lambda_i} \Psi(i) \to 0,$$

con $\widetilde{Z}(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : 2 \leq j \leq i\})$; y

($\widetilde{d}$) $\widetilde{Q} \subseteq {}^{\perp_1}\widetilde{\Psi}$.

Ahora, consideremos la familia con un solo elemento $\{\Psi(1)\}$. En este caso ya hemos probado el teorema. Entonces, existe una sucesión exacta

$$\varepsilon_1 : 0 \to Z(1) \to Q(1) \xrightarrow{\beta} \Psi(1) \to 0$$

con $Z(1) \in \mathcal{F}(\{\Psi(1)\})$, $Q(1) \in \mathcal{F}'(\{\Psi(1)\}) \subseteq \mathcal{F}'(\Psi)$ y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(1), \Psi(1)) = 0$. Luego (c) de la definición de sistema coestratificante propio vale para $i = 1$. Además, como $Q(1) \in \mathcal{F}(\{\Psi(1)\})$ y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Psi(1), \Psi(j)) = 0$ para $j \geq 2$, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q(1), \Psi) = 0$. Esto es, vale (d) en la Definición 5.1.1 para $i = 1$.

A continuación construimos la sucesión exacta ε_i requerida, para cada $i \in [2, t]$.

Si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\widetilde{Q}(i), \Psi(1)) = 0$, entonces consideramos $\varepsilon_i = \widetilde{\varepsilon}_i$ y $Q(i) = \widetilde{Q}(i)$. Supongamos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\widetilde{Q}(i), \Psi(1)) \neq 0$. Entonces existe una sucesión exacta que no se parte

$$\delta_1 : 0 \to \Psi(1) \to X_1 \xrightarrow{\beta_1} \widetilde{Q}(i) \to 0.$$

Como $\widetilde{Q}(i) \in \mathcal{F}'(\Psi)$, tenemos que $X_1 \in \mathcal{F}'(\Psi)$. Además, $X_1 \in {}^{\perp_1}\widetilde{\Psi}$, lo que se obtiene aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Psi(j))$ a δ_1, con $j \in [2, t]$. Por otro lado, tenemos la sucesión exacta

$$\nu_1 : 0 \to L_1 \to X_1 \xrightarrow{\lambda_i \beta_1} \Psi(i) \to 0$$

donde $L_1 = \mathrm{Ker}(\lambda_i \beta_1)$. Entonces, por el Lema 5.2.2, $L_1 \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Luego, si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_1, \Psi(1)) = 0$ concluimos que $\varepsilon_i = \nu_1$, con $Q(i) = X_1$, satisface las condiciones requeridas.

Asumamos ahora que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_1, \Psi(1)) \neq 0$. Entonces existe una sucesión exacta que no se parte

$$\delta_2 : 0 \to \Psi(1) \to X_2 \xrightarrow{\beta_2} X_1 \to 0.$$

Aquí $X_2 \in \mathcal{F}'(\Psi)$ pues $X_1 \in \mathcal{F}'(\Psi)$. Análogamente, de $X_1 \in {}^{\perp_1}\widetilde{\Psi}$ tenemos que $X_2 \in {}^{\perp_1}\widetilde{\Psi}$. Además, por el Lema 5.2.2, tenemos una sucesión exacta

$$\nu_2 : 0 \to L_2 \to X_2 \xrightarrow{\lambda_i \beta_1 \beta_2} \Psi(i) \to 0$$

donde $L_2 \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Iterando este procedimiento, obtenemos sucesiones exactas que no se parten

$$\delta_j : 0 \to \Psi(1) \to X_j \xrightarrow{\beta_j} X_{j-1} \to 0$$

con $X_j \in \mathcal{F}'(\Psi) \cap {}^{\perp_1}\widetilde{\Psi}$, para $1 \leq j \leq k$. Como $\ell_\Lambda(X_1) < \ell_\Lambda(X_2) < \cdots < \ell_\Lambda(X_k)$ y $\ell_\Lambda(\mathrm{ind}(\mathcal{F}(\Psi))) < \infty$, tarde o temprano alcanzamos algún $X_n \in \mathcal{F}'(\Psi) \cap {}^{\perp_1}\widetilde{\Psi}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_n, \Psi(1)) = 0$. Entonces $X_n \in {}^{\perp_1}\Psi$. De este modo, la sucesión exacta

$$0 \to Z(i) \to Q(i) \xrightarrow{\beta} \Psi(i) \to 0$$

con $Q(i) = X_n$, $\beta = \lambda_i \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$ y $Z(i) = \mathrm{Ker}(\beta)$ satisface las condiciones requeridas. $\square$

Corolario 5.2.12. *Sea Λ un álgebra de artin de tipo de representación finito. Entonces todo sistema pre-coestratificante propio $(\Psi, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ define un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.*

Capítulo 6

Sobre la existencia de sistemas coestratificantes propios en relación a la existencia de sistemas estratificantes Ext-inyectivos.

Sea $P(1), ..., P(l)$ una sucesión ordenada de módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos sobre un álgebra de artin Λ. Recordemos que el módulo estándar ${}_{\Lambda}\Delta(i)$ es el mayor módulo cociente de $P(i)$ con factores de composición sólo entre $S(1), ..., S(i)$, donde $S(j)$ es el top simple de $P(j)$, y que el módulo coestándar ${}_{\Lambda}\nabla(i)$ es el submódulo más grande de la cápsula inyectiva $I(i)$ de $S(i)$, con factores de composición también entre $S(1), ..., S(i)$. También tengamos presente que $\mathcal{F}({}_{\Lambda}\Delta)$ es la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ formada por los Λ-módulos que tienen una filtración con factores isomorfos a los módulos estándar (ver Sección 1.9 del Capítulo Preliminares de este trabajo). Sabemos que el álgebra Λ se dice estándarmente estratificada si todos los Λ-módulos proyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_{\Lambda}\Delta)$ (ver [CPS], [ADL], [AHLU], [W], [ES], [PR], [Xi]).

