



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS

DOCTOR EN CONTROL DE SISTEMAS

Polinomios en Síntesis y Control
de Sistemas Dinámicos

Guillermo Luis Calandrini

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2011



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS

DOCTOR EN CONTROL DE SISTEMAS

Polinomios en Síntesis y Control
de Sistemas Dinámicos

Guillermo Luis Calandrini

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2011

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Control de Sistemas de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de ningún otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, durante el período 1999 y 2010, bajo la dirección del Dr. Jorge Luis Moiola y la codirección del Ing. Eduardo Emilio Paolini.

Guillermo Luis Calandrini



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el/..../..... , mereciendo la calificación de(.....)

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar un muy sincero agradecimiento a mi director: Dr. Jorge Moiola, y a mi codirector: Ing. Eduardo Paolini, por las enseñanzas, orientaciones y el apoyo brindado en todo momento de la elaboración de esta tesis. La persistencia y motivación de ambos han sido fundamentales para la culminación.

Deseo extender además este reconocimiento a los coautores de las publicaciones y trabajos que dieron origen, forman parte o son continuación de esta tesis: Daniel Berns, Diego Alonso, Gustavo Revel, Gabriel Agamennoni, Liliana Castro, M. Belén D'Amico, y Ana Torresi. Como así también corresponderlo con todos mis compañeros en los proyectos de investigación y al grupo de trabajo vinculado al Laboratorio de Control y Robótica (LCR-UNS), con quienes hemos compartido innumerables momentos y desafíos, que enriquecieron mi formación académica y personal.

Resalto la importante participación de los miembros del jurado en las tareas de corrección y evaluación, así como sus valiosos consejos y sugerencias para proseguir avanzando en estos temas, Dra. Alicia Dickenstein, Dr. Carlos Muravchik y Dr. Jorge Solsona.

Aprecio mucho también el sostén material, administrativo, y económico otorgado por la Universidad Nacional del Sur (UNS) y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a través del Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, el Departamento de Matemática, la Secretaría General de Posgrado y Educación Continua y el Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica (IIIE) *Alfredo Desages*. Este apoyo me ha permitido complementar el estudio de posgrado con la docencia, experimentando ese mágico y gratificante intercambio de conocimientos con los alumnos.

Esto nunca hubiera sido posible sin el amparo incondicional de mis afectos, familia y amigos, especialmente de mis padres quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación.

Con todos ellos quiero compartir mi enorme satisfacción por este logro.

El agradecimiento es la memoria del corazón.

(LaoTse)

A mi primer director:

Alfredo Desages,

*por su confianza al iniciar
mi camino de estudios
entre el álgebra y el control.*

Su estrella siempre será una guía.

Resumen

La principal contribución de esta tesis es la vinculación entre el *Álgebra* y la *Teoría de Bifurcaciones*. Se estudian sistemas dinámicos que puedan expresarse con representaciones polinomiales, y se utilizan herramientas algebraicas para realizar análisis, síntesis y control sobre estos modelos matemáticos.

El método de las formas normales es una técnica clásica de estudio en teoría de bifurcaciones. El objetivo es capturar los elementos fundamentales de la solución de un sistema, obteniendo como resultado una estructura polinomial en las ecuaciones. Por medio del polinomio de la forma normal se pueden determinar amplitud, frecuencia, estabilidad y multiplicidad de las oscilaciones, también conocidas como ciclos límites. El método también permite realizar *control de bifurcaciones*, es decir diseñar un controlador que pueda modificar las características de bifurcación de un dado sistema, alcanzando ciertos comportamientos dinámicos más deseables. Algunos de los objetivos podrían ser: *a)* cambiar el valor del parámetro de un punto de bifurcación, *b)* estabilizar una solución o una rama de soluciones bifurcadas, *c)* modificar la multiplicidad de estado estacionario, de soluciones periódicas o de atractores, *d)* modificar la frecuencia y amplitud de las soluciones emergentes de una bifurcación, etc.

La descripción clásica de sistemas dinámicos en el espacio de estados se enfoca desde un punto de vista algebraico. Las dinámicas se pueden representar como relaciones polinómicas entre las variables de estado y sus primeras derivadas. Entonces, esta descripción algebraica constituye el conjunto de todos los polinomios que se anulan, cuando las variables toman los valores de cualquier trayectoria del sistema en estudio. Esta representación está directamente conectada con los conceptos alge-

braicos de ideales y variedades, y permite trabajar con algoritmos y herramientas algebraicas como por ejemplo las bases de Groebner. El método de síntesis no sólo muestra que es posible diseñar osciladores y controladores, sino también obtener formas normales, y un conjunto de polinomios que genera una familia de sistemas dinámicos, todos ellos con una órbita en común entre sus posibles soluciones.

Estos problemas se resuelven en forma analítica con métodos simbólicos y también se usan técnicas numéricas. A pesar de que los métodos simbólicos proveen una solución más general, aún se encuentran limitados a resolver problemas de tamaño modesto. Una alternativa es usar ambos métodos en forma complementaria. Existen programas específicos tanto simbólicos como numéricos, y se utilizan para la eliminación de variables en sistemas de ecuaciones polinómicas y luego en forma numérica, cálculo de raíces, simulaciones y continuación de bifurcaciones.

El impacto y alcance del uso de las bases de Groebner en sistemas dinámicos resalta sobre los conocimientos ya desarrollados como un paso hacia la ampliación de futuras investigaciones.

Abstract

The main contribution of this thesis is the exploration of relationships between Algebra and Bifurcation Theory. Problems such as bifurcation control and synthesis of dynamical systems based on polynomial representations are studied, and algebraic tools are used for analysis, synthesis and control of these mathematical models.

Using the normal form method, a classic technique for studying bifurcation theory, dynamical behaviors can be captured by a set of polynomial equations, and the stability, amplitude, frequency and multiplicity of the periodic solutions are analyzed using polynomials. This approach is also suitable for bifurcation control, i.e. the design of a controller to modify the bifurcation characteristics of a given system to obtain a more desirable dynamic behavior. In this way, it is possible to delay the appearance of bifurcations, to stabilize a solution or a branch of bifurcation solutions, to alter its multiplicity, to modify the frequency and amplitude of the solutions emerging from a bifurcation, etc.

The classical state-space description of a dynamical system can also be treated within this algebraic framework. The system is represented by a set of polynomial equations involving the variables and their derivatives that vanishes over any path of the system under study. This representation is linked with the algebraic concepts of ideal and varieties, and can be handled with tools such as Groebner bases. Controller synthesis, oscillator design and derivation of normal forms can also be achieved with Groebner basis. As a result of the design procedure, a set of polynomials that generates a family of dynamical systems sharing a common orbit among their possible trajectories is obtained.

These problems can be solved using symbolic or numerical methods, but even for

systems of modest size, the complexity of the symbolic solutions is overwhelming. An alternative explored in this thesis is to employ numerical and symbolic methods complementarily, for example eliminating variables in systems of polynomial equations symbolically, and then computing the roots, continuation of bifurcations and simulations using numerical techniques.

The impact and scope of Groebner bases in dynamical systems are highlighted with respect to what has already been accomplished as a stepping stone for future research.

Índice general

1. Sistemas Dinámicos No Lineales	1
1.1. Descripción en el espacio de estados	2
1.1.1. Soluciones, trayectorias y conjuntos invariantes	10
1.1.2. Punto límite, conjunto límite y ciclo límite	14
1.2. Estabilidad de conjuntos invariantes	17
1.2.1. Funciones de Lyapunov	20
1.3. Sistemas dinámicos con ideales de polinomios	24
1.3.1. Invariantes algebraicos	30
1.4. Apéndice del capítulo	35
2. Formas Normales y Ciclos Límites	39
2.1. Ciclos límites en sistemas de dimensión 2	40
2.1.1. Ciclos límites y el problema N° 16 de Hilbert	41
2.1.2. Sistemas en el plano	42
2.1.3. Bifurcación de Hopf	47
2.1.4. Forma normal en sistemas de dimensión 2	55
2.1.5. Dos alternativas aproximadas de obtener la forma normal	58
2.2. Multiplicidad de ciclos límites	67
2.2.1. Control de la multiplicidad de los ciclos límites	68
2.3. Validez de la aproximación. Jacobiano	70
2.4. Apéndice del capítulo	74

3. Ciclos Límites en Sistemas de Dimensión 3	77
3.1. Definiciones básicas de topología diferencial	78
3.1.1. Espacios tangentes y derivadas	81
3.2. Flujo y subespacios invariantes	82
3.3. Variedad centro	85
3.4. Forma normal en sistemas de dimensión 3	88
3.4.1. Forma normal de ciclos en la variedad centro	88
3.5. Bifurcaciones de órbitas periódicas	95
3.5.1. Cascada de doble período	100
3.6. Apéndice del capítulo	107
4. Síntesis de Sistemas Dinámicos	109
4.1. Introducción	109
4.2. Síntesis	110
4.3. Síntesis y estabilidad orbital	112
4.3.1. Primera etapa. Conjunto invariante algebraico.	113
4.3.2. Segunda etapa. Estabilidad del conjunto invariante	124
4.4. Síntesis algebraica de controladores	139
4.4.1. Diseño de controladores en sistemas dinámicos algebraicos	140
4.4.2. Ejemplo de diseño	141
4.4.3. Conservación de la energía mecánica	143
4.4.4. Estabilizando un conjunto invariante	144
4.5. Apéndice del capítulo	148
5. Conclusiones	151
A. Nociones básicas de álgebra.	153
A.1. Anillos y Cuerpos	153
A.1.1. Anillo	154
A.1.2. Cuerpo	155

A.1.3.	Polinomios y funciones racionales	156
A.1.4.	Extensiones y dependencia algebraica	157
A.1.5.	Grupos Cíclicos	159
A.2.	Polinomios	160
A.2.1.	Ordenamientos de variables y monomios	162
A.2.2.	Bases de Groebner	163
A.2.3.	Teoría de eliminación	164

Introducción

*Cada cosa tiene un ciclo, cada ciclo una historia
y de la historia nace una enseñanza.*

(Anónimo)

Esta tesis es el resultado de la conjunción de las investigaciones realizadas en varios trabajos. El inicio de los estudios fue la aplicación de técnicas derivadas del álgebra diferencial y del álgebra conmutativa en “Ritt’s Algorithm, Gröbner Basis and Discretization” (Calandrini *et al.*, 1997) donde se exploraron caminos algebraicos para obtener una representación discreta de un sistema continuo no lineal. El álgebra diferencial es una extensión del álgebra conmutativa, donde además de la suma y el producto, se considera una operación adicional: la derivación. Los polinomios diferenciales son polinomios en ciertas variables y todas sus derivadas. Sin embargo, en esta tesis se considera que, en forma equivalente a la descripción en el espacio de estados, con las primeras derivadas es suficiente para conocer la dinámica completa del sistema y sólo se utilizarán herramientas del álgebra conmutativa.

Desde el punto de vista clásico, las dinámicas descritas por ecuaciones diferenciales se representan geoméricamente por flujos en un espacio vectorial generalmente de dimensión finita. Muchos modelos físicos se representan con flujos lineales que son soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales ordinarias *lineales* con comportamientos dinámicos de estado estacionario periódicos o cuasiperiódicos. Las ecuaciones diferenciales *no lineales* pueden modelar comportamientos dinámicos más complejos, y resulta sorprendente cómo los sistemas disipativos de poca dimensión

pueden presentar una gran variedad de patrones dinámicos cercanos a la complejidad de los sistemas naturales. En el primer capítulo se realiza la presentación de los sistemas desde los dos enfoques, clásico y algebraico.

Uno de los modelos más simples es el que está gobernado por la ecuación diferencial lineal de segundo orden de un oscilador armónico

$$\ddot{\Phi} + \Phi = 0,$$

o en el espacio de estados

$$\dot{x} = -y, \tag{1}$$

$$\dot{y} = x.$$

El campo vectorial del flujo de este sistema muestra un continuo de círculos concéntricos de oscilaciones con trayectorias que conservan la energía alrededor de un centro. Con la incorporación de términos no lineales puede obtenerse la aparición de un ciclo límite, una única trayectoria cerrada, como en el sistema

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \tag{2}$$

$$\dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2),$$

donde el efecto de los términos no lineales puede sintetizarse como la incorporación de fricción positiva y negativa para conducir las trayectorias hacia un único círculo. Este tipo de sistema de dimensión 2, con no linealidades del tipo polinómicas, se encuadra en lo que se conoce como segunda parte del problema N°16 de Hilbert, sobre la existencia, y cantidad de ciclos límites. En el capítulo 2 se muestra una forma de controlar la multiplicidad de los ciclos límites en sistemas no lineales. El procedimiento se basa en el trabajo “Controlling Limit Cycles and Bifurcations”, (Calandrini *et al.*, 1999), y está vinculado directamente con la aparición de bifurcaciones degeneradas de Hopf. La idea principal consiste en una adecuada elección

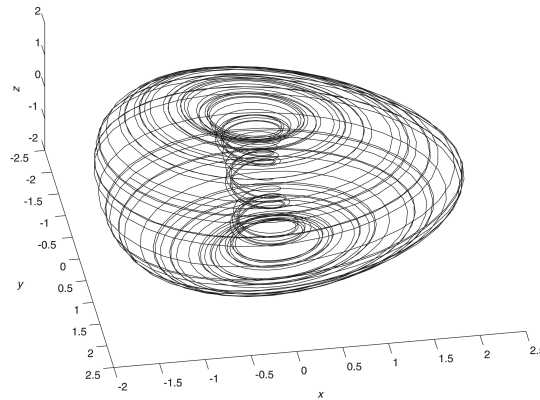


Figura 1: Atractor del sistema 3.

de los parámetros del sistema para asignar los coeficientes y raíces del polinomio de la forma normal. Se implementan dos métodos diferentes para obtener las fórmulas de los coeficientes o índices de estabilidad de Lyapunov. Posteriormente se realizan verificaciones con programas de simulación numérica y continuación de soluciones periódicas. Un segundo trabajo correspondiente a este capítulo es “On cyclic fold bifurcations in nonlinear systems” (Calandrini *et al.*, 2000a). En este último se investigan las bifurcaciones de ciclos llamadas *fold*, que indican la aparición de ciclos múltiples. Al ser un método local se estudia el Jacobiano de la transformación para detectar la validez de las aproximaciones.

En el capítulo 3 se estudian ciclos límites y formas normales en sistemas de dimensión 3. Otras dinámicas más complicadas pueden aparecer, por ejemplo el oscilador (1) puede extenderse con una segunda frecuencia de movimiento, que no sea impuesta por una fuerza externa, sino incorporando una tercera variable con una

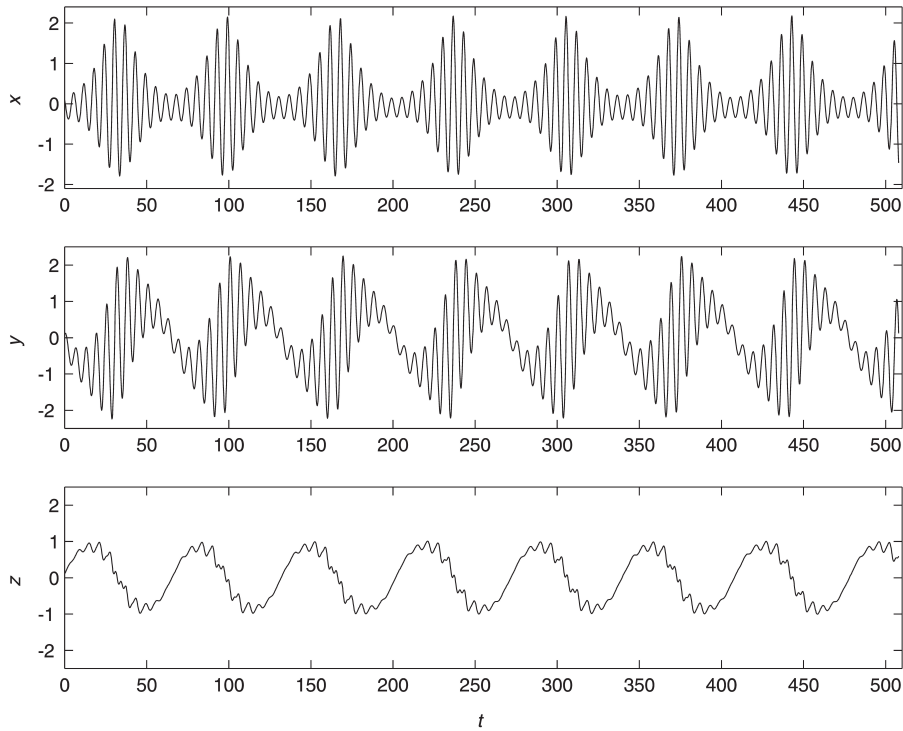


Figura 2: Trayectorias cuasiperiódicas del sistema 3

no linealidad cuadrática

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y - z, \\
 \dot{y} &= x, \\
 \dot{z} &= a - ay^2.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

De esta manera resulta una región acotada en el espacio de estados delimitada por trayectorias periódicas y cuasiperiódicas dependientes del valor del parámetro a y las condiciones iniciales. Existe un invariante, un toro conservativo consistente de dos frecuencias como se muestra en las Figs. 1 y 2, para $a = 0,1$, y condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (0,1, 0,1, 0,1)$.

Poincaré descubrió la estrecha relación entre flujos continuos y mapas de tiempo

discreto. Una sección o mapa de Poincaré consiste de una intersección transversal de los puntos de un flujo n -dimensional con un hiperplano de dimensión $n - 1$. En lugar de resolver un sistema de ecuaciones de dimensión n es posible observar el comportamiento cualitativo de la dinámica en las iteraciones del mapa discreto de dimensión $n - 1$. Si bien no existe una regla explícita para obtener este mapa, es un concepto muy sencillo para el análisis de estabilidad de trayectorias periódicas y se encuentra implementado en la mayoría de los programas de análisis de bifurcaciones y continuaciones. En el sistema (2), con un ciclo límite, el punto de impacto con la sección transversal es un punto de equilibrio del mapa discreto de Poincaré; en el ejemplo (3) cuando la trayectoria sobre el toro es cuasiperiódica, se obtiene sobre el plano de Poincaré un ciclo límite.

Rössler encontró comportamiento complejo, *caos*, en un sistema muy simple similar a (3)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= ay - ay^2 - bz,\end{aligned}\tag{4}$$

con $a = 0,386$ y $b = 0,2$, como se muestra en la Fig.3.

Sin lugar a dudas, el fenómeno más complejo que presentan los sistemas dinámicos no lineales es el caos aunque resulta difícil dar una definición general del mismo. Como se menciona en el capítulo 3, basado en el trabajo (Alonso *et al.*, 2001), la ruta de doble período es uno de los caminos más directos que conducen a esta dinámica. Es ampliamente aceptado definirlo en forma práctica como un comportamiento de estado estacionario acotado que no es un punto de equilibrio, ni una oscilación periódica ni cuasiperiódica. El caos es irregular. Una de sus principales características es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales: pequeños errores afectan profundamente el destino de las trayectorias de los sistemas caóticos. Estos sistemas

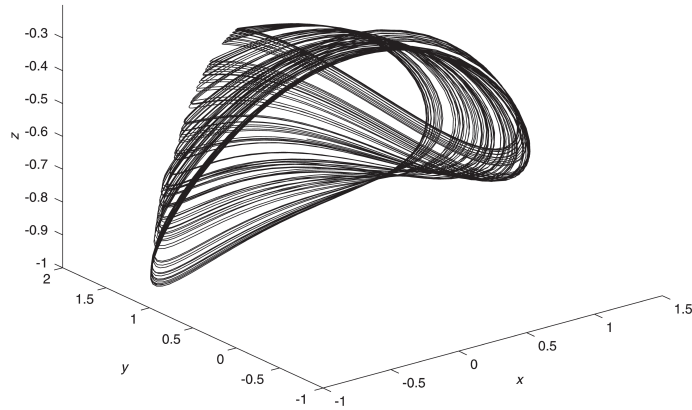


Figura 3: Atractor caótico del sistema de Rössler.

son entonces impredecibles.

El caos fue descubierto por Lorenz en 1963 en un sistema de dimensión 3, con dos no linealidades cuadráticas. Sin embargo algunos aspectos del caos fueron conocidos anteriormente. Poincaré en 1890 mostró que el problema de los tres cuerpos (resolver las trayectorias del sol, la luna y la tierra) no tiene solución analítica, y además dedujo muchas de las propiedades de los sistemas caóticos incluyendo la sensible dependencia de las condiciones iniciales. A pesar que el sistema de Lorenz generalmente se muestra como el prototipo de flujo caótico, no es el sistema algebraico más simple. En 1976 y 1979, Rössler presentó dos sistemas con sólo una no linealidad cuadrática, uno de ellos es el que se estudia en el capítulo 3, y el otro es el (4). Luego, en 1993, Sprott halló 19 sistemas caóticos algebraicamente muy sencillos. En 1999, Chen encontró otro atractor caótico simple y de dimensión 3. Más recientemente, en 2002, Lu y Chen presentaron un nuevo sistema caótico. Cabe aclarar que la simplicidad algebraica de estos sistemas radica en la cantidad de términos y no linealidades presentes en las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, los atractores no se pueden describir en forma algebraica.

En el capítulo 4 se desarrolla un procedimiento para encontrar sistemas dinámicos

donde los atractores son algebraicamente sencillos. Esto no significa que las ecuaciones diferenciales resultantes sean tan simples algebraicamente como los ejemplos mostrados anteriormente. El diseño o síntesis de un sistema dinámico o un controlador, consiste en encontrar un conjunto de relaciones entre las variables y sus derivadas temporales que cumplan ciertas especificaciones de diseño. Se supone que estas relaciones son algebraicas, y tienen la forma de polinomios en las distintas variables y sus derivadas de primer orden. Para analizar la estabilidad de la órbita se utiliza la teoría de Lyapunov, y en particular el Teorema de LaSalle, enunciados en el primer capítulo, construyendo una función semidefinida positiva que se anula sobre la órbita. Estos temas fueron desarrollados en: “Synthesis of nonlinear oscillators using Groebner bases ” (Berns *et al.*, 2001), y “Groebner bases for designing dynamical systems” (Calandrini *et al.*, 2003).

En diversas disciplinas se han aplicado las bases de Groebner. Particularmente en aquellas donde de la abstracción matemática resultan modelos con polinomios en varias variables. Muchas de esas aplicaciones están basadas en la estructura triangular de estas bases, facilitando la resolución de ecuaciones polinómicas, como por ejemplo en robótica (Calandrini y Revel, 2006). Otras propiedades como la factorización, la eliminación de variables y la determinación de la pertenencia o no de un polinomio en un ideal de polinomios, han sido utilizadas en Teoría de Bifurcaciones, para obtener una clasificación de bifurcaciones locales, formas normales y análisis de oscilaciones no lineales (Alwash, 1996; Gatermann y Lauterbach, 1998; Hisakado y Okumura, 2001; Kotsireas y Karamanos, 2004; Yagi *et al.*, 2008).

En el Apéndice se encuentran las nociones básicas de álgebra, y los elementos algebraicos utilizados, como las bases de Groebner y la teoría de eliminación, fundamentales para desarrollar esta tesis.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos No Lineales

*Un estudioso de la dinámica creará, por tradición,
que escribir las ecuaciones de un sistema equivale a entenderlo.*

(James Gleick)

En este capítulo se inicia el estudio y análisis de sistemas dinámicos *no lineales* a partir de dos puntos de vista: uno es el clásico a través de ecuaciones diferenciales y el otro desde un punto de vista algebraico utilizando polinomios. Si bien esta temática podría haberse separado en dos capítulos se prefirió unificar para poder comparar y ver que tienen mucho en común y sólo un enfoque diferente, que permitirá visualizar mejor ciertos aspectos de interés. Desde ambos puntos, se introducen los conceptos básicos de sistemas dinámicos, que luego serán utilizados en los siguientes capítulos, tales como: variables de estado, existencia y unicidad de soluciones, conjuntos invariantes, trayectorias, equilibrios y ciclos límites; continuidad de las soluciones con respecto a condiciones iniciales y parámetros en intervalos de tiempo finitos, y cómo esto se relaciona con los conceptos de estabilidad y bifurcación, cuando se considera intervalos de tiempo de longitud infinita. La motivación del análisis de sistemas *no lineales* debe buscarse en la *naturaleza no lineal* de la mayoría de los sistemas físicos, como uno de los que se utilizará como ejemplo: *el péndulo*. Si bien muchas veces es posible describir la dinámica con un modelo lineal (sistema de ecuaciones

diferenciales lineales), en algunos casos este modelo sólo es bueno si las condiciones de operación no se apartan mucho de sus valores nominales. En otros sistemas no es adecuado el análisis con un modelo lineal, puesto que sólo puede predecir comportamientos locales. Por otro lado, la *dinámica* provocada por los términos *no lineales* es mucho más rica que la aportada por sus análogos lineales. Hay comportamientos muy distintivos y característicos que pueden ocurrir sólo con la presencia de las *alinealidades*, que no pueden ser descritas o previstas por modelos lineales. Ejemplos de estos fenómenos no lineales son: *tiempo de escape finito*, *múltiples puntos de equilibrios aislados*, *ciclos límites*, y *caos*. Como se mencionó anteriormente, en la primera parte del capítulo se realiza la presentación con la descripción clásica de sistemas en ecuaciones de estados siguiendo la bibliografía: (Khalil, 1996; Hahn, 1967), etc.; mientras que en la segunda parte se presenta una descripción algebraica que no es común en el ámbito de Teoría de Sistemas y Control, siendo uno de los principales focos de interés de esta tesis.

1.1. Descripción en el espacio de estados

De manera bastante general, un sistema dinámico puede ser modelado como un número finito de ecuaciones diferenciales de primer orden. En otras palabras, existe un conjunto de variables x_1, \dots, x_n que permite establecer su *estado dinámico*, y en un gran conjunto de ellos se puede expresar la dinámica en forma explícita a partir de las siguientes ecuaciones diferenciales denominadas *ecuaciones de estados*:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

donde \dot{x}_i con $i = 1, \dots, n$, es la derivada de x_i con respecto a la variable t (usualmente el tiempo), a las variables x_1, \dots, x_n se las llama *variables de estado*, las variables u_1, \dots, u_p son las *variables de entrada* o *control*, y las f_i son funciones $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$; de ellas depende la linealidad del sistema y es posible asegurar la existencia y unicidad de soluciones si estas funciones verifican condiciones que se detallan a continuación de esta sección. Usualmente se utiliza la notación vectorial para escribir las ecuaciones anteriores en forma más compacta

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

permitiendo escribir las n ecuaciones diferenciales de primer orden en una sola de dimensión n

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

llamada *ecuación de estado*, donde x es el *vector de estados* o *estado* y u la *entrada*. Muchas veces se realiza el análisis de sistemas sin la presencia explícita de la variable

de entrada u , en este caso se denominan ecuaciones de estado *no forzadas*

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Esto no significa que la entrada del sistema es nula; puede ser que la entrada haya sido especificada como una dada función del tiempo $u = \gamma(t)$, o una dada función de realimentación $u = \gamma(x)$, o una combinación de ambas $u = \gamma(t, x)$.

Un caso especial es cuando f no depende explícitamente de t

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

y se dice que el sistema es *autónomo* o *invariante en el tiempo*. El comportamiento de un sistema autónomo es invariante ante variaciones del tiempo inicial, puesto que cambios en la variable tiempo t a $\tau = t - t_0$ no altera el miembro derecho de la ecuación de estado (1.1).

Uno de los problemas de interés al estudiar sistemas dinámicos es el de encontrar una solución, $x(t)$ que verifique la ecuación (1.1) a partir de una condición inicial dada $x(0) = x_0$, conocido como el *problema con condiciones iniciales*. El primer interrogante que se presenta al pensar en este problema es si siempre tendrá solución y si ésta será única. Haciendo algunas consideraciones sobre la función f se contesta esta pregunta, como se manifiesta en la próxima sección con el enunciado del teorema de existencia y unicidad de las soluciones, donde también se muestra la dependencia continua de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales.

Dentro de las soluciones generales de un sistema, una solución de interés particular es aquella que verifica que el vector de estado se mantiene constante en un punto en todo tiempo, llamado *punto de equilibrio*, y se define así:

Definición 1 *Un punto del espacio de estados x^* es un punto de equilibrio de un sistema si $x(t) = x^*$ es una solución de las ecuaciones diferenciales del sistema $\forall t \geq 0$.*

Es decir, el punto de equilibrio cumple la propiedad que cuando el estado inicial

del sistema es dicho punto, el estado permanecerá en ese punto para todo tiempo futuro. En sistemas autónomos (1.1) los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0,$$

puesto que una solución es constante únicamente si la variación del vector de estados es nula. Por lo tanto en los sistemas autónomos la definición de punto de equilibrio es la siguiente:

Definición 2 *En un sistema como (1.1) un punto del espacio x^* es un punto de equilibrio si $f(x^*) = 0$.*

Los puntos de equilibrio pueden ser aislados, si en las “proximidades” no hay otro punto de equilibrio, o también puede existir una continuidad de puntos de equilibrio. Es de notable importancia práctica el comportamiento del sistema en “cercanías” del punto de equilibrio, pues generalmente existe un error por incertidumbre en los valores del estado inicial y perturbaciones. Interesa entonces saber si las soluciones que comienzan “cerca” de un punto de equilibrio convergen o no a él. Por lo tanto para definir claramente el concepto de “cercanía” o “proximidad” es necesario establecer una forma de medir distancias entre los puntos del espacio de estados. La forma más común es utilizar la norma euclídea de la diferencia de los dos puntos. La distancia entre dos puntos x_1 y x_2 del espacio de estado n -dimensional es $\|x_1 - x_2\|$, donde:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Pero existe una forma más general que proviene de la definición de espacios métricos, dado un conjunto abstracto X , una métrica o distancia sobre X se define de la siguiente manera:

Definición 3 *Una métrica o medida de distancia \mathfrak{d} es una función definida sobre*

$X \times X$ que toma valores reales, finitos y no-negativos, es decir $\mathfrak{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que para todo $x, y, z \in X$ se tiene que:

- $\mathfrak{d}(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $\mathfrak{d}(x, y) = \mathfrak{d}(y, x)$ (simétrica).
- $\mathfrak{d}(x, y) \leq \mathfrak{d}(x, z) + \mathfrak{d}(z, y)$ (desigualdad triangular).

Una manera de definir distancias es utilizando las definiciones de normas en espacios vectoriales. Como se mencionó antes, en \mathbb{R}^2 se puede definir $\mathfrak{d}(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. Cabe aclarar que la diferencia entre $\mathfrak{d}(x, y)$ y $\|x - y\|$ es que $\|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\|$, sin embargo $\mathfrak{d}(\alpha x, \alpha y)$ no tiene porqué ser igual a $|\alpha| \mathfrak{d}(x, y)$.

Con esta medida se puede realizar un mejor análisis de las soluciones de los sistemas dinámicos y definir “entorno” poniendo en claro los conceptos de “cerca” o “próximo”.

Estableciendo un orden jerárquico de complejidad, luego de los puntos de equilibrio, las soluciones más simples de estado estacionario son las soluciones periódicas. La existencia de oscilaciones es uno de los fenómenos más importantes que ocurren en los sistemas dinámicos no lineales. Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial, es decir existe un número positivo T (período) que verifica $x(t + T) = x(t)$, $\forall t \geq 0$. El término no trivial excluye las soluciones constantes correspondientes a los puntos de equilibrio.

Al estudiar las soluciones en la mayoría de los casos existen errores (prácticamente por la misma imprecisión de las condiciones iniciales y las perturbaciones) y por lo tanto aparece una incerteza sobre la solución real del sistema. Interesa saber entonces el comportamiento cercano a la solución, y por ello se desea extender esta definición de distancia también a un conjunto de puntos. Por ejemplo, el conjunto formado por los puntos del espacio de estados por donde pasa una solución particular del sistema.

Definición 4 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$. La distancia entre un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y el conjunto M es $d(x, M) = \inf_{y \in M} \mathfrak{d}(x, y)$.

De esta manera se generaliza el concepto de distancia entre puntos a distancia con respecto a cualquier conjunto del espacio de estados. En particular, este conjunto puede contener sólo un punto, el de equilibrio por ejemplo. Por lo tanto si se quiere indicar que un conjunto de puntos está *próximo* a otro, basta con encontrar todos los puntos que están a menos de una cierta distancia dada como lo establece la siguiente definición:

Definición 5 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$; un entorno ε de M se define por el conjunto

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \varepsilon\}.$$

La *estabilidad* informa acerca del comportamiento del sistema en un entorno de las soluciones. El concepto de estabilidad tiene un rol muy importante en la teoría de sistemas e ingeniería. Hay diferentes tipos o conceptos de estabilidad, se estudiará en especial la estabilidad de puntos de equilibrio y de ciertas soluciones particulares en la sección 1.2. En forma de adelanto a su definición en secciones siguientes, y de manera informal, un punto de equilibrio se dice que es *estable* si todas las soluciones que comienzan en un entorno permanecen próximas a él, de otro modo es *inestable*. La estabilidad *asintótica* se define a partir de que todas las soluciones que comienzan en un entorno cercano no sólo permanecen en él sino además tienden al punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito, es decir la distancia entre el punto de la solución y el punto de equilibrio tiende a cero.

El comportamiento de los sistemas dinámicos es muy interesante, en particular el de los sistemas no lineales que pueden exhibir algunos fenómenos entre los que merecen destacarse:

- *tiempo de escape finito*: el estado de un sistema no lineal puede tender a infinito en un tiempo finito.

- *múltiples puntos de equilibrios aislados*: un sistema lineal sólo puede tener un único punto de equilibrio aislado, en cambio un sistema no lineal puede tener más que uno, el estado puede converger a alguno de ellos dependiendo de las condiciones iniciales.
- *ciclos límites*: para que un sistema lineal oscile debe tener un par de autovalores sobre el eje imaginario, lo cual no es muy robusto, y casi imposible de mantener bajo perturbaciones, y además la amplitud depende de la condición inicial. Los sistemas no lineales, pueden producir oscilaciones estables, con amplitud y frecuencia fijas e independientes de la condición inicial. Un sistema no lineal bajo excitación periódica puede oscilar con frecuencias múltiplos y submúltiplos de la frecuencia de entrada, y también puede generar oscilaciones pseudoperiódicas como, por ejemplo, suma de oscilaciones con frecuencias que no sean múltiplos (capítulos 2 y 3).
- *caos*: un sistema no lineal puede tener comportamientos más complejos que equilibrios, soluciones periódicas, o pseudo-periódicas. Tales manifestaciones dinámicas se suelen referir como caos y se distinguen por aparentar cierta aleatoriedad a pesar de la naturaleza determinística del sistema.

Esta tesis se enfocará hacia al análisis y generación de ciclos límites dando énfasis a una caracterización algebraica (capítulo 4).

Ejemplo 1 Consideremos la ecuación diferencial de un péndulo simple, Fig. 1.1, que se obtiene usando la segunda ley de Newton en la dirección tangencial al movimiento:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau$$

donde I , m , y l son el momento de inercia, la masa y la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad, b es el coeficiente de fricción y τ es un torque

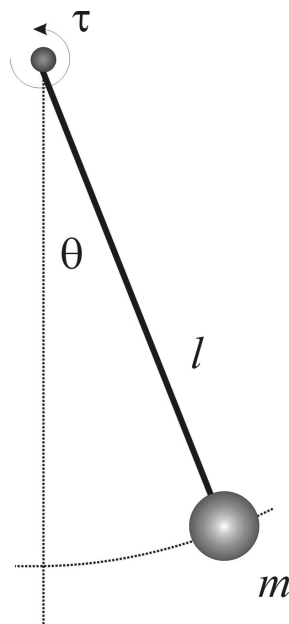


Figura 1.1: Esquema de un péndulo simple

aplicado en el eje, θ es el ángulo del péndulo medido con respecto a un eje vertical con dirección hacia el centro de la tierra, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son la velocidad y la aceleración angular, respectivamente. La descripción en el espacio de estados, con la elección de las variables $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$ resulta:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (1.2)$$

$$\dot{x}_2 = -q_1 \sin x_1 - q_2 x_2 + q_3 u, \quad (1.3)$$

con los parámetros $q_1 = mgl/I$, $q_2 = b/I$, y $q_3 = 1/I$. Es un sistema dinámico no lineal, con entrada de control $u = \tau$. Si consideramos el péndulo no forzado, con control nulo ($u = 0$), los puntos de equilibrio del sistema autónomo corresponden a los estados: $x_1 = k\pi$ y $x_2 = 0$, con $k \in \mathbb{Z}$, un número entero. Este ejemplo, si bien es un sistema mecánico muy sencillo, es de gran interés en la Teoría de Control pues otros sistemas físicos son modelados por ecuaciones similares. Tales ejemplos son el modelo de un generador sincrónico conectado a una red infinita (Pai, 1981), un lazo de enganche de fase (Gardner, 1979), o un circuito no lineal con un inductor con

juntura Josephson (Chua *et al.*, 1987; Khalil, 1996).

1.1.1. Soluciones, trayectorias y conjuntos invariantes

Dado un modelo que representa a un sistema físico por medio de ecuaciones diferenciales y una cierta condición inicial, el primer análisis de las posibles soluciones es si tal solución realmente existe. Las variables de un sistema físico evolucionan sin ambigüedad a partir de una condición inicial. Sin embargo el modelo matemático puede presentar algunos inconvenientes. Una ecuación diferencial con una condición inicial dada puede tener una, ninguna, o varias soluciones. Además puede ocurrir que la solución exista sólo en un entorno del punto inicial (local) o puede tener solución global, es decir la solución existe para todo t , esto se entiende que vale en todo intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ contenido en $[t_0, +\infty)$. La continuidad de $f(t, x)$ asegura la existencia de al menos una solución y la condición de Lipschitz establece condiciones suficientes sobre la existencia y unicidad global de las soluciones como lo muestran los siguientes teoremas:

Teorema 1 *Existencia y unicidad local.* Sea $f(t, x)$ una función continua en x y en t , y tal que existen constantes t_1 , L , h , y ε que satisfacen

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (\text{condición de Lipschitz})$$

$$\|f(t, x_0)\| \leq h$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$ y $\forall x, y \in B_\varepsilon$, donde $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$. Entonces la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución en el intervalo $[t_0, t_1]$.

Teorema 2 *Existencia y unicidad global.* Sea $f(t, x)$ una función continua en

x y en t , tal que para cada $t_1 \in [t_0, \infty)$, existen constantes L y h que verifican

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (\text{condición de Lipschitz})$$

$$\|f(t, x_0)\| \leq h$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución en cada intervalo $[t_0, t_1]$.

En (Vidyasagar, 1993) se puede encontrar la demostración de estos teoremas utilizando el concepto de *aplicaciones contraídas*. La condición de continuidad de f con respecto a t se puede relajar a *continuidad a tramos* sin afectar la validez de los teoremas; en cambio la condición de Lipschitz implica la continuidad de f con respecto a x . Otra propiedad de interés en las soluciones es la continuidad sobre las condiciones iniciales y ciertas variables del sistema que se denominan *parámetros*. Estos parámetros son variables pero no dependientes del tiempo o bien su dependencia y variación es despreciable o no considerada. Se utilizan para describir una familia de sistemas, y cuando se les da un valor numérico sirven para identificar a un sistema de dicha familia. Si se modifican levemente los valores de las condiciones iniciales o de los parámetros se espera que varíen poco las soluciones, al menos en un intervalo de tiempo dado, como lo muestra el siguiente teorema sobre la continuidad de las trayectorias:

Teorema 3 Dependencia de las condiciones iniciales y parámetros. Sea $f(t, x, \lambda)$ continua en (t, x, λ) y localmente Lipschitz en x (uniformemente en t y λ) sobre $[t_0, t_1] \times D \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto conexo. Sea $y(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ con $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$. Se supone que $y(t, \lambda_0)$ está definida y permanece en D para todo $t \in [t_0, t_1]$. Dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\|z_0 - y_0\| < \delta \quad \text{y} \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

entonces existe una única solución $z(t, \lambda)$ de $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0, \lambda_0) = z_0$, y $z(t, \lambda)$ satisface

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

La interpretación de este teorema nos indica que el mapa que asocia a cada condición inicial la correspondiente solución en un intervalo $[t_0, t_1]$, es continuo. Resumiendo, si f es una función continua y localmente Lipschitz, la solución en un intervalo de tiempo finito (cerrado y acotado) existe, es única y varía en forma continua con respecto a las condiciones iniciales y a los parámetros. Sin embargo esto no siempre se cumple si se considera un intervalo de longitud infinita $[t_0, \infty)$. En este caso el concepto está asociado al de estabilidad como se verá más adelante. Del mismo modo, si se consideran pequeños cambios en los parámetros, el mapa que asocia a cada parámetro la solución particular para una condición inicial dada, en un intervalo de tiempo establecido $[t_0, t_1]$, es una aplicación continua. Sin embargo, si se considera un intervalo de tiempo de longitud infinita, otros fenómenos pueden ocurrir. En especial, para ciertos valores críticos de los parámetros el sistema puede cambiar su comportamiento en forma cualitativa (como por ejemplo que aparezcan o desaparezcan puntos de equilibrio y soluciones periódicas, o que cambien su estabilidad) y a este fenómeno se lo conoce como *bifurcación*.

Aunque el teorema de existencia y unicidad local muestra que el sistema (1.1) tiene solución única cuando f es localmente Lipschitz, este resultado sólo es suficiente. En (Vidyasagar, 1993) se muestra que “prácticamente todas” las ecuaciones diferenciales tienen solución única. Orlicz (1932) demostró que el conjunto de funciones f para los cuales la ecuación $\dot{x} = f(t, x(t))$ tiene solución única es el complemento de un conjunto “magro” (Orlicz, 1932). Esta es una situación paradójica ya que el teorema de Orlicz establece que casi todas las ecuaciones diferenciales tienen solución única, pero “prácticamente ninguna” puede caracterizarse explícitamente (sólo las que son Lipschitz continuas).

*Aprendí que no se puede dar marcha atrás,
que la esencia de la vida es ir hacia adelante.
La vida, en realidad, es una calle de sentido único.*

(Agatha Christie)

Trayectorias u órbitas

En esta sección se tratarán a las soluciones desde un aspecto más geométrico, como un conjunto de puntos en el espacio de estados. Sea $s(t, x_0)$ la solución de (1.1) correspondiente a la condición inicial $x(0) = x_0$, evaluada en el tiempo t . En otras palabras, s satisface la ecuación $\frac{d}{dt}s(t, x_0) = f(s(t, x_0))$, $\forall t \geq 0$, $s(0, x_0) = x_0$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario; toda solución define un conjunto de puntos llamado trayectoria u órbita $S_+(x_0)$ que es la imagen en el espacio de estados del intervalo $[0, +\infty)$ al aplicar la función temporal $x(t) = s(t, x_0)$, es decir

$$S_+(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} s(t, x_0),$$

define la trayectoria resultante vista como un subconjunto de \mathbb{R}^n . Muchas veces es conveniente considerar también las soluciones para el intervalo de tiempo $-\infty < t \leq 0$, con la condición de que allí existan interpretando a $s(t, x_0)$ como una curva en \mathbb{R}^n parametrizada en t , para $-\infty < t < \infty$, es decir la órbita queda formada por el conjunto de puntos $S(x_0) = \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} s(t, x_0)$. El punto x_0 divide a la trayectoria en dos mitades o semiórbitas: $S_+(x_0)$ y $S_-(x_0)$.

Definición 6 *Un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina conjunto invariante de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = f(x(t)) \forall t \geq 0$ si para cada $x_0 \in M$, $s(t, x_0) \in M$, $\forall t \geq 0$.*

En otras palabras un conjunto es (positivamente) invariante si para toda condición inicial en el conjunto, la trayectoria resultante permanece en el conjunto en todo tiempo futuro. Algunos ejemplos ilustrativos son: el conjunto $S(x_0)$, un punto de equilibrio, y toda solución periódica. La imagen de una solución periódica en el espacio de estados es una trayectoria cerrada, generalmente llamada *órbita periódica*

u *órbita cerrada*. Sin embargo no toda trayectoria cerrada es una órbita periódica, por ejemplo: en \mathbb{R}^2 , $x(t) = \sin(t^2)$, $y(t) = \cos(t^2)$.

