IV. INFLUENCIA DE FACTORES ECONÓMICOS Y SOCIALES

v. Heterogeneidad

v.1. Introducción.

A pesar del enorme desarrollo de la Teoría del Capital Humano y el Crecimiento Económico, una de las aproximaciones más estudiadas y utilizadas ha sido el modelo construido por Lucas (1988). En el afán de encontrar una construcción alternativa al esquema de crecimiento establecido por Solow (1956) y Swan (1956), Lucas (1988) introdujo el concepto de capital humano definido por Schultz (1961) y Becker (1964) en el contexto del modelo neoclásico. Así, en "*Sobre los mecanismos del desarrollo económico*" se da tratamiento analítico a las diferencias observadas en tasas de variación y niveles per cápita de producto entre las distintas economías del mundo, identificándose el crecimiento económico como sinónimo de desarrollo y las discrepancias entre países como consecuencia de las diferentes performances de acumulación, tanto de capital físico como humano.

Lucas (1988) consideró tres construcciones teóricas, a pesar que la inmensa mayoría de libros de texto hacen, en general, alusión sólo a una de ellas. La primera aproximación enfatizaba la acumulación del capital físico y el cambio tecnológico, y establecía un paralelismo con los hallazgos del modelo neoclásico. La segunda construcción acentuaba la relevancia de la acumulación de capital humano como resultado de la escolarización. Por último, un tercer modelo señalaba la importancia de la especialización internacional y la acumulación de capital humano a través de los procesos de *learning-by-doing*. Apoyándose en la Teoría del Capital Humano, el autor se focalizó en el hecho de que un individuo asigna su tiempo a diferentes actividades. La cantidad de tiempo que destine a capacitarse afectará su productividad futura a través del nivel de conocimientos alcanzado. Más aún, los conocimientos generados por toda la población determinarán la productividad total de la economía.

Hecho fundamental es la idea establecida por el autor de una producción de capital humano realizada bajo rendimientos no decrecientes. A partir de este supuesto puede concluirse que el producto, lejos de estancarse, continuará creciendo indefinidamente. La dinámica del modelo conducirá no ya a estados estacionarios, sino a sendas de crecimiento balanceado positivas. La inversión en capital humano es la fuente que explica la obtención de dichas tasas y una de las causas de las disparidades entre economías. Países con mayores montos destinados a educación o realizando inversiones de manera más eficiente obtendrán mejores resultados que países realizando menores inversiones o invirtiendo ineficientemente.

Sin embargo, en este capítulo se desea hacer hincapié en dos supuestos fundamentales sobre los que se basa aquel resultado: la homogeneidad de los individuos en cuanto a la acumulación de conocimientos y la existencia de rendimientos constantes. El punto crucial es que estos dos supuestos pueden estar describiendo un contexto muy diferente al observado en economías en desarrollo en general, y en Argentina, en particular.

Según los últimos informes de estadísticas educativas (UNESCO y OEI, 2010), en los países latinoamericanos, ocho de cada diez niños asisten a la escuela a los 5 años de edad (incluyendo nivel preescolar). Entre los 8 y 9 años se da el máximo nivel de escolarización, dos o tres años posteriores al inicio teórico obligatorio de la educación primaria en todo el continente. En tal caso, la asistencia escolar llega al 95 %. Pero la permanencia en el sistema de educación básica se manifiesta aún pasados los 14 años de edad, dando idea de las altas tasas de repitencia y extraedad escolar en la región. Asimismo, a partir de los 13 años comienza a incrementarse notoriamente el indicador de abandono escolar. Por supuesto, estos niños no finalizan el nivel secundario de educación. Entre los 17 y 18 años, edad teórica de culminación de la educación secundaria, en la región más de la mitad de los adolescentes ya no concurren a la escuela, y sólo el 32% de ellos ha finalizado el nivel secundario. A los 24 años se revierten las cifras iniciales: ocho de cada diez individuos se encuentran completamente desvinculados del sistema educativo.

El informe citado clasifica a Argentina, Chile y Perú como los tres países de mayores porcentajes de finalización de nivel primario y secundario. No obstante, menciona amplias diferencias en términos geográficos y entre sectores sociales. Las trayectorias educativas comienzan a diferenciarse a partir de los 14 años de edad, en donde Chile es el único caso que presenta altas tasas de ingreso y finalización en el nivel secundario, Perú presenta menores tasas de acceso pero altas tasas de finalización en relación al acceso, mientras que Argentina presenta los mayores problemas de abandono escolar y no terminalidad. En este país, en el año 2006, el 99% de los niños ingresaban al nivel primario, sin distinción de sector social de procedencia. Pero el acceso al nivel secundario se reduce al 77% en el caso de los sectores sociales más empobrecidos, mientras que la finalización es de tan sólo el 46%. El nivel superior es finalizado sólo por el 9% de la población perteneciente a este sector. También UNESCO (2005, 2007) y el Banco Mundial (2006) hacen referencia a las amplias desigualdades en los niveles educativos alcanzados por los diferentes sectores de la sociedad y en las dispares oportunidades de acceso a la educación.

Como se vio en el capítulo iv, los patrones distributivos definidos por la acumulación de capital humano en base a la escolarización y el *learning-by-doing* no señalan una distribución uniforme del mismo. Más aún, el mayor porcentaje de la población se encontraría por debajo de los niveles medios de capital humano, según la definición de los índices construidos oportunamente. Asimismo, los rendimientos de los diferentes niveles educativos muestran amplias disparidades entre aquellos individuos que alcanzan altos niveles de capacitación y aquellos que no logran superar cierto umbral, sugiriendo que los rendimientos sobre la inversión en educación podrían no ser constantes, tal como Lucas (1988) supuso. En el análisis de las primas educativas para el caso argentino, pudo arribarse a conclusiones similares.

Según Becker *et. al* (1990), la tasa de retorno del capital físico se asume como decreciente a medida que el nivel de capital de la economía crece. Pero la idea análoga para la acumulación de capital humano es más difícil de sustentar dado que el mismo se encuentra materializado en las personas. Los rendimientos crecientes en la acumulación de capital humano, *una vez alcanzado un nivel mínimo de conocimientos*, pueden justificarse por dos razones: a nivel micro, la acumulación de conocimientos más complejos se da cuando se realiza el bloque de conocimientos básicos; a nivel macro, hay un efecto positivo del *stock* de capital humano sobre la nueva inversión. Ambas cuestiones hacen que las tasas de retorno sean pequeñas cuando el acervo de capital humano es pequeño, y altas cuando el mismo es mayor.

