Apéndice 2.

El Hamiltoniano relacionado al problema de agentes heterogéneos se define como:

$$\begin{aligned}\Im = e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \theta_K\left\{\left[AK^{\beta}\left(\mu\int_{h=0}^{\infty} hN(h)\,dh\right)^{1-\beta}\right] - c\int_{h=0}^{\infty} N(h)\,dh - \lambda K\right\} + \\ + \theta_H\left\{(1-\mu)\left[\underline{\delta}\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N(h)\,dh\right)^{\alpha} + \overline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{\psi}\right] - \lambda\left(\int_{h=0}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)\right\}\end{aligned} \tag{A2.1}$$

Las condiciones de primer orden, de acuerdo a las variables definidas oportunamente en el cuerpo del trabajo, vendrán dadas por:

CPO 1: $\Im_c = 0$ (A2.2)

CPO2: $\Im_K = -\dot{\theta}_K$ (A2.3)

CPO 3: $\Im_\mu = 0$ (A2.4)

CPO 4: $\Im_h = -\dot{\theta}_H$ (A2.5)

Donde $\Im_i$ representa la derivada de primer orden respecto de $i = \{c, K, \mu, h\}$, y $\dot{\theta}_j$ la tasa de variación del precio sombra de la restricción $j = \{K, H\}$

Considerando la condición (A2.2):

$$\Im_c = e^{-\rho t}c^{-\sigma} - \theta_K = 0$$

Aplicando logaritmo natural y diferenciando respecto del tiempo:

$$\rho + \sigma\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\theta}_K}{\theta_K} \tag{A2.6}$$

De (A2.3), y recordando que $\left(\mu\int_{h=0}^{\infty} hN(h)\,dh\right) = N^e$:

$$\Im_K = \theta_K\left[\beta AK^{\beta-1}\left(N^e\right)^{1-\beta} - \lambda\right] \quad = -\dot{\theta}_K$$

$$\beta AK^{\beta-1}\left(N^e\right)^{1-\beta} - \lambda = \frac{-\dot{\theta}_K}{\theta_K} \tag{A2.7}$$

Reemplazando (A2.6) en (A2.7), y llamando k^e a $\frac{K}{N^e}$, se obtiene la senda de crecimiento del consumo per cápita, que es la ecuación (v.21) escrita anteriormente:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \left(\beta A (k^e)^{\beta-1} - \lambda - \rho\right)\sigma^{-1} \tag{A2.8}$$

La ecuación (v.22) se obtiene, simplemente, dividiendo (v.18) por *K*. Para hallar (v.23), tomando logaritmo natural y derivando respecto del tiempo la expresión del capital por unidad de trabajo efectivo:

$$\dot{k}^e = \frac{d\left[\ln\left(\frac{K}{N^e}\right)\right]}{dt} = \frac{\dot{K}\,N^e - \dot{N}^e\,K}{\left(N^e\right)^2}$$

$$\dot{k}^e = \frac{\dot{K}}{N^e} - \frac{\dot{N}^e}{N^e}\frac{K}{N^e} \tag{A2.9}$$

Ahora, dividiendo (v.18) por N^e:

$$\frac{\dot{K}}{N^e} = A\left(k^e\right)^{\beta} - \frac{cN}{N^e} - \lambda\frac{K}{N^e}$$

Reemplazando (A2.9):

$$\dot{k}^e = A\left(k^e\right)^{\beta} - \frac{cN}{N^e} - \lambda\frac{K}{N^e} - \frac{\dot{N}^e}{N^e}\frac{K}{N^e}$$

Recordando que, en el estado estacionario, $\frac{\dot{N}^e}{N^e} = \frac{\dot{H}}{H}$ y dividiendo por k^e:

$$\frac{\dot{k}^e}{k^e} = A\left(k^e\right)^{\beta-1} - \frac{c}{K} - \left(\lambda + \frac{\dot{H}}{H}\right) \tag{A2.10}$$

Que es exactamente (v.23).

Ahora, considerando la condición de primer orden respecto de μ:

$$\Im_{\mu} = \theta_K\left(1-\beta\right)AK^{\beta}\left(\mu\int_{h=0}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{-\beta}\int_{h=0}^{\infty} h\,N(h)\,dh +$$
$$-\,\theta_H\left\{\underline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\;N(h)\,dh\right)^{\alpha} + \overline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty}\delta\,h^{\psi}\;N(h)\,dh\right)^{\psi}\right\} = 0$$

$$\theta_K \left\{A(1-\beta)\left(k^e\right)^\beta H\right\} - \theta_H \left\{\underline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\ N(h)\,dh\right)^\alpha + \overline{\delta}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} \delta\, h^\psi\ N(h)\,dh\right)^\psi\right\} = 0$$

Dividiendo la expresión anterior por θ_h y haciendo uso de la restricción (v.19):

$$\frac{\theta_K}{\theta_H}\left\{A(1-\beta)\left(k^e\right)^\beta H\right\} = (\dot{H} + H\lambda)\frac{1}{1-\mu}$$

$$\frac{\theta_K}{\theta_H} = \left(\frac{\dot{H}}{H} + \lambda\right)\left\{(1-\mu)A(1-\beta)\left(k^e\right)^\beta\right\}^{-1} \tag{A2.11}$$