Ejemplo 2 Para el péndulo no forzado sin fricción ($q_2 = 0$)

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -q_1 \sin x_1,$$

considérese la función de energía $W(x) = x_2^2/2q_1 + (1 - \cos x_1)$, donde el primer término corresponde a la energía cinética y el restante a la energía potencial. El conjunto de puntos que verifican $W(x) = k$, donde k es una constante positiva, forman un invariante pues $\frac{d}{dt}(W[x(t)]) = 0$, es decir W se mantiene constante sobre toda la trayectoria. Estos invariantes corresponden a soluciones periódicas y puntos de equilibrio, como puede verse en la Fig.1.2, las simulaciones gráficas de trayectorias en el espacio de estados.

1.1.2. Punto límite, conjunto límite y ciclo límite

Al estudiar el comportamiento de sistemas no lineales a través de la evolución temporal de sus variables de estado, ciertos puntos y conjuntos de puntos en el espacio de estados son de interés particular. Un ejemplo de ellos son los puntos de equilibrio, ya que las trayectorias que pasan por un entorno del mismo bien pueden acercarse o alejarse, o bien “comenzar” o “finalizar” en él. Existen otros tipos de puntos donde el sistema tiene comportamientos similares, los *puntos límites*, y se definen de la siguiente manera:

Definición 7 Supongamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces un punto $p \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto límite positivo* de la trayectoria $s(t, x_0)$, si existe una sucesión $\{t_i\}$ de números reales

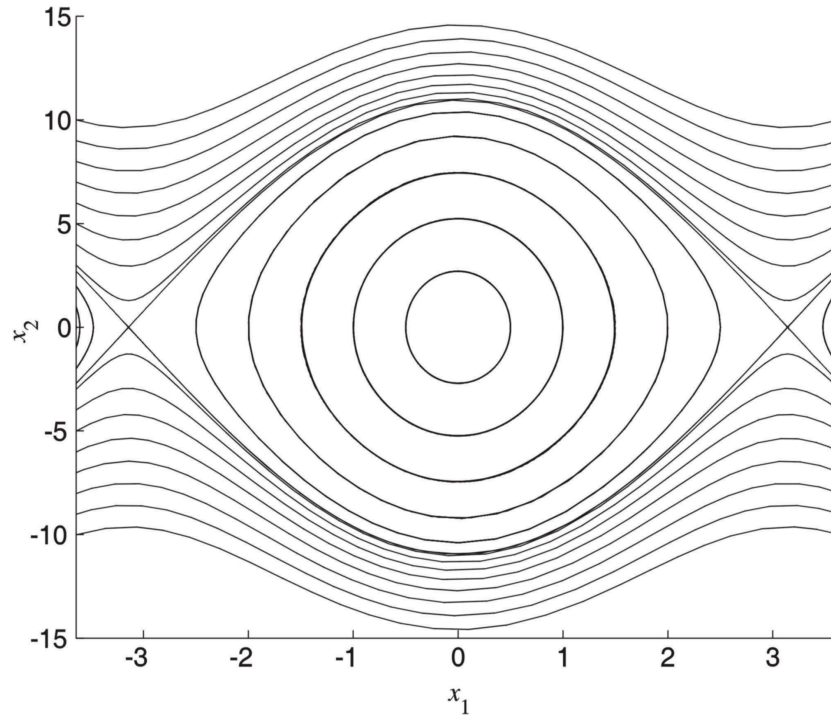


Figura 1.2: Trayectorias en el espacio de estados del ejemplo del péndulo sin fricción.

en $[0, \infty)$ tal que $t_i \rightarrow \infty$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - s(t_i, x_0)\| = 0$.

Análogamente un punto $q \in \mathbb{R}^n$ se llama punto límite negativo de la trayectoria $s(t, x_0)$, si existe una sucesión $\{t_i\}$ de números reales en $(-\infty, 0]$ tal que $t_i \rightarrow -\infty$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \|q - s(t_i, x_0)\| = 0$.

Por lo tanto si p es un punto límite de la trayectoria $s(t, x_0)$, todo entorno U_ε contiene al menos un punto de trayectoria, es decir existe un tiempo t tal que $\|p - s(t, x_0)\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

El conjunto de todos los puntos límites de $s(t, x_0)$ se llama *conjunto límite* y se expresa como $\Omega(x_0)$ [conjunto límite positivo $\Omega_+(x_0)$ si se consideran sólo los puntos límites positivos, y el conjunto límite negativo $\Omega_-(x_0)$ de todos los puntos límites negativos de $s(t, x_0)$].

Un ejemplo de conjunto límite que se estudiará en especial en esta tesis es el llamado *ciclo límite*.

Definición 8 Un ciclo límite es una órbita cerrada $\gamma = S(x_0)$ tal que γ es un

conjunto límite positivo o negativo de una solución $s(t, y)$ para algún $y \notin \gamma$, es decir $\gamma = \Omega_+(y)$ ó $\gamma = \Omega_-(y)$.

Cuando se tiene una solución acotada, el conjunto límite correspondiente es no vacío, cerrado y acotado (compacto), invariante y además la trayectoria se “acerca” o se “aleja” de su conjunto límite como lo muestran los siguientes lemas:

Lema 1 . Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y $s(\cdot, x_0)$ acotada, entonces $\Omega_+(x_0)$ es no vacío, cerrado y acotado.

Claramente $\Omega_+(x_0)$ es no vacío y acotado si $s(\cdot, x_0)$ es acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, (Apostol, 1957). Sea $\{p_i\}$ una sucesión en $\Omega_+(x_0)$ convergente a $p \in \mathbb{R}^n$; se debe mostrar que $p \in \Omega_+(x_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ y $T < \infty$ arbitrario, se debe encontrar un $t \geq T$ tal que $\|p - s(t, x_0)\| < \varepsilon$. Elegimos i tal que $\|p - p_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$, tal i existe pues $p_i \rightarrow p$. Elegimos $t \geq T$ tal que $\|p_i - s(t, x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, tal t existe pues $p_i \in \Omega_+(x_0)$. Luego por la desigualdad triangular $\|p - s(t, x_0)\| < \varepsilon$.

■

Lema 2 Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $s(\cdot, x_0)$ es acotada entonces $\Omega_+(x_0)$ es un conjunto invariante de $\dot{x} = f(x)$.

Como $s(\cdot, x_0)$ es acotada, por el lema anterior el conjunto límite $\Omega_+(x_0)$ es no vacío, sea $x^* \in \Omega_+(x_0)$. Se debe mostrar que $s(t, x^*) \in \Omega_+(x_0)$, $\forall t \geq 0$.

Como x^* es un punto límite, de acuerdo a la definición existe una sucesión de números reales $\{t_i\}$ en $[0, \infty)$ tal que $t_i \rightarrow \infty$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x^* - x_i\| = 0$, es decir $x_i \rightarrow x^*$ con $x_i = s(t_i, x_0)$. Por unicidad de las soluciones se tiene que

$$s(t + t_i, x_0) = s(t, s(t_i, x_0)) = s(t, x_i)$$

pues la igualdad se verifica en $t = 0$, por lo tanto vale $\forall t \geq 0$, y por la continuidad de la solución con respecto a las condiciones iniciales en el intervalo $[0, t]$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s(t + t_i, x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} s(t, x_i) = s(t, x^*)$$

por lo tanto $\forall t \geq 0$, cada punto de la trayectoria $x(t) = s(t, x^*)$ es un punto límite de $s(\cdot, x_0)$, entonces $s(t, x^*) \in \Omega_+(x_0)$.

■

Lema 3 *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $s(\cdot, x_0)$ acotada, entonces $d(s(t, x_0), \Omega_+(\cdot, x_0)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Si es falso, $\exists \varepsilon > 0$ y una sucesión $\{t_i\} \rightarrow \infty$ tal que $d(s(t_i, x_0), \Omega_+(x_0)) \geq \varepsilon \forall i$. Como $s(t_i, x_0)$ es acotada, contiene una subsucesión convergente. Por definición de $\Omega_+(x_0)$, el límite de la subsucesión debe pertenecer a $\Omega_+(x_0)$, lo cual contradice que la distancia no sea cero.

■

Región de atracción

Definición 9 *La región de atracción $R(H)$ de un conjunto H en \mathbb{R}^n es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $d(s(t, x), H) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

Un conjunto compacto $H \subset \mathbb{R}^n$ es un atractor si existe un entorno U de H tal que $x \in U$ implica $d(s(t, x), H) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, es decir el entorno U está contenido dentro de la región de atracción de H . Si $d(s(t, x), H) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, entonces todo el espacio es la región de atracción. En este caso H es un *atractor global*.

1.2. Estabilidad de conjuntos invariantes

El objetivo de la teoría de estabilidad es dar conclusiones del sistema acerca de su comportamiento cualitativo sin necesidad de calcular las soluciones de las ecuaciones diferenciales. A. M. Lyapunov introdujo las nociones básicas y probó muchos de los teoremas fundamentales en su trabajo (Lyapunov, 1892) en ruso, luego apareció una traducción al francés en (Lyapunov, 1907), una reedición en inglés del original

de 1907 en ocasión del centenario es (Lyapunov, 1992). En su trabajo Lyapunov presentó dos métodos, pero el más importante y poderoso es el *método directo*, precisamente porque no necesita el conocimiento de las soluciones. La teoría de Lyapunov abarca una gran cantidad de tipos de estabilidad. En esta tesis se abordarán sólo algunas que corresponden a la estabilidad y estabilidad asintótica de conjuntos invariantes. Generalmente se asocia el estudio de estabilidad a puntos de equilibrio; sin embargo, aquí se le da un sentido más amplio al definir estabilidad de conjuntos invariantes que incluyen como un caso particular a los puntos de equilibrio.

En lo que sigue se tratará la solución $s(t, x_0)$ del sistema autónomo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$.

Definición 10 Sean U_δ y U_ε entornos de un conjunto invariante M según la definición 5. El conjunto invariante M es:

- **atractivo** si existe $\delta > 0$ tal que $\forall x_0 \in U_\delta$ el $\lim_{t \rightarrow \infty} d(s(t, x_0), M) = 0$.
- **estable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x_0 \in U_\delta, s(t, x_0) \in U_\varepsilon, \forall t \geq 0$.
- **asintóticamente estable** si es estable y además δ puede ser elegido tal que $\forall x_0 \in U_\delta$, el $\lim_{t \rightarrow \infty} d(s(t, x_0), M) = 0$.

De manera informal se puede decir que un conjunto invariante es estable si soluciones que comienzan en un entorno, se mantienen próximas al invariante y es asintóticamente estable si además es atractivo. Esta definición se reduce a la comúnmente utilizada si M es un punto de equilibrio.

A partir de estas definiciones la tarea de análisis es encontrar algún procedimiento para medir la distancia al invariante y no necesariamente con la norma euclídea, sino con alguna medida que sea más apropiada para el sistema y poder mostrar claramente si es creciente o decreciente y con ello determinar la estabilidad. En sistemas mecánicos una forma natural y comúnmente adoptada es la utilización como medida de distancia a la energía; si ésta se mantiene constante, disminuye o se

incrementa sobre las trayectorias del sistema, se puede concluir sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio. Por lo tanto examinando la derivada de la energía a lo largo de las trayectorias es posible determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Lyapunov mostró que para determinar la estabilidad se pueden emplear otras funciones en lugar de la energía (de hecho, a veces la energía no sirve). Por ejemplo se eligen funciones donde sea accesible analizar su crecimiento o decrecimiento a lo largo de las trayectorias del sistema. Para ello se utiliza \dot{V} , la variación temporal de V , como se define a continuación.

Definición 11 Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. La derivada temporal de V a lo largo de la trayectoria $x(t)$ está dada por

$$\dot{V}[x(t)] = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i[x(t)].$$

Si se encuentra que $\dot{V}[x(t)] \leq 0$, entonces $V[x(t)]$ es decreciente y si en la elección de la función V se tuvo en cuenta que sea una función acotada por abajo ($V(x) \geq 0$, por ejemplo), se puede garantizar que V estará acotada sobre las trayectorias. Si de alguna manera además se prueba que $\dot{V}[x(t)] \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces por la continuidad de $\dot{V}[x(t)]$ el sistema evoluciona hacia puntos donde la función $\dot{V} = 0$, es decir $V[x(t)]$ toma valores mínimos (sobre la trayectoria). Entonces con una elección adecuada de $V(x)$, por ejemplo que tenga mínimos sobre el conjunto invariante (o el punto de equilibrio en estudio), y el análisis de su derivada es posible determinar su estabilidad.

Por lo tanto es importante mostrar que las trayectorias evolucionan hacia los puntos donde $\dot{V} = 0$. Al integrar la función \dot{V} sobre la trayectoria se obtiene:

$$V[x(t)] = V[x(0)] + \int_0^t \dot{V}[x(\tau)] d\tau,$$

y de aquí se puede inferir que si de algún modo se sabe que el valor de V se estabiliza, es decir existe el $\lim_{t \rightarrow \infty} V[x(t)]$, es de esperar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}[x(t)] = 0$. Sin embargo, esto no es siempre cierto, el lema de Barbalat (ver apéndice del capítulo) muestra que la continuidad uniforme es una condición suficiente para que este límite sea nulo. Resumiendo, si \dot{V} es negativo, V decrece y a pesar que V tenga límite cuando t tiende a infinito, no es posible asegurar que \dot{V} tienda a cero, para ello es suficiente si además V es uniformemente continua.

1.2.1. Funciones de Lyapunov

Para aplicar el método de Lyapunov es necesario definir primero funciones con algunas propiedades específicas: las *funciones de clase K* , las *funciones definidas positivas*, y las *funciones definidas negativas*.

Definición 12 Una función $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de clase K si es continua, estrictamente creciente, y $\varphi(0) = 0$.

Las funciones de clase K son estrictamente monótonas, por lo tanto son biyectivas, siempre existe φ^{-1} .

Definición 13 Sea $M \subset D$, donde D es un abierto de \mathbb{R}^n . Una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ se llama *definida positiva con respecto a M* si existe una función $\varphi(r)$ de clase K tal que

$$V(x) \geq \varphi(d(x, M))$$

para todo x perteneciente al dominio D , y $V(x) = 0$ cuando $x \in M$ [porque $d(x, M) = 0$ y $\varphi(0) = 0$].

En forma análoga se dice que V es *definida negativa con respecto a M* si $-V$ es definida positiva con respecto a M .

Se ve ahora la definición de \dot{V} como función del vector de estados x :

Definición 14 Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ donde D es un abierto de \mathbb{R}^n , y $s(t, x)$ una solución del sistema $\dot{x} = f(x)$. Se define

$$\dot{V}(x) = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{V[s(t, x)] - V[x]}{t}.$$

Entonces si $\phi(t) = V[s(t, x)]$, y $D_+\phi(t)$ la derivada a derecha, $D_+\phi(t) = \dot{V}[s(t, x)]$. Es decir \dot{V} es la derivada temporal (a derecha) de V calculada sobre la trayectoria del sistema. En las aplicaciones, generalmente V es C^1 (derivadas continuas) y $\dot{V}(x) = \text{grad } V(x) \cdot f(x)$ (como en la definición 11).

Se define a continuación la *función de Lyapunov*:

Definición 15 Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ donde D es un abierto de \mathbb{R}^n , y sea $G \subset D$. Se dice que V es una función de Lyapunov del sistema $\dot{x} = f(x)$ sobre G para el conjunto invariante $M \subset G$, si V es continua, definida positiva con respecto a M y $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in G$.

Ahora sí se puede enunciar el *Teorema de Estabilidad de Lyapunov*:

Teorema 4 Sea M un conjunto acotado, invariante de $\dot{x} = f(x)$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene a M . Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. M es estable si V es una función de Lyapunov para el conjunto M y es asintóticamente estable si \dot{V} es negativa definida con respecto a M . Es decir existen funciones α y γ de clase K , tales que

$$\alpha(d(x, M)) \leq V(x) \quad \forall x \in D \quad (1.4)$$

M es estable si

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D. \quad (1.5)$$

y M es asintóticamente estable si

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma(d(x, M)) \quad \forall x \in D. \quad (1.6)$$

En las hipótesis del teorema anterior las condiciones (1.4) y (1.5) implican que V es una función de Lyapunov, y la condición (1.6) indica que la derivada \dot{V} es acotada en un entorno del conjunto M , lo que asegura la continuidad uniforme de $V[x(t)]$. En el siguiente ejemplo se ve la aplicación del teorema de estabilidad de Lyapunov:

Ejemplo 3 Para el siguiente sistema descrito en el espacio de estados

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1),$$

una solución particular es $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$. Es fácil ver que resulta una trayectoria cerrada que verifica $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, por lo tanto el círculo unitario es un invariante del sistema, sea

$$M = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}.$$

La distancia, según la definición 4, entre un punto del espacio (x_1, x_2) y este conjunto es

$$d(x, M) = \left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 \right|.$$

Sea $V(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$, se puede ver que es una función de Lyapunov para el invariante M en el dominio anular

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 | d(M, x) < 1/2\}.$$

En efecto, si $r \triangleq d(x, M)$ y $\alpha(r) = \gamma(r) = r^2$

$$\alpha(r) \leq V(x)$$

pues $V(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 1)^2 = r^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 1)^2 \geq r^2$. Además como en D es $r < 1/2$, entonces

$$\frac{1}{2} < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -4(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \\ &= -4(x_1^2 + x_2^2)V(x) \\ \dot{V}(x) &\leq -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot r^2 = -\gamma(r) \end{aligned}$$

en D . Como $\alpha(r)$ y $\gamma(r)$ son funciones de clase K , el conjunto invariante M es asintóticamente estable.

En el teorema anterior para analizar la estabilidad asintótica del conjunto invariante se pide que V sea definida positiva y que \dot{V} sea definida negativa. Sin embargo esto no siempre es necesario. Con el siguiente teorema, conocido como *Principio de Invariancia de LaSalle* cuya demostración puede encontrarse en: (Khalil, 1996; LaSalle, 1976), se puede analizar la estabilidad asintótica de conjuntos invariantes cuando \dot{V} no resulta definida negativa, sólo semidefinida, esto es que \dot{V} se anula en puntos que no están en el conjunto invariante.

Teorema 5 Teorema de LaSalle. *Sea $\Omega \subset D$ un conjunto compacto, positivamente invariante con respecto a (1.1). Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el mayor conjunto invariante en E . Entonces toda solución que comience en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.*

En este teorema no se requiere que la función $V(x)$ sea positiva definida; tampoco el conjunto Ω está vinculado a la definición de $V(x)$. Sin embargo, la construcción de $V(x)$ puede garantizar la existencia del conjunto Ω . En particular si $\Omega_c = \{x \in$

$\mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c$ es una región acotada y $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω_c , entonces podemos tomar $\Omega = \Omega_c$.

Estos teoremas serán utilizados en los próximos capítulos para el análisis y el diseño de sistemas con invariantes asintóticamente estables. Veamos como podemos aplicarlos en el ejemplo del péndulo:

Ejemplo 4 Consideremos el péndulo libre con fricción

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -q_1 \operatorname{sen} x_1 - q_2 x_2,$$

y a la energía como función de Lyapunov $V(x) = x_2^2/2q_1 + (1 - \cos x_1)$. Si bien $\dot{V}(x) = -\frac{q_2}{q_1}x_2^2$ no es una función definida negativa para el punto de equilibrio del origen, se puede concluir a partir del teorema de LaSalle que el origen es asintóticamente estable. En efecto, $E = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ y el único invariante $M \subset E$ es $M = \{0\}$. Por lo tanto el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

1.3. Sistemas dinámicos con ideales de polinomios

Si ‘A’ significa un éxito en la vida, entonces ‘A’ equivale a ‘x + y + z’.

El trabajo es ‘x’; ‘y’ es juego, y ‘z’ es mantener la boca cerrada.

(Albert Einstein)

En esta sección se enfoca el análisis y estudio de sistemas dinámicos utilizando Álgebra. En el Apéndice A de esta tesis pueden encontrarse las definiciones de conceptos básicos como anillo, cuerpo, ideal, bases de Groebner, etc.

Desde un punto de vista algebraico, los sistemas dinámicos se pueden ver como relaciones algebraicas entre un conjunto de variables y sus derivadas. Estas relaciones

algebraicas pueden expresarse como ecuaciones diferenciales, como por ejemplo en las secciones previas por medio de las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde en este caso f_1, \dots, f_n son polinomios en el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$, es decir son *polinomios* en las variables x_1, \dots, x_n , con coeficientes en el cuerpo k , que puede ser \mathbb{R} (el conjunto de número reales), \mathbb{Q} (el conjunto de número racionales) o bien funciones racionales de parámetros del sistema. Esta representación abarca una gran cantidad de sistemas, incluye muchas formas que no son polinomios, pero si son solución de ecuaciones diferenciales algebraicas (Fliess, 1990).

Las relaciones algebraicas de las variables y sus derivadas también pueden expresarse como un conjunto de polinomios. Consideramos un conjunto de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ que llamaremos de *estado* y un anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$ donde no intervienen derivadas, o bien el anillo $k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$ donde tenemos en cuenta todas las relaciones algebraicas entre las variables de estado y sus primeras derivadas. El conjunto de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ es *algebraicamente independiente* si no se encuentra un polinomio p en el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$ que se anula cuando las variables toman los valores de cualquier trayectoria o solución del sistema. Y diremos que el conjunto de variables de estado es *completo* si al incorporar una variable adicional al conjunto de variables del anillo $k[x_1, \dots, x_n]$ que sea alguna de las primeras derivadas de las variables de estado, este nuevo conjunto $\{\dot{x}_i, x_1, \dots, x_n\}$ es *algebraicamente dependiente*, es decir existe un polinomio $p \in k[\dot{x}_i, x_1, \dots, x_n]$, tal que $p(\dot{x}_i(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0$, para toda solución del sistema.

Dado un conjunto de variables algebraicamente independiente y completo, una definición algebraica de sistema podría consistir en el conjunto de todos los polinomios en el anillo $k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$ que se anulan, cuando las variables toman los valores de todas las trayectorias del sistema en estudio. Este conjunto de polinomios cumple una propiedad algebraica que lo define como *ideal* (si sumamos dos polinomios del ideal obtenemos un polinomio del ideal y si multiplicamos un polinomio del ideal por cualquier otro polinomio del anillo, el resultado es un polinomio del ideal). A pesar de que este ideal generalmente es un conjunto infinito, el Teorema de Hilbert asegura que todo ideal es finitamente generado y podemos construirlo y a la vez representarlo por un conjunto generador finito de polinomios.

Este punto de vista abarca una gran variedad de sistemas algebraicos, sin embargo en esta tesis se considerarán aquellos sistemas equivalentes a la representación clásica en el espacio de estados. Sea $S = \{\dot{x}_1 - f_1(x), \dots, \dot{x}_n - f_n(x)\}$ el conjunto de polinomios obtenido al restar ambos miembros de las ecuaciones de estado de (1.8). El ideal generado por S (que se escribirá $\langle S \rangle$) es el conjunto de polinomios que se obtiene al realizar operaciones algebraicas entre los polinomios de S y del anillo,

$$\langle S \rangle = \{p \mid p = \sum_i h_i p_i, \text{ con } p_i \in S, \text{ y } h_i \in k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]\}.$$

Toda solución de (1.8) anula al conjunto de polinomios S , y por lo tanto también anulará a todos los polinomios del ideal $\langle S \rangle$.

Definición 16 *Dada una descripción en el espacio de estados (1.8), el ideal Σ del sistema asociado a las ecuaciones de estado es el generado por el conjunto*

$$S = \{\dot{x}_1 - f_1(x), \dots, \dot{x}_n - f_n(x)\},$$

es decir $\Sigma = \langle S \rangle$.

En otras palabras, los polinomios que intervienen en las ecuaciones de estados pueden formar un conjunto generador del ideal del sistema.

En todo anillo de polinomios se puede establecer un orden de variables, para luego fijar un *ordenamiento de monomios*, y también un orden entre los polinomios del anillo. Una vez fijado un ordenamiento, todo ideal tiene un conjunto generador particular, que es único y se conoce como *base de Groebner reducida* (Cox *et al.*, 1992). En esta tesis cuando se menciona base de Groebner se considera que es reducida. Hay muchos tipos de ordenamientos monomiales, el que más utilizaremos es el lexicográfico, el cual ordena a los monomios en forma similar a un orden alfabético de palabras.

En un anillo de polinomios se puede realizar división entre polinomios y también entre un polinomio p y un conjunto de polinomios $\{p_1, \dots, p_n\}$, mediante un algoritmo se obtienen los cocientes a_i y el resto r que permiten escribir a p como

$$a_1p_1 + \dots + a_np_n + r,$$

donde el polinomio del resto r es de menor orden que los polinomios del conjunto divisor. De acuerdo al algoritmo utilizado el resto puede resultar diferente. Sin embargo si el conjunto divisor es una base de Groebner el resto es único; y se puede concluir además que si G es una base de Groebner de un ideal, un polinomio f dado pertenece al ideal si y sólo si el resto de la división de f por G es cero (Cox *et al.*, 1992). Esto quiere decir que una base de Groebner es un conjunto generador muy apropiado como identificador de un ideal, porque es único y además nos permite saber si un polinomio pertenece o no al sistema calculando un resto.

Consideremos el ordenamiento de las variables $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n > x_1 > \dots > x_n$ y el ordenamiento lexicográfico (Lex, en forma abreviada, véase el Apéndice A) de los monomios. Los polinomios de S son lineales en \dot{x}_i , con $i = 1, \dots, n$. Además estos términos son los monomios líderes o principales (son los de mayor orden en cada polinomio, tienen la forma $a_i\dot{x}_i$, donde $a_i \in k$), y por ser lineales generan todo monomio líder de los polinomios de Σ . Justamente esa propiedad es lo que define una base de Groebner, por lo tanto S es una base de Groebner de Σ .

Algunos ideales de polinomios tienen propiedades especiales como por ejemplo pueden ser *radicales*, *primos* y/o *maximales*. Un ideal Σ es radical si verifica que para todo polinomio $p^m \in \Sigma$ (para algún $m \geq 1$) satisface también que $p \in \Sigma$. Un ideal Σ es primo si verifica que si el producto $pq \in \Sigma$, entonces uno de ellos, o ambos, pertenecen al ideal Σ . Un ideal primo es también radical. Un ideal es *maximal* si el único ideal que lo contiene estrictamente es el anillo completo. Un ideal maximal es primo y por lo tanto también radical (Cox *et al.*, 1992). Si observamos los polinomios de S (la base de Groebner del ideal del sistema Σ (1.8)), también por la linealidad de los monomios líderes, se puede ver que los polinomios de S son irreducibles (no se pueden expresar como producto de otros polinomios) y de aquí se puede concluir que el ideal Σ es primo, y por consecuencia también radical.

El cuerpo de los coeficientes de un anillo también pueden ser funciones racionales; son de interés funciones racionales en las variables de estado con coeficientes en el cuerpo k , que se nota $k(x_1, \dots, x_n)$. Considerando el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$, donde los coeficientes son funciones racionales o bien polinomios en las variables de estado, el ideal Σ' generado por S en este anillo es $\Sigma' = \langle S \rangle$. Es fácil ver que $\Sigma \subset \Sigma'$ y que por la linealidad de los monomios principales S es una base de Groebner de Σ' , correspondiente al ordenamiento Lex, con $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n$. Por otro lado, la independencia de las variables de estado asegura que en el ideal del sistema

$$\Sigma \cap k[x_1, \dots, x_n] = \emptyset$$

esto es, no hay polinomios que dependan solamente de las variables de estado, siempre existe algún monomio conteniendo alguna de las variables derivadas. En caso contrario, al contener un elemento del cuerpo de los coeficientes (monomio de grado cero) el ideal del sistema contendría todos los polinomios del anillo, $\Sigma' = k(x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$ y la base de Groebner sería $\{1\}$, de lo que se deduce que el sistema no tendría solución, y en realidad esto se debe a que algún polinomio de los denominadores de los coeficientes se anulan en todos los puntos de todas las trayectorias del sistema dinámico representado por Σ . En este anillo, de la estructura

del conjunto $S = \{\dot{x}_1 - f_1(x), \dots, \dot{x}_n - f_n(x)\}$ se puede concluir que genera un ideal maximal (ver Apéndice A), esto quiere decir que Σ' es también un ideal primo y por lo tanto radical. El hecho de que un ideal de polinomios sea radical implica que contiene a todos los polinomios del anillo que se anulan para las mismas soluciones que el conjunto generador S .

Resumiendo, el conjunto $S = \{\dot{x}_1 - f_1(x), \dots, \dot{x}_n - f_n(x)\}$ es una base de Groebner del ideal del sistema $\Sigma = \langle S \rangle$ en el anillo $k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$ con el ordenamiento Lex y $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n > x_1 > \dots > x_n$, y también es una base de Groebner del ideal del sistema $\Sigma' = \langle S \rangle$ en el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$ con el ordenamiento Lex y el orden de variables $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n$.

Ejemplo 5 Consideremos el siguiente sistema descrito en el espacio de estados

$$\dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - 1) \quad (1.9)$$

$$\dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - 1).$$

Toda solución de estas ecuaciones diferenciales anula a los polinomios del conjunto

$$S = \{\dot{x} - y - x + xy^2 + x^3, \dot{y} - y + x + y^3 + yx^2\}.$$

El ideal del sistema es el generado por S en el anillo $\mathbb{R}(x, y)[\dot{x}, \dot{y}]$. S es también una base de Groebner con el ordenamiento $\dot{x} > \dot{y}$. Toda solución del sistema (1.9) anula a todos los polinomios del ideal $\langle S \rangle$. Es fácil ver que

$$x(t) = \sin t \quad (1.10)$$

$$y(t) = \cos t$$

es una solución del sistema que verifica $x^2 + y^2 - 1 = 0$, y también si lo derivamos $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$. Sin embargo, los polinomios $p = x^2 + y^2 - 1$ y $\dot{p} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ no

pertenecen al ideal del sistema $\langle S \rangle$, pues (1.10) es una solución particular y no toda solución verifica estas ecuaciones polinómicas. Esto se puede deducir al calcular el resto de $2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ con respecto a S que es $2(1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$, lo que indica que el polinomio no pertenece al ideal aunque se puede notar que a pesar de que el resto no es el polinomio nulo, el resto sí se anula sobre la trayectoria particular.

1.3.1. Invariantes algebraicos

Aunque los conjuntos invariantes de un sistema dinámico no siempre se pueden representar con una relación algebraica de las variables, en esta tesis se estudiará precisamente este tipo de conjuntos invariantes. Para especificar conjuntos invariantes algebraicos utilizamos *variedades afines* definidas en el espacio k^n . Una variedad afín es el conjunto de todos los puntos en k^n que son solución de un sistema de ecuaciones polinómicas: $p_1 = p_2 = \dots = 0$, con $p_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. En otras palabras, existe una dependencia algebraica entre las variables de estados, que está dada por estos polinomios. El conjunto expresado por la variedad afín en el espacio de estados se representa por $\mathbf{Var}(I)$, donde $I = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$, es el conjunto de polinomios con el cual se construye el sistema de ecuaciones $p_1 = p_2 = \dots = p_s = 0$.

Para que el conjunto $\mathbf{Var}(I)$ sea un invariante de un ideal del sistema Σ , generado por un conjunto S , de acuerdo a la definición dada en secciones previas, debe verificar que para toda condición inicial en el conjunto, la trayectoria resultante permanece en el conjunto en todo tiempo futuro. Por lo tanto se debe cumplir que $dp_i/dt \equiv 0$, para todo $t \geq 0$ y $\forall p_i \in I$. Esto indica que p_i es constante y por lo tanto se mantendrá nulo para toda trayectoria con condición inicial que anule a dicho polinomio. Por lo tanto cada polinomio

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \dot{x}_j$$

se anula sobre el invariante, y debe pertenecer al ideal del sistema que surge de

agregar al ideal Σ la restricción $p_1 = p_2 = \dots = p_s = 0$. Por lo tanto la dinámica del invariante está dada por el ideal generado por $I \cup S$, donde $\Sigma = \langle S \rangle$. Esta dinámica se puede caracterizar con una base Groebner S_I para $\langle I \cup S \rangle$. Esta base tiene una estructura particular si consideramos el ordenamiento $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n > x_1 > \dots > x_n$, y se puede escribir como unión de dos bases:

$$S_I = G_x \cup G_d,$$

donde $G_x = S_I \cap k[x_1, \dots, x_n]$. Es decir, el conjunto de polinomios G_x expresa implícitamente al conjunto invariante definido por la variedad afín dada por $I = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. El otro subconjunto de polinomios G_d , donde también intervienen las primeras derivadas de las variables, es el que expresa la dinámica sobre el invariante (la restricción de la dinámica Σ sobre el conjunto invariante). En el ordenamiento de las variables se han incluido todas las variables de estado puesto que existe una dependencia algebraica entre ellas. Sin embargo no es necesario contemplar a todas, puede descartarse un conjunto de variables que sea algebraicamente independiente como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6 Volviendo al sistema dinámico descrito en el ejemplo anterior el conjunto $I = \{x^2 + y^2 - 1\}$, es un invariante de la dinámica generada por el conjunto $S = \{\dot{x} - y - x + xy^2 + x^3, \dot{y} - y + x + y^3 + yx^2\}$, pues el polinomio $2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ que es la $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 1)$, pertenece al ideal generado por $I \cup S$, cuya base de Groebner es $S_I = \{x^2 + y^2 - 1, \dot{x} - y, \dot{y} + x\}$ considerando el anillo $\mathbb{R}[\dot{x}, \dot{y}, x, y]$. El conjunto de variables $\{x, y\}$ no es algebraicamente independiente, pues en el ideal del sistema $\langle S_I \rangle$ está el polinomio $x^2 + y^2 - 1$. Sin embargo los conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$ sí son algebraicamente independientes, pues de lo contrario en la base de Groebner S_I habría polinomios sólo en x o sólo en y . Por lo tanto se puede trabajar en anillos donde los coeficientes sean funciones racionales en x o en y . En este caso se obtiene la misma base S_I si se trabaja en los anillos $\mathbb{R}(x)[\dot{x}, \dot{y}, y]$ ó $\mathbb{R}(y)[\dot{x}, \dot{y}, x]$. Por cierto, el resto de

$2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ con respecto a S_I es el polinomio nulo, en ambos anillos, lo que confirma que el conjunto $I = \{x^2 + y^2 - 1\}$ es invariante en la dinámica del ideal generado por $S = \{\dot{x} - y - x + xy^2 + x^3, \dot{y} - y + x + y^3 + yx^2\}$.

Es conveniente trabajar con el menor número de variables (como con los dos últimos anillos del ejemplo anterior) pues se obtienen bases de Groebner más reducidas (en número de polinomios) y el algoritmo de cálculo de las bases generalmente lleva menos tiempo de cómputo. No todos los programas de matemática simbólica y específicos de álgebra computacional permiten trabajar con este tipo de cuerpo (funciones racionales) para los coeficientes. Un software que sí lo permite y fue utilizado en esta tesis es Mathematica.

Ejemplo 7 Consideremos ahora el ejemplo del péndulo (1.2). Las funciones que describen la dinámica no son polinomios pues contienen una función trigonométrica. Sin embargo es posible reformular esta descripción a través de una nueva ecuación diferencial, con las nuevas variables $z_1 = \sin x_1$, y $z_2 = \cos x_1$, obteniéndose el sistema

$$\dot{z}_1 = x_2 z_2 \tag{1.11}$$

$$\dot{z}_2 = -x_2 z_1$$

$$\dot{x}_2 = -q_1 z_1 - q_2 x_2 + q_3 u.$$

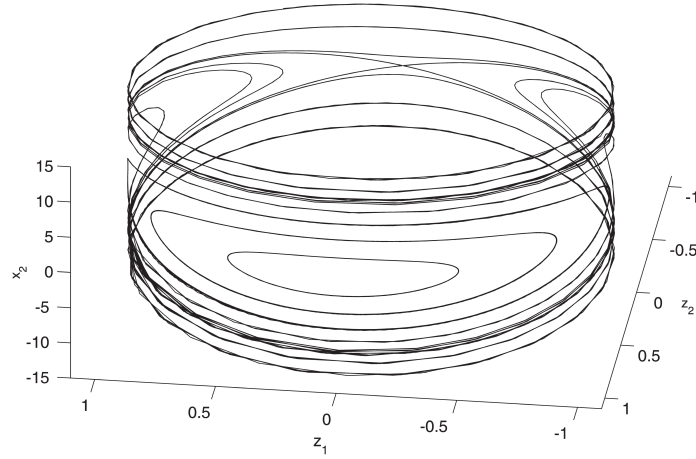


Figura 1.3: Cilindro invariante en el ejemplo del péndulo libre sin fricción($q_2 = 0$).

Desde el punto de vista algebraico, el ideal del sistema (1.11) es el generado por el conjunto $S = \{\dot{z}_1 - x_2 z_2, \dot{z}_2 + x_2 z_1, \dot{x}_2 + q_1 z_1 + q_2 x_2 - q_3 u\}$. Ahora bien, las nuevas variables no son algebraicamente independientes sino que deben verificar la ecuación $z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$. Esta restricción en el espacio de estados es un cilindro de radio unitario y longitud infinita. Sea el cilindro $M_r = \{(z_1, z_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 | z_1^2 + z_2^2 = r^2\}$, es decir la variedad afín $\mathbf{Var}(I_r)$ expresada por el conjunto de polinomios $I_r = \{z_1^2 + z_2^2 - r^2\} = \{p\}$. En particular, en el ideal del sistema $\langle S \rangle$, todo cilindro M_r , es un invariante del sistema (1.11) y el péndulo en estudio corresponde al cilindro de radio $r = 1$ (Fig.1.3). Esto se puede ver de dos formas:

- Mostrando que $\dot{p} = 2z_1 \dot{z}_1 + 2z_2 \dot{z}_2 \in \langle S \rangle$, pues el resto del polinomio \dot{p} con respecto a S en el anillo $R(x_2, z_1, z_2)[\dot{x}_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2]$ es nulo independientemente de r .
- Considerando el anillo $\mathbb{R}(x_2, z_2)[\dot{x}_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2, z_1]$, y la base de Groebner S_{I_r} del ideal $\langle I_r \cup S \rangle$. En este caso particular $S_{I_r} = I_r \cup S$. Es decir los polinomios que muestran la dinámica restringida sobre el cilindro (S_{I_r}) son los mismos

que expresan la dinámica sobre todo el espacio (S) , y por lo tanto el resto de \dot{p} con respecto a S_{I_r} también es nulo.

En otras palabras el sistema $\langle S \rangle$ describe al péndulo siempre que la condición inicial pertenezca a M_1 (cilindro de radio unitario). Si bien el sistema queda de mayor dimensión, es posible tratarlo algebraicamente.

1.4. Apéndice del capítulo

En este apéndice en primer lugar se demuestra el teorema de estabilidad de Lyapunov (Teorema 4) y luego el lema de Barbalat.

Demostración del Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Considerando las hipótesis del Teorema 4, sea B_r un entorno del conjunto invariante M . Dado $\varepsilon > 0$, elijo $r \in (0, \varepsilon]$ tal que

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) \leq r\} \subset D,$$

para asegurar que el entorno B_r quede completamente contenido en D .

Sea $a = \alpha(r)$. Entonces $a > 0$ por (1.4). Elijo $b \in (0, a)$ y sea $\Omega_b = \{x \in B_r \mid V(x) \leq b\}$. Por lo tanto Ω_b está en el interior del entorno B_r ($\Omega_b \subset B_r$).

El conjunto Ω_b es un invariante. Si $x(0) \in \Omega_b$, se cumple que $V[x(0)] \leq b$, y como $V[x(t)]$ es una función continua y decreciente pues $\dot{V}[x(t)] \leq 0$, entonces $V[x(t)] \leq b$ para $t \geq 0$, y además $x(t)$ no puede salir del entorno B_r pues en la frontera (cuando $d(x, M) = r$) por (1.4) $V(x) \geq \alpha(r) = a > b$ lo que es un absurdo. Luego $x(t) \in B_r$ y $V[x(t)] \leq b$ entonces $x(t) \in \Omega_b, \forall t \geq 0$, es decir permanece en el conjunto invariante.

Sea $\beta(c) \doteq \sup_{d(x, M) \leq c} V(x)$. Por su construcción β es una función monótona creciente, continua (pues V es continua) y $\beta(0) = 0$. El teorema del valor intermedio de funciones continuas asegura que siempre es posible encontrar un valor $\delta \in [0, r]$ tal que $\beta(\delta) = b$. En el entorno B_δ del invariante M se verifica que $V(x) \leq \beta(\delta) = b$ entonces $B_\delta \subset \Omega_b \subset B_r$.

Si $x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(t) \in B_r \subseteq B_\varepsilon$. Es decir si la condición inicial está en un entorno δ del conjunto M , $d(x(0), M) \leq \delta$, como el entorno B_δ está contenido en el invariante Ω_b , la solución $x(t)$ permanece en un entorno B_ε del conjunto M , $d(x(t), M) < r \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$, lo que muestra que M es estable.

Si además se verifica (1.6), que asegura la continuidad uniforme de $V(x)$ se prueba que $V[x(t)] \rightarrow 0$. Como $V[x(t)]$ es monótona decreciente y acotada por debajo, entonces tiene límite, $\lim_{t \rightarrow \infty} V[x(t)] = c \geq 0$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass del Análisis Matemático. Para probar que $c = 0$ se puede usar el lema de Barbalat (ver apéndice del capítulo), o bien la demostración por el absurdo: si se supone que $c > 0$, se llega a una contradicción. Por continuidad de $V(x)$, existe un $d < r$ tal que $B_d \subset \Omega_c$ donde:

$$B_d = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) \leq d\} \subset D$$

$$\Omega_c = \{x \in B_r \mid V(x) \leq c\}$$

Sea $\gamma = \max_{d \leq d(x, M) \leq r} \dot{V}(x)$, como $\dot{V}(x) < 0$, $\gamma < 0$. Entonces,

$$V[x(t)] = V[x(0)] + \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \leq V[x(0)] - |\gamma| t$$

que es menor que cero si $t > V(x(0))/|\gamma|$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $c = 0$, y M es asintóticamente estable. ■

A continuación se ven los conceptos de funciones continuas y uniformemente continuas para poder probar el lema de Barbalat:

Definición 17 Una función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $[0, \infty)$ si para todo $\varepsilon_0 > 0$ dado existe un $\delta(\varepsilon_0, t_0)$, tal que para todo t_0 y $t \in [0, \infty)$ para los cuales $|t - t_0| < \delta(\varepsilon_0, t_0)$ se tiene que $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon_0$.

Definición 18 Una función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre $[0, \infty)$ si para todo $\varepsilon_0 > 0$ dado existe un $\delta(\varepsilon_0)$, tal que para todo t_0 y $t \in [0, \infty)$ para los cuales $|t - t_0| < \delta(\varepsilon_0)$ se tiene que $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon_0$.

Por lo tanto una función uniformemente continua es también continua. Además, una función continua f con f' acotada en $[0, \infty)$ es uniformemente continua sobre $[0, \infty)$. Pues si $|f'(t)| \leq k \forall t \in [0, \infty)$, entonces por el teorema del valor medio $|f(t) - f(t_0)| = |f'(t_1)| |t - t_0|$ con t_1 entre t_0 y t , por lo tanto $|f(t) - f(t_0)| \leq$

$k|t - t_0| = k\delta = \varepsilon_0$, eligiendo $\delta = \varepsilon_0/k$, se comprueba la continuidad uniforme. Una manera sencilla de comprobar la continuidad uniforme de f es mostrando que f' sea acotada.

Lema 4 Lema de Barbalat. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ existe y es finito, y $f(t)$ es una función uniformemente continua, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Si el $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$, entonces o el límite no existe, o bien no es igual a cero. Esto implica que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $T > 0$, se puede encontrar una sucesión de números $t_i > T$ tal que $|f(t_i)| > \varepsilon_0, \forall i$.

Como f es uniformemente continua, existe un número $\delta(\varepsilon_0) > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \text{ para todo } t \in [t_i, t_i + \delta(\varepsilon_0)].$$

Por lo tanto, para cada $t \in [t_i, t_i + \delta(\varepsilon_0)]$ tenemos

$$|f(t)| = |f(t) - f(t_i) + f(t_i)| \geq |f(t_i)| - |f(t) - f(t_i)| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

lo cual implica que

$$\left| \int_{t_i}^{t_i + \delta(\varepsilon_0)} f(\tau) d\tau \right| = \int_{t_i}^{t_i + \delta(\varepsilon_0)} |f(\tau)| d\tau > \frac{\varepsilon_0 \delta(\varepsilon_0)}{2}.$$

La igualdad se sostiene porque $f(t)$ tiene el mismo signo para $t \in [t_i, t_i + \delta(\varepsilon_0)]$.