Como se mostró en la revisión de esta tesis, la relación no lineal entre capital humano y crecimiento económico es uno de los tópicos más tratados en la actualidad, tanto por la literatura teórica como empírica. Aún sin considerar análisis de movilidad y cuestiones redistributivas, la preguntar que enmarca la elaboración de este capítulo es cuáles serían las consecuencias a nivel agregado en una economía con heterogeneidad en la distribución del capital humano y la no existencia de rendimientos constantes de la inversión en educación. Esto es, ¿qué sucedería en el marco del modelo de Lucas (1988) si coexistieran grupos de personas cuyos rendimientos sobre la inversión en conocimientos fueran decrecientes y grupos con rendimientos no decrecientes sobre la inversión en capital humano?

Para responder a tal interrogante, en el apartado v.2 se realiza una breve revisión del modelo de Lucas – Uzawa, presentando sus principales conclusiones a fin de realizar comparaciones con los resultados posteriormente hallados. En segundo lugar, se intentará determinar las consecuencias de suponer agentes heterogéneos y la existencia de disímiles rendimientos en un modelo *à la Lucas*. Para ello, se realizará el estudio de un caso particular, asumiendo que la población argentina sigue una distribución determinada en el espacio de capacidades y habilidades definido. Finalmente, se presentan las conclusiones del capítulo.

v.2. Modelo de Lucas (1988): revisión.

Como ya se ha mencionado en este trabajo, las conclusiones de crecimiento per cápita nulo y convergencia de la aproximación neoclásica fueron sumamente criticadas. El supuesto subyacente que conducía a estas consideraciones era la existencia de rendimientos marginales decrecientes sobre el único factor acumulable: el capital físico. Lucas (1988) salvó aquella cuestión introduciendo un segundo factor acumulable: el capital humano, entendido como escolarización o *learning-by-doing*, según el autor; y como un concepto mucho más amplio que permite la acumulación continua, según Romer (1989).

El modelo construido consta de dos sectores, dado que el proceso de producción y acumulación de capital humano difiere del proceso análogo para el capital físico. El primero requiere, relativamente, una mayor proporción de capital humano y del tiempo que los individuos destinen a su elaboración y apropiación.

Lucas (1988) consideró una economía cerrada con mercados competitivos y la existencia de pleno empleo, en donde los agentes decidirán en torno a sus niveles de consumo así como su asignación temporal entre trabajo y obtención de conocimientos.

Las familias se componen de un individuo representativo con vida infinita, y la utilidad de todos los agentes se describe mediante:

$$\text{(v.1)} \quad \underset{c_t}{Max}\, U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t)\, N\, dt \qquad \text{con} \quad u(c_t) = \frac{c_t^{\,1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

Donde *N* es el total de la población, $u(c_t)$ es una función de utilidad invariante en el tiempo que depende del consumo per cápita en cada momento *t* y que posee una elasticidad de sustitución intertemporal constante, siendo σ el coeficiente de aversión relativa al riesgo (o σ^{-1} la tasa de elasticidad de sustitución intertemporal), mientras que ρ es la tasa de descuento. Además, $\{\rho, \sigma\}$>0.

La producción del único bien existente se realiza mediante una tecnología tipo Cobb–Douglas, con rendimientos constantes a escala. Lo producido se destinará tanto a consumo como a la generación del nuevo capital. Los factores que intervienen en la producción en cualquier momento del tiempo *t* son: el capital físico K_t, la fuerza de trabajo *efectiva* N_t^e y el factor tecnológico *A* que se asume exógeno y constante[68]. Los factores presentan rendimientos marginales decrecientes en la producción.

$$\text{(v.2)} \quad N\,c_t + \dot{K}_t + \lambda_k K_t = F(A, K_t, N_t^e) = A(K_t)^{\beta}\left(N_t^e\right)^{1-\beta} \quad \text{con } F' > 0 \;\text{ y }\; F'' < 0$$

Siendo $0 < \beta < 1$ y $A \geq 1$ los parámetros asociados a la función de producción; $\dot{K}_t$ la tasa de variación del capital físico agregado y λ_k su tasa de depreciación. El mismo se acumula a partir de una proporción del ingreso, en donde se establece la igualdad del ahorro y la inversión. Dada la linealidad del ahorro y los rendimientos marginales decrecientes en la producción, la acumulación de capital físico también se realizará bajo rendimientos decrecientes.

Lucas (op. cit.) supuso la existencia de *N* trabajadores[69] cuyos niveles de habilidades h_t difieren y se encuentran ranqueados en un continuo tal que $h_t \in [0, \infty)$.

---

[68] Lucas (op. cit.), además, asumió la existencia de una externalidad del *stock* medio de conocimientos sobre el conjunto de la sociedad reflejando el hecho de que los individuos son más productivos si trabajan rodeados de personas mejor capacitadas. Por simplicidad, en este capítulo se suprime la existencia de efectos externos, dado que los mismos no son un requisito necesarios para la generación de tasas de crecimiento positivas.

[69] Se asume ausencia de crecimiento poblacional, por tal motivo *N* no dependerá del momento *t* que se esté analizando.

De esta forma, la fuerza laboral total de la economía podría expresarse como la integral de todos los trabajadores:

(v.3) $$N = \int_{h=0}^{\infty} N(h_t^i)\, dh_t^i$$

Y el *stock* medio de conocimientos como la integral de los trabajadores ponderados por su nivel de habilidades:

(v.4) $$H_t = \int_{h=0}^{\infty} h_t^i\, N(h_t^i)\, dh_t^i\,.$$

En cuanto a la fuerza de trabajo efectiva que participa en la producción, cada trabajador estará dotado de una unidad de tiempo, destinando una fracción $\mu(h_t^i)$ del mismo a la producción de bienes y la fracción restante $1-\mu(h_t^i)$ a la acumulación de conocimientos. Además, el trabajo efectivo estará en relación al nivel de conocimientos alcanzado por cada uno de los agentes. Así, la fuerza laboral efectiva total incluida en (v.2) será:

(v.5) $$N_t^e = \int_{h=0}^{\infty} \mu(h_t^i)\, h_t^i\, N(h_t^i)\, dh_t^i\,.$$

Lucas (op. cit.) simplifica su análisis en este punto asumiendo que todos los individuos son homogéneos, de manera que, invirtiendo la misma cantidad de tiempo en acumular conocimientos, poseerán un idéntico nivel de habilidades y los mismo rendimientos sobre la acumulación. Tomando en cuenta estas consideraciones, la ecuación (v.5) se reduce a

(v.6) $$N_t^e = \mu\, h_t N$$

Dado que el promedio de las habilidades coincide exactamente con h_t[70].