Para un álgebra de artin Λ existe otra importante familia de módulos: los módulos propios estándar (respectivamente, propios coestándar) ${}_{\Lambda}\overline{\Delta}(i)$ (respectivamente, ${}_{\Lambda}\overline{\nabla}(i)$), definidos como cierto cociente apropiado de los módulos ${}_{\Lambda}\Delta(i)$ (respectivamente, submódulo apropiado de los ${}_{\Lambda}\nabla(i)$). Estos módulos fueron definidos por V. Dlab y tienen la propiedad de que Λ es un álgebra estándarmente estratificada, esto es, todos los Λ-módulos proyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_{\Lambda}\Delta)$, si y sólo si todos los Λ-módulos inyectivos pertenecen a $\mathcal{F}({}_{\Lambda}\overline{\nabla})$ (ver [D1] y [L]). Aquí $\mathcal{F}({}_{\Lambda}\overline{\nabla})$ denota a la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que consiste de los Λ-módulos que tienen una filtración con factores isomorfos a los módulos propios coestándar.

En conexión con el estudio de las álgebras estándarmente estratificadas, I. Agoston, D. Happel, E. Lukács y L. Unger mostraron que, para un álgebra $(\Lambda, \leq)$ de este tipo, se verifica que $\mathcal{F}({}_\Lambda\overline{\nabla}) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1} = \{M \in \operatorname{mod}(\Lambda) : \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta), M) = 0\}$ (ver [AHLU]). Además, probaron que existe un Λ-módulo inclinante $T = \{T(i)\}_{i=1}^l$, llamado módulo inclinante característico, tal que $\operatorname{add}(T) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1}$ (ver también [PR]). Además, se tiene que $({}_\Lambda\Delta, \{T(i)\}_{i=1}^l, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo, como mencionamos en la Sección 1.11, y que $({}_\Lambda\overline{\nabla}, \{T(i)\}_{i=1}^l, \leq)$ es un sistema coestratificante propio (ver Ejemplo 4.1.5 del Capítulo 4).

Esto motiva el siguiente problema: dado un conjunto $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos y un orden lineal $\leq$ sobre $\{1, 2, ..., t\}$, ¿cómo se relaciona la existencia de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ con la existencia de un sistema estratificante Ext-inyectivo $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$?

En la segunda sección de este capítulo estudiamos esta pregunta, probando dos teoremas. El primero de ellos nos da, dado un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo (Teorema 6.2.1). El segundo es el resultado recíproco (Teorema 6.2.4).

En la Sección 1 estudiamos el siguiente problema más general sobre sistemas estratificantes Ext-inyectivos, que será muy útil en el desarrollo de la Sección 2: dada una familia $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, dar condiciones necesarias y suficientes para que exista una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ tal que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo.

El lector recordará que los sistemas estratificantes Ext-inyectivos fueron introducidos por K. Erdmann y C. Sáenz en [ES] bajo el nombre de sistemas estratificantes (ver también [MMS1]).

6.1. Algunas caracterizaciones homológicas.

Sea M un Λ-módulo. En esta sección recordamos la definición de la subcategoría C_2^M, introducida por M.I. Platzeck y N. Pratti en [PP1], y $C_2^{\vee M}$ que hemos introducido en la Sección 1.8 de los Preliminares de esta tesis. Dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, estudiamos propiedades de la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ de módulos filtrados por $\mathcal{C}$ cuando $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^{\vee M}$.

Los resultados obtenidos en esta dirección nos permitirán dar una respuesta al problema arriba planteado sobre la existencia de sistemas estratificantes Ext-inyectivos.

En este capítulo, para M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ consideramos el álgebra de artin $\Gamma_M = \mathrm{End}({}_\Lambda M)^{op}$ y los funtores

$$\mathrm{mod}(\Lambda) \underset{G_M}{\overset{F_M}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}(\Gamma),$$

donde $F_M = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ y $G_M = M \otimes_\Gamma -$, así como los funtores

$$\mathrm{mod}(\Lambda) \underset{\overline{G}_M}{\overset{\overline{F}_M}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}(\Gamma^{op}),$$

donde $\overline{F}_M = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ y $\overline{G}_M = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(-, M)$. También tenemos el funtor $* = \mathrm{Hom}_\Gamma(-, \Gamma) : \mathrm{mod}(\Gamma) \to \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$. Este funtor induce una dualidad $* : \mathrm{proj}(\Gamma) \to \mathrm{proj}(\Gamma^{op})$, cuya quasi-inversa $\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(-, \Gamma^{op})$ también es notada por $*$. Finalmente, notamos por D a la dualidad usual para álgebras de artin.

Recordamos que los funtores F_M y G_M inducen, por restricción, equivalencias inversas entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$. Además, los funtores $\overline{F}_M$ y $\overline{G}_M$ inducen, por restricción, dualidades inversas entre $\mathrm{add}(M)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma^{op})$.

Lema 6.1.1. *Sea M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces:*

(a) $(\overline{G}_M \circ * \circ F_M)|_{\mathrm{add}(M)} \simeq 1_{\mathrm{add}(M)}$.

(b) $(* \circ F_M)|_{\mathrm{add}(M)} \simeq \overline{F}_M|_{\mathrm{add}(M)}$.