Como por hipótesis $g(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) d\tau$ tiene límite cuando $t \rightarrow \infty$, existe un $T(\varepsilon_0) > 0$ tal que para todo $t_2 > t_1 > T(\varepsilon_0)$

$$|g(t_2) - g(t_1)| < \frac{\varepsilon_0 \delta(\varepsilon_0)}{2}$$

es decir que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau \right| < \frac{\varepsilon_0 \delta(\varepsilon_0)}{2},$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\tau) = 0$.

■

Se puede citar el siguiente corolario de más fácil aplicación cambiando la continuidad uniforme por la acotación de f y f' , esto a través de la noción de espacios normados, recuérdese que una función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece al espacio \mathcal{L}_p si es finita la norma $\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ si $p \in [1, +\infty)$ y $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$.

Corolario: Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Si f y $f' \in \mathcal{L}_\infty$, y $f \in \mathcal{L}_p$, con $p \in [1, \infty)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Es decir basta con que f y f' sean acotadas y $|f(t)|^p$ sea integrable.

El mundo Natural se mueve en ritmos, secuencias, y ciclos – el paso de las estaciones, el movimiento de las Estrellas, el flujo y reflujos de las mareas.

*Las estaciones no se empujan las unas a las otras;
ni las nubes avanzan al viento a través de los cielos.*

*Todas las cosas suceden en su momento adecuado – subiendo, cayendo, subiendo,
como las olas de los mares, en la rueda del tiempo.*

*En cada corazón del invierno yace una primavera templada,
y detrás del velo de cada noche
espera un amanecer sonriente.*

(Kahlil Gibran)

Capítulo 2

Formas Normales y Ciclos Límites

En este capítulo se realiza el estudio de sistemas dinámicos que presentan ciclos límites utilizando *formas normales*. Comprende los temas desarrollados en los trabajos (Calandrini *et al.*, 1999) y (Calandrini *et al.*, 2000a). Existen técnicas numéricas y analíticas para estudiar aspectos de las dinámicas no lineales, y ambas se complementan. El método de las formas normales es una técnica analítica clásica para estudiar oscilaciones en sistemas no lineales. Tuvo su comienzo en la tesis de Poincaré y luego fue desarrollado por Birkhoff, Arnold, Siegel y otros. Consiste en construir un cambio de coordenadas para describir de forma más simple las ecuaciones diferenciales originales y todas las posibles propiedades dinámicas como por ejemplo los fenómenos de bifurcación.

Los ciclos límites se pueden estudiar como comportamientos complejos de sistemas no lineales en cercanías de un punto de *bifurcación de Hopf* y se analizan adecuadamente con esta teoría de las formas normales, (Guckenheimer y Holmes, 1983), (Chow *et al.*, 1990), (Namachchivaya *et al.*, 1994). También son muy útiles los programas de simulación numérica especializados en teoría de bifurcaciones para la detección de puntos de equilibrio, ciclos límites, curvas de continuación, distintos tipos de bifurcaciones, etc. como por ejemplo LOCBIF (Khibnik, 1993), AUTO (Doedel, 2007), etc.

Desde el punto de vista de control, del análisis de estos comportamientos y uti-

lizando formas normales se puede proponer una metodología de diseño de los controladores en el espacio de parámetros. Mediante una adecuada perturbación de los parámetros de un sistema que presente ciertos tipos de bifurcaciones de Hopf degeneradas o singulares, se pueden generar *múltiples ciclos límites*. En ingeniería aeronáutica e ingeniería química se han detectado fenómenos de oscilaciones múltiples que afectan la performance de aviones (Ananthkrishnan y Sudhakar, 1996) y reactores químicos (Planeaux, 1993) respectivamente. Los objetivos de control pueden ser retrasar bifurcaciones de Hopf y la ruta de doble período, controlar la amplitud de oscilaciones, cambiar la estabilidad de ciclos, etc. (Abed y Wang, 1995), (Kang, 1998a; Kang, 1998b).

En este capítulo se presentan formas normales de ciclos límites en sistemas de dimensión 2. Una de estas formas es un polinomio en función del módulo del vector de estados, mientras que la otra es una ecuación diferencial compleja polinómica de primer orden. Se desarrollan dos métodos para obtener formas normales de ciclos límites. Como ejemplo de aplicación se eligió el conocido sistema de Sibirskii (Sibirskii, 1965). Al finalizar el capítulo se propone la utilización de formas normales para el control de multiplicidad de ciclos límites.

2.1. Ciclos límites en sistemas de dimensión 2

El estudio de las ecuaciones diferenciales en forma *cualitativa* comenzó con Poincaré (Poincaré, 1881). La idea fundamental que introdujo era determinar las propiedades de la solución directamente de la ecuación diferencial sin conocer dicha solución. Además, estudió la influencia de un parámetro de la ecuación diferencial sobre la naturaleza de las soluciones, llegando a la conclusión de que para ciertos valores existe una *bifurcación* en las formas de los equilibrios y las soluciones. De esa forma comenzó la búsqueda de condiciones de existencia y el análisis de los ciclos límites en la teoría de sistemas dinámicos y los primeros conceptos de Teoría de Bifurcaciones. En 1900, David Hilbert presentó una lista de 23 problemas

en el Congreso Internacional de Matemáticos en París, (Hilbert, 1902). Muchos de los problemas han sido parcial o completamente resueltos. Sin embargo, la segunda parte del problema N° 16, acerca del máximo número de ciclos límites que un sistema polinómico puede tener, permanece aún sin resolver. De los resultados obtenidos en las primeras décadas del siglo XX, cabe destacar: (Dulac, 1923); (Van der Pol, 1926); y (Liénard, 1928), entre muchos otros. El trabajo de Dulac, que trata sobre la cantidad finita de ciclos límites en un dado sistema polinomial. Van der Pol probó la existencia de ciclos límites usando métodos gráficos y Liénard estudió osciladores no lineales. Una versión moderna de este problema fue reformulada por S. Smale, y elegida como uno de los 18 desafíos matemáticos para el siglo XXI, (Smale, 1998).

2.1.1. Ciclos límites y el problema N° 16 de Hilbert

La segunda parte del problema número 16 de Hilbert, trata sobre la existencia, cantidad y distribución de ciclos límites de un sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales. Considerando la siguiente ecuación diferencial en \mathbb{R}^2 :

$$\dot{x} = P_n(x, y),$$

$$\dot{y} = Q_n(x, y),$$

donde P_n y Q_n son polinomios de grado n , ¿existe una cota K sobre el número de ciclos límites que todo sistema puede tener, de la forma $K = H(n) \leq n^q$ donde q es una constante universal? Como se mencionó anteriormente, este es uno de los problemas más difíciles de resolver, planteado por Hilbert al comienzo del siglo pasado y uno de los desafíos para el presente siglo, (Giné, 2007); (Li, 2003); (Yu y Corless, 2009). Si bien Dulac estableció que un sistema polinómico dado no puede tener una cantidad infinita de ciclos límites, esto no implica que el número de Hilbert, $H(n)$, sea finito. Si el problema se restringe a la vecindad de un punto de equilibrio, es equivalente a estudiar bifurcaciones de Hopf (ciclos de pequeña amplitud, locales). El problema fue atacado de diversas formas, locales y globales. Existen pocos re-

sultados generales, aún considerando bifurcaciones locales. Para el caso particular de sistemas cuadráticos, Bautin, probó que el máximo número de ciclos de pequeña amplitud es 3. Sin embargo, el problema global sigue aún sin resolverse para sistemas cuadráticos. C. Li mostró que $H(2) \geq 4$, es decir pueden existir ciclos generados a partir de bifurcaciones globales en sistemas cuadráticos (Bautin, 1954); (Li, 1983); (Chen y Wang, 1979). Para sistemas homogéneos cúbicos (sin términos cuadráticos), Sibirskii estableció que desde el origen no pueden bifurcarse más de 5 ciclos límites de pequeña amplitud (Sibirskii, 1965). En (Calandrini *et al.*, 1999), como se muestra en este capítulo, utilizando formas normales y programas de continuación numérica se encontraron 4 ciclos de pequeña amplitud en torno al origen del sistema de Sibirskii. Recientemente en (Zoladek, 1995) y (Yu y Han, 2005) se encontraron ejemplos con 11 y 12 ciclos de pequeña amplitud en total, algunos alrededor al origen y otros rodeando otros puntos de equilibrio, pero no probaron que sea el máximo, $H(3) \geq 12$. Cabe destacar la importancia de la computación simbólica para tratar estas técnicas analíticas y obtener formas normales de ciclos y, a partir de allí, realizar perturbaciones y verificaciones con programas de matemática numérica. Es imprescindible hacer esto de la forma computacional más eficiente posible, por tiempo, memoria y extensión de los polinomios involucrados. Quien haya trabajado con esta temática, valora enormemente todo el trabajo realizado y los resultados obtenidos en las primeras décadas del siglo pasado contando únicamente con los recursos disponibles en ese momento.

2.1.2. Sistemas en el plano

El plano de fase permite visualizar muy bien comportamientos de sistemas autónomos de segundo orden. Por ejemplo en el sistema representado por ecuaciones de

estado:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

el vector $x = (x_1, x_2)$ representa un punto del plano de fase y $\dot{x} = (f_1(x), f_2(x))$ es el vector velocidad, y supongamos que sea lo suficientemente suave, f_1 y f_2 diferenciables. Siguiendo el flujo de este campo vectorial se grafican las trayectorias para distintas condiciones iniciales y esto constituye lo que denominamos plano de fase. En sistemas no lineales no se espera encontrar las trayectorias analíticamente, sino tratar de determinar la forma cualitativa de las soluciones. Es de especial interés el gráfico que describen estas trayectorias en cercanías de los puntos de equilibrio $x = x^* = (x_1^*, x_2^*)$ y están vinculados a la matriz jacobiana del sistema evaluada en dichos puntos:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} .$$

Esta matriz proviene de la aproximación del sistema (2.1) por serie de Taylor en un entorno del punto de equilibrio: $\dot{z} = Jz$, donde la nueva variable z es una traslación para centrarse sobre el punto de equilibrio $z = x - x^*$. En el sistema lineal obtenido por la aproximación, los autovalores de J son los que indican el comportamiento en un entorno del origen. Si λ_1 y λ_2 son los autovalores de J pueden ocurrir cinco casos, cada uno le da un nombre especial al punto de equilibrio como se detalla a continuación:

- *Nodo*: cuando λ_1 y λ_2 son ambos reales y tienen el mismo signo.
- *Silla*: cuando λ_1 y λ_2 son ambos reales y tienen el signo opuesto.
- *Foco*: cuando λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real no nula.

- *Centro*: cuando λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real nula.
- *Nodo degenerado*: cuando alguno de los autovalores es nulo.

Desde el punto de vista de estabilidad, los primeros tres casos están bien definidos, y se denominan puntos de equilibrio hiperbólicos, es decir cuando $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ para ambos autovalores. El nombre “hiperbólico” no es muy afortunado porque se lo confunde con el punto silla (pues las trayectorias son hipérbolas), pero se ha constituido en una denominación estándar. Lo importante de estos puntos es que su estabilidad no se ve afectada por la perturbación que se genera al incorporar los términos no lineales. El teorema de Hartman - Grobman (Guckenheimer y Holmes, 1983) establece que un entorno de un punto hiperbólico en el plano de fase es topológicamente equivalente al plano de fase de su linealización. En cambio, si alguno de los autovalores satisface $\text{Re}(\lambda) = 0$ la estructura del plano de fase y principalmente la estabilidad puede afectarse por la incorporación de los términos no lineales. Por ejemplo, si el sistema es lineal y el origen es un centro, las trayectorias forman un conjunto continuo de curvas cerradas (elipses); sin embargo, si el sistema es no lineal podrían darse varias situaciones como, por ejemplo, las trayectorias pueden resultar espirales atractivas o también repulsivas, cambiando totalmente la estabilidad del punto de equilibrio.

Ciclos límites

De acuerdo a la definición del capítulo anterior un ciclo límite es un conjunto límite y además en un sistema de dimensión 2 es una trayectoria cerrada *aislada*. Aislada significa que las trayectorias próximas no son cerradas, pues el ciclo es un conjunto límite de alguna trayectoria, por lo tanto éstas deberían ser espirales que parten o se acercan al ciclo límite. Si las trayectorias cercanas se aproximan al ciclo se dice que el ciclo límite es estable o atractivo. En caso contrario el ciclo es inestable, existiendo un tercer caso excepcional que se dice semi estable, y es cuando existen tanto trayectorias que se acercan y que se alejan del mismo. Los ciclos límites son

fenómenos dinámicos inherentes a las no linealidades. Un sistema lineal puede tener órbitas cerradas, pero ellas no son aisladas (como por ejemplo en cercanías de un centro). En las siguientes secciones se presentarán técnicas que prueban la existencia o no de órbitas cerradas.

Teoría de índices La presencia de trayectorias cerradas está íntimamente relacionada con la *teoría de índices*. El índice de una curva cerrada C es un número entero que mide la cantidad de veces que rota el campo vectorial $f(x) = (f_1, f_2)$ sobre la curva C . Formalmente se tiene la siguiente definición:

Definición 19 *Sea $f(x)$ un campo vectorial en \mathbb{R}^2 ; sea Ω un conjunto abierto, simplemente conexo de \mathbb{R}^2 , que contiene sólo equilibrios aislados de f ; sea C una curva cerrada simple en Ω , orientada positiva, que no pasa por ningún equilibrio de f ; y sea $\theta_f(x)$ la dirección del campo vectorial f en x . Entonces el índice de la curva C con respecto al campo f es la integral:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d\theta_f(x).$$

Se puede mostrar que el índice es independiente de la forma de C , y está determinado únicamente por el carácter del punto de equilibrio que encierra. Si C encicla un punto de equilibrio aislado x^* , entonces el índice de C es el índice del punto de equilibrio x^* , como muestra la siguiente proposición que puede ser examinada por simple inspección o también en forma analítica como se propone en (Andronov *et al.*, 1966)

Proposición 1 *En un sistema dinámico de dimensión 2 se tiene que:*

1. *El índice de un nodo, un foco o un centro es +1.*
2. *El índice de una silla es -1.*
3. *El índice de una órbita cerrada es +1.*
4. *El índice de una curva cerrada que no contiene puntos de equilibrios es 0.*

5. *El índice de una curva cerrada es igual a la suma de los índices de los puntos de equilibrios contenidos dentro de ella.*

De esta proposición se desprenden condiciones necesarias para la existencia de órbitas cerradas en sistemas de segundo orden, como por ejemplo que un ciclo límite debe siempre encerrar al menos a un punto de equilibrio. Si encierra un único punto de equilibrio, éste no puede ser un punto silla, y si todos los puntos encerrados son hiperbólicos, debe ser un número impar $2n + 1$, donde n son puntos sillas y $n + 1$ nodos, focos o centros. Estas condiciones nos dan muy poca información para saber si existe una órbita cerrada, sólo son condiciones necesarias, en cambio es muy útil para determinar regiones donde no pueden existir ciclos.

Un par de condiciones suficientes, muy similares, para asegurar la no existencia de ciclos límites están dadas por los dos teoremas siguientes, cuya demostración se basa en la aplicación del teorema de Green sobre una posible órbita cerrada contenida en una región dada Ω :

Teorema 6 (*Bendixon*). *En el sistema no lineal (2.1) no pueden existir órbitas cerradas en una región simplemente conexa Ω del plano, en la cual $\nabla \cdot f = \partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$ tiene un único signo.*

Teorema 7 (*Criterio de Dulac*). *En el sistema no lineal (2.1) no pueden existir órbitas cerradas en una región simplemente conexa Ω del plano, si existe una función escalar real $g(x_1, x_2)$, continuamente diferenciable, tal que $\nabla \cdot (g f)$ tiene un único signo en Ω .*

Un tercer teorema relacionado con la existencia de ciclos es el que se establece al considerar un conjunto acotado invariante en el plano. Toda solución que comience allí será acotada y por lo tanto por el Lema (1) su conjunto límite es no vacío, y por el teorema de unicidad de las soluciones, las trayectorias no se pueden cortar y al estar contenidas en un plano, el conjunto límite puede estar formado únicamente por soluciones periódicas o puntos de equilibrio como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 8 (*Poincaré-Bendixson*). *Si una trayectoria de un sistema de segundo orden permanece en una región acotada Ω , entonces una de las siguientes proposiciones se cumple:*

- a) *la trayectoria tiende hacia un punto de equilibrio;*
- b) *la trayectoria tiende asintóticamente a un ciclo límite estable;*
- c) *la trayectoria es un ciclo límite.*

Por lo tanto si en un conjunto invariante, acotado, no existen puntos de equilibrio, debe contener al menos un ciclo límite.

Otra forma de predecir la existencia de ciclos límites es detectando centros en el sistema linealizado. Una pequeña variación de algún parámetro del sistema puede dar lugar a la aparición de un ciclo límite. Esto se conoce como *bifurcación de Hopf* y se describe en la siguiente sección.

¿Por qué se ha de temer a los cambios?

Toda la vida es un cambio.

¿Por qué hemos de temerle?

(George Herbert)

2.1.3. Bifurcación de Hopf

Una bifurcación, como se mencionó anteriormente, en el capítulo 1, y en secciones previas, es un cambio cualitativo de las soluciones ante la variación de un parámetro. El caso que estudiaremos (Hopf) ocurre cuando cambia la estabilidad un foco junto con el nacimiento de un ciclo límite. Este fenómeno se conoce como bifurcación de Andronov-Hopf, que frecuentemente se le llama bifurcación de Hopf por su trabajo en 1942 que luego se publicó en inglés (Hopf, 1976). El teorema fue probado originalmente en \mathbb{R}^2 (Andronov y Chaikin, 1949) aunque ya había sido sugerido por (Poincaré, 1892). Una de las versiones del teorema de Hopf generalizada para \mathbb{R}^n es la siguiente:

Teorema 9 Teorema de bifurcación de Hopf. *Supongamos que el sistema*

$$\dot{x} = f(x; \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro escalar, f es analítica, tiene un punto de equilibrio en $x_0(u_0)$, $f(x_0; \mu_0) = 0$. Sea J la matriz jacobiana $J(\mu) = D_x f(x_0; \mu)$.

Para $\mu = \mu_0$, J tiene un par de autovalores imaginarios puros $\lambda(\mu_0) = \pm j\beta$, $\beta \neq 0$, y se verifican las siguientes hipótesis:

1. No existen otros autovalores con parte real nula.
2. $\text{Re}(\partial\lambda/\partial\mu)_{\mu_0} \neq 0$ (condición de transversalidad).
3. El primer coeficiente de Hopf, $\sigma_1(\mu_0) \neq 0$, (a continuación se verá cómo calcularlo en \mathbb{R}^2 y luego con formas normales)

Entonces existe una solución no constante periódica para valores pequeños de $\varepsilon \in \mathbb{R}$, de período $T(\varepsilon)$ y radio $\sqrt{|\mu(\varepsilon) - \mu_0|}$, donde $\mu(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon)$ son funciones escalares analíticas, con $\mu(0) = \mu_0$ y $T(0) = 2\pi/\beta$.

Este teorema ha sido probado en (Guckenheimer y Holmes, 1983) por la aplicación de la variedad centro.

Otra forma es utilizando balance armónico (Allwright, 1977; Mees y Chua, 1979), y balance de alto orden (Mees, 1981) y continuado luego en (Moiola y Chen, 1996). En el teorema de Hopf hay dos condiciones importantes que se deben verificar; una corresponde a los términos lineales y está dada por la condición de *transversalidad*, o el cruce con velocidad no nula de un par de autovalores por el eje imaginario cuando se varía un parámetro del sistema. La otra corresponde a los términos no lineales que determinan el *coeficiente de Hopf* y también la estabilidad del ciclo límite. En un sistema de dimensión 2 de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y; \mu) \\ g(x, y; \mu) \end{pmatrix},$$

con $f(0) = g(0) = 0$ y $Df(0) = Dg(0) = 0$, el coeficiente $\sigma_1(\mu)$ se calcula así:

$$\sigma_1(\mu) = \frac{1}{16}[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}],$$

donde $f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0, 0)$ y $g_{xxy} = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} g(0, 0)$. Si alguna de esas dos condiciones no se satisface da lugar a bifurcaciones degeneradas de Hopf.

Ejemplo 8 El sistema de segundo orden:

$$\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$$

donde μ es un pequeño parámetro escalar, se conoce en teoría del sonido como la *ecuación de Rayleigh*. Este sistema puede escribirse en la forma de ecuaciones de estado como (eligiendo $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$):

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2\mu x_2 - x_2^3.$$

El punto de equilibrio en el origen tiene una matriz de linealización con autovalores $\lambda(\mu) = -\mu \pm j\sqrt{1 - \mu^2}$. Las condiciones del teorema de Hopf se verifican para $\mu_0 = 0$, pues $\text{Re}(\partial\lambda/\partial\mu)_{\mu_0} = -1 \neq 0$ y $\sigma_1(\mu_0) = -\frac{3}{8} \neq 0$. Por lo tanto existen ciclos límites.

Ejemplo 9 Existen sistemas físicos donde oscilaciones de gran amplitud tienen amortiguamiento, mientras que las oscilaciones de pequeña amplitud tienen “amortiguamiento negativo”. Es de esperar que un sistema de este tipo tenga un ciclo

límite. Una ecuación diferencial que describe estas vibraciones es la *ecuación de van der Pol*

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0.$$

Para $\mu = 0$ queda $\ddot{y} + y = 0$, la ecuación de un oscilador armónico (lineal). Si $\mu > 0$, el término de amortiguamiento tiene el coeficiente $-\mu(1 - y^2)$, que es negativo para oscilaciones pequeñas, $y^2 < 1$; y es positivo si $y^2 > 1$. En ecuaciones de estado, si $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, el sistema puede representarse como:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.2}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2,$$

con un par de autovalores $\lambda(\mu) = \frac{\mu}{2} \pm j\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2}$ en el origen. Se ve claramente que para valores pequeños de μ , un par de autovalores complejos cruza el eje imaginario en el valor crítico $\mu_0 = 0$. Sin embargo el coeficiente $\sigma_1(\mu) = -\frac{\mu}{8}$, por lo tanto $\sigma_1(0) = 0$ y no se satisfacen todas las hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf. Resultados de simulación comprueban la existencia de un ciclo límite estable para pequeños valores positivos de μ , de una amplitud constante y aproximadamente igual a 2 (no decrece a cero cuando el parámetro se acerca a su valor crítico como ocurre en una bifurcación de Hopf). Para $\mu < 0$ el ciclo es inestable y su amplitud se mantiene. En el valor crítico se tiene una bifurcación pero no es la bifurcación de Hopf. La ecuación de van der Pol describe el comportamiento de circuitos electrónicos no lineales como los que fueron usados en los primeros aparatos de radio con las válvulas o tubos de vacío, y también luego en circuitos de osciladores con transistores unijuntura (UJT). Los tubos y este tipo de transistores actúan como una resistencia “negativa” cuando la corriente es baja. Este tipo de comportamiento se conoce como oscilador de relajación.

De este último ejemplo se ve la importancia del cálculo del primer coeficiente de Hopf para poder asegurar la presencia de una bifurcación de Hopf. No sólo hay que verificar la condición de transversalidad. Cuando el coeficiente es nulo es necesario realizar mejores aproximaciones y calcular coeficientes de órdenes superiores. Sin embargo en este caso del oscilador de van der Pol, según los resultados de simulación, no corresponde a la aparición de ciclos límites de pequeña amplitud como ocurre en una bifurcación de Hopf.

Ejemplo 10 Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 + x_2 - \sigma x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu x_2 - \sigma x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Los autovalores de su matriz jacobiana son $\lambda(\mu) = \mu \pm j$. Por lo tanto para $\mu = \mu_0 = 0$ tiene un par de autovalores imaginarios puros y $\text{Re}(\partial\lambda/\partial\mu)_{\mu_0} = 1 \neq 0$, y $\sigma_1(\mu) = \sigma$. Por el teorema de Hopf, si $\sigma \neq 0$ para valores de μ cercanos a cero existe una solución periódica. En coordenadas polares este sistema queda descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\mu - \sigma r^2) \\ \dot{\phi} &= 1.\end{aligned}$$

Como en la ecuación correspondiente al radio, $\dot{r} = p(r)$ no interviene la variable angular ϕ , resulta un sistema escalar muy sencillo de analizar. Se observa una rotación constante, y si además r se mantiene constante se tienen órbitas circulares periódicas. Los puntos de equilibrio de este sistema se determinan con las raíces del polinomio p . Una es la trivial $r = 0$ correspondiente al punto de equilibrio. Sólo son de interés las raíces reales positivas, pues siempre $r \geq 0$. Por lo tanto existirá otro equilibrio cuando $\mu/\sigma > 0$ y corresponde a un ciclo de amplitud $\sqrt{\mu/\sigma}$ y período $T = 2\pi$. El

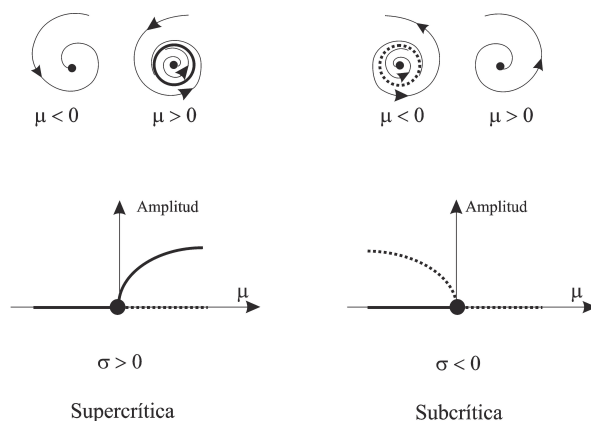


Figura 2.1: Diagramas locales de la bifurcación de Hopf.

signo del coeficiente σ establece para qué valores de μ existen ciclos y la estabilidad está dada por el signo de la derivada $\frac{dp}{dr}$ calculada en la raíz de p o amplitud del ciclo (signo del autovalor del sistema escalar). Si $\sigma > 0$, existen ciclos para $\mu > 0$, y son estables pues $\frac{dp}{dr} = -2\mu < 0$. En cambio para $\sigma < 0$ se tiene la presencia de ciclos inestables cuando $\mu < 0$. En el primer caso se dice que ocurre una bifurcación de Hopf *supercrítica* y en el segundo *subcrítica*, considerando la existencia de ciclos con respecto al valor crítico del parámetro de bifurcación.

Curva de continuación. Para resumir los efectos que suceden cuando se presenta una bifurcación, se utilizan los diagramas de bifurcación o curvas de continuación, donde el parámetro juega el rol de variable independiente, y como ordenada se tiene una variable de estado o en el caso de los ciclos una cierta medida de la amplitud (puede ser el valor máximo o mínimo de alguna de las variables). Existen programas basados en métodos numéricos que detectan bifurcaciones y ayudan a construir estos diagramas, como por ejemplo el programa LBLC de la librería LOCBIF (Khibnik, 1993) o AUTO (Doedel, 2007).

En la Fig. 2.1 se observa la curva de continuación del ejemplo anterior y cómo al variar el parámetro μ varía la amplitud del ciclo. Además se incluye el punto de

equilibrio del origen que puede considerarse como un ciclo límite de amplitud nula.

Forma normal de ciclos límites En el ejemplo (10), el sistema tiene una estructura particular pues visto a través de coordenadas polares, es muy sencillo de analizar. El coeficiente de Hopf se obtiene por inspección directa de los coeficientes del polinomio. El objetivo de la técnica que se describirá en la próxima sección es encontrar una transformación de coordenadas que simplifique la expresión analítica. Este sistema simplificado y expresado en nuevas coordenadas es lo que se denomina *forma normal*. Esta técnica permite descartar los términos de alto orden del desarrollo en series de Taylor. Cuando el procedimiento se aplica a un punto hiperbólico se obtiene la parte formal del teorema de linealización de Hartman. Cuando el punto de equilibrio no es hiperbólico hay términos que no pueden ser removidos por un cambio de coordenadas, estos términos se denominan resonantes. En otras palabras, la forma normal tendrá una parte lineal y otra con los términos esenciales resonantes.

Una manera de arribar a la forma normal que caracteriza la dinámica de los ciclos límites es detectando puntos de equilibrio con autovalores imaginarios puros en la matriz jacobiana del sistema y estudiando los ciclos límites que emergen de dichos puntos cuando se produce una bifurcación de Hopf. El planteo se puede realizar con distintas técnicas, entre ellas utilizando una perturbación sobre un sistema lineal con un centro en el origen. Generalmente el análisis con métodos de perturbación comienza con un sistema cuya solución se conoce completamente y se estudian pequeñas perturbaciones del sistema. Una primera aproximación de la solución puede realizarse con una serie de potencias de un parámetro ε

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

donde las funciones $x_i(t)$ son funciones desconocidas a determinar por las ecuaciones que gobiernan la dinámica y las condiciones iniciales. Para $\varepsilon = 0$, se puede considerar que es el valor crítico, que en el caso de Hopf corresponde a un sistema lineal con un centro en el origen, y considerar perturbaciones no lineales, para pequeños valores

de ε . La esperanza es que la información importante esté en los primeros términos, de ser posible en los dos primeros, y que los términos de alto orden sólo agreguen pequeñas correcciones. Esta técnica se conoce como teoría de perturbaciones regulares. Una de las formas utilizadas para resolver el método de perturbaciones es el de *múltiples escalas de tiempo* (Strogatz, 1994; Yu, 1998), donde se consideran nuevas variables $T_k = \varepsilon^k t$, y se las trata como si fueran independientes en las funciones $x_i(t) = x_i(T_0, T_1, \dots, T_N)$. Con múltiples escalas de tiempo se obtienen mejores aproximaciones, ya que se tienen en cuenta variaciones más lentas comparadas con el período del ciclo.

Otra técnica es la de *promediación*. En este método se considera que la solución puede ser aproximada y se trata que el error se anule en promedio o al menos se haga muy pequeño. La aproximación suele ser con series de potencias o balance armónico (Guckenheimer y Holmes, 1983; Strogatz, 1994).

En (Huseyin, 2002) se demuestra que las ecuaciones simplificadas obtenidas con las técnicas de múltiples escalas de tiempo y promediación son idénticas y equivalentes a las halladas con el método de las formas normales. Hay que notar aquí que la forma normal de un sistema no es única, sobre todo en los términos de alto orden; sin embargo, siempre es posible encontrar una transformación similar a la identidad tal que los resultados se expresen en idéntica forma.

Como los campos vectoriales perturbados y no perturbados permanecen próximos, uno espera que las soluciones también lo sean, pero como ya hemos visto este no es el caso general, como sucede cuando el sistema no perturbado es estructuralmente inestable. Pequeñas perturbaciones pueden causar cambios cualitativos importantes en la estructura de las soluciones. En cambio se puede encontrar que las soluciones perturbadas y las no perturbadas permanecen próximas en intervalos finitos de tiempo. Estos métodos mencionados son de carácter local, ya que las aproximaciones son válidas en un entorno del punto de equilibrio y para valores cercanos al parámetro crítico.

2.1.4. Forma normal en sistemas de dimensión 2

En esta sección se estudia la aparición de ciclos límites de pequeña amplitud, por medio de formas normales, en sistemas del tipo

$$\dot{x} = f(x; \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, y $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro escalar. El método está basado en la demostración del teorema de Hopf realizada en (Guckenheimer y Holmes, 1983) y consiste en encontrar un sistema de coordenadas en el cual las ecuaciones que describen la dinámica sean simples y más fáciles de analizar. Por ejemplo, el comportamiento dinámico puede ser analizado en forma adecuada en coordenadas polares, donde la condición, $\dot{r}(t) = 0$, $\text{sgn}(\dot{\phi}(t)) = \text{cte. } \forall t$ y $r(0) \neq 0$, claramente indica la presencia de una órbita cerrada y si además es atractiva y/o repulsiva, corresponde a un ciclo límite. Este método es local en el sentido que la transformación de coordenadas se define sólo en un entorno del punto de equilibrio. Una condición necesaria para que esta transformación sea inyectiva, y las soluciones de ambos sistemas se correspondan uno a uno, es que el Jacobiano de la transformación sea no nulo. Esta condición se utilizará para restringir la región de análisis donde se pueden detectar los ciclos límites.

Se considera sin pérdida de generalidad, que el punto de equilibrio es $\hat{x} = (0, 0)$, y además que $f(0; \mu) = 0$ para pequeños valores de $\|\mu\|$, y tal que $D_x f(0, \mu)$ tiene dos autovalores imaginarios puros $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm j\omega(\mu)$ y $\lambda(0) = \pm j\omega(0)$. Entonces es posible encontrar una transformación lineal en la cual

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} \text{Re } \lambda(\mu) & -\text{Im } \lambda(\mu) \\ \text{Im } \lambda(\mu) & \text{Re } \lambda(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix},$$

y el sistema queda expresado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y; \mu) \\ f_2(x, y; \mu) \end{pmatrix}.$$

donde $f_1(\cdot, \cdot; \cdot)$ y $f_2(\cdot, \cdot; \cdot)$ son términos de orden igual o mayor que 2 en la expansión en series de Taylor.

Los cálculos para llevar al sistema a la forma normal pueden realizarse utilizando transformaciones similares a la identidad

$$x = u + P_n(u, v)$$

$$y = v + Q_n(u, v)$$

donde P_n y Q_n son polinomios de grado n , en los cuales todos sus términos son de grado superior o igual a 2. Los coeficientes de estos polinomios se eligen de tal manera de obtener una aproximación de orden n de las ecuaciones del sistema con una cierta estructura, por ejemplo para $n = 3$:

$$\dot{u} = \alpha u - \omega v + \sigma_1 u(u^2 + v^2) - \varphi_1 v(u^2 + v^2)$$

$$\dot{v} = \omega u + \alpha v + \varphi_1 u(u^2 + v^2) + \sigma_1 v(u^2 + v^2).$$

En coordenadas polares el sistema anterior tiene la siguiente forma normal polar:

$$\dot{r} = \alpha r + \sigma_1 r^3$$

$$\dot{\phi} = \omega + \varphi_1 r^2.$$

Se observa que en ambas ecuaciones no tiene influencia directa la variable ϕ y, además, el polinomio correspondiente a \dot{r} es impar y el de $\dot{\phi}$ es par. El coeficiente σ_1 es el *primer coeficiente de Hopf* o *primer coeficiente de estabilidad de Lyapunov*. Este coeficiente, si no es nulo, determina para qué valores del parámetro se generan

soluciones periódicas, y en el caso que las hubiese, la estabilidad y la amplitud de los ciclos límites.

Los cálculos para llevar al sistema a la forma normal son más fáciles o más compactos si se utilizan coordenadas complejas y se consideran luego módulo y argumento. Definimos: $z = x + jy$, $\bar{z} = x - jy$, y entonces $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2j$. Por lo tanto el sistema resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}; \mu) \\ F_2(z, \bar{z}; \mu) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} F_1(z, \bar{z}; \mu) &= f_1(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) + j f_2(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) \\ F_2(z, \bar{z}; \mu) &= f_1(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) - j f_2(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu). \end{aligned}$$

Para analizar el comportamiento del sistema, sólo es necesario estudiar la primera componente

$$\dot{z} = \lambda z + F_1(z, \bar{z}; \mu),$$

ya que la segunda componente es su conjugada. En función de esta representación, es sencillo encontrar la variación del radio vector en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} r \dot{r} &= \operatorname{Re}(\bar{z}\dot{z}), \\ r^2 \dot{\phi} &= \operatorname{Im}(\bar{z}\dot{z}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $r = |z|$, $\phi = \arg z$. El objetivo es encontrar una transformación de coordenadas, tal que la expresión de la variación del radio tenga la siguiente forma normal

$$\dot{r} = r(\alpha + \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r^4 + \sigma_3 r^6 + \cdots + O(r^m)), \tag{2.5}$$

donde $O(r^m)$ es un infinitésimo de orden m cuando $r \rightarrow 0$, y σ_i son los coeficientes de estabilidad de la forma normal. Las raíces no nulas de esta ecuación corresponden a

ciclos límites donde $\dot{\phi} > 0$ ó $\dot{\phi} < 0$. En las nuevas coordenadas, los ciclos son círculos puesto que $\dot{r} = 0$ implica que r es una constante.

Lógicamente el cálculo de aproximaciones de alto orden involucra complejidades algebraicas importantes que hacen muy difícil su resolución analítica excepto en unos pocos casos muy especiales. Sin embargo, con la ventaja del uso de programas de matemática simbólica los cálculos se pueden organizar y simplificar, obteniéndose formas normales simples y con procedimientos sistemáticos.

Se consideran sistemas donde $F_1(z, \bar{z}; \mu)$ es un polinomio en z y en \bar{z} , cuyos coeficientes son funciones del vector de parámetros μ . Si éste no es el caso, se puede expandir F_1 en series de Taylor y obtener un polinomio de grado N que sea una buena aproximación cerca del origen. Se asume entonces que F_1 tiene la siguiente estructura:

$$F_1 = \sum_{i=2}^N \left(\sum_{j=0}^i a_{i,i-j} z^i \bar{z}^{i-j} \right).$$

2.1.5. Dos alternativas aproximadas de obtener la forma normal

De acuerdo a (2.4), para asegurar que la dependencia de ϕ sea despreciable en la ecuación de la variación del módulo (2.5), es necesario cancelar la parte real de todos los términos en el producto $\bar{z} \dot{z}$ que contengan los monomios $\bar{z}^m z^n = r^{n+m} e^{i(n-m)\phi}$, con $m \neq n$. Si $n = m$, entonces $\bar{z}^n z^n = r^{2n}$. Esto sugiere dos posibilidades: a) eliminar los términos indeseados; b) cancelar la parte real de los monomios indeseados, pues la parte imaginaria no interviene en (2.5). Esto es posible utilizando una transformación similar a la identidad, $z = Z + h(Z, \bar{Z})$, donde h es un polinomio en las variables Z, \bar{Z} , del mismo grado que los monomios que se quieren cancelar. Por lo tanto,

$$\dot{z} = \left(1 + \frac{\partial h}{\partial Z} \right) \dot{Z} + \frac{\partial h}{\partial \bar{Z}} \dot{\bar{Z}},$$

y su conjugada

$$\dot{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial Z} \dot{Z} + \left(1 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}}\right) \dot{\bar{Z}},$$

y entonces despejando

$$\dot{Z} = \left(\dot{z} \left(1 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}}\right) - \dot{\bar{z}} \frac{\partial h}{\partial \bar{Z}} \right) \frac{1}{\Delta},$$

donde Δ es el Jacobiano de la transformación,

$$\Delta = \left(1 + \frac{\partial h}{\partial Z}\right) \left(1 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}}\right) - \frac{\partial \bar{h}}{\partial Z} \frac{\partial h}{\partial \bar{Z}}.$$

Esta última expresión es real, porque todos los términos son productos de expresiones conjugadas. En $Z = 0$, $\Delta = 1$, la transformación está bien definida, y es una biyección.

La diferencia principal entre ambos métodos radica en que en uno de ellos se aproximó $\frac{1}{\Delta}$, y en el otro se trabajó directamente con la expresión del producto $\Delta \dot{Z}$.

Método I

Una manera de obtener la forma normal es tener en cuenta la dinámica del sistema en la nueva variable Z

$$\dot{Z} = \left(\dot{z} \left(1 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}}\right) - \dot{\bar{z}} \frac{\partial h}{\partial \bar{Z}} \right) \frac{1}{\Delta}.$$

Como la transformación similar a la identidad es válida en un entorno al origen, Δ^{-1} puede ser aproximado por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial h}{\partial Z}\right) \left(1 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}}\right) - \frac{\partial \bar{h}}{\partial Z} \frac{\partial h}{\partial \bar{Z}}} \\ &\cong 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}} + \frac{\partial h}{\partial Z} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{Z}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial Z} \frac{\partial h}{\partial \bar{Z}} \right). \end{aligned}$$

Nótese que la aproximación de \dot{Z} es un polinomio, cuyos coeficientes pueden ser ajustados por una elección apropiada de los coeficientes de h . De esta forma es posible eliminar todos los monomios en \dot{Z} , excepto aquellos de la forma de $z^n \bar{z}^{n-1}$:

$$\dot{Z} = \lambda Z + (\sigma_1 + i\varphi_1)Z^2\bar{Z} + \cdots + O(|Z|^{m+1}).$$

Si el grado del polinomio h es m , pueden ajustarse los coeficientes de \dot{Z} hasta el grado m . La forma normal, en la variable compleja Z , truncada para $m = 5$ (despreciando los términos de alto orden) es:

$$\dot{Z} = \lambda Z + (\sigma_1 + i\varphi_1)Z^2\bar{Z} + (\sigma_2 + i\varphi_2)Z^3\bar{Z}^2.$$

Esto puede ser escrito en forma polar como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r + \sigma_1 r^3 + \sigma_2 r^5, \\ \dot{\phi} &= \omega r + \varphi_1 r^2 + \varphi_2 r^4,\end{aligned}$$

siendo ahora $r = |Z|$, $\phi = \arg Z$.

Método II

En este método se considera el polinomio del producto $\Delta \dot{Z}$, en lugar de la expresión de \dot{Z} , ya que en coordenadas polares, como $\Delta \neq 0$ e $\text{Im } \Delta = 0$, es real, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta r \dot{r} &= \Delta \text{Re}(\bar{Z} \dot{Z}) = \text{Re}(\bar{Z} \Delta \dot{Z}), \\ \Delta r^2 \dot{\phi} &= \text{Im}(\bar{Z} \Delta \dot{Z}).\end{aligned}$$

La parte real de los monomios no deseados de $\bar{Z} \Delta \dot{Z}$ puede ser cancelada si los coeficientes de $\Delta \dot{Z}$ satisfacen $a_{i,j} = -\bar{a}_{j+1,i-1}$, $\forall i > 0$, $j \neq i - 1$, y $a_{0,j} = 0$. Si los coeficientes de la transformación se eligen apropiadamente, todo coeficiente de $\Delta \dot{Z}$

hasta el grado de h puede modificarse. Por ejemplo, si:

$$\Delta \dot{Z} = \alpha Z^3 + \beta Z^2 \bar{Z} - \bar{\alpha} Z \bar{Z}^2$$

$$\bar{Z} \Delta \dot{Z} = \alpha \bar{Z} Z^3 + \beta |Z|^4 - \bar{\alpha} Z \bar{Z}^3$$

entonces $\text{Re}(\bar{Z} \Delta \dot{Z}) = \text{Re}(\beta) |Z|^4 = \text{Re}(\beta) r^4$, pues $\text{Re}(\alpha \bar{Z} Z^3 - \bar{\alpha} Z \bar{Z}^3) = 0$, es decir

$$\Delta r \dot{r} = \text{Re}(\beta) r^4.$$

Es claro que los ciclos límites están asociados con las raíces reales positivas de \dot{r} , o equivalentemente con las raíces de $\text{Re}(\bar{Z} \Delta \dot{Z})$. Por lo tanto es necesario estudiar las raíces de la expresión

$$\alpha + \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r^4 + \sigma_3 r^6 + \cdots + O(r^m),$$

donde los coeficientes dependen de los parámetros del sistema, como así también de la transformación. Considerando una aproximación local, los términos de alto orden pueden ser ignorados, obteniéndose un polinomio en r :

$$p(r) = \alpha + \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r^4 + \sigma_3 r^6 + \cdots + \sigma_n r^{2n}. \quad (2.6)$$

Las raíces reales positivas r_i^* de este polinomio, para las cuales $\dot{\phi}$ no cambia de signo y el Jacobiano de la transformación no se anula para todo $r < \max(r_i^*)$, son una buena aproximación de los ciclos límites que contienen al punto de equilibrio.