[70] Y esta, a su vez, coincide, en el planteo de Lucas (op. cit.), con el nivel de la externalidad asumida $$h_t = h_a = \frac{\int_{h=0}^{\infty} h_t\, N(h_t)\, dh_t}{\int_{h=0}^{\infty} N(h_t)\, dh_t}\,.$$

Por otra parte, la *forma* en que se produce la acumulación de conocimientos difiere respecto del capital físico. Como se mencionó anteriormente, la acumulación de capital humano se realiza de manera más intensiva en este factor y debe estar ligada a la fracción de tiempo que destinan las personas a actividades de capacitación y estudio. Lucas (1988) describe la forma general de la función de generación de capital humano como: $\dot{h} = h_t^{\zeta}\, G(1-\mu(h_t))$. Dependiendo de la magnitud del parámetro ζ, la función de acumulación mostrará rendimientos crecientes, constantes o decrecientes. Si ζ <1, entonces la acumulación de capital humano deja de ser un factor explicativo de tasas de crecimiento positivas y los resultados del modelo propuesto serían similares a los hallados por Solow (1956) y Swan (1956).

Nótese que el supuesto de mayor intensidad en el factor capital humano es extremo: el capital humano se produce únicamente con capital humano, lo que otorga a la función de acumulación la doble propiedad de rendimientos marginales y a escala constantes. Siguiendo a Uzawa (1965) y Rosen (1976), Lucas (1988) establece la linealidad de los rendimientos tomando $\zeta = 1$. Si la misma tecnología es aplicada a todos los individuos, los cuales son al mismo tiempo homogéneos en el nivel de conocimientos, puede suponerse la linealidad de los rendimientos en el contexto de modelos de un único individuo con vida infinita *á la Ramsey*. Además, el autor asume la linealidad en la función *G*, y considerando la tasa de depreciación para el capital humano, la función de acumulación puede expresarse como:

(v.7) $\dot{h} = \delta h_t\,(1-\mu(h_t)) - \lambda_h\, h_t$

En donde δ es un parámetro tecnológico que refleja la productividad de la inversión en educación. Este modelo predice que la mayor tasa de acumulación de conocimiento que puede obtenerse es δ y la menor es cero. Entre esos dos extremos, se obtendrá una tasa de crecimiento balanceado para la economía y ninguna otra fuente exógena será necesaria para explicar el desarrollo de los países.

A fin de completar el problema de optimización, deben considerarse dos restricciones adicionales: las condiciones iniciales y de transversalidad:

(v.8) $K_{t=0} = K_0\,;\;\; h_{t=0} = h_0$

(v.9) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_{t,K}\, K_t = 0\,;\quad \lim\limits_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_{t,h}\, h_t = 0$

$\theta_{t,K}$ y $\theta_{t,h}$ son los precios sombra asociados a las restricciones (v.2) y (v.7), respectivamente. Las condiciones de transversalidad implican que el valor de los activos existentes debe aproximarse a cero cuando el tiempo tiende a infinito. La intuición es que las familias maximizadoras y racionales no querrán tener ningún tipo de capital valioso más allá del horizonte de planificación. Si esto no fuera así, la utilidad podría incrementarse aumentando el consumo en cualquier momento finito del tiempo. Las condiciones iniciales reflejan el hecho que supone el comienzo de la vida económica en algún punto de referencia (Barro y Sala-i-Martin, 1995).

Por "sendero óptimo" y "sendero de equilibrio" Lucas (1988) define la elección de K_t, h_t, c_t y μ_t tal que maximice (v.1), sujeta a (v.2), (v.6), (v.7), (v.8) y (v.9)[71].

Suprimiendo los subíndices *t* por simplicidad y asemejando ambas tasas de depreciación, el Hamiltoniano del problema de maximización será:

(v.10) $$\Im = e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \theta_K\left\{AK^{\beta}(\mu h N)^{1-\beta} - cN - \lambda K\right\} + \theta_h\left\{\delta(1-\mu)h - \lambda h\right\}$$

En un breve repaso por las principales conclusiones de aquel trabajo, teniendo en consideración las condiciones de primer orden (CPO)[72], los senderos de expansión del consumo y del capital físico y humano per cápita pueden reescribirse como las tasas de variación proporcional tales que:

(v.11) $$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma^{-1}\left\{A\beta(k)^{\beta-1}(\mu h)^{1-\beta} - \lambda - \rho\right\}$$

(v.12) $$\frac{\dot{k}}{k} = A(k)^{\beta-1}(\mu h)^{1-\beta} - \frac{c}{K} - \lambda$$

(v.13) $$\frac{\dot{h}}{h} = \delta(1-\mu)$$

---

[71] Nuevamente, la consideración de la externalidad supuesta por el autor distingue el sendero óptimo del sendero de equilibrio. El primero asume la restricción adicional de $h_t = h_a$ y la internacionalización del efecto externo, mientras que el segundo toma el nivel de la externalidad como determinado exógenamente. Por supuesto, el sendero óptimo conducirá a tasas de crecimiento mayores que el sendero de equilibrio.

[72] Estas serán: $\Im_c = 0; \Im_\mu = 0; \Im_K = -\dot{\theta}_K$ y $\Im_h = -\dot{\theta}_h$, siendo $\Im_i$ la derivada de orden uno del Hamiltoniano respecto de la variable $i = \{c, \mu, K, h\}$

Siendo $\frac{\dot{c}}{c}$, $\frac{\dot{k}}{k}$ y $\frac{\dot{h}}{h}$ las tasas de variación proporcional del consumo, capital físico y capital humano per cápita, respectivamente. Las tasas relativas al consumo y al capital físico serán decrecientes respecto de aumentos en el capital físico y crecientes en relación a los incrementos producidos en los conocimientos, mientras que la tasa proporcional de incremento del capital humano es constante y no depende de *h* ni *k*.

Finalmente, la tasa óptima (y de equilibrio, en este caso) de crecimiento del capital humano, del consumo del capital y del producto per cápita, coincidirán exactamente bajo el supuesto de ausencia de externalidades:

(v.14) $$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y} = \gamma^* = \sigma^{-1}[\delta - \rho - \lambda]$$

La tasa de crecimiento se incrementa con la eficiencia en la acumulación de capital humano δ y disminuye con aumentos en la tasa de descuento ρ, mostrando una relación positiva entre la frugalidad y el desarrollo económico. El modelo predice crecimiento balanceado aún en ausencia de externalidades, siempre que $\delta > \rho - \lambda$. Esto es, la eficiencia con que se realiza la producción y acumulación de conocimientos debe ser, al menos, igual que la tasa neta de descuento social[73]. La estricta igualdad conduciría a resultados similares a los descriptos por el modelo neoclásico simple, con tasas de crecimiento per cápita nulas.