Demostración. (a) Para cada $X \in \mathrm{add}(M)$, tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\overline{G}_M(F_M(X)^*) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(F_M(X)^*, M) \simeq F_M(X)^{**} \otimes_{\Gamma^{op}} M \simeq$$

$$\simeq F_M(X) \otimes_{\Gamma^{op}} M \simeq M \otimes_\Gamma F_M(X) \simeq G_M \circ F_M(X) \simeq X.$$

(b) El resultado sigue de (a) ya que $(\overline{F}_M \circ \overline{G}_M)|_{\mathrm{proj}(\Gamma^{op})} \simeq 1_{\mathrm{proj}(\Gamma^{op})}$. □

A continuación, recordamos la definición de la clase C_2^M. Los objetos en C_2^M son los Λ-módulos X que admiten una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$M_2 \to M_1 \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{add}(M)$, y tales que la sucesión inducida

$$F_M(M_2) \to F_M(M_1) \to F_M(M_0) \to F_M(X) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

En la Sección 1.8 del Capítulo Preliminares introdujimos las categorías $C_n^{\vee M}$. Recordamos ahora que los objetos de $C_2^{\vee M}$ son los Λ-módulos Z que admiten una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \to Z \to M_0 \to M_1 \to M_2,$$

con $M_i \in \mathrm{add}(M)$, y tales que la sucesión inducida

$$\overline{F}_M(M_2) \to \overline{F}_M(M_1) \to \overline{F}_M(M_0) \to \overline{F}_M(Z) \to 0$$

es exacta en $\mathrm{mod}(\Gamma^{op})$.

Observación 6.1.2. Sea M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, como $F_{DM} \circ D \simeq \overline{F}_M$ y $D \circ G_{DM} \simeq \overline{G}_M$, tenemos que $D(C_2^{\vee M}) = C_2^{DM}$. Además, los anillos Γ_M y Γ_{DM}^{op} son isomorfos.

Proposición 6.1.3. *Sea M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, y sea $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $M \in \mathcal{C}^{\perp_1}$. Si $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq C_2^{\vee M}$ entonces la restricción*

$$\overline{F}_M|_{\mathcal{F}(\mathcal{C})} : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathcal{F}(\overline{F}_M(\mathcal{C}))$$

es una dualidad exacta con quasi-inversa

$$\overline{G}_M|_{\mathcal{F}(\overline{F}_M(\mathcal{C}))} : \mathcal{F}(\overline{F}_M(\mathcal{C})) \to \mathcal{F}(\mathcal{C}).$$

Demostración. De la Observación 6.1.2 sigue que este resultado es dual a la afirmación del Teorema 3.2.4. □

Para una familia dada $\underline{M} = \{M(i)\}_{i=1}^t$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, consideramos $M = \bigoplus_{i=1}^t M(i)$. Ahora recordemos la definición de sistema estratificante Ext-inyectivo que ya hemos mencionado en los Preliminares de este trabajo (ver Sección 1.11).

Definición 6.1.4. *Un **sistema estratificante Ext-inyectivo** $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, consiste de dos familias de Λ-módulos no nulos $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ e $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$, con $Y(i)$ indescomponible para todo i, y un orden lineal $\leq$ sobre el conjunto $[1, t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *si* $i > j$.

(b) Para cada $i \in [1,t]$, existe una sucesión exacta

$$0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,Y)|_\Theta = 0$.

En lo que resta de esta sección denotaremos por $\underline{Y}$ a la familia de Λ-módulos indescomponibles $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$, $\Gamma = \mathrm{End}({}_\Lambda Y)^{op}$ y $F = F_Y$, $G = G_Y$, $\overline{F} = \overline{F}_Y$ y $\overline{G} = \overline{G}_Y$. Como observamos al principio de esta sección, $\overline{F}$ induce por restricción una dualidad entre $\mathrm{add}(Y)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma^{op})$. Designaremos por ${}_{\Gamma^{op}}\overline{P}$ al conjunto $\{{}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i) \ : \ i \in [1,t]\}$ de representantes de los Γ^{op}-módulos proyectivos indescomponibles, donde ${}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i) = \overline{F}(Y(i))$ para todo i.

Observación 6.1.5. Notemos que tenemos dos conjuntos de representantes de los Γ^{op}-módulos proyectivos indescomponibles: ${}_{\Gamma^{op}}\overline{P}$ (definido arriba) y ${}_{\Gamma^{op}}P = \{{}_{\Gamma^{op}}P(i) = F(Y(i))^* \ : \ i \in [1,t]\}$. Esta última familia se obtiene usando la equivalencia inducida por F entre $\mathrm{add}(Y)$ y $\mathrm{proj}(\Gamma)$, y la dualidad $* : \mathrm{proj}(\Gamma) \to \mathrm{proj}(\Gamma^{op})$.

Del Lema 6.1.1 (b), sigue que ${}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i) \simeq {}_{\Gamma^{op}}P(i)$ para todo i. En particular, si $\leq$ es un orden lineal definido sobre $[1,t]$ y $\leq^{op}$ es el orden opuesto a $\leq$, no existen diferencias (a menos de isomorfismos) entre la familia de los Γ^{op}-módulos estándar (propios estándar) calculados usando $({}_{\Gamma^{op}}\overline{P}, \leq^{op})$, y los calculados usando $({}_{\Gamma^{op}}P, \leq^{op})$.

Necesitaremos el siguiente resultado, probado por E. Marcos, O. Mendoza y C. Sáenz en el Teorema 2.3 en [MMS1], que da condiciones necesarias y suficientes para que una familia de Λ-módulos indescomponibles $\underline{Y}$ admita un sistema estratificante Ext-inyectivo $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$.