Análisis de los ciclos límites Como se mencionó anteriormente el análisis de ciclos límites a través de la forma normal se realiza observando el polinomio de la forma normal (2.6). Las raíces reales positivas de este polinomio son puntos de equilibrio del sistema $\dot{r} = p(r)$ e implican que la solución tiene amplitud constante. Si $\dot{\phi}$ se mantiene también constante o al menos no cambia de signo permitiendo que

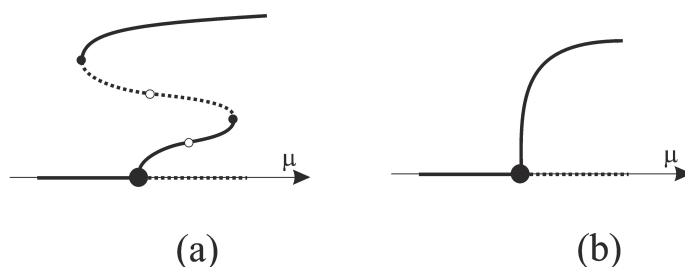


Figura 2.2: Curvas de continuación de ciclos. En la curva (a) hay dos folds, indicados con puntos negros, y dos puntos de inflexión, indicados con puntos blancos. La curva (b) corresponde a un foco débil.

$\dot{\phi} \geq \omega_0 > 0$, la solución resulta ser una rotación de amplitud constante, por lo tanto es una trayectoria cerrada. Como el sistema es autónomo (invariante en el tiempo) la solución también es periódica. Del análisis en el entorno de esta trayectoria surge la estabilidad de este conjunto invariante y es un conjunto límite al que llamamos *ciclo límite*. La estabilidad en el sistema escalar, $\dot{r} = p(r)$, es fácilmente deducida por su linealización es decir por el signo de $p'(r)$ sobre la amplitud de equilibrio r^* .

La gráfica de la función $r^*(\mu)$, expresada implícitamente por la ecuación $p(r^*) = 0$, muestra la curva de continuación de un ciclo límite emergente del punto de equilibrio. Cuando se obtiene más de una raíz real positiva, se tiene la presencia de ciclos anidados, cuya estabilidad varía en forma alternante consecutivamente, debido a la continuidad de los polinomios. Si bien el signo de $p'(r)$ establece la estabilidad, se debe estudiar qué ocurre cuando se anula. Dos situaciones pueden presentarse (Fig. 2.2a): *a*) que sea un valor crítico del parámetro μ , el cual es un valor extremo (máximo o mínimo) de la curva de continuación; *b*) que sea un punto de inflexión. En el primer caso la estabilidad no queda bien definida y resulta un ciclo semiestable (de un lado atractivo y del otro repulsivo). Éste es producto de la colisión de dos ciclos, uno estable y el otro inestable; variando levemente el parámetro desde este valor crítico y en sentido adecuado, desaparecen ambos ciclos. Este fenómeno de bifurcación se conoce como *fold*. La segunda situación es un punto de inflexión en la curva de continuación y no se presenta cambio en la estabilidad del ciclo. Este análisis se

realiza estudiando el orden de la primera derivada no nula del polinomio de Taylor $p(r)$. En otras palabras si m es la multiplicidad de la raíz r^* de $p(r)$, corresponde a un fold cuando m es un número par y el ciclo es semiestable. Si la multiplicidad de la raíz es impar la estabilidad del ciclo está dada por el signo de la derivada $p^{(m)}(r^*)$.

Otra observación importante es que el signo del primer coeficiente de Hopf siempre establece la estabilidad del ciclo de amplitud más pequeña, puesto que es quien domina en un entorno del punto de equilibrio donde ocurre la bifurcación de Hopf. Si este coeficiente es nulo se tiene la presencia de una bifurcación degenerada de Hopf, y se dice que el punto de equilibrio es un *foco débil* (Fig. 2.2b). La estabilidad del ciclo emergente de un foco débil está dada por lo tanto por el signo del primer coeficiente no nulo; si éste es $\sigma_k \neq 0$, entonces a la bifurcación degenerada de Hopf se la suele notar con H_{k0} , donde el segundo subíndice está relacionado con la falla de la condición de transversalidad del teorema de Hopf, que en esta tesis no se considerará y por lo tanto será siempre 0. En un foco débil la curva de continuación es localmente una parábola de orden mayor a dos, obteniéndose una variación más abrupta de la amplitud con respecto al parámetro.

Ejemplo 11 El sistema de Sibirskii. En este ejemplo se muestra la aplicación de los resultados teóricos previos a un sistema de dimensión 2 con polinomios cúbicos. El ejemplo ha sido discutido primeramente por (Sibirskii, 1965), y luego en (Blows y Lloyd, 1984), (Lloyd, 1988), y (Lloyd *et al.*, 1988). El sistema considerado

está descrito por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \lambda x_1 - x_2 + (a - \omega - \theta) x_1^3 + (3\mu - \eta) x_1^2 x_2 + \\
 &\quad (3\theta + \xi - 3\omega - 2a) x_1 x_2^2 + (\nu - \mu) x_2^3 \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + \lambda x_2 + (\mu + \nu) x_1^3 + (3\omega + 3\theta + 2a) x_1^2 x_2 + \\
 &\quad (\eta - 3\mu) x_1 x_2^2 + (\omega - \theta - a) x_2^3,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde λ juega el rol de parámetro de bifurcación principal, y a , ω , θ , μ , η , ξ y ν son todos los parámetros auxiliares. Por razones históricas se mantiene la notación original para los parámetros. Se observa que en este caso λ no es el autovalor del sistema, sino sólo su parte real. Esto se ve claramente en la aproximación lineal

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2$$

que tiene un punto de equilibrio en el origen con autovalores en $\lambda \pm j1$. Con una apropiada variación de los parámetros de bifurcación principal y auxiliares es posible la creación de varias soluciones periódicas.

Siguiendo los métodos descritos anteriormente se obtienen los coeficientes de Hopf. Se considera sólo el caso de $\lambda = 0$ para simplificar las expresiones, obteniendo los coeficientes correspondientes al punto de bifurcación de Hopf. Usando el primer

método se calculan:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{8}\xi, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{16}(\nu\xi - 10a\nu), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{8192}(-320a\eta\nu + 6400a\mu\nu - 3104a^2\xi + 20\eta^2\xi - \\ &\quad 1280a\theta\xi + 320\theta^2\xi - 160\eta\mu\xi + 320\mu^2\xi + 32\eta\nu\xi - \\ &\quad 640\mu\nu\xi + 224\nu^2\xi + 640a\xi^2 + 208\theta\xi^2 + 12800a\theta\omega - \\ &\quad 192a\xi\omega - 19\xi^3 - 1280\theta\xi\omega - 160\xi^2\omega + 896\xi\omega^2),\end{aligned}$$

y con el método II:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{8}\xi, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{16}(\nu\xi - 10a\nu), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2048}(-80a\eta\nu + 1600a\mu\nu - 448a^2\xi - 4\eta^2\xi - \\ &\quad 320a\theta\xi - 64\theta^2\xi + 32\eta\mu\xi - 64\mu^2\xi + 8\eta\nu\xi - \\ &\quad 160\mu\nu\xi + 128\nu^2\xi + 56a\xi^2 + 16\theta\xi^2 + 3200a\theta\omega + \\ &\quad 336a\xi\omega + 3\xi^3 - 320\theta\xi\omega - 136\xi^2\omega + 512\xi\omega^2).\end{aligned}$$

Con el segundo método se obtienen las mismas expresiones para σ_1 y σ_2 , pero una diferente para σ_3 . Esto no es sorprendente pues las transformaciones son distintas y la forma normal no es única. En (Chow *et al.*, 1994) también se han calculado los coeficientes con otro método obteniendo expresiones similares salvo una constante multiplicativa positiva.

Los coeficientes de mayor orden, σ_4 y σ_5 pueden verse en el apéndice del capítulo. La condición de foco débil (si se anulan los coeficientes de menor orden) lleva a

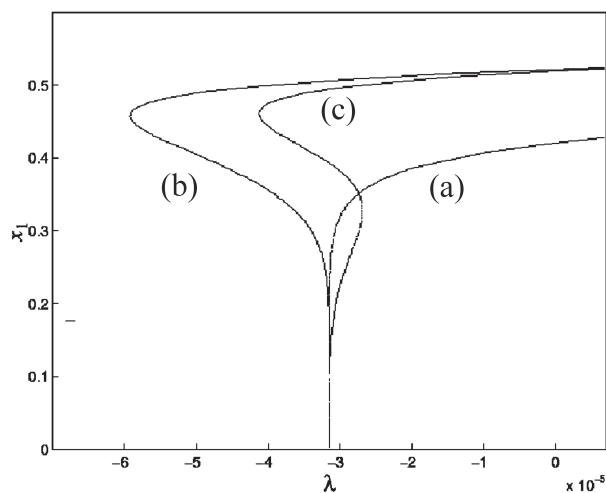


Figura 2.3: Continuación de soluciones periódicas a partir de un foco débil. Caso (a) un solo ciclo límite. Caso (b) la rama de ciclos tiene hasta dos ciclos límites. Caso (c) la rama de ciclos tiene hasta tres ciclos límites

expresiones idénticas obtenidas con ambos métodos (I y II) de las formas normales:

$$\sigma_1 = \frac{1}{8}\xi,$$

$$\sigma_2 = -\frac{5}{8}a\nu, \text{ si } \xi = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{25}{16}a\theta\omega, \text{ si } \xi = \nu = 0,$$

$$\sigma_4 = \frac{5}{64}a^2\theta\eta, \text{ si } \xi = \nu = \omega = 0,$$

$$\sigma_5 = -\frac{5}{192}a^2\theta [4(\mu^2 + \theta^2) - a^2], \text{ si } \xi = \nu = \omega = \eta = 0.$$

Si se desea obtener un foco débil de orden 4 (H_{40}) y un ciclo límite estable para $\lambda > 0$, se requiere que $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = 0$, y $\sigma_5 > 0$. De las expresiones de los coeficientes de Hopf se deduce que es posible eligiendo los siguientes valores de parámetros: $a = 1$, $w = 0$, $\theta = 1$, $\mu = 1$, $\eta = 0$, $\xi = 0$, y $\nu = 0$. Esto también se confirma por los resultados obtenidos en la curva de continuación (Fig. 2.3), en la

cual una solución periódica de gran amplitud emerge desde el punto de bifurcación de Hopf [caso (a) en la Fig. 2.3]. A partir de este punto en el espacio de parámetros, con variaciones leves se pueden obtener múltiples ciclos anidados, como se muestra también en las curvas de continuación de la Fig. 2.3. Dos curvas, una con parámetros $a = 1,25$, $w = 0$, $\theta = 1,2$, $\mu = 1$, $\eta = 0,65$, $\xi = 0$, y $\nu = 0$ [caso (b) en la Fig. 2.3]; y la otra $a = 1,8$, $w = -0,009$, $\theta = 1,5$, $\mu = 1$, $\eta = 1,0$, $\xi = 0$, y $\nu = 0$ [caso (c) en la Fig. 2.3], que indican la existencia de regiones con dos y tres ciclos límites respectivamente.

2.2. Multiplicidad de ciclos límites

En esta sección se presenta una forma de controlar la multiplicidad de los ciclos límites en sistemas no lineales. El procedimiento está vinculado directamente con la aparición de bifurcaciones degeneradas de Hopf y consiste en una adecuada elección de los parámetros del sistema para asignar los coeficientes y raíces del polinomio de la forma normal. Se realizan verificaciones con programas de simulación numérica y continuación de soluciones periódicas. El ejemplo analizado es el clásico modelo planar cúbico de Sibirskii.

Se mencionó anteriormente que la multiplicidad de oscilaciones aparece en algunos sistemas ingenieriles. Disponer de una formulación que permita determinar la cantidad de ciclos límites u oscilaciones, y la posibilidad de controlarlos es muy importante. Ciertos tipos de bifurcaciones de Hopf degeneradas o singulares, mediante una adecuada perturbación de los parámetros, determinan la generación de múltiples ciclos límites que se desprenden de un foco débil.

En el estudio de este tipo de bifurcaciones, los índices de estabilidad o coeficientes de Hopf son esenciales puesto que contienen información importante acerca de la estabilidad de las soluciones periódicas y su multiplicidad.

Relacionado con el número de ciclos límites emergentes de un foco débil (fenó-

meno local), está el problema N° 16 de Hilbert, como se mencionó al comienzo del capítulo, y que aún no ha sido resuelto completamente. La multiplicidad de ciclos límites en sistemas no lineales es un tópico muy importante a tener en cuenta en el diseño de sistemas ingenieriles libres de oscilaciones o bien que se permitan oscilaciones de pequeña amplitud para ciertos regímenes no usuales. Múltiples oscilaciones dan la posibilidad que el sistema estando en la región de atracción de un ciclo límite de pequeña amplitud pueda alcanzar uno de gran amplitud con una pequeña perturbación en los parámetros.

2.2.1. Control de la multiplicidad de los ciclos límites

El control de las bifurcaciones consiste en el diseño de un dispositivo que modifique el comportamiento dinámico de un sistema no lineal complejo, con efectos benéficos causados por la aparición, retardo, o cambio de un cierto tipo de bifurcación. El objetivo incluye demorar la aparición de oscilaciones y cascadas de bifurcaciones de doble período, controlar la amplitud y frecuencia de los ciclos, estabilizar trayectorias periódicas y modificar la multiplicidad de soluciones periódicas.

Las expresiones de los coeficientes de Hopf en función de los parámetros se pueden utilizar para controlar la multiplicidad de los ciclos límites. El procedimiento consiste en analizar el polinomio de la forma normal, sus raíces y coeficientes. Si se desea sólo un ciclo, entonces la metodología de control es elegir una combinación de parámetros que lo asegure. Esto significa, por ejemplo, que no debe haber cambio de signo en los coeficientes de Hopf consecutivos.

Pueden encontrarse distintos diagramas locales de bifurcación bajo variaciones en los parámetros principales y auxiliares de control. Para un sistema no lineal dinámico general, es necesario utilizar computadoras para calcular los coeficientes de Hopf, así como para analizar las diferentes posibilidades de regiones de parámetros correspondientes a cada diagrama. Esta metodología es también útil si queremos analizar otras bifurcaciones de Hopf degeneradas, como aquellas donde fallen simultánea-

mente la condición de transversalidad y la anulación de los coeficientes de Hopf. El diseño de un controlador consiste en elegir una región (local) deseada en el espacio de parámetros.

Una ventaja de esta metodología es que si se quieren modificar las órbitas de un sistema, no es necesario intervenir sobre el camino de realimentación agregando términos no lineales, simplemente se puede cambiar el valor de los parámetros del sistema. Para algunos sistemas puede ser más fácil modificar los parámetros que fabricar un control no lineal. Para otros sistemas, por supuesto, puede resultar más conveniente modificar el controlador.

Las bifurcaciones de Hopf degeneradas que involucran la anulación de varios coeficientes de Hopf (las singularidades H_{k0}) producen, luego de una leve perturbación de los parámetros, múltiples ciclos (hasta $k + 1$). Generalmente, en este tipo de bifurcación degenerada coexisten ciclos de pequeña y de gran amplitud.

El siguiente procedimiento se basa en la propiedad que para obtener múltiples oscilaciones se requiere una alternancia de signo en los coeficientes de Hopf. El esquema es el siguiente:

Paso 1: Ubicar la bifurcación degenerada en el espacio de parámetros.

Paso 2: Perturbar los valores de los parámetros fijando los signos de los coeficientes, de tal manera de obtener uno, dos o tres soluciones periódicas emergentes del punto degenerado en el espacio de parámetros y luego verificar los resultados con un software de continuación de soluciones periódicas tal como LOCBIF o AUTO.

Otra forma de obtener múltiples ciclos, como se comentó anteriormente, es

Paso 1: Fijar las raíces del polinomio de la forma normal, y encontrar los coeficientes σ_i .

Paso 2: Con las expresiones de los σ_i en función de los parámetros del sistema, establecer la combinación de parámetros que corresponde a esos coeficientes y a los ciclos propuestos.

Fijar los coeficientes de los polinomios no resulta siempre tan sencillo como lo muestra este procedimiento, todo depende de los grados de libertad que dan los

parámetros del sistema. Esta tarea puede ser realizada con métodos algebraicos, pues es un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse utilizando bases de Groebner.

2.3. Validez de la aproximación. Jacobiano

El estudio de la multiplicidad de las soluciones periódicas puede ser realizado analizando las raíces positivas del polinomio de la forma normal. Sin embargo deben considerarse dos fuentes de error: primero la transformación de coordenadas es válida sólo localmente y segundo se han despreciado términos de alto orden en el polinomio obtenido. Enfoquemos la atención al primer tópico pues el segundo siempre se puede reducir aumentando el orden. Estamos interesados en encontrar un dominio del plano complejo donde la transformación de coordenadas sea biyectiva. De acuerdo al teorema de la función inversa, una condición suficiente para la existencia en un punto dado es que el Jacobiano de la transformación no se anule en ese punto. Eligiendo $R = \min \{r \in \mathbb{R}_+ : \Delta(r) = 0\}$ nos permite definir un disco $D = \{Z \in \mathbb{C} : |Z| \leq R\}$. En todo punto de D , la transformación de coordenadas es localmente invertible. Si además la invertibilidad sobre D se verifica globalmente, entonces toda raíz del polinomio (2.6) que esté dentro de D corresponde a un ciclo límite del sistema. Raíces que estén fuera de la región D deberían ser descartadas porque no se puede asegurar que correspondan a ciclos límites del sistema.

Ejemplo 12 Consideremos nuevamente el sistema de Sibirskii, los coeficientes de Hopf hallados anteriormente y la segunda forma de la sección 2.2.1 para generar ciclos, fijando las raíces del polinomio de la forma normal

$$\lambda + \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r^4 + \sigma_3 r^6 + \sigma_4 r^8$$

para $\lambda = 0$. Con el objeto de encontrar tres ciclos anidados se eligen las raíces

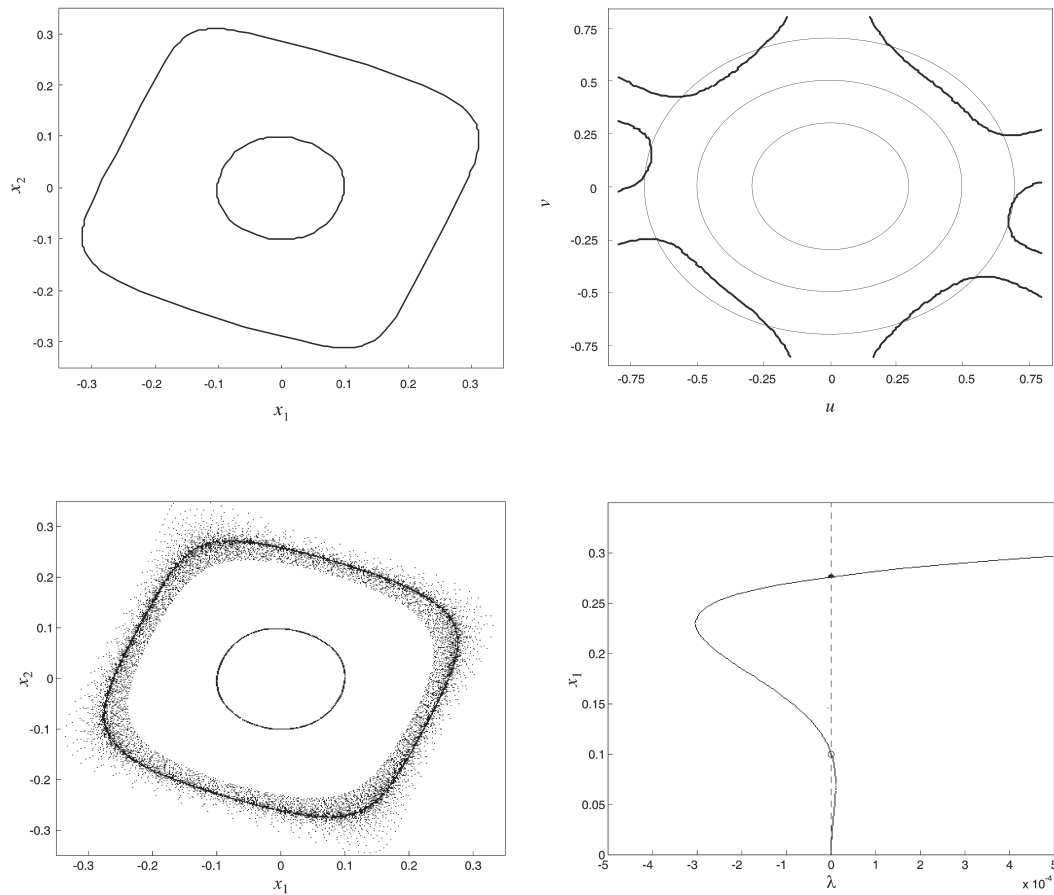


Figura 2.4: Sistema de Sibirskii con dos ciclos límites.

$r_1^* = 0,1$, $r_2^* = 0,3$ y $r_3^* = 0,7$. El polinomio correspondiente, para el coeficiente principal $\sigma_4 = 10$, es

$$-0,00441 r^2 + 0,499 r^4 - 5,9 r^6 + 10 r^8.$$

De las expresiones de los coeficientes se obtienen los parámetros: $a = 1$, $w = 0,8654330$, $\theta = -4,318510$, $\mu = 0$, $\eta = -1$, $\xi = -0,03528$ y $\nu = -0,795593$. Mediante simulación, mostrada en la Fig. 2.4 (c), se puede comprobar la existencia de sólo dos ciclos, el mayor ($r_3^* = 0,7$) queda en una región donde la transformación falla. Puede observarse en la Fig. 2.4 (b) donde la curva $\Delta = 0$ se superpone a los tres ciclos en el plano transformado $Z = u + iv$. Una predicción de la ubicación y forma de los ciclos puede realizarse sin simulación, utilizando la transformación que

permitió calcular los coeficientes, $z = Z + h(Z, \bar{Z})$, reemplazando $Z \rightarrow r_i^* e^{i\phi}$, para $0 \leq \phi \leq 2\pi$, Fig. 2.4 (a). En este caso se comprueba que las formas normales son locales, sin embargo aumentando el grado del polinomio aproximador, se mejora notablemente la precisión de la ubicación y amplitud de los ciclos pequeños. Con estos mismos parámetros, utilizando la forma normal calculada según el método I, con un orden más (correspondiente a σ_5), el resultado es mucho más exacto

$$-0,00441 r^2 + 0,499 r^4 - 5,93052 r^6 + 13,742 r^8 - 205,827 r^{10}.$$

Las raíces reales positivas son sólo dos $r_1^* = 0,100018$, y $r_2^* = 0,269843$, como se comprobó con los resultados de simulación y también se muestra con el método de continuación en la Fig.2.4 (d).

Ahora siguiendo los pasos sugeridos por la primera forma de generar ciclos múltiples indicada en la sección 2.2.1, se eligen los siguientes parámetros $a = 2,05$, $w = 0$, $\theta = -0,05$, $\mu = 1$, $\eta = 0$, $\xi = 0$ y $\nu = 0$, obteniéndose los coeficientes $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = 0$ y $\sigma_5 > 0$. Este caso corresponde a un foco débil y se obtiene un único ciclo límite como se observa en la Fig. 2.5 (a).

Variando los parámetros es posible encontrar 4 ciclos anidados, si tomamos $a = 1,92$, $w = 0,033$, $\theta = 1$, $\mu = 0$, $\eta = -0,1$, $\xi = 0,03$ and $\nu = 0,03$, mostrado en la Fig. 2.5 (b) y (c).

También se pueden obtener 4 ciclos con estabilidad inversa al caso anterior si se eligen los siguientes valores para los parámetros $a = 2,08$, $w = -0,033$, $\theta = 1$, $\mu = 0$, $\eta = 0,063$, $\xi = -0,03$ y $\nu = -0,03$, que corresponde a coeficientes con signos opuestos a los anteriores (Fig. 2.5 (d)).

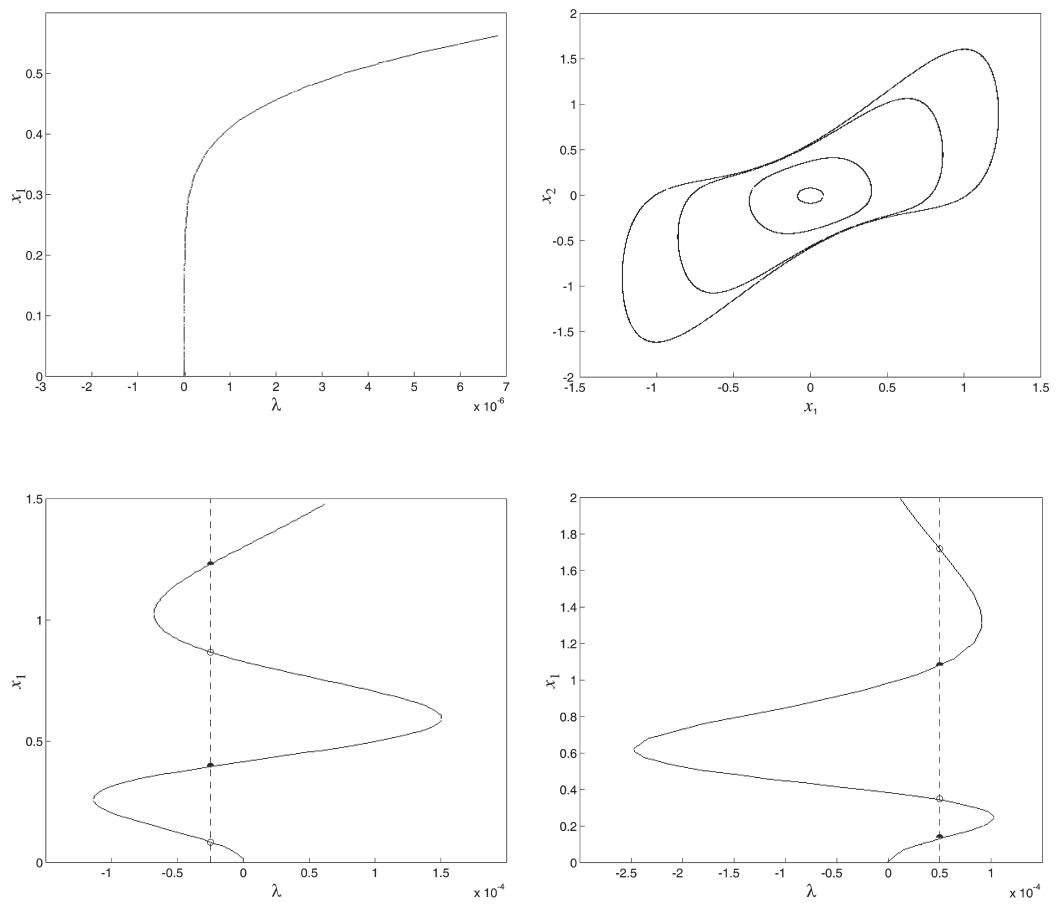


Figura 2.5: Sistema de Sibirskii con cuatro ciclos límites.

2.4. Apéndice del capítulo

A continuación se detallan los coeficientes de Hopf de alto orden en el sistema de Sibirskii.

Con el método I:

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{1}{8192} \left(640 a^2 \eta \theta + 15680 a^3 \nu - 40 a \eta^2 \nu - 9600 a \theta^2 \nu + 1280 a \eta \mu \nu \right. \\
&\quad - 9600 a \mu^2 \nu - 2880 a \nu^3 - 40 a^2 \eta \xi - 4 \eta^3 \xi + 576 a \eta \theta \xi - 64 \eta \theta^2 \xi \\
&\quad + 736 a^2 \mu \xi + 32 \eta^2 \mu \xi - 64 \eta \mu^2 \xi - 5088 a^2 \nu \xi + 4 \eta^2 \nu \xi - 864 a \theta \nu \xi \\
&\quad + 960 \theta^2 \nu \xi - 128 \eta \mu \nu \xi + 960 \mu^2 \nu \xi + 32 \eta \nu^2 \xi - 384 \mu \nu^2 \xi + 288 \nu^3 \xi \\
&\quad - 80 \eta \theta \xi^2 + 160 a \mu \xi^2 + 474 a \nu \xi^2 + 240 \theta \nu \xi^2 - 7 \eta \xi^3 - 8 \mu \xi^3 + 7 \nu \xi^3 \\
&\quad - 7040 a \eta \theta \omega + 3840 a^2 \nu \omega + 80 a \eta \xi \omega + 704 \eta \theta \xi \omega - 3072 a \mu \xi \omega \\
&\quad + 1536 a \nu \xi \omega - 1536 \theta \nu \xi \omega + 120 \eta \xi^2 \omega - 384 \nu \xi^2 \omega - 11520 a \nu \omega^2 \\
&\quad \left. - 640 \eta \xi \omega^2 + 1536 \mu \xi \omega^2 + 1152 \nu \xi \omega^2 \right) \\
c_5 &= \frac{1}{75497472} \left(1966080 a^4 \theta - 4915200 a^2 \eta^2 \theta - 7864320 a^2 \theta^3 + 3932160 a^2 \eta \theta \mu \right. \\
&\quad - 7864320 a^2 \theta \mu^2 + 19630080 a^3 \eta \nu + 264960 a \eta^3 \nu + 45527040 a \eta \theta^2 \nu \\
&\quad - 215654400 a^3 \mu \nu - 2257920 a \eta^2 \mu \nu + 115752960 a \theta^2 \mu \nu - 12349440 a \eta \mu^2 \nu \\
&\quad + 115752960 a \mu^3 \nu - 133693440 a^2 \theta \nu^2 - 7833600 a \eta \nu^3 + 116858880 a \mu \nu^3 \\
&\quad - 49630080 a^4 \xi + 217472 a^2 \eta^2 \xi + 41904 \eta^4 \xi + 36298752 a^3 \theta \xi \\
&\quad - 3118080 a \eta^2 \theta \xi + 8480768 a^2 \theta^2 \xi + 635904 \eta^2 \theta^2 \xi - 21577728 a \theta^3 \xi \\
&\quad - 552960 \theta^4 \xi - 8863744 a^2 \eta \mu \xi - 317952 \eta^3 \mu \xi + 10788864 a \eta \theta \mu \xi \\
&\quad + 552960 \eta \theta^2 \mu \xi + 10446848 a^2 \mu^2 \xi + 497664 \eta^2 \mu^2 \xi - 21577728 a \theta \mu^2 \xi \\
&\quad - 1105920 \theta^2 \mu^2 \xi + 552960 \eta \mu^3 \xi - 552960 \mu^4 \xi + 2982912 a^2 \eta \nu \xi \\
&\quad - 26496 \eta^3 \nu \xi + 9630720 a \eta \theta \nu \xi - 4552704 \eta \theta^2 \nu \xi + 38645760 a^2 \mu \nu \xi \\
&\quad + 225792 \eta^2 \mu \nu \xi + 28938240 a \theta \mu \nu \xi - 11575296 \theta^2 \mu \nu \xi + 1234944 \eta \mu^2 \nu \xi \\
&\quad - 11575296 \mu^3 \nu \xi - 34740480 a^2 \nu^2 \xi - 577152 \eta^2 \nu^2 \xi - 8134656 a \theta \nu^2 \xi \\
&\quad + 19187712 \theta^2 \nu^2 \xi - 1161216 \eta \mu \nu^2 \xi + 19187712 \mu^2 \nu^2 \xi + 783360 \eta \nu^3 \xi \\
&\quad - 11685888 \mu \nu^3 \xi + 397440 \nu^4 \xi + 21533952 a^3 \xi^2 - 140800 a \eta^2 \xi^2 \\
&\quad - 10425856 a^2 \theta \xi^2 + 519936 \eta^2 \theta \xi^2 - 11149312 a \theta^2 \xi^2 + 1959936 \theta^3 \xi^2 \\
&\quad + 3255296 a \eta \mu \xi^2 - 979968 \eta \theta \mu \xi^2 - 5754880 a \mu^2 \xi^2 + 1959936 \theta \mu^2 \xi^2 \\
&\quad - 436800 a \eta \nu \xi^2 - 4336128 \eta \theta \nu \xi^2 - 372480 a \mu \nu \xi^2 - 2893824 \theta \mu \nu \xi^2 \\
&\quad + 3459840 a \nu^2 \xi^2 + 8080896 \theta \nu^2 \xi^2 - 3670432 a^2 \xi^3 + 166040 \eta^2 \xi^3 \\
&\quad - 565504 a \theta \xi^3 + 1723904 \theta^2 \xi^3 - 938368 \eta \mu \xi^3 + 1199360 \mu^2 \xi^3 \\
&\quad - 540768 \eta \nu \xi^3 + 319872 \mu \nu \xi^3 + 345696 \nu^2 \xi^3 + 255488 a \xi^4 + 261056 \theta \xi^4 \\
&\quad - 4093 \xi^5 - 370851840 a^3 \theta \omega + 41011200 a \eta^2 \theta \omega + 231505920 a \theta^3 \omega \\
&\quad - 115752960 a \eta \theta \mu \omega + 231505920 a \theta \mu^2 \omega - 88719360 a^2 \eta \nu \omega \\
&\quad + 260505600 a^2 \mu \nu \omega + 348733440 a \theta \nu^2 \omega - 16819200 a^3 \xi \omega + 973056 a \eta^2 \xi \omega \\
&\quad + 114008064 a^2 \theta \xi \omega - 4101120 \eta^2 \theta \xi \omega + 94531584 a \theta^2 \xi \omega - 23150592 \theta^3 \xi \omega \\
&\quad - 14825472 a \eta \mu \xi \omega + 11575296 \eta \theta \mu \xi \omega + 36655104 a \mu^2 \xi \omega - 23150592 \theta \mu^2 \xi \omega \\
&\quad + 1007616 a \eta \nu \xi \omega + 33730560 \eta \theta \nu \xi \omega - 53575680 a \mu \nu \xi \omega + 34882560 a \nu^2 \xi \omega \\
&\quad - 34873344 \theta \nu^2 \xi \omega + 7002624 a^2 \xi^2 \omega - 3008640 \eta^2 \xi^2 \omega + 13358592 a \theta \xi^2 \omega \\
&\quad - 24803328 \theta^2 \xi^2 \omega + 15903744 \eta \mu \xi^2 \omega - 19015680 \mu^2 \xi^2 \omega + 6136320 \eta \nu \xi^2 \omega \\
&\quad - 1781760 \mu \nu \xi^2 \omega - 4124160 \nu^2 \xi^2 \omega - 94656 a \xi^3 \omega - 5035776 \theta \xi^3 \omega \\
&\quad - 92448 \xi^4 \omega - 13762560 a^2 \theta \omega^2 + 83681280 a \eta \nu \omega^2 + 7372800 a \mu \nu \omega^2 \\
&\quad - 9784320 a^2 \xi \omega^2 + 14556672 \eta^2 \xi \omega^2 - 139689984 a \theta \xi \omega^2 + 76750848 \theta^2 \xi \omega^2 \\
&\quad - 72105984 \eta \mu \xi \omega^2 + 76750848 \mu^2 \xi \omega^2 - 8368128 \eta \nu \xi \omega^2 - 737280 \mu \nu \xi \omega^2 \\
&\quad + 3179520 \nu^2 \xi \omega^2 - 5397504 a \xi^2 \omega^2 + 28760064 \theta \xi^2 \omega^2 + 1135488 \xi^3 \omega^2 \\
&\quad + 474808320 a \theta \omega^3 + 24514560 a \xi \omega^3 - 47480832 \theta \xi \omega^3 - 4995072 \xi^2 \omega^3 \\
&\quad \left. + 6359040 \xi \omega^4 \right)
\end{aligned}$$

Con el método II:

$$\begin{aligned}
c_4 = & \frac{1}{16384} \left(1280 a^2 \eta \theta + 14720 a^3 \nu + 280 a \eta^2 \nu - 13440 a \theta^2 \nu - 320 a \eta \mu \nu \right. \\
& - 13440 a \mu^2 \nu - 11520 a \nu^3 + 1120 a^2 \eta \xi - 8 \eta^3 \xi + 1152 a \eta \theta \xi - 128 \eta \theta^2 \xi \\
& + 4352 a^2 \mu \xi + 64 \eta^2 \mu \xi - 128 \eta \mu^2 \xi - 5952 a^2 \nu \xi - 28 \eta^2 \nu \xi - 1248 a \theta \nu \xi \\
& + 1344 \theta^2 \nu \xi + 32 \eta \mu \nu \xi + 1344 \mu^2 \nu \xi + 64 \eta \nu^2 \xi - 768 \mu \nu^2 \xi + 1152 \nu^3 \xi \\
& - 160 \eta \theta \xi^2 - 448 a \mu \xi^2 + 822 a \nu \xi^2 + 432 \theta \nu \xi^2 - 26 \eta \xi^3 + 32 \mu \xi^3 + \nu \xi^3 \\
& - 14080 a \eta \theta \omega + 15360 a^2 \nu \omega - 2240 a \eta \xi \omega + 1408 \eta \theta \xi \omega - 4224 a \mu \xi \omega \\
& + 6144 a \nu \xi \omega - 3072 \theta \nu \xi \omega + 480 \eta \xi^2 \omega - 192 \mu \xi^2 \omega - 1152 \nu \xi^2 \omega - 46080 a \nu \omega^2 \\
& \left. - 1280 \eta \xi \omega^2 + 3072 \mu \xi \omega^2 + 4608 \nu \xi \omega^2 \right)
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Ciclos Límites en Sistemas de Dimensión 3

La eternidad es un ciclo infinito de comienzos y finales.

(Rafael Hernampérez)

En este capítulo se estudian dinámicas de sistemas en el espacio de estados de dimensiones mayores a dos, que son más ricas y pueden resultar más complicadas que en el plano, puesto que la excursión de las variables tienen un mayor grado de libertad. Por lo tanto, es necesario tratar con objetos o ciertos conjuntos de puntos más generales que planos. El análisis puede simplificarse al restringirse a ciertas regiones del espacio de estados que se denominan *variedades* (*manifold* en inglés). Para definir estos elementos se determina una estructura o *topología* sobre los subconjuntos del espacio a través de ciertos axiomas (si bien la topología se define sobre espacios muy generales, aquí se tratará únicamente con \mathbb{R}^n). De manera informal estas variedades están representadas por regiones k -dimensionales, contenidas en el espacio de estados, que son soluciones de un sistema de ecuaciones $M_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, $j = 1, \dots, n - k$. Las funciones M_j pueden ser diferenciables o no. Este concepto es análogo a la *variedad afín* de álgebra conmutativa teniendo en cuenta que aquí las funciones no necesariamente son algebraicas (polinomios). Por

ejemplo en dimensión 1, una variedad es una curva; en dimensión 2, una superficie. El círculo unitario $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ es una variedad de dimensión 1 en \mathbb{R}^2 . En forma similar la esfera $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ es una variedad de dimensión $n-1$ en \mathbb{R}^n . En la primera sección del capítulo se definen de forma más rigurosa las variedades que luego se usarán para identificar dinámicas. Se requieren conceptos básicos de topología diferencial. Para más detalle ver (Sastry, 1999).

A continuación se estudiarán ciclos límites en sistemas de dimensión 3 incorporando el concepto de *variedad centro*. Esto último consiste en realizar una reducción sobre un espacio de dimensión 2, donde evolucionan las órbitas de los ciclos límites. En dicho subespacio se hace una descripción en formas normales similar a la utilizada en el capítulo anterior, aunque esta vez en coordenadas cartesianas. De esta forma resulta así una estructura particular de los polinomios que intervienen en las ecuaciones de estado equivalentes a la forma polar detallada anteriormente. Al incrementar el orden del sistema pueden aparecer nuevos fenómenos dinámicos incapaces de ocurrir en sistemas planares. Uno de ellos es la *cascada de doble período* que conduce a un comportamiento extraño conocido como *caos*.

El procedimiento analítico de ciclos límites aquí presentado se basa en el trabajo (Calandrini *et al.*, 2000b) y se ilustra con un sistema tridimensional académico, originariamente tratado por (Rand, 1989) y luego por otros autores: (Nayfeh y Balachandran, 1990), (Belhaq y Houssni, 1995), (Belhaq *et al.*, 2000a), (Belhaq *et al.*, 2000a), (Chen *et al.*, 2009), etc. Sin embargo no se obtuvieron resultados analíticos satisfactorios para analizar el nacimiento de la bifurcación de doble período. En los ejemplos de cascadas de doble período se utilizó software de continuación numérica, basados en el trabajo (Alonso *et al.*, 2001).

3.1. Definiciones básicas de topología diferencial

Informalmente hablando, las variedades son localmente espacios vectoriales planos pero globalmente superficies curvas. Un ejemplo común es nuestro planeta. Se puede

considerar que la superficie de la tierra es localmente plana pero globalmente es una superficie curva. Esta definición de espacio plano es muy intuitiva, podría decirse que un espacio es localmente plano si es posible aplanarlo suavemente; un cono no sería localmente plano puesto que en un entorno de su vértice no se “parece” a un plano. A continuación estas discusiones intuitivas se transforman en un conjunto de definiciones formales utilizando conceptos básicos de topología diferencial.

Sean $U \subset \mathbb{R}^k$ y $V \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos abiertos. Un mapeo $f : U \rightarrow V$ se llama suave, si todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ existen y son continuas. Se usará la notación C^m para indicar que un mapa es m -veces continuamente diferenciable. Es decir un mapa suave es al menos C^1 . Además, si $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^l$ son conjuntos arbitrarios del espacio euclídeo, no precisamente abiertos, entonces $f : X \rightarrow Y$ se llama suave si existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ contenido en X y un mapeo suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ que coincida con f en $U \cap X$. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son suaves, entonces también lo es la composición $g \circ f : X \rightarrow Z$.

Definición 20 *Difeomorfismo.* Un mapa $f : X \rightarrow Y$ se dice que es un difeomorfismo si es un homeomorfismo (i.e. un mapa uno a uno continuo con inversa continua) y si f y f^{-1} son ambas suaves.

Los espacios X e Y son difeomórficos si existe un difeomorfismo entre ellos como se muestra en la Fig. 3.1.

Definición 21 *Variedad suave de dimensión m .* Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ se dice que es una variedad suave de dimensión m , si para cada $x \in M$ existe un entorno $W \cap M$ ($W \subset \mathbb{R}^k$), que sea difeomórfico a un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^m$.

Un difeomorfismo ψ de U sobre $W \cap M$ se llama parametrización y su inversa ψ^{-1} se llama sistemas de coordenadas sobre $W \cap M$. Por ejemplo un toroide puede

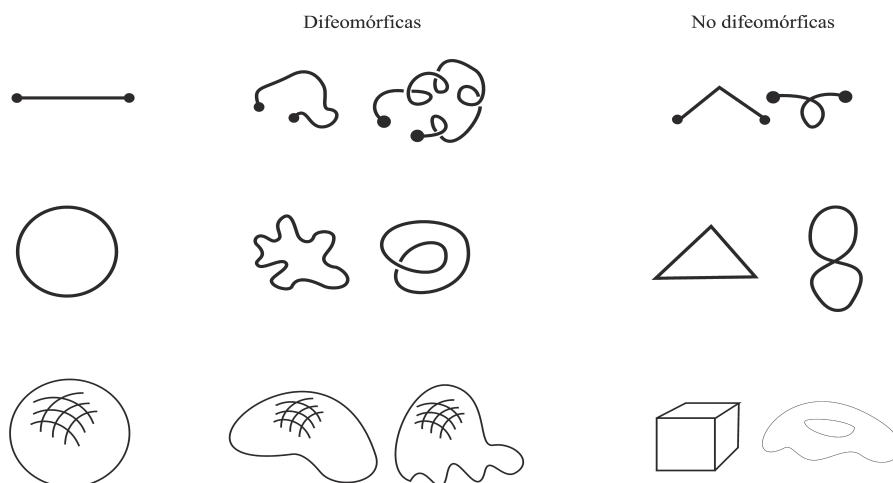


Figura 3.1: Superficies difeomórficas y no al intervalo, círculo y esfera.

expresarse paramétricamente por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (r_1 + r_2 \cos(t_2)) \cos(t_1), \\
 x_2 &= (r_1 + r_2 \cos(t_2)) \sin(t_1), \\
 x_3 &= r_2 \sin(t_2),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde r_1 y r_2 son constantes que verifican $r_1 > r_2 > 0$, y los parámetros son t_1 y t_2 . Esta parametrización es un difeomorfismo entre el toroide y todo entorno abierto cuadrangular de lado 2π de \mathbb{R}^2 .