El supuesto de linealidad en la acumulación de capital humano conduce a tasas de crecimiento no nulas. Aunque aumentos en el capital físico produzcan caídas en su rendimiento, esto se verá compensado por la no disminución en el rendimiento del capital humano. Alcanzada la tasa de crecimiento óptima, el consumo de equilibrio $c_t{}^*$ se determina en cada momento del tiempo *t*, mientras que la elección de la fracción temporal dedicada a incrementar el acervo de conocimientos se define por $1-\mu^* = (\gamma^* + \lambda)/\delta$.

A continuación, tratará de establecerse si tales conclusiones se mantendrán ante la ausencia de homogeneidad en la distribución de los conocimientos y la diferencia en los rendimientos sobre la inversión en educación de los agentes.

---

[73] Una condición adicional que debe cumplirse para asegurar que la utilidad sea acotada es: $\rho > (1-\sigma)(\delta - \lambda)$

v.3. Presentación del modelo con agentes heterogéneos[74].

Siguiendo el esquema anteriormente descripto, se presenta en este acápite un modelo de economía cerrada, productora de un único bien el cual se consume y ahorra para la formación de nuevo capital físico. La utilidad de los agentes sigue representándose mediante (v.1) y la restricción (v.2) continúa siendo valedera. Sin embargo, la fuerza laboral total, introduciendo heterogeneidad, vuelve a representarse por (v.5) antes que por (v.6). La producción dependerá, una vez más, de la fuerza de trabajo efectiva, que vuelve ahora a ser simbolizada por la integral de todos los individuos ponderados por su nivel se conocimientos y el tiempo destinado a trabajar. Por lo tanto, h_t no representará ya el nivel promedio de conocimientos, sino que existirán diferentes niveles de capital humano h_t^i para cada familia típica *i*, donde $h_t^i \in [0,\infty)$, siendo ahora el nivel medio de conocimientos H_t representado mediante la ecuación (v.4).

Por otra parte, y como se señalara en la introducción de este acápite, se asumirá que la acumulación de conocimientos no se produce ya de forma lineal. De acuerdo a los planteos teóricos de Becker et al. (1990) y a los hallazgos producidos por Carlson (2002) y en la Sección III de esta tesis, los individuos ranqueados de 0 a un nivel de aprendizaje lo suficientemente bajo $\underline{h}$, acumularán conocimientos con rendimientos marginales decrecientes. A partir de dicho nivel, la acumulación se producirá bajo rendimientos no decrecientes. Por lo tanto, la acumulación promedio de capital humano en la economía se define mediante:

$$\text{(v.15)} \quad \dot{H} = \underline{\delta}[1-\mu(h_t^i)]\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h_t^i\, N(h_t^i)\, dh_t^i\right)^{\alpha} + \overline{\delta}\,[1-\mu(h_t^i)]\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h_t^i\, N(h_t^i)\, dh_t^i\right)^{\psi} - \lambda_H H$$

Siendo $0<\alpha<1$ y $\psi \geq 1$. La tasa de variación del capital humano dependerá de cómo se distribuyan los individuos dentro del intervalo de habilidades $[0;\infty)$, del umbral $\underline{h}$ a partir del cual el capital humano comienza a mostrar rendimientos no decrecientes, de los parámetros de productividad $\{\alpha,\psi\}$, de los factores de eficiencia $\underline{\delta}<\overline{\delta}$, del tiempo

---

[74] El desarrollo analítico de este apartado se encuentra en mayor detalle en el Apéndice 2, presentado al final del capítulo.

destinado a educación por los diferentes agentes $1-\mu(h_t^i)$, de la tasa promedio de depreciación del capital humano λ_H y de los niveles previos de conocimientos.

Por simplicidad se asumirá que todos los individuos destinan, en promedio, la misma cantidad de tiempo a trabajar y acumular conocimientos. Además, la tasa de depreciación promedio del capital humano se iguala a la tasa de depreciación del capital físico. Dadas estas modificaciones y eliminando sub y supraíndices para simplificar la escritura, las nuevas restricciones serán:

(v.16) $\dot{K} = AK^{\beta}\left(N^{e}\right)^{1-\beta} - cN - \lambda K$

(v.17) $\dot{H} = (1-\mu)\underline{\delta}\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N(h)\,dh\right)^{\alpha} + (1-\mu)\overline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{\psi} - \lambda H$

Donde la fuerza de trabajo efectiva incluida en (v.16) se representa por $N^{e} = \mu\int h\,N(h)\,dh = \mu H$, y $N(h)$ es la función de densidad de la distribución con $N = \int_{h=0}^{\infty} N(h)\,dh = 1$. Las condiciones iniciales no sólo implicarán niveles determinados para *K0* y h_0, sino también una función de distribución inicialmente establecida $N_0(h_0)$[75].

El *Hamiltoniano* que resume el problema de maximización de (v.1) sujeto a (v.16), (v.17), (v.8) y (v.9) será:

(v.18)
$$\begin{aligned}\Im = {} & e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \theta_K\left\{\left[AK^{\beta}\left(\mu\int_{h=0}^{\infty} hN(h)\,dh\right)^{1-\beta}\right] - c\int_{h=0}^{\infty} N(h)\,dh - \lambda K\right\} + \\ & + \theta_H\left\{(1-\mu)\underline{\delta}\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N(h)\,dh\right)^{\alpha} + (1-\mu)\overline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{\psi} - \lambda\left(\int_{h=0}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)\right\}\end{aligned}$$

[75] Es preciso notar que el supuesto de agentes de vida infinita no permite realizar análisis de movilidad intergeneracional. Este argumento, sin embargo, no representa problema alguno en el presente desarrollo ya que el objetivo primordial es analizar qué sucedería con el crecimiento de un país si la población se encontrara, al inicio del proceso de desarrollo, distribuída de una manera desigual, aunque tal distribución *no admitiera modificaciones a lo largo del tiempo*. En el capítulo siguiente se analizarán cuestiones de movilidad intergeneracional.

Como se observa en el apéndice 2, de las CPO respecto de *c* y *K*, se obtiene el sendero de expansión del consumo per cápita:

(v.19) $$\frac{\dot{c}}{c}=\sigma^{-1}\left\{A\beta(k^{e})^{\beta-1}-\lambda-\rho\right\}$$

Donde $k^{e}=\frac{K}{N^{e}}=\frac{K}{\mu H}$ es el capital por unidad de trabajo efectivo. Este resultado, en principio, es similar al obtenido por Lucas (1988). Las diferencias entre (v.19) y (v.11) son: 1) el capital se expresa en unidades de trabajo efectivo; 2) el mismo está formado por una distribución determinada de capital humano heterogéneo.