Teorema 6.1.6. *Sean $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, y $\leq$ un orden lineal sobre $[1,t]$. Sea ${}_{\Gamma^{op}}\Delta$ la familia de los Γ^{op}-módulos estándar correspondientes al par $({}_{\Gamma^{op}}\overline{P}, \leq^{op})$, donde $\leq^{op}$ es el orden opuesto a $\leq$. Entonces las siguientes afirmaciones, (I) y (II), son equivalentes.*

(I) Existe una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo.

(II) *(a)* $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Y) = 0$ *y el par* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ *es un álgebra estándarmente estratificada.*

(b) *Existe una subcategoría llena* $\mathcal{A}$ *de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, cerrada por extensiones y tal que* $\underline{Y} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\perp_1}$*.*

(c) *La restricción* $\overline{F}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$ *es una dualidad exacta con quasi-inversa* $\overline{G}|_{\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)} : \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta) \to \mathcal{A}$*.*

Más aún, si una de estas condiciones equivalentes vale, entonces $\mathcal{A}$ *está unívocamente determinada (a menos de equivalencias) por la familia* $\underline{Y}$*. Más precisamente,* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{F}(\Theta)$ *y* $\Theta(i) \simeq \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(i))$ *para todo* $i \in [1, t]$*.*

Si asumimos que sólo vale la condición (a) en (II), entonces se verifica la condición (b) en la definición de sistema estratificante Ext-inyectivo, como probamos a continuación.

Lema 6.1.7. *Con las hipótesis y notaciones del Teorema 6.1.6, sea* $\Phi = \{\Phi(i)\}_{i=1}^t$ *donde* $\Phi(i) = \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(i))$ *para todo* i*. Si el par* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ *es un álgebra estándarmente estratificada y* $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Y) = 0$*, entonces valen las siguientes condiciones.*

(a) *Para cada* $i \in [1, t]$*, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \Phi(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Phi(j) : j < i\})$*.*

(b) *Si además* $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(\Phi, Y) = 0$*, entonces para cada* $M \in \mathcal{F}(\Phi)$ *existe una sucesión exacta*

$$0 \to M \to Y' \to M' \to 0$$

en $\mathcal{F}(\Phi)$*, con* $Y' \in \mathrm{add}(Y)$*. En particular,* $\mathcal{F}(\Phi) \subseteq C_2^{\vee Y}$*.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Y) = 0$. Entonces, $\overline{G}|_{\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)} : \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ es exacto sobre $\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$. Como $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada, para cada $i \in [1, t]$ tenemos una sucesión exacta en $\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$

$$0 \to U(i) \to {}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i) \to {}_{\Gamma^{op}}\Delta(i) \to 0,$$

con $U(i) \in \mathcal{F}(\{{}_{\Gamma^{op}}\Delta(j) : j >^{op} i\})$. Aplicando $\overline{G}$ a la sucesión anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \to \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(i)) \to \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i)) \to \overline{G}(U(i)) \to 0.$$

Como $\Phi(i) = \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(i))$, $\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i)) = \overline{G}(\overline{F}(Y(i))) \simeq Y(i)$ y también $\overline{G}(U(i)) \in \mathcal{F}(\{\Phi(j) : j < i\})$, entonces vale la condición (a).

(b) Sea $M \in \mathcal{F}(\Phi)$. Consideramos una Φ-filtración de M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M,$$

donde $M_k/M_{k-1} \simeq \Phi(i_k)$, para todo $1 \leq k \leq n$.
Usando (a), el Lema de la Serpiente y el hecho de que ${}_\Lambda Y \in \mathcal{F}(\Phi)^{\perp_1}$, obtenemos un diagrama exacto y conmutativo en $\mathcal{F}(\Phi)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Phi(i_1) \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & \Phi(i_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(i_1) \arrow[r] \arrow[d] & Y(i_1) \oplus Y(i_2) \arrow[r] \arrow[d] & Y(i_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(i_1) \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z(i_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En particular, la sucesión vertical del medio $0 \to M_2 \to Y(i_1) \oplus Y(i_2) \to Z_2 \to 0$ nos da la sucesión exacta requerida para $n = 2$. El resultado sigue iterando este argumento. $\square$

Usando la Proposición 6.1.3 y (b) del Lema 6.1.7, podemos probar el siguiente resultado, donde para una familia dada $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos, continuamos usando la notación $\Gamma = \mathrm{End}({}_\Lambda Y)^{op}$, y los funtores $\overline{F} = \overline{F}_Y$ y $\overline{G} = \overline{G}_Y$.

Teorema 6.1.8. *Sean $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, y $\leq$ un orden lineal sobre $[1,t]$. Sean ${}_{\Gamma^{op}}\Delta$ la familia de los Γ^{op}-módulos estándar, calculados usando el par $({}_{\Gamma^{op}}\overline{P}, \leq^{op})$, donde $\leq^{op}$ es el orden opuesto a $\leq$ y ${}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i) = \overline{F}(Y(i))$ para todo i. Entonces, existe una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo si y sólo si valen las siguientes condiciones.*

(a) El par $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada.

(b) $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_{\Lambda}Y)$.

Si estas condiciones se verifican, el sistema estratificante Ext-inyectivo $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *está unívocamente determinado (a menos de isomorfismos) y* $\Theta(i) \simeq \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(i))$ *para todo* $i \in [1, t]$.

Demostración. Supongamos que existe una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es sistema estratificante Ext-inyectivo. Entonces, por el Teorema 6.1.6, obtenemos que existe una subcategoría llena $\mathcal{A}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\overline{G}|_{\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)} \subseteq \mathcal{A}$ y $\underline{Y} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_1}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_{\Lambda}Y) = 0$. El resto de la demostración de (a) y (b) sigue inmediatamente del mismo teorema.