En el siguiente capítulo se verá que el toroide también puede ser representado en forma implícita por el conjunto de puntos que son solución de la ecuación

$$r_1^4 - 2r_1^2(r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + (-r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 0$$

con $r_1 > r_2 > 0$. Sin embargo toda ecuación implícita no siempre define una variedad suave, tiene que existir el difeomorfismo como en el ejemplo anterior. Esto no sucede en el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 que verifican: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, el cual es un cono, ya que no existe un difeomorfismo en un entorno del vértice $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ y

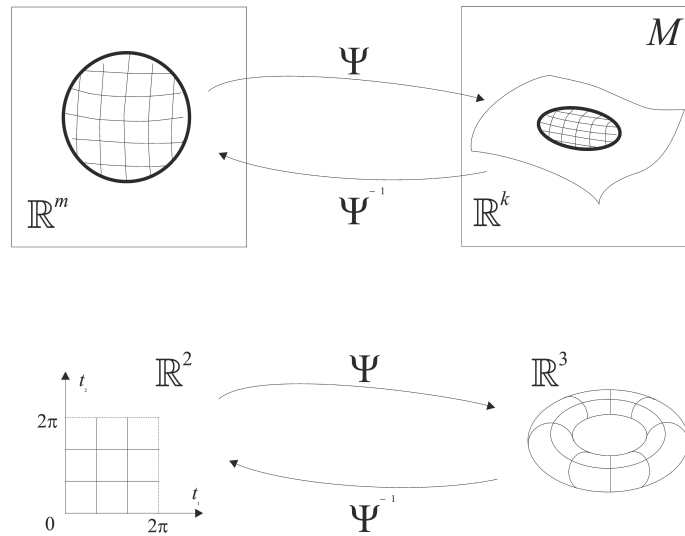


Figura 3.2: Ilustración de la definición de variedad.

algún abierto de \mathbb{R}^2 .

3.1.1. Espacios tangentes y derivadas

En el estudio de sistemas dinámicos se establecen conjuntos invariantes para analizar la estabilidad de puntos de equilibrio y órbitas. Estos invariantes son variedades y como se mencionó anteriormente pueden expresarse como un sistema de ecuaciones. Sin embargo no siempre se conocen estas ecuaciones, aunque es fácil deducir el plano tangente a la variedad a partir del flujo del campo vectorial o las ecuaciones diferenciales. Un concepto relacionado al plano tangente es el diferencial Df de un mapa $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades suaves.

Por este motivo, se presenta la noción de espacio tangente TM_x a la variedad M en x . Intuitivamente TM_x es un hiperplano de dimensión m en \mathbb{R}^k que mejor aproxima M cuando el origen se traslada a x . De forma similar TN_y es la mejor aproximación lineal a N en $y = f(x)$. Entonces Df es la mejor aproximación lineal afín a f como un mapa de TM_x a TN_y . De forma más precisa para mapas $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V \subset \mathbb{R}^l$ con U y V abiertos, se define Df_x como el mapa lineal $Df : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$

que satisface

$$Df_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

para $x \in U$ y $h \in \mathbb{R}^k$. De hecho, Df_x es la matriz $l \times k$ de las primera derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ evaluadas en x .

Definición 22 *Espacio tangente* TM_x a una variedad M en x . Sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ una parametrización de un entorno $\psi(U)$ de x en M . El mapa $D\psi_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ queda bien definido. El espacio tangente a M en x se define como la imagen de $D\psi_u(\mathbb{R}^m)$.

3.2. Flujo y subespacios invariantes

En esta sección se utilizarán los conceptos básicos de topología diferencial vistos previamente en la teoría cualitativa de sistemas dinámicos. Algunos resultados en \mathbb{R}^n son idénticos a aquellos analizados en \mathbb{R}^2 en el capítulo anterior, pero existen otros comportamientos dinámicos que son más complejos y no pueden ocurrir en \mathbb{R}^2 . Para simplificar el análisis se puede desarrollar el espacio en ciertos subespacios o variedades particulares. Considérese el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0$, y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave. Sea $s(t, x_0)$ la solución que verifica $s(0, x_0) = x_0$. Se llamará flujo de f al mapa $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface $\phi_t(x_0) = s(t, x_0)$. Considerando las hipótesis del teorema de existencia y unicidad enunciado en el capítulo 1, se tiene que ϕ_t está bien definido para todo t . En los desarrollos siguientes \bar{x} es un punto de equilibrio, es decir $f(\bar{x}) = 0$.

En los sistemas lineales, es decir $f(x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el origen es un punto de equilibrio (único si A es no singular), y asociadas a él existen algunas variedades particulares que son las direcciones características que coinciden con los

autovectores de la matriz del sistema. Son variedades invariantes y se las clasifica de la siguiente forma, usando la notación *span* para indicar “espacio generado por”:

- Subespacio estable, $E^s = \text{span}\{v^1, \dots, v^{n_s}\}$,
- Subespacio inestable, $E^u = \text{span}\{u^1, \dots, u^{n_u}\}$,
- Subespacio centro, $E^c = \text{span}\{w^1, \dots, w^{n_c}\}$,

donde v^1, \dots, v^{n_s} , son los n_s autovectores generalizados cuyos autovalores tienen parte real negativa, u^1, \dots, u^{n_u} , son los n_u autovectores generalizados cuyos autovalores tienen parte real positiva, y w^1, \dots, w^{n_c} son aquellos cuyos autovalores tienen parte real nula. Por supuesto $n_s + n_u + n_c = n$. Las soluciones que pertenecen a E^s están caracterizadas por exponenciales decrecientes, monótonas u oscilatorias con envolventes decrecientes y en E^u por exponenciales crecientes u oscilatorias con envolventes crecientes. No hay soluciones que caractericen a E^c .

En los sistemas no lineales, si todos los autovalores de $Df(\bar{x})$ no tienen parte real nula, se dice que \bar{x} es un punto de equilibrio hiperbólico (como se definió en \mathbb{R}^2). El teorema de Hartman - Grobman (Guckenheimer y Holmes, 1983) establece que existe un homeomorfismo definido en un entorno de un punto hiperbólico sobre un entorno al origen, que mapea el flujo de f en el flujo de su linealización Df , preservando el sentido de su parametrización temporal. Ambos entornos son topológicamente equivalentes, es decir, las dinámicas del sistema no lineal y su linealización son equivalentes, Fig. 3.3. En cambio, si alguno de los autovalores de $Df(\bar{x})$ tienen parte real nula, esto no se puede asegurar y la estabilidad no está determinada por su linealización.

No es posible hablar de subespacios de estabilidad o inestabilidad en los sistemas no lineales. Sin embargo, se pueden definir variedades locales estables e inestables:

- $W_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ y } \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0\}$
- $W_{loc}^u(\bar{x}) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, \text{ y } \phi_t(x) \in U \forall t \leq 0\}$,

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un entorno del punto de equilibrio \bar{x} y $\phi_t(x)$ es el flujo de f , tal que la trayectoria del sistema pasa por el punto x en $t = 0$. Las variedades locales, estables e inestables son los análogos no lineales de los hiperplanos invariantes E^s , y E^u del problema lineal. El próximo resultado muestra que las variedades W_{loc}^s y W_{loc}^u son tangentes a los subespacios E^s , E^u en el punto \bar{x} .

Teorema 10 *Teorema de la variedad estable para puntos de equilibrio. Supongamos que $\dot{x} = f(x)$ tiene un punto de equilibrio hiperbólico \bar{x} . Entonces existen variedades locales estables e inestables $W_{loc}^s(\bar{x}), W_{loc}^u(\bar{x})$ de la misma dimensión n_s y n_u que los subespacios de los autovectores E^s , y E^u del sistema linealizado $\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, donde $Df(\bar{x}) = [\partial f_i / \partial x_j]$ es la matriz jacobiana de las primeras derivadas parciales del mapa $f = [f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)]^T$, y $x = \bar{x} + \xi$, con $\|\xi\| \ll 1$, y tangentes a E^s , y E^u . W_{loc}^s y W_{loc}^u son tan suaves como f .*

Para la demostración de este teorema puede verse (Hartman, 1964) y (Carr, 1981). Una interpretación gráfica se muestra en la Fig. 3.3. La variedad estable W^s indicada con una curva con sentido hacia el equilibrio \bar{x} , y la variedad inestable W^u , con una curva con sentido opuesto al equilibrio. También se indican los autovectores de $Df(\bar{x})$ que corresponden a los subespacios estables e inestables E^s y E^u , tangentes a las variedades W^s y W^u , respectivamente.

Las variedades locales tienen sus correspondientes variedades globales, que se obtienen continuando las soluciones hacia atrás y hacia adelante

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(\bar{x})),$$

$$W^u(\bar{x}) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(\bar{x})).$$

La unicidad de las soluciones asegura que dos variedades estables de puntos de equilibrios diferentes no se pueden intersectar. Sin embargo pueden ocurrir intersecciones entre una variedad estable y otra inestable de distintos o del mismo punto de equilibrio (conexiones heteróclinas y homóclinas).

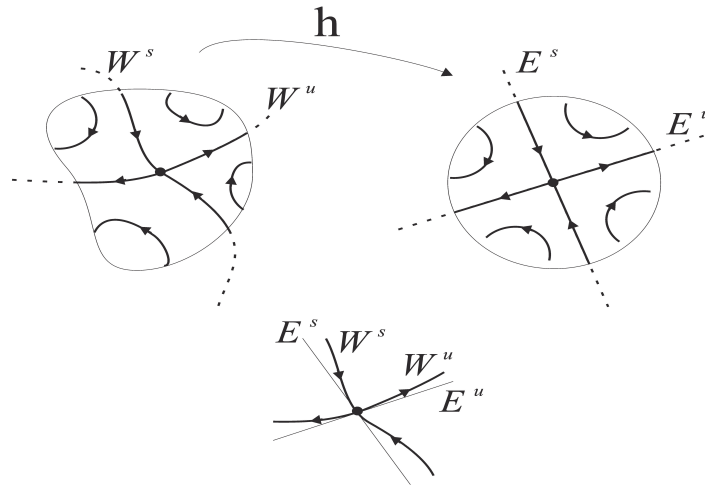


Figura 3.3: Ilustración del teorema de Hartman y de las variedades estables.

Como se vió en el primer capítulo, los sistemas no lineales poseen otros conjuntos límites además de los puntos de equilibrio, como las órbitas periódicas. Del mismo modo se definen las variedades estables e inestables de una órbita cerrada γ

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{x \in \vec{U} \mid \|\phi_t(x) - \gamma\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ y } \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0\}$$

$$W_{loc}^u(\gamma) = \{x \in U \mid \|\phi_t(x) - \gamma\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, \text{ y } \phi_t(x) \in U \forall t \leq 0\}.$$

3.3. Variedad centro

El teorema de la variedad centro provee una forma sistemática para reducir la dimensión del espacio de estados cuando se está considerando algún tipo de bifurcación.

La variedad centro es una variedad invariante tangente al espacio de los autovectores correspondientes al centro. El comportamiento dinámico transversal a la variedad centro es relativamente simple, generalmente controlado por exponenciales contractivas para variedades estables o expansivas cuando son variedades inestables.

Teorema 11 *Teorema de la variedad centro.* Sea f un campo vectorial sobre \mathbb{R}^n que se anula en el origen ($f(0) = 0$) y sea $A = Df(0)$. Se divide el espectro de A

(autovalores de A) en tres subconjuntos σ_s, σ_c , y σ_u con

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{cases} < 0 \text{ si } \lambda \in \sigma_s, \\ = 0 \text{ si } \lambda \in \sigma_c, \\ > 0 \text{ si } \lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

Sean los subespacios de σ_s, σ_c , y σ_u E^s, E^c , y E^u , respectivamente. Entonces existen variedades C^r estable e inestable W^u y W^s tangentes a E^u y a E^s en 0, y una variedad C^{r-1} denominada centro W^c tangente a E^c en 0.

El teorema de la variedad centro implica que el sistema es localmente topológicamente equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ \dot{\tilde{y}} &= -\tilde{y} & (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in W^c \times W^s \times W^u \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{z}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

El problema siguiente consiste en calcular el campo vectorial reducido \tilde{f} . Por simplicidad, y porque es más visible práctica y físicamente, se considera que la variedad inestable es vacía y que la parte lineal está en la forma diagonal a bloques o forma de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + f(x, y) \\ \dot{y} &= Cy + g(x, y) \end{aligned} ; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.3)$$

donde B y C son matrices cuyos autovalores tienen parte real nula y parte real negativa, respectivamente, f y g junto con sus derivadas parciales primeras se anulan en el origen.

Como la variedad centro es tangente a E^c (el espacio correspondiente a $y = 0$) podemos representarla localmente con el gráfico

$$W^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid y = h(x)\},$$

donde h está definido en un entorno del origen y $h(0) = Dh(0) = 0$. Ahora conside-

remos la proyección del campo vectorial f sobre $y = h(x)$

$$\dot{x} = Bx + f(x, h(x)).$$

Puesto que $h(x)$ es tangente a $y = 0$, las soluciones de la ecuación proveen una buena aproximación del flujo de $\tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x})$ restringido a W^c .

El próximo teorema indica cómo puede calcularse $h(x)$, o al menos aproximada. Sustituyendo $y = h(x)$ en ambos miembros de la segunda ecuación de (3.3), diferenciando h , usando la regla de la cadena, e igualando se obtiene

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] = Ch(x) + g(x, h(x))$$

o

$$Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] - Ch(x) - g(x, h(x)) = 0$$

con la condición de borde $h(0) = Dh(0) = 0$. Esta ecuación diferencial parcial en muchos casos no puede ser resuelta, pero puede ser aproximada por una serie de Taylor centrada en $x = 0$, como muestra el siguiente teorema donde \mathcal{N} es el operador $\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] - Ch(x) - g(x, h(x))$.

Teorema 12 (*Henry, 1981; Carr, 1981*). *Si existe una función $\phi(x)$, con $\phi(0) = D\phi(0) = 0$, tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = O(|x|^p)$ para algún $p > 1$ cuando $|x| \rightarrow 0$, entonces se tiene que*

$$h(x) = \phi(x) + O(|x|^p)$$

es solución de $\mathcal{N}(h(x)) = 0$, con $h(0) = Dh(0) = 0$.

Por lo tanto podemos aproximar $h(x)$ por series. Sin embargo hay que tener en cuenta que las expansiones con series de Taylor no siempre existen puesto que W^c puede no ser analítica en el origen. El resultado de este teorema es importante puesto que permite reducir la dimensión del espacio a una variedad donde “vive”

el ciclo límite y allí es sencillo establecer una forma normal como la obtenida para sistemas planares.

3.4. Forma normal en sistemas de dimensión 3

En esta sección se estudia la presencia de ciclos límites en sistemas de dimensión 3, cuya linealización tenga un par de autovalores complejos, y otro real negativo. A partir de un valor crítico de un parámetro ocurre una bifurcación de Hopf con la aparición de una variedad centro, es decir un invariante para la dinámica. En otras palabras, si una solución tiene su punto inicial en esta superficie, permanece en ella durante un tiempo, y en este caso especial de bifurcación, además se genera un ciclo límite.

El procedimiento consta de tres pasos: primero expresar la parte lineal en la forma canónica de Jordan, para separar en el espacio (dimensión 1) estable o inestable y el espacio centro (dimensión 2); luego, aproximar la variedad centro, y por último realizar un cambio de coordenadas para obtener la forma normal. Este último paso se detalla a continuación, y luego se ilustrará todo el procedimiento con el ejemplo propuesto por (Rand, 1989).

3.4.1. Forma normal de ciclos en la variedad centro

En el capítulo 2 se realizaron transformaciones de coordenadas en sistemas planares para obtener formas normales, una en función del radio vector $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, y otra usando una variable compleja $z = u + jv$. En general, para una aproximación de orden $n = 2N + 1$ según las transformaciones obtenidas en el capítulo 2 (método II), las ecuaciones del sistema transformado son:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha u - \omega v + \sum_{k=1}^N (\sigma_k u - \varphi_k v)(u^2 + v^2)^k \\ \dot{v} &= \omega u + \alpha v + \sum_{k=1}^N (\varphi_k u + \sigma_k v)(u^2 + v^2)^k\end{aligned}$$

y reagrupando los términos se presenta la siguiente forma normal:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \sigma_1 r^2 + \dots & -(\omega + \varphi_1 r^2 + \dots) \\ \omega + \varphi_1 r^2 + \dots & \alpha + \sigma_1 r^2 + \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

donde $r^2 = u^2 + v^2$. Los elementos de la matriz corresponden a los polinomios de la forma normal polar: $\dot{r} = r(\alpha + \sigma_1 r^2 + \dots + \sigma_N r^{2N})$, $\dot{\phi} = \omega + \varphi_1 r^2 + \dots + \varphi_N r^{2N}$, es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}/r & -\dot{\phi} \\ \dot{\phi} & \dot{r}/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Si en la condición inicial del sistema, $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, se anula la diagonal de la matriz, $\|(u_0, v_0)\| = r_0$ es una raíz del polinomio $\alpha + \sigma_1 r^2 + \dots + \sigma_N r^{2N}$. Entonces r se mantiene constante ($r = r_0$), puesto que $\dot{r} = 0$ y por lo tanto $\dot{\phi}$ también es constante con valor $\dot{\phi} = \omega_0 = \omega + \varphi_1 r_0^2 + \dots + \varphi_N r_0^{2N}$. Las ecuaciones dinámicas restringidas a estas condiciones corresponden a un sistema lineal con autovalores imaginarios puros en $\pm i\omega_0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

donde se ve claramente que la trayectoria en el sistema aproximado es un círculo de radio r_0 , periódico de frecuencia ω_0 , que coincide con el sistema no lineal representado

con la forma normal únicamente cuando la condición inicial es $\|(u_0, v_0)\| = r_0$. Las ecuaciones de la forma normal se pueden representar por medio del sistema lineal resonante anterior con una realimentación no lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u, v) \\ g_2(u, v) \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= (\alpha + \sigma_1 r^2 + \dots)u - (\omega - \omega_0 + \varphi_1 r^2 + \dots)v \\ g_2(u, v) &= (\omega - \omega_0 + \varphi_1 r^2 + \dots)u + (\alpha + \sigma_1 r^2 + \dots)v. \end{aligned}$$

El efecto de la realimentación no lineal en un entorno del ciclo es modificar los polos complejos del sistema resonante, agregando o quitando amortiguamiento, para conducir al sistema hacia el ciclo límite en caso de ser estable o alejándolo en caso contrario.

Como se mencionó anteriormente, el análisis de ciclos límites en sistemas de dimensión 3 consta de tres pasos que consisten en:

1. Expresar la parte lineal en la forma canónica de Jordan.
2. Aproximar la variedad centro.
3. Realizar un cambio de coordenadas para obtener la forma normal.

Para mejor claridad se explica directamente con el ejemplo de (Rand, 1989):

Ejemplo 13 El sistema de Rand es un sistema tridimensional, con un parámetro

escalar μ

$$\dot{x} = \mu x - y - xz,$$

$$\dot{y} = x + \mu y,$$

$$\dot{z} = -z + x^2 z + y^2.$$

El sistema tiene una simetría que lo hace invariante al cambio $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. El origen es un punto de equilibrio, los términos lineales que ya están en la forma canónica de Jordan, muestran un par de autovalores complejos conjugados $\mu \pm j$ y otro real en -1 , estable para $\mu < 0$. Si el sistema no está expresado en esta forma, siempre existe una transformación lineal que puede llevarlo a esta realización. Sin embargo este paso no es trivial, ya que requiere explicitar los autovectores de la matriz, que serán función del parámetro.

En el ejemplo, para $\mu = \mu_0 = 0$ ocurre una bifurcación de Hopf en una variedad centro la cual es tangente al plano xy en el origen, de donde nace una solución periódica. El siguiente paso es aproximar esta variedad por un polinomio de orden m . En (Rand, 1989) se utilizó un polinomio de orden 2. Para mejorar la aproximación se usará un polinomio con $m = 4$,

$$z = h(x, y) + O(|x|^5),$$

$$h(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^4 + exy^3 + fx^3y + gx^2y^2 + hy^4,$$

sin términos cúbicos, respetando la simetría en xy de la tercera ecuación de estado. No se necesitan considerar términos de mayor orden, pues se usará orden 5 para la forma normal, y sólo interviene un término xz en las ecuaciones de estado. Siguiendo el procedimiento sugerido en el Teorema 12, es decir derivando respecto del tiempo, reemplazando por las ecuaciones del sistema, y despreciando los términos de orden superior a 4 se determinan los coeficientes del polinomio que aproxima a la variedad

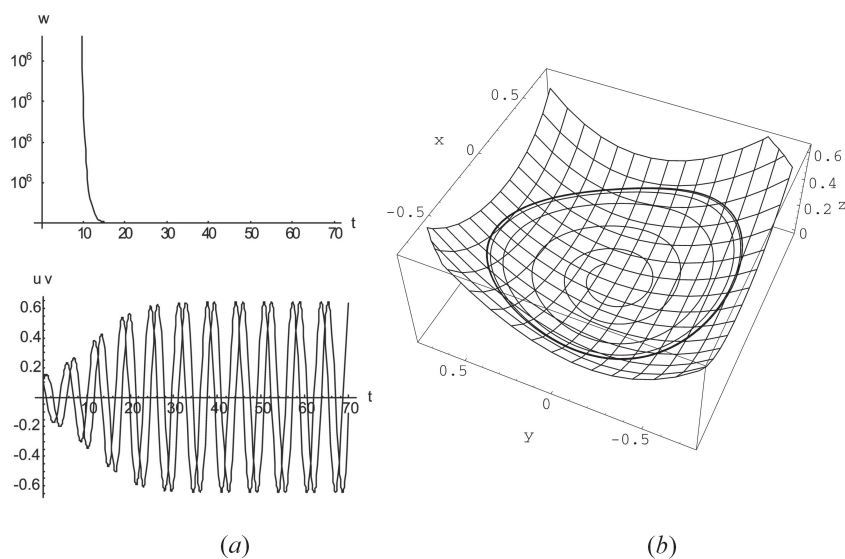


Figura 3.4: Sistema de Rand con $\mu = 0,1$. y aproximación de orden 5, (a) Evoluciones temporales de las variables de la forma normal; (b) variables originales y superficie de la variedad centro.

centro. Los correspondientes a los términos cuadráticos coinciden con los obtenidos por Rand. En el apéndice del capítulo se detallan las expresiones de los coeficientes obtenidos. En la Fig. 3.4(b) se observa la superficie que aproxima dicha variedad. La dinámica sobre la variedad corresponde al sistema de dimensión 2, de variables xy , donde se ha reemplazado z por la aproximación de la variedad. Aplicando el procedimiento descrito en el capítulo anterior (método II) se obtiene la forma normal en la variedad, mediante una transformación similar a la identidad. Aplicando la transformación de coordenadas siguiente

$$\begin{aligned}
 x &= u + P_n(u, v) \\
 y &= v + Q_n(u, v) \\
 z &= w + V_n(u + P_n(u, v), v + Q_n(u, v))
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

y despreciando los términos de alto orden se obtiene la siguiente forma normal:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}/r & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & \dot{r}/r & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \\ f_3(u, v) \end{pmatrix} + O(|u, v|^6) \quad (3.5)$$

donde $\dot{r}/r = \mu + \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r^4$ y $\dot{\phi} = 1 + \varphi_1 r^2 + \varphi_2 r^4$. Cuando $w = 0$, el sistema evoluciona sobre la variedad centro.

Los coeficientes de la forma normal de orden 5, obtenidos para el ejemplo son:

$$\sigma_1 = \frac{12\mu^4 + 10\mu^3 - 6\mu^2 - 5\mu - 9}{2(2\mu + 1)(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 4)(4\mu^2 + 4\mu + 5)}$$

$$\varphi_1 = -\frac{32\mu^5 + 24\mu^4 + 76\mu^3 + 52\mu^2 - \mu + 4}{4(2\mu + 1)(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 4)(4\mu^2 + 4\mu + 5)}$$

y para μ pequeños, se obtuvo una aproximación de los segundos coeficientes:

$$\sigma_2 = -\frac{271}{1000} + 1,56266\mu - 4,12523\mu^2 + 5,433\mu^3 - 3,61924\mu^4 + 0,98128\mu^5$$

$$\varphi_2 = -\frac{3101}{32000} - 0,156846\mu + 1,95888\mu^2 - 4,44421\mu^3 + 4,11346\mu^4 - 1,38307\mu^5.$$

Se realizaron simulaciones con el sistema aproximado por la forma normal de orden 5. Para valores pequeños del parámetro la aproximación es muy buena. En la Fig. 3.4(a) se observan las evoluciones temporales de las variables de la forma normal. La variable w rápidamente decae a cero, es decir, la trayectoria es atraída por la variedad centro. Las variables u y v indican la presencia de un ciclo límite estable, el cual se muestra en la Fig. 3.5, proyectado en el plano uv , y también puede visualizarse en las variables originales empleando la transformación utilizada para obtener la forma normal (3.4). En la Fig. 3.6 se comparan el ciclo obtenido por la aproximación de

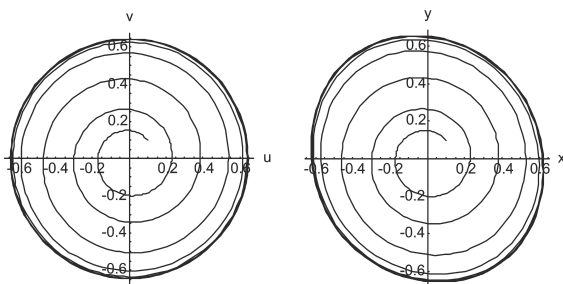


Figura 3.5: Ciclo límite en el sistema de Rand en el plano de la transformación (uv) y en el plano original (xy) con $\mu = 0,1$.

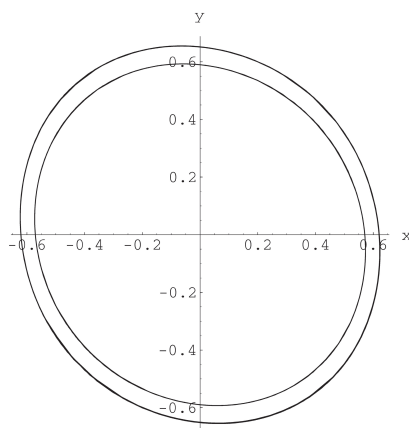


Figura 3.6: Comparación de ciclos límites en el sistema de Rand, el de mayor amplitud corresponde a una aproximación de orden 5 y el otro fue obtenido por simulaciones numéricas para $\mu = 0,1$.

orden 5 proyectado en el espacio x - y y el correspondiente a las ecuaciones de Rand obtenido por simulaciones numéricas. Se observa que el radio del ciclo aproximado por la forma normal es un poco mayor, pero este error disminuye cuando $\mu \rightarrow 0$. A medida que crece el parámetro μ los términos despreciados en (3.5) de orden mayor a 5 tienen efectos considerables, provocando que el invariante que contiene al ciclo no verifique siempre la condición $w = 0$, como ocurre en la aproximación de la variedad centro. En este caso hay que tener en cuenta las perturbaciones no lineales que imponen las funciones f_1 , f_2 y f_3 en el modelo (3.5) y pueden originar cambios cualitativos de la dinámica (bifurcaciones).

3.5. Bifurcaciones de órbitas periódicas

Al variar un parámetro de un sistema puede cambiar la estabilidad de un ciclo límite, esto da lugar al análisis de bifurcaciones de ciclos límites u órbitas periódicas. Dentro del escenario de bifurcación y por simplicidad, suponiendo que el ciclo límite original es estable, los casos más simples que se pueden mencionar son:

- *silla-nodo* o *fold*, cuando a partir de un valor crítico del parámetro aparece un par de órbitas periódicas de estabilidad opuesta entre sí.
- *transcrítica*, cuando un par de órbitas periódicas se “encuentran” e intercambian su estabilidad.
- *pitchfork*, cuando la órbita original estable cambia a inestable y además a partir del mismo valor crítico nace un par de órbitas estables.
- *flip* o *doble período*, cuando la órbita original estable cambia a inestable y además aparece una nueva órbita estable que describe dos vueltas y luego se cierra con un período aproximadamente del doble de la original.

Si el ciclo límite original no es estable, no necesariamente en la bifurcación hay un cambio de estabilidad, pues pueden aparecer “ciclos sillas”. En los sistemas de dimensión 3, se vio cómo analizar la aparición de un ciclo límite usando formas normales para la bifurcación de Hopf y el teorema de la variedad centro. La estabilidad del ciclo restringida al conjunto invariante que es la variedad centro (plano $u-v$, en el ejemplo), está dada por el signo de los coeficientes de la forma normal, dando lugar a bifurcaciones tipo fold y multiplicidad de ciclos como se analizó en el Capítulo 2. Además dicha variedad puede ser atractiva o repulsiva. Es decir, existe una dimensión más, otro grado de libertad que puede hacer cambiar la característica de

estabilidad del ciclo dando lugar a las bifurcaciones mencionadas. El doble período, que en dimensión 2 no puede ocurrir, se presenta en muchos sistemas físicos, y es un indicador de otro posible comportamiento extraño o caótico como se verá en la siguiente sección. La presencia de doble período también aparece en sistemas biológicos como las arritmias cardíacas (Wang *et al.*, 1997), (Chen *et al.*, 2000). A continuación se analizan bifurcaciones a partir de la forma normal del ejemplo desarrollado anteriormente.

Ejemplo 14 . Bifurcaciones de órbitas en el sistema de Rand. En este ejemplo ocurre una bifurcación cuando el ciclo pierde la estabilidad, precisamente cuando la variedad centro deja de ser atractiva. Para el estudio de este fenómeno mediante la forma normal, se considera una pequeña perturbación en el ciclo sobre la variable w , es decir $w = \delta w$, $u = u_c = r_0 \cos \omega_0 t$, y $v = v_c = r_0 \sin \omega_0 t$, por lo tanto

$$\delta \dot{w} = -\delta w + f_3(u_c, v_c) \delta w$$

cuya solución es:

$$\delta w(T) = \delta w(0) e^{\int_0^T -1 + f_3(u_c, v_c) dt}.$$

Cuando $e^{\int_0^T -1 + f_3(u_c, v_c) dt} < 1$, $\delta w(nT) \rightarrow 0$. La condición

$$\int_0^T -1 + f_3(u_c, v_c) dt = 0$$

indica que $\delta w(T) = \delta w(0)$, es decir que la variedad deja de ser atractiva y puede ocurrir alguna bifurcación . Este procedimiento es similar a utilizar el método de la *matriz de monodromía* (Sydel, 1994), simplificado por estar en la forma desacoplada de Jordan y la variedad centro. El cálculo del valor crítico con el método propuesto resulta $\mu = 0,207443$. Para este valor, la amplitud es $r \approx \sqrt{-\mu/\sigma_1} = 1$, por lo cual se presume que la aproximación de la variedad centro no es buena.

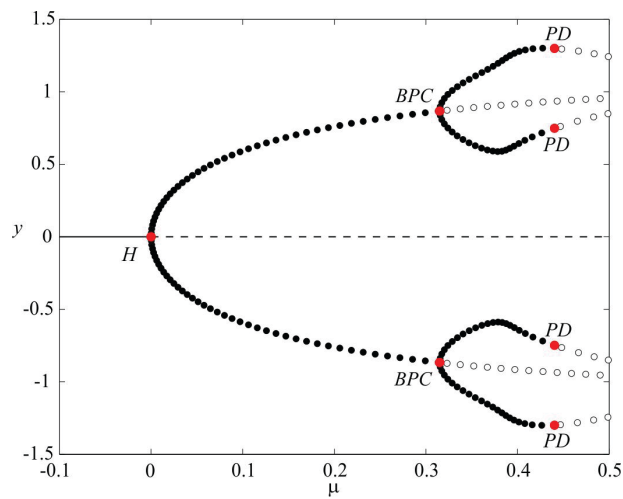


Figura 3.7: Curva de continuación en el sistema de Rand. H: punto de bifurcación de Hopf; BPC: Punto de bifurcación pitchfork de ciclos; PD: punto de bifurcación de período doble.

Resultados de simulación, usando software de continuación en (Belhaq *et al.*, 2000b), como se muestra en la Fig. 3.7, luego de la bifurcación de Hopf en $\mu = 0$, ocurre una bifurcación pitchfork (en algunos trabajos se denomina rotura de simetría) en $\mu = \mu_P = 0,3150232$, quedando un ciclo inestable en la variedad centro del cual emergen un par de ciclos asimétricos estables. En la Fig. 3.8 se observa el ciclo simétrico un poco antes de la bifurcación, $\mu = 0,31$, y los dos asimétricos para $\mu = 0,35$. Continuando el análisis sobre uno de los ciclos asimétricos, se tiene una bifurcación de doble período en $\mu = \mu_{DP} = 0,4403559$. Con el método analítico propuesto se detectó la bifurcación pitchfork con bastante error en el valor del parámetro crítico, pues la superficie utilizada para aproximar la variedad centro es tangente en el origen pero difiere considerablemente para esta amplitud del ciclo ($r \approx 1$). En la Fig. 3.9 se observa la comparación numérica y analítica del ciclo en el punto de bifurcación.

Este ejemplo ha sido desarrollado en (Calandrini *et al.*, 2000b), aunque debe destacarse que en (Rand, 1989) para $\mu_{DP} = 0,45$ se detectó doble período usando sólo un primer armónico. En los trabajos (Belhaq y Houssni, 1995) y (Belhaq *et al.*, 2000a)

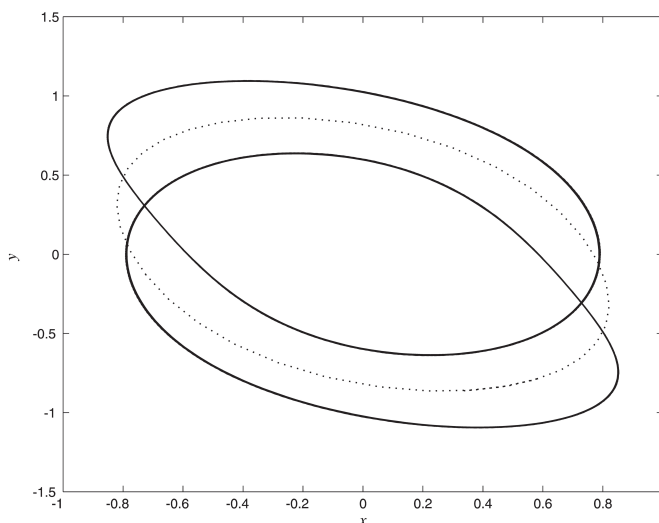


Figura 3.8: Ciclos límites en el sistema de Rand con aproximaciones numéricas, en línea punteada un ciclo simétrico con $\mu = 0,31$; en línea continua dos ciclos asimétricos para $\mu = 0,35$.

se usa el método de múltiples escalas de tiempo para obtener $\mu_{DP} = 0,446$. Si bien se detectaron con bastante precisión el valor de μ_{DP} , en los tres artículos se utilizaron aproximaciones simétricas de las órbitas, lo cual no es adecuado, pues en el simétrico no ocurre doble período, como lo establece (Chen *et al.*, 2009).

En este último se usó un método mejorado de múltiples escalas de tiempo, con muy buena aproximación del ciclo simétrico, cuando $\mu < \mu_p$.

En (Nayfeh y Balachandran, 1990) se estudió este sistema con teoría de Floquet para determinar que la bifurcación de doble período ocurre en $\mu = 0,4405$. En la Fig. 3.10 se muestra el ciclo límite de período doble obtenido numéricamente para $\mu = 0,45$.

Para mejorar el procedimiento analítico utilizado en esta tesis debería incrementarse el orden de los polinomios utilizados, lo que requiere un gran esfuerzo en recursos computacionales y los resultados no dejarían de ser locales.

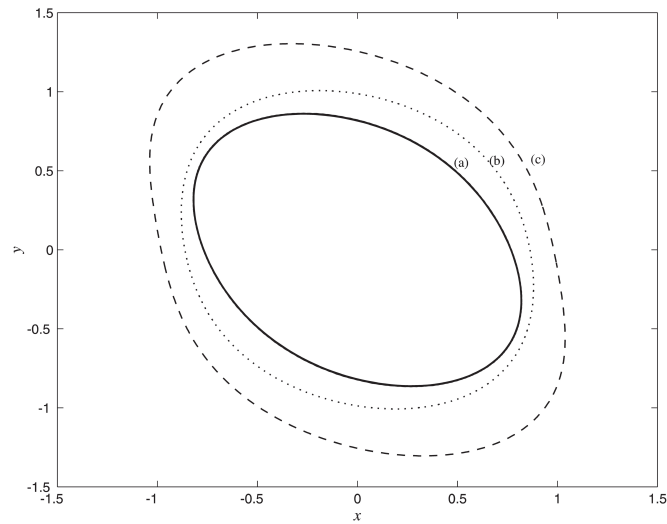


Figura 3.9: Ciclos límites en el sistema de Rand en la bifurcación pitchfork. Aproximaciones: (a) numérica con $\mu = 0,31$; (b) analítica con $\mu = 0,207$; (c) analítica con $\mu = 0,31$.

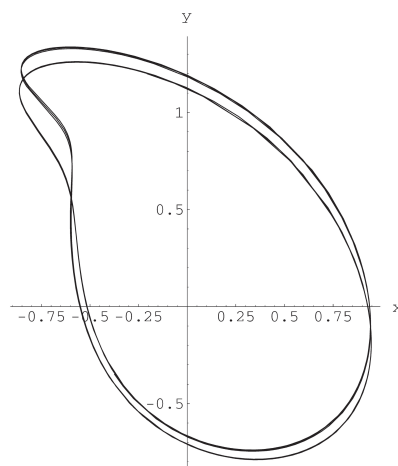


Figura 3.10: Ciclo límite de doble período en el sistema de Rand, $\mu = 0,5$.

En el ejemplo anterior se observó el alcance local de la forma normal, ya que su estructura se plantea a partir de la bifurcación de un punto de equilibrio y sus dificultades para predecir fenómenos más generales. Los resultados predichos por la forma normal son aceptables cuando se trabaja cerca del punto de Hopf u otras bifurcaciones ocurren cerca de la bifurcación de Hopf. Para el análisis de bifurcaciones de doble período, los paquetes de continuación numérica son una herramienta muy importante y han sido utilizados en la siguiente sección del capítulo.

3.5.1. Cascada de doble período

En muchos sistemas físicos las órbitas periódicas estables pierden la estabilidad cuando se varía un parámetro, con la aparición de una órbita de doble período. Este fenómeno podría repetirse si se continúa aumentando el parámetro, pasando a una órbita de período 4. Si esto se reitera infinitas veces, se obtiene una cascada de bifurcaciones que concluye en lo que se conoce como un atractor extraño, donde se manifiestan comportamientos estables e inestables conjuntamente, por eso su nombre de comportamiento caótico, o simplemente *caos*. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, similar a un atractor estable pero con mucha sensibilidad a las condiciones iniciales como en un sistema inestable, donde una pequeña perturbación puede conducir a evoluciones totalmente diferentes.

Esta ruta de bifurcaciones de doble período es uno de los fenómenos más comunes que conducen al *caos*. Un esquema del fenómeno, tanto en el espacio de fase como en su evolución en una de las variables, se muestra en la Fig. 3.11(a). El período de las soluciones se duplica sucesivamente, obteniéndose así divisiones frecuenciales por 2, 4, 8, 16, etc. Se llega al caos cuando el período crece al infinito.

La Fig. 3.11(b) muestra la curva de continuación de soluciones periódicas donde se grafica el valor máximo de una de las variables en régimen oscilatorio versus el parámetro de bifurcación. La longitud de los intervalos que limitan los valores

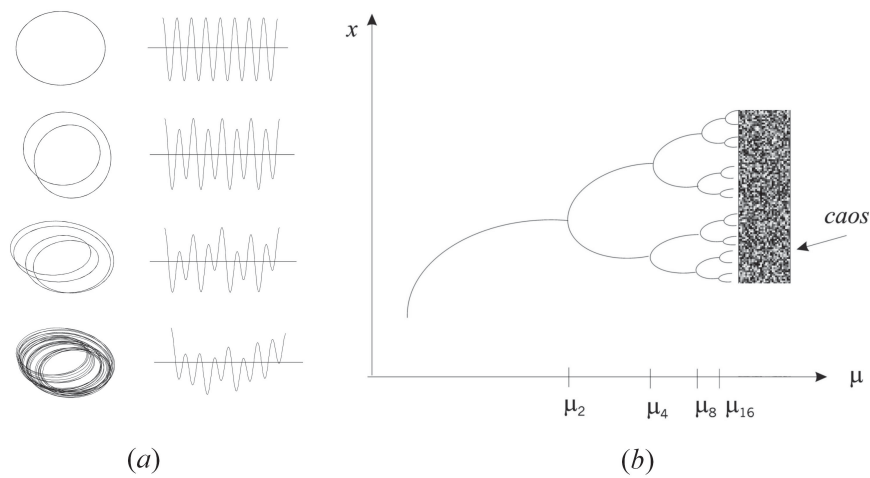


Figura 3.11: Secuencia de bifurcaciones de doble período hasta concluir en un atractor caótico. (a) órbitas; (b) diagrama de bifurcaciones.

críticos de doble período decrecen rápidamente y casi en forma geométrica, con una razón que se aproxima al número

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} \right) = \delta_F$$

con $\delta_F = 4,66920\dots$ Esta observación se cumple si el mapa de Lorenz del atractor tiene la característica de dimensión cercana a uno y es unimodal; para más detalle consultar (Strogatz, 1994).

El primero en descubrir este límite fue Mitchell Feigenbaum cuando estaba trabajando con el mapa logístico, un sistema discreto con una no linealidad cuadrática. En agosto de 1975 encontró con exactitud hasta 3 decimales (4.669), ajustándose a los límites de precisión de su calculadora (HP65). Unos meses más tarde mostró que este número era el mismo en muchos mapas discretos que presentaban bifurcaciones de doble período. Feigenbaum completó su primer trabajo sobre este tema en 1976, pero no pudo ser publicado hasta 1978. La universalidad de esta cantidad fue mostrada más rigurosamente por (Collet y Eckmann, 1980) y (Lanford, 1982). El número δ_F es comúnmente conocido como constante de Feigenbaum, y puede

Tabla 3.1: Determinación experimental de la constante de Feigenbaum

Experimento	Número de dobles períodos	δ_F	Autores
Agua	4	4,3	Giglio (1981)
Mercurio	4	4,4	Libchaber (1982)
Diodo	5	4,3	Testa (1982)
Transistor	4	4,7	Arecchi (1982)
Junt. Josephson	3	4,5	Yeh (1982)

medirse experimentalmente observando fenómenos que exhiben doble período. Como los intervalos decrecen rápidamente, sólo puede observarse una pequeña porción de la cascada. Físicamente se han podido mostrar cascadas de hasta período 16 como máximo, en sistemas de convección, y también en sistemas electrónicos como muestra la Tabla 3.1 (en el caso del diodo se llegó hasta período 32).

Las bifurcaciones de doble período no sólo ocurren en los sistemas discretos sino también en sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 3 ó superior. En (Alonso *et al.*, 2001) se presentan las rutas de doble período al caos en tres sistemas continuos con un programa de continuación de soluciones periódicas. La estimación mediante simulaciones del valor de la constante de Feigenbaum, se realiza generando la sucesión

$$\delta_n = \frac{\mu_{2^{n+1}} - \mu_{2^n}}{\mu_{2^{n+2}} - \mu_{2^{n+1}}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con los resultados numéricos de los intervalos del parámetro donde se detectan las bifurcaciones de doble período. En los tres sistemas se observa como converge al valor límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta_F \approx 4,669\dots$$

en concordancia con los experimentos físicos mencionados como se detalla a continuación.