Un incremento en el capital por unidad de trabajo efectivo, manteniéndose el capital humano en niveles constantes, reduce la tasa de crecimiento del consumo per cápita a causa de los rendimientos decrecientes en la acumulación del capital físico. Esta conclusión se verifica al igual que en el modelo antes presentado y, en general, al igual que en todos los modelos de crecimiento que suponen este tipo de retornos. Obsérvese que ante incrementos en el promedio del capital humano acumulado o en la cantidad de horas trabajadas, manteniéndose *K* constante, el capital por unidad de trabajo efectivo tiende a caer y el consumo a acelerarse. Esto refleja la existencia de una relación negativa entre la acumulación de capital por unidad de trabajo efectivo y la acumulación de capital humano. Tomando la restricción (v.16), la tasa de variación proporcional del capital físico se haya dividiendo la expresión por *K*:

(v.20) $$\frac{\dot{K}}{K}=A\left(k^{e}\right)^{\beta-1}-\frac{c}{K}-\lambda$$

Y reexpresándola en unidades de trabajo efectivo:

(v.21) $$\frac{\dot{k}^{e}}{k^{e}}=A\left(k^{e}\right)^{\beta-1}-\frac{c}{K}-\left(\lambda+\frac{\dot{H}}{H}\right)$$

En la ecuación (v.21) puede verse más claramente lo anteriormente mencionado. Si bien la población no registra tasas de crecimiento positivas dado que se asumió ausencia de incremento poblacional, el capital humano sí crece, acrecentando la fuerza laboral efectiva y reduciendo el capital medido en tales términos.

Acudiendo al apéndice 2, puede verse que de las condiciones de primer orden respecto de μ y *h*, se define:

(v.22) $$\frac{\dot{H}}{H}=\left[(1-\mu)\Omega-\beta\frac{c}{K}-(\Phi-1)\lambda\right]\left[\beta-\Phi\frac{\mu}{1-\mu}\right]^{-1}-\lambda$$

Siendo

$$\Omega=\underline{\delta}\alpha\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N(h)\,dh\right)^{\alpha-1}\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} N(h)\,dh+\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N'(h)\,dh\right)+\overline{\delta}\psi\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{\psi-1}$$
$$\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} N(h)\,dh+\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N'(h)\,dh\right)$$

$$\Phi=1+\int_{0}^{\infty} h\,N'(h)\,dh$$

Por supuesto, esta es una expresión compleja y no permite la visualización de ciertas conclusiones. Sin embargo, puede asegurarse, primeramente, que la tasa de acumulación del capital humano promedio de la sociedad dependerá positivamente del tiempo destinado a educación, de la participación del capital humano en la función de producción, y del *stock* existente de capital físico, existiendo una complementariedad productiva entre ambos factores. Además, es de esperar que la tasa de acumulación se incremente ante aumentos en los parámetros de producción del capital humano α, ψ, $\underline{\delta}$ y $\overline{\delta}$, dado que todos ellos guardan una relación positiva con Ω. A su vez, un mayor nivel de consumo y una mayor tasa de depreciación, reducen la tasa de acrecentamiento del capital humano.

Por su parte, despejando todos los términos constantes de la ecuación (v.21), y aplicando la derivada del tiempo al logaritmo natural de la expresión, se observa que $\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{K}}{K}$ una vez más. La tasa de crecimiento del producto, por su parte, será proporcional a las tasas de crecimiento del capital físico y humano, y estas dos coincidirán sobre la senda de equilibrio. Aplicando logaritmo natural, diferenciando respecto de t la expresión $Y=AK^{\beta}\left(N^{e}\right)^{1-\beta}$ y llamando $\frac{\dot{Y}}{Y}$ a la tasa de variación proporcional del producto se obtiene: $\frac{\dot{Y}}{Y}=\beta\frac{\dot{K}}{K}-(1-\beta)\frac{\dot{H}}{H}$. Por lo tanto, nuevamente $\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{H}}{H}=\frac{\dot{K}}{K}=\frac{\dot{Y}}{Y}=\gamma^{**}$, siendo γ^{**} la nueva tasa de crecimiento definida.

En este contexto, las sendas $\frac{\dot{Y}}{Y}$, $\frac{\dot{H}}{H}$, $\frac{\dot{K}}{K}$ y $\frac{\dot{c}}{c}$ representarán senderos óptimos y de equilibrio, simultáneamente, tal que: (*i*) c_t^* y μ_t^* son las elecciones óptimas de los agentes en cada momento *t* en orden de maximizar su utilidad; (*ii*) la evolución dinámica hacia el equilibrio de la inversión en capital humano es gobernada por (v.22) y la condición inicial $N_0(h_0)$; (*iii*) la evolución dinámica hacia el equilibrio de la inversión en capital físico y del consumo son, respectivamente, dominadas por (v.20) y (v.19); (*iv*) la evolución dinámica del producto hacia la tasa de crecimiento óptima es igual a las tasas de variación del capital físico y humano, respectivamente, dada la ausencia de externalidades. La principal diferencia con Lucas (1988) se refleja en la ecuación (v.22), en donde se refleja el hecho de que la evolución del capital humano dependerá de la distribución inicial de habilidades y conocimientos y de los diferentes rendimientos que presente cada uno de los grupos de individuos. Por supuesto, esto alterará la composición de trabajo efectivo, modificando respecto de Lucas (1988) las tasas de crecimiento del capital físico, del consumo y del producto per cápita