Asumamos ahora que (a) y (b) valen. Como $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada y $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Y) = 0$, la demostración se completa mostrando que se verifican (b) y (c) del Teorema 6.1.6. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta))$. Aplicando el Lema 6.1.7 (a) y la igualdad $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_{\Lambda}Y) = 0$, tenemos que $\underline{Y} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\perp_1}$. Por otro lado, del Lema 6.1.7 (b) sigue que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_2^{\vee Y}$. Entonces (c) del Teorema 6.1.6 vale por la Proposición 6.1.3. □

Un álgebra Λ es estándarmente estratificada si y sólo si ${}_{\Lambda}\Lambda$ está filtrada por los módulos estándar. El hecho de que esto ocurra si y sólo si $D(\Lambda_{\Lambda})$ está filtrada por los correspondientes módulos propios coestándar (ver [D1], Proposición 2.2) y también la Observación 6.1.5, nos permiten adaptar la demostración del Lema 6.1.7 para probar el siguiente resultado. El mismo será útil más adelante, ya que nos permitirá demostrar un resultado análogo al teorema anterior, para sistemas coestratificantes propios.

Lema 6.1.9. *Sean* $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ *un conjunto de* Λ*-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos y* $\leq$ *un orden lineal sobre* $[1, t]$. *Sea* ${}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}$ *la familia de los* Γ^{op}*-módulos propios coestándar calculados usando el par* $({}_{\Gamma^{op}}I, \leq^{op})$, *donde* ${}_{\Gamma^{op}}I$ *es el conjunto de representantes de los* Γ^{op}*-módulos inyectivos definido como* ${}_{\Gamma^{op}}I(i) = D(F(Y(i)))$ *para todo* i. *Si* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ *es un álgebra estándarmente estratificada,* $\mathrm{Tor}_1^{\Gamma}(Y, {}_{\Gamma}\overline{\Delta}) = 0$ *y* $\Phi(i) = G({}_{\Gamma}\overline{\Delta}(i))$ *para todo* i, *entonces valen las siguientes condiciones.*

(a) Para cada $i \in [1, t]$, *existe una sucesión exacta*

$$0 \to Z(i) \to Y(i) \to \Phi(i) \to 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Phi(j) : j \leq i\})$.

(b) Si además $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y, \Phi) = 0$*, entonces para cada* $M \in \mathcal{F}(\Phi)$ *existe una sucesión exacta*

$$0 \to M' \to Y' \to M \to 0$$

en $\mathcal{F}(\Phi)$*, con* $Y' \in \mathrm{add}(Y)$*. En particular,* $\mathcal{F}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}_2^Y$*.*

6.2. Relación entre sistemas coestratificantes propios y sistemas estratificantes Ext-inyectivos.

Con el objetivo de generalizar resultados de C. M. Ringel para álgebras quasi-hereditarias, se prueba en [AHLU] y en [PR] que para un álgebra estándarmente estratificada $(\Lambda, \leq)$ existe un Λ-módulo inclinante $T = \{T(i)\}_{i=1}^l$, llamado módulo inclinante característico, tal que $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)^{\perp_1}$ y el par $(\mathrm{End}_\Lambda(T), \leq^{op})$ es también un álgebra estándarmente estratificada. Además, $({}_\Lambda\Delta, \{T(i)\}_{i=1}^l, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo y $({}_\Lambda\overline{\nabla}, \{T(i)\}_{i=1}^l, \leq)$ es un sistema coestratificante propio. Esto nos conduce al siguiente planteo:

Dado un conjunto $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos y un orden lineal $\leq$ sobre $[1, t]$, ¿cómo se relaciona la existencia de un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ con la existencia de un sistema estratificante Ext-inyectivo $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$?

En esta sección vamos a contestar esta pregunta.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación. Sean $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos, $\leq$ un orden lineal sobre $[1, t]$, y $Q = \bigoplus_{i=1}^t Q(i)$. Consideramos $\Gamma = \mathrm{End}({}_\Lambda Q)^{op}$ y los funtores $F = F_Q$, $G = G_Q$, $\overline{F} = \overline{F}_Q$ y $\overline{G} = \overline{G}_Q$.

De acuerdo con la Observación 6.1.5, la familia ${}_{\Gamma^{op}}\Delta$ puede ser calculada a partir de $({}_{\Gamma^{op}}\overline{P}, \leq^{op})$ o de $({}_{\Gamma^{op}}P, \leq^{op})$, donde ${}_{\Gamma^{op}}\overline{P}(i) = \overline{F}(Q(i))$ y ${}_{\Gamma^{op}}P(i) = F(Q(i))^*$ para todo i. También consideramos la familia ${}_\Gamma\overline{\Delta}$, la cual es calculada con el orden $\leq^{op}$ sobre $[1, t]$, utilizando el conjunto de representantes ${}_\Gamma P$ de los Γ-módulos proyectivos indescomponibles, donde ${}_\Gamma P(i) = F(Q(i))$ para todo i.

6.2.1. De sistemas coestratificantes propios a sistemas estratificantes Ext-inyectivos.

Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio de talla t en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Recordemos que en el Teorema 4.2.3, probamos que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada y que la restricción $F|_{\mathcal{F}(\Psi)} : \mathcal{F}(\Psi) \to \mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta})$ es una equivalencia con quasi-inversa $G|_{\mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta})} : \mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta}) \to \mathcal{F}(\Psi)$.

En nuestro próximo teorema establecemos, para un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ dado, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo.

Teorema 6.2.1. *Sea* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existe una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ *es un sistema estratificante Ext-inyectivo.*

(b) $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Q) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_{\Lambda}Q)$.