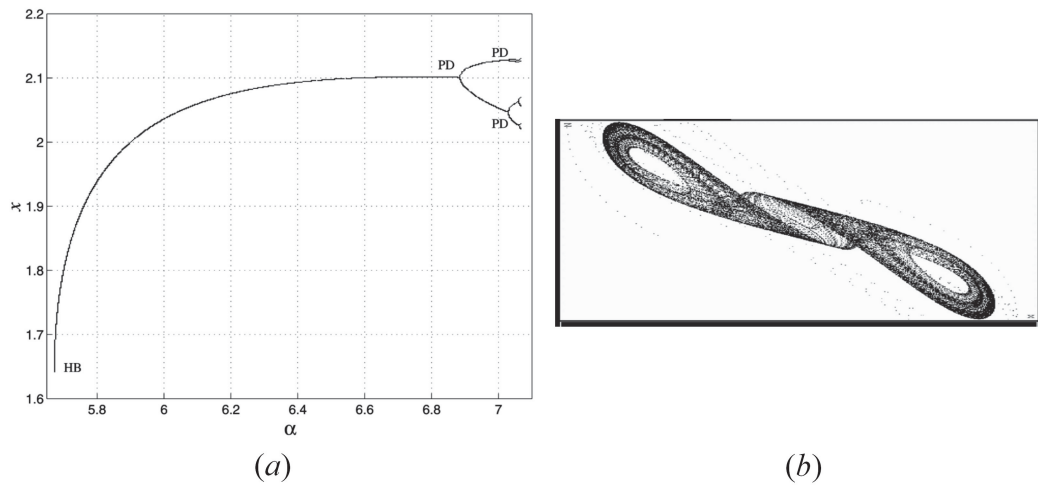


Figura 3.12: Circuito de Chua. (a) Curva de continuación de soluciones periódicas; (b) atractor caótico.

Ejemplo 15 . Circuito de Chua. El modelo con una no linealidad suave está dado por

$$\dot{x} = \alpha[y - \varphi(x)],$$

$$\dot{y} = x - y + z,$$

$$\dot{z} = -\beta y,$$

donde $\varphi(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{6}x$, y α y β son los parámetros de control. En nuestro estudio, el parámetro β se fija en $\beta = 10,91678$, y α se considera el parámetro principal de bifurcación (μ en las secciones anteriores). Los valores críticos de α son: $\alpha_2 = 6,888775$, $\alpha_4 = 7,034154$, $\alpha_8 = 7,065070$, $\alpha_{16} = 7,071624$ y $\alpha_{32} = 7,073030$, como se observan en la Fig. 3.12(a) y las estimaciones de δ_F son

$$\delta_1 = 4,702387, \quad \delta_2 = 4,717119, \quad \delta_3 = 4,661451,$$

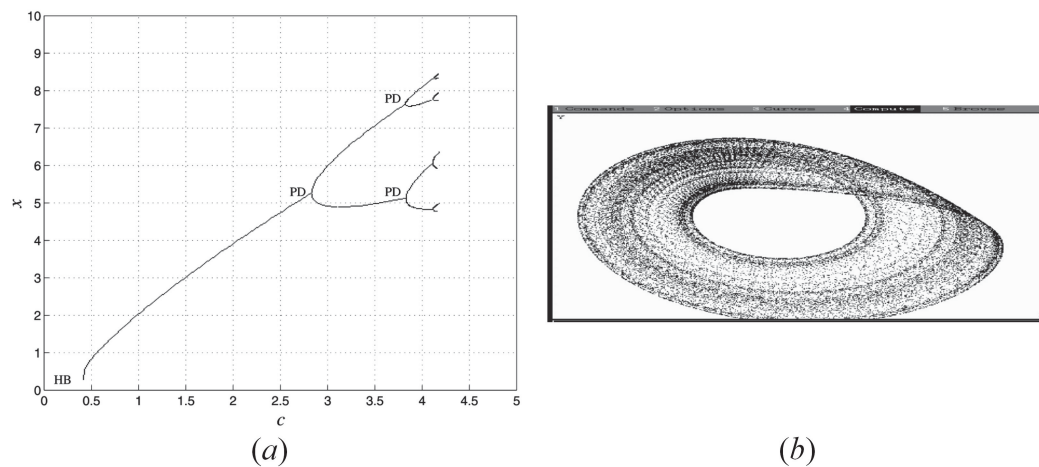


Figura 3.13: Sistema de Rössler. (a) Curva de continuación de soluciones periódicas; (b) Atractor caótico.

En la Fig. 3.12(b) se puede apreciar el atractor caótico al cual conduce esta cascada de doble período.

Ejemplo 16 . Sistema de Rössler. Este sistema está dado por

$$\dot{x} = -y - z,$$

$$\dot{y} = x + ay,$$

$$\dot{z} = b + z(x - c),$$

donde a y b han sido fijados en 0,2, y c es el parámetro principal de bifurcación. Una continuación de la órbita periódica que emerge de una bifurcación de Hopf se muestra en la Fig. 3.13(a). Las bifurcaciones de doble período ocurren para $c_2 = 2,832446$, $c_4 = 3,837358$, $c_8 = 4,124215$, $c_{16} = 4,186997$, y $c_{32} = 4,200536$. Con estos valores se

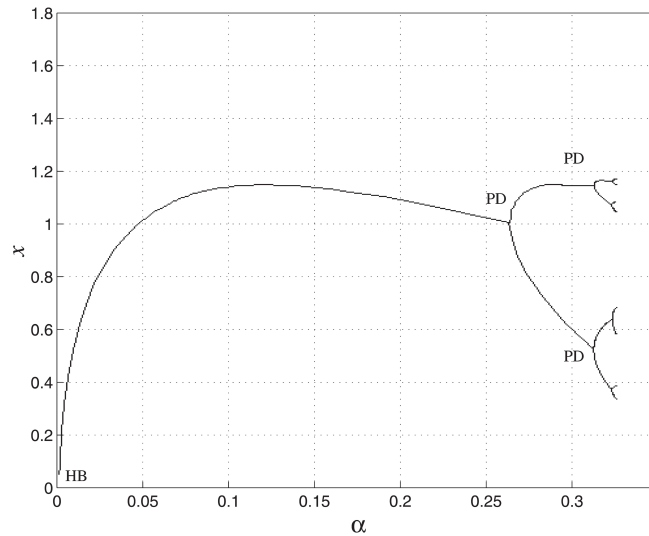


Figura 3.14: Curva de continuación de soluciones periódicas en el sistema de Sprott.

obtiene la siguiente secuencia que converge a la constante de Feigenbaum

$$\delta_1 = 3,503181, \quad \delta_2 = 4,569096, \quad \delta_3 = 4,637122.$$

y al atractor caótico se muestra en la Fig. 3.13(b).

Ejemplo 17 . Sistema de Sprott. De los sistemas caóticos descubiertos por Sprott, consideraremos el siguiente

$$\dot{x} = \alpha x + z,$$

$$\dot{y} = xz - y,$$

$$\dot{z} = -x + y.$$

Aquí α es el parámetro principal. Se construyó la curva de continuación (Fig. 3.14) para observar la ruta de doble período hallándose los siguientes valores críticos $\alpha_2 =$

0,2644273, $\alpha_4 = 0,3136389$, $\alpha_8 = 0,3244517$, $\alpha_{16} = 0,3267759$, y $\alpha_{32} = 0,3272732$,
obteniéndose las siguientes estimaciones de la constante de Feigenbaum

$$\delta_1 = 4,551235, \quad \delta_2 = 4,652267, \quad \delta_3 = 4,673638.$$

3.6. Apéndice del capítulo

La variedad centro en el ejemplo de Rand ha sido aproximada por la siguiente función:

$$h(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^4 + exy^3 + fx^3y + gx^2y^2 + hy^4$$

donde:

$$a = \frac{2}{(1+2\mu)(5+4\mu+4\mu^2)}$$

$$b = -\frac{2}{5+4\mu+4\mu^2}$$

$$c = \frac{3+4\mu(1+\mu)}{(1+2\mu)(5+4\mu+4\mu^2)}$$

$$d = \frac{2(663+3688\mu+10796\mu^2+17784\mu^3+21248\mu^4+17248\mu^5+9472\mu^6+3584\mu^7)}{(1+2\mu)^2(1+4\mu)(5+4\mu+4\mu^2)^2(5+8\mu+16\mu^2)(17+8\mu+16\mu^2)}$$

$$e = \frac{8(68+77\mu+89\mu^2+238\mu^3+308\mu^4+328\mu^5+256\mu^6+128\mu^7)}{(1+2\mu)^2(5+4\mu+4\mu^2)^2(5+8\mu+16\mu^2)(17+8\mu+16\mu^2)}$$

$$f = -\frac{4(-51+457\mu+1784\mu^2+3432\mu^3+4480\mu^4+3632\mu^5+2176\mu^6+768\mu^7)}{(1+2\mu)^2(5+4\mu+4\mu^2)^2(5+8\mu+16\mu^2)(17+8\mu+16\mu^2)}$$

$$g = \frac{323+706\mu+1464\mu^2+2672\mu^3+3056\mu^4+2464\mu^5+1536\mu^6+512\mu^7}{(1+2\mu)^2(1+4\mu)(5+4\mu+4\mu^2)^2(17+8\mu+16\mu^2)}$$

$$h = \frac{8(68+77\mu+89\mu^2+238\mu^3+308\mu^4+328\mu^5+256\mu^6+128\mu^7)}{(1+2\mu)^2(1+4\mu)(5+4\mu+4\mu^2)^2(5+8\mu+16\mu^2)(17+8\mu+16\mu^2)}$$

Capítulo 4

Síntesis de Sistemas Dinámicos

*Si la vida fuera una ecuación matemática,
nos faltarían letras en el abecedario
para representar las incógnitas.*

(Neteldi)

4.1. Introducción

En el campo de las ecuaciones diferenciales se han realizado progresos en estos últimos años con el objeto de estudiar diferentes configuraciones dinámicas cuando varían los parámetros del sistema. Dentro de estos progresos, sin lugar a dudas, uno de los más notorios consiste en representar en forma elemental ciertos fenómenos dinámicos a través de relaciones polinomiales entre sus variables. Esta descripción o síntesis de la dinámica de sistemas es posible (como se mostró en el capítulo 2) a través de la explicitación de la denominada “forma normal”, una relación polinómica entre las variables del sistema para describir los efectos típicos de la manera más sencilla, luego de realizar una serie de transformaciones al sistema original. Sin lugar a dudas, la implementación de algoritmos en forma de matemática simbólica, ha facilitado sintetizar la dinámica de los sistemas en sus “formas normales” y el estudio de los mismos de una manera analítica. Aunque es bien conocido que es imposible

en la gran mayoría de los sistemas diferenciales no lineales encontrar explícitamente sus trayectorias excepto, claro está, a través del uso de métodos numéricos.

Desde el ámbito algebraico, Bruno Buchberger (1970, 1995) formuló el concepto de bases de Groebner en la década del '70, extendiendo una sugerencia de su director W. Groebner. Buchberger encontró un algoritmo para computar dichas bases, y probó los teoremas fundamentales sobre los cuales se basa su teoría. Por muchos años la importancia de este trabajo no fue apreciada. Sólo en la década del '80 los investigadores en ciencias matemáticas y computacionales comenzaron a estudiar esta nueva teoría, al tiempo que se desarrollaron una amplia variedad de aplicaciones. Una de las razones fue la implementación de algoritmos con programas de matemática simbólica, como Mathematica, Maple, Reduce, etc. Las investigaciones en álgebra conmutativa se vieron beneficiadas aun más con los sistemas especializados de álgebra computacional como CoCoA, Macaulay y Singular. En la década del '90 esta disciplina tomó un lugar independiente, lo que inspiró la aparición de nuevos textos, como (Cox *et al.*, 1992) por ejemplo. El interés por las aplicaciones del álgebra también apareció en la teoría de sistemas y de control (Fortell, 1995; Jirstrand, 1996; y Alwash, 1996; por citar algunos).

En este capítulo se propone el diseño de sistemas dinámicos, es decir hallar un sistema diferencial que tiene una trayectoria deseada, haciendo uso del algoritmo que calcula las bases de Groebner, se basa en el trabajo (Calandrini *et al.*, 2003). Es claro que la naturaleza polinomial de las “formas normales” que caracterizan la dinámica de sistemas junto con las operaciones de las bases de Groebner son elementos que están muy relacionados como se muestra en (Gattermann y Lauterbach, 1998).

4.2. Síntesis

El estudio de sistemas dinámicos no lineales desde los tiempos de Lyapunov y Poincaré se enfocó principalmente desde el punto de vista de análisis y control. Dado un sistema dinámico, y una descripción cualitativa del comportamiento dinámico

requerido para ese sistema, se diseña la ley de control para modificar dicho comportamiento y poder cumplir los requisitos. Ésta es una forma de realizar síntesis de sistemas no lineales, al diseñar una ley de control como se muestra en (Pilishkin, 2001). Allí se construyen leyes de control robustas para diferentes clases de sistemas no lineales; éste tipo de síntesis se realizará en las secciones finales del capítulo. Síntesis, desde otro punto de vista es en cierto modo el “proceso inverso”: la meta es encontrar un sistema dinámico que cumpla ciertas especificaciones de diseño. Los métodos de síntesis para sistemas no lineales no son sencillos, ya que este tipo de sistema encierra una amplia variedad de fenómenos dinámicos. Existen pocos métodos generales, y algunos trabajos realizados en este tema son (Chua, 1992), en conexión al circuito de Chua, diseño que presenta una conducta dinámica caótica; (Genesio *et al.*, 1995) donde se presenta un método para el diseño de sistemas con una bifurcación de ciclos límites prescrita; (Elwakil y Kennedy, 2001) para construir circuitos caóticos mediante datos experimentales.

En (Brown y Chua, 1993) se presenta un método constructivo para mapas de Poincaré. La base de su teoría radica en la irreducibilidad de un mapa no lineal, es decir en un mapa que no puede construirse de manera más simple. Estos mapas pueden implementarse con circuitos electrónicos y la composición de dos o más mapas irreducibles puede producir caos y muchos de los complejos efectos no lineales. En el trabajo mencionado se provee una base matemática para la construcción de una amplia variedad de sistemas a partir de un mapa. Posteriormente, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales cuyo mapa de Poincaré es el mapa dado. Estas ecuaciones diferenciales pueden sintetizarse con circuitos electrónicos con el fin de generar la dinámica buscada.

El punto de partida de cualquier procedimiento de síntesis es un conjunto dado de “especificaciones de diseño”. A partir de éstas, se debe obtener un conjunto de relaciones entre las variables y sus derivadas temporales; en este capítulo se considera que estas relaciones toman la forma de polinomios en varias variables y sus derivadas de primer orden. En el caso más simple de polinomios lineales, se

pueden usar técnicas conocidas de álgebra lineal como el método de eliminación de Gauss, para expresar algún conjunto de variables (normalmente las derivadas) como funciones de otro conjunto (disjunto). En una escena más general, técnicas más poderosas tales como el cálculo de las bases de Groebner pueden ser ampliamente aprovechadas para alcanzar resultados similares.

En la siguiente sección la “especificación de diseño” es la ecuación paramétrica de una trayectoria en \mathbb{R}^n . El propósito es desarrollar un algoritmo para obtener un conjunto de por lo menos n ecuaciones diferenciales tales que una de sus soluciones sea la trayectoria propuesta. Hacia el final del capítulo se sintetizará la ley de control de un péndulo invertido

4.3. Síntesis y estabilidad orbital

El proceso de síntesis que se realizará es el de diseño de un sistema autónomo, $\dot{x} = f(x)$, que tenga una solución deseada $x = x_d(t)$ y que esta solución sea orbitalmente asintóticamente estable. Con esto se quiere decir que la solución define una trayectoria u órbita deseada, que es la imagen de $x_d(t)$ en el espacio de estados, es decir el conjunto

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_d(t), t \geq 0\}.$$

Este es un conjunto positivamente invariante, donde la dinámica está dada por la restricción de $f(\cdot)$ al conjunto γ , y está determinada por la derivada temporal de la solución $\dot{x}_d(t) = f(x_d(t))$. En otras palabras, toda solución que tenga una condición inicial en γ permanecerá en este conjunto para todo $t \geq 0$. Además se pretende que esta órbita sea *asintóticamente estable*, que según la definición del Capítulo 1, se desea que toda solución permanezca en un entorno ε de γ , arbitrariamente pequeño, siempre que la condición inicial esté dentro de un entorno $\delta(\varepsilon)$, y que la distancia entre la solución y el conjunto γ tienda a cero cuando t tiende a infinito.

Son muchas las posibilidades de especificar dinámicas y conjuntos invariantes. Una forma es a través de la parametrización temporal de la solución $x_d(t)$, otra forma es representar a este conjunto invariante deseado y su dinámica, con un conjunto de polinomios que formen una base de Groebner como se describe en este capítulo, basado en el trabajo de (Berns *et al.*, 2001) en síntesis de osciladores.

El proceso de síntesis se realizará en dos etapas. En la primera se convierten las especificaciones expresadas en forma paramétrica a una relación algebraica, donde el resultado es precisamente un conjunto de polinomios asociado al conjunto invariante planteando la eliminación de la dependencia temporal (la variable t , o funciones auxiliares de t) sobre el conjunto de polinomios que determinan $x_d(t)$ y $\dot{x}_d(t)$. En la segunda etapa se diseña un sistema con la consideración que la órbita sea asintóticamente estable.

4.3.1. Primera etapa. Conjunto invariante algebraico.

En esta primera parte de la metodología se tienen en cuenta dos casos: *parametrización directa*, cuando la trayectoria puede ser parametrizada como una función de un solo parámetro t (normalmente el tiempo); y *parametrización indirecta*, cuando la trayectoria depende de dos o más parámetros. Esto último es útil cuando la trayectoria deseada no está dada como una función polinómica de t , sino que depende de funciones auxiliares de t . En este caso se debe reformular la trayectoria en el espacio de parámetros auxiliares, y también la conducta dinámica de estos parámetros auxiliares (sus derivadas temporales). En lo que sigue se considera que los coeficientes de los polinomios están en un cuerpo que llamamos k , que puede ser \mathbb{Q} , o funciones racionales de parámetros de diseño. Si bien teóricamente los coeficientes podrían ser reales, la implementación computacional hace que se trabaje con números racionales. Cuando se trabaja con coeficientes en un cuerpo de funciones racionales en ciertos parámetros de diseño, como por ejemplo $\mathbb{Q}(a, b)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$, se supone que las variables abstractas a y b , son algebraicamente independientes. En la prác-

tica, al finalizar el diseño, estos parámetros tendrán valores específicos, cuando se realiza tal sustitución en el cuerpo de los coeficientes se dice que se ha realizado una *especialización*. Luego de hacer el reemplazo de los parámetros, los polinomios del ideal del sistema estarán en el anillo $\mathbb{Q}[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$, hay que ver si tal especialización afecta o no las bases de Groebner, es decir si se anula algún denominador de los coeficientes o el coeficiente principal de algún polinomio de la base. Existen métodos para encontrar todas las distintas bases de Groebner reducidas para todos los posibles valores de parámetros, ver (Montes, 2002; Weispfenning, 2006). Aunque también se puede analizar en forma particular cada uno de los casos singulares.

Se proponen los siguientes algoritmos para la primera etapa de síntesis:

Parametrización directa

1. Expresar la dinámica deseada (i.e., la ecuación paramétrica de una curva en \mathbb{R}^n) $x_i = f_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, donde $f_i \in k[t]$; definir las variables $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$ y los polinomios $d_i(t) \equiv df_i(t)/dt$. Claramente, $d_i \in k[t]$.
2. Considerar el sistema de ecuaciones

$$x_i - f_i = 0,$$

$$\dot{x}_i - d_i = 0,$$

con $1 \leq i \leq n$, usando el ordenamiento *Lex*, $t > \dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n > x_1 > \dots > x_n$, encontrar una base de Groebner G con el fin de eliminar t en el ideal $I = \langle x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n, \dot{x}_1 - d_1, \dots, \dot{x}_n - d_n \rangle$.

3. Considerar el subconjunto de polinomios $G_e = G \cap k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$, dentro del conjunto de polinomios de la base G correspondiente a la eliminación de la variable o parámetro t . Este conjunto es una base para el ideal de eliminación $I_e = I \cap k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$, y puede expresarse como unión de dos subconjuntos $G_e = G_1 \cup G_2$, con $G_1 = G_e \cap k[x_1, \dots, x_n]$. Los

polinomios de G_1 no dependen de las variables \dot{x}_i , y $\mathbf{Var}(G_1)$ determina en forma implícita la trayectoria en el espacio de estados.

El resultado de este algoritmo es G_e , un conjunto generador de un ideal de una familia sistemas dinámicos. Todos los sistemas de esta familia tienen como una de sus soluciones posibles la variedad $\mathbf{Var}(G_1)$, con la dinámica deseada.

El planteo realizado corresponde al problema algebraico de *implicitación* que es avalado por los teoremas de *Eliminación* y de *Extensión*. Este último asegura cuándo una solución del sistema (parcial) de la eliminación es también solución del sistema original (completo)

De acuerdo al Teorema de Extensión y su corolario, las soluciones de estos ideales de eliminación pueden extenderse a las soluciones del ideal I , porque el conjunto de polinomios generadores es lineal en \dot{x}_i y los coeficientes de los monomios que contienen t son constantes. El conjunto G_e es generador de un ideal que tiene como solución común la trayectoria deseada. Por consiguiente, todo conjunto de polinomios del ideal $\langle G_e \rangle$ comparte esta solución. De esta manera, pueden elegirse n elementos de $\langle G_e \rangle$, algebraicamente independientes, para construir uno de los posibles sistemas dinámicos que tiene la trayectoria deseada como solución.

Parametrización indirecta

En este caso, las ecuaciones paramétricas de la curva en \mathbb{R}^n que describen la solución deseada no son polinomios en el parámetro t , pero dependen de r parámetros auxiliares variantes en el tiempo $v_i(t)$, $1 \leq i \leq r$, *i.e.*, $x_i - f_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, con $f_i \in k[v_1, \dots, v_r]$. Estos parámetros describen una curva en el espacio de *parámetros*, dada en forma implícita por el sistema de s ecuaciones polinómicas $e_i = 0$, $1 \leq i \leq s$, con $e_i \in k[v_1, \dots, v_r]$, que son solución del sistema diferencial de ecuaciones $dv_i/dt = h_i$, $1 \leq i \leq r$, con $h_i \in k[v_1, \dots, v_r]$. Es importante notar que v_i puede no conocerse

como función del tiempo; sólo se necesitan e_i y h_i , pues

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial v_i} h_i \equiv d_i,$$

donde $d_i \in k[v_1, \dots, v_r]$. Por lo tanto, los pasos requeridos son los siguientes:

1. Reformular la solución deseada en términos de los parámetros auxiliares v_i , $1 \leq i \leq r$.
2. Considerar el sistema de ecuaciones polinómicas

$$x_i - f_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\dot{x}_i - d_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$e_i = 0, \quad 1 \leq i \leq s,$$

para eliminar v_i , usando el ordenamiento $Lex v_1 > \dots > v_r > \dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n > x_1 > \dots > x_n$. encontrar una base de Groebner G para el ideal $I = \langle x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n, \dot{x}_1 - d_1, \dots, \dot{x}_n - d_n, e_1, \dots, e_s \rangle$.

3. Considerar el subconjunto $G_e \subset G$, $G_e \in k[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n]$, correspondiente a la eliminación de las variables v_i .

Como en el caso anterior, G_e es un conjunto generador de una familia de sistemas dinámicos que tienen la trayectoria deseada como solución.

Generando sistemas

En los dos procedimientos anteriores se obtuvo una base de Groebner G_e del ideal resultante de haber eliminado los parámetros utilizados para expresar el conjunto invariante u órbita deseada. Sin lugar a dudas, son muchas las posibilidades de generar sistemas a partir de este conjunto, pero se desea obtener un conjunto de polinomios en el ideal $\langle G_e \rangle$, que genere el ideal de un sistema dinámico, como se

representó en el Capítulo 1, donde su base de Groebner en el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$ tiene n polinomios y sus monomios líderes son \dot{x}_i , $i = 1, \dots, n$. Por ejemplo, si $G_e = G_1 \cup G_2$,

$$G_1 = \{p_1, \dots, p_s\},$$

$$G_2 = \{q_1, \dots, q_n\} = \{q_{11}\dot{x}_1 - q_{10}, \dots, q_{n1}\dot{x}_n - q_{n0}\},$$

donde $p_j, q_{i0}, q_{i1} \in k[x_1, \dots, x_n]$ $j = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, n$.

Sea A el conjunto de las siguientes n combinaciones de polinomios:

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j + \sum_{j=1}^s b_{ij}p_j, \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

donde a_{ij} y b_{ij} son polinomios en el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$. El conjunto A está contenido en el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$. El sistema a diseñar puede representarse por una base de Groebner S , para el ideal $\Sigma = \langle A \rangle = \langle S \rangle$, los polinomios a_{ij} y b_{ij} , deben elegirse adecuadamente y con algún criterio, como puede ser la estabilidad, que se tendrá en cuenta en la segunda etapa, y además se desea que los monomios líderes de S sean simplemente las variables \dot{x}_i , $i = 1, \dots, n$. Hay que tener en cuenta además, que al trabajar con coeficientes con funciones racionales, los coeficientes líderes no pueden anularse, o habría que restringir del espacio de estados los puntos que anulen los coeficientes líderes de S , pues dejaría de ser una base de Groebner. Se mostrará mejor en los siguiente ejemplos.

Ejemplo 18 . Un sistema oscilatorio simple. El primer ejemplo es muy sencillo ya que se desea un sistema oscilatorio con salida senoidal de frecuencia ω , que puede representarse en el plano de fase por una trayectoria circular en \mathbb{R}^2

$$x_1 = r \cos(\omega t), \quad x_2 = r \sin(\omega t), \quad (4.1)$$

con $r > 0$ y ω como parámetros de diseño. Claramente esta curva no es una función polinómica de t , pero puede expresarse algebraicamente si se introducen los parámetros auxiliares $v_1 = \cos(\omega t)$ y $v_2 = \sin(\omega t)$. Estos parámetros permanecen en la variedad $1 - (v_1^2 + v_2^2) = 0$, y sus derivadas temporales verifican $dv_1/dt = -\omega v_2$ y $dv_2/dt = \omega v_1$. Definiendo $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, $i = 1, 2$, según el procedimiento descrito en la sección anterior (parametrización indirecta), la trayectoria (4.1) puede asociarse al conjunto de polinomios

$$S = \{x_1 - r v_1, x_2 - r v_2, 1 - v_1^2 - v_2^2, \\ \dot{x}_1 + \omega r v_2, \dot{x}_2 - \omega r v_1\},$$

contenido en $k[x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, v_1, v_2]$, donde k es el cuerpo de funciones racionales en r y ω con coeficientes en \mathbb{Q} (podría ser también en \mathbb{R}). Una base de Groebner para S , usando el ordenamiento $v_1 > v_2 > \dot{x}_2 > \dot{x}_1 > x_2 > x_1$ (para eliminar v_1 y v_2), está dada por $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, con

$$g_1 = p_1 = -r^2 + x_1^2 + x_2^2, \quad g_4 = -x_2 + r v_2, \\ g_2 = q_1 = \dot{x}_1 + \omega x_2, \quad g_5 = x_1 - r v_1. \\ g_3 = q_2 = \dot{x}_2 - \omega x_1,$$

El conjunto $G_e = \{g_1, g_2, g_3\} = \{p_1, q_1, q_2\}$ es la base de Groebner del ideal donde se han eliminado los parámetros v_1 y v_2 . Es además, un conjunto generador de sistemas dinámicos algebraicos que comparten una solución como (4.1). Tomando g_2 y g_3 se obtienen un sistema dinámico lineal, que con seguridad tiene como solución a (4.1) pues el origen es un centro. Otra posible elección es la combinación de polinomios $(\alpha x_1 + (\omega - \beta) x_2) \cdot p_1 + r^2 \cdot q_1$ y $(\alpha x_2 - (\omega - \beta) x_1) \cdot p_1 + r^2 \cdot q_2$. El sistema dinámico resultante muestra la estructura de la forma normal de un ciclo límite

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 + (\sigma x_1 - \varphi x_2) (x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + (\varphi x_1 + \sigma x_2) (x_1^2 + x_2^2),$$

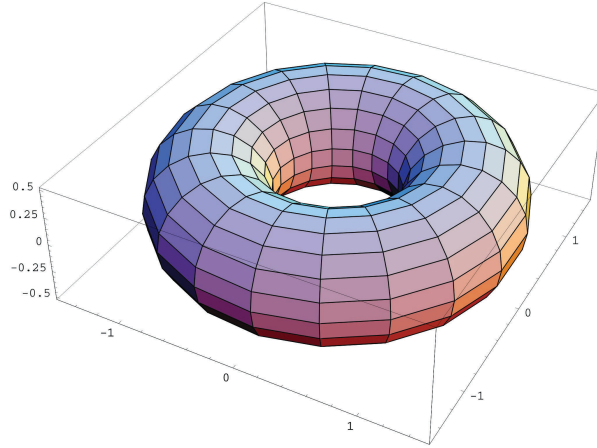


Figura 4.1: Superficie con forma toroidal

donde $\sigma = -\alpha/r^2$ y $\varphi = (\omega - \beta)/r^2$. El coeficiente σ también se conoce como el primer coeficiente de Hopf como se definió en el Capítulo 2.

Ejemplo 19 . Oscilador de dimensión 3. Las ecuaciones paramétricas de una superficie con forma toroidal, Fig. 4.1, son

$$\begin{aligned} x_1 &= (r_1 + r_2 \cos(t_2)) \cos(t_1), \\ x_2 &= (r_1 + r_2 \cos(t_2)) \sin(t_1), \\ x_3 &= r_2 \sin(t_2), \end{aligned} \tag{4.2}$$

con t_1 y t_2 pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi]$. Se realizarán dos diseños, uno donde el atractor es todo el toro, y el otro donde el atractor es una órbita periódica con dos frecuencias, una el doble de la otra. En este último caso $t_1 = \omega t$, $t_2 = (\omega/2) t$. Como en el ejemplo previo, usando los parámetros auxiliares $v_1 = \cos(\omega t/2)$, $v_2 = \sin(\omega t/2)$ se puede encontrar que $\cos(\omega t) = v_1^2 - v_2^2$, $\sin(\omega t) = 2v_1v_2$. Reemplazando

en (4.2),

$$x_1 = (r_1 + r_2 v_1) (v_1^2 - v_2^2),$$

$$x_2 = 2(r_1 + r_2 v_1) v_1 v_2,$$

$$x_3 = r_2 v_2,$$

y los parámetros permanecen en la variedad $1 - (v_1^2 + v_2^2) = 0$, y sus derivadas temporales verifican $dv_1/dt = -\omega v_2/2$ y $dv_2/dt = \omega v_1/2$. Definiendo $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, $i = 1, 2, 3$, el sistema de polinomios asociado es

$$\{x_1 - (r_1 + r_2 v_1) (v_1^2 - v_2^2),$$

$$x_2 - (r_1 + r_2 v_1) 2v_1 v_2,$$

$$x_3 - r_2 v_2,$$

$$\dot{x}_1 - (-2\omega r_1 v_1 v_2 - \frac{5}{2}\omega r_2 v_1^2 v_2 + \frac{1}{2}\omega r_2 v_2^3),$$

$$\dot{x}_2 - (\omega r_1 v_1^2 + \omega r_2 v_1^3 - \omega r_1 v_2^2 - 2\omega r_2 v_1 v_2^2),$$

$$\dot{x}_3 - (\frac{1}{2}r_2 v_1),$$

$$1 - (v_1^2 + v_2^2)\}.$$

Eligiendo el ordenamiento $v_1 > v_2 > \dot{x}_3 > \dot{x}_2 > \dot{x}_1 > x_3 > x_2 > x_1$ (para eliminar v_1 y v_2), y fijando $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $\omega = 1$, obtenemos la base de Groebner $G = \{g_1, \dots, g_{10}\}$, (ver apéndice del capítulo) donde $G_1 = \{g_1, \dots, g_5\} \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ da las ecuaciones en forma implícita de la órbita, $\mathbf{Var}(G_1) \subset \mathbb{R}^3$, y $G_2 = \{g_6, g_7, g_8\}$ da las relaciones dinámicas entre las variables y sus derivadas. Nuevamente, una combinación de los polinomios de G_2 definen un sistema dinámico con una órbita como (4.2); eligiendo

por simplicidad $g_6 = g_7 = g_8 = 0$ se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{32} (169 x_2 - 24 x_1 x_2 - 208 x_1^2 x_2 + \\ & 64 x_1^4 x_2 - 208 x_2^3 + 128 x_1^2 x_2^3 + \\ & 64 x_2^5 + 112 x_3 + 120 x_1 x_3 - 8 x_1^2 x_3), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2} (6 - 6 x_1 - 18 x_1^2 + 8 x_1^4 - 18 x_2^2 + \\ & 16 x_1^2 x_2^2 + 8 x_2^4 + x_2 x_3), \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{30} (15 - 3 x_1 - 26 x_1^2 + 8 x_1^4 - \\ & 26 x_2^2 + 16 x_1^2 x_2^2 + 8 x_2^4 + x_2 x_3).\end{aligned}$$

Este último ejemplo sugiere dos consideraciones. Una es que previo al cálculo de la base se han dado los valores a los parámetros. La incógnita que surge es si se obtiene el mismo resultado si se procede en orden inverso, calculando primero la base y luego realizando la especialización. La respuesta es afirmativa si la elección de parámetros no anula alguno de los denominadores de los coeficientes de los polinomios de la base. Es decir si se elige una especialización que no anule los denominadores, la base de Groebner calculada sobre el cuerpo de funciones racionales es la misma que la de la especialización, (Cox *et al.*, 1992).

El otro punto que debe considerarse es si son realmente necesarios los 5 polinomios de G_1 para expresar en forma implícita la trayectoria. La respuesta es no. Puede ser menor la cantidad de polinomios generadores que la cantidad de polinomios de una base de Groebner. Para saber que genera el mismo ideal podemos calcular una base para un conjunto de polinomios generadores menor y observar que se obtiene la misma base, por ejemplo podemos ver que $\langle \{g_3, g_4, g_5\} \rangle = \langle G_1 \rangle$, pues tienen la misma base (que es G_1), por lo tanto $\mathbf{Var}(G_1) = \mathbf{Var}(\{g_3, g_4, g_5\})$,

es decir se puede describir en forma implícita la trayectoria con las ecuaciones $g_3 = g_4 = g_5 = 0$.

Ejemplo 20 En este segundo diseño las dos frecuencias angulares t_1 y t_2 del toro (4.2) son independientes, por lo tanto se necesitan cuatro parámetros auxiliares $v_1 = \cos t_1$, $v_2 = \sin t_1$, $v_3 = \cos t_2$, y $v_4 = \sin t_2$ que permanecen en la variedad $1 - (v_1^2 + v_2^2) = 1 - (v_3^2 + v_4^2) = 0$, con una dinámica que corresponde a dos frecuencias independientes $dv_1/dt = -\omega_1 v_2$, $dv_2/dt = \omega_1 v_1$, $dv_3/dt = -\omega_2 v_4$, $dv_4/dt = \omega_2 v_3$. Definiendo $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, $i = 1, 2, 3$, el sistema de polinomios asociados es

$$\begin{aligned} & \{ x_1 - (r_1 + r_2 v_3) v_1, \\ & x_2 - (r_1 + r_2 v_3) v_2, \\ & x_3 - r_2 v_4, \\ & \dot{x}_1 - \omega_1 (r_1 + r_2 v_3) v_2 - \omega_2 r_2 v_1 v_4, \\ & \dot{x}_2 + \omega_1 (r_1 + r_2 v_3) v_1 - \omega_2 r_2 v_2 v_4, \\ & \dot{x}_3 + \omega_2 r_2 v_3, \\ & 1 - (v_1^2 + v_2^2), \\ & 1 - (v_3^2 + v_4^2) \}. \end{aligned}$$

Elijiendo el ordenamiento $v_4 > v_3 > v_2 > v_1 > \dot{x}_3 > \dot{x}_2 > \dot{x}_1 > x_3 > x_2 > x_1$ (para eliminar v_1, v_2, v_3 y v_4), se obtiene la base de Groebner $G = \{g_1, \dots, g_{12}\}$ donde $G_1 = \{g_1\}$ y $G_2 = \{g_2, \dots, g_8\}$, por lo tanto

$$g_1 = (r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4r_2^2(r_1^2 + x_3^2) = 0$$

es la ecuación en forma implícita del toro invariante. En cambio en $G_2 = \{g_2, \dots, g_8\}$ se obtienen 6 polinomios para determinar la dinámica sobre el toro, de los que habría que elegir 3 algebraicamente independientes. Para reducir la cantidad de polinomios de la base es más práctico proceder de la siguiente manera dado que $G_1 = \{g_1\} \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, las variables x_1 y x_2 son algebraicamente independientes y actúan algebraicamente como parámetros. Teniendo esto en cuenta, se puede calcular una base de Groebner en el anillo $\mathbb{R}(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2, x_1, x_2)[x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, v_1, v_2, v_3, v_4]$ que resulta de menor dimensión (ver apéndice del capítulo) y haciendo $g_2 = g_3 = g_4 = 0$ se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_1 x_2 + \omega_2 x_1 x_3 + \frac{\omega_2 x_1}{2r_1(x_1^2 + x_2^2)} x_3 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2), \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 x_3 + \frac{\omega_2 x_2}{2r_1(x_1^2 + x_2^2)} x_3 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2), \\ \dot{x}_3 &= \frac{\omega_2}{2r_1} (r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2),\end{aligned}$$

se observa un problema de indefinición sobre todo el eje vertical $x_1 = x_2 = 0$, aunque es claro que estos puntos no pertenecen al conjunto invariante. También se puede obtener otra base en el anillo $\mathbb{R}(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2, x_2, x_3)[x_1, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, v_1, v_2, v_3, v_4]$, del mismo modo haciendo $g_2 = g_3 = g_4 = 0$ se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_1 x_2 - \frac{\omega_2 x_3}{2r_1} x_1 - \frac{\omega_2 x_3}{2r_1(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)} x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 4r_1^2) \\ \dot{x}_2 &= \omega_1 x_1 - \frac{\omega_2 x_3}{2r_1} x_2 - \frac{\omega_2 x_3}{2r_1(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)} x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 4r_1^2) \\ \dot{x}_3 &= \frac{\omega_2}{2r_1} (r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\end{aligned}$$

en este caso el sistema queda bien definido sobre todo el espacio \mathbb{R}^3 , pues $r_1 > r_2 > 0$ y por lo tanto $r_1^2 - r_2^2 + x_3^2$ es siempre positivo.

4.3.2. Segunda etapa. Estabilidad del conjunto invariante

En la etapa anterior se mostró un procedimiento donde a partir de una trayectoria expresada en forma paramétrica se obtenía un sistema dinámico. Ahora el diseño incorpora la estabilidad de esta trayectoria. Para analizar la estabilidad del conjunto invariante se utilizará la teoría de Lyapunov, y en particular el teorema de LaSalle. Como se vio en el Capítulo 1, se considera una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ sobre un conjunto $\Omega \subset D$, el cual es un conjunto compacto, positivamente invariante con respecto a un sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$ y sea M el mayor conjunto invariante en E ; entonces toda solución de este sistema que comience en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

En este teorema no se requiere que la función $V(x)$ sea positiva definida; tampoco el conjunto Ω está directamente relacionado con la función $V(x)$. Sin embargo, se puede garantizar la existencia del conjunto Ω considerando los conjuntos delimitados por las curvas de nivel de $V(x)$. En particular si $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ es una región acotada y $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω_c , entonces se puede elegir $\Omega = \Omega_c$.

Procedimiento de síntesis

El proceso de diseño se plantea a partir de conocer un conjunto invariante y su dinámica, expresado con un conjunto de polinomios que representa en forma implícita una órbita en el espacio de estados y otro conjunto de polinomios que define la dinámica sobre esta órbita como el resultado obtenido en la etapa anterior. La unión de estos dos conjuntos forman una base de Groebner $S_I = G_e = G_1 \cup G_2$,

$$G_1 = \{p_1, \dots, p_s\},$$

$$G_2 = \{q_1, \dots, q_n\},$$

donde $q_i = q_{i1}\dot{x}_1 - q_{i0}$, y $p_j, q_{i0}, q_{i1} \in k[x_1, \dots, x_n]$ para $j = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, n$.

Esta base genera un ideal de polinomios Σ_I . Este ideal contiene polinomios que representan relaciones dinámicas correspondientes a diferentes ecuaciones de estados, las cuales tienen la órbita deseada como una de sus posibles soluciones.

El objetivo seguido en esta sección es diseñar un sistema que tenga esta órbita, y que además tenga la propiedad de ser un conjunto límite estable del sistema. Es decir que toda trayectoria que comience en un entorno de la órbita tienda hacia ésta cuando t tiende a infinito. Los polinomios que generan el sistema pueden estar en el ideal Σ_I , es decir ser combinaciones algebraicas de los polinomios de la base S_I puesto que deben anularse sobre la órbita deseada. Para ser más específicos consideremos las siguientes n combinaciones de polinomios:

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j + \sum_{j=1}^s b_{ij}p_j, \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

donde a_{ij} y b_{ij} son coeficientes a determinar luego como polinomios en el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$. Por lo tanto, el anillo $k(a_{ij}, b_{ij}, x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$ contiene al conjunto A . El sistema a diseñar puede representarse por una base de Groebner S , para el ideal $\Sigma = \langle A \rangle = \langle S \rangle$ como se mencionó en la sección previa. Los coeficientes a_{ij} y b_{ij} se obtienen al definir la dinámica en el exterior de la órbita. A tal fin se construye una función positiva semidefinida, que sea nula sobre los puntos de la órbita, y positiva en el resto del espacio. Una de tales funciones es el polinomio

$$V = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_s^2,$$

en el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$, pues esta función tiene un mínimo que vale cero sobre toda la órbita. Para aplicar luego el teorema de LaSalle, debemos fijar la dinámica de V , de tal manera que sea negativa semidefinida. El polinomio $\dot{V} = \Delta V \cdot (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^\top$ se anulará en aquellos puntos que verifiquen una de las siguientes condiciones

- $\Delta V = 0$ (el gradiente de V es nulo),
- puntos de equilibrio,

- donde el gradiente es normal a la trayectoria.

Para propósitos de diseño los últimos dos casos no se consideran, puesto que reducen la base de atracción de la órbita. Con respecto al primer caso, éste ocurre sobre la órbita, dado que allí tiene un mínimo, pero pueden existir otros puntos que satisfagan esta condición. Para encontrarlos puede considerarse el conjunto de polinomios $D = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, zV - 1 \right\}$ compuesto por las componentes del gradiente y un polinomio adicional $zV - 1$ en la variable auxiliar z que descarta la solución $V = 0$. Sea $\{d_1, \dots, d_m\}$ la base de Groebner para $\langle D \rangle \cap k[x_1, \dots, x_n]$, donde el ordenamiento monomial se elige para eliminar la variable z . La variedad afín de este conjunto de polinomios comprende únicamente puntos donde el gradiente es nulo y excluye cualquier punto de la órbita, puesto que los puntos que verifican $V = 0$ no pertenecen a la variedad $Var(D)$ debido a la inclusión del polinomio $zV - 1$, implicando que $V \notin \langle D \rangle \cap k[x_1, \dots, x_n]$. Esta es una forma de resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones y desigualdades: $\frac{\partial V}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$, y $V \neq 0$. Por lo tanto la dinámica asociada a V puede expresarse

$$\dot{V} = -\alpha (d_1^2 + \dots + d_m^2) V$$

donde α es un polinomio positivo. Por simplicidad se considerará el caso donde α es un polinomio de grado cero, i.e. $0 < \alpha \in k$, un parámetro positivo de diseño. La función \dot{V} es negativa semidefinida, y toma el valor nulo en los puntos donde el gradiente es nulo. Por supuesto, esta elección de \dot{V} es arbitraria, y otras posibles opciones pueden ser elegidas, por ejemplo $\dot{V} = -(\alpha_1 d_1^2 + \dots + \alpha_m d_m^2) V$, donde los α_i son polinomios positivos arbitrarios, o bien $\dot{V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2$. El polinomio

$$p = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n + \alpha V (d_1^2 + \dots + d_m^2)$$

$$p = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n - \dot{V}$$

que expresa la dinámica deseada del sistema tiene que estar en el ideal del sistema de diseño Σ . De acuerdo al teorema del resto, el resto de p con respecto a S tiene que ser nulo, pues S es una base de Groebner de Σ . Se calcula el resto, y la anulaci3n de 3ste indica la relaci3n algebraica que deben tener los coeficientes indeterminados a_{ij} y b_{ij} . Se eligen adecuadamente de modo tal de anular el resto y no anular los coeficientes l3deres de S . De esta manera queda bien determinado el sistema buscado Σ , generado por la base de Groebner S .