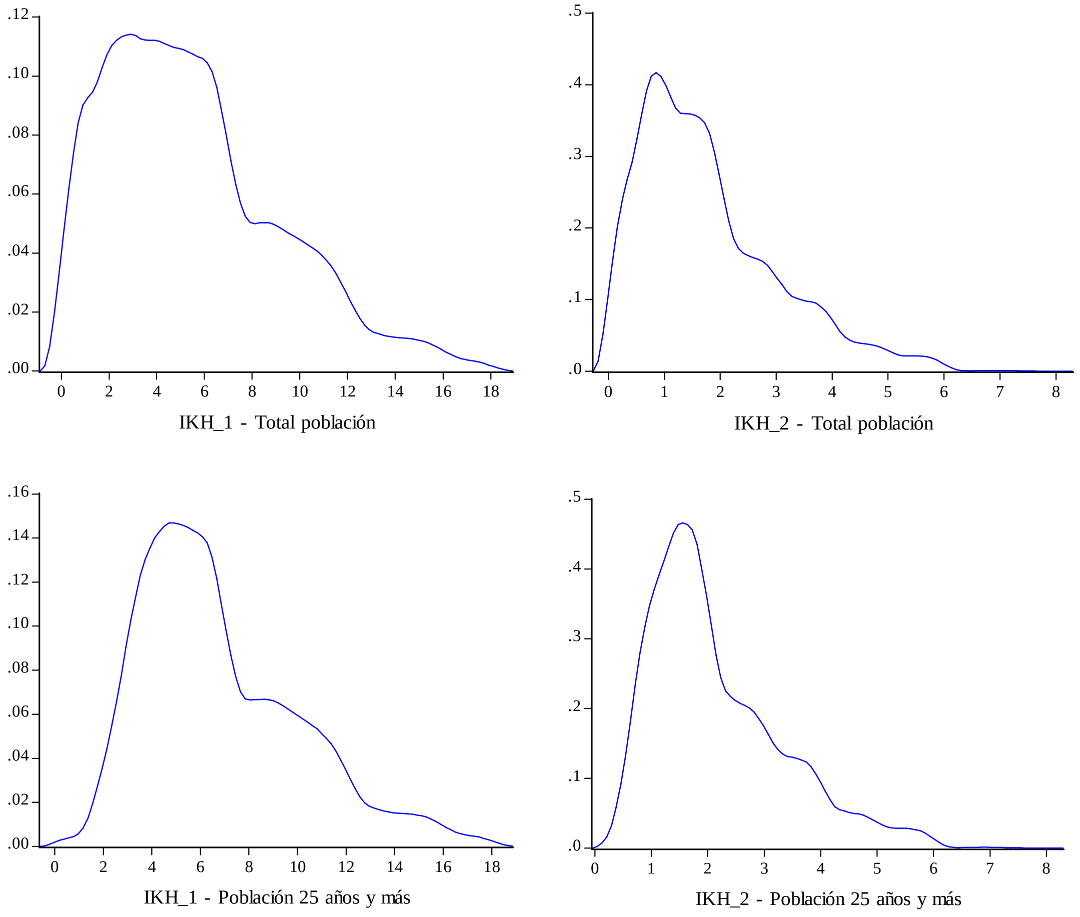
v.4. Un caso particular

v.4.1. La distribución del capital humano en Argentina

La distribución inicial de *h* no es una cuestión menor al analizar la trayectoria de la economía. Un amplio porcentaje de la población con bajos niveles de capital humano al inicio del proceso de desarrollo, estaría acumulando conocimientos bajo rendimientos marginales decrecientes, desacelerando el incremento del producto. Además, como se mencionó más arriba, en el caso de ciertas economías de medianos y bajos niveles de ingresos los individuos parecen mostrar una distribución sesgada a izquierda dentro del intervalo de calificaciones, con un mayor porcentaje de población concentrada en niveles relativamente bajos de capital humano.

De acuerdo a lo concluido en el capítulo anterior, Argentina parece no escapar a tal observación. Al analizar la distribución de la población de acuerdo al acervo de capital humano según los índices construidos oportunamente, pudo verse que la misma presenta cierto sesgo, concentrando mayores proporciones poblacionales hacia niveles relativos medios y bajos de conocimientos y habilidades.

Figura v.1. Gráficos de densidad de Kernel de la población Argentina según niveles de capital humano, distintos índices, año 2009.



Fuente: Elaboración propia en base a los indicadores de capital humano construidos en la Sección III del presente trabajo.

Para dar una idea gráfica de esto, se presentan las aproximaciones de las funciones de densidad de los indicadores IKH_1 e IKH_2 realizadas mediante el método Kernel[76]. Por simple observación, se establece que la distribución de la población en el espacio de habilidades no parece seguir una distribución normal o

[76] El método Kernel es un método no paramétrico de estimación mediante el cual puede aproximarse la función de densidad de una serie sin preestablecer relaciones funcionales y aproximando una serie discreta (cuyo histograma se representaría mediante "cajas" o "barras") a una función continua mediante métodos de suavización.

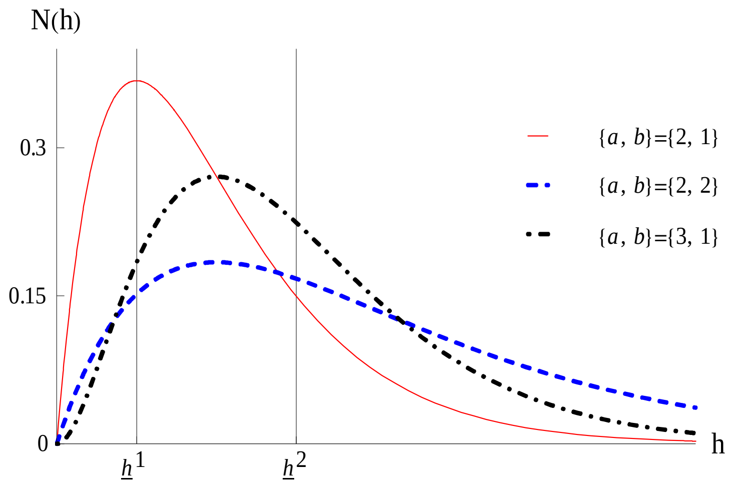
uniforme, sino más bien una distribución sesgada a derecha definida sólo para valores positivos. Una función de densidad que parecería cumplir con dichos requisitos es la *distribución gamma*, la cual presenta dos parámetros representativos (*a*, parámetro de curvatura, y *b*, parámetro de escala), y cuya función de densidad para valores $h \geq 0$ viene dada por: $N(h) = \dfrac{h^{a-1} e^{-h/b}}{b^a \Gamma(a)}$, con media $H = \int_0^\infty h\, N(h) dh = ab$ y varianza $\text{var}(h) = ab^2$. Aquí, $\Gamma(a)$ es la función gamma, una integral definida, tal que $\Gamma(a) = \int_0^\infty h^{a-1} e^{-h} dh$.

Se procedió, por lo tanto, a testear la hipótesis de una función de densidad de este tipo para los indicadores de capital humano construidos. Los *test* realizados[77] arrojaron resultados favorables, no existiendo en ningún caso evidencia a favor del rechazo de la hipótesis estadística nula H_0: $h \sim Gamma(a, b)$. Por lo tanto, para el análisis del caso argentino en base al modelo con agentes heterogéneos *à la Lucas*, se supondrá que *h* posee una distribución gamma. Es preciso notar que, cuanto más empinado sea el sesgo hacia izquierda de la función de densidad y cuanto mayor sea el umbral requerido para que la acumulación de capital humano comience a exhibir retornos no decrecientes, la tasa de acumulación de conocimientos y, por lo tanto, la tasa de crecimiento de la economía, serán menores.