Si estas condiciones se verifican, el sistema $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ *está unívocamente determinado (a menos de isomorfismos) y* $\Theta(i) \simeq \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(i))$ *para todo* i*.*

Demostración. La demostración resulta del Teorema 6.1.8 que da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un sistema estratificante Ext-inyectivo, asumiendo solamente que $\mathbf{Q}$ es una familia de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Estas condiciones son dos: una de ellas es que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada, lo cual se verifica por ser $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio (ver Teorema 4.2.3). La otra es precisamente la condición (b) del resultado que estamos demostrando. □

Ejemplo 6.2.2. En el siguiente ejemplo damos un sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ y aplicamos el Teorema 6.2.1 para obtener un sistema estratificante Ext-inyectivo $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$.

Sea Λ el álgebra de caminos dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ},$$

con el orden natural $1 \leq 2 \leq 3$. Consideremos

$$\Psi = \{\Psi(1) = 3,\ \Psi(2) = 1,\ \Psi(3) = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\}$$

y

$$\mathbf{Q} = \{Q(1) = 3,\ Q(2) = 1,\ Q(3) = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}.$$

Entonces $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio de talla 3 en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. En este caso, el álgebra $\Gamma^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(Q)$ está dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\mu} \underset{2}{\circ}$$

con la relación $\mu\varepsilon = 0$ (ver Ejemplo 2.1.10 del Capítulo 2, observando que el Λ-módulo Q que estamos considerando aquí coincide con el Λ-módulo M del ejemplo citado). Consideramos $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$, donde $3 \leq^{op} 2 \leq^{op} 1$. Entonces, los correspondientes módulos estándar son

$${}_{\Gamma^{op}}\Delta = \{{}_{\Gamma^{op}}\Delta(1) = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(2) = 2,\ {}_{\Gamma^{op}}\Delta(3) = 3\}.$$

En el Ejemplo 2.1.10 también describimos a Q como Γ^{op}-módulo. Luego, ${}_{\Gamma^{op}}Q = \bigoplus_{i=1}^{3} {}_{\Gamma^{op}}Q'(i)$, donde

$${}_{\Gamma^{op}}Q'(1) = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix},\ \ {}_{\Gamma^{op}}Q'(2) = 3 \ \text{ y } \ {}_{\Gamma^{op}}Q'(3) = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}.$$

Usando que ${}_{\Gamma^{op}}\Delta(1)$ y ${}_{\Gamma^{op}}\Delta(2)$ son módulos proyectivos, que ${}_{\Gamma^{op}}Q'(1)$ y ${}_{\Gamma^{op}}Q'(3)$ son módulos inyectivos, y que además $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(3), {}_{\Gamma^{op}}Q'(2)) = 0$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Q) = 0$.

Sólo nos resta verificar que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_\Lambda Q) = 0$. Volvamos nuevamente al Capítulo 2. Allí, en el Ejemplo 2.2.4, probamos que

$$\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(1)) = \overline{G}(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) = {}_\Lambda P(3).$$

Utilizando las mismas técnicas se puede ver que

$$\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(3)) = \overline{G}(3) = {}_\Lambda P(2)$$

y que

$$\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(2)) = \overline{G}(2) = 1.$$

Un cálculo muestra que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(2)), {}_\Lambda Q) = 0$. Por otra parte, como $\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(1))$ y $\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(3))$ son módulos proyectivos, se verifica la condición requerida.

Luego, por el Teorema 6.2.1, $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo con $\Theta(1) \simeq \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(1)) = 3$, $\Theta(2) \simeq \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(2)) = 1$ y $\Theta(3) \simeq \overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta(3)) = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$.

6.2.2. De sistemas estratificantes Ext-inyectivos a sistemas coestratificantes propios.

El objetivo de esta subsección es hallar, para un sistema estratificante Ext-inyectivo dado $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$, condiciones necesarias y suficientes para que exista una familia $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^{t}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ sea un sistema coestratificante propio. Primero consideramos el problema más general de estudiar la existencia de tal sistema coestratificante propio $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ asumiendo solamente que $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. En analogía con [MMS1, Teorema 2.3] y el Teorema 6.1.8, probamos el siguiente resultado.

Teorema 6.2.3. *Sea $\mathbf{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ un conjunto de Λ-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. Entonces, las siguientes condiciones (I), (II) and (III) son equivalentes.*

(I) *(a)* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ *es un álgebra estándarmente estratificada y* $\mathrm{Tor}_1^{\Gamma}(Q, {}_{\Gamma}\overline{\Delta}) = 0$.

(b) Existe una subcategoría llena $\mathcal{B}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, cerrada por extensiones, y tal que $Q \subseteq \mathcal{B} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{B}$.

(c) La restricción $F|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta})$ es una equivalencia exacta de categorías donde $G|_{\mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta})} : \mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta}) \to \mathcal{B}$ es una quasi-inversa de $F|_{\mathcal{B}}$.

(II) Existe una familia $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^{t}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio.

(III) *(a)* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ *es un álgebra estándarmente estratificada.*

(b) $\mathrm{Tor}_1^{\Gamma}(Q, {}_{\Gamma}\overline{\Delta}) = 0 = \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1({}_{\Lambda}Q, G({}_{\Gamma}\overline{\Delta}))$.

Más aún, si estas condiciones valen, entonces $\mathcal{B}$ está unívocamente determinada por la familia Q. Más precisamente, $\mathcal{B} \simeq \mathcal{F}(\Psi)$ y $\Psi(i) \simeq G({}_{\Gamma}\overline{\Delta}(i))$ para todo $i \in [1, t]$.