En el estado estacionario, las tasas de crecimiento balanceado serán constantes. Despejando los parámetros y las relaciones constantes de la ecuación anterior, y tomando logaritmos y diferenciando, una vez más, respecto del tiempo:

$$\frac{\dot{\theta}_K}{\theta_K} - \frac{\dot{\theta}_H}{\theta_H} = -\beta\,\frac{\dot{k}^e}{k^e} = -\beta\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H}\right) \tag{A2.12}$$

Ahora, tomando la condición de primer orden respecto de *h*:

$$\begin{aligned}
\Im_h = {} & \theta_K \left\{A(1-\beta)K^\beta\left(\mu\int_{h=0}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{-\beta}\int_{h=0}^{\infty}\left[\mu\,N(h) + \mu\,h\,N'(h)\right]dh\right\} + \\
& + \theta_H \left\{(1-\mu)\,\underline{\delta}\,\alpha\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N(h)\,dh\right)^{\alpha-1}\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} N(h)\,dh + \int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N'(h)\,dh\right) + \right. \\
& \left. + (1-\mu)\,\overline{\delta}\,\psi\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{\psi-1}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} N(h)\,dh + \int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N'(h)\,dh\right) - \lambda\int_{h=0}^{\infty}\left[N(h) + h\,N'(h)\right]dh\right\}
\end{aligned}$$

$$\Im_h = \theta_K\left\{A(1-\beta)\left(k^e\right)^\beta \mu\,\Phi\right\} + \theta_H\left\{(1-\mu)\ \Omega - \lambda\,\Phi\right\} = -\dot{\theta}_H$$

Llamando $\{\Omega, \Phi\}$ a:

$$\Omega = \underline{\delta}\,\alpha\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N(h)\,dh\right)^{\alpha-1}\left(\int_{h=0}^{\underline{h}} N(h)\,dh + \int_{h=0}^{\underline{h}} h\,N'(h)\,dh\right) + \\ +\overline{\delta}\,\psi\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N(h)\,dh\right)^{\psi-1}\left(\int_{h=\underline{h}}^{\infty} N(h)\,dh + \int_{h=\underline{h}}^{\infty} h\,N'(h)\,dh\right) \tag{A2.13}$$

$$\Phi = \left[1 + \int_{h=0}^{\infty} h\,N'(h)dh\right] \tag{A2.14}$$

Dividiendo ambos miembros por θ_H y reemplazando θ_K de (A2.11), despejando términos, se obtiene:

$$\frac{\dot{H}}{H}\Phi\frac{\mu}{1-\mu} - \lambda\Phi\left(1-\frac{\mu}{1-\mu}\right) + (1-\mu)\Omega = -\frac{\dot{\theta}_H}{\theta_H} \tag{A2.15}$$

Introduciendo (A2.6), (A2.8) y (A2.15) en (A2.12):

$$\frac{\dot{H}}{H} = \left[(1-\mu)\Omega - \beta\frac{c}{K} - (\Phi-1)\lambda\right]\left[\beta - \Phi\frac{\mu}{1-\mu}\right]^{-1} - \lambda \tag{A2.16}$$

Caso particular: Distribución Gamma.

Suponiendo que $h \sim Gamma(a,b) = Gamma(2,1)$, la función de densidad se define como $N(h) = \frac{h^{a-1}e^{-h/b}}{b^a\Gamma(a)} = e^{-1}h$. Puede demostrarse luego, integrando sobre el espacio de habilidades, en primer lugar, y derivando según la CPO 4, que (A2.13) y (A2.14) adoptan la forma:

$$\Omega = \underline{\delta}\left\{2 - e^{-\underline{h}}\left[2+\underline{h}(2+\underline{h})\right]\right\}^{\alpha} + \overline{\delta}\left\{e^{-\underline{h}}\left[2+\underline{h}(2+\underline{h})\right]\right\}^{\psi} \tag{A2.17}$$

$$\Phi = 1 + \int_0^{\infty} h\,N'(h)\,dh = 0 \tag{A2.18}$$

Y la ecuación de transición del capital humano se define según (A2.16) como:

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{(1-u)}{\beta}\Omega - \frac{c}{K} - \left(1-\frac{1}{\beta}\right)\lambda \tag{A2.19}$$

Para el análisis de la senda de crecimiento balanceado, y siendo que sobre dicha senda las tasas de acumulación deben cumplir $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{H}}{H}$, se vuelve sobre la ecuación (A2.12). Reemplazando se obtiene:

$$\frac{\dot{\theta}_K}{\theta_K} - \frac{\dot{\theta}_H}{\theta_H} = -\beta\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H}\right)$$

$$[(-\beta)A(k^e)^{\beta-1} + \lambda] + (1-\mu)\Omega = 0$$

$$-\frac{\dot{c}}{c}\sigma - \rho + (1-\mu)\Omega = 0$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{H}}{H} = [(1-\mu)\Omega - \rho]\sigma^{-1} \qquad \text{(A2.20)}$$