Que la distribución posea una u otra forma (en la figura v.2. se representan algunas funciones de densidad posibles) dependerá de los parámetros establecidos para la distribución. Por supuesto, estos varían según sea el indicador de capital humano que se considere. En cualquier caso, podría decirse que tanto aquellos parámetros que determinan la forma de la densidad poblacional como el umbral $\underline{h}$ a partir del cual los rendimientos se revierten, se verán definidos a través de la *historia* de la economía.

[77] Los resultados de los test se exhiben en el Apéndice 3.

Figura v.2. Esquema de la distribución de los individuos en el espacio de habilidades $h \in [0, \infty)$ según una distribución gamma.



v.4.2. Aplicación del caso al modelo con agentes heterogéneos.

Se tomarán en cuenta los parámetros definidos según el indicador IKH_2, el cual ligaba niveles educativos y experiencia laboral como *proxy* del capital humano adquirido. En tal caso, la población argentina sigue una distribución $h \sim Gamma(2,1)$ en el espacio de habilidades definido. Introduciendo esta función particular en (v.22), la ecuación de transición del capital humano se reduce a:

(v.23) $$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{(1-u)}{\beta}\Omega - \frac{c}{K} - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\lambda$$

Con $\Omega = \underline{\delta}\left\{2 - e^{-\underline{h}}\left[2 + \underline{h}(2 + \underline{h})\right]\right\}^{\alpha} + \overline{\delta}\left\{e^{-\underline{h}}\left[2 + \underline{h}(2 + \underline{h})\right]\right\}^{\psi}$

Se asegura que Ω>0. Pero, además, $\Omega_{\overline{\delta}} > \Omega_{\underline{\delta}} > 0$, $\{\Omega_{\alpha}, \Omega_{\psi}\} > 0$ y $\Omega_{\underline{h}} < 0$. Aumentos en la productividad con la cual se acumulan los conocimientos, incrementarán Ω mientras que incrementos en el umbral de referencia disminuirán la acumulación de capital humano. Por su parte, la tasa proporcional de variación $\frac{\dot{H}}{H}$ responderá, en mayor medida, al parámetro de eficiencia del sector de mayor educación ante cambios proporcionales en la eficiencia con que acumula conocimientos el total de la sociedad. Además, la disminución en la tasa de crecimiento del capital humano ante aumentos en $\underline{h}$ será mayor cuanto más grande sea el parámetro de eficiencia de los sectores de alto capital humano.

Especialmente interesante es el análisis de la senda de crecimiento balanceado. Sabiendo que sobre la senda de crecimiento balanceado las tasas proporcionales deben coincidir exáctamente, se define el sendero de expansión como:

$$\text{(v.24)} \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{H}}{H} = \left[(1-\mu)\,\Omega - \rho\right]\sigma^{-1}$$

Si todos los agentes fueran iguales y los rendimientos constantes, tal que $\alpha = \psi = 1$ y $\underline{\delta} = \overline{\delta} = \delta$, entonces Ω sería exactamente δ, el parámetro de eficiencia de la acumulación de capital humano en el modelo original de Lucas (1988)[78].

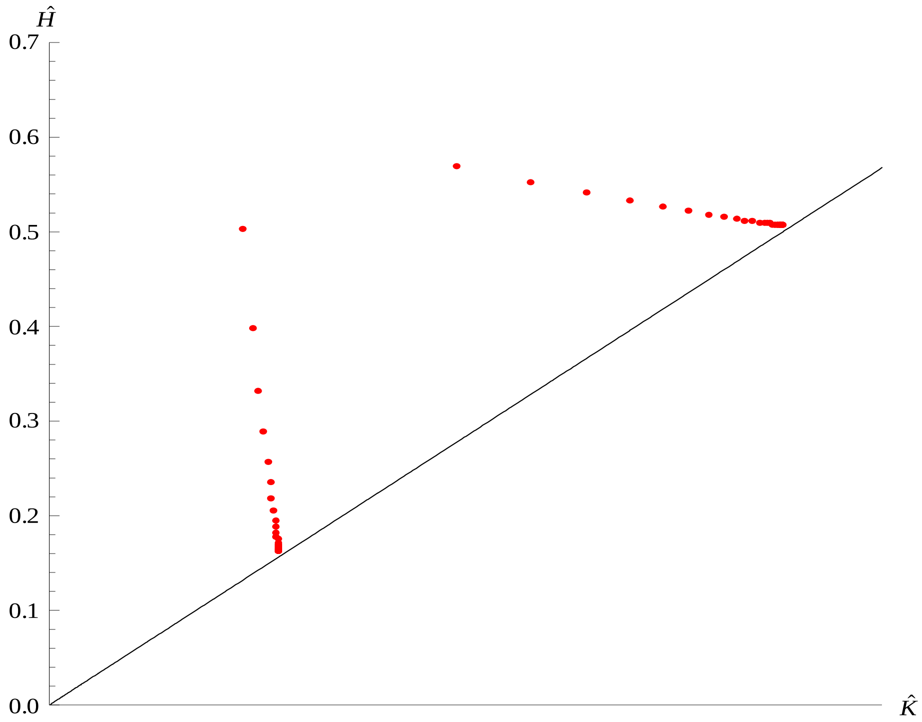
La existencia de una tasa de crecimiento balanceado positiva implica la presencia de una tasa de descuento intertemporal ρ suficientemente pequeña. Si $(1-\mu)\,\Omega = \rho$, la economía converge a un estado estacionario con tasas de crecimiento nulas. El resultado dependerá, como se ha venido describiendo hasta aquí, de la distribución inicial de los conocimientos, del valor de los parámetros $\delta, \alpha, \psi, \rho, \sigma$ y del valor umbral $\underline{h}$.

Para entender los alcances de la existencia de agentes heterogéneos dentro del modelo de Lucas-Uzawa, se procedió a graficar la dinámica asumiendo dos economías exactamente iguales cuya única diferencia deviene de la presencia o ausencia de heterogeneidad en la acumulación de capital humano. Se asumió que todos los agentes por debajo del umbral $\underline{h}$ acumularán conocimientos a ritmo decreciente siendo $\alpha = 0.5$, mientras que aquellos agentes por encima de $\underline{h}$ mostrarán rendimientos no decrecientes con $\psi = 1$. El umbral se preestableció en $\underline{h} = 3$. Los demás parámetros se calibraron en concordancia con la literatura habitual [79]

[78] El parámetro de depreciación del capital se anula a causa de la forma funcional supuesta para la distribución, misma razón por la cual aparece el término $(1-\mu)$ en la expresión (v.27).