Demostración. (I)$\Rightarrow$(II) Asumamos que (I) vale. Sea $\Psi(i) = G({}_{\Gamma}\overline{\Delta}(i))$ para todo $i \in [1, t]$. Para probar que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio, tenemos que mostrar que las condiciones de la Definición 5.1.1 se satisfacen.

(a) Como $\mathrm{End}_{\Lambda}(\Psi(i)) \simeq \mathrm{End}_{\Gamma}({}_{\Gamma}\overline{\Delta}(i))$, entonces $\mathrm{End}_{\Lambda}(\Psi(i))$ es un anillo con división para todo $i \in [1, t]$.

(b) De $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma({}_\Gamma\overline{\Delta}(i), {}_\Gamma\overline{\Delta}(j))$, obtenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Psi(i), \Psi(j)) = 0$ para $j <^{op} i$.

(c) Debemos probar que, para cada $i \in [1, t]$, existe una sucesión exacta

$$0 \to Z(i) \to Q(i) \to \Psi(i) \to 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Psi(j) : j \leq i\})$. Esto sigue del Lema 6.1.9 (a) aplicado a $\Phi = \Psi$ e $\underline{Y} = \mathbf{Q}$.

(d) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q, \Psi) = 0$ ya que $\Psi = G({}_\Gamma\overline{\Delta}) \subseteq \mathcal{B}$ y $Q \subseteq \mathcal{B} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{B}$.

(II)$\Rightarrow$(III) Sea $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema coestratificante propio. Entonces, por el Teorema 4.2.3, sabemos que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada y que $\Psi(i) \simeq G({}_\Gamma\overline{\Delta}(i))$. Luego, por la definición de sistema coestratificante propio, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda({}_\Lambda Q, G({}_\Gamma\overline{\Delta})) = 0$. Finalmente, sigue de la Proposición 3.1.5 que $F(\mathcal{F}(\Psi)) \subseteq F(C_2^\wedge(Q)) \subseteq \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tor}_1^\Gamma(Q, -)$.

(III)$\Rightarrow$(I) Sea $\mathcal{B} = \mathcal{F}(G({}_\Gamma\overline{\Delta}))$. Los argumentos en la demostración "($\Leftarrow$)" en el Teorema 6.1.8 pueden ser adaptados a este caso, usando el Lema 6.1.9 y el Teorema 3.2.4. □

Ahora estamos en condiciones de probar el principal resultado de esta sección, que es análogo al Teorema 6.2.1 y que establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 6.2.4. *Sea* $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema estratificante Ext-inyectivo de talla* t *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existe una familia $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^t$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *es un sistema coestratificante propio.*

(b) $\mathrm{Tor}_1^\Gamma(Q, {}_\Gamma\overline{\Delta}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q, G({}_\Gamma\overline{\Delta}))$.

Si estas condiciones se verifican, el sistema $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *está unívocamente determinado (a menos de isomorfismos) y* $\Psi(i) \simeq G({}_\Gamma\overline{\Delta}(i))$ *para todo* $i \in [1, t]$.

Demostración. La demostración sigue inmediatamente del Teorema 6.2.3 y la Observación 6.1.5, ya que de [ES] sabemos que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada. □

Los siguientes resultados muestran que, para una familia dada $\mathbf{Q}$ de Λ-módulos sobre un álgebra Λ (no necesariamente estándarmente estratificada), la existencia simultánea de Θ y Ψ tales que $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo y $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio, implica que el $\Gamma^{op} = \operatorname{End}({}_\Lambda Q)$-módulo Q coincide con el módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada Γ^{op}.

Corolario 6.2.5. *Sea* $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ *un sistema coestratificante propio de talla* t *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, donde* ${}_{\Gamma^{op}}T$ *es el módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada* $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$.

(a) Existe una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *tal que* $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ *es un sistema estratificante Ext-inyectivo.*

(b) ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$ *y* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_\Lambda Q) = 0$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema estratificante Ext-inyectivo. Como $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio, del Teorema 6.2.1 sigue que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\overline{G}({}_{\Gamma^{op}}\Delta), {}_\Lambda Q) = 0$. Para probar que ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$, es suficiente mostrar que ${}_{\Gamma^{op}}Q \in \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta) \cap \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)^{\perp_1} = \operatorname{add}({}_{\Gamma^{op}}T)$ (ver [AHLU, Proposición 2.2]). Por el Teorema 6.2.4 (b) sabemos que $\operatorname{Tor}_1^\Gamma(Q, {}_\Gamma\overline{\Delta}) = 0$. Entonces, por [CE, p. 120], y teniendo en cuenta que ${}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla} = D({}_\Gamma\overline{\Delta})$, resulta que

$$\operatorname{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}Q, {}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) \simeq D(\operatorname{Tor}_1^\Gamma(Q, {}_\Gamma\overline{\Delta})) = 0.$$

Esto es, $Q \in {}^{\perp_1}\mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\overline{\nabla}) = \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)$ (ver [AHLU, Teorema 1.6]). Por otra parte, del Teorema 6.2.1 (b) sigue que $\operatorname{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Q) = 0$, esto es, $Q \in \mathcal{F}({}_{\Gamma^{op}}\Delta)^{\perp_1}$. Luego, vale (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Como ${}_{\Gamma^{op}}T$ es el módulo inclinante característico, tenemos que

$$\operatorname{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}Q) \simeq \operatorname{Ext}^1_{\Gamma^{op}}({}_{\Gamma^{op}}\Delta, {}_{\Gamma^{op}}T) = 0.$$

De este modo, (a) sigue del Teorema 6.2.1. □

Ilustramos este resultado con el siguiente ejemplo (ver Ejemplo 4.1.7 en el Capítulo 4).