An3lisis de estabilidad orbital Como se mencion3 anteriormente el an3lisis de la estabilidad orbital se realizar3 mediante el teorema de LaSalle. Por dise1o $\dot{V}(x) \leq 0$ en todo el espacio de estados, por lo tanto para cumplir las hip3tesis del teorema se debe encontrar un valor c , tal que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$, sea acotado y que el conjunto E de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$ est3 formado 3nicamente por los puntos en la 3rbita, es decir $E = M = \gamma$. Si la 3rbita es acotada, siempre se puede encontrar este valor c , lo suficientemente peque1o ya que V es una funci3n continua y se anula 3nicamente sobre un conjunto compacto que es la 3rbita γ . Finalmente, para garantizar que $E = \gamma$, se tiene que probar que si existe otra soluci3n donde $\dot{V}(x) = 0$, tiene que estar aislada de γ . De este modo la 3rbita es el 3nico conjunto invariante en E al que se aproxima toda soluci3n que comience en Ω .

Resumen del procedimiento de s3ntesis

Paso 1 Expresar las especificaciones con el conjunto de polinomios $S_I = G_1 \cup G_2$ donde S_I es una base de Groebner y

$$G_1 = \{p_1, \dots, p_s\}$$

$$G_2 = \{q_1, \dots, q_n\}$$

con $q_i = q_{i1}\dot{x}_1 - q_{i0}$, y $p_i, q_{i1}, q_{i0} \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Paso 2 Construir el conjunto

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + \sum_{j=1}^s b_{ij} p_j, 1 \leq i \leq n \right\},$$

y encontrar una base de Groebner S para $\langle A \rangle$ en el anillo

$$k(a_{ij}, b_{ij}, x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n].$$

Paso 3 Construir la función semidefinida positiva $V = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_s^2$.

Paso 4 Encontrar la base de Groebner $\{d_1, \dots, d_m\}$ del ideal de la eliminación de z ($z > x_1 > \dots > x_n$) en el ideal generado por $D = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, zV - 1 \right\}$, en el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$, *i.e.* $\langle D \rangle \cap k[x_1, \dots, x_n]$ y elegir convenientemente \dot{V} (*e.g.* $\dot{V} = -\alpha (d_1^2 + \dots + d_m^2) V$).

Paso 5 Calcular el resto del polinomio $p = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n - \dot{V}$ con respecto a S en el anillo $k(\alpha, a_{ij}, b_{ij}, x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$.

Paso 6 Elegir los coeficientes a_{ij} y b_{ij} tal que se anule el resto.

Paso 7 Reemplazar los coeficientes a_{ij} y b_{ij} en el conjunto S . El ideal generado por S es el sistema diseñado.

Paso 8 Finalizar si la órbita es acotada; si no, estudiar la estabilidad orbital resultante.

El resultado de este algoritmo es el conjunto S , donde $\langle S \rangle$ es el ideal del sistema diseñado con la órbita deseada.

Ejemplos

Ejemplo 21 Un ciclo límite en \mathbb{R}^2 . En este ejemplo el conjunto invariante es un ciclo límite definido por la variedad afín $p_1 = 0$ en \mathbb{R}^2 donde $p_1 = [x_1^2 - 8(x_2 - 3)]^2 +$

$512(x_2 - 3)$. La órbita deseada es el conjunto $\gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 = 0\}$.

Paso 1. El conjunto invariante y su dinámica son representados por el conjunto de polinomios $S_I = G_1 \cup G_2$, donde

$$G_1 = \{p_1\},$$

$$G_2 = \{q_1, q_2\},$$

con $q_1 = 8\dot{x}_1 - x_1^2 + 8(1 + x_2)$, $q_2 = 32\dot{x}_2 - x_1^3 + 8x_1(x_2 - 3)$.

El conjunto invariante puede ser verificado (como se definió algebraicamente en el capítulo 1) realizando el cociente entre el polinomio $\dot{p}_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_2}\dot{x}_2$ y la base $S_I = \{p_1, q_1, q_2\}$. Claramente, $\dot{p}_1 = (12x_1 + \frac{1}{2}x_1^3 - 4x_1x_2)q_1 + (4 - \frac{1}{2}x_1^2 + 4x_2)q_2$, esto significa que el resto es cero pues $\dot{p}_1 \in \langle S_I \rangle$.

Paso 2. La combinación de polinomios de S_I en el anillo $\mathbb{Q}(x_1, x_2)[\dot{x}_1, \dot{x}_2]$ da el conjunto generador del sistema a diseñar

$$A = \left\{ \begin{array}{l} 8\dot{x}_1 - x_1^2 + 8(1 + x_2) + \\ + a \{ [x_1^2 - 8(x_2 - 3)]^2 + 512(x_2 - 3) \}, \\ 32\dot{x}_2 - x_1^3 + 8x_1(x_2 - 3) + \\ + b \{ [x_1^2 - 8(x_2 - 3)]^2 + 512(x_2 - 3) \} \end{array} \right\},$$

donde $a, b \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ la base de Groebner S para $\langle A \rangle$ en el anillo $\mathbb{Q}(a, b, x_1, x_2)[\dot{x}_1, \dot{x}_2]$, correspondiente al ordenamiento $\dot{x}_1 > \dot{x}_2$ es $S = A$.

Paso 3. La función que se usará para definir la dinámica fuera de la órbita es $V = \{ [x_1^2 - 8(x_2 - 3)]^2 + 512(x_2 - 3) \}^2$.

Paso 4. El gradiente de esta función se anula sobre la órbita y también en la variedad definida por el conjunto de polinomios $D = \{x_1, x_2 + 1\}$. Además se fija la dinámica eligiendo $\dot{V} = -\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}^2 \right)$.

Paso 5. El resto de $p = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \dot{V}$ con respecto a S es

$$V\{b(x_1^2 - 8x_2 - 8) - ax_1(24 + x_1^2 - 8x_2) + \alpha 64[16(x_1^2 - 8x_2 - 8)^2 + x_1^2(24 + x_1^2 - 8x_2)^2]\}.$$

Paso 6. Este polinomio está en $\mathbb{Q}(a, b, x_1, x_2)[\dot{x}_1, \dot{x}_2]$ y es cero sobre γ , y también sobre el resto del plano x_1-x_2 si $a = 64\alpha x_1(24 + x_1^2 - 8x_2)$, $b = -1024\alpha(x_1^2 - 8x_2 - 8)$.

Paso 7. Reemplazando estos valores en S , se obtiene la base de Groebner del sistema diseñado. Este puede representarse de la siguiente manera en ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{8}(x_1^2 - 8 - 8x_2 - ap_1), \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{32}(x_1^3 - 8x_1x_2 + 24x_1 - bp_1). \end{aligned}$$

Paso 8. Con el fin de estudiar la estabilidad de la órbita, se ve fácilmente que el conjunto $\Omega_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid V \leq c\}$ es compacto para valores pequeños de c debido a la continuidad de V y que la órbita es acotada. Además la órbita γ es el único invariante contenido en Ω_c donde $\dot{V}(x) = 0$ (nótese que en el paso 4 se encontró otro punto $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ que es aislado de la órbita). De acuerdo al teorema de LaSalle la órbita es asintóticamente estable. La Fig. 4.2 muestra resultados de simulación que confirman que aún para valores pequeños del parámetro α ($\alpha = 5 \times 10^{-7}$), las trayectorias se aproximan rápidamente a la órbita deseada.

Ejemplo 22 Toro invariante. Como ejemplo se realiza el diseño de un sistema que tiene una órbita toro. Se eligen para describirlo dos formas: primero en coordenadas cilíndricas y luego en cartesianas. Las variables de estado son r , θ y z , con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. A modo de simplificación se considera que el ángulo θ no intervine en la dinámica de las otras dos variables, y se fija una dinámica de rotación $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$. Por lo tanto el diseño se restringe al plano $r-z$. En este plano el toro describe un

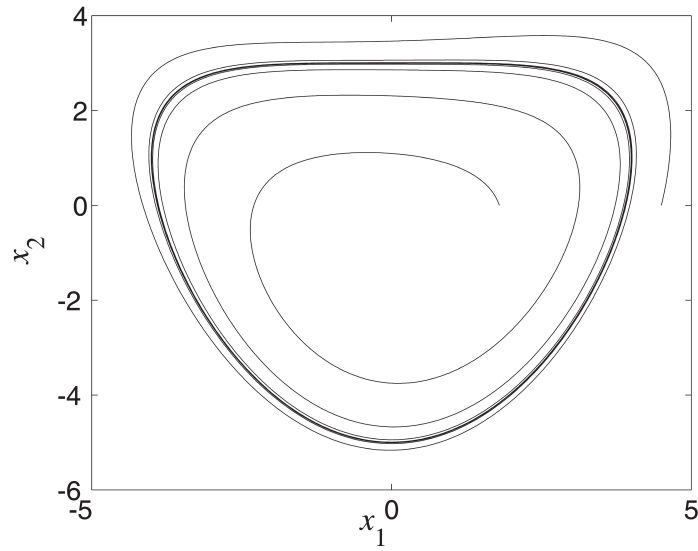


Figura 4.2: Ciclo límite del sistema diseñado.

círculo centrado en $r = r_0$ y $z = 0$, con un radio $\sqrt{r_2}$, $0 < r_2 < r_0$, y una velocidad angular constante ω_2 . La órbita deseada es $\gamma = \{(z, r) \in \mathbb{R}^2 \mid (r - r_0)^2 + z^2 - r_2 = 0\}$. Por lo tanto se tiene definido el invariante y su dinámica con el siguiente conjunto de polinomios:

$$S_I = \left\{ \begin{array}{l} (r - r_0)^2 + z^2 - r_2, \\ \dot{r} - \omega_2 z, \\ \dot{z} + \omega_2(r - r_0), \end{array} \right\}.$$

La combinación de estos polinomios da el conjunto generador del ideal del sistema a diseñar:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} - \omega_2 z + a((r - r_0)^2 + z^2 - r_2) + b(\dot{z} + \omega_2(r - r_0)), \\ \dot{z} + \omega_2(r - r_0) + c((r - r_0)^2 + z^2 - r_2) + d(\dot{r} - \omega_2 z), \end{array} \right\}.$$

La base de Groebner S para el ideal generado por A en el anillo $\mathbb{Q}(r, z)[\dot{z}, \dot{r}]$, corre-

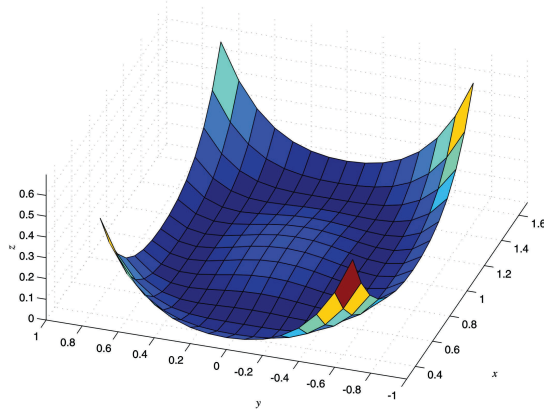


Figura 4.3: Función $V(r, z)$, semi-definida positiva que determina la dinámica fuera de la órbita

spondiente a $\dot{z} > \dot{r}$ es

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1 - bd)(\dot{r} - \omega_2 z) + (a - bc)((r - r_0)^2 + z^2 - r_2), \\ (1 - bd)(\dot{z} + \omega_2(r - r_0)) + (c - ad)((r - r_0)^2 + z^2 - r_2), \end{array} \right\}.$$

Para que la combinación de polinomios elegida sea algebraicamente independiente, se ve que $1 - bd \neq 0$.

La función que definirá la dinámica fuera de la órbita es:

$$V = ((r - r_0)^2 + z^2 - r_2)^2.$$

En la Fig. 4.3 se observa el gráfico de esta función que claramente es semidefinida positiva sobre el plano r - z , y se anula sobre la órbita γ .

El gradiente de esta función se anula sobre la órbita, y además en la variedad definida por el siguiente conjunto de polinomios

$$\{r - r_0, z\}.$$

Con estos polinomios, es posible fijar la dinámica en el exterior de la órbita haciendo

$$\dot{V} = -\alpha V ((r - r_0)^2 + z^2).$$

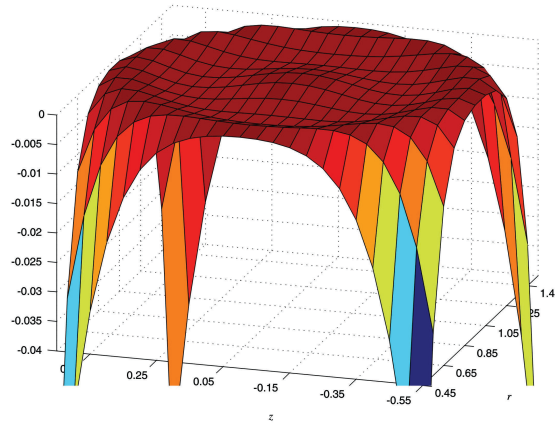


Figura 4.4: Derivada temporal de la función V , con $r_0 = 1$ y $r_2 = 0,5$.

En la Fig. 4.4 se observa \dot{V} y se ve que se anula sobre la órbita y además en el centro del círculo.

Finalmente, se calcula el resto con respecto a S de $\frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} + \alpha V ((r - r_0)^2 + z^2)$ que es:

$$\frac{V (4(a - bc)(r - r_0) + 4(c - ad)z + \alpha (bd - 1)((r - r_0)^2 + z^2))}{bd - 1}.$$

Este polinomio se anula sobre γ . Para anularlo en el resto del plano se pueden elegir los coeficientes:

$$a = \frac{\alpha}{4}(r - r_0)$$

$$c = \frac{\alpha}{4}z$$

$$b = d = 0.$$

Reemplazando en S se obtiene la base de Groebner que caracteriza al sistema dis-

añado:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} - \omega_2 z + \frac{\alpha}{4}(r - r_0)((r - r_0)^2 + z^2 - r_2), \\ \dot{z} + \omega_2(r - r_0) + \frac{\alpha}{4}z((r - r_0)^2 + z^2 - r_2) \end{array} \right\}.$$

Para el análisis de estabilidad de la órbita, el conjunto

$$\Omega = \{(z, r) \in \mathbb{R}^2 \mid ((r - r_0)^2 + z^2 - r_2)^2 \leq c\}$$

es compacto, y si se elige $c < r_2^2$, la órbita γ es el único invariante contenido en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$, en el resto $\dot{V}(x) < 0$ si $\alpha > 0$. Por el teorema de LaSalle, la órbita es asintóticamente estable. Se observa también que esta dinámica en el plano r - z , corresponde a la forma normal de un ciclo estable de radio $\sqrt{r_2}$. Finalmente la descripción en coordenadas cilíndricas del sistema con la órbita toro es:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{r} &= \omega_2 z - \frac{\alpha}{4}(r - r_0)((r - r_0)^2 + z^2 - r_2) \\ \dot{z} &= -\omega_2(r - r_0) - \frac{\alpha}{4}z((r - r_0)^2 + z^2 - r_2). \end{aligned}$$

En la Fig. 4.5 se observan evoluciones temporales de las variables cartesianas x - y - z , correspondientes a los parámetros de diseño $r_0 = 1$, $r_2 = 0,5$, $\omega = 1$, $\omega_2 = 0,5$ y $\alpha = 0,5$; y las condiciones iniciales $r(0) = 1$, $z(0) = 0,01$ y $\theta(0) = 0$; y en la Fig. 4.6 se muestra la órbita toro en el espacio de estados x - y - z .

Este sistema descrito en coordenadas cilíndricas tiene problemas de definición, al pasarlo a coordenadas cartesianas cuando $r = 0$, pues $\dot{x} = x\dot{r}/r - y\dot{\theta}$, e $\dot{y} = x\dot{\theta} + y\dot{r}/r$. Ahora el planteo directamente en coordenadas cartesianas:

Partiendo de la base de Groebner obtenida para el toro invariante de la etapa anterior $S_I = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ en el anillo

$$\mathbb{R}(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2, x_1, x_2)[x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, v_1, v_2, v_3, v_4].$$

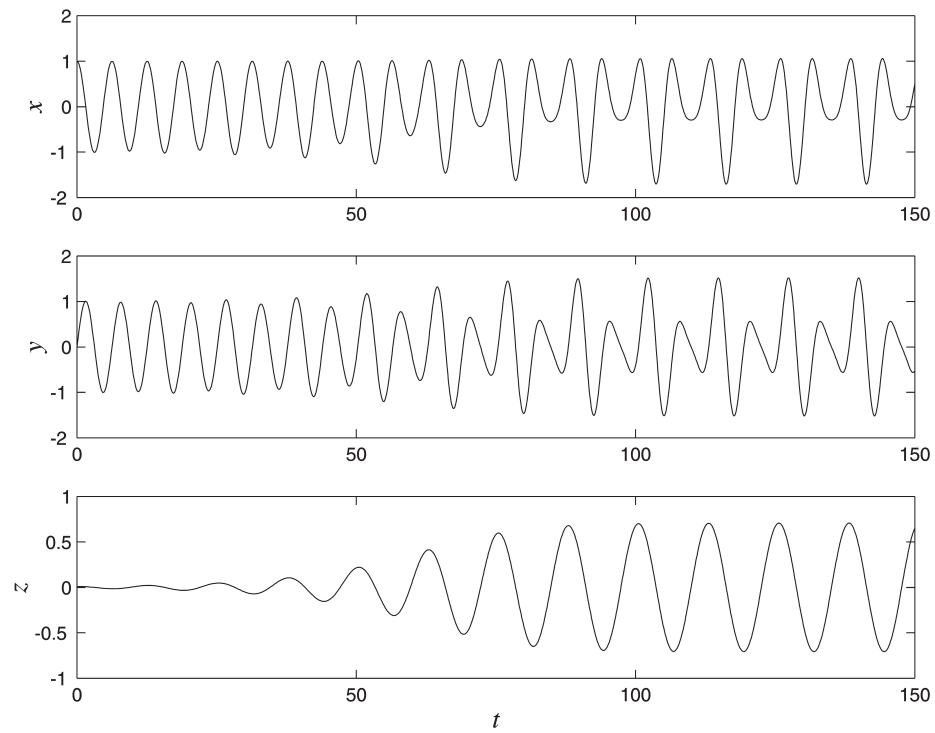


Figura 4.5: Evolución temporal de las variables cartesianas en el sistema diseñado.

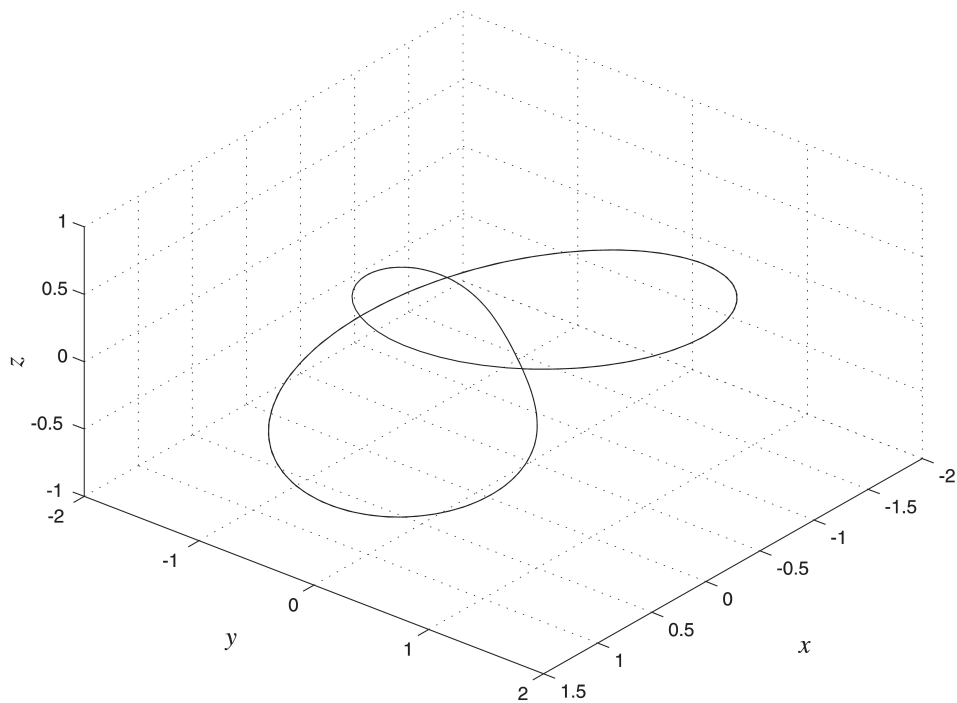


Figura 4.6: Órbita toro del sistema diseñado.

Este conjunto representa la dinámica sobre el toro, y es el generador de sistemas que tienen como solución la trayectoria propuesta. Realizando el proceso de síntesis descrito anteriormente, para extender la dinámica a todo el espacio, con la función de Lyapunov:

$$V = g_1^2 = ((r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4r_1^2(x_1^2 + x_2^2))^2$$

da como resultado la siguiente combinación de polinomios ($\alpha > 0$),

$$\langle S \rangle = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$$

con

$$\begin{aligned} p_1 = & -r_1(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)g_2 \\ & + x_1(r_1\omega_2x_3 - 4(x_1^2 + x_2^2)(-r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\alpha)g_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 = & r_1(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)g_3 \\ & + x_2(r_1\omega_2x_3 - 4(x_1^2 + x_2^2)(-r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\alpha)g_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = & -r_1(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)g_4 + (r_1\omega_2(r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \\ & - 4x_3(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)(r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2\alpha)g_1 \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema dinámico con una órbita toro

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -(r_1(2r_1\omega_1x_2(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2) \\ & - \omega_2x_1x_3(-3r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) \\ & - 4\alpha x_1(r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(r_1^4 - 2r_1^2(r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) \\ & + (-r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2)) / (2r_1^2(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)) \\ \dot{x}_2 = & -(r_1(-2r_1\omega_1x_1(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2) \\ & - \omega_2x_2x_3(-3r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) \\ & - 4\alpha x_2(r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(r_1^4 - 2r_1^2(r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) \\ & + (-r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2)) / (2r_1^2(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)) \end{aligned}$$

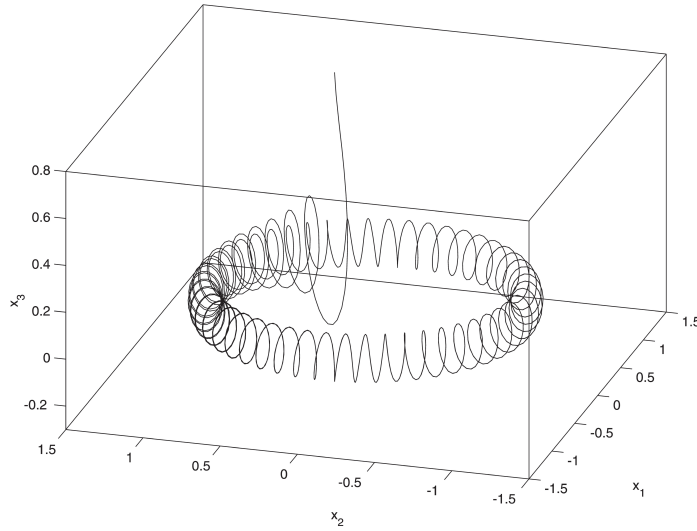


Figura 4.7: Toro con parámetros: $r_1 = 1$, $r_2 = 0,1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 50$, $\alpha = 5$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & -(-r_1\omega_2(x_1^2 + x_2^2)^2(-3r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ & (-r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4\alpha x_3(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2) \\ & (r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2(r_1^4 - 2r_1^2(r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) \\ & + (-r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2)) \\ & / (2r_1^2(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)(r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) \end{aligned}$$

En las Figs 4.7, 4.8, y 4.9, se observan distintas simulaciones correspondientes a relaciones de frecuencias racionales e irracionales, resultando órbitas periódicas únicamente en los dos primeros casos.

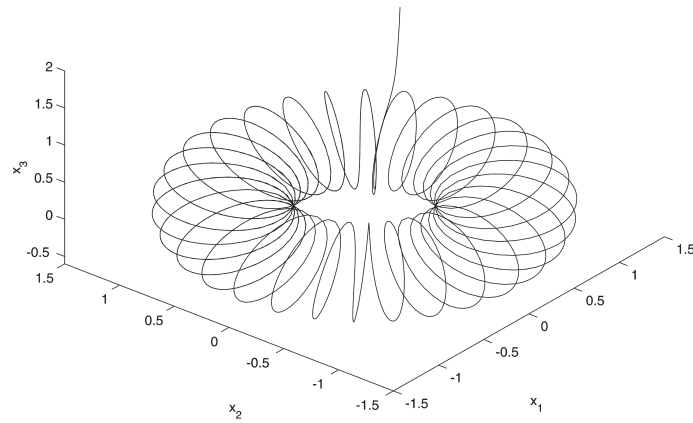


Figura 4.8: Toro con parámetros: $r_1 = 1$, $r_2 = 0,5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 30$, $\alpha = 5$.

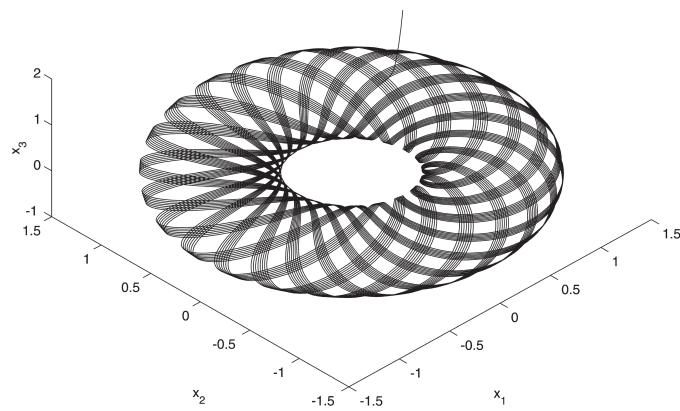


Figura 4.9: Toro con parámetros: $r_1 = 1$, $r_2 = 0,5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \pi$, $\alpha = 5$.

4.4. Síntesis algebraica de controladores

En esta sección se muestra un procedimiento para diseñar controladores utilizando álgebra. Muchas veces, el planteo de condiciones y características de un determinado problema en el análisis y control de sistemas dinámicos lleva a establecer relaciones algebraicas entre variables. Un ejemplo es la descripción del comportamiento dinámico por medio de ideales de polinomios como se mostró en el Capítulo 1. Otro ejemplo lo constituye la síntesis de dinámicas en sus “formas normales”, con el objeto de estudiar la dinámica de los sistemas de una manera analítica, que no es otra cosa que encontrar una relación polinómica entre las variables del sistema para describir los efectos típicos de la manera más sencilla como se mostró en los Capítulos 2 y 3, y en las secciones previas de este capítulo. A pesar de que en la gran mayoría de los sistemas diferenciales no lineales es imposible encontrar explícitamente sus trayectorias excepto, claro está, a través del uso de métodos numéricos, no constituye esto un impedimento si se tiene la libertad de diseñar un sistema o un controlador.

Se propone realizar el diseño de una acción de control desde un punto de vista algebraico. Dado un cierto comportamiento dinámico expresado con un polinomio, se requiere que este polinomio pertenezca al ideal del sistema. Este problema de pertenencia en álgebra conmutativa se resuelve a través de las bases de Groebner y un algoritmo de división, y la condición de pertenencia es equivalente a que el resto de dividir dicho polinomio con respecto a una base de Groebner sea nulo.

Los algoritmos para computar tales bases y realizar la división están implementados en los programas de matemática simbólica, como Mathematica, Maple, Reduce, etc. y también en los sistemas especializados de álgebra computacional como CoCoA, Macaulay, Singular, y otros.

4.4.1. Diseño de controladores en sistemas dinámicos algebraicos

Desde un punto de vista algebraico, los sistemas dinámicos se pueden estudiar como relaciones algebraicas entre las variables de estado y sus primeras derivadas. Como se ha mostrado en capítulos anteriores el *ideal del sistema* asociado a las ecuaciones de estado de un sistema autónomo (sin entradas de control) es el ideal Σ generado por el conjunto $S = \{\dot{x}_1 - f_1(x), \dots, \dot{x}_n - f_n(x)\}$ donde $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$, es decir son polinomios en las variables x_1, \dots, x_n , con coeficientes en el cuerpo k , que puede ser \mathbb{R} , \mathbb{Q} o bien funciones racionales de parámetros del sistema. El conjunto S es una base de Groebner del ideal del sistema Σ , en el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$, donde los coeficientes son funciones racionales o bien polinomios en las variables de estado, correspondiente al ordenamiento Lex, con $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n$.

Consideremos ahora un sistema dinámico no autónomo con variable de control u . El ideal del sistema está generado por el conjunto $S = \{\dot{x}_1 - f_1, \dots, \dot{x}_n - f_n\}$, en el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[u, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$, donde $f_i \in k[u, x_1, \dots, x_n]$. Cuando el sistema está a lazo abierto, en el ideal del sistema $\langle S \rangle$, no hay polinomios en $k[u, x_1, \dots, x_n]$, pues las variables son algebraicamente independientes. Si la variable u es la de menor orden, es fácil ver que S es una base de Groebner debido a la linealidad de sus monomios principales. Consideremos entonces el orden $\dot{x}_1 > \dots > \dot{x}_n > u$.

Controlar significa imponer una cierta dinámica al sistema, tener el poder de dominar su comportamiento. Una de las formas de realizar una acción de control es a través de una realimentación de estados. Desde el enfoque algebraico es encontrar la expresión que debe existir entre la variable de control y las variables de estados para satisfacer un comportamiento deseado.

La dinámica deseada se expresa en el anillo $k(x_1, \dots, x_n)[u, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$ con un polinomio p , y se pretende que pertenezca al ideal del sistema. Realizando la división de p con respecto a la base de Groebner S del ideal del sistema, se obtiene un resto

$r \in k(x_1, \dots, x_n)[u]$. En este polinomio no intervienen las variables \dot{x}_i pues son de menor orden que los polinomios de S . La posibilidad de controlar está condicionada a la anulación de este polinomio, es decir a que tomando u valores admisibles, se asegure la existencia de solución de la ecuación $r = 0$.

Para construir el polinomio p se puede usar la teoría de Lyapunov, eligiendo una adecuada función polinomial V , y su correspondiente \dot{V} , con algún criterio para establecer la estabilidad. Una de las formas es utilizar el principio de invarianza de LaSalle (Khalil, 1996). Se parte de un conjunto invariante acotado, que puede ser un punto de equilibrio, una curva o una superficie, expresado como una variedad afín, es decir como la solución de un sistema de ecuaciones polinómicas, $p_i = 0, i = 1, \dots, s$. Una posible función de Lyapunov es $V = \sum_{i=1}^s p_i^2$ y se puede escoger a \dot{V} como una función polinomial que sea no positiva en un entorno del conjunto invariante. El teorema de LaSalle muestra la estabilidad asintótica del conjunto invariante considerado. Por ejemplo un polinomio que contiene esta dinámica es
$$p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i - \dot{V}.$$

En resumen la dinámica deseada se expresa con un polinomio, cuyo resto con respecto a la base de Groebner debe ser nulo si queremos que pertenezca al ideal del sistema, y precisamente es ésta la condición de diseño de nuestro controlador.

4.4.2. Ejemplo de diseño

Consideremos un péndulo simple sin fricción. Se ha elegido este ejemplo para mostrar las ideas vertidas en las secciones anteriores pues es muy conocido y si bien es un sistema mecánico muy sencillo, es de gran interés pues otros sistemas físicos son modelados por ecuaciones similares, como el modelo de un generador sincrónico conectado a una red infinita, o un circuito no lineal con un inductor con juntura Josephson, Fig. 4.10, (Khalil, 1996). La ecuación diferencial se obtiene usando la segunda ley de Newton en la dirección tangencial al movimiento:

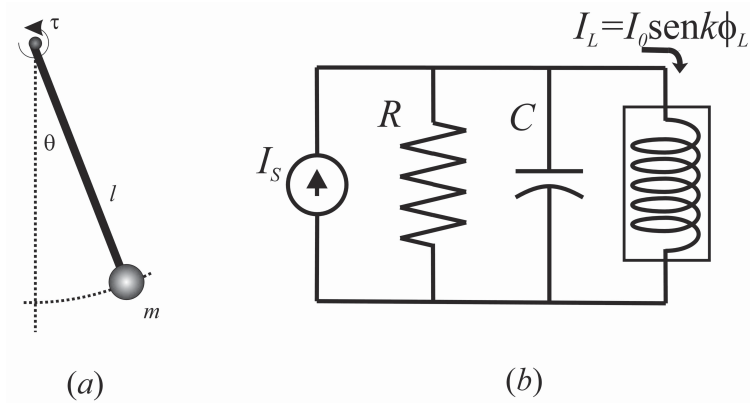


Figura 4.10: Sistemas dinámicos similares. (a) Péndulo simple. (b) Circuito con inductor con juntura Josephson.

$$I\ddot{\theta} + mgl \text{sen} \theta = \tau$$

donde I , m y l son el momento de inercia, la masa y la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad, y τ es un torque aplicado en el eje. Como se mostró en el primer capítulo, con la elección de las variables $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$, la descripción en el espacio de estados resulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -q_1 \text{sen} x_1 + q_3 u\end{aligned}$$

con los parámetros $q_1 = mgl/I$, y $q_3 = 1/I$. Es un sistema dinámico no lineal, con entrada de control $u = \tau$. Como es bien conocido, si $u = 0$, los puntos de equilibrio del sistema autónomo corresponden a los estados: $x_1 = k\pi$ y $x_2 = 0$ con $k \in \mathbb{Z}$, un número entero.

Si bien las ecuaciones diferenciales no son algebraicas, pues contienen un término con una función trigonométrica, es posible reformular esta descripción a través de una nueva elección de variables $z_1 = \text{sen} x_1$ y $z_2 = \cos x_1$, obteniéndose el siguiente

sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= x_2 z_2 \\ \dot{z}_2 &= -x_2 z_1 \\ \dot{x}_2 &= -q_1 z_1 + q_3 u\end{aligned}$$

Desde el punto de vista algebraico, consideramos el ideal generado por

$$S = \{\dot{z}_1 - x_2 z_2, \dot{z}_2 + x_2 z_1, \dot{x}_2 + q_1 z_1 - q_3 u\}$$

Si bien este sistema es de dimensión 3, la dinámica del péndulo está restringida al cilindro $C = \{(z_1, z_2, x_2) \in R^3 : z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0\}$, Fig. 4.11(a). Sin embargo el conjunto C es un invariante del sistema generado por S , esto ya fue probado en el primer capítulo. En otras palabras el modelo del sistema describe al péndulo siempre que la condición inicial pertenezca al cilindro C . A pesar de haber incrementado la dimensión del sistema es posible el análisis algebraico.

Consideraremos las siguientes tres propuestas de control (en los ejemplos de simulación se eligieron los parámetros $q_1 = 30$ y $q_3 = 1$).

4.4.3. Conservación de la energía mecánica

Consideramos ahora la energía del sistema $V = x_2^2 - 2q_1 z_2$ y el objetivo de control de conservación de la energía mecánica, $\dot{V} = 0$. Esta condición dinámica se resume con la relación algebraica indicada por el polinomio $p = 2x_2 \dot{x}_2 - 2q_1 \dot{z}_2$. El resto de p con respecto a S es $2q_3 x_2 u$. Lo que implica que para control nulo el sistema es conservativo, el resultado es esperado pues no fueron consideradas disipaciones en el modelo físico. En la Fig. 4.11(b) se muestra el plano de fase, donde se ve claramente la naturaleza de los puntos de equilibrio, un centro correspondiente a la posición de energía potencial mínima, y un punto silla para la posición invertida.

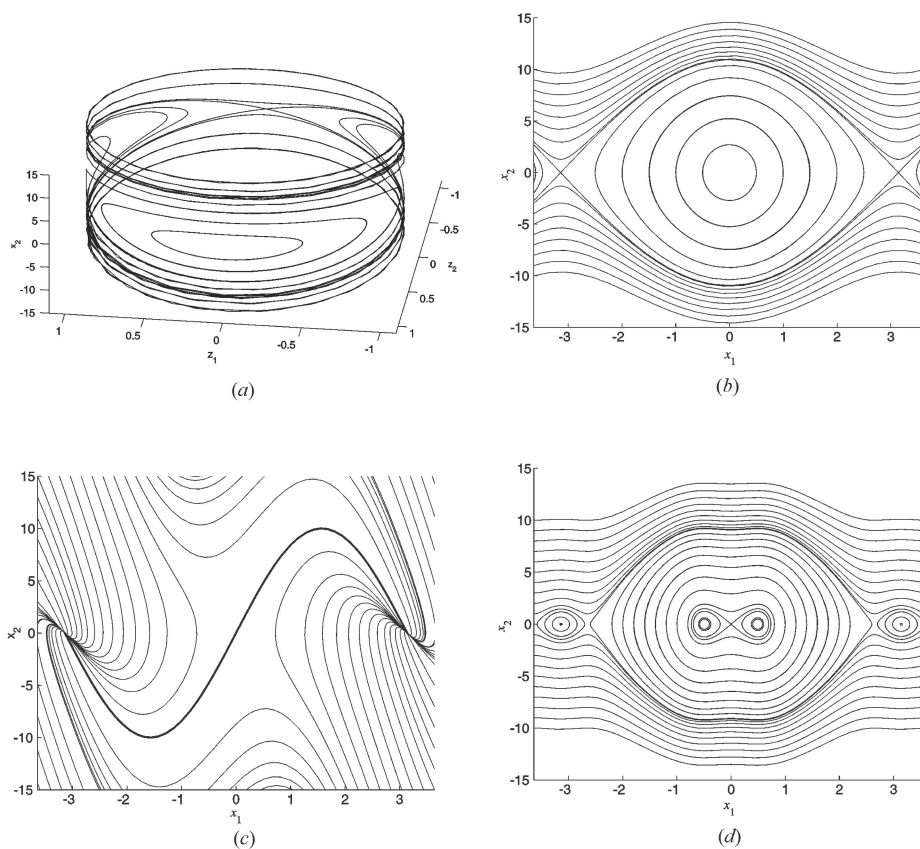


Figura 4.11: Péndulo: trayectorias en el plano de fase con distintos objetivos de control; (a) y (b) conservación de la energía; (c) estabilización de un conjunto invariante; (d) modificación de la energía

4.4.4. Estabilizando un conjunto invariante

Ahora consideramos el siguiente conjunto $\{(z_1, z_2, x_2) \in R^3 : x_2 - cz_1 = 0\}$ que une los puntos de equilibrio. Se pretende que sea un conjunto invariante asintóticamente estable. El polinomio $p = 2(x_2 - cz_1)(\dot{x}_2 - c\dot{z}_1) + \alpha(x_2 - cz_1)^2$ está asociado a la dinámica $\dot{V} = -\alpha V$ con $V = (x_2 - cz_1)^2$. El resto es

$$(x_2 - cz_1)(2q_3u - 2q_1z_1 + \alpha x_2 - 2cx_2z_2 - \alpha cz_1),$$

por lo tanto es factible realizar la realimentación

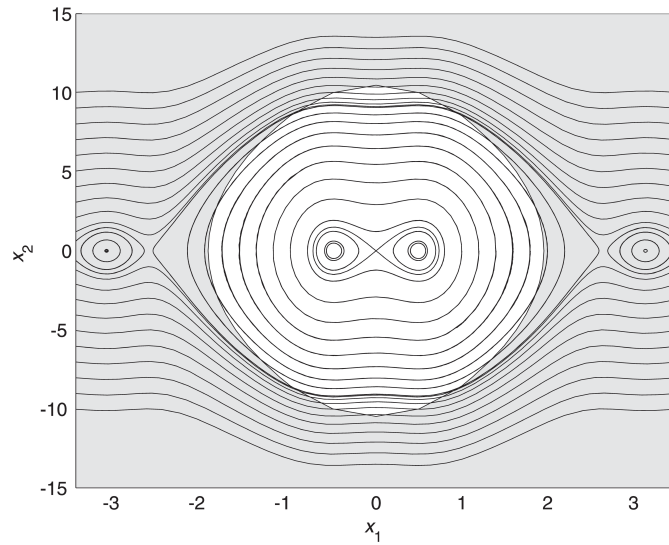


Figura 4.12: Elección del signo de \dot{V} . En el área sombreada $\dot{V} < 0$.

$$u = u_1 = \frac{2q_1 z_1 - \alpha x_2 + 2c x_2 z_2 + \alpha c z_1}{2q_3}$$

En la Fig. 4.11(c) se observa el plano de fase del sistema realimentado, con $c = \alpha = 10$. El resultado indica el cambio de estabilidad en ambos puntos de equilibrio. Estabilización en la posición invertida

Otra consideración es obtenida a partir de una pequeña modificación de la energía mecánica. Sea $V = x_2^2 - 2q_1 z_2 + a z_2^5$. Procediendo del mismo modo que en los casos anteriores, para $\dot{V} = 0$ se obtiene el resto $2q_3 x_2 u - 5a x_2 z_1 z_2^4$. El control $u = u_2 = \frac{5a z_1 z_2^4}{2q_3}$ cambia la dinámica del péndulo a la mostrada por el plano de fase de la Fig. 4.11(d).

Con una adecuada elección de signo de \dot{V} , como la indicada en la Fig. 4.12 donde el área sombreada corresponde a valores negativos, es posible la estabilización casi global de la posición invertida. Se ha elegido $\dot{V} = -\alpha x_2^2(x_2^2 - c z_2 + d)$, el resto es $x_2(2q_3 u - 5a z_1 z_2^4 + \alpha x_2(x_2^2 - c z_2 + d))$ y por lo tanto el control resultante es:

$$u = u_3 = \frac{5a z_1 z_2^4 + \alpha x_2 (x_2^2 - c z_2 + d)}{2q_3}$$

Una trayectoria con este controlador se muestra en la figura 4, con $c = 80$, $d = -30$, $a = 20$, y $\alpha = 0,02$. Obsérvese que este controlador permite estabilizar el sistema empleando una única ley continua de control.

En este ejemplo se presentó el diseño de controladores para un péndulo invertido utilizando un algoritmo algebraico de división de polinomios que está implementado en todos los programas de matemática simbólica. Si bien al resultado se puede arribar utilizando las operaciones algebraicas elementales, el método propuesto presenta una forma sistemática de diseño y además permite incorporar de manera sencilla restricciones algebraicas en las coordenadas y velocidades.

Se obtuvo una estabilización del punto de equilibrio utilizando acciones de control acotadas. El diseño se realizó sin consideraciones de fricción. En regiones de gran velocidad angular la fricción tiene efectos benéficos y puede ser aprovechada en la elección del polinomio \dot{V} y su signo. Sin embargo podrían aparecer fenómenos de bifurcaciones globales, como por ejemplo la aparición de rotaciones completas del péndulo, las cuales no fueron estudiadas en este trabajo.

*Si la gravedad es la cola que cimienta el Universo,
el equilibrio es la llave que abre sus secretos.*

*El equilibrio es aplicable a nuestro cuerpo, mente y emociones,
a todos los niveles de nuestro ser.*

*Nos recuerda que todo lo que hacemos, lo podemos rehacer y deshacer,
y que si el péndulo en nuestras vidas o hábitos
oscila demasiado hacia un lado, inevitablemente va a oscilar al otro.*

*Sé humilde puesto que estás hecho de tierra,
sé noble puesto que estás hecho de estrellas.*

(Proverbio Servio)

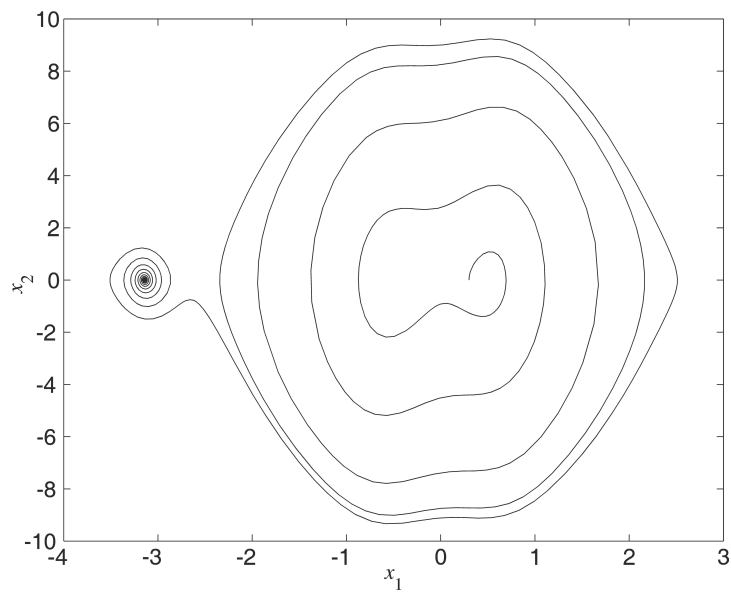


Figura 4.13: Estabilización del péndulo en su posición invertida.