[79] En tal sentido, ver Steger (2010), Grossman *et al.* (2010), o el mismo trabajo de Lucas (1988).

Figura v.3. Dinámica de transición hacia el equilibrio.



La línea $\hat{H} = \hat{K}$ establece todos los equilibrios posibles de sendas de crecimiento balanceado en ausencia de externalidades. Partiendo de un estado inicial exactamente igual para ambas economías, puede verse que los puntos que identifican ambas dinámicas difieren notablemente. Por supuesto, el sendero de mayor empinación corresponde a la situación de agentes heterogéneos, en donde el equilibrio final se condecirá con tasas de crecimiento menores que en la versión de Lucas (1988).

Por último, como se observó en el gráfico v.2, los valores de los parámetros a y b determinarán el sesgo de la función de distribución. Aquí se trabajó con parámetros prefijados y las conclusiones se establecieron *ceteribus paribus*, pero es interesante mencionar que incrementos en a acrecientan el valor de Ω y, por lo tanto, las tasas de acumulación del capital humano promedio de la economía. En particular, un incremento en a, inclina la distribución de los individuos hacia la derecha, produciendo una mayor concentración de la población hacia niveles iniciales de educación más elevados. De esta manera, un mayor número de personas acumulará conocimientos bajo rendimientos no decrecientes, estimulando el crecimiento de la economía en su conjunto.

El factor b es mayormente importante en la determinación de la varianza de la distribución. Un menor valor de b concentra la distribución hacia la media, mientras que un valor más alto de *b* tiende a incrementar la dispersión de los individuos alrededor del nivel medio de conocimientos. El efecto de este factor es, al parecer, ambiguo, y dependerá de la posición del nivel umbral.

v.5. Consideraciones finales.

Haciéndose hincapié en el contexto de los países latinoamericanos en general, y en Argentina en particular, este capítulo se focalizó en la importancia de las condiciones iniciales para explicar la trayectoria de crecimiento de un país. En el modelo presentado, si toda la población se encontrara a la izquierda del umbral $\underline{h}$, la incorporación de capital humano se realizaría bajo rendimientos decrecientes en su totalidad y, como mencionara Lucas (1988), sólo se complicaría analíticamente el modelo neoclásico, sin que se obtengan resultados cualitativamente distintos. Pero la realidad hace suponer que habrá individuos localizados, tanto a izquierda como a derecha del umbral de rendimientos. Dependiendo de cómo se encuentre distribuida la población al inicio del proceso, las tasas de crecimiento de la economía diferirán conduciendo a la economía a disímiles equilibrios.

Aunque en este marco analítico no es posible realizar observaciones de movilidad intergeneracional, tema que se abordará en el capítulo siguiente, es de esperar que a medida que un país se desarrolla una mayor proporción de población se encuentre sobre el umbral $\underline{h}$, propiciando un mejor desenvolvimiento económico. Sin embrago, este tampoco pareciera ser un parámetro en el mediano y largo plazo, dado que los niveles de escolarización y calificación para los cuales los rendimientos parecen mostrar importantes diferenciales se han incrementado a lo largo del tiempo, y de forma más acelerada en los últimos años.

En resumen, hasta aquí se trató de realizarse una aplicación de uno de los modelos más utilizados en la literatura del Crecimiento y Capital Humano al caso particular de Argentina, en donde la presencia de capital humano desigualmente distribuido y la no linealidad de los rendimientos parecen ser características básicas. La conclusión más relevante, en este sentido, parece ser la diferencia en resultados en cuanto a tasas de crecimiento que arrojaría el modelo de Lucas (1988) bajo tales consideraciones.

v.6. Referencias.

Banco Mundial (2006) "Informe sobre el desarrollo mundial 2006. Equidad y desarrollo". Ed. Banco Mundial.

Becker, G. (1967) *Human Capital*. New York, National Bureau of Economic Research.

Becker, G. S., Murphy, K. M., and Tamura, R.. (1990). "Human Capital, Fertility and Economic Growth**."** *Journal of Political Economy* Nº 98, 12–37.

Berti Ceroni, C. (2001) **"**Poverty Traps and Human Capital Accumulation**."** *Economica*, New Series, Vol. 68, No. 270, 203-219.

Carlson, B. (2002). "Educación y Mercado de Trabajo en América Latina." *CEPAL* nº 77.

Chiu, W. H. (1998). "Income Inequality, Human Capital Accumulation and Economic Performance." *The Economic Journal*, Vol. 108, No. 446, 44-59.

Grossman, V., Steger, T.M., Trimborn, T. (2010), "Dynamically Optimal R&D Subsidization", *CESifo Working Paper*, Nº 3153.

London, S. y Rojas, M. (2009), "Economics growth, heterogeneous human capital and poverty traps", *II International Meeting Welfare, Growth and Tramps of Poverty*. Universidad Autónoma de San Luís Potosí, México.

Lucas, R. (1988). "On the Mechanics of Development Planning." *Journal of Monetary Economics* Nº 22/ 1, 3-42.

Romer, P.M. (1989), "Human Capital and Growht: Theory and Evidence", *NBER Working Paper Series*, Nº 3173, Cambridge.

Rojas, M. (2008), "Crecimiento económico y capital humano heterogéneo", *Anales de las IX Jornadas Latinoamericanas de Teoría Económica* (IX JOLATE). San Luis. http://www.jolate.unsl.edu.ar/2008/Trabajos/RojasMaraBahiaBlanca.pdf

Schultz, T. W. (1961) "Investment in Human Capital," *The American Economic Review*, Vol. Mes de Marzo.

Solow, R. M. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics*, Nº 32, 65-94.

Steger, T.M., (2010), “Quantitative Dynamic Macroeconomics”, Lecture Notes, University of Leipzig.

Swan, T.W., (1956), "Economic Growth and Capital Accumulation," *Economic Record*, Nº 66, pp. 334-61.

UNESCO (2007) “Educational Equity and Public Policy: Comparing results from 16 countries” (Sherman J. y Poirier J.)

UNESCO (2005) “Educations Trends in Perspective. Analysis of the World Education Indicators”.

UNESCO y OEI, (2010), “Metas educativas 2021: desafíos y oportunidades. Informe sobre tendencias sociales y educativas en América Latina 2010”, Proyecto Sistema de Información de Tendencias Educativas en América Latina (SITEAL), Buenos Aires.

Uzawa, H. (1965) “Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth.” *International Economic Review* Nº 6, 18 – 31.