Ejemplo 6.2.6. Sea Λ dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[loop above, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

con las relaciones $\beta^2 = 0$, $\alpha\beta = 0$ y $\beta\gamma = 0$. Consideremos el orden natural $1 \leq 2 \leq 3$, y los conjuntos

$$\Psi = \{\Psi(1) = 2,\ \Psi(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix},\ \Psi(3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\}$$

y

$$\mathbf{Q} = \{Q(1) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix},\ Q(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix},\ Q(3) = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}\}.$$

Entonces $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio de talla 3 en $\operatorname{mod}(\Lambda)$. En este caso, $\Gamma^{op} = \operatorname{End}({}_\Lambda Q)$ está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, shift left, "\mu"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd}$$

con las relaciones $\varepsilon\mu = 0$ and $\mu\delta\mu = 0$ (ver Ejemplo 4.2.7). Por el Teorema 4.2.3, sabemos que $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$ es un álgebra estándarmente estratificada. El módulo inclinante característico es

$${}_{\Gamma^{op}}T = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus\ 3\ ,$$

el cual no es isomorfo a

$${}_{\Gamma^{op}}Q = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus 2$$

(ver Ejemplo 4.2.13). Por lo tanto, del Corolario 6.2.5 (b) sigue que no existe una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ sea un sistema estratificante Ext-inyectivo.

El siguiente resultado es probado usando argumentos similares a los usados en la demostración del Corolario 6.2.5.

Corolario 6.2.7. *Sea $(\Theta, \mathbf{Q}, \leq)$ un sistema estratificante Ext-inyectivo de talla t en $\operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, donde ${}_{\Gamma^{op}}T$ es el módulo inclinante característico asociado al álgebra estándarmente estratificada $(\Gamma^{op}, \leq^{op})$.*

(a) Existe una familia $\Psi = \{\Psi(i)\}_{i=1}^t$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ tal que $(\Psi, \mathbf{Q}, \leq)$ es un sistema coestratificante propio.

(b) ${}_{\Gamma^{op}}Q \simeq {}_{\Gamma^{op}}T$ y $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Q, G({}_\Gamma\overline{\Delta})) = 0$.

Bibliografía

[A] M. Auslander. Representation dimension of artin algebras. *Brandeis Univ.* (1973).

[As] I. Assem. Tilting Theory - an introduction. *Topics in algebra. Banach Center publications* Volume 26, part 1 (1990). (1973).

[ADL] I. Agoston, V. Dlab, E. Lukács. Stratified algebras. *Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 20 (1) (1998) 22-28.

[AF] F. Anderson, K. Fuller. Rings and Categories of Modules. *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag* 13.

[AHLU] I. Agoston, D. Happel, E. Lukács, L. Unger. Standardly stratified algebras and tilting. *Journal of Algebra* 226 (1) (2000)144-160.

[AR] M. Auslander, I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv. Math.* 86 (1991). 111-152.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø. Representation Theory of Artin Algebras. *Cambridge Studies in Adv. Math.* 36 (1995). 2817-2835.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1: Techniques of Representation Theory. *Student Texts, London Math. Soc.* 65.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg. Homological algebra. *Princeton University Press, Princeton, N. J.* (1956).

[CPS] E. Cline, B.J. Parshall, L.L. Scott. Stratifying endomorphism algebras. *Memoirs of the AMS* 591, (1996).

[D1] V. Dlab. Quasi-hereditary algebras revisited. *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 4 (1996) 43-54.

[D2] V. Dlab. Properly stratified algebras. *C. R. Acad. Sci. Paris* 331 (I) (2000), 191-196.

[DR] V. Dlab, C.M. Ringel. The Module Theoretical approach to Quasi-hereditary Algebras. *Repr. Theory and Related Topics, London Math. Soc. LNS* 168 (1992) 200-224.

[ES] K. Erdmann, C. Sáenz. On Standardly Stratified Algebras. *Communications in Algebra* 31 (7) (2003) 3429-3446.

[K] L. Kronecker. Algebraische Reduction der scharen bilinearen Formen. *Sitzungsber. Akad. Berlin* (1890) 1225-1237.

[L] P. Lakatos. On a Theorem of V. Dlab. *Algebras and Representation Theory*, 3, (2000), 99-103.

[MMS1] E. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz. Stratifying systems via relative simple modules. *Journal of Algebra* 280 (2004) 472-487.

[MMS2] E. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz. Stratifying systems via relative projective modules. *Communications in Algebra* 33 (2005) 1559-1573.

[MSXi] O. Mendoza, C. Sáenz, C. Xi. Homological Systems in module categories over pre-ordered sets. *Quart. J. Math.* 60 (2009), 75-103.

[MPV] O. Mendoza, M. I. Platzeck, M. Verdecchia. $\mathcal{C}$-filtered modules and proper costratifying systems. *Journal of Algebra* 348 (1) (2011) 276-293.

[PP1] M.I. Platzeck, N.I. Pratti. On a theorem of Auslander and applications. *Communications in Algebra* 28 (6) (2000) 2817-2835.

[PP2] M.I. Platzeck, N.I. Pratti. Tilting modules and the subcategories C_i^M. *Communications in Algebra* 34 (9) (2006) 3255-3266.

[PR] M.I. Platzeck, I. Reiten. Modules of finite projective dimension for standardly stratified algebras. *Communications in Algebra* 29 (3) (2001) 973-986.

[R] C.M. Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Math. Z.* 208 (1991) 209-233.

[W] P. Webb. Stratifications and Mackey functors I: functors for a single group. *Proc. Lon. Math. Soc.* 82 (2001) 299-336.

[Xi] C. C. Xi, Standardly stratified algebras and cellular algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 133 (1) (2002) 37-53.