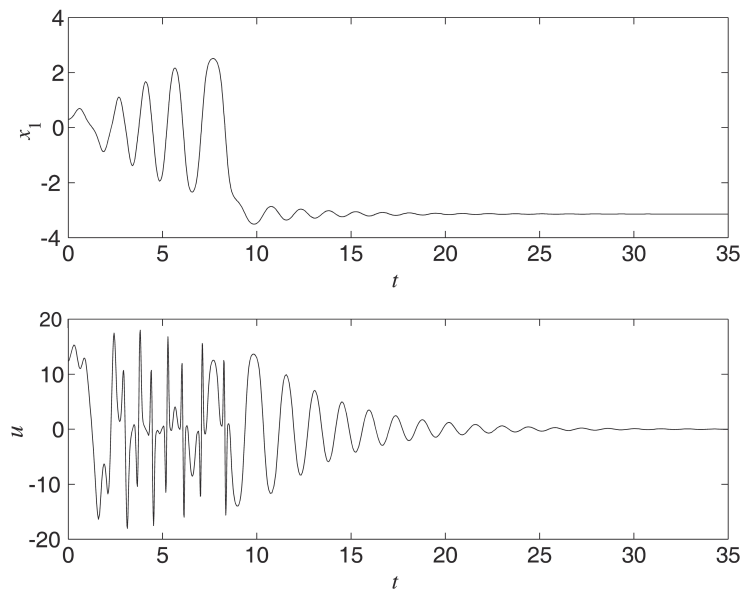


Figura 4.14: Evoluciones temporales de la posición y control del péndulo que lo estabilizan en su posición invertida.

4.5. Apéndice del capítulo

Ejemplo: órbita de periodo 2

$$g_1 = 48x_1^2 - 32x_1^3 - 144x_1^4 + 64x_1^6 + 49x_2^2 - 32x_1x_2^2 - 288x_1^2x_2^2 + 192x_1^4x_2^2 - 144x_2^4 + 192x_1^2x_2^4 + 64x_2^6,$$

$$g_2 = -98x_2 - 73x_1x_2 + 312x_1^2x_2 + 208x_1^3x_2 - 128x_1^4x_2 - 64x_1^5x_2 + 288x_2^3 + 208x_1x_2^3 - 256x_1^2x_2^3 - 128x_1^3x_2^3 - 128x_2^5 - 64x_1x_2^5 - 112x_1x_3 - 104x_1^2x_3 + 8x_1^3x_3,$$

$$g_3 = 12x_1 - 14x_1^2 - 26x_1^3 + 8x_1^4 + 8x_1^5 - 11x_2^2 - 26x_1x_2^2 + 16x_1^2x_2^2 + 16x_1^3x_2^2 + 8x_2^4 + 8x_1x_2^4 - 14x_2x_3 + x_1x_2x_3,$$

$$g_4 = 105x_2 - 24x_1x_2 - 208x_1^2x_2 + 64x_1^4x_2 - 208x_2^3 + 128x_1^2x_2^3 + 64x_2^5 + 120x_1x_3 + 120x_1^2x_3 + 128x_2^2x_3,$$

$$g_5 = 45 - 24x_1 - 148x_1^2 + 64x_1^4 - 148x_2^2 + 128x_1^2x_2^2 + 64x_2^4 + 8x_2x_3 + 60x_3^2,$$

$$g_6 = 32\dot{x}_1 + 169x_2 - 24x_1x_2 - 208x_1^2x_2 + 64x_1^4x_2 - 208x_2^3 + 128x_1^2x_2^3 + 64x_2^5 + 112x_3 + 120x_1x_3 - 8x_1^2x_3,$$

$$g_7 = 6 - 6x_1 - 18x_1^2 + 8x_1^4 - 18x_2^2 + 16x_1^2x_2^2 + 8x_2^4 + 2\dot{x}_2 + x_2x_3,$$

$$g_8 = 15 - 3x_1 - 26x_1^2 + 8x_1^4 - 26x_2^2 + 16x_1^2x_2^2 + 8x_2^4 + x_2x_3 + 30\dot{x}_3,$$

$$g_9 = v_2 - 2x_3,$$

$$g_{10} = 30 + 15v_1 - 6x_1 - 52x_1^2 + 16x_1^4 - 52x_2^2 + 32x_1^2x_2^2 + 16x_2^4 + 2x_2x_3$$

Ejemplo: toro invariante

- En el anillo $\mathbb{R}(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2, x_1, x_2)[x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, v_1, v_2, v_3, v_4]$

$$g_1 = (r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4r_1^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$g_2 = \dot{x}_1 - \omega_1x_2 - \omega_2x_1x_3 - \frac{\omega_2x_1}{2r_1(x_1^2 + x_2^2)}x_3(r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)$$

$$g_3 = \dot{x}_2 + \omega_1 x_1 - \omega_2 x_2 x_3 - \frac{\omega_2 x_2}{2r_1(x_1^2 + x_2^2)} x_3 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)$$

$$g_4 = \dot{x}_3 - \frac{\omega_2}{2r_1} (r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$g_5 = v_4 - \frac{x_3}{r_2}$$

$$g_6 = v_3 + \frac{1}{2r_1 r_2} (r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$g_7 = v_2 - \frac{x_2 (r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2r_1 (x_1^2 + x_2^2)}$$

$$g_8 = v_1 - \frac{x_1 (r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2r_1 (x_1^2 + x_2^2)}$$

■ En el anillo $\mathbb{R}(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2, x_2, x_3)[x_1, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, v_1, v_2, v_3, v_4]$

$$g_1 = (r_1^2 - r_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4r_1^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

$$g_2 = \dot{x}_1 - \omega_1 x_2 + \frac{\omega_2 x_3}{2r_1} x_1 + \frac{\omega_2 x_3}{2r_1 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)} x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 4r_1^2)$$

$$g_3 = \dot{x}_2 + \omega_1 x_1 + \frac{\omega_2 x_3}{2r_1} x_2 + \frac{\omega_2 x_3}{2r_1 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)} x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 4r_1^2)$$

$$g_4 = \dot{x}_3 - \frac{\omega_2}{2r_1} (r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$g_5 = v_4 - \frac{x_3}{r_2}$$

$$g_6 = v_3 + \frac{1}{2r_1 r_2} (r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$g_7 = v_2 + \frac{x_2}{2r_1} + \frac{x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 4r_1^2)}{2r_1 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)}$$

$$g_8 = v_1 + \frac{x_1}{2r_1} + \frac{x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 4r_1^2)}{2r_1 (r_1^2 - r_2^2 + x_3^2)}$$

Capítulo 5

Conclusiones

Las metas son el principio del fin de un ciclo.

(Anónimo)

En esta tesis se propuso un enfoque algebraico para estudiar sistemas dinámicos no lineales. Se presentaron técnicas analíticas para analizar la bifurcación de Hopf a través del polinomio de su forma normal, como así también para diseñar o sintetizar sistemas y controladores con alguna dinámica particular expresada por relaciones algebraicas entre variables y parámetros. Para realizar estos desarrollos es imprescindible utilizar programas de matemática simbólica, con sus limitaciones en capacidad de memoria, tiempo de ejecución, cantidad de polinomios y variables. Algunos ejemplos aparentemente simples, pueden demandar excesivo tiempo de procesamiento y volumen de cálculo. Sin embargo con el avance de la tecnología computacional y la eficiencia de los algoritmos específicos, estas técnicas pueden ser cada vez mejor aprovechadas.

El método de las formas normales es de validez local, como se mostró en el capítulo 2; un indicador de esta localidad es la anulación del jacobiano de la transformación. Se aprecia una mejora importante en las aproximaciones al incluir la información de los coeficientes de órdenes superiores. En situaciones donde los métodos analíticos fallan o cuando la bifurcación no es de carácter local, se corroboran los resultados

con simulaciones numéricas y programas de continuación de bifurcaciones. En cambio en otros casos donde numéricamente hay dificultades, se aprecian las ventajas de estos métodos analíticos, como sucede en cercanías de un foco débil, donde las simulaciones se confunden con trayectorias cercanas a un punto centro.

Tal vez la idea más original aquí presentada es la utilización de las bases de Goebner para poder encontrar estructuras o conjunto de polinomios que describan una dinámica determinada, ya sea para el análisis de alguna configuración particular o para diseñar una ley de control. La cantidad de variables utilizadas limitan la potencialidad de esta técnica. Sin embargo conceptos algebraicos tan simples como ideal pueden asociarse a la dinámica de un sistema y utilizando bases de Groebner y un algoritmo sencillo como el del cálculo del resto se puede determinar de manera precisa la pertinencia o no de alguna característica dinámica en dicho ideal.

Los resultados de esta tesis fueron utilizados en (Agamennoni *et al.*, 2008), donde se estudia la bifurcación de Hopf con el método en frecuencia. Allí se plantean realizaciones convenientes en el espacio de estados para poder aplicar el método eficientemente y se observa la necesidad de analizar la controlabilidad y observabilidad. Cuando las no linealidades son de tipo polinómicas, se pueden utilizar las bases de Groebner para detectar la observabilidad algebraica y poder describir al sistema con una forma canónica observable, logrando reducir la cantidad de variables de entradas, facilitando los cálculos con dicho método. Otras de las líneas que continúan a esta tesis se encuentran en los trabajos (Torresi *et al.*, 2012) y (Calandrini y D'Amico, 2011). Allí también se usan métodos frecuenciales, en el primero para obtener formas normales de bifurcaciones de Hopf degeneradas. En el segundo se estudia la convergencia del método al aproximar órbitas emergentes de una bifurcación de doble período en sistemas discretos con no linealidad cuadrática.

Sin lugar a dudas existen aún muchas relaciones para investigar entre las dinámicas de los sistemas, las formas normales, los polinomios y el álgebra.

Apéndice A

Nociones básicas de álgebra.

*Entre las cosas más hermosas,
están aquellas que no requieren interpretación;
Tal es el carácter de las matemáticas y de las leyes físicas.
Por ello, el verdadero conocimiento es hermoso.*

(G. Antuan)

A.1. Anillos y Cuerpos

En este capítulo se desarrollan las nociones básicas de álgebra. Los conceptos son sencillos y abstractos y se construyen a partir de las ideas de elementos, conjuntos y operaciones sobre los elementos de un conjunto. El objeto principal que se manipulará son polinomios. Y sobre el conjunto de polinomios se construirán las bases de Groebner. La idea de *conjunto* y *elementos* son primitivas, es decir no son reducibles a otras más simples, y tienen valor puramente relativo, pues todo ente es a su vez, un conjunto de otros entes que lo componen, y todo conjunto puede considerarse como una nueva unidad, pudiéndose formar con estas unidades nuevos conjuntos (de orden superior), y así sucesivamente.

La idea de *elemento* o unidad nace en nosotros al distinguir o individualizar un objeto del resto del universo, haciendo una abstracción, prescindiendo de todas sus

demás cualidades. La idea de unidad, lleva implícita la idea de pluralidad o *conjunto* de entes.

Una *operación binaria* sobre un conjunto M de elementos a, b, c, \dots , es una regla que asigna a ciertos pares de elementos a y b de M dados en un cierto orden, un elemento $a \& b$ unívocamente determinado, llamado resultado de la operación $\&$. En otras palabras una *operación binaria* μ en un conjunto S es un mapeo $\mu : S \times S \rightarrow S$. $\forall S_1, S_2 \in S, S_1 \mu S_2 \rightarrow S_3 \in S$.

Ahora bien, un conjunto con un par de operaciones definidas sobre que verifican ciertas propiedades forman estructuras determinadas que llamamos, anillo y cuerpos

A.1.1. Anillo

Un *anillo* es un conjunto R con dos operaciones binarias llamadas adición (indicada $+$) y multiplicación (notada por yuxtaposición) que verifican las siguientes propiedades:

1. $\forall x, y, z \in R, (x + y) + z = x + (y + z)$.
2. $\exists 0 \in R$ tal que $\forall x \in R, x + 0 = x$.
3. $\forall x \in R, \exists x' \in R$ tal que $x + x' = 0$.
4. $\forall x, y \in R, x + y = y + x$.
5. $\forall x, y, z \in R, (xy)z = x(yz)$.
6. $\forall x, y, z \in R, x(y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz$.

Entonces R es un grupo conmutativo o abeliano con respecto a la adición (propiedades 1 a 4) y un semigrupo con respecto a la multiplicación (propiedad 5). Nótese que la multiplicación no necesita tener elemento unidad ni inverso multiplicativo.

Ejemplos:

- El conjunto de todos los enteros pares.
- El conjunto \mathbb{Z} de todos los enteros. En realidad este conjunto es más estructurado que un anillo, pues tiene identidad multiplicativa 1.

- El conjunto de todos los polinomios en una variable x con coeficientes enteros.

Un *subanillo* S de un anillo R es un conjunto $S \subset R$, el cual también es un anillo con respecto a las operaciones de adición y multiplicación de R . Es decir si operamos dos elementos de S el resultado es otro elemento de S , decimos que S , es cerrado con respecto a las operaciones de adición y multiplicación y además verifica las seis propiedades anteriores, es decir en el subanillo está el elemento nulo, y el inverso de la adición, ya que las demás propiedades se verifican pues ya valen para el anillo R .

Nos interesa trabajar con una clase especial de subanillos que se denominan ideales. Un subanillo I de un anillo R es un *ideal* si

$$r \in R \text{ y } x \in I \Rightarrow r x \in I.$$

Por ejemplo el conjunto $\{a \in \mathbb{Z} : a = 2b, b \in \mathbb{Z}\}$, es un ideal contenido en \mathbb{Z}

Y los ideales tienen ciertas características de interés que nos sirven para clasificarlos:

- Un ideal $I \neq \{0\}$ se denomina *radical* si para cualquier $A^p \in I$, donde p es un entero positivo, entonces $A \in I$.
- Un ideal Σ es llamado *primo* si, para todo $AB \in \Sigma$, entonces $A \in \Sigma$ o $B \in \Sigma$.

Todo ideal primo es radical.

Sea Ω un subconjunto de un anillo R . La intersección de todos los ideales de R que contienen a Ω es llamado ideal generado por Ω y se nota (Ω) .

A.1.2. Cuerpo

Un cuerpo es un anillo F que verifica las siguientes propiedades adicionales:

6. $\forall x, y \in F, xy = yx$.
7. $\exists 1 \in F$ tal que $1 \neq 0$ y $1x = x1 = x, \forall x \in F$.
8. $\forall x \in F, x \neq 0, \exists x' \in F$, tal que $xx' = x'x = 1$.

Entonces F es un grupo conmutativo o abeliano con respecto a la adición y $F - \{0\}$ es un grupo abeliano con respecto a la multiplicación.

Ejemplos:

- El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} .
- El conjunto de los números reales \mathbb{R} .
- El conjunto de los números complejos \mathbb{C} .
- El conjunto de las funciones racionales en n variables con coeficientes reales.

Un *subcuerpo* se define de manera análoga al subanillo. Ejemplo: \mathbb{Q} es un subcuerpo de \mathbb{R} , el cual a su vez es un subcuerpo de \mathbb{C} .

Sea F un subcuerpo de G (en adelante se notará $F \subset G$). Entonces G se llama *extensión* del cuerpo F . La extensión se expresa así: G/F .

Ejemplo: \mathbb{R}/\mathbb{Q} es una extensión de \mathbb{Q} .

Sea F un cuerpo y $\alpha = \{\alpha_i\}$ un conjunto (finito o infinito) de elementos de alguna extensión G de F . Entonces el menor subcuerpo de G que contiene a F y a α es llamado cuerpo generado por F y los elementos de α , y se nota por $F(\alpha)$. Cuando el conjunto α contiene un único elemento, es decir $\alpha = \{a\}$, la extensión puede expresarse por $F(a)$ en lugar de $F(\{a\})$. Cuando el conjunto α es finito se dice que la extensión es *finitamente generada*.

Ejemplos:

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, es el cuerpo generado por \mathbb{Q} y $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$, donde $i = \sqrt{-1}$.

A.1.3. Polinomios y funciones racionales

Notaciones:

- $F[x_1, \dots, x_N]$ representa el conjunto de todos los polinomios en las variables x_1, \dots, x_N con coeficientes en un cuerpo F . Nótese que constituye un anillo.

- $F(x_1, \dots, x_N)$ representa el conjunto de todas las funciones racionales en las variables x_1, \dots, x_N con coeficientes en un cuerpo F .

Nota: en álgebra uno no está interesado en el significado de los elementos del conjunto, como podrían ser los polinomios y funciones racionales, etc. Ellos no son vistos como funciones, pero sí como una expresión formal. Desde el punto de vista algebraico, es de gran interés la manipulación de tales expresiones. Obsérvese que tienen la misma notación $F(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ el cuerpo generado por F y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ y el cuerpo de las funciones racionales en las variables x_1, \dots, x_N , que se nota $F(x_1, \dots, x_N)$. Esto es razonable, pues se puede extender el cuerpo F adicionando elementos abstractos x_1, \dots, x_N . Entonces la extensión consiste de todos los elementos que pueden ser expresados como una secuencia finita de las cuatro operaciones (adición, multiplicación, substracción y división) aplicada a un conjunto finito de F y $\{x_1, \dots, x_N\}$. Cada uno de estos elementos pueden representarse como funciones racionales.

A.1.4. Extensiones y dependencia algebraica

Sea G/F una extensión. Un elemento $\alpha \in G$ se dice algebraico sobre F si existe un polinomio no nulo $p \in F[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. La extensión es algebraica si, y sólo si, todo elemento de G es algebraico sobre F .

Ejemplo: $\sqrt{2}$ es algebraico sobre \mathbb{Q} , pues satisface $x^2 - 2 = 0$. Entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica.

Sea G/F una extensión. Un elemento $\alpha \in G$ se dice trascendente sobre F si no es algebraico sobre F . La extensión se dice trascendente si no es algebraica, es decir si existe al menos un elemento en G que es trascendente sobre F .

Ejemplo: \mathbb{R}/\mathbb{Q} es trascendente puesto que e y π no son algebraicos sobre \mathbb{Q} . Pero \mathbb{C}/\mathbb{R} es algebraica ya que $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, e i es algebraico sobre \mathbb{R} pues satisface $x^2 + 1 = 0$.

Un conjunto $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ de elementos pertenecientes a G es algebraicamente dependiente sobre F si existe un polinomio no nulo $p(x_1, \dots, x_m)$ sobre F tal

que $p(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$. Un conjunto que no es algebraicamente dependiente se dice algebraicamente independiente.

Ejemplo: π y $\sqrt{\pi}$ son algebraicamente dependientes sobre \mathbb{Q} , porque $p(x, y) = x^2 - y$ es un polinomio que verifica $p(\sqrt{\pi}, \pi) = 0$.

Sea G/F una extensión, y $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ un conjunto de elementos en G que satisfacen

- α es algebraicamente independiente sobre F ,
- todo elemento en G es algebraico sobre $F(\alpha)$.

Entonces el conjunto α se denomina *base trascendente* de G/F . Dos de tales bases trascendentes tienen la misma cardinalidad, es decir el mismo número de elementos, el cual se llama *grado de trascendencia* de G/F y se expresa por $\text{tr } d \circ G/F$.

Ejemplo: Sea $G = F(s_1, \dots, s_n)$, es decir el cuerpo de las funciones racionales en n variables con coeficientes en F . Puesto que $\{s_1, \dots, s_n\}$ es algebraicamente independiente sobre F (los elementos si son variables independientes) constituye una base de trascendencia de $F(s_1, \dots, s_n)/F$. Además $\text{tr } d \circ G/F = n$.

Teorema 13 *La extensión G/F es algebraica si, y sólo si, $\text{tr } d \circ G/F = 0$.*

Prueba: $\text{tr } d \circ G/F = 0$ si, y sólo si, toda base trascendente tiene cardinalidad cero, es decir es un conjunto vacío. Lo cual es cierto si, y sólo si, G/F es algebraica.

Teorema 14 *Sea $G = F(\alpha)$, donde $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ y cada α_i para $i = 1, \dots, m$ es algebraico sobre F . Entonces G/F es algebraica.*

El teorema anterior no es tan obvio, pero sin él, el concepto de dependencia algebraica no sería tan significativa. Otro teorema importante es el que asegura la existencia de un elemento que genere completamente a la extensión, su enunciado es el siguiente:

Teorema 15 (*Elemento Primitivo*) Sea G/F una extensión algebraica finitamente generada. Entonces existe un elemento $\alpha \in G$ tal que $G = F(\alpha)$. α se denomina elemento primitivo.

Ejemplo: la extensión $R(i, 1+i)/R$ es algebraica, i es un elemento primitivo, pues $C = R(i, 1+i) = R(i)$.

A.1.5. Grupos Cíclicos

Un grupo es un conjunto G con una operación binaria $(+)$ que verifica las propiedades 1 a 3 de la definición de anillo, es decir es asociativa, tiene elemento neutro y para todo elemento $x \in G$ existe un elemento inverso.

Sea M un subconjunto no vacío de un grupo G y $\{\eta_i\}$ la colección de subgrupos de G que contienen al conjunto M , luego $\{\eta_i\}$ no es vacía. Su intersección $\cap \eta_i$ es un subgrupo de G . Este subgrupo se nota $[M]$ y se denomina subgrupo de G generado por M .

Tiene las siguientes propiedades:

* $[M]$ es un subgrupo de G .

* $[M] \supseteq M$

* Si η_i es un subgrupo de G que contiene a $M \Rightarrow \eta_i \supseteq [M]$.

Consideremos el caso especial en el cual $M = \{a\}$ (un único elemento a)

$[a]$ = grupo cíclico generado por a .

Un grupo B es llamado grupo cíclico, si existe $a \in B$ tal que $B = [a]$. El elemento a es llamado generador de B .

El concepto de grupo cíclico da una primera clasificación de los elementos de un grupo arbitrario G . Si a es un elemento de G entonces se dice que a es de orden infinito o orden finito r , de acuerdo a que $[a]$ es infinito o un grupo finito de orden r .

En el primer caso $a^n \neq 1$, si n es un entero $\neq 0$, y en el segundo caso en cambio $a^r = 1$. r es el menor entero positivo tal que $a^r = 1$.

El orden de un grupo G es la cardinalidad de G , y se expresa $|G|$.

Si $a \in G$, y tiene orden infinito:

i) $a^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$.

ii) Los elementos a^k ($k \in \mathbb{Z}$) son todos distintos.

Si tiene orden finito $m > 0$:

iii) m es el menor entero positivo tal que $a^m = 1$.

iv) $a^k = 1 \Leftrightarrow m|k$ (m divide a k)

v) $[a]$ consiste en los elementos $a, a^2, \dots, a^{m-1}, a^m = 1$.

Sea R un anillo. Si existe un número entero n que sea el menor número entero positivo n tal que $na = 0$ para todo $a \in R$, entonces R tiene característica n . Si no existe tal n , R tiene característica cero ($\text{Char}R = 0$).

Sea R un anillo conmutativo donde para todo $p, q, r \in R$ y $p \neq 0$, la identidad $pq = pr$ implica $q = r$. Esta propiedad es llamada cancelación. Todo anillo conmutativo que tiene la propiedad de cancelación es un *dominio integral*, o simplemente un dominio.

Se dice que un elemento $r_1 \in R$ divide a $r_2 \in R$, si podemos encontrar un $r_3 \in R$ tal que:

$$r_2 = r_1 r_3.$$

Si existe un elemento i perteneciente a un ideal I , tal que divide a todo $j \in I$, entonces a I se lo llama *ideal principal*. Si R es un dominio tal que todo ideal de R es un ideal principal, entonces R es un *dominio ideal principal*.

A.2. Polinomios

El planteo de condiciones y características de un determinado problema muchas veces lleva a establecer relaciones algebraicas entre ciertas variables. Esto conduce a utilizar polinomios que representan estas relaciones y también a encontrar soluciones de ecuaciones polinómicas. El caso más sencillo resulta cuando los polinomios son lineales, las técnicas de álgebra lineal son muy conocidas, y con métodos como

triangulación y sustitución hacia atrás, podemos resolver el problema, obtener las soluciones, eliminar variables, etc. En este trabajo utilizaremos bases de Groebner que son una generalización de las técnicas lineales que nos permiten trabajar con polinomios no lineales.

Los polinomios y conjuntos de ecuaciones polinómicas están relacionados por los conceptos algebraicos de *ideales* y *variedades*. Consideraremos el conjunto de todos los polinomios en x_1, \dots, x_n con coeficientes en el cuerpo k como $k[x_1, \dots, x_n]$. Las soluciones a ecuaciones polinómicas pueden ser curvas, superficies, u objetos de mayores dimensiones que se denominan *variedades afines*. La variedad afín V definida por los polinomios f_1, \dots, f_s ; es el conjunto

$$V = \mathbf{Var}(f_1, \dots, f_s) = \{(w_1, \dots, w_n) \in k^n : f_i(w_1, \dots, w_n) = 0 \forall 1 \leq i \leq s\},$$

es decir es el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones $f_1 = \dots = f_s = 0$.

Un subconjunto $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ es un *ideal* si satisface:

- $0 \in I$.
- Si $f, g \in I$ entonces $f + g \in I$.
- Si $f \in I$ y $h \in k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $hf \in I$.

Una manera muy natural de definir ideales es por medio de un conjunto finito de polinomios. El ideal generado por el conjunto de polinomios f_1, \dots, f_s lo expresamos como $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ y se define como

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

Toda solución del sistema de ecuaciones polinómicas $f_1 = \dots = f_s = 0$ también anula a todo polinomio del ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. En otras palabras $\mathbf{Var}(I) = \mathbf{Var}(f_1, \dots, f_s)$.

Sea una variedad afín $V \subset k^n$. Entonces el conjunto

$$\mathbf{Ideal}(V) = \{f \in R : f_i(w_1, \dots, w_n) = 0 \forall (w_1, \dots, w_n) \in V\}$$

es decir el conjunto de todos los polinomios que se anulan sobre la variedad dada, es un ideal.

A.2.1. Ordenamientos de variables y monomios

Si el sistema de ecuaciones polinómicas es lineal, un método muy conocido para encontrar las soluciones es la eliminación de Gauss, donde es necesario dar un orden a las variables para ir eliminándolas y obtener como resultado un sistema triangular. Por ejemplo el ordenamiento de los monomios lineales podría elegirse $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. En cambio si el polinomio es de una variable podemos ordenar sus términos de acuerdo al grado de sus términos, el ordenamiento de los monomios de una variable sería por lo tanto $\dots > x^{m+1} > x^m > \dots > x^2 > x > 1$. Ahora bien si trabajamos con polinomios en varias variables, no lineales, debemos tener en cuenta, de alguna manera, el orden de las variables y sus exponentes. Dado un ordenamiento de variables $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ podemos escribir los monomios como una n -upla de exponentes, cada monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ lo podemos representar por la n -upla de exponentes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Esta relación establece una correspondencia biunívoca entre monomios y $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Cualquier ordenamiento en este espacio nos indica un ordenamiento de los monomios, es decir si $\alpha > \beta$, podemos decir también que $x^\alpha > x^\beta$. Requerimos también que el ordenamiento sea total, es decir para dos monomios cualesquiera siempre podemos decir cual es mayor o si tienen el mismo orden. Hay muchos ordenamientos posibles, el que utilizaremos es el más apropiado para la eliminación de variables, es el Lexicográfico (Lex).

Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Decimos que $\alpha >_{Lex} \beta$ si en el vector diferencia $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$, la primer componente no nula empezando desde la

izquierda es positiva. Entonces escribimos $x^\alpha >_{Lex} x^\beta$ si $\alpha >_{Lex} \beta$.

Fijando un ordenamiento de monomios, es posible ordenar los términos de un polinomio sin ambigüedad. El monomio de mayor orden de un polinomio $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ lo llamamos monomio líder, $ML(f)$, a su correspondiente coeficiente (no nulo) coeficiente líder $CL(f)$, y término líder al producto $LT(f) = CL(f).ML(f)$.

A.2.2. Bases de Groebner

Un conjunto finito $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ de un ideal I se dice que es una base de Groebner si

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle = \langle LT(I) \rangle$$

Esto significa que un conjunto $\{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ es una base de Groebner de I si y solo si los terminos líderes de cualquier elemento de I es divisible por un término líder de los polinomios de la base. El teorema de las bases de Hilbert nos dice que todo ideal tiene una base finita que lo genera. Fijando un orden de monomios, todo ideal tiene una base de Groebner, y toda base de Groebner de un ideal es una base de dicho ideal. La pregunta es cómo encontrar una base de Groebner para un ideal dado I . Si este ideal es generado por un conjunto finito, conocido $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, entonces la base de Groebner se puede construir con un número finitos de pasos dados por el algoritmo de Buchberger. Este algoritmo ha sido mejorado he implementado en varios programas de software matemático y algebraico.

En un anillo de polinomios R se pueden realizar “cocientes” mediante un algoritmo de división sencillo que también se encuentra implementado en los programas de matemática simbólica. Es decir, se puede dividir un polinomio f por un conjunto de polinomios. Y se puede expresar a f con la combinación, donde los cocientes y el resto r están en R . El cálculo del resto r permite resolver el problema de pertenencia de un polinomio en un ideal, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 16 *Sea G una base de Groebner de un ideal I . Entonces $f \in I$ si y sólo*

si el resto de la división de f por G es cero.

A.2.3. Teoría de eliminación

Utilizaremos bases de Groebner como un método sistemático de eliminación de variables en un sistema de ecuaciones polinómicas. Hay dos pasos a tener en cuenta en la eliminación:

1 Paso de eliminación. Encontrar un conjunto de ecuaciones en las cuales se haya eliminado las variables deseadas.

2. Paso de extensión. Determinar las soluciones del sistema reducido y verificar si también pueden ser solución del sistema de ecuaciones original.

El procedimiento de eliminación se basa en los siguientes dos teoremas.

Teorema 17 *Teorema de Eliminación.*

Sea $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y sea G una base de Groebner de I con respecto al orden lexicográfico donde $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Entonces, para todo $0 \leq l \leq n$, el conjunto

$$G_l = G \cap k[x_{l+1}, \dots, x_n]$$

es una base groebner de la l -ésima eliminación del ideal $I_l = I \cap k[x_{l+1}, \dots, x_n]$.

En otras palabras, si el ideal contiene polinomios en los cuales estén eliminadas las l primeras variables, entonces en la base de Groebner tiene un subconjunto donde también esas variables están eliminadas.

Teorema 18 *Teorema de extensión.*

Sea $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset C[x_1, \dots, x_n]$ y sea I_l la primer eliminación del ideal I . Para cada $1 \leq i \leq s$, podemos escribir f_i en la forma

$$f_i = g_i(x_2, \dots, x_n)x_1^{N_i} + \text{términos en los cuales } x_1 \text{ tiene grado } < N_i,$$

donde $N_i \geq 0$ y $g_i \in C[x_1, \dots, x_n]$ es no nulo. Supongamos tener una solución parcial $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{Var}(I_1)$. Si $(a_2, \dots, a_n) \notin \mathbf{Var}(g_1, \dots, g_s)$ entonces existe $a_1 \in C$ tal que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{Var}(I)$.

Este teorema nos dice que la solución parcial que obtenemos luego del primer paso de eliminación puede fallar si se anulan simultáneamente todos los coeficientes principales g_i . Un caso especial es cuando uno de estos coeficientes es constante, el teorema asegura que siempre se puede extender una solución parcial. Si bien este teorema se ha enunciado para el caso de eliminar una variable, puede también utilizarse para la eliminación de cualquier número de variables, el cual debe ser aplicado en cada paso o etapa de eliminación.

Bibliografía

Abed, E. H. y Wang, H. O. (1995). *Feedback control of bifurcation and chaos in dynamical systems*, pp. 153–173. Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics. CRC, Boca Raton, Florida, USA.

Agamennoni, G., Calandrini, G. L., y Moiola, J. L. (2008). Some realizations in the study of oscillations with a frequency method. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, 15(1):99–110.

Allwright, D. J. (1977). Harmonic balance and the Hopf bifurcation theorem. *Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc.*, 82:453–467.

Alonso, D., Calandrini, G. L., Berns, D. W., Paolini, E. E., y Moiola, J. L. (2001). Chaos prediction and bifurcation analysis in control engineering. *Latin American Applied Research*, 31(3):185–192.

Alwash, M. A. M. (1996). Periodic solutions of a quartic differential equation and Groebner bases. *J. Comput. Appl. Math.*, 75(1):67–76.

Ananthkrishnan, N. y Sudhakar, K. (1996). Characterization of periodic motions in aircraft lateral dynamics. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 19(7):680–685.

Andronov, A. y Chaikin, C. E. (1949). *Theory of Oscillations*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. Versión original en ruso (1937).

Andronov, A. A., Vitt, A. A., y Khaikin, S. E. (1966). *Theory of Oscillators*. Pergamon Press, Oxford.

- Apostol, T. M. (1957). *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, Mass.
- Bautin, N. (1954). On the number of limit cycles which appear with variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type. *American Math. Soc.*, 100:397–413. Traducido, original en ruso (1952).
- Belhaq, M. y Houssni, M. (1995). Symmetry-breaking and first period-doubling following a Hopf bifurcation in a three dimensional system. *Mechanics Research Communications*, 22(3):221–231.
- Belhaq, M., Houssni, M., Freire, E., y Rodriguez-Luis, A. (2000a). Analytical prediction of the two first period-doubling in a three-dimensional system. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 10(6):1497–1508.
- Belhaq, M., Houssni, M., Freire, E., y Rodriguez-Luis, A. (2000b). Asymptotics of homoclinic bifurcation in a three-dimensional system. *Nonlinear Dynamics*, 21:135–155.
- Berns, D., Calandrini, G. L., Paolini, E. E., y Moiola, J. L. (2001). Synthesis of nonlinear oscillator using Groebner bases. En *Proceedings of the ninth workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES'2001)*, Neerhoff, F. L., van Staveren, A., y Verhoeven, C. J. M., editores, pp. 85–88, University of Technology, Holanda.
- Blows, T. R. y Lloyd, N. G. (1984). The number of limit cycles of certain polynomial differential equations. *Proc. of Royal Society of Edinburgh*, 98:215–239.
- Brown, R. y Chua, L. (1993). Dynamical synthesis of Poincaré maps. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 3(5):1235–1267.
- Calandrini, G. L., Berns, D., Paolini, E. E., y Moiola, J. L. (2000a). On cyclic fold bifurcations in nonlinear systems. En *ISCAS 2000 - IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. II-485 – II-488, Geneva, Switzerland.

- Calandrini, G. L., Castro, L., Paolini, E. E., y Desages, A. (1997). Ritt's algorithm, Gröbner basis and discretization. *Mathematical and Computer Modelling*, 26(5):67–77.
- Calandrini, G. L. y D'Amico, M. B. (2011). Convergencia del método en frecuencia al aproximar bifurcacione en doble período en mapas cuadráticos. En *MACI 2011 - III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, pp. 639–642, Bahía Blanca, Argentina.
- Calandrini, G. L., Paolini, E. E., y Moiola, J. L. (2000b). Formas normales en la teoría de oscilaciones. En *XVII Congreso Argentino de Control Automático (AADECA 2000)*, pp. 141–145, Buenos Aires, Argentina.
- Calandrini, G. L., Paolini, E. E., y Moiola, J. L. (2003). Groebner bases for designing dynamical systems. *Latin American Applied Research*, 33(4):427–434.
- Calandrini, G. L., Paolini, E. E., Moiola, J. L., y Chen, G. (1999). *Controlling limit cycles and bifurcations*, cap. 10, pp. 201–228. *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*. CRC Press.
- Calandrini, G. L. y Revel, G. (2006). Bases de Groebner en el modelo cinemático inverso de manipuladores robóticos. En *UMA 2006 - Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina*, Bahía Blanca, Argentina.
- Carr, J. (1981). *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag.
- Chen, G., Moiola, J. L., y Wang, H. (2000). Bifurcation control: Theories, methods, and applications. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 10(3):511–548.
- Chen, L. y Wang, M. (1979). On relative locations and the number of limit cycles for quadratic systems. *Acta Math. Sinica*, 22:751–758.
- Chen, S. H., Shen, J. H., y Sze, K. Y. (2009). A new perturbation procedure for limit cycle analysis in three-dimensional nonlinear autonomous dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 56(3):255–268.

- Chow, S.-N., Drachman, B., y Wang, D. (1990). Computation of normal forms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 29:129–143.
- Chow, S.-N., Li, C., y Wang, D. (1994). *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Chua, L. (1992). The genesis of Chua's circuit. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 46(4):250–257.
- Chua, L. O., Desoer, C. A., y Kuh, E. S. (1987). *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, New York.
- Collet, P. y Eckmann, J.-P. (1980). *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, vol. 1. Birkhäuser.
- Cox, D., Little, J., y O'Shea, D. (1992). *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergrad. Texts in Math. Springer.
- Doedel, E. J. (2007). *AUTO-07P: Continuation And Bifurcation Software For Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, Canada. <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>.
- Dulac, H. (1923). Sur les cycles limite. *Bull. Soc. Math France*, 51:45–188.
- Elwakil, A. S. y Kennedy, M. P. (2001). Construction of classes of circuit-independent chaotic oscillators using passive-only nonlinear devices. *IEEE Trans. on Circuits Syst. I*, 48:289–307.
- Fliess, M. (1990). Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Aut. Control*, 35(9):994–1001.
- Fortell, H. (1995). Algebraic approach to normal forms and zero dynamics. Reporte técnico, Dept. of Electrical Engineering, Linköping University.

- Gardner, F. M. (1979). *Phaselock Techniques*. Wiley-Interscience, New York.
- Gatermann, K. y Lauterbach, R. (1998). Automatic classification of normal forms. *Nonlinear Analysis*, 34:157–190.
- Genesio, R., Basso, M., y Tesi, A. (1995). Analysis and synthesis of limit cycle bifurcations in feedback systems. En *Proc. of the Conf. on Dec. & Cont.*, pp. 2904–2909, New Orleans.
- Giné, J. (2007). On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem. *Chaos, Solitons and Fractals*, 31(5):1118–1134.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York.
- Hahn, W. (1967). *Stability of Motion*, vol. 138 de *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York.
- Hartman, P. (1964). *Ordinary Differential Equations*. Wiley.
- Henry (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag.
- Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Amer. Math. Soc*, 8:437–479.
- Hisakado, T. y Okumura, K. (2001). Algebraic representation of bifurcations in global parameter space with Grobner bases. En *ISCAS 2001 - IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 3, pp. III-747 –III-750.
- Hopf, E. (1976). *A translation of Hopf's original paper by L.N. Howard and N. Kopell: Bifurcation of a periodic solution from a stationary solution of systems of differential equations*, pp. 163–205. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag, New York.
- Huseyin, K. (2002). On the methods of non-linear analysis of dynamical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37:1109–1119.

- Jirstrand, M. (1996). *Algebraic Methods for Modeling and Design in Control*. PhD thesis, Depart. of Elect. Engng., Linköping Univ., Sweden.
- Kang, W. (1998a). Bifurcation and normal form of nonlinear control systems, part i. *SIAM Journal On Control And Optimization*, 36(1):193–212.
- Kang, W. (1998b). Bifurcation and normal form of nonlinear control systems, part ii. *SIAM Journal On Control And Optimization*, 36(1):213–232.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, segunda edición.
- Khibnik, A. I. (1993). Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODE's and iterated maps. *Physica D*, 62:360–371.
- Kotsireas, I. S. y Karamanos, K. (2004). Exact computation of the bifurcation Point B4 of the logistic Map and the Bailey-broadhurst Conjectures. *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(7):2417–2423.
- Lanford, O. E. (1982). A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6:427–434.
- LaSalle, J. P. (1976). *The Stability of Dynamical Systems*, vol. 25 de *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.
- Li, C. (1983). Two problems of planar quadratic systems. *Sinica-Series A*, 26(5):471–481.
- Li, J. (2003). Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 13:47–106.
- Liénard, A. (1928). Etude des oscillations entretenues. *Revue Générale de l'Electricité*, 23:901–912.

- Lloyd, N. G. (1988). *Limit cycles of polynomial systems - Some recent developments*, vol. 127 de *New Directions in Dynamical Systems*, pp. 192–234. London Math. Soc. Lect. Note Series.
- Lloyd, N. G., Blows, T. R., y Kalenge, M. C. (1988). Some cubic systems with several limit cycles. *Nonlinearity*, 1:653–669.
- Lyapunov, A. M. (1892). *The General Problem of the Stability of Motion*. Kharkov Mathematical Society. Escrito en ruso.
- Lyapunov, A. M. (1907). *Problème Generale de la Stabilité du Mouvement*, pp. 203–474. Ann. de la Fac. des Sci. de Univ. de Toulouse. Namachchivaya and W. Kliemann. Traducción francesa.
- Lyapunov, A. M. (1992). *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor and Francis, Washington, DC.
- Mees, A. I. (1981). *Dynamics of Feedback Systems*. John Wiley & Sons, New York.
- Mees, A. I. y Chua, L. O. (1979). The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Trans. on Circ. Sys.*, 26:235–254.
- Moiola, J. L. y Chen, G. (1996). *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*. World Scientific Pub. Co., Singapore.
- Montes, A. (2002). A new algorithm for discussing Groebner bases with parameters. *J. Symbolic Computation*, 33:183–208.
- Namachchivaya, N., Doyle, M., Langford, W., y Evans, N. (1994). Normal forms for generalized Hopf bifurcation with non-semisimple 1:1 resonance. *Z angew Math Phys*, 45:312–335.
- Nayfeh, A. H. y Balachandran, B. (1990). Motion near a Hopf bifurcation of three-dimensional system. *Mechanics Research Communications*, 17(4):191.

- Orlicz, W. (1932). Zur theorie der differentialgleichung $y = f(x, y)$. *Bull. Int'l. de L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, A:221–228.
- Pai, M. A. (1981). *Power System Stability Analysis by Direct Method of Lyapunov*. North-Holland, Amsterdam.
- Pilishkin, V.Ñ. (2001). Phase-constraints variation method for synthesis of non-linear systems. En *IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 505–508, México.
- Planeaux, J. B. (1993). *Bifurcations Phenomena in CSTR Dynamics*. PhD thesis, University of Minesota.
- Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Math. Pures Appl*, 7:375–422.
- Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 1. Gauthier-Villars, Paris.
- Rand, R. H. (1989). Analytical approximation for period-doubling following a Hopf bifurcation. *Mechanics Research Communications*, 16(2):117–123.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems Analysis Stability and Control*. Springer, Berlin.
- Sibirskii, K. S. (1965). On the number of limit cycles in a neighborhood of singular points. *J. of Diff. Eqns.*, 1:36–47.
- Smale, S. (1998). Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer*, 20:7–15.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley, New York.
- Sydel, R. (1994). *From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Elsevier, Amsterdam.

- Torresi, A., Calandrini, G. L., Bonfli, P., y Moiola, J. L. (2012). Generalized Hopf bifurcation using a frequency domain formulation. *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*. (aceptado para publicar).
- Van der Pol, B. (1926). On relaxation oscillations. *Philosophical Magazine*, 2:978–992.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, segunda edición.
- Wang, H., Chen, D., y Bushnell, L. (1997). Control of bifurcations and chaos in heart rhythms. En *Proceedings of Control and Decisions Conference*, pp. 395–400, San Diego, CA.
- Weispfenning, V. (2006). Comprehensive Groebner bases and regular rings. *J. Symbolic Computation*, 41:285–296.
- Yagi, M., Hisakado, T., y Okumura, K. (2008). An algebraic approach to guarantee harmonic balance method using Groebner base. *IEICE Trans. Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci.*, E91-A:2442–2449.
- Yu, P. (1998). Computation of normal forms via a perturbation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 211(1):19–38.
- Yu, P. y Corless, R. (2009). Symbolic computation of limit cycles associated with Hilbert’s 16th problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(12):4041–4056.
- Yu, P. y Han, M. (2005). Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 15(7):2191–2205.
- Zoladek, H. (1995). Eleven small limit cycles in a cubic vector field. *Nonlinearity*, 8(5):843